



HAL
open science

Nappes de tourbillon-courant en magnétohydrodynamique

Olivier Pierre

► **To cite this version:**

Olivier Pierre. Nappes de tourbillon-courant en magnétohydrodynamique. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Nantes, Faculté des sciences et des techniques., 2017. Français. NNT: . tel-01560144

HAL Id: tel-01560144

<https://hal.science/tel-01560144v1>

Submitted on 11 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

Thèse de Doctorat

Olivier PIERRE

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information et mathématiques

Discipline : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques, section CNU 26

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Soutenue le 10 juillet 2017

**Nappes de tourbillon-courant
en magnétohydrodynamique**

JURY

Président : **M. Franck SUEUR**, Professeur des universités, Université de Bordeaux
Rapporteur : **M. David GÉRARD-VARET**, Professeur des universités, Université Paris 7
Examineurs : **M^{me} Isabelle GALLAGHER**, Professeur des universités, Université Paris 7
M. Benoît GRÉBERT, Professeur des universités, Université de Nantes
M. Frédéric ROUSSET, Professeur des universités, Université Paris-Sud
Directeur de thèse : **M. Jean-François COULOMBEL**, Directeur de recherche, CNRS et Université de Toulouse III

Rapporteur : **M. John K. HUNTER**, Professeur des universités, University of California at Davis

Table des matières

Remerciements	7
Notations	11
Matrices et vecteurs	11
Opérateurs différentiels	11
Espaces fonctionnels usuels	12
1 Introduction	13
1.1 Une problématique issue des Sciences Physiques	13
1.2 Les nappes de tourbillon-courant dans un contexte mathématique	16
1.2.1 Rappels sur les problèmes aux limites hyperboliques linéaires à coefficients constants.	18
1.2.2 Un bref historique sur le problème des nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible.	20
1.3 Organisation de la thèse	23
I Solutions analytiques au problème des nappes de tourbillon-courant en magnétohydrodynamique idéale incompressible	31
2 Espaces fonctionnels	33
2.1 Rappels de quelques éléments de combinatoire	33
2.1.1 Formule du multinôme	34
2.1.2 Formule de Vandermonde, généralisation	34
2.1.3 Formule de Leibniz	35
2.2 Espaces de Sobolev	35
2.2.1 Définitions	36
2.2.2 Injections de Sobolev	38
2.2.3 Propriétés	39
2.3 Échelles d'espaces de Banach	40
2.3.1 Échelle d'espaces de Banach sur le domaine $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$	40
2.3.2 Généralisation	48

3	Solutions analytiques en domaine fixe	51
3.1	Problème de Laplace et estimations dans les échelles de Banach	52
3.1.1	Régularité elliptique pour des problèmes de Laplace	52
3.1.2	Estimations de la solution d'un problème de Laplace dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$	53
3.2	Application d'un théorème de Cauchy-Kowalevskaya	57
3.2.1	Les équations de la MHD idéale incompressible	57
3.2.2	Application du théorème de Cauchy-Kowalevskaya	58
4	Nappes de tourbillon-courant incompressibles analytiques	65
4.1	Position du problème	66
4.2	Reformulation du problème	67
4.2.1	Redressement du front f	67
4.2.2	Une nouvelle formulation du problème	70
4.3	Proposition d'un schéma de résolution	72
4.4	Redressement analytique	75
4.4.1	Estimation analytique du redressement ψ	75
4.4.2	Estimation analytique de l'inverse du jacobien J	79
4.5	Estimation analytique de la pression	81
4.5.1	Estimation des dérivées tangentielles	83
4.5.2	Estimation des dérivées normales	91
4.6	Vers l'existence de nappes de tourbillon-courant analytiques	96
4.6.1	Estimation "lipschitzienne" de la pression	96
4.6.2	Quelques pistes pour un futur travail de recherche	99
II Développements d'optique géométrique pour le problème des nappes de tourbillon-courant incompressibles		105
5	Ondes de surface pour les nappes de tourbillon-courant	107
5.1	Choix des paramètres et des conditions initiales	109
5.2	Résultats principaux	113
5.2.1	Le cadre fonctionnel	113
5.2.2	La cascade BKW	115
5.3	Analyse de stabilité	117
5.3.1	Rappels sur le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant	117
5.3.2	Déterminant de Lopatinskiï et vitesse de groupe	121
5.4	Cascade BKW : détermination du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$	123
5.4.1	Résolution du problème homogène satisfait par le profil $(U^{1,\pm}, \psi^2)$	125
5.4.2	Calcul de la moyenne du profil $U^{1,\pm}$	127
5.4.3	Équation de Hamilton-Jacobi satisfaite par le profil ψ^2	138

5.4.4	Achèvement du traitement du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$	149
5.5	Détermination des correcteurs	150
5.5.1	Les équations de la cascade BKW à l'intérieur du domaine	150
5.5.2	Les équations de la cascade BKW associées aux conditions de saut	153
5.5.3	Les conditions sur les bords fixes Γ_{\pm}	154
5.5.4	Contraintes sur la normalisation de la pression	157
5.5.5	Résolution du problème "rapide" inhomogène	162
5.5.6	Détermination des correcteurs	171
5.5.7	Phénomène de rectification	186
5.6	Solutions approchées	190
5.6.1	Épaississement du domaine de définition des profils	190
5.6.2	Estimations de fonctions "fortement oscillantes"	191
5.6.3	Les équations approchées à l'intérieur du domaine	192
5.6.4	Les équations approchées près de la frontière libre	193
5.6.5	Les équations approchées sur les bords fixes Γ_{\pm}	194
5.6.6	Le système approché des nappes de tourbillon-courant	195
6	Conclusion et perspectives	197
A	Détails algébriques et calculs	201
A.1	Matrices et noyaux	201
A.2	Quelques produits hermitiens	205
A.3	Calcul des différentielles secondes	205
A.4	Compatibilité des termes sources dans la cascade BKW	208
	Bibliographie	222

Remerciements

Cette thèse ne saurait débiter sans les traditionnels remerciements (seul passage dont je puis être à peu près sûr qu'il sera lu par tous, ou tout du moins par une bonne partie de l'auditoire en ce 10 juillet 2017...).

Sans nul doute, mes premiers remerciements se tournent vers Jean-François, qui a su me proposer un sujet très attractif lors de mon Master 2. Comment ne pas être tenté, en effet, par un nom aussi sexy que “nappes de tourbillon-courant en magnétohydrodynamique incompressible” ?! Le stage qui s'en est suivi m'a tout de suite plu, le sujet étant particulièrement intéressant du point de vue mathématique, puis j'ai eu la chance que Jean-François ait finalement pu superviser ma thèse. J'ai beaucoup appris durant ces trois années de thèse, et tout le travail réalisé avec Jean-François était exactement la façon dont j'avais envie de “faire des maths”. Encore merci pour cette belle expérience dans la recherche mathématique.

Je remercie chaleureusement David GÉRARD-VARET et John K. HUNTER d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse et d'avoir su braver la quantité non négligeable de calculs (parfois conséquents) tout au long du manuscrit. Un grand merci également à Frédéric ROUSSET et Franck SUEUR pour les quelques échanges mathématiques qu'on a pu avoir lors des comités de suivi de thèse. Enfin, je remercie Isabelle GALLAGHER et Benoît GRÉBERT d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

La réussite de cette thèse doit également beaucoup au laboratoire de mathématiques Jean Leray et son ambiance de travail plus qu'agréable. Un grand merci aux secrétaires Stéphanie, Anaïs, Katrin, Annick, Ana Paula, Dominique et Brigitte, qu'on peut considérer un peu comme la “maman” des doctorants ; je pense que sans vous, la galère administrative serait à la limite de l'ingérable... Je parlais à l'instant d'ambiance de travail, mais on peut aussi enlever le complément “de travail”, les doctorants sauront de quoi je parle. Je ne pense pas qu'on puisse faire mieux comme ambiance générale, cette bonne entente a énormément contribué à la finalisation de cette thèse. Voici le moment tant attendu des doctorants : les petites anecdotes personnalisées. Pour n'oublier personne, je vais procéder bureau par bureau, c'est sans doute plus simple comme cela.

Merci à Ilaria pour ton accueil au sein du laboratoire, ces papotages plus ou moins sensés et ces petits airs fredonnés lorsqu'une pause s'imposait... Merci de m'avoir appris à fabriquer des cônes d'angle supérieur à 2π (!) Tu as été une très belle rencontre et je ne doute pas que tu feras une excellente maîtresse de conférences. Merci à Victoria pour ta gentillesse et ce calme que tu apportais au sein du bureau. Merci à Caro pour ces bonnes parties de rigolades, énigmes résolues, bières et bonbons partagés. Là encore j'ai hérité d'une co-bureau qui adore les cônes, mais qui s'amuse à les recouvrir par des boules : la géométrie me laissera toujours perplexe ☺ Merci à Caro (*bis repetita*) pour ces discussions parfois (souvent ?) louches alors que tu étais plongée dans un travail fou furieux d'estimation de paramètres... .

Passons au bureau d'à côté : merci Victor pour ton amitié et ta joie de vivre (trop ?) débordante et toutes ces conf' partagées. J'avoue que les petites citations du jour vont me manquer. Dans tous les cas, que la force de Chuck Norris t'accompagne à Bilbao ! Merci à Thomas pour tes bisous quotidiens qui égayaient mes matinées et pour m'avoir fait découvrir des jeux fort sympathiques pas piqués des hannetons (le cadre ne s'y prête pas vraiment, mais je ne pouvais pas passer à côté de ton expression favorite). Merci à Thomas (*bis repetita*) pour m'avoir fait goûter des mets “vegan”. Je vais tout de même rester sur mes basiques, parce que la crème, le beurre, le fromage... c'est la vie!!! Merci à Johan, notre

Angevin infiltré au LMJL, pour ton invitation aux Rencontres Doctorales Lebesgue, mais surtout pour ce bon moment au resto (et pas qu'à Angers d'ailleurs!).

Merci à Noémie pour ces jolies ♪vocalises♪ et petites marches aérées le long de l'Erdre. Au fait, tu me dois toujours un apéro pour l'araignée que je suis aimablement venu dégommer en ce soir de septembre... Merci à Thomas (*bis repetita repetita*) pour les soirées raclettes et lasagnes, mais surtout pour tes anecdotes toujours plus bizarres les unes que les autres (dont une particulièrement mémorable à propos de cosmétiques...). Merci à Zeinab de m'avoir plusieurs fois rappelé le séminaire d'équipe. Merci à Niccolò pour cette bonne soirée (nuit?) au hangar à bananes. Merci à Totoph' pour tes fous-rires qu'on entendait de l'autre bout du couloir et ton humour décapant. Merci à Zoé ("Mme Philippe") pour ton amitié et tous ces excellents moments qui ont animé comme jamais ma seconde année de thèse. Je retiendrai (entre autres) les soirées "Gin Tonic" passées chez toi (et ailleurs...); merci à Simon, "M'sieur Covez", pour à peu près les mêmes raisons, tu peux remplacer "Gin Tonic" par bière ☺.

Merci à Guiroux pour tes ♪vocalises♪ (oui oui, toi aussi, voire encore plus aiguës que Noémie!) et d'avoir contribué à diversifier mes pauses grâce à certains petits jeux fort sympathiques. Je salue surtout ta maîtrise d'Inkscape[®], le public pourra s'en rendre compte au 20^e transparent/diapo/slide/frame (si entre temps la numérotation n'aura pas été modifiée!). Merci à Vytauté pour ces quelques verres partagés au Sur Mesure.

Merci à Victor (*bis repetita*, décidément les prénoms ne sont pas très originaux dans ce labo!) pour ton aide informatique, cette excellente semaine à Aachen, mais surtout (oui, c'est très important) de m'avoir fait découvrir une toute autre façon de manger une raclette : le mille-feuilles fromage-charcuterie. Merci à Florian pour ta bonne humeur constante (hum... ☺), et également pour cette semaine folle à Aachen et les petites pauses café de 10h. Merci à Moody d'avoir su veiller tard sur le laboratoire, et grâce à toi j'ai de quoi illustrer un de mes transparents (bon ok, Victor M.-D. y est aussi pour quelque chose...).

Merci à Damien pour cette fameuse danse endiablée et ces bières partagées; merci à Pierre et Valentin pour ce calme et cette sérénité qui vous caractérisent tant lors des parties de "taroinche"...

Merci à Hala pour ces belles découvertes de la pâtisserie libanaise et ta bonne humeur constante (et là ce n'est pas ironique!); merci à Radek d'avoir participé à enrichir mon vocabulaire anglais (ou pas?) à l'aide d'un simple jeu; merci à Virgile et Hélène (sans oublier Marinette!) pour les excellents repas organisés lors de ma première année; merci à Antoine, le "grand frère", de m'avoir fait découvrir Bruxelles (ses frites, ses bières, on en revient souvent à ce breuvage, pure coïncidence on va dire...), et pour cette bonne ambiance partagée en conf'. Merci à Guillem, qui regorge d'ingéniosité pour décorer les appartements, et à Claire pour la note toulousaine apportée au labo.

Merci également aux futurs thésards (officiellement), Matthieu et Côme, pour ces petites parties de jeux (si, si, on travaille quand même, croyez-moi vous qui lisez ces remerciements!).

Je finis avec le bureau le plus éloigné, mais je ne l'oublie pas. Nicolas, tu parviendras un jour à prendre bien soin de ta ligne, j'en suis sûr (mais bon, ne dit-on pas qu'il n'y a pas de mal à se faire du bien...?); enfin, merci à Hélène et Solène de faire partie de cette drôle d'équipe!

Je termine mon petit tour du labo au premier étage : merci à Hélène, Marie-Anne, François et Frédéric pour votre disponibilité et vos précieux conseils concernant mon avenir d'enseignant. Enfin, merci à Claude pour ta gestion du CRDM d'une main de maître, pour ton humour décalé, tes mails incroyables et ton accueil lors des travaux!

Je quitte à présent les murs du laboratoire pour sillonner les quelques villes où j'ai pu me rendre en conférences. Celles-ci n'auraient pas eu les mêmes saveurs sans les belles rencontres que j'ai pu y faire. Un grand merci à Benjamin, qui me supporte déjà depuis pas mal d'années; Lysianne pour ton art et ton obsession du majeur; Baptiste pour ton endurance "houblonesque"; Nathalie pour les grosses parties de fou-rires...; Stefano pour les bons moments à Iași et à Roscoff; Annalaura pour ta gentillesse; Adrien et Marine pour votre amitié et ce mariage de folie; Manon pour cette excellente semaine à Rome; Jonathan pour ces quelques bonnes soirées à Rennes; Émeric pour m'avoir fait découvrir à quoi ressemblent les

maths appliquées à la biologie et pour cette excellente escapade roumaine ; Benoît pour ton art hypnotique ; Axel et Valentin pour ces grosses journées mémorables de juillet 2016. Je dois sûrement oublier des noms et pour cela j'en suis profondément désolé, il faut dire qu'une thèse prend beaucoup de place dans les circuits neuronaux, ceci explique peut-être cela...

Un petit clin d'œil également aux anciens Rennais que j'ai moins croisés ces trois dernières années : Aline, Timothée, Nico, Eddie, Antoine, Édouard... Cette folle aventure rennaise restera inoubliable.

Un énorme bisou (un peu (beaucoup) baveux) à Valoo pour ton amitié sans faille et ces parties de Time's Up![®] effrénées!

Ces remerciements ne sauraient s'achever sans mentionner mes proches. Autre clin d'œil à mes deux cousines blondes préférées, Amy et Louise, qui en ce moment doivent se demander (ou pas d'ailleurs) dans quelle langue je m'exprime en ce jour de soutenance...

J'embrasse ma grande sœur, Pauline. Me voilà enfin sur la même marche du "podium" même si, contrairement à toi, mon doctorat ne me permettra pas de soigner grand monde... Tout simplement, merci d'être ma grande sœur, ne change rien!

Merci à Jean-Baptiste, le seul membre de la famille qui peut comprendre un minimum ce sur quoi je m'arrache les cheveux depuis plus de trois ans...

Merci à Tatie Danièle, pour ton amour, ton soutien et tes précieux conseils depuis ces si nombreuses années.

Merci à mes parents, Edith et Gilles, de m'avoir toujours soutenu et d'être toujours présents (même à distance!). Finalement, trois années de doctorat ne sont rien si l'on compare à vingt-six ans de dur labeur qui ont fait que j'en suis là aujourd'hui : c'est entièrement grâce à vous, et pour ça je vous en remercie.

Last but not least, merci à toi Erwan, d'être à mes côtés et de me supporter (dans les deux sens du terme... ☺) : tu es sans doute la plus belle de mes rencontres, et quelque chose me dit que cette histoire n'est pas prête de s'achever...

Notations

Matrices et vecteurs

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$) : espace des matrices carrées (resp. rectangulaires) de taille $n \times n$ (resp. de taille $p \times n$), avec $n, p \in \mathbb{N}$, et à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: espace des matrices symétriques réelles de taille $n \in \mathbb{N}$.
- A^T ou tA : transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- \mathbf{I}_n : matrice identité de taille $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbf{0}_{p,n}$ (resp. $\mathbf{0}_n$) : matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$: matrice diagonale de taille $n \in \mathbb{N}$, dont les éléments diagonaux sont les $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$.
- $A : B$: produit contracté de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ défini par $A : B := \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} b_{ij}$.
- $u \times v$: produit vectoriel de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$.
- $u \otimes v$: produit tensoriel de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ défini par $u \otimes v := (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $u \cdot v$: produit scalaire canonique de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ défini par $u \cdot v := \sum_{i=1}^n u_i v_i$.
- $U \cdot V$: produit hermitien de deux vecteurs $U, V \in \mathbb{C}^n$ défini par $U \cdot V := \sum_{i=1}^n \bar{U}_i V_i$.

Pour ne pas alourdir certaines notations, on se permettra souvent d'écrire les vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n aussi bien en ligne qu'en colonne.

Opérateurs différentiels

- $t \geq 0$: variable de temps.
- $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$: variable d'espace.
- ∂_t : dérivée partielle par rapport à t .
- ∂_{x_i} : dérivée partielle par rapport à x_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
- $|\alpha|$: longueur d'un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$ définie par $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

- $\alpha!$: factorielle d'un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$ définie par $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!$.
- ∂^α : dérivée partielle $\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}$, où $\alpha \in \mathbb{N}^3$.
- ∇ : gradient en espace défini par $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})^T$.
- $\nabla \cdot u$: divergence en espace d'un champ de vecteurs $u = u(x) \in \mathbb{R}^3$ définie par

$$\nabla \cdot u := \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3.$$

- $\nabla \times u$: rotationnel d'un champ de vecteurs $u = u(x) \in \mathbb{R}^3$ défini par

$$\nabla \times u := (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1).$$

- Δ : opérateur Laplacien défini (sur \mathbb{R}^3) par $\Delta := \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$.

Espaces fonctionnels usuels

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$: espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , où $k \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: espace des distributions sur Ω .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espace de Schwartz sur \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^n .
- $L^p(\Omega)$: espace de Lebesgue d'indice $p \in [1, +\infty]$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- $W^{k,p}(\Omega)$: espace de Sobolev d'indice (k, p) sur Ω .
- $H^k(\Omega)$: espace de Sobolev hilbertien $W^{k,2}(\Omega)$.
- $H^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H^k(\Omega)$.
- $H^s(\mathbb{T}^2)$: espace de Sobolev fractionnaire d'indice $s \in \mathbb{R}_+$ sur le tore 2-dimensionnel \mathbb{T}^2 (choisi 1-périodique ou 2π -périodique selon les situations).

Introduction

1.1 Une problématique issue des Sciences Physiques

La magnétohydrodynamique (MHD) est une branche des Sciences Physiques qui étudie le mouvement des fluides conducteurs de champs électromagnétiques (liquides ou gazeux). Ces fluides sont omniprésents dans l'univers et se présentent sous forme de gaz ionisés, appelés *plasmas*. Ils constituent plus de 99% de la matière connue dans l'univers, sous diverses formes : gaz des étoiles, vent solaire, aurores boréales etc. Les plasmas ne sont pas uniquement hors de notre portée, puisqu'ils sont sources de nombreux travaux de recherche et d'expériences actuelles ; on peut citer par exemple les *Tokamaks*, chambres toriques qui confinent des plasmas et pourraient fournir un moyen de produire de l'énergie par fusion nucléaire.

Plusieurs modèles interviennent en MHD, selon les propriétés des plasmas que l'on souhaite modéliser ainsi que les échelles spatio-temporelles mises en jeu. En astrophysique, par exemple, les échelles considérées étant “très grandes”, on adopte le cadre de la MHD *idéale* qui constitue une bonne approximation des phénomènes pouvant être observés. Le terme “idéal” signifie que la *diffusion magnétique* du plasma est négligée. Nous considérerons dans cette thèse le cas d'un plasma *homogène* (densité constante) donc *incompressible*, supposé également *idéal* et *non visqueux* (on néglige les termes de viscosité associés à la vitesse et au champ magnétique du fluide). La dynamique d'un tel gaz est modélisée par les équations de la *MHD idéale incompressible*, qui s'écrivent comme suit (sous forme adimensionnée, [Gal13, Lac63]) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u - H \otimes H) + \nabla q = 0, \\ \partial_t H - \nabla \times (u \times H) = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \nabla \cdot H = 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Dans le système (1.1.1), $u \in \mathbb{R}^3$ désigne la *vitesse du fluide*, $H \in \mathbb{R}^3$ son *champ magnétique* et $q \in \mathbb{R}$ la *pression totale* (définie par $q := p + \frac{|H|^2}{2}$, p étant la pression “physique”). Ce sont des fonctions qui dépendent du temps $t \geq 0$ et de la position $x \in \mathbb{R}^3$. La notation \otimes désigne le produit tensoriel de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , défini par $u \otimes v := (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'incompressibilité du fluide se traduit par la troisième équation du système (1.1.1), et provient de la *conservation de la masse*. En effet, cette dernière s'écrit :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho u) = 0, \quad (1.1.2)$$

où ρ est la densité du fluide. Comme nous considérons un fluide homogène, l'équation (1.1.2) donne directement la contrainte de divergence nulle sur la vitesse du fluide. La contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique provient, quant à elle, des équations de Maxwell.

Les équations d'Euler. En l'absence de champ magnétique (*i.e.* $H \equiv 0$), le système (1.1.1) se réduit au système d'Euler incompressible pour un fluide parfait. Lorsque l'on étudie l'évolution d'un tel fluide dans un domaine borné suffisamment régulier Ω (dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3), une condition "naturelle" que l'on peut imposer sur le bord $\partial\Omega$ est la suivante :

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (1.1.3)$$

où $n = n(x)$ désigne le vecteur normal sortant à Ω en tout point $x \in \partial\Omega$. La condition de bord (1.1.3) traduit une condition de non porosité du milieu considéré, modélisant le fait que le fluide "reste" à l'intérieur du domaine Ω . Le système d'Euler incompressible en domaine borné s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ u \cdot n = 0, \quad \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

L'étude du système d'Euler incompressible (1.1.4) a suscité un fort intérêt mathématique depuis le début du XX^e siècle. On peut par exemple citer les premiers résultats de Yudovich [Yud63] et Kato [Kat67], sur l'existence et l'unicité des solutions *régulières* de (1.1.4) dans un domaine borné à bord régulier en dimension 2 d'espace. Yudovich a montré l'existence et l'unicité des solutions de (1.1.4), en supposant le tourbillon initial ω_0 borné (on renvoie à la définition du tourbillon (1.1.5) ci-dessous) ; Kato a montré un résultat analogue, sous l'hypothèse d'une vitesse initiale u_0 prise dans une échelle de régularité Hölder. Dans ce cas, le temps d'existence de la solution $T > 0$ peut être pris *arbitrairement grand*. L'existence et l'unicité des solutions régulières du système (1.1.4) persiste en dimension 3 d'espace, mais on ne dispose que d'un résultat *local* en temps. On pourra se référer aux livres de Marchioro et Pulvirenti [MP94], Chemin [Che98], ou encore Majda et Bertozzi [MB02] pour de plus amples détails. Dans ces références sont également traités les cas où le domaine spatial Ω vaut \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 (la condition de bord (1.1.3) est alors remplacée par une décroissance à l'infini des solutions).

En dimension 2 d'espace, le système (1.1.4) peut aussi se reformuler en terme du *tourbillon* ω , défini comme étant le rotationnel de la vitesse :

$$\omega := \nabla \times u = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1. \quad (1.1.5)$$

Si u est une solution suffisamment régulière de (1.1.4), alors le tourbillon ω vérifie l'équation de transport :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \quad (1.1.6)$$

La vitesse u est ensuite obtenue grâce à la Loi dite de Biot-Savart. L'étude de l'équation (1.1.6) au *sens des distributions* permet de définir une notion de *solution faible* au système d'Euler incompressible. De telles solutions existent globalement en dimension 2 d'espace, et l'unicité est assurée dès lors que le tourbillon initial ω_0 est borné et à support compact [MB02]. La littérature concernant le système d'Euler incompressible est vaste, nous pouvons également citer à titre d'exemples les travaux de Beirão da Veiga et Valli [BdVV80a, BdVV80b], Scheffer [Sch93], Shnirelman [Shn97], ou encore De Lellis et Székelyhidi [DLS09].

Une classe particulière de solutions faibles en dimension 2 sont les *poches de tourbillon* (ou "*vortex patches*"), pour lesquelles le tourbillon ω est donné par une fonction indicatrice. Ce thème est, encore aujourd'hui, source de nombreux travaux de recherche ; on pourra citer à titre d'exemples les résultats de Marchioro [Mar94], ou encore Hmidi, Mateu, et Verdera [HVM13]. En dimension 3, une définition

analogue aux poches de tourbillon permet de définir les *filaments de tourbillon* (ou “*vortex filaments*”), dont les propriétés sont par exemple étudiées par Banica et Vega [BV09, BV13], ainsi que les *tubes de tourbillon* (ou “*vortex tubes*”) étudiés par Enciso et Peralta-Salas [EPS15].

Lorsque le tourbillon ω est une mesure portée par une hypersurface régulière, évoluant elle-même au cours du temps, on parle de *nappe de tourbillon*. Celle-ci modélise un fluide séparé par une interface à travers laquelle la vitesse présente une discontinuité tangentielle. Ce phénomène est bien connu en hydrodynamique, et donne lieu aux *instabilités* de type *Kelvin-Helmholtz* (voir la figure 1.1 ci-dessous). Du point de vue mathématique, les instabilités de Kelvin-Helmholtz sont bien comprises (en dimension

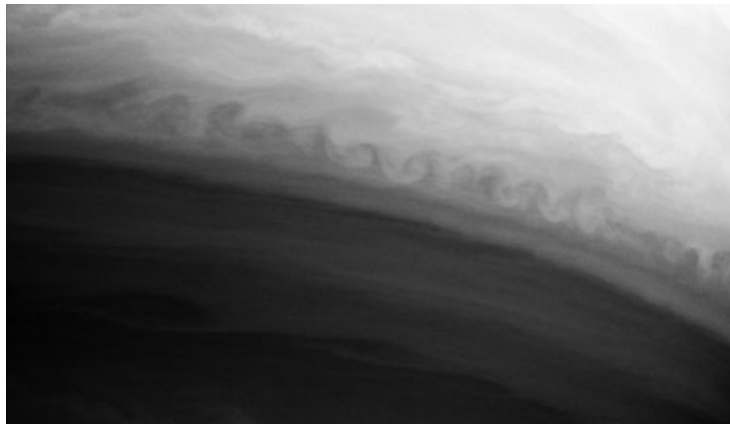


FIGURE 1.1 : Instabilités de Kelvin-Helmholtz sur Saturne (*Source : Wikipédia*).

2 et 3 d’espace); on peut citer les travaux de Sulem, Sulem, Bardos et Frisch [SSBF81], Delort [Del91], Lebeau [Leb02] ou encore Wu [Wu06]. Notamment, le problème des nappes de tourbillon incompressibles n’est bien posé que dans une échelle de régularité *analytique*. En revanche, en ajoutant de la tension de surface, Ambrose et Masmoudi [AM07] ont montré que l’on pouvait récupérer l’existence et l’unicité des nappes de tourbillon incompressibles en dimension 3 d’espace, dans une échelle de régularité *Sobolev*. Dans ce même esprit, on verra que l’ajout d’un champ magnétique “suffisamment fort” (aboutissant au système des *nappes de tourbillon-courant* (1.2.6) que l’on décrira ci-après), contrebalancera les instabilités de type Kelvin-Helmholtz.

La MHD idéale incompressible. Le système de la MHD idéale incompressible (homogène ou inhomogène) a été étudié notamment par Alekseev, Schmidt et Secchi. En 1982, Alekseev [Ale82] a démontré le caractère localement bien posé du système de la MHD idéale incompressible dans les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). D’autres contributions sur ce problème ont ensuite été apportées par Schmidt [Sch88] et Secchi [Sec93] à titre d’exemples.

Les nappes de tourbillon-courant en MHD idéale incompressible. On s’intéresse désormais au cas d’un *cisaillement* d’un plasma, donnant lieu à la formation d’une *nappe de tourbillon-courant*. Ce phénomène modélise le couplage de deux plasmas, dont la vitesse et le champ magnétique présentent une *discontinuité tangentielle* le long d’une hypersurface (*i.e.* la nappe), qui elle-même évolue au cours du temps. Il s’agit donc d’un problème couplé à frontière libre. La figure 1.2 ci-après représente schématiquement une nappe de tourbillon-courant, cette dernière étant notée $\Gamma(t)$ (avec t la variable de temps).

Ce phénomène de cisaillement survient dans diverses situations. Par exemple, l’interface au niveau de laquelle se rencontrent le vent solaire supersonique et le plasma interstellaire est modélisée par une nappe de tourbillon-courant. Cette région, appelée *héliopause* (figure 1.3), peut être considérée comme la “limite” du système solaire [FR95]. À une échelle spatiale moindre, on peut aussi évoquer la région

où interfèrent le vent solaire et la magnétosphère de la Terre ; cette “frontière” est appelée *magnétopause* (figure 1.4) [RW98].

Les nappes de tourbillon-courant trouvent également leur application dans l’étude des jets de matière issus de différents objets astrophysiques. On trouvera par exemple dans [BK02, BK06, BV07] des simulations numériques illustrant la formation des instabilités de Kelvin-Helmholtz en MHD, pour des jets de plasmas. Étudier ce phénomène de cisaillement permettrait une meilleure compréhension du confinement magnétique, et pourrait déboucher sur diverses applications dans le domaine énergétique.

1.2 Les nappes de tourbillon-courant dans un contexte mathématique

Les nappes de tourbillon-courant en MHD idéale incompressible sont une classe de solutions particulières du système (1.1.1). On s’intéresse en effet à des solutions faibles de (1.1.1), régulières de part et d’autre d’une hypersurface Γ , et satisfaisant des conditions de saut adéquates sur cette hypersurface. Plus précisément, on supposera que la frontière libre est un graphe, c’est-à-dire s’écrivant

$$\Gamma := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid x_3 = f(t, x')\}, \quad (1.2.1)$$

où t est la variable de temps, x_3 la variable *normale* et $x' = (x_1, x_2)$ la variable *tangentielle* (on peut se référer à la figure 1.2). À un temps t fixé, on notera également $\Gamma(t)$ l’hypersurface “spatiale” définie par

$$\Gamma(t) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = f(t, x')\}, \quad (1.2.2)$$

dont un vecteur normal $N = N(t)$ peut s’écrire :

$$N := (-\partial_{x_1} f, -\partial_{x_2} f, 1). \quad (1.2.3)$$

En écrivant la formulation faible associée au système (1.1.1) (*i.e.* au sens des distributions), alors $U := (u, H, q)$ est une solution de (1.1.1) si et seulement si U est une solution *classique* de (1.1.1) de part et d’autre de l’hypersurface Γ et si les *conditions de Rankine-Hugoniot* (1.2.4) ci-dessous sont vérifiées en tout point de Γ [Eva98]. Pour le cas de la MHD idéale incompressible, les conditions de Rankine-Hugoniot sont explicitement données par [Cha61, BT02] :

$$\begin{aligned} [u \cdot N] &= 0, & [H \cdot N] &= 0, \\ [c u \cdot N] + [q] &= 0, & [c u_\tau] &= (H \cdot N) [H_\tau], & [c H_\tau] &= (H \cdot N) [u_\tau], \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

où l’on a posé $c^\pm := u^\pm \cdot N - \partial_t f$. Dans (1.2.4), la variable de temps $t \geq 0$ joue un rôle de paramètre, et la notation $[v]$ désigne le *saut* d’une fonction v à travers la nappe $\Gamma(t)$ défini par :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in \Gamma(t), \quad [v](t, x) := \lim_{s \rightarrow 0_+} v(t, x + sN) - v(t, x - sN),$$

où l’on rappelle la définition (1.2.3) du vecteur normal N . Les composantes tangentielles u_τ et H_τ associées à la vitesse et au champ magnétique intervenant dans (1.2.4) sont données par :

$$\begin{aligned} u_\tau &:= (u_{\tau_1}, u_{\tau_2}), & H_\tau &:= (H_{\tau_1}, H_{\tau_2}), \\ v_{\tau_i} &:= v \cdot \tau_i, & H_{\tau_i} &:= H \cdot \tau_i, \quad i = 1, 2, \\ \tau_1 &:= (1, 0, \partial_{x_1} f), & \tau_2 &:= (0, 1, \partial_{x_2} f). \end{aligned}$$

Notons à présent $U^+ = U^+(t)$ (resp. $U^- = U^-(t)$) la restriction du vecteur U au domaine “supérieur” $\Omega^+(t) := \{x_3 > f(t, x')\}$ (resp. “inférieur” $\Omega^-(t) := \{x_3 < f(t, x')\}$). Les nappes de tourbillon-courant sont des discontinuités tangentielles bien particulières, modélisant un fluide qui ne s’écoule pas à travers

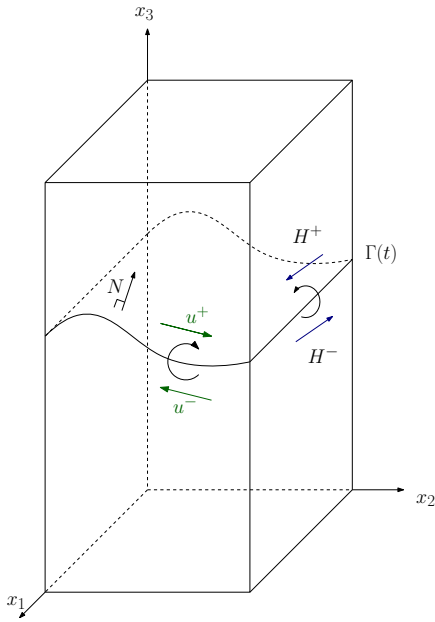


FIGURE 1.2 : Schéma d'une nappe de tourbillon-courant.

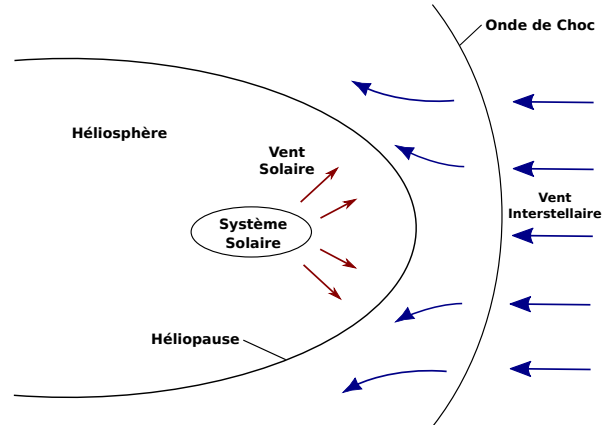


FIGURE 1.3 : Schéma représentant l'héliopause.

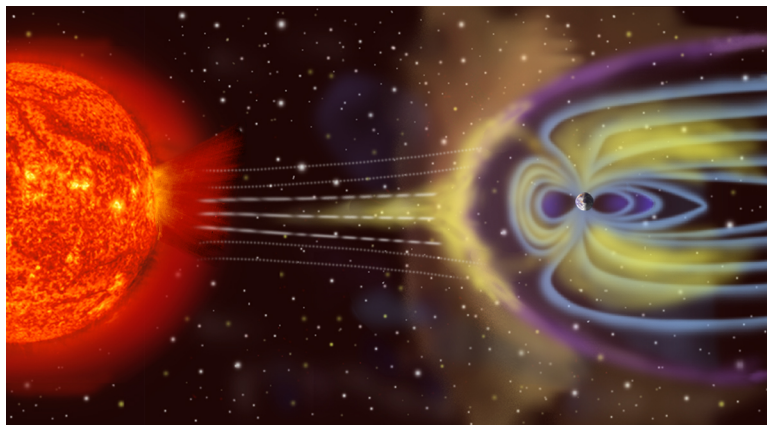


FIGURE 1.4 : La magnétopause terrestre (Source : Wikipédia).

la nappe $\Gamma(t)$, et dont le champ magnétique est purement tangentiel au niveau de $\Gamma(t)$. Les conditions de saut sur la frontière libre s'écrivent alors :

$$\partial_t f = u^+ \cdot N = u^- \cdot N, \quad H^+ \cdot N = H^- \cdot N = 0, \quad [q] = 0. \quad (1.2.5)$$

On peut voir aisément que les conditions de saut (1.2.5) forment bien un cas particulier des conditions de Rankine-Hugoniot (1.2.4) ; c'est-à-dire, si (1.2.5) est vérifié, alors (1.2.4) l'est automatiquement. Le système des nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible que l'on étudiera dans cette thèse est finalement donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u^\pm + (u^\pm \cdot \nabla) u^\pm - (H^\pm \cdot \nabla) H^\pm + \nabla q^\pm = 0, \\ \partial_t H^\pm + (u^\pm \cdot \nabla) H^\pm - (H^\pm \cdot \nabla) u^\pm = 0, \\ \nabla \cdot u^\pm(t) = \nabla \cdot H^\pm(t) = 0, \quad \text{dans } \Omega^\pm(t), \quad t \in [0, T], \\ \partial_t f = u^\pm \cdot N, \quad H^\pm \cdot N = 0, \quad [q] = 0, \quad \text{sur } \Gamma(t), \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.2.6)$$

Les deux premières équations de (1.2.6) ne sont qu'une réécriture des deux premières équations de (1.1.1) obtenues à l'aide des contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique. Pour des solutions régulières de (1.2.6), la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique apparaît comme une simple restriction sur la donnée initiale. Autrement dit, si l'on a $\nabla \cdot H^\pm|_{t=0} \equiv 0$, alors en tout temps $t > 0$, nous aurons $\nabla \cdot H^\pm(t) \equiv 0$. En revanche, la contrainte de divergence nulle sur la vitesse joue un rôle différent, car elle permettra de définir implicitement la pression q^\pm en fonction de la vitesse u^\pm et du champ magnétique H^\pm à travers la résolution d'un problème de Laplace.

Par commodité, on considérera un domaine spatial *borné* par rapport à la variable x_3 , et *périodique* par rapport à la variable tangentielle $x' = (x_1, x_2)$. Le domaine spatial de référence considéré dans cette thèse sera donc la bande périodique $\Omega := \mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$, où \mathbb{T}^2 désigne le tore 1-périodique de dimension 2. La compacité de Ω permettra de simplifier certains points dans l'analyse du système (1.2.6). Néanmoins, il nous faudra ajouter des conditions sur les bords fixes "haut" et "bas" $\Gamma_\pm := \{x_3 = \pm 1\}$. Nous modéliserons un plasma *confiné* dans la bande horizontale Ω (voir la figure 1.2), ce qui nous conduira à ajouter les conditions de bord homogènes suivantes :

$$u_3^\pm = H_3^\pm = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \quad (1.2.7)$$

La définition des domaines supérieur et inférieur $\Omega^\pm(t)$ est en conséquence légèrement modifiée :

$$\Omega^\pm(t) := \{(x', x_3) \in \Omega \mid x_3 \gtrless f(t, x')\}.$$

Enfin, le front de la discontinuité f sera astreint à vérifier la condition supplémentaire $-1 < f(t, x') < 1$ pour tout $(t, x') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2$.

1.2.1 Rappels sur les problèmes aux limites hyperboliques linéaires à coefficients constants.

Afin d'étudier le problème à frontière libre (1.2.6), il est courant en analyse non-linéaire de commencer par étudier les propriétés du système *linéarisé*. Nous rappelons ci-après les propriétés de stabilité forte et/ou faible des problèmes aux limites hyperboliques linéaires à coefficients constants. Plus précisément, on considère le système suivant (en dimension 3 d'espace pour simplifier), dans lequel on se donne des matrices $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, et une matrice de bord $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + \sum_{j=1}^3 A_j \partial_{x_j} U = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^3, \\ BU = 0, \quad t \geq 0, \quad x' \in \mathbb{R}^2, \quad x_3 = 0, \\ U|_{t=0} = U_0, \quad x \in \mathbb{R}_+^3. \end{array} \right. \quad (1.2.8)$$

Dans (1.2.8), \mathbb{R}_+^3 désigne le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$, le vecteur $U = U(t, x) \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue, et U_0 est une donnée initiale. L'étude de tels problèmes aux limites est aujourd'hui bien comprise, et a été initiée par Kreiss [Kre70] et Sakamoto [Sak70a, Sak70b] en 1970. Le système (1.2.8) ne possède pas de contrainte sur U (analogue à une contrainte de divergence nulle par exemple); c'est un cas modèle par rapport à la linéarisation du système (1.2.6), que l'on effectue de surcroît en domaine *fixe*.

On suppose le système (1.2.8) **hyperbolique** [BGS07], c'est-à-dire :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \|\exp(i A(\xi))\| < +\infty, \quad \text{où} \quad A(\xi) := \sum_{j=1}^3 \xi_j A_j.$$

Une hypothèse simplificatrice consiste à considérer le bord $\{x_3 = 0\}$ comme **non-caractéristique** : c'est-à-dire, on suppose la matrice A_3 *invertible*. Cette hypothèse vise uniquement à simplifier l'étude du système (1.2.8), mais ce dernier peut aussi être analysé dans le cas où le bord est caractéristique; on renvoie par exemple à [BGS07] ou aux travaux de [MO75, Ohk81, MS11]. Afin de ne pas sur-déterminer ou sous-déterminer le système (1.2.8), le nombre de lignes de la matrice de bord B (*i.e.* le nombre de conditions de bord p) doit coïncider avec le nombre de valeurs propres strictement positives de A_3 [BGS07].

Dans le but d'étudier le caractère bien posé (ou non) du problème aux limites (1.2.8), dans une échelle de régularité Sobolev, on procède à une *analyse par modes normaux* : on cherche à savoir s'il existe des modes de la forme

$$U(t, x) = e^{i((\tau - i\gamma)t + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} \mathcal{U}(x_3), \quad (1.2.9)$$

solutions de (1.2.8). Cela revient à effectuer une transformée de Fourier en la variable tangentielle $x' = (x_1, x_2)$ (la variable duale est alors notée $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$), et une transformée de Laplace en temps (la variable duale est alors notée $\sigma = \gamma + i\tau$). Le but est de déterminer les profils \mathcal{U} pouvant être solutions de (1.2.8). Les paramètres qui interviennent dans (1.2.9) sont tels que $\tau \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ et $\xi' \in \mathbb{R}^2$. En injectant (1.2.9) dans la première équation de (1.2.8), on obtient l'équation différentielle suivante que doit satisfaire le profil \mathcal{U} :

$$\left(i(\tau - i\gamma) \mathbf{I}_3 + i\xi_1 A_1 + i\xi_2 A_2 \right) \mathcal{U} + A_3 \frac{d\mathcal{U}}{dx_3} = 0, \quad x_3 > 0. \quad (1.2.10)$$

Le bord $\{x_3 = 0\}$ étant supposé non-caractéristique¹, on peut définir la matrice résolvante :

$$\mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi') := -i A_3^{-1} \left((\tau - i\gamma) \mathbf{I}_3 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 \right), \quad (1.2.11)$$

de sorte que \mathcal{U} est solution de l'EDO suivante :

$$\frac{d\mathcal{U}}{dx_3} = \mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi') \mathcal{U}, \quad x_3 > 0. \quad (1.2.12)$$

L'hypothèse d'hyperbolicité assure que lorsque $\tau \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ et $\xi' \in \mathbb{R}^2$, les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi')$ ne peuvent pas être imaginaires pures (lemme de Hersh [Her63, BGS07]). Ce lemme permet de définir le sous-espace *stable* $E_s(\tau - i\gamma, \xi')$ de la matrice $\mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi')$, constitué des vecteurs propres de $\mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi')$ associés aux valeurs propres de partie réelle *strictement négative* (et s'il y a des blocs de Jordan, on considère les sous-espaces propres généralisés). De même, on définit le sous-espace *instable* $E_u(\tau - i\gamma, \xi')$ de la matrice $\mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi')$, associé aux valeurs propres de partie réelle *strictement positive*.

Une première condition nécessaire pour que le système (1.2.8) soit bien posé (dans l'échelle de régularité Sobolev) est donnée par la **condition de Lopatinskiï simple** :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall \gamma > 0, \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Ker} B \cap E_s(\tau - i\gamma, \xi') = \{0\}. \quad (1.2.13)$$

¹C'est à ce stade que supposer la matrice A_3 invertible simplifie nettement l'analyse de l'équation différentielle (1.2.10), car cette dernière devient dans ce cas *ordinaire*.

Le critère (1.2.13) permet en effet “d’éliminer” les éventuels modes exponentiellement croissants en temps (typiquement en $e^{\gamma t}$), qui conduiraient à un problème *fortement mal posé*. Une condition nécessaire et suffisante pour obtenir le caractère *fortement bien posé* du problème (1.2.8) est donnée par la **condition de Lopatinskii uniforme** et est due à Kreiss [Kre70] et Sakamoto [Sak70a, Sak70b]; elle étend la condition (1.2.13) aux paramètres γ éventuellement nuls :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall \gamma \geq 0, \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Ker}B \cap E_s(\tau - i\gamma, \xi') = \{0\}. \quad (1.2.14)$$

La difficulté est que le lemme de Hersh ne s’applique plus (car γ peut être nul), et il faut pouvoir prolonger par continuité le sous-espace stable $E_s(\tau - i\gamma, \xi')$ lorsque $\gamma \rightarrow 0_+$. Dans le cas des systèmes hyperboliques à *multiplicité constante*, la structure par blocs de la matrice résolvante $\mathcal{A}(\tau - i\gamma, \xi')$ est bien comprise lorsque $\gamma \rightarrow 0_+$, comme l’a montré Métivier dans [Mét00], ce qui permet de prolonger effectivement le sous-espace stable E_s à $\gamma = 0$, et donne bien un sens à (1.2.14).

Lorsque seule la condition de Lopatinskii simple (1.2.13) est vérifiée, on rentre dans le cadre des problèmes *faiblement bien posés*. Dans ce cas, la condition de Lopatinskii uniforme (1.2.14) peut faire défaut en des fréquences $(\tau, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de plusieurs types. Les fréquences auxquelles on s’intéresse plus particulièrement dans cette thèse sont les fréquences dites **elliptiques**, et qui donnent lieu à des solutions qu’on appelle **ondes de surface**.

En effet, considérons le cas où la matrice résolvante $\mathcal{A}(\tau, \xi')$ est diagonale. On cherche une combinaison linéaire dans $\text{Ker}B$ de modes (1.2.9) dont le profil \mathcal{U} est solution de (1.2.12). On obtient alors des combinaisons linéaires de fonctions s’exprimant comme suit :

$$\mathcal{U}(t, x) = e^{i(\tau t + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) + \xi_3 x_3} \mathbf{R}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3, \quad (1.2.15)$$

où $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur constant et $\xi_3 \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathcal{A}(\tau, \xi')$. Comme le spectre de la matrice résolvante \mathcal{A} ne peut être imaginaire pur, on a nécessairement $\text{Re} \xi_3 \neq 0$. De plus, on ne garde que les valeurs propres ξ_3 telles que $\text{Re} \xi_3 < 0$ (pour éviter tout phénomène d’explosion lorsque $x_3 \rightarrow +\infty$), ce qui donne finalement un terme d’*onde de surface*, car la fonction donnée par (1.2.15) oscille tangentiellement au bord $\{x_3 = 0\}$ et décroît exponentiellement lorsque la variable normale x_3 tend vers $+\infty$ ². De telles ondes interviennent par exemple en élastodynamique, et on les appelle *ondes de Rayleigh*. On renvoie par exemple aux travaux de Lardner [Lar83], Parker [Par85] ou encore Hamilton, Il’insky et Zabolotskaya [HIZ95]. Certains systèmes hyperboliques dont la condition de Lopatinskii uniforme dégénère en des fréquences elliptiques ont par exemple été étudiés par Sablé-Tougeron [ST88], et plus récemment par Lescarret [Les07] et Marcou [Mar10]. Nous verrons dans cette thèse que les ondes de surface surviendront également pour le problème des nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible. Notre analyse reprendra certaines idées de base mises en avant par Marcou dans [Mar10, Mar11]. Néanmoins, le problème des nappes de tourbillon-courant introduira diverses difficultés supplémentaires, notamment par le fait que c’est un problème à **frontière libre**, qui n’entre pas dans la catégorie des systèmes hyperboliques “standards” à cause des **contraintes de divergence nulle**, et dont le bord est **caractéristique**. Nous reviendrons sur ces points dans la Section 1.3 ci-après.

1.2.2 Un bref historique sur le problème des nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible.

Le problème à frontière libre (1.2.6) a été étudié d’un point de vue mathématique à partir des années 1950. Syrovatskiĭ [Syr53], Axford [Axf62] ou encore Chandrasekhar [Cha61] ont ainsi été les principaux scientifiques à s’attaquer à ce problème. Dans ces références, ils analysent avant tout le système *linéarisé* des nappes de tourbillon-courant, ce qui apporte une première compréhension du phénomène, et met en

²Si l’on avait considéré le demi-espace $\{x_3 < 0\}$, on aurait obtenu de façon analogue des ondes de surface qui décroissent en $e^{\text{Re}(\xi_3) x_3}$ lorsque $x_3 \rightarrow -\infty$, où $\text{Re} \xi_3 > 0$.

évidence des propriétés fondamentales de stabilité qui pourraient être par la suite transposées sur l'étude du système *non-linéaire*.

D'abord, il est aisé de voir que les solutions constantes par morceaux du système (1.2.6) sont données par :

$$U^{0,\pm} = (u_1^{0,\pm}, u_2^{0,\pm}, c, H_1^{0,\pm}, H_2^{0,\pm}, 0, q^{0,\pm}) \quad \text{et} \quad f^0 = ct + d, \quad (1.2.16)$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ et $(q^{0,+}, q^{0,-})$ doit vérifier $q^{0,+} = q^{0,-}$. L'invariance galiléenne du système (1.2.6) permet de se ramener au cas où $c = 0$. En effet, considérons un vecteur vitesse $v \in \mathbb{R}^3$, et définissons les “nouvelles” inconnues suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\pm(t, x) &:= u^\pm(t, x - vt) + v, & \tilde{H}^\pm(t, x) &:= H^\pm(t, x - vt), \\ \tilde{q}^\pm(t, x) &:= q^\pm(t, x - vt), & \tilde{f}(t, x') &:= f(t, x' - v't) + v_3t, \end{aligned}$$

où v' désigne la composante tangentielle (v_1, v_2) de v . On peut facilement vérifier que (u^\pm, H^\pm, q^\pm, f) est solution du système (1.2.6) si et seulement si $(\tilde{u}^\pm, \tilde{H}^\pm, \tilde{q}^\pm, \tilde{f})$ l'est également. Cette invariance galiléenne nous sera utile au Chapitre 5, lorsque nous étudierons les propriétés de la matrice résolvante associée au système linéarisé des nappes de tourbillon-courant, dont la définition sera peu éloignée de la définition (1.2.11) introduite précédemment.

Maintenant, si l'on se donne un état de référence *constant* $U^{0,\pm} := (u^{0,\pm}, H^{0,\pm}, q^{0,\pm})$ et un front *plan* (par exemple $f^0 \equiv 0$ pour simplifier), on peut étudier le système (1.1.1) linéarisé autour de cet état constant en procédant à une analyse par modes normaux. Bien que le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant ne soit pas hyperbolique (au sens où il ne rentre pas dans le formalisme de (1.2.8)), on peut encore utiliser les mêmes outils que l'on a rappelés au Paragraphe 1.2.1, et chercher des modes de la forme (1.2.9) solutions du système linéarisé. On veut dans un premier temps assurer la condition de Lopatinskii simple, ce qui est possible dès lors que l'état de référence $U^{0,\pm}$ vérifie les deux conditions suivantes (voir par exemple [Cha61, MTT08]) :

$$\left| [u^0] \right|^2 \leq 2 \left(|H^{0,+}|^2 + |H^{0,-}|^2 \right), \quad (1.2.17a)$$

$$\left| [u^0] \times H^{0,-} \right|^2 + \left| [u^0] \times H^{0,+} \right|^2 \leq 2 \left| H^{0,+} \times H^{0,-} \right|^2, \quad (1.2.17b)$$

où le crochet $[\cdot]$ dans (1.2.17b) désigne ici le saut à travers l'interface plane $\{x_3 = 0\}$. En outre, si l'on suppose que les champs magnétiques $H^{0,\pm}$ vérifient $H^{0,+} \times H^{0,-} \neq 0$ ainsi que la condition

$$\left| [u^0] \times H^{0,-} \right|^2 + \left| [u^0] \times H^{0,+} \right|^2 < 2 \left| H^{0,+} \times H^{0,-} \right|^2, \quad (1.2.18)$$

alors (1.2.17a) découle de (1.2.18) avec une inégalité stricte. On obtient ainsi toute une classe de solutions constantes, vérifiant (1.2.18), pour lesquelles on a assuré la condition de Lopatinskii simple.

Toutefois, la condition de Lopatinskii uniforme n'est **jamais satisfaite**, et les fréquences en lesquelles la condition est violée se situent dans la zone elliptique, ce qui conduira dans ce cas à la formation d'ondes de surface, comme mis en évidence par Ali et Hunter [AH03]. Nous rentrerons un peu plus dans les détails dans la Section 1.3 ci-après. Les conditions (1.2.17) sont donc des conditions de stabilité linéaire *faible*. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, alors le système linéarisé conduit à une *instabilité de type Kelvin-Helmholtz*. En d'autres termes, le champ magnétique doit être suffisamment fort pour stabiliser le système et contrebalancer les instabilités de Kelvin-Helmholtz : c'est un résultat bien connu par les astrophysiciens. En effet, en l'absence de champ magnétique, le système étudié se réduit aux nappes de tourbillon pour les équations d'Euler incompressibles, pour lesquelles les instabilités de Kelvin-Helmholtz sont bien comprises comme nous l'avons évoqué dans la Section 1.1. Le système des nappes de tourbillon n'est alors bien posé que dans une échelle de régularité analytique [SSBF81], ce qui traduit une instabilité inconditionnelle. En revanche, l'ajout d'un champ magnétique assez puissant va venir stabiliser le système (1.2.6), ce qui constitue un phénomène analogue au cas des nappes de tourbillon avec tension de surface [AM07].

Remarquons que les conditions de stabilité (1.2.17) ne font intervenir que le *saut* de vitesse $[u^0]$. Cela est cohérent avec le fait que le système (1.2.6) est invariant par changement de référentiel galiléen.

Les conditions de stabilité (1.2.17) ont été revisitées plus récemment par Trakhinin [Tra05], puis par Morando, Trebeschi et Trakhinin [MTT08]. Sous une condition de stabilité plus restrictive, à savoir :

$$\max\left(\left|[u^0] \times H^{0,+}\right|, \left|[u^0] \times H^{0,-}\right|\right) < \left|H^{0,+} \times H^{0,-}\right|, \quad (1.2.19)$$

Catania [Cat13] a démontré un résultat d’existence et d’unicité sur le problème *linéaire*, pour une régularité des solutions dans l’espace de Sobolev H^1 uniquement. Toujours sous la condition forte (1.2.19), Coulombel, Morando, Secchi et Trebeschi [CMST12] ont établi des estimations *a priori* sans perte de dérivées pour le problème *non-linéaire* ; leur preuve est basée sur un argument de symétrisation introduit par Trakhinin [Tra05]. Cette approche est donc une étape importante qui laisserait à penser que le système des nappes de tourbillon-courant incompressibles serait bien posé dans une échelle de régularité Sobolev. Les estimations étant sans perte de dérivées pour les solutions exactes, il pourrait être envisagé d’éviter l’utilisation du théorème de Nash-Moser. Dans cette première partie de thèse, on se propose de mettre en place un schéma de construction de solutions de régularité *analytique* au système des nappes de tourbillon-courant, à l’aide d’un théorème de Cauchy-Kowalevskaya [Nir72, Nis77, BG78]. Puis, dans un travail ultérieur, on pourrait utiliser le résultat de [CMST12] pour exhiber des solutions de régularité Sobolev donnée, *via* un argument de compacité en approchant les données initiales *Sobolev* par des données initiales *analytiques*.

Le système des nappes de tourbillon-courant incompressibles (1.2.6) est en effet bien posé dans l’échelle Sobolev, comme l’ont démontré très récemment Sun, Wang et Zhang [SWZ15]. Leur approche pour résoudre ce problème est totalement différente de celle que l’on propose, puisque l’idée principale est de réduire l’étude sur la surface libre $\Gamma(t)$ uniquement, comme il est courant dans la théorie des “water waves” (citons par exemple le livre de Lannes [Lan13] qui donne un panorama de ce vaste sujet). En utilisant des arguments de l’analyse elliptique, ils peuvent ensuite reconstruire la solution dans les domaines $\Omega^\pm(t)$. L’avantage de leur méthode est qu’ils obtiennent un théorème d’existence et d’unicité locale pour tout le domaine de stabilité donné par (1.2.18), et pas uniquement sous la condition plus restrictive (1.2.19). Néanmoins, pour tirer profit des outils de l’analyse elliptique, les contraintes de divergence nulle sont cruciales pour reconstruire la vitesse et le champ magnétique dans les domaines $\Omega^\pm(t)$. À l’inverse, la méthode que l’on se propose d’adopter ici est basée sur des estimations *a priori* uniquement, et pourrait donc être appliquée à d’autres systèmes hyperboliques. Par exemple, comme piste d’étude pour un travail futur, on pourrait tenter d’éviter l’utilisation du théorème de Nash-Moser, dans l’optique de démontrer l’existence et l’unicité locale des nappes de tourbillon-courant *compressibles*. Un tel résultat a été obtenu simultanément par Chen et Wang [CW08], et par Trakhinin [Tra09], en utilisant une itération de Nash-Moser.

Cette thèse se divise en deux parties. On commence par mettre en place plusieurs arguments dans l’optique de construire des nappes de tourbillon-courant analytiques, en appliquant un théorème de Cauchy-Kowalevskaya. On s’appuiera notamment sur la démonstration donnée par Baouendi et Goulaouic [BG78]. Le traitement de données initiales de régularité Sobolev pourra constituer une piste de recherche future. La problématique sera de propager la régularité analytique sur un intervalle de temps qui ne dépendrait que d’une *norme Sobolev fixée* de la solution. De cette manière, le temps d’existence de la solution ne se réduirait pas à zéro lorsque la taille des données initiales dans l’échelle analytique tend vers l’infini (ce qui typiquement se produit lorsqu’on procède par densité, en approchant des données initiales de régularité Sobolev, par des données initiales analytiques).

Dans un second axe d’étude, on utilise le résultat d’existence et d’unicité locale de nappes de tourbillon-courant dans l’échelle Sobolev, obtenu par Zun, Wang et Zhang [SWZ15]. L’idée est d’utiliser des outils d’optique géométrique pour décrire de façon qualitative le comportement des solutions exactes issues de données initiales fortement oscillantes.

1.3 Organisation de la thèse

Partie I : Solutions de régularité analytique

On se propose dans un premier temps d'exhiber des solutions analytiques au système des nappes de tourbillon-courant incompressibles. L'étude de l'analyticité des solutions de systèmes issus de l'hydrodynamique a commencé dans les années 1970.

Dans [BG76], Baouendi et Goulaouic résolvent des problèmes de Cauchy pseudo-différentiels non-linéaires dans l'échelle de régularité analytique, et illustrent une application sur les équations d'Euler incompressible. Pour ce faire, ils caractérisent l'analyticité d'une fonction *via* la décroissance des normes de ses dérivées dans les espaces de Hölder. Ils se placent alors dans des algèbres de Banach analytiques afin d'appliquer une version abstraite du théorème de Cauchy-Kowalevskaya présentée par Nirenberg [Nir72] (puis revisitée par Nishida [Nis77] ainsi que Baouendi et Goulaouic [BG78]).

L'analyticité des solutions des équations d'Euler incompressible dans un domaine Ω (de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) a par exemple été traitée par Bardos et Benachour [BB77] (voir également [Bar76, BBZ76]). Leur point de vue est différent de celui adopté dans [BG76], car ils complexifient le domaine Ω et manipulent des fonctions holomorphes dont la restriction à Ω est analytique réelle. Ils emploient directement une méthode de point fixe de type Picard, et n'utilisent pas un théorème de Cauchy-Kowaleskaya pour démontrer l'analyticité locale des solutions.

Dans l'étude des nappes de tourbillon pour les équations d'Euler incompressible, Sulem, Sulem, Bardos et Frish [SSBF81] mêlent en quelque sorte les deux points de vue que l'on trouve dans [BG76] et [BB77]. En effet, ils complexifient les domaines spatiaux et caractérisent l'analyticité grâce aux normes "höldériennes" des fonctions holomorphes et de leurs dérivées. Ils concluent enfin en appliquant un théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

La caractérisation de l'analyticité de fonctions peut aussi s'obtenir grâce à la décroissance des normes Sobolev (ou L^∞) des dérivées. C'est dans cet esprit qu'Alinhac et Métivier [AM86] étudient la propagation de l'analyticité des solutions des équations d'Euler incompressible, sans passer par une complexification du domaine spatial. Ce point de vue de l'analyticité est également adopté par Sedenko [Sed94] : il construit des solutions analytiques d'un problème à surface libre issu des équations d'Euler incompressible à densité variable pour un fluide idéal barotrope. Les arguments utilisés sont assez proches de ceux de [BG76] ; en se plaçant dans des algèbres de Banach analytiques, Sedenko démontre l'existence et l'unicité locale de solutions en appliquant un théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

Sur les domaines spatiaux périodiques \mathbb{T}^n , ou sur l'espace entier \mathbb{R}^n , il s'avère qu'on dispose d'une caractérisation "pratique" de l'analyticité d'une fonction grâce à sa transformée de Fourier. En revanche, lorsqu'on travaille sur un domaine spatial Ω (distinct de \mathbb{T}^n et \mathbb{R}^n), on ne dispose plus de cette caractérisation par l'analyse de Fourier. Néanmoins, on peut encore décrire l'analyticité d'une fonction *via* la décroissance des normes Sobolev (ou Hölder) de ses dérivées, ce qui a été utilisé par [BG76, SSBF81, AM86, Sed94]. La démarche que l'on suivra dans la première partie de cette thèse suivra donc les idées de Sedenko ; on mettra en place plusieurs points clés qui devraient permettre, dans un futur travail de recherche, de démontrer le caractère localement bien posé du système (1.2.6) dans l'échelle de régularité analytique, en s'appuyant sur la démonstration du théorème de Cauchy-Kowalevskaya donnée par Baouendi et Goulaouic [BG78]. Cet aspect permet de travailler sur les équations d'Euler ou de la MHD incompressible en formulation eulérienne. Il pourrait être envisagé par la suite d'adapter cette méthode sur le cas *compressible*, pourvu que la loi de pression satisfasse de "bonnes" estimations dans les espaces analytiques que l'on manipulera.

Des travaux un peu plus récents traitent de la *propagation* de l'analyticité pour les équations d'Euler (en dimension 2 ou 3 d'espace). Des résultats précis sur *l'évolution du rayon d'analyticité* des solutions des équations d'Euler en fonction du temps ont été démontrés par Kukavica et Vicol [KV11a, KV11b, KV09] en dimension 3 d'espace, et par Levermore et Oliver [LO97] pour l'équation des lacs peu profonds en

dimension 2 d'espace. On pourrait envisager dans un futur travail de recherche d'adapter leurs arguments pour étudier la propagation de l'analyticité des nappes de tourbillon-courant incompressibles, et ainsi retrouver le résultat de [SWZ15] par densité des données initiales analytiques dans les espaces de Sobolev.

Cette première partie de thèse concerne les Chapitres 2 à 4, dont on expose le contenu un peu plus en détails désormais.

Chapitre 2. Dans ce chapitre, nous présentons les espaces fonctionnels que l'on manipulera dans les Chapitres 3 et 4, afin d'appliquer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya. Comme nous nous placerons dans un domaine de \mathbb{R}^3 , nous ne disposerons pas de l'analyse de Fourier afin de caractériser l'analyticité d'une fonction. Pour palier à cette difficulté, on s'inspirera des travaux de Sedenko [Sed94], dans lesquels il utilise la caractérisation de l'analyticité par la décroissance des normes des dérivées dans les espaces de Hölder. Les espaces fonctionnels que l'on définira s'appuieront plutôt sur les espaces de Sobolev, ce qui diffère légèrement du cadre posé par Sedenko.

Nous donnerons tous les prérequis concernant les propriétés satisfaites par ces espaces fonctionnels. En particulier, on donnera des estimations analytiques sur le *produit* de deux fonctions analytiques, et sur la *dérivée* d'une fonction analytique. Pour estimer un produit de fonctions analytiques, nous aurons notamment besoin d'appliquer la formule de Leibniz; cette dernière faisant intervenir les coefficients multinomiaux, nous rappellerons quelques outils de base de combinatoire tels que la formule du multinôme ou le calcul de certaines sommes de coefficients multinomiaux [Com70]. L'estimation de la dérivée d'une fonction analytique sera cruciale, car on retrouvera l'estimation "type" qui figure dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Kowalevskaya [Nis77, BG78].

Chapitre 3. Ce chapitre vise à comprendre sur un cas simple comment les estimations analytiques s'obtiennent sur les équations de la MHD idéale incompressible données par (1.1.1). À l'aide des contraintes de divergence nulle, les deux premières équations de (1.1.1) se réécrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - (H \cdot \nabla)H + \nabla q = 0, \\ \partial_t H + (u \cdot \nabla)H - (H \cdot \nabla)u = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Nous commencerons par voir comment s'estiment les termes convectifs de (1.3.1) (*i.e.* ceux de la forme $(u \cdot \nabla)u$ etc.) dans les algèbres de Banach introduites au Chapitre 2. Ils vérifieront bien l'estimation "type" du théorème de Cauchy-Kowalevskaya, ce qui ne sera pas surprenant en soi, car ce sont en fait des termes "prototype" qui rentrent dans le cadre de ce théorème.

En revanche, l'étude du système simplifié (1.1.1) constituera une première étape permettant de voir comment il conviendra de traiter le terme de pression dans (1.2.6). En effet, la pression issue du système simplifié (1.3.1) vérifiera un problème de Laplace, avec conditions au bord de Neumann. Estimer les dérivées *tangentes* de la pression ne sera pas la difficulté majeure, du fait de la géométrie simplifiée dans laquelle on se placera. Néanmoins, le point clé sera de voir comment nous pourrons donner des estimations analytiques sur les dérivées *normales* de la pression; c'est à ce niveau précis que la définition des espaces fonctionnels vus au Chapitre 2 entre en jeu, car elle permettra de traiter les termes de dérivées normales par récurrence. Nous montrerons que la pression interviendra dans le système (1.1.1) comme un terme *semi-linéaire*. On peut noter ici l'analogie avec le cas des équations d'Euler incompressible dans l'espace entier, pour lesquelles la pression constitue également une semi-linéarité [Che98, chap. 4].

Chapitre 4. Nous nous concentrerons dans ce chapitre sur le système des nappes de tourbillon-courant incompressibles (1.2.6), et généraliserons la démarche illustrée au Chapitre 3.

La première difficulté provient de la frontière libre : nous avons à présent affaire à un problème couplé avec des conditions de saut à travers la nappe $\Gamma(t)$, qui elle-même est inconnue. Une première étape consistera alors à se ramener en domaines *fixes* en redressant convenablement le front. Cette méthode

est classique dans l'étude des problèmes à surface libre : citons par exemple les travaux de Kano et Nishida [KN79] sur les *water waves*, Majda [Maj83a, Maj83b] sur les chocs, ou encore Alinhac [Ali88] sur les détentes. Le redressement que l'on effectuera ici provient de l'article de Coulombel *et al.* [CMST12], et s'inspire des travaux de Lannes [Lan05]. Toujours dans l'optique d'appliquer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya, il conviendra de vérifier que le redressement effectué satisfait de “bonnes” estimations dans les algèbres de Banach introduites au Chapitre 2.

La deuxième difficulté majeure proviendra du terme de pression. Nous verrons que la pression issue du problème (1.2.6) satisfera un problème de Laplace *couplé* ; contrairement au cas du Chapitre 3, ce problème de Laplace sera à coefficients *variables*, et ceux-ci dépendront du front inconnu f . L'enjeu sera de partir d'un résultat de [CMST12] qui fournit une estimation de la pression dans une *échelle de régularité Sobolev*, et de l'étendre dans l'*échelle analytique* introduite au Chapitre 2. Ici, l'étude menée au Chapitre 3 va venir nous aider à comprendre comment nous pourrions estimer les dérivées *tangentielles* de la pression d'une part, et les dérivées *normales* de la pression d'autre part. L'idée sera essentiellement la même qu'au Chapitre 3, puisque nous pourrions estimer les dérivées normales par récurrence. En revanche, la présence de coefficients variables dans l'opérateur elliptique associé au problème de Laplace générera des commutateurs qu'il nous faudra estimer et “absorber” convenablement. L'estimation finale obtenue montrera que le terme de pression dans (1.2.6) jouera à présent le rôle d'une *quasi-linéarité*, à l'inverse du cas “sans nappe” pour lequel la pression jouait le rôle d'une *semi-linéarité*.

Nous proposerons ensuite un schéma de résolution qui devrait permettre dans un futur travail de recherche d'établir l'existence et l'unicité locale de nappes de tourbillon-courant analytiques, en adaptant les arguments de Baouendi et Goulaouic [BG78]. Contrairement à ce qui aura été vu au Chapitre 3, on ne sera pas en mesure d'appliquer directement le théorème de Cauchy-Kowalevskaya. La raison principale proviendra du terme de pression (q^+, q^-) . En effet, pour que la pression soit bien définie, nous devons être en mesure de résoudre le problème elliptique qui lui est associé. Or, pour ce faire, les termes sources apparaissant dans ce problème elliptique devront satisfaire des *conditions de compatibilité*. Celles-ci ne seront satisfaites que si l'on dispose de certaines contraintes sur la vitesse u^\pm , le champ magnétique H^\pm et le front de la discontinuité f . La présence de ces contraintes ne rentre pas directement dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Kowalevskaya (on renvoie au Théorème 3.2.2 pour un énoncé précis), et il nous faudra donc pouvoir adapter la preuve donnée par Baouendi et Goulaouic [BG78]. L'idée consistera à exhiber une application Υ et un espace de Banach E_a convenable (dont la définition reposera sur les échelles d'espaces de Banach introduites au Chapitre 2), tel que Υ soit *contractante* sur un sous-ensemble *fermé* de E_a , pourvu que le paramètre $a > 0$ soit choisi suffisamment petit. Nous donnerons à la fin du Chapitre 4 plusieurs idées et arguments clés, plus ou moins approfondis, qui devraient permettre d'exhiber des solutions analytiques au système (1.2.6) dans un travail ultérieur.

Les estimations analytiques que l'on effectuera sur le système (1.2.6) (donc directement sur la formulation eulérienne), pourraient être transposées sur d'autres systèmes analogues. On a par exemple en tête le cas des nappes de tourbillon-courant *compressibles*, dont le caractère bien posé est à ce jour connu [CW08, Tra09] et a été démontré en appliquant le théorème de Nash-Moser. En revanche, procéder à des estimations analytiques en vue d'appliquer un théorème de Cauchy-Kowalevskaya, pour ensuite propager l'analyticité, pourrait constituer une nouvelle piste de recherche, dans l'idée de contourner l'utilisation du théorème de Nash-Moser.

Partie II : Développements d'optique géométrique

Dans la seconde partie de cette thèse, nous utilisons des outils d'optique géométrique pour décrire de façon *qualitative* le comportement des solutions exactes du système des nappes de tourbillon-courant incompressibles, issues de données initiales *fortement oscillantes*. Nous verrons que pour des phases d'oscillation bien particulières, la solution présente une structure d'*onde de surface*, c'est-à-dire qu'elle est localisée près de la frontière libre, oscille aux mêmes fréquences que la donnée initiale, et décroît exponen-

tiellement par rapport à la variable normale à la nappe. L'apparition d'ondes de surface pour le système des nappes de tourbillon-courant incompressibles a été étudiée par Ali et Hunter [AH03] dans le cas de la dimension 2 d'espace. Avec Ali, Parker et Austria [AHP02, AH13], Hunter s'est aussi intéressé à des équations plus générales possédant une structure hamiltonienne, qui peuvent aussi générer des ondes de surface. Citons également Serre [Ser06] qui étudie l'apparition d'ondes de surface pour des problèmes aux limites variationnels. Ce phénomène est l'analogie des ondes de Rayleigh en élastodynamique, traitées par Lardner [Lar83], Parker [Par85] ou encore par Hamilton, Il'insky et Zabolotskaya [HIZ95] (bien qu'il s'agisse ici d'un système du second ordre, contrairement au système du premier ordre (1.2.6)).

Le domaine de l'optique géométrique est une branche de l'analyse des équations aux dérivées partielles dont les outils ont été initiés de façon profonde par Lax [Lax57] sur les *systèmes hyperboliques linéaires*, et développés encore récemment par Joly, Métivier, Rauch [JMR93, JMR95], Guès [Guè93], Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier [CDGG02], Gérard-Varet et Rousset [GVR07], Rauch et Métivier [MR11], Iftimie et Sueur [IS11], ou encore Rauch [Rau12]. L'objectif est de décrire de façon qualitative le comportement des solutions de systèmes d'EDP, issues de données initiales fortement oscillantes et/ou comprenant des termes sources fortement oscillants (typiquement en $\frac{1}{\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, qui peut être interprété comme une longueur d'onde en physique). L'idée est ensuite "d'espérer" que la solution exacte u_ε hérite des propriétés fortement oscillantes des données initiales et/ou des termes sources. On cherche alors à décrire le comportement asymptotique de la solution exacte u_ε sous la forme d'un développement asymptotique en puissances de ε , et chaque profil associé à l'ordre ε^m , pour $m \in \mathbb{N}$, est donné par une fonction fortement oscillante u^m . La démarche consiste ensuite à déterminer ces profils u^m , ce qui se fait communément par récurrence, comme on le verra au Chapitre 5 sur le cas particulier des nappes de tourbillon-courant incompressibles.

Des contributions majeures ont depuis été apportées dans l'étude des problèmes *non-linéaires* (la liste qui suit est très loin d'être exhaustive). Citons par exemple les travaux de Choquet-Bruhat [CB69], Joly, Métivier, Rauch [JMR93, JMR95], ou encore Guès [Guè93], qui traite le problème de Cauchy associé à des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. Williams [Wil96, Wil99] s'est intéressé au cas des problèmes aux limites hyperboliques vérifiant la condition de Lopatinskii uniforme. Citons également l'article de Benzoni-Gavage, Rousset, Serre et Zumbrun [BGRSZ02] qui s'intéressent à une classe particulière (appelée "classe WR") de problèmes aux limites hyperboliques pour lesquels la condition de Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée. Dans ce même esprit, Coulombel et Benzoni-Gavage [BGC12], ainsi que Coulombel et Williams [CW16] ont étudié le cas des ondes de surface faiblement non-linéaires, qui peuvent survenir lorsque la condition de Lopatinskii uniforme fait défaut dans la zone elliptique. Marcou [Mar10, Mar11] a récemment étudié des problèmes aux limites hyperboliques (en dimension 2 d'espace) qui rentrent dans ce dernier cas, et donnent lieu à des ondes de surface. Le travail mené dans cette seconde partie de thèse s'inscrit notamment dans la continuité des travaux de Marcou.

Revenons sur le cas des nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible (système (1.2.6)). L'apparition d'ondes de surface peut s'expliquer en procédant à une analyse modale : on cherche à savoir s'il peut exister des ondes de la forme $\exp[i((\tau - i\gamma)t + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)]$, avec $\tau \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi_3 \in \mathbb{C}$, solutions du système *linéarisé* des nappes de tourbillon-courant incompressibles (autour d'un état de référence constant $(U^{0,\pm}, f^0)$, comme défini par (1.2.16) avec $f^0 \equiv 0$ pour simplifier). Ici, $x_3 \geq 0$ désigne la coordonnée normale à la nappe plane. Du fait des contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique, ce système n'est pas un système hyperbolique "standard". En revanche, la méthode employée est analogue à celle utilisée dans le cadre des systèmes hyperboliques [BGS07], comme nous l'avons rappelé au Paragraphe 1.2.1 : on cherche à vérifier la condition de Kreiss-Lopatinskii *simple* et/ou *uniforme*, afin d'en déduire un critère de stabilité pour les nappes *planes*. L'analyse du problème linéarisé menée par [Syr53, Cha61, Axf62], et plus récemment revisitée par [MTT08], établit en premier lieu le critère nécessaire de stabilité (1.2.17) en éliminant le cas $\gamma > 0$ pour lequel la solution explose (le problème serait alors *fortement mal posé*). Le cas limite qui nous intéresse est lorsque $\gamma = 0$: le problème est dit *faiblement bien posé*. Morando, Trakhinin et Trebeschi [MTT08] montrent que ce cas est possible si et seulement si $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ est racine d'un certain déterminant de Lopatinskii. En particulier, seule la

condition de Lopatinskii *faible* est vérifiée, et il n'existe pas de nappe plane pour laquelle le déterminant de Lopatinskii ne s'annule pas lorsque $\gamma \geq 0$: la condition de Lopatinskii *uniforme* n'est jamais satisfaite.

Les fréquences $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$, racines du déterminant de Lopatinskii, peuvent se paramétrer par (ξ_1, ξ_2) , c'est-à-dire par une équation de la forme $\tau = \tau(\xi_1, \xi_2)$. Sous l'hypothèse de stabilité (1.2.18), et à (ξ_1, ξ_2) fixé, il existe exactement deux racines *simples* $\tau_{\pm} = \tau_{\pm}(\xi_1, \xi_2)$, correspondant à des *fréquences elliptiques*, car la fréquence normale ξ_3 associée est alors imaginaire pure ; ces fréquences vont être à l'origine de la formation d'ondes de surface, correspondant au cas $\text{Im } \xi_3 \geq 0$ (selon le signe de x_3), pour lesquelles la solution va décroître exponentiellement par rapport à x_3 .

Dans d'autres problèmes d'hydrodynamique, tels que les ondes de détonation étudiées par Majda et Rosales [MR83,MR84], les nappes de tourbillon compressibles étudiées par Artola et Majda [AM87,AM89] ou les ondes de choc étudiées par Serre [Ser01], le cas $\xi_3 \in \mathbb{R}$ se présente, et on parle alors d'ondes "internes", qui se propagent dans tout le domaine (*bulk waves*). Ce dernier cas ne se présente pas pour les nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible.

Cette deuxième partie de la thèse est constituée du Chapitre 5 dont on expose le contenu plus en détails ci-après.

Chapitre 5. Au sein de ce chapitre, nous étudions le système des nappes de tourbillon-courant incompressibles (1.2.6), adjoint d'une donnée initiale *fortement oscillante* (en $\frac{1}{\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit). Grâce aux outils de l'optique géométrique, on construit des solutions approchées sous la forme d'un développement asymptotique en puissances de ε . Cette analyse a débuté par les travaux de Alì et Hunter [AH03] : ils étudient le cas de la dimension 2 d'espace et donnent un développement asymptotique *formel* à deux termes. Dans ce chapitre, on poursuit leur analyse dans le cas de la dimension 3 d'espace, et on construit des solutions approchées à un ordre "élevé" en ε . L'idée est donc d'adapter les outils déjà existants pour l'étude des systèmes hyperboliques non-linéaires, sur le cas particulier des nappes de tourbillon-courant incompressibles ; ce système n'est pas un système hyperbolique "standard" du fait de la présence des contraintes de *divergence nulle* sur la vitesse et le champ magnétique. Un des enjeux majeurs sera donc de comprendre comment interviennent ces deux contraintes dans la construction du développement BKW.

Conformément à (1.2.16), on se fixera une *nappe plane* $(U^{0,\pm}, \psi^1)$ de référence (dans tout ce chapitre, le front f est noté ψ pour reprendre les notations de [AH03]), solution constante par morceaux du système des nappes de tourbillon-courant :

$$U^{0,\pm} := (u_1^{0,\pm}, u_2^{0,\pm}, 0, H_1^{0,\pm}, H_2^{0,\pm}, 0, 0), \quad \psi^1 := 0. \quad (1.3.2)$$

On supposera que cette nappe plane vérifie l'hypothèse de stabilité (1.2.18), et on considérera des données initiales comme étant des petites perturbations hautement oscillantes de la nappe plane $(U^{0,\pm}, \psi^1)$. Pour cela, nous définirons :

$$\psi_{\varepsilon}(t=0, x') := \varepsilon^2 \psi_0^2 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right), \quad (1.3.3)$$

où ψ_0^2 sera de classe C^{∞} . Plus généralement, nous pourrions prendre des profils $\psi_0^2, \psi_0^3, \psi_0^4, \dots$ et considérer la donnée initiale :

$$\psi_{\varepsilon}(t=0, x') = \varepsilon^2 \psi_0^2 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^3 \psi_0^3 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^4 \psi_0^4 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \dots,$$

mais cela n'introduirait aucune difficulté supplémentaire ; on restreindra donc notre étude au cas de la donnée initiale (1.3.3) pour alléger quelques passages dans l'analyse qu'on mènera au Chapitre 5. Le choix de la donnée initiale sur $U_{\varepsilon}^{\pm} = (u_{\varepsilon}^{\pm}, H_{\varepsilon}^{\pm}, q_{\varepsilon}^{\pm})$ ne sera *pas libre*, nous discuterons de ce point ci-après. Poursuivant l'analyse de [AH03], on cherche un développement asymptotique de la solution exacte $(U_{\varepsilon}^{\pm}, \psi_{\varepsilon})$

du système (1.2.6) comme une petite perturbation hautement oscillante de la nappe plane $(U^{0,\pm}, \psi^1)$, c'est-à-dire de la forme :

$$U_\varepsilon^\pm(t, x) \sim U^{0,\pm} + \sum_{m \geq 1} \varepsilon^m U^{m,\pm} \left(t, x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'), \frac{x_3 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \quad (1.3.4a)$$

$$\psi_\varepsilon(t, x') \sim \sum_{m \geq 2} \varepsilon^m \psi^m \left(t, x', \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \quad (1.3.4b)$$

Dans (1.3.4a), les profils $U^{m,\pm}$ sont des fonctions de 6 variables notées $(t, y_1, y_2, y_3, Y_3, \theta)$, et seront cherchées 2π -périodiques par rapport à θ . Les variables (t, y) seront qualifiées de “lentes”, tandis que les variables (Y_3, θ) seront qualifiées de “rapides” (du fait de la présence du facteur $\frac{1}{\varepsilon}$). Pour l'instant, on ne précise pas les domaines auxquels appartiennent ces variables, ni les espaces fonctionnels dans lesquels nous chercherons les profils $U^{m,\pm}$. Notons que le changement de variable $y_3 \leftrightarrow x_3 - \psi_\varepsilon(t, x')$ au sein des profils $U^{m,\pm}$ dans (1.3.4a) sert à redresser le front afin de se ramener aux demi-espaces $\{y_3 \geq 0\}$. Enfin, les profils ψ^m dans (1.3.4b) sont des fonctions de 4 variables notées (t, y_1, y_2, θ) , et 2π -périodiques par rapport à θ ; on reste volontairement imprécis sur les espaces fonctionnels dans lesquels nous chercherons ces profils.

L'un des premiers enjeux sera de déterminer les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ dans (1.3.4a) et (1.3.4b). Pour ce faire, nous injecterons les anzats (1.3.4) dans le système (1.2.6), puis en identifiant les termes selon les puissances de ε , on pourra en déduire une *cascade d'équations* satisfaites par les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$. Cette cascade s'écrira sous la forme :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}, & \forall t, y, Y_3, \theta, \\ B^+ U^{m+1,+} + B^- U^{m+1,-} - \partial_\theta \psi^{m+2} \mathfrak{b} = G^{m,+} + G^{m,-}, & \forall t, y', \theta, \quad y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Ici, on n'entre pas dans les détails complets : nous verrons au Chapitre 5 les définitions explicites de l'opérateur différentiel $L_f^\pm(\partial)$, des matrices de bord $B^+, B^- \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$, et du vecteur $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^5$. Les termes sources $F^{m,\pm}$ et $G^{m,\pm}$ dans (1.3.5) dépendent des profils “antérieurs” $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$, et seront également explicités au Chapitre 5. La première équation du système (1.3.5) provient des deux équations d'évolution sur la vitesse et le champ magnétique de (1.2.6) ainsi que de la contrainte de divergence nulle sur la vitesse. En revanche, du fait de son caractère non-évolutif, nous choisissons de traiter à part la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. En effet, pour la solution exacte de (1.2.6) (avec des données initiales adéquates), la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique n'est qu'une *restriction sur la donnée initiale*, comme nous le ferons remarquer au Chapitre 3. Cette contrainte peut donc être omise du système (1.2.6), ce qui ramène l'étude à un système “plus simple”. Toutefois, dans ce chapitre, nous garderons la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique, car nous ne prescrivons pas de données initiales pour $(u_\varepsilon^\pm, H_\varepsilon^\pm, q_\varepsilon^\pm)$. En effet, celles-ci ne seront en fait pas libres, comme nous le mentionnerons ci-après. Il faudra donc adjoindre à la cascade (1.3.5) une contrainte sur les profils $H^{m,\pm}$ associés au champ magnétique, qui s'écrira comme suit :

$$\partial_{Y_3} H_3^{m+1,\pm} + \xi_1 \partial_\theta H_1^{m+1,\pm} + \xi_2 \partial_\theta H_2^{m+1,\pm} = F_8^{m,\pm}, \quad \forall t, y, Y_3, \theta. \quad (1.3.6)$$

Le terme source $F_8^{m,\pm}$ de (1.3.6) sera analogue à $F^{m,\pm}$ dans (1.3.5), c'est-à-dire qu'il ne dépendra que des profils “antérieurs” $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$.

Il est important de noter que la donnée initiale associée à $U_\varepsilon^\pm = (u_\varepsilon^\pm, H_\varepsilon^\pm, q_\varepsilon^\pm)$ n'est pas arbitraire. Tous les profils $U^{m,\pm}$, pour $m \geq 1$, seront en effet déterminés pour des temps $t \in [0, T]$. En particulier, on calculera la donnée initiale pour U_ε^\pm en même temps que la solution approchée en temps $t > 0$. Ceci restreint donc le choix des données initiales pour U_ε^\pm ; néanmoins, le choix de ψ_0^2 dans (1.3.3) sera, quant à lui, *libre*. On demandera au front ψ_ε (dont le développement asymptotique est recherché sous la forme

(1.3.4b)) de coïncider avec la fonction (1.3.3) à l’instant initial $t = 0$. Autrement dit, on impose les conditions initiales suivantes sur les profils ψ^m intervenant dans (1.3.4b) :

$$\forall y', \theta, \quad \psi^2(t = 0, y', \theta) = \psi_0^2(y', \theta) \quad \text{et} \quad \forall m \geq 3, \quad \forall y', \theta, \quad \psi^m(t = 0, y', \theta) = 0. \quad (1.3.7)$$

La première étape consistera à déterminer le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$. Nous détaillerons complètement la démarche, ce qui permettra de comprendre comment les arguments peuvent s’adapter pour la détermination des correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$. Nous verrons que le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ devra satisfaire le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant autour de l’état constant $(U^{0,\pm}, \psi^1)$ que l’on s’est fixé. C’est pourquoi nous commencerons le Chapitre 5 en rappelant les propriétés fondamentales de stabilité du système linéarisé, dont l’étude a été faite par [Syr53, Cha61, Axf62] et revisitée par [MTT08, Cat13]. Après quoi, nous verrons que le profil principal $U^{1,\pm}$ pourra se paramétrer par le profil principal ψ^2 associé au front. Il restera ensuite à identifier le profil ψ^2 . Pour ce faire, nous utiliserons le système que devra satisfaire le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$. Grâce à une condition de type “alternative de Fredholm”, nous exhiberons une condition d’orthogonalité que devra satisfaire le profil principal ψ^2 . Cette condition d’orthogonalité aboutira alors à une équation de type Hamilton-Jacobi non-locale et non-linéaire vérifiée par ψ^2 , qui s’écrira :

$$\partial_t \psi^2 + v_1 \partial_{y_1} \psi^2 + v_2 \partial_{y_2} \psi^2 + \mathbb{H}[b(\psi^2, \psi^2)] = 0. \quad (1.3.8)$$

Dans (1.3.8), v_1, v_2 sont des coefficients réels et \mathbb{H} désigne la transformée de Hilbert que l’on définit sur l’ensemble des fonctions 2π -périodiques à moyenne nulle comme suit :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{\mathbb{H}[\varphi]}(k) := -i \operatorname{sgn}(k) \widehat{\varphi}(k),$$

où $\widehat{\varphi}(k)$ désigne le k -ième coefficient de Fourier de φ , et $\operatorname{sgn}(k)$ est défini par $\operatorname{sgn}(k) := \frac{k}{|k|}$, pour $k \neq 0$. L’application bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ dans (1.3.8) sera définie (au moins sur l’espace des fonctions 2π -périodiques, de classe \mathcal{C}^∞ et à moyenne nulle) de la façon suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{b(\varphi, \psi)}(k) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \Lambda(k - \ell, \ell) \widehat{\varphi}(k - \ell) \widehat{\psi}(\ell).$$

Dans le cas des nappes de tourbillon-courant incompressibles, le noyau de convolution $\Lambda(\cdot, \cdot)$ aura pour expression :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \Lambda(k, k') = \frac{2|k||k'| |k + k'|}{|k| + |k'| + |k + k'|}. \quad (1.3.9)$$

L’équation (1.3.8) (avec $v_1 = v_2 = 0$), associée à des noyaux de convolution Λ plus généraux que (1.3.9) (mais présentant d’importantes propriétés de symétrie), a été étudiée par Hunter [Hun06] et Benzoni-Gavage [BG09], puis revisitée par Marcou [Mar10]. Ils obtiennent un résultat d’existence et d’unicité locale pour le problème de Cauchy associé à (1.3.8), dans une échelle de régularité Sobolev. Ce type d’équation permet de décrire divers phénomènes de propagation d’ondes faiblement non-linéaires, comme l’explique Hunter dans [Hun06]. Le caractère bien posé de l’équation (1.3.8) permettra ainsi de déterminer le profil principal ψ^2 associé au front, ce qui terminera l’identification du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$. Ensuite, nous nous intéresserons aux correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$, et nous verrons que l’on pourra les déterminer par récurrence. Les développements d’optique géométrique effectués dans ce chapitre s’inscrivent dans un régime *faiblement non-linéaire*, du fait de la *faible amplitude* associée aux profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ dans (1.3.4) et de l’équation *non-linéaire* (1.3.8) permettant de déterminer le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$.

Une fois construite la suite de profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$, nous disposerons d’une solution approchée à l’ordre M , notée $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$, s’exprimant sous la forme suivante (nous restons volontairement imprécis en omettant les variables) :

$$\begin{aligned} U_{app,\varepsilon}^{M,\pm} &:= U^{0,\pm} + \varepsilon U^{1,\pm} + \varepsilon^2 U^{2,\pm} + \dots + \varepsilon^M U^{M,\pm}, \\ \psi_{app,\varepsilon}^M &:= \varepsilon^2 \psi^2 + \dots + \varepsilon^{M+1} \psi^{M+1}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

La donnée initiale “exacte” à considérer pour résoudre le système (1.2.6) s’écrira sous la forme

$$U_\varepsilon^\pm|_{t=0} := (U_{app,\varepsilon}^{M,\pm})|_{t=0} + \mathcal{U}_\varepsilon^{M,\pm},$$

où $\mathcal{U}_\varepsilon^{M,\pm}$ sera un terme correcteur permettant d’assurer les contraintes de divergence nulle pour la vitesse initiale $u_\varepsilon^\pm|_{t=0}$ et le champ magnétique initial $H_\varepsilon^\pm|_{t=0}$. L’entier M sera quant à lui restreint à appartenir à l’ensemble $\{1, \dots, 6\}$.

Nous aurons à ce stade démontré le théorème suivant (qu’on énonce à dessein sous une forme imprécise, pour illustrer l’idée générale du résultat de ce chapitre) :

Théorème 1.3.1

Soit une nappe plane de référence $U^{0,\pm}$ donnée par (1.3.2) et satisfaisant la condition de stabilité (1.2.18) ; soient également une fréquence temporelle $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et une fréquence spatiale $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, annulant le déterminant de Lopatinskii.

Soit $\psi_0^2 \in H^\infty$ une donnée initiale définissant la perturbation hautement oscillante (1.3.3) du front, et à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable θ .

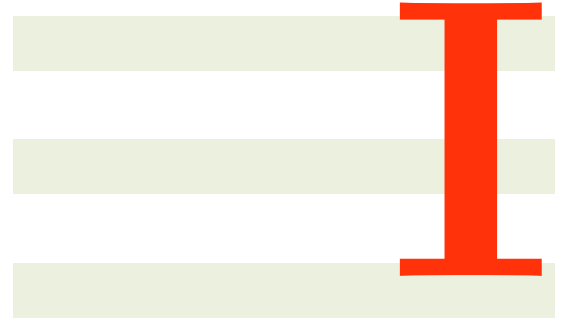
Alors il existe un temps $T > 0$, ne dépendant que d’une norme Sobolev fixée de ψ_0^2 , ainsi qu’une suite de profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ (dans un espace fonctionnel adéquat), vérifiant la cascade BKW (1.3.5) adjointe des conditions initiales (1.3.7) ; ces profils satisfont également les contraintes (1.3.6), provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Cette suite peut être choisie telle que, pour tout entier $M \in \{1, \dots, 6\}$, la solution approchée $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ définie par (1.3.10) vérifie les propriétés suivantes :

- (i) le profil principal $U^{1,\pm}$ et le premier correcteur $U^{2,\pm}$ sont purement localisés près de la surface libre ;*
- (ii) les profils ψ^m , pour $m \geq 2$, associés au front sont à moyenne nulle par rapport à leur dernière variable θ .*

Remarques. On est resté volontairement vague sur le point (i) du Théorème 1.3.1. La notion “être purement localisé près de la surface libre” sera définie de manière précise dans le Théorème 5.2.2 du Chapitre 5. Pour fixer les idées, il faut avoir en tête que les profils $U^{1,\pm}$ et $U^{2,\pm}$ obtenus décroîtront exponentiellement vers **zéro** loin de la frontière libre : c’est ce qui forme le caractère “onde de surface” du développement BKW (1.3.4a).

Nous avons ici besoin de la condition de stabilité (1.2.18) pour pouvoir construire les solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$. Cela provient du fait que la construction des profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ est intimement liée au caractère bien posé du système linéarisé des nappes de tourbillon-courant, ce qui nécessite la condition de stabilité (1.2.18).

L’appellation “solutions approchées” est à ce stade abusive. En effet, bien que les solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ vérifieront par construction un système des nappes de tourbillon-courant approché, il n’est pas encore clair de savoir si elles seront effectivement proches des solutions exactes (dans une topologie convenable). Ce résultat de **stabilité** des solutions “approchées” pourra constituer un nouveau travail de recherche ultérieur. On pourrait envisager d’exploiter les résultats de [SWZ15] pour obtenir des estimations d’énergie sur les solutions approchées. La difficulté est d’incorporer des termes de faible amplitude et hautement oscillants dans les équations de (1.2.6), pour ensuite les estimer dans des espaces fonctionnels *ad hoc*. Une première piste serait d’adapter la méthode de Leray-Gårding [Går56] fournissant des estimations d’énergie pour les équations hyperboliques *scalaires*, en combinant le résultat de Guès [Guè92] (puis revisité par Métivier [Mét09] ainsi que Marcou [Mar10]) sur les *systèmes* hyperboliques à coefficients de faible amplitude et hautement oscillants.



Solutions analytiques au problème des
nappes de tourbillon-courant en
magnétohydrodynamique idéale
incompressible

Espaces fonctionnels

Dans ce chapitre, nous présentons les espaces fonctionnels que l'on manipulera dans les Chapitres 3 et 4, qui permettront d'appliquer un théorème de Cauchy-Kowalevskaya [Nir72, Nis77, BG78]. Comme nous nous placerons dans un domaine de \mathbb{R}^3 , nous ne disposerons pas de l'analyse de Fourier afin de caractériser l'analyticité d'une fonction. Pour palier à cette difficulté, on s'inspirera des travaux de Sedenko [Sed94], dans lesquels celui-ci utilise la caractérisation de l'analyticité par la décroissance des normes des dérivées dans les espaces de Hölder. Les espaces fonctionnels que l'on définira s'appuieront plutôt sur les espaces de Sobolev, ce qui diffère légèrement du cadre posé par Sedenko.

Nous donnerons tous les prérequis concernant les propriétés satisfaites par ces espaces fonctionnels. En particulier, on donnera des estimations sur la *dérivée* d'une fonction, ainsi que sur le *produit* de deux fonctions appartenant à ces espaces, ce qui les munira d'une propriété d'algèbre. Pour estimer un produit de fonctions, nous aurons notamment besoin d'appliquer la formule de Leibniz ; cette dernière faisant intervenir les coefficients multinomiaux, nous rappellerons quelques outils de base de combinatoire tels que la formule du multinôme ou le calcul de certaines sommes de coefficients multinomiaux [Com70]. L'estimation de la dérivée d'une fonction appartenant aux espaces introduits sera cruciale, car on retrouvera l'estimation "type" qui figure dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

La définition intrinsèque des espaces de Banach introduits (et surtout de leur norme) servira aux Chapitres 3 et 4 pour comprendre en particulier comment le terme de pression dans les systèmes (1.1.1) et (1.2.6) pourra être estimé.

2.1 Rappels de quelques éléments de combinatoire

Cette partie est consacrée à des rappels de combinatoire, qui nous seront utiles ultérieurement. Tous les résultats énoncés peuvent se retrouver dans [Com70].

2.1.1 Formule du multinôme

Commençons par quelques notations (on se restreint à la dimension 3, pour plus de clarté). Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, on notera

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \quad \text{et} \quad \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!.$$

La longueur du multi-indice α , notée $|\alpha|$, est définie par $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. On énonce ci-après la formule du multinôme, en dimension 3. Soient $x \in \mathbb{R}^3$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors la formule du multinôme s'écrit :

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^3 \\ |\alpha| = n}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (2.1.1)$$

Le coefficient multinomial $\binom{n!}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} := \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}$ s'interprète également comme le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en 3 sous-ensembles de cardinaux respectifs α_1 , α_2 et α_3 . En particulier, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^3, \quad \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \geq 1.$$

D'autre part, une conséquence directe de (2.1.1) est l'inégalité suivante, valable pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$:

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \leq 3^{|\alpha|}.$$

En effet, posons $n := |\alpha|$ et écrivons :

$$\frac{n!}{\alpha!} \leq \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^3 \\ |\beta| = n}} \frac{|\beta|!}{\beta!} = (1 + 1 + 1)^n = 3^{|\alpha|}.$$

On en déduit les deux inégalités suivantes sur les multi-indices α de \mathbb{N}^3 :

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq 3^{|\alpha|} \alpha!. \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Formule de Vandermonde, généralisation

La formule de Vandermonde "classique" est souvent présentée de la sorte :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}, \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}. \quad (2.1.3)$$

Une démonstration purement algébrique consiste à développer de deux façons différentes le polynôme d'une variable $(1+X)^{m+n}$: d'une part en développant directement $(1+X)^{m+n}$ à l'aide du binôme de Newton, et d'autre part en écrivant $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m (1+X)^n$, et en utilisant deux fois le binôme de Newton. La formule (2.1.3) en découle en identifiant les puissances de X .

En s'inspirant de cette méthode, nous obtenons une généralisation de (2.1.3). On se donne $\alpha' \in \mathbb{N}^2$, et on note $n := |\alpha'|$; soient également $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ tels que $i_1 + i_2 = n$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\sum_{\substack{\beta' + \gamma' = \alpha' \\ |\beta'| = i_1, |\gamma'| = i_2}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'!} = \frac{n!}{i_1! i_2!}, \quad (2.1.4)$$

où β' , et γ' désignent des multi-indices de \mathbb{N}^2 .

Démonstration. Considérons le polynôme de deux variables $P(X, Y) := (X + Y)^n$. En appliquant (2.1.1), on obtient d'une part :

$$(X + Y)^n = \sum_{j_1 + j_2 = n} \frac{n!}{j_1! j_2!} X^{j_1} Y^{j_2}. \quad (2.1.5)$$

D'autre part, puisque $n = \alpha_1 + \alpha_2$, on peut écrire :

$$P(X, Y) = \prod_{i=1}^2 (X + Y)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^2 \sum_{\beta_i + \gamma_i = \alpha_i} \frac{\alpha_i!}{\beta_i! \gamma_i!} X^{\beta_i} Y^{\gamma_i} = \sum_{\beta' + \gamma' = \alpha'} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'!} X^{|\beta'|} Y^{|\gamma'|}.$$

Ci-dessus, on a noté $\beta' = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$, et ainsi de suite. En sommant selon la longueur des multi-indices, il vient :

$$P(X, Y) = \sum_{j_1 + j_2 = n} \left(\sum_{\substack{\beta' + \gamma' = \alpha' \\ |\beta'| = j_1, |\gamma'| = j_2}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'!} \right) X^{j_1} Y^{j_2}. \quad (2.1.6)$$

En identifiant les coefficients des monômes $X^{j_1} Y^{j_2}$ dans (2.1.5) et (2.1.6), on obtient bien la formule (2.1.4). □

La formule (2.1.4) peut se généraliser également pour des multi-indices de \mathbb{N}^3 . La démonstration est analogue, et se base cette fois-ci sur le développement du polynôme de trois variables $(X + Y + Z)^n$. On obtient alors, pour $\alpha \in \mathbb{N}^3$, la formule suivante :

$$\sum_{\substack{\beta + \gamma + \delta = \alpha \\ |\beta| = i_1, |\gamma| = i_2, |\delta| = i_3}} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma! \delta!} = \frac{n!}{i_1! i_2! i_3!}, \quad (2.1.7)$$

où β, γ et δ désignent des multi-indices de \mathbb{N}^3 , et $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}$ vérifient $i_1 + i_2 + i_3 = n := |\alpha|$.

2.1.3 Formule de Leibniz

Pour $i = 1, 2, 3$, on notera les dérivées partielles par rapport à x_i (variables d'espaces par défaut) simplement ∂_i . Si $\alpha \in \mathbb{N}^3$, on notera ∂^α pour désigner la dérivée $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \partial_3^{\alpha_3}$.

On rappelle ci-après la formule de Leibniz (en dimension 3 également), qui donne la dérivée d'un produit de fonctions. Soient u et v deux fonctions supposées de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 (pour simplifier), alors pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$, on a :

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} \partial^\beta u \partial^\gamma v. \quad (2.1.8)$$

2.2 Espaces de Sobolev

Dans cette partie, nous rappelons les propriétés de base des espaces de Sobolev que l'on utilisera par la suite. On pourra se référer par exemple à [BGS07, Bre83, Eva98, Che98, Tri10, Zui02].

2.2.1 Définitions

Espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^d .

Définition 2.2.1

Pour $r \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $H^r(\mathbb{R}^d)$ par :

$$H^r(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq r, \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}, \quad (2.2.1)$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{H^r(\mathbb{R}^d)}$ définie par :

$$\|u\|_{H^r(\mathbb{R}^d)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq r} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (2.2.2)$$

Les dérivées $\partial^\alpha u$ sont à prendre au sens des distributions. À l'aide du théorème de Plancherel, la norme définie par (2.2.2) est équivalente à la norme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^r |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.3)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \widehat{u} est la transformée de Fourier de u , définie comme suit (au moins pour u dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) :

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-i x \cdot \xi} dx. \quad (2.2.4)$$

On utilisera indifféremment les définitions (2.2.2) et (2.2.3) pour désigner la norme sur $H^r(\mathbb{R}^d)$ (et seulement lorsqu'on sera sur \mathbb{R}^d tout entier).

Muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^r(\mathbb{R}^d)}$ défini par

$$(u, v)_{H^r(\mathbb{R}^d)} := \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u \cdot \overline{\partial^\alpha v} dx, \quad (2.2.5)$$

l'espace de Sobolev $H^r(\mathbb{R}^d)$ est alors un espace de Hilbert.

Remarque. Si $s \in \mathbb{R}$, on peut également définir $H^s(\mathbb{R}^d)$ via la transformée de Fourier :

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ définie par :

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

On rappelle que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^d .

Espaces de Sobolev périodiques.

Notons $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore 1-périodique, c'est-à-dire l'intervalle $[0, 1]$ dont on identifie les extrémités 0 et 1.

Définition 2.2.2

Pour $s \in \mathbb{R}_+$, on définit l'espace de Sobolev périodique d -dimensionnel par (voir par exemple [Tri10]) :

$$H^s(\mathbb{T}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}^d) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (1 + |n|^2)^s |c_n(u)|^2 < +\infty \right\}, \quad (2.2.6)$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}$ définie par :

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}^2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (1 + |n|^2)^s |c_n(u)|^2. \quad (2.2.7)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^d$, on a noté dans (2.2.6) et (2.2.7) $c_n(u)$ le n -ième coefficient de Fourier de la fonction u , dont on rappelle la définition :

$$c_n(u) := \int_{\mathbb{T}} u(x) e^{-2i\pi n \cdot x} dx.$$

Comme pour les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$, nous disposons donc d'une caractérisation pratique des espaces $H^s(\mathbb{T}^d)$ grâce aux séries de Fourier.

Muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^s(\mathbb{T}^d)}$ défini par

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{T}^d)} := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (1 + |n|^2)^s c_n(u) \overline{c_n(v)},$$

l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$ est alors un espace de Hilbert.

Espaces de Sobolev dans un domaine borné de \mathbb{R}^3 .

On considère à présent Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^3 . Pour $r \in \mathbb{N}$, la définition de $H^r(\Omega)$ est la même que (2.2.1) :

$$H^r(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq r, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (2.2.8)$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{H^r(\Omega)}$ définie par :

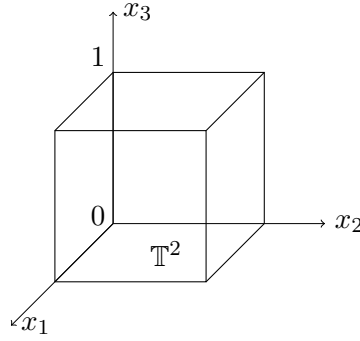
$$\|u\|_{H^r(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq r} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.2.9)$$

Prêtons attention au fait que dorénavant, nous ne disposons plus de caractérisation *via* la transformée de Fourier. Si $s \in \mathbb{R}_+$ n'est pas entier, on peut toujours définir un espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ par la théorie de l'interpolation [BL76, AF03], mais nous n'en aurons pas l'utilité dans la suite. On définit sur $H^r(\Omega)$ un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^r(\Omega)}$, dont l'expression est analogue à celle donnée par (2.2.5), qui en fait un espace de Hilbert.

Cas particulier : espace de Sobolev $H^r(\mathbb{T}^2 \times (0, 1))$.

Les équations de la magnétohydrodynamique que l'on considérera au Chapitre 3 seront posées dans un domaine du type $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$, c'est-à-dire dans une bande horizontale de la forme $\{0 \leq x_3 \leq 1\}$, et périodique par rapport à la variable tangentielle $x' := (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$. Dans les estimations *a priori* effectuées dans [CMST12], le cadre fonctionnel est donc donné par l'espace de Sobolev $H^r(\mathbb{T}^2 \times (0, 1))$, pour $r \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire, pour $u \in H^r(\mathbb{T}^2 \times (0, 1))$,

$$\|u\|_{H^r(\mathbb{T}^2 \times (0, 1))}^2 := \sum_{|\alpha| \leq r} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times (0, 1))}^2 = \sum_{k=0}^r \|\partial_3^k u\|_{L_{x_3}^2((0, 1); H^{r-k}(\mathbb{T}^2))}^2. \quad (2.2.10)$$

FIGURE 2.1 : Bande périodique $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$.

Par conséquent, on peut réécrire l'espace $H^r(\mathbb{T}^2 \times (0, 1))$ sous la forme :

$$H^r(\mathbb{T}^2 \times (0, 1)) = \bigcap_{k=0}^r H_{x_3}^k((0, 1); H^{r-k}(\mathbb{T}^2)).$$

D'un point de vue calculatoire, la norme donnée par (2.2.10) apporte un côté pratique. En effet, étant donné $k \in \{0, \dots, r\}$, on pourra calculer les normes $\|\partial_3^k u\|_{L_{x_3}^2((0,1); H^{r-k}(\mathbb{T}^2))}$ grâce aux séries de Fourier en la variable tangentielle $x' \in \mathbb{T}^2$.

2.2.2 Injections de Sobolev

Commençons par énoncer une injection classique, qui sera en partie à la base de la propriété d'algèbre des espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$, pour s assez grand.

Proposition 2.2.3

Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^d ($d \geq 1$). Alors pour $s > \frac{d}{2}$, on a l'injection :

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \quad (2.2.11)$$

En d'autres termes, il existe une constante $C_s > 0$, ne dépendant que de s et de Ω , telle que, pour toute fonction $u \in H^s(\Omega)$, on a l'estimation :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_s \|u\|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.2.12)$$

On énonce à présent certaines injections de Sobolev dont on se servira en dimension 2 et 3.

Proposition 2.2.4

Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). Alors on a les injections suivantes :

- Pour $d = 2$,

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), \quad \forall s > 1. \quad (2.2.13)$$

- Pour $d = 3$,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq 6, \quad (2.2.14a)$$

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \quad (2.2.14b)$$

En particulier, une conséquence de (2.2.14b) est l'injection suivante :

$$H^3(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega), \quad (2.2.15)$$

où $W^{1,\infty}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions appartenant à $L^\infty(\Omega)$ telles que leur gradient ∇u est également dans $L^\infty(\Omega)$.

Remarquons que les injections (2.2.13) et (2.2.14b) sont un cas particulier de (2.2.11).

2.2.3 Propriétés

Comme nous l'évoquions dans la partie précédente, lorsque s est suffisamment grand, les espaces $H^s(\Omega)$ acquièrent une propriété d'algèbre. Cette propriété s'en déduira de la proposition suivante.

Proposition 2.2.5

Soient Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^d , et $u, v \in H^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Alors on a :

$$uv \in H^s(\Omega) \quad \text{et} \quad \|uv\|_{H^s(\Omega)} \leq C_s \left(\|u\|_{H^s(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{H^s(\Omega)} \right),$$

où $C_s > 0$ est une constante ne dépendant que de s et de Ω .

Lorsque $s > \frac{d}{2}$, on en déduit un corollaire immédiat grâce à l'estimation (2.2.12).

Corollaire 2.2.6

Soient Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^d , et $u, v \in H^s(\Omega)$. Alors $uv \in H^s(\Omega)$, et satisfait l'estimation :

$$\|uv\|_{H^s(\Omega)} \leq C_s \|u\|_{H^s(\Omega)} \|v\|_{H^s(\Omega)}, \quad (2.2.16)$$

où $C_s > 0$ ne dépend que de s et de Ω . Autrement dit, l'espace $H^s(\Omega)$ est une algèbre dès lors que $s > \frac{d}{2}$.

Nous donnons maintenant une estimation douce de composées de fonctions, dans un cas bien particulier (voir par exemple [Lan13, p.283]) :

Proposition 2.2.7

Soient $r \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné et régulier. On considère $u \in H^r(\Omega)$ telle que :

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad c_0^{-1} \leq 1 + u(x) \leq c_0.$$

Alors la fonction $\frac{1}{1+u}$ appartient à $H^r(\Omega)$, et satisfait l'estimation :

$$\left\| \frac{1}{1+u} \right\|_{H^r(\Omega)} \leq C_{r,c_0} (1 + \|u\|_{H^r(\Omega)}), \quad (2.2.17)$$

où $C_{r,c_0} > 0$ ne dépend que de r , c_0 et Ω .

Pouvoir estimer l'inverse d'une fonction donnée peut s'avérer utile lorsqu'on procède par exemple à des changements de variables. En effet, des calculs de dérivées pourront faire apparaître **le jacobien** du changement de variables, mais aussi **son inverse**.

La démonstration de la Proposition 2.2.7 consiste à écrire les dérivées $\partial^\beta \left(\frac{1}{1+u} \right)$ ($|\beta| \leq r$) à l'aide de la formule de Faà di Bruno, puis à en estimer les normes L^2 en appliquant l'inégalité de Hölder généralisée,

ainsi que l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Lorsque r n'est pas entier, on obtient la même estimation par la technique de Meyer (voir par exemple [AG91]).

Maintenant que nous avons rappelé les propriétés principales des espaces de Sobolev, nous allons pouvoir construire des *échelles d'espaces de Banach*, dont la définition s'appuie sur les espaces de Sobolev $H^r(\Omega)$.

2.3 Échelles d'espaces de Banach

2.3.1 Échelle d'espaces de Banach sur le domaine $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$

Dans tout le Paragraphe 2.3.1, Ω désignera le domaine $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$. On notera également

$$\Gamma := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_+ := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 1\}.$$

La norme sur l'espace de Sobolev $H^r(\Omega)$, pour $r \in \mathbb{N}$, sera simplement notée $\|\cdot\|_{H^r}$. On se donne également un paramètre $\rho_0 > 0$ fixé une fois pour toutes. Les définitions des espaces fonctionnels suivants sont inspirées de la construction faite par Sedenko [Sed94].

Définition 2.3.1

Soient $(r, k) \in \mathbb{N}^2$ et $\rho \in (0, \rho_0]$. On définit l'espace $B_{\rho,r}^k$ par

$$B_{\rho,r}^k := \left\{ u \in H_{x_3}^{k+r}((0, 1); H^\infty(\mathbb{T}^2)) \mid \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r} < +\infty \right\},$$

où α désignera toujours un multi-indice de \mathbb{N}^3 et $|\alpha|$ sa longueur. Sur $B_{\rho,r}^k$ on définit la norme $\|\cdot\|_{\rho,r}^k$ par

$$\|u\|_{\rho,r}^k := \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r}.$$

Les sommes partielles seront notées

$$\|u\|_{\rho,r}^{k,N} := \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r}.$$

Proposition 2.3.2

À (r, k) fixé, la suite $(B_{\rho,r}^k)_{0 < \rho \leq \rho_0}$ forme une échelle d'espaces de Banach, c'est-à-dire :

$$\forall 0 < \rho' \leq \rho \leq \rho_0, \quad B_{\rho',r}^k \supset B_{\rho,r}^k, \quad \text{avec} \quad \|\cdot\|_{\rho',r}^k \leq \|\cdot\|_{\rho,r}^k.$$

Démonstration. Les deux derniers points sont directs. Il suffit de montrer la complétude des espaces $B_{\rho,r}^k$. Soit $(u_p) \subset B_{\rho,r}^k$ une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq p_0, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u_p - \partial^\alpha u_q\|_{H^r} < \varepsilon. \quad (*)$$

En particulier, à α fixé tel que $\alpha_3 \leq k$, la suite $(\partial^\alpha u_p)$ est de Cauchy dans H^r , donc converge vers un élément $u_\alpha \in H^r$. Pour $\alpha = 0$, notons $u := \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p$ (pour la topologie de H^r). En passant à la

limite dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'unicité de la limite permet d'obtenir $u_\alpha = \partial^\alpha u$, donc $u \in H_{x_3}^{k+r}((0, 1); H^\infty(\mathbb{T}^2))$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $p \geq p_0$ donnés, passons à la limite en q dans l'inégalité (*) :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u_p - \partial^\alpha u\|_{H^r} \leq \varepsilon. \quad (**)$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on a $u \in B_{\rho,r}^k$. Enfin, l'inégalité (**) montre que la suite (u_p) converge vers u dans $B_{\rho,r}^k$, ce qui conclut quant à la complétude des espaces $B_{\rho,r}^k$. □

En vue d'appliquer un théorème de Cauchy-Kowalevskaya, nous aurons besoin de propriétés d'algèbre et de dérivation dans les espaces $B_{\rho,r}^k$. Les deux propositions suivantes donnent de telles propriétés.

Proposition 2.3.3

Soient $r \in \mathbb{N}$ tel que $r > \frac{3}{2}$, ainsi que $u, v \in B_{\rho,r}^k$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors $uv \in B_{\rho,r}^k$ et on a les estimations :

$$\|uv\|_{\rho,r}^{k,N} \leq C \|u\|_{\rho,r}^{k,N} \|v\|_{\rho,r}^{k,N}, \quad (2.3.1)$$

$$\|uv\|_{\rho,r}^{k,N} \leq C \sum_{j=0}^k \|u\|_{\rho,r}^{j,N} \|v\|_{\rho,r}^{k-j,N}, \quad (2.3.2)$$

où $C > 0$ ne dépend que de r .

En passant au supremum par rapport à N dans les inégalités (2.3.1) et (2.3.2), on en déduit immédiatement les deux estimations suivantes pour le produit de deux fonctions dans les espaces $B_{\rho,r}^k$. Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 2.3.3, on a :

$$\|uv\|_{\rho,r}^k \leq C \|u\|_{\rho,r}^k \|v\|_{\rho,r}^k, \quad (2.3.3)$$

$$\|uv\|_{\rho,r}^k \leq C \sum_{j=0}^k \|u\|_{\rho,r}^j \|v\|_{\rho,r}^{k-j}, \quad (2.3.4)$$

où $C > 0$ ne dépend que de r . L'estimation (2.3.3) donne la propriété d'algèbre des espaces $B_{\rho,r}^k$, tandis que l'inégalité (2.3.4) sera plus pratique dans la suite, car elle fait apparaître un produit de Cauchy.

Démonstration. Comme $r > \frac{3}{2}$, $H^r(\Omega)$ est une algèbre, donc pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tel que $\alpha_3 \leq k$, on a $\partial^\alpha(uv) \in H^r(\Omega)$. Par définition, nous avons :

$$\|uv\|_{\rho,r}^{k,N} := \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha(uv)\|_{H^r}. \quad (2.3.5)$$

Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, le maximum ci-dessus est atteint pour un certain $\alpha^n \in \mathbb{N}^3$ de longueur n . À l'aide de la formule de Leibniz et du fait que $H^r(\Omega)$ est une algèbre ($r > \frac{3}{2}$), on peut écrire :

$$\|\partial^{\alpha^n}(uv)\|_{H^r} \leq C_r \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha^n \\ |\beta|=i}} \binom{\alpha^n}{\beta} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \|\partial^{\alpha^n - \beta} v\|_{H^r}.$$

Majorons le produit des normes ci-dessus par le maximum de toutes ces normes :

$$\|\partial^\beta u\|_{H^r} \|\partial^{\alpha^n - \beta} u\|_{H^r} \leq \max_{\substack{\beta + \gamma = \alpha^n \\ |\beta| = i}} \left(\|\partial^\beta u\|_{H^r} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right).$$

On a alors

$$\|\partial^{\alpha^n} (uv)\|_{H^r} \leq C_r \sum_{i=0}^n \max_{\substack{\beta + \gamma = \alpha^n \\ |\beta| = i}} \left(\|\partial^\beta u\|_{H^r} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right) \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha^n \\ |\beta| = i}} \binom{\alpha^n}{\beta}. \quad (2.3.6)$$

En utilisant l'égalité (2.1.7) (dans laquelle $\delta = 0$), la majoration (2.3.6) se réécrit :

$$\|\partial^{\alpha^n} (uv)\|_{H^r} \leq C_r \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \max_{\substack{\beta + \gamma = \alpha^n \\ |\beta| = i}} \left(\|\partial^\beta u\|_{H^r} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right).$$

Le maximum ci-dessus est atteint, pour chaque entier i , en un certain couple $(\beta^{n,i}, \gamma^{n,i})$ tel que $\beta^{n,i} + \gamma^{n,i} = \alpha^n$, $|\beta^{n,i}| = i$ et $\beta_3^{n,i} + \gamma_3^{n,i} \leq k$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \|\partial^{\alpha^n} (uv)\|_{H^r} &\leq C_r \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \|\partial^{\beta^{n,i}} u\|_{H^r} \|\partial^{\gamma^{n,i}} v\|_{H^r} \\ &\leq C_r \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq \beta_3^{n,i}}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq \gamma_3^{n,i}}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r}. \end{aligned}$$

Revenant à (2.3.5), on obtient l'inégalité :

$$\|uv\|_{\rho,r}^{k,N} \leq C_r \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq \beta_3^{n,i}}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq \gamma_3^{n,i}}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right). \quad (\star)$$

D'une part, en majorant les entiers $\beta_3^{n,i}$ et $\gamma_3^{n,i}$ directement par k , on obtient :

$$\begin{aligned} \|uv\|_{\rho,r}^{k,N} &\leq C_r \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq k}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq k}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right), \\ &\leq C_r \sum_{n=0}^{2N} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \leq N, n-i \leq N}} \frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq k}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq k}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right), \\ &= C_r \|u\|_{\rho,r}^{k,N} \|v\|_{\rho,r}^{k,N}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation (2.3.3). D'autre part, pour obtenir (2.3.4), on note que $\beta_3^{n,i}$ peut en fait prendre toutes les valeurs $j \in \{0, \dots, \min(i, k)\}$. L'inégalité (\star) donne alors :

$$\begin{aligned} \|uv\|_{\rho,r}^{k,N} &\leq C_r \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n \max_{0 \leq j \leq \min(i,k)} \left[\frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq j}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq k-j}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right) \right] \\ &\leq C_r \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\min(i,k)} \frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq j}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq k-j}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right) \\ &\leq C_r \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta| = i \\ \beta_3 \leq j}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma| = n-i \\ \gamma_3 \leq k-j}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right). \end{aligned}$$

En intervertissant les sommes, et en reconnaissant un produit de Cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} \|uv\|_{\rho,r}^{k,N} &\leq C_r \sum_{j=0}^k \left[\sum_{n=0}^{2N} \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq N, n-i \leq N}}^n \frac{\rho^i}{i!} \left(\max_{\substack{|\beta|=i \\ \beta_3 \leq j}} \|\partial^\beta u\|_{H^r} \right) \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!} \left(\max_{\substack{|\gamma|=n-i \\ \gamma_3 \leq k-j}} \|\partial^\gamma v\|_{H^r} \right) \right] \\ &\leq C_r \sum_{j=0}^k \|u\|_{\rho,r}^{j,N} \|v\|_{\rho,r}^{k-j,N}, \end{aligned}$$

d'où l'estimation (2.3.4) annoncée. □

La proposition suivante montre comment agit la dérivation dans l'échelle $(B_{\rho,r}^k)_{0 < \rho \leq \rho_0}$.

Proposition 2.3.4

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$ et $u \in B_{\rho,r}^k$. Alors pour tout $0 < \rho' < \rho$, on a $\partial_1 u, \partial_2 u \in B_{\rho',r}^k$ avec

$$\|\partial_j u\|_{\rho',r}^k \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \|u\|_{\rho,r}^k, \quad j = 1, 2. \quad (2.3.7)$$

Si de plus $k \geq 1$, alors $\partial_3 u \in B_{\rho',r}^{k-1}$ avec

$$\|\partial_3 u\|_{\rho',r}^{k-1} \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \|u\|_{\rho,r}^k. \quad (2.3.8)$$

La perte de dérivée peut aussi s'exprimer par rapport à l'indice de Sobolev r . Si $r \geq 1$, alors pour $j = 1, 2, 3$, on a $\partial_j u \in B_{\rho,r-1}^k$ avec l'estimation

$$\|\partial_j u\|_{\rho,r-1}^k \leq \|u\|_{\rho,r}^k. \quad (2.3.9)$$

Démonstration. Démontrons l'inégalité (2.3.7). Nous avons pour $j \in \{1, 2\}$,

$$\|\partial_j u\|_{\rho',r}^k = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha \partial_j u\|_{H^r} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n+1 \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r} = \sum_{n \geq 1} \frac{n \rho^{n-1}}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r}.$$

On utilise l'inégalité $n \rho^{n-1} \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \rho^n$, qui s'obtient à l'aide du binôme de Newton, et on obtient :

$$\|\partial_j u\|_{\rho',r}^k \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r} \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \|u\|_{\rho,r}^k,$$

d'où l'inégalité (2.3.7). La méthode est similaire pour les inégalités (2.3.8) et (2.3.9). □

Afin de tenir compte de toutes les dérivées normales $\partial_3^{\alpha_3}$, $\alpha_3 \in \mathbb{N}$, nous introduisons une nouvelle échelle d'espaces de Banach construits à partir des espaces précédents. Ce sera dans cette nouvelle échelle d'espaces de Banach que nous appliquerons le théorème de Cauchy-Kowalevskaya au chapitre suivant.

Définition 2.3.5

Soient $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ (petit paramètre à fixer ultérieurement) et $\rho \in (0, \rho_0]$. On définit l'espace $B_{\rho,r,\sigma}$ par

$$B_{\rho,r,\sigma} := \left\{ u \in H^\infty(\Omega) \mid \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^k < +\infty \right\}.$$

Sur $B_{\rho,r,\sigma}$, on définit la norme $\|\cdot\|_{\rho,r,\sigma}$ par

$$\|u\|_{\rho,r,\sigma} := \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^k.$$

Les sommes partielles seront notées

$$\|u\|_{\rho,r,\sigma}^N := \sum_{k=0}^N \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^k.$$

Nous verrons qu'avec $\sigma > 0$ assez petit (le choix ne dépendra que des constantes r et ρ_0), nous serons en mesure d'appliquer un théorème de Cauchy-Kowalevskaya dans l'échelle d'espaces de Banach $(B_{\rho,r,\sigma})_{\rho \leq \rho_0}$ pour les équations de la MHD idéale et incompressible dans le domaine fixe Ω . Sedenko [Sed94] applique un théorème de Cauchy-Kowalevskaya dans une échelle d'espaces de Banach similaire afin de résoudre un problème issu des équations d'Euler incompressible à densité variable pour un fluide idéal barotrope ; c'est pourquoi on s'intéresse aux propriétés d'algèbre et de dérivation dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$.

Théorème 2.3.6

Soient $r \in \mathbb{N}$ tel que $r > \frac{3}{2}$ et $\sigma \in (0, 1]$. La suite $(B_{\rho,r,\sigma})_{0 < \rho \leq \rho_0}$ forme une échelle d'espaces de Banach :

$$\forall 0 < \rho' \leq \rho \leq \rho_0, \quad B_{\rho',r,\sigma} \supset B_{\rho,r,\sigma}, \quad \text{avec} \quad \|\cdot\|_{\rho',r,\sigma} \leq \|\cdot\|_{\rho,r,\sigma}.$$

De plus, si $u \in B_{\rho,r,\sigma}$ alors pour tout $\rho' < \rho$, $\partial_i u \in B_{\rho',r,\sigma}$ ($1 \leq i \leq 3$) avec

$$\|\partial_i u\|_{\rho',r,\sigma} \leq \frac{C_\sigma}{\rho - \rho'} \|u\|_{\rho,r,\sigma}, \quad (2.3.10)$$

où $C_\sigma := \sigma^{-1} > 0$. Enfin, les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$ sont des algèbres (pour le produit de fonctions usuel) :

$$\forall u, v \in B_{\rho,r,\sigma}, \quad uv \in B_{\rho,r,\sigma} \quad \text{et} \quad \|uv\|_{\rho,r,\sigma} \leq C_r \|u\|_{\rho,r,\sigma} \|v\|_{\rho,r,\sigma}, \quad (2.3.11)$$

où $C_r > 0$ est indépendante de ρ et de σ .

Démonstration.

Complétude. Soit $(u_p) \subset B_{\rho,r,\sigma}$ une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq p_0, \quad \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u_p - u_q\|_{\rho,r}^k < \varepsilon.$$

En particulier :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq p_0, \quad \forall K \geq 0, \quad \sum_{k=0}^K \sigma^k \|u_p - u_q\|_{\rho,r}^k < \varepsilon. \quad (\star)$$

Pour $K = 0$, la suite (u_p) est de Cauchy dans $B_{\rho,r}^0$, donc il existe $u \in B_{\rho,r}^0$ tel que

$$\|u_p - u\|_{\rho,r}^0 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour $K \geq 1$, on se fixe $k \in \{1, \dots, K\}$; alors (u_p) est de Cauchy dans $B_{\rho,r}^k$. Il existe donc $u^{(k)} \in B_{\rho,r}^k$ tel que

$$\|u_p - u^{(k)}\|_{\rho,r}^k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

En passant à la limite dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$, on obtient $u^{(k)} = u$, et ce quel que soit $k \geq 1$. Ainsi, $u \in \bigcap_{k \geq 0} B_{\rho,r}^k$, d'où $u \in H_{x_3}^\infty((0,1); H^\infty(\mathbb{T}^2)) = H^\infty(\Omega)$. Vérifions que $u \in B_{\rho,r,\sigma}$. Pour $\varepsilon > 0$, $p \geq p_0$ et $K \in \mathbb{N}$ fixés, nous avons :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\rho,r,\sigma}^K &\leq \|u - u_{p_0}\|_{\rho,r,\sigma}^K + \|u_{p_0}\|_{\rho,r,\sigma}^K \\ &\leq \varepsilon + \|u_{p_0}\|_{\rho,r,\sigma} < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(\|u\|_{\rho,r,\sigma}^K)$ est bornée, et $u \in B_{\rho,r,\sigma}$. Enfin, en passant à la limite en q dans (\star) on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq p_0, \quad \forall K \geq 0, \quad \sum_{k=0}^K \sigma^k \|u_p - u\|_{\rho,r}^k \leq \varepsilon,$$

donc $(u_p)_p$ tend vers u dans $B_{\rho,r,\sigma}$.

Dérivation. Soit $i \in \{1, 2\}$; en utilisant (2.3.7), il vient :

$$\|\partial_i u\|_{\rho',r,\sigma} = \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|\partial_i u\|_{\rho',r}^k \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^k = \frac{1}{\rho - \rho'} \|u\|_{\rho,r,\sigma}.$$

Pour la dérivée normale ∂_3 , on utilise (2.3.8) :

$$\|\partial_3 u\|_{\rho',r,\sigma} \leq \frac{1}{\rho - \rho'} \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^{k+1} \leq \frac{\sigma^{-1}}{\rho - \rho'} \|u\|_{\rho,r,\sigma}.$$

D'où l'estimation (2.3.10) avec $C_\sigma := \max(1, \sigma^{-1}) = \sigma^{-1}$.

Produit. Une conséquence directe de la Proposition 2.3.3 est l'inégalité suivante :

$$\|u v\|_{\rho,r}^k \leq C_r \sum_{j=0}^k \|u\|_{\rho,r}^j \|v\|_{\rho,r}^{k-j}.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \|u v\|_{\rho,r,\sigma}^N &= \sum_{k=0}^N \sigma^k \|u v\|_{\rho,r}^k \leq C_r \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \sigma^j \|u\|_{\rho,r}^{j,N} \sigma^{k-j} \|v\|_{\rho,r}^{k-j,N} \\ &\leq C_r \sum_{k=0}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \leq N}} \sigma^i \|u\|_{\rho,r}^{i,N} \sigma^j \|v\|_{\rho,r}^{j,N} \\ &\leq C_r \|u\|_{\rho,r,\sigma}^N \|v\|_{\rho,r,\sigma}^N \leq C_r \|u\|_{\rho,r,\sigma} \|v\|_{\rho,r,\sigma}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sup_{N \geq 0} \|u v\|_{\rho,r,\sigma}^N \leq C_r \|u\|_{\rho,r,\sigma} \|v\|_{\rho,r,\sigma},$$

d'où la propriété d'algèbre (2.3.11). □

Terminons par un résultat important de densité des espaces $B_{\rho,r,\sigma}$.

Théorème 2.3.7

Soient $r \in \mathbb{N}$ tel que $r > \frac{3}{2}$, $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, 1)$. Alors $B_{\rho, r, \sigma}$ est dense dans $H^r(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in H^r(\Omega)$. On souhaite construire une suite d'éléments de $B_{\rho, r, \sigma}$ qui converge vers u dans $H^r(\Omega)$. L'idée est de prolonger u par périodicité selon la troisième variable x_3 , tout en préservant la régularité Sobolev. On notera temporairement $\mathbb{T}_1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore 1-périodique, et $\mathbb{T}_2 := \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ le tore 2-périodique.

Il existe un opérateur de prolongement $P_r : H^r(\mathbb{T}_1^2 \times (0, 1)) \rightarrow H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{R})$ satisfaisant aux deux conditions suivantes (voir [DL87, p.909]); si $u \in H^r(\mathbb{T}_1^2 \times (0, 1))$, alors :

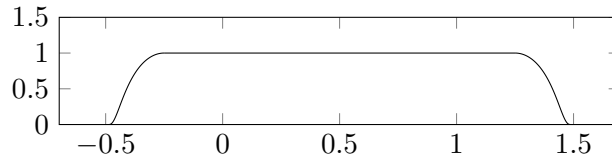
$$\|P_r u\|_{H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{R})} \leq C_r \|u\|_{H^r(\mathbb{T}_1^2 \times (0, 1))} \quad \text{et} \quad P_r u|_{\mathbb{T}_1^2 \times (0, 1)} = u,$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r .

Soit maintenant χ une fonction de troncature, c'est-à-dire telle que

$$\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi \equiv 1 \text{ sur } \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right), \quad \chi \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Fonction de troncature



Posons alors, pour $x = (x', x_3) \in \mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{R}$,

$$v(x) := \chi(x_3) P_r u(x', x_3).$$

Par propriété d'algèbre (rappelons que $r > \frac{3}{2}$), la fonction v ainsi définie appartient à l'espace $H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{R})$. De plus, v est identiquement nulle pour x_3 en dehors de $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, et plate en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Par conséquent, si l'on prolonge la fonction $v|_{\mathbb{T}_1^2 \times (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}$ par 2-périodicité par rapport à x_3 sur \mathbb{R} en une fonction w , on obtient $w \in H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2)$. Par définition de w , nous remarquons par ailleurs que

$$w|_{\Omega} \equiv u.$$

Nous avons ainsi prolongé la fonction u en une fonction périodique $w \in H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2)$, ce qui nous permet d'utiliser la décomposition en séries de Fourier. En effet, on peut écrire l'égalité suivante dans l'espace $H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2)$:

$$w(x', x_3) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^3} c_p(w) e^{2i\pi p' \cdot x'} e^{i\pi p_3 x_3},$$

où, pour tout $p = (p', p_3) \in \mathbb{Z}^3$, on a noté $c_p(w)$ le p -ième coefficient de Fourier de w défini par

$$c_p(w) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_1^2} \int_{\mathbb{T}_2} w(x', x_3) e^{-2i\pi p' \cdot x'} e^{-i\pi p_3 x_3} dx_3 dx'.$$

De plus, on a :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^3} (1 + |p|^2)^r |c_p(w)|^2 < +\infty. \quad (2.3.12)$$

Pour $P \in \mathbb{N}$, posons alors

$$w_P(x', x_3) := \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^3 \\ |p| \leq P}} c_p(w) e^{2i\pi p' \cdot x'} e^{i\pi p_3 x_3}, \quad \forall (x', x_3) \in \mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2.$$

Nous allons maintenant montrer que la suite $(w_P|_{\Omega})_{P \geq 0}$ est constituée de fonctions appartenant à l'espace $B_{\rho, r, \sigma}$, et qu'elle converge vers u dans $H^r(\Omega)$. Ceci conclura alors sur la densité des espaces $B_{\rho, r, \sigma}$ dans $H^r(\Omega)$.

Tout d'abord, la fonction w_P étant un polynôme trigonométrique, on a clairement $w_P|_{\Omega} \in H^\infty(\Omega)$. On pose ensuite, pour $p \in \mathbb{Z}^3$,

$$e_p(x', x_3) := e^{2i\pi p' \cdot x'} e^{i\pi p_3 x_3}, \quad \forall (x', x_3) \in \mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2.$$

Étant donné que les fonctions w_P sont des combinaisons linéaires (finies) des fonctions e_p , pour montrer que $w_P \in B_{\rho, r, \sigma}$, il suffit de montrer que pour tout p , on a $e_p \in B_{\rho, r, \sigma}$. Les coefficients de Fourier de e_p sont donnés par :

$$c_q(e_p) = \delta_{q,p}, \quad q \in \mathbb{Z}^3,$$

où $\delta_{q,p}$ est le symbole de Kronecker. Soient alors $n \in \mathbb{N}$, et $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tel que $|\alpha| = n$; grâce à l'égalité

$$c_q(\partial^\alpha e_p) = (2i\pi)^{\alpha_1 + \alpha_2} (i\pi)^{\alpha_3} q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3} c_q(e_p),$$

on peut facilement évaluer la norme $\|\partial^\alpha e_p\|_{H^r(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha e_p\|_{H^r(\Omega)}^2 &\leq \|\partial^\alpha e_p\|_{H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2)}^2 \leq C_r \sum_{q \in \mathbb{Z}^3} (1 + |q|^2)^r |c_q(\partial^\alpha e_p)|^2 \\ &\leq C_r (1 + |p|^2)^r (2\pi)^{2n} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} p_3^{2\alpha_3} \\ &\leq C_r (1 + |p|^2)^r (2\pi|p|)^{2n}, \end{aligned}$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r . Par définition des normes $\|\cdot\|_{\rho, r}^k$, nous avons alors :

$$\|e_p\|_{\rho, r}^k \leq C_r (1 + |p|^2)^{\frac{r}{2}} e^{2\pi\rho|p|}.$$

Enfin, pour $\sigma \in (0, 1)$, nous avons :

$$\|e_p\|_{\rho, r, \sigma} = \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|e_p\|_{\rho, r}^k \leq C_r (1 + |p|^2)^{\frac{r}{2}} \frac{e^{2\pi\rho|p|}}{1 - \sigma} < +\infty,$$

donc $e_p \in B_{\rho, r, \sigma}$. Pour conclure, démontrons que (w_P) converge vers u dans $H^r(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u - w_P\|_{H^r(\Omega)}^2 &= \|w - w_P\|_{H^r(\Omega)}^2 \leq \|w - w_P\|_{H^r(\mathbb{T}_1^2 \times \mathbb{T}_2)}^2 \\ &\leq C_r \sum_{|p| > P} (1 + |p|^2)^r |c_p(w)|^2 \xrightarrow{P \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

d'après (2.3.12). Ceci achève la démonstration du Théorème 2.3.7.

□

L'introduction de l'échelle d'espaces de Banach $(B_{\rho, r, \sigma})_{0 < \rho \leq \rho_0}$ va nous permettre au Chapitre 3 de comprendre comment construire des solutions très régulières (*i.e.* de régularité au moins \mathcal{C}^∞ et bornées sur Ω) aux équations de la magnétohydrodynamique idéale incompressible, en utilisant un théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

2.3.2 Généralisation

Dans cette partie, Ω désignera dorénavant le domaine de référence $\mathbb{T}^2 \times (-1, 1)$, que l'on partage en deux sous-domaines : $\Omega^+ := \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ et $\Omega^- := \mathbb{T}^2 \times (-1, 0)$. On notera également

$$\Gamma := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\pm} := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = \pm 1\}.$$

Pour $(u^+, u^-) \in H^r(\Omega^+) \times H^r(\Omega^-)$, on notera les normes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|u^+\|_{r,+} &:= \|u^+\|_{H^r(\Omega^+)}, & \|u^-\|_{r,-} &:= \|u^-\|_{H^r(\Omega^-)}, \\ \|u^{\pm}\|_{r,\pm} &:= \|u^+\|_{r,+} + \|u^-\|_{r,-}. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Échelles d'espaces de Banach sur Ω .

Définition 2.3.8

Soient $(r, k) \in \mathbb{N}^2$ et $\rho \in (0, \rho_0]$. On définit :

$$B_{\rho,r}^k(\Omega) := \left\{ u \in H_x^{k+r}((-1, 1); H^\infty(\mathbb{T}^2)) \mid \|u\|_{\rho,r}^k := \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{H^r(\Omega)} < +\infty \right\}.$$

Soit $\sigma \in (0, 1)$; on définit :

$$B_{\rho,r,\sigma}(\Omega) := \left\{ u \in H^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{\rho,r,\sigma} := \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^k < +\infty \right\}.$$

Pour $u \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$, si l'on note $u^\pm := u|_{\Omega^\pm}$, alors la norme $\|u\|_{\rho,r,\sigma}$ se réécrit sous la forme

$$\|u\|_{\rho,r,\sigma} = \sum_{k \geq 0} \sigma^k \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^\pm\|_{r,\pm}.$$

Échelles d'espaces de Banach sur Ω^+ et Ω^- .

Définition 2.3.9

Soient $(r, k) \in \mathbb{N}^2$ et $\rho \in (0, \rho_0]$. On définit :

$$B_{\rho,r}^k(\Omega^+) := \left\{ u \in H_x^{k+r}((0, 1); H^\infty(\mathbb{T}^2)) \mid \|u\|_{\rho,r}^{k,+} := \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{r,+} < +\infty \right\}$$

Soit $\sigma \in (0, 1)$, on définit :

$$B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^+) := \left\{ u \in H^\infty(\Omega^+) \mid \|u\|_{\rho,r,\sigma}^+ := \sum_{k \geq 0} \sigma^k \|u\|_{\rho,r}^{k,+} < +\infty \right\}.$$

On procède de façon analogue pour Ω^- . Si $(u^+, u^-) \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^+) \times B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^-)$, on notera :

$$\|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm := \|u^+\|_{\rho,r,\sigma}^+ + \|u^-\|_{\rho,r,\sigma}^- \tag{2.3.14}$$

Cette norme est équivalente à la norme donnée par la quantité :

$$\|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm := \sum_{k \geq 0} \sigma^k \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^\pm\|_{r,\pm}, \tag{2.3.15}$$

en accord avec la définition (2.3.13). Donnons brièvement les principaux arguments. D'abord, il est clair que l'on a :

$$\|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm \leq \|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm.$$

Pour l'inégalité inverse, on remarque tout d'abord que pour $(u^+, u^-) \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^+) \times B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^-)$ et $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, il existe un multi-indice α^+ vérifiant :

$$\|\partial^{\alpha^+} u^+\|_{r,+} = \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^+\|_{r,+}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \|\partial^{\alpha^+} u^+\|_{r,+} &\leq \|\partial^{\alpha^+} u^+\|_{r,+} + \|\partial^{\alpha^+} u^-\|_{r,-} \\ &\leq \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \left(\|\partial^\alpha u^+\|_{r,+} + \|\partial^\alpha u^-\|_{r,-} \right) = \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^\pm\|_{r,\pm}. \end{aligned}$$

On procède de même pour u^- , et finalement on en déduit :

$$\max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^+\|_{r,+} + \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^-\|_{r,-} \leq 2 \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k}} \|\partial^\alpha u^\pm\|_{r,\pm}.$$

L'inégalité $\|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm \leq 2 \|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm$ en découle facilement. On utilisera donc la même notation $\|u^\pm\|_{\rho,r,\sigma}^\pm$ pour désigner indifféremment la quantité donnée par (2.3.14) ou par (2.3.15).

Les propriétés d'algèbre et de dérivation établies au Paragraphe 2.3.1 sont toujours valables dans les échelles d'espaces de Banach $(B_{\rho,r}^k(U))_{0 < \rho \leq \rho_0}$ et $(B_{\rho,r,\sigma}(U))_{0 < \rho \leq \rho_0}$ définis ci-dessus, où U désigne à chaque fois l'un des domaines Ω , Ω^+ ou Ω^- .

Échelles d'espaces de Banach sur $\Gamma \simeq \mathbb{T}^2$.

Définition 2.3.10

Soient $s \in \mathbb{R}_+$ et $\rho \in (0, \rho_0]$. On définit :

$$B_{\rho,s}(\mathbb{T}^2) := \left\{ u \in H^\infty(\mathbb{T}^2) \mid \|u\|_{\rho,s} := \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\partial^{\alpha'} u\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} < +\infty \right\},$$

où α' désigne ici un multi-indice de \mathbb{N}^2 . On rappelle que la norme sur $H^s(\mathbb{T}^2)$ est définie par (2.2.7).

Munis de telles échelles d'espaces de Banach, nous allons pouvoir construire dans le Chapitre 4 des solutions analytiques au système des nappes de tourbillon-courant en MHD idéale incompressible, en appliquant toujours un théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

Cependant, pour bien expliquer la stratégie adoptée, on commence par détailler au Chapitre 3 le cas plus simple de la MHD idéale incompressible dans un *domaine fixe*. On incorporera la difficulté induite par la *surface libre* définissant la nappe de tourbillon-courant au Chapitre 4.

Solutions analytiques aux équations de la magnétohydrodynamique idéale incompressible, en domaine fixe

Au Paragraphe 2.3.1 du Chapitre 2, nous avons défini une échelle d'espaces de Banach $(B_{\rho,r,\sigma})_{0 < \rho \leq \rho_0}$, associés au domaine fixe $\Omega := \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$. Le paramètre $\rho_0 > 0$ est fixé une fois pour toutes. Dans tout ce chapitre, nous reprenons les notations du Paragraphe 2.3.1 (*cf.* Chapitre 2).

L'objet de ce chapitre est d'utiliser un théorème de Cauchy-Kowalevskaya (Théorème 3.2.2 ci-après) afin de construire des solutions analytiques aux équations de la MHD idéale incompressible, posées dans le *domaine fixe* Ω . Ces équations s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - (H \cdot \nabla)H + \nabla q = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t H + (u \cdot \nabla)H - (H \cdot \nabla)u = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot H = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ u_3 = H_3 = 0 & \text{sur } [0, T] \times (\Gamma \cup \Gamma_+). \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Les inconnues sont la vitesse $u \in \mathbb{R}^3$, le champ magnétique $H \in \mathbb{R}^3$ et la pression totale $q \in \mathbb{R}$. Nous reviendrons plus en détails sur ce système au Paragraphe 3.2.1 ci-après. Les estimations menées dans ce chapitre sont une première étape pour comprendre comment se comportent les normes $\|\cdot\|_{\rho,r,\sigma}$ vis-à-vis des inconnues u , H et q du système (3.0.1). Plus particulièrement, la définition des normes $\|\cdot\|_{\rho,r,\sigma}$ permettra d'estimer “facilement” le terme de pression ∇q . Pour cela, nous remarquerons que la pression pourra s'exprimer implicitement en fonction de u et H , *via* la résolution d'un problème de Laplace. Nous verrons au Paragraphe 3.2.1 que ce problème de Laplace prendra la forme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta q = g & \text{dans } \Omega, \\ \partial_3 q = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+, \end{cases}$$

où g est un terme source s'exprimant en fonction des *dérivées premières* de u et de H . Les estimations menées sur la pression montreront que le gradient de pression dans (3.0.1) pourra s'interpréter comme un terme “semi-linéaire”, dans le même esprit que pour la construction de solutions régulières locales en temps aux équations d'Euler incompressible que l'on pourra trouver par exemple dans [Che98, p.65,77].

Le théorème principal de ce chapitre peut se résumer comme suit (nous renvoyons au Théorème 3.2.5 ci-après pour un énoncé plus précis).

Théorème

Soient $\rho_0 > 0$ et $r \geq 3$ un entier. Alors il existe un petit paramètre $\sigma_0 > 0$, tel que, pour tous $\sigma \in (0, \sigma_0]$ et $R > 0$, pour toutes données initiales $u_0, H_0 \in B_{\rho_0, r, \sigma}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{\rho_0, r, \sigma}, \|H_0\|_{\rho_0, r, \sigma} &< R, \\ \nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot H_0 &= 0, \end{aligned}$$

il existe une unique solution régulière locale en temps (u, H, q) au système (3.0.1).

L'étude du système de la MHD idéale incompressible (3.0.1) n'est bien sûr pas nouvelle, et des résultats plus forts que le théorème ci-dessus concernant le caractère bien posé de ce problème ont été notamment obtenus par Alekseev [Ale82], Schmidt [Sch88], Yanagisawa et Matsumura [YM91], ou encore Secchi [Sec93].

Le travail préliminaire effectué dans ce chapitre nous servira dans l'étude du *système des nappes de tourbillon-courant* (1.2.6) en MHD idéale incompressible, dont on construira des solutions régulières au Chapitre 4.

3.1 Estimations de la solution d'un problème de Laplace dans les espaces $B_{\rho, r, \sigma}$

3.1.1 Régularité elliptique pour des problèmes de Laplace

Les équations de la magnétohydrodynamique idéale incompressible font apparaître un gradient de pression. À l'aide des contraintes de divergence nulle, traduisant l'incompressibilité du milieu considéré, on montrera que la pression est solution d'un problème de Laplace. Pour cela, nous commençons par rappeler quelques résultats classiques de régularité elliptique sur les problèmes de Laplace avec condition au bord de Dirichlet (voir [Eva98, p.308]) ou de Neumann homogène (voir [Tay96, p.344]). Dans tout ce chapitre, les problèmes de Laplace considérés seront posés dans le domaine fixe

$$\Omega := \mathbb{T}^2 \times (0, 1),$$

dont on note les frontières

$$\Gamma := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_+ := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 1\}.$$

Nous noterons également $\|\cdot\|_{H^r}$ la norme sur $H^r(\Omega)$, pour $r \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1.1

Soient $r \in \mathbb{N}$ et $f \in H^r(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution faible (c'est-à-dire au sens variationnel) du problème de Laplace avec condition au bord de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

alors $u \in H^{r+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et u est solution forte de (3.1.1) ; de plus, on a l'estimation :

$$\|u\|_{H^{r+2}} \leq C_r \|f\|_{H^r},$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r et de Ω .

Proposition 3.1.2

Soient $r \in \mathbb{N}$ et $g \in H^r(\Omega)$ vérifiant la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$. Si $q \in H^1(\Omega)$, telle que $\int_{\Omega} q = 0$, est solution faible du problème de Laplace avec condition au bord de Neumann homogène

$$\begin{cases} -\Delta q = g & \text{dans } \Omega, \\ \partial_3 q = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

alors $q \in H^{r+2}(\Omega)$ est solution forte et vérifie l'estimation :

$$\|q\|_{H^{r+2}} \leq C_r \|g\|_{H^r}, \quad (3.1.3)$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r et de Ω .

Rappelons que la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$ est *nécessaire* pour pouvoir résoudre le problème de Laplace (3.1.2) (il suffit d'intégrer la première équation de (3.1.2) sur Ω , et d'utiliser la formule de Green), tandis que la détermination d'une solution q de (3.1.2) se fait à une constante près ; c'est pourquoi on fixe la moyenne de q sur Ω en la prenant nulle par convention.

3.1.2 Estimations de la solution d'un problème de Laplace dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$

Commençons par donner des estimations dans les espaces $B_{\rho,r}^k$, de la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta q = g & \text{dans } \Omega, \\ \partial_3 q = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Ici, la fonction g est un terme source quelconque appartenant à l'un des espaces $B_{\rho,r,\sigma}$, et satisfaisant la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$. La méthode adoptée pour les estimations qui suivent est inspirée de [Sed94].

Proposition 3.1.3

Soient $r \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, \rho_0]$ et $g \in B_{\rho,r}^0$ satisfaisant la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$. Si $q \in H^\infty(\Omega)$ est solution du problème (3.1.4), telle que $\int_{\Omega} q = 0$, alors :

$$q \in B_{\rho,r+2}^0 \quad \text{et} \quad \|q\|_{\rho,r+2}^0 \leq C_r \|g\|_{\rho,r}^0,$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r .

Démonstration. On sait par hypothèse que $q \in L_{x_3}^2((0, 1); H^\infty(\mathbb{T}^2))$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \in \mathbb{N}^3$. Alors la fonction $\partial^\alpha q \in H^1(\Omega)$ est la solution variationnelle du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta(\partial^\alpha q) = \partial^\alpha g & \text{dans } \Omega, \\ \partial_3 \partial^\alpha q = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+. \end{cases}$$

D'après l'estimation (3.1.3), on peut écrire :

$$\|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}} \leq C_r \|\partial^\alpha g\|_{H^r}.$$

Par définition des normes $\|\cdot\|_{\rho,r}^0$, on a alors pour tout entier N

$$\|q\|_{\rho,r+2}^{0,N} \leq C_r \|g\|_{\rho,r}^{0,N} \leq C_r \|g\|_{\rho,r}^0,$$

ce qui conclut pour l'estimation dans $B_{\rho,r}^0$ en passant à la limite en N .

□

On doit maintenant gérer les dérivées normales. On procédera pour cela par récurrence, en utilisant la proposition suivante.

Proposition 3.1.4

Soient $r, k \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, \rho_0]$ et $g \in B_{\rho, r}^{k+1}$ satisfaisant la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$. Si $q \in B_{\rho, r+2}^k$ est solution de (3.1.4), telle que $\int_{\Omega} q = 0$, alors $q \in B_{\rho, r+2}^{k+1}$ et vérifie l'estimation :

$$\|q\|_{\rho, r+2}^{k+1} \leq C_{r, \rho_0} (\|q\|_{\rho, r+2}^k + \|g\|_{\rho, r}^{k+1}),$$

où $C_{r, \rho_0} > 0$ ne dépend que de r et de ρ_0 .

Démonstration.

► **Le cas $k = 0$:**

Posons $\tilde{q} := \partial_3 q$ et $\tilde{g} := \partial_3 g$. Alors $\tilde{q} \in H_0^1(\Omega)$ (car $q \in H^2(\Omega)$ et $\partial_3 q|_{\Gamma \cup \Gamma_+} = 0$) est solution variationnelle du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{q} = \tilde{g} & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{q} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+. \end{cases}$$

D'après la Proposition 3.1.1, on a alors

$$\|\tilde{q}\|_{H^{r+2}} \leq C_r \|\tilde{g}\|_{H^r}.$$

De plus, on sait que $\tilde{q} \in L_{x_3}^2((0, 1); H^\infty(\mathbb{T}^2))$. Soit alors $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \in \mathbb{N}^3$. La fonction $\partial^\alpha \tilde{q} \in H_0^1(\Omega)$ est solution variationnelle du problème

$$\begin{cases} -\Delta(\partial^\alpha \tilde{q}) = \partial^\alpha \tilde{g} & \text{dans } \Omega, \\ \partial^\alpha \tilde{q} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+. \end{cases}$$

D'après la Proposition 3.1.1, on en déduit que $\partial^\alpha \tilde{q}$ vérifie :

$$\|\partial^\alpha \tilde{q}\|_{H^{r+2}} \leq C_r \|\partial^\alpha \tilde{g}\|_{H^r}. \quad (3.1.5)$$

On peut maintenant évaluer la norme $\|q\|_{\rho, r+2}^{1, N}$. Par définition, nous avons pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|q\|_{\rho, r+2}^{1, N} &= \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq 1}} \|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}} \leq \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}} + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3=1}} \|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}} \\ &= \|q\|_{\rho, r+2}^{0, N} + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3=1}} \|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}} \\ &= \|q\|_{\rho, r+2}^{0, N} + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n-1 \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha(\partial_3 q)\|_{H^{r+2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'estimation de régularité elliptique (3.1.5), on peut affirmer qu'il existe une constante $C_r > 0$, ne dépendant que de r , telle que :

$$\begin{aligned} \|q\|_{\rho,r+2}^{1,N} &\leq \|q\|_{\rho,r+2}^{0,N} + C_r \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n-1 \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha(\partial_3 g)\|_{H^r}. \\ &\leq \|q\|_{\rho,r+2}^{0,N} + C_r \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq 1}} \|\partial^\alpha g\|_{H^r}. \\ &\leq C_r (\|q\|_{\rho,r+2}^{0,N} + \|g\|_{\rho,r}^{1,N}). \end{aligned}$$

En passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, on en déduit le résultat annoncé pour $k = 0$.

► **Le cas $k \geq 1$:**

Ici, on fera apparaître des dérivées normales d'ordre au moins 2, ce qui permettra d'utiliser directement l'équation satisfaite par q sans avoir recours à un problème de Laplace auxiliaire. Par une méthode usuelle de régularité elliptique (que l'on peut trouver dans [Eva98, p.327]), on montre que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tel que $\alpha_3 \leq k+1$, on a $\partial^\alpha q \in H^{r+2}(\Omega)$. On décompose alors comme précédemment (pour $N \geq k+1$) :

$$\|q\|_{\rho,r+2}^{k+1,N} \leq \|q\|_{\rho,r+2}^{k,N} + \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n-k-1 \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha(\partial_3^{k+1} q)\|_{H^{r+2}}.$$

Comme on a $-\Delta q = g$, on peut exprimer la *dérivée normale* $\partial_3^{k+1} q$ en fonction des *dérivées tangentielles* de q et des *dérivées normales* de g :

$$\partial_3^{k+1} q = -\partial_1^2 \partial_3^{k-1} q - \partial_2^2 \partial_3^{k-1} q - \partial_3^{k-1} g.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \|q\|_{\rho,r+2}^{k+1,N} &\leq \|q\|_{\rho,r+2}^{k,N} + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n-k-1 \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha(\partial_i^2 \partial_3^{k-1} q)\|_{H^{r+2}} \\ &\quad + \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n-k-1 \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha(\partial_3^{k-1} g)\|_{H^{r+2}} \\ &\leq \|q\|_{\rho,r+2}^{k,N} + 2 \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3=k-1}} \|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}} + \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n-2 \\ \alpha_3=k-1}} \|\partial^\alpha g\|_{H^{r+2}}. \end{aligned}$$

Pour l'estimation des termes $\|\partial^\alpha q\|_{H^{r+2}}$, on se ramène à l'espace $H^r(\Omega)$ en remarquant qu'il existe une constante $C_r > 0$, ne dépendant que de r , telle que :

$$\max_{\substack{|\alpha|=n-2 \\ \alpha_3=k-1}} \|\partial^\alpha g\|_{H^{r+2}} \leq C_0 \left(\max_{\substack{|\alpha|=n-2 \\ \alpha_3 \leq k+1}} \|\partial^\alpha g\|_{H^r} + \max_{\substack{|\alpha|=n-1 \\ \alpha_3 \leq k+1}} \|\partial^\alpha g\|_{H^r} + \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k+1}} \|\partial^\alpha g\|_{H^r} \right).$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \|q\|_{\rho,r+2}^{k+1,N} &\leq \|q\|_{\rho,r+2}^{k,N} + 2\|q\|_{\rho,r+2}^{k-1,N} + C_0(1 + \rho + \rho^2)\|g\|_{\rho,r}^{k+1,N} \\ &\leq C_{\rho_0} \left(\|q\|_{\rho,r+2}^{k,N} + \|g\|_{\rho,r}^{k+1,N} \right), \end{aligned}$$

où $C_{\rho_0} > 0$ est une constante ne dépendant que de ρ_0 , et on conclut de nouveau en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$.

□

Les estimations a priori étant faites dans les espaces $B_{\rho,r}^k$, on peut en déduire des estimations dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$.

Proposition 3.1.5

Si $q \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_{\rho,r+2}^k$ est solution de (3.1.4) telle que $\int_{\Omega} q = 0$, avec $g \in B_{\rho,r,\sigma}$ vérifiant la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$, alors il existe $\sigma_0 > 0$ ne dépendant que de r et de ρ_0 tel que, pour tout $\sigma \in (0, \sigma_0]$, on a $q \in B_{\rho,r+2,\sigma}$ et l'estimation :

$$\|q\|_{\rho,r+2,\sigma} \leq C_{r,\rho_0} \|g\|_{\rho,r,\sigma}, \quad (3.1.6)$$

avec $C_{r,\rho_0} > 0$ ne dépendant que de r et de ρ_0 (mais pas de σ).

Démonstration. À l'aide des deux propositions précédentes, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|q\|_{\rho,r+2,\sigma}^N &= \|q\|_{\rho,r+2}^0 + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma^{k+1} \|q\|_{\rho,r+2}^{k+1} \\ &\leq C_{r,\rho_0} \left(\|g\|_{\rho,r}^0 + \sigma \sum_{k=0}^{N-1} \sigma^k \|q\|_{\rho,r+2}^k + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma^{k+1} \|g\|_{\rho,r}^{k+1} \right) \\ &\leq C_{r,\rho_0} \|g\|_{\rho,r,\sigma}^N + C_{r,\rho_0} \sigma \|q\|_{\rho,r+2,\sigma}^N. \end{aligned}$$

Posons $\sigma_0 := (2C_{r,\rho_0})^{-1}$. Alors pour $\sigma \in (0, \sigma_0]$,

$$\|q\|_{\rho,r+2,\sigma}^N \leq 2C_{r,\rho_0} \|g\|_{\rho,r,\sigma}^N \leq 2C_{r,\rho_0} \|g\|_{\rho,r,\sigma}.$$

Pour conclure, on passe à la limite $N \rightarrow +\infty$.

□

Il reste finalement à montrer qu'étant donné un terme source $g \in B_{\rho,r,\sigma}$ vérifiant la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$, il existe bien une unique solution $q \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_{\rho,r+2}^k$ de (3.1.4) telle que $\int_{\Omega} q = 0$.

Proposition 3.1.6

Soient $r \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$, où σ_0 est donné par la Proposition 3.1.6. Soit $g \in B_{\rho,r,\sigma}$ tel que $\int_{\Omega} g = 0$; alors il existe une unique solution $q \in B_{\rho,r+2,\sigma}$ de (3.1.4) telle que $\int_{\Omega} q = 0$. De plus, on a l'estimation :

$$\|q\|_{\rho,r+2,\sigma} \leq C_{r,\rho_0} \|g\|_{\rho,r,\sigma},$$

avec $C_{r,\rho_0} > 0$ ne dépendant que de r et de ρ_0 .

Démonstration. Tout provient de la régularité elliptique donnée par la Proposition 3.1.2. En effet, on a en particulier $g \in H^\infty(\Omega)$, donc l'unique solution q de (3.1.4) dans $H^1(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} q = 0$ vérifie $q \in H^\infty(\Omega)$, avec l'estimation

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \|q\|_{H^{r+2}(\Omega)} \leq C_r \|g\|_{H^r(\Omega)}.$$

La Proposition 3.1.3 permet d'affirmer que $q \in B_{\rho, r+2}^0$. Ensuite, grâce à la Proposition 3.1.4, on procède par récurrence sur $k \geq 0$ pour montrer que $q \in B_{\rho, r+2}^k$ (pour tout entier k). On conclut en appliquant la Proposition 3.1.5 pour obtenir $q \in B_{\rho, r+2, \sigma}$.

□

3.2 Résolution des équations de la MHD en domaine fixe par un théorème de Cauchy-Kowalevskaya

3.2.1 Les équations de la MHD idéale incompressible

On considère le système d'équations aux dérivées partielles suivant, correspondant aux équations de la magnétohydrodynamique idéale incompressible dans le domaine fixe $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$. On rappelle que les bords sont notés $\Gamma := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 0\}$ et $\Gamma_+ := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 1\}$. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - (H \cdot \nabla)H + \nabla q = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t H + (u \cdot \nabla)H - (H \cdot \nabla)u = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot H = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ u_3 = H_3 = 0 & \text{sur } [0, T] \times (\Gamma \cup \Gamma_+). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

À ce système s'ajoutent également des conditions initiales $(u(0, \cdot), H(0, \cdot)) = (u_0, H_0)$. La donnée initiale associée à la pression q n'est pas libre, et dépend implicitement des données initiales (u_0, H_0) via la résolution d'un problème de Laplace, comme nous allons le faire remarquer ci-après. Ces équations représentent le mouvement d'un plasma parfaitement conducteur, homogène (c'est-à-dire dont la densité est constante) donc incompressible, et non visqueux. Les fonctions u_3 et H_3 sont les composantes normales des champs de vitesse u et magnétique H . La condition de bord satisfaite sur $\Gamma \cup \Gamma_+$ signifie physiquement que le plasma considéré est confiné dans la bande $\{0 \leq x_3 \leq 1\}$, et isolé magnétiquement ; si l'on prolonge le champ magnétique H par zéro en dehors de $(0, 1)$ (par rapport à x_3), alors le milieu en dehors de $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ s'apparente à du vide, et on obtient un champ magnétique à divergence nulle dans *tout* l'espace.

Notons que la pression totale q s'exprime implicitement en fonction de (u, H) . En effet, en prenant la divergence de la première équation du système (3.2.1) et en tenant compte du fait que u et H sont à divergence nulle, on obtient le problème de Laplace suivant satisfait par la pression (dans lequel $t \in [0, T]$ joue un rôle de paramètre) :

$$\begin{cases} -\Delta q = g & \text{dans } \Omega, \\ \partial_3 q = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_+. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

La condition de bord de type Neumann homogène s'obtient à l'aide de la troisième composante de l'équation d'évolution sur u , en prenant la trace des différentes expressions en u , H et q sur Γ et Γ_+ . Le terme source g dans (3.2.2) est défini par

$$g := \nabla \cdot ((u \cdot \nabla)u - (H \cdot \nabla)H). \quad (3.2.3)$$

En notant $A : B := \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$ le produit contracté de deux matrices carrées A et B de taille n , on peut réécrire g sous la forme

$$g = \nabla u : \nabla u^T - \nabla H : \nabla H^T, \quad (3.2.4)$$

grâce aux contraintes de divergence nulle sur u et H . Le terme source défini en (3.2.4) ne fait intervenir que des dérivées d'ordre 1, ce qui sera crucial dans l'application du théorème de Cauchy-Kowalevskaya. Le problème (3.2.2), (3.2.4), satisfait par la pression totale q , a été entièrement étudié au Paragraphe 3.1.2, dans le cadre des espaces fonctionnels $B_{\rho, r, \sigma}$. En revanche, en vue d'appliquer la Proposition 3.1.6, il nous

faudra vérifier au préalable que la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$ est bien vérifiée par le terme source g donné par (3.2.4). Cela sera le cas grâce aux contraintes de divergence nulle sur u et H qui permettent de revenir à la forme “conservative” (3.2.3) de g . On aura alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g &= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \int_{\mathbb{T}^2 \times (0,1)} \partial_i (u_j \partial_j u_i - H_j \partial_j H_i) dx \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^1 \partial_3 (u_j \partial_j u_3 - H_j \partial_j H_3) dx_3 dx' \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_+} (u_j \partial_j u_3 - H_j \partial_j H_3) dx_3 dx' - \int_{\Gamma} (u_j \partial_j u_3 - H_j \partial_j H_3) dx_3 dx'. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Grâce aux conditions de bord sur $\Gamma \cup \Gamma_+$ dans (3.2.1), on peut affirmer que si $j \in \{1, 2\}$, alors $\partial_j u_3|_{\Gamma \cup \Gamma_+} = 0$ et $\partial_j H_3|_{\Gamma \cup \Gamma_+} = 0$. Ainsi, les deux intégrales de (3.2.5) sont nulles, et la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$ est bien vérifiée. Comme nous avons besoin des contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique ainsi que des conditions au bord pour obtenir cette condition de compatibilité, nous incorporerons l'ensemble de ces contraintes dans la définition des espaces fonctionnels que l'on manipulera pour appliquer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya au Paragraphe 3.2.2 ci-après.

3.2.2 Application du théorème de Cauchy-Kowalevskaya

Intégrons les conditions de bord et les contraintes de divergence nulle de (3.2.1) dans l'échelle d'espaces de Banach que nous avons introduite au Chapitre 2. On définit pour cela

$$\mathbb{B}_{\rho, r, \sigma} := \left\{ v \in (B_{\rho, r, \sigma})^3 \mid \nabla \cdot v = 0 \text{ et } v_3|_{\Gamma \cup \Gamma_+} = 0 \right\}, \quad (3.2.6)$$

dont on notera la norme $\| \cdot \|_{\rho, r, \sigma}$. Par continuité de l'application “trace” de $H^r(\Omega)$ dans $H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma \cup \Gamma_+)$ (pour $r \geq 1$), il est clair que l'espace $\mathbb{B}_{\rho, r, \sigma}$ est fermé dans $(B_{\rho, r, \sigma})^3$. Les propriétés d'algèbre (coordonnée par coordonnée) et de dérivation établies au Paragraphe 2.3.1 du Chapitre 2 s'étendent naturellement à cet espace. Toutefois, la dérivation ∂_3 par rapport à la variable normale ne laisse pas invariant l'espace $\mathbb{B}_{\rho, r, \sigma}$. Néanmoins, on a toujours le résultat suivant sur l'estimation de la dérivée normale (adaptée du Théorème 2.3.6, cf. Chapitre 2) : si $v \in \mathbb{B}_{\rho, r, \sigma}$, alors pour tout $\rho' < \rho$, on a $\partial_3 v \in (B_{\rho', r, \sigma})^3$, avec l'estimation :

$$\|\partial_3 v\|_{\rho', r, \sigma} \leq \frac{C_{\sigma}}{\rho - \rho'} \|v\|_{\rho, r, \sigma}, \quad (3.2.7)$$

où $C_{\sigma} := \sigma^{-1} > 0$.

La proposition suivante montre que dans les espaces $\mathbb{B}_{\rho, r, \sigma}$, nous pouvons interpréter le gradient de pression ∇q comme un terme semi-linéaire.

Proposition 3.2.1

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$, $r \geq 3$ un entier et $\sigma \in (0, \sigma_0]$ (avec σ_0 donné par la Proposition 3.1.5, dans laquelle r joue le rôle de $r-1$ ici). Si $(u, H) \in \mathbb{B}_{\rho, r, \sigma} \times \mathbb{B}_{\rho, r, \sigma}$, alors le problème de Laplace (3.2.2), avec terme source g donné par (3.2.4), admet une unique solution $q \in B_{\rho, r+1, \sigma}$ telle que $\int_{\Omega} q = 0$. De plus, q vérifie :

$$\nabla q \in (B_{\rho, r, \sigma})^3 \quad \text{et} \quad \|\nabla q\|_{\rho, r, \sigma} \leq C_{r, \rho_0} \left(\|u\|_{\rho, r, \sigma}^2 + \|H\|_{\rho, r, \sigma}^2 \right),$$

où $C_{r, \rho_0} > 0$ ne dépend que de r et de ρ_0 .

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe de la Proposition 3.1.6. En effet, grâce à la propriété d'algèbre (2.3.11) (valable car $r - 1 \geq 2$), on a $g \in B_{\rho, r-1, \sigma}$ (où g est défini en (3.2.4)). De plus, le terme source g vérifie bien la condition de compatibilité $\int_{\Omega} g = 0$, comme nous l'avons fait remarquer en (3.2.5), étant donné que l'on a incorporé les contraintes de divergence nulle et les conditions au bord sur u et H dans les espaces fonctionnels $\mathbb{B}_{\rho, r, \sigma}$. Ainsi, on peut appliquer la Proposition 3.1.6, qui fournit une unique solution $q \in B_{\rho, r+1, \sigma}$ du problème de Laplace (3.2.2), telle que $\int_{\Omega} q = 0$. Terminons par l'estimation satisfaite par ∇q :

$$\|\nabla q\|_{\rho, r, \sigma} := \sum_{i=1}^3 \|\partial_i q\|_{\rho, r, \sigma} \leq 3 \|q\|_{\rho, r+1, \sigma} \leq C_{r, \rho_0} \|g\|_{\rho, r-1, \sigma},$$

d'après la Proposition 3.1.6. Compte tenu de la définition (3.2.4) de g , et du fait que $B_{\rho, r-1, \sigma}$ est une algèbre (car $r - 1 > \frac{3}{2}$, on renvoie au Théorème 2.3.6), il vient alors :

$$\begin{aligned} \|\nabla q\|_{\rho, r, \sigma} &\leq C_{r, \rho_0} \|\nabla u : \nabla u^T - \nabla H : \nabla H^T\|_{\rho, r-1, \sigma} \\ &\leq C_{r, \rho_0} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \|\partial_i u_j \partial_j u_i\|_{\rho, r-1, \sigma} + \|\partial_i H_j \partial_j H_i\|_{\rho, r-1, \sigma} \\ &\leq C_{r, \rho_0} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \|\partial_i u_j\|_{\rho, r-1, \sigma} \|\partial_j u_i\|_{\rho, r-1, \sigma} + \|\partial_i H_j\|_{\rho, r-1, \sigma} \|\partial_j H_i\|_{\rho, r-1, \sigma} \\ &\leq C_{r, \rho_0} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \|u_i\|_{\rho, r, \sigma} \|u_j\|_{\rho, r, \sigma} + \|H_i\|_{\rho, r, \sigma} \|H_j\|_{\rho, r, \sigma} \\ &= C_{r, \rho_0} \left(\|u\|_{\rho, r, \sigma}^2 + \|H\|_{\rho, r, \sigma}^2 \right), \end{aligned}$$

où $C_{r, \rho_0} > 0$ ne dépend que de r et de ρ_0 .

□

Nous utiliserons la version suivante du théorème de Cauchy-Kowalevskaya (voir [Nir72, Nis77, BG78] pour la version ci-après, ou [Saf95] pour une autre approche) :

Théorème 3.2.2 (Cauchy-Kowalevskaya)

Soit $(\mathbb{B}_{\rho})_{0 < \rho \leq \rho_0}$ une échelle d'espaces de Banach dont la norme est notée $\|\cdot\|_{\rho}$, dans laquelle on considère l'équation différentielle suivante au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u = F(u), & |t| < \tau, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

On suppose qu'il existe $R > 0$ et $C > 0$ tels que

$$u_0 \in \mathbb{B}_{\rho_0}, \quad \text{avec} \quad \|u_0\|_{\rho_0} < R,$$

$$\forall 0 < \rho' < \rho \leq \rho_0, \quad F : B_{\rho}(0, 2R) \rightarrow \mathbb{B}_{\rho'} \text{ est continue,} \quad (3.2.9)$$

où $B_{\rho}(0, 2R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon $2R$ de \mathbb{B}_{ρ} , et

$$\forall 0 < \rho' < \rho \leq \rho_0, \quad \forall u, v \in B_{\rho}(0, 2R), \quad \|F(u) - F(v)\|_{\rho'} \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \|u - v\|_{\rho}. \quad (3.2.10)$$

Alors il existe $a > 0$, ne dépendant que de ρ_0 et R mais pas de u_0 , et une unique solution u de l'équation différentielle (3.2.8) telle que

$$u \in \bigcap_{0 < \rho < \rho_0} C^1([-a(\rho_0 - \rho), a(\rho_0 - \rho)]; B_{\rho}(0, 2R)).$$

Pour rentrer dans le cadre du théorème précédent, réécrivons le système (3.2.1) sous la forme d'une équation différentielle à valeurs dans l'échelle d'espaces de Banach $(\mathbb{B}_{\rho,r,\sigma} \times \mathbb{B}_{\rho,r,\sigma})_{0 < \rho \leq \rho_0}$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = F(U), & t \in (0, T), \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où $U = (u, H)$ et $F(U)$ est défini par :

$$F(U) = \begin{pmatrix} -(u \cdot \nabla)u + (H \cdot \nabla)H - \nabla q \\ -(u \cdot \nabla)H + (H \cdot \nabla)u \end{pmatrix},$$

avec q solution du problème de Laplace (3.2.2), (3.2.4). Notons que F ne fait pas intervenir les contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique, car celles-ci ont déjà été intégrées au sein des espaces de Banach $\mathbb{B}_{\rho,r,\sigma}$.

Fixons $R > 0$, et considérons $U = (u, H) \in B_{\rho,r,\sigma}(0, 2R) \times B_{\rho,r,\sigma}(0, 2R)$ (où l'on a noté $B_{\rho,r,\sigma}(0, 2R)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $2R$ de $\mathbb{B}_{\rho,r,\sigma}$). Vérifions que l'on a bien $F(U) \in \mathbb{B}_{\rho',r,\sigma} \times \mathbb{B}_{\rho',r,\sigma}$ pour tout $\rho' < \rho$.

Les conditions de bord. On vérifie que sur $\Gamma \cup \Gamma_+$, on a :

$$-u \cdot \nabla u_3 + H \cdot \nabla H_3 - \partial_3 q = 0 \quad \text{et} \quad -u \cdot \nabla H_3 + H \cdot \nabla u_3 = 0.$$

Ceci est direct compte tenu du fait que $u_3 = H_3 = 0$ sur $\Gamma \cup \Gamma_+$, et du résultat de la Proposition 3.2.1.

Les contraintes de divergence nulle. Vérifions également que F préserve les contraintes de divergence nulle. Par définition de la pression q , et en utilisant les contraintes de divergence nulle sur u et H , on a dans un premier temps :

$$\nabla \cdot (-(u \cdot \nabla)u + (H \cdot \nabla)H - \nabla q) = -\Delta q - (\nabla u : \nabla u^T - \nabla H : \nabla H^T) = -\Delta q - g = 0.$$

Ensuite, toujours en utilisant les contraintes de divergence nulle sur u et H , la divergence de la seconde composante de F vaut :

$$\nabla \cdot (-(u \cdot \nabla)H + (H \cdot \nabla)u) = \nabla \cdot (\nabla \times (u \times H)) = 0.$$

L'estimation "lipschitzienne" (3.2.10) de F . On commence par estimer les normes $\|\cdot\|_{\rho',r,\sigma}$ des termes convectifs apparaissant dans l'expression de F comme le montrent les calculs suivants.

Proposition 3.2.3

Soient $0 < \rho' < \rho \leq \rho_0$, $r \geq 2$ un entier et $\sigma > 0$. Soient $R > 0$ et $u, H, \tilde{u}, \tilde{H} \in B_{\rho,r,\sigma}(0, 2R)$. Alors,

$$\|(u \cdot \nabla)H - (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{H}\|_{\rho',r,\sigma} \leq \frac{C_r R \sigma^{-1}}{\rho - \rho'} (\|u - \tilde{u}\|_{\rho,r,\sigma} + \|H - \tilde{H}\|_{\rho,r,\sigma}), \quad (3.2.11)$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r .

Tous les autres termes convectifs qui interviennent dans l'expression de $F(U)$ sont estimés de façon analogue. Réécrivons $F(U)$ sous la forme $F(U) = F_1(U) + F_2(U)$, avec

$$F_1(U) = \begin{pmatrix} -(u \cdot \nabla)u + (H \cdot \nabla)H \\ -(u \cdot \nabla)H + (H \cdot \nabla)u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_2(U) = \begin{pmatrix} -\nabla q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la Proposition 3.2.3, on peut notamment en déduire que l'application $U \mapsto F_1(U)$ est continue de $B_{\rho,r,\sigma}(0, R) \times B_{\rho,r,\sigma}(0, R)$ dans $\mathbb{B}_{\rho',r,\sigma} \times \mathbb{B}_{\rho',r,\sigma}$, par bilinéarité de l'application F_1 et par continuité de la dérivation de $\mathbb{B}_{\rho,r,\sigma}$ dans $\mathbb{B}_{\rho',r,\sigma}$. L'hypothèse (3.2.9) est donc vérifiée pour F_1 . Nous démontrons maintenant la Proposition 3.2.3.

Démonstration. On utilise les propriétés (2.3.10) et (2.3.11) satisfaites dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$ (notons que $r \geq 2$, donc $B_{\rho,r,\sigma}$ est une algèbre). La i -ème composante du vecteur $(u \cdot \nabla)H - (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{H}$ s'écrit, avec la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés,

$$u_j \partial_j H_i - \tilde{u}_j \partial_j \tilde{H}_i.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|u_j \partial_j H_i - \tilde{u}_j \partial_j \tilde{H}_i\|_{\rho',r,\sigma} &= \|u_j \partial_j (H_i - \tilde{H}_i) + (u_j - \tilde{u}_j) \partial_j \tilde{H}_i\|_{\rho',r,\sigma} \\ &\leq \frac{C_r R \sigma^{-1}}{\rho - \rho'} \|H_i - \tilde{H}_i\|_{\rho,r,\sigma} + \frac{C_r R \sigma^{-1}}{\rho - \rho'} \|u_j - \tilde{u}_j\|_{\rho,r,\sigma} \\ &\leq \frac{C_r R \sigma^{-1}}{\rho - \rho'} \left(\|u - \tilde{u}\|_{\rho,r,\sigma} + \|H - \tilde{H}\|_{\rho,r,\sigma} \right). \end{aligned}$$

□

Terminons par l'estimation "semi-linéaire" sur le gradient de pression (ce qui achèvera le cas de F_2).

Proposition 3.2.4

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$, $r \geq 3$ un entier et $\sigma \in (0, \sigma_0]$, où σ_0 est donné par la Proposition 3.1.5 (que l'on applique avec $r - 1$ dans le rôle de r). Soient $R > 0$ et $u, H, \tilde{u}, \tilde{H} \in B_{\rho,r,\sigma}(0, 2R)$. On note q (resp. \tilde{q}) la solution de (3.2.2) avec terme source g (resp. \tilde{g}) donné par (3.2.4). Alors,

$$\|\nabla q - \nabla \tilde{q}\|_{\rho,r,\sigma} \leq C_r R \left(\|u - \tilde{u}\|_{\rho,r,\sigma} + \|H - \tilde{H}\|_{\rho,r,\sigma} \right), \quad (3.2.12)$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r .

Démonstration. D'après (3.1.6), et par linéarité du problème (3.2.2) nous avons :

$$\begin{aligned} \|\nabla q - \nabla \tilde{q}\|_{\rho,r,\sigma} &\leq \|q - \tilde{q}\|_{\rho,r+1,\sigma} \\ &\leq C_{r,\rho_0} \|g - \tilde{g}\|_{\rho,r-1,\sigma} \\ &= C_{r,\rho_0} \|\nabla u : \nabla u^T - \nabla \tilde{u} : \nabla \tilde{u}^T - \nabla H : \nabla H^T + \nabla \tilde{H} : \nabla \tilde{H}^T\|_{\rho,r-1,\sigma} \\ &\leq C_{r,\rho_0} \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \|\partial_i u_j \partial_j u_i - \partial_i \tilde{u}_j \partial_j \tilde{u}_i\|_{\rho,r-1,\sigma} + \|\partial_i H_j \partial_j H_i - \partial_i \tilde{H}_j \partial_j \tilde{H}_i\|_{\rho,r-1,\sigma} \\ &=: C_{r,\rho_0} \sum_{1 \leq i,j \leq 3} A_{i,j} + B_{i,j}. \end{aligned}$$

Estimons $A_{i,j}$:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \|\partial_i (u_j - \tilde{u}_j) \partial_j u_i + \partial_j (u_i - \tilde{u}_i) \partial_i \tilde{u}_j\|_{\rho,r-1,\sigma} \\ &\leq C_r \left(\|\partial_i (u_j - \tilde{u}_j)\|_{\rho,r-1,\sigma} \|\partial_j u_i\|_{\rho,r-1,\sigma} + \|\partial_j (u_i - \tilde{u}_i)\|_{\rho,r-1,\sigma} \|\partial_i \tilde{u}_j\|_{\rho,r-1,\sigma} \right) \\ &\leq C_r \left(\|u_j - \tilde{u}_j\|_{\rho,r,\sigma} \|u_i\|_{\rho,r,\sigma} + \|u_i - \tilde{u}_i\|_{\rho,r,\sigma} \|u_j\|_{\rho,r,\sigma} \right) \\ &\leq C_r R \|u - \tilde{u}\|_{\rho,r,\sigma}. \end{aligned}$$

L'estimation des termes $B_{i,j}$ est identique, ce qui conclut quant à l'estimation (3.2.12) de $\nabla q - \nabla \tilde{q}$.

□

La Proposition 3.2.4 montre en particulier qu'il n'y a **aucune** perte de dérivée pour le gradient de pression (en terme du rayon d'analyticité ρ) car ∇q est estimé dans la **même** norme que u et H . La

résolution de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}U = F_2(U)$ relèverait alors du cadre classique du théorème de Cauchy-Lipschitz (bien que ce terme ne propage pas les contraintes de divergence nulle à lui seul). Les pertes de dérivées, ne survenant que sur F_1 , sont alors gérées par le théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

Pour rentrer dans le cadre d'application du Théorème 3.2.2, on énonce deux résultats (*plus faibles*) découlant de la Proposition 3.2.4.

D'abord, pour tout $\rho' < \rho$, l'application $U \mapsto F_2(U) = (-\nabla q, 0)$ est continue de $B_{\rho,r,\sigma}(0, R) \times B_{\rho,r,\sigma}(0, R)$ dans $\mathbb{B}_{\rho',r,\sigma} \times \mathbb{B}_{\rho',r,\sigma}$: l'hypothèse de continuité (3.2.9) est donc finalement satisfaite par $F = F_1 + F_2$.

D'autre part, on peut écrire l'estimation suivante :

$$\|\nabla q - \nabla \tilde{q}\|_{\rho',r,\sigma} \leq \frac{C_r R \sigma^{-1}}{\rho - \rho'} \left(\| \|u - \tilde{u}\| \|_{\rho,r,\sigma} + \| \|H - \tilde{H}\| \|_{\rho,r,\sigma} \right), \quad (3.2.13)$$

pour tout $\rho' < \rho$. Par conséquent, en vertu de (3.2.11) et (3.2.13), le champ de vecteurs $F(U) = F_1(U) + F_2(U)$ vérifie bien l'estimation "lipschitzienne" (3.2.10).

On peut dès lors appliquer le Théorème 3.2.2 pour résoudre le système (3.2.1) avec une donnée initiale régulière (u_0, H_0) .

Théorème 3.2.5

Soient $\rho_0 > 0$, $r \geq 3$ un entier, $\sigma \in (0, \sigma_0]$ (où σ_0 est donné par la Proposition 3.1.5), $R > 0$ et des données initiales $(u_0, H_0) \in \mathbb{B}_{\rho_0,r,\sigma} \times \mathbb{B}_{\rho_0,r,\sigma}$ vérifiant :

$$\| \|u_0\| \|_{\rho_0,r,\sigma}, \| \|H_0\| \|_{\rho_0,r,\sigma} < R.$$

Alors il existe $a > 0$, ne dépendant que de ρ_0 , r et R , et une unique solution (u, H, q) au système (3.2.1), telle que pour tout $\rho \in (0, \rho_0)$,

$$\begin{aligned} u, H &\in \mathcal{C}_t^1 \left((-a(\rho_0 - \rho), a(\rho_0 - \rho)); \mathbb{B}_{\rho,r,\sigma} \right), \\ \| \|u(t, \cdot), H(t, \cdot)\| \|_{\rho,r,\sigma} &< 2R, \quad \forall |t| < a(\rho_0 - \rho), \\ q &\in \mathcal{C}_t^1 \left((-a(\rho_0 - \rho), a(\rho_0 - \rho)); B_{\rho,r+1,\sigma} \right), \\ \| \|q(t, \cdot)\| \|_{\rho,r+1,\sigma} &< C_0 R^2, \quad \forall |t| < a(\rho_0 - \rho), \\ \int_{\Omega} q(t, x) dx &= 0, \quad \forall |t| < a(\rho_0 - \rho), \end{aligned}$$

où $C_0 > 0$ est une constante numérique.

Remarques. Les données initiales u_0 et H_0 dans le Théorème 3.2.5 sont bien à divergence nulle compte tenu de la définition (3.2.6) de l'espace $\mathbb{B}_{\rho_0,r,\sigma}$.

La solution obtenue est définie au moins jusqu'au temps $a\rho_0 > 0$. On renvoie à [Ale82, Sch88, YM91, Sec93] pour des résultats d'existence locale de solutions de régularité Sobolev à des systèmes issus de la MHD dans des *domaines fixes*; voir également [AH07] pour des résultats d'existence locale de solutions de régularité Sobolev au système de la MHD *inhomogène* posé dans \mathbb{R}^3 . On renvoie enfin à [Hmi14] pour des résultats d'existence locale de solutions au problème des poches de tourbillon en dimension 2 d'espace, dans le cadre de la MHD idéale incompressible.

Le résultat démontré ici est donc très loin d'être optimal en terme de régularité des données initiales. L'intérêt était de comprendre comment les estimations étaient menées pour le cas de la MHD idéale incompressible *en domaine fixe*. Au Chapitre 4, on poussera l'analyse plus loin en incorporant la frontière libre à l'intérieur du domaine.

Dans l'optique de construire des solutions moins régulières, une première difficulté à noter concerne *le temps d'existence* des solutions. En effet, dans la démonstration de [Nis77], la quantité $a > 0$ dépend de R , c'est-à-dire de la taille des données initiales dans l'échelle d'espaces de Banach $(\mathbb{B}_{\rho,r,\sigma})_{0 < \rho \leq \rho_0}$. On peut alors avoir un temps d'existence qui se restreint lorsque les données initiales deviennent grandes dans les espaces $\mathbb{B}_{\rho_0,r,\sigma}$. C'est typiquement ce qui se produit lorsqu'on procède par densité en utilisant le Théorème 2.3.7, en approchant une donnée initiale de régularité Sobolev H^r prescrite, par une suite de données initiales dans $\mathbb{B}_{\rho_0,r,\sigma}$ (donc avec un *même* indice de régularité ρ_0). On pourrait aussi faire tendre ρ_0 vers 0 avec la suite de données initiales, mais le temps d'existence $a\rho_0$ aurait *a priori* encore tendance à tendre vers 0.

Vers des solutions analytiques au problème des nappes de tourbillon-courant

On pourra trouver sur *arXiv* une prépublication qui complète ce chapitre : arxiv.org/abs/1603.05114v2.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème des nappes de tourbillon-courant en MHD idéale incompressible. Il s'agit d'un problème modélisant le couplage de deux plasmas, dont la vitesse et le champ magnétique présentent une discontinuité tangentielle le long d'une hypersurface, qui elle-même évolue au cours du temps. Il s'agit donc d'un problème couplé à frontière libre. Dans la Section 4.1, nous présenterons en détails les équations modélisant ce phénomène.

L'enjeu est ici de mettre en place un schéma de preuve pour démontrer l'existence locale de solutions analytiques au problème des nappes de tourbillon-courant. Comme pour le Chapitre 3, on souhaitera appliquer un théorème de Cauchy-Kowalevskaya dans les espaces fonctionnels introduits au Chapitre 2. Afin de gérer le terme de pression dans le système (4.1.2) ci-après, nous devons tenir compte des contraintes *non-linéaires* que doivent vérifier en tout temps la vitesse et le champ magnétique. La présence de ces contraintes renferme une difficulté supplémentaire par rapport à ce qui a été traité au Chapitre 3, puisqu'elles tiennent compte des conditions de saut à travers la nappe. Pour palier à l'ensemble de ces difficultés, on s'inspirera de la démonstration du théorème de Cauchy-Kowalevskaya établie par Baouendi et Goulaouic [BG78].

Les méthodes employées dans ce chapitre généraliseront ce qui a été vu au Chapitre 3. Contrairement à ce qui a été fait précédemment, le gradient de pression ne sera plus un terme *semi-linéaire*, mais *quasi-linéaire*. C'est pourquoi l'estimation de la pression dans les espaces analytiques s'avérera beaucoup plus délicate. En revanche, la définition même des normes analytiques $\|\cdot\|_{\rho,r,\sigma}$ nous permettra de gérer correctement ce terme de pression dans les estimations de la Section 4.5, en imposant une restriction sur les paramètres ρ et σ .

Après avoir donné des estimations analytiques de la pression et du relèvement du front, nous proposerons un schéma de preuve qui devrait permettre dans un futur travail de recherche d'établir l'existence et l'unicité locale de nappes de tourbillon-courant analytiques, en adaptant les arguments de Baouendi et Goulaouic [BG78].

4.1 Position du problème

Dans tout ce chapitre, Ω désignera le domaine de référence $\mathbb{T}^2 \times (-1, 1)$, que l'on partage en deux sous-domaines : $\Omega^+ := \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ et $\Omega^- := \mathbb{T}^2 \times (-1, 0)$. On notera également les bords

$$\Gamma := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\pm} := \mathbb{T}^2 \times \{x_3 = \pm 1\}.$$

On rappelle que les équations de la MHD idéale incompressible s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - (H \cdot \nabla)H + \nabla q = 0, \\ \partial_t H + (u \cdot \nabla)H - (H \cdot \nabla)u = 0, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot H = 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où u représente la vitesse d'un plasma idéal incompressible, H son champ magnétique, et q la pression totale. On s'intéresse à des solutions particulières de (4.1.1), régulières de part et d'autre d'une hypersurface $\Gamma(t)$ qui évolue au cours du temps, et présentant une discontinuité tangentielle au niveau de $\Gamma(t)$ (voir [Syr53, Axf62, Cha61, Tra05, CMST12] pour des travaux antérieurs sur ce problème). On suppose que l'hypersurface est une nappe paramétrée comme suit :

$$\Gamma(t) = \{(x', x_3) \in \Omega \mid x_3 = f(t, x')\},$$

où l'on suppose également que pour tout $t \in [0, T]$, le front f vérifie $-1 < f(t, \cdot) < 1$. Ainsi, $\Gamma(t)$ partitionne le domaine de référence Ω en deux sous-domaines $\Omega^{\pm}(t) := \{x_3 \gtrless f(t, x')\}$, dans lesquels les solutions $(u^{\pm}, H^{\pm}, q^{\pm})$ de (4.1.1) sont régulières.

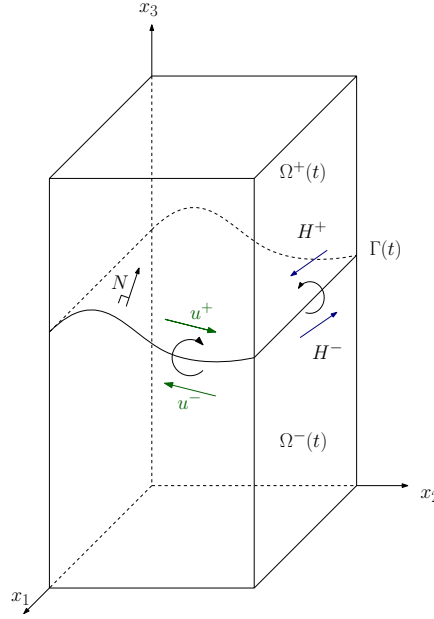


FIGURE 4.1 : Schéma d'une nappe de tourbillon-courant.

Le système modélisant les nappes de tourbillon-courant incompressibles s'écrit sous la forme d'un problème à frontière libre :

$$\begin{cases} \partial_t u^{\pm} + (u^{\pm} \cdot \nabla)u^{\pm} - (H^{\pm} \cdot \nabla)H^{\pm} + \nabla q^{\pm} = 0, & \text{dans } \Omega^{\pm}(t), \quad t \in [0, T], \\ \partial_t H^{\pm} + (u^{\pm} \cdot \nabla)H^{\pm} - (H^{\pm} \cdot \nabla)u^{\pm} = 0, & \text{dans } \Omega^{\pm}(t), \quad t \in [0, T], \\ \nabla \cdot u^{\pm}(t) = \nabla \cdot H^{\pm}(t) = 0, & \text{dans } \Omega^{\pm}(t), \quad t \in [0, T], \\ \partial_t f = u^{\pm} \cdot N, \quad H^{\pm} \cdot N = 0, \quad [q] = 0, & \text{sur } \Gamma(t), \quad t \in [0, T], \\ u_3^{\pm} = H_3^{\pm} = 0, & \text{sur } \Gamma_{\pm}, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

La notation $[q]$ dans (4.1.2) désigne le saut de q à travers $\Gamma(t)$:

$$[q] := q^+ \Big|_{\Gamma(t)} - q^- \Big|_{\Gamma(t)}.$$

Enfin, N est un vecteur normal à $\Gamma(t)$, que l'on choisit comme suit :

$$N := (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1).$$

Afin de résoudre le problème (4.1.2), on suit une stratégie usuelle dans l'étude des problèmes à frontière libre : on se ramène tout d'abord dans les domaines fixes Ω^\pm avec l'interface Γ (indépendants du temps) en redressant convenablement le front f . Dans d'autres problèmes à frontière libre pour les fluides incompressibles, d'autres stratégies sont possibles. Par exemple, dans la théorie des *water waves* [Lan05, Lan13], ou encore pour les nappes de tourbillon incompressibles [SSBF81], la stratégie des auteurs a été de réduire le problème sur la frontière libre uniquement ; c'est également ce point de vue qu'ont adopté Sun, Wang et Zhang [SWZ15] dans leur preuve d'existence et d'unicité locale des nappes de tourbillon-courant incompressibles dans l'échelle de régularité Sobolev. La méthode que nous choisissons d'adopter ici est différente, puisqu'on garde en quelque sorte une approche "eulérienne" en considérant les équations de (4.1.2) dans les domaines "de départ" Ω^+ et Ω^- (après avoir opéré un difféomorphisme convenable).

4.2 Reformulation du problème

4.2.1 Redressement du front f

On reprend la démarche de Coulombel *et al.* [CMST12] en redressant le front f défini sur $[0, T] \times \mathbb{T}^2$ en une fonction ψ définie dans tout le domaine, c'est-à-dire sur $[0, T] \times \Omega$. On rappelle ici le Lemme 1 de [CMST12] qui définit ce redressement et permet de gagner une demi-dérivée dans l'échelle de régularité Sobolev ; la stratégie est inspirée de Lannes [Lan05].

Lemme 4.2.1

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq 2$. Alors il existe une application linéaire continue

$$f \in H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2) \mapsto \psi \in H^r(\Omega)$$

telle que, pour tout $x' \in \mathbb{T}^2$, on a :

$$\psi(x', 0) = f(x'), \quad \psi(x', \pm 1) = 0, \quad \partial_3 \psi(x', 0) = 0. \quad (4.2.1)$$

Les conditions de bord (4.2.1) vérifiées par le redressement ψ permettront de gérer convenablement les conditions de saut et de bord du système (4.1.2) grâce au changement de variables opéré ci-après.

On définit en effet l'application $\Psi : (t, x) \mapsto (x', x_3 + \psi(t, x))$, où $\psi(t, \cdot)$ est donnée par le Lemme 4.2.1 appliqué à la fonction $f(t, \cdot)$. D'après [CMST12], si l'on impose une condition de petitesse sur le front $f(t, \cdot)$ dans l'espace $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, alors $\Psi(t, \cdot)$ est un H^r -difféomorphisme de Ω dès que $r \geq 3$, car alors $1 + \partial_3 \psi \geq \frac{1}{2}$ (par exemple). On appellera J le jacobien de Ψ , A l'inverse de la matrice jacobienne de Ψ , et a la comatrice JA :

$$J := 1 + \partial_3 \psi, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial_1 \psi}{J} & -\frac{\partial_2 \psi}{J} & \frac{1}{J} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a := JA = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ -\partial_1 \psi & -\partial_2 \psi & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Notons que la comatrice a vérifie les identités dites de Piola : les divergences des colonnes de a sont nulles, c'est-à-dire

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \sum_{i=1}^3 \partial_i a_{ij} = 0, \quad (4.2.3)$$

où on a noté a_{ij} les coefficients de la matrice a . Ces identités nous seront utiles ultérieurement pour simplifier certaines expressions.

On définit également, pour x dans les domaines fixes Ω^\pm , les nouvelles inconnues suivantes :

$$v^\pm(t, x) := u^\pm(t, \Psi(t, x)), \quad B^\pm(t, x) := H^\pm(t, \Psi(t, x)), \quad Q^\pm(t, x) := q^\pm(t, \Psi(t, x)).$$

Dans les nouvelles inconnues (v^\pm, B^\pm, Q^\pm) , le système (4.1.2) se réécrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t v^\pm + (\tilde{v}^\pm \cdot \nabla) v^\pm - (\tilde{B}^\pm \cdot \nabla) B^\pm + A^T \nabla Q^\pm = 0, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \partial_t B^\pm + (\tilde{v}^\pm \cdot \nabla) B^\pm - (\tilde{B}^\pm \cdot \nabla) v^\pm = 0, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ (A^T \nabla) \cdot v^\pm = (A^T \nabla) \cdot B^\pm = 0, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \partial_t f = v^\pm \cdot N, \quad B^\pm \cdot N = 0, \quad [Q] = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ v_3^\pm = B_3^\pm = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm, \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

où l'on a posé :

$$N := (-\partial_1 \psi, -\partial_2 \psi, 1), \quad \tilde{v}^\pm := \left(v_1^\pm, v_2^\pm, \frac{v^\pm \cdot N - \partial_t \psi}{J} \right), \quad \tilde{B}^\pm := \left(B_1^\pm, B_2^\pm, \frac{B^\pm \cdot N}{J} \right). \quad (4.2.5)$$

Le vecteur N est ici défini dans tout le domaine Ω , et pas uniquement sur l'interface Γ . La notation $[\cdot]$ désigne dorénavant le saut à travers l'interface **fixe** Γ :

$$[Q] := Q^+|_\Gamma - Q^-|_\Gamma.$$

La pression totale Q^\pm dans (4.2.4) peut s'exprimer implicitement en fonction des inconnues (v^\pm, B^\pm, f) , en utilisant les contraintes de "divergence" nulle sur la vitesse et le champ magnétique. En reprenant les calculs de [CMST12, p.266], on montre que le couple (Q^+, Q^-) satisfait le problème elliptique suivant (obtenu en appliquant notamment l'opérateur $(A^T \nabla) \cdot$ à la première équation de (4.2.4)) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -A^T \nabla \cdot (A^T \nabla Q^\pm) = \mathcal{F}^\pm, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ [Q] = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ [A^T \nabla Q \cdot N] = \mathcal{G}, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \partial_3 Q^\pm = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (4.2.6)$$

Les termes sources \mathcal{F}^\pm sont définis par :

$$\mathcal{F}^\pm := -\partial_t A_{ki} \partial_k v_i^\pm + A_{ki} \partial_k \tilde{v}^\pm \cdot \nabla v_i^\pm - \tilde{v}^\pm \cdot \nabla A_{ki} \partial_k v_i^\pm - A_{ki} \partial_k \tilde{B}^\pm \cdot \nabla B_i^\pm + \tilde{B}^\pm \cdot \nabla A_{ki} \partial_k B_i^\pm, \quad (4.2.7)$$

où l'on a adopté la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés $i, k \in \{1, 2, 3\}$. Le terme source \mathcal{G} dans (4.2.6) est défini comme suit :

$$\mathcal{G} := -[2v' \cdot \nabla' \partial_t f + (v' \cdot \nabla') \nabla' f \cdot v' - (B' \cdot \nabla') \nabla' f \cdot B'], \quad (4.2.8)$$

où la notation " $'$ " désigne les parties tangentielles :

$$\nabla' := (\partial_1, \partial_2), \quad v' := (v_1, v_2), \quad B' := (B_1, B_2).$$

La résolution du système (4.2.6) (à $t \in [0, T]$ fixé) requiert la *condition nécessaire de compatibilité* suivante que doivent vérifier les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} , obtenue en intégrant par parties la première équation de (4.2.6) :

$$\sum_{\pm} \int_{\Omega^\pm} J \mathcal{F}^\pm dx = \int_{\Gamma} \mathcal{G} dx'. \quad (4.2.9)$$

En utilisant les définitions (4.2.7) et (4.2.8), ainsi que les identités de Piola (4.2.3), on montre après quelques calculs que la condition de compatibilité (4.2.9) se réécrit :

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \int_{\Omega^\pm} J \left(\partial_t ((A^T \nabla) \cdot v^\pm) + \tilde{v}^\pm \cdot \nabla ((A^T \nabla) \cdot v^\pm) - \tilde{B} \cdot \nabla ((A^T \nabla) \cdot B^\pm) \right) dx \\ = - \int_{\Gamma} \left[(v \cdot N - \partial_t f) (\partial_3 v \cdot N) - (B \cdot N) (\partial_3 B \cdot N) \right] dx'. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

On voit facilement que la condition de compatibilité (4.2.10) est satisfaite dès lors que la vitesse v^\pm et le champ magnétique B^\pm sont à “divergence” nulle, c’est-à-dire vérifiant $(A^T \nabla) \cdot v^\pm = (A^T \nabla) \cdot B^\pm = 0$, et s’ils vérifient de surcroît les conditions de saut $\partial_t f = v^+ \cdot N = v^- \cdot N$ et $B^+ \cdot N = B^- \cdot N = 0$ sur le bord fixe Γ . Nous aurons donc besoin d’assurer ces contraintes **non-linéaires** afin de pouvoir définir la pression (Q^+, Q^-) en tout temps. La difficulté, contrairement au cas “sans nappe” étudié au Chapitre 3, est qu’on ne peut pas incorporer “facilement” ces contraintes dans les espaces fonctionnels $B_{\rho,r,\sigma}$ définis au Chapitre 2, car cela ne définirait plus un espace *vectorel*. C’est notamment pour cette raison que l’on choisira dans ce chapitre de se reposer sur la démonstration du théorème de Cauchy-Kowalevskaya donnée par Baouendi et Goulaouic [BG78]; on reviendra plus en détails sur ce point dans la Section 4.3 ci-dessous.

Supposons pour l’instant que \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} sont des termes sources *quelconques* appartenant respectivement à $H^1(\Omega^\pm)$ et $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, satisfaisant en outre la condition de compatibilité (4.2.9). Si, pour tout $t \in [0, T]$, le front f vérifie la condition de petitesse $\|f(t)\|_{H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)} < \varepsilon_0$ (pour une certaine constante numérique $\varepsilon_0 > 0$ fixée), alors le problème (4.2.6) est bien posé dans $H^3(\Omega^+) \times H^3(\Omega^-)$. C’est-à-dire, il existe une unique solution (Q^+, Q^-) de (4.2.6) appartenant à $H^3(\Omega^+) \times H^3(\Omega^-)$ telle que $\sum_{\pm} \int_{\Omega^\pm} Q^\pm = 0^1$. De plus, la solution satisfait l’estimation de régularité elliptique suivante (on renvoie aux notations (2.3.13) du Chapitre 2 pour les normes associées aux espaces de Sobolev) :

$$\|Q^\pm\|_{3,\pm} \leq C_0 \left(\|\mathcal{F}^\pm\|_{1,\pm} + \|\mathcal{G}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right), \quad (4.2.11)$$

où $C_0 > 0$ est une constante ne dépendant que de ε_0 . On ne détaille pas la démonstration du caractère bien posé de (4.2.6), dont on pourra trouver des éléments de preuve dans [CMST12]. La démonstration repose principalement sur des outils classiques de l’analyse elliptique tels que le théorème de Lax-Milgram que l’on applique dans l’espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \left\{ (u^+, u^-) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-) \mid [u] = 0 \text{ et } \sum_{\pm} \int_{\Omega^\pm} u^\pm dx = 0 \right\}.$$

Ensuite, pour obtenir une estimation dans $H^2(\Omega^\pm)$, on évalue les quotients différentiels d’ordre 2 (voir [Eva98]). Le gain d’une dérivée supplémentaire se fait par récurrence, en estimant convenablement les commutateurs qui apparaissent (voir [CMST12, p.268]).

Une première étape consistera à étendre l’estimation (4.2.11) dans l’espace $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^+) \times B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^-)$, dès lors que les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} seront pris respectivement dans $B_{\rho,1,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho,\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Nous traiterons ce point ultérieurement dans la Section 4.5.

¹La condition de moyenne sur Q^\pm n’est qu’une convention de normalisation, car la détermination de la pression, à t fixé, se fait à une constante près.

Nous venons de voir que la résolution du système (4.2.6) nécessitait la condition de compatibilité (4.2.9). Cette condition est vérifiée notamment grâce aux contraintes de “divergence” nulle sur la vitesse et le champ magnétique, c’est-à-dire :

$$\forall t \in [0, T], \quad (A^T \nabla) \cdot v^\pm = (A^T \nabla) \cdot B^\pm = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^\pm.$$

La difficulté est que ces opérateurs “divergence” dépendent eux-même du front *inconnu* f et présentent donc une structure non-linéaire, ce qui rend peu aisée l’utilisation de ces contraintes. Pour palier à cette difficulté, on se démarque des travaux de Coulombel *et al.* [CMST12] et de Sun *et al.* [SWZ15], en donnant une nouvelle formulation du problème (4.2.4) inspirée de Trakhinin [Tra09].

4.2.2 Une nouvelle formulation du problème

Reprenons la formulation (4.2.4) du problème des nappes de tourbillon-courant en *domaines fixes*, dont les inconnues sont (v^\pm, B^\pm, f) (on omet la pression Q^\pm car elle s’obtient implicitement en fonction de (v^\pm, B^\pm, f) *via* la résolution du problème de Laplace (4.2.6)). À partir de (v^\pm, B^\pm, f) , nous définissons des “nouvelles” inconnues $(u^\pm, b^\pm)^2$ comme suit :

$$u^\pm := a v^\pm = (J v_1^\pm, J v_2^\pm, v^\pm \cdot N) \quad \text{et} \quad b^\pm := a B^\pm = (J B_1^\pm, J B_2^\pm, B^\pm \cdot N), \quad (4.2.12)$$

où l’on rappelle la définition (4.2.2) de la comatrice a . On remarque que les termes \tilde{v}^\pm et \tilde{B}^\pm dans (4.2.4) se réécrivent aisément en fonction de (u^\pm, b^\pm) , car on a :

$$\tilde{v}^\pm = \frac{u^\pm - \partial_t \psi e_3}{J}, \quad \tilde{B}^\pm = \frac{b^\pm}{J},$$

e_3 désignant le troisième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 . L’avantage de définir ces nouvelles inconnues u^\pm et b^\pm est que l’on peut réécrire les conditions de saut, les conditions de bord, et les contraintes de “divergence” du système (4.2.4) très simplement.

Les contraintes de “divergence”. Commençons par les contraintes que doivent satisfaire la vitesse v^\pm et le champ magnétique B^\pm dans (4.2.4). Grâce aux identités de Piola (4.2.3), les “divergences” de v^\pm et B^\pm se réécrivent très simplement en fonction des nouvelles inconnues u^\pm et b^\pm , car nous avons :

$$(A^T \nabla) \cdot v^\pm = \frac{1}{J} \nabla \cdot u^\pm \quad \text{et} \quad (A^T \nabla) \cdot B^\pm = \frac{1}{J} \nabla \cdot b^\pm. \quad (4.2.13)$$

L’avantage que l’on tire de (4.2.13) est que nous nous sommes ramenés à l’opérateur divergence d’origine, donc *linéaire* et à *coefficients constants*. Les nouvelles inconnues u^\pm et b^\pm seront donc cherchées à divergence nulle en tout temps :

$$\forall t \in [0, T], \quad \nabla \cdot u^\pm(t) = \nabla \cdot b^\pm(t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^\pm. \quad (4.2.14a)$$

Les conditions de saut. En terme des inconnues (u^\pm, b^\pm) , les conditions de saut dans (4.2.4) se réécrivent de la façon suivante :

$$\partial_t f = u_3^+ = u_3^- \quad \text{et} \quad b_3^+ = b_3^- = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \quad (4.2.14b)$$

En particulier, nous avons à présent affaire à des conditions *linéaires* sur le saut de u_3 à travers Γ et sur la trace de b_3^+ et b_3^- sur Γ .

²Prêtons attention au fait qu’à partir d’ici, la notation u^\pm ne fait plus référence à la vitesse qui intervenait dans le système de départ (4.1.2).

Les conditions sur les bords fixes Γ_+ et Γ_- . De la même façon, les conditions sur les bords fixes dans (4.2.4) se réécrivent, en utilisant (4.2.1) :

$$u_3^+ = u_3^- = 0 \quad \text{et} \quad b_3^+ = b_3^- = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\pm}. \quad (4.2.14c)$$

Ce sont une fois de plus des conditions *linéaires*.

Les équations vérifiées par u^{\pm} et b^{\pm} . Compte tenu de la définition (4.2.12), nous pouvons écrire les équations d'évolution que doivent satisfaire u^{\pm} et b^{\pm} dans les domaines Ω^{\pm} . Au sein de ce paragraphe, nous utilisons à nouveau la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés; nous réservons la notation i pour désigner des indices tangentiels appartenant à $\{1, 2\}$, et nous noterons k des indices appartenant à $\{1, 2, 3\}$.

Commençons par les équations que doit vérifier la vitesse u^{\pm} , et omettons temporairement les exposants \pm pour alléger l'écriture. Nous avons, pour $i = 1, 2$:

$$\partial_t u_i + \frac{u \cdot \nabla u_i}{J} - \frac{b \cdot \nabla b_i}{J} - \partial_3 \left(\frac{\partial_t \psi u_i}{J} \right) - (u_i u_k - b_i b_k) \frac{\partial_k J}{J^2} + J \partial_i Q - \partial_i \psi \partial_3 Q = 0, \quad (4.2.15a)$$

et pour la composante normale u_3 :

$$\partial_t u_3 + \frac{u \cdot \nabla u_3}{J} - \frac{b \cdot \nabla b_3}{J} + \partial_i \left(\frac{\partial_t \psi u_i}{J} \right) + (u_i u_k - b_i b_k) \frac{\partial_i \partial_k \psi}{J^2} - \partial_i \psi \partial_i Q + \frac{1 + \partial_i \psi \partial_i \psi}{J} \partial_3 Q = 0. \quad (4.2.15b)$$

De la même façon, les équations que doit vérifier le champ magnétique b sont données par :

$$\forall i = 1, 2, \quad \partial_i b_i + \frac{u \cdot \nabla b_i}{J} - \frac{b \cdot \nabla u_i}{J} - \partial_3 \left(\frac{\partial_t \psi b_i}{J} \right) - (b_i u_k - u_i b_k) \frac{\partial_k J}{J^2} = 0, \quad (4.2.15c)$$

$$\partial_i b_3 + \frac{u \cdot \nabla b_3}{J} - \frac{b \cdot \nabla u_3}{J} + \partial_i \left(\frac{\partial_t \psi b_i}{J} \right) + (b_i u_3 - u_i b_3) \frac{\partial_i J}{J^2} = 0. \quad (4.2.15d)$$

On adjoindra au système d'équations (4.2.15) des données initiales (u_0^{\pm}, b_0^{\pm}) vérifiant les contraintes (4.2.14), et un front initial f_0 . À t fixé, il convient de remarquer que si la vitesse u^{\pm} appartient à $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^{\pm})$, alors par continuité de l'application "trace" de $H^3(\Omega^{\pm})$ dans $H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)$, nous aurons $\partial_t f \in B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ en vertu de (4.2.14b). À ce stade, il reste encore à éclaircir le point de savoir si l'on cherchera également le front f dans $B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, ou bien si nous devons gagner un indice de régularité Sobolev pour chercher f dans $B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$. On reviendra sur cette discussion à la Section 4.3.

Le problème de Laplace satisfait par la pression Q^{\pm} . Le problème de Laplace associé à la pression est identique à celui donné par (4.2.6); nous le réécrivons ci-après en fonction des inconnues u^{\pm} et b^{\pm} , et utilisons les identités de Piola (4.2.3) pour nous ramener à l'opérateur de divergence classique. Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (a A^T \nabla Q^{\pm}) = J \mathcal{F}^{\pm}, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^{\pm}, \\ [Q] = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ (1 + |\nabla' f|^2) [\partial_3 Q] = \mathcal{G}, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \partial_3 Q^{\pm} = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_{\pm}. \end{array} \right. \quad (4.2.16)$$

Les termes sources $J \mathcal{F}^{\pm}$ et \mathcal{G} dans (4.2.16), dont on rappelle les définitions (4.2.7) et (4.2.8), se réécrivent en fonction de u^{\pm} et b^{\pm} comme suit (on omet les exposants \pm pour plus de clarté) :

$$\begin{aligned} J \mathcal{F} &= \frac{1}{J} (\partial_k u_{\ell} \partial_{\ell} u_k - \partial_k b_{\ell} \partial_{\ell} b_k) - \frac{2 \partial_k J}{J^2} (u_i \partial_i u_k - b_i \partial_i b_k) + \frac{2 \partial_i J \partial_k J}{J^3} (u_i u_k - b_i b_k) \\ &+ \frac{2 \partial_i \partial_j \psi}{J^2} (u_i \partial_3 u_j - b_i \partial_3 b_j) - \frac{2 \partial_j J}{J^2} (u_i \partial_j u_j - b_i \partial_j b_j). \end{aligned} \quad (4.2.17a)$$

Dans (4.2.17a), nous avons adopté la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés, et avons réservé la notation i et j pour désigner des indices tangentiels appartenant à $\{1, 2\}$, et la notation k et ℓ pour des indices appartenant à $\{1, 2, 3\}$. Enfin, le terme source \mathcal{G} se réécrit :

$$\mathcal{G} = -[2u' \cdot \nabla' \partial_t f + (u' \cdot \nabla') \nabla' f \cdot u' - (b' \cdot \nabla') \nabla' f \cdot b']. \quad (4.2.17b)$$

Dorénavant, on se concentre sur le système (4.2.15), (4.2.16), (4.2.17) adjoint des contraintes de divergence nulle et des conditions de bord (4.2.14), puis on cherche à en construire une solution analytique (u^\pm, b^\pm, f) dès lors qu'on se donne une condition initiale (u_0^\pm, b_0^\pm, f_0) . À ce stade, on cherche à savoir comment résoudre le problème des nappes de tourbillon-courant dans l'échelle analytique, par une méthode de point fixe "du type Cauchy-Kowalevskaya". L'avantage de la formulation de ce problème en terme des inconnues (u^\pm, b^\pm, f) est que l'on a pu réécrire la majorité des contraintes et des conditions de bord du système (4.2.4) comme des expressions *linéaires*. De la même manière qu'au Chapitre 3, on pourrait être tenté de les intégrer dans la définition des espaces $B_{\rho,r,\sigma}$, pour ensuite appliquer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya tel qu'on l'a énoncé au Théorème 3.2.2. Toutefois, la condition associée à la vitesse normale (à savoir $\partial_t f = u_3^+ = u_3^-$) n'est en soi pas linéaire, et contient deux informations : d'une part, le *saut* de u_3 doit être nul (ceci apparaît effectivement comme une condition linéaire) ; d'autre part, cette condition permet de définir $\partial_t f$ comme étant la *trace commune* de u_3^+ et u_3^- . Rappelons que nous avons besoin de ces *deux* équations afin que la condition de compatibilité (4.2.10) soit vérifiée, pour pouvoir résoudre en tout temps le problème de Laplace (4.2.6). En conséquence, nous n'entrons plus exactement dans le formalisme du Théorème 3.2.2, et il nous faut adapter les arguments de la preuve donnée par [BG78], ce qui fait l'objet de la partie suivante.

4.3 Proposition d'un schéma de résolution

On se propose de s'inspirer des travaux de [BG78] pour construire une solution locale en temps au système (4.2.15), (4.2.14) dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}$. Dans le même esprit que ce qui a été vu au Chapitre 3, l'idée est d'incorporer au sein des espaces fonctionnels les contraintes (4.2.14). En revanche, le point délicat est la présence de *deux* dérivées sur le redressement du front ψ dans les équations de (4.2.15), qui ne permettent pas d'appliquer immédiatement le théorème de Cauchy-Kowalevskaya comme énoncé au Théorème 3.2.2 ; c'est pourquoi nous avons choisi de nous reposer sur la démonstration donnée par Baouendi et Goulaouic, dont l'idée générale est basée sur la recherche d'un point fixe d'une application contractante définie sur un *sous-ensemble fermé* d'un espace de Banach.

Nous définissons à présent une application Υ , qui aura vocation à être contractante sur un espace métrique complet convenable. On se donne (u^\pm, b^\pm, f) vérifiant les contraintes (4.2.14a) et les conditions de bord (4.2.14b), (4.2.14c) sur un intervalle de temps $[0, T]$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot u^\pm = \nabla \cdot b^\pm = 0, & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_t f = u_3^+ = u_3^- \quad \text{et} \quad b_3^+ = b_3^- = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_3^\pm = b_3^\pm = 0, & \text{sur } \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Ci-après, nous définissons

$$\Upsilon(u^\pm, b^\pm, f) := (u^{\#\pm}, b^{\#\pm}, f^\#), \quad (4.3.2)$$

en suivant les idées de [BG78] : la vitesse $u^{\#\pm}$ et le champ magnétique $b^{\#\pm}$ seront définis de façon "explicite". Plus précisément, en vertu de (4.2.15a) et (4.2.15b), on commence par définir $u^{\#\pm}$ comme solution des EDP suivantes (en omettant les exposants $^\pm$ pour plus de clarté). Pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \partial_t u_i^\# &:= -\frac{u \cdot \nabla u_i}{J} + \frac{b \cdot \nabla b_i}{J} + \partial_3 \left(\frac{\partial_t \psi u_i}{J} \right) + (u_i u_k - b_i b_k) \frac{\partial_k J}{J^2} \\ &\quad - J \partial_i Q + \partial_i \psi \partial_3 Q, \end{aligned} \quad (4.3.3a)$$

et pour la composante normale :

$$\begin{aligned} \partial_t u_3^\# &:= -\frac{u \cdot \nabla u_3}{J} + \frac{b \cdot \nabla b_3}{J} - \partial_i \left(\frac{\partial_t \psi u_i}{J} \right) - (u_i u_k - b_i b_k) \frac{\partial_i \partial_k \psi}{J^2} \\ &\quad + \partial_i \psi \partial_i Q - \frac{1 + \partial_i \psi \partial_i \psi}{J} \partial_3 Q. \end{aligned} \quad (4.3.3b)$$

Notons que grâce aux contraintes (4.3.1), on peut résoudre le problème de Laplace (4.2.16), ce qui définit bien la pression Q^\pm dans (4.3.3).

Les données initiales $(u^{\#\pm}|_{t=0}, b^{\#\pm}|_{t=0})$ seront supposées vérifier les contraintes apparaissant dans (4.3.1), c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot u^{\#\pm}|_{t=0} = \nabla \cdot b^{\#\pm}|_{t=0} = 0, & \text{dans } \Omega^\pm, \\ [u_3^\#|_{t=0}] = 0 \quad \text{et} \quad b_3^{\#\pm}|_{t=0} = b_3^{\#\mp}|_{t=0} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_3^{\#\pm}|_{t=0} = b_3^{\#\pm}|_{t=0} = 0, & \text{sur } \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (4.3.4)$$

Avec la définition (4.3.3) de $u^{\#\pm}$, nous devons être en mesure de propager les contraintes associées à la vitesse dans (4.3.1), afin de pouvoir définir le "nouveau" front $f^\#$ comme solution de l'EDO $\partial_t f^\# = u_3^{\#\pm}$ sur Γ .

Propagation du saut de la vitesse normale. En prenant la trace de l'équation (4.3.3b) sur Γ (pour l'état + et l'état -), et en utilisant (4.3.1) et (4.2.1) (qui montre que $J = 1$ sur Γ), on obtient :

$$\partial_t u_3^{\#\pm} = -2 u_j^\pm \partial_j \partial_t f - u_i^\pm u_j^\pm \partial_i \partial_j f + b_i^\pm b_j^\pm \partial_i \partial_j f + \partial_i f \partial_i Q^\pm - (1 + |\nabla' f|^2) \partial_3 Q^\pm.$$

Grâce aux conditions de saut du problème de Laplace (4.2.16), on en déduit alors :

$$\partial_t [u_3^\#] = \mathcal{G} - (1 + |\nabla' f|^2) [\partial_3 Q] = 0.$$

Par conséquent, le saut de la vitesse normale est bien propagé en vertu de (4.3.4), et on peut donc définir $f^\#$ comme solution des EDP :

$$\partial_t f^\# := u_3^{\#+} = u_3^{\#-} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.3.5)$$

Propagation des conditions de bord sur Γ_\pm . À l'aide des conditions de bord sur Γ_\pm dans le problème de Laplace (4.2.16), et en utilisant (4.3.1), on en déduit également :

$$\partial_t u_3^{\#\pm} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\pm.$$

Ainsi, les conditions de bord que doit vérifier la vitesse sur Γ_\pm sont propagées car les données initiales vérifient (4.3.4).

Propagation de la contrainte de divergence nulle sur la vitesse. En appliquant l'opérateur de divergence au système (4.3.3a), (4.3.3b), nous avons après calculs :

$$\partial_t (\nabla \cdot u^{\#\pm}) = \partial_i (J \partial_i Q^\pm - \partial_i \psi \partial_3 Q^\pm) + \partial_3 \left(\frac{1 + |\nabla' \psi|^2}{J} \partial_3 Q^\pm - \partial_i \psi \partial_i Q^\pm \right) + J \mathcal{F}^\pm, \quad (4.3.6)$$

où l'on rappelle l'expression (4.2.17a) du terme $J \mathcal{F}^\pm$ dans (4.3.6). À l'aide des définitions données par (4.2.2), il vient :

$$\partial_t (\nabla \cdot u^{\#\pm}) = \nabla \cdot (a A^T \nabla Q^\pm) + J \mathcal{F}^\pm = 0,$$

en vertu de la première équation du problème de Laplace (4.2.16). En utilisant (4.3.4), la contrainte de divergence nulle sur la vitesse est donc également propagée.

Passons à présent à la définition du champ magnétique $b^{\#\pm}$. On le définit encore de façon “explicite”, comme pour la vitesse $u^{\#\pm}$, c’est-à-dire :

$$\partial_t b_i^{\#} := -\frac{u \cdot \nabla b_i}{J} + \frac{b \cdot \nabla u_i}{J} + \partial_3 \left(\frac{\partial_t \psi b_i}{J} \right) + (b_i u_k - u_i b_k) \frac{\partial_k J}{J^2}, \quad i = 1, 2, \quad (4.3.7a)$$

$$\partial_t b_3^{\#} := -\frac{u \cdot \nabla b_3}{J} + \frac{b \cdot \nabla u_3}{J} - \partial_i \left(\frac{\partial_t \psi b_i}{J} \right) - (b_i u_3 - u_i b_3) \frac{\partial_i J}{J^2}, \quad (4.3.7b)$$

où l’on a volontairement omis les exposants \pm .

Propagation des conditions de saut sur Γ . En utilisant les conditions (4.3.1), on obtient aisément :

$$\partial_t b_3^{\#\pm} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

ce qui montre que les conditions de saut associées au champ magnétique sont bien propagées.

Propagation des conditions de bord sur Γ_{\pm} . De la même façon, on vérifie sans peine que sur Γ_{\pm} , on a l’équation :

$$\partial_t b_3^{\#\pm} = 0,$$

ce qui propage là encore les conditions sur les bords fixes Γ_{\pm} .

Propagation de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Terminons par la contrainte de divergence nulle que doit vérifier le champ magnétique $b^{\#\pm}$. Comme pour le cas de la vitesse $u^{\#\pm}$, appliquons l’opérateur de divergence classique au système (4.3.7) :

$$\begin{aligned} \partial_t (\nabla \cdot b^{\#}) &= -\partial_i \left(\frac{u_k \partial_k b_i - b_k \partial_k u_i}{J} \right) + \partial_i \left((b_i u_k - u_i b_k) \frac{\partial_k J}{J^2} \right) \\ &\quad - \partial_3 \left(\frac{u_k \partial_k b_3 - b_k \partial_k u_3}{J} \right) - \partial_3 \left((b_i u_3 - u_i b_3) \frac{\partial_i J}{J^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

En tirant profit des termes anti-symétriques présents dans le membre de droite de (4.3.8), et en utilisant les contraintes de divergence nulle de (4.3.1), il vient :

$$\partial_t (\nabla \cdot b^{\#}) = 0.$$

Ainsi, la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique est propagée.

Récapitulons : nous avons défini une application $\Upsilon(u^{\pm}, b^{\pm}, f) = (u^{\#\pm}, b^{\#\pm}, f^{\#})$ à l’aide de (4.3.3), (4.3.5) et (4.3.7). De surcroît, l’application Υ laisse invariant les contraintes algébriques (4.3.1) (dès lors que nous les imposons à l’instant initial $t = 0$, ce qui sera *in fine* le cas).

La problématique est maintenant de trouver un espace métrique complet sur lequel l’application Υ sera contractante. L’idée que l’on souhaite suivre, et qui constituera une piste de recherche future, est d’adapter la preuve de [BG78] en définissant un espace vectoriel normé E_a à partir de l’échelle d’espaces de Banach $B_{\rho, r, \sigma}$, où $a > 0$ sera un paramètre à choisir suffisamment petit afin de rendre l’application Υ contractante sur un sous-ensemble fermé de E_a . Avant cela, nous devons être en mesure de montrer que Υ laissera *invariant* ce sous-ensemble de E_a , ce qui reposera sur une propriété similaire à l’hypothèse (3.2.9) énoncée dans le Théorème 3.2.2.

Typiquement, supposons $u^{\pm}, b^{\pm} \in B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega^{\pm})$ et $f \in B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ (on renvoie au Paragraphe 2.3.2 du Chapitre 2 pour les définitions de ces espaces fonctionnels) ; nous devons montrer que, quel que soit $\rho' \in (0, \rho)$, la vitesse $u^{\#\pm}$ et le champ magnétique $b^{\#\pm}$ appartiennent à $B_{\rho', 3, \sigma}(\Omega^{\pm})$, et que $f^{\#}$ appartient à $B_{\rho', \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Pour ce faire, nous aurons plusieurs points à vérifier.

- D'abord, comme nous avons redressé le front f en une fonction ψ définie sur Ω *via* le Lemme 4.2.1, nous devons donner des estimations de ψ dans l'espace $B_{\rho,4,\sigma}(\Omega)$; c'est-à-dire, le gain d'une demi-dérivée mis en évidence dans le Lemme 4.2.1 doit persister dans l'échelle $(B_{\rho,4,\sigma}(\Omega))_{0 < \rho \leq \rho_0}$. Ce point fera l'objet du Paragraphe 4.4.1 ci-après.
- Les coefficients de l'opérateur elliptique dans la première équation de (4.2.16) doivent être de même régularité que u^\pm et b^\pm , c'est-à-dire appartenir à $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega)$; compte tenu de la définition (4.2.2), nous souhaitons donc avoir $\nabla\psi \in B_{\rho,3,\sigma}(\Omega)$, d'où le fait d'avoir supposé $f \in B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Ensuite, nous devons étendre l'estimation de régularité elliptique (4.2.11) afin de pouvoir estimer la pression Q^\pm dans $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)$. Ce point s'avérera délicat, en raison des coefficients *variables* dans l'opérateur elliptique de (4.2.16). L'estimation de la pression sera abordée à la Section 4.5 ci-après.
- Enfin, le front f^\sharp étant défini par l'équation de transport (4.3.5), nous obtiendrons $\partial_t f^\sharp \in B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ par continuité de l'application "trace" de $H^3(\Omega^\pm)$ dans $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$. En revanche, cette équation de transport ne peut pas faire gagner de régularité en échelle Sobolev et il n'est pas du tout immédiat de voir si l'on a $f^\sharp \in B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Il nous faudra donc trouver un moyen d'estimer convenablement ce nouveau front f^\sharp , par exemple en adaptant les arguments dans la preuve de [BG78]. Ce point constituera une piste de recherche future, comme nous l'évoquerons au Paragraphe 4.6.2.

4.4 Redressement analytique

4.4.1 Estimation analytique du redressement ψ

Nous utiliserons par la suite les espaces fonctionnels $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$, $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho,s}(\mathbb{T}^2)$ introduits au Paragraphe 2.3.2 du Chapitre 2. Pour l'instant, on se fixe un paramètre quelconque $\rho_0 \in (0, 1]$, mais il sera amené à être choisi suffisamment petit ultérieurement. Munis de tels espaces, nous allons montrer que le gain d'une demi-dérivée sur le relèvement ψ par rapport au front f , comme établi au Lemme 4.2.1, persiste dans l'échelle $(B_{\rho,r,\sigma}(\Omega))_{0 < \rho \leq \rho_0}$.

Proposition 4.4.1

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$, $r \geq 2$ un entier et $\sigma \in (0, 1)$. Alors on peut choisir l'application linéaire du Lemme 4.2.1 de telle sorte que, restreinte à l'espace $B_{\rho,r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$, elle envoie continûment $B_{\rho,r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ dans $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$:

$$\|\psi\|_{\rho,r,\sigma} \leq \frac{C_r}{(1-\sigma)^3} \|f\|_{\rho,r-\frac{1}{2}}, \quad (4.4.1)$$

où $C_r > 0$ est une constante ne dépendant que de r . Le choix de cette application est indépendant des paramètres ρ , r et σ .

On rappelle que le redressement ψ vérifie, pour tout $x' \in \mathbb{T}^2$,

$$\psi(x', 0) = f(x'), \quad \psi(x', \pm 1) = 0, \quad \text{et} \quad \partial_3 \psi(x', 0) = 0.$$

Démonstration. On adapte la démonstration du Lemme 1 de [CMST12]. On commence par rappeler la construction de ψ à partir de f .

Étape 1. Étant donné $g \in B_{\rho,r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ on définit la fonction Φ_g par :

$$\Phi_g(x', x_3) := \varphi(x_3|D|)g(x'), \quad (x', x_3) \in \Omega, \quad (4.4.2)$$

où l'opérateur $|D|$ correspond au multiplicateur de Fourier par $|k|$ en la variable tangentielle $x' \in \mathbb{T}^2$. On impose pour l'instant à la fonction φ de satisfaire deux conditions :

$$\varphi(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi \in H^\infty(\mathbb{R}).$$

Le but de cette étape est d'estimer $\|\Phi_g\|_{\rho,r,\sigma}$ par $\|g\|_{\rho,r-\frac{1}{2}}$. Nous allons pour cela estimer dans un premier temps les normes $\|\Phi_g\|_{\rho,r}^k$, pour $k \in \mathbb{N}$. Dans les calculs à venir, on notera $C_0 > 0$ toute constante numérique, et $C_r > 0$ toute constante ne dépendant que de r . Commençons par évaluer $\|\Phi_g\|_{H^r(\Omega)}$. Pour cela, on écrit à l'aide du théorème de Fubini :

$$\|\Phi_g\|_{H^r(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^r \|\partial_3^j \Phi_g\|_{L_{x_3}^2((-1,1);H^{r-j}(\mathbb{T}^2))}^2,$$

et on évalue chacun des termes $\|\partial_3^j \Phi_g\|_{L_{x_3}^2(H^{r-j}(\mathbb{T}^2))}^2$.

► Pour $j = 0$: par définition de l'opérateur $|D|$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\Phi_g(\cdot, x_3)\|_{H^r(\mathbb{T}^2)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (1 + |k|^2)^r |\varphi(x_3|k|)|^2 |c_k(g)|^2 \\ &= |c_0(g)|^2 + \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^r |\varphi(x_3|k|)|^2 |c_k(g)|^2. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $x_3 \in (-1, 1)$, il vient :

$$\begin{aligned} \|\Phi_g\|_{L_{x_3}^2(H^r(\mathbb{T}^2))}^2 &= 2|c_0(g)|^2 + \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^r |c_k(g)|^2 \int_{-1}^1 |\varphi(x_3|k|)|^2 dx_3 \\ &= 2|c_0(g)|^2 + \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^r |c_k(g)|^2 \int_{-|k|}^{|k|} |\varphi(s)|^2 \frac{ds}{|k|} \\ &\leq C_0 \left(|c_0(g)|^2 + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^{r-\frac{1}{2}} |c_k(g)|^2 \right) \\ &\leq C_0 \left(1 + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \|g\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2. \end{aligned}$$

► Pour $j \in \{1, \dots, r\}$: en dérivant la fonction Φ_g on obtient :

$$\partial_3^j \Phi_g(x) = \varphi^{(j)}(x_3|D|) (|D|^j g)(x').$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\partial_3^j \Phi_g(\cdot, x_3)\|_{H^{r-j}(\mathbb{T}^2)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (1 + |k|^2)^{r-j} |\varphi^{(j)}(x_3|k|)|^2 |k|^{2j} |c_k(g)|^2 \\ &= \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^{r-j} |\varphi^{(j)}(x_3|k|)|^2 |k|^{2j} |c_k(g)|^2 \\ &\leq \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^r |\varphi^{(j)}(x_3|k|)|^2 |c_k(g)|^2. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x_3 , il vient :

$$\begin{aligned} \|\partial_3^j \Phi_g\|_{L_{x_3}^2(H^{r-j}(\mathbb{T}^2))}^2 &\leq \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^r |c_k(g)|^2 \int_{-|k|}^{|k|} |\varphi^{(j)}(s)|^2 \frac{ds}{|k|} \\ &\leq C_0 \|\varphi^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^{r-\frac{1}{2}} |c_k(g)|^2 \\ &\leq C_0 \|\varphi^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2. \end{aligned}$$

En sommant par rapport à j , on a donc :

$$\|\Phi_g\|_{H^r(\Omega)}^2 \leq C_0 \left(1 + \|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R})}^2\right) \|g\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2,$$

d'où finalement :

$$\|\Phi_g\|_{H^r(\Omega)} \leq C_0 \left(1 + \|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R})}\right) \|g\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}. \quad (4.4.3)$$

Étape 2. Passons maintenant aux normes $\|\Phi_g\|_{\rho,r}^k$, pour $k \in \mathbb{N}$. Commençons par le cas $k = 0$, pour lequel les dérivées tangentielles ∂^α , avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0) = (\alpha', 0)$, commutent avec l'opérateur $\varphi(x_3|D|)$. Nous avons simplement :

$$\|\Phi_g\|_{\rho,r}^0 = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3=0}} \|\partial^\alpha \Phi_g\|_{H^r(\Omega)} = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3=0}} \|\Phi_{\partial^{\alpha'} g}\|_{H^r(\Omega)}.$$

On peut donc appliquer l'estimation (4.4.3) à la fonction $\partial^{\alpha'} g$ dans le rôle de g , et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Phi_g\|_{\rho,r}^0 &\leq C_0 \left(1 + \|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R})}\right) \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha|=n} \|\partial^{\alpha'} g\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)} \\ &\leq C_0 \left(1 + \|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R})}\right) \|g\|_{\rho,r-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Afin d'estimer les normes $\|\Phi_g\|_{\rho,r}^{k+1}$, avec $k \geq 0$, on procède par récurrence :

$$\begin{aligned} \|\Phi_g\|_{\rho,r}^{k+1} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k+1}} \|\partial^\alpha \Phi_g\|_{H^r(\Omega)} \\ &\leq \|\Phi_g\|_{\rho,r}^k + \sum_{n \geq k+1} \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 = k+1}} \|\partial^\alpha \Phi_g\|_{H^r(\Omega)} \\ &= \|\Phi_g\|_{\rho,r}^k + \sum_{n \geq k+1} \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha|=n-k-1} \|\partial_3^{k+1} \Phi_{\partial^{\alpha'} g}\|_{H^r(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Comme précédemment, on estime les normes $\|\partial_3^j \partial_3^{k+1} \Phi_{\partial^{\alpha'} g}\|_{L_{x_3}^2(H^{r-j}(\mathbb{T}^2))}$, pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$:

$$\begin{aligned} \|\partial_3^{j+k+1} \Phi_{\partial^{\alpha'} g}(\cdot, x_3)\|_{H^{r-j}(\mathbb{T}^2)}^2 &= \sum_{\ell \neq 0} (1 + |\ell|^2)^{r-j} |\varphi^{(j+k+1)}(x_3|\ell|)|^2 |\ell|^{2(j+k+1)} |c_\ell(\partial^{\alpha'} g)|^2 \\ &\leq \sum_{\ell \neq 0} (1 + |\ell|^2)^r |\ell|^{2(k+1)} (2\pi|\ell_1|)^{2\alpha_1} (2\pi|\ell_2|)^{2\alpha_2} |c_\ell(g)|^2 |\varphi^{(j+k+1)}(x_3|\ell|)|^2. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x_3 , on a :

$$\|\partial_3^{j+k+1} \Phi_{\partial^{\alpha'} g}\|_{L_{x_3}^2(H^{r-j}(\mathbb{T}^2))}^2 \leq C_0 \|\varphi^{(j+k+1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \sum_{\ell \neq 0} (1 + |\ell|^2)^{r-\frac{1}{2}} |\ell|^{2(k+1)} (2\pi|\ell_1|)^{2\alpha_1} (2\pi|\ell_2|)^{2\alpha_2} |c_\ell(g)|^2. \quad (4.4.6)$$

On réécrit la somme de (4.4.6) comme $\sum_{|\ell_1| \leq |\ell_2|} + \sum_{|\ell_2| < |\ell_1|}$ (si $\ell = 0$, le terme général de la somme est nul). Nous avons :

$$\begin{aligned} &\sum_{|\ell_1| \leq |\ell_2|} (1 + |\ell|^2)^{r-\frac{1}{2}} |\ell|^{2(k+1)} (2\pi|\ell_1|)^{2\alpha_1} (2\pi|\ell_2|)^{2\alpha_2} |c_\ell(g)|^2 \\ &\leq \sum_{|\ell_1| \leq |\ell_2|} (1 + |\ell|^2)^{r-\frac{1}{2}} (2\ell_2^2)^{k+1} (2\pi|\ell_1|)^{2\alpha_1} (2\pi|\ell_2|)^{2\alpha_2} |c_\ell(g)|^2 \\ &\leq \sum_{|\ell_1| \leq |\ell_2|} (1 + |\ell|^2)^{r-\frac{1}{2}} (2\pi|\ell_1|)^{2\alpha_1} (2\pi|\ell_2|)^{2(\alpha_2+k+1)} |c_\ell(g)|^2. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Posons $\gamma' := (\alpha_1, \alpha_2 + k + 1)$. Alors on a $|\gamma'| = n$, et l'inégalité (4.4.7) nous donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{|\ell_1| \leq |\ell_2|} (1 + |\ell|^2)^{r - \frac{1}{2}} |\ell|^{2(k+1)} (2\pi|\ell_1|)^{2\alpha_1} (2\pi|\ell_2|)^{2\alpha_2} |c_\ell(g)|^2 \\ & \leq \sum_{|\ell_1| \leq |\ell_2|} (1 + |\ell|^2)^{r - \frac{1}{2}} |c_\ell(\partial^{\gamma'} g)|^2 \\ & \leq \|\partial^{\gamma'} g\|_{H^{r - \frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \max_{|\beta'| = n} \|\partial^{\beta'} g\|_{H^{r - \frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Le cas de la deuxième somme $\sum_{|\ell_2| < |\ell_1|}$ est symétrique, et fournit la même majoration que (4.4.8). En revenant à (4.4.6), on obtient alors :

$$\|\partial_3^{j+k+1} \Phi_{\partial^{\alpha'} g}\|_{L^2_{x_3}(H^{r-j}(\mathbb{T}^2))}^2 \leq C_0 \|\varphi^{(j+k+1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \max_{|\beta'| = n} \|\partial^{\beta'} g\|_{H^{r - \frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2.$$

En sommant par rapport à j , on aboutit à l'estimation :

$$\|\partial_3^{k+1} \Phi_{\partial^{\alpha'} g}\|_{H^r(\Omega)} \leq C_0 \|\varphi^{(k+1)}\|_{H^r(\mathbb{R})} \max_{|\beta'| = n} \|\partial^{\beta'} g\|_{H^{r - \frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}. \quad (4.4.9)$$

En injectant (4.4.9) dans l'estimation (4.4.5), on a donc :

$$\|\Phi_g\|_{\rho, r}^{k+1} \leq \|\Phi_g\|_{\rho, r}^k + C_0 \|\varphi^{(k+1)}\|_{H^r(\mathbb{R})} \|g\|_{\rho, r - \frac{1}{2}}.$$

Par récurrence, et compte tenu de (4.4.4), on aboutit à l'estimation suivante valable pour tout $k \geq 0$:

$$\|\Phi_g\|_{\rho, r}^k \leq C_0 \left(1 + \sum_{j=0}^k \|\varphi^{(j)}\|_{H^r(\mathbb{R})} \right) \|g\|_{\rho, r - \frac{1}{2}}. \quad (4.4.10)$$

Étape 3. Afin de conclure sur l'estimation de la norme $\|\Phi_g\|_{\rho, r, \sigma}$, il reste à multiplier (4.4.10) par σ^k et à sommer par rapport à k . Pour cela, les normes Sobolev des fonctions $\varphi^{(j)}$ ne doivent pas croître "plus" que géométriquement. Pour ce faire, on choisit $\varphi \in H^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \pi \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

La fonction φ est donnée par la formule suivante :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \frac{\sin(x)}{x}.$$

En particulier, on a bien $\varphi(0) = 1$ et $\varphi \in H^\infty(\mathbb{R})$. De plus, on estime facilement les normes $\|\varphi^{(j)}\|_{H^r(\mathbb{R})}$ à l'aide de la transformée de Fourier et en utilisant la parité de $\widehat{\varphi}$:

$$\|\varphi^{(j)}\|_{H^r(\mathbb{R})}^2 \leq C_r \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^r \xi^{2j} \widehat{\varphi}(\xi)^2 d\xi \leq C_r \int_0^1 (1 + \xi^2)^r \xi^{2j} d\xi \leq C_r. \quad (4.4.11)$$

L'estimation (4.4.10) s'écrit finalement :

$$\|\Phi_g\|_{\rho, r}^k \leq C_r (k + 1) \|g\|_{\rho, r - \frac{1}{2}}.$$

Soit maintenant $K \in \mathbb{N}$, et notons $\|\Phi_g\|_{\rho, r, \sigma}^K$ la somme partielle d'ordre K de $\|\Phi_g\|_{\rho, r, \sigma}$. On a alors, pour $\sigma \in (0, 1)$:

$$\|\Phi_g\|_{\rho, r, \sigma}^K = \sum_{k=0}^K \sigma^k \|\Phi_g\|_{\rho, r}^k \leq C_r \sum_{k=0}^K (k + 1) \sigma^k \|g\|_{\rho, r - \frac{1}{2}} \leq \frac{C_r}{(1 - \sigma)^2} \|g\|_{\rho, r - \frac{1}{2}}.$$

En passant au supremum en K , on en conclut que $\Phi_g \in B_{\rho, r, \sigma}(\Omega)$ et vérifie l'estimation :

$$\|\Phi_g\|_{\rho, r, \sigma} \leq \frac{C_r}{(1 - \sigma)^2} \|g\|_{\rho, r - \frac{1}{2}}. \quad (4.4.12)$$

Conclusion. Étant donné $f \in B_{\rho, r-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$, on définit la fonction $\Psi_f = \psi$ par :

$$\Psi_f(x', x_3) := (1 - x_3^2) \Phi_f(x) = (1 - x_3^2) \varphi(x_3|D|) f(x'), \quad (x', x_3) \in \Omega. \quad (4.4.13)$$

Cette définition rentre dans le cadre de la démonstration du Lemme 1 de [CMST12] : les résultats sur le redressement du front f rappelés dans le Lemme 4.2.1 restent donc valables.

On rappelle que l'on souhaite estimer $\|\Psi_f\|_{\rho, r, \sigma}$ par $\|f\|_{\rho, r-\frac{1}{2}}$. Pour cela, il suffit d'utiliser la propriété d'algèbre des espaces $B_{\rho, r, \sigma}(\Omega)$ donnée par le Théorème 2.3.6, et l'estimation (4.4.12) obtenue lors de l'étape 3. Nous avons alors, en appelant $\omega(x_3) := 1 - x_3^2$:

$$\|\Psi_f\|_{\rho, r, \sigma} \leq C_r \|\omega\|_{\rho, r, \sigma} \|\Phi_f\|_{\rho, r, \sigma} \leq \frac{C_r}{(1 - \sigma)^2} \|\omega\|_{\rho, r, \sigma} \|f\|_{\rho, r-\frac{1}{2}}.$$

Pour terminer, on évalue $\|\omega\|_{\rho, r, \sigma}$ par un calcul explicite, étant donné que toutes les dérivées tangentiels de ω sont nulles. On obtient pour tout $k \geq 0$:

$$\|\omega\|_{\rho, r}^k = \sum_{n=0}^k \frac{\rho^n}{n!} \|\partial_3^n \omega\|_{H^r(\Omega)} \leq \sum_{n=0}^2 \frac{\rho^n}{n!} \|\partial_3^n \omega\|_{H^r(\Omega)} \leq C_0,$$

car toutes les dérivées de ω d'ordre supérieur à 3 sont nulles, et ρ peut être directement majoré par 1. Par conséquent, on a l'estimation :

$$\|\omega\|_{\rho, r, \sigma} \leq \frac{C_0}{1 - \sigma}.$$

On peut donc conclure qu'il existe une constante $C_r > 0$, ne dépendant que de r , telle que :

$$\|\Psi_f\|_{\rho, r, \sigma} \leq \frac{C_r}{(1 - \sigma)^3} \|f\|_{\rho, r-\frac{1}{2}}, \quad (4.4.14)$$

ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.4.1. □

4.4.2 Estimation analytique de l'inverse du jacobien J

Le changement d'inconnue $f \mapsto \psi$ nécessitait l'estimation de continuité (4.4.1). D'autre part, dans les nouvelles variables (u^\pm, b^\pm, f) introduites au Paragraphe 4.2.2, les équations de (4.2.15) font intervenir l'inverse du jacobien J , dont on rappelle la définition (4.2.2). En vue d'estimer dans les espaces $B_{\rho, r, \sigma}(\Omega^\pm)$ l'application Υ définie par (4.3.2), il conviendra de pouvoir estimer la norme $\|J^{-1}\|_{\rho, r, \sigma}$. Pour ce faire, nous allons utiliser la propriété d'algèbre des espaces $B_{\rho, r, \sigma}(\Omega)$.

Proposition 4.4.2

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$, $r \geq 2$ un entier et $\sigma \in (0, 1)$. Il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r) > 0$ ne dépendant que de r , tel que pour tout $g \in B_{\rho, r, \sigma}(\Omega)$ vérifiant $\|g\|_{\rho, r, \sigma} \leq \varepsilon_1$, on a :

$$\frac{1}{1+g} \in B_{\rho, r, \sigma}(\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{1+g} \right\|_{\rho, r, \sigma} \leq \frac{C_r}{1-\sigma}, \quad (4.4.15)$$

où $C_r > 0$ ne dépend que de r .

Démonstration. Commençons par rappeler la propriété d'algèbre des espaces $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$. Il existe une constante $C_r > 0$ ne dépendant que de r , telle que, pour tous $u, v \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$, on a :

$$uv \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega) \quad \text{et} \quad \|uv\|_{\rho,r,\sigma} \leq C_r \|u\|_{\rho,r,\sigma} \|v\|_{\rho,r,\sigma}.$$

Posons $\varepsilon_1 := (2C_r)^{-1}$, et considérons $g \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$ tel que $\|g\|_{\rho,r,\sigma} \leq \varepsilon_1$. Alors la série $\sum_{m \geq 0} (-1)^m g^m$ est absolument convergente dans l'espace de Banach $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$. En effet, nous avons :

$$\sum_{m \geq 0} \|(-1)^m g^m\|_{\rho,r,\sigma} \leq \|1\|_{\rho,r,\sigma} + \sum_{m \geq 1} C_r^{m-1} \|g\|_{\rho,r,\sigma}^m \leq \|1\|_{\rho,r,\sigma} + C_r^{-1}.$$

La fonction constante égale à 1 s'évalue dans $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$ par un calcul direct, étant donné que toutes ses dérivées sont nulles. On obtient :

$$\|1\|_{\rho,r,\sigma} = \frac{C_0}{1-\sigma},$$

où $C_0 > 0$ est une constante numérique. Finalement, on en déduit l'estimation :

$$\sum_{m \geq 0} \|(-1)^m g^m\|_{\rho,r,\sigma} \leq \frac{C_0}{1-\sigma} + C_r^{-1} \leq \frac{C'_r}{1-\sigma} < +\infty,$$

où $C'_r := C_0 + C_r^{-1} > 0$ ne dépend que de r . La propriété de complétude des espaces $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$ permet alors d'affirmer que l'inverse de $1 + g$ coïncide avec la série suivante dans $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$:

$$\frac{1}{1+g} = \sum_{m \geq 0} (-1)^m g^m.$$

Par conséquent $\frac{1}{1+g}$ appartient bien à l'espace $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$, et on a l'estimation :

$$\left\| \frac{1}{1+g} \right\|_{\rho,r,\sigma} \leq \frac{C'_r}{1-\sigma}.$$

□

À l'aide de la Proposition 4.4.1, on en déduit un corollaire immédiat sur l'estimation de l'inverse du jacobien J dans $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$. Dans un souci de clarté, nous supposons dans toute la suite que $\sigma \in (0, \sigma_0]$, où σ_0 est une constante numérique fixée une fois pour toutes dans l'intervalle $(0, 1)$, par exemple $\sigma_0 := \frac{1}{2}$. Ceci permettra de majorer directement la quantité $\frac{1}{1-\sigma}$ uniformément par rapport à σ , et allègera les estimations à venir. Cette restriction n'affectera en rien les résultats ultérieurs, puisque σ sera voué à être un petit paramètre que l'on se fixera lors de l'estimation de la pression à la Section 4.5.

Corollaire 4.4.3

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$, $r \geq 2$ un entier et $\sigma \in (0, \sigma_0]$. Soit également $f \in B_{\rho, r+\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Il existe une constante $\eta_1 = \eta_1(r) > 0$, ne dépendant que de r , telle que :

$$\|f\|_{\rho, r+\frac{1}{2}} \leq \eta_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{J} \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{J} \right\|_{\rho,r,\sigma} \leq M_r, \quad (4.4.16)$$

où $M_r > 0$ ne dépend que de r .

Démonstration. Pour commencer, réécrivons les résultats (4.4.14) et (4.4.15) en tenant compte du fait que $\sigma \leq \sigma_0$: il existe une constante $\tilde{C}_r > 0$, ne dépendant que de r , telle que :

$$\|\psi\|_{\rho,r+1,\sigma} \leq \tilde{C}_r \|f\|_{\rho,r+\frac{1}{2}}, \quad (4.4.17)$$

par conséquent,

$$\|\partial_3 \psi\|_{\rho,r,\sigma} \leq \tilde{C}_r \|f\|_{\rho,r+\frac{1}{2}}. \quad (4.4.18)$$

De même, il existe une constante $M_r > 0$, ne dépendant que de r , telle que :

$$\|g\|_{\rho,r,\sigma} \leq \varepsilon_1 \implies \frac{1}{1+g} \in B_{\rho,r,\sigma}(\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{1+g} \right\|_{\rho,r,\sigma} \leq M_r. \quad (4.4.19)$$

Posons $\eta_1 := \frac{\varepsilon_1}{\tilde{C}_r}$, et supposons que $\|f\|_{\rho,r+\frac{1}{2}} \leq \eta_1$. En utilisant (4.4.18), on a alors $\|\partial_3 \psi\|_{\rho,r,\sigma} \leq \varepsilon_1$, et ainsi, en appliquant (4.4.19) à la fonction $g := \partial_3 \psi$, il vient :

$$\left\| \frac{1}{1 + \partial_3 \psi} \right\|_{\rho,r,\sigma} \leq M_r. \quad \square$$

Maintenant que nous avons établi des estimations sur le redressement du front f dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega)$, nous pouvons traiter le cas de la pression Q^\pm , solution du problème de Laplace (4.2.16), et étendre l'estimation de régularité elliptique (4.2.11) dans les espaces $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^\pm)$.

4.5 Estimation analytique de la pression

Au Paragraphe 4.2.1, nous avons montré que la pression totale (Q^+, Q^-) peut s'exprimer implicitement en fonction des inconnues (v^\pm, B^\pm) via la résolution d'un problème elliptique couplé, donné par (4.2.6) ou (4.2.16) (ces deux systèmes sont équivalents en vertu des identités de Piola (4.2.3)). Nous choisissons dans cette section de travailler sur la première version (4.2.6) du problème de Laplace, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\begin{cases} -A_{ji} \partial_j (A_{ki} \partial_k Q^\pm) = \mathcal{F}^\pm, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ [Q] = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ (1 + |\nabla' f|^2) [\partial_3 Q] = \mathcal{G}, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \partial_3 Q^\pm = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Dans (4.5.1), on a adopté la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés i, j, k appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On rappelle l'expression de la matrice A donnée par (4.2.2) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial_1 \psi}{J} & -\frac{\partial_2 \psi}{J} & \frac{1}{J} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = 1 + \partial_3 \psi.$$

Les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} dans (4.5.1) sont pour l'instant considérés comme quelconques, nous reviendrons ultérieurement sur le cas particulier où \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} sont donnés en fonction de (v^\pm, B^\pm) par (4.2.7) et (4.2.8) (ou bien par (4.2.17) si l'on choisit de travailler dans la formulation (u^\pm, b^\pm) introduite au Paragraphe 4.2.2).

Rappelons le résultat du caractère bien posé du système (4.5.1) dans l'échelle de régularité Sobolev, que l'on a énoncé à la fin du Paragraphe 4.2.1 :

- si les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} satisfont la condition de compatibilité (4.2.9),

- si les coefficients A_{ji} donnés par (4.2.2) appartiennent à $H^3(\Omega)$,
- si $\|\psi\|_{H^3} \leq \varepsilon_0$, pour une certaine constante numérique $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ (ce qui sera le cas si le front f est suffisamment petit dans $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ en vertu du Lemme 4.2.1),
- si les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} appartiennent respectivement à $H^1(\Omega^\pm)$ et $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$,

alors le problème (4.5.1) est bien posé dans $H^3(\Omega^+) \times H^3(\Omega^-)$. C'est-à-dire, il existe une unique solution (Q^+, Q^-) dans l'espace $H^3(\Omega^+) \times H^3(\Omega^-)$ au problème (4.5.1), vérifiant la condition de normalisation $\sum_{\pm} \int_{\Omega^\pm} Q^\pm = 0$. De plus, la solution satisfait l'estimation de régularité elliptique (4.2.11) que l'on rappelle ci-dessous :

$$\|Q^\pm\|_{3,\pm} \leq C_0 \left(\|\mathcal{F}^\pm\|_{1,\pm} + \|\mathcal{G}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right),$$

où $C_0 > 0$ est une constante ne dépendant que de ε_0 . Notons par ailleurs que grâce à la petitesse du front f dans $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, le jacobien $J = 1 + \partial_3 \psi$ satisfera par exemple $J \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

On admettra que le problème (4.5.1) reste bien posé dans $H^\infty(\Omega^+) \times H^\infty(\Omega^-)$, c'est-à-dire que si de plus les coefficients A_{ji} et les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} sont dorénavant dans H^∞ (et s'ils satisfont toujours la condition de compatibilité (4.2.9)), alors il existe une unique solution (Q^+, Q^-) à moyenne nulle au problème (4.5.1) appartenant à H^∞ (voir [Eva98] pour la méthode générale). Dans la suite, nous demanderons plus que la régularité H^∞ , puisque nous supposerons le front f appartenir à $B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$, ce qui permettra d'avoir ψ dans $B_{\rho, 4, \sigma}(\Omega)$ d'après la Proposition 4.4.1. Ainsi, les coefficients A_{ji} appartiendront à $B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega)$. Les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} seront pris respectivement dans les espaces $B_{\rho, 1, \sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho, \frac{3}{2}}(\Gamma)$. Se placer dans de tels espaces reste cohérent avec l'estimation (4.2.11). Intuitivement, en faisant "tendre" le rayon d'analyticité ρ et le paramètre σ vers zéro, ces espaces "dégénèrent" sur les espaces de Sobolev $H^3(\Omega)$ (pour les coefficients A_{ji}), $H^1(\Omega^\pm)$ et $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ (pour les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G}).

Le but de cette partie est donc d'étendre l'estimation (4.2.11) aux espaces analytiques sus-mentionnés, et on démontrera le théorème suivant :

Théorème 4.5.1

Il existe $\eta_1 > 0$, $\rho_0 \in (0, 1]$ et $\sigma_0 \in (0, \frac{1}{2}]$ tels que, pour tous $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$, si l'on considère un front $f \in B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ satisfaisant

$$\|f\|_{\rho, \frac{7}{2}} \leq \eta_1, \tag{4.5.2}$$

et des termes sources $\mathcal{F}^\pm \in B_{\rho, 1, \sigma}(\Omega^\pm)$ et $\mathcal{G} \in B_{\rho, \frac{3}{2}}(\Gamma)$ vérifiant (4.2.9), alors l'unique solution (Q^+, Q^-) à moyenne nulle sur Ω du problème elliptique (4.5.1) appartient à l'espace $B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega^+) \times B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega^-)$, et satisfait de plus l'estimation suivante :

$$\|Q^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm \leq C \left(\|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho, 1, \sigma}^\pm + \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}} \right), \tag{4.5.3}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de η_1 .

On observe que la pression totale Q^\pm possède la même régularité que v^\pm et B^\pm dans l'échelle Sobolev, contrairement à ce qui avait été observé au chapitre précédent où l'on gagnait une dérivée sur Q^\pm par rapport à v^\pm et B^\pm . Ceci s'explique par la présence du terme source \mathcal{G} qui ne fait pas gagner de régularité sur la pression; en revanche, on gagne ici encore une dérivée sur \mathcal{F}^\pm *a priori*. Le gradient de pression n'est donc plus un terme semi-linéaire, mais seulement *quasi-linéaire*.

4.5.1 Estimation des dérivées tangentielles

Notation. Dans toute la suite, la notation $f \lesssim g$ signifiera qu'il existe une constante numérique $C_0 > 0$ (c'est-à-dire indépendante des fonctions f et g , et de tout autre paramètre tel que ρ ou σ), telle que $f \leq C_0 g$.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur l'estimation de Q^\pm dans $B_{\rho,3}^0(\Omega^\pm)$; on cherche donc à évaluer la quantité suivante :

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm} = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\partial^{\alpha'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Nous allons démontrer dans ce paragraphe le théorème ci-après, qui constituera une première étape permettant d'aboutir au Théorème 4.5.1 précédent.

Théorème 4.5.2

Il existe $\eta_1 > 0$ et $\rho_0 \in (0, 1]$ tels que, pour tous $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$, si l'on considère un front $f \in B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ satisfaisant

$$\|f\|_{\rho, \frac{7}{2}} \leq \eta_1,$$

et des termes sources $\mathcal{F}^\pm \in B_{\rho,1,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $\mathcal{G} \in B_{\rho, \frac{3}{2}}(\Gamma)$ vérifiant (4.2.9), alors l'unique solution (Q^+, Q^-) à moyenne nulle sur Ω du problème elliptique (4.5.1) appartient à l'espace $B_{\rho,3}^0(\Omega^\pm)$, et satisfait de plus l'estimation suivante :

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm} \lesssim \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1}^{0,\pm} + \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}}. \quad (4.5.4)$$

La constante sous-jacente dans l'estimation (4.5.4) ne dépend que du paramètre η_1 fixé.

Munis de l'estimation (4.2.11), nous allons pouvoir estimer les dérivées tangentielles $\partial^{\alpha'} Q^\pm$ dans $H^3(\Omega^\pm)$. Les multi-indices α de \mathbb{N}^3 seront notés $\alpha := (\alpha', \alpha_3)$, où $\alpha' \in \mathbb{N}^2$. La notation α' désignera dans la suite systématiquement un multi-indice de \mathbb{N}^2 faisant référence aux dérivées tangentielles ∂_1 et ∂_2 . Pour $N \in \mathbb{N}$, on notera $\|Q\|_{\rho,3}^{0,\pm,N}$ la somme partielle d'ordre N de $\|Q\|_{\rho,3}^{0,\pm}$. L'estimation de $\partial^{\alpha'} Q^\pm$ dans $H^3(\Omega^\pm)$ va se faire en commutant le problème (4.5.1) avec $\partial^{\alpha'}$. On pourra alors appliquer l'estimation (4.2.11) à $\partial^{\alpha'} Q^\pm$, avec des nouveaux termes sources \mathcal{F}'^\pm et \mathcal{G}' . Ces nouveaux termes sources contiennent des commutateurs, faisant intervenir des dérivées de Q^\pm et des coefficients de la matrice A . Pour les estimer convenablement, il faut tenir compte du fait que l'on impose toujours la condition de petitesse (4.5.2) sur le front f . Cela a pour conséquence la petitesse de f dans l'espace $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, comme exploité par Coulombel *et al.* dans [CMST12]. D'après le Lemme 4.2.1, la quantité $\|\psi\|_{H^3(\Omega)}$ est donc également petite. Par conséquent, si l'on écrit $A = \mathbf{I}_3 - \tilde{A}$, avec

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial_1 \psi}{J} & \frac{\partial_2 \psi}{J} & \frac{\partial_3 \psi}{J} \end{pmatrix}, \quad (4.5.5)$$

alors $\|\tilde{A}\|_{H^2(\Omega)}$ sera de même une quantité petite. Lors de l'estimation des commutateurs, il faudra donc toujours distinguer les cas où peu de dérivées portent sur A , afin d'exploiter la petitesse du front f .

Soit maintenant $\alpha' \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha'| = n \geq 1$. Remarquons que le cas $n = 0$ se traite directement à l'aide de l'estimation (4.2.11), qui fournit l'inégalité :

$$\|Q^\pm\|_{3,\pm} \lesssim \|\mathcal{F}^\pm\|_{1,\pm} + \|\mathcal{G}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \lesssim \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1}^{0,\pm} + \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}}. \quad (4.5.6)$$

On notera $Q'^{\pm} := \partial^{\alpha'} Q^{\pm}$. Commutons le problème (4.5.1) avec $\partial^{\alpha'}$:

$$\begin{cases} -A_{ji}\partial_j(A_{ki}\partial_k Q'^{\pm}) = \mathcal{F}'^{\pm} & \text{dans } (0, T) \times \Omega^{\pm}, \\ [Q'^{\pm}] = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ (1 + |\nabla' f|^2)[\partial_3 Q'] = \mathcal{G}' & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ \partial_3 Q' = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma_{\pm}. \end{cases} \quad (4.5.7)$$

Le terme source \mathcal{F}'^{\pm} est défini par :

$$\mathcal{F}'^{\pm} := \partial^{\alpha'} \mathcal{F}^{\pm} + [\partial^{\alpha'} ; A_{ji}\partial_j(A_{ki}\partial_k \cdot)] Q^{\pm}.$$

En écrivant $A = \mathbf{I}_3 - \tilde{A}$, on peut décomposer \mathcal{F}'^{\pm} comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'^{\pm} &= \partial^{\alpha'} \mathcal{F}^{\pm} + [\partial^{\alpha'} ; \tilde{A}_{ji}\partial_j(\tilde{A}_{ki}\partial_k \cdot)] Q^{\pm} - [\partial^{\alpha'} ; \partial_i \tilde{A}_{ki}\partial_k \cdot] Q^{\pm} - 2[\partial^{\alpha'} ; \tilde{A}_{ji}\partial_{ji} \cdot] Q^{\pm}. \\ &=: F_1 + F_2 - F_3 + 2F_4. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Le terme de bord \mathcal{G}' est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}' &:= \partial^{\alpha'} \mathcal{G} - [[\partial^{\alpha'} ; (1 + |\nabla' f|^2)\partial_3] Q] \\ &=: G_1 - G_2. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Prêtons attention au fait que le crochet extérieur de (4.5.9) désigne le saut à travers Γ , tandis que le crochet intérieur correspond à un commutateur. En appliquant l'estimation (4.2.11) au problème (4.5.7), il vient :

$$\|Q'^{\pm}\|_{3,\pm} \lesssim \|\mathcal{F}'\|_{1,\pm} + \|\mathcal{G}'\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (4.5.10)$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre N de $\|Q^{\pm}\|_{\rho,3}^{0,\pm}$ vérifie :

$$\|Q^{\pm}\|_{\rho,3}^{0,\pm,N} \lesssim \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\mathcal{F}'^{\pm}\|_{1,\pm} + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\mathcal{G}'\|_{H^{1,5}(\Gamma)}. \quad (4.5.11)$$

Estimation de \mathcal{F}'^{\pm} . Le cas de F_1 est aisé. En effet, par hypothèse on a choisi \mathcal{F}^{\pm} dans l'espace $B_{\rho,1,\sigma}(\Omega^{\pm})$. Notamment, la quantité $\|\mathcal{F}^{\pm}\|_{\rho,1}^{0,\pm}$ est finie, et on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_1\|_{1,\pm} = \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\partial^{\alpha'} \mathcal{F}^{\pm}\|_{1,\pm} \leq \|\mathcal{F}^{\pm}\|_{\rho,1}^{0,\pm}. \quad (4.5.12)$$

Traisons maintenant le premier commutateur donné par $F_2 := [\partial^{\alpha'} ; \tilde{A}_{ji}\partial_j(\tilde{A}_{ki}\partial_k \cdot)] Q^{\pm}$. Nous avons, en développant :

$$F_2 = \sum_{\substack{\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha' \\ |\beta'+\gamma'| \geq 1}} \frac{\alpha'!}{\beta'!\gamma'!\delta'!} \left(\partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial_j \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial_k Q^{\pm} + \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial_{jk} Q^{\pm} \right). \quad (4.5.13)$$

Posons $T_{01} := \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial_j \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial_k Q^{\pm}$ et $T_{02} := \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial_{jk} Q^{\pm}$. Afin d'estimer les termes T_{01} et T_{02} dans $H^1(\Omega^{\pm})$, on estime au cas par cas les dérivées d'ordre 0 et d'ordre 1 dans $L^2(\Omega^{\pm})$. Dans la suite, la notation ∂^m désignera une dérivée quelconque d'ordre m , pour $m \geq 1$. Chaque estimation qui suit est établie à l'aide de l'inégalité de Hölder, et des injections de Sobolev que l'on rappelle ci-après (U désigne l'un quelconque des domaines Ω , Ω^+ ou Ω^-) :

$$\begin{aligned} H^1(U) &\hookrightarrow L^p(U), \quad \forall 1 \leq p \leq 6, \\ H^2(U) &\hookrightarrow L^\infty(U). \end{aligned}$$

Commençons par les dérivées d'ordre 0 :

$$\begin{aligned} \|T_{01}\|_{0,\pm} &= \|\partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial_j \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial_k Q^\pm\|_{0,\pm} \\ &\lesssim \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^1} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}, \quad (\text{inégalité de Hölder dans } L^\infty \times L^2 \times L^\infty). \end{aligned}$$

Dans les normes ci-dessus et dans la suite, la notation H^r désignera toujours l'espace $H^r(\Omega)$. On obtient de même :

$$\|T_{02}\|_{0,\pm} \lesssim \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{2,\pm}, \quad (\text{inégalité de Hölder dans } L^\infty \times L^\infty \times L^2).$$

Calculons ensuite les dérivées d'ordre 1. On écrit $\partial^1 T_{01} = T_{11} + T_{12} + T_{13}$, avec :

$$T_{11} = \partial^{\beta'} \partial^1 \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial^1 \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial^1 Q^\pm, \quad T_{12} = \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial^2 \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial^1 Q^\pm, \quad T_{13} = \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial^1 \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial^2 Q^\pm.$$

Comme précédemment, en appliquant l'inégalité de Hölder dans $L^4 \times L^4 \times L^\infty$ pour T_{11} , dans $L^\infty \times L^2 \times L^\infty$ pour T_{12} et dans $L^\infty \times L^4 \times L^4$ pour T_{13} , on obtient :

$$\|T_{11}\|_{0,\pm}, \|T_{12}\|_{0,\pm}, \|T_{13}\|_{0,\pm} \lesssim \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \quad (4.5.14)$$

Le cas de T_{02} se traite de façon similaire. On écrit $\partial^1 T_{02} = T_{14} + T_{15} + T_{16}$, avec :

$$T_{14} = \partial^{\beta'} \partial^1 \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial^2 Q^\pm, \quad T_{15} = \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \partial^1 \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial^2 Q^\pm, \quad T_{16} = \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ji} \partial^{\gamma'} \tilde{A}_{ki} \partial^{\delta'} \partial^3 Q^\pm.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder dans $L^4 \times L^\infty \times L^4$ pour T_{14} , dans $L^\infty \times L^4 \times L^4$ pour T_{15} et dans $L^\infty \times L^\infty \times L^2$ pour T_{16} , on montre également que les termes T_{14} , T_{15} et T_{16} satisfont l'estimation (4.5.14). En résumé, on peut affirmer que

$$\|T_{01} + T_{02}\|_{1,\pm} \lesssim \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \quad (4.5.15)$$

Nous pouvons dès à présent estimer le commutateur F_2 donné par (4.5.13). En appliquant l'estimation (4.5.15), il vient :

$$\|F_2\|_{1,\pm} \lesssim \sum_{\substack{\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha' \\ |\beta'+\gamma'| \geq 1}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'! \delta'!} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

En sommant selon la longueur des multi-indices (rappelons que $|\alpha'| = n$), on a :

$$\|F_2\|_{1,\pm} \lesssim \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1+i_2 \geq 1}} \left(\sum_{\substack{\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha' \\ |\beta'|=i_1 \\ |\gamma'|=i_2 \\ |\delta'|=i_3}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'! \delta'!} \right) \max_{\substack{\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha' \\ |\beta'|=i_1 \\ |\gamma'|=i_2 \\ |\delta'|=i_3}} \left(\|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \right). \quad (4.5.16)$$

On utilise ensuite l'égalité (2.1.7) établie au Chapitre 2 pour simplifier la deuxième somme de (4.5.16). Puis, en majorant le maximum des produits par le produit des maximums, on obtient :

$$\|F_2\|_{1,\pm} \lesssim \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1+i_2 \geq 1}} \frac{n!}{i_1! i_2! i_3!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \max_{|\delta'|=i_3} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Il faut ensuite tenir compte du fait que i_3 ne peut dépasser la valeur $n-1$. Pour cela, on réécrit la somme précédente en sommant sur les valeurs de $i_1 + i_2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \|F_2\|_{1,\pm} &\lesssim \sum_{i=1}^n \sum_{i_1+i_2=i} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{i_2!} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(n-i)!} \max_{|\delta'|=n-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \\ &\lesssim \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i_1+i_2=i+1} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{i_2!} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-1-i)!} \max_{|\delta'|=n-1-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}, \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

où l'on a ré-indexé selon i dans la ligne (4.5.17). Pour plus de clarté dans la suite, on réécrit la somme $\sum_{i_1+i_2=i+1}$ à l'aide d'un seul indice $i_1 \in \{0, \dots, i+1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \|F_2\|_{1,\pm} &\lesssim \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{i+1} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(i+1-i_1)!} \max_{|\gamma'|=i+1-i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-1-i)!} \max_{|\delta'|=n-1-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

Rappelons que l'on doit distinguer les cas où l'on peut exhiber les normes $\|\tilde{A}\|_{H^2}$, car ce seront des quantités petites. Dans l'estimation (4.5.18), on distingue donc le cas $i=0$ faisant apparaître une norme $\|\tilde{A}\|_{H^2}$, et le cas $i \geq 1$ qui fera apparaître des normes analytiques, que l'on gèrera par la suite à l'aide du rayon d'analyticité $\rho > 0$. On réécrit le membre de droite de (4.5.18) comme $S_{i=0} + S_{i \geq 1}$. La partie $S_{i=0}$ correspond au cas $i=0$, et la partie $S_{i \geq 1}$ au cas où l'on somme par rapport à $i \geq 1$.

► **Traitement de $S_{i=0}$:**

On a directement l'estimation

$$\begin{aligned} S_{i=0} &= 2\|\tilde{A}\|_{H^2} \max_{|\gamma'|=1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(n-1)!} \max_{|\delta'|=n-1} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \\ &\lesssim \|\tilde{A}\|_{H^2} \|\tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{(n-1)!} \max_{|\delta'|=n-1} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

► **Traitement de $S_{i \geq 1}$:**

Remarque : si $n=1$, le terme $S_{i \geq 1}$ n'est pas présent dans le membre de droite de (4.5.18). Par conséquent, le cas $n=1$ est déjà entièrement traité grâce à l'estimation (4.5.19), et on peut supposer dans la suite que $n \geq 2$.

En ré-indexant sur i , on peut écrire :

$$S_{i \geq 1} = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{i_1=0}^{i+2} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(i+2-i_1)!} \max_{|\gamma'|=i+2-i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(n-2-i)!} \max_{|\delta'|=n-2-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

On isole une fois de plus le cas $i_1 \in \{0, i+2\}$ qui fait apparaître la norme $\|\tilde{A}\|_{H^2}$. On a alors :

$$S_{i \geq 1} = 2\|\tilde{A}\|_{H^2} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(i+2)!} \max_{|\gamma'|=i+2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(n-2-i)!} \max_{|\delta'|=n-2-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \quad (4.5.20)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{i_1=1}^{i+1} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(i+2-i_1)!} \max_{|\gamma'|=i+2-i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-2-i)!} \max_{|\delta'|=n-2-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

On notera $S_{i_1=0, i+2}$ (resp. $S_{1 \leq i_1 \leq i+1}$) le membre de droite de (4.5.20) (resp. (4.5.21)).

◆ **Traitement de $S_{i_1=0, i+2}$:**

En utilisant les deux inégalités triviales suivantes,

$$\max_{|\gamma'|=i+2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \leq \max_{|\gamma'|=i+1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \quad \text{et} \quad (i+2)! \geq (i+1)!, \quad (4.5.22)$$

puis en ré-indexant sur i , on obtient :

$$S_{i_1=0, i_2} \lesssim \|\tilde{A}\|_{H^2} \sum_{i_1=1}^{n-1} \frac{1}{i_1!} \max_{|\gamma'|=i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{(n-1-i_1)!} \max_{|\delta'|=n-1-i_1} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \quad (4.5.23)$$

Finalement, l'estimation (4.5.23) se réécrit comme suit :

$$S_{i_1=0, i_2} \lesssim \|\tilde{A}\|_{H^2} \sum_{i_1+i_2=n-1} \frac{1}{i_1!} \max_{|\gamma'|=i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{i_2!} \max_{|\delta'|=i_2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \quad (4.5.24)$$

Ceci achève le cas de $S_{i_1=0, i_2}$.

◆ **Traitement de $S_{1 \leq i_1 \leq i_2}$:**

En ré-indexant sur i_1 , on a :

$$S_{1 \leq i_1 \leq i_2} = \sum_{i_1=0}^{n-2} \sum_{i_2=0}^i \frac{1}{(i_1+1)!} \max_{|\beta'|=i_1+1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(i+1-i_1)!} \max_{|\gamma'|=i+1-i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^2} \\ \times \frac{1}{(n-2-i)!} \max_{|\delta'|=n-2-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

En utilisant le même type d'inégalités données par (4.5.22), on aboutit à la majoration suivante :

$$S_{1 \leq i_1 \leq i_2} \lesssim \sum_{i_1=0}^{n-2} \sum_{i_2=0}^i \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{(i-i_1)!} \max_{|\gamma'|=i-i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \\ \times \frac{1}{(n-2-i)!} \max_{|\delta'|=n-2-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Enfin, en réécrivant la somme par rapport à i_1 avec deux indices i_1 et i_2 tels que $i_1 + i_2 = i$, on en déduit finalement :

$$S_{1 \leq i_1 \leq i_2} \lesssim \sum_{i_1=0}^{n-2} \sum_{i_2=0}^i \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{i_2!} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \\ \times \frac{1}{(n-2-i)!} \max_{|\delta'|=n-2-i} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \quad (4.5.25)$$

$$\lesssim \sum_{i_1+i_2+i_3=n-2} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{i_2!} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{i_3!} \max_{|\delta'|=i_3} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}, \quad (4.5.26)$$

ce qui conclut quant à l'estimation de $S_{1 \leq i_1 \leq i_2}$.

Revenons maintenant à l'estimation (4.5.18) du commutateur F_2 . On combine les inégalités (4.5.19), (4.5.24) et (4.5.25) afin d'obtenir, pour $|\alpha'| = n \geq 2$:

$$\frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_2\|_{1,\pm} \lesssim \rho \|\tilde{A}\|_{H^2} \|\tilde{A}\|_{H^3} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \max_{|\delta'|=n-1} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \quad (4.5.27)$$

$$+ \rho \|\tilde{A}\|_{H^2} \sum_{i_1+i_2=n-1} \frac{\rho^{i_1}}{i_1!} \max_{|\gamma'|=i_1} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{\rho^{i_2}}{i_2!} \max_{|\delta'|=i_2} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm} \quad (4.5.28)$$

$$+ \rho^2 \sum_{i_1+i_2+i_3=n-2} \frac{\rho^{i_1}}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{\rho^{i_2}}{i_2!} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} \tilde{A}\|_{H^3} \\ \times \frac{\rho^{i_3}}{i_3!} \max_{|\delta'|=i_3} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \quad (4.5.29)$$

Si $n = 1$, rappelons que l'on a l'estimation plus simple :

$$\frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_2\|_{1,\pm} \lesssim \rho \|\tilde{A}\|_{H^2} \|\tilde{A}\|_{H^3} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \max_{|\delta'|=n-1} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm},$$

qui s'avère identique à (4.5.27). On reconnaît dans les sommes (4.5.28) et (4.5.29) des produits de Cauchy "partiels". Ainsi, en sommant par rapport à $n \in \{1, \dots, N\}$, il vient (on majore directement la norme $\|\tilde{A}\|_{H^3}$ par $\|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_2\|_{1,\pm} &\lesssim \rho \|\tilde{A}\|_{H^2} \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N-1} + \rho \|\tilde{A}\|_{H^2} \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^{0,N-1} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N-1} \\ &\quad + \rho^2 \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^{0,N-2} \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^{0,N-2} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N-2}. \end{aligned}$$

Étant donné que les coefficients de \tilde{A} appartiennent à l'espace $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega)$, nous pouvons dès lors nous permettre de majorer les sommes partielles $\|\tilde{A}\|_{\rho,3}^{0,M}$ directement par $\|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0$ qui est une quantité finie. Le commutateur F_2 satisfait donc l'estimation :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_2\|_{1,\pm} \lesssim \rho \|\tilde{A}\|_{H^2} \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N} + \left(\rho \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0\right)^2 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N}. \quad (4.5.30)$$

Ceci conclut quant au premier commutateur F_2 .

Estimons maintenant le deuxième commutateur F_3 donné par (4.5.8), dont on rappelle la définition :

$$F_3 := [\partial^{\alpha'} ; \partial_i \tilde{A}_{ki} \partial_k \cdot] Q^\pm = \sum_{\substack{\beta'+\gamma'=\alpha' \\ |\beta'| \geq 1}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'!} \partial^{\beta'} \partial_i \tilde{A}_{ki} \partial^{\gamma'} \partial_k Q^\pm. \quad (4.5.31)$$

La méthode pour estimer F_3 est totalement similaire à ce qui a été fait pour F_2 . Tout d'abord, en considérant les dérivées d'ordre 0 et 1, on montre que

$$\|\partial^{\beta'} \partial_i \tilde{A}_{ki} \partial^{\gamma'} \partial_k Q^\pm\|_{1,\pm} \lesssim \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} Q^\pm\|_{3,\pm}. \quad (4.5.32)$$

Ceci entraîne la majoration suivante ($n \geq 1$) :

$$\frac{1}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_3\|_{1,\pm} \lesssim \sum_{i_1=1}^n \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \frac{1}{(n-i_1)!} \max_{|\gamma'|=n-i_1} \|\partial^{\gamma'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Les inégalités du même type que celles données par (4.5.22) permettent d'écrire que

$$\frac{1}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_3\|_{1,\pm} \lesssim \sum_{i_1+i_2=n-1} \frac{1}{i_1!} \max_{|\beta'|=i_1} \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^3} \frac{1}{i_2!} \max_{|\gamma'|=i_2} \|\partial^{\gamma'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

En sommant par rapport à $n \in \{1, \dots, N\}$, il vient finalement :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_3\|_{1,\pm} \lesssim \rho \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N}. \quad (4.5.33)$$

Terminons avec le dernier commutateur F_4 de \mathcal{F}' :

$$F_4 := [\partial^{\alpha'} ; \tilde{A}_{ji} \partial_{ji} \cdot] Q^\pm = \sum_{\substack{\beta'+\gamma'=\alpha' \\ |\beta'| \geq 1}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'!} \partial^{\beta'} \tilde{A}_{ki} \partial^{\gamma'} \partial_{ki} Q^\pm. \quad (4.5.34)$$

Dans le même esprit que (4.5.32), on montre que

$$\|\partial^{\beta'} \tilde{A}_{ki} \partial^{\gamma'} \partial_{ki} Q^\pm\|_{1,\pm} \lesssim \|\partial^{\beta'} \tilde{A}\|_{H^2} \|\partial^{\gamma'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Cette estimation est identique à celle donnée par (4.5.32). Par conséquent, on en conclut également que

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|F_4\|_{1,\pm} \lesssim \rho \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N}. \quad (4.5.35)$$

Ceci achève l'estimation du terme source \mathcal{F}'^\pm . Résumons ci-après l'estimation finale satisfaite par \mathcal{F}'^\pm , en combinant (4.5.12), (4.5.30), (4.5.33) et (4.5.35) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\mathcal{F}'^\pm\|_{1,\pm} &\lesssim \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1}^0 + \rho \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0 \left(1 + \|\tilde{A}\|_{H^2}\right) \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N} \\ &\quad + \left(\rho \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^0\right)^2 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N}. \end{aligned} \quad (4.5.36)$$

Nous allons maintenant procéder de façon analogue pour estimer le terme source de bord \mathcal{G}' .

Estimation de \mathcal{G}' . On rappelle que \mathcal{G}' est défini par (4.5.9). Le cas de G_1 est identique à celui du terme source intérieur F_1 . On obtient le même type d'estimation que (4.5.12), à savoir :

$$\sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|G_1\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} = \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\partial^{\alpha'} \mathcal{G}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq \|\mathcal{G}\|_{\rho,\frac{3}{2}}. \quad (4.5.37)$$

Traitons maintenant le cas du commutateur G_2 . Pour cela, on utilise la continuité de la trace de $H^2(\Omega^\pm)$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ afin d'éliminer le saut à travers Γ , et la Proposition 4.4.1 pour se ramener à ψ :

$$\|G_2\|_{H^{1,5}(\Gamma)} = \left\| \left[\partial^{\alpha'} ; (1 + |\nabla' f|^2) \partial_3 \right] Q \right\|_{H^{1,5}(\Gamma)} \lesssim \left\| \left[\partial^{\alpha'} ; (1 + \partial_h \psi \partial_h \psi) \partial_3 \right] Q^\pm \right\|_{2,\pm},$$

où l'on a adopté la convention de sommation d'Einstein sur l'indice répété $h \in \{1, 2\}$. Posons alors

$$G_2^\pm := \left[\partial^{\alpha'} ; (1 + \partial_h \psi \partial_h \psi) \partial_3 \right] Q^\pm.$$

On obtient en développant :

$$G_2^\pm = \sum_{\substack{\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha' \\ |\beta'+\gamma'| \geq 1}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'! \delta'!} \partial^{\beta'} \partial_h \psi \partial^{\gamma'} \partial_h \psi \partial^{\delta'} \partial_3 Q^\pm.$$

En utilisant la propriété d'algèbre de l'espace $H^2(\Omega^\pm)$, il vient :

$$\|G_2\|_{H^{1,5}(\Gamma)} \lesssim \sum_{\substack{\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha' \\ |\beta'+\gamma'| \geq 1}} \frac{\alpha'!}{\beta'! \gamma'! \delta'!} \|\partial^{\beta'} \psi\|_{H^3} \|\partial^{\gamma'} \psi\|_{H^3} \|\partial^{\delta'} Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Le calcul est exactement le même que pour le commutateur F_2 défini par (4.5.13), avec cette fois-ci ψ dans le rôle de \tilde{A} , dont on estime les dérivées tangentielles dans H^3 au lieu de H^2 pour \tilde{A} . Ceci reste cohérent, du fait de la définition de \tilde{A} qui ne fait intervenir que des dérivées d'ordre 1 de ψ . Les fonctions \tilde{A} et ψ sont donc bien estimées au même niveau en échelle de régularité Sobolev. On obtient l'analogue de (4.5.30), pour le commutateur G_2 :

$$\sum_{n=2}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|G_2\|_{H^{1,5}(\Gamma)} \lesssim \rho \|\psi\|_{H^3} \|\psi\|_{\rho,4}^0 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N} + \left(\rho \|\psi\|_{\rho,4}^0\right)^2 \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm,N}. \quad (4.5.38)$$

Notons que la norme $\|\psi\|_{H^3}$ sera, tout comme $\|\tilde{A}\|_{H^2}$, une quantité petite, du fait de la petitesse du front f dans $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Nous résumons ci-après l'estimation finale de \mathcal{G}' à l'aide de (4.5.37) et (4.5.38) :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n} \|\mathcal{G}'\|_{H^{1,5}(\Gamma)} \lesssim \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}} + \rho \|\psi\|_{H^3} \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm, N} + \left(\rho \|\psi\|_{\rho, 4}^0\right)^2 \|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm, N}. \quad (4.5.39)$$

Estimation de Q^\pm . Revenons à l'estimation (4.5.11). Compte tenu des inégalités (4.5.36) et (4.5.39) valables pour $n \geq 1$, et de (4.5.6) pour le cas $n = 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm, N} &\lesssim \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho, 1}^{0, \pm} + \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}} \\ &\quad + \rho \left((1 + \|\tilde{A}\|_{H^2}) \|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 + \|\psi\|_{H^3} \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \right) \|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm, N} \\ &\quad + \rho^2 \left(\|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 \|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 + \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \right) \|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm, N}. \end{aligned} \quad (4.5.40)$$

Conclusion. Nous bouclons maintenant l'estimation (4.5.40), en absorbant les termes analytiques de droite. On considère $f \in B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ satisfaisant (4.5.2), où $\eta_1 > 0$ (constante numérique) est donnée par le Corollaire 4.4.3. Quitte à restreindre encore η_1 , on peut par exemple assurer l'encadrement $\frac{1}{2} \leq J \leq \frac{3}{2}$, et on a alors l'estimation de régularité elliptique (4.2.11) (voir [CMST12, p.250, 271]). Dans tout ce qui suit, on notera $C > 0$ toute constante numérique pouvant éventuellement dépendre de η_1 , mais pas des paramètres ρ et σ . Grâce à l'hypothèse (4.5.2), on peut affirmer que $\|J^{-1}\|_{H^2} \leq C$. Ainsi, la propriété d'algèbre de l'espace $H^2(\Omega)$ et le Lemme 4.2.1 permettent d'écrire que

$$\|\tilde{A}\|_{H^2} \leq C.$$

Ensuite, on estime les normes analytiques de la façon suivante :

$$\|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 = \|J^{-1} \nabla \psi\|_{\rho, 3}^0 \leq \|J^{-1} \nabla \psi\|_{\rho, 3, \sigma},$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 &\leq C \|J^{-1}\|_{\rho, 3, \sigma} \|\psi\|_{\rho, 4, \sigma} && \text{(propriété d'algèbre de } B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega)) \\ &\leq C \|J^{-1}\|_{\rho, 3, \sigma} \|f\|_{\rho, \frac{7}{2}} && \text{(Proposition 4.4.1)} \\ &\leq C \eta_1 \leq C. && \text{(Corollaire 4.4.3 et hypothèse (4.5.2))} \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous avons donc :

$$\rho \left((1 + \|\tilde{A}\|_{H^2}) \|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 + \|\psi\|_{H^3} \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \right) \leq C \rho,$$

et dans un second temps, on obtient également :

$$\rho^2 \left(\|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 \|\tilde{A}\|_{\rho, 3}^0 + \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \|\psi\|_{\rho, 4}^0 \right) \leq C \rho^2.$$

Posons par exemple

$$\rho_0 := \min \left\{ 1, \frac{1}{2C} \right\} \in (0, 1], \quad (4.5.41)$$

de sorte que pour tout $\rho \in (0, \rho_0]$, on a finalement :

$$\|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm, N} \lesssim \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho, 1}^{0, \pm} + \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}}. \quad (4.5.42)$$

En prenant le supremum par rapport à N , on obtient $Q^\pm \in B_{\rho, 3}^0(\Omega^\pm)$ et la même estimation avec la norme $\|Q^\pm\|_{\rho, 3}^{0, \pm}$, ce qui achève la démonstration du Théorème 4.5.2.

Remarquons que l'on a déjà admis que le problème elliptique (4.5.1) admettait une solution Q^\pm dans $H^\infty(\Omega^\pm)$. Le Théorème 4.5.2 apporte une information supplémentaire sur les dérivées *tangentielles* de Q^\pm lorsque les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} appartiennent respectivement à $B_{\rho,1,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho,\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^2)$, et lorsque les coefficients de l'opérateur elliptique sont dans $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega)$ (avec une condition de petitesse). Le but du paragraphe suivant est de gérer toutes les dérivées normales restantes, ce qui donnera finalement lieu au Théorème 4.5.1.

4.5.2 Estimation des dérivées normales

Dans cette partie, on considère toujours des termes sources $\mathcal{F}^\pm \in B_{\rho,1,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $\mathcal{G} \in B_{\rho,\frac{3}{2}}(\Gamma)$, avec un front $f \in B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ satisfaisant (4.5.2). Le but est dorénavant de montrer que la solution Q^\pm (à moyenne nulle) du problème (4.5.1) appartient à l'espace $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)$, pour $\sigma > 0$ suffisamment petit. Pour cela, nous devons d'abord prendre en compte toutes les dérivées normales, afin de montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $Q^\pm \in B_{\rho,3}^k(\Omega^\pm)$. Enfin, pour avoir $Q^\pm \in B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)$, il restera à évaluer les sommes partielles $\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,N}$.

On procède par récurrence sur $k \geq 0$. Supposons que pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, on a $Q^\pm \in B_{\rho,3}^j(\Omega^\pm)$. Tout d'abord, on sait que $Q^\pm \in H^\infty(\Omega^\pm)$, donc en particulier $Q^\pm \in H_{x_3}^{k+4}(H^\infty(\mathbb{T}^2))$. Il reste à montrer que la norme $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm}$ est une quantité finie. Pour $N \geq 0$, nous noterons $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm,N}$ la somme partielle d'ordre N . À l'aide de l'hypothèse de récurrence, on décompose la somme partielle comme suit (on supposera $N \geq k+1$) :

$$\begin{aligned} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm,N} &:= \sum_{k=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha_3 \leq k+1}} \|\partial^\alpha Q^\pm\|_{3,\pm} \\ &\leq \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k,\pm} + \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha|=n-k-1} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{3,\pm}. \end{aligned} \quad (4.5.43)$$

Pour estimer la somme de droite dans (4.5.43), on décompose la norme $\|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{3,\pm}$ comme suit :

$$\|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{3,\pm}^2 = \|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{2,\pm}^2 + \sum_{\substack{|\beta|=3 \\ |\beta'| \geq 1}} \|\partial^\beta \partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{0,\pm}^2 + \|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+4} Q^\pm\|_{0,\pm}^2. \quad (4.5.44)$$

Les deux premiers termes de droite de (4.5.44) permettent de se ramener à la quantité $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k,\pm}$. En effet, dans un premier temps, on a la majoration

$$\|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{2,\pm} \leq \|\partial^{\alpha'} \partial_3^k Q^\pm\|_{3,\pm} \leq \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^k Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Ainsi, en sommant par rapport à n , nous avons :

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{2,\pm} \leq \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^k Q^\pm\|_{3,\pm} \leq \rho \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k,\pm}.$$

Dans un second temps, les termes $\|\partial^\beta \partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{0,\pm}$, pour $|\beta| = 3$ et $|\beta'| \geq 1$, de (4.5.44) fournissent le même type de majoration. En effet, comme β est un multi-indice de longueur 3, contenant au moins une dérivée tangentielle que l'on note $\bar{\partial}$, on peut écrire $\partial^\beta = \bar{\partial} \partial^2$. Nous obtenons alors :

$$\|\partial^\beta \partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{0,\pm} = \|\bar{\partial} \partial^2 (\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm)\|_{0,\pm} \leq \|\bar{\partial} \partial^{\alpha'} \partial_3^k Q^\pm\|_{3,\pm} \leq \max_{|\alpha'|=n-k} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^k Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Après sommation par rapport à n , on a :

$$\sum_{\substack{|\beta|=3 \\ |\beta'| \geq 1}} \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|\partial^\beta \partial^{\alpha'} \partial_3^{k+1} Q^\pm\|_{0,\pm} \lesssim \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^k Q^\pm\|_{3,\pm} \lesssim \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k,\pm}.$$

Revenant à (4.5.43), on en déduit :

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm,N} \lesssim (1+\rho) \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k,\pm} + \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+4} Q^\pm\|_{0,\pm}. \quad (4.5.45)$$

Le seul terme délicat à traiter est donc celui contenant le plus de dérivées normales, à savoir $\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+4} Q^\pm$, que l'on doit estimer dans $L^2(\Omega^\pm)$. Pour cela, on utilise d'abord la majoration suivante :

$$\|\partial^{\alpha'} \partial_3^{k+4} Q^\pm\|_{0,\pm} \leq \|\partial^{\alpha'} \partial_3^k (\partial_3^2 Q^\pm)\|_{2,\pm}.$$

Ceci met en évidence exactement 2 dérivées normales de Q^\pm , que l'on pourra éliminer en utilisant l'équation satisfaite par Q^\pm dans le problème (4.5.1). Il suffira ensuite d'appliquer $\partial^{\alpha'} \partial_3^k$ à cette équation, ce qui exhibera au plus k dérivées normales. Par conséquent, grâce à l'hypothèse de récurrence, nous pourrions faire apparaître toutes les quantités $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j,\pm}$, pour $j \leq k$. Le décalage d'exactlyement une dérivée normale entre l'étape k et l'étape $k+1$ permettra par la suite de gagner une puissance de σ , après sommation par rapport à k . Ce gain sera finalement crucial pour absorber certaines normes analytiques, en vue de boucler les estimations sur la pression. Cette méthode est identique à celle employée dans l'estimation de $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm}$, où l'on gagnait jusqu'à deux puissances de ρ .

En développant la première équation du problème (4.5.1), on obtient :

$$\frac{1 + |\nabla' \psi|^2}{J^2} \partial_3^2 Q^\pm = -\Delta' Q^\pm + 2 \frac{\partial_h \psi}{J} \partial_h \partial_3 Q^\pm - \mathcal{F}^\pm - A_{ji} \partial_j \tilde{A}_{ki} \partial_k Q^\pm. \quad (4.5.46)$$

Posons

$$\zeta := \frac{J^2}{1 + |\nabla' \psi|^2}, \quad (4.5.47)$$

de sorte que l'on peut réécrire (4.5.46) sous la forme :

$$\partial_3^2 Q^\pm = -\zeta \Delta' Q^\pm + 2 \frac{\zeta}{J} \partial_h \psi \partial_h \partial_3 Q^\pm - \zeta \mathcal{F}^\pm - \zeta A \partial^1 \tilde{A} \partial^1 Q^\pm. \quad (4.5.48)$$

Posons $\alpha := (\alpha', k)$ (remarquons que $|\alpha| = n-1$), et appliquons ∂^α à l'équation (4.5.48) :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_3^2 Q^\pm &= -\partial^\alpha (\zeta \Delta' Q^\pm) + 2 \partial^\alpha \left(\frac{\zeta}{J} \partial_h \psi \partial_h \partial_3 Q^\pm \right) - \partial^\alpha (\zeta \mathcal{F}^\pm) - \partial^\alpha (\zeta A \partial^1 \tilde{A} \partial^1 Q^\pm) \\ &=: -T_1 + 2T_2 - T_3 - T_4. \end{aligned} \quad (4.5.49)$$

Il reste pour finir à évaluer chacun des termes T_i dans $H^2(\Omega^\pm)$.

► Traitement de T_1 :

Nous avons :

$$T_1 := \partial^\alpha (\zeta \Delta' Q^\pm) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} \partial^\beta \zeta \partial^\gamma \Delta' Q^\pm.$$

Comme pour les estimations menées dans le cas de $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm}$ au Paragraphe 4.5.1, on obtient :

$$\|T_1\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{i_1+i_2=n-1} \frac{(n-1)!}{i_1! i_2!} \max_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ |\beta|=i_1 \\ |\gamma|=i_2}} \left(\|\partial^\beta \zeta\|_{H^2} \|\partial^\gamma \Delta' Q^\pm\|_{2,\pm} \right). \quad (4.5.50)$$

Il faut dorénavant tenir compte du fait que $\beta_3 + \gamma_3 = k$. Par conséquent, on peut majorer le terme de droite de (4.5.50) comme suit :

$$\|T_1\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \sum_{i_1+i_2=n-1} \frac{(n-1)!}{i_1! i_2!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta \zeta\|_{H^2} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \Delta' Q^\pm\|_{2,\pm}. \quad (4.5.51)$$

On ramène l'estimation sur Q^\pm dans $H^3(\Omega^\pm)$ de la façon suivante :

$$\max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \Delta' Q^\pm\|_{2,\pm} \lesssim \max_{\substack{|\gamma|=i_2+1 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Par suite, en ré-indexant par rapport à i_2 , on obtient :

$$\|T_1\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \sum_{\substack{i_1+i_2=n \\ i_2 \geq 1}} \frac{(n-1)!}{i_1!(i_2-1)!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta \zeta\|_{H^2} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Enfin, en multipliant par $\frac{\rho^n}{n!}$ et en sommant par rapport à $n \in \{k+1, \dots, N\}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|T_1\|_{2,\pm} &\lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \sum_{n=k+1}^N \sum_{\substack{i_1+i_2=n \\ i_2 \geq 1}} \frac{(n-1)! i_2}{n!} \frac{\rho^{i_1}}{i_1!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta \zeta\|_{H^2} \frac{\rho^{i_2}}{i_2!} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma Q^\pm\|_{3,\pm} \\ &\lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \sum_{n=k+1}^N \sum_{\substack{i_1+i_2=n \\ i_2 \geq 1}} \frac{\rho^{i_1}}{i_1!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta \zeta\|_{H^2} \frac{\rho^{i_2}}{i_2!} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma Q^\pm\|_{3,\pm}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration $\frac{(n-1)! i_2}{n!} \leq 1$. Enfin, en reconnaissant un produit de Cauchy partiel par rapport à n , on peut écrire :

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|T_1\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \|\zeta\|_{\rho,2}^{j_1,N} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j_2,\pm,N} \lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \|\zeta\|_{\rho,2}^{j_1} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j_2,\pm}, \quad (4.5.52)$$

ce qui achève le cas de T_1 .

► Traitement de T_2 :

On développe de la même façon T_2 , ce qui donne :

$$T_2 := \partial^\alpha \left(\frac{\zeta}{J} \partial_h \psi \partial_h \partial_3 Q^\pm \right) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} \partial^\beta \left(\frac{\zeta}{J} \partial_h \psi \right) \partial^\gamma \partial_h \partial_3 Q^\pm.$$

L'estimation de $\|T_2\|_{2,\pm}$ est ensuite identique à celle de T_1 , en estimant Q^\pm dans $H^3(\Omega^\pm)$ via l'inégalité

$$\max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \partial_h \partial_3 Q^\pm\|_{2,\pm} \leq \max_{\substack{|\gamma|=i_2+1 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

On en conclut que

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|T_2\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \left\| \frac{\zeta}{J} \partial_h \psi \right\|_{\rho,2}^{j_1} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j_2,\pm}. \quad (4.5.53)$$

► Traitement de T_3 :

Par définition,

$$T_3 := \partial^\alpha (\zeta \mathcal{F}^\pm) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} \partial^\beta \zeta \partial^\gamma \mathcal{F}^\pm.$$

On obtient comme précédemment :

$$\|T_3\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2=k} \sum_{i_1+i_2=n-1} \frac{(n-1)!}{i_1! i_2!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta \zeta\|_{H^2} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \mathcal{F}^\pm\|_{2,\pm}.$$

Par hypothèse, on a $\mathcal{F}^\pm \in B_{\rho,1,\sigma}(\Omega^\pm)$. Par conséquent, on se ramène à la norme $\|\cdot\|_{1,\pm}$ grâce à l'inégalité

$$\max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \mathcal{F}^\pm\|_{2,\pm} \lesssim \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2+1}} \|\partial^\gamma \mathcal{F}^\pm\|_{1,\pm} + \max_{\substack{|\gamma|=i_2+1 \\ \gamma_3 \leq j_2+1}} \|\partial^\gamma \mathcal{F}^\pm\|_{1,\pm}.$$

La suite de l'estimation de T_3 est similaire à celle de T_1 et T_2 , et on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|T_3\|_{2,\pm} \lesssim (1+\rho) \sum_{j_1+j_2=k} \|\zeta\|_{\rho,2}^{j_1} \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1}^{j_2+1,\pm}. \quad (4.5.54)$$

► Traitement de T_4 :

Le cas de T_4 est analogue à celui de T_1 , avec un terme supplémentaire à dériver :

$$T_4 := \partial^\alpha \left(\zeta A \partial^1 \tilde{A} \partial^1 Q^\pm \right) = \sum_{\beta+\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma! \delta!} \partial^\beta (\zeta A) \partial^\gamma \partial^1 \tilde{A} \partial^\delta \partial^1 Q^\pm.$$

On généralise l'estimation (4.5.51) avec trois indices i_1 , i_2 et i_3 :

$$\|T_4\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2+j_3=k} \sum_{i_1+i_2+i_3=n-1} \frac{(n-1)!}{i_1! i_2! i_3!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta (\zeta A)\|_{H^2} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \partial^1 \tilde{A}\|_{H^2} \max_{\substack{|\delta|=i_3 \\ \delta_3 \leq j_3}} \|\partial^\delta \partial^1 Q^\pm\|_{2,\pm}.$$

Ensuite, à l'aide des majorations

$$\|\partial^\gamma \partial^1 \tilde{A}\|_{H^2} \leq \|\partial^\gamma \tilde{A}\|_{H^3} \quad \text{et} \quad \|\partial^\delta \partial^1 Q^\pm\|_{2,\pm} \leq \|\partial^\delta Q^\pm\|_{3,\pm},$$

on en déduit :

$$\|T_4\|_{2,\pm} \lesssim \sum_{j_1+j_2+j_3=k} \sum_{i_1+i_2+i_3=n-1} \frac{(n-1)!}{i_1! i_2! i_3!} \max_{\substack{|\beta|=i_1 \\ \beta_3 \leq j_1}} \|\partial^\beta (\zeta A)\|_{H^2} \max_{\substack{|\gamma|=i_2 \\ \gamma_3 \leq j_2}} \|\partial^\gamma \tilde{A}\|_{H^3} \max_{\substack{|\delta|=i_3 \\ \delta_3 \leq j_3}} \|\partial^\delta Q^\pm\|_{3,\pm}.$$

Finalement, on aboutit à l'estimation :

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha'|=n-k-1} \|T_4\|_{2,\pm} \lesssim \rho \sum_{j_1+j_2+j_3=k} \|\zeta A\|_{\rho,2}^{j_1} \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^{j_2} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j_3,\pm}. \quad (4.5.55)$$

En revenant à l'estimation (4.5.45), et en utilisant les estimations (4.5.52), (4.5.55), on a donc montré que

$$\begin{aligned} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm,N} &\lesssim (1+\rho) \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k,\pm} + \sum_{j_1+j_2=k} \left(\|\zeta\|_{\rho,2}^{j_1} + \left\| \frac{\zeta}{J} \nabla' \psi \right\|_{\rho,2}^{j_1} \right) \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j_2,\pm} \\ &\quad + (1+\rho) \sum_{j_1+j_2=k} \|\zeta\|_{\rho,2}^{j_1} \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1}^{j_2+1,\pm} \\ &\quad + \rho \sum_{j_1+j_2+j_3=k} \|\zeta A\|_{\rho,2}^{j_1} \|\tilde{A}\|_{\rho,3}^{j_2} \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{j_3,\pm}. \end{aligned} \quad (4.5.56)$$

On constate notamment que la norme $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm,N}$ est majorée uniformément par rapport à N . Ainsi, en prenant le supremum par rapport à N , on a bien $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm} < +\infty$. Par récurrence, nous avons alors $Q^\pm \in \cap_{k \geq 0} B_{\rho,3}^k(\Omega^\pm)$, avec l'estimation (4.5.56) également satisfaite par la norme $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{k+1,\pm}$. En multipliant par σ^{k+1} et en sommant par rapport à $k \in \{0, \dots, K-1\}$ (où $K \geq 1$ est un entier quelconque), il vient (on a noté $\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K}$ la somme partielle d'ordre K dans la définition de la norme $\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^\pm$) :

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K} \lesssim \|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm} + (1+\rho) \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1,\sigma}^\pm \quad (4.5.57a)$$

$$+ \sigma \left(\|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} + \left\| \frac{\zeta}{J} \nabla' \psi \right\|_{\rho,2,\sigma} + \rho \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|A\|_{\rho,2,\sigma} \|\tilde{A}\|_{\rho,3,\sigma} \right) \|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K}. \quad (4.5.57b)$$

En utilisant l'estimation (4.5.4) sur $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm}$, et à l'aide de la majoration $\rho \leq \rho_0 \leq 1$, on peut estimer le terme de droite de (4.5.57a) par

$$C_0 \left(\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm} + \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1,\sigma}^\pm \right),$$

où $C_0 > 0$ est une constante numérique. L'estimation (4.5.57) se réécrit comme suit :

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K} \leq C_1 \left(\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm} + \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1,\sigma}^\pm \right) \quad (4.5.58)$$

$$+ \sigma C_1 \left(\|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} + \left\| \frac{\zeta}{J} \nabla' \psi \right\|_{\rho,2,\sigma} + \rho \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|A\|_{\rho,2,\sigma} \|\tilde{A}\|_{\rho,3,\sigma} \right) \|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K}, \quad (4.5.59)$$

où $C_1 > 0$ est une constante numérique. Il reste maintenant à absorber les termes analytiques de (4.5.59), dans le but de boucler l'estimation sur $\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K}$.

Absorption des termes analytiques.

► Traitement de $\|\zeta\|_{\rho,2,\sigma}$:

Tout comme dans le cas de $\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm}$, nous allons utiliser le gain d'une puissance de σ en vue d'absorber les termes analytiques de (4.5.59), en choisissant σ suffisamment petit. On considère $f \in B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ satisfaisant toujours l'hypothèse (4.5.2). En conséquence, on obtient les deux estimations suivantes (réécriture de (4.4.16) et (4.4.18)) :

$$\|\nabla \psi\|_{\rho,3,\sigma} \leq \|\psi\|_{\rho,4,\sigma} \leq C_0 \|f\|_{\rho,\frac{7}{2}} \leq C_0, \quad (4.5.60)$$

$$\left\| \frac{1}{J} \right\|_{\rho,3,\sigma} \leq C_0. \quad (4.5.61)$$

Ci-dessus, et dans toute la suite, on notera $C_0 > 0$ toute constante numérique (ne dépendant éventuellement que de η_1). Remarquons que les deux estimations (4.5.60) et (4.5.61) sont valables pour $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$ (le paramètre σ_0 ayant été fixé, et valant $\frac{1}{2}$). Par la propriété d'algèbre de $B_{\rho,2,\sigma}(\Omega)$, nous avons :

$$\|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \leq C_0 \left\| \frac{1}{1 + |\nabla' \psi|^2} \right\|_{\rho,2,\sigma} \|J\|_{\rho,2,\sigma}^2.$$

D'une part, nous avons grâce à (4.5.60) :

$$\|J\|_{\rho,2,\sigma} = \|1 + \partial_3 \psi\|_{\rho,2,\sigma} \leq C_0 (1 + \|\psi\|_{\rho,3,\sigma}) \leq C_0.$$

D'autre part, quitte à restreindre encore $\eta_1 > 0$ (voir l'hypothèse (4.5.2)), on peut écrire :

$$\left\| \frac{1}{1 + |\nabla' \psi|^2} \right\|_{\rho,2,\sigma} \leq C_0.$$

Il suffit en effet d'utiliser la Proposition 4.4.2 et d'adapter la démonstration du Corollaire 4.4.3. Ainsi, on peut finalement affirmer que ζ est bornée dans $B_{\rho,2,\sigma}(\Omega)$:

$$\|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \leq C_0. \quad (4.5.62)$$

► Traitement de $\left\| \frac{\zeta}{J} \nabla' \psi \right\|_{\rho,2,\sigma}$ et de $\rho \|A\|_{\rho,2,\sigma} \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|\tilde{A}\|_{\rho,3,\sigma}$:

On ne détaille pas dans la suite le traitement de ces deux termes, car la méthode est identique à ce qui a été fait ci-dessus, et fournit exactement le même type de majoration que (4.5.62), à savoir :

$$\left\| \frac{\zeta}{J} \nabla' \psi \right\|_{\rho,2,\sigma} \leq C_0 \quad \text{et} \quad \rho \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|A\|_{\rho,2,\sigma} \|\tilde{A}\|_{\rho,3,\sigma} \leq C_0, \quad (4.5.63)$$

où l'on a utilisé $\rho \leq \rho_0 \leq 1$.

► **Limitation du paramètre σ :**

Nous redéfinissons dès lors σ_0 comme suit :

$$\sigma_0 := \frac{1}{6C_0C_1},$$

où $C_0 > 0$ est donnée par (4.5.62), (4.5.63) et C_1 par (4.5.59). Quitte à augmenter C_0 , on aura bien $\sigma_0 \leq \frac{1}{2}$, donc toutes les estimations obtenues pour $\sigma \in (0, \frac{1}{2}]$ restent valides. Pour $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$, le membre de droite de (4.5.59) se majore de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma C_1 \left(\|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} + \left\| \frac{\zeta}{J} \nabla' \psi \right\|_{\rho,2,\sigma} + \rho \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|A\|_{\rho,2,\sigma} \|\tilde{A}\|_{\rho,3,\sigma} \right) \|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K} &\leq 3C_0C_1\sigma \|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K} \\ &\leq \frac{1}{2} \|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient l'estimation suivante pour la norme $\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K}$:

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K} \leq C_1 (\|Q^\pm\|_{\rho,3}^{0,\pm} + \|\zeta\|_{\rho,2,\sigma} \|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1,\sigma}^{\pm}). \quad (4.5.64)$$

Pour conclure, en utilisant (4.5.62) et le résultat (4.5.4), on simplifie (4.5.64) pour aboutir à l'estimation :

$$\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm,K} \leq C_2 \left(\|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho,1,\sigma}^{\pm} + \|\mathcal{G}\|_{\rho,\frac{3}{2}} \right),$$

où $C_2 > 0$ est une constante numérique. En prenant le supremum sur K , on en déduit la même estimation pour la norme $\|Q^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^{\pm}$, ce qui achève la démonstration du Théorème 4.5.1.

4.6 Vers l'existence de solutions analytiques au problème des nappes de tourbillon-courant et pistes de recherche future

Revenons à la définition de l'application Υ établie à la Section 4.3. L'objectif de cette partie est de fournir plusieurs pistes de recherche future, plus ou moins approfondies, qui permettront de démontrer que Υ sera *contractante* sur un espace métrique *complet* à déterminer. L'idée sera d'adapter les outils de la preuve du théorème de Cauchy-Kowalevskaya donnée par Baouendi et Goulaouic [BG78]. Cette preuve repose avant tout sur l'estimation "lipschitzienne" (3.2.10) dans les hypothèses du Théorème 3.2.2. Une telle estimation peut aisément s'obtenir pour les *termes convectifs* apparaissant dans les équations (4.2.15), comme nous l'avons mis en évidence sur le cas simple étudié au Chapitre 3 (on renvoie notamment à la Proposition 3.2.3). Néanmoins, il reste à estimer les *termes de pression* dans les équations (4.2.15a) et (4.2.15b), afin d'obtenir une estimation du même type que (3.2.10). Ce point fera l'objet du Paragraphe 4.6.1 ci-dessous, et découlera essentiellement du résultat fourni par le Théorème 4.5.1.

4.6.1 Estimation "lipschitzienne" de la pression

Reprenons les équations (4.2.15a), (4.2.15b) sur la vitesse u^\pm (on se place dans la formulation en terme des inconnues (u^\pm, b^\pm, f) établie au Paragraphe 4.2.2). La composante associée à la pression Q^\pm est donnée par :

$$\begin{pmatrix} J \partial_1 Q^\pm - \partial_1 \psi \partial_3 Q^\pm \\ J \partial_2 Q^\pm - \partial_2 \psi \partial_3 Q^\pm \\ -\partial_1 \psi \partial_1 Q^\pm - \partial_2 \psi \partial_2 Q^\pm + \frac{1+|\nabla' \psi|^2}{J} \partial_3 Q^\pm \end{pmatrix} = a A^T \nabla Q^\pm,$$

où l'on rappelle la définition (4.2.2) des matrices A et a . Dans toute la suite, on se donne deux triplets (u^\pm, b^\pm, f) et $(\underline{u}^\pm, \underline{b}^\pm, \underline{f})$ tels que :

$$(u^\pm, b^\pm, f), (\underline{u}^\pm, \underline{b}^\pm, \underline{f}) \in B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)^3 \times B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)^3 \times B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2), \quad (4.6.1)$$

satisfaisant en outre les conditions (4.3.1). On notera Q^\pm (resp. \underline{Q}^\pm) la solution du problème de Laplace (4.2.16) dont les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} (resp. $\underline{\mathcal{F}}^\pm$ et $\underline{\mathcal{G}}$) ainsi que les coefficients de l'opérateur elliptique sont donnés en fonction de (u^\pm, b^\pm, f) (resp. à $(\underline{u}^\pm, \underline{b}^\pm, \underline{f})$) via les expressions (4.2.17) et (4.2.2). De même, toutes les quantités annexes définies à partir de $(\underline{u}^\pm, \underline{b}^\pm, \underline{f})$ seront notées avec une barre soulignée. Le but de ce paragraphe est d'établir une estimation du terme de pression $a A^T \nabla Q^\pm - \underline{a} \underline{A}^T \nabla \underline{Q}^\pm$ dans les espaces $B_{\rho', 3, \sigma}(\Omega^\pm)$, pour tout $\rho' \in (0, \rho)$; cette estimation est résumée dans la proposition ci-dessous.

Proposition 4.6.1

Soient $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$, où ρ_0 et σ_0 sont donnés par le Théorème 4.5.1. On se donne $R > 0$, puis (u^\pm, b^\pm, f) et $(\underline{u}^\pm, \underline{b}^\pm, \underline{f})$ vérifiant (4.6.1), (4.3.1) et contrôlés comme suit :

$$\|u^\pm, b^\pm, \underline{u}^\pm, \underline{b}^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm < R \quad \text{et} \quad \|f, \underline{f}\|_{\rho, \frac{7}{2}} < \eta_1, \quad (4.6.2)$$

où η_1 est donné par le Théorème 4.5.1. Alors pour tout $0 < \rho' < \rho$, on a l'estimation "lipschitzienne" :

$$\begin{aligned} \|a A^T \nabla Q^\pm - \underline{a} \underline{A}^T \nabla \underline{Q}^\pm\|_{\rho', 3, \sigma}^\pm \\ \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \left(\|u^\pm - \underline{u}^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm + \|b^\pm - \underline{b}^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm + \|f - \underline{f}\|_{\rho, \frac{7}{2}} \right), \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

où $C > 0$ ne dépend que de R et η_1 , mais pas de ρ ni de ρ' .

Démonstration. Notons α_{ij} (resp. $\underline{\alpha}_{ij}$) les coefficients de la matrice $a A^T$ (resp. $\underline{a} \underline{A}^T$). À i fixé, on écrit :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} \partial_j Q^\pm - \underline{\alpha}_{ij} \partial_j \underline{Q}^\pm &= (\alpha_{ij} - \underline{\alpha}_{ij}) \partial_j Q^\pm + \underline{\alpha}_{ij} \partial_j (Q^\pm - \underline{Q}^\pm) \\ &=: E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Traitement de E_1 . Pour estimer le terme E_1 , on utilise la propriété d'algèbre de l'espace $B_{\rho', 3, \sigma}(\Omega^\pm)$:

$$\|E_1\|_{\rho', 3, \sigma}^\pm \leq C_0 \|\alpha_{ij} - \underline{\alpha}_{ij}\|_{\rho', 3, \sigma} \|\partial_j Q^\pm\|_{\rho', 3, \sigma}^\pm.$$

En utilisant la Proposition 4.4.1 et le Corollaire 4.4.3, il est clair qu'on peut écrire la majoration :

$$\|\alpha_{ij} - \underline{\alpha}_{ij}\|_{\rho', 3, \sigma} \leq C \|f - \underline{f}\|_{\rho, \frac{7}{2}}, \quad (4.6.4)$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de η_1 . Enfin, à l'aide de la propriété (2.3.10) et du Théorème 4.5.1, on en déduit que

$$\|E_1\|_{\rho', 3, \sigma}^\pm \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \left(\|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho, 1, \sigma}^\pm + \|\mathcal{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}} \right), \quad (4.6.5)$$

où $C > 0$ ne dépend que de η_1 et ε_0 .

Il nous faut à présent estimer les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} donnés en fonction de (u^\pm, b^\pm, f) via les expressions (4.2.17). Pour estimer \mathcal{F}^\pm dans $B_{\rho, 1, \sigma}(\Omega^\pm)$, on pourra se permettre d'utiliser directement la majoration plus "forte" $\|\cdot\|_{\rho, 1, \sigma}^\pm \leq \|\cdot\|_{\rho, 2, \sigma}^\pm$, car \mathcal{F}^\pm ne comprend que des produits de termes d'ordre de dérivation au plus 1 pour u^\pm et b^\pm , et au plus 2 pour ψ . En effet, estimons par exemple le dernier terme intervenant dans \mathcal{F}^\pm , qui est donné par

$$\frac{2 \partial_j J}{J^3} (u_i^\pm \partial_j u_j^\pm - b_i^\pm \partial_j b_j^\pm) = \frac{2 \partial_j \partial_3 \psi}{J^3} (u_i^\pm \partial_j u_j^\pm - b_i^\pm \partial_j b_j^\pm).$$

Par propriété d'algèbre de l'espace $B_{\rho, 2, \sigma}(\Omega^\pm)$ et en vertu du Corollaire 4.4.3, on a :

$$\left\| \frac{2 \partial_j \partial_3 \psi}{J^3} (u_i^\pm \partial_j u_j^\pm - b_i^\pm \partial_j b_j^\pm) \right\|_{\rho', 2, \sigma}^\pm \leq C \|\psi\|_{\rho, 4, \sigma} \left(\|u_i^\pm\|_{\rho, 2, \sigma}^\pm \|u_j^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm + \|b_i^\pm\|_{\rho, 2, \sigma}^\pm \|b_j^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm \right),$$

où $C > 0$ ne dépend que de η_1 . Ainsi, la Proposition 4.4.1 et l'hypothèse (4.6.2) permettent d'en déduire que

$$\left\| \frac{2 \partial_j \partial_3 \psi}{J^3} (u_i^\pm \partial_j u_j^\pm - b_i^\pm \partial_j b_j^\pm) \right\|_{\rho', 2, \sigma}^\pm \leq C,$$

où $C > 0$ ne dépend que de R et η_1 . Tous les autres termes apparaissant dans (4.2.17a) s'estiment de façon analogue; on en conclut alors que $\|\mathcal{F}^\pm\|_{\rho, 1, \sigma}^\pm \leq C$.

Le cas de \mathcal{G} est similaire, car à l'aide de la continuité de l'application trace de $H^2(\Omega^\pm)$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, tous les termes d'ordre 1 contenus dans \mathcal{G} seront estimés dans $B_{\rho, 2, \sigma}(\Omega^\pm)$, exactement comme ci-dessus pour \mathcal{F}^\pm .

Finalement, si l'on revient à (4.6.5), on aboutit à une estimation de la forme souhaitée; c'est-à-dire, il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de R et η_1 , telle que :

$$\|E_1\|_{\rho', 3, \sigma} \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \|f - \underline{f}\|_{\rho, \frac{7}{2}} \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \left(\|u^\pm - \underline{u}^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm + \|b^\pm - \underline{b}^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm + \|f - \underline{f}\|_{\rho, \frac{7}{2}} \right). \quad (4.6.6)$$

Traitement de E_2 . Expliquons succinctement comment traiter le cas de E_2 . On commence par écrire la majoration :

$$\|E_2\|_{\rho', 3, \sigma} = \|\alpha_{ij} \partial_j (Q^\pm - \underline{Q}^\pm)\|_{\rho', 3, \sigma}^\pm \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \|\alpha_{ij}\|_{\rho', 3, \sigma} \|Q^\pm - \underline{Q}^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}. \quad (4.6.7)$$

Les mêmes arguments que ceux ayant abouti à (4.6.4) permettent d'écrire :

$$\|\alpha_{ij}\|_{\rho', 3, \sigma} \leq \|\alpha_{ij}\|_{\rho, 3, \sigma} \leq C,$$

où $C > 0$ ne dépend que de η_1 .

Posons ensuite $P^\pm := Q^\pm - \underline{Q}^\pm$ et $g := f - \underline{f}$; afin d'estimer P^\pm dans $B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega^\pm)$, nous allons exhiber un problème elliptique satisfait par (P^+, P^-) , de la même forme que le problème (4.5.1) étudié à la Section 4.5. Comme l'opérateur elliptique dans (4.5.1) est à coefficients variables, nous allons devoir gérer l'apparition de commutateurs. On obtient le problème elliptique suivant, dans lequel les termes sources \mathbb{F}^\pm et \mathbb{G} seront explicités ci-dessous par (4.6.11) :

$$\begin{cases} -A_{ji} \partial_j (A_{ki} \partial_k P^\pm) = \mathbb{F}^\pm, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ [P] = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ (1 + |\nabla' f|^2) [\partial_3 P] = \mathbb{G}, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \partial_3 P^\pm = 0, & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm. \end{cases} \quad (4.6.8)$$

On peut appliquer le Théorème 4.5.1 et on obtient l'estimation :

$$\|P^\pm\|_{\rho, 3, \sigma}^\pm \leq C \left(\|\mathbb{F}^\pm\|_{\rho, 1, \sigma}^\pm + \|\mathbb{G}\|_{\rho, \frac{3}{2}} \right). \quad (4.6.9)$$

Il reste maintenant à expliciter les termes sources \mathbb{F}^\pm et \mathbb{G} dans (4.6.8). Pour cela, nous faisons le lien avec les problèmes elliptiques satisfaits par (Q^+, Q^-) d'une part (*i.e.* avec les coefficients de la matrice A), et celui satisfait par $(\underline{Q}^+, \underline{Q}^-)$ d'autre part (*i.e.* avec les coefficients de la matrice \underline{A}). On écrit alors :

$$A = \underline{A} + R, \quad (4.6.10)$$

où la matrice R est un terme de "reste" défini par

$$R := A - \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix},$$

et les coefficients R_{3j} sont définis comme suit :

$$\forall j = 1, 2, 3, \quad R_{3j} := \frac{1}{\underline{J}} \partial_j(\underline{\psi} - \psi) - \frac{\partial_j \psi}{\underline{J} \underline{J}} \partial_3(\underline{\psi} - \psi).$$

En injectant l'égalité (4.6.10) dans la première équation du système (4.6.8), on obtient l'expression des termes sources \mathbb{F}^\pm :

$$\mathbb{F}^\pm := \mathcal{F}^\pm - \underline{\mathcal{F}}^\pm + A_{ji} \partial_j (R_{3i} \partial_3 Q^\pm) + R_{3i} \partial_3 (\underline{A}_{ki} \partial_k Q^\pm). \quad (4.6.11a)$$

Le terme source \mathbb{G} s'obtient en écrivant $\nabla' f = \nabla' \underline{f} + \nabla' g$ dans la troisième équation du système (4.6.8) :

$$\mathbb{G} := \mathcal{G} - \underline{\mathcal{G}} - (2 \nabla' f \cdot \nabla' g + |\nabla' g|^2) [\partial_3 Q]. \quad (4.6.11b)$$

Il reste ensuite à estimer les termes sources \mathbb{F}^\pm et \mathbb{G} . Par souci de clarté, on choisit de ne pas détailler ces calculs, dont la méthode est rigoureusement identique à celle employée précédemment pour le traitement de E_1 . On aboutit à une estimation de la forme :

$$\|\mathbb{F}^\pm\|_{\rho,1,\sigma}^\pm + \|\mathbb{G}\|_{\rho,\frac{3}{2}} \leq C \left(\|u^\pm - \underline{u}^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^\pm + \|b^\pm - \underline{b}^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^\pm + \|f - \underline{f}\|_{\rho,\frac{7}{2}} \right),$$

avec $C > 0$ dépendant de R et η_1 , mais pas de ρ ni de ρ' . Revenant à (4.6.7), on peut donc achever l'estimation de E_2 , et on obtient :

$$\|E_2\|_{\rho',3,\sigma} \leq \frac{C}{\rho - \rho'} \left(\|u^\pm - \underline{u}^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^\pm + \|b^\pm - \underline{b}^\pm\|_{\rho,3,\sigma}^\pm + \|f - \underline{f}\|_{\rho,\frac{7}{2}} \right). \quad (4.6.12)$$

En combinant les résultats (4.6.6) et (4.6.12), on a bien l'estimation (4.6.3) souhaitée. □

4.6.2 Quelques pistes pour un futur travail de recherche

Reprenons plus en détails les éléments de la preuve du théorème de Cauchy-Kowalevskaya donnée dans [BG78]. On se donne une échelle d'espaces de Banach $(\mathbb{B}_\rho)_{0 < \rho \leq \rho_0}$, dont on notera la norme $\|\cdot\|_\rho$, où $\rho_0 > 0$ est fourni par le Théorème 4.5.1. L'espace \mathbb{B}_ρ correspondra ici à un espace produit :

$$\mathbb{B}_\rho := \left\{ (u^+, u^-, b^+, b^-, f) \mid u^\pm, b^\pm \in B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm) \text{ et } f \in B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2) \right\}, \quad (4.6.13)$$

où σ est fixé une fois pour toutes dans l'intervalle $(0, \sigma_0]$ (on renvoie une fois de plus au Théorème 4.5.1). Contrairement à ce qui a été fait jusqu'ici, on cherchera un front f dans l'espace $B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ au lieu de $B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$; nous expliquerons ce changement ci-après, et donnerons quelques pistes sur la façon dont on pourra adapter les estimations de la pression établies à la Section 4.5.

On définit l'espace de Banach E_a suivant, où le paramètre $a > 0$ sera à choisir suffisamment petit ultérieurement :

$$E_a := \left\{ \dot{w} \in \bigcap_{\rho \in (0, \rho_0)} \mathcal{C}((-a(\rho_0 - \rho), a(\rho_0 - \rho)); \mathbb{B}_\rho) \mid \|\dot{w}\|_a < +\infty \right\}, \quad (4.6.14)$$

où la norme $\|\cdot\|_a$ est définie par :

$$\|\dot{w}\|_a := \sup_{\substack{0 < \rho < \rho_0 \\ |t| < a(\rho_0 - \rho)}} \|\dot{w}(t)\|_\rho (\rho_0 - \rho) \sqrt{1 - \frac{|t|}{a(\rho_0 - \rho)}}. \quad (4.6.15)$$

De la même façon, on définit de façon évidente des espaces de Banach $E_a(\Omega)$, $E_a(\Omega^\pm)$ et $E_a(\mathbb{T}^2)$, dont la définition est analogue à (4.6.14) : il suffit de remplacer l'espace \mathbb{B}_ρ dans (4.6.14) par $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega)$, $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ respectivement. Les normes seront notées $\|\cdot\|_{a,\Omega}$, $\|\cdot\|_{a,\Omega^\pm}$ et $\|\cdot\|_{a,\mathbb{T}^2}$. L'avantage de l'espace E_a (4.6.14) est qu'il autorise une "divergence" de la norme $\|\dot{w}(t)\|_\rho$ en une singularité *intégrable en temps*, ce qui est crucial dans la démonstration de [BG78].

D'autre part, Baouendi et Goulaouic donnent une autre vision de la façon dont on peut résoudre un problème de Cauchy de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = F(w), \\ w(0) = w_0. \end{cases} \quad (4.6.16)$$

En effet, la façon de procéder "usuelle" est de chercher un point fixe de l'application :

$$w \mapsto \left[t \mapsto w_0 + \int_0^t F(w(\tau)) d\tau \right],$$

ce qui donne lieu à la version de [Nis77] pour la démonstration du théorème de Cauchy-Kowalevskaya. Baouendi et Goulaouic ont reformulé le problème de Cauchy (4.6.16) en cherchant un point fixe sur la *dérivée temporelle* de w , notée \dot{w} , c'est-à-dire un point fixe de l'application :

$$\dot{w} \mapsto \left[t \mapsto F\left(w_0 + \int_0^t \dot{w}(\tau) d\tau\right) \right].$$

L'espace E_a défini par (4.6.14) correspondra donc aux *dérivées temporelles* des inconnues (u^\pm, b^\pm, f) ; c'est-à-dire, il faudra interpréter \dot{w} dans (4.6.14) comme étant le vecteur $(\partial_t u^+, \partial_t u^-, \partial_t b^+, \partial_t b^-, \partial_t f)$. Pour ne pas confondre avec les dérivées partielles en temps (qui requièrent de la régularité sur les fonctions manipulées), on notera avec un "point" les fonctions de E_a : les composantes de $\dot{w} \in E_a$ seront notées $(\dot{u}^+, \dot{u}^-, \dot{b}^+, \dot{b}^-, \dot{f})$. À l'inverse, pour désigner les primitives de ces fonctions *nulles à l'instant initial* $t = 0$, on écrira $w = (u^+, u^-, b^+, b^-, f)$.

À présent, nous voudrions également tenir compte des contraintes (4.3.1) que l'on souhaite imposer sur les inconnues (u^\pm, b^\pm, f) . En s'inspirant de ce que l'on a fait au Chapitre 3, nous intégrons ces contraintes dans la définition de l'espace E_a . L'avantage de la preuve de Baouendi et Goulaouic [BG78], par rapport à celle donnée par Nishida [Nis77], est la mise en évidence d'une application contractante sur un sous-ensemble fermé d'un *espace métrique complet* ; c'est pourquoi l'intégration des contraintes (4.3.1) dans l'espace E_a paraît plus adaptée dans ce cas. L'inconnue $(\dot{u}^\pm, \dot{b}^\pm, \dot{f})$ doit donc vérifier :

$$\begin{cases} \nabla \cdot u^\pm = \nabla \cdot b^\pm = 0, & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \dot{f} = u_3^+|_{t=0} + \int_0^t \dot{u}_3^+(\tau) d\tau = u_3^-|_{t=0} + \int_0^t \dot{u}_3^-(\tau) d\tau, & \text{sur } \Gamma, \\ b_3^+ = b_3^- = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_3^\pm = b_3^\pm = 0, & \text{sur } \Gamma_\pm. \end{cases} \quad (4.6.17)$$

On adapte la définition (4.6.14) en posant :

$$\mathbb{E}_a := \left\{ \dot{w} = (\dot{u}^+, \dot{u}^-, \dot{b}^+, \dot{b}^-, \dot{f}) \in E_a \mid (\dot{u}^+, \dot{u}^-, \dot{b}^+, \dot{b}^-, \dot{f}) \text{ vérifie (4.6.17)} \right\}. \quad (4.6.18)$$

Le but est maintenant de démontrer que l'application Υ définie par (4.3.2) est contractante sur \mathbb{E}_a . Nous avons déjà vu à la Section 4.3 que les contraintes (4.6.17) étaient propagées par Υ . La question est maintenant de savoir si Υ est un champ de vecteurs sur \mathbb{E}_a , ce qui pose la question de la *régularité* de $\Upsilon(u^\pm, b^\pm, f)$ lorsqu'on se donne $(\dot{u}^\pm, \dot{b}^\pm, \dot{f})$ dans \mathbb{E}_a . Les mêmes arguments que ceux invoqués au Paragraphe 4.6.1 sur l'estimation de la pression permettent de traiter sans difficulté majeure le cas de la vitesse $u^{\#\pm}$ et du champ magnétique $b^{\#\pm}$ qui auront bien la même régularité que u^\pm et b^\pm . Le point délicat concerne le front f^\sharp , car il n'est défini qu'à travers l'*équation de transport* :

$$f^\sharp = u_3^{\#\pm}|_{t=0} + \int_0^t \dot{u}_3^{\#\pm}(\tau) d\tau, \quad \text{sur } \Gamma.$$

Comme $u_3^{\sharp\pm}$ appartient à $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)$, la trace de $u_3^{\sharp\pm}$ appartient à $B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Par conséquent, nous aurons “seulement” $f^\sharp \in B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ après intégration en temps. L’hypothèse de choisir une front analytique f dans $B_{\rho,\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ semble donc trop restrictive : c’est pour cette raison que nous avons choisi de modifier l’espace fonctionnel associé au front dans la définition (4.6.14).

Quelques estimations clés liées au front.

La version de [BG78] fournit une solution du problème de Cauchy (4.6.16) en cherchant un point fixe sur la dérivée temporelle de l’inconnue w . Dans la définition (4.3.2) de Υ , on commence par définir la vitesse $\dot{u}^{\sharp\pm}$ via le système (4.3.3) pour ensuite définir le front f^\sharp comme solution de la deuxième équation de (4.6.17). Connaissant $\dot{u}^{\sharp\pm}$, on peut donc en déduire \ddot{f}^\sharp , c’est-à-dire la dérivée temporelle *seconde* du front f . L’inconnue que l’on cherchera à construire par une méthode de point fixe, en reprenant les arguments principaux de [BG78], sera donc $(\dot{u}^\pm, \dot{b}^\pm, \dot{f})$. Dans toute la suite de ce paragraphe, on notera $C_0 > 0$ toute constante numérique.

► Estimation d’une dérivée tangentielle du front.

Nous donnons ici une estimation de $\partial_j f(t)$, pour $j \in \{1, 2\}$, dans l’espace $B_{\rho,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ en fonction de “l’inconnue” \ddot{f} dans l’espace $E_a(\mathbb{T}^2)$ introduit précédemment. En supposant que $f|_{t=0}$ et $\partial_t f|_{t=0}$ sont nulles, on peut écrire :

$$\partial_j f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \partial_j \ddot{f}(t_2) dt_2 dt_1.$$

En considérant $\rho \in (0, \rho_0)$ et $|t| < a(\rho_0 - \rho)$, on a alors³, grâce à la propriété de dérivation (2.3.10) :

$$\|\partial_j f(t)\|_{\rho,\frac{5}{2}} \leq \int_0^t \int_0^{t_1} \|\partial_j \ddot{f}(t_2)\|_{\rho} dt_2 dt_1 \leq C_0 \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{\|\ddot{f}(t_2)\|_{\rho(t_2)}}{\rho(t_2) - \rho} dt_2 dt_1, \quad (4.6.19)$$

pour un choix convenable de $\rho(t_2) \in (\rho, \rho_0)$. Conformément à [BG78], on définira :

$$\forall |s| < a(\rho_0 - \rho), \quad \rho(s) := \frac{1}{2} \left(\rho_0 + \rho - \frac{|s|}{a} \right). \quad (4.6.20)$$

Nous obtenons les deux égalités suivantes :

$$\rho(s) - \rho = \frac{\rho_0 - \rho}{2} \left(1 - \frac{|s|}{a(\rho_0 - \rho)} \right), \quad (4.6.21a)$$

$$\rho_0 - \rho(s) = \frac{\rho_0 - \rho}{2} \left(1 + \frac{|s|}{a(\rho_0 - \rho)} \right), \quad (4.6.21b)$$

de sorte que l’on a bien $\rho < \rho(s) < \rho_0$ pour tout $|s| < a(\rho_0 - \rho)$. Grâce à la définition (4.6.15), on peut écrire la majoration :

$$\|\ddot{f}(t_2)\|_{\rho(t_2),\frac{5}{2}} \leq \frac{\|\ddot{f}\|_{a,\mathbb{T}^2}}{\rho_0 - \rho(t_2)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|t_2|}{a(\rho_0 - \rho(t_2))}}}. \quad (4.6.22)$$

Revenant à (4.6.19) et utilisant (4.6.21) et (4.6.22), il vient :

$$\|\partial_j f(t)\|_{\rho,\frac{5}{2}} \leq \frac{4C_0 \|\ddot{f}\|_{a,\mathbb{T}^2}}{(\rho_0 - \rho)^2} \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{dt_2 dt_1}{\left(1 + \frac{t_2}{a(\rho_0 - \rho)}\right) \left(1 - \frac{t_2}{a(\rho_0 - \rho)}\right) \left(1 - \frac{\frac{2t_2}{a(\rho_0 - \rho)}}{1 + \frac{t_2}{a(\rho_0 - \rho)}}\right)^{1/2}}.$$

³Par symétrie, on supposera directement $t \geq 0$ par la suite pour simplifier.

À l'aide des changements de variables $t_2 := a(\rho_0 - \rho)\tau$ et $t_1 := a(\rho_0 - \rho)\sigma$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\partial_j f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} &\leq 4C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2} \int_0^{t/(a(\rho_0 - \rho))} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{(1 + \tau)^{1/2} (1 - \tau)^{3/2}} d\sigma \\ &\leq 4C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2} \int_0^1 \int_0^\sigma \frac{d\tau}{(1 - \tau)^{3/2}} d\sigma \\ &\leq 16C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}. \end{aligned}$$

Les dérivées tangentielles de f vérifient donc l'estimation :

$$\forall |t| < a(\rho_0 - \rho), \quad \|\nabla' f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \leq C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}, \quad (4.6.23)$$

où l'on rappelle que $\nabla' f$ désigne $(\partial_1 f, \partial_2 f)$. En particulier, on constate que les dérivées tangentielles de $f(t)$ s'estiment dans l'espace $B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ *uniformément en temps*.

Un raisonnement analogue (et plus simple), permet également d'estimer $f(t)$ dans $B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ en fonction de la norme $\|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}$ uniformément en temps. On commence par écrire (en supposant que $f|_{t=0}$ et $\partial_t f|_{t=0}$ sont nulles) :

$$f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \ddot{f}(t_2) dt_2 dt_1.$$

Grâce à la définition (4.6.15), on en déduit après quelques estimations élémentaires :

$$\forall |t| < a(\rho_0 - \rho), \quad \|f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \leq C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}. \quad (4.6.24)$$

Comme la norme $\|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}$ contrôle uniformément en temps le front $f(t)$ et ses dérivées tangentielles $\partial_j f(t)$, pour $j = 1, 2$, nous allons pouvoir contrôler $f(t)$ dans $B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ *uniformément en temps*. En effet, il est clair que l'on a la majoration :

$$\|f(t)\|_{H^{\frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)} \leq C_0 \left(\|f(t)\|_{H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)} + \|\nabla' f(t)\|_{H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)} \right). \quad (4.6.25)$$

Ainsi, si l'on suppose $f(t) \in B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ vérifiant $\nabla' f(t) \in B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, alors on a $f(t) \in B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$ en vertu de la Définition 2.3.10 donnée au Chapitre 2. En effet, la majoration (4.6.25) a pour conséquence directe :

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_{\rho, \frac{7}{2}} &\leq C_0 \left(\|f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} + \|\nabla' f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \right) \\ &\leq C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}, \end{aligned} \quad (4.6.26)$$

où on a utilisé (4.6.23) et (4.6.24).

► Estimation de la dérivée normale du redressement du front.

Supposons ici que ρ_0 et σ_0 sont deux paramètres quelconques appartenant à $(0, 1]$ et $(0, \frac{1}{2}]$ respectivement. On se donne $\rho \in (0, \rho_0]$ et $\sigma \in (0, \sigma_0]$. D'après la Proposition 4.4.1, on peut écrire :

$$\|\partial_3 \psi\|_{\rho, 3, \sigma} \leq \|\psi\|_{\rho, 4, \sigma} \leq C_0 \|f\|_{\rho, \frac{7}{2}},$$

où $C_0 > 0$ ne dépend que de σ_0 et ψ désigne le relèvement de f défini par le Lemme 4.2.1. En utilisant (4.6.26), il vient alors :

$$\forall |t| < a(\rho_0 - \rho), \quad \|\partial_3 \psi(t)\|_{\rho, 3, \sigma} \leq C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}. \quad (4.6.27)$$

En choisissant a suffisamment petit, on pourrait être en mesure d'appliquer le Corollaire 4.4.3 afin d'estimer J^{-1} dans $B_{\rho, 3, \sigma}(\Omega)$ sans imposer une petitesse du front f dans $B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Nous laissons ces quelques pistes ouvertes pour un futur travail de recherche.

► **Estimation de deux dérivées tangentielles du front.**

On se donne $i, j \in \{1, 2\}$ et on souhaite estimer $\partial_i \partial_j f$ dans $E_a(\mathbb{T}^2)$ de la même manière que précédemment. Comme ces termes comportent **deux** dérivées, l'estimation de $\partial_i \partial_j f(t)$ dans $B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ va alors faire apparaître après deux intégrations en temps la singularité $\left(1 - \frac{|t|}{a(\rho_0 - \rho)}\right)^{-1/2}$; cette singularité n'est en soi pas “dangereuse” puisqu'on peut la gérer à l'aide de la norme $\|\cdot\|_{a, \mathbb{T}^2}$ (dont la définition est analogue à (4.6.15)). Nous démontrons par la suite l'estimation suivante :

$$\|\partial_i \partial_j f\|_{a, \mathbb{T}^2} \leq C_0 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}. \quad (4.6.28)$$

Similairement à (4.6.19), on commence par écrire :

$$\|\partial_i \partial_j f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \leq C_0 \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{\|\partial_j \ddot{f}(t_2)\|_{\rho(t_2)}}{\rho(t_2) - \rho} dt_2 dt_1, \quad (4.6.29)$$

où $\rho(t_2)$ est donné par (4.6.20). Il reste à estimer une nouvelle fois la dérivée tangentielle $\partial_j \ddot{f}$ dans (4.6.29). On définit pour cela un “deuxième” rayon d'analyticité $\tilde{\rho}(s)$ par :

$$\forall |s| < a(\rho_0 - \rho), \quad \tilde{\rho}(s) := \frac{1}{2} \left(\rho_0 + \rho(s) - \frac{|s|}{a} \right). \quad (4.6.30)$$

On vérifie sans peine que l'on obtient les deux égalités suivantes :

$$\tilde{\rho}(s) - \rho(s) = \frac{\rho_0 - \rho}{4} \left(1 - \frac{|s|}{a(\rho_0 - \rho)} \right), \quad (4.6.31a)$$

$$\rho_0 - \tilde{\rho}(s) = \frac{\rho_0 - \rho}{4} \left(1 + \frac{3|s|}{a(\rho_0 - \rho)} \right), \quad (4.6.31b)$$

de sorte que l'on a bien $\rho < \rho(s) < \tilde{\rho}(s) < \rho_0$ pour tout $|s| < a(\rho_0 - \rho)$. Revenant à (4.6.29), on obtient (en supposant $t \geq 0$ par la suite) :

$$\|\partial_i \partial_j f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \leq C_0^2 \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{\|\ddot{f}(t_2)\|_{\tilde{\rho}(t_2), \frac{5}{2}}}{(\rho(t_2) - \rho)(\tilde{\rho}(t_2) - \rho(t_2))} dt_2 dt_1. \quad (4.6.32)$$

On applique l'inégalité (4.6.22) avec $\tilde{\rho}(t_2)$ dans le rôle de $\rho(t_2)$, ainsi que les égalités (4.6.31), puis après quelques calculs élémentaires, on aboutit à l'estimation suivante :

$$\|\partial_i \partial_j f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \leq \frac{32 C_0^2 a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}}{\rho_0 - \rho} \int_0^{t/a(\rho_0 - \rho)} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{(1 - \tau)^{5/2}} d\sigma.$$

Après deux intégrations en temps, on en déduit :

$$\forall t \in [0, a(\rho_0 - \rho)), \quad \|\partial_i \partial_j f(t)\|_{\rho, \frac{5}{2}} \leq C_0 \frac{a^2 \|\ddot{f}\|_{a, \mathbb{T}^2}}{\rho_0 - \rho} \left(1 - \frac{t}{a(\rho_0 - \rho)} \right)^{-1/2}.$$

Lorsque $t \in (-a(\rho_0 - \rho), 0]$, on obtient une estimation analogue, ce qui conclut quant à la démonstration de l'estimation (4.6.28) annoncée.

L'avantage qui semble se dégager des estimations (4.6.23) et (4.6.28) est la présence du facteur a^2 dans les membres de droite. Intuitivement, dans l'optique de montrer dans un futur travail de recherche que l'application Υ sera contractante sur \mathbb{E}_a , il “suffirait” de choisir le paramètre a suffisamment petit. Néanmoins, quelques points restent encore à éclaircir, comme l'estimation de la pression donnée par le Théorème 4.5.1. En effet, parmi les hypothèses de ce théorème, nous avons considéré un front f petit dans $B_{\rho, \frac{7}{2}}(\mathbb{T}^2)$; il nous faudra donc pouvoir relaxer cette hypothèse en choisissant “seulement” f dans $B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, et utiliser plutôt l'estimation (4.6.27) établie précédemment.

Après l'obtention de solutions analytiques ?

Une fois que l'on aurait démontré l'existence de nappes de tourbillon-courant analytiques, la question naturelle qui se pose concerne le caractère bien posé du système (4.1.2) dans l'échelle de régularité *Sobolev*.

Comme pour le Théorème 3.2.5 établi au Chapitre 3, la solution analytique obtenue serait définie sur un intervalle de temps dépendant de la taille des données initiales dans l'échelle *analytique*. On peut alors avoir un temps d'existence qui se restreint lorsque les données initiales deviennent grandes dans les espaces $B_{\rho_0,3,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho_0,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ (où ρ_0 représente ici le rayon d'analyticité des données initiales).

Le résultat d'estimation *a priori* établi dans [CMST12] serait ensuite un point de départ pour démontrer, par un argument de compacité, l'existence et l'unicité de solutions au problème des nappes de tourbillon-courant lorsque l'on considère à présent des données initiales dans un certain espace de Sobolev.

Pour cela, on approcherait les données initiales (u_0^\pm, b_0^\pm, f_0) (supposées de régularité Sobolev) par une suite de données initiales analytiques $(u_0^{\pm,n}, b_0^{\pm,n}, f_0^n)_{n \geq 0}$, grâce à la densité des espaces $B_{\rho,r,\sigma}$ dans H^r (on renvoie au Théorème 2.3.7 du Chapitre 2). L'unique solution analytique associée $(u^{\pm,n}, b^{\pm,n}, Q^{\pm,n}, f^n)$ possède alors un rayon d'analyticité $\rho^n = \rho^n(t)$, risquant de tendre vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour remédier à cet obstacle, il suffirait d'exhiber une borne inférieure sur les quantités $\rho^n(t)$, ne dépendant **que** d'une **norme Sobolev** de la solution. Ainsi, on pourrait propager l'analyticité des solutions sur un intervalle de temps qui ne dépendrait plus que de la norme Sobolev des solutions. Cette dernière n'explose pas lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, ce qui permet d'avoir une borne inférieure strictement positive sur le temps d'existence des solutions.

Pour des résultats de propagation de l'analyticité des solutions aux équations d'Euler incompressibles, on pourra se référer par exemple à [BB77, AM86] et plus récemment à [LO97, KV09, KV11b, KV11a].



Développements d'optique géométrique
pour le problème des nappes de
tourbillon-courant incompressibles

Ondes de surface pour les nappes de tourbillon-courant

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement qualitatif de la solution du problème des nappes de tourbillon-courant, issue d'une donnée initiale fortement oscillante. Plus précisément, on verra que pour des fréquences bien particulières, la solution présente une structure d'onde de surface, c'est-à-dire qu'elle est localisée près de la frontière libre, oscille aux mêmes fréquences que la donnée initiale, et décroît exponentiellement par rapport à la variable normale à la nappe. Ce phénomène est l'analogie des ondes de Rayleigh en élastodynamique [Lar83, Par85, HIZ95].

L'apparition d'ondes de surface peut s'expliquer en procédant à une analyse modale : on cherche à savoir s'il peut exister des ondes de la forme $\exp(i(\tau t + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3))$, avec $\tau \in \mathbb{C}$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi_3 \in \mathbb{C}$, solutions du système linéarisé des nappes de tourbillon-courant *incompressibles*. Ici, x_3 désigne la coordonnée normale à la nappe. Du fait des contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique, ce système n'est pas un système hyperbolique "standard". En revanche, la méthode employée est analogue à celle utilisée dans le cadre des systèmes hyperboliques [BGS07] : on cherche à vérifier la condition de Kreiss-Lopatinskii *simple* et/ou *uniforme*, afin d'en déduire un critère de stabilité pour les nappes *planes*. L'analyse du problème linéarisé menée par [Syr53, Cha61, Axf62], et plus récemment revisitée par [MTT08], établit en premier lieu un critère nécessaire de stabilité en éliminant le cas $\text{Im } \tau < 0$ pour lequel la solution explose (le problème serait alors *fortement mal posé*). Le cas limite qui nous intéresse est lorsque $\text{Im } \tau = 0$: le problème est alors dit *faiblement bien posé*. Morando, Trakhinin et Trebeschi [MTT08] montrent que ce cas est possible si et seulement si $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ est racine du déterminant de Lopatinskii. En particulier, seule la condition de Kreiss-Lopatinskii *faible* est vérifiée, et il n'existe pas de nappe plane pour laquelle le déterminant de Lopatinskii ne s'annule pas lorsque $\text{Im } \tau \leq 0$: la condition de Lopatinskii *uniforme* n'est jamais satisfaite (on renvoie à [MTT08] pour les détails complets, et à la Section 5.3 de ce chapitre).

Les fréquences $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$, racines du déterminant de Lopatinskii, peuvent se paramétrer par (ξ_1, ξ_2) , c'est-à-dire par une équation de la forme $\tau = \tau(\xi_1, \xi_2)$. À (ξ_1, ξ_2) fixé, il existe exactement deux racines *simples* $\tau_{\pm} = \tau_{\pm}(\xi_1, \xi_2)$, appelées *fréquences elliptiques*, car la fréquence normale correspondante ξ_3 est alors imaginaire pure ; ces fréquences vont être à l'origine de la formation d'ondes de surface, correspondant au cas $\text{Im } \xi_3 \geq 0$ (selon le signe de x_3), pour lesquelles la solution va décroître exponentiellement par rapport à x_3 (voir Section 5.4). Dans d'autres problèmes d'hydrodynamique, tels que les ondes de

détonation étudiées par Majda et Rosales [MR83, MR84], les nappes de tourbillon compressibles étudiées par Artola et Majda [AM87, AM89] ou les ondes de choc étudiées par Serre [Ser01], le cas $\xi_3 \in \mathbb{R}$ se présente, et on parle alors d'ondes "internes", qui se propagent dans tout le domaine (*bulk waves*). Ce dernier cas ne se présente pas pour les nappes de tourbillon-courant en MHD incompressible.

Commençons par réécrire le système que l'on étudie (dorénavant, pour se conformer aux notations de [AH03], on notera ψ le front associé à la nappe) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^\pm + (u^\pm \cdot \nabla) u^\pm - (H^\pm \cdot \nabla) H^\pm + \nabla q^\pm = 0 & \text{dans } \Omega^\pm(t), \quad t \in [0, T], \\ \partial_t H^\pm + (u^\pm \cdot \nabla) H^\pm - (H^\pm \cdot \nabla) u^\pm = 0 & \text{dans } \Omega^\pm(t), \quad t \in [0, T], \\ \nabla \cdot u^\pm(t) = \nabla \cdot H^\pm(t) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm(t), \quad t \in [0, T], \\ \partial_t \psi = u^\pm \cdot N, \quad H^\pm \cdot N = 0, \quad [q] = 0 & \text{sur } \Gamma(t), \quad t \in [0, T], \\ u_3^\pm = H_3^\pm = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (5.0.1)$$

On rappelle que l'on avait noté $\Omega^\pm(t) = \{(x', x_3) \in \mathbb{T}^2 \times (-1, 1) \mid x_3 \gtrless \psi(t, x')\}$ les domaines "supérieur" et "inférieur", $\Gamma(t) = \{x_3 = \psi(t, x')\}$ la frontière libre, ainsi que $N = (-\partial_1 \psi, -\partial_2 \psi, 1)$ un vecteur normal à la nappe (voir la Figure 5.1). Les bords fixes Γ_\pm sont définis par $\Gamma_\pm := \{x_3 = \pm 1\}$.

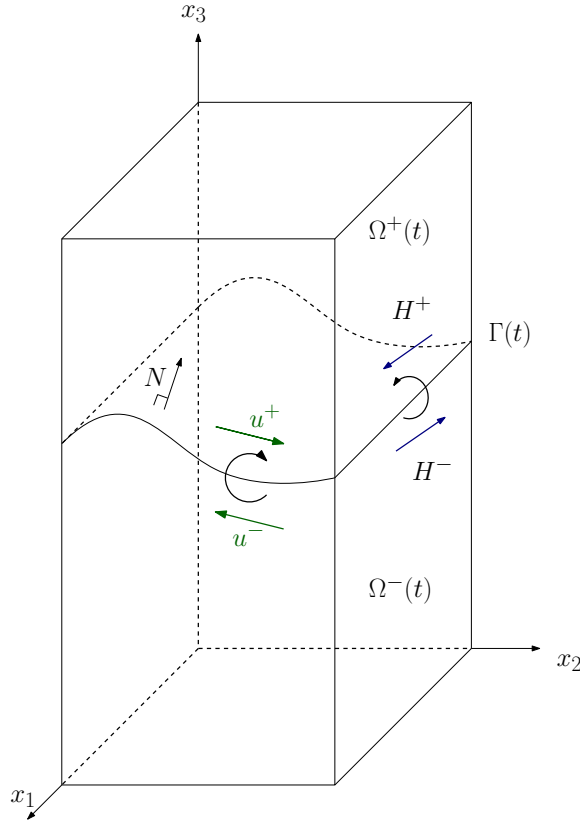


FIGURE 5.1 : Schéma d'une nappe de tourbillon-courant

Pour des raisons pratiques, on réécrit sous forme conservative les équations du système (5.0.1) posées dans $\Omega^\pm(t)$. Pour cela, posons :

$$U := (u_1, u_2, u_3, H_1, H_2, H_3, q) \in \mathbb{R}^7,$$

ainsi que

$$f_1(U) := \begin{bmatrix} u_1^2 - H_1^2 + q \\ u_1 u_2 - H_1 H_2 \\ u_1 u_3 - H_1 H_3 \\ 0 \\ u_1 H_2 - H_1 u_2 \\ u_1 H_3 - H_1 u_3 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad f_2(U) := \begin{bmatrix} u_2 u_1 - H_2 H_1 \\ u_2^2 - H_2^2 + q \\ u_2 u_3 - H_2 H_3 \\ u_2 H_1 - H_2 u_1 \\ 0 \\ u_2 H_3 - H_2 u_3 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad f_3(U) := \begin{bmatrix} u_3 u_1 - H_3 H_1 \\ u_3 u_2 - H_3 H_2 \\ u_3^2 - H_3^2 + q \\ u_3 H_1 - H_3 u_1 \\ u_3 H_2 - H_3 u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (5.0.2)$$

Dans tout ce chapitre, nous manipulerons les vecteurs aussi bien en ligne qu'en colonne pour alléger l'écriture. On pose également

$$A_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_7(\mathbb{R}). \quad (5.0.3)$$

Alors les deux premières équations d'évolution de (5.0.1), ainsi que la contrainte de divergence nulle sur la vitesse (qui, rappelons-le, permet de déterminer la pression totale (q^+, q^-) *via* la résolution d'un problème de Laplace), se mettent sous la forme :

$$A_0 \partial_t U^\pm + \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} f_j(U^\pm) = 0, \quad x \in \Omega^\pm(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.0.4)$$

Du fait de son caractère non-évolutif, nous choisissons de ne pas inclure dans le système (5.0.4) la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique, et de la traiter à part :

$$\nabla \cdot H^\pm(t, x) = 0, \quad x \in \Omega^\pm(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.0.5)$$

Pour la solution *exacte* du système des nappes de tourbillon-courant (5.0.1) (avec des données initiales adéquates), la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique (5.0.5) n'est qu'une restriction sur la donnée initiale, comme nous l'avons déjà vu aux Chapitres 3 et 4. Elle peut être omise du système (5.0.1), ce qui ramène l'étude au système "réduit" (5.0.4) avec les conditions aux limites et de saut de (5.0.1). Toutefois, dans ce chapitre, nous garderons la contrainte (5.0.5), car nous ne prescrivons pas de données initiales pour (u^\pm, H^\pm, q^\pm) . Nous reviendrons plus en détail sur ce fait dans la Section 5.1 ci-après.

5.1 Choix des paramètres et des conditions initiales

En partant d'une condition initiale fortement oscillante (en $\frac{1}{\varepsilon}$), on va chercher à décrire asymptotiquement la solution exacte $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ de (5.0.1) en la cherchant sous la forme d'un développement asymptotique en puissances de ε , appelé développement BKW (pour Brillouin-Kramers-Wentzel). On cherchera en particulier à démontrer que la solution exacte $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ de (5.0.1) issue d'une telle donnée initiale oscillante existe sur un intervalle de temps $[0, T]$ indépendant de $\varepsilon > 0$ (suffisamment petit).

Choix de la nappe plane de référence. On commence par se fixer une nappe plane $(U^{0,\pm}, \psi^1)$ de référence, solution constante par morceaux de (5.0.1), donnée par

$$U^{0,\pm} := (u_1^{0,\pm}, u_2^{0,\pm}, 0, H_1^{0,\pm}, H_2^{0,\pm}, 0, 0), \quad \text{avec} \quad \psi^1 \equiv 0. \quad (5.1.1)$$

Remarquons que l'on a pris $q^{0,+} = q^{0,-} = 0$, ce qui correspond à la solution constante de (5.0.1) dont la pression q^0 est à moyenne nulle (*i.e.* $\int_{\Omega^+} q^{0,+} + \int_{\Omega^-} q^{0,-} = 0$). On suppose que cette nappe plane satisfait l'hypothèse de stabilité suivante :

$$\left| H^{0,+} \times [u^0] \right|^2 + \left| H^{0,-} \times [u^0] \right|^2 < 2 \left| H^{0,+} \times H^{0,-} \right|^2, \quad (H1)$$

où l'on a noté $[u^0] := u^{0,+} - u^{0,-}$ le saut de u^0 à travers l'interface plane $\{y_3 = 0\}$, et \times le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 . Cette condition de "stabilité" a été mise en évidence dans [Syr53, Cha61, Axf62], et plus récemment dans [MTT08]. Nous renvoyons au Paragraphe 5.3.2 ci-après pour plus de détails.

Choix des fréquences spatiale et temporelle. Nous commençons par donner quelques notations : le tore 2π -périodique $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sera noté \mathbb{T} , la variable spatiale tangentielle sera notée $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$, le vecteur $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et le réel τ seront respectivement les fréquences spatiale et temporelle, qui définissent la phase plane $\tau t + \xi' \cdot x'$ (où " \cdot " désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^2). La situation à laquelle nous nous intéresserons correspond au cas où $\xi' \neq 0$; par conséquent, on supposera sans perte de généralité que ξ' est normé : $|\xi'| := \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1$.

On définit également les quantités

$$a^\pm := \xi_1 u_1^{0,\pm} + \xi_2 u_2^{0,\pm} \quad \text{et} \quad b^\pm := \xi_1 H_1^{0,\pm} + \xi_2 H_2^{0,\pm}. \quad (5.1.2)$$

Étant donnée $v = v(x', \theta)$ une fonction 2π -périodique par rapport à $(x', \theta) \in \mathbb{T}^3$, on voudra assurer la 2π -périodicité de fonctions du type $v_\varepsilon(x') := v(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon})$. Pour ce faire, nous imposons une condition supplémentaire sur la fréquence ξ' . Par exemple, si $\xi_1 \neq 0$, on supposera $\frac{\xi_2}{\xi_1} \in \mathbb{Q}$. Autrement dit, on demande à ξ' d'être de la forme :

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}(p, q) \quad \text{avec} \quad (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}. \quad (\text{H2})$$

Ainsi, en considérant la suite $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ définie par

$$\varepsilon_j := \frac{1}{j \sqrt{p^2 + q^2}}, \quad j \geq 1, \quad (5.1.3)$$

qui tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$, nous aurons $\frac{\xi'}{\varepsilon_j} \in \mathbb{Z}^2$, ce qui permet d'affirmer que la fonction v_{ε_j} définie précédemment est 2π -périodique par rapport à x' . Dans ce qui suit, ε désignera un petit paramètre dans l'intervalle $(0, 1]$, qu'il faudra comprendre comme étant un élément de la suite $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$.

Nous ajoutons une hypothèse pratique sur la fréquence ξ' , afin de satisfaire la condition technique correspondant au cas (C1) évoqué dans l'Annexe A.1 (voir également la note en bas de page 140). Cette dernière condition sera satisfaite dès lors que l'on choisit ξ' telle que

$$\begin{cases} |a^+ - a^-| \neq |b^+ - b^-|, \\ |a^+ - a^-| \neq |b^+ + b^-|. \end{cases} \quad (\text{H3})$$

Autrement dit, si l'on définit les vecteurs de \mathbb{R}^2 suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &:= (u_1^{0,+} - u_1^{0,-}, u_2^{0,+} - u_2^{0,-}), \\ \mathbf{h} &:= (H_1^{0,+} - H_1^{0,-}, H_2^{0,+} - H_2^{0,-}), \\ \mathbf{k} &:= (H_1^{0,+} + H_1^{0,-}, H_2^{0,+} + H_2^{0,-}), \end{aligned}$$

on demande à la fréquence ξ' de n'être orthogonale à aucun des quatre vecteurs $\mathbf{v} - \mathbf{h}$, $\mathbf{v} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} + \mathbf{h}$ et $\mathbf{v} + \mathbf{k}$. Ces quatre vecteurs sont non nuls, en vertu de l'hypothèse (H1). En effet, si par exemple $\mathbf{v} - \mathbf{h} = 0$, alors on aurait $[u] = H^+ - H^-$. En injectant cette égalité dans (H1), on obtiendrait

$$2|H^+ \times H^-|^2 < 2|H^+ \times H^-|^2,$$

ce qui est évidemment absurde. Le choix d'une fréquence ξ' vérifiant (H2), (H3) est possible car on enlève au plus quatre directions du cercle unité \mathbb{S}^1 auquel appartient ξ' .

La fréquence temporelle $\tau \in \mathbb{R}$ sera choisie en fonction de ξ' comme étant une racine du déterminant de Lopatinskii défini par l'équation (5.3.16) ci-après, autrement dit satisfaisant l'égalité

$$(\tau + a^+)^2 + (\tau + a^-)^2 = (b^+)^2 + (b^-)^2. \quad (\text{H4})$$

Muni d'une telle fréquence (τ, ξ_1, ξ_2) , on pourra également supposer sans perte de généralité que $\tau \neq 0$ grâce à l'invariance galiléenne du système (5.0.1) : on renvoie à l'Annexe A.1 pour les détails de la discussion. On insiste sur le fait que les hypothèses (H2), (H3), (H4), ainsi que $\tau \neq 0$, permettent d'assurer en particulier la condition $(b^\pm)^2 \neq (\tau + a^\pm)^2$, ce qui sera crucial lors de l'étude du problème dual au début du Paragraphe 5.4.3. On explique d'où provient la condition $\tau \neq 0$ dans l'Annexe A.1.

Dès lors, on se fixe une fréquence $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ comme ci-dessus, *i.e.* vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4), et $\tau \neq 0$.

Choix des données initiales. Les données initiales pour (5.0.1) sont définies comme étant des petites perturbations hautement oscillantes de la nappe plane $(U^{0,\pm}, \psi^1)$. On définit

$$\psi_\varepsilon(t=0, x') := \varepsilon^2 \psi_0^2 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right), \quad (\text{5.1.4})$$

où $\psi_0^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ est supposée à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable $\theta \in \mathbb{T}$. On rappelle que $\varepsilon \in (0, 1]$ sera en fait un élément de la suite $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ définie en (5.1.3). Plus généralement, nous pourrions prendre des profils $\psi_0^2, \psi_0^3, \psi_0^4, \dots$ et considérer la donnée initiale :

$$\psi_\varepsilon(t=0, x') = \varepsilon^2 \psi_0^2 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^3 \psi_0^3 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^4 \psi_0^4 \left(x', \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \dots,$$

mais cela n'introduirait aucune difficulté supplémentaire ; on restreint donc notre étude au cas de la donnée initiale (5.1.4) pour alléger quelques passages dans l'analyse ci-dessous.

Par ailleurs, pour assurer que la nappe initiale $\psi_\varepsilon|_{t=0}$ soit bien à valeurs dans l'intervalle $(-1, 1)$, nous restreindrons si besoin ε . Par exemple, en prenant $\varepsilon \leq (2\|\psi_0^2\|_{L^\infty})^{-1/2}$, nous aurons

$$1 - \varepsilon^2 \psi_0^2 \geq \frac{1}{2},$$

d'où $\psi_\varepsilon|_{t=0} \leq \frac{1}{2}$. De même, nous aurons $\psi_\varepsilon|_{t=0} \geq -\frac{1}{2}$.

Poursuivant l'analyse de [AH03], on cherche un développement asymptotique de la solution exacte $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ de (5.0.1) comme une petite perturbation hautement oscillante d'une nappe plane, c'est-à-dire de la forme

$$U_\varepsilon^\pm(t, x) \sim U^{0,\pm} + \sum_{m \geq 1} \varepsilon^m U^{m,\pm} \left(t, x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'), \frac{x_3 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \quad (\text{5.1.5})$$

$$\psi_\varepsilon(t, x') \sim \sum_{m \geq 2} \varepsilon^m \psi^m \left(t, x', \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \quad (\text{5.1.6})$$

On demande à ψ_ε de coïncider avec la fonction (5.1.4) à l'instant initial $t = 0$. Autrement dit, on impose pour tout $(y', \theta) \in \mathbb{T}^3$:

$$\psi^2(0, y', \theta) = \psi_0^2(y', \theta) \quad \text{et} \quad \forall m \geq 3, \quad \psi^m(0, y', \theta) = 0. \quad (\text{5.1.7})$$

Dans (5.1.5), les profils $U^{m,\pm}$ sont des fonctions de 6 variables, notées $(t, y', y_3, Y_3, \theta)$ dans toute la suite. Les variables dites *lentes* sont $(t, y', y_3) : t \in [0, T]$ est la variable de temps, $y' \in \mathbb{T}^2$ est la variable spatiale tangentielle coïncidant avec x' , et $y_3 = x_3 - \psi_\varepsilon(t, x')$ est la variable normale, qui permet de redresser la

surface libre du problème (5.0.1). Les variables dites *rapides* sont $(Y_3, \theta) : Y_3 = \frac{y_3}{\varepsilon} \in \mathbb{R}_\pm$ est la variable normale rapide, qui traduira la décroissance exponentielle de l'onde de surface, et $\theta = \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \in \mathbb{T}$ est la variable tangentielle rapide.

L'un des premiers enjeux sera de déterminer les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ dans (5.1.5), (5.1.6). Pour ce faire, nous aurons notamment besoin des deux contraintes de divergence nulle sur la vitesse u_ε^\pm et le champ magnétique H_ε^\pm . Bien que la condition $\nabla \cdot H_\varepsilon^\pm = 0$ soit propagée par les solutions du système (5.0.4) (on se référera par exemple à [Tra05, Tra09]), il n'est pas clair que les contraintes correspondantes régissant les *profils* $H^{m,\pm}$ associés au champ magnétique H_ε^\pm soient propagées *une à une*. C'est pour cela que nous avons choisi de garder la contrainte de divergence nulle (5.0.5) sur H_ε^\pm , en plus du système (5.0.4).

Il est important de noter que la donnée initiale associée à U_ε^\pm *n'est pas arbitraire*. Tous les profils $U^{m,\pm}$ seront déterminés pour des temps $t \in [0, T]$. En particulier, on calculera la donnée initiale pour U_ε^\pm *en même temps* que la solution approchée en temps $t > 0$. Ceci restreint donc le choix des données initiales pour U_ε^\pm ; en revanche, le choix de ψ_0^2 est *libre*. En résumé, nous disposerons d'une solution approchée $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ s'exprimant sous la forme suivante (nous restons volontairement imprécis en omettant les variables; les solutions approchées seront définies rigoureusement ci-après, voir (5.1.8)) :

$$\begin{aligned} U_{app,\varepsilon}^{M,\pm} &:= U^{0,\pm} + \varepsilon U^{1,\pm} + \varepsilon^2 U^{2,\pm} + \dots + \varepsilon^M U^{M,\pm}, \\ \psi_{app,\varepsilon}^M &:= \varepsilon^2 \psi^2 + \dots + \varepsilon^{M+1} \psi^{M+1}. \end{aligned}$$

La donnée initiale "exacte" pour le système (5.0.1) sera de la forme

$$U_\varepsilon^\pm|_{t=0} := (U_{app,\varepsilon}^{M,\pm})|_{t=0} + \mathcal{U}_\varepsilon^{M,\pm},$$

où $\mathcal{U}_\varepsilon^{M,\pm}$ sera un terme correcteur permettant d'assurer les contraintes de divergence nulle pour la vitesse initiale $u_\varepsilon^\pm|_{t=0}$ et le champ magnétique initial $H_\varepsilon^\pm|_{t=0}$. L'entier M sera quant à lui fixé suffisamment grand.

Le scaling (5.1.5), (5.1.6) que l'on choisit ici est analogue à celui de l'optique géométrique faiblement non-linéaire du problème de Cauchy que l'on peut par exemple trouver dans [Rau12, p.259], [Mar10] (pour des ondes de surface dans un domaine fixe en dimension 2 d'espace), [Les07] ou encore [JMR93, JMR95]. Remarquons que le développement de ψ_ε commence à l'ordre 2 en ε , étant donné que dans les équations du système (5.0.1), le *gradient* de ψ_ε est au même niveau de régularité que la trace de U_ε^\pm sur $\Gamma(t)$. Nous pouvons noter la similitude avec l'étude des chocs uniformément stables menée par Williams [Wil99], où le profil ψ^1 (nul dans notre cas) ne dépend pas des variables rapides. Citons également Coulombel et Williams [CW16] qui traitent le cas des équations de l'élasticité non-linéaire (système d'ordre 2), entraînant également un décalage d'indices dans leur scaling. Du fait du décalage d'une puissance de ε dans le développement (5.1.6) par rapport au développement (5.1.5), les fonctions $U_\varepsilon^\pm - U^{0,\pm}$ et $\nabla \psi_\varepsilon$ sont alors d'ordre ε dans L^∞ et oscillent en $\frac{1}{\varepsilon}$.

Solutions approchées. Une fois construits les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$, nous disposerons d'une famille de solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)_{M \geq 1}$ données par

$$\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x') := \sum_{m=2}^{M+1} \varepsilon^m \psi^m \left(t, x', \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right), \quad (5.1.8a)$$

$$U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}(t, x) := U^{0,\pm} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m U^{m,\pm} \left(t, x', x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), \frac{x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \quad (5.1.8b)$$

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la donnée initiale pour U_ε^\pm (qui est "*implicite*") correspondra à la trace de la solution approchée $U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}$ en $t = 0$ (plus un terme correcteur pour assurer les contraintes

de divergence nulle). Cette donnée initiale s'écrit alors :

$$U_\varepsilon^\pm|_{t=0} := U^{0,\pm} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m U^{m,\pm} \left(0, x', x_3 - \psi_\varepsilon(0, x'), \frac{x_3 - \psi_\varepsilon(0, x')}{\varepsilon}, \frac{\xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{U}_\varepsilon^{M,\pm}, \quad (5.1.9)$$

car, par construction, la donnée initiale $\psi_{app,\varepsilon}^M|_{t=0}$ est *indépendante* de M (voir (5.1.4)).

Remarque. En fait, comme on peut le voir dans la définition (5.1.8b), les profils $(U^{m,+})_{1 \leq m \leq M}$ doivent être définis sur un intervalle légèrement plus grand que $[0, 1]$ par rapport à la variable normale lente y_3 . En effet, afin que les solutions approchées $U_{app,\varepsilon}^{M,+}$ fassent sens *quel que soit* x_3 dans le domaine

$$\Omega_{app,\varepsilon}^{M,+}(t) := \{ \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x') < x_3 < 1 \},$$

il suffira de définir les profils $U^{m,+}$ sur un intervalle “épaissi” par rapport à y_3 . Pour ce faire, nous chercherons d'abord à déterminer les profils $U^{m,+}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ par rapport à y_3 ; ensuite, nous choisirons par commodité d'étendre ces profils à tout \mathbb{R}_+ par rapport à y_3 . Cette démarche s'applique de façon tout à fait analogue pour les profils $U^{m,-}$ que l'on prolongera à tout \mathbb{R}_- par rapport à y_3 .

Démarche. Nous procéderons par raisonnement dit “d'analyse-synthèse”, et supposerons qu'il existe de tels développements asymptotiques (5.1.5) et (5.1.6) pour la solution exacte $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ de (5.0.1), avec des profils correspondants $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ suffisamment réguliers, que l'on cherchera à déterminer. Pour construire ces profils, on injectera ces développements dans le système (5.0.1), on procédera à des développements de Taylor, puis en identifiant les puissances de ε , on en déduira un ensemble d'équations que doivent satisfaire ces profils, appelé *cascade d'équations BKW*. Le but sera alors de montrer qu'il est possible de construire une telle suite de profils, ce qui conduira aux solutions approchées (5.1.8). Il restera dans un dernier temps à justifier la *stabilité* de ces solutions approchées, afin de montrer qu'elles sont “proches” d'une solution exacte de (5.0.1) dans une topologie convenable.

5.2 Résultats principaux

5.2.1 Le cadre fonctionnel

Les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons construire les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ intervenant dans (5.1.5) et (5.1.6) sont inspirés de ceux introduits par Marcou [Mar10] et Lescarret [Les07]. Le temps $T > 0$ intervenant ci-après est un temps qui sera fixé au Théorème 5.2.2, et qui ne dépendra que d'une norme Sobolev *fixée* du profil initial ψ_0^2 .

Définition 5.2.1

L'espace \underline{S}^\pm désigne l'ensemble des fonctions appartenant à $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm)$, où I_+ (resp. I_-) désigne l'intervalle $(0, 1)$ (resp. $(-1, 0)$). Les fonctions de \underline{S}^\pm ne dépendent que des variables lentes (t, y) .

L'espace S_\star^\pm désigne l'ensemble des fonctions appartenant à $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm \times \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{T})$, 2π -périodiques par rapport à la dernière variable θ , et qui décroissent exponentiellement vers zéro lorsque $Y_3 \rightarrow \pm\infty$, ainsi que toutes leurs dérivées :

$$\exists \delta > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^6, \quad \exists C_\alpha > 0, \quad \forall Y_3 \geq 0, \quad \|\partial^\alpha u_\star^\pm(\cdot, \cdot, Y_3, \cdot)\|_{L_{t,y,\theta}^\infty} \leq C_\alpha e^{\mp \delta Y_3}.$$

Les fonctions de S_\star^\pm dépendent des variables lentes (t, y) ainsi que des variables rapides (Y_3, θ) .

Les profils $U^{m,\pm}$, pour $m \geq 1$, dans le développement (5.1.5) seront cherchés dans l'espace fonctionnel $S^\pm := \underline{S}^\pm \oplus S_\star^\pm$ (la somme est bien directe, cela se vérifie sans peine en utilisant la décroissance exponentielle par rapport à Y_3 des fonctions de S_\star^\pm). Les profils ψ^m , pour $m \geq 2$, seront quant à eux cherchés dans l'espace fonctionnel $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$.

Notations. Les fonctions de S^\pm seront décomposées en modes de Fourier par rapport à θ comme suit :

$$U^\pm(t, y, Y_3, \theta) = \widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, 0) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, k) e^{ik\theta},$$

où $\widehat{U}^\pm(k)$ désigne le k -ième coefficient de Fourier de U^\pm :

$$\widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} U^\pm(t, y, Y_3, \theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Compte tenu de la définition de l'espace S^\pm , on peut décomposer également U^\pm comme suit :

$$U^\pm(t, y, Y_3, \theta) =: \underbrace{\underline{U}^\pm(t, y)}_{\in \underline{S}^\pm} + \underbrace{U_\star^\pm(t, y, Y_3, \theta)}_{\in S_\star^\pm}. \quad (5.2.1)$$

Dans ce cas, nous aurons d'une part la moyenne de U^\pm sur le tore \mathbb{T} donnée par

$$\widehat{U}^\pm(0) =: \underline{U}^\pm + U^\pm \in \underline{S}^\pm + S_\star^\pm,$$

où \underline{U}^\pm (resp. U^\pm) sera appelée *moyenne lente* (resp. *moyenne rapide*). D'autre part, U_\star^\pm correspond à la superposition des modes de Fourier non nuls :

$$U_\star^\pm := \sum_{k \neq 0} \widehat{U}^\pm(k) e^{ik\theta} \in S_\star^\pm.$$

Nous aurons besoin de décomposer la moyenne rapide U^\pm comme suit :

$$\underline{U}^\pm = \Pi \underline{U}^\pm + (I - \Pi) \underline{U}^\pm,$$

où $\Pi = \text{diag}(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Ker } A_3^\pm$, la matrice A_3^\pm étant définie par (5.3.3) ci-après. En d'autres termes, si l'on note $U^\pm = (u^\pm, H^\pm, q^\pm)$, alors le vecteur

$$\Pi U^\pm = (u_1^\pm, u_2^\pm, 0, H_1^\pm, H_2^\pm, 0, 0)$$

consiste en les composantes *tangentielles* associées à la vitesse u^\pm et au champ magnétique H^\pm .

Nous verrons aux Paragraphes 5.4.2 et 5.5.6 ci-après que l'on possède deux degrés de liberté sur la moyenne des profils $(U^{m,\pm})_{m \geq 1}$ (*i.e.* sur les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m,\pm}(0)$) : nous choisirons d'imposer à l'instant initial $t = 0$ les conditions suivantes :

$$\forall m \geq 1, \quad \Pi \underline{U}^{m,\pm}(t=0) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \Pi U^{m,\pm}(t=0) \equiv 0. \quad (5.2.2)$$

Ces choix ont pour but de simplifier la construction des profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ en se concentrant sur la partie "onde de surface" (*i.e.* la composante dans l'espace S_\star^\pm des profils $U^{m,\pm}$).

5.2.2 La cascade BKW

Dans la Section 5.5, nous verrons que les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ doivent satisfaire un ensemble d'équations, appelé cascade d'équations BKW. Celle-ci s'écrit :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{1,\pm} = 0, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ B^+U^{1,+} + B^-U^{1,-} - \partial_\theta \psi^2 (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = 0, & y_3 = Y_3 = 0, \end{cases} \quad (5.2.3a)$$

et pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ B^+U^{m+1,+} + B^-U^{m+1,-} - \partial_\theta \psi^{m+2} (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = G^{m,+} + G^{m,-}, & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.2.3b)$$

On renvoie à (5.4.9), (5.4.2) et (5.4.3) pour les définitions de l'opérateur différentiel $L_f^\pm(\partial)$, les matrices de bord B^+, B^- et les vecteurs $\mathfrak{b}^+, \mathfrak{b}^-$. Les termes sources $F^{m,\pm}$ et $G^{m,\pm}$ dans (5.2.3b) dépendent des profils $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$. Ils sont donnés par les formules (5.5.10) et (5.5.16) ci-après.

Aux systèmes donnés par (5.2.3) s'ajoute également la cascade d'équations provenant de la contrainte de divergence nulle (5.0.5) sur le champ magnétique H_ε^\pm . Il n'est pas nécessaire que l'on explicite ces équations, étant donné la symétrie des rôles joués par u_ε^\pm et H_ε^\pm . Ainsi, dans la dernière composante de l'équation $L^\pm(\partial)U^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}$, pour $m \geq 0$, il suffira dans les calculs de remplacer u par H dans les membres de gauche et de droite lorsqu'on voudra assurer la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique H_ε^\pm .

Dans les Sections 5.4 et 5.5, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème 5.2.2

Soient une nappe plane de référence $U^{0,\pm}$ satisfaisant (H1), une fréquence spatiale ξ' vérifiant (H2), (H3) et une fréquence temporelle $\tau \neq 0$ vérifiant (H4).

Soit $\psi_0^2 \in H^\infty(\mathbb{T}_y^2 \times \mathbb{T}_\theta)$ à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable θ , et définissant la perturbation initiale hautement oscillante (5.1.4) du front.

Alors il existe un temps $T > 0$, ne dépendant que d'une norme Sobolev fixée de ψ_0^2 , ainsi que des profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{1 \leq m \leq 6}$ appartenant à l'espace $S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$, vérifiant la cascade BKW (5.2.3) adjointe des conditions initiales (5.1.7) et (5.2.2) ; ces profils satisfont également les contraintes (5.5.12b) sur la divergence du champ magnétique et les conditions (5.5.24), (5.5.25) sur les bords fixes Γ_+ et Γ_- .

Ces profils peuvent être choisis tels que, pour tout entier $M \in \{1, \dots, 6\}$, la solution approchée $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ définie par (5.1.8) vérifie les propriétés suivantes :

- (i) le profil principal $U^{1,\pm}$ et le premier correcteur $U^{2,\pm}$ sont purement localisés près de la surface libre, i.e. $U^{1,\pm}, U^{2,\pm} \in S_\star^\pm$;
- (ii) les profils $(\psi^m)_{2 \leq m \leq 7}$ associés au front sont à moyenne nulle par rapport à θ .

Remarques. Nous possédons un premier degré de liberté sur le choix de la donnée initiale $\psi_\varepsilon|_{t=0}$: nous choisirons celle-ci indépendante de l'entier M qui définit les solutions approchées que l'on veut construire, et supposons ψ_0^2 à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable. En revanche, la donnée initiale (5.1.9) pour la solution exacte U_ε^\pm dépendra de l'entier M , car tous les profils $U^{m,\pm}$, pour $m \geq 1$, sont déterminés pour des temps $t \in [0, T]$ (donc y compris en $t = 0$), ce qui ne laisse plus le choix sur la donnée initiale que l'on peut considérer. Toutefois, un deuxième degré de liberté persiste sur le choix des moyennes lentes tangentielles initiales $\Pi \underline{U}^{m,\pm}(t = 0)$, pour $m \geq 1$, ainsi que sur les moyennes rapides tangentielles initiales $\Pi \underline{U}^{m,\pm}(t = 0)$, pour $m \geq 1$. Lors de la détermination de la moyenne de $U^{1,\pm}$ au

Paragraphe 5.4.2, et plus généralement des moyennes des correcteurs $(U^{m,\pm})_{m \geq 2}$ au Paragraphe 5.5.6, nous choisirons une donnée initiale satisfaisant l'hypothèse simplificatrice (5.2.2).

La trace du profil principal $U^{1,\pm}$ sur $\{y_3 = 0\}$ est déterminée de façon *unique* dès lors que l'on souhaite construire une solution approchée dont les profils satisfont la cascade BKW (5.2.3). En revanche, l'expression de ce même profil pour $y_3 \geq 0$ quelconque n'est pas unique, et dépend d'un choix *arbitraire* d'une fonction de relèvement χ (introduite au Paragraphe 5.4.4 ci-après). Cette procédure de redressement n'est pas nouvelle, et a déjà été utilisée auparavant dans les travaux de [Mét04, §4.2], [Les07], [Mar10] et [Ben14] à titre d'exemples.

À partir du *second correcteur* $U^{3,\pm}$, on observe le phénomène de *rectification* mis en évidence par Marcou [Mar10, Mar11] : la composante de $U^{3,\pm}$ dans \underline{S}^\pm est **non nulle** en général. Ainsi, même avec un profil principal localisé *près de la surface libre*, les correcteurs $(U^{m,\pm})_{m \geq 3}$ auront une composante dans \underline{S}^\pm non nulle dans *tout le domaine*. Ce résultat est formulé de manière précise dans la Proposition 5.5.3 au Paragraphe 5.5.7 ci-dessous, dans lequel nous donnons également quelques commentaires plus approfondis sur ce phénomène, en comparant nos résultats à ceux de Marcou.

Le Théorème 5.2.2 démontre l'existence d'un nombre *fini* de profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})$ permettant de définir les solutions approchées (5.1.8). Cette obstruction semble purement technique, et pourrait provenir du choix de l'espace fonctionnel donné par la Définition 5.2.1. L'obtention d'une *suite* de profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ vérifiant la cascade BKW (5.2.3) pourra constituer une piste de recherche future visant à améliorer le résultat du Théorème 5.2.2.

Plan. Dans un premier temps, on s'intéresse au profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ et on généralise, en dimension trois d'espace, l'analyse faite par Ali et Hunter [AH03] en traitant des profils auxquels on a ajouté une dépendance en les variables lentes (t, y) . On verra dans la Section 5.3 que le problème satisfait par $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ n'est rien d'autre que le linéarisé du système (5.0.1) autour de la nappe plane de référence $(U^{0,\pm}, \psi^1)$. Nous étudierons en détail ce système et rappellerons les propriétés des fréquences elliptiques (τ, ξ_1, ξ_2) que l'on considère ici. Une fois la fréquence elliptique fixée, vérifiant les hypothèses (H2), (H3), (H4), nous verrons au Paragraphe 5.4.1 que le profil $U^{1,\pm}|_{y_3=0}$ s'exprime en fonction du profil ψ^2 uniquement. Ainsi, nous nous intéresserons plus particulièrement à ce profil et montrerons au Paragraphe 5.4.3 que ψ^2 satisfait une équation non-locale de type Hamilton-Jacobi, analogue au cas des ondes de Rayleigh en élastodynamique [Lar83, Par85, HIZ95, CW16]. À ce stade, nous aurons donc entièrement déterminé le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ (au choix d'une fonction de relèvement par rapport à $y_3 \geq 0$ près). Pour finir, la Section 5.5 traitera de la cascade BKW dans son ensemble, afin de construire les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ par récurrence, ce qui généralisera les calculs menés pour le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$.

Algorithme de détermination des profils. On résume ci-après toute la démarche permettant de calculer les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ par récurrence.

1. Le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$.

- (a) On détermine en premier lieu les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ce qui construit $U_\star^{1,\pm}$. Pour $k \neq 0$, la trace sur $\{y_3 = 0\}$ du coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$ est proportionnelle à $\widehat{\psi}^2(k)$.
- (b) On détermine une équation d'évolution non-linéaire de type Hamilton-Jacobi satisfaite par le profil principal ψ^2 , à l'aide de la condition d'orthogonalité (5.4.73). Cette condition est une première étape permettant d'amorcer la résolution du système satisfait par le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$, comme l'indiquera la Proposition 5.5.1 ci-dessous. On obtient un profil principal ψ^2 , ce qui, de surcroît, détermine entièrement la trace $U_\star^{1,\pm}|_{y_3=0}$.
- (c) On termine par le calcul du coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$.

- i. La partie $(I - \Pi) \underline{U}^{1,\pm}$ de la moyenne rapide est obtenue *via* la résolution d’une équation différentielle.
 - ii. La moyenne lente $\underline{\underline{U}}^{1,\pm}$ est obtenue comme solution du système linéarisé des nappes de tourbillon-courant *homogène*.
 - iii. La seconde partie $\Pi \underline{U}^{1,\pm}$ de la moyenne rapide résout un système hyperbolique symétrique à coefficients constants *homogène*. Ces deux dernières étapes terminent d’amorcer la résolution du système satisfait par le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$.
- (d) On relève la trace $U_{\star}^{1,\pm}|_{y_3=0}$ par rapport à y_3 .

À ce stade, le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ est entièrement déterminé et les termes sources dans le système que doit satisfaire le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$ sont “bien préparés”, au sens où ils vérifient une condition du type “alternative de Fredholm”.

2. Les correcteurs.

On se donne $m \geq 1$ et on suppose que les profils $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$ ont été construits.

- (a) On commence par exprimer les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(k)$, pour tout $k \neq 0$, à l’aide de la formule de Duhamel. L’expression de ces coefficients de Fourier en $y_3 = 0$ fait intervenir tous les profils déjà construits $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$, ainsi que le correcteur ψ^{m+2} .
- (b) On détermine une équation d’évolution linéaire de type Hamilton-Jacobi satisfaite par ψ^{m+2} , à l’aide de la condition d’orthogonalité (5.5.78). Cette condition est une première étape pour amorcer la résolution du système que devra satisfaire le correcteur suivant $(U^{m+2,\pm}, \psi^{m+3})$. À ce stade, le correcteur ψ^{m+2} et la trace $U_{\star}^{m+1,\pm}|_{y_3=0}$ sont connus.
- (c) On termine par le calcul du coefficient de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(0)$. On adopte exactement la même démarche qu’à l’étape (1c). La seule différence est que les systèmes d’équations à résoudre deviennent inhomogènes, ce qui donnera lieu au phénomène de *rectification* énoncé par la Proposition 5.5.3 ci-dessous. Cette étape termine d’amorcer la résolution du système que devra satisfaire le correcteur suivant $(U^{m+2,\pm}, \psi^{m+3})$.
- (d) On relève la trace $U_{\star}^{m+1,\pm}|_{y_3=0}$ par rapport à y_3 .

Le correcteur $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})$ est alors complètement déterminé et les termes sources du système satisfait par le correcteur suivant $(U^{m+2,\pm}, \psi^{m+3})$ sont “bien préparés”. On procède ensuite par récurrence sur l’entier m .

5.3 Analyse de stabilité : condition de Lopatinskii faible et fréquences elliptiques

5.3.1 Rappels sur le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant

Dans ce paragraphe, on s’intéresse au profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$. Pour déterminer ce profil, nous allons voir que l’on pourra se ramener à l’étude du système linéarisé des nappes de tourbillon-courant autour de la nappe plane (5.1.1). Nous étudierons donc ce problème, en rappelant les principaux résultats de [MTT08] sur la condition de Lopatinskii faible, et les fréquences elliptiques associées (voir également [Syr53, Cha61, Axf62]). Pour l’instant, nous reprenons une fréquence $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, avec $\xi' \neq 0$, et considérons une solution exacte de (5.0.1) ayant un développement asymptotique sous la forme (5.1.5), (5.1.6).

En tenant compte des nouvelles variables $(t, y', y_3, Y_3, \theta)$ dont dépendent les profils $U^{m,\pm}$ dans (5.1.5),

nous devons tenir compte des règles de dérivation suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t &\longleftrightarrow \partial_t - \partial_t \psi_\varepsilon \partial_{y_3} - \frac{\partial_t \psi_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{Y_3} + \frac{\tau}{\varepsilon} \partial_\theta, \\ \partial_{x_j} &\longleftrightarrow \partial_{y_j} - \partial_{x_j} \psi_\varepsilon \partial_{y_3} - \frac{\partial_{x_j} \psi_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{Y_3} + \frac{\xi_j}{\varepsilon} \partial_\theta, \quad j = 1, 2, \\ \partial_{x_3} &\longleftrightarrow \partial_{y_3} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{Y_3}.\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\partial_t \psi_\varepsilon &= \varepsilon \tau \partial_\theta \psi^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \partial_{x_j} \psi_\varepsilon &= \varepsilon \xi_j \partial_\theta \psi^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

puis on procède à un développement de Taylor des fonctions f_j au voisinage de $U^{0,\pm}$:

$$f_j(U_\varepsilon^\pm) = f_j(U^{0,\pm}) + \varepsilon \nabla f_j(U^{0,\pm}) U^{1,\pm} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\tag{5.3.2}$$

On “dérive” l’équation (5.3.2) par rapport à x_j (la dérivée du terme $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ donnant un $\mathcal{O}(\varepsilon)$), on injecte dans (5.0.4) et on tient compte des règles de dérivation (5.3.1), pour ensuite identifier les puissances de ε . Rappelons ici que l’on ne s’intéresse qu’au profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$; on renvoie à la Section 5.5 où l’on généralisera cette démarche à tout ordre ε^N . En identifiant les termes en ε^0 , on obtient une première équation satisfaite par le profil $U^{1,\pm}$, que l’on simplifie en définissant les matrices de $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ suivantes :

$$\forall j = 1, 2, 3, \quad A_j^\pm := \nabla f_j(U^{0,\pm}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^\pm := \tau A_0 + \xi_1 A_1^\pm + \xi_2 A_2^\pm.\tag{5.3.3}$$

On renvoie à l’Annexe A.1 pour l’expression détaillée des matrices jacobienes A_j^\pm et de \mathcal{A}^\pm . Le profil principal $U^{1,\pm}$ doit satisfaire l’équation :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} U^{1,\pm} + \mathcal{A}^\pm \partial_\theta U^{1,\pm} = 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (t, y', y_3) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm.\tag{5.3.4a}$$

Remarquons que la matrice A_3^\pm n’est *pas inversible* : le problème des nappes de tourbillon-courant incompressibles est qualifié de *caractéristique*, par opposition au cas non-caractéristique des ondes de choc pour lequel l’équivalent de (5.3.4a) est une équation différentielle *ordinaire* en Y_3 pour chaque mode de Fourier par rapport à θ . Notons que les variables lentes (t, y', y_3) jouent un rôle de paramètres dans (5.3.4a). Il faut également adjoindre au système (5.3.4a) la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Cette condition s’écrit :

$$\partial_{Y_3} H_3^{1,\pm} + \xi_1 \partial_\theta H_1^{1,\pm} + \xi_2 \partial_\theta H_2^{1,\pm} = 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (t, y', y_3) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm.\tag{5.3.4b}$$

Passons maintenant aux conditions de bord du système (5.0.1). Pour simplifier les calculs, rappelons la définition (5.1.2) des réels a^\pm et b^\pm :

$$a^\pm := \xi_1 u_1^{0,\pm} + \xi_2 u_2^{0,\pm}, \quad b^\pm := \xi_1 H_1^{0,\pm} + \xi_2 H_2^{0,\pm},$$

et posons également

$$c^\pm := \tau + a^\pm.\tag{5.3.5}$$

En procédant exactement comme précédemment, l’identification des termes en ε^1 permet d’obtenir les trois conditions de bord suivantes pour le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$:

$$\begin{cases} u_3^{1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} = c^\pm \partial_\theta \psi^2, \\ H_3^{1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} = b^\pm \partial_\theta \psi^2, \\ [q^1|_{y_3=0}] = 0. \end{cases}\tag{5.3.6}$$

auquel on a omis d'ajouter les contraintes (5.3.11) pour plus de clarté. Pour résoudre les équations de (5.3.12), on peut se ramener à l'étude d'un système satisfait par la pression \hat{q}^1 uniquement, comme dans [Syr53, Cha61, Axf62, MTT08]. Pour cela, on dérive par rapport à Y_3 la deuxième équation de (5.3.12), et on utilise les contraintes (5.3.11). On obtient l'équation :

$$\partial_{Y_3}^2 \hat{q}^1 + k^2 c \left(\xi_1 \hat{u}_1^1 + \xi_2 \hat{u}_2^1 \right) - k^2 b \left(\xi_1 \hat{H}_1^1 + \xi_2 \hat{H}_2^1 \right) = 0.$$

Enfin, en utilisant la première ligne de (5.3.12) (pour $j = 1$ et $j = 2$), on en déduit une EDO d'ordre 2 satisfaite par la pression (on réécrit désormais les exposants \pm) :

$$\partial_{Y_3}^2 \hat{q}^{1,\pm} - k^2 |\xi'|^2 \hat{q}^{1,\pm} = 0, \quad Y_3 \geq 0. \quad (5.3.13)$$

Ceci n'est rien d'autre que la linéarisation autour de la nappe plane de l'équation de Laplace satisfaite par la pression q^1 que l'on avait obtenue dans le Chapitre 4. Il reste maintenant à déterminer les conditions de bord en $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ pour $\hat{q}^{1,\pm}$ et sa dérivée première. On sait déjà que le saut $[\hat{q}^1]_{y_3=0}$ est nul (voir (5.3.9)). Pour la dérivée première, on prend la "double trace" de la deuxième équation de (5.3.12), puis on utilise les conditions de bord (5.3.9). On aboutit finalement au problème de Laplace unidimensionnel suivant satisfait par la pression $\hat{q}^{1,\pm}$:

$$\begin{cases} \partial_{Y_3}^2 \hat{q}^{1,\pm} - k^2 |\xi'|^2 \hat{q}^{1,\pm} = 0, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ [\hat{q}^1]_{y_3=0} = 0, & y_3 = Y_3 = 0, \\ \partial_{Y_3} \hat{q}^{1,\pm}|_{y_3=0} = k^2 ((c^\pm)^2 - (b^\pm)^2) \hat{\psi}^2, & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.3.14)$$

Il est à noter que y_3 n'est qu'un paramètre dans la première équation du système (5.3.14). La résolution du système (5.3.14) pour $y_3 = 0$ se fait sans difficulté. D'abord, la première équation de (5.3.14) montre que $\hat{q}^{1,\pm}$ est engendré par les fonctions $\exp(|k||\xi'|Y_3)$ et $\exp(-|k||\xi'|Y_3)$:

$$\hat{q}^{1,\pm}(y_3, Y_3, k) = \lambda^\pm(y_3, k) e^{-|k||\xi'|Y_3} + \mu^\pm(y_3, k) e^{|k||\xi'|Y_3}, \quad \forall Y_3 \geq 0, \quad \forall y_3 \geq 0.$$

Les solutions recherchées devant au moins être dans $L_{Y_3}^\infty$, il est donc nécessaire d'avoir $\mu^+ = \lambda^- \equiv 0$ (sinon la solution croît en $\exp(|k||\xi'|Y_3)$). On peut donc écrire $\hat{q}^{1,\pm}$ sous la forme

$$\hat{q}^{1,\pm}(y_3, Y_3, k) = \gamma^\pm(y_3, k) e^{\mp |k||\xi'|Y_3}, \quad \forall y_3 \geq 0, \quad \forall Y_3 \geq 0.$$

Notons que les coefficients γ^\pm dépendent en fait de (t, y, k) car les variables (t, y) jouent un rôle de paramètre dans la première équation de (5.3.14). Il reste maintenant à déterminer ces coefficients, grâce aux conditions de bord de (5.3.14). La première condition de bord donne en premier lieu :

$$\gamma^+(y_3 = 0, k) = \gamma^-(y_3 = 0, k).$$

Ainsi, la deuxième condition de bord sera satisfaite si et seulement si (rappelons que l'on a supposé $k \neq 0$, et que l'on cherche des solutions non triviales, *i.e.* $\hat{q}^{1,\pm} \neq 0$ et $\hat{\psi}^2 \neq 0$ pour au moins un mode de Fourier $k \neq 0$) :

$$(c^+)^2 + (c^-)^2 = (b^+)^2 + (b^-)^2. \quad (5.3.15)$$

Comme pour la théorie des systèmes hyperboliques [BGS07], l'égalité (5.3.15) s'apparente à l'annulation d'un déterminant de Lopatinskii (voir [MTT08]), que l'on peut définir comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, \xi_1, \xi_2) &:= (c^+)^2 + (c^-)^2 - (b^+)^2 - (b^-)^2 \\ &= 2\tau^2 + 2(a^+ + a^-)\tau + (a^+)^2 + (a^-)^2 - (b^+)^2 - (b^-)^2. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Ceci n'est rien d'autre qu'un polynôme de degré 2 par rapport à τ , dont on peut facilement connaître les racines. Sous l'hypothèse de stabilité (H1), on montre que Δ admet exactement deux racines *simples* et *réelles* $\tau_1 = \tau_1(\xi_1, \xi_2)$ et $\tau_2 = \tau_2(\xi_1, \xi_2)$: seule la condition de Lopatinskii *faible* est donc vérifiée. Nous donnons tous ces détails au paragraphe suivant. Une telle fréquence est appelée *fréquence elliptique*, car elle correspond au cas où $(\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$: on a $\xi_3 = \pm i|k||\xi'| \in i\mathbb{R}$, donnant lieu à une *décroissance exponentielle* des fonctions $(u^{1,\pm}, H^{1,\pm}, q^{1,\pm})|_{y_3=0}$ par rapport à la variable normale Y_3 (pour $k \neq 0$). Ensuite, on va reconstruire le profil principal $(u^{1,\pm}, H^{1,\pm}, q^{1,\pm})$ pour tout y_3 , qui sera également à décroissance exponentielle par rapport à Y_3 .

5.3.2 Déterminant de Lopatinskii et vitesse de groupe

Racines du déterminant de Lopatinskii. Notons D le discriminant réduit du polynôme Δ défini par (5.3.16), vu comme polynôme de degré 2 par rapport à τ . Nous avons

$$\begin{aligned} D &:= (a^+ + a^-)^2 - 2((a^+)^2 + (a^-)^2 - (b^+)^2 - (b^-)^2) \\ &= 2((b^+)^2 + (b^-)^2) - (a^+ - a^-)^2. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Le discriminant $D = D(\xi')$ est une forme quadratique par rapport à $\xi' \in \mathbb{R}^2$. Si D est définie positive, alors le déterminant de Lopatinskii possède deux racines *réelles* τ_1 et τ_2 qui s'expriment en fonction de ξ' comme suit :

$$\tau_1 = \tau_1(\xi') = \frac{1}{2}(-a^+ - a^- + \sqrt{D}), \quad \tau_2 = \tau_2(\xi') = \frac{1}{2}(-a^+ - a^- - \sqrt{D}). \quad (5.3.18)$$

C'est le cadre dans lequel la condition de Lopatinskii *simple* est vérifiée : on renvoie notamment à [MTT08] pour une discussion plus approfondie sur la stabilité *linéaire* des nappes de tourbillon-courant *planes* ; le problème des nappes de tourbillon-courant *planes* est dit *faiblement bien posé*. Nous allons voir que sous la condition de stabilité (H1), la forme quadratique D sera effectivement définie positive. La matrice de la forme quadratique D relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2((H_1^{0,+})^2 + (H_1^{0,-})^2) - [u_1^0]^2 & 2(H_1^{0,+}H_2^{0,+} + H_1^{0,-}H_2^{0,-}) - [u_1^0][u_2^0] \\ 2(H_1^{0,+}H_2^{0,+} + H_1^{0,-}H_2^{0,-}) - [u_1^0][u_2^0] & 2((H_2^{0,+})^2 + (H_2^{0,-})^2) - [u_2^0]^2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie positive si et seulement si son déterminant et sa trace sont strictement positifs. Après calculs, nous obtenons les deux conditions :

$$|H^{0,+} \times [u^0]|^2 + |H^{0,-} \times [u^0]|^2 < 2|H^{0,+} \times H^{0,-}|^2, \quad (5.3.19a)$$

$$\frac{1}{2}|[u^0]|^2 < |H^{0,+}|^2 + |H^{0,-}|^2. \quad (5.3.19b)$$

La condition (5.3.19a) n'est rien d'autre que l'hypothèse de stabilité (H1) ; la deuxième condition (5.3.19b) est quant à elle redondante, car elle découle de (5.3.19a). En effet, comme les vecteurs $H^{0,+}$ et $H^{0,-}$ ne peuvent être colinéaires afin de satisfaire (5.3.19a), ils forment une base de l'interface plane \mathbb{R}^2 . Par conséquent, on peut écrire

$$[u^0] = \alpha^+ H^{0,+} + \alpha^- H^{0,-},$$

où α^+ et α^- sont des réels vérifiant $(\alpha^+)^2 + (\alpha^-)^2 < 2$ d'après (5.3.19a). Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} |[u^0]|^2 &\leq (\alpha^+)^2 |H^{0,+}|^2 + (\alpha^-)^2 |H^{0,-}|^2 + 2|\alpha^+||\alpha^-||H^+||H^-| \\ &\leq ((\alpha^+)^2 + (\alpha^-)^2) (|H^{0,+}|^2 + |H^{0,-}|^2) \\ &< 2(|H^{0,+}|^2 + |H^{0,-}|^2), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.3.19b) satisfaite par la trace de D . Finalement, sous l'hypothèse de stabilité (H1), nous avons bien deux racines réelles *distinctes* τ_1 et τ_2 du déterminant de Lopatinskii (5.3.16), paramétrées par ξ' . Dans la suite, on se fixe une telle racine $(\tau, \underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$ de Δ , c'est-à-dire

$$\tau = \tau_1(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2) \quad \text{ou} \quad \tau = \tau_2(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2).$$

Vitesse de groupe. Au Paragraphe 5.4.3, nous déterminerons le profil principal ψ^2 , et montrerons que celui-ci satisfait une équation non-linéaire non-locale de type Hamilton-Jacobi sur le bord $\{y_3 = 0\}$. Cette équation comporte notamment une partie de transport, c'est-à-dire s'écrivant sous la forme $\partial_t - v \cdot \nabla_{y'}$. Nous verrons que la vitesse de transport v coïncide avec *la vitesse de groupe* associée à la variété caractéristique $\{\tau - \tau_1(\xi') = 0\}$, si l'on a choisi la racine τ_1 du déterminant de Lopatinskiï ; on rappelle la définition de la vitesse de groupe ci-après (voir également [CG10, Mar10, BGC12]).

Comme la forme quadratique D en (5.3.17) est définie positive, on remarque que $\underline{\tau}$ est racine *simple* du déterminant de Lopatinskiï. En effet, nous avons :

$$\partial_\tau \Delta(\tau, \xi') = 4\tau + 2(a^+ + a^-).$$

Ainsi, en évaluant en $(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Delta(\underline{\tau}, \underline{\xi}') &= 2(-a^+ - a^- \pm \sqrt{D}) + 2(a^+ + a^-) \\ &= \pm 2\sqrt{D} \neq 0. \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

La vitesse de groupe v associée à la fréquence $(\underline{\tau}, \underline{\xi}')$ est définie comme suit¹ :

$$v := +\nabla_{\xi'} \tau_1(\underline{\tau}, \underline{\xi}'), \tag{5.3.21}$$

en ayant choisi $\underline{\tau} = \tau_1(\underline{\xi}')$. On factorise Δ par rapport à τ :

$$\Delta(\tau, \xi') = (\tau - \tau_1(\xi')) (\tau - \tau_2(\xi')).$$

Posons $\theta(\tau, \xi') := (\tau - \tau_2(\xi'))$; un rapide calcul montre que

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Delta(\underline{\tau}, \underline{\xi}') &= \theta(\underline{\tau}, \underline{\xi}'), \\ \partial_{\xi_j} \Delta(\underline{\tau}, \underline{\xi}') &= -\theta(\underline{\tau}, \underline{\xi}') \partial_{\xi_j} \tau_1(\underline{\xi}'), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Comme $(\underline{\tau}, \underline{\xi}')$ est racine *simple* de Δ , on peut affirmer que $\theta(\underline{\tau}, \underline{\xi}') \neq 0$; par conséquent, les composantes de la vitesse de groupe v vérifient :

$$v_j = \partial_{\xi_j} \tau_1(\underline{\xi}') = -\frac{\partial_{\xi_j} \Delta}{\partial_\tau \Delta}(\underline{\tau}, \underline{\xi}'), \quad j = 1, 2. \tag{5.3.22}$$

La relation (5.3.22) nous permettra d'identifier les coefficients apparaissant devant le terme de transport dans l'équation (5.4.95) satisfaite par les coefficients de Fourier $\widehat{\psi}^2(k)$ du profil principal ψ^2 . D'abord, en vertu de (5.3.20), l'équation (5.4.95) sera bien une équation **d'évolution**. Par ailleurs, les coefficients apparaissant devant les dérivées tangentielles ∂_{y_1} et ∂_{y_2} sont reliés à la vitesse de groupe v (ce résultat est obtenu par Marcou [Mar10] dans un cadre général et Coulombel-Williams [CW16] pour les ondes de Rayleigh en élasticité non-linéaire ; nous le mettons en évidence dans notre cas particulier, pour le système des nappes de tourbillon-courant). Nous avons explicitement :

$$\partial_\tau \Delta = 2(2\tau + a^+ + a^-) = 2(c^+ + c^-) \neq 0,$$

puis

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_j} \Delta &= 2\tau(u_j^{0,+} + u_j^{0,-}) + 2(u_j^{0,+} a^+ + u_j^{0,-} a^- - H_j^{0,+} b^+ - H_j^{0,-} b^-) \\ &= 2(c^+ u_j^{0,+} + c^- u_j^{0,-} - b^+ H_j^{0,+} - b^- H_j^{0,-}). \end{aligned}$$

¹En choisissant de paramétrer la variété caractéristique associée à τ_1 par $\{\tau - \tau_1(\xi') = 0\}$, la vitesse de groupe correspondante est définie par convention avec un signe "+" dans (5.3.21), et donne lieu à l'opérateur de transport $\partial_t - v \cdot \nabla_{y'}$; en revanche, si l'on avait choisi d'écrire la variété caractéristique sous la forme $\{\tau + \tau_1(\xi') = 0\}$, on aurait encore défini v avec un signe "+" dans (5.3.21) et on aurait abouti à l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_{y'}$.

Les composantes de la vitesse de groupe valent donc en vertu de (5.3.22) :

$$v_j = - \frac{c^+ u_j^{0,+} + c^- u_j^{0,-} - b^+ H_j^{0,+} - b^- H_j^{0,-}}{c^+ + c^-}. \quad (5.3.23)$$

Ainsi, les coefficients devant les dérivées tangentielles ∂_{y_1} et ∂_{y_2} dans l'équation (5.4.95) coïncideront bien avec les composantes v_1 et v_2 de la vitesse de groupe. En particulier, ces coefficients sont *réels*, ce qui donne un premier critère raisonnable pour penser que l'équation (5.4.95) sera bien posée.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous nous fixerons à nouveau une fréquence $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ (on omettra les barres soulignées) satisfaisant les hypothèses (H2), (H3), (H4) énoncées dans la Section 5.1. On verra plus loin l'origine de la restriction $\tau \neq 0$.

5.4 Cascade BKW : détermination du profil principal ($U^{1,\pm}, \psi^2$)

L'objectif de cette partie est de construire le profil principal ($U^{1,\pm}, \psi^2$) du développement BKW (5.1.5), (5.1.6). On y détaille complètement la résolution, ce qui nous aidera à comprendre la méthode générale pour construire tous les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ par récurrence. On rappelle qu'en procédant à un développement de Taylor à l'ordre 1 en ε , nous avons obtenu dans la Section 5.3 le système (5.3.4a), (5.3.6). Pour tenir compte de la périodicité par rapport à θ , on avait ensuite décomposé mode de Fourier par mode de Fourier le problème sus-mentionné. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le système satisfait par le k -ième coefficient de Fourier $\hat{U}^{1,\pm}(Y_3, k)$ était alors donné par (5.3.8) avec les conditions de bord (5.3.9). Par souci de clarté, nous réécrivons ce système ci-après, en définissant l'opérateur différentiel $L_k^\pm := A_3^\pm \partial_{Y_3} + ik \mathcal{A}^\pm$:

$$\begin{cases} L_k^\pm \hat{U}^{1,\pm}(Y_3, k) = 0, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ \hat{u}_3^{1,\pm} = ik c^\pm \hat{\psi}^2(k), & y_3 = Y_3 = 0, \\ \hat{H}_3^{1,\pm} = ik b^\pm \hat{\psi}^2(k), & y_3 = Y_3 = 0, \\ [\hat{q}^1] = 0, & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

N'oublions pas d'adjoindre à (5.4.1) la contrainte (5.3.11b) provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Pour simplifier les notations, on définit les matrices de bord $B^+, B^- \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$B^+ := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^- := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (5.4.2)$$

ainsi que les vecteurs $\mathfrak{t}^+, \mathfrak{t}^- \in \mathbb{R}^5$:

$$\mathfrak{t}^+ := (c^+, b^+, 0, 0, 0), \quad \mathfrak{t}^- := (0, 0, c^-, b^-, 0). \quad (5.4.3)$$

Remarquons que la matrice par blocs $B := (B^+ B^-) \in \mathcal{M}_{5,14}(\mathbb{R})$ est de rang 5, ce qui correspond aux 5 conditions de bord du système (5.4.1). Nous pouvons réécrire ce dernier système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} L_k^\pm \hat{U}^{1,\pm} = 0, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ B^+ \hat{U}^{1,+} + B^- \hat{U}^{1,-} - ik \hat{\psi}^2 (\mathfrak{t}^+ + \mathfrak{t}^-) = 0, & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.4.4)$$

Le profil principal ($U^{1,\pm}, \psi^2$) apparaît également dans le système que doit satisfaire le premier correcteur ($U^{2,\pm}, \psi^3$). Nous dérivons ci-après ce système.

Comme effectué dans la Section 5.3, on procède à un développement de Taylor des fonctions f_j , dorénavant à l'ordre 2 en ε :

$$f_j(U_\varepsilon^\pm) = f_j(U^{0,\pm}) + \varepsilon A_j^\pm U^{1,\pm} + \varepsilon^2 A_j^\pm U^{2,\pm} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nabla^2 f_j(U^{0,\pm})(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (5.4.5)$$

où l'on rappelle que A_j^\pm désigne la matrice jacobienne $\nabla f_j(U^{0,\pm})$ (cf. Annexe A.1). On notera également

$$\mathbb{A}_j(\cdot, \cdot) := \nabla^2 f_j(U^{0,\pm})(\cdot, \cdot). \quad (5.4.6)$$

On renvoie à l'Annexe A.3 pour l'expression détaillée des différentielles secondes \mathbb{A}_j (qui de surcroît ne dépendent pas des états “+” et “-”). En “dérivant” l'équation (5.4.5) par rapport à x_j , puis en suivant la même procédure qu'au Paragraphe 5.3.2, l'identification des termes en ε^1 donne l'équation suivante :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} U^{2,\pm} + \mathcal{A}^\pm \partial_\theta U^{2,\pm} = - \left(A_0 \partial_t U^{1,\pm} + \sum_{j=1}^3 A_j^\pm \partial_{y_j} U^{1,\pm} \right) + \partial_\theta \psi^2 \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{1,\pm} \quad (5.4.7a)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) + \partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) \right) \\ =: -F_1^\pm + F_2^\pm - \frac{1}{2} F_3^\pm. \quad (5.4.7b)$$

Pour être consistant avec (5.2.3b), on appellera $F^{1,\pm}$ le terme source dans (5.4.7b) :

$$F^{1,\pm} := -F_1^\pm + F_2^\pm - \frac{1}{2} F_3^\pm. \quad (5.4.7c)$$

On développe également les conditions de bord du système (5.0.1) à l'ordre 2 en ε , et on identifie les termes d'ordre ε^2 pour obtenir sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3^{2,\pm}|_{y_3=Y_3=0} = c^\pm \partial_\theta \psi^3 + \partial_t \psi^2 + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j u_j^{1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} \right) \partial_\theta \psi^2, \end{array} \right. \quad (5.4.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_3^{2,\pm}|_{y_3=Y_3=0} = b^\pm \partial_\theta \psi^3 + \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j H_j^{1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} \right) \partial_\theta \psi^2, \end{array} \right. \quad (5.4.8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [q^2] = 0. \end{array} \right. \quad (5.4.8c)$$

Pour simplifier les notations, on introduit l'opérateur différentiel $L_f^\pm(\partial)$ suivant :

$$L_f^\pm(\partial) := A_3^\pm \partial_{Y_3} + \mathcal{A}^\pm \partial_\theta, \quad (5.4.9)$$

où l'indice “ f ” signifie “fast”, pour désigner les variables rapides. On définit également les termes sources de bord

$$G^{1,+} := (G_1^+, G_2^+, 0, 0, 0), \quad G^{1,-} := (0, 0, G_1^-, G_2^-, 0), \quad (5.4.10a)$$

où les composantes G_1^\pm et G_2^\pm sont données par :

$$G_1^\pm := \partial_t \psi^2 + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j u_j^{1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} \right) \partial_\theta \psi^2, \quad (5.4.10b)$$

$$G_2^\pm := \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j H_j^{1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} \right) \partial_\theta \psi^2. \quad (5.4.10c)$$

Le système satisfait par le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$ se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial) U^{2,\pm} = F^{1,\pm}, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+ U^{2,+} + B^- U^{2,-} - \partial_\theta \psi^3 (\ell^+ + \ell^-) = G^{1,+} + G^{1,-}, & y_3 = Y_3 = 0, \end{cases} \quad (5.4.11)$$

auquel il faut adjoindre la contrainte sur $H^{2,\pm}$ provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. On rappelle que cette équation est analogue à la 7^e composante de l'équation $L_f^\pm(\partial) U^{2,\pm} = F^{1,\pm}$, où l'on remplace u par H dans les membres de gauche et de droite. Les variables (t, y', y_3) jouent une fois de plus un rôle de paramètres dans l'équation aux dérivées partielles rapide du système (5.4.11). Attention toutefois à y_3 qui, à l'inverse de (t, y') , n'est plus un paramètre dans les conditions de bord de (5.4.11). Notons que les termes sources $F^{1,\pm}$ et $G^{1,\pm}$ ne dépendent que du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ et de la nappe plane de référence $U^{0,\pm}$.

Comme pour $(U^{1,\pm}, \psi^2)$, on décompose en modes de Fourier le système (5.4.11), et on obtient pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} L_k^\pm \widehat{U}^{2,\pm} = \widehat{F}^{1,\pm}, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ B^+ \widehat{U}^{2,+} + B^- \widehat{U}^{2,-} - ik \widehat{\psi}^3 (\ell^+ + \ell^-) = \widehat{G}^{1,+} + \widehat{G}^{1,-}, & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.4.12)$$

La résolution du système (5.4.12) va nous donner une condition nécessaire sur les profils $\widehat{U}^{1,\pm}$ et $\widehat{\psi}^2$: les termes sources $(\widehat{F}^{1,\pm}, \widehat{G}^{1,\pm})$ doivent appartenir à l'image d'un certain opérateur (qu'on choisit de ne pas expliciter ici par souci de clarté), qui a un noyau de dimension 1. Dans le même esprit que les opérateurs de Fredholm, la condition d'appartenir à l'image de l'opérateur se traduira par une *relation d'orthogonalité* que devront vérifier $(\widehat{F}^{1,\pm}, \widehat{G}^{1,\pm})$ car l'opérateur en question n'est pas inversible. Cet argument est détaillé de manière précise ci-après *via* la relation de dualité (5.4.73), qui est analogue à celle obtenue dans [BGC12].

À ce stade, les deux systèmes auxquels on s'intéresse pour calculer le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ sont donc (5.4.4) et (5.4.12) (sans oublier les contraintes que doivent satisfaire les profils $H^{1,\pm}$ et $H^{2,\pm}$ associés au champ magnétique).

5.4.1 Résolution du problème homogène satisfait par le profil $(U^{1,\pm}, \psi^2)$

Nous commençons par résoudre le problème homogène (5.4.4) satisfait par $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$. Dans ce paragraphe, nous supposons $k \neq 0$, et reviendrons ultérieurement sur le mode de Fourier $k = 0$.

Remarquons que si U^\pm est solution de $L_1^\pm U^\pm = 0$, alors $V^\pm(Y_3) := U^\pm(kY_3)$ est solution de $L_k^\pm V^\pm = 0$, et \bar{V}^\pm est solution de $L_{-k}^\pm \bar{V}^\pm = 0$, dans le cas où $k > 0$. Lorsque $k < 0$, nous avons un résultat similaire en posant $W^\pm(Y_3) := U^\pm(-kY_3)$; en effet, W^\pm est solution de $L_{-k}^\pm W^\pm = 0$ et \bar{W}^\pm est solution de $L_k^\pm \bar{W}^\pm = 0$. Ainsi, la détermination des solutions de $L_1^\pm U^\pm = 0$ suffit à connaître les solutions de l'équation $L_k^\pm V^\pm = 0$ pour tout $k \neq 0$.

En vue de résoudre le problème (5.4.4), on commence par chercher les modes propres du système $L_1^\pm U^\pm = 0$; si la matrice A_3^\pm était inversible (ce qui n'est pas le cas ici), on chercherait les éléments propres de la matrice $i(A_3^\pm)^{-1} \mathcal{A}^\pm$ afin de diagonaliser notre système. On procède de façon similaire en cherchant des solutions de la forme $e^{\omega Y_3} \mathbf{R}$, où \mathbf{R} est un vecteur constant de \mathbb{C}^7 . En s'inspirant de ce qui a été fait dans [AH03], on peut voir qu'il n'y a que deux modes propres associés au système $L_1^\pm U^\pm = 0$, à savoir $+1$ et -1 (et compte tenu de la remarque précédente, les modes propres du système $L_k^\pm U^\pm = 0$ sont $+k$ et $-k$). C'est le résultat que l'on a déjà obtenu dans la Section 5.3, où l'on avait $\omega = i\xi_3 = \pm k|\xi'|$ (selon le signe de y_3). En effet, en explicitant les équations du système $L_k^\pm \widehat{U}^{1,\pm} = 0$ (voir (5.3.10)), nous nous étions ramenés à une EDO d'ordre deux sur la pression $\widehat{q}^{1,\pm}$, à savoir :

$$\partial_{Y_3}^2 \widehat{q}^{1,\pm} - k^2 |\xi'|^2 \widehat{q}^{1,\pm} = 0, \quad Y_3 \geq 0.$$

Comme $|\xi'| = 1$ et $k \neq 0$, la fonction $\widehat{q}^{1,\pm}$ est nécessairement engendrée par les exponentielles $e^{\pm k Y_3}$. Ainsi, toute solution de l'équation homogène $L_k^\pm \widehat{U}^{1,\pm} = 0$ s'exprime sous la forme

$$\widehat{U}^{1,\pm}(Y_3, k) = \alpha^\pm(k) e^{-k Y_3} \mathbf{R}^\pm + \beta^\pm(k) e^{k Y_3} \overline{\mathbf{R}}^\pm, \quad (5.4.13)$$

où $\alpha^\pm(k)$ et $\beta^\pm(k)$ sont des scalaires à déterminer, et \mathbf{R}^\pm est un vecteur générateur de $\text{Ker}(iA^\pm - A_3^\pm)$ (défini par (A.1.2), voir l'Annexe A). Comme les variables (t, y) jouent un rôle de paramètre dans la première équation de (5.4.4), il est important de noter que $\alpha^\pm(k)$ et $\beta^\pm(k)$ sont en fait des *fonctions de* (t, y) .

Comme nous cherchons le profil $U^{1,\pm}$ au moins dans $L_{Y_3}^\infty$, nous excluons la partie grossièrement divergente $e^{|k||Y_3|}$. Ainsi, le profil $U^{1,\pm}$ aura une décroissance exponentielle en $e^{-|k||Y_3|}$, donnant lieu à une onde de surface. Le profil $\widehat{U}^{1,\pm}$ se simplifie alors comme suit (on réécrit les variables (t, y) qui jouent un rôle de paramètres) :

$$\begin{aligned} \text{si } k > 0 : \quad & \widehat{U}^{1,+}(t, y, Y_3, k) = \alpha^+(t, y, k) e^{-k Y_3} \mathbf{R}^+, \\ & \widehat{U}^{1,-}(t, y, Y_3, k) = \beta^-(t, y, k) e^{k Y_3} \overline{\mathbf{R}}^-, \\ \text{si } k < 0 : \quad & \widehat{U}^{1,+}(t, y, Y_3, k) = \beta^+(t, y, k) e^{k Y_3} \overline{\mathbf{R}}^+, \\ & \widehat{U}^{1,-}(t, y, Y_3, k) = \alpha^-(t, y, k) e^{-k Y_3} \mathbf{R}^-. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Il reste à déterminer les coefficients α^\pm et β^\pm . Pour cela, on utilise les conditions de bord apparaissant dans (5.4.4). Il faut toutefois faire attention au fait que ces conditions sont posées sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$. Or, comme nous venons de le faire remarquer, les coefficients α^\pm et β^\pm sont des fonctions de (t, y', y_3, k) ; par conséquent les conditions de bord de (5.4.4) nous permettront de déterminer les valeurs de $\alpha^\pm(t, y', 0, k)$ et $\beta^\pm(t, y', 0, k)$. Nous verrons au Paragraphe 5.4.4 comment redresser convenablement ces fonctions par rapport à y_3 , ce qui donnera l'expression finale des coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(t, y', y_3, Y_3, k)$ pour tout $k \neq 0$.

► **Le cas $k > 0$:** les conditions de bord du système (5.4.4) donnent :

$$\begin{aligned} \alpha^+(t, y', 0, k) &= k \widehat{\psi}^2(t, y', k), \\ \beta^-(t, y', 0, k) &= -k \widehat{\psi}^2(t, y', k). \end{aligned}$$

En outre, la condition de saut sur la pression dans (5.4.4) est automatiquement satisfaite. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} [\widehat{q}^1] &= \alpha^+(t, y', 0, k) ((b^+)^2 - (c^+)^2) - \beta^-(t, y', 0, k) ((b^-)^2 - (c^-)^2) \\ &= -k \widehat{\psi}^2(t, y', k) ((c^+)^2 + (c^-)^2 - (b^+)^2 - (b^-)^2) = 0, \end{aligned}$$

car la fréquence (τ, ξ_1, ξ_2) annule le déterminant de Lopatinskii (voir (5.3.15)).

► **Le cas $k < 0$:** comme précédemment, nous avons ici :

$$\begin{aligned} \beta^+(t, y', 0, k) &= -k \widehat{\psi}^2(t, y', k), \\ \alpha^-(t, y', 0, k) &= k \widehat{\psi}^2(t, y', k). \end{aligned}$$

En résumé, nous avons déterminé l'expression des coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)|_{y_3=0}$, pour $k \neq 0$, en fonction des coefficients de Fourier $\widehat{\psi}^2(k)$ du front :

$$\widehat{U}^{1,\pm}(t, y', 0, Y_3, k) = \pm |k| \widehat{\psi}^2(t, y', k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \quad (5.4.15)$$

où le vecteur $\mathcal{R}^\pm(k) \in \mathbb{C}^7$ est défini par (A.2.1a) (voir Annexe A). Ainsi, on constate que $\widehat{U}^{1,\pm}(k)|_{y_3=0}$, pour $k \neq 0$, est entièrement déterminé par le k -ième coefficient de Fourier du profil principal ψ^2 associé

au front. Nous allons voir au Paragraphe 5.4.3 comment déterminer ce dernier profil, qui jusqu'ici est inconnu. De plus, en posant

$$\begin{aligned}\gamma^+(t, y, k) &:= \alpha^+(t, y, k) \mathbb{1}_{k>0} + \beta^+(t, y, k) \mathbb{1}_{k<0}, \\ \gamma^-(t, y, k) &:= \beta^-(t, y, k) \mathbb{1}_{k>0} + \alpha^-(t, y, k) \mathbb{1}_{k<0},\end{aligned}$$

on peut réécrire $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$ comme suit :

$$\widehat{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3, k) = \gamma^\pm(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm. \quad (5.4.16)$$

Pour $y_3 \neq 0$, les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$ sont donc déterminés par une fonction scalaire *inconnue* γ^\pm . Afin d'avoir des profils *réels* (c'est-à-dire vérifiant $\overline{\widehat{U}^{1,\pm}(k)} = \widehat{U}^{1,\pm}(-k)$ et $\overline{\widehat{\psi}^2(k)} = \widehat{\psi}^2(-k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$), il est important de noter que la fonction γ^\pm vérifie la *condition de réalité* suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm, \quad \overline{\gamma^\pm(t, y, k)} = \gamma^\pm(t, y, -k). \quad (5.4.17)$$

L'expression (5.4.15) est également valide à $t = 0$. Par conséquent, la donnée initiale pour $U^{1,\pm}$ dépend de la donnée initiale associée à ψ^2 (qui a été notée ψ_0^2 , on renvoie à (5.1.4)). Le choix de la donnée initiale pour le profil principal $U^{1,\pm}$ n'est donc *pas libre*, mais dépend de ψ_0^2 , ce qui est une conséquence de l'ansatz (5.1.5) sous lequel on cherche à approcher la solution oscillante U_ε^\pm . Cette "contrainte" sur la donnée initiale s'apparente au cas des développements d'optique géométrique à une phase pour le problème de Cauchy associé à un système hyperbolique, pour lequel les profils initiaux doivent satisfaire des conditions de *polarisation* (voir par exemple [Rau12, p.159], [Lax57]).

5.4.2 Calcul de la moyenne du profil $U^{1,\pm}$

Nous abordons dans ce paragraphe le cas du coefficient de Fourier d'ordre 0 de $U^{1,\pm}$, à savoir $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$. Nous allons voir que ce coefficient de Fourier est nul, compte tenu du choix (5.2.2) effectué à l'instant initial.

Rappels. On cherche $U^{1,\pm}$ dans l'espace fonctionnel $S^\pm = \underline{S}^\pm \oplus S_\star^\pm$. On utilisera la décomposition (5.2.1) de $U^{1,\pm}$ introduite au Paragraphe 5.2.1 :

$$U^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta) = \underbrace{\underline{U}^{1,\pm}(t, y)}_{\in \underline{S}^\pm} + \underbrace{U_\star^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta)}_{\in S_\star^\pm}. \quad (5.4.18)$$

Le coefficient de Fourier d'ordre 0 de $U^{1,\pm}$ par rapport à θ s'écrit

$$\widehat{U}^{1,\pm}(0) = \underline{U}^{1,\pm}(t, y) + U_\star^{1,\pm}(t, y, Y_3). \quad (5.4.19)$$

Les fonctions $\underline{U}^{1,\pm} \in \underline{S}^\pm$ et $U_\star^{1,\pm} \in S_\star^\pm$ sont respectivement les moyennes *lente* et *rapide* du profil principal $U^{1,\pm}$. Enfin, la fonction $U_\star^{1,\pm}$ consiste en la superposition des modes de Fourier non nuls de $U^{1,\pm}$:

$$U_\star^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta) = \sum_{k \neq 0} \widehat{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3, k) e^{ik\theta}. \quad (5.4.20)$$

Au paragraphe précédent, nous venons de construire $U_\star^{1,\pm}|_{y_3=0}$ (en fonction de ψ^2), car nous avons déterminé tous les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$ pour $k \neq 0$ (voir l'expression (5.4.15)). On verra que la composante $U_\star^{1,\pm}$ appartient bien à S_\star^\pm du fait de la régularité du profil ψ^2 que l'on calculera au paragraphe suivant (on renvoie au Théorème 5.4.1 ci-après).

Pour prendre en compte le noyau de A_3^\pm (qui n'est pas réduit à $\{0\}$), on notera Π le projecteur sur $\text{Ker } A_3^\pm$ (qui ne dépend pas des états “+” ou “-”), dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^7 est $\text{diag}(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$. Cette matrice sera également notée Π pour simplifier. Ce choix de projecteur s'explique par le fait qu'on souhaite distinguer dans le vecteur (u, H, q) d'une part les composantes *tangentiels* (u_1, u_2, H_1, H_2) associées à la vitesse et au champ magnétique tangentiels, et d'autre part les composantes *normales* (u_3, H_3) et la *pression* q qui jouent un rôle bien spécifique du fait des contraintes de divergence nulle, qui relie les composantes normales aux composantes tangentiels (voir par exemple (5.3.11)).

Le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$ s'écrit alors

$$\widehat{U}^{1,\pm}(0) = \underline{U}^{1,\pm}(t, y) + \Pi \underline{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3) + (I - \Pi) \underline{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3). \quad (5.4.21)$$

D'après (5.4.4) avec $k = 0$, nous obtenons la condition algébrique $A_3^\pm \partial_{Y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(0) = 0$, pour tout $Y_3 \gtrless 0$. En explicitant les équations de ce système différentiel, on obtient :

$$\partial_{Y_3} \widehat{q}^{1,\pm}(0) = \partial_{Y_3} \widehat{u}_3^{1,\pm}(0) = \partial_{Y_3} \widehat{H}_3^{1,\pm}(0) = 0.$$

Par la décroissance exponentielle de $\underline{U}^{1,\pm}$ à l'infini, on en déduit que

$$\begin{aligned} \widehat{q}^{1,\pm}(t, y, Y_3, 0) &= \underline{q}^{1,\pm}(t, y), \\ \widehat{u}_3^{1,\pm}(t, y, Y_3, 0) &= \underline{u}_3^{1,\pm}(t, y), \\ \widehat{H}_3^{1,\pm}(t, y, Y_3, 0) &= \underline{H}_3^{1,\pm}(t, y). \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Autrement dit, on peut affirmer que $(I - \Pi) \underline{U}^{1,\pm} = 0$. Il reste donc à déterminer $\underline{U}^{1,\pm}$ et $\Pi \underline{U}^{1,\pm} = \underline{U}^{1,\pm}$. Nous allons pour cela utiliser le système (5.4.12) avec $k = 0$:

$$\begin{cases} A_3^\pm \partial_{Y_3} \widehat{U}^{2,\pm}(0) = \widehat{F}^{1,\pm}(0), & y_3 \gtrless 0, \quad Y_3 \gtrless 0, \\ B^+ \widehat{U}^{2,+}(0) + B^- \widehat{U}^{2,-}(0) = \widehat{G}^{1,+}(0) + \widehat{G}^{1,-}(0), & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.4.23)$$

N'oublions pas d'adjoindre au système (5.4.23) la contrainte sur le coefficient de Fourier $\widehat{H}^{2,\pm}(0)$ provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Le correcteur ψ^3 n'apparaît plus dans le système (5.4.23) ci-dessus, car $\partial_\theta \psi^3$ est à moyenne nulle sur le tore. Par la suite, nous aurons besoin d'utiliser l'expression de $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$. Plus particulièrement, la connaissance de la limite $\lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} \widehat{F}^{1,\pm}(0)$ permettra de déterminer en premier lieu la moyenne lente $\underline{U}^{1,\pm}$. Dans un deuxième temps, pour calculer la moyenne rapide $\underline{U}^{1,\pm}$, nous utiliserons les composantes “tangentiels” 1, 2, 4, 5 (correspondant aux vitesse et champ magnétique tangentiels) du coefficient de Fourier $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$. Ci-après, nous calculons explicitement ce dernier coefficient, bien qu'au final, seules la limite en $Y_3 = \pm\infty$ et les composantes tangentiels de $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$ nous intéresseront. Rappelons que les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$, pour $k \neq 0$, sont donnés par l'expression (5.4.16), où la fonction (inconnue) γ^\pm satisfait la condition de “réalité” (5.4.17). Nous utiliserons les opérateurs différentiels *lents* suivants :

$$\mathcal{T}_s^\pm(\partial) := A_0 \partial_t + \sum_{j=1}^3 A_j^\pm \partial_{y_j}, \quad (5.4.24a)$$

$$\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) := A_0 \partial_t + \sum_{j=1}^2 A_j^\pm \partial_{y_j}, \quad (5.4.24b)$$

l'indice “s” signifiant *slow* et l'indice “h” faisant référence aux variables *horizontales* (y_1, y_2) .

La moyenne lente $\underline{\underline{U}}^{1,\pm}$

Pour calculer la moyenne lente $\underline{\underline{U}}^{1,\pm}$, il va nous suffire de passer à la limite $Y_3 \rightarrow \pm\infty$ et de prendre la moyenne sur le tore du terme source $F^{1,\pm}$ dans la première équation de (5.4.23) (on rappelle que $F^{1,\pm}$ est donné par (5.4.7)). L'analyse ci-dessous préfigure de manière plus générale le résultat de la Proposition 5.5.1.

Tout d'abord, le membre de gauche $A_3^\pm \partial_{Y_3} \widehat{U}^{2,\pm}(0)$ de (5.4.23) a une limite nulle en $Y_3 = \pm\infty$. En effet, comme pour $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$, on peut décomposer le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{2,\pm}(0)$ du premier correcteur $U^{2,\pm}$ en une partie lente et une partie rapide :

$$\widehat{U}^{2,\pm}(0) = \underline{\underline{U}}^{2,\pm}(t, y) + \underline{U}^{2,\pm}(t, y, Y_3),$$

avec $\underline{U}^{2,\pm}$ tendant exponentiellement vers zéro lorsque Y_3 tend vers $\pm\infty$, ainsi que toutes ses dérivées. Par conséquent,

$$\lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} A_3^\pm \partial_{Y_3} \widehat{U}^{2,\pm}(0) = \lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{U}^{2,\pm} = 0.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la limite de $F^{1,\pm}$ en $Y_3 = \pm\infty$, puis à appliquer l'opérateur de moyenne sur le tore \mathbb{T} par rapport à θ . Remarquons que ces deux dernières opérations commutent, puisque les fonctions que l'on manipule ici sont très régulières (rappelons que l'on procède par "analyse-synthèse"; par conséquent, on suppose avoir des profils très réguliers, car cherchés dans l'espace fonctionnel S^\pm , devant satisfaire la cascade BKW (5.2.3)).

► Le cas de F_1^\pm .

Grâce à la linéarité de l'opérateur $\mathcal{T}_s^\pm(\partial)$, on a directement :

$$\widehat{F}_1^\pm(0) = \mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{\underline{U}}^{1,\pm} + \mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm}, \quad (5.4.25)$$

donc on en déduit que

$$\lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} \widehat{F}_1^\pm(0) = \mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{\underline{U}}^{1,\pm}. \quad (5.4.26)$$

► Le cas de F_2^\pm .

En dérivant par rapport à Y_3 l'expression (5.4.20) de $U^{1,\pm}$, nous obtenons

$$\partial_{Y_3} U^{1,\pm} = \partial_{Y_3} \underline{U}^{1,\pm} + \sum_{k \neq 0} \partial_{Y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(k) e^{ik\theta}.$$

Ainsi, d'après (5.4.16), nous aboutissons à

$$\partial_{Y_3} U^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta) = \partial_{Y_3} \underline{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3) \mp \sum_{k \neq 0} |k| \gamma^\pm(t, y, k) e^{\mp |k| Y_3} e^{ik\theta} \mathcal{R}^\pm(k).$$

Par conséquent, on en déduit que

$$F_2^\pm = \partial_\theta \psi^2 \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{1,\pm} \xrightarrow{Y_3 \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Puis, en appliquant l'opérateur de moyenne sur le tore \mathbb{T} , on a alors

$$\lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} \widehat{F}_2^\pm(0) = 0. \quad (5.4.27)$$

► **Le cas de F_3^\pm .**

Les termes $\partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})$ présents dans F_3^\pm ont une moyenne nulle sur \mathbb{T} , par conséquent ils n'interviennent pas dans le calcul de la limite $\lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} \widehat{F}_3^\pm(0)$. De plus, en utilisant (5.4.16) et les mêmes arguments que dans le cas de F_2^\pm , on voit facilement que le dernier terme $\partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})$ a une limite nulle en $Y_3 = \pm\infty$. Finalement, nous obtenons

$$\lim_{Y_3 \rightarrow \pm\infty} \widehat{F}_3^\pm(0) = 0. \quad (5.4.28)$$

► **Conclusion sur la moyenne lente $\underline{U}^{1,\pm}$.**

En combinant (5.4.26), (5.4.27) et (5.4.28), nous obtenons une équation aux dérivées partielles satisfaite par la moyenne lente $\underline{U}^{1,\pm}$, à savoir :

$$\mathcal{T}_s^\pm(\partial)\underline{U}^{1,\pm} = 0.$$

La contrainte sur le profil $H^{2,\pm}$ que l'on a préalablement ajoutée au système (5.4.23) (provenant de la contrainte de divergence nulle (5.0.5) sur le champ magnétique), donne également

$$\nabla_y \cdot \underline{H}^{1,\pm} = 0.$$

De plus, les conditions de bord en $\{y_3 = 0\}$ du système (5.4.4) (avec $k = 0$) s'écrivent²

$$\underline{u}_3^{1,\pm} = \underline{H}_3^{1,\pm} = [\underline{q}^1] = 0.$$

Attardons-nous maintenant sur les conditions de bord "supérieur" et "inférieur" sur Γ_+ et Γ_- , intervenant dans le système (5.0.1). La composante normale $u_{\varepsilon,3}^\pm$ de la vitesse u_ε^\pm doit être nulle sur Γ_\pm . En considérant le développement BKW (5.1.5) par lequel on souhaite approcher la solution exacte U_ε^\pm , nous avons à l'ordre 1 en ε :

$$u_{\varepsilon,3}^\pm(t, x', \pm 1) = \varepsilon u_3^{1,\pm} \left(t, x', \pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x'), \frac{\pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.4.29)$$

Décomposons ensuite la composante normale $u_3^{1,\pm}$ dans l'espace fonctionnel $S^\pm = \underline{S}^\pm \oplus S_\star^\pm$:

$$u_3^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta) = \underline{u}_3^{1,\pm}(t, y) + v^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta), \quad \underline{u}_3^{1,\pm} \in \underline{S}^\pm, \quad v^{1,\pm} \in S_\star^\pm.$$

L'égalité (5.4.29) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,3}^\pm(t, x', \pm 1) &= \varepsilon \underline{u}_3^{1,\pm}(t, x', \pm 1) \\ &+ \varepsilon v^{1,\pm} \left(t, x', \pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x'), \frac{\pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

Or, on a $v^{1,\pm} \in S_\star^\pm$, donc il existe deux constantes $C, \delta > 0$ telles que, pour tous (t, x') et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\begin{aligned} \left| v^{1,\pm} \left(t, x', \pm 1, \frac{\pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \right| &\leq C \exp \left[\mp \delta \left(\frac{\pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon} \right) \right] \\ &\leq C \exp(-\delta/\varepsilon) \exp \left(\delta \frac{|\psi_\varepsilon(t, x')|}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

Au vu de la définition (5.1.8) des solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ que l'on considérera, il faut interpréter le terme $\frac{1}{\varepsilon} |\psi_\varepsilon(t, x')|$ dans l'exponentielle de (5.4.31) comme étant $\frac{1}{\varepsilon} |\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')|$, donc un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ lorsque

²La notation $[\underline{q}^1]$ désigne le saut de $\underline{q}^{1,\pm}$ en $\{y_3 = 0\}$, qui ne doit pas être confondue avec le saut de $q^{1,\pm}$ en $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ noté de la même façon.

ε tend vers 0. Par conséquent, il existe une constante $C_M > 0$, ne dépendant que de M , telle que pour tous (t, x') , on a :

$$\left| v^{1,\pm} \left(t, x', \pm 1, \frac{\pm 1 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \right| \leq C_M e^{-\delta/\varepsilon}.$$

Comme l'exponentielle $e^{-\delta/\varepsilon}$ est un $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$, on en déduit que le terme $\varepsilon v^{1,\pm}$ dans (5.4.30) est également un $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$. En conséquence, il nous reste à l'ordre 1 en ε :

$$u_{\varepsilon,3}^\pm(t, x', \pm 1) = \varepsilon \underline{u}_3^{1,\pm}(t, x', \pm 1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.4.32)$$

La condition de bord $u_{\varepsilon,3}^\pm|_{\Gamma_\pm} \equiv 0$ nous permet d'en déduire que $\underline{u}_3^{1,\pm}|_{\Gamma_\pm} \equiv 0$. Le raisonnement étant identique pour le champ magnétique normal $H_{\varepsilon,3}^\pm$, on en déduit également que $\underline{H}_3^{1,\pm}|_{\Gamma_\pm} \equiv 0$.

En résumé, la moyenne lente $\underline{U}^{1,\pm} = (\underline{u}^{1,\pm}, \underline{H}^{1,\pm}, \underline{q}^{1,\pm})$ satisfait le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant à coefficients constants, que l'on réécrit sous forme détaillée ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \underline{u}^{1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{u}^{1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{H}^{1,\pm} + \nabla \underline{q}^{1,\pm} = 0, \\ \partial_t \underline{H}^{1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{H}^{1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{u}^{1,\pm} = 0, \\ \nabla \cdot \underline{u}^{1,\pm} = \nabla \cdot \underline{H}^{1,\pm} = 0, \quad (t, y', y_3) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm, \\ \underline{u}_3^{1,\pm} = \underline{H}_3^{1,\pm} = [\underline{q}^1] = 0, \quad y_3 = 0, \\ \underline{u}_3^{1,\pm} = \underline{H}_3^{1,\pm} = 0, \quad y_3 = \pm 1, \\ \Pi \underline{U}^{1,\pm}|_{t=0} = 0, \quad (y', y_3) \in \mathbb{T}^2 \times I_\pm. \end{array} \right. \quad (5.4.33)$$

Notons que la 4^e ligne du système (5.4.33) est également valable à l'instant initial $t = 0$: les *moyennes lentes normales initiales* $\underline{u}_3^{1,\pm}|_{t=0}$ et $\underline{H}_3^{1,\pm}|_{t=0}$ doivent donc être identiquement nulles sur Γ et sur Γ_\pm . En outre, grâce à la contrainte de divergence nulle sur la vitesse, on en déduit que $\partial_{y_3} \underline{u}_3^{1,\pm}|_{t=0} = 0$, donc en intégrant par rapport à y_3 , on doit avoir $\underline{u}_3^{1,\pm}|_{t=0} = 0$. La raisonnement est identique pour le champ magnétique, et on a $\underline{H}_3^{1,\pm}|_{t=0} = 0$.

La moyenne lente initiale $\underline{q}^{1,\pm}|_{t=0}$ associée à la pression sera, quant à elle, déterminée *via* la résolution du problème de Laplace (5.4.34) ci-après (on verra qu'elle devra être identiquement nulle également). Néanmoins, le choix des *moyennes lentes tangentielles initiales* $\Pi \underline{U}^{1,\pm}|_{t=0}$ est libre, contrairement aux coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$, pour $k \neq 0$, que l'on a déterminés en *tout temps* $t \in [0, T]$. Pour simplifier, nous *choisissons* ici un profil principal initial $U^{1,\pm}|_{t=0}$ tel que

$$\Pi \underline{U}^{1,\pm}(t = 0) = (\underline{u}_1^{1,\pm}, \underline{u}_2^{1,\pm}, 0, \underline{H}_1^{1,\pm}, \underline{H}_2^{1,\pm}, 0, 0) \equiv 0,$$

conformément à (5.2.2).

Nous allons maintenant voir que le système *homogène* (5.4.33) admet une unique solution suffisamment *régulière* : la solution nulle. On pourra se référer aux travaux de Catania [Cat13] pour des résultats d'existence et d'unicité dans un *cadre* L^2 d'une solution au système linéarisé des nappes de tourbillon-courant, mais sans les bords fixes "haut" et "bas" Γ_\pm . L'analyse du système linéarisé (5.4.33) différant légèrement de [Cat13], on choisit de détailler complètement l'étude de ce système ci-après. Commençons par étudier la pression $(\underline{q}^{1,+}, \underline{q}^{1,-})$, qui satisfait le problème de Laplace linéaire homogène suivant (dans lequel $t \in [0, T]$ joue un rôle de paramètre – y compris à l'instant $t = 0$, ce qui donnera automatiquement la condition initiale restante $\underline{q}^{1,\pm}(t = 0) = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{q}^{1,\pm} = 0, \quad \text{dans } \Omega^\pm := \mathbb{T}^2 \times I_\pm, \\ [\underline{q}^1] = 0, \\ [\partial_{y_3} \underline{q}^1] = 0, \quad \text{sur } \Gamma := \mathbb{T}^2 \times \{y_3 = 0\}, \\ \partial_{y_3} \underline{q}^{1,\pm} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (5.4.34)$$

On renvoie au Chapitre 4 dans lequel nous avons dérivé le problème de Laplace satisfait par la pression (q^+, q^-) pour le système des nappes de tourbillon-courant *non-linéaire* (5.0.1). Le cas du système (5.4.33) est plus simple, car il s'agit du linéarisé autour de la nappe plane $\{y_3 = 0\}$.

Grâce au théorème de Lax-Milgram [Eva98], que l'on applique dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \left\{ (u^+, u^-) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-) \mid [u] = 0 \text{ et } \int_{\Omega^+} u^+ dx + \int_{\Omega^-} u^- dx = 0 \right\},$$

on montre qu'il existe une unique solution $(\underline{q}^{1,+}, \underline{q}^{1,-})$ au problème de Laplace (5.4.34), appartenant à l'espace \mathcal{H} . Afin de conclure sur le système (5.4.34), nous avons donc besoin de vérifier la condition de normalisation

$$\int_{\Omega^+} \underline{q}^{1,+} dx + \int_{\Omega^-} \underline{q}^{1,-} dx = 0. \quad (5.4.35)$$

Si $\underline{q}^{1,\pm}$ est solution du système (5.4.34) et satisfait la condition (5.4.35), nous pourrions alors affirmer qu'elle est *identiquement nulle*. Voyons maintenant d'où va effectivement provenir la condition (5.4.35). Il s'avère que l'on peut imposer à la solution exacte $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ du système des nappes de tourbillon-courant (5.0.1) de satisfaire une condition de normalisation sur la pression q_ε^\pm (celle-ci étant définie à une constante (dépendant du temps) près). En tout temps $t \in [0, T]$, on choisit de normaliser la pression exacte dans le système (5.0.1) en lui imposant d'être à moyenne nulle sur tout le domaine de référence $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (-1, 1)$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\Omega_\varepsilon^+(t)} q_\varepsilon^+(t, x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon^-(t)} q_\varepsilon^-(t, x) dx = 0, \quad (5.4.36)$$

où l'on a posé

$$\Omega_\varepsilon^\pm(t) := \{x \in \Omega \mid x_3 \gtrless \psi_\varepsilon(t, x')\}.$$

Il convient maintenant d'injecter les développements asymptotiques (5.1.5), (5.1.6) dans l'égalité (5.4.36), et d'identifier les puissances de ε . La démarche est la même que celle permettant d'obtenir les équations de la cascade BKW (5.2.3). Traitons le cas de q_ε^+ , les calculs sont analogues pour q_ε^- . À l'ordre 1 en ε , nous avons d'après (5.1.5) :

$$q_\varepsilon^+(t, x) = \varepsilon q^{1,+} \left(t, x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'), \frac{x_3 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Il nous faut dès lors calculer l'intégrale $I_\varepsilon^{1,+}$ suivante :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{1,+} &:= \int_{\Omega_\varepsilon^+(t)} q^{1,+} \left(t, x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'), \frac{x_3 - \psi_\varepsilon(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_\varepsilon(t, x')} q^{1,+} \left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) dy_3 dy', \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

où l'on a effectué le changement de variable $(y', y_3) \leftrightarrow (x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'))$. On décompose ensuite $q^{1,+}$ dans l'espace fonctionnel $\underline{S}^+ \oplus S_\star^+$:

$$q^{1,+}(t, y, Y_3, \theta) = \underline{q}^{1,+}(t, y) + \underbrace{q_\star^{1,+}(t, y, Y_3)}_{=0 \text{ par (5.4.22)}} + q_\star^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta),$$

avec $\underline{q}^{1,+} \in \underline{S}^+$ et $q_\star^{1,+} \in S_\star^+$. L'intégrale de (5.4.37) vaut alors

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{1,+} &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_\varepsilon(t, y')} \underline{q}^{1,+}(t, y) dy_3 dy' + \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_\varepsilon(t, y')} q_\star^{1,+} \left(t, y, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) dy_3 dy' \\ &=: \underline{I}^{1,+}(\varepsilon) + I_\star^{1,+}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Maintenant, en écrivant³

$$\psi_\varepsilon(t, y') = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

nous avons directement

$$\underline{\underline{I}}^{1,+}(\varepsilon) = \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^1 \underline{\underline{q}}^{1,+}(t, y) dy + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \int_{\Omega^+} \underline{\underline{q}}^{1,+}(t, y) dy + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.4.38)$$

Pour traiter l'intégrale $I_\star^{1,+}(\varepsilon)$, nous utilisons la décroissance exponentielle de $q_\star^{1,+}$:

$$\exists C, \delta > 0, \quad \forall t, y, Y_3, \theta, \quad \left| q_\star^{1,+}(t, y, Y_3, \theta) \right| \leq C e^{-\delta Y_3}.$$

En conséquence, l'intégrale $I_\star^{1,+}(\varepsilon)$ se majore comme suit :

$$\left| I_\star^{1,+}(\varepsilon) \right| \leq C \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_\varepsilon(t, y')} e^{-\frac{\delta}{\varepsilon} y_3} dy_3 dy' \leq C \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\delta}{\varepsilon} y_3} dy_3 = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.4.39)$$

En conclusion, si l'on réunit les estimations (5.4.38) et (5.4.39), on obtient à l'ordre 1 en ε :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^+(t)} q_\varepsilon^+(t, x) dx = \varepsilon \int_{\Omega^+} \underline{\underline{q}}^{1,+}(t, y) dy + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Les mêmes calculs donnent également pour q_ε^- :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^-(t)} q_\varepsilon^-(t, x) dx = \varepsilon \int_{\Omega^-} \underline{\underline{q}}^{1,-}(t, y) dy + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Ainsi, la condition (5.4.36) sera satisfaite à l'ordre 1 en ε si et seulement si

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\Omega^+} \underline{\underline{q}}^{1,+}(t, y) dy + \int_{\Omega^-} \underline{\underline{q}}^{1,-}(t, y) dy = 0,$$

d'où l'égalité (5.4.35). Ceci achève de montrer que la pression lente ($\underline{\underline{q}}^{1,+}, \underline{\underline{q}}^{1,-}$) est identiquement nulle.

Pour achever la résolution du système (5.4.33), il nous reste à déterminer ($\underline{\underline{u}}^{1,\pm}, \underline{\underline{H}}^{1,\pm}$). Comme nous avons montré que pour tout $t \in [0, T]$, la pression $\underline{\underline{q}}^{1,\pm}$ est nulle, les deux premières équations de (5.4.33) se réécrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \underline{\underline{u}}^{1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{\underline{u}}^{1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{\underline{H}}^{1,\pm} = 0, \\ \partial_t \underline{\underline{H}}^{1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{\underline{H}}^{1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{\underline{u}}^{1,\pm} = 0. \end{cases} \quad (5.4.40)$$

D'après la définition (5.1.1) de la nappe plane $U^{0,\pm}$, on remarque que la dérivée normale ∂_{y_3} n'intervient pas dans les deux équations du système (5.4.40). Posons alors $\mathcal{U}^\pm := (\underline{\underline{u}}^{1,\pm}, \underline{\underline{H}}^{1,\pm}) \in \mathbb{R}^6$, et définissons les matrices symétriques

$$M_j^\pm := \begin{bmatrix} u_j^{0,\pm} \mathbf{I}_3 & -H_j^{0,\pm} \mathbf{I}_3 \\ -H_j^{0,\pm} \mathbf{I}_3 & u_j^{0,\pm} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (5.4.41)$$

Le système (5.4.40) prend la forme d'un système hyperbolique symétrique, dont on a fixé la donnée initiale $\mathcal{U}^\pm|_{t=0}$ à zéro par souci de simplification (voir (5.2.2)) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}^\pm + M_1^\pm \partial_{y_1} \mathcal{U}^\pm + M_2^\pm \partial_{y_2} \mathcal{U}^\pm = 0, & (t, y', y_3) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm, \\ \mathcal{U}^\pm|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

En procédant par méthode d'énergie [BGS07], on obtient alors $\mathcal{U}^\pm \equiv 0$. Ceci achève le calcul de la moyenne lente $\underline{\underline{U}}^{1,\pm}$, qui est donc identiquement nulle.

³Rappelons que le développement asymptotique (5.1.6) de ψ_ε commence à l'ordre 2.

La moyenne rapide $\underline{U}^{1,\pm}$

Il reste à déterminer la partie “rapide” du coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$, dont on sait qu’elle est polarisée : nous avons $\widehat{U}^{1,\pm}(0) = \underline{U}^{1,\pm} = \Pi \underline{U}^{1,\pm} \in \text{Ker} A_3^\pm$. Ceci signifie que $\underline{U}^{1,\pm}$ s’écrit

$$\underline{U}^{1,\pm} = (u_1^{1,\pm}, u_2^{1,\pm}, 0, \underline{H}_1^{1,\pm}, \underline{H}_2^{1,\pm}, 0, 0). \quad (5.4.42)$$

Nous allons maintenant déterminer les composantes “tangentes” dans (5.4.42) liées à la vitesse et au champ magnétique tangentiels. Pour ce faire, on considère à nouveau le système (5.4.23), mais on ne passe plus à la limite $Y_3 \rightarrow \pm\infty$. Cette analyse préfigure là encore du cas général traité dans la Proposition 5.5.1. D’une part, il nous faut calculer explicitement le terme source $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$. Ce dernier faisant intervenir le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$, nous utiliserons l’expression (5.4.16) des coefficients de Fourier de $U^{1,\pm}$ obtenue précédemment. D’autre part, la première équation du système (5.4.23) fait intervenir la dérivée normale rapide du premier correcteur $U^{2,\pm}$, qui lui est *inconnu* à ce stade. Pour palier à cet obstacle, il sera donc naturel d’utiliser les contraintes que doit satisfaire le correcteur $U^{2,\pm}$, provenant des contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique. En effet, l’idée est que celles-ci permettent d’exprimer les dérivées normales en fonction des dérivées tangentes, ce que nous allons voir plus en détail ci-dessous.

Pour construire la moyenne rapide $\underline{U}^{1,\pm}$ qui est *polarisée* d’après (5.4.22), nous commencerons par projeter orthogonalement le système (5.4.23) sur $\text{Ker} A_3^\pm$; puis, afin d’éliminer le premier correcteur $U^{2,\pm}$ *inconnu*, nous nous servirons de la projection de ce même système (5.4.23) sur *l’orthogonal* de $\text{Ker} A_3^\pm$, ce qui revient à utiliser les contraintes de divergence nulle sur la vitesse et le champ magnétique. Cette démarche décrit en fait la condition “abstraite” (5.5.46b) annoncée par la Proposition 5.5.1 que doit satisfaire le terme source $F^{1,\pm}$.

► Le cas de F_1^\pm .

Le terme source F_1^\pm a déjà été traité ; en effet, l’égalité (5.4.25) et le résultat précédent sur la moyenne lente $\underline{U}^{1,\pm}$ donnent

$$\widehat{F}_1^\pm(0) = \mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm}. \quad (5.4.43)$$

Grâce à la polarisation de $\underline{U}^{1,\pm} = \Pi \underline{U}^{1,\pm}$, on peut affirmer que $A_3^\pm \partial_{y_3} \underline{U}^{1,\pm} = 0$ (quel que soit $y_3 \geq 0$). Par conséquent, l’opérateur lent $\mathcal{T}_s^\pm(\partial)$ dans (5.4.43) peut être remplacé par l’opérateur lent *tangentiel* $\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial)$:

$$\widehat{F}_1^\pm(0) = \mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm}. \quad (5.4.44)$$

► Le cas de F_2^\pm .

En reprenant la décomposition (5.4.18) du profil principal $U^{1,\pm}$, on obtient :

$$\partial_{Y_3} U^{1,\pm}(t, y, Y_3, \theta) = \partial_{Y_3} \underline{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3) + \sum_{k \neq 0} \partial_{Y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3, k) e^{ik\theta}.$$

Par conséquent, le terme source F_2^\pm (dont on rappelle la définition (5.4.7)) s’écrit :

$$F_2^\pm = \partial_\theta \psi^2(t, y', \theta) \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} \underline{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3) + \partial_\theta \psi^2(t, y', \theta) \mathcal{A}^\pm \sum_{k \neq 0} \partial_{Y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3, k) e^{ik\theta}. \quad (5.4.45)$$

Le premier terme du membre de droite de (5.4.45) est à moyenne nulle sur le tore \mathbb{T} . Par conséquent, en appliquant l’opérateur de moyenne sur \mathbb{T} , et en utilisant (5.4.16), il vient :

$$\widehat{F}_2^\pm(0) = \pm i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell |\ell| \gamma^\pm(t, y, \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp |\ell| Y_3} \mathcal{A}^\pm \mathcal{R}^\pm(\ell).$$

Ensuite, par définition du vecteur $\mathcal{R}^\pm(\ell)$, nous avons $\mathcal{R}^\pm(\ell) \in \text{Ker}(i\mathcal{A}^\pm \mp \text{sgn}(\ell)A_3^\pm)$ (cf. Annexe A.2). Par conséquent, la moyenne du terme source F_2^\pm se réécrit :

$$\widehat{F}_2^\pm(0) = \pm \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell |\ell| \gamma^\pm(t, y, \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp i \ell Y_3} \left(\pm \text{sgn}(\ell) A_3^\pm \mathcal{R}^\pm(\ell) \right). \quad (5.4.46)$$

Notons $(e_j)_{1 \leq j \leq 7}$ la base canonique de \mathbb{C}^7 . En ne gardant que la composante orthogonale à $\text{Ker}(A_3^\pm)$ de $\mathcal{R}^\pm(\ell)$, on vérifie aisément que

$$A_3^\pm \mathcal{R}^\pm(\ell) = A_3^\pm (I - \Pi) \mathcal{R}^\pm(\ell) = \pm i \text{sgn}(\ell) \left(c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6 \right) + \underbrace{\left((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2 \right)}_{= e_3} A_3^\pm e_7.$$

Nous renvoyons à l'Annexe A.1 pour l'expression des vecteurs $(A_3^\pm e_3, A_3^\pm e_6, e_3)$ qui engendrent $\text{Im}(A_3^\pm)$. Maintenant, pour alléger l'écriture de $\widehat{F}_2^\pm(0)$, on pose :

$$\begin{aligned} \lambda^\pm(t, y, Y_3) &:= \pm i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell |\ell| \gamma^\pm(t, y, \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp i \ell Y_3}, \\ \mu^\pm(t, y, Y_3) &:= \left((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell^2 \gamma^\pm(t, y, \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp i \ell Y_3}, \end{aligned} \quad (5.4.47)$$

de sorte que la moyenne de F_2^\pm sur le tore s'écrit finalement

$$\widehat{F}_2^\pm(0) = \lambda^\pm \left(c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6 \right) + \mu^\pm e_3. \quad (5.4.48)$$

Ceci achève provisoirement le traitement du terme source $\widehat{F}_2^\pm(0)$.

► Le cas de F_3^\pm .

D'abord, remarquons que les dérivées $\partial_\theta \mathbb{A}_1$ et $\partial_\theta \mathbb{A}_2$ présentes dans $F_3^\pm(0)$ (voir (5.4.7)) ont une moyenne nulle sur le tore. Il suffit donc de traiter le terme associé à \mathbb{A}_3 . On a en particulier⁴ (avec la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés $p, q \in \{1, \dots, 7\}$) :

$$\widehat{\mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(0) = \partial_{pq}^2 f_3 \widehat{U}_p^{1,\pm}(0) \widehat{U}_q^{1,\pm}(0) + \sum_{\ell \neq 0} \partial_{pq}^2 f_3 \widehat{U}_p^{1,\pm}(\ell) \widehat{U}_q^{1,\pm}(-\ell). \quad (5.4.49)$$

D'une part, en écrivant $\widehat{U}^{1,\pm}(0) = \underline{U}^{1,\pm}$ et en dérivant par rapport à Y_3 , le premier terme de droite de (5.4.49) donne :

$$\partial_{Y_3} \left(\partial_{pq}^2 f_3 \widehat{U}_p^{1,\pm}(0) \widehat{U}_q^{1,\pm}(0) \right) = 2 \partial_{pq}^2 f_3 \partial_{Y_3} \underline{U}_p^{1,\pm} \underline{U}_q^{1,\pm}. \quad (5.4.50)$$

Comme $\underline{U}^{1,\pm}$ est polarisé, il est de la forme (5.4.42). Ainsi, en tenant compte de l'expression (A.3.8) de la différentielle seconde \mathbb{A}_3 (cf. Annexe A.3), le terme donné par (5.4.50) est identiquement nul. D'autre part, en utilisant (5.4.16), le deuxième terme à droite de (5.4.49) s'écrit comme suit :

$$\sum_{\ell \neq 0} \partial_{pq}^2 f_3 \widehat{U}_p^{1,\pm}(\ell) \widehat{U}_q^{1,\pm}(-\ell) = \sum_{\ell \neq 0} \gamma^\pm(\ell) \gamma^\pm(-\ell) e^{\mp 2i \ell Y_3} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(\ell) \mathcal{R}_q^\pm(-\ell).$$

Grâce à la symétrie des dérivées secondes de f_3 , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p, q \leq 7} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(\ell) \mathcal{R}_q^\pm(-\ell) &= \sum_{p=1}^7 \partial_p^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(\ell) \mathcal{R}_p^\pm(-\ell) + 2 \text{Re} \left[\sum_{1 \leq p < q \leq 7} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(\ell) \mathcal{R}_q^\pm(-\ell) \right] \\ &= S_3^{p=q} + 2 \text{Re} \left[S_3^{p < q} \right], \end{aligned}$$

⁴Les notations adoptées dans les calculs ci-après sont expliquées en détails dans l'Annexe A.3.

où les quantités $S_3^{p=q}$ et $S_3^{p<q}$ sont données explicitement en annexe par (A.3.9) avec $k = 0$. Comme $S_3^{p<q}$ est imaginaire pur, on aboutit à l'expression :

$$\sum_{1 \leq p, q \leq 7} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(\ell) \mathcal{R}_q^\pm(-\ell) = 2((c^\pm)^2 - (b^\pm)^2) e_3.$$

En dérivant par rapport à Y_3 , nous obtenons finalement :

$$\widehat{F}_3^\pm(0) = \pm 4((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\ell| \gamma^\pm(t, y, \ell) \gamma^\pm(t, y, -\ell) e^{\mp 2|\ell|Y_3} e_3.$$

Remarquons ici que seule la troisième composante de $\widehat{F}_3^\pm(0)$ est non nulle ; en particulier, les composantes *tangentielles* 1, 2, 4, 5 auront une contribution *nulle*. Pour la suite, simplifions les notations en posant

$$\nu^\pm(t, y, Y_3) := \mp 2((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\ell| \gamma^\pm(t, y, \ell) \gamma^\pm(t, y, -\ell) e^{\mp 2|\ell|Y_3}, \quad (5.4.51)$$

de sorte que la moyenne de F_3^\pm sur le tore vérifie la relation

$$-\frac{1}{2} \widehat{F}_3^\pm(0) = \nu^\pm e_3. \quad (5.4.52)$$

► **Conclusion sur la moyenne rapide $\underline{U}^{1,\pm}$.**

En utilisant (5.4.44), (5.4.48) et (5.4.52), le terme source $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$ se réécrit de la façon suivante :

$$\widehat{F}^{1,\pm}(0) = -\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm} + \lambda^\pm (c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6) + (\mu^\pm + \nu^\pm) e_3.$$

Revenons au système (5.4.23) : en écrivant $\widehat{U}^{2,\pm}(0) = \underline{U}^{2,\pm}(t, y) + \underline{U}^{2,\pm}(t, y, Y_3)$, on aboutit finalement à l'équation :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{U}^{2,\pm} = -\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm} + \lambda^\pm (c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6) + (\mu^\pm + \nu^\pm) e_3, \quad (5.4.53a)$$

à laquelle il ne faut pas oublier d'adjoindre la contrainte sur le profil $H^{2,\pm}$ issue de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Cette équation s'obtient à l'aide de la 7^e composante de (5.4.53a) dans laquelle on remplace u par H dans les membres de gauche et de droite. Nous avons explicitement :

$$\partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -\partial_{y_1} \underline{H}_1^{1,\pm} - \partial_{y_2} \underline{H}_2^{1,\pm} + \lambda^\pm b^\pm. \quad (5.4.53b)$$

Les moyennes rapides $\underline{U}^{1,\pm}$ et $\underline{U}^{2,\pm}$ doivent donc satisfaire le système (5.4.53), dont les équations s'expriment explicitement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{2,\pm} - H_1^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -(\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm})_1 + \lambda^\pm (c^\pm u_1^{0,\pm} - b^\pm H_1^{0,\pm}) \\ u_2^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{2,\pm} - H_2^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -(\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm})_2 + \lambda^\pm (c^\pm u_2^{0,\pm} - b^\pm H_2^{0,\pm}) \\ \partial_{Y_3} \underline{q}^{2,\pm} = -\underbrace{(\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm})_3}_{=0 \text{ par (5.4.22)}} + \mu^\pm + \nu^\pm \\ H_1^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{2,\pm} - u_1^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -(\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm})_4 + \lambda^\pm (c^\pm H_1^{0,\pm} - b^\pm u_1^{0,\pm}) \\ H_2^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{2,\pm} - u_2^{0,\pm} \partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -(\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm})_5 + \lambda^\pm (c^\pm H_2^{0,\pm} - b^\pm u_2^{0,\pm}) \\ 0 = -\underbrace{(\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{U}^{1,\pm})_6}_{=0 \text{ par (5.4.22)}} \\ \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{2,\pm} = -\partial_{y_1} \underline{u}_1^{1,\pm} - \partial_{y_2} \underline{u}_2^{1,\pm} + \lambda^\pm c^\pm \\ \partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -\partial_{y_1} \underline{H}_1^{1,\pm} - \partial_{y_2} \underline{H}_2^{1,\pm} + \lambda^\pm b^\pm. \end{array} \right. \quad (5.4.54)$$

En injectant les contraintes 7 et 8 du système (5.4.54) dans les équations 1, 2, 4, 5, nous pouvons éliminer le correcteur $\underline{U}^{2,\pm}$ dans le membre de gauche de (5.4.54), et nous obtenons le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \underline{u}_1^{1,\pm} + \sum_{j=1}^2 (u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{u}_1^{1,\pm} - H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{H}_1^{1,\pm}) = 0 \\ \partial_t \underline{u}_2^{1,\pm} + \sum_{j=1}^2 (u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{u}_2^{1,\pm} - H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{H}_2^{1,\pm}) = 0 \\ \partial_t \underline{H}_1^{1,\pm} + \sum_{j=1}^2 (u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{H}_1^{1,\pm} - H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{u}_1^{1,\pm}) = 0 \\ \partial_t \underline{H}_2^{1,\pm} + \sum_{j=1}^2 (u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{H}_2^{1,\pm} - H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \underline{u}_2^{1,\pm}) = 0 \\ \partial_{Y_3} \underline{q}^{2,\pm} = \mu^\pm + \nu^\pm \\ \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{2,\pm} = -\partial_{y_1} \underline{u}_1^{1,\pm} - \partial_{y_2} \underline{u}_2^{1,\pm} + \lambda^\pm c^\pm \\ \partial_{Y_3} \underline{H}_3^{2,\pm} = -\partial_{y_1} \underline{H}_1^{1,\pm} - \partial_{y_2} \underline{H}_2^{1,\pm} + \lambda^\pm b^\pm. \end{array} \right. \quad (5.4.55)$$

Définissons le vecteur \mathcal{V}^\pm par :

$$\mathcal{V}^\pm := (\underline{u}_1^{1,\pm}, \underline{u}_2^{1,\pm}, \underline{H}_1^{1,\pm}, \underline{H}_2^{1,\pm}).$$

Alors les quatre premières équations du système (5.4.55) permettent d'en déduire l'équation aux dérivées partielles suivante sur \mathcal{V}^\pm :

$$\partial_t \mathcal{V}^\pm + \mathcal{M}_1^\pm \partial_{y_1} \mathcal{V}^\pm + \mathcal{M}_2^\pm \partial_{y_2} \mathcal{V}^\pm = 0, \quad (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm. \quad (5.4.56)$$

Les matrices *symétriques* $\mathcal{M}_1^\pm, \mathcal{M}_2^\pm \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sont définies par :

$$\mathcal{M}_j^\pm := \begin{bmatrix} u_j^{0,\pm} & 0 & -H_j^{0,\pm} & 0 \\ 0 & u_j^{0,\pm} & 0 & -H_j^{0,\pm} \\ -H_j^{0,\pm} & 0 & u_j^{0,\pm} & 0 \\ 0 & -H_j^{0,\pm} & 0 & u_j^{0,\pm} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (5.4.57)$$

Comme pour la moyenne lente $\underline{U}^{1,\pm}$, rappelons que la donnée initiale associée à l'EDP (5.4.56) est libre, et on la choisit *identiquement nulle* conformément à (5.2.2). Par conséquent, toujours en procédant par méthode d'énergie [BGS07], on en déduit que l'unique solution du système hyperbolique symétrique (5.4.56), avec donnée initiale nulle, est la solution nulle : $\mathcal{V}^\pm \equiv 0$.

En conclusion, nous avons montré que la moyenne rapide $\underline{U}^{1,\pm}$ est nulle. Le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$ donné par (5.4.21) est donc identiquement nul. Ceci achève de traiter le cas $k = 0$ pour le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(0)$.

Bilan

À ce stade nous avons montré que le profil principal $U^{1,\pm}$ n'a aucune composante dans \underline{S}^\pm . Autrement dit, $U^{1,\pm}$ ne peut être localisé que près de la frontière $\{y_3 = 0\}$. De plus, les coefficients de Fourier de $U^{1,\pm}$ sont donnés par la formule (5.4.16) :

$$\widehat{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3, k) = \gamma^\pm(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

où $\mathcal{R}^\pm(k)$ est donné par (A.2.1a). Pour tenir compte du cas $k = 0$, on choisit de poser $\gamma^\pm(k = 0) \equiv 0$. La fonction γ^\pm est pour l'instant inconnue, et on a une expression plus précise en $y_3 = 0$:

$$\widehat{U}^{1,\pm}(t, y', y_3 = 0, Y_3, k) = \pm |k| \widehat{\psi}^2(t, y', k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k). \quad (5.4.58)$$

En particulier, les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)|_{y_3=0}$ sont entièrement déterminés par les coefficients de Fourier du profil principal ψ^2 associé au front. Dans le Paragraphe 5.4.3 suivant, nous allons voir comment construire ψ^2 , ce qui *in fine* déterminera complètement le profil principal $U^{1,\pm}|_{y_3=0}$. Nous reviendrons ultérieurement sur l'expression de $U^{1,\pm}$ pour $y_3 \gtrless 0$ *quelconque* (voir Paragraphe 5.4.4).

5.4.3 Équation de Hamilton-Jacobi satisfaite par le profil ψ^2

Pour achever le calcul du profil $U^{1,\pm}|_{y_3=0}$, il nous reste à déterminer le profil principal ψ^2 associé au front. Pour cela, nous allons utiliser le système (5.4.12) que doit satisfaire le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$.

Nous considérons dans tout ce paragraphe un mode de Fourier $k \neq 0$, et nous allons mettre en évidence des conditions nécessaires que doit satisfaire le profil ψ^2 . Plus précisément, nous allons établir que ψ^2 obéit à une équation non-linéaire non-locale de type Hamilton-Jacobi, similaire à celle intervenant dans l'étude des ondes de Rayleigh faiblement non-linéaires [Lar83, Par85, HIZ95]. Ce type d'équation a été étudiée par Hunter [Hun06], Benzoni-Gavage [BG09] et Marcou [Mar10]. Nous reviendrons plus en détails sur cette équation ci-après.

Formule de dualité et condition nécessaire d'orthogonalité

Intéressons-nous temporairement au système général couplé suivant (pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) :

$$\begin{cases} L_k^\pm U^\pm = \mathcal{F}^\pm, & Y_3 \geq 0, \\ B^+ U^+ + B^- U^- - ik\varphi(\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = \mathcal{G}, & Y_3 = 0, \end{cases} \quad (5.4.59)$$

où \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^- sont des fonctions quelconques données, supposées régulières sur \mathbb{R}_\pm , $\varphi \in \mathbb{C}$ (qui jouera le rôle de $\widehat{\psi}^3(k)$) et $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^5$. Ici on ne considère qu'une seule variable, à savoir Y_3 ; l'étude du système (5.4.59) va nous permettre d'analyser le cas particulier du système (5.4.12) dont on aura pris la trace en $\{y_3 = 0\}$.

On introduit l'opérateur dual $(L_k^\pm)^* := -{}^t A_3^\pm - ik {}^t \mathcal{A}^\pm$, et on se donne $U^\pm, V^\pm : \mathbb{R}_\pm \rightarrow \mathbb{C}^7$ deux fonctions régulières, et décroissant suffisamment vite vers 0 en $\pm\infty$. Ci-après, nous dénoterons par “ \cdot ” le produit hermitien de \mathbb{C}^7 , défini par :

$$\forall U, V \in \mathbb{C}^7, \quad U \cdot V := \sum_{j=1}^7 \overline{U_j} V_j.$$

En écrivant les vecteurs $U, V \in \mathbb{C}^7$ en colonne, le produit hermitien ci-dessus s'écrit plus simplement $U \cdot V = U^* V$, où “ $*$ ” est la notation standard désignant la transposée conjuguée de matrices. En procédant à une intégration par parties, on obtient les deux formules de dualité suivantes (pour l'état “ $+$ ” et l'état “ $-$ ”) :

$$\int_{\mathbb{R}_\pm} V^\pm \cdot L_k^\pm U^\pm dY_3 = \int_{\mathbb{R}_\pm} (L_k^\pm)^* V^\pm \cdot U^\pm dY_3 \mp V^\pm \cdot A_3^\pm U^\pm|_{Y_3=0}. \quad (5.4.60)$$

Pour gérer le terme sur $\{Y_3 = 0\}$ dans (5.4.60), nous utilisons les conditions de bord du système (5.4.59). Nous noterons par la suite $U^\pm = (u^\pm, H^\pm, q^\pm)$ et $V^\pm = (v^\pm, B^\pm, p^\pm)$. Par commodité, nous réécrivons les conditions de bord de (5.4.59) en détail :

$$\begin{cases} u_3^+ &= ikc^+ \varphi + \mathcal{G}_1, \\ H_3^+ &= ikb^+ \varphi + \mathcal{G}_2, \\ u_3^- &= ikc^- \varphi + \mathcal{G}_3, \\ H_3^- &= ikb^- \varphi + \mathcal{G}_4, \\ q^+ - q^- &= \mathcal{G}_5. \end{cases} \quad (5.4.61)$$

Nous pouvons maintenant gérer le terme $V^\pm \cdot A_3^\pm U^\pm|_{Y_3=0}$ dans la relation (5.4.60); nous avons, pour $Y_3 = 0$:

$$\begin{aligned} A_3^+ U^+ &= u_3^+ A_3^+ e_3 + H_3^+ A_3^+ e_6 + q^+ A_3^+ e_7 \\ &= (ikc^+ \varphi + \mathcal{G}_1) A_3^+ e_3 + (ikb^+ \varphi + \mathcal{G}_2) A_3^+ e_6 + q^+ \underbrace{A_3^+ e_7}_{= e_3}. \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$A_3^- U^- = (ikc^- \varphi + \mathcal{G}_3) A_3^- e_3 + (ikb^- \varphi + \mathcal{G}_4) A_3^- e_6 + q^- \underbrace{A_3^- e_7}_{=e_3}.$$

On aboutit aux deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} V^+ \cdot L_k^+ U^+ dY_3 &= \int_0^{+\infty} (L_k^+)^* V^+ \cdot U^+ dY_3 - q^+ V^+ \cdot e_3|_{Y_3=0} \\ &\quad - (ikc^+ \varphi + \mathcal{G}_1) V^+ \cdot A_3^+ e_3|_{Y_3=0} - (ikb^+ \varphi + \mathcal{G}_2) V^+ \cdot A_3^+ e_6|_{Y_3=0}, \end{aligned} \quad (5.4.62a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 V^- \cdot L_k^- U^- dY_3 &= \int_{-\infty}^0 (L_k^-)^* V^- \cdot U^- dY_3 + q^- V^- \cdot e_3|_{Y_3=0} \\ &\quad + (ikc^- \varphi + \mathcal{G}_3) V^- \cdot A_3^- e_3|_{Y_3=0} + (ikb^- \varphi + \mathcal{G}_4) V^- \cdot A_3^- e_6|_{Y_3=0}. \end{aligned} \quad (5.4.62b)$$

Nous souhaitons maintenant utiliser la dernière condition de bord dans (5.4.61). En remarquant que le terme de bord $q^\pm V^\pm \cdot e_3|_{Y_3=0}$ dans (5.4.62) vaut simplement $q^\pm \overline{v_3^\pm}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} q^+ \overline{v_3^+} + q^- \overline{v_3^-} &= \overline{v_3^+} (q^+ - q^-) + q^- (\overline{v_3^+} + \overline{v_3^-}) \\ &= \overline{v_3^+} \mathcal{G}_5 + q^- (\overline{v_3^+} + \overline{v_3^-}). \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de soustraire (5.4.62a) à (5.4.62b) afin d'utiliser la dernière condition de bord de (5.4.61). On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} V^+ \cdot L_k^+ U^+ dY_3 - \int_{-\infty}^0 V^- \cdot L_k^- U^- dY_3 \\ = \int_0^{+\infty} (L_k^+)^* V^+ \cdot U^+ dY_3 - \int_{-\infty}^0 (L_k^-)^* V^- \cdot U^- dY_3 \end{aligned} \quad (5.4.63a)$$

$$- ik \varphi (c^+ V^+ \cdot A_3^+ e_3 + b^+ V^+ \cdot A_3^+ e_6 + c^- V^- \cdot A_3^- e_3 + b^- V^- \cdot A_3^- e_6) |_{Y_3=0} \quad (5.4.63b)$$

$$- q^- (\overline{v_3^+} + \overline{v_3^-}) |_{Y_3=0} \quad (5.4.63c)$$

$$- (\mathcal{G}_1 V^+ \cdot A_3^+ e_3 + \mathcal{G}_2 V^+ \cdot A_3^+ e_6 + \mathcal{G}_3 V^- \cdot A_3^- e_3 + \mathcal{G}_4 V^- \cdot A_3^- e_6 + \mathcal{G}_5 V^+ \cdot e_3) |_{Y_3=0}.$$

Afin d'en déduire une condition d'orthogonalité sur les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} du système (5.4.59), nous voudrions annuler dans un premier temps les deux intégrales dans (5.4.63a), ainsi que le terme de (5.4.63b) car il contient le scalaire φ (qui, on le rappelle, jouera le rôle du profil $\widehat{\psi}^3(k)$ *inconnu* à ce stade). Puis, on voudra aussi annuler le terme de (5.4.63c) afin d'éliminer q^- , de sorte que les termes de bord restants dans (5.4.63) ne feront plus intervenir que le terme source \mathcal{G} de (5.4.59) et les fonctions "test" V^\pm . Pour ce faire, nous introduisons le *problème dual* suivant, que devra satisfaire le couple de fonctions test (V^+, V^-) :

$$\begin{cases} (L_k^\pm)^* V^\pm = 0, & Y_3 \geq 0, \\ c^+ ({}^t A_3^+ V^+)_3 + b^+ ({}^t A_3^+ V^+)_6 + c^- ({}^t A_3^- V^-)_3 + b^- ({}^t A_3^- V^-)_6 = 0, & Y_3 = 0, \\ \overline{v_3^+} + \overline{v_3^-} = 0, & Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.4.64)$$

La notation $({}^t A_3 V)_j$ dans le système (5.4.64) désigne la j -ème composante du vecteur ${}^t A_3 V$. En premier lieu, on se concentre sur la résolution de la première équation du système (5.4.64), c'est-à-dire :

$$- {}^t A_3^\pm \partial_{Y_3} V^\pm - ik {}^t A^\pm V^\pm = 0, \quad Y_3 \geq 0. \quad (5.4.65)$$

Un problème analogue a déjà été résolu au Paragraphe 5.4.1 (voir (5.4.13)), pour les matrices A_3^\pm et \mathcal{A}^\pm au lieu de leur transposée. Pour $k \neq 0$, les solutions de (5.4.65) s'écrivent sous la forme

$$V^\pm(Y_3, k) = \lambda^\pm(k) e^{-kY_3} \mathbf{L}^\pm + \mu^\pm(k) e^{kY_3} \overline{\mathbf{L}}^\pm,$$

où \mathbf{L}^\pm engendre $\text{Ker}(i {}^t \mathcal{A}^\pm - {}^t A_3^\pm)^5$ et est donné explicitement par la formule (A.1.4) (cf. Annexe A.1). Pour que V^\pm n'explose pas en $\pm\infty$, nous choisissons :

$$V^\pm(Y_3, k) = \alpha^\pm(k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^\pm(k), \quad (5.4.66)$$

avec $\mathcal{L}^\pm \in \mathbb{C}^7$ donné par (A.2.1b). Afin de déterminer les coefficients $\alpha^\pm(k)$, il nous reste à utiliser les conditions de bord dans le système dual (5.4.64). Ces dernières se réécrivent sous forme détaillée comme suit (rappelons que le vecteur V^\pm a pour composantes (v^\pm, B^\pm, p^\pm) et qu'on l'évalue ici en $Y_3 = 0$) :

$$\begin{cases} v_3^+ + v_3^- = 0, \\ c^+ (u_1^{0,+} v_1^+ + u_2^{0,+} v_2^+ + H_1^{0,+} B_1^+ + H_2^{0,+} B_2^+ + p^+) \\ \quad - b^+ (H_1^{0,+} v_1^+ + H_2^{0,+} v_2^+ + u_1^{0,+} B_1^+ + u_2^{0,+} B_2^+) \\ \quad + c^- (u_1^{0,-} v_1^- + u_2^{0,-} v_2^- + H_1^{0,-} B_1^- + H_2^{0,-} B_2^- + p^-) \\ \quad - b^- (H_1^{0,-} v_1^- + H_2^{0,-} v_2^- + u_1^{0,-} B_1^- + u_2^{0,-} B_2^-) = 0. \end{cases}$$

Ensuite, on injecte l'expression (5.4.66) de $V^\pm|_{Y_3=0}$ dans ces conditions de bord, ce qui va nous donner un système de taille 2×2 sur les coefficients α^+ et α^- . Après simplifications, on obtient le système :

$$\begin{cases} \tau (\alpha^+ - \alpha^-) = 0, \\ \tau (((b^+)^2 - (c^+)^2) \alpha^+ + ((b^-)^2 - (c^-)^2) \alpha^-) = 0. \end{cases} \quad (5.4.67)$$

Ceci nous permet de définir un déterminant de Lopatinskii *dual* Δ^* :

$$\Delta^*(\tau, \xi_1, \xi_2) := \begin{vmatrix} \tau & -\tau \\ \tau ((b^+)^2 - (c^+)^2) & \tau ((b^-)^2 - (c^-)^2) \end{vmatrix} = -\tau^2 \Delta(\tau, \xi_1, \xi_2), \quad (5.4.68)$$

où l'on rappelle que Δ désigne le déterminant de Lopatinskii défini par (5.3.16). On constate que le déterminant de Lopatinskii dual Δ^* admet une racine **double** en $\tau = 0$, contrairement à Δ qui, comme on l'a vu au Paragraphe 5.3.2, n'admet que des racines simples. Ceci est une différence notable avec le cas des systèmes *hyperboliques* pour lesquels le système dual hérite des mêmes propriétés que le système de départ. On pourra par exemple consulter dans un cadre général [BGS07, Chap.4] pour de plus amples détails sur le système dual (ou "adjoint") et les déterminants de Lopatinskii Δ et Δ^* ; on peut aussi se référer au cas des ondes de surface faiblement non-linéaires étudiées par Coulombel et Benzoni-Gavage [BGC12], où l'hypothèse sur la simplicité des racines du déterminant de Lopatinskii est cruciale pour pouvoir aboutir à une équation d'amplitude.

La racine double $\tau = 0$ introduit ici une "dégénérescence" du système (5.4.67), puisque ce dernier devient en effet trivial. Cela signifie que l'ensemble des solutions du système dual (5.4.64) forme un espace vectoriel de dimension 2, contrairement au système de départ (5.4.4) dont l'ensemble des solutions forme une droite vectorielle (voir notamment l'expression (5.4.16)). Afin de ne garder que des espaces de solutions de dimension 1 (pour avoir *in fine* une *droite* d'onde de surface), il nous faut exclure le cas où $\tau = 0$. Ceci nous permettra à la fin de ce paragraphe d'obtenir l'équation d'amplitude (5.4.100) satisfaite par le profil principal ψ^2 associé au front.

Il se trouve que l'on peut toujours se ramener au cas où $\tau \neq 0$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que le système des nappes de tourbillon-courant (5.0.1) est invariant par changement de référentiel galiléen. Dans un souci de clarté, nous ne rentrons pas dans les détails complets au sein de ce paragraphe ; nous

⁵Rappelons que le noyau de $i {}^t \mathcal{A}^\pm - {}^t A_3^\pm$ est de dimension 1 lorsqu'on se place soit dans le cas où $\tau \neq 0$ et $(b^\pm)^2 \neq (c^\pm)^2$, soit dans le cas où $\tau = 0$, $(b^\pm)^2 \neq (a^\pm)^2$ et $b \neq 0$ (voir Annexe A.1). Ci-après, nous éliminerons ce second cas, car nous allons voir que l'on peut toujours se ramener au cas où $\tau \neq 0$. Grâce à l'hypothèse (H3), la condition $(b^\pm)^2 \neq (c^\pm)^2$ sera également assurée.

renvoyons à l'Annexe A pour une discussion plus approfondie concernant ce changement de référentiel. Dans tout ce qui suit, nous supposons donc $\tau \neq 0$. Ainsi, le système (5.4.67) se simplifie comme suit :

$$\begin{cases} \alpha^+ = \alpha^- \\ \alpha^+ ((b^+)^2 + (b^-)^2 - (c^+)^2 - (c^-)^2) = 0. \end{cases} \quad (5.4.69)$$

La deuxième équation du système (5.4.69) est triviale, puisque (τ, ξ') est racine du déterminant de Lopatinskiï (5.3.16). Il nous reste alors la condition $\alpha^+ = \alpha^- (\neq 0)$, et nous choisissons de prendre par exemple $\alpha^+ = \alpha^- = 1$, de sorte que les fonctions test considérées dans (5.4.63) seront

$$V^\pm(Y_3, k) = e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^\pm(k). \quad (5.4.70)$$

Revenons à la formule de dualité (5.4.63), et explicitons le vecteur ${}^t A_3^\pm \mathcal{L}^\pm(k)$. Celui-ci s'écrit sous la forme $(0, 0, \ell_1^\pm, 0, 0, \ell_2^\pm, \pm i \operatorname{sgn}(k))$, où les composantes ℓ_1^\pm et ℓ_2^\pm sont donnés par :

$$\ell_1^\pm := 2(b^\pm)^2 - \tau c^\pm \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \ell_2^\pm := -2a^\pm b^\pm - \tau b^\pm \in \mathbb{R}. \quad (5.4.71)$$

Finalement, comme (V^+, V^-) est solution du système dual homogène (5.4.64), l'égalité (5.4.63) peut se simplifier et nous donne la *condition d'orthogonalité* suivante que doivent satisfaire les termes sources \mathcal{F}^\pm et \mathcal{G} du système (5.4.59) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-|k|Y_3} \mathcal{L}^+(k) \cdot \mathcal{F}^+ dY_3 - \int_{-\infty}^0 e^{|k|Y_3} \mathcal{L}^-(k) \cdot \mathcal{F}^- dY_3 \\ + \ell_1^+ \mathcal{G}_1 + \ell_2^+ \mathcal{G}_2 + \ell_1^- \mathcal{G}_3 + \ell_2^- \mathcal{G}_4 - i \operatorname{sgn}(k) \mathcal{G}_5 = 0. \end{aligned} \quad (5.4.72)$$

Nous revenons maintenant au problème (5.4.12) satisfait par le premier correcteur $(U^{2,\pm}|_{y_3=0}, \psi^3)$, auquel nous appliquons la condition d'orthogonalité (5.4.72). Les coefficients de Fourier $(\widehat{U}^{1,\pm}(k), \widehat{\psi}^2(k))$ associés au profil principal doivent donc nécessairement vérifier la relation suivante (pour tout $k \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-|k|Y_3} \mathcal{L}^+(k) \cdot \widehat{F}^{1,+}(k)|_{y_3=0} dY_3 - \int_{-\infty}^0 e^{|k|Y_3} \mathcal{L}^-(k) \cdot \widehat{F}^{1,-}(k)|_{y_3=0} dY_3 \\ + \ell_1^+ \widehat{G}_1^+(k) + \ell_2^+ \widehat{G}_2^+(k) + \ell_1^- \widehat{G}_1^-(k) + \ell_2^- \widehat{G}_2^-(k) = 0. \end{aligned} \quad (5.4.73)$$

On rappelle que les termes sources de bord $G^{1,+}$ et $G^{1,-}$ sont donnés par (5.4.10); en particulier, la coordonnée \mathcal{G}_5 correspondante est nulle. Il est important de noter que les termes sources $\widehat{F}^{1,\pm}(k)$ dans (5.4.73) sont évalués en $y_3 = 0$. Nous allons maintenant calculer explicitement chaque contribution dans (5.4.73) pour en déduire une équation satisfaite par le profil principal ψ^2 du front ψ_ε , dite *équation d'amplitude*.

Calcul des termes de bord de (5.4.73)

Avant tout, nous rappelons l'expression (5.4.58) de $\widehat{U}^{1,\pm}|_{y_3=0}$ que l'on a obtenue au paragraphe précédent :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{U}^{1,\pm}(t, y', y_3 = 0, Y_3, k) = \pm |k| \widehat{\psi}^2(t, y', k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k),$$

avec $\mathcal{R}^\pm(k)$ donné par (A.2.1a). Cette égalité est encore valable pour $k = 0$, *indépendamment* des valeurs de $\widehat{\psi}^2(0)$ et $\mathcal{R}^\pm(0)$. On omettra par la suite les variables (t, y') qui jouent un rôle de paramètres.

► **Traitement de \widehat{G}_1^\pm .**

Le k -ième coefficient de Fourier de G_1^\pm (donné par (5.4.10b)) vaut :

$$\widehat{G}_1^\pm = \partial_t \widehat{\psi}^2(k) + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) + \sum_{j=1}^2 \overline{\xi_j u_j^{1,\pm} |_{y_3=Y_3=0} \partial_\theta \psi^2(k)}. \quad (5.4.74)$$

On explicite le dernier terme à droite dans (5.4.74) :

$$\begin{aligned} \overline{u_j^{1,\pm} |_{y_3=Y_3=0} \partial_\theta \psi^2(k)} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{\partial_\theta \psi^2}(\ell) \widehat{u}_j^{1,\pm}(k-\ell) |_{y_3=Y_3=0} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} i \ell \widehat{\psi}^2(\ell) \left(\pm |k-\ell| \widehat{\psi}^2(k-\ell) \underbrace{\mathcal{R}_j^\pm(k-\ell)}_{=\xi_j c^\pm} \right) \\ &= \pm i \xi_j c^\pm \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell |k-\ell| \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) \\ &= \pm i \xi_j c^\pm \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\ell |k-\ell| + (k-\ell)|\ell|}{2} \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell), \end{aligned} \quad (5.4.75)$$

la toute dernière égalité étant obtenue *en symétrisant* le noyau de convolution. En injectant (5.4.75) dans (5.4.74), on obtient finalement :

$$\widehat{G}_1^\pm = \partial_t \widehat{\psi}^2(k) + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) \pm i c^\pm \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\ell |k-\ell| + (k-\ell)|\ell|}{2} \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell). \quad (5.4.76)$$

► **Traitement de \widehat{G}_2^\pm .**

Le calcul est similaire à celui de \widehat{G}_1^\pm , et on obtient :

$$\widehat{G}_2^\pm = \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) \pm i b^\pm \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\ell |k-\ell| + (k-\ell)|\ell|}{2} \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell). \quad (5.4.77)$$

► **Conclusion.** Compte tenu de (5.4.71) et des relations (5.4.76) et (5.4.77), on obtient après simplifications l'expression des termes de bord dans (5.4.73) :

$$\begin{aligned} &\ell_1^+ \widehat{G}_1^+ + \ell_2^+ \widehat{G}_2^+ + \ell_1^- \widehat{G}_1^- + \ell_2^- \widehat{G}_2^- \\ &= \left(2((b^+)^2 + (b^-)^2) - \tau(c^+ + c^-) \right) \partial_t \widehat{\psi}^2(k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left[\left(2(b^+)^2 - \tau c^+ \right) u_j^{0,+} - \left(2a^+ b^+ + \tau b^+ \right) H_j^{0,+} \right. \\ &\quad \quad \left. + \left(2(b^-)^2 - \tau c^- \right) u_j^{0,-} - \left(2a^- b^- + \tau b^- \right) H_j^{0,-} \right] \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) \\ &\quad + \frac{i}{2} \tau \left((b^+)^2 - (b^-)^2 - (c^+)^2 + (c^-)^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (\ell |k-\ell| + (k-\ell)|\ell|) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell). \end{aligned} \quad (5.4.78)$$

On appellera K_0 le noyau de convolution symétrique apparaissant à la dernière ligne de (5.4.78), c'est-à-dire :

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z}, \quad K_0(k, k') := k|k'| + k'|k|. \quad (5.4.79)$$

Calcul des termes intégrés de (5.4.73)

On cherche maintenant à évaluer les deux intégrales intervenant dans (5.4.73). Pour cela, rappelons que $F^{1,\pm}$ est donné par (5.4.7) et qu'on doit évaluer les coefficients de Fourier $(\widehat{F}^{1,\pm}(k))_{k \neq 0}$ en $y_3 = 0$.

► Termes linéaires associés à \widehat{F}_1^\pm .

Par linéarité, les coefficients de Fourier de F_1^\pm par rapport à θ sont donnés par

$$\widehat{F}_1^\pm = A_0 \partial_t \widehat{U}^{1,\pm} + \sum_{j=1}^3 A_j^\pm \partial_{y_j} \widehat{U}^{1,\pm}.$$

Il faut ici faire attention à la présence de la dérivée normale ∂_{y_3} , car le terme source F_1^\pm doit être évalué en $y_3 = 0$, donc l'expression de la trace (5.4.58) ne semble à première vue pas suffire pour calculer $\widehat{F}^{1,\pm}(k)|_{y_3=0}$. Toutefois, nous verrons que ce terme de dérivée normale ne posera finalement pas problème. Grâce à l'expression (5.4.58) de $\widehat{U}^{1,\pm}(y_3 = 0, Y_3, k)$, nous avons directement :

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{U}^{1,\pm}(0, Y_3, k) &= \pm |k| \partial_t \widehat{\psi}^2(k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \\ \partial_{y_j} \widehat{U}^{1,\pm}(0, Y_3, k) &= \pm |k| \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

On obtient alors (en $y_3 = 0$) :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_\pm} e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \widehat{F}_1^\pm(k) dY_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}_\pm} |k| e^{\mp 2|k| Y_3} dY_3 \left(\partial_t \widehat{\psi}^2(k) \mathcal{L}^\pm(k) \cdot A_0 \mathcal{R}^\pm(k) + \sum_{j=1}^2 \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) \mathcal{L}^\pm(k) \cdot A_j^\pm \mathcal{R}^\pm(k) \right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_\pm} e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot A_3^\pm \partial_{y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(0, Y_3, k) dY_3. \end{aligned} \quad (5.4.80)$$

Il s'avère que le terme dans la dernière ligne de (5.4.80) est **nul** et par conséquent la dérivée normale $\partial_{y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(y_3 = 0)$ n'intervient pas dans le calcul de $\widehat{F}^{1,\pm}(k)|_{y_3=0}$. En effet, rappelons que le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}$ du profil principal satisfait le système homogène (5.4.1), où y_3 joue un rôle de paramètre dans la *première* équation de ce système. Dans la suite, nous prendrons dorénavant y_3 *quelconque*. En s'inspirant d'un argument de Coulombel et Williams [CW16], on applique la formule de dualité (5.4.60) sur tout intervalle $(-\infty, Y_3]$ et $[Y_3, +\infty)$ (on illustre l'argument pour L_k^+ , et la méthode est la même pour L_k^-). En prenant une fonction V^+ régulière assez décroissante à l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Y_3}^{+\infty} V^+ \cdot L_k^+ \widehat{U}^{1,+}(y_3, Y_3', k) dY_3' = \int_{Y_3}^{+\infty} (L_k^+)^* V^+ \cdot \widehat{U}^{1,+} dY_3' \\ &\quad - V^+(Y_3) \cdot A_3^+ \widehat{U}^{1,+}(y_3, Y_3, k). \end{aligned}$$

On choisit V^+ comme étant une solution particulière du problème dual $(L_k^+)^* V^+ = 0$ (dont on rappelle l'expression générale (5.4.66)) et on aboutit dans un premier temps à l'égalité :

$$\mathcal{L}^+(k) \cdot A_3^+ \widehat{U}^{1,+}(y_3, Y_3, k) = 0, \quad \forall y_3, Y_3,$$

puis, en dérivant par rapport à y_3 et en évaluant en $y_3 = 0$, on obtient :

$$\mathcal{L}^+(k) \cdot A_3^+ \partial_{y_3} \widehat{U}^{1,+}(0, Y_3, k) = 0, \quad \forall Y_3. \quad (5.4.81)$$

Finalement, revenant à (5.4.80), on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{\pm}} e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot \widehat{F}_1^{\pm} dY_3 \\ &= \pm \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot A_0 \mathcal{R}^{\pm}(k) \partial_t \widehat{\psi}^2(k) + \sum_{j=1}^2 \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot A_j^{\pm} \mathcal{R}^{\pm}(k) \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) \right). \end{aligned} \quad (5.4.82)$$

Pour ne pas alourdir les calculs, on a choisi de ne pas expliciter les coefficients devant les dérivées partielles de $\widehat{\psi}^2(k)$ dans (5.4.82) ; on renvoie à (A.2.2) (cf. Annexe A) pour le calcul détaillé des termes $\mathcal{L}^{\pm} \cdot A_0 \mathcal{R}^{\pm}$ et $\mathcal{L}^{\pm} \cdot A_j^{\pm} \mathcal{R}^{\pm}$ pour $j = 1, 2$.

► **Termes quadratiques associés à \widehat{F}_2^{\pm} .**

Rappelons (voir (5.4.7)) l'expression $F_2^{\pm} = \partial_{\theta} \psi^2 \mathcal{A}^{\pm} \partial_{Y_3} U^{1,\pm} |_{y_3=0}$. Par conséquent, le k -ième coefficient de Fourier $\widehat{F}_2^{\pm}(k)$ s'écrit comme un produit de convolution :

$$\widehat{F}_2^{\pm}(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} i \ell \widehat{\psi}^2(\ell) \mathcal{A}^{\pm} \partial_{Y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(k - \ell).$$

D'après (5.4.58), on peut écrire

$$\partial_{Y_3} \widehat{U}^{1,\pm}(y_3 = 0, Y_3, k - \ell) = -|k - \ell|^2 e^{\mp|k - \ell|Y_3} \widehat{\psi}^2(k - \ell) \mathcal{R}^{\pm}(k - \ell),$$

et l'expression de $\widehat{F}_2^{\pm}(k)$ se simplifie comme suit :

$$\widehat{F}_2^{\pm}(k) = -i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell |k - \ell|^2 e^{\mp|k - \ell|Y_3} \widehat{\psi}^2(k - \ell) \widehat{\psi}^2(\ell) \mathcal{A}^{\pm} \mathcal{R}^{\pm}(k - \ell). \quad (5.4.83)$$

On peut maintenant calculer l'intégrale associée à $\widehat{F}_2^{\pm}(k)$ dans (5.4.73), et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot \widehat{F}_2^{\pm}(k) dY_3 = -i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\ell |k - \ell|^2}{|k - \ell| + |k|} \widehat{\psi}^2(k - \ell) \widehat{\psi}^2(\ell) \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot \mathcal{A}^{\pm} \mathcal{R}^{\pm}(k - \ell).$$

En utilisant l'expression (A.2.3) (cf. Annexe A), on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{\pm}} e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot \widehat{F}_2^{\pm} dY_3 \\ &= -\frac{i}{2} \tau \left((b^{\pm})^2 - (c^{\pm})^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{2\ell |k - \ell|^2}{|k - \ell| + |k|} \left(1 - \operatorname{sgn}(k - \ell) \operatorname{sgn}(k) \right) \widehat{\psi}^2(k - \ell) \widehat{\psi}^2(\ell). \end{aligned} \quad (5.4.84)$$

Là aussi on symétrise le noyau de convolution qui apparaît dans (5.4.84), en posant, pour tout $(k, k') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$K_1(k, k') := -\frac{k' k^2}{|k| + |k'|} \left(1 - \operatorname{sgn}(k) \operatorname{sgn}(k + k') \right) - \frac{k k'^2}{|k| + |k'|} \left(1 - \operatorname{sgn}(k') \operatorname{sgn}(k + k') \right). \quad (5.4.85)$$

► **Termes quadratiques associés à \widehat{F}_3^{\pm} .**

Rappelons (voir (5.4.7)) l'expression $F_3^{\pm} = \sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_{\theta} \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) + \partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})$. Le vecteur $\mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})$ est un élément de \mathbb{C}^7 dont la r -ième composante est

$$\partial_{pq}^2 f_{j,r}(U^{0,\pm}) U_p^{1,\pm} U_q^{1,\pm}, \quad (5.4.86)$$

où l'on a adopté la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés $p, q \in \{1, \dots, 7\}$. On renvoie à l'Annexe A.3 pour les expressions des différentielles secondes \mathbb{A}_j .

Commençons par traiter le cas de $\partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})$. Comme la différentielle seconde de f_3 est constante, on peut se permettre d'omettre le point $U^{0,\pm}$ en lequel on différentie, ce qui donne :

$$\widehat{\mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) = \partial_{pq}^2 f_3 \widehat{U_p^{1,\pm} U_q^{1,\pm}}(k).$$

On réécrit le coefficient de Fourier ci-dessus à l'aide d'un produit de convolution, puis on utilise l'expression (5.4.58) :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \partial_{pq}^2 f_3 \widehat{U}_p^{1,\pm}(k-\ell) \widehat{U}_q^{1,\pm}(\ell) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |k-\ell| |\ell| \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) e^{\mp(|k-\ell|+|\ell|)Y_3} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(k-\ell) \mathcal{R}_q^\pm(\ell). \end{aligned} \quad (5.4.87)$$

En dérivant par rapport à Y_3 , on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{Y_3} \widehat{\mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) &= \\ &\mp \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |k-\ell| |\ell| (|k-\ell| + |\ell|) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) e^{\mp(|k-\ell|+|\ell|)Y_3} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(k-\ell) \mathcal{R}_q^\pm(\ell), \end{aligned}$$

puis en intégrant sur \mathbb{R}_\pm :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_\pm} e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \widehat{\partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) dY_3 \\ = \mp \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{|k-\ell| |\ell| (|k-\ell| + |\ell|)}{|k-\ell| + |\ell| + |k|} \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p^\pm(k-\ell) \mathcal{R}_q^\pm(\ell). \end{aligned} \quad (5.4.88)$$

On renvoie de nouveau aux calculs détaillés dans l'Annexe A.3 afin d'achever le calcul de (5.4.88) ; on obtient finalement l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_\pm} e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \widehat{\partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) dY_3 \\ = -i\tau \left((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} K_2(k-\ell, \ell) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell), \end{aligned} \quad (5.4.89)$$

où l'on a posé, pour tout $(k, k') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$K_2(k, k') := -\frac{|k| |k'| (|k| + |k'|)}{|k| + |k'| + |k+k'|} \left(2 \operatorname{sgn}(k) \operatorname{sgn}(k') \operatorname{sgn}(k+k') + \operatorname{sgn}(k) + \operatorname{sgn}(k') \right). \quad (5.4.90)$$

Remarquons en particulier que K_2 est un noyau de convolution symétrique.

Nous traitons maintenant le terme $\sum_{j=1}^2 \xi_j \widehat{\partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k)$. Comme précédemment, avec la convention de sommation d'Einstein, nous avons :

$$\mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) = \partial_{pq}^2 f_j U_p^{1,\pm} U_q^{1,\pm}.$$

En utilisant (5.4.15), le calcul du k -ième coefficient de Fourier s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) &= ik \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \partial_{pq}^2 f_j \widehat{U}_p^{1,\pm}(k-\ell) \widehat{U}_q^{1,\pm}(\ell) \\ &= ik \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |k-\ell| |\ell| e^{\mp(|k-\ell|+|\ell|)Y_3} \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) \partial_{pq}^2 f_j \mathcal{R}_p^\pm(k-\ell) \mathcal{R}_q^\pm(\ell). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à Y_3 , il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_\pm} \xi_j e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \overline{\partial_{\theta\mathbb{A}_j}(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})(k)} dY_3 \\ &= i k \xi_j \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{|k-\ell||\ell|}{|k-\ell|+|\ell|+|k|} \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \partial_{pq}^2 f_j \mathcal{R}_p^\pm(k-\ell) \mathcal{R}_q^\pm(\ell). \end{aligned} \quad (5.4.91)$$

Une fois de plus, on renvoie aux calculs détaillés dans l'Annexe A.3 pour simplifier l'expression (5.4.91). Ainsi, en combinant (A.3.5) et (A.3.7), puis en symétrisant le noyau de convolution, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}_\pm} \xi_j e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \overline{\partial_{\theta\mathbb{A}_j}(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})(k)} dY_3 \\ &= -i\tau \left((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} K_3(k-\ell, \ell) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell), \end{aligned} \quad (5.4.92)$$

où l'on a posé, pour tout $(k, k') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$K_3(k, k') := \frac{|k||k'|(k+k')}{|k|+|k'|+|k+k'|} \left(2 + (\text{sgn}(k) + \text{sgn}(k')) \text{sgn}(k+k') \right). \quad (5.4.93)$$

Bilan

Tous les termes apparaissant dans la condition d'orthogonalité (5.4.73) ont été calculés. Définissons le noyau de convolution symétrique K par :

$$K(k, k') := \sum_{i=0}^3 K_i(k, k'), \quad \forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (5.4.94)$$

où les noyaux K_0, \dots, K_3 sont donnés par (5.4.79), (5.4.85), (5.4.90) et (5.4.93). En réunissant les résultats (5.4.78), (5.4.82), (5.4.84), (5.4.89) et (5.4.92), on en déduit finalement que $\widehat{\psi}^2(t, y', k)$ doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles suivante, pour tout $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 2\tau (c^+ + c^-) \partial_t \widehat{\psi}^2(k) + 2\tau \sum_{j=1}^2 \left(c^+ u_j^{0,+} + c^- u_j^{0,-} - b^+ H_j^{0,+} - b^- H_j^{0,-} \right) \partial_{y_j} \widehat{\psi}^2(k) \\ & - \frac{i}{2} \tau \left((b^+)^2 - (b^-)^2 - (c^+)^2 + (c^-)^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} K(k-\ell, \ell) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell) = 0. \end{aligned} \quad (5.4.95)$$

Comme $k \neq 0$, on remarque que $(k-\ell, \ell) \neq (0, 0)$, quel que soit $\ell \in \mathbb{Z}$. Par conséquent la série dans (5.4.95) est bien définie, pourvu qu'on ait suffisamment de décroissance sur la suite des coefficients de Fourier $(\widehat{\psi}^2(k))_{k \neq 0}$ (*i.e.* suffisamment de régularité sur la fonction ψ^2). En outre, on observe directement la "dégénérescence" du cas $\tau = 0$ dans l'équation (5.4.95), car celle-ci devient en effet triviale, et n'apporte aucune information sur le profil ψ^2 ; rappelons que l'on peut toujours supposer $\tau \neq 0$, quitte à effectuer un changement de référentiel galiléen convenable, et donc simplifier l'équation (5.4.95) par τ . Par ailleurs, il s'avère que les coefficients devant les dérivées partielles ∂_t , ∂_{y_1} et ∂_{y_2} dans (5.4.95) peuvent être reliés à la vitesse de groupe v (que l'on avait introduite au Paragraphe 5.3.2), comme mis en évidence par Marcou [Mar10] dans un cadre général (mais en dimension 2 d'espace). D'abord, on peut remarquer que le déterminant de Lopatinskii vérifie l'égalité suivante (voir la définition (5.3.16) du déterminant de Lopatinskii) :

$$\partial_\tau \Delta(\tau, \xi_1, \xi_2) = 2(c^+ + c^-).$$

Comme la fréquence (τ, ξ_1, ξ_2) que l'on s'est fixée est racine *simple* de Δ , on en déduit que $2(c^+ + c^-) \neq 0$, de sorte que l'équation (5.4.95) est bien une équation *d'évolution*. En divisant cette équation par $\partial_\tau \Delta$,

on fait apparaître la vitesse de groupe *réelle* $v = (v_1, v_2)$ (on renvoie à (5.3.23) pour l'expression des composantes de v) : cela donne un premier critère raisonnable pour penser que l'équation (5.4.95) sera bien posée.

L'équation (5.4.95) se réécrit sous la forme d'une partie de transport dans les variables spatiales tangentielles $y' \in \mathbb{T}^2$ à la vitesse de groupe v , et d'une partie quadratique non-locale comme suit :

$$\forall k \neq 0, \quad \left(\partial_t - v \cdot \nabla_{y'} \right) \widehat{\psi}^2(k) - \frac{i\delta}{4(c^+ + c^-)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} K(k - \ell, \ell) \widehat{\psi}^2(k - \ell) \widehat{\psi}^2(\ell) = 0, \quad (5.4.96)$$

où l'on a posé

$$\delta := (b^+)^2 - (b^-)^2 - (c^+)^2 + (c^-)^2. \quad (5.4.97)$$

Sous l'hypothèse (H3), le coefficient δ est nécessairement *non nul*. En effet, supposons que τ annule δ . Alors (τ, ξ') vérifie le système :

$$\begin{cases} (c^+)^2 + (c^-)^2 = (b^+)^2 + (b^-)^2 \\ (c^+)^2 - (c^-)^2 = (b^+)^2 - (b^-)^2, \end{cases} \quad (5.4.98)$$

où la première équation de (5.4.98) provient de l'annulation du déterminant de Lopatinskii (5.3.16). Dans la suite, nous prenons par exemple $\tau = \tau_1(\xi')$, le raisonnement étant analogue pour l'autre racine τ_2 de Δ (on renvoie à (5.3.18) pour l'expression détaillée des racines τ_1 et τ_2). En additionnant les deux équations de (5.4.98), on montre que si τ annule δ alors :

$$(c^+)^2 = (b^+)^2,$$

i.e. $\tau = -a^+ + b^+$ ou $\tau = -a^+ - b^+$. Grâce à l'expression (5.3.18), nous obtenons après un calcul élémentaire :

$$\tau \text{ annule } \delta \iff \begin{array}{ll} a^+ - a^- = b^+ - b^- & \text{ou} \quad a^+ - a^- = b^+ + b^- \\ \text{ou} \quad a^+ - a^- = -b^+ + b^- & \text{ou} \quad a^+ - a^- = -b^+ - b^-. \end{array}$$

L'hypothèse (H3) exclut ces cas de figure, et par conséquent nous avons bien $\delta \neq 0$ dans (5.4.96).

En outre, définissons le noyau de convolution symétrique suivant, qui intervient également dans [HIZ95, AHP02, AH03] :

$$\Lambda(k, k') := \frac{2|k||k'| |k + k'|}{|k| + |k'| + |k + k'|}, \quad \forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (5.4.99)$$

En distinguant les différents cas possibles, on peut vérifier que pour tout $k \neq 0$, et pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a

$$K(k - \ell, \ell) = 2 \operatorname{sgn}(k) \Lambda(k - \ell, \ell).$$

L'équation (5.4.96) devient alors :

$$\forall k \neq 0, \quad \partial_t \widehat{\psi}^2(k) - v \cdot \nabla_{y'} \widehat{\psi}^2(k) - i\delta' \operatorname{sgn}(k) \widehat{b(\psi^2, \psi^2)}(k) = 0, \quad (5.4.100)$$

où $v = (v_1, v_2)$ est la vitesse de groupe dont les composantes sont données par (5.3.22), $\delta' := \frac{\delta}{2(c^+ + c^-)}$ est une constante réelle non nulle, et $b(\cdot, \cdot)$ est l'application bilinéaire symétrique définie, au moins sur l'ensemble des fonctions 2π -périodiques de classe \mathcal{C}^∞ et à moyenne nulle sur le tore, par⁶ :

$$\widehat{b(\varphi, \psi)}(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \Lambda(k - \ell, \ell) \widehat{\varphi}(k - \ell) \widehat{\psi}(\ell), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

La famille d'équations (5.4.100), pour $k \neq 0$, constitue un système *fermé* satisfait par la famille des coefficients de Fourier $(\widehat{\psi}^2(k))_{k \neq 0}$ (c'est-à-dire par la composante à moyenne nulle du profil principal ψ^2).

⁶Les variables (t, y') jouent ici un rôle de paramètres.

En effet, dans l'équation (5.4.100), on peut voir que l'application bilinéaire b ne fait intervenir que les coefficients de Fourier de ψ^2 associés à un mode de Fourier **non nul** ; c'est une conséquence de l'expression (5.4.99) du noyau de convolution Λ , qui donne $\Lambda(k, 0) = \Lambda(0, k) = 0$ pour tout $k \neq 0$.

Comme $\delta' \neq 0$, on peut se ramener au cas $|\delta'| = 1$ et on peut également "éliminer" la partie de transport présente dans (5.4.100) en procédant au changement de variables $(t, y') \leftrightarrow (\frac{t}{|\delta'|}, y' - \frac{t}{|\delta'|}v)$, de sorte que l'on se ramène à la famille d'équations satisfaites par la fonction $\varphi(t, y', \theta) := \psi^2(\frac{t}{|\delta'|}, y' - \frac{t}{|\delta'|}v, \theta)$:

$$\partial_t \widehat{\varphi}(k) - i \operatorname{sgn}(\delta') \operatorname{sgn}(k) \widehat{b(\varphi, \varphi)}(k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (5.4.101)$$

Nous allons voir qu'il suffit de résoudre ces équations pour $\delta' > 0$. En effet, si $\delta' < 0$, on applique la conjugaison complexe à l'équation (5.4.101), et en remarquant que $\widehat{\varphi}(k) = \widehat{\varphi}(-k)$ (car on recherche des profils à valeurs réelles), on obtient l'équation

$$\partial_t \widehat{\varphi}(-k) + i \operatorname{sgn}(k) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \Lambda(k - \ell, \ell) \widehat{\varphi}(-k - \ell) \widehat{\varphi}(-\ell) = 0. \quad (5.4.102)$$

On procède ensuite au changement de variable $\ell \leftrightarrow -\ell$ dans la somme de (5.4.102), ce qui fait apparaître le noyau $\Lambda(k + \ell, -\ell)$. Grâce aux propriétés de symétrie satisfaites par le noyau $\Lambda(\cdot, \cdot)$ (par exemple, pour tout $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$, on a $\Lambda(k, k') = \Lambda(-k, -k')$), on obtient :

$$\Lambda(k + \ell, -\ell) = \frac{2|k + \ell| |\ell| |k|}{|k + \ell| + |\ell| + |k|} = \Lambda(-k - \ell, \ell).$$

Par conséquent, nous nous sommes ramenés à l'équation

$$\partial_t \widehat{\varphi}(-k) - i \operatorname{sgn}(-k) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \Lambda(-k - \ell, \ell) \widehat{\varphi}(-k - \ell) \widehat{\varphi}(\ell) = 0,$$

c'est-à-dire la même équation que (5.4.101) où l'on considérerait $\delta' > 0$ et $-k$ dans le rôle de k . Dans la suite, nous supposons alors sans perte de généralité que $\delta' > 0$.

Étudier l'équation (5.4.100) (*cf.* [HIZ95, AHP02]) revient finalement à considérer l'équation de type Hamilton-Jacobi suivante, satisfaite par la fonction φ :

$$\partial_t \varphi + \mathbb{H}[b(\varphi, \varphi)] = 0, \quad t > 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad y' \in \mathbb{T}^2, \quad (5.4.103)$$

où $\mathbb{H}[\cdot]$ désigne la transformée de Hilbert sur le tore (que l'on définit pour les fonctions à moyenne nulle) :

$$\widehat{\mathbb{H}[\varphi]}(k) := -i \operatorname{sgn}(k) \widehat{\varphi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Les variables tangentielles $y' = (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2$ jouent dans (5.4.103) un rôle de paramètres. On renvoie à [Hun06] et ses références, ainsi que [BG09] pour plus de détails à propos de l'équation (5.4.103) pour des noyaux de convolution $\Lambda(\cdot, \cdot)$ plus généraux. Muni d'une condition initiale, le problème de Cauchy associé à l'équation (5.4.103) possède une unique solution locale en temps, comme le montre le théorème suivant (conséquence des résultats de [Hun06] et [Mar10]).

Théorème 5.4.1

Soient $s > \frac{5}{2}$, et $g \in H^s(\mathbb{T}_y^2 \times \mathbb{T}_\theta)$ une donnée initiale à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable θ , c'est-à-dire vérifiant $\widehat{g}(\cdot, 0) = 0$. Alors il existe $T > 0$ et une unique solution

$$\varphi \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{T}^3))$$

au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + \mathbb{H}[b(\varphi, \varphi)] = 0, & t \in [0, T], \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad y' \in \mathbb{T}^2, \\ \varphi(0, \cdot) = g, \end{cases} \quad (5.4.104)$$

et à moyenne nulle par rapport à θ :

$$\widehat{\varphi}(t, y', 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall y' \in \mathbb{T}^2.$$

Si de plus $g \in H^\infty(\mathbb{T}^3)$, alors l'unique solution φ de (5.4.104), à moyenne nulle par rapport à θ , appartient à $C^\infty([0, T]; H^\infty(\mathbb{T}^3))$, où $T > 0$ est donné par le résultat précédent avec, par exemple, $s = 3$.

Remarque. Le temps $T > 0$ dépend *a priori* de l'indice de régularité Sobolev s . On peut en fait montrer comme dans [Mar10] que T ne dépend que d'un indice Sobolev s_0 **fixé**, donc l'intervalle de temps d'existence de la solution $[0, T]$ ne se réduit pas à $\{0\}$ lorsque s tend vers $+\infty$. L'existence globale de solutions (dans un sens plus faible ou non) du système (5.4.104) reste encore un problème ouvert (voir [Hun06]); des simulations numériques que l'on peut trouver dans [AH03] semblent indiquer que certaines solutions régulières de (5.4.104) développent des singularités sur la dérivée première en temps fini, mais semblent toutefois rester continues.

En revenant au profil principal ψ^2 associé au front, le Théorème 5.4.1 permet de construire la partie à moyenne nulle de ψ^2 , c'est-à-dire la fonction

$$\psi_\star^2(t, y', \theta) := \sum_{k \neq 0} \widehat{\psi}^2(t, y', k) e^{ik\theta}, \quad \forall (t, y', \theta) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3. \quad (5.4.105)$$

Il nous reste à déterminer la moyenne de ψ^2 , c'est-à-dire le coefficient de Fourier $\widehat{\psi}^2(0)$. Notons tout d'abord que ce dernier n'apparaît pas dans le système (5.2.3a) satisfait par le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ (car le terme $\partial_\theta \psi^2$ est à moyenne nulle sur le tore \mathbb{T}). De plus, $\widehat{\psi}^2(0)$ n'intervient que dans les conditions de bord du système (5.4.11) régissant le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$, *via* les dérivées "lentes" $\partial_t \widehat{\psi}^2(0)$, $\partial_{y_1} \widehat{\psi}^2(0)$ et $\partial_{y_2} \widehat{\psi}^2(0)$ (voir (5.4.8) pour les équations explicites). Il pourrait subsister une condition de résolubilité faisant intervenir le coefficient de Fourier $\widehat{\psi}^2(0)$, mais en fait il n'en est rien, comme l'indiquera la Proposition 5.5.1 ci-après. On *choisit* de fixer la moyenne de ψ^2 comme étant égale en tout temps à la moyenne initiale, que l'on a fixée à zéro (on renvoie à (5.1.4)) :

$$\widehat{\psi}^2(t, y', 0) := 0, \quad \forall y' \in \mathbb{T}^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.4.106)$$

Le choix d'une autre valeur de la moyenne $\widehat{\psi}^2(0)$ n'affecte en rien le profil principal $U^{1,\pm}$ (qui reste à moyenne nulle en tout temps comme nous l'avons vu au Paragraphe 5.4.2). Ce choix influencera en revanche le correcteur $U^{2,\pm}$, ce qui se traduit par une erreur d'ordre ε^2 dans le développement asymptotique (5.1.5). En conclusion, on définit le profil principal ψ^2 par

$$\psi^2(t, y', \theta) := \psi_\star^2(t, y', \theta),$$

avec $\psi_\star^2 \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ donné par (5.4.105). Le profil ψ^2 définit entièrement le profil principal $U^{1,\pm}|_{y_3=0}$ *via* l'expression (5.4.58). Insistons sur le fait que le profil principal ψ^2 n'est pas unique, du fait du degré de liberté dont on dispose sur sa moyenne $\widehat{\psi}^2(0)$ (mais cela n'affecte en rien le profil $U^{1,\pm}$).

5.4.4 Achèvement du traitement du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$

Jusqu'ici, nous avons déterminé les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, uniquement pour $y_3 = 0$. Il nous reste à redresser convenablement ces coefficients par rapport à y_3 , qui, on le rappelle, joue un rôle

de *paramètre* dans la première équation de (5.4.4) et n'intervient pas dans la condition d'orthogonalité (5.4.73). On peut par exemple procéder de la même façon que dans [Les07], [Mar10] ou [Ben14] : on redresse de façon *arbitraire* en multipliant par une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$ (contrairement à [Les07], la variable normale y_3 appartient ici à l'intervalle *compact* $[-1, 1]$, donc il n'est pas nécessaire de supposer χ à support compact). L'expression finale de $U^{1,\pm}$ est alors donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{U}^{1,\pm}(t, y', y_3, Y_3, k) = \pm \chi(y_3) |k| \widehat{\psi}^2(t, y', k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \quad (5.4.107)$$

avec $\mathcal{R}^\pm(k)$ défini par (A.2.1a) (dont la définition en $k = 0$ n'importe pas du fait de la présence du facteur $|k|$ dans (5.4.107)). Le profil principal ψ^2 est quant à lui donné par le Théorème 5.4.1. Le développement asymptotique (5.1.5) de U_ε^\pm n'est alors pas unique, et dépend du choix de χ , comme mentionné dans [Mét04, §4.2] et [Les07]. Une telle définition de $U^{1,\pm}$ et de ψ^2 assure bien que le système (5.4.4) est vérifié.

Remarque. Pour des raisons techniques, nous serons éventuellement amenés à choisir $\chi \equiv 1$ sur $[-1, 1]$. En d'autres termes, on redressera les coefficients de Fourier de $U^{1,\pm}$ *indépendamment* de y_3 . Nous reviendrons sur ce point lors de la détermination des correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ au Paragraphe 5.5.6, car nous aurons besoin d'assurer des relations de compatibilité sur les termes sources intervenant dans le système (5.5.99).

Conclusion. La première étape de la résolution de la cascade BKW (5.2.3a) est dès lors entièrement achevée et fournit le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$, le profil $U^{1,\pm}$ étant caractérisé par ses coefficients de Fourier (5.4.107). Sa trace sur $\{y_3 = 0\}$ est déterminée de façon unique, tandis que son expression pour $y_3 \geq 0$ dépend de façon *arbitraire* de la fonction de redressement χ choisie. Grâce à la régularité H^∞ de ψ^2 , on peut notamment vérifier que $U^{1,\pm} = U_\star^{1,\pm} = \sum_{k \neq 0} \widehat{U}^{1,\pm}(k) e^{ik\theta}$ appartient bien à l'espace S_\star^\pm , en reprenant les arguments de Marcou [Mar10]. En outre, la composante lente de $U^{1,\pm}$ dans \underline{S}^\pm est *identiquement nulle*.

La seconde étape consiste en la résolution du système (5.2.3b), pour $m = 1$, afin de déterminer le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$. Cette étape a été en partie amorcée au début du Paragraphe 5.4.3, dans lequel nous avons assuré certaines conditions nécessaires que doivent vérifier les termes sources $F^{1,\pm}$ et $G^{1,\pm}$: ces derniers doivent appartenir à l'image d'un certain opérateur, ce qui s'était traduit notamment par la relation d'orthogonalité (5.4.73). On renvoie à la Proposition 5.5.1 ci-après pour une analyse générale des conditions de résolubilité que l'on a établies sur le cas particulier du système (5.4.11).

Le but de la section suivante est de généraliser la démarche suivie tout au long de cette section, afin de construire les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ dans (5.1.5) et (5.1.6) par récurrence.

5.5 Équations de la cascade BKW : détermination des correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$

5.5.1 Les équations de la cascade BKW à l'intérieur du domaine

Dans cette partie, on généralise la méthode employée à la Section 5.4, afin d'obtenir des équations pour tous les profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})$, avec $m \geq 1$. Pour cela, commençons par réécrire le système (5.0.4) sous la forme suivante :

$$A_0 \partial_t U^\pm + \sum_{j=1}^3 \nabla f_j(U^\pm) \partial_{x_j} U^\pm = 0, \quad t \in [0, T], \quad x_3 \geq \psi(t, x'). \quad (5.5.1)$$

En tenant compte du développement asymptotique (5.1.5) supposé de U_ε^\pm , on peut écrire $U_\varepsilon^\pm \sim U^{0,\pm} + \widetilde{U}_\varepsilon^\pm$. En procédant à un développement de Taylor exact des matrices jacobiniennes ∇f_j au voisinage de $U^{0,\pm}$, on

obtient :

$$\nabla f_j(U_\varepsilon^\pm) \partial_{x_j} U_\varepsilon^\pm = \nabla f_j(U^{0,\pm}) \partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm + \nabla^2 f_j(U^{0,\pm}) (\tilde{U}_\varepsilon^\pm, \partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm),$$

grâce à la linéarité de l'application $U \mapsto \nabla f_j(U)$ (les composantes de f_j sont polynomiales de degré 2 en U). En utilisant les notations (5.3.3) et (5.4.6) introduites précédemment, et en remarquant que $\partial_{x_j} U_\varepsilon^\pm = \partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm$, on peut écrire :

$$\nabla f_j(U_\varepsilon^\pm) \partial_{x_j} U_\varepsilon^\pm = A_j^\pm \partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm + \mathbb{A}_j(\tilde{U}_\varepsilon^\pm, \partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm).$$

On calcule ensuite $\partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm$ (pour $j = 1, 2$), ce qui découle directement de (5.1.5) :

$$\partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm \sim \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \left(\partial_{y_j} U^{k,\pm} - \partial_{x_j} \psi_\varepsilon \partial_{y_3} U^{k,\pm} - \frac{\partial_{x_j} \psi_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{Y_3} U^{k,\pm} + \frac{\xi_j}{\varepsilon} \partial_\theta U^{k,\pm} \right). \quad (5.5.2)$$

Puis, en “dérivant” le développement (5.1.6), on a :

$$\partial_{x_j} \psi_\varepsilon \sim \sum_{\ell \geq 2} \varepsilon^\ell \partial_{y_j} \psi^\ell + \xi_j \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell \partial_\theta \psi^{\ell+1}. \quad (5.5.3)$$

Ainsi, en injectant (5.5.3) dans (5.5.2), on obtient :

$$\partial_{x_j} \tilde{U}_\varepsilon^\pm \sim \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \alpha_{j,m}^\pm, \quad (5.5.4)$$

où les coefficients $\alpha_{j,m}^\pm$ (avec $j = 1, 2$) sont définis par :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{j,m}^\pm &:= \xi_j \partial_\theta U^{m+1,\pm} + \partial_{y_j} U^{m,\pm} \\ &- \xi_j \sum_{k+\ell=m-1} \partial_\theta \psi^{\ell+2} \partial_{Y_3} U^{k+1,\pm} - \sum_{k+\ell=m-2} \partial_{y_j} \psi^{\ell+2} \partial_{Y_3} U^{k+1,\pm} \\ &- \xi_j \sum_{k+\ell=m-2} \partial_\theta \psi^{\ell+2} \partial_{y_3} U^{k+1,\pm} - \sum_{k+\ell=m-3} \partial_{y_j} \psi^{\ell+2} \partial_{y_3} U^{k+1,\pm}. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Dans (5.5.5), on a adopté la convention $\sum_\emptyset = 0$ pour tenir compte plus simplement du cas où $0 \leq m \leq 2$. Notons qu'on peut obtenir un résultat analogue pour $\partial_t \tilde{U}_\varepsilon^\pm$; il suffit de remplacer dans (5.5.5) ∂_{y_j} par ∂_t et ξ_j par τ . Ceci permet de définir également des coefficients $\alpha_{0,m}^\pm$ tels que

$$\partial_t \tilde{U}_\varepsilon^\pm \sim \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \alpha_{0,m}^\pm. \quad (5.5.6)$$

Enfin, le calcul de $\partial_{x_3} \tilde{U}_\varepsilon^\pm$ est direct :

$$\partial_{x_3} \tilde{U}_\varepsilon^\pm \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k (\partial_{y_3} U^{k,\pm} + \partial_{Y_3} U^{k+1,\pm}). \quad (5.5.7)$$

Finalement, en injectant (5.5.4), (5.5.6) et (5.5.7) dans (5.5.1), puis en identifiant les termes selon les puissances de ε , on aboutit à l'ensemble des équations suivantes, définissant la première partie de la cascade BKW :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial) U^{1,\pm} = 0, & Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \\ L_f^\pm(\partial) U^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}, & Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad m \geq 1, \end{cases} \quad (5.5.8)$$

où l'on rappelle que l'opérateur rapide $L_f^\pm(\partial)$ est donné par (5.4.9). Si $m = 1$, on retrouve dans (5.5.8) le terme source $F^{1,\pm}$ donné par (5.4.7) associé à l'équation sur le correcteur $U^{2,\pm}$, à savoir :

$$\begin{aligned} F^{1,\pm} &:= -\mathcal{T}_s^\pm(\partial) U^{1,\pm} + \partial_\theta \psi^2 \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{1,\pm} \\ &- \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) + \partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{1,\pm}) \right). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Si $m \geq 2$, le terme source $F^{m,\pm}$ dans (5.5.8) est défini par :

$$\begin{aligned}
F^{m,\pm} := & -\mathcal{T}_s^\pm(\partial)U^{m,\pm} \\
& + \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k \geq 2}} \partial_\theta \psi^k \mathcal{A}^\pm (\partial_{Y_3} U^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} U^{\ell,\pm}) \\
& + \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 2}} \mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \psi^k (\partial_{Y_3} U^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} U^{\ell,\pm}) \\
& - \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \left[\xi_j \mathbb{A}_j(U^{k,\pm}, \partial_\theta U^{\ell+1,\pm}) + \mathbb{A}_j(U^{k,\pm}, \partial_{y_j} U^{\ell,\pm}) \right] \\
& - \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \mathbb{A}_3(U^{k,\pm}, \partial_{Y_3} U^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} U^{\ell,\pm}) \\
& + \sum_{j=1}^2 \xi_j \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m \\ \ell_1, \ell_2 \geq 1}} \partial_\theta \psi^{\ell_1+1} \mathbb{A}_j(U^{\ell_2,\pm}, \partial_{Y_3} U^{\ell_3+1,\pm} + \partial_{y_3} U^{\ell_3,\pm}) \\
& + \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m \\ \ell_1 \geq 2, \ell_2 \geq 1}} \partial_{y_j} \psi^{\ell_1} \mathbb{A}_j(U^{\ell_2,\pm}, \partial_{Y_3} U^{\ell_3+1,\pm} + \partial_{y_3} U^{\ell_3,\pm}).
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

Il conviendra de noter que l'on peut isoler les termes dépendant du correcteur $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})$ dans l'expression de $F^{m,\pm}$. On décompose donc, pour $m \geq 2$:

$$\begin{aligned}
F^{m,\pm} = & -\mathcal{T}_s^\pm(\partial)U^{m,\pm} \\
& + \left(\partial_\theta \psi^{m+1} \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{1,\pm} + \partial_\theta \psi^2 \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{m,\pm} \right)
\end{aligned} \tag{5.5.11a}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{m,\pm}) + \partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{m,\pm}) \right] + \mathbb{F}^{m-1,\pm} \\
= : & -F_1^{m,\pm} + F_2^{m,\pm} - F_3^{m,\pm} + \mathbb{F}^{m-1,\pm},
\end{aligned} \tag{5.5.11b}$$

où $\mathbb{F}^{m-1,\pm}$ ne dépend que des profils $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{0 \leq j \leq m-1}$, voir (5.5.10).

Regardons plus en détails la 7^e composante des équations (5.5.8), c'est-à-dire la contrainte sur le profil $u^{m+1,\pm}$, provenant de la contrainte de divergence nulle sur la vitesse. Rappelons que l'on adjoint également à (5.5.8) la contrainte sur le profil $H^{m+1,\pm}$, provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Nous aurons besoin de ces deux contraintes au Paragraphe 5.5.6 afin de déterminer le coefficient de Fourier d'ordre 0 du correcteur $U^{m+1,\pm}$. Nous avons, pour tout $m \geq 0$, (avec la convention $\sum_\emptyset = 0$) :

$$\begin{aligned}
\partial_{Y_3} u_3^{m+1,\pm} + \xi_1 \partial_\theta u_1^{m+1,\pm} + \xi_2 \partial_\theta u_2^{m+1,\pm} = & -\nabla_y \cdot u^{m,\pm} \\
& + \sum_{j=1}^2 \xi_j \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k \geq 2}} \partial_\theta \psi^k \left(\partial_{Y_3} u_j^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} u_j^{\ell,\pm} \right) \\
& + \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 2}} \partial_{y_j} \psi^k \left(\partial_{Y_3} u_j^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} u_j^{\ell,\pm} \right).
\end{aligned} \tag{5.5.12a}$$

Quant à lui, le profil $H^{m+1,\pm}$ doit satisfaire la contrainte suivante, analogue à (5.5.12a) :

$$\begin{aligned} \partial_{Y_3} H_3^{m+1,\pm} + \xi_1 \partial_\theta H_1^{m+1,\pm} + \xi_2 \partial_\theta H_2^{m+1,\pm} &= -\nabla_y \cdot H^{m,\pm} \\ &+ \sum_{j=1}^2 \xi_j \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k \geq 2}} \partial_\theta \psi^k \left(\partial_{Y_3} H_j^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} H_j^{\ell,\pm} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 2}} \partial_{y_j} \psi^k \left(\partial_{Y_3} H_j^{\ell+1,\pm} + \partial_{y_3} H_j^{\ell,\pm} \right). \end{aligned} \quad (5.5.12b)$$

5.5.2 Les équations de la cascade BKW associées aux conditions de saut

Il nous faut ensuite déterminer les conditions sur le bord $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ que doivent satisfaire les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})$. On procède pour cela de la même façon que précédemment, en injectant les développements (5.1.5) et (5.1.6) dans les conditions de bord données par le système (5.0.1). Pour $m = 0$, on retrouve les conditions de bord (5.3.6) sur le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ obtenues à la Section 5.4. Pour $m \geq 1$, on obtient les équations suivantes sur le bord $\{y_3 = Y_3 = 0\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3^{m+1,\pm} = \partial_t \psi^{m+1} + \tau \partial_\theta \psi^{m+2} \\ \quad + \sum_{k+\ell=m-1} \left(u_1^{k,\pm} \partial_{y_1} + u_2^{k,\pm} \partial_{y_2} \right) \psi^{\ell+2} + \sum_{k+\ell=m} \left(\xi_1 u_1^{k,\pm} + \xi_2 u_2^{k,\pm} \right) \partial_\theta \psi^{\ell+2}, \\ H_3^{m+1,\pm} = \sum_{k+\ell=m-1} \left(H_1^{k,\pm} \partial_{y_1} + H_2^{k,\pm} \partial_{y_2} \right) \psi^{\ell+2} + \sum_{k+\ell=m} \left(\xi_1 H_1^{k,\pm} + \xi_2 H_2^{k,\pm} \right) \partial_\theta \psi^{\ell+2}, \\ [q^{m+1}|_{y_3=0}] = 0, \end{array} \right. \quad (5.5.13)$$

où $[\cdot]$ dénote le saut à travers l'interface plane $\{Y_3 = 0\}$. Notons que l'on peut réécrire ces conditions de bord en isolant les termes dépendant des profils $U^{m,\pm}$, ψ^{m+1} et ψ^{m+2} . Pour $m = 1$, on obtient conformément à (5.4.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3^{2,\pm} = c^\pm \partial_\theta \psi^3 + \partial_t \psi^2 + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \sum_{j=1}^2 \xi_j u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^2, \\ H_3^{2,\pm} = b^\pm \partial_\theta \psi^3 + \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \sum_{j=1}^2 \xi_j H_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^2, \\ [q^2|_{y_3=0}] = 0. \end{array} \right. \quad (5.5.14a)$$

Le système (5.5.13) se réécrit, pour $m \geq 2$, comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3^{m+1,\pm} = c^\pm \partial_\theta \psi^{m+2} + \partial_t \psi^{m+1} + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^{m+1} \\ \quad + \sum_{j=1}^2 \xi_j \left(u_j^{m,\pm} \partial_\theta \psi^2 + u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+1} \right) + \mathbb{G}_1^{m-1,\pm}, \\ H_3^{m+1,\pm} = b^\pm \partial_\theta \psi^{m+2} + \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^{m+1} \\ \quad + \sum_{j=1}^2 \xi_j \left(H_j^{m,\pm} \partial_\theta \psi^2 + H_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+1} \right) + \mathbb{G}_2^{m-1,\pm}, \\ [q^{m+1}|_{y_3=0}] = 0, \end{array} \right. \quad (5.5.14b)$$

où les termes sources $\mathbb{G}_1^{m-1,\pm}$ et $\mathbb{G}_2^{m-1,\pm}$ ne dépendent que des profils $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{0 \leq j \leq m-1}$. En rappelant la définition (5.4.2) des matrices de bord B^+ et B^- , les conditions de bord (5.5.14) se réécrivent sous la

forme :

$$B^+U^{m+1,+} + B^-U^{m+1,-} - \partial_\theta \psi^{m+2} (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = G^{m,+} + G^{m,-} \quad \text{sur} \quad \{y_3 = Y_3 = 0\}, \quad (5.5.15)$$

où les termes sources $G^{m,+}$ et $G^{m,-}$ sont définis par

$$\begin{aligned} G^{m,+} &:= (G_1^{m,+}, G_2^{m,+}, 0, 0, 0), \\ G^{m,-} &:= (0, 0, G_1^{m,-}, G_2^{m,-}, 0). \end{aligned} \quad (5.5.16a)$$

Lorsque $m = 1$, nous avons, conformément à (5.4.10) :

$$\begin{aligned} G_1^{1,\pm} &:= \partial_t \psi^2 + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \sum_{j=1}^2 \xi_j u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^2, \\ G_2^{1,\pm} &:= \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^2 + \sum_{j=1}^2 \xi_j H_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^2. \end{aligned} \quad (5.5.16b)$$

Lorsque $m \geq 2$, les composantes $G_1^{m,\pm}$ et $G_2^{m,\pm}$ dans (5.5.15) sont données par :

$$\begin{aligned} G_1^{m,\pm} &:= \partial_t \psi^{m+1} + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^{m+1} + \sum_{j=1}^2 \xi_j (u_j^{m,\pm} \partial_\theta \psi^2 + u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+1}) + \mathbb{G}_1^{m-1,\pm}, \\ G_2^{m,\pm} &:= \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^{m+1} + \sum_{j=1}^2 \xi_j (H_j^{m,\pm} \partial_\theta \psi^2 + H_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+1}) + \mathbb{G}_2^{m-1,\pm}. \end{aligned} \quad (5.5.16c)$$

Résumons ci-après les équations de la cascade BKW que doivent satisfaire le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ (déjà obtenues à la Section 5.4), ainsi que les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$:

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{1,\pm} = 0, & Y_3 \geq 0, \\ B^+U^{1,+} + B^-U^{1,-} - \partial_\theta \psi^2 (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = 0, & y_3 = Y_3 = 0, \end{cases} \quad (5.5.17a)$$

et pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}, & Y_3 \geq 0, \\ B^+U^{m+1,+} + B^-U^{m+1,-} - \partial_\theta \psi^{m+2} (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = G^{m,+} + G^{m,-}, & y_3 = Y_3 = 0. \end{cases} \quad (5.5.17b)$$

N'oublions pas d'adjoindre la contrainte (5.5.12b) à la cascade BKW (5.5.17). Le problème homogène (5.5.17a) a déjà été résolu à la Section 5.4. Dans le Paragraphe 5.5.6 ci-après, nous nous intéresserons à la résolution du problème inhomogène (5.5.17b) et on montrera que les correcteurs $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})_{m \geq 1}$ pourront être entièrement déterminés par récurrence.

5.5.3 Les conditions sur les bords fixes Γ_\pm

Le système des nappes de tourbillon-courant (5.0.1) contient également des conditions sur les bords fixes Γ_+ et Γ_- . Il convient à présent d'établir la cascade BKW associée à ces conditions de bord. Les calculs sont légèrement plus délicats qu'au Paragraphe 5.5.2, du fait du changement de coordonnées $(y', y_3) = (x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'))$ effectué au sein même du développement BKW (5.1.5). La présence de la frontière libre diffère de l'analyse faite par Marcou [Mar10, Mar11], et on pourrait s'interroger quant à la pertinence de l'espace fonctionnel S^\pm dans lequel on a choisi de travailler. Pour affiner le développement asymptotique, une possibilité serait de considérer dans $\underline{S}^{\pm 7}$ des fonctions dépendant aussi de la variable

⁷On rappelle la Définition 5.2.1 des espaces fonctionnels mis en jeu.

tangentielle rapide θ . Toutefois, le cœur de notre analyse se situe principalement sur le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ – comme abordé dans la Section 5.4 précédente, puis en second plan sur le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$ – ce que nous aborderons au Paragraphe 5.5.7 ci-dessous. L'espace S^\pm , tel qu'on l'a défini au Paragraphe 5.2.1, nous suffit pour exhiber le caractère “onde de surface pure”, comme l'indique le point (i) du Théorème 5.2.2.

On se donne $M \in \mathbb{N}$ un entier suffisamment grand, correspondant à l'ordre des solutions approchées (5.1.8) que l'on souhaite construire. Sur les bords fixes Γ_\pm , la solution exacte doit vérifier la condition homogène suivante :

$$\forall (t, x') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2, \quad u_{\varepsilon,3}^\pm(t, x', \pm 1) = H_{\varepsilon,3}^\pm(t, x', \pm 1) = 0.$$

Nous allons donc chercher à annuler le développement asymptotique en puissances de ε (5.1.8b) pour $x_3 = \pm 1$. Nous avons :

$$\left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \right)_3(t, x', \pm 1) = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m u_3^{m,\pm} \left(t, x', \pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), \frac{\pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \quad (5.5.18)$$

On décompose ensuite les profils $u_3^{m,\pm}$ dans l'espace S^\pm (comme indiqué par (5.2.1)) :

$$u_3^{m,\pm} = \underline{u}_3^{m,\pm} + \underline{u}_3^{m,\pm} + u_{\star,3}^{m,\pm}.$$

On commence par remarquer que les termes $\underline{u}_3^{m,\pm}$ et $u_{\star,3}^{m,\pm}$ nous donnent une contribution en $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$ dans le développement (5.5.18), du fait de leur décroissance exponentielle par rapport à Y_3 . En effet, en généralisant le raisonnement ayant abouti à (5.4.32) lors du traitement du profil principal, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \left| u_{\star,3}^{m,\pm} \left(t, x', \pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), \frac{\pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \right| \\ & \leq C_M \exp \left(-\frac{\delta_M}{\varepsilon} \right) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} |\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')| \right) \\ & \leq C_M \exp \left(-\frac{\delta_M}{\varepsilon} \right) \exp \left(\varepsilon \|\psi^2\|_{L^\infty} + \dots + \varepsilon^M \|\psi^{M+1}\|_{L^\infty} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty), \end{aligned}$$

où $C_M > 0$ et $\delta_M > 0$ ne dépendent que de M . Le développement (5.5.18) devient donc :

$$\left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \right)_3(t, x', \pm 1) = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \quad (5.5.19)$$

On procède ensuite à un développement de Taylor des profils $\underline{u}_3^{m,\pm}$ au voisinage de $y_3 = \pm 1$, jusqu'à l'ordre $M - m$ en ε (du fait de la présence du préfacteur ε^m dans (5.5.19)) :

$$\begin{aligned} & \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')) \\ & = \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1) (\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'))^k + \mathcal{O}(\varepsilon^{M-m+1}). \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

Notons qu'on limite la somme de (5.5.20) à $\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor$ car le développement asymptotique de $\psi_{app,\varepsilon}^M$ commence à l'ordre 2. De cette manière, le développement (5.5.20) va bien jusqu'à l'ordre $M - m$ en ε . De plus, si $m = M$ ou $m = M - 1$, alors la somme dans le membre de droite de (5.5.20) n'apparaît pas. En tenant compte de la définition (5.1.8a), on obtient :

$$\begin{aligned} & \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')) \\ & = \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1) \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m,\pm}(t, x', \pm 1) \sum_{j=2k}^{M-m} \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = j \\ j_i \geq 2}} (\psi^{j_1} \dots \psi^{j_k})(t, x', \varphi(t, x')/\varepsilon) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^{M-m+1}), \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

où l'on a noté $\varphi(t, x') := \tau t + \xi' \cdot x'$ la phase plane pour alléger quelque peu le calcul. À présent, rappelons que la moyenne lente $\underline{U}^{m, \pm}$ provient du coefficient de Fourier d'ordre 0 par rapport à θ du profil $U^{m, \pm}$, dont on a pris la limite en $Y_3 = \pm\infty$ (la variable rapide Y_3 n'intervient pas dans l'expression (5.5.21)). Pour déterminer la cascade BKW associée aux conditions sur les bords fixes Γ_{\pm} , nous prendrons uniquement la moyenne par rapport à θ de l'expression (5.5.21). Ici, il est important de noter que lorsqu'on cherchera à approcher la solution exacte U_{ε}^{\pm} par les solutions approchées $U_{app, \varepsilon}^{M, \pm}$ construites, il faudra tenir compte des modes de Fourier *non nuls* dans les conditions de bord sur Γ_{\pm} , qui contiennent les termes oscillants $\exp(ik\varphi(t, x')/\varepsilon)$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nous verrons au Paragraphe 5.6.5 que ces termes oscillants apparaissent dès l'ordre 5 en ε , mais pas avant. Dans la Section 5.6 ci-après, nous reviendrons plus en détails sur le *système approché* satisfait par les solutions approchées $(U_{app, \varepsilon}^{M, \pm}, \psi_{app, \varepsilon}^M)$; nous verrons à quel ordre en ε ce système approché s'éloigne du système exact (5.0.1).

La moyenne par rapport à θ de (5.5.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} s_0^{m, \pm} &:= \underline{u}_3^{m, \pm} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m, \pm} \sum_{j=2k}^{M-m} \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = j \\ j_i \geq 2}} \widehat{\psi^{j_1} \dots \psi^{j_k}}(0) \\ &= \underline{u}_3^{m, \pm} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m, \pm} \sum_{j=2k}^{M-m} \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = j \\ n_1 + \dots + n_k = 0 \\ j_i \geq 2, n_i \neq 0}} \widehat{\psi^{j_1}}(n_1) \dots \widehat{\psi^{j_k}}(n_k), \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

les fonctions étant évaluées en (t, x') ou $(t, x', \pm 1)$ dans (5.5.22). Revenons dès lors sur le développement (5.5.19), dont on ne considère que la partie moyennée par rapport à θ , c'est-à-dire :

$$S_0^{M, \pm} := \sum_{m=1}^M \varepsilon^m s_0^{m, \pm}.$$

Nous avons grâce à (5.5.22) :

$$\begin{aligned} S_0^{M, \pm} &= \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \underline{u}_3^{m, \pm} \\ &+ \sum_{m=1}^{M-2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m, \pm} \sum_{j=m+2k}^M \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = j-m \\ n_1 + \dots + n_k = 0 \\ j_i \geq 2, n_i \neq 0}} \widehat{\psi^{j_1}}(n_1) \dots \widehat{\psi^{j_k}}(n_k). \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

Quelques simplifications peuvent être effectuées dans l'expression (5.5.23). En effet, nous avons montré au Paragraphe 5.4.2 que la moyenne lente $\underline{U}^{1, \pm}$ était identiquement nulle; par conséquent, la somme par rapport à m dans (5.5.23) peut être prise à partir de $m = 2$. De plus, le degré de liberté sur les moyennes des profils $(\psi^{\ell})_{\ell \geq 2}$ permet de les choisir nulles (on renvoie à la discussion aboutissant à (5.5.85) ci-après). Ainsi, la somme par rapport à k dans (5.5.23) peut être amorcée à partir de $k = 2$. Cela fait donc débiter la somme dans (5.5.20) à partir de $k = 2$, ce qui fait apparaître le terme quadratique $(\psi_{app, \varepsilon}^M)^2$. Comme ce dernier commence à l'ordre 4 en ε , la première somme de (5.5.23) s'effectue pour $m \in \{2, \dots, M-4\}$ (car pour $m = M-2$ (resp. $m = M-3$) on obtient un terme en $\varepsilon^{M-2+4} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$ (resp. $\varepsilon^{M-3+4} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$)).

Récapitulons : la partie moyennée par rapport à θ du développement (5.5.19) admet le développement en puissances de ε suivant :

$$S_0^{M, \pm} = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \underline{u}_3^{m, \pm}|_{\Gamma_{\pm}} + \sum_{m=2}^{M-4} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m, \pm}|_{\Gamma_{\pm}} \sum_{j=m+2k}^M \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = j-m \\ n_1 + \dots + n_k = 0 \\ j_i \geq 2, n_i \neq 0}} \widehat{\psi^{j_1}}(n_1) \dots \widehat{\psi^{j_k}}(n_k).$$

Notons ici que des termes correctifs n'apparaissent qu'à partir de l'ordre 6 en ε (pour $m = k = 2$). En effet, en identifiant les puissances de ε , on en déduit les conditions de bord suivantes pour les vitesses normales lentes $(\underline{u}_3^{m,\pm})_{m \geq 1}$:

$$\forall m \in \{1, \dots, 5\}, \quad \underline{u}_3^{m,\pm}|_{\Gamma_{\pm}} \equiv 0. \quad (5.5.24a)$$

Pour le correcteur $U^{6,\pm}$, nous avons :

$$\underline{u}_3^{6,\pm}|_{\Gamma_{\pm}} = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} |\widehat{\psi}^2(n)|^2 \partial_{y_3}^2 \underline{u}_3^{2,\pm}|_{\Gamma_{\pm}}. \quad (5.5.24b)$$

Nous verrons que grâce aux résultats du Paragraphe 5.5.7, la moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ associée au premier correcteur est elle aussi identiquement nulle, comme pour le profil principal $\underline{U}^{1,\pm}$. En conséquence, les conditions de bord (5.5.24b) pour la vitesse normale lente $\underline{u}_3^{6,\pm}$ seront également *homogènes*. Toutefois, à partir du correcteur $U^{7,\pm}$, les conditions de bord sur Γ_{\pm} pour $\underline{u}_3^{7,\pm}$ dépendent au moins de la moyenne lente $\underline{U}^{3,\pm}$ qui, elle, n'a plus aucune raison d'être nulle en général (on renvoie là encore au Paragraphe 5.5.7). Ces conditions de bord s'écrivent sous la forme :

$$\forall m \geq 7, \quad \underline{u}_3^{m,\pm}|_{\Gamma_{\pm}} = \mathfrak{h}_1^{m-4,\pm}, \quad (5.5.24c)$$

où $\mathfrak{h}_1^{m-4,\pm}$ ne dépend que des vitesses normales lentes $(\underline{u}_3^{j,\pm})_{2 \leq j \leq m-4}$ et des profils $(\psi^j)_{2 \leq j \leq m-5}$.

Tout ce raisonnement s'applique de façon analogue au champ magnétique normal. On en déduit donc les conditions de bord suivantes pour les champs magnétiques normaux lents $(\underline{H}_3^{m,\pm})_{m \geq 1}$:

$$\forall m \in \{1, \dots, 5\}, \quad \underline{H}_3^{m,\pm}|_{\Gamma_{\pm}} \equiv 0. \quad (5.5.25a)$$

Pour le correcteur $U^{6,\pm}$, nous avons :

$$\underline{H}_3^{6,\pm}|_{\Gamma_{\pm}} = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} |\widehat{\psi}^2(n)|^2 \partial_{y_3}^2 \underline{H}_3^{2,\pm}|_{\Gamma_{\pm}}. \quad (5.5.25b)$$

Là encore, la condition de bord (5.5.25b) sera en fait *homogène* grâce aux résultats du Paragraphe 5.5.7 (car on verra que $\underline{U}^{2,\pm}$ est nulle). Enfin, nous aurons :

$$\forall m \geq 7, \quad \underline{H}_3^{m,\pm}|_{\Gamma_{\pm}} = \mathfrak{h}_2^{m-4,\pm}, \quad (5.5.25c)$$

où $\mathfrak{h}_2^{m-4,\pm}$ est le même terme source que $\mathfrak{h}_1^{m-4,\pm}$ dans lequel on a remplacé la vitesse u par le champ magnétique H .

Ceci termine l'établissement des conditions de bord sur Γ_{\pm} pour les moyennes lentes $(\underline{U}^{m,\pm})_{m \geq 2}$. Rappelons que l'on a pris uniquement le coefficient de Fourier d'ordre zéro par rapport à θ dans le développement (5.5.21); par conséquent il faudra tenir compte de tous les modes de Fourier non nuls lorsque l'on s'intéressera au système approché satisfait par les solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^M, \psi_{app,\varepsilon}^M)$. Nous renvoyons pour cela au Paragraphe 5.6.5 ci-dessous.

Nous aborderons au Paragraphe 5.5.6 la résolution de la cascade BKW (5.5.17) adjointe de la contrainte de divergence (5.5.12b) ainsi que des conditions de bord (5.5.24) et (5.5.25). De plus, on pourra toujours faire en sorte que les profils associés à la pression vérifient les conditions de normalisation (5.5.41) que l'on obtiendra au paragraphe suivant. Les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ seront déterminés par récurrence.

5.5.4 Contraintes sur la normalisation de la pression

La pression exacte q_{ε}^{\pm} intervenant dans le système (5.0.1) peut être choisie afin de satisfaire la condition de normalisation (5.4.36), comme nous l'avons mentionné au Paragraphe 5.4.2 lors de la résolution du

problème de Laplace (5.4.34). Cette condition s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\Omega_\varepsilon^+(t)} q_\varepsilon^+(t, x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon^-(t)} q_\varepsilon^-(t, x) dx = 0, \quad (5.5.26)$$

où l'on rappelle que les domaines $\Omega_\varepsilon^\pm(t)$ sont définis par

$$\Omega_\varepsilon^\pm(t) := \{x \in \mathbb{T}^2 \times (-1, 1) \mid x_3 \gtrless \psi_\varepsilon(t, x')\}.$$

L'égalité (5.5.26) prend la forme suivante, après avoir effectué le changement de variable $(y', y_3) \leftrightarrow (x', x_3 - \psi_\varepsilon(t, x'))$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_\varepsilon(t, x')} q_\varepsilon^+(t, y', y_3 + \psi_\varepsilon(t, y')) dy_3 dy' \\ + \int_{\mathbb{T}^2} \int_{-1+\psi_\varepsilon(t, x')}^0 q_\varepsilon^-(t, y', y_3 + \psi_\varepsilon(t, y')) dy_3 dy' = 0. \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

Cette condition de normalisation va se répercuter sur les profils $(q^{m,\pm})_{m \geq 1}$, du fait de la forme des développements asymptotiques (5.1.5) et (5.1.6) sous lesquels nous cherchons à approcher respectivement la pression q_ε^\pm et le front ψ_ε . Dans l'optique de construire des solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$, pour $M \geq 1$, on cherche aussi à vérifier l'égalité (5.5.27), à une erreur de taille $\mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$ près. En d'autres termes, les solutions approchées doivent permettre d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')} q_{app,\varepsilon}^{M,+}(t, y', y_3 + \psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')) dy_3 dy' \\ + \int_{\mathbb{T}^2} \int_{-1+\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}^0 q_{app,\varepsilon}^{M,-}(t, y', y_3 + \psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')) dy_3 dy' = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

Par la suite, nous traitons le cas de la première intégrale dans (5.5.28) ; le cas de $q_{app,\varepsilon}^{M,-}$ est similaire. En injectant la définition (5.1.8) des solutions approchées dans le membre de gauche de (5.5.28), nous obtenons la somme suivante pour l'état "+", que l'on cherche ensuite à développer en puissances de ε jusqu'à l'ordre M :

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')} q^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon}\right) dy_3 dy'. \quad (5.5.29)$$

Pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$, nous utiliserons la décomposition (5.2.1) des profils $q^{m,\pm}$ dans l'espace S^\pm :

$$q^{m,+}(t, y, Y_3, \theta) = \underline{q}^{m,+}(t, y) + \underline{q}^{m,+}(t, y, Y_3) + q_\star^{m,+}(t, y, Y_3, \theta).$$

Chaque intégrale double dans (5.5.29) se décompose alors en trois parties de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')} q^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon}\right) dy_3 dy' \\ = \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')} \underline{q}^{m,+}(t, y', y_3) dy_3 dy' \\ + \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')} \underline{q}^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}\right) dy_3 dy' \\ + \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')} q_\star^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon}\right) dy_3 dy' \\ =: \underline{I}^{m,+}(\varepsilon) + \underline{I}^{m,+}(\varepsilon) + I_\star^{m,+}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

Étape 1 : développement asymptotique de l'intégrale $\underline{I}^{m,+}(\varepsilon)$.

On commence par se ramener au domaine fixe $\Omega^+ = \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$, dans l'idée que ε est petit et que chaque profil $\underline{q}^{m,+}$ est défini sur Ω^+ pour ensuite être prolongé à $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+$ par rapport à y_3 . De cette manière, les intégrales $\int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M}$ seront bien définies et chaque terme du développement en puissances de ε de $\underline{I}^{m,+}(\varepsilon)$ sera fonction uniquement des profils "antérieurs" à $\underline{q}^{m,+}$. À l'aide de la relation de Chasles, on écrit :

$$\begin{aligned} \underline{I}^{m,+}(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}^{m,+}(t, y', y_3) dy_3 dy' \\ &= \int_{\Omega^+} \underline{q}^{m,+}(t, y) dy + \int_{\mathbb{T}^2} \int_1^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}^{m,+}(t, y', y_3) dy_3 dy' \\ &=: I_1^{m,+} + I_2^{m,+}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Afin de développer en puissance de ε l'intégrale $I_2^{m,+}(\varepsilon)$, nous définissons la primitive suivante de $\underline{q}^{m,+}$ par rapport à sa dernière variable y_3 :

$$Q^{m,+}(t, y', y_3) := \int_0^{y_3} \underline{q}^{m,+}(t, y', z) dz.$$

Remarquons que pour tout $j \geq 1$, nous avons $\partial_{y_3}^j Q^{m,+} = \partial_{y_3}^{j-1} \underline{q}^{m,+}$. À l'aide d'un développement de Taylor, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_1^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}^{m,+}(t, y', y_3) dy_3 &= Q^{m,+}(t, y', 1 - \psi_{app,\varepsilon}(t, y')) - Q^{m,+}(t, y', 1) \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{(-1)^j}{j!} \partial_z^j Q^{m,+}(t, y', 1) \left(\varepsilon^2 \psi^2 + \dots + \varepsilon^{M+1} \psi^{M+1} \right)^j + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \end{aligned} \quad (5.5.31)$$

où l'on a omis les variables $(t, y', \frac{\xi' \cdot y'}{\varepsilon})$ dans les profils $(\psi^k)_{2 \leq k \leq M+1}$. Du fait de la présence du préfacteur ε^m dans (5.5.29) devant $\underline{I}^{m,+}(\varepsilon)$, on peut limiter la somme de (5.5.31) aux indices $j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor\}$; il vient alors après intégration sur le tore :

$$\varepsilon^m I_2^{m,+}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=2j}^{M-m} \varepsilon^{k+m} \sum_{k_1+\dots+k_j=k} \int_{\mathbb{T}^2} \partial_{y_3}^{j-1} \underline{q}^{m,+}(t, y', 1) \psi^{k_1} \dots \psi^{k_j} dy' + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}).$$

Il convient à présent de développer en série de Fourier les profils ψ^{k_i} par rapport à leur dernière variable θ . Nous obtenons

$$\left(\psi^{k_1} \dots \psi^{k_j} \right) \left(t, y', \frac{\xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) = \sum_{n_1, \dots, n_j \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}^{k_1}(n_1) \dots \widehat{\psi}^{k_j}(n_j) \exp \left(i(n_1 + \dots + n_j) \frac{\xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right).$$

Lorsque les modes n_i vérifient $n_1 + \dots + n_j \neq 0$, la méthode de la *phase instationnaire* permet d'obtenir un terme en $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$. Ainsi, à l'ordre M par rapport à ε , il nous reste seulement les modes n_i vérifiant $n_1 + \dots + n_j = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^m I_2^{m,+}(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=2j}^{M-m} \varepsilon^{k+m} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_j=k \\ k_i \in \mathbb{N}}} \int_{\mathbb{T}^2} \partial_{y_3}^{j-1} \underline{q}^{m,+}(t, y', 1) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \psi^{k_1}(t, y', \theta) \dots \psi^{k_j}(t, y', \theta) d\theta dy' + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

Le détail de l'expression (5.5.32) n'est en soi pas capital; en revanche, il faut remarquer que l'on peut réécrire (5.5.32) sous la forme

$$\varepsilon^m I_2^{m,+}(\varepsilon) = \varepsilon^{m+2} \underline{\underline{Q}}_{m+2}^{m,+}(t) + \varepsilon^{m+3} \underline{\underline{Q}}_{m+3}^{m,+}(t) + \cdots + \varepsilon^M \underline{\underline{Q}}_M^{m,+}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \quad (5.5.33)$$

où chaque $\underline{\underline{Q}}_p^{m,+}$, pour $m+2 \leq p \leq M$, ne dépend que des profils $\underline{q}^{m,+}$ et $(\psi^k)_{2 \leq k \leq p-2}$. Le développement asymptotique (5.5.29) associé aux moyennes lentes $\underline{q}^{m,+}$ s'écrit alors :

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m \underline{I}^{m,+}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \int_{\Omega^+} \underline{q}^{m,+}(t, y) dy + \sum_{m=3}^M \varepsilon^m \sum_{j=1}^{m-2} \underline{\underline{Q}}_m^{j,+}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \quad (5.5.34)$$

Nous avons une expression similaire pour l'état “-”. On remarque que les termes “correctifs” $\underline{\underline{Q}}_m^{j,+}$ interviennent seulement à partir de l'ordre ε^3 . Cette remarque sera cruciale lors de l'étude du phénomène de *rectification* mis en évidence au Paragraphe 5.5.7.

Étape 2 : développement asymptotique de l'intégrale $\underline{I}^{m,+}(\varepsilon)$.

Comme lors de l'étape précédente, on se ramène au domaine fixe Ω^+ en écrivant :

$$\begin{aligned} \underline{I}^{m,+}(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}\right) dy_3 dy' \\ &= \int_{\Omega^+} \underline{q}^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}\right) dy_3 dy' + \int_{\mathbb{T}^2} \int_1^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}^{m,+}\left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}\right) dy_3 dy' \\ &=: I_3^{m,+}(\varepsilon) + I_4^{m,+}(\varepsilon). \end{aligned}$$

► **Cas de $I_3^{m,+}(\varepsilon)$.** En procédant au changement de variable $y_3 = \varepsilon z_3$, on peut écrire :

$$I_3^{m,+}(\varepsilon) = \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1/\varepsilon} \varepsilon \underline{q}^{m,+}(t, y', \varepsilon z_3, z_3) dz_3 dy'.$$

On effectue un développement de Taylor avec reste intégral de la fonction $\underline{q}^{m,+}$ au voisinage de $y_3 = 0$:

$$\underline{q}^{m,+}(t, y', \varepsilon z_3, z_3) = \sum_{j=0}^M \frac{(\varepsilon z_3)^j}{j!} \partial_{y_3}^j \underline{q}^{m,+}(t, y', 0, z_3) + \frac{(\varepsilon z_3)^{M+1}}{M!} \int_0^1 (1-u)^M \partial_{y_3}^{M+1} \underline{q}^{m,+}(t, y', u\varepsilon z_3, z_3) du.$$

Il vient alors :

$$\varepsilon^m I_3^{m,+}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^M \frac{\varepsilon^{j+m+1}}{j!} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1/\varepsilon} z_3^j \partial_{y_3}^j \underline{q}^{m,+}(t, y', 0, z_3) dz_3 dy' \quad (5.5.35a)$$

$$+ \frac{\varepsilon^{M+m+2}}{M!} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1/\varepsilon} \int_0^1 (1-u)^M \partial_{y_3}^{M+1} \underline{q}^{m,+}(t, y', u\varepsilon z_3, z_3) du dz_3 dy'. \quad (5.5.35b)$$

Le terme de reste donné par (5.5.35b) est clairement un $\mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$. On décompose ensuite l'intégrale $\int_0^{1/\varepsilon}$ dans (5.5.35a) en $\int_0^{+\infty} - \int_{1/\varepsilon}^{+\infty}$. Comme la moyenne rapide $\underline{q}^{m,+}$ appartient à l'espace S_\star^+ , on peut affirmer qu'il existe deux constantes $C_M, \delta_M > 0$, ne dépendant que de M , telles que :

$$\forall j, \quad \forall m, \quad \left| z_3^j \partial_{y_3}^j \underline{q}^{m,+}(t, y', 0, z_3) \right| \leq C_M e^{-\delta_M z_3}.$$

La contribution venant de l'intégrale $\int_{1/\varepsilon}^{+\infty}$ donnera donc un terme en $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$. En effet, il suffit d'écrire la majoration

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} \int_{1/\varepsilon}^{+\infty} z_3^j \partial_{y_3}^j \underline{q}^{m,+}(t, y', 0, z_3) dz_3 dy' \right| \leq C_M \int_{1/\varepsilon}^{+\infty} e^{-\delta_M z_3} dz_3 = \frac{C_M}{\delta_M} e^{-\frac{\delta_M}{\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty).$$

Ainsi, l'expression (5.5.35a) se réécrit :

$$\varepsilon^m I_3^{m,+}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^M \frac{\varepsilon^{j+m+1}}{j!} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{+\infty} z_3^j \partial_{y_3}^j \underline{q}^{m,+}(t, y', 0, z_3) dz_3 dy' + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \quad (5.5.36)$$

Puisque l'on effectue un développement asymptotique à l'ordre M par rapport à ε , on peut limiter la somme dans (5.5.36) aux indices $j \in \{0, \dots, M - m - 1\}$. Comme pour l'expression (5.5.33) de $I_2^{m,+}(\varepsilon)$, il convient de remarquer que le terme donné par (5.5.36) peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon^m I_3^{m,+}(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} \underline{Q}_{m+1}^{m,+}(t) + \varepsilon^{m+2} \underline{Q}_{m+2}^{m,+}(t) + \dots + \varepsilon^M \underline{Q}_M^{m,+}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \quad (5.5.37)$$

où chaque $\underline{Q}_p^{m,+}$, pour $m+1 \leq p \leq M$, ne dépend que de la moyenne rapide $\underline{q}^{m,+}$.

► **Cas de $I_4^{m,+}(\varepsilon)$.** En utilisant une fois de plus le fait que les moyennes rapides $\underline{q}^{m,+}$ appartiennent à S_\star^+ , on peut majorer l'intégrale $I_4^{m,+}(\varepsilon)$ comme suit :

$$\begin{aligned} |I_4^{m,+}(\varepsilon)| &\leq C_M \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_1^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M} e^{-\delta_M \frac{y_3}{\varepsilon}} dy_3 \right| dy' \\ &\leq \frac{C_M}{\delta_M} \varepsilon e^{-\frac{\delta_M}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{T}^2} \left| 1 - \exp \left[(\varepsilon \psi^2 + \dots + \varepsilon^M \psi^{M+1}) \left(t, y', \frac{\xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) \right] \right| dy' \\ &\leq C'_M e^{-\frac{\delta_M}{\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty), \end{aligned} \quad (5.5.38)$$

où les constantes $C_M, C'_M, \delta_M > 0$ ne dépendent que de M .

En réunissant les résultats (5.5.37) et (5.5.38), le développement asymptotique (5.5.29) associé aux moyennes rapides $\underline{q}^{m,+}$ s'écrit finalement :

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m \underline{I}^{m,+} = \sum_{m=2}^M \varepsilon^m \sum_{j=1}^{m-1} \underline{Q}_m^{j,+}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \quad (5.5.39)$$

On obtient une expression similaire pour l'état “-”.

Étape 3 : développement asymptotique de l'intégrale $I_\star^{m,+}(\varepsilon)$.

On décompose une fois de plus l'intégrale $I_\star^{m,+}(\varepsilon)$ comme suit :

$$\begin{aligned} I_\star^{m,+}(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}_\star^{m,+} \left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) dy_3 dy' \\ &= \int_{\Omega^+} \underline{q}_\star^{m,+} \left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) dy_3 dy' + \int_{\mathbb{T}^2} \int_1^{1-\psi_{app,\varepsilon}^M(t,y')} \underline{q}_\star^{m,+} \left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) dy_3 dy' \\ &=: I_5^{m,+}(\varepsilon) + I_6^{m,+}(\varepsilon). \end{aligned}$$

► **Cas de $I_5^{m,+}(\varepsilon)$.** Commençons par décomposer $\underline{q}_\star^{m,+}$ en série de Fourier par rapport à sa dernière variable :

$$I_5^{m,+}(\varepsilon) = \sum_{k \neq 0} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^1 \widehat{q}^{m,+} \left(t, y', y_3, \frac{y_3}{\varepsilon}, k \right) \exp \left(ik \frac{\tau t + \xi' \cdot y'}{\varepsilon} \right) dy_3 dy'.$$

La méthode de la *phase instationnaire* permet alors d'affirmer que

$$I_5^{m,+}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty).$$

► **Cas de $I_6^{m,+}(\varepsilon)$.** En utilisant le fait que $\underline{q}_\star^{m,+} \in S_\star^+$, on traite l'intégrale $I_6^{m,+}(\varepsilon)$ exactement de la même façon que l'on a estimé $I_4^{m,+}(\varepsilon)$ en (5.5.38), ce qui donne également

$$I_6^{m,+}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty).$$

Ainsi, l'intégrale $I_\star^{m,+}(\varepsilon)$ n'a aucune contribution jusqu'à l'ordre M dans le développement asymptotique en puissances de ε (5.5.29).

Conclusion sur la normalisation de la pression (5.5.26).

En réunissant des résultats (5.5.34) et (5.5.39), le développement asymptotique en ε de l'expression (5.5.29) s'écrit finalement :

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m \int_{\Omega^{\pm}} q^{m,\pm}(t, y) dy + \sum_{m=3}^M \varepsilon^m \sum_{j=1}^{m-2} \underline{Q}_m^{j,+}(t) + \sum_{m=2}^M \varepsilon^m \sum_{j=1}^{m-1} \underline{Q}_m^{j,+}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \quad (5.5.40)$$

et de même pour l'état “-”. Insistons sur le fait que les termes de (5.5.40) ne font intervenir les profils que sur le domaine fixe Ω^+ , et non sur un domaine “épaissi” par rapport à y_3 comme c'était le cas au départ comme on peut le voir dans l'expression (5.5.28). Ainsi, afin d'assurer l'égalité (5.5.28), il suffit d'imposer les conditions de normalisation ci-après sur les profils $q^{m,\pm}$. À l'ordre ε , nous retrouvons le résultat (5.4.35) obtenu au Paragraphe 5.4.2 :

$$\int_{\Omega^+} \underline{q}^{1,+}(t, y) dy + \int_{\Omega^-} \underline{q}^{1,-}(t, y) dy = 0. \quad (5.5.41a)$$

On peut également remarquer que la condition (5.5.41a) “persiste” pour le premier correcteur $q^{2,\pm}$. En effet, le terme $\underline{Q}_2^{1,\pm}$ d'ordre ε^2 est identiquement nul (voir son expression détaillée (5.5.36)), car on a montré au Paragraphe 5.4.2 que la moyenne rapide $\underline{q}^{1,\pm}$ était nulle. Il reste donc à l'ordre ε^2 :

$$\int_{\Omega^+} \underline{q}^{2,+}(t, y) dy + \int_{\Omega^-} \underline{q}^{2,-}(t, y) dy = 0. \quad (5.5.41b)$$

À partir du rang $m \geq 3$, la moyenne sur Ω du correcteur lent ($\underline{q}^{m,+}, \underline{q}^{m,-}$) n'est plus nécessairement nulle, et doit vérifier :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} \underline{q}^{m,+}(t, y) dy + \int_{\Omega^-} \underline{q}^{m,-}(t, y) dy \\ = - \sum_{j=1}^{m-2} \left(\underline{Q}_m^{j,+}(t) + \underline{Q}_m^{j,-}(t) \right) - \sum_{j=1}^{m-1} \left(\underline{Q}_m^{j,+}(t) + \underline{Q}_m^{j,-}(t) \right). \end{aligned} \quad (5.5.41c)$$

Il est important de remarquer que le terme de droite de (5.5.41c) ne dépend que des profils d'ordre inférieur ($\underline{q}^{j,\pm}$) $_{j \leq m-2}$, ($\underline{q}^{j,\pm}$) $_{j \leq m-1}$ et (ψ^j) $_{j \leq m-2}$. Les conditions de moyenne sur Ω (5.5.41) sont donc à adjoindre à la cascade BKW (5.5.17).

À titre d'exemple, on explicite ci-dessous la condition de normalisation que doit vérifier le correcteur lent $\underline{q}^{3,\pm}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} \underline{q}^{3,+}(t, y) dy + \int_{\Omega^-} \underline{q}^{3,-}(t, y) dy \\ = - \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}_+} \underline{q}^{2,+}(t, y', 0, Y_3) dY_3 dy' - \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}_-} \underline{q}^{2,-}(t, y', 0, Y_3) dY_3 dy'. \end{aligned} \quad (5.5.42)$$

5.5.5 Résolution du problème “rapide” inhomogène

Pour commencer, considérons le problème inhomogène général suivant dont l'inconnue est (U^\pm, φ) que l'on cherche dans l'espace $S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ et où $F^\pm \in S^\pm$ et $G \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ sont des termes sources quelconques :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^\pm = F^\pm, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+U^+ + B^-U^- - \partial_\theta \varphi (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = G, & y_3 = Y_3 = 0, \quad \theta \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (5.5.43a)$$

$$(5.5.43b)$$

Nous allons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur F^\pm et G afin que le système (5.5.43) ait une solution (U^\pm, φ) appartenant à l'espace $S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$. Dans (5.5.43), nous avons omis les variables $(t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2$ qui jouent un rôle de paramètres. Avant de résoudre le système (5.5.43), on remarque que les termes sources doivent au préalable vérifier une condition de compatibilité. En effet, en considérant la 6^e ligne de (5.5.43a), nous avons explicitement :

$$-b^\pm \partial_\theta u_3^\pm + c^\pm \partial_\theta H_3^\pm = F_6^\pm. \quad (5.5.44)$$

Par conséquent, en prenant la trace de (5.5.44) sur le bord $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ et en utilisant les conditions de bord (5.5.43b), on en déduit que les termes sources F^\pm et G doivent nécessairement vérifier les conditions de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} -b^+ \partial_\theta G_1 + c^+ \partial_\theta G_2 = F_6^+|_{y_3=Y_3=0}, \\ -b^- \partial_\theta G_3 + c^- \partial_\theta G_4 = F_6^-|_{y_3=Y_3=0}. \end{cases} \quad (5.5.45)$$

Le but de ce paragraphe est d'expliquer l'ensemble des relations de compatibilité sur les termes sources F^\pm, G qui assurent qu'on puisse résoudre le système (5.5.43). Notre résultat est le suivant.

Proposition 5.5.1

Soient $F^\pm \in S^\pm$ et $G \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ des termes sources satisfaisant (5.5.45), et soit $(\tau, \xi') \in \mathbb{R}^3$ une fréquence vérifiant (H3), (H4) avec $\tau \neq 0$. Alors le système (5.5.43) possède une solution (U^\pm, φ) appartenant à $S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ si et seulement si :

(i) la moyenne lente de F^\pm est nulle :

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \Omega^\pm, \quad \underline{F}^\pm(t, y) = 0, \quad (5.5.46a)$$

où l'on rappelle que Ω^\pm désigne le domaine fixe $\mathbb{T}^2 \times I_\pm$, avec $I_+ = (0, 1)$ et $I_- = (-1, 0)$;

(ii) la moyenne rapide de F^\pm vérifie :

$$\forall (t, y, Y_3) \in [0, T] \times \Omega^\pm \times \mathbb{R}_\pm, \quad \underline{F}^\pm(t, y, Y_3) \in \text{Im } A_3^\pm; \quad (5.5.46b)$$

(iii) les coefficients de Fourier $\widehat{F}^\pm(k)|_{y_3=0}$ et $\widehat{G}(k)$ des termes sources F^\pm et G satisfont la condition d'orthogonalité suivante, pour tous les modes de Fourier $k \neq 0$ et pour tout $(t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-|k|Y_3} \mathcal{L}^+(k) \cdot \widehat{F}^+(t, y', 0, Y_3, k) dY_3 - \int_{-\infty}^0 e^{|k|Y_3} \mathcal{L}^-(k) \cdot \widehat{F}^-(t, y', 0, Y_3, k) dY_3 \\ & + \ell_1^+ \widehat{G}_1(t, y', k) + \ell_2^+ \widehat{G}_2(t, y', k) + \ell_1^- \widehat{G}_3(t, y', k) + \ell_2^- \widehat{G}_4(t, y', k) \\ & - i \tau \text{sgn}(k) \widehat{G}_5(t, y', k) = 0, \end{aligned} \quad (5.5.46c)$$

où les coefficients réels ℓ_1^\pm et ℓ_2^\pm sont donnés par (5.4.71) et le vecteur $\mathcal{L}^\pm(k)$ par (A.2.1b).

Dans ce cas, (5.5.43) admet une solution particulière de la forme $(U^\pm, 0)$, et toute solution (U^\pm, φ) de (5.5.43) vérifie :

$$\forall k \neq 0, \quad \forall t, y, Y_3, \quad \widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, k) = \gamma^\pm(t, y, k) e^{\mp |k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k) + \widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, k). \quad (5.5.47)$$

Dans (5.5.47), on rappelle que le vecteur $\mathcal{R}^\pm(k) \in \mathbb{C}^7$ est défini par (A.2.1a), et les coefficients γ^\pm satisfont :

$$\forall k \neq 0, \quad \forall (t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2, \quad \gamma^\pm(t, y', 0, k) = \pm |k| \widehat{\varphi}(t, y', k). \quad (5.5.48)$$

En outre, toute solution (U^\pm, φ) de (5.5.43) vérifie :

$$\forall t, y, Y_3, \quad \widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, 0) - \widehat{U}^\pm(t, y, Y_3, 0) = \underline{\underline{V}}^\pm(t, y) + \underline{V}^\pm(t, y, Y_3), \quad (5.5.49)$$

où $\underline{\underline{V}}^\pm$ et \underline{V}^\pm satisfont les deux conditions suivantes :

$$\Pi \underline{V}^\pm = \underline{V}^\pm, \quad B^+ \underline{\underline{V}}^+|_{y_3=0} + B^- \underline{\underline{V}}^-|_{y_3=0} = 0. \quad (5.5.50)$$

Rappelons que $\Pi = \text{diag}(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Ker } A_3^\pm$.

Remarques. La Proposition 5.5.1 est très proche du résultat de Marcou [Mar10], à quelques variantes près. En effet, on étudie ici un problème à frontière libre, caractéristique et possédant des contraintes de divergence nulle. Ces différences expliquent la présence de la condition (5.5.46b) et du terme source G dans la relation d'orthogonalité (5.5.46c). Au vu des conditions (5.5.49) et (5.5.50) satisfaites par $\underline{\underline{V}}^\pm$ et \underline{V}^\pm , on constate que l'on dispose d'un degré de liberté sur les composantes *tangentielles* de $\underline{\underline{V}}^\pm$ et \underline{V}^\pm (*i.e.* sur $\Pi \underline{\underline{V}}^\pm$ et $\Pi \underline{V}^\pm$). Ceci explique le choix que l'on effectuera sur les correcteurs $U^{m,\pm}$, pour $m \geq 2$, en imposant les conditions initiales (5.2.2) qui visent à simplifier l'analyse menée au Paragraphe 5.5.6.

Les conditions de compatibilité (5.5.46) ne font pas intervenir les coefficients de Fourier d'ordre 0 de G . C'est la raison pour laquelle on pourra se permettre de chercher les profils $(\psi^m)_{m \geq 2}$ à moyenne nulle sur le tore.

Les conditions (5.5.46) ont bien été imposées pour les termes sources $(F^{1,\pm}, G^{1,+} + G^{1,-})$ du problème (5.4.11) que l'on a utilisé pour déterminer le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ à la Section 5.4. En effet, d'après la démarche effectuée au Paragraphe 5.4.2, les conditions (5.5.46a) et (5.5.46b) sont satisfaites par le terme source $F^{1,\pm}$. Enfin, la condition d'orthogonalité (5.5.46c) est également vérifiée par les termes sources $F^{1,\pm}$ et $G^{1,+} + G^{1,-}$; elle a conduit à l'équation de type Hamilton-Jacobi (5.4.100) satisfaite par ψ^2 au Paragraphe 5.4.3.

Démonstration. De la même façon qu'à la Section 5.4, on décompose le système (5.5.43) en modes de Fourier par rapport à θ ; on obtient la famille de problèmes aux limites suivants, où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_k^\pm \widehat{U}^\pm(k) = \widehat{F}^\pm(k), \quad y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ B^+ \widehat{U}^+(k) + B^- \widehat{U}^-(k) - ik \widehat{\varphi}(k) (\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = \widehat{G}(k), \quad y_3 = Y_3 = 0. \end{array} \right. \quad (5.5.51a)$$

$$(5.5.51b)$$

Rappelons la notation $L_k^\pm = A_3^\pm \partial_{Y_3} + ik \mathcal{A}^\pm$. Dans les équations de (5.5.51), les variables (t, y') jouent un rôle de paramètre, que l'on omettra par la suite par alléger les notations.

Conditions nécessaires. Supposons que $(U^\pm, \varphi) \in S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ est une solution du système (5.5.43). Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier $(\widehat{U}^\pm(k), \widehat{\varphi}(k))$ vérifient donc le système (5.5.51).

Commençons par le cas du mode de Fourier $k = 0$, en décomposant les coefficients de Fourier $\widehat{U}^\pm(0)$ et $\widehat{F}^\pm(0)$ en moyenne lente et moyenne rapide (on renvoie aux notations (5.2.1)) :

$$\begin{aligned} \widehat{U}^\pm(0) &= \underline{\underline{U}}^\pm + \underline{U}^\pm \in \underline{\underline{S}}^\pm \oplus S_\star^\pm, \\ \widehat{F}^\pm(0) &= \underline{\underline{F}}^\pm + \underline{F}^\pm \in \underline{\underline{S}}^\pm \oplus S_\star^\pm. \end{aligned}$$

L'équation (5.5.51a) (avec $k = 0$) se réécrit :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{U}^\pm = \underline{\underline{F}}^\pm + \underline{F}^\pm.$$

En passant à la limite $Y_3 \rightarrow \pm\infty$, on obtient directement la condition (5.5.46a) sur la moyenne lente du terme source F^\pm . Il en découle immédiatement la deuxième condition nécessaire (5.5.46b).

On se donne à présent un mode de Fourier $k \neq 0$ et on se concentre sur le système (5.5.51). On procède exactement de la même façon qu'au Paragraphe 5.4.3 où l'on a étudié ce même système avec $(U^{2,\pm}, \psi^3)$ dans le rôle de (U^\pm, φ) et $(F^{1,\pm}, G^{1,+} + G^{1,-})$ dans le rôle de (F^\pm, G) . En multipliant la première équation du système (5.5.51) par les fonctions "test" (V^+, V^-) (5.4.70) solutions du problème dual (5.4.64), on aboutit à la condition d'orthogonalité (5.5.46c), tout à fait similaire à la condition (5.4.73) que l'on avait obtenue au Paragraphe 5.4.3.

Conditions suffisantes. On suppose désormais que les termes sources $F^\pm \in S^\pm$ et $G \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ satisfont les conditions (5.5.45), (5.5.46) et on cherche à construire une/les solution(s) (U^\pm, φ) du système (5.5.43), dans l'espace $S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$. Pour commencer, supposons momentanément que l'on arrive à construire une *solution particulière* de (5.5.43) sous la forme $(\mathcal{U}^\pm, 0)$. Alors toute solution $(U^\pm, \varphi) \in S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ de (5.5.43) s'écrit $(\mathcal{U}^\pm + V^\pm, \varphi)$, où $(V^\pm, \varphi) \in S^\pm \times H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ est solution du problème *homogène* :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)V^\pm = 0, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+V^+ + B^-V^- - \partial_\theta\varphi(\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-) = 0, & y_3 = Y_3 = 0, \quad \theta \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (5.5.52)$$

Un tel problème a déjà été analysé en détails au Paragraphe 5.4.1, dans lequel nous avons montré l'existence d'une solution (V^\pm, φ) de (5.5.52) ; en outre, les coefficients de Fourier $\widehat{V}^\pm(k)$, pour $k \neq 0$, s'écrivent sous la forme :

$$\forall k \neq 0, \quad \forall t, y, Y_3, \quad \widehat{V}^\pm(t, y, Y_3, k) = \gamma^\pm(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k), \quad (5.5.53)$$

où $\mathcal{R}^\pm(k) \in \mathbb{C}^7$ est donné par (A.2.1a). L'expression (5.5.53) permet d'obtenir le résultat (5.5.47) annoncé par la Proposition 5.5.1. On a une expression plus précise en $y_3 = 0$, car alors les coefficients de Fourier $\widehat{V}^\pm(k)$, pour $k \neq 0$, sont paramétrés par φ comme suit :

$$\forall k \neq 0, \quad \forall t, y', Y_3, \quad \widehat{V}^\pm(t, y', 0, Y_3, k) = \pm|k| \widehat{\varphi}(k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k). \quad (5.5.54)$$

L'expression (5.5.54) établit en particulier le résultat (5.5.48) de la Proposition 5.5.1. On dispose de plus d'un degré de liberté sur la moyenne de φ , du fait de la présence de la dérivée $\partial_\theta\varphi$ dans les conditions de bord du système (5.5.43). Pour simplifier, on choisira φ à moyenne nulle dans la construction des correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ au Paragraphe 5.5.6.

Dès lors, il reste à résoudre le problème *inhomogène* (5.5.43) avec $\varphi = 0$, c'est-à-dire à construire une solution particulière \mathcal{U}^\pm du problème :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)\mathcal{U}^\pm = F^\pm, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+\mathcal{U}^+ + B^-\mathcal{U}^- = G, & y_3 = Y_3 = 0, \quad \theta \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (5.5.55)$$

On commence la résolution de ce système en traitant le mode de Fourier 0. Rappelons les notations (5.2.1) permettant de décomposer le coefficient de Fourier $\widehat{\mathcal{U}}^\pm(0)$ en moyennes lente et rapide :

$$\widehat{\mathcal{U}}^\pm(0) = \underline{\underline{\mathcal{U}}}^\pm + \underline{\mathcal{U}}^\pm. \quad (5.5.56)$$

► **La moyenne rapide $\underline{\mathcal{U}}^\pm$.** Dans un premier temps, on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante, obtenue à partir du système (5.5.55) auquel on a appliqué l'opérateur de moyenne sur le tore, et où on a utilisé la condition (5.5.46a) :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{\mathcal{U}}^\pm = \underline{F}^\pm, \quad \forall y_3 \geq 0, \quad \forall Y_3 \geq 0. \quad (5.5.57)$$

À présent, nous suivons exactement la même démarche que pour l'analyse du système homogène (5.3.10), en tenant compte ici des termes sources $(\widehat{F}_i)_{1 \leq i \leq 7}$. L'idée est d'utiliser les contraintes sur la "divergence" de la vitesse **et** du champ magnétique pour les injecter dans les équations 1, 2, 4 et 5, ce qui permet "d'éliminer" les dérivées normales $\partial_{Y_3} \widehat{u}_3$ et $\partial_{Y_3} \widehat{H}_3$; ensuite on dérivera l'équation 3 de (5.5.60) par rapport à Y_3 pour en déduire une EDO d'ordre 2 sur la pression \widehat{q} .

Avant cela, revenons sur les contraintes que doivent satisfaire la vitesse \widehat{u} et le champ magnétique \widehat{H} . L'équation 7 du système (5.5.60) correspond à la contrainte de "divergence" sur la vitesse, mais nous n'avons *a priori* aucune contrainte sur le champ magnétique. Cette dernière peut en fait être obtenue en effectuant une opération adéquate sur les lignes du système (5.5.60), que l'on dénotera par (L1), ..., (L7). En effet, grâce à l'opération de lignes ξ_1 (L4) + ξ_2 (L5) + $\frac{1}{ik} \partial_{Y_3}$ (L6) (licite car $k \neq 0$), nous obtenons la contrainte suivante sur le champ magnétique⁹, analogue à la ligne (L7) du système (5.5.60) :

$$\partial_{Y_3} \widehat{H}_3 + ik\xi_1 \widehat{H}_1 + ik\xi_2 \widehat{H}_2 = \frac{1}{ik\tau} \left(\partial_{Y_3} \widehat{F}_6 + ik\xi_1 \widehat{F}_4 + ik\xi_2 \widehat{F}_5 \right) =: \widehat{F}_8. \quad (5.5.61)$$

Maintenant, on injecte la contrainte donnée par la ligne (L7) du système (5.5.60) ainsi que la contrainte (5.5.61) dans les équations 1, 2, 4 et 5 du système (5.5.60), et on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} ik(c\widehat{u}_1 - b\widehat{H}_1 + \xi_1 \widehat{q}) = \widehat{F}_1 - u_1 \widehat{F}_7 + H_1 \widehat{F}_8 \\ ik(c\widehat{u}_2 - b\widehat{H}_2 + \xi_2 \widehat{q}) = \widehat{F}_2 - u_2 \widehat{F}_7 + H_2 \widehat{F}_8 \\ \partial_{Y_3} \widehat{q} + ik(c\widehat{u}_3 - b\widehat{H}_3) = \widehat{F}_3, \\ ik(-b\widehat{u}_1 + c\widehat{H}_1) = \widehat{F}_4 - H_1 \widehat{F}_7 + u_1 \widehat{F}_8 \\ ik(-b\widehat{u}_2 + c\widehat{H}_2) = \widehat{F}_5 - H_2 \widehat{F}_7 + u_2 \widehat{F}_8 \\ \partial_{Y_3} \widehat{u}_3 + ik\xi_1 \widehat{u}_1 + ik\xi_2 \widehat{u}_2 = \widehat{F}_7, \\ \partial_{Y_3} \widehat{H}_3 + ik\xi_1 \widehat{H}_1 + ik\xi_2 \widehat{H}_2 = \widehat{F}_8, \end{array} \right. \quad (5.5.62)$$

où l'on rappelle la définition (5.5.61) du terme source \widehat{F}_8 . En dérivant l'équation 3 de (5.5.62) par rapport à Y_3 et en utilisant les équations 1 et 2 du système (5.5.62), nous obtenons une équation différentielle ordinaire inhomogène d'ordre 2 satisfaite par la pression \widehat{q} , qui s'écrit :

$$\partial_{Y_3}^2 \widehat{q} - k^2 \widehat{q} = \widehat{\mathcal{F}}. \quad (5.5.63a)$$

Le terme source dans (5.5.63a) est défini par :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}} &:= \partial_{Y_3} \widehat{F}_3 + ik(\xi_1 \widehat{F}_1 + \xi_2 \widehat{F}_2 - (c+a) \widehat{F}_7 + 2b \widehat{F}_8) \\ &= \partial_{Y_3} \widehat{F}_3 + \frac{2b}{\tau} \partial_{Y_3} \widehat{F}_6 + \frac{ik}{\tau} \left(\tau\xi_1 \widehat{F}_1 + \tau\xi_2 \widehat{F}_2^\pm + 2\xi_1 b \widehat{F}_4 + 2\xi_2 b \widehat{F}_5 - \tau(c+a) \widehat{F}_7 \right). \end{aligned} \quad (5.5.63b)$$

Il convient à présent d'écrire les conditions de bord sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ que doit satisfaire la pression. La condition sur le saut de pression est donnée par la dernière composante des conditions de bord (5.5.55) (pour le mode de Fourier k). Par la suite, on réécrit les exposants $^\pm$ car on s'intéresse au *couple* $(\widehat{q}^+, \widehat{q}^-)$. Le saut de pression doit vérifier :

$$[\widehat{q}|_{y_3=0}] = \widehat{G}_5, \quad (5.5.63c)$$

où le crochet $[\cdot]$ ci-dessus désigne le saut à travers l'interface $\{Y_3 = 0\}$. On termine par les conditions de bord satisfaites par la dérivée première $\partial_{Y_3} \widehat{q}^\pm$. En prenant la trace sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ de l'équation 3 du système (5.5.62), et en utilisant les conditions de bord (5.5.55) (pour le mode de Fourier k), on en déduit :

$$\partial_{Y_3} \widehat{q}^\pm|_{y_3=Y_3=0} = \widehat{G}^\pm, \quad (5.5.63d)$$

⁹Rappelons que l'on a supposé $\tau \neq 0$.

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}^+ &:= \widehat{F}_3^+|_{y_3=Y_3=0} - ik(c^+ \widehat{G}_1 - b^+ \widehat{G}_2), \\ \widehat{\mathcal{G}}^- &:= \widehat{F}_3^-|_{y_3=Y_3=0} - ik(c^- \widehat{G}_3 - b^- \widehat{G}_4).\end{aligned}\tag{5.5.64}$$

Récapitulons le problème de Laplace inhomogène que doit satisfaire la pression $(\widehat{q}^+, \widehat{q}^-)$:

$$\begin{cases} \partial_{Y_3}^2 \widehat{q}^\pm - k^2 \widehat{q}^\pm = \widehat{\mathcal{F}}^\pm, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \\ [\widehat{q}|_{y_3=0}] = \widehat{G}_5, & Y_3 = 0, \\ \partial_{Y_3} \widehat{q}^\pm|_{y_3=0} = \widehat{\mathcal{G}}^\pm, & Y_3 = 0. \end{cases}\tag{5.5.65}$$

La formule de Duhamel montre que les solutions de l'EDO (5.5.63a) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{q}^\pm(t, y, Y_3, k) &= \left(\alpha^\pm(t, y, k) - \frac{1}{2|k|} \int_0^{Y_3} e^{|k|Y_3'} \widehat{\mathcal{F}}^\pm(t, y, Y_3', k) dY_3' \right) e^{-|k|Y_3} \\ &+ \left(\beta^\pm(t, y, k) + \frac{1}{2|k|} \int_0^{Y_3} e^{-|k|Y_3'} \widehat{\mathcal{F}}^\pm(t, y, Y_3', k) dY_3' \right) e^{|k|Y_3}.\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution du système (5.5.43) dans l'espace S^\pm (donc en particulier *bornée* par rapport à Y_3), il convient de choisir :

- pour l'état “+” :

$$\beta^+(t, y, k) := -\frac{1}{2|k|} \int_0^{+\infty} e^{-|k|Y_3'} \widehat{\mathcal{F}}^+(t, y, Y_3', k) dY_3',$$

- pour l'état “-” :

$$\alpha^-(t, y, k) := -\frac{1}{2|k|} \int_{-\infty}^0 e^{|k|Y_3'} \widehat{\mathcal{F}}^-(t, y, Y_3', k) dY_3'.$$

Les coefficients restants α^+ et β^- seront, quant à eux, à déterminer à l'aide des conditions de saut du problème de Laplace (5.5.65). Les solutions \widehat{q}^\pm de (5.5.63a), appartenant au moins à l'espace $L_{Y_3}^\infty$, s'écrivent donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{q}^\pm(t, y, Y_3, k) &= \kappa^\pm(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mp \frac{1}{2|k|} \left(\int_0^{Y_3} e^{\mp|k|(Y_3-Y_3')} \widehat{\mathcal{F}}^\pm(t, y, Y_3', k) dY_3' \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pm\infty}^{Y_3} e^{\pm|k|(Y_3-Y_3')} \widehat{\mathcal{F}}^\pm(t, y, Y_3', k) dY_3' \right),\end{aligned}\tag{5.5.66}$$

où les coefficients κ^\pm sont à ce stade inconnus. Avant de déterminer ces coefficients, réécrivons l'expression (5.5.66) en fonction du terme source F^\pm uniquement. Pour gérer les dérivées $\partial_{Y_3} \widehat{F}_3^\pm$ et $\partial_{Y_3} \widehat{F}_6^\pm$ dans (5.5.63b), on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}& \int_0^{Y_3} e^{\pm|k|Y_3'} \left(\partial_{Y_3} \widehat{F}_3^\pm + \frac{2b^\pm}{\tau} \partial_{Y_3} \widehat{F}_6^\pm \right) (t, y, Y_3', k) dY_3' \\ &= \frac{ik}{\tau} \int_0^{Y_3} e^{\pm|k|Y_3'} (\pm i \operatorname{sgn}(k) \tau \widehat{F}_3^\pm \pm 2i \operatorname{sgn}(k) b^\pm \widehat{F}_6^\pm) (t, y, Y_3', k) dY_3' \\ &\quad + e^{\pm|k|Y_3} \left(\widehat{F}_3^\pm + \frac{2b^\pm}{\tau} \widehat{F}_6^\pm \right) (t, y, Y_3, k) - \left(\widehat{F}_3^\pm + \frac{2b^\pm}{\tau} \widehat{F}_6^\pm \right) (t, y, 0, k).\end{aligned}$$

On procède de façon similaire pour traiter l'intégrale $\int_{\pm\infty}^{Y_3}$ dans (5.5.66). Ainsi, l'expression (5.5.66) du coefficient de Fourier $\widehat{q}^\pm(k)$ se réécrit en fonction du terme source F^\pm de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{q}^\pm(t, y, Y_3, k) &= \left(\kappa^\pm(t, y, k) \pm \frac{1}{2|k|} \left(\widehat{F}_3^\pm(t, y, 0, k) + \frac{2b^\pm}{\tau} \widehat{F}_6^\pm(t, y, 0, k) \right) \right) e^{\mp|k|Y_3} \\ &\mp \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} \left(e^{\mp|k|Y_3} \int_0^{Y_3} e^{\pm|k|Y_3'} \overline{\mathcal{L}^\pm(k)} \cdot \widehat{F}^\pm(t, y, Y_3', k) dY_3' \right. \\ &\quad \left. - e^{\pm|k|Y_3} \int_{\pm\infty}^{Y_3} e^{\mp|k|Y_3'} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \widehat{F}^\pm(t, y, Y_3', k) dY_3' \right),\end{aligned}\tag{5.5.67}$$

où le vecteur $\mathcal{L}^\pm(k) \in \mathbb{C}^7$ est défini par (A.2.1b).

Grâce aux conditions de bord du système (5.5.65), nous allons pouvoir déterminer les coefficients κ^\pm lorsque $y_3 = 0$. Il restera dans un second temps à redresser l'expression obtenue par rapport à y_3 qui, rappelons-le, joue un rôle de paramètre dans l'équation "rapide" (5.5.43a). Pour ne pas alourdir les notations, nous omettons dans toute la suite de la démonstration les variables (t, y') qui jouent également un rôle de paramètres.

◆ **Détermination des coefficients de Fourier $\hat{q}^\pm(k)$ en $y_3 = 0$.**

Les fonctions \hat{q}^\pm données par (5.5.67) vérifieront (5.5.65) si et seulement si le système (5.5.69) ci-dessous est satisfait par les coefficients κ^\pm . On détermine donc à présent ces coefficients en $y_3 = 0$. Pour ce faire, on évalue en $y_3 = Y_3 = 0$ les fonctions \hat{q}^\pm et $\partial_{Y_3}\hat{q}^\pm$ donnés par (5.5.67), puis on injecte les expressions obtenues dans les trois conditions de bord de (5.5.65). On obtient un système linéaire de **trois** équations que doivent satisfaire les **deux** coefficients $\kappa^+(0, k)$ et $\kappa^-(0, k)$. Pour écrire ce système de façon plus concise, on définit :

$$I_k^\pm \hat{F}^\pm := \int_{\mathbb{R}_\pm} e^{\mp |k| Y_3'} \mathcal{L}^\pm(k) \cdot \hat{F}^\pm(0, Y_3', k) dY_3'. \quad (5.5.68)$$

Notons que $I_k^\pm \hat{F}^\pm$ est une fonction de (t, y') . En prenant en compte la définition (5.5.64) du terme source $\hat{\mathcal{G}}^\pm$, le système linéaire que doivent satisfaire les coefficients $\kappa^\pm(0, k)$ s'écrit explicitement comme suit (où l'on a ôté la variable k dans les coefficients de Fourier pour alléger les notations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa^+ - \kappa^- = -\frac{1}{2|k|} \left(\hat{F}_3^+ + \frac{2b^+}{\tau} \hat{F}_6^+ + \hat{F}_3^- + \frac{2b^-}{\tau} \hat{F}_6^- \right) \Big|_{y_3=Y_3=0} \\ \quad + \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} (I_k^+ \hat{F}^+ - I_k^- \hat{F}^-) + \hat{G}_5 \\ -\kappa^+ = \frac{1}{2|k|} \left(\hat{F}_3^+ - \frac{2b^+}{\tau} \hat{F}_6^+ \right) \Big|_{y_3=Y_3=0} \\ \quad + \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} I_k^+ \hat{F}^+ - i \operatorname{sgn}(k) (c^+ \hat{G}_1 - b^+ \hat{G}_2) \\ \kappa^- = \frac{1}{2|k|} \left(\hat{F}_3^- - \frac{2b^-}{\tau} \hat{F}_6^- \right) \Big|_{y_3=Y_3=0} \\ \quad - \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} I_k^- \hat{F}^- - i \operatorname{sgn}(k) (c^- \hat{G}_3 - b^- \hat{G}_4). \end{array} \right. \quad (5.5.69)$$

Le système (5.5.69) semble *a priori* surdéterminé, mais il n'en est rien grâce à la condition d'orthogonalité (5.5.46c). Cette dernière permet effectivement "d'éliminer" la première équation du système (5.5.69) qui est redondante avec les deux dernières¹⁰, ce qui détermine de façon unique les coefficients κ^\pm à l'aide des deux équations restantes. Les coefficients $\kappa^\pm(0, k)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \kappa^+(0, k) &= i \operatorname{sgn}(k) (c^+ \hat{G}_1 - b^+ \hat{G}_2) - \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} I_k^+ \hat{F}^+ - \frac{1}{2|k|} \left(\hat{F}_3^+ - \frac{2b^+}{\tau} \hat{F}_6^+ \right) \Big|_{y_3=Y_3=0} \\ \kappa^-(0, k) &= -i \operatorname{sgn}(k) (c^- \hat{G}_3 - b^- \hat{G}_4) - \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} I_k^- \hat{F}^- + \frac{1}{2|k|} \left(\hat{F}_3^- - \frac{2b^-}{\tau} \hat{F}_6^- \right) \Big|_{y_3=Y_3=0}. \end{aligned} \quad (5.5.70)$$

On rappelle qu'on a omis les variables $(t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2$ dans (5.5.70).

À présent, il reste à redresser les coefficients de (5.5.70) par rapport à $y_3 \in I_\pm$. On illustre la démarche pour l'état "+", le raisonnement sera similaire pour l'état "-". Comme l'intervalle $I_+ = [0, 1]$ est compact,

¹⁰Pour obtenir la condition d'orthogonalité (5.5.46c), nous avons aussi simplifié l'expression des "traces doubles" $F_6^\pm|_{y_3=Y_3=0}$ grâce à la condition de compatibilité (5.5.45).

on peut par exemple redresser indépendamment de y_3 le premier terme du membre de droite de $\kappa^+(0, k)$ donné par (5.5.70); les deux termes restants, qui dépendent de \widehat{F}^\pm , sont déjà des traces en $y_3 = 0$ (on renvoie notamment à (5.5.68)) : le redressement se fait donc de façon naturelle.

Revenons à l'expression (5.5.67) : une solution particulière du problème de Laplace (5.5.65) est la suivante (en omettant une fois de plus les variables (t, y')) :

$$\begin{aligned} \widehat{q}^+(y_3, Y_3, k) = & -\frac{i \operatorname{sgn}(k)}{\tau} (\ell_1^+ \widehat{G}_1(k) + \ell_2^+ \widehat{G}_2(k)) e^{-|k|Y_3} \\ & - \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} \left(e^{-|k|Y_3} \int_0^{Y_3} e^{|k|Y_3'} \overline{\mathcal{L}^+(k)} \cdot \widehat{F}^+(y_3, Y_3', k) dY_3' \right. \\ & + e^{|k|Y_3} \int_{Y_3}^{+\infty} e^{-|k|Y_3'} \mathcal{L}^+(k) \cdot \widehat{F}^+(y_3, Y_3', k) dY_3' \\ & \left. + e^{-|k|Y_3} \int_0^{+\infty} e^{-|k|Y_3'} \mathcal{L}^+(k) \cdot \widehat{F}^+(y_3, Y_3', k) dY_3' \right), \end{aligned} \quad (5.5.71a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{q}^-(y_3, Y_3, k) = & \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{\tau} (\ell_1^- \widehat{G}_3(k) + \ell_2^- \widehat{G}_4(k)) e^{|k|Y_3} \\ & - \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\tau} \left(e^{|k|Y_3} \int_{Y_3}^0 e^{-|k|Y_3'} \overline{\mathcal{L}^-(k)} \cdot \widehat{F}^-(y_3, Y_3', k) dY_3' \right. \\ & + e^{-|k|Y_3} \int_{-\infty}^{Y_3} e^{|k|Y_3'} \mathcal{L}^-(k) \cdot \widehat{F}^-(y_3, Y_3', k) dY_3' \\ & \left. + e^{|k|Y_3} \int_{-\infty}^0 e^{|k|Y_3'} \mathcal{L}^-(k) \cdot \widehat{F}^-(y_3, Y_3', k) dY_3' \right). \end{aligned} \quad (5.5.71b)$$

Pour conclure sur la pression, il reste à montrer que la superposition des modes de Fourier donnés par (5.5.71), pour $k \neq 0$, fournit bien un élément q_\star^\pm dans l'espace S_\star^\pm .

◆ Régularité des solutions.

Pour commencer on définit, pour $j \in \{1, \dots, 4\}$, la fonction :

$$q_j^\pm(t, y, Y_3, \theta) := \sum_{k \neq 0} \widehat{G}_j(t, y', k) e^{\mp |k|Y_3} e^{ik\theta}, \quad \forall t, y, Y_3, \theta.$$

Comme le terme source G de (5.5.43) est de régularité H^∞ , il n'est pas difficile de voir que les fonctions q_j^\pm ainsi définies appartiennent bien à S_\star^\pm . En revanche, les termes intégraux restants dans (5.5.71) sont un peu plus délicats, et se traitent en utilisant un lemme de Marcou [Mar10] que l'on adapte ici.

Lemme 5.5.2

Si $F \in S_\star^+$, alors $IF := \sum_{k \neq 0} I_k \widehat{F}(k) e^{ik\theta} \in S_\star^+$, où $I_k \widehat{F}(k)$ est de la forme :

- si $k > 0$:

$$\int_{Y_3}^{+\infty} e^{k(Y_3 - Y_3')} \widehat{F}(t, y, Y_3', k) dY_3' \quad \text{ou} \quad \int_0^{Y_3} e^{-k(Y_3 - Y_3')} \widehat{F}(t, y, Y_3', k) dY_3',$$

- si $k < 0$:

$$\int_{Y_3}^{+\infty} e^{-k(Y_3 - Y_3')} \widehat{F}(t, y, Y_3', k) dY_3' \quad \text{ou} \quad \int_0^{Y_3} e^{k(Y_3 - Y_3')} \widehat{F}(t, y, Y_3', k) dY_3'.$$

On renvoie à [Mar10] pour les éléments de démonstration. Le Lemme 5.5.2 s'adapte directement au cas où $F \in S_\star^-$. Revenons à l'étude des termes intégraux dans (5.5.71). D'après l'hypothèse (5.5.46a), les termes sources F^\pm appartiennent à S_\star^\pm donc le Lemme 5.5.2 s'applique et on peut en conclure que la pression q_\star^\pm définie par (5.5.71) est un élément de S_\star^\pm . Ceci achève entièrement le traitement de la pression ; il reste dans un dernier temps à construire la vitesse u_\star^\pm et le champ magnétique H_\star^\pm .

◆ La vitesse et le champ magnétique.

On termine la démonstration de la Proposition 5.5.1 en déterminant la vitesse et le champ magnétique. On n'entre pas dans les détails complets, car tous les arguments ont été abordés lors du traitement de la pression. Revenons au système (5.5.62) : on détermine les composantes \hat{u}_1^\pm et \hat{H}_1^\pm à l'aide des équations 1 et 4. On obtient un sous-système linéaire dont le second membre contient la pression, à ce stade connue. Ce sous-système est *inversible* car nous avons $(c^\pm)^2 - (b^\pm)^2 \neq 0$ en vertu de l'hypothèse (H3). On procède de façon similaire pour déterminer les composantes \hat{u}_2^\pm et \hat{H}_2^\pm grâce aux équations 2 et 5 du système (5.5.62). Enfin, les composantes normales \hat{u}_3^\pm et \hat{H}_3^\pm sont obtenues en intégrant les contraintes de “divergence” données par les deux dernières équations de (5.5.62). Pour que les fonctions \hat{u}_3^\pm et \hat{H}_3^\pm décroissent vers 0 lorsque $Y_3 \rightarrow \pm\infty$, il suffit de poser :

$$\begin{aligned}\hat{u}_3^\pm(t, y, Y_3, k) &:= \int_{\pm\infty}^{Y_3} \left(\hat{F}_7^\pm - ik\xi_1 \hat{u}_1^\pm - ik\xi_2 \hat{u}_2^\pm \right)(t, y, Y_3', k) dY_3, \\ \hat{H}_3^\pm(t, y, Y_3, k) &:= \int_{\pm\infty}^{Y_3} \left(\hat{F}_8^\pm - ik\xi_1 \hat{H}_1^\pm - ik\xi_2 \hat{H}_2^\pm \right)(t, y, Y_3', k) dY_3.\end{aligned}$$

Il faut ensuite vérifier que l'équation 3 du système (5.5.62) est bien satisfaite, ainsi que les conditions de bord du système (5.5.55) (pour le mode de Fourier k). Pour obtenir l'équation 3 du système (5.5.62), il suffit de vérifier que l'on a l'égalité suivante, puisque les coefficients de Fourier $\hat{U}^\pm(k)$, pour $k \neq 0$, décroissent vers 0 lorsque $Y_3 \rightarrow \pm\infty$:

$$\partial_{Y_3}^2 \hat{q}^\pm + ik(c^\pm \partial_{Y_3} \hat{u}_3^\pm - b^\pm \partial_{Y_3} \hat{H}_3^\pm) = \partial_{Y_3} \hat{F}_3^\pm.$$

Cette égalité est en fait trivialement satisfaite car \hat{q}^\pm est solution de l'équation de Laplace (5.5.63a), dont le terme source $\hat{\mathcal{F}}^\pm$ est donné par (5.5.63b). De la même façon, on peut obtenir de nouveau la 6^e équation du système (5.5.60) en effectuant les opérations de lignes “inverses” de celles qui permettraient de passer du système (5.5.60) au système (5.5.62). Ainsi, les composantes normales \hat{u}_3^\pm et \hat{H}_3^\pm satisfont le système inversible suivant :

$$\begin{cases} ik(c^\pm \hat{u}_3^\pm - b^\pm \hat{H}_3^\pm) &= \hat{F}_3^\pm - \partial_{Y_3} \hat{q}^\pm \\ ik(-b^\pm \hat{u}_3^\pm + c^\pm \hat{H}_3^\pm) &= \hat{F}_6^\pm. \end{cases} \quad (5.5.72)$$

Nous obtenons donc les expressions de \hat{u}_3^\pm et \hat{H}_3^\pm en fonction des termes sources $\hat{F}_3^\pm, \hat{F}_6^\pm$ et de la pression \hat{q}^\pm . En évaluant les composantes normales \hat{u}_3^\pm et \hat{H}_3^\pm en $y_3 = Y_3 = 0$, puis en utilisant (5.5.64) et (5.5.45), il en découle les conditions de bord du système (5.5.55) (pour le mode de Fourier k). Ceci termine de fournir une solution particulière du problème *inhomogène* (5.5.55). □

5.5.6 Détermination des correcteurs

Revenons à la cascade d'équations (5.5.17b) que doivent satisfaire les correcteurs $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})$, pour $m \geq 1$. Le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ a été entièrement déterminé à la Section 5.4 (voir l'expression (5.4.107)). Nous allons à présent construire la suite de correcteurs $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \geq 2}$ par récurrence. Pour cela, on se fixe dans toute la suite un entier $m \geq 1$. Rappelons que nous disposons du temps $T > 0$ fourni par le Théorème 5.4.1, qui sera *fixé* dans toute la suite.

Hypothèse de récurrence (\mathbb{H}^m).

On suppose avoir déterminé des profils $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{1 \leq j \leq m}$ tels que :

(\mathbb{H}_1^m) pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$U^{j,\pm} \in S^\pm \quad \text{et} \quad \psi^{j+1} \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3),$$

où ψ^{j+1} est à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable θ ;

(\mathbb{H}_2^m) le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ donné par (5.4.107), (5.4.105) est solution du problème homogène (5.5.17a) et si $j \in \{2, \dots, m\}$ alors $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})$ est solution de (5.5.17b) (dans lequel l'exposant " $m+1$ " joue le rôle de j ici). Ces profils vérifient également la contrainte (5.5.12b) provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique ;

(\mathbb{H}_3^m) les termes sources $(F^{m,\pm}, G^{m,\pm})$ dans le système (5.5.73) ci-dessous, donnés par (5.5.10) et (5.5.16c), sont "bien préparés", au sens où ils rentrent dans le cadre d'application de la Proposition 5.5.1 en vérifiant les conditions de résolubilité (5.5.46a), (5.5.46b) et (5.5.46c) ;

(\mathbb{H}_4^m) les vitesses normales lentes $(\underline{u}_3^{j,\pm})_{1 \leq j \leq m}$ et les champs magnétiques normaux lents $(\underline{H}_3^{j,\pm})_{1 \leq j \leq m}$ vérifient respectivement les conditions de bord (5.5.24) et (5.5.25) sur Γ_\pm (dans lesquelles l'exposant " m " joue le rôle de j) ;

(\mathbb{H}_5^m) les pressions lentes $(\underline{q}^{j,\pm})_{1 \leq j \leq m}$ satisfont les conditions de normalisation (5.5.41) (dans lesquelles l'exposant " m " joue une fois de plus le rôle de j ici).

Étapes pour aboutir à la propriété (\mathbb{H}^{m+1}). Nous suivons les étapes de l'algorithme décrit à la page 116.

- ❶ On commence par déterminer les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(k)$, pour $k \neq 0$, à l'aide de la Proposition 5.5.1. Leur expression en $y_3 = 0$ est explicite et entièrement déterminée par le profil ψ^{m+2} , pour l'instant inconnu.
- ❷ On détermine une équation d'évolution linéaire de type Hamilton-Jacobi satisfaite par ψ^{m+2} , provenant de la condition d'orthogonalité (5.5.46c) de la Proposition 5.5.1, que l'on impose aux termes sources $F^{m+1,\pm}$ et $G^{m+1,\pm}$. À ce stade, on connaît donc le correcteur ψ^{m+2} ainsi que la composante $U_\star^{m+1,\pm}|_{y_3=0}$. Ces deux premières étapes permettront d'aboutir aux propriétés (\mathbb{H}_1^{m+1}), (\mathbb{H}_2^{m+1}) et (\mathbb{H}_3^{m+1}).
- ❸ On identifie le coefficient de Fourier restant $\widehat{U}^{m+1,\pm}(0)$. Pour ce faire, nous devons imposer aux termes sources $F^{m+1,\pm}$ et $G^{m+1,\pm}$ de satisfaire les deux autres conditions de résolubilité (5.5.46a) et (5.5.46b) de la Proposition 5.5.1 ; la propriété (\mathbb{H}_3^{m+1}) sera alors entièrement satisfaite. En outre, pour déterminer la moyenne lente $\underline{U}^{m+1,\pm}$, nous imposerons les propriétés (\mathbb{H}_4^{m+1}) et (\mathbb{H}_5^{m+1}). Notons que la condition de normalisation dans la propriété (\mathbb{H}_5^{m+1}) est triviale, puisque la résolution du problème de Laplace (5.5.106) que doit satisfaire la pression $\underline{q}^{m+1,\pm}$ se fait à une constante (dépendant du temps) près ;
- ❹ Pour finir, on devra relever la trace $U_\star^{m+1,\pm}|_{y_3=0}$ par rapport à y_3 .

Étape ❶

Pour commencer, on se concentre sur le système suivant, que doit vérifier le profil $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})$ que l'on cherche à déterminer :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}, & y_3 \geq 0, Y_3 \geq 0, \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+U^{m+1,+} + B^-U^{m+1,-} - \partial_\theta \psi^{m+2} (\mathfrak{L}^+ + \mathfrak{L}^-) = G^{m,+} + G^{m,-}, & y_3 = Y_3 = 0, \theta \in \mathbb{T}, \end{cases} \quad (5.5.73)$$

où $F^{m,\pm}$ et $G^{m,+} + G^{m,-}$ sont calculés en utilisant les expressions (5.5.10), (5.5.16c). N'oublions pas d'adjoindre à ce système la contrainte (5.5.12b) provenant de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique.

Remarques.

- Afin de pouvoir appliquer la Proposition 5.5.1, il nous faut au préalable vérifier si les termes sources $F^{m,\pm}$ et $G^{m,+} + G^{m,-}$ dans (5.5.73) vérifient la condition nécessaire de compatibilité (5.5.45). Vu la complexité des expressions de ces termes sources, il n'est pas clair de voir si cette condition est bien vérifiée pour tout $m \geq 1$. Nous renvoyons à l'Annexe A.4 pour les détails permettant d'aboutir à (5.5.45).
- Des arguments similaires à ceux énoncés dans l'Annexe A.4 permettent de vérifier que le terme source $F^{m,\pm}$ vérifie l'égalité suivante, dans laquelle $F_8^{m,\pm}$ désigne le membre de droite associé à la contrainte de divergence (5.5.12b) sur le champ magnétique :

$$\tau \partial_\theta F_8^{m,\pm} = \partial_{Y_3} F_6^{m,\pm} + \xi_1 \partial_\theta F_4^{m,\pm} + \xi_2 \partial_\theta F_5^{m,\pm} \quad (5.5.74a)$$

$$= \tau \partial_\theta \left(\partial_{Y_3} H_3^{m+1,\pm} + \xi_1 \partial_\theta H_1^{m+1,\pm} + \xi_2 \partial_\theta H_2^{m+1,\pm} \right). \quad (5.5.74b)$$

L'égalité (5.5.74a) permet de retrouver l'expression (5.5.61), pour tous les modes de Fourier *non nuls*, que l'on avait utilisée dans la preuve de la Proposition 5.5.1. On voit donc à travers (5.5.74b) que la contrainte de divergence sur le champ magnétique $H^{m+1,\pm}$ est directement donnée en fonction du terme source $F^{m,\pm}$ pour tous les modes de Fourier *non nuls*. En revanche, pour le mode de Fourier *nul*, le terme (5.5.74b) n'apporte aucune information supplémentaire, et il nous faudra utiliser directement la contrainte (5.5.12b) que l'on a adjointe au système (5.5.73).

Pour construire une solution du système (5.5.73), on exhibe à l'aide de la Proposition 5.5.1 une solution particulière $(\mathcal{U}^{m,\pm}, 0)$ du problème *inhomogène* suivant¹¹ :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial) \mathcal{U}^{m,\pm} = F^{m,\pm}, & y_3 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+ \mathcal{U}^{m,+} + B^- \mathcal{U}^{m,-} = G^{m,+} + G^{m,-}, & y_3 = Y_3 = 0, \quad \theta \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

D'après la Proposition 5.5.1, toute solution $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})$ du système (5.5.73) vérifie :

$$\forall k \neq 0, \quad \forall t, y, Y_3, \quad \widehat{U}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3, k) = \gamma^{m+1,\pm}(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k) + \widehat{\mathcal{U}}^{m,\pm}(t, y, Y_3, k), \quad (5.5.75)$$

où les coefficients $\gamma^{m+1,\pm}$ dans (5.5.75) sont à ce stade inconnus, mais on peut les expliciter lorsque $y_3 = 0$ en vertu de (5.5.48) :

$$\forall k \neq 0, \quad \forall (t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2, \quad \gamma^{m+1,\pm}(t, y', 0, k) = \pm |k| \widehat{\psi}^{m+2}(t, y', k). \quad (5.5.76)$$

Il ne reste plus qu'à identifier le profil ψ^{m+2} pour terminer la détermination de la fonction $U_\star^{m+1,\pm}|_{y_3=0}$ (rappelons les notations (5.2.1) pour la décomposition des profils dans l'espace S^\pm).

À ce stade, quel que soit le choix ultérieur de ψ^{m+2} , le système (5.5.73) et la contrainte (5.5.12b) sont bien vérifiés pour tous les modes de Fourier *non nuls*.

¹¹La Proposition 5.5.1 peut effectivement s'appliquer en vertu de l'hypothèse de récurrence (\mathbb{H}_3^m) et de la condition de compatibilité (A.4.1) établie dans l'Annexe A.4.

Étape ②

Pour identifier le profil ψ^{m+2} , il faut maintenant prendre en compte le système (5.5.77) ci-dessous associé au “correcteur suivant” $(U^{m+2,\pm}, \psi^{m+3})$ (encore *inconnu* à ce stade), car les termes sources $(F^{m+1,\pm}, G^{m+1,+} + G^{m+1,-})$ *dépendent* du profil $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})$ que l’on veut construire :

$$\begin{cases} L_f^\pm(\partial)U^{m+2,\pm} = F^{m+1,\pm}, & y_3 \geq 0, Y_3 \geq 0, \theta \in \mathbb{T}, \\ B^+U^{m+2,+} + B^-U^{m+2,-} - \partial_\theta \psi^{m+3}(\mathfrak{t}^+ + \mathfrak{t}^-) = G^{m+1,+} + G^{m+1,-}, & y_3 = Y_3 = 0, \theta \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (5.5.77)$$

Dans l’optique de pouvoir construire le correcteur suivant $(U^{m+2,\pm}, \psi^{m+3})$, on souhaitera appliquer la Proposition 5.5.1 au système (5.5.77) à l’étape suivante de la récurrence par rapport à l’entier m . Pour ce faire, les termes sources dans (5.5.77) doivent en premier lieu vérifier la condition d’orthogonalité (5.5.46c), c’est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-|k|Y_3} \mathcal{L}^+(k) \cdot \widehat{F}^{m+1,+}(t, y', 0, Y_3, k) dY_3 - \int_{-\infty}^0 e^{|k|Y_3} \mathcal{L}^-(k) \cdot \widehat{F}^{m+1,-}(t, y', 0, Y_3, k) dY_3 \\ & + \ell_1^+ \widehat{G}_1^{m+1,+}(t, y', k) + \ell_2^+ \widehat{G}_2^{m+1,+}(t, y', k) \\ & + \ell_1^- \widehat{G}_1^{m+1,-}(t, y', k) + \ell_2^- \widehat{G}_2^{m+1,-}(t, y', k) = 0, \end{aligned} \quad (5.5.78)$$

et ce quels que soient $(t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pour clarifier la démarche que l’on suit, on écrit ci-dessous les expressions des termes sources $F^{m+1,\pm}$ et $G^{m+1,+} + G^{m+1,-}$ (voir (5.5.11) et (5.5.16c), avec $m+1$ dans le rôle de m) :

$$\begin{aligned} F^{m+1,\pm} &= -\mathcal{T}_s^\pm(\partial)U^{m+1,\pm} \\ &+ \left(\partial_\theta \psi^{m+2} \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{1,\pm} + \partial_\theta \psi^2 \mathcal{A}^\pm \partial_{Y_3} U^{m+1,\pm} \right) \\ &- \left[\sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_\theta \mathbb{A}_j(U^{1,\pm}, U^{m+1,\pm}) + \partial_{Y_3} \mathbb{A}_3(U^{1,\pm}, U^{m+1,\pm}) \right] + \mathbb{F}^{m,\pm}. \end{aligned} \quad (5.5.79)$$

Les composantes du terme de bord $G^{m+1,+} + G^{m+1,-}$, conformément à la définition (5.5.16a), s’écrivent :

$$\begin{aligned} G_1^{m+1,\pm} &:= \partial_t \psi^{m+2} + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^{m+2} + \sum_{j=1}^2 \xi_j (u_j^{m+1,\pm} \partial_\theta \psi^2 + u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+2}) + \mathbb{G}_1^{m,\pm}, \\ G_2^{m+1,\pm} &:= \sum_{j=1}^2 H_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^{m+2} + \sum_{j=1}^2 \xi_j (H_j^{m+1,\pm} \partial_\theta \psi^2 + H_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+2}) + \mathbb{G}_2^{m,\pm}. \end{aligned} \quad (5.5.80)$$

Les termes “de reste” $\mathbb{F}^{m,\pm}$ dans (5.5.79) et $\mathbb{G}_{1,2}^{m,\pm}$ dans (5.5.80) ne dépendent que des profils “antérieurs” $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$, qui sont connus à cette étape de la récurrence.

À présent, les calculs pour simplifier la relation (5.5.78) sont très proches de ceux qu’on a effectués au Paragraphe 5.4.3, à quelques variantes près. En effet, l’expression des termes sources (5.5.79) et (5.5.80) fait apparaître les profils ψ^{m+2} et $U^{1,\pm}$ d’une part, et ψ^2 et $U^{m+1,\pm}$ d’autre part. Par conséquent, les termes de convolution dans la variable de Fourier feront maintenant apparaître les produits $\widehat{\psi}^2(k-\ell)\widehat{\psi}^{m+2}(\ell)$ et $\widehat{\psi}^2(\ell)\widehat{\psi}^{m+2}(k-\ell)$ au lieu du terme quadratique $\widehat{\psi}^2(k-\ell)\widehat{\psi}^2(\ell)$ que l’on avait au Paragraphe 5.4.3. Par ailleurs, les termes sources $F^{m+1,\pm}$ et $G^{m+1,+} + G^{m+1,-}$ contiennent les termes “d’ordre inférieur” $\mathbb{F}^{m,\pm}$, $\mathbb{G}_1^{m,\pm}$ et $\mathbb{G}_2^{m,\pm}$; c’est pourquoi des termes sources seront à prendre en compte dans les calculs, et ceux-ci ne dépendront que des profils *connus* $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$. Ceci est un fait nouveau dans la détermination des correcteurs, contrairement au cas du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$ qui nous donnait *in fine* le problème *homogène* (5.5.17a) satisfait par $U^{1,\pm}$, et l’équation non-linéaire de type Hamilton-Jacobi *homogène* (5.4.103) satisfaite par ψ^2 .

Après calculs, on aboutit à la famille d'équations suivante que doivent satisfaire les coefficients de Fourier $(\widehat{\psi}^{m+2}(k))_{k \neq 0}$:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Delta \partial_t \widehat{\psi}^{m+2}(k) + \sum_{j=1}^2 \partial_{\varepsilon_j} \Delta \partial_{y_j} \widehat{\psi}^{m+2}(k) \\ - 2i \left((b^+)^2 - (b^-)^2 - (c^+)^2 + (c^-)^2 \right) \operatorname{sgn}(k) \overline{b(\psi^{m+2}, \psi^2)}(k) = \widehat{\Psi}^m(k), \end{aligned} \quad (5.5.81)$$

où Ψ^m ne dépend que des profils connus $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$. Cette dernière équation est le linéarisé de (5.4.100) autour du profil principal ψ^2 . Comme pour le cas de ψ^2 que l'on a traité au Paragraphe 5.4.3, l'équation (5.5.81) se décompose en une partie de transport en (y_1, y_2) à la vitesse de groupe v (dont on rappelle la définition (5.3.21)), et une partie non-locale *linéaire* en ψ^{m+2} :

$$\left(\partial_t - v \cdot \nabla_{y'} \right) \widehat{\psi}^{m+2}(k) - 2i \delta \operatorname{sgn}(k) \overline{b(\psi^{m+2}, \psi^2)}(k) = \widehat{\Psi}^m(k), \quad (5.5.82)$$

où δ est défini par (5.4.97) et est non nul en vertu de l'hypothèse (H3). En effectuant le même changement de variable que dans le cas de l'équation (5.4.100), on se ramène à l'étude de l'équation d'amplitude *inhomogène* suivante satisfaite par la nouvelle inconnue $\varphi^m(t, y', \theta) := \psi^{m+2}(\frac{t}{|\delta|}, y' - \frac{t}{|\delta|}v, \theta)$:

$$\partial_t \varphi^m + 2 \mathbb{H}[b(\psi^2, \varphi^m)] = \Psi_\star^m, \quad t > 0, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad y' \in \mathbb{T}^2, \quad (5.5.83)$$

avec condition initiale $\varphi^m(0, \cdot)$ nulle (du fait de l'hypothèse simplificatrice (5.1.7)). Dans (5.5.83), la fonction Ψ_\star^m est à moyenne nulle, et est définie par :

$$\Psi_\star^m(t, y', \theta) := \sum_{k \neq 0} \widehat{\Psi}^m(t, y', k) e^{ik\theta}, \quad \forall (t, y', \theta) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3. \quad (5.5.84)$$

Notons que Ψ_\star^m ne dépend que des profils connus $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$, et appartient à $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ du fait de l'hypothèse de récurrence (\mathbb{H}_1^m) . La même méthode que celle employée dans la démonstration du Théorème 5.4.1 (*cf.* les détails dans [Hun06, BG09, Mar10]) permet d'affirmer qu'il existe une unique solution φ^m de (5.5.83), à moyenne nulle par rapport à θ , définie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ ¹² et appartenant à l'espace $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$. Revenons au cas du correcteur ψ^{m+2} : nous venons de construire la partie à moyenne nulle de ψ^{m+2} , c'est-à-dire la fonction ψ_\star^{m+2} (dont la définition est similaire à (5.5.84)). Il reste à déterminer la moyenne de ψ^{m+2} , c'est-à-dire le coefficient de Fourier d'ordre zéro $\widehat{\psi}^{m+2}(0)$. Comme nous l'avons expliqué pour le cas du profil principal ψ^2 (on renvoie à (5.4.106)), nous disposons d'un degré de liberté sur la moyenne des correcteurs $(\psi^j)_{j \geq 2}$. Nous choisissons de fixer la moyenne de ψ^{m+2} comme étant égale en tout temps à la moyenne initiale, que l'on a fixée à zéro (on renvoie à (5.1.7)) :

$$\widehat{\psi}^{m+2}(t, y', 0) := 0, \quad \forall y' \in \mathbb{T}^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.5.85)$$

Nous expliquerons ultérieurement les motivations de ce choix lors de la détermination du coefficient de Fourier $\widehat{U}^{m+1, \pm}(0)$ (on renvoie à la discussion permettant d'aboutir aux contraintes de divergence (5.5.93) ci-dessous). En conclusion, le correcteur ψ^{m+2} est donné par

$$\psi^{m+2}(t, y', \theta) := \psi_\star^{m+2}(t, y', \theta) = \sum_{k \neq 0} \widehat{\psi}^{m+2}(t, y', k) e^{ik\theta}. \quad (5.5.86)$$

En outre, ce correcteur appartient à l'espace $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ et est à moyenne nulle par rapport à θ . Par ailleurs, les expressions (5.5.75), (5.5.76) déterminent entièrement la trace sur $\{y_3 = 0\}$ des coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m+1, \pm}(k)$, pour tout $k \neq 0$.

À ce stade, on a donc déterminé la trace sur $\{y_3 = 0\}$ de $U_\star^{m+1, \pm}$ (qui correspond à la superposition des modes de Fourier non nuls), ainsi que le correcteur ψ^{m+2} donné par (5.5.86). On a ainsi assuré (\mathbb{H}_3^{m+1}) en partie, car nous avons la condition (5.5.46c), et la propriété (\mathbb{H}_1^{m+1}) est vérifiée par le correcteur ψ^{m+2} . La solution obtenue vérifie (5.5.73) ainsi que la contrainte (5.5.12b) pour tous les modes de Fourier *non nuls*, en vertu de (5.5.74b). Il restera dans la suite à traiter le mode de Fourier 0.

¹²On rappelle que $T > 0$ a été fixé par le Théorème 5.4.1.

Étape ③

Plaçons-nous dorénavant dans le cas du mode de Fourier 0, et calculons $\widehat{U}^{m+1,\pm}(0)$. De la même façon que pour le profil principal $U^{1,\pm}$, on commence par décomposer $\widehat{U}^{m+1,\pm}(0)$ comme suit (on renvoie à la définition (5.2.1)) :

$$\widehat{U}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3, 0) = \underline{\underline{U}}^{m+1,\pm}(t, y) + \Pi \underline{U}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3) + (I - \Pi) \underline{U}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3). \quad (5.5.87)$$

Pour déterminer $\widehat{U}^{m+1,\pm}(0)$, nous allons avoir besoin d'imposer aux termes sources du problème (5.5.77) de satisfaire les deux autres conditions de résolubilité (5.5.46a) et (5.5.46b) pour que l'on puisse appliquer la Proposition 5.5.1 à l'étape suivante de la récurrence. Ces conditions s'écrivent :

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \Omega^\pm, \quad \underline{\underline{F}}^{m+1,\pm}(t, y) = 0, \quad (5.5.88)$$

$$\forall (t, y, Y_3) \in [0, T] \times \Omega^\pm \times \mathbb{R}_\pm, \quad \underline{F}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3) \in \text{Im } A_3^\pm, \quad (5.5.89)$$

en rappelant que Ω^\pm désigne le domaine fixe $\mathbb{T}^2 \times I_\pm$, avec $I_+ = (0, 1)$ et $I_- = (-1, 0)$.

Le calcul s'effectue en trois étapes.

- (a) D'abord on détermine la partie rapide $(I - \Pi) \underline{U}^{m+1,\pm}$ à l'aide de la première équation du système (5.5.73) auquel on a appliqué l'opérateur de moyenne sur le tore, sans oublier la contrainte (5.5.12b) satisfaite par le correcteur $H^{m+1,\pm}$ que l'on doit adjoindre au système (5.5.73).
- (b) On utilise la première équation du système (5.5.77) : en vertu de la condition de résolubilité (5.5.88), on pourra en déduire un système d'EDP sur la moyenne lente $\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm}$. Le fait important à noter ici est que $\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm}$ ne sera plus nécessairement nul sur $[0, T]$. C'est ce qui est appelé phénomène de "rectification", mis en évidence notamment par Marcou [Mar10] ; nous y reviendrons plus en détails au Paragraphe 5.5.7 ci-après.
- (c) En utilisant une fois de plus le système (5.5.77), on pourra en déduire la partie rapide restante $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}$, grâce à la seconde condition de résolubilité (5.5.89).

Sous-étape (a) : calcul de $(I - \Pi) \underline{U}^{m+1,\pm}$.

Les termes sources $F^{m,\pm}$ et $G^{m,\pm}$ vérifiant la condition (5.5.46b), il suffit d'appliquer la Proposition 5.5.1 au système (5.5.73). Ici, comme nous avons ajouté la contrainte (5.5.12b) sur le champ magnétique, les calculs sont explicites et les composantes rapides $\underline{u}_3^{m+1,\pm}$, $\underline{H}_3^{m+1,\pm}$ et $\underline{q}^{m+1,\pm}$ sont alors entièrement déterminées (on renvoie à l'étape ayant abouti à l'expression (5.5.58) dans la démonstration de la Proposition 5.5.1).

Quels que soient les choix ultérieurs de $\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm}$ et $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}$, cela n'affectera en rien la résolution du problème rapide (5.5.73) établie jusqu'ici, et la contrainte (5.5.12b) sur le champ magnétique $H^{m+1,\pm}$ est satisfaite pour *tous* les modes de Fourier : nous avons bien assuré la propriété (\mathbb{H}_2^{m+1}) .

Sous-étape (b) : calcul de $\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm}$.

On utilise la condition de résolubilité (5.5.88), où le terme source $F^{m+1,\pm}$ est donné par (5.5.10) et $G^{m+1,\pm}$ par (5.5.16) (avec dans les deux cas $m + 1$ dans le rôle de m). L'expression de la moyenne lente $\underline{\underline{F}}^{m+1,\pm}$ s'obtient en passant à la limite $Y_3 \rightarrow \pm\infty$ et en appliquant l'opérateur de moyenne sur le tore à l'expression (5.5.10) (avec $m + 1$ au lieu de m). Avec la convention $\sum_\emptyset = 0$, on obtient sans difficulté

majeure l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{F}}^{m+1,\pm} &= -\mathcal{T}_s^\pm(\partial)\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm} + \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k,\ell \geq 2}} \mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial)\widehat{\psi}^k(0)\partial_{y_3}\underline{\underline{U}}^{\ell,\pm} \\
&\quad - \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k,\ell \geq 2}} \sum_{j=1}^3 \mathbb{A}_j(\underline{\underline{U}}^{k,\pm}, \partial_{y_j}\underline{\underline{U}}^{\ell,\pm}) \\
&\quad + \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m+1 \\ \ell_1,\ell_2,\ell_3 \geq 2}} \sum_{j=1}^2 \partial_{y_j}\widehat{\psi}^{\ell_1}(0)\mathbb{A}_j(\underline{\underline{U}}^{\ell_2,\pm}, \partial_{y_3}\underline{\underline{U}}^{\ell_3,\pm}).
\end{aligned} \tag{5.5.90}$$

L'hypothèse de récurrence (\mathbb{H}_1^m) indique que les moyennes par rapport à θ des profils $(\psi^k)_{2 \leq k \leq m+1}$ sont nulles, c'est-à-dire $\widehat{\psi}^k(0) = 0$, pour tout $k \in \{2, \dots, m+1\}$. Rappelons que nous possédons un degré de liberté sur les moyennes des profils $(\psi^k)_{k \geq 2}$: ce choix bien particulier est motivé ci-dessous, et permettra aux moyennes lentes $\underline{\underline{u}}^{m+1,\pm}$ et $\underline{\underline{H}}^{m+1,\pm}$ de satisfaire des contraintes de divergence nulle (voir les équations (5.5.93) ci-dessous). En combinant (5.5.88) et (5.5.90), on obtient l'équation :

$$\mathcal{T}_s^\pm(\partial)\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm} = - \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k,\ell \geq 2}} \sum_{j=1}^3 \mathbb{A}_j(\underline{\underline{U}}^{k,\pm}, \partial_{y_j}\underline{\underline{U}}^{\ell,\pm}). \tag{5.5.91}$$

Attardons-nous sur les contraintes de divergence que doivent satisfaire la vitesse lente $\underline{\underline{u}}^{m+1,\pm}$ et le champ magnétique lent $\underline{\underline{H}}^{m+1,\pm}$, qui permettent de gérer le terme de pression $\nabla \underline{\underline{q}}^{m+1,\pm}$. En effet, ces contraintes permettent d'en déduire un problème de Laplace que doit vérifier la pression $\underline{\underline{q}}^{m+1,\pm}$, comme nous l'avons fait au Paragraphe 5.4.2 (voir le système (5.4.34) satisfait par $\underline{\underline{q}}^{1,\pm}$). Regardons en détails la 7^e composante de l'équation (5.5.90). Comme la 7^e composante des différentielles secondes $(\mathbb{A}_j)_{1 \leq j \leq 3}$ est nulle (on renvoie à l'Annexe A.3 pour leur expression), il reste :

$$\nabla_y \cdot \underline{\underline{u}}^{m+1,\pm} = \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k,\ell \geq 2}} \partial_{y_j}\widehat{\psi}^k(0)\partial_{y_3}\underline{\underline{u}}_j^{\ell,\pm}, \tag{5.5.92}$$

en adoptant toujours la convention $\sum_\emptyset = 0$. Par commodité, nous choisirons d'imposer aux correcteurs $(\psi^k)_{k \geq 2}$ d'être à moyenne nulle par rapport à leur dernière variable, de sorte que la vitesse lente $\underline{\underline{u}}^{m+1,\pm}$ sera à divergence nulle. Ce choix est possible, car nous n'avons aucune restriction sur la *moyenne* des correcteurs ψ^k , comme nous l'avons déjà évoqué lors du traitement du profil principal ψ^2 au Paragraphe 5.4.3 (voir (5.4.106)). Finalement, grâce à ce choix des moyennes des correcteurs ψ^k , nous avons :

$$\nabla_y \cdot \underline{\underline{u}}^{m+1,\pm} = 0. \tag{5.5.93a}$$

Concernant le champ magnétique, il faut avoir à l'esprit que lorsque l'on voudra déterminer le correcteur "suivant" ($\underline{\underline{U}}^{m+2,\pm}, \psi^{m+3}$), nous adjoindrons au système (5.5.77) la contrainte (5.5.12b) (avec $m+1$ dans le rôle de m) que devra satisfaire le correcteur $\underline{\underline{H}}^{m+2,\pm}$. Les mêmes arguments que ceux ayant permis d'aboutir à (5.5.93a) permettent d'en déduire la contrainte suivante sur le champ magnétique :

$$\nabla_y \cdot \underline{\underline{H}}^{m+1,\pm} = 0. \tag{5.5.93b}$$

Déterminons à présent les conditions de saut que doit satisfaire $\underline{\underline{U}}^{m+1,\pm}$ sur l'interface $\{y_3 = 0\}$. Il suffit de considérer les conditions de bord du système (5.5.73) auxquelles on a appliqué l'opérateur de moyenne sur le tore. On obtient sur $\{y_3 = 0\}$:

$$B^+\underline{\underline{U}}^{m+1,+} + B^-\underline{\underline{U}}^{m+1,-} = -\left(B^+\underline{\underline{U}}^{m+1,+}|_{Y_3=0} + B^-\underline{\underline{U}}^{m+1,-}|_{Y_3=0}\right) + \widehat{G}^{m,+}(0) + \widehat{G}^{m,-}(0). \tag{5.5.94}$$

Calculons pour commencer les moyennes $\widehat{G}^{m,\pm}(0)$ dans (5.5.94), en rappelant la définition (5.5.16) des termes sources $G^{m,\pm}$. On obtient sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1^{m,\pm}(0) &= \partial_t \widehat{\psi}^{m+1}(0) + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \widehat{\psi}^{m+1}(0) \\ &+ \sum_{j=1}^2 \xi_j \left(\overline{u_j^{m,\pm} \partial_\theta \psi^2(0)} + \overline{u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+1}(0)} \right) + \widehat{\mathbb{G}}_1^{m-1,\pm}(0). \end{aligned} \quad (5.5.95)$$

En vertu de la Proposition 5.5.1, nous pouvons écrire les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m,\pm}(k)|_{y_3=0}$, pour $k \neq 0$, sous la forme suivante :

$$\widehat{U}^{m,\pm}(t, y', 0, Y_3, k) = \pm |k| \widehat{\psi}^{m+1}(t, y', k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k) + \widehat{U}^{m-1,\pm}(t, y', 0, Y_3, k). \quad (5.5.96)$$

Le terme de “reste” $\widehat{U}^{m-1,\pm}$ dans (5.5.96) ne dépend que des profils d’ordre inférieur $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m-1}$. Par conséquent, dans tous les calculs à suivre (et uniquement dans ces calculs), quitte à incorporer les contributions de $\widehat{U}^{m-1,\pm}$ dans les termes de reste $\widehat{\mathbb{G}}_1^{m-1,\pm}(0)$ et $\widehat{\mathbb{G}}_2^{m-1,\pm}(0)$, nous pourrions supposer sans perte de généralité que les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m,\pm}(k)|_{y_3=0}$ s’écrivent directement sous la forme :

$$\widehat{U}^{m,\pm}(t, y', 0, Y_3, k) = \pm |k| \widehat{\psi}^{m+1}(t, y', k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k).$$

Dans ce cas, nous obtenons en premier lieu :

$$\overline{u_j^{m,\pm} \partial_\theta \psi^2(0)} + \overline{u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^{m+1}(0)} = \mp i \xi_j c^\pm \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell |\ell| \left(\widehat{\psi}^2(\ell) \widehat{\psi}^{m+1}(-\ell) + \widehat{\psi}^2(-\ell) \widehat{\psi}^{m+1}(\ell) \right) = 0,$$

par imparité du terme général de la série par rapport à ℓ . Revenant à (5.5.95), et en utilisant le fait que la moyenne du correcteur ψ^{m+1} est nulle par hypothèse de récurrence (voir (\mathbb{H}_1^m)), il nous reste :

$$\widehat{G}_1^{m,\pm}(0) = g_1^{m-1,\pm}, \quad (5.5.97a)$$

où $g_1^{m-1,\pm}$ est un terme qui ne dépend que des “restes” $\widehat{\mathbb{G}}_1^{m-1,\pm}(0)$ et $\mathcal{U}^{m-1,\pm}$ (donc il ne dépend que des profils “antérieurs” $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m-1}$). Il en va de même pour $\widehat{G}_2^{m,\pm}(0)$, et on peut écrire :

$$\widehat{G}_2^{m,\pm}(0) = g_2^{m-1,\pm}. \quad (5.5.97b)$$

Finalement, les conditions de bord (5.5.94) s’écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \underline{u}_3^{m+1,\pm} &= -\underline{u}_3^{m+1,\pm}|_{Y_3=0} + g_1^{m-1,\pm} =: \underline{g}_1^{m,\pm} \\ \underline{H}_3^{m+1,\pm} &= -\underline{H}_3^{m+1,\pm}|_{Y_3=0} + g_2^{m-1,\pm} =: \underline{g}_2^{m,\pm} \\ [\underline{q}^{m+1}] &= -[\underline{q}^{m+1}|_{Y_3=0}], \end{cases} \quad (5.5.98)$$

où le crochet $[\cdot]$ ci-dessus désigne le saut en $\{y_3 = 0\}$. Il est important de remarquer ici que le système (5.5.98) est aussi valable à l’instant initial $t = 0$. Par conséquent, le choix des moyennes lentes initiales $(\underline{u}_3^{m+1,\pm}, \underline{H}_3^{m+1,\pm}, \underline{q}^{m+1,\pm})|_{t=0}$ n’est pas libre, à l’inverse des composantes tangentielles $\underline{u}_1^{m+1,\pm}, \underline{u}_2^{m+1,\pm}, \underline{H}_1^{m+1,\pm}$ et $\underline{H}_2^{m+1,\pm}$ que l’on choisit nulles à $t = 0$ conformément à (5.2.2).

En conclusion, en combinant (5.5.91), (5.5.93), (5.5.98), (5.5.24) et (5.5.25), on obtient le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant *inhomogène* suivant satisfait par la moyenne lente $\underline{U}^{m+1,\pm}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \underline{u}^{m+1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{u}^{m+1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{H}^{m+1,\pm} + \nabla \underline{q}^{m+1,\pm} = \underline{f}_1^{m-1,\pm}, \\ \partial_t \underline{H}^{m+1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{H}^{m+1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{u}^{m+1,\pm} = \underline{f}_2^{m-1,\pm}, \\ \nabla_y \cdot \underline{u}^{m+1,\pm} = \nabla_y \cdot \underline{H}^{m+1,\pm} = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \underline{u}_3^{m+1,\pm} = \underline{g}_1^{m,\pm}, \quad \underline{H}_3^{m+1,\pm} = \underline{g}_2^{m,\pm}, \quad [\underline{q}^{m+1}] = -[\underline{q}^{m+1}|_{Y_3=0}], \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \underline{u}_3^{m+1,\pm} = \underline{h}_1^{m-3,\pm}, \quad \underline{H}_3^{m+1,\pm} = \underline{h}_2^{m-3,\pm}, \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm, \\ \Pi \underline{U}^{m+1,\pm}|_{t=0} = 0, \quad \text{dans } \Omega^\pm. \end{array} \right. \quad (5.5.99)$$

Les termes sources $\underline{f}_{1,2}^{m-1,\pm}$ ne dépendent que des moyennes lentes $(\underline{U}^{j,\pm})_{2 \leq j \leq m-1}$ (voir l'expression (5.5.91)); les termes sources $\underline{g}_{1,2}^{m,\pm}$ ne dépendent que des profils $(U^{j,\pm}|_{y_3=0}, \psi^{j+1})_{1 \leq j \leq m}$ et les termes sources $\underline{h}_{1,2}^{m-3,\pm}$ ne dépendent que des moyennes lentes $(\underline{U}^{j,\pm})_{2 \leq j \leq m-3}$ et des profils $(\psi^j)_{2 \leq j \leq m-4}$.

Remarquons le cas particulier de $m = 1$, pour lequel il n'y a en fait aucun terme source dans le système (5.5.99). Nous renvoyons au Paragraphe 5.5.7 ci-dessous dans lequel nous abordons le phénomène de *rectification* mis en évidence par Marcou [Mar10, Mar11], et nous nous attarderons plus en détail sur le premier correcteur $U^{2,\pm}$. Nous verrons que sa moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ est nulle, ce qui précise le phénomène de rectification dans le cas particulier des nappes de tourbillon-courant en dimension 3 d'espace.

Tout comme pour le profil principal $U^{1,\pm}$, le choix de la moyenne lente *tangentielle* à l'instant initial $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}(t=0)$ est libre, de sorte qu'on la choisit identiquement nulle conformément à (5.2.2). Toutefois, du fait de la présence des termes sources dans le système (5.5.99), en général non nuls, la moyenne lente $\underline{U}^{m+1,\pm}$ ne sera plus nécessairement nulle sur l'intervalle $[0, T]$, à l'inverse du profil principal $U^{1,\pm}$ qui n'a aucune composante lente du fait du phénomène de rectification (voir les résultats de la Proposition 5.5.3 au Paragraphe 5.5.7 ci-après).

La présence des contraintes de divergence nulle et des conditions de bord dans (5.5.99) soulève naturellement la question de la compatibilité des termes sources de bord $\underline{g}_1^{m,\pm}$ et $\underline{h}_1^{m-3,\pm}$ d'une part, et des termes sources $\underline{g}_2^{m,\pm}$ et $\underline{h}_2^{m-3,\pm}$ d'autre part. En effet, l'opérateur divergence est surjectif dès lors que ces termes sources vérifient les conditions de compatibilité suivantes :

$$\forall i = 1, 2, \quad \int_{\Gamma} \underline{g}_i^{m,+} dy' = \int_{\Gamma_+} \underline{h}_i^{m-3,+} dy' \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} \underline{g}_i^{m,-} dy' = \int_{\Gamma_-} \underline{h}_i^{m-3,-} dy'. \quad (5.5.100)$$

En outre, le terme source "intérieur" $\underline{f}_2^{m-1,\pm}$ doit être à divergence nulle, ce qu'on peut vérifier en appliquant l'opérateur divergence aux composantes 4, 5 et 6 de (5.5.91)

Supposons temporairement que les conditions (5.5.100) sont satisfaites. On peut dans ce cas trouver des solutions $v^{m+1,\pm}$ et $b^{m+1,\pm}$ aux problèmes de divergence suivants, dans lesquels $t \in [0, T]$ est fixé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_y \cdot v^{m+1,\pm} = 0, & \text{dans } \Omega^\pm, \\ v_3^{m+1,\pm} = \underline{g}_1^{m,\pm}, & \text{sur } \Gamma, \\ v_3^{m+1,\pm} = \underline{h}_1^{m-3,\pm}, & \text{sur } \Gamma_\pm, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla_y \cdot b^{m+1,\pm} = 0, & \text{dans } \Omega^\pm, \\ b_3^{m+1,\pm} = \underline{g}_2^{m,\pm}, & \text{sur } \Gamma, \\ b_3^{m+1,\pm} = \underline{h}_2^{m-3,\pm}, & \text{sur } \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (5.5.101)$$

En définissant les nouvelles inconnues

$$\tilde{u}^{m+1,\pm} := \underline{u}^{m+1,\pm} - v^{m+1,\pm} \quad \text{et} \quad \tilde{H}^{m+1,\pm} := \underline{H}^{m+1,\pm} - b^{m+1,\pm}, \quad (5.5.102)$$

ainsi que les nouveaux termes sources

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^{m-1,\pm} &:= \underline{f}_1^{m-1,\pm} - \partial_t v^{m+1,\pm} - (u^{0,\pm} \cdot \nabla) v^{m+1,\pm} + (H^{0,\pm} \cdot \nabla) b^{m+1,\pm}, \\ \tilde{f}_2^{m-1,\pm} &:= \underline{f}_2^{m-1,\pm} - \partial_t b^{m+1,\pm} - (u^{0,\pm} \cdot \nabla) b^{m+1,\pm} + (H^{0,\pm} \cdot \nabla) v^{m+1,\pm}, \end{aligned} \quad (5.5.103)$$

le système (5.5.99) se réécrit avec des conditions de bord *homogènes* comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{u}^{m+1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{u}^{m+1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{H}^{m+1,\pm} + \nabla \underline{q}^{m+1,\pm} = \tilde{f}_1^{m-1,\pm}, \\ \partial_t \tilde{H}^{m+1,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{H}^{m+1,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{u}^{m+1,\pm} = \tilde{f}_2^{m-1,\pm}, \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^{m+1,\pm} = \nabla_y \cdot \tilde{H}^{m+1,\pm} = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \tilde{u}_3^{m+1,\pm} = \tilde{H}_3^{m+1,\pm} = 0, \quad [\underline{q}^{m+1}] = -[q^{m+1}|_{Y_3=0}], \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \tilde{u}_3^{m+1,\pm} = \tilde{H}_3^{m+1,\pm} = 0, \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm, \end{array} \right. \quad (5.5.104)$$

adjoint des conditions initiales :

$$(\tilde{u}_1^{m+1,\pm}, \tilde{u}_2^{m+1,\pm}, \tilde{H}_1^{m+1,\pm}, \tilde{H}_2^{m+1,\pm})|_{t=0} = -(v_1^{m+1,\pm}, v_2^{m+1,\pm}, b_1^{m+1,\pm}, b_2^{m+1,\pm})|_{t=0}. \quad (5.5.105)$$

La pression lente $\underline{q}^{m+1,\pm}$ dans la première équation du système (5.5.104) se traite *via* la résolution du problème de Laplace ci-dessous, obtenu grâce aux contraintes de divergence nulle dans (5.5.104). La différence par rapport au cas du profil principal $U^{1,\pm}$ est que le système obtenu sur la pression est à présent *inhomogène*, du fait de la présence des termes sources intérieurs dans le système (5.5.104). On obtient, à $t \in [0, T]$ fixé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{q}^{m+1,\pm} = F^{m,\pm}, \quad \text{dans } \Omega^\pm, \\ [\underline{q}^{m+1}] = -[q^{m+1}|_{Y_3=0}], \\ \partial_{y_3} \underline{q}^{m+1,\pm} = G^{m,\pm}, \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{y_3} \underline{q}^{m+1,\pm} = H^{m,\pm}, \quad \text{sur } \Gamma_\pm, \end{array} \right. \quad (5.5.106)$$

où les termes sources dans le système (5.5.106) sont donnés par :

$$F^{m,\pm} := \nabla_y \cdot \tilde{\ell}_1^{m-1,\pm}, \quad G^{m,\pm} := (\tilde{\ell}_1^{m-1,\pm})_3|_\Gamma, \quad H^{m,\pm} := (\tilde{\ell}_1^{m-1,\pm})_3|_{\Gamma_\pm}. \quad (5.5.107)$$

La résolution du problème de Laplace (5.5.106), avec des termes sources généraux F^\pm , G^\pm et H^\pm , s'effectue de façon usuelle en appliquant le théorème de Lax-Milgram [Eva98] dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \left\{ (u^+, u^-) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-) \mid [u] = 0 \text{ et } \int_{\Omega^+} u^+ dx + \int_{\Omega^-} u^- dx = 0 \right\},$$

comme nous l'avons déjà évoqué au Paragraphe 5.4.2 (voir le système (5.4.34)). La présence des termes sources n'introduit aucune difficulté majeure pour vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. On trouvera par exemple une étude similaire dans [CMST12], où les auteurs traitent le cas d'un opérateur elliptique plus général que le Laplacien. Néanmoins, les termes sources du système (5.5.106) doivent au préalable vérifier la condition de compatibilité suivante :

$$\int_{\Omega^+} F^{m,+} dy + \int_{\Omega^-} F^{m,-} dy = - \int_\Gamma [G^m] dy' + \int_{\Gamma_+} H^{m,+} dy' - \int_{\Gamma_-} H^{m,-} dy', \quad (5.5.108)$$

obtenue en intégrant par parties la première équation du système (5.5.106). En vertu des conditions (5.5.100) que l'on a supposé vérifiées jusqu'ici, il en découle aisément la condition (5.5.108). Par ailleurs, afin de se ramener à un saut de pression nul, on peut poser par exemple

$$\tilde{q}^{m+1,\pm} := \underline{q}^{m+1,\pm} + \underline{q}^{m+1,\pm}|_{Y_3=0},$$

et on obtient un nouveau problème de Laplace satisfait par $\tilde{q}^{m+1,\pm}$. La vérification de la compatibilité des nouveaux termes sources générés est triviale, et le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer.

Dès lors, on peut résoudre le système hyperbolique symétrique suivant [BGS07], provenant de (5.5.104) dans lequel nous avons passé la pression en terme source. En omettant les exposants relatifs à m dans les termes de (5.5.104), on a alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{u}^\pm + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{u}^\pm - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{H}^\pm = \tilde{\ell}_1^\pm - \nabla \underline{q}^\pm, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \partial_t \tilde{H}^\pm + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{H}^\pm - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \tilde{u}^\pm = \tilde{\ell}_2^\pm, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \end{array} \right. \quad (5.5.109)$$

adjoint de la condition initiale (5.5.105). Comme les termes sources dans (5.5.109) sont de régularité H^∞ , on en déduit que la vitesse \tilde{u}^\pm et le champ magnétique \tilde{H}^\pm , solutions de (5.5.109), vérifient donc :

$$\tilde{u}^\pm, \tilde{H}^\pm \in \underline{S}^\pm = H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm).$$

Pour récupérer les contraintes de divergence nulle sur \tilde{u}^\pm et \tilde{H}^\pm dans (5.5.104), on applique l'opérateur divergence au système (5.5.109), et on obtient le système hyperbolique symétrique *homogène* ci-dessous. En effet, on peut voir facilement que le terme source $\tilde{\ell}_1^\pm - \nabla \underline{q}^\pm$ dans la première équation de (5.5.109)

est à divergence nulle, par définition de la pression \underline{q}^\pm (voir (5.5.106)); de même pour le terme source \widetilde{f}_2^\pm (cela découle notamment de (5.5.101) et (5.5.103)). On obtient :

$$\begin{cases} \partial_t(\nabla_y \cdot \widetilde{u}^\pm) + u^{0,\pm} \cdot \nabla(\nabla_y \cdot \widetilde{u}^\pm) - H^{0,\pm} \cdot \nabla(\nabla_y \cdot \widetilde{H}^\pm) = 0, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \partial_t(\nabla_y \cdot \widetilde{H}^\pm) + u^{0,\pm} \cdot \nabla(\nabla_y \cdot \widetilde{H}^\pm) - H^{0,\pm} \cdot \nabla(\nabla_y \cdot \widetilde{u}^\pm) = 0, & \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \end{cases}$$

avec condition initiale nulle. En conséquence, la vitesse \widetilde{u}^\pm et le champ magnétique \widetilde{H}^\pm sont bien à divergence nulle. Le raisonnement est analogue pour en déduire les conditions de bord sur Γ et Γ_\pm que doivent satisfaire \widetilde{u}^\pm et \widetilde{H}^\pm dans (5.5.104). Ceci achève de traiter la construction de la moyenne lente $\underline{U}^{m+1,\pm}$ et conclut quant à la sous-étape (b).

Retour sur les conditions de compatibilité (5.5.100). Il convient désormais de s'attarder sur les conditions de compatibilité (5.5.100) que doivent vérifier les termes sources $\underline{g}_i^{m,\pm}$ et $\underline{h}_i^{m-3,\pm}$ du système (5.5.99), pour $i = 1, 2$. Pour commencer, évoquons le cas "plus simple" où $m \leq 5$: les termes sources $\underline{h}_i^{m-3,\pm}$ associés aux bords fixes Γ_\pm sont alors identiquement nuls (on renvoie aux conditions de bord (5.5.24) établies au Paragraphe 5.5.3).

Supposons pour l'instant que l'on a $m \leq 5$: à ce stade, cela revient à dire que l'on a au mieux construit les 5 premiers profils $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq 5}$, et que l'on souhaite déterminer au mieux le correcteur $(U^{6,\pm}, \psi^7)$. Pour vérifier la relation de compatibilité (5.5.100), il suffit donc de montrer que

$$\int_\Gamma \underline{g}_1^{m,\pm} dy' = 0. \quad (5.5.110)$$

Pour ce faire, il convient d'expliciter le terme source $\underline{g}_1^{m,\pm}$, qui a été défini en (5.5.98). En utilisant (5.5.97a), on avait :

$$\underline{g}_1^m = -\underline{u}_3^{m+1,\pm}|_{y_3=Y_3=0} + \widehat{G}_1^{m,\pm}(0). \quad (5.5.111)$$

La vitesse normale rapide $\underline{u}_3^{m+1,\pm}$ dans (5.5.111) a été déterminée lors de la sous-étape (a). On pouvait même complètement expliciter $\underline{u}_3^{m+1,\pm}$, grâce à la contrainte (5.5.12a) satisfaite par la vitesse $u^{m+1,\pm}$. En effet, en décomposant $u^{m+1,\pm}$ dans l'espace fonctionnel $S^\pm = \underline{S}^\pm \oplus S_\star^\pm$ (conformément aux notations définies par (5.2.1)), la contrainte (5.5.12a) nous donne¹³ :

$$\begin{aligned} & \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{m+1} + \partial_{Y_3} u_{\star,3}^{m+1} + \xi_j \partial_\theta u_{\star,j}^{m+1} \\ &= - \underbrace{\nabla_y \cdot \underline{u}^m}_{=0} - \nabla_y \cdot \underline{u}^m - \nabla_y \cdot u_\star^m \\ &+ \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k \geq 2}} \xi_j \partial_\theta \psi^k \left(\partial_{Y_3} \underline{u}_j^{\ell+1} + \partial_{Y_3} u_{\star,j}^{\ell+1} + \partial_{y_3} \underline{u}_j^\ell + \partial_{y_3} u_{\star,j}^\ell + \partial_{y_3} u_{\star,j}^\ell \right) \\ &+ \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 2}} \partial_{y_j} \psi^k \left(\partial_{Y_3} \underline{u}_j^{\ell+1} + \partial_{Y_3} u_{\star,j}^{\ell+1} + \partial_{y_3} \underline{u}_j^\ell + \partial_{y_3} u_{\star,j}^\ell + \partial_{y_3} u_{\star,j}^\ell \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur de moyenne sur le tore (par rapport à la variable rapide θ), il reste :

$$\begin{aligned} \partial_{Y_3} \underline{u}_3^{m+1} &= - \nabla_y \cdot \underline{u}^m + \sum_{\substack{k+\ell=m+1 \\ k \geq 2}} \xi_j \overline{\partial_\theta \psi^k \partial_{Y_3} u_{\star,j}^{\ell+1}}(0) + \xi_j \overline{\partial_\theta \psi^k \partial_{y_3} u_{\star,j}^\ell}(0) \\ &+ \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 2}} \overline{\partial_{y_j} \psi^k \partial_{Y_3} u_{\star,j}^{\ell+1}}(0) + \overline{\partial_{y_j} \psi^k \partial_{y_3} u_{\star,j}^\ell}(0). \end{aligned}$$

¹³Omettons temporairement les exposants \pm pour ne pas alourdir l'écriture, et utilisons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés $j \in \{1, 2\}$.

Supposons que l'on a en fait redressé les vitesses $(u_{\star}^{\ell})_{\ell \leq m}$ indépendamment de y_3 . Alors l'expression ci-dessus se simplifie comme suit :

$$\partial_{Y_3} \underline{u}_3^{m+1} = -\nabla_y \cdot \underline{u}^m + \sum_{k+\ell=m-1} \xi_j \overline{\partial_{Y_3} u_{\star,j}^{k+1} \partial_{\theta} \psi^{\ell+2}}(0) + \sum_{k+\ell=m-2} \overline{\partial_{Y_3} u_{\star,j}^{k+1} \partial_{y_j} \psi^{\ell+2}}(0).$$

En intégrant par rapport à Y_3 , la vitesse normale rapide $\underline{u}_3^{m+1,\pm}$ est alors donnée par (on réécrit les exposants \pm) :

$$\begin{aligned} \underline{u}_3^{m+1,\pm}(t, y, Y_3) &= - \int_{\pm\infty}^{Y_3} \nabla_y \cdot \underline{u}^{m,\pm}(t, y, Y'_3) dY'_3 + \sum_{k+\ell=m-1} \xi_j \overline{u_{\star,j}^{k+1,\pm} \partial_{\theta} \psi^{\ell+2}}(t, y', 0) \\ &+ \sum_{k+\ell=m-2} \overline{u_{\star,j}^{k+1,\pm} \partial_{y_j} \psi^{\ell+2}}(t, y', 0). \end{aligned} \quad (5.5.112)$$

Par ailleurs, le terme $\widehat{G}_1^{m,\pm}(0)$ dans (5.5.111) peut aussi se calculer explicitement à partir de (5.5.16) et (5.5.13), et on a :

$$\widehat{G}_1^{m,\pm}(0) = \sum_{k+\ell=m-2} \overline{u_{\star,j}^{k+1,\pm} \partial_{y_j} \psi^{\ell+2}}(0) + \sum_{k+\ell=m-1} \xi_j \overline{u_{\star,j}^{k+1,\pm} \partial_{\theta} \psi^{\ell+2}}(0). \quad (5.5.113)$$

Ainsi, en injectant (5.5.112) et (5.5.113) dans (5.5.111), il vient :

$$\forall (t, y') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2, \quad \mathfrak{g}_1^{m,\pm}(t, y') = \int_{\pm\infty}^0 \sum_{j=1}^3 \partial_{y_j} \underline{u}_j^{m,\pm}(t, y', 0, Y_3) dY_3.$$

À présent, en vue d'aboutir à la condition de compatibilité (5.5.100) (toujours avec $m \leq 5$), on commence par calculer, à $t \in [0, T]$ fixé :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathfrak{g}_1^{m,\pm}(t, y') dy' = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\pm\infty}^0 \partial_{y_j} \underline{u}_j^{m,\pm}(t, y', 0, Y_3) dY_3 dy' \quad (5.5.114)$$

$$= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\pm\infty}^0 \partial_{y_3} \underline{u}_3^{m,\pm}(t, y', 0, Y_3) dY_3 dy'. \quad (5.5.115)$$

Or, si on redresse effectivement les profils $(u_{\star}^{k,\pm})_{k \leq m}$ indépendamment de y_3 , alors cela se “répercute” sur les moyennes rapides $(\underline{u}_3^{k,\pm})_{k \leq m}$. En effet, en revenant à (5.5.112) (avec maintenant m au lieu de $m+1$), nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{u}_3^{m,\pm}(t, y, Y_3) &= - \int_{\pm\infty}^{Y_3} \sum_{j=1}^3 \partial_{y_j} \underline{u}_j^{m-1,\pm}(t, y, Y'_3) dY'_3 + \sum_{k+\ell=m-2} \xi_j \overline{u_{\star,j}^{k+1,\pm} \partial_{\theta} \psi^{\ell+2}}(t, y', 0) \\ &+ \sum_{k+\ell=m-3} \overline{u_{\star,j}^{k+1,\pm} \partial_{y_j} \psi^{\ell+2}}(t, y', 0). \end{aligned} \quad (5.5.116)$$

Dans (5.5.116), seule la vitesse rapide $\underline{u}^{m-1,\pm}$ peut dépendre de y_3 . Il est donc clair par récurrence que si $\underline{u}^{m-1,\pm}$ ne dépend pas de y_3 , alors $\underline{u}_3^{m,\pm}$ n'en dépend pas non plus. Revenant à (5.5.115), il reste alors :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathfrak{g}_1^{m,\pm}(t, y') dy' = 0, \quad (5.5.117)$$

ce qui achève la démonstration de la condition de compatibilité (5.5.100) lorsque $m \leq 5$.

Si $m \geq 6$, nous aurons toujours l'égalité (5.5.117), mais la condition de compatibilité (5.5.100) ne sera satisfaite que si le terme source $\mathfrak{h}_i^{m-3,\pm}$, qui est à présent *non nul*, est à moyenne nulle sur \mathbb{T}^2 . Ce

point ne semble pas immédiat, compte tenu des expressions complexes des conditions de bord obtenues au Paragraphe 5.5.3, et pourra constituer une piste de recherche future.

On peut maintenant appliquer le théorème de Lax-Milgram, qui fournit une unique solution à moyenne nulle sur Ω au problème de Laplace (5.5.106). Afin de conclure sur ce système, il nous reste à tenir compte de la condition de normalisation (5.5.41c) que doit vérifier $\underline{q}^{m+1,\pm}$. Comme la détermination de $\underline{q}^{m+1,\pm}$ se fait à une constante (dépendant du temps) près, il suffit de corriger convenablement la moyenne sur Ω de la solution fournie par le théorème de Lax-Milgram afin de vérifier la condition de normalisation (5.5.41c) ; la propriété (\mathbb{H}_5^{m+1}) est assurée.

La sous-étape (b) est maintenant achevée : nous avons déterminé la moyenne lente $\underline{U}^{m+1,\pm}$, qui de surcroît appartient bien à l'espace \underline{S}^\pm .

Sous-étape (c) : calcul de $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}$.

À ce stade, nous connaissons la moyenne lente $\underline{U}^{m+1,\pm}$ et la partie rapide $(I - \Pi) \underline{U}^{m+1,\pm}$. Il reste à déterminer $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}$, c'est-à-dire les composantes *tangentielles* de $\underline{U}^{m+1,\pm}$. La méthode est similaire à ce qui a été fait pour la partie rapide $\Pi \underline{U}^{1,\pm}$ associée au profil principal (on renvoie au Paragraphe 5.4.2). Pour ce faire, revenons à la première équation du système (5.5.77) auquel on a appliqué l'opérateur de moyenne sur le tore :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} \widehat{U}^{m+2,\pm}(0) = \widehat{F}^{m+1,\pm}(0). \quad (5.5.118)$$

Rappelons la définition (5.5.11) du terme source $F^{m+1,\pm}$ (avec $m + 1$ dans le rôle de m). Grâce à la condition de résolubilité (5.5.88) et en utilisant la décomposition (5.5.87), on peut filtrer les composantes lentes dans (5.5.118), et on en déduit¹⁴ :

$$\begin{aligned} A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{U}^{m+2,\pm} &= \underline{F}^{m+1,\pm} \\ &= -\underline{F}_1^{m+1,\pm} + \underline{F}_2^{m+1,\pm} - \underline{F}_3^{m+1,\pm} + \mathbb{F}^{m,\pm}, \end{aligned} \quad (5.5.119)$$

Il est aisé de voir que les composantes rapides $(\underline{F}_i^{m+1,\pm})_{1 \leq i \leq 3}$ intervenant dans $\underline{F}^{m+1,\pm}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{F}_1^{m+1,\pm} &= \mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{U}^{m+1,\pm}, \\ \underline{F}_2^{m+1,\pm} &= \widehat{F}_2^{m+1,\pm}(0), \\ \underline{F}_3^{m+1,\pm} &= \widehat{F}_3^{m+1,\pm}(0). \end{aligned} \quad (5.5.120)$$

Les calculs des deux derniers coefficients de Fourier de (5.5.120) sont similaires à ceux effectués pour le cas de $\Pi \underline{U}^{1,\pm}$ (voir (5.4.48) et (5.4.52)). Avant d'en donner les expressions, rappelons l'expression (5.5.75) des coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(k)$, pour $k \neq 0$:

$$\widehat{U}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3, k) = \gamma^{m+1,\pm}(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k) + \widehat{U}^{m,\pm}(t, y, Y_3, k),$$

où $\mathcal{U}^{m,\pm}$ est un terme ne dépendant que des profils antérieurs $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$. Dans les calculs à venir (et uniquement dans ces calculs), on pourra supposer sans perte de généralité que le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(k)$ est directement donné par

$$\widehat{U}^{m+1,\pm}(t, y, Y_3, k) = \gamma^{m+1,\pm}(t, y, k) e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{R}^\pm(k),$$

quitte à modifier convenablement le terme de reste $\mathbb{F}^{m,\pm}$ présent dans (5.5.119) en lui incorporant les

¹⁴L'équation obtenue n'est rien d'autre que la condition de résolubilité (5.5.89) précisée.

contributions provenant du terme “d’ordre inférieur” $\mathcal{U}^{m,\pm}$. Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{F}_2^{m+1,\pm} &= ((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2) \sum_{\ell \neq 0} \ell^2 \left(\widehat{\psi}^2(-\ell) \gamma^{m+1,\pm}(\ell) \pm \chi(y_3) |\ell| \widehat{\psi}^2(\ell) \widehat{\psi}^{m+2}(-\ell) \right) e^{\mp |\ell| Y_3} e_3 \\ &\quad \pm i \sum_{\ell \neq 0} \ell |\ell| \left(\widehat{\psi}^2(-\ell) \gamma^{m+1,\pm}(\ell) \pm \chi(y_3) |\ell| \widehat{\psi}^2(\ell) \widehat{\psi}^{m+2}(-\ell) \right) e^{\mp |\ell| Y_3} \\ &\quad \times (c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6) \\ &=: \mu^{m+1,\pm} e_3 + \lambda^{m+1,\pm} (c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6). \end{aligned} \quad (5.5.121)$$

Notons que les coefficients $\mu^{m+1,\pm}$ et $\lambda^{m+1,\pm}$ dans (5.5.121) sont en fait des fonctions de (t, y, Y_3) . Pour finir, nous écrivons l’expression de $\underline{F}_3^{m+1,\pm}$:

$$\begin{aligned} \underline{F}_3^{m+1,\pm} &= 4 \chi(y_3) ((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2) \sum_{\ell \neq 0} \ell^2 \widehat{\psi}^2(-\ell) \gamma^{m+1,\pm}(\ell) e^{\mp 2|\ell| Y_3} e_3 \\ &=: -\nu^{m+1,\pm} e_3. \end{aligned} \quad (5.5.122)$$

Le coefficient $\nu^{m+1,\pm}$ est également une fonction de (t, y, Y_3) . On peut dès lors réécrire (5.5.119) comme suit :

$$\begin{aligned} A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{U}^{m+2,\pm} &= -\mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{U}^{m+1,\pm} + \lambda^{m+1,\pm} (c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6) \\ &\quad + (\mu^{m+1,\pm} + \nu^{m+1,\pm}) e_3 + \mathfrak{R}^{m,\pm}, \end{aligned} \quad (5.5.123)$$

où $\mathfrak{R}^{m,\pm}$ est un terme de reste comprenant $\underline{\mathbb{F}}^{m,\pm}$ ainsi que toutes les contributions provenant de $\mathcal{U}^{m,\pm}$ qui intervient dans l’expression (5.5.75) du correcteur $U^{m+1,\pm}$. Par conséquent, $\mathfrak{R}^{m,\pm}$ ne dépend que des profils antérieurs $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$. De surcroît, il appartient à l’espace S_\star^\pm car on a “filtré” toutes les composantes lentes grâce à l’étape précédente. Remarquons la similitude avec l’équation (5.4.53a) que l’on avait obtenue lors de la détermination de la moyenne rapide $\underline{U}^{1,\pm}$ associée au profil principal au Paragraphe 5.4.2. Insistons sur la dernière composante du système (5.5.123), qui correspond à la contrainte (5.5.12a) (avec $m+1$ dans le rôle de m) que l’on impose à la vitesse $\underline{u}^{m+2,\pm}$, provenant de la contrainte de divergence nulle sur la vitesse. Nous avons explicitement :

$$\partial_{Y_3} \underline{u}_3^{m+2,\pm} = - \sum_{j=1}^2 \partial_{y_j} \underline{u}_j^{m+1,\pm} - \partial_{y_3} \underline{u}_3^{m+1,\pm} + c^\pm \lambda^{m+1,\pm} + \mathfrak{R}_7^{m,\pm}, \quad (5.5.124a)$$

où $\mathfrak{R}_7^{m,\pm} \in S_\star^\pm$ ne dépend que des profils antérieurs $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$. Notons que la composante normale $\underline{u}_3^{m+1,\pm}$ associée à la vitesse dans (5.5.124a) est à ce stade connue car nous l’avons déterminée lors de la sous-étape (a). De même, la contrainte (5.5.12b) (avec $m+1$ dans le rôle de m) que l’on avait adjointe au système (5.5.77), nous donne :

$$\partial_{Y_3} \underline{H}_3^{m+2,\pm} = - \sum_{j=1}^2 \partial_{y_j} \underline{H}_j^{m+1,\pm} - \partial_{y_3} \underline{H}_3^{m+1,\pm} + b^\pm \lambda^{m+1,\pm} + \mathfrak{R}_8^{m,\pm}, \quad (5.5.124b)$$

où $\mathfrak{R}_8^{m,\pm} \in S_\star^\pm$ est un terme de reste analogue à $\mathfrak{R}_7^{m,\pm}$ (c’est-à-dire ne dépendant que des profils connus $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$). Toute comme pour la vitesse, la composante normale $\underline{H}_3^{m+1,\pm}$ associée au champ magnétique dans (5.5.124b) est connue, car on l’a déterminée lors de la sous-étape (a).

Dès lors, on reprend exactement la même démarche qu’à partir de l’équation (5.4.53a), grâce à laquelle nous avons déterminé les composantes tangentielles $\Pi \underline{U}^{1,\pm}$ associées au profil principal. En explicitant les équations du système (5.5.123) ligne par ligne, et en utilisant les contraintes (5.5.124) qui permettent “d’éliminer” les profils *inconnus* $\underline{u}_3^{m+2,\pm}$ et $\underline{H}_3^{m+2,\pm}$, on aboutit à un système hyperbolique symétrique *inhomogène* satisfait par les composantes tangentielles $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}$. Plus précisément, en définissant l’inconnue

$$\mathcal{V}^{m+1,\pm} := (\underline{u}_1^{m+1,\pm}, \underline{u}_2^{m+1,\pm}, \underline{H}_1^{m+1,\pm}, \underline{H}_2^{m+1,\pm}),$$

on obtient le système suivant :

$$\partial_t \mathcal{V}^{m+1,\pm} + \mathcal{M}_1^\pm \partial_{y_1} \mathcal{V}^{m+1,\pm} + \mathcal{M}_2^\pm \partial_{y_2} \mathcal{V}^{m+1,\pm} = W^{m,\pm}, \quad (t, y', y_3) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm, \quad (5.5.125)$$

où l'on rappelle la définition (5.4.57) des matrices \mathcal{M}_1^\pm et \mathcal{M}_2^\pm . Le terme source $W^{m,\pm} \in S_\star^\pm$ ne dépend que des profils antérieurs $(U^{j,\pm}, \psi^{j+1})_{j \leq m}$ et des composantes normales rapides $(\underline{u}_3^{m+1,\pm}, \underline{H}_3^{m+1,\pm})$ (tous ces profils sont à ce stade connus par hypothèse de récurrence (\mathbb{H}^m)). Notons que les variables $y_3 \in I_\pm$ et $Y_3 \geq 0$ jouent en fait un rôle de paramètres dans l'équation (5.5.125). La donnée initiale associée à l'équation (5.5.125) est libre, exactement comme pour le cas de $\Pi \underline{U}^{1,\pm}$; conformément à (5.2.2), on la choisit identiquement nulle. Les composantes tangentielles $\mathcal{V}^{m+1,\pm}$ de la moyenne rapide $\underline{U}^{m+1,\pm}$ vérifient donc le système hyperbolique symétrique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{V}^{m+1,\pm} + \mathcal{M}_1^\pm \partial_{y_1} \mathcal{V}^{m+1,\pm} + \mathcal{M}_2^\pm \partial_{y_2} \mathcal{V}^{m+1,\pm} = W^{m,\pm}, & (t, y', y_3) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm, \\ \mathcal{V}^{m+1,\pm}(0, y', y_3) = 0, & (y', y_3) \in \mathbb{T}^2 \times I_\pm. \end{cases} \quad (5.5.126)$$

La résolution d'un tel système est classique (on peut se référer par exemple à [BGS07]), car il ne nécessite aucune condition sur les bords Γ et Γ_\pm (puisque la matrice devant la dérivée partielle ∂_{y_3} est *nulle*). On obtient une unique solution $\mathcal{V}^{m+1,\pm}$ telle que :

$$\mathcal{V}^{m+1,\pm} \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm \times \mathbb{R}_\pm),$$

car le terme source $W^{m,\pm}$ appartient en particulier à l'espace $H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm \times \mathbb{R}_\pm)$. De plus, la solution $\mathcal{V}^{m+1,\pm}$ satisfait l'estimation d'énergie suivante (obtenue par intégrations par parties et en appliquant le lemme de Gronwall), pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^5$:

$$\forall Y_3 \geq 0, \quad \left\| \partial_{t,y,Y_3}^\alpha \mathcal{V}^{m+1,\pm}(Y_3) \right\|_{H^r([0,T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm)} \leq C_T \left\| \partial_{t,y,Y_3}^\alpha W^{m,\pm}(Y_3) \right\|_{H^r([0,T] \times \mathbb{T}^2 \times I_\pm)}, \quad (5.5.127)$$

où $C_T > 0$ ne dépend que du temps maximal T . Dans tout ce qui suit, on dénotera toujours par C_T toute constante strictement positive ne dépendant que de T . Il reste à vérifier que la solution obtenue appartient à l'espace S_\star^\pm . Grâce aux injections de Sobolev et à l'aide de (5.5.127), on a pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^5$:

$$\begin{aligned} \left\| \partial^\alpha \mathcal{V}^{m+1,\pm}(Y_3) \right\|_{L_{t,y}^\infty}^2 &\leq C_T \left\| \partial^\alpha \mathcal{V}^{m+1,\pm}(Y_3) \right\|_{H_{t,y}^3}^2 \\ &\leq C_T \left\| \partial^\alpha W^{m,\pm}(Y_3) \right\|_{H_{t,y}^3}^2 = C_T \sum_{|\beta| \leq 3} \left\| \partial^\beta \partial^\alpha W^{m,\pm}(Y_3) \right\|_{L_{t,y}^2}^2 \\ &\leq C_T \max_{|\beta| \leq 3} \left\| \partial^\beta \partial^\alpha W^{m,\pm}(Y_3) \right\|_{L_{t,y}^\infty}^2 \\ &\leq C_{T,\alpha} e^{-\delta_m Y_3}, \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue grâce au fait que $W^{m,\pm}$ appartient à S_\star^\pm . La constante $C_{T,\alpha} > 0$ ne dépend que du temps maximal T et du multi-indice α . Par conséquent, l'unique solution $\mathcal{V}^{m+1,\pm}$ du système (5.5.126) appartient à l'espace S_\star^\pm , ce qui achève le traitement de la partie rapide $\Pi \underline{U}^{m+1,\pm}$.

Étape 4

Le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(0)$ est complètement déterminé grâce à l'étape 3, et est donné par (5.5.87).

Pour terminer, on redresse par rapport y_3 les coefficients de Fourier $\widehat{U}^{m+1,\pm}(k)|_{y_3=0}$, pour tout $k \neq 0$, en multipliant par $\chi(y_3)$ (où χ a été introduite au Paragraphe 5.4.4, et est amenée à valoir 1 sur $[-1, 1]$ afin d'assurer les conditions de compatibilité (5.5.100) jusqu'à l'ordre 6). En reprenant les expressions (5.5.75) et (5.5.76), on écrit :

$$\widehat{U}^{m+1,\pm}(t, y', y_3, Y_3, k) = \pm \chi(y_3) |k| \widehat{\psi}^{m+2}(k) e^{\mp |k| Y_3} \mathcal{R}^\pm(k) + \widehat{U}^{m,\pm}(t, y', y_3, Y_3, k), \quad (5.5.128)$$

ce qui détermine entièrement un correcteur $U^{m+1,\pm} \in S^\pm$, et permet d'obtenir la propriété (\mathbb{H}^{m+1}).

Conclusion. Ceci termine la résolution de la cascade BKW (5.5.17b), en fournissant des correcteurs $(U^{\ell,\pm}, \psi^{\ell+1})_{2 \leq \ell \leq 6}$, tels que $U^{\ell,\pm}$ appartient à l'espace $S^\pm = \underline{S}^\pm \oplus S_\star^\pm$ et $\psi^{\ell+1}$ appartient à H^∞ , sa moyenne par rapport à θ étant nulle. Le Théorème 5.2.2 est démontré. La construction de correcteurs d'ordre supérieur à 7 est laissée comme piste de recherche future, et repose notamment sur la vérification des conditions de compatibilité (5.5.100).

5.5.7 Phénomène de rectification

Au sein de ce paragraphe, nous nous attardons sur le cas du premier correcteur $U^{2,\pm}$ et comparons nos résultats avec ceux mis en évidence par Marcou [Mar10, Mar11]. Dans le cas de l'élasticité non-linéaire en dimension 2 d'espace, Marcou a démontré que sous une condition générique (voir le Corollaire 2.5 et la Remarque 2.6 de [Mar11]), le premier correcteur dans le développement BKW a une *composante lente* dans \underline{S}^\pm **non nulle** (avec les notations de la définition (5.2.1)). Le phénomène de *rectification* – qui consiste en la non-nullité de la composante lente des correcteurs – se produit donc dès le *premier correcteur* pour le cas de l'élasticité non-linéaire 2D.

Nous allons voir que ce n'est pas le cas pour le problème des nappes de tourbillon-courant 3D, car le premier correcteur $U^{2,\pm}$ sera lui aussi localisé près de la frontière libre (c'est-à-dire $\underline{U}^{2,\pm} \equiv 0$), exactement comme le profil principal $U^{1,\pm}$ qui n'a pas de composante lente dans \underline{S}^\pm . Ceci est possible du fait des degrés de liberté dont on dispose sur la donnée initiale qui donne lieu à l'hypothèse (5.2.2) que l'on a faite sur les moyennes initiales. Il subsiste une légère différence avec les résultats de Marcou [Mar10], dans lesquels ce même type de degrés de liberté conduit néanmoins à un phénomène de rectification dès le *premier* correcteur, tandis que dans notre cas ce phénomène va apparaître génériquement dès le *second* correcteur $U^{3,\pm}$. En effet, nous montrons dans ce paragraphe que la composante lente $\underline{U}^{3,\pm}$ est **non nulle** en général.

Reprenons en détails les étapes ayant abouti au système linéarisé des nappes de tourbillon-courant que doit satisfaire la moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ (c'est-à-dire le système (5.5.99) avec $m = 1$). Nous sommes partis du système (5.5.17b) satisfait par le correcteur $U^{3,\pm}$, et notamment :

$$L_f^\pm(\partial) U^{3,\pm} = F^{2,\pm}, \quad \forall y_3 \geq 0, \quad \forall Y_3 \geq 0. \quad (5.5.129)$$

En vertu de la Proposition 5.5.1, le terme source $F^{2,\pm}$ doit être à moyenne lente nulle, *i.e.* $\underline{F}^{2,\pm} \equiv 0$. Maintenant, si l'on reprend l'expression du terme source $F^{2,\pm}$ donnée par (5.5.90) (avec $m = 1$) il n'est pas difficile de montrer que la moyenne lente $\underline{F}^{2,\pm}$ vérifie :

$$\underline{F}^{2,\pm} = -\mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{U}^{2,\pm}.$$

Par conséquent, on en déduit que la moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ doit satisfaire le système d'EDP suivant :

$$\mathcal{T}_s^\pm(\partial) \underline{U}^{2,\pm} = 0. \quad (5.5.130)$$

Ainsi, les équations régissant la moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ dans les domaines fixes Ω^\pm sont *homogènes*, exactement comme pour le cas du profil principal $\underline{U}^{1,\pm}$. N'oublions pas la contrainte (5.5.12b) (avec $m = 2$) sur le champ magnétique que l'on a adjointe à l'équation (5.5.129), et qui s'écrit :

$$\nabla_y \cdot \underline{H}^{2,\pm} = 0.$$

Ceci termine l'établissement des équations régissant la moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ dans les domaines fixes Ω^\pm .

Considérons à présent les conditions de bord que doit satisfaire le correcteur $U^{2,\pm}$ sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ (voir les conditions de bord du système (5.5.17b) avec $m = 1$). Après avoir appliqué l'opérateur de moyenne sur le tore (par rapport à la variable rapide θ), nous avons :

$$B^+ \widehat{U}^{2,+}(0) + B^- \widehat{U}^{2,-}(0) = \widehat{G}^{1,+}(0) + \widehat{G}^{1,-}(0), \quad y_3 = Y_3 = 0.$$

En décomposant à nouveau le coefficient de Fourier $\widehat{U}^{2,\pm}(0)$ en moyennes lente et rapide, il vient :

$$B^+ \underline{\underline{U}}^{2,+} + B^- \underline{\underline{U}}^{2,-} = -B^+ \underline{\underline{U}}^{2,+} - B^- \underline{\underline{U}}^{2,-} + \widehat{G}^{1,+}(0) + \widehat{G}^{1,-}(0), \quad y_3 = Y_3 = 0. \quad (5.5.131)$$

Dans un premier temps, il convient donc de déterminer les moyennes rapides $(\underline{u}_3^{2,\pm}, \underline{H}_3^{2,\pm}, \underline{q}^{2,\pm})$ intervenant dans le membre de droite de (5.5.131). Ensuite, on calculera les termes sources $\widehat{G}^{1,\pm}(0)$ pour en déduire finalement les conditions de bord vérifiées par les moyennes lentes $(\underline{\underline{U}}^{2,+}, \underline{\underline{U}}^{2,-})$.

Première étape : la partie $(I - \Pi) \underline{\underline{U}}^{2,\pm}$ de la moyenne rapide.

On considère l'équation (5.5.118) (dans laquelle $m = 0$), qui nous donne la condition algébrique :

$$A_3^\pm \partial_{Y_3} \underline{\underline{U}}^{2,\pm} = \widehat{F}^{1,\pm}(0), \quad \forall y_3 \geq 0, \quad \forall Y_3 \geq 0. \quad (5.5.132)$$

Le terme source $F^{1,\pm}$ est donné par (5.4.7). Commençons par rappeler l'expression des coefficients de Fourier de $U^{1,\pm}$ que l'on a calculés à la Section 5.4 (on renvoie à (5.4.107)) :

$$\widehat{U}^{1,\pm}(t, y, Y_3, k) = \pm \chi(y_3) |k| e^{\mp |k| Y_3} \widehat{\psi}^2(t, y', k) \mathcal{R}^\pm(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (5.5.133)$$

Le calcul de $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$ a déjà été effectué au Paragraphe 5.4.2 (voir (5.4.53a)). On avait obtenu :

$$\widehat{F}^{1,\pm}(0) = - \underbrace{\mathcal{T}_{sh}^\pm(\partial) \underline{\underline{U}}^{1,\pm}}_{= 0 \text{ par (5.4.22)}} + \lambda^\pm \left(c^\pm A_3^\pm e_3 + b^\pm A_3^\pm e_6 \right) + (\mu^\pm + \nu^\pm) e_3.$$

Les coefficients λ^\pm , μ^\pm et ν^\pm sont définis par (5.4.47) et (5.4.51). Les coefficients γ^\pm intervenant dans ces expressions sont maintenant connus et valent :

$$\gamma^\pm(t, y, k) = \pm \chi(y_3) |k| \widehat{\psi}^2(t, y', k), \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times \Omega^\pm, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

en rappelant que Ω^\pm désigne le domaine fixe $\mathbb{T}^2 \times I_\pm$. Le coefficient λ^\pm donné par (5.4.47) vaut alors :

$$\lambda^\pm(t, y, Y_3) = i \chi(y_3) \sum_{\ell \neq 0} \ell^3 \widehat{\psi}^2(t, y', \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp |\ell| Y_3} = 0,$$

par imparité du terme général de la série par rapport à ℓ . Nous avons également, toujours à partir des expressions (5.4.47) et (5.4.51) :

$$\begin{aligned} \mu^\pm(t, y, Y_3) &= \frac{\delta}{2} \chi(y_3) \sum_{\ell \neq 0} |\ell|^3 \widehat{\psi}^2(t, y', \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp |\ell| Y_3}, \\ \nu^\pm(t, y, Y_3) &= -\delta \chi(y_3)^2 \sum_{\ell \neq 0} |\ell|^3 \widehat{\psi}^2(t, y', \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell) e^{\mp 2|\ell| Y_3}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle la définition (5.4.97) du coefficient δ (qui est non nul en vertu de l'hypothèse (H3)). Ainsi, en posant :

$$\zeta^\pm(t, y, Y_3) := \frac{\delta}{2} \chi(y_3) \sum_{\ell \neq 0} |\ell|^3 e^{\mp |\ell| Y_3} \left(1 - 2 \chi(y_3) e^{\mp |\ell| Y_3} \right) \widehat{\psi}^2(t, y', \ell) \widehat{\psi}^2(t, y', -\ell), \quad (5.5.134)$$

le coefficient de Fourier $\widehat{F}^{1,\pm}(0)$ s'écrit simplement :

$$\widehat{F}^{1,\pm}(0) = \zeta^\pm e_3.$$

En utilisant l'expression de la matrice A_3^\pm (cf. Annexe A.1), l'équation (5.5.132) donne alors :

$$\begin{cases} \underline{u}_3^{2,\pm}(t, y, Y_3) = 0, \\ \underline{H}_3^{2,\pm}(t, y, Y_3) = 0, \\ \underline{q}^{2,\pm}(t, y, Y_3) = \int_{\pm\infty}^{Y_3} \zeta^\pm(t, y, Y'_3) dY'_3. \end{cases} \quad (5.5.135)$$

Ainsi, le terme $(I - \Pi) \underline{U}^{2,\pm}$ est entièrement déterminé. En intégrant l'expression (5.5.134) par rapport à Y_3 , nous obtenons en particulier :

$$\underline{q}^{2,\pm}(t, y, Y_3) = \mp \frac{\delta}{2} \chi(y_3) \sum_{\ell \neq 0} \ell^2 e^{\mp|\ell|Y_3} (1 - \chi(y_3) e^{\mp|\ell|Y_3}) |\widehat{\psi}^2(t, y', \ell)|^2. \quad (5.5.136)$$

Notamment, le saut de $\underline{q}^{2,\pm}|_{Y_3=0}$ sur $\{y_3 = 0\}$ est nul :

$$[\underline{q}^2|_{Y_3=0}] = 0. \quad (5.5.137)$$

Deuxième étape : les termes sources $G^{1,\pm}$.

Calculons les coefficients de Fourier d'ordre 0 des composantes $G_1^{1,\pm}$ (les calculs sont analogues pour $G_2^{1,\pm}$). En reprenant l'expression (5.5.16b), et puisque le profil principal ψ^2 est à moyenne nulle par rapport à θ , il vient :

$$\widehat{G}_1^{1,\pm}(0) = \sum_{j=1}^2 \overline{u_j^{1,\pm}|_{y_3, Y_3=0} \partial_\theta \psi^2}.$$

Ici, une simplification importante a lieu contrairement au cas du terme source $G_1^{m,\pm}$, pour $m \geq 2$, dont on rappelle la définition (5.5.16c). En effet, le terme source $G_1^{1,\pm}$ ne contient pas de terme de "reste" $\mathbb{G}_1^{0,\pm}$ (comme on peut le voir dans l'expression (5.5.16b)), contrairement au terme source $G_1^{m,\pm}$ dont l'expression fait intervenir le terme de "reste" $\mathbb{G}_1^{m-1,\pm}$ (en général non nul). Ceci explique pourquoi nous allons obtenir les conditions de bord *homogènes* (5.5.138) ci-dessous, contrairement au cas général des conditions de bord *inhomogènes* (5.5.98) précédemment mises en évidence.

En utilisant l'expression (5.5.133) de $\widehat{U}^{1,\pm}(k)$ évaluée en $y_3 = Y_3 = 0$, on obtient :

$$\overline{u_j^{1,\pm}|_{y_3, Y_3=0} \partial_\theta \psi^2} = -i \sum_{k \neq 0} \widehat{u}_j^{1,\pm}(0, 0, k) k \widehat{\psi}^2(-k) = \mp i \xi_j c^\pm \sum_{k \neq 0} k |k| \widehat{\psi}^2(k) \widehat{\psi}^2(-k) = 0,$$

par imparité par rapport à k . Par conséquent, nous avons :

$$\widehat{G}_1^{1,\pm}(0) = \widehat{G}_2^{1,\pm}(0) = 0. \quad (5.5.138)$$

Ce calcul est une simplification notable qui a lieu uniquement dans le cas $m = 1$ correspondant au premier correcteur. C'est à cette étape où l'on constate la différence majeure vis-à-vis des résultats de Marcou [Mar11].

Conclusion sur les conditions de bord (5.5.131).

En regroupant les résultats (5.5.135), (5.5.137) et (5.5.138), on en déduit que les conditions de bord pour la vitesse lente $\underline{u}_3^{2,\pm}$, le champ magnétique lent $\underline{H}_3^{2,\pm}$ et le saut de la pression lente $\underline{q}^{2,\pm}$ sont *homogènes*.

Pour finir, en utilisant les conditions sur les bords fixes Γ_\pm (5.5.24a) et (5.5.25a) (pour $m = 2$), nous avons :

$$\underline{u}_3^{2,\pm} = \underline{H}_3^{2,\pm} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\pm.$$

En résumé, la moyenne lente $\underline{U}^{2,\pm}$ du premier correcteur satisfait le système des nappes de tourbillon-courant linéarisé **homogène**, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \underline{u}^{2,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{u}^{2,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{H}^{2,\pm} + \nabla \underline{q}^{2,\pm} = 0, \\ \partial_t \underline{H}^{2,\pm} + (u^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{H}^{2,\pm} - (H^{0,\pm} \cdot \nabla) \underline{u}^{2,\pm} = 0, \\ \nabla_y \cdot \underline{u}^{2,\pm} = \nabla_y \cdot \underline{H}^{2,\pm} = 0, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega^\pm, \\ \underline{u}_3^{2,\pm} = \underline{H}_3^{2,\pm} = [\underline{q}^2] = 0, \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \underline{u}_3^{2,\pm} = \underline{H}_3^{2,\pm} = 0, \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_\pm, \\ \underline{U}^{2,\pm}|_{t=0} = 0, \quad \text{dans } \Omega^\pm. \end{array} \right.$$

Par conséquent, tout comme pour le profil principal $U^{1,\pm}$ (voir (5.4.33)), on en déduit que $\underline{U}^{2,\pm} \equiv 0$, compte tenu de la normalisation (5.5.41b) sur la pression. Le phénomène de rectification ne peut donc se produire qu'à partir du second correcteur $U^{3,\pm}$, et ce phénomène se produit en général comme nous allons le voir désormais.

En effet, attardons-nous à présent sur les termes de bord $G_1^{2,\pm}$ et $G_2^{2,\pm}$ donnés par (5.5.16c) (avec $m = 2$), associés au correcteur $U^{3,\pm}$. Nous avons¹⁵ sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$:

$$G_1^{2,\pm} = \partial_t \psi^3 + \sum_{j=1}^2 u_j^{0,\pm} \partial_{y_j} \psi^3 + \sum_{j=1}^2 \xi_j \left(u_j^{2,\pm} \partial_\theta \psi^2 + u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^3 \right) + \sum_{j=1}^2 u_j^{1,\pm} \partial_{y_j} \psi^2.$$

En particulier, en appliquant l'opérateur de moyenne sur le tore, il vient (rappelons que ψ^3 est à moyenne nulle) :

$$\widehat{G}_1^{2,\pm}(0) = \sum_{j=1}^2 \xi_j \left(\widehat{u_j^{2,\pm} \partial_\theta \psi^2}(0) + \widehat{u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^3}(0) \right) + \sum_{j=1}^2 \widehat{u_j^{1,\pm} \partial_{y_j} \psi^2}(0). \quad (5.5.139)$$

En utilisant l'expression (5.5.128) (dans laquelle $m = 1$), on écrit, pour $j \in \{1, 2\}$:

$$\widehat{u}_j^{2,\pm}(0, 0, k) = \pm \xi_j c^\pm |k| \widehat{\psi}^3(k) + \widehat{U}_j^{1,\pm}(0, 0, k), \quad \forall Y_3 \geq 0, \quad \forall k \neq 0.$$

On peut donc achever le calcul du terme source $\widehat{G}_1^{2,\pm}(0)$ dans (5.5.139). D'abord, on a :

$$\sum_{j=1}^2 \xi_j \widehat{u_j^{2,\pm} \partial_\theta \psi^2}(0) = \mp i c^\pm \sum_{\ell \neq 0} \ell |\ell| \widehat{\psi}^2(-\ell) \widehat{\psi}^3(\ell) - i \sum_{\ell \neq 0} \ell \widehat{\psi}^2(-\ell) \sum_{j=1}^2 \xi_j \widehat{U}_j^{1,\pm}(0, 0, \ell).$$

Ensuite, on obtient :

$$\sum_{j=1}^2 \xi_j \widehat{u_j^{1,\pm} \partial_\theta \psi^3}(0) = \mp i c^\pm \sum_{\ell \neq 0} \ell |\ell| \widehat{\psi}^2(\ell) \widehat{\psi}^3(-\ell).$$

Enfin, il vient :

$$\sum_{j=1}^2 \widehat{u_j^{1,\pm} \partial_{y_j} \psi^2}(0) = \pm \frac{1}{2} c^\pm \sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_{y_j} \left(\sum_{\ell \neq 0} |\ell| |\widehat{\psi}^2(\ell)|^2 \right).$$

Revenant à (5.5.139), il reste :

$$\widehat{G}_1^{2,\pm}(0) = -i \sum_{\ell \neq 0} \ell \widehat{\psi}^2(-\ell) \sum_{j=1}^2 \xi_j \widehat{U}_j^{1,\pm}(0, 0, \ell) \pm \frac{1}{2} c^\pm \sum_{j=1}^2 \xi_j \partial_{y_j} \left(\sum_{\ell \neq 0} |\ell| |\widehat{\psi}^2(\ell)|^2 \right). \quad (5.5.140)$$

Les termes sources intervenant dans le membre de droite de (5.5.140) semblent être en général non nuls. Par conséquent, la moyenne lente $\underline{U}^{3,\pm}$ associée au second correcteur vérifie le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant (5.5.99) (où $m = 2$), avec des conditions de saut sur Γ *inhomogènes*. Ainsi, le phénomène de rectification va apparaître génériquement dès le second correcteur et donne lieu à la proposition suivante.

¹⁵Utiliser l'expression générale (5.5.13) pour expliciter les termes de "reste" $\mathbb{G}_1^{1,\pm}$ et $\mathbb{G}_2^{1,\pm}$.

Proposition 5.5.3

Soient une nappe plane de référence $U^{0,\pm}$ satisfaisant (H1), une fréquence spatiale ξ' vérifiant (H2), (H3) et une fréquence temporelle $\tau \neq 0$ vérifiant (H4).

Soit $\psi_0^2 \in H^\infty(\mathbb{T}_{y'}^2 \times \mathbb{T}_\theta)$ à moyenne nulle par rapport à sa dernière variable θ , et définissant la perturbation initiale hautement oscillante (5.1.4).

Les données initiales pour le profil principal $U^{1,\pm}$ et les deux premiers correcteurs $U^{2,\pm}, U^{3,\pm}$ sont supposées vérifier (5.2.2).

D'une part, on peut en conclure que les moyennes lentes $\underline{U}^{1,\pm}$ et $\underline{U}^{2,\pm}$ sont identiquement nulles. En d'autres termes, le profil principal $U^{1,\pm}$ et le premier correcteur $U^{2,\pm}$ sont purement localisés près de la frontière libre, car ils n'ont aucune composante dans l'espace \underline{S}^\pm .

D'autre part, les moyennes lentes $(\underline{U}^{3,+}, \underline{U}^{3,-})$, associées au second correcteur $(U^{3,+}, U^{3,-})$, est solution du système linéarisé à coefficients constants des nappes de tourbillon-courant (5.5.99) (où $m = 2$), avec des termes sources en général non nuls, de sorte que les moyennes lentes $(\underline{U}^{3,+}, \underline{U}^{3,-})$ ne peuvent être, en général, identiquement nulles sur $[0, T]$.

5.6 Solutions approchées

Dans cette section, on se concentre sur les solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ dont on rappelle la définition (5.1.8) (où $M \in \{1, \dots, 6\}$). Ces solutions approchées sont dorénavant bien définies en vertu du Théorème 5.2.2. Il convient à présent d'écrire le système d'équations aux dérivées partielles satisfait par ces solutions approchées. Nous allons obtenir un *système approché* du système exact (5.0.1) car il contiendra des termes sources non nuls, mais de "très faible" amplitude. Cependant, ces termes sources seront fortement oscillants en $\frac{1}{\varepsilon}$ du fait de la définition des développements BKW (5.1.5), (5.1.6). Pour prendre en considération ces fortes oscillations, nous introduisons au Paragraphe 5.6.2 un cadre fonctionnel propice aux estimations de normes L^2 de telles fonctions. Avant cela, nous revenons un peu plus en détails sur le redressement des profils $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 1}$ par rapport à la variable normale lente y_3 .

5.6.1 Épaississement du domaine de définition des profils

Dans les Sections 5.4 et 5.5, nous avons déterminé les profils $U^{m,\pm}$, pour $m \geq 1$, en les décomposant de la façon suivante :

$$U^{m,\pm}(t, y, Y_3, \theta) = \underline{U}^{m,\pm}(t, y) + \underline{U}^{m,\pm}(t, y, Y_3) + U_\star^{m,\pm}(t, y, Y_3, \theta).$$

La moyenne lente $\underline{U}^{m,\pm}$ et la moyenne rapide $\underline{U}^{m,\pm}$ ont été déterminées pour tout $y_3 \in I_\pm$, tandis que $U_\star^{m,\pm}$ a d'abord été calculé en $y_3 = 0$, pour ensuite être redressé par rapport à y_3 en multipliant par la fonction de redressement χ (on renvoie au Paragraphe 5.4.4 pour le cas du profil principal, et à l'expression (5.5.128) pour le cas des correcteurs). Nous devons maintenant prêter attention au domaine de définition des profils $U^{m,\pm}$ par rapport à y_3 . En effet, comme nous l'avions remarqué dans la Section 5.1 (on renvoie à la remarque page 113), la définition (5.1.8b) n'a de sens *a priori* que si les profils $U^{m,\pm}$ sont définis sur un intervalle "épaissi" par rapport à y_3 . Plus précisément, dans la définition (5.1.8b) des solutions approchées, nous avons redressé la frontière libre à l'aide du changement de variable $y_3 = x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')$; comme la variable normale x_3 appartient à l'intervalle $[\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), 1]$ pour l'état "+" (resp. $[-1, \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')]$ pour l'état "-"), alors la "nouvelle" variable normale y_3 devra vérifier :

$$\begin{aligned} \text{pour l'état "+"}, \quad y_3 \in I_{+,\varepsilon}^M &:= [0, 1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, y')], \\ \text{pour l'état "-"}, \quad y_3 \in I_{-,\varepsilon}^M &:= [-1 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, y'), 0]. \end{aligned}$$

Il faut donc donner un sens aux profils $U^{m,\pm}$ lorsque $y_3 \notin I_\pm$.

Nous prolongeons en dehors de l'intervalle I_{\pm} les profils $(U^{m,\pm})_{1 \leq m \leq M}$ grâce à un opérateur de prolongement P^{\pm} qui préserve la régularité Sobolev. Pour ce faire, nous utilisons un résultat de [Ste70]. Il existe un opérateur P^{\pm} , tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a les deux propriétés suivantes :

- (i) P^{\pm} est continu de $H^r([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_{\pm} \times \mathbb{R}_{\pm} \times \mathbb{T})$ dans $H^r([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_{\pm} \times \mathbb{R}_{\pm} \times \mathbb{T})$,
- (ii) si $u \in H^r([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times I_{\pm} \times \mathbb{R}_{\pm} \times \mathbb{T})$, alors $(P^{\pm}u)(t, y', y_3, Y_3, \theta) = u(t, y', y_3, Y_3, \theta)$ si $y_3 \in I_{\pm}$.

Pour $m \in \{1, \dots, M\}$, posons :

$$\tilde{U}^{m,\pm} := P^{\pm} U^{m,\pm}.$$

On définit ainsi une “nouvelle” solution approchée $\tilde{U}_{app,\varepsilon}^{M,+}$ (resp. $\tilde{U}_{app,\varepsilon}^{M,-}$), qui est à présent *bien définie* quel que soit $x_3 \in [\psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), 1]$ (resp. $x_3 \in [-1, \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')]$). Les “nouveaux” profils $\tilde{U}^{m,\pm}$ restent solutions de la cascade BKW (5.5.17) en vertu de la propriété (ii) ci-dessus. On se permettra dans la suite d'omettre la notation “ \sim ” pour alléger l'écriture.

5.6.2 Estimations de fonctions “fortement oscillantes”

Du fait de la présence des termes hautement oscillants en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans la définition (5.1.8) des solutions approchées, il conviendra d'évaluer dans L^2 les “ ε -dérivées” $\varepsilon^{|\alpha|} \partial_{t,x}^{\alpha}$ et $\varepsilon^{|\beta|} \partial_{t,x'}^{\beta}$, pour tous multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^4$ et $\beta \in \mathbb{N}^3$. Les domaines sur lesquels nous devons effectuer les estimations L^2 dépendent eux-mêmes du temps $t \in [0, T]$ et du petit paramètre $\varepsilon > 0$. En effet, pour $M \geq 1$ et $t \in [0, T]$, la solution approchée $U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}(t, \cdot)$ donnée par (5.1.8b) est définie dans le *domaine approché* suivant :

$$\Omega_{app,\varepsilon}^{\pm}(t) := \left\{ x \in \mathbb{T}^2 \times (-1, 1) \mid x_3 \gtrsim \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x') \right\}. \quad (5.6.1)$$

On a choisi d'omettre l'entier M dans la définition (5.6.1) car ce dernier sera *fixé* suffisamment grand par la suite. Pour tenir compte également de la variable de temps, on définit le domaine :

$$\Omega_{\varepsilon,T}^{\pm} := \bigcup_{t \in [0, T]} \{t\} \times \Omega_{app,\varepsilon}^{\pm}(t). \quad (5.6.2)$$

Les définitions des normes suivantes s'inspirent de celles utilisées par Marcou [Mar10, Mar11]; on les adapte dans le cas où les domaines spatiaux sont donnés par (5.6.1), c'est-à-dire dépendant du temps et possédant une frontière fortement oscillante.

Définition 5.6.1

Soient $s \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre; on se donne également $M \in \{1, \dots, 6\}$ et $t \in [0, T]$ permettant de définir les domaines approchés (5.6.1). Si $v^{\pm} = v^{\pm}(t, x)$ est une fonction définie sur le domaine $\Omega_{\varepsilon,T}^{\pm}$, on définit la norme $\|v^{\pm}(t)\|_{H_{\varepsilon}^s}$ par :

$$\|v^{\pm}(t)\|_{H_{\varepsilon}^s} := \max_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| \leq s}} \varepsilon^{|\gamma|} \|\partial_x^{\gamma} v^{\pm}(t)\|_{L^2(\Omega_{app,\varepsilon}^{\pm}(t))}. \quad (5.6.3)$$

Pour tenir compte également des dérivées temporelles de v^{\pm} , on définit la norme :

$$\|v^{\pm}(t)\|_{CH_{\varepsilon}^s} := \max_{0 \leq k \leq s} \varepsilon^k \|\partial_t^k v^{\pm}(t)\|_{H_{\varepsilon}^{s-k}} = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^4 \\ |\alpha| \leq s}} \varepsilon^{|\alpha|} \|\partial_{t,x}^{\alpha} v^{\pm}(t)\|_{L^2(\Omega_{app,\varepsilon}^{\pm}(t))}. \quad (5.6.4)$$

La Définition 5.6.1 va nous permettre de manipuler des familles de fonctions fortement oscillantes, et donne lieu à la définition suivante :

Définition 5.6.2

Soient $m, s, M \in \mathbb{N}$, avec $M \in \{1, \dots, 6\}$, et $(v_\varepsilon^\pm)_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ une famille de fonctions définies sur le domaine $\Omega_{\varepsilon, T}^\pm$. On dit que la famille $(v_\varepsilon^\pm)_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ est un $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ dans CH_ε^s si :

$$\exists C > 0, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \|v_\varepsilon^\pm(t)\|_{CH_\varepsilon^s} \leq C \varepsilon^m.$$

En d'autres termes, une telle famille doit vérifier la condition suivante :

$$\exists C > 0, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall |\alpha| \leq s, \quad \varepsilon^{|\alpha|} \|\partial_{t,x}^\alpha v_\varepsilon^\pm(t)\|_{L^2(\Omega_{app,\varepsilon}^\pm(t))} \leq C \varepsilon^m. \quad (5.6.5)$$

Remarque. Étant donné $M \in \{1, \dots, 6\}$ et $t \in [0, T]$, nous serons également amenés à devoir estimer le front approché $\psi_{app,\varepsilon}^M(t, \cdot)$ donné par (5.1.8a). Cette fonction est définie sur la *frontière libre approchée* $\Gamma_{app,\varepsilon}$ donnée par :

$$\Gamma_{app,\varepsilon} := \{x_3 = \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')\}, \quad (5.6.6)$$

où nous avons omis de noter l'entier M comme pour la définition (5.6.1). Afin d'estimer dans L^2 les dérivées de fonctions fortement oscillantes définies sur $\Gamma_{app,\varepsilon}$, il nous faut adapter la Définition 5.6.1. Cela se fait sans peine en remplaçant les domaines spatiaux $\Omega_{app,\varepsilon}^\pm(t)$ par le tore \mathbb{T}^2 .

Définition 5.6.3

Soient $m, s \in \mathbb{N}$ et $(u_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ une famille de fonctions définies sur $[0, T] \times \mathbb{T}^2$. On dit que la famille $(u_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ est un $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ dans CH_ε^s si :

$$\exists C > 0, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall |\beta| \leq s, \quad \varepsilon^{|\beta|} \|\partial_{t,x'}^\beta u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C \varepsilon^m. \quad (5.6.7)$$

Cette définition nous permettra d'estimer des fonctions hautement oscillantes de la forme :

$$u_\varepsilon(t, x') := u\left(t, x', \frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}\right), \quad (t, x') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2.$$

5.6.3 Les équations approchées à l'intérieur du domaine

Dans ce paragraphe, nous écrivons les équations satisfaites par les solutions approchées (5.1.8). Reprenons la forme conservative (5.0.4) du système des nappes de tourbillon-courant et posons, pour simplifier,

$$\phi(U^\pm) := A_0 \partial_t U^\pm + \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} f_j(U^\pm).$$

La solution exacte $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ à laquelle on s'intéressera vérifiera évidemment

$$\phi(U_\varepsilon^\pm)(t, x) = 0, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon^\pm(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

où $\Omega_\varepsilon^\pm(t)$ désigne le domaine "exact" défini par $\Omega_\varepsilon^\pm(t) := \{x_3 \geq \psi_\varepsilon(t, x')\}$. Il convient maintenant de calculer $\phi(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm})$. Il suffit de reprendre la même démarche ayant abouti aux équations de la cascade BKW (5.5.17) au Paragraphe 5.5.1. Les développements en puissances de ε ne sont dès lors plus formels, car tronqués à l'ordre M (resp. $M + 1$) pour $U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}$ (resp. $\psi_{app,\varepsilon}^M$). Ainsi, par construction des profils

$(U^{\ell,\pm}, \psi^{\ell+1})_{1 \leq \ell \leq M}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \phi(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm})(t, x) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^m \left[L_f^\pm(\partial) U^{m+1,\pm} - F^{m,\pm} \right] \left(t, x', x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), \frac{x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \\ & \quad + \varepsilon^M R_\varepsilon^{M,\pm} \left(t, x', x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), \frac{x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

où $R_\varepsilon^{M,\pm}$ est un terme de reste appartenant à l'espace S^\pm . Plus précisément, si l'on pose

$$\tilde{R}_\varepsilon^{M,\pm}(t, x) := R_\varepsilon^{M,\pm} \left(t, x', x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x'), \frac{x_3 - \psi_{app,\varepsilon}^M(t, x')}{\varepsilon}, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right),$$

alors il est clair que $\tilde{R}_\varepsilon^{M,\pm}$ est un $\mathcal{O}(1)$ dans CH_ε^s , pour tout $s \in \mathbb{N}$, comme défini par (5.6.5). Finalement, puisque les profils $(U^{\ell,\pm}, \psi^{\ell+1})_{1 \leq \ell \leq M}$ sont solutions de la cascade BKW (5.5.17), il reste :

$$\phi(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}) = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad (5.6.8a)$$

où le $\mathcal{O}(\varepsilon^M)$ a lieu dans CH_ε^s , pour tout $s \in \mathbb{N}$, conformément à (5.6.5).

N'oublions pas la contrainte (5.5.12b) sur le champ magnétique, que l'on a adjointe à la cascade BKW (5.5.17). Le raisonnement est identique à celui ayant abouti à l'équation (5.6.8a) : il suffit d'en considérer la septième composante correspondant à la contrainte sur la divergence de la vitesse approchée, puis de remplacer $u_{app,\varepsilon}^{M,\pm}$ par $H_{app,\varepsilon}^{M,\pm}$. On obtient :

$$\nabla \cdot H_{app,\varepsilon}^{M,\pm} = \mathcal{O}(\varepsilon^M). \quad (5.6.8b)$$

5.6.4 Les équations approchées près de la frontière libre

On souhaite écrire les conditions de bord sur la frontière libre approchée (dont on rappelle la définition (5.6.6)), que satisfont les solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$. Là encore, la démarche est la même que celle ayant abouti à la cascade BKW (5.5.17) au Paragraphe 5.5.2. On définit le vecteur normal approché $N_{app,\varepsilon}^M$ par :

$$N_{app,\varepsilon}^M := (-\partial_1 \psi_{app,\varepsilon}^M, -\partial_2 \psi_{app,\varepsilon}^M, 1).$$

Nous avons alors pour la vitesse normale approchée :

$$\begin{aligned} & \left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \cdot N_{app,\varepsilon}^M - \partial_t \psi_{app,\varepsilon}^M \right) \Big|_{\Gamma_{app,\varepsilon}} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^{m+1} \left[u_3^{m+1,\pm} - c^\pm \partial_\theta \psi^{m+2} - G_1^{m,\pm} \right] \left(t, x', 0, 0, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \\ & \quad + \varepsilon^{M+1} R_\varepsilon^{M+1,\pm} \left(t, x', 0, 0, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

Le terme de reste dans (5.6.9) correspond à la "double trace" sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ d'une fonction de S^\pm ; si l'on pose

$$\tilde{R}_\varepsilon^{M+1,\pm}(t, x') := R_\varepsilon^{M+1,\pm} \left(t, x', 0, 0, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right),$$

alors on a $\tilde{R}_\varepsilon^{M+1,\pm} = \mathcal{O}(1)$ dans CH_ε^s , pour tout $s \in \mathbb{N}$, au sens de la définition (5.6.7). Maintenant, comme les profils $(U^{\ell,\pm}, \psi^{\ell+1})_{1 \leq \ell \leq M}$ sont solutions de la cascade BKW (5.5.17), il reste :

$$\left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \cdot N_{app,\varepsilon}^M - \partial_t \psi_{app,\varepsilon}^M \right) \Big|_{\Gamma_{app,\varepsilon}^M} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \quad (5.6.10a)$$

dans CH_ε^s , pour tout $s \in \mathbb{N}$. De façon analogue, le champ magnétique normal approché vérifie :

$$\begin{aligned} \left(H_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \cdot N_{app,\varepsilon}^M \right) \Big|_{\Gamma_{app,\varepsilon}^M} &= \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^{m+1} \left[H_3^{m+1,\pm} - b^\pm \partial_\theta \psi^{m+2} - G_2^{m,\pm} \right] \left(t, x', 0, 0, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \varepsilon^{M+1} R_\varepsilon^{M+1,\pm} \left(t, x', 0, 0, \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \end{aligned} \quad (5.6.10b)$$

dans CH_ε^s , pour tout $s \in \mathbb{N}$. Enfin, le saut de la pression approchée est nul car tous les profils $(q^{\ell,\pm})_{1 \leq \ell \leq M}$ ont un saut nul sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ (voir les conditions de bord (5.5.13)) :

$$[q_{app,\varepsilon}^M] = 0, \quad (5.6.10c)$$

où $[\cdot]$ dans (5.6.10c) dénote le saut à travers la frontière libre approchée $\Gamma_{app,\varepsilon}$.

5.6.5 Les équations approchées sur les bords fixes Γ_\pm

Dans cette partie, on reprend les calculs qui ont été menés au Paragraphe 5.5.3. Tout d'abord, en reprenant les expressions (5.5.19), (5.5.20) et (5.5.21), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \right)_3(t, x', \pm 1) & \quad (5.6.11) \\ &= \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \underline{u}_3^{m,\pm} \Big|_{\Gamma_\pm} \\ &\quad + \sum_{m=3}^{M-4} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m,\pm} \Big|_{\Gamma_\pm} \sum_{j=m+2k}^M \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=j-m \\ j_i \geq 2}} (\psi^{j_1} \dots \psi^{j_k})(t, x', \varphi(t, x')/\varepsilon) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}). \end{aligned}$$

On avait ensuite isolé la partie moyennée par rapport à θ de chaque produit $\psi^{j_1} \dots \psi^{j_k}$ en décomposant ce dernier en série de Fourier :

$$\begin{aligned} (\psi^{j_1} \dots \psi^{j_k})(t, x', \theta) &= \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=0 \\ n_i \neq 0}} \widehat{\psi}^{j_1}(t, x', n_1) \dots \widehat{\psi}^{j_k}(t, x', n_k) + \sum_{n \neq 0} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=n \\ n_i \neq 0}} \widehat{\psi}^{j_1}(t, x', n_1) \dots \widehat{\psi}^{j_k}(t, x', n_k) e^{in \frac{\theta}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Revenons à l'expression (5.6.11) de $\left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \right)_3(t, x', \pm 1)$: on peut la décomposer en une partie moyennée par rapport à θ (à savoir l'expression à la ligne (5.6.12) ci-dessous), puis en une partie contenant tous les modes de Fourier $n \neq 0$ (à savoir l'expression à la ligne (5.6.13) ci-dessous), cette dernière partie n'ayant pas été considérée lors des calculs au Paragraphe 5.5.3 :

$$\begin{aligned} \left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm} \right)_3(t, x', \pm 1) &= \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left[\underline{u}_3^{m,\pm} \Big|_{\Gamma_\pm} - \mathfrak{h}_1^{m-4,\pm} \right] \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{m=3}^{M-4} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{y_3}^k \underline{u}_3^{m,\pm} \Big|_{\Gamma_\pm} \\ &\quad \times \sum_{j=m+2k}^M \varepsilon^j \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=j-m \\ j_i \geq 2}} \sum_{n \neq 0} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=n \\ n_i \neq 0}} \widehat{\psi}^{j_1}(n_1) \dots \widehat{\psi}^{j_k}(n_k) \exp \left(in \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

Par construction des vitesses lentes $\underline{u}_3^{m,\pm}$, la somme donnée par (5.6.12) est nulle (voir les conditions de bord (5.5.24)). L'expression de la somme (5.6.13) n'est en soi pas fondamentale, il suffit de remarquer que le développement en puissances de ε commence à l'ordre 5 (pour $m = 3$ et $k = 1$). Cela reste cohérent avec les résultats obtenus au Paragraphe 5.5.3, car on tient compte ici des modes de Fourier *non nuls* dont la contribution intervient dès l'ordre 5 ; la contribution provenant des modes de Fourier 0 intervient, quant à elle, seulement à partir de l'ordre 7 (comme vu au Paragraphe 5.5.3), en vertu du degré de liberté dont on dispose sur les moyennes $(\widehat{\psi}^\ell(0))_{\ell \geq 2}$, que l'on choisit *nulles*. On obtient ainsi une expression de la forme :

$$\left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm}\right)_3(t, x', \pm 1) = \varepsilon^5 R_\varepsilon^{5,\pm}\left(t, x', \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon}\right),$$

où $R_\varepsilon^{5,\pm} \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$. En posant $\widetilde{R}_\varepsilon^{5,\pm}(t, x') := R_\varepsilon^{5,\pm}\left(t, x', \frac{\tau t + \xi' \cdot x'}{\varepsilon}\right)$, nous avons $\widetilde{R}_\varepsilon^{5,\pm} = \mathcal{O}(1)$ dans CH_ε^s , pour tout $s \in \mathbb{N}$, au sens de la définition (5.6.7). Finalement, on obtient :

$$\left(u_{app,\varepsilon}^{M,\pm}\right)_3(t, x', \pm 1) = \mathcal{O}(\varepsilon^5). \quad (5.6.14a)$$

Ce raisonnement est également valable pour le champ magnétique. Ainsi, en utilisant les conditions de bord (5.5.25), on peut écrire :

$$\left(H_{app,\varepsilon}^{M,\pm}\right)_3(t, x', \pm 1) = \mathcal{O}(\varepsilon^5). \quad (5.6.14b)$$

5.6.6 Le système approché des nappes de tourbillon-courant

On peut maintenant écrire le système approché satisfait par les solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$, pour $M \in \{1, \dots, 6\}$. Nous combinons pour ce faire les résultats (5.6.8), (5.6.10) et (5.6.14), ce qui aboutit au système suivant (dans lequel on a omis l'indice ε et l'exposant M afin d'alléger l'écriture) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_{app}^\pm + (u_{app}^\pm \cdot \nabla) u_{app}^\pm - (H_{app}^\pm \cdot \nabla) H_{app}^\pm + \nabla q_{app}^\pm = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \\ \partial_t H_{app}^\pm + (u_{app}^\pm \cdot \nabla) H_{app}^\pm - (H_{app}^\pm \cdot \nabla) u_{app}^\pm = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \\ \nabla \cdot u_{app}^\pm = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad \nabla \cdot H_{app}^\pm = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad \text{dans } \Omega_{app}^\pm(t), \quad t \in [0, T], \\ u_{app}^\pm \cdot N_{app} - \partial_t \psi_{app} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \\ H_{app}^\pm \cdot N_{app} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}), \\ [q_{app}] = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{app}(t), \quad t \in [0, T], \\ (u_{app}^\pm)_3 = 0, \quad (H_{app}^\pm)_3 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\pm. \end{array} \right. \quad (5.6.15)$$

Notons que les $\mathcal{O}(\varepsilon^M)$ dans (5.6.15) ont lieu dans CH_ε^s (pour tout s), au sens de la définition (5.6.5). En revanche, les $\mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$ dans (5.6.15) ont lieu dans CH_ε^s (pour tout s) au sens de la définition (5.6.7).

Remarque. Pour $M \geq 7$, si on parvient à construire une solution approchée $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$, alors les conditions de bord sur Γ_\pm dans (5.6.15) ne sont plus homogènes, car elles apportent une contribution en $\mathcal{O}(\varepsilon^5)$ en vertu de (5.6.13).

La normalisation sur la pression approchée $q_{app,\varepsilon}^{M,\pm}$ provient de (5.5.28), et s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\Omega_{app,\varepsilon}^+(t)} q_{app,\varepsilon}^{M,+}(t, x) dx + \int_{\Omega_{app,\varepsilon}^-(t)} q_{app,\varepsilon}^{M,-}(t, x) dx = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}).$$

Ceci conclut cette partie sur l'établissement du système approché (5.6.15). Il restera par la suite à démontrer que les solutions "approchées" $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ sont effectivement proches de la solution exacte du système des nappes de tourbillon-courant (5.0.1), dans une topologie adéquate. Ce résultat de stabilité des solutions approchées pourra faire l'objet d'une nouvelle piste de recherche dans la continuité des résultats établis dans ce chapitre.

Conclusion et perspectives

La première partie de cette thèse consistait en la construction de solutions analytiques au problème des nappes de tourbillon-courant en MHD idéale incompressible. L’approche abordée visait à utiliser un théorème de Cauchy-Kowalevskaya pour exhiber une solution analytique locale en temps.

Les équations de la MHD idéale incompressible. Comme nous l’avons vu au Chapitre 3, l’application directe de ce théorème a été possible sur le cas des équations de la MHD idéale incompressible (3.0.1) (*i.e.* le cas “sans nappe”). L’étape clé consistait en l’estimation de la pression dans l’échelle d’espaces de Banach introduite au Chapitre 2. On rappelle que la pression s’obtenait implicitement en fonction de la vitesse et du champ magnétique *via* la résolution d’un problème de Laplace. Deux questions se posaient alors : à quelle(s) condition(s) peut-on résoudre ce problème de Laplace ? dans ce cas, quelles estimations d’énergie vérifie la solution et comment peut-on l’estimer dans l’échelle de régularité analytique ?

Pour résoudre le problème de Laplace (3.1.4), nous avons vu que le terme source g dans (3.1.4) devait vérifier une *condition de compatibilité* (dans ce cas précis, cette condition consiste en la nullité de la moyenne de g sur le domaine spatial Ω). Sous cette condition de compatibilité, on disposait alors d’une estimation de régularité elliptique sur la pression, que l’on a ensuite étendue aux espaces de Banach définis au Chapitre 2, ce qui a donné lieu à la Proposition 3.1.6.

Revenant au système de la MHD idéale incompressible (3.0.1), la résolution du problème de Laplace (3.2.2), dont le terme source est donné par (3.2.4), nécessitait les *contraintes de divergence nulle* et les *conditions de bord* sur la vitesse et le champ magnétique pour que le terme source soit compatible. Afin d’appliquer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya, nous avons donc dû incorporer ces contraintes au sein des espaces fonctionnels, ce qui a été possible car ce sont des contraintes *linéaires* qui *préservent* les espaces fonctionnels mis en jeu. Nous avons vu que le gradient de pression dans (3.0.1) jouait le rôle d’une *semi-linéarité* car on gagnait un indice de régularité Sobolev par rapport à la vitesse et au champ magnétique. Une fois munis des “bons” espaces de Banach et de l’estimation analytique sur la pression, l’application du théorème de Cauchy-Kowalevskaya pouvait se faire sans difficulté majeure et a donné lieu au Théorème 3.2.5. On rappelle que ce théorème est loin d’être optimal du point de vue de la régularité des solutions ; le but était de comprendre comment on pouvait donner des estimations analytiques sur les équations de la MHD en utilisant l’échelle d’espaces de Banach définis au Chapitre 2.

Nappes de tourbillon-courant analytiques. Le cas des nappes de tourbillon-courant devient plus délicat, car il s’agit d’un problème *couplé* et à *frontière libre*. Une première étape consistait à redresser convenablement le front afin de se ramener à des domaines *fixes*. Le deuxième point auquel nous nous sommes attardés est l’étude du problème de Laplace couplé (4.2.6) devant être satisfait par la pression. De la même manière qu’au Chapitre 3, la résolution de ce problème de Laplace nécessite la condition de compatibilité (4.2.9) sur les termes sources. Celle-ci est satisfaite dès lors que la vitesse v^\pm , le champ magnétique B^\pm et le front f vérifient les contraintes de “divergence” et les conditions de saut suivantes pour tout $t \in [0, T]$ (on renvoie au système (4.2.4)) :

$$\begin{cases} (A^T \nabla) \cdot v^\pm = (A^T \nabla) \cdot B^\pm = 0, & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \partial_t f = v^\pm \cdot N, \quad B^\pm \cdot N = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.0.1)$$

Lorsque les contraintes (6.0.1) sont satisfaites, le problème de Laplace (4.2.6) admet une unique solution à moyenne nulle sur le domaine Ω , qui de surcroît vérifie l’estimation de régularité elliptique (4.2.11) obtenue dans [CMST12].

Dans l’optique d’appliquer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya, nous avons dû à ce stade donner des estimations analytiques sur le redressement du front et sur la pression. Ce dernier point s’avérait délicat en raison de la présence des coefficients *variables* dépendant du front *inconnu* dans l’opérateur elliptique du système (4.2.6). La définition intrinsèque de la norme des espaces de Banach $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^\pm)$, dont on rappelle la Définition 2.3.9, a permis d’estimer les dérivées *tangentielles* de la pression d’une part, puis les dérivées *normales* par récurrence. Nous avons alors abouti au Théorème 4.5.1 sur l’estimation de la pression Q^\pm dans $B_{\rho,3,\sigma}(\Omega^\pm)$ lorsque les paramètres ρ et σ sont suffisamment petits.

Les contraintes de “divergence” dans (6.0.1) n’étant pas linéaires, nous avons reformulé notre problème en introduisant les nouvelles inconnues (u^\pm, b^\pm, f) définies par (4.2.12), en s’inspirant des travaux de Trakhinin [Tra05, Tra09]. L’avantage de ces nouvelles inconnues est que l’on a pu réécrire les contraintes (6.0.1) en des expressions linéaires (4.2.14). Néanmoins, contrairement à ce qui a été fait au Chapitre 3, on n’a pas pu appliquer directement le théorème de Cauchy-Kowalevskaya en incorporant ces contraintes au sein des espaces fonctionnels $B_{\rho,r,\sigma}(\Omega^\pm)$, notamment en raison du front qui est défini par l’équation de transport :

$$\forall (t, x') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2, \quad \partial_t f(t, x') = u_3^\pm(t, x', 0).$$

La démarche proposée est de s’inspirer de la preuve du théorème de Cauchy-Kowalevskaya établie par Baouendi et Goulaouic [BG78].

Cette preuve repose sur la construction d’un espace de Banach \mathbb{E}_a et d’une application Υ qui est contractante sur un *sous-ensemble fermé* de \mathbb{E}_a , dès lors que la paramètre $a > 0$ est choisi suffisamment petit. Dans la Section 4.3, nous avons défini une application Υ par (4.3.2) et nous avons vu qu’elle préservait les contraintes algébriques (4.3.1). Le travail qu’il restera à poursuivre est de démontrer que Υ admet un point fixe, en s’inspirant des arguments de [BG78]. La première question est de savoir si Υ laisse invariant un sous-ensemble convenable de l’espace \mathbb{E}_a que l’on a défini par (4.6.18), ce qui reposera sur une propriété similaire à l’hypothèse (3.2.9) énoncée dans le Théorème 3.2.2. Ensuite, nous devons montrer que Υ est contractante, en utilisant une estimation “lipschitzienne” similaire à la seconde hypothèse (3.2.10) du Théorème 3.2.2.

Quelques pistes ont été données à la Section 4.6. Nous avons commencé par donner une estimation “lipschitzienne” sur la pression grâce à la Proposition 4.6.1. Enfin, nous nous sommes attardés sur le front f qui est le terme le plus délicat dans les équations (4.2.15) car il fait intervenir des dérivées **d’ordre deux** : ces termes n’entrent pas directement dans le cadre du Théorème 3.2.2, et il nous faut donc adapter la preuve de [BG78] en estimant convenablement ces dérivées d’ordre deux. Nous avons vu comment on pouvait estimer les dérivées tangentielles *d’ordre au plus 1* du front dans l’espace $B_{\rho, \frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$, puis les dérivées tangentielles *d’ordre 2* dans l’espace E_a défini en (4.6.14). Les estimations (4.6.23), (4.6.27) et (4.6.28) constitueraient un point de départ raisonnable pour adapter les arguments de [BG78].

Nappes de tourbillon-courant de régularité Sobolev. Comme l’ont démontré récemment Sun *et al.* [SWZ15], le problème des nappes de tourbillon-courant est localement bien posé dans l’échelle de régularité Sobolev. Une fois que l’on aurait démontré l’existence de nappes de tourbillon-courant analytiques, la question naturelle qui se pose serait de retrouver le résultat de [SWZ15] par une méthode de compacité, en approchant des données initiales de régularité Sobolev par des données initiales analytiques (en vertu du Théorème 2.3.7).

Comme pour le Théorème 3.2.5 établi au Chapitre 3, la solution analytique de (4.2.4) serait définie sur un intervalle de temps dépendant de la taille des données initiales dans l’échelle *analytique*. On peut alors avoir un temps d’existence qui se restreint lorsque les données initiales deviennent grandes dans les espaces $B_{\rho_0,3,\sigma}(\Omega^\pm)$ et $B_{\rho_0,\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^2)$ (où ρ_0 représente ici le rayon d’analyticité des données initiales).

Le résultat d’estimation *a priori* établi dans [CMST12] serait ensuite un point de départ pour démontrer, par un argument de compacité, l’existence et l’unicité de solutions au problème des nappes de tourbillon-courant lorsque l’on considère à présent des données initiales dans un certain espace de Sobolev.

Pour cela, on approcherait les données initiales (u_0^\pm, b_0^\pm, f_0) (supposées de régularité Sobolev) par une suite de données initiales analytiques $(u_0^{\pm,n}, b_0^{\pm,n}, f_0^n)_{n \geq 0}$, grâce à la densité des espaces $B_{\rho,r,\sigma}$ dans H^r (on renvoie au Théorème 2.3.7 du Chapitre 2). L’unique solution analytique associée $(u^{\pm,n}, b^{\pm,n}, Q^{\pm,n}, f^n)$ possède alors un rayon d’analyticité $\rho^n = \rho^n(t)$, risquant de tendre vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour remédier à cet obstacle, il suffirait d’exhiber une borne inférieure sur les quantités $\rho^n(t)$, ne dépendant **que** d’une **norme Sobolev** de la solution. Ainsi, on pourrait propager l’analyticité des solutions sur un intervalle de temps qui ne dépendrait plus que de la norme Sobolev des solutions. Cette dernière n’explose pas lorsque l’on fait tendre n vers $+\infty$, ce qui permet d’avoir une borne inférieure strictement positive sur le temps d’existence des solutions.

Pour des résultats de propagation de l’analyticité des solutions aux équations d’Euler incompressibles, on pourra se référer par exemple à [BB77, AM86] et plus récemment à [LO97, KV09, KV11b, KV11a].

Ondes de surface pour les nappes de tourbillon-courant. La deuxième partie de cette thèse consistait à étudier le *comportement qualitatif* des solutions exactes du système (5.0.1) issues de données initiales de *faible amplitude* et *fortement oscillantes*. À l’aide d’outils issus de l’optique géométrique, nous avons vu que pour des phases d’oscillation bien particulières (c’est-à-dire, dans notre cas, des racines du déterminant de Lopatinskii (5.3.16)), la solution présente une structure d’*onde de surface* : elle est localisée près de la frontière libre, oscille aux mêmes fréquences que la donnée initiale, et décroît exponentiellement par rapport à la variable normale à la nappe.

Nous avons cherché à approcher une solution *exacte* $(U_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon)$ du système (5.0.1) sous la forme de développements BKW donnés par (5.1.5) et (5.1.6). Le premier enjeu consistait en la détermination du profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$, qui repose intimement sur les propriétés de stabilité du système linéarisé. Comme nous l’avons rappelé, ce dernier est dit *faiblement bien posé* car il vérifie la condition de Lopatinskii *simple* mais *non uniforme*. Plus précisément, le déterminant de Lopatinskii s’annule en des fréquences dites *elliptiques*, ce qui donne lieu à la formation d’ondes de surface.

Le profil principal $U^{1,\pm}$ a pu être déterminé en résolvant le problème rapide *homogène* (5.2.3a), et on a montré que $U^{1,\pm}$ pouvait s’exprimer en fonction du profil principal ψ^2 associé au front uniquement. La détermination de ce profil ψ^2 provient d’un critère nécessaire à la résolution du problème que doit satisfaire le premier correcteur $(U^{2,\pm}, \psi^3)$. Grâce à une *condition d’orthogonalité* de type “alternative de Fredholm”, nous avons établi que ψ^2 devait être solution d’une équation non-linéaire non-locale de type Hamilton-Jacobi. À ce stade, nous avons obtenu le profil principal $(U^{1,\pm}, \psi^2)$.

La démarche permettant de déterminer les correcteurs $(U^{m,\pm}, \psi^{m+1})_{m \geq 2}$ a ensuite été généralisée grâce à la Proposition 5.5.1, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes permettant de résoudre le problème rapide *inhomogène* (5.2.3b). Lors du calcul du coefficient de Fourier d’ordre 0 de $U^{m,\pm}$, que l’on décompose en moyenne lente et moyenne rapide grâce à la définition (5.2.1), une difficulté apparaît

dans la détermination de la moyenne lente $\underline{U}^{m,\pm}$. En effet, celle-ci doit satisfaire le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant (5.5.99) *inhomogène* (dans lequel $m+1$ joue le rôle de m). Les contraintes de divergence sur la vitesse et le champ magnétique dans (5.5.99) requièrent des *conditions de compatibilité* sur les termes sources. Lorsque $m \leq 6$, nous avons pu démontrer que ces conditions sont bien satisfaites dès lors que l'on redresse les profils $(U_{\star}^{j,\pm})_{j \leq m}$ *indépendamment* de la variable normale lente y_3 (on rappelle les notations (5.2.1)).

Cette obstruction technique nous limite à des solutions approchées $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$, dont on rappelle la définition (5.1.8), d'ordre $M \leq 6$. L'obtention de solutions approchées à *tout ordre* $M \in \mathbb{N}^*$ pourra constituer une piste de recherche future. Pour ce faire, il faudrait pouvoir vérifier les conditions de compatibilités (5.5.100) pour tout entier $m \geq 0$. La difficulté réside dans le fait que les termes sources associés aux bords fixes Γ_{\pm} dans (5.5.99) sont relativement complexes. Pour éventuellement palier à cette difficulté, on pourrait s'interroger quant à la pertinence de l'espace fonctionnel S^{\pm} dans lequel on a choisi de travailler (on renvoie à la Définition 5.2.1). Pour affiner le développement asymptotique, une possibilité serait de considérer dans \underline{S}^{\pm} des fonctions dépendant aussi de la variable tangentielle rapide θ . Il faudrait alors reprendre les étapes à partir de la Section 5.4 en tenant compte à présent de *tous* les modes de Fourier de la composante dans \underline{S}^{\pm} des profils $U^{m,\pm}$.

À ce stade, nous avons donc montré que les solutions dites "approchées" $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$ vérifient le système approché (5.6.15). Un nouvel axe de recherche, dans la continuité du Chapitre 5, consisterait à démontrer que ces solutions sont effectivement proches de la solution exacte du système des nappes de tourbillon-courant (5.0.1), dans une topologie adéquate. Pour attaquer ce problème de **stabilité** des solutions approchées, on pourrait envisager d'exploiter les résultats de [SWZ15] pour obtenir des estimations d'énergie sur $(U_{app,\varepsilon}^{M,\pm}, \psi_{app,\varepsilon}^M)$. La difficulté est d'incorporer des termes de faible amplitude et hautement oscillants dans les équations de (5.0.1), pour ensuite les estimer dans des espaces fonctionnels *ad hoc*. Une première piste serait d'adapter la méthode de Leray-Gårding [Går56] fournissant des estimations d'énergie pour les équations hyperboliques *scalaires*, en combinant le résultat de Guès [Guè92] (puis revisité par Métivier [Mét09] ainsi que Marcou [Mar10]) sur les *systèmes* hyperboliques à coefficients de faible amplitude et hautement oscillants.



Détails algébriques et calculs

Dans toute la suite de cette annexe, nous omettons les exposants \pm pour alléger les notations. Les états $U^{0,\pm}$ définissant la nappe plane (5.1.1) seront simplement notés $U = (u, H, q)$, et on supposera qu'ils satisfont l'hypothèse de stabilité (H1).

A.1 Matrices et noyaux

On commence par expliciter les matrices jacobiennes A_j définies en (5.3.3), en utilisant l'expression des fonctions f_j données par (5.0.2). On rappelle que l'on s'est fixé $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|\xi'| = 1$ et $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ une fréquence satisfaisant les hypothèses (H2), (H3), (H4).

Les matrices jacobiennes A_j s'écrivent comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2u_1 & 0 & 0 & -2H_1 & 0 & 0 & 1 \\ u_2 & u_1 & 0 & -H_2 & -H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & -H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_1 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 & 0 & -H_2 & -H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2u_2 & 0 & 0 & -2H_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & -H_2 & 0 \\ -H_2 & H_1 & 0 & u_2 & -u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_2 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & -H_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & -H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & -u_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En particulier, on constate que A_3 n'est pas inversible : le problème des nappes de tourbillon-courant incompressibles est dit *caractéristique*. Le noyau de la matrice $i\mathcal{A} - A_3$ permet de déterminer les modes propres en $\exp(\pm Y_3)$ du système différentiel

$$A_3 \frac{dU}{dY_3} + i\mathcal{A}U = 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad (\text{A.1.1})$$

que l'on a dû résoudre à la Section 5.4 pour déterminer le profil principal U^1 . Rappelons que la matrice \mathcal{A} est définie par (5.3.3) :

$$\mathcal{A} = \tau A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2;$$

rappelons aussi la définition des paramètres a , b et c donnés par (5.1.2), (5.3.5) :

$$a = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2, \quad b = \xi_1 H_1 + \xi_2 H_2, \quad c = \tau + a.$$

La matrice $i\mathcal{A} - A_3$ s'écrit :

$$i\mathcal{A} - A_3 = \begin{bmatrix} i(c + \xi_1 u_1) & i\xi_2 u_1 & -u_1 & -i(b + \xi_1 H_1) & -i\xi_2 H_1 & H_1 & i\xi_1 \\ i\xi_1 u_2 & i(c + \xi_2 u_2) & -u_2 & -i\xi_1 H_2 & -i(b + \xi_2 H_2) & H_2 & i\xi_2 \\ 0 & 0 & ic & 0 & 0 & -ib & -1 \\ -i\xi_2 H_2 & i\xi_2 H_1 & -H_1 & i(\tau + \xi_2 u_2) & -i\xi_2 u_1 & u_1 & 0 \\ i\xi_1 H_2 & -i\xi_1 H_1 & -H_2 & -i\xi_1 u_2 & i(\tau + \xi_1 u_1) & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & -ib & 0 & 0 & ic & 0 \\ i\xi_1 & i\xi_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsque l'on procède à une analyse modale avec comme paramètre de Laplace $z := \tau - i\gamma$ ($\gamma > 0$) et comme paramètre de Fourier $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on montre que le système linéarisé des nappes de tourbillon-courant incompressibles (A.1.1) possède un sous-espace stable $E_s(z, \xi')$ de dimension 1 (la matrice \mathcal{A} est alors $zA_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$). Plus précisément, le noyau de la matrice $i\mathcal{A} - A_3$ est de dimension 1, aussi bien pour l'état “+” que pour l'état “-”. En considérant la limite $\gamma \rightarrow 0$, nous allons vouloir prolonger¹ le sous-espace stable $E_s(\tau - i.0, \xi')$ tout en conservant le fait que ce sous-espace est de dimension 1. Comme nous l'avons évoqué au début du Paragraphe 5.4.1, les solutions du système (A.1.1) sont dans ce cas des combinaisons linéaires des deux fonctions exponentielles $e^{\pm Y_3}$. Ce résultat a été obtenu grâce au problème de Laplace (5.3.14) satisfait par la pression. Toutefois, il faut noter que pour aboutir à ce système, nous avons utilisé les deux contraintes de divergence nulle sur la vitesse **et** sur le champ magnétique. Or, pour certains choix des paramètres τ , a et b , il se peut que la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique ne soit pas satisfaite, et/ou la dimension du noyau de $i\mathcal{A} - A_3$ peut devenir strictement supérieure à 1. Ces cas “pathologiques” pour les paramètres τ , a et b seront donc à écarter. En choisissant convenablement ces paramètres, nous aurons alors encore un sous-espace stable $E_s(\tau, \xi')$ de dimension 1, ce qui nous donnera au final une “droite” d'ondes de surface.

Cas 1. Lorsque $\tau \neq 0$ et $c^2 \neq b^2$, on montre que $\text{Ker}(i\mathcal{A} - A_3)$ est de dimension 1, et engendré par le vecteur

$$\mathbf{R} := (\xi_1 c, \xi_2 c, ic, \xi_1 b, \xi_2 b, ib, b^2 - c^2) \in \mathbb{C}^7. \quad (\text{A.1.2})$$

¹On renvoie par exemple à [BGS07] et ses références pour plus de détails sur le prolongement du sous-espace stable lorsque le système est **hyperbolique**.

En particulier, on obtient une généralisation du résultat de Alì et Hunter [AH03] qui traitent ce même problème en dimension 2 d'espace. De plus, on montre que l'on peut récupérer la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique : si $\widehat{U} := (\widehat{v}, \widehat{B}, \widehat{q}) \in \text{Ker}(i\mathcal{A} - A_3)$, alors le champ magnétique \widehat{B} satisfait automatiquement la contrainte $\xi_1 \widehat{B}_1 + \xi_2 \widehat{B}_2 + i\widehat{B}_3 = 0$, tout comme la vitesse \widehat{v} qui vérifie la contrainte $\xi_1 \widehat{v}_1 + \xi_2 \widehat{v}_2 + i\widehat{v}_3 = 0$. Le cas où $\tau = 0$ (*i.e.* $c = a$) est plus délicat. La condition $a^2 \neq b^2$ ne suffit plus à avoir un noyau de dimension 1, car lorsque $a \neq 0$ et $b = 0$ le noyau de $i\mathcal{A} - A_3$ est de dimension 2. Afin que celui-ci soit de dimension 1, il faut en plus supposer $b \neq 0$.

Cas 2. Lorsque $\tau = 0$, $a^2 \neq b^2$ et $b \neq 0$, $\text{Ker}(i\mathcal{A} - A_3)$ est engendré par le même vecteur \mathbf{R} donné par (A.1.2), dans lequel c est remplacé par a , et on peut encore récupérer automatiquement la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique.

Récapitulons : si $\tau \neq 0$ et $c^2 \neq b^2$, **ou** si $\tau = 0$, $a^2 \neq b^2$ et $b \neq 0$, alors $\text{Ker}(i\mathcal{A} - A_3)$ est de dimension 1, et on a la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. Dans tous les autres cas de figure, le noyau de $i\mathcal{A} - A_3$ est de dimension au moins 2. Nous ne nous placerons donc pas dans ce cadre.

Nous aurons également besoin du problème dual

$$-{}^t A_3 \frac{dV}{dY_3} - i{}^t \mathcal{A} V = 0, \quad Y_3 \geq 0. \quad (\text{A.1.3})$$

On considère pour cela le sous-espace $\text{Ker}(i{}^t \mathcal{A} - {}^t A_3)$.

Cas 1 ($\tau \neq 0$ et $c^2 \neq b^2$). Le noyau $\text{Ker}(i{}^t \mathcal{A} - {}^t A_3)$ est de dimension 1 (même dimension que le noyau de la matrice transposée), et on montre qu'il est engendré par le vecteur

$$\mathbf{L} := (\tau \xi_1, \tau \xi_2, i\tau, 2\xi_1 b, 2\xi_2 b, 2ib, -\tau(c+a)) \in \mathbb{C}^7. \quad (\text{A.1.4})$$

Cas 2 ($\tau = 0$, $a^2 \neq b^2$ et $b \neq 0$). Nous avons encore $\text{Ker}(i{}^t \mathcal{A} - {}^t A_3)$ de dimension 1, et cet espace est engendré par le vecteur

$$\mathbf{L}' := (0, 0, 0, \xi_1, \xi_2, i, 0),$$

c'est-à-dire engendré par le vecteur $\frac{\mathbf{L}}{2b}$ de (A.1.4) évalué en $\tau = 0$. Ce cas devient un peu plus problématique lorsque l'on souhaite dériver l'équation d'amplitude satisfaite par le profil principal ψ^2 au Paragraphe 5.4.3. En effet, comme nous l'avons vu lors de l'établissement de la formule de dualité (5.4.63), le déterminant de Lopatinskii dual Δ^* possède une racine *double* en $\tau = 0$, ce qui est gênant lorsque l'on souhaite parvenir à l'équation d'amplitude (5.4.100) vérifiée par le profil principal ψ^2 associé au front. Toutefois, pour palier à cet obstacle, nous allons voir que l'on peut toujours se ramener au cas $\tau \neq 0$ en procédant à un changement de référentiel galiléen.

On récapitule ici les contraintes sur la fréquence spatiale ξ' qui permettent d'être dans les "bons" cas où $\text{Ker}(i\mathcal{A} - A_3)$ est de dimension 1 (à la fois pour l'état "+" et pour l'état "-") :

$$\text{soit } \tau \neq 0 \text{ et } (c^\pm)^2 \neq (b^\pm)^2, \quad (\text{C1})$$

$$\text{soit } \tau = 0, (a^\pm)^2 \neq (b^\pm)^2 \text{ et } b^\pm \neq 0. \quad (\text{C2})$$

Changement de référentiel galiléen. Afin de se ramener au cas (C1) pour l'analyse du système (A.1.1) et du système dual (A.1.3), on utilise l'invariance du problème des nappes de tourbillon-courant (5.0.1) par changement de référentiel galiléen ; et pour cause, l'hypothèse de stabilité (H1) sur la nappe plane de référence $U^{0,\pm}$ ne fait intervenir que *le saut* de la vitesse au niveau de l'interface plane, qui est donc inchangé en procédant à une translation de vitesse. Posons

$$\tilde{u}^{0,+} := \frac{1}{2}[u^0], \quad \tilde{u}^{0,-} := -\frac{1}{2}[u^0] \quad \text{et} \quad v := \frac{u^{0,+} + u^{0,-}}{2},$$

de sorte que $u^{0,\pm} = \tilde{u}^{0,\pm} + v$. Notons que la composante normale v_3 est nulle, de sorte que la variable x_3 est inchangée dans les nouvelles inconnues $(\tilde{u}^\pm, \tilde{H}^\pm, \tilde{q}^\pm)$ définies ci-dessous. On pose :

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\pm(t, x) &:= u^\pm(t, x - vt) + v, & \tilde{H}^\pm(t, x) &:= H^\pm(t, x - vt), \\ \tilde{q}^\pm(t, x) &:= q^\pm(t, x - vt), & \tilde{\psi}(t, x') &:= \psi(t, x' - v't),\end{aligned}$$

où v' désigne la composante tangentielle (v_1, v_2) de v . On peut facilement vérifier que $(u^\pm, H^\pm, q^\pm, \psi)$ est solution du système (5.0.1) si et seulement si $(\tilde{u}^\pm, \tilde{H}^\pm, \tilde{q}^\pm, \tilde{\psi})$ l'est également. On cherche donc un développement asymptotique en puissance de ε de la solution exacte \tilde{U}^\pm sous la forme

$$\tilde{U}^\pm \sim \tilde{U}^{0,\pm} + \sum_{m \geq 1} \varepsilon^m \tilde{U}^{m,\pm},$$

où la nouvelle nappe plane de référence $\tilde{U}^{0,\pm}$ est donnée par $\tilde{U}^{0,\pm} := (\tilde{u}^{0,\pm}, H^{0,\pm}, 0)$. Dans ce cas, les nouveaux paramètres \tilde{a}^\pm correspondants sont :

$$\begin{aligned}\tilde{a}^+ &:= \xi_1 \tilde{u}_1^{0,+} + \xi_2 \tilde{u}_2^{0,+} = \frac{a^+ - a^-}{2}, \\ \tilde{a}^- &:= \xi_1 \tilde{u}_1^{0,-} + \xi_2 \tilde{u}_2^{0,-} = \frac{a^- - a^+}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, la nouvelle fréquence temporelle $\tilde{\tau}$ est donnée par

$$\tilde{\tau} := \tau + \frac{a^+ + a^-}{2}.$$

En effet, nous réécrivons l'égalité $(c^+)^2 + (c^-)^2 = (b^+)^2 + (b^-)^2$ provenant de l'annulation du déterminant de Lopatinskii (5.3.16) comme suit :

$$\left(\underbrace{\tau + \frac{a^+ + a^-}{2}}_{\tilde{\tau}} + \underbrace{\frac{a^+ - a^-}{2}}_{\tilde{a}^+} \right)^2 + \left(\tau + \frac{a^+ + a^-}{2} + \underbrace{\frac{a^- - a^+}{2}}_{\tilde{a}^-} \right)^2 = (b^+)^2 + (b^-)^2.$$

De plus, les nouveaux paramètres \tilde{b}^\pm et \tilde{c}^\pm sont inchangés :

$$\begin{aligned}\tilde{b}^\pm &:= b^\pm, \\ \tilde{c}^\pm &:= \tilde{\tau} + \tilde{a}^\pm = \tau + \frac{a^+ + a^-}{2} \pm \frac{a^+ - a^-}{2} = \tau + a^\pm = c^\pm.\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on se place dans le cas (C2), alors nous allons voir que l'on peut se ramener au cas (C1) en montrant que $\tilde{\tau} \neq 0$ et $(\tilde{c}^\pm)^2 \neq (\tilde{b}^\pm)^2$.

► On peut d'abord voir que $\tilde{\tau} \neq 0$. En effet, on aurait dans le cas contraire $a^+ + a^- = 0$. Mais alors, l'annulation du déterminant de Lopatinskii (5.3.16) nous donne d'une part la relation

$$2(a^+)^2 = (b^+)^2 + (b^-)^2.$$

D'autre part, sous l'hypothèse de stabilité (H1) (qui est **inchangée** car $[u^0] = [\tilde{u}^0]$), on sait que le discriminant (réduit) D associé au déterminant de Lopatinskii est strictement positif (voir (5.3.17)), ce qui s'écrit

$$2((b^+)^2 + (b^-)^2) - (a^+ - a^-)^2 > 0,$$

c'est-à-dire $(b^+)^2 + (b^-)^2 > 2(a^+)^2$, ce qui entraîne une contradiction. En conséquence, nous avons bien $\tilde{\tau} \neq 0$.

► Par ailleurs, $\tilde{c}^\pm = c^\pm = a^\pm$ car $\tau = 0$; et $\tilde{b}^\pm = b^\pm$. Ainsi, l'hypothèse $(a^\pm)^2 \neq (b^\pm)^2$ est équivalente à $(\tilde{c}^\pm)^2 \neq (\tilde{b}^\pm)^2$.

En conclusion, nous nous sommes ramenés au cas (C1) avec les nouveaux paramètres $\tilde{\tau}$, \tilde{a}^\pm et \tilde{b}^\pm . Dans toute la Section 5.4, nous nous sommes placés dans le cas (C1), ce dernier étant assuré grâce à l'hypothèse (H3) vérifiée par la fréquence spatiale ξ' .

A.2 Quelques produits hermitiens

Afin de prendre en compte le signe de $k \in \mathbb{Z}$ apparaissant dans le système (5.4.1), on définit pour tout $k \neq 0$ (on réécrit temporairement les exposants \pm) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^+(k) &:= \mathbf{R}^+ \mathbf{1}_{k>0} + \bar{\mathbf{R}}^+ \mathbf{1}_{k<0}, & \mathcal{R}^-(k) &:= \bar{\mathbf{R}}^- \mathbf{1}_{k>0} + \mathbf{R}^- \mathbf{1}_{k<0}, \\ \mathcal{L}^+(k) &:= \mathbf{L}^+ \mathbf{1}_{k>0} + \bar{\mathbf{L}}^+ \mathbf{1}_{k<0}, & \mathcal{L}^-(k) &:= \bar{\mathbf{L}}^- \mathbf{1}_{k>0} + \mathbf{L}^- \mathbf{1}_{k<0}.\end{aligned}$$

Explicitement, on obtient :

$$\mathcal{R}^\pm(k) = \left(\xi_1 c^\pm, \xi_2 c^\pm, \pm i \operatorname{sgn}(k) c^\pm, \xi_1 b^\pm, \xi_2 b^\pm, \pm i \operatorname{sgn}(k) b^\pm, (b^\pm)^2 - (c^\pm)^2 \right), \quad (\text{A.2.1a})$$

$$\mathcal{L}^\pm(k) = \left(\tau \xi_1, \tau \xi_2, \pm i \operatorname{sgn}(k) \tau, 2\xi_1 b^\pm, 2\xi_2 b^\pm, \pm 2i \operatorname{sgn}(k) b^\pm, -\tau(c^\pm + a^\pm) \right), \quad (\text{A.2.1b})$$

où l'on a noté

$$\operatorname{sgn}(k) := \begin{cases} +1 & \text{si } k > 0, \\ 0 & \text{si } k = 0, \\ -1 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

On donne à présent les expressions des produits hermitiens que l'on a été amené à calculer à la Section 5.4. Lorsque U et V sont deux vecteurs (colonnes) de \mathbb{C}^7 , on rappelle que “ \cdot ” désigne le produit *hermitien* de \mathbb{C}^7 , c'est-à-dire :

$$U \cdot V = \sum_{i=1}^7 \bar{U}_i V_i = U^* V.$$

Distinguons bien les deux notations “ \cdot ” et “ \cdot ” : la première fait référence au produit scalaire *euclidien* que l'on utilise dans \mathbb{R}^2 (notamment pour la phase plane $\tau t + \xi' \cdot x'$), et la seconde fait référence au produit *hermitien* de \mathbb{C}^7 .

En partant de (A.2.1) et des expressions des matrices A_0 , A_1 et A_2 , on trouve :

$$\mathcal{L}(k) \cdot A_0 \mathcal{R}(k) = 2(\tau c + 2b^2), \quad (\text{A.2.2a})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(k) \cdot A_1 \mathcal{R}(k) &= \xi_1^2 \tau (cu_1 - bH_1) + 2\xi_2^2 b (bu_1 - cH_1) \\ &\quad + \xi_1 \xi_2 (\tau (cu_2 - bH_2) + 2b (cH_2 - bu_2)) \\ &\quad - \xi_1 \tau c (c + a) + 2\tau (cu_1 - bH_1) + 2b (bu_1 - cH_1),\end{aligned} \quad (\text{A.2.2b})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(k) \cdot A_2 \mathcal{R}(k) &= \xi_2^2 \tau (cu_2 - bH_2) + 2\xi_1^2 b (bu_2 - cH_2) \\ &\quad + \xi_1 \xi_2 (\tau (cu_1 - bH_1) + 2b (cH_1 - bu_1)) \\ &\quad - \xi_2 \tau c (c + a) + 2\tau (cu_2 - bH_2) + 2b (bu_2 - cH_2),\end{aligned} \quad (\text{A.2.2c})$$

On remarque en particulier que les deux derniers termes donnés par (A.2.2b) et (A.2.2c) présentent une symétrie en les variables tangentielles (les rôles de ξ_1 et ξ_2 , de u_1 et u_2 , puis de H_1 et H_2 , sont échangés).

On se donne ensuite deux entiers $k, \ell \in \mathbb{Z}$; on a alors :

$$\mathcal{L}(k) \cdot \mathcal{A} \mathcal{R}(k - \ell) = \tau (b^2 - c^2) (1 - \operatorname{sgn}(k - \ell) \operatorname{sgn}(k)). \quad (\text{A.2.3})$$

A.3 Calcul des différentielles secondes

On détaille dans cette partie le calcul effectif des différentielles secondes qui apparaissent lors de la détermination du profil $U^{1,\pm}$ à la Section 5.4.

► **Différentielle seconde de f_1 .**

En utilisant la définition de f_1 donnée par (5.0.2), on voit que la différentielle seconde de f_1 , notée $\nabla^2 f_1$, est constante. On dénote par \mathbb{A}_1 , conformément à (5.4.6), la différentielle seconde de f_1 évaluée en $U^{0,\pm}$ (qui ne dépend donc pas des états “+” et “-”), c’est-à-dire :

$$\mathbb{A}_1(\cdot, \cdot) := \nabla^2 f_1(U^{0,\pm})(\cdot, \cdot).$$

Étant donnés deux vecteurs $U, V \in \mathbb{R}^7$, nous noterons leurs composantes au sein de ce paragraphe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2, u_3, H_1, H_2, H_3, q), \\ V &= (v_1, v_2, v_3, B_1, B_2, B_3, p). \end{aligned}$$

Nous donnons à présent l’expression de la différentielle seconde \mathbb{A}_1 :

$$\mathbb{A}_1(U, V) = \begin{bmatrix} 2u_1 v_1 - 2H_1 B_1 \\ u_1 v_2 + u_2 v_1 - H_1 B_2 - H_2 B_1 \\ u_1 v_3 + u_3 v_1 - H_1 B_3 - H_3 B_1 \\ 0 \\ u_1 B_2 + H_2 v_1 - u_2 B_1 - H_1 v_2 \\ u_1 B_3 + H_3 v_1 - u_3 B_1 - H_1 v_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.1})$$

Nous détaillons maintenant le calcul du terme donné par (5.4.91). Avant cela, pour clarifier les notations, remarquons que le produit hermitien $\mathcal{L}(k) \cdot \partial_{pq}^2 f_1 \mathcal{R}_p(k - \ell) \mathcal{R}_q(\ell)$ de (5.4.91) se réécrit à l’aide de la convention de sommation d’Einstein sur les indices répétés de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(k) \cdot \partial_{pq}^2 f_1 \mathcal{R}_p(k - \ell) \mathcal{R}_q(\ell) = \overline{\mathcal{L}_r(k)} \partial_{pq}^2 f_{1,r} \mathcal{R}_p(k - \ell) \mathcal{R}_q(\ell).$$

Dans (5.4.91), nous avons donc affaire à une expression de la forme

$$\sum_{\ell} K(k - \ell, \ell) \sum_{1 \leq p, q \leq 7} \partial_{pq}^2 f_1 \mathcal{R}_p^{\pm}(k - \ell) \mathcal{R}_q^{\pm}(\ell), \quad (\text{A.3.2})$$

où $K(\cdot, \cdot)$ désigne un noyau de convolution **symétrique**, *i.e.* vérifiant $K(k, k') = K(k', k)$ pour tous $k, k' \in \mathbb{Z}$. Grâce à la symétrie de K et des dérivées secondes de f_1 , on voit que l’expression donnée par (A.3.2) est aussi égale à

$$\sum_{\ell} K(k - \ell, \ell) S_1^{p=q} + 2 \sum_{\ell} K(k - \ell, \ell) S_1^{p < q}, \quad (\text{A.3.3})$$

où les vecteurs $S_1^{p=q}$ et $S_1^{p < q}$ sont définis par

$$\begin{aligned} S_1^{p=q} &:= \sum_{p=1}^7 \partial_p^2 f_1 \mathcal{R}_p(k - \ell) \mathcal{R}_p(\ell) \in \mathbb{C}^7, \\ S_1^{p < q} &:= \sum_{1 \leq p < q \leq 7} \partial_{pq}^2 f_1 \mathcal{R}_p(k - \ell) \mathcal{R}_q(\ell) \in \mathbb{C}^7. \end{aligned}$$

Autrement dit, on peut toujours se ramener par symétrie aux indices $p, q \in \{1, \dots, 7\}$ tels que $p < q$.

Maintenant, vu la définition de $\mathcal{R}(k)$ donnée par (A.2.1a), on remarque que seuls \mathcal{R}_3 et \mathcal{R}_6 dépendent de k ; par conséquent on omettra la variable k dans les autres composantes. Dans un premier temps, on obtient :

$$S_1^{p=q} = 2 \left(\mathcal{R}_1^2 - \mathcal{R}_4^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right),$$

puis

$$S_1^{p<q} = \mathcal{R}_1(0, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3(\ell), 0, \mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6(\ell), 0) - \mathcal{R}_4(0, \mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6(\ell), 0, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3(k-\ell), 0).$$

Du fait de la présence des produits de convolution dans (A.3.3), la symétrie des rôles joués par ℓ et $k-\ell$ permet de remplacer $\mathcal{R}_3(k-\ell)$ ci-dessus directement par $\mathcal{R}_3(\ell)$. Pour achever le calcul de (5.4.91), il nous reste à utiliser les deux quantités suivantes :

$$\mathcal{L}(k) \cdot S_1^{p=q} = 2\xi_1^3 \tau (c^2 - b^2), \quad (\text{A.3.4a})$$

$$\mathcal{L}(k) \cdot S_1^{p<q} = \xi_1 \tau (\xi_2^2 + \text{sgn}(\ell)\text{sgn}(k)) (c^2 - b^2). \quad (\text{A.3.4b})$$

L'expression (5.4.91) (pour $j = 1$) se simplifie finalement comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \xi_1 e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot \overline{\partial_{\theta} \mathbb{A}_1(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) dY_3 \\ &= 2ik \xi_1^2 \tau \left((c^{\pm})^2 - (b^{\pm})^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{|k-\ell||\ell|}{|k-\ell| + |\ell| + |k|} (\xi_2^2 + \text{sgn}(\ell)\text{sgn}(k)) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell). \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

Le traitement de (5.4.91) pour $j = 2$ est effectué ci-après.

► Différentielle seconde de f_2 .

La différentielle seconde de f_2 , notée \mathbb{A}_2 , s'exprime comme suit :

$$\mathbb{A}_2(U, V) = \begin{bmatrix} u_1 v_2 + u_2 v_1 - H_1 B_2 - H_2 B_1 \\ 2u_2 v_2 - 2H_2 B_2 \\ u_2 v_3 + u_3 v_2 - H_2 B_3 - H_3 B_2 \\ -u_1 B_2 - H_2 v_1 + u_2 B_1 + H_1 v_2 \\ 0 \\ u_2 B_3 + H_3 v_2 - u_3 B_2 - H_2 v_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

Les calculs pour simplifier (5.4.91) avec $j = 2$ sont identiques à ceux de f_1 (les rôles de ξ_1 et ξ_2 sont échangés), et obtient de la même façon que (A.3.5) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \xi_2 e^{\mp|k|Y_3} \mathcal{L}^{\pm}(k) \cdot \overline{\partial_{\theta} \mathbb{A}_2(U^{1,\pm}, U^{1,\pm})}(k) dY_3 \\ &= 2ik \xi_2^2 \tau \left((c^{\pm})^2 - (b^{\pm})^2 \right) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{|k-\ell||\ell|}{|k-\ell| + |\ell| + |k|} (\xi_1^2 + \text{sgn}(\ell)\text{sgn}(k)) \widehat{\psi}^2(k-\ell) \widehat{\psi}^2(\ell). \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

► Différentielle seconde de f_3 .

La différentielle seconde de f_3 , notée \mathbb{A}_3 , s'exprime comme suit :

$$\mathbb{A}_3(U, V) = \begin{bmatrix} u_1 v_3 + u_3 v_1 - H_1 B_3 - H_3 B_1 \\ u_2 v_3 + u_3 v_2 - H_2 B_3 - H_3 B_2 \\ 2u_3 v_3 - 2H_3 B_3 \\ -u_1 B_3 - H_3 v_1 + u_3 B_1 + H_1 v_3 \\ -u_2 B_3 - H_3 v_2 + u_3 B_2 + H_2 v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.8})$$

On définit comme précédemment les vecteurs de \mathbb{C}^7 suivants :

$$\begin{aligned} S_3^{p=q} &:= \sum_{p=1}^7 \partial_p^2 f_3 \mathcal{R}_p(k-\ell) \mathcal{R}_p(\ell), \\ S_3^{p<q} &:= \sum_{1 \leq p < q \leq 7} \partial_{pq}^2 f_3 \mathcal{R}_p(k-\ell) \mathcal{R}_q(\ell). \end{aligned}$$

Alors on montre par un rapide calcul (on réécrit les exposants \pm car ils interviennent dans le résultat) :

$$\begin{aligned} S_3^{p=q} &= 2 \left(0, 0, \mathcal{R}_3(k-\ell) \mathcal{R}_3(\ell) - \mathcal{R}_6(k-\ell) \mathcal{R}_6(\ell), 0, 0, 0, 0 \right), \\ &= 2 \left((b^\pm)^2 - (c^\pm)^2 \right) \operatorname{sgn}(k-\ell) \operatorname{sgn}(\ell) e_3, \end{aligned} \quad (\text{A.3.9a})$$

où l'on rappelle que e_3 désigne le troisième vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^7 . Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} S_3^{p<q} &= \mathcal{R}_3(\ell) \left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, 0, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5, 0, 0 \right) - \mathcal{R}_6(\ell) \left(\mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5, 0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, 0, 0 \right). \\ &= \pm i c^\pm \operatorname{sgn}(\ell) \left(\xi_1 c^\pm, \xi_2 c^\pm, 0, \xi_1 b^\pm, \xi_2 b^\pm, 0, 0 \right) \\ &\mp i b^\pm \operatorname{sgn}(\ell) \left(\xi_1 b^\pm, \xi_2 b^\pm, 0, \xi_1 c^\pm, \xi_2 c^\pm, 0, 0 \right) \in i \mathbb{R}^7. \end{aligned} \quad (\text{A.3.9b})$$

On termine avec les deux quantités suivantes :

$$\mathcal{L}^\pm(k) \cdot S_3^{p=q} = \pm 2i \tau \left((c^\pm)^2 - (b^\pm)^2 \right) \operatorname{sgn}(k-\ell) \operatorname{sgn}(\ell) \operatorname{sgn}(k), \quad (\text{A.3.10a})$$

$$\mathcal{L}^\pm(k) \cdot S_3^{p<q} = \pm i \tau \operatorname{sgn}(\ell) \left((c^\pm)^2 - (b^\pm)^2 \right). \quad (\text{A.3.10b})$$

Nous pouvons dès lors achever le calcul du terme donné par (5.4.88). Dans la convolution de ce dernier terme apparaît une quantité **symétrique** en $(k-\ell, \ell)$; on peut donc utiliser l'expression (A.3.2) comme précédemment, avec cette fois-ci $S_3^{p=q}$ et $S_3^{p<q}$. De la même façon que l'on a obtenu (A.3.5) et (A.3.7), on aboutit finalement aux expressions (5.4.89), (5.4.90) annoncées au Paragraphe 5.4.3.

A.4 Compatibilité des termes sources dans la cascade BKW

Dans cette partie, on s'attarde sur la condition nécessaire de compatibilité (5.5.45) que doivent satisfaire les termes sources F^\pm et G dans le problème rapide (5.5.43). En effet, en vue d'appliquer la Proposition 5.5.1 pour construire les correcteurs $(U^{m+1,\pm}, \psi^{m+2})_{m \geq 1}$ par récurrence (on renvoie au Paragraphe 5.5.6), il convient de vérifier au préalable si les termes sources $F^{m,\pm}$ et $G^{m,\pm}$ définis respectivement par (5.5.10) et (5.5.16) satisfont bien la condition (5.5.45). Vu la complexité des expressions des termes sources $F^{m,\pm}$ et $G^{m,\pm}$, il n'est pas clair de voir si la condition (5.5.45) est bien vérifiée pour tout $m \geq 1$. Le but de cette partie est donc de montrer l'égalité suivante pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$-b^\pm \partial_\theta G_1^{m,\pm} + c^\pm \partial_\theta G_2^{m,\pm} = F_6^{m,\pm} \Big|_{y_3=Y_3=0}. \quad (\text{A.4.1})$$

Rappelons pour cela d'où proviennent les termes sources $F_6^{m,\pm}$ (*i.e.* la 6^e composante du vecteur $F^{m,\pm}$, voir (5.5.10)), ainsi que $G_1^{m,\pm}$ et $G_2^{m,\pm}$ (*i.e.* les composantes du vecteur $G^{m,\pm}$, voir (5.5.16)). Nous omettons dans toute la suite de cette partie les exposants \pm pour alléger l'écriture.

Les termes sources F_6^m , pour $m \geq 0$, proviennent de la cascade BKW associée à l'EDP sur la composante normale du champ magnétique "exact" $H_{\varepsilon,3}$. Les calculs menés au Paragraphe 5.5.1 nous ont permis d'écrire :

$$0 = \partial_t H_{\varepsilon,3} + u_\varepsilon \cdot \nabla H_{\varepsilon,3} - H_\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon,3} \sim \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left(-b \partial_\theta u_3^{m+1} + c \partial_\theta H_3^{m+1} - F_6^m \right), \quad (\text{A.4.2})$$

ce qui a abouti à la cascade BKW :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad -b \partial_\theta u_3^{m+1} + c \partial_\theta H_3^{m+1} = F_6^m. \quad (\text{A.4.3})$$

De même, les calculs effectués au Paragraphe 5.5.2 ont permis d'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(u_\varepsilon \cdot N_\varepsilon - \partial_t \psi_\varepsilon \right) \Big|_{\Gamma_\varepsilon} \sim \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{m+1} \left(u_3^{m+1} - c \partial_\theta \psi^{m+2} - G_1^m \right) \Big|_{y_3=Y_3=0}, \\ 0 &= \left(H_\varepsilon \cdot N_\varepsilon \right) \Big|_{\Gamma_\varepsilon} \sim \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{m+1} \left(H_3^{m+1} - b \partial_\theta \psi^{m+2} - G_2^m \right) \Big|_{y_3=Y_3=0}, \end{aligned}$$

aboutissant à la cascade BKW associée à la frontière libre :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad u_3^{m+1} \Big|_{y_3=Y_3=0} = c \partial_\theta \psi^{m+2} + G_1^m, \quad (\text{A.4.4a})$$

$$H_3^{m+1} \Big|_{y_3=Y_3=0} = b \partial_\theta \psi^{m+2} + G_2^m. \quad (\text{A.4.4b})$$

Lorsque $m = 0$, les termes sources F_6^0 , G_1^0 et G_2^0 sont nuls², de sorte que l'égalité (A.4.1) est trivialement satisfaite. Regardons en détails la situation correspondant au cas $m = 1$, et montrons que la condition (A.4.1) est bien vérifiée. Les calculs menés dans ce cas simple permettront de comprendre comment aboutir à l'égalité (A.4.1) pour n'importe quel entier $m \geq 1$.

Le terme source F_6^1 s'exprime explicitement de la façon suivante (en utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés $j \in \{1, 2\}$) :

$$\begin{aligned} F_6^1 &= - \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) H_3^1 + \left(H_j^0 \partial_j \right) u_3^1 \\ &\quad + \left(-b \partial_{Y_3} u_3^1 + c \partial_{Y_3} H_3^1 \right) \partial_\theta \psi^2 - u_3^1 \partial_{Y_3} H_3^1 + H_3^1 \partial_{Y_3} u_3^1 \\ &\quad - \xi_j u_j^1 \partial_\theta H_3^1 + \xi_j H_j^1 \partial_\theta u_3^1. \end{aligned} \quad (\text{A.4.5})$$

Les termes sources de bord G_1^1 et G_2^1 sont quant à eux donnés par :

$$G_1^1 = \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) \psi^2 + \xi_j u_j^1 \Big|_{y_3=Y_3=0} \partial_\theta \psi^2, \quad (\text{A.4.6a})$$

$$G_2^1 = \left(H_j^0 \partial_j \right) \psi^2 + \xi_j H_j^1 \Big|_{y_3=Y_3=0} \partial_\theta \psi^2. \quad (\text{A.4.6b})$$

En dérivant (A.4.6a) et (A.4.6b) par rapport à θ , il vient alors :

$$-b \partial_\theta G_1^1 + c \partial_\theta G_2^1 = \left(-b \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) + c \left(H_j^0 \partial_j \right) \right) \partial_\theta \psi^2 \quad (\text{A.4.7a})$$

$$+ \xi_j \left(-b \partial_\theta u_j^1 + c \partial_\theta H_j^1 \right) \Big|_{y_3=Y_3=0} \partial_\theta \psi^2 \quad (\text{A.4.7b})$$

$$+ \xi_j \left(-b u_j^1 + c H_j^1 \right) \Big|_{y_3=Y_3=0} \partial_\theta^2 \psi^2. \quad (\text{A.4.7c})$$

On souhaite à présent montrer que l'expression (A.4.7) coïncide avec l'expression (A.4.5) dont on a pris la trace sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$. Pour alléger l'écriture, on omettra par la suite de noter les traces sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$ dans (A.4.5) et (A.4.7) ; il faudra donc avoir en tête que les composantes u_i^1 et H_i^1 , pour $i \in \{1, 2, 3\}$, seront systématiquement évaluées en $y_3 = Y_3 = 0$.

À ce stade, la vérification de la condition (A.4.1) pour $m = 1$ permettra de construire le correcteur (U^2, ψ^3) . Cette construction est basée sur la connaissance du profil "précédent" (U^1, ψ^2) , qui est connu à cette étape. En particulier, nous allons pouvoir utiliser les conditions de bord vérifiées par le profil

²Rappelons que le profil principal (U^1, ψ^2) vérifie le système *homogène* (5.5.17a).

principal (U^1, ψ^2) , afin de les injecter dans l'expression (A.4.5). Ces conditions de bord s'écrivent (on renvoie à (5.5.17a), et plus généralement à la Section 5.4) :

$$\begin{aligned} u_3^1|_{y_3=Y_3=0} &= c \partial_\theta \psi^2 \\ H_3^1|_{y_3=Y_3=0} &= b \partial_\theta \psi^2. \end{aligned} \quad (\text{A.4.8})$$

En injectant (A.4.8) dans (A.4.5), on obtient :

$$F_6^1|_{y_3=Y_3=0} = (-b(\partial_t + u_j^0 \partial_j) + c(H_j^0 \partial_j)) \partial_\theta \psi^2 \quad (\text{A.4.9a})$$

$$+ \left(-b \partial_{Y_3} u_3^1 + c \partial_{Y_3} H_3^1 \right) \partial_\theta \psi^2 - \left(c \partial_\theta \psi^2 \right) \partial_{Y_3} H_3^1 + \left(b \partial_\theta \psi^2 \right) \partial_{Y_3} u_3^1 \quad (\text{A.4.9b})$$

$$- \xi_j u_j^1 \left(b \partial_\theta^2 \psi^2 \right) + \xi_j H_j^1 \left(c \partial_\theta^2 \psi^2 \right). \quad (\text{A.4.9c})$$

On remarque que (A.4.9a) coïncide avec (A.4.7a) ; le terme donné par (A.4.9b) est nul, et enfin (A.4.9c) coïncide avec (A.4.7c). Il nous reste donc à montrer que le terme donné par (A.4.7b) est nul. Pour ce faire, nous allons utiliser la cascade BKW provenant des EDP satisfaites par les composantes tangentielles $H_{\varepsilon,1}$ et $H_{\varepsilon,2}$ du champ magnétique "exact" H_ε . De la même façon que l'on a obtenu (A.4.2), les calculs menés au Paragraphe 5.5.1 permettent d'écrire, pour $i \in \{1, 2\}$:

$$0 = \partial_t H_{\varepsilon,i} + u_\varepsilon \cdot \nabla H_{\varepsilon,i} - H_\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon,i} \sim \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left(-b \partial_\theta u_i^{m+1} + c \partial_\theta H_i^{m+1} - \mathcal{F}_i^m \right), \quad (\text{A.4.10})$$

d'où la cascade d'équations :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad -b \partial_\theta u_i^{m+1} + c \partial_\theta H_i^{m+1} = \mathcal{F}_i^m. \quad (\text{A.4.11})$$

Prêtons attention au fait que les termes sources \mathcal{F}_1^m et \mathcal{F}_2^m dans (A.4.11) ne coïncident pas directement avec les composantes F_4^m et F_5^m du termes source F^m dans la cascade BKW (5.5.17b). En effet, les termes sources \mathcal{F}_1^m et \mathcal{F}_2^m proviennent de la forme *non-conservative* de l'EDP satisfaite par le champ magnétique "exact" H_ε , tandis que les termes sources F_4^m et F_5^m sont obtenus *via* la forme *conservative* de cette même EDP (voir (5.0.4)). Toutefois, grâce aux contraintes de divergence nulle, les systèmes d'équations obtenus sont équivalents, comme nous l'avons constaté lors de la détermination du profil principal (U^1, ψ^2) au Paragraphe 5.4.1³.

Pour montrer que le terme (A.4.7b) est nul, utilisons l'équation de (A.4.11) avec $m = 0$:

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad -b \partial_\theta u_i^1 + c \partial_\theta H_i^1 = \mathcal{F}_i^0 = 0. \quad (\text{A.4.12})$$

Notons que l'on retrouve bien les équations données par la troisième ligne du système (5.3.12) (mode de Fourier par mode de Fourier). Finalement, en vertu de (A.4.12), on peut affirmer que le terme (A.4.7b) est effectivement nul, ce qui termine de démontrer la condition de compatibilité (A.4.1) pour $m = 1$.

On se donne à présent un entier $m \geq 2$, et on cherche à vérifier la condition de compatibilité (A.4.1). Pour cela, il nous faut avant tout les expressions des termes sources G_1^m , G_2^m et F_6^m . En vertu de (5.5.16c) et (5.5.13), on peut écrire (en omettant d'écrire les traces sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$) :

$$G_1^m = \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) \psi^{m+1} + \sum_{\substack{k+\ell=m-1 \\ k \geq 1}} u_j^k \partial_j \psi^{\ell+2} + \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \xi_j u_j^k \partial_\theta \psi^{\ell+2}, \quad (\text{A.4.13a})$$

$$G_2^m = \left(H_j^0 \partial_j \right) \psi^{m+1} + \sum_{\substack{k+\ell=m-1 \\ k \geq 1}} H_j^k \partial_j \psi^{\ell+2} + \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \xi_j H_j^k \partial_\theta \psi^{\ell+2}. \quad (\text{A.4.13b})$$

³On renvoie notamment aux systèmes équivalents (5.3.12) et (5.3.10) ; ces deux systèmes sont obtenus pour chaque mode de Fourier $k \in \mathbb{Z}$, mais on pouvait effectuer les mêmes opérations de lignes sur les problèmes de départ avant de décomposer les profils en séries de Fourier.

En dérivant (A.4.13a) et (A.4.13b) par rapport à θ , il vient alors :

$$\begin{aligned}
& -b \partial_\theta G_1^m + c \partial_\theta G_2^m \\
& = -b (\partial_t + u_j^0 \partial_j) \partial_\theta \psi^{m+1} + c (H_j^0 \partial_j) \partial_\theta \psi^{m+1} \\
& \quad + \sum_{\substack{k+\ell=m-1 \\ k \geq 1}} \left(-b \partial_\theta u_j^k + c \partial_\theta H_j^k \right) \partial_j \psi^{\ell+2} + \sum_{\substack{k+\ell=m-1 \\ k \geq 1}} \left(-b u_j^k + c H_j^k \right) \partial_j \partial_\theta \psi^{\ell+2} \\
& \quad + \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \left(-b \xi_j \partial_\theta u_j^k + c \xi_j \partial_\theta H_j^k \right) \partial_\theta \psi^{\ell+2} + \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \left(-b u_j^k + c H_j^k \right) \partial_\theta^2 \psi^{\ell+2}.
\end{aligned} \tag{A.4.14}$$

L'expression du terme source F_6^m est nettement plus complexe, et s'obtient à partir de la 6^e composante de (5.5.10) :

$$F_6^m := \left(H_j^0 \partial_j \right) u_3^m - \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) H_3^m \tag{A.4.15a}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k+\ell=m-1} \left(-b \partial_{Y_3} u_3^{k+1} + c \partial_{Y_3} H_3^{k+1} \right) \partial_\theta \psi^{\ell+2} \\
& + \sum_{k+\ell=m-2} \left(-b \partial_{y_3} u_3^{k+1} + c \partial_{y_3} H_3^{k+1} \right) \partial_\theta \psi^{\ell+2} \\
& + \sum_{k+\ell=m-2} \left(-\partial_{Y_3} u_3^{k+1} \left(H_j^0 \partial_j \right) \psi^{\ell+2} + \partial_{Y_3} H_3^{k+1} \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) \psi^{\ell+2} \right) \\
& + \sum_{k+\ell=m-3} \left(-\partial_{y_3} u_3^{k+1} \left(H_j^0 \partial_j \right) \psi^{\ell+2} + \partial_{y_3} H_3^{k+1} \left(\partial_t + u_j^0 \partial_j \right) \psi^{\ell+2} \right)
\end{aligned} \tag{A.4.15b}$$

$$+ \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \left(-u_3^k \left(\partial_{Y_3} H_3^{\ell+1} + \partial_{y_3} H_3^\ell \right) + H_3^k \left(\partial_{Y_3} u_3^{\ell+1} + \partial_{y_3} u_3^\ell \right) \right) \tag{A.4.15c}$$

$$+ \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \left(-\xi_j u_j^k \partial_\theta H_3^{\ell+1} + \xi_j H_j^k \partial_\theta u_3^{\ell+1} \right) \tag{A.4.15d}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k+\ell=m \\ k \geq 1}} \left(-u_j^k \partial_j H_3^\ell + H_j^k \partial_j u_3^\ell \right) \\
& + \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m-1 \\ \ell_1 \geq 1}} \left(\xi_j u_j^{\ell_1} \partial_{Y_3} H_3^{\ell_2+1} - \xi_j H_j^{\ell_1} \partial_{Y_3} u_3^{\ell_2+1} \right) \partial_\theta \psi^{\ell_3+2} \\
& + \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m-2 \\ \ell_1 \geq 1}} \left(\xi_j u_j^{\ell_1} \partial_{y_3} H_3^{\ell_2+1} - \xi_j H_j^{\ell_1} \partial_{y_3} u_3^{\ell_2+1} \right) \partial_\theta \psi^{\ell_3+2} \\
& + \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m-2 \\ \ell_1 \geq 1}} \left(u_j^{\ell_1} \partial_{Y_3} H_3^{\ell_2+1} - H_j^{\ell_1} \partial_{Y_3} u_3^{\ell_2+1} \right) \partial_j \psi^{\ell_3+2} \\
& + \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3=m-3 \\ \ell_1 \geq 1}} \left(u_j^{\ell_1} \partial_{y_3} H_3^{\ell_2+1} - H_j^{\ell_1} \partial_{y_3} u_3^{\ell_2+1} \right) \partial_j \psi^{\ell_3+2}.
\end{aligned}$$

À partir de l'expression (A.4.15) de F_6^m , on suit la même démarche que ce qui a été fait pour le cas simple $m = 1^4$. Les termes sources G_1^m , G_2^m et F_6^m de (A.4.13), (A.4.15) étant associés au correcteur (U^{m+1}, ψ^{m+2}) , on peut supposer à ce stade que les profils “antérieurs” $(U^k, \psi^{k+1})_{k \leq m}$ sont connus. En

⁴On choisit ici de ne pas écrire les calculs en détails ; bien qu'ils apparaissent nettement “plus lourds” dans le cas général $m \geq 2$ (du fait de la présence des nombreux termes dans (A.4.14) et (A.4.15)), on se contente d'expliquer la démarche permettant d'aboutir à la condition de compatibilité (A.4.1), qui est analogue à ce qu'on a effectué sur le cas $m = 1$.

particulier, ils vérifient les conditions de bord (A.4.4) (dans lesquelles on remplace $m + 1$ par k ici). Le point de départ est de remarquer la présence des composantes normales u_3^k et H_3^k , pour $k \leq m$, dans le terme source F_6^m (A.4.15). Comme les dérivées *tangentiels* ∂_t , ∂_1 , ∂_2 et ∂_θ commutent avec la trace sur $\{y_3 = Y_3 = 0\}$, on peut dans un premier temps dériver les conditions de bord (A.4.4) par rapport à t , y_1 , y_2 et θ , pour ensuite les injecter dans (A.4.15a), (A.4.15b), (A.4.15c) et (A.4.15d). Ceci nous permet de simplifier un grand nombre de termes entre les expressions (A.4.14) et (A.4.15).

Pour traiter les termes restants, on utilise la cascade BKW (A.4.11) provenant des EDP satisfaites par les composantes tangentiels du champ magnétique “exact” H_ε . Les équations données par (A.4.11) permettent d’achever la comparaison des expressions (A.4.14) et (A.4.15), et conclut quant à la condition de compatibilité (A.4.1) pour tout entier $m \geq 1$.

Table des figures

1.1	Instabilités de Kelvin-Helmholtz sur Saturne (<i>Source : Wikipédia</i>).	15
1.2	Schéma d'une nappe de tourbillon-courant.	17
1.3	Schéma représentant l'héliopause.	17
1.4	La magnétopause terrestre (<i>Source : Wikipédia</i>).	17
2.1	Bande périodique $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$	38
4.1	Schéma d'une nappe de tourbillon-courant.	66
5.1	Schéma d'une nappe de tourbillon-courant	108

Bibliographie

- [AF03] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003. 37
- [AG91] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris ; Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 1991. 40
- [AH03] G. Ali and J. K. Hunter. Nonlinear surface waves on a tangential discontinuity in magnetohydrodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 61(3) :451–474, 2003. 21, 26, 27, 108, 111, 116, 125, 147, 149, 203
- [AH07] H. Abidi and T. Hmidi. Résultats d’existence dans des espaces critiques pour le système de la MHD inhomogène. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 14(1) :103–148, 2007. 62
- [AH13] L. Austria and J. K. Hunter. Nonlinear variational surface waves. *Commun. Inf. Syst.*, 13(1) :3–43, 2013. 26
- [AHP02] G. Ali, J. K. Hunter, and D. F. Parker. Hamiltonian equations for scale-invariant waves. *Stud. Appl. Math.*, 108(3) :305–321, 2002. 26, 147, 148
- [Ale82] G. V. Alekseev. Solvability of a homogeneous initial-boundary value problem for equations of magnetohydrodynamics of an ideal fluid. *Dinamika Sploshn. Sredy*, (57) :3–20, 1982. 15, 52, 62
- [Ali88] S. Alinhac. Ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. In *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint Jean de Monts, 1988)*, pages Exp. No. VIII, 7. École Polytech., Palaiseau, 1988. 25
- [AM86] S. Alinhac and G. Métivier. Propagation de l’analyticité locale pour les solutions de l’équation d’Euler. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92(4) :287–296, 1986. 23, 104, 199
- [AM87] M. Artola and A. J. Majda. Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets. I. The basic kink modes. *Phys. D*, 28(3) :253–281, 1987. 27, 108
- [AM89] M. Artola and A. J. Majda. Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets. II. Resonant interaction among kink modes. *SIAM J. Appl. Math.*, 49(5) :1310–1349, 1989. 27, 108
- [AM07] D. M. Ambrose and N. Masmoudi. Well-posedness of 3D vortex sheets with surface tension. *Commun. Math. Sci.*, 5(2) :391–430, 2007. 15, 21
- [Axf62] W. I. Axford. Note on a problem of magnetohydrodynamic stability. *Canadian Journal of Physics*, 40(5) :654–656, 1962. 20, 26, 29, 66, 107, 110, 117, 120
- [Bar76] C. Bardos. Analyticité de la solution de l’équation d’Euler dans un ouvert de R^n . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 283(5) :Aii, A255–A258, 1976. 23

- [BB77] C. Bardos and S. Benachour. Domaine d'analyticité des solutions de l'équation d'Euler dans un ouvert de R^n . *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 4(4) :647–687, 1977. 23, 104, 199
- [BBZ76] C. Bardos, S. Benachour, and M. Zerner. Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en deux dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282(17) :Aiii, A995–A998, 1976. 23
- [BdVV80a] H. Beirão da Veiga and A. Valli. On the Euler equations for nonhomogeneous fluids. I. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 63 :151–168, 1980. 14
- [BdVV80b] H. Beirão da Veiga and A. Valli. On the Euler equations for nonhomogeneous fluids. II. *J. Math. Anal. Appl.*, 73(2) :338–350, 1980. 14
- [Ben14] A. Benoit. Geometric optics expansions for linear hyperbolic boundary value problems and optimality of energy estimates for surface waves. *Differential Integral Equations*, 27(5-6) :531–562, 2014. 116, 150
- [BG76] M. S. Baouendi and C. Goulaouic. *Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques non linéaires*. Centre Math., École Polytech., Palaiseau, 1976. 23
- [BG78] M. S. Baouendi and C. Goulaouic. Le théorème de Nishida pour le problème de Cauchy abstrait par une méthode de point fixe. In *Équations aux dérivées partielles (Proc. Conf., Saint-Jean-de-Monts, 1977)*, volume 660 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–8. Springer, Berlin, 1978. 22, 23, 24, 25, 33, 59, 65, 69, 72, 74, 75, 96, 99, 100, 101, 198
- [BG09] S. Benzoni-Gavage. Local well-posedness of nonlocal Burgers equations. *Differential Integral Equations*, 22(3-4) :303–320, 2009. 29, 138, 148, 175
- [BGC12] S. Benzoni-Gavage and J.-F. Coulombel. On the amplitude equations for weakly nonlinear surface waves. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 205(3) :871–925, 2012. 26, 122, 125, 140
- [BGRSZ02] S. Benzoni-Gavage, F. Rousset, D. Serre, and K. Zumbrun. Generic types and transitions in hyperbolic initial-boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(5) :1073–1104, 2002. 26
- [BGS07] S. Benzoni-Gavage and D. Serre. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007. First-order systems and applications. 19, 26, 35, 107, 120, 133, 137, 140, 180, 185, 202
- [BK02] H. Baty and R. Keppens. Interplay between Kelvin-Helmholtz and current-driven instabilities in jets. *The Astrophysical Journal*, 580 :800–814, 2002. 16
- [BK06] H. Baty and R. Keppens. Kelvin-Helmholtz disruptions in extended magnetized jet flows. *Astronomy and Astrophysics*, 447 :9–22, 2006. 16
- [BL76] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. 37
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications]. 35
- [BT02] A. Blokhin and Y. Trakhinin. Stability of strong discontinuities in fluids and MHD. In *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I*, pages 545–652. North-Holland, Amsterdam, 2002. 16

- [BV07] H. Baty and M. Viallet. Spatial simulations of the Kelvin-Helmholtz instability in astrophysical jets. A partial stabilization mechanism for weakly magnetized transonic flows. *Astronomy and Astrophysics*, 473 :1–9, 2007. 16
- [BV09] V. Banica and L. Vega. On the stability of a singular vortex dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 286(2) :593–627, 2009. 15
- [BV13] V. Banica and L. Vega. Stability of the self-similar dynamics of a vortex filament. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 210(3) :673–712, 2013. 15
- [Cat13] D. Catania. Existence and stability for the 3D linearized constant-coefficient incompressible current-vortex sheets. *Int. J. Differ. Equ.*, pages Art. ID 595813, 13, 2013. 22, 29, 131
- [CB69] Y. Choquet-Bruhat. Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 48 :117–158, 1969. 26
- [CDGG02] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier. Ekman boundary layers in rotating fluids. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :441–466, 2002. A tribute to J. L. Lions. 26
- [CG10] J.-F. Coulombel and O. Guès. Geometric optics expansions with amplification for hyperbolic boundary value problems : linear problems. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(6) :2183–2233, 2010. 122
- [Cha61] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. The International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, Oxford, 1961. 16, 20, 21, 26, 29, 66, 107, 110, 117, 120
- [Che98] J.-Y. Chemin. *Perfect incompressible fluids*, volume 14 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1995 French original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie. 14, 24, 35, 51
- [CMST12] J.-F. Coulombel, A. Morando, P. Secchi, and P. Trebeschi. A priori estimates for 3D incompressible current-vortex sheets. *Comm. Math. Phys.*, 311(1) :247–275, 2012. 22, 25, 37, 66, 67, 68, 69, 70, 75, 79, 83, 90, 104, 180, 198, 199
- [Com70] L. Comtet. *Analyse combinatoire. Tomes I, II*, volume 5 of *Collection SUP : "Le Mathématicien"*, 4. Presses Universitaires de France, Paris, 1970. 24, 33
- [CW08] G.-Q. Chen and Y.-G. Wang. Existence and stability of compressible current-vortex sheets in three-dimensional magnetohydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 187(3) :369–408, 2008. 22, 25
- [CW16] J.-F. Coulombel and M. Williams. Geometric optics for surface waves in nonlinear elasticity. Preprint, April 2016. 26, 112, 116, 122, 143
- [Del91] J.-M. Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3) :553–586, 1991. 15
- [DL87] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 3*. Masson, Paris, 1987. Transformations, Sobolev, Opérateurs. 46
- [DLS09] C. De Lellis and L. Székelyhidi, Jr. The Euler equations as a differential inclusion. *Ann. of Math. (2)*, 170(3) :1417–1436, 2009. 14
- [EPS15] A. Enciso and D. Peralta-Salas. Existence of knotted vortex tubes in steady Euler flows. *Acta Math.*, 214(1) :61–134, 2015. 15

- [Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. 16, 35, 52, 55, 69, 82, 132, 180
- [FR95] H.J. Fahr and M.S. Ruderman. The effect of magnetic fields on the macroscopic instability of the heliopause. ii. inclusion of solar wind magnetic fields. *Astronomy and Astrophysics*, 299 :258–266, 1995. 15
- [Gal13] S. Galtier. *Magnétohydrodynamique : des plasmas de laboratoire à l'astrophysique*. Vuibert, Paris, 2013. 13
- [Går56] L. Gårding. Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. In *La théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, 9-15 avril 1956*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXI, pages 71–90. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1956. 30, 200
- [Guè92] O. Guès. Ondes multidimensionnelles ϵ -stratifiées et oscillations. *Duke Math. J.*, 68(3) :401–446, 1992. 30, 200
- [Guè93] O. Guès. Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilineaires. *Asymptotic Anal.*, 6(3) :241–269, 1993. 26
- [GVR07] D. Gérard-Varet and F. Rousset. Shear layer solutions of incompressible MHD and dynamo effect. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24(5) :677–710, 2007. 26
- [Her63] R. Hersh. Mixed problems in several variables. *J. Math. Mech.*, 12 :317–334, 1963. 19
- [HIZ95] M. F. Hamilton, Y. A. Il'insky, and E. A. Zabolotskaya. Evolution equations for nonlinear Rayleigh waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(2) :891–897, 2 1995. 20, 26, 107, 116, 138, 147, 148
- [Hmi14] T. Hmidi. On the Yudovich solutions for the ideal MHD equations. *Nonlinearity*, 27(12) :3117–3158, 2014. 62
- [HMV13] T. Hmidi, J. Mateu, and J. Verdera. Boundary regularity of rotating vortex patches. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 209(1) :171–208, 2013. 14
- [Hun06] J. K. Hunter. Short-time existence for scale-invariant Hamiltonian waves. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 3(2) :247–267, 2006. 29, 138, 148, 149, 175
- [IS11] D. Iftimie and F. Sueur. Viscous boundary layers for the Navier-Stokes equations with the Navier slip conditions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199(1) :145–175, 2011. 26
- [JMR93] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves. *Duke Math. J.*, 70(2) :373–404, 1993. 26, 112
- [JMR95] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(1) :51–113, 1995. 26, 112
- [Kat67] T. Kato. On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 25 :188–200, 1967. 14
- [KN79] T. Kano and T. Nishida. Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde. *J. Math. Kyoto Univ.*, 19(2) :335–370, 1979. 25
- [Kre70] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :277–298, 1970. 19, 20

- [KV09] I. Kukavica and V. Vicol. On the radius of analyticity of solutions to the three-dimensional Euler equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(2) :669–677, 2009. 23, 104, 199
- [KV11a] I. Kukavica and V. Vicol. The domain of analyticity of solutions to the three-dimensional Euler equations in a half space. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 29(1) :285–303, 2011. 23, 104, 199
- [KV11b] I. Kukavica and V. Vicol. On the analyticity and Gevrey-class regularity up to the boundary for the Euler equations. *Nonlinearity*, 24(3) :765–796, 2011. 23, 104, 199
- [Lac63] H. Lacaze. *Tour d’horizon sur la magnétohydrodynamique*. Bulletins des Services techniques. Service de documentation et d’information technique de l’aéronautique, 1963. 13
- [Lan05] D. Lannes. Well-posedness of the water-waves equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :605–654, 2005. 25, 67
- [Lan13] D. Lannes. *The water waves problem*, volume 188 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. Mathematical analysis and asymptotics. 22, 39, 67
- [Lar83] R. W. Lardner. Nonlinear surface waves on an elastic solid. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 21(11) :1331–1342, 1983. 20, 26, 107, 116, 138
- [Lax57] P. D. Lax. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math. J.*, 24 :627–646, 1957. 26, 127
- [Leb02] G. Lebeau. Régularité du problème de Kelvin-Helmholtz pour l’équation d’Euler 2d. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :801–825, 2002. A tribute to J. L. Lions. 15
- [Les07] V. Lescarret. Wave transmission in dispersive media. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(4) :485–535, 2007. 20, 112, 113, 116, 150
- [LO97] C. D. Levermore and M. Oliver. Analyticity of solutions for a generalized Euler equation. *J. Differential Equations*, 133(2) :321–339, 1997. 23, 104, 199
- [Maj83a] A. Majda. The existence of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 43(281) :v+93, 1983. 25
- [Maj83b] A. Majda. The stability of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 41(275) :iv+95, 1983. 25
- [Mar94] C. Marchioro. Bounds on the growth of the support of a vortex patch. *Comm. Math. Phys.*, 164(3) :507–524, 1994. 14
- [Mar10] A. Marcou. Rigorous weakly nonlinear geometric optics for surface waves. *Asymptot. Anal.*, 69(3-4) :125–174, 2010. 20, 26, 29, 30, 112, 113, 116, 122, 138, 146, 148, 149, 150, 154, 164, 170, 171, 175, 176, 179, 186, 191, 200
- [Mar11] A. Marcou. Internal rectification for elastic surface waves. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(23-24) :1239–1244, 2011. 20, 26, 116, 154, 179, 186, 188, 191
- [MB02] A. J. Majda and A. L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. 14
- [Mét00] G. Métivier. The block structure condition for symmetric hyperbolic systems. *Bull. London Math. Soc.*, 32(6) :689–702, 2000. 20

- [Mét04] G. Métivier. *Small viscosity and boundary layer methods*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004. Theory, stability analysis, and applications. 116, 150
- [Mét09] G. Métivier. The mathematics of nonlinear optics. In *Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. V*, Handb. Differ. Equ., pages 169–313. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009. 30, 200
- [MO75] A. Majda and S. Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5) :607–675, 1975. 19
- [MP94] C. Marchioro and M. Pulvirenti. *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, volume 96 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994. 14
- [MR83] A. Majda and R. Rosales. A theory for spontaneous Mach stem formation in reacting shock fronts. I. The basic perturbation analysis. *SIAM J. Appl. Math.*, 43(6) :1310–1334, 1983. 27, 108
- [MR84] A. Majda and R. Rosales. A theory for spontaneous Mach-stem formation in reacting shock fronts. II. Steady-wave bifurcations and the evidence for breakdown. *Stud. Appl. Math.*, 71(2) :117–148, 1984. 27, 108
- [MR11] G. Métivier and J. Rauch. Invariance and stability of the profile equations of geometric optics. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 31(6, [November 2010 on cover]) :2141–2158, 2011. 26
- [MS11] A. Morando and P. Secchi. Regularity of weakly well posed hyperbolic mixed problems with characteristic boundary. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 8(1) :37–99, 2011. 19
- [MTT08] A. Morando, Y. Trakhinin, and P. Trebeschi. Stability of incompressible current-vortex sheets. *J. Math. Anal. Appl.*, 347(2) :502–520, 2008. 21, 22, 26, 29, 107, 110, 117, 119, 120, 121
- [Nir72] L. Nirenberg. An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. *J. Differential Geometry*, 6 :561–576, 1972. Collection of articles dedicated to S. S. Chern and D. C. Spencer on their sixtieth birthdays. 22, 23, 33, 59
- [Nis77] T. Nishida. A note on a theorem of Nirenberg. *J. Differential Geom.*, 12(4) :629–633 (1978), 1977. 22, 23, 24, 33, 59, 63, 100
- [Ohk81] T. Ohkubo. Regularity of solutions to hyperbolic mixed problems with uniformly characteristic boundary. *Hokkaido Math. J.*, 10(1) :93–123, 1981. 19
- [Par85] D. F. Parker. The nonlinear dispersion of Rayleigh waves. *Phys. D*, 16(3) :385–397, 1985. 20, 26, 107, 116, 138
- [Rau12] J. Rauch. *Hyperbolic partial differential equations and geometric optics*, volume 133 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. 26, 112, 127
- [RW98] M.S. Ruderman and A.N. Wright. Excitation of resonant Alfvén waves in the magnetosphere by negative energy surface waves on the magnetopause. *Journal of Geophysical Research*, 103(A11) :26,573–26,584, 1998. 16
- [Saf95] M. V. Safonov. The abstract Cauchy-Kovalevskaya theorem in a weighted Banach space. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(6) :629–637, 1995. 59

- [Sak70a] R. Sakamoto. Mixed problems for hyperbolic equations. I. Energy inequalities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 10 :349–373, 1970. 19, 20
- [Sak70b] R. Sakamoto. Mixed problems for hyperbolic equations. II. Existence theorems with zero initial datas and energy inequalities with initial datas. *J. Math. Kyoto Univ.*, 10 :403–417, 1970. 19, 20
- [Sch88] P. G. Schmidt. On a magnetohydrodynamic problem of Euler type. *J. Differential Equations*, 74(2) :318–335, 1988. 15, 52, 62
- [Sch93] V. Scheffer. An inviscid flow with compact support in space-time. *J. Geom. Anal.*, 3(4) :343–401, 1993. 14
- [Sec93] P. Secchi. On the equations of ideal incompressible magnetohydrodynamics. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 90 :103–119, 1993. 15, 52, 62
- [Sed94] V. I. Sedenko. Solvability of initial-boundary value problems for the Euler equations of flows of an ideal incompressible nonhomogeneous fluid and an ideal barotropic fluid that are bounded by free surfaces. *Mat. Sb.*, 185(11) :57–78, 1994. 23, 24, 33, 40, 44, 53
- [Ser01] D. Serre. La transition vers l’instabilité pour les ondes de choc multi-dimensionnelles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(12) :5071–5093, 2001. 27, 108
- [Ser06] D. Serre. Second order initial boundary-value problems of variational type. *J. Funct. Anal.*, 236(2) :409–446, 2006. 26
- [Ser10] D. Serre. *Matrices*, volume 216 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2010. Theory and applications. 166
- [Shn97] A. Shnirelman. On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50(12) :1261–1286, 1997. 14
- [SSBF81] C. Sulem, P.-L. Sulem, C. Bardos, and U. Frisch. Finite time analyticity for the two- and three-dimensional Kelvin-Helmholtz instability. *Comm. Math. Phys.*, 80(4) :485–516, 1981. 15, 21, 23, 67
- [ST88] M. Sablé-Tougeron. Existence pour un problème de l’élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3) :261–292, 1988. 20
- [Ste70] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. 191
- [SWZ15] Y. Sun, W. Wang, and Z. Zhang. Nonlinear stability of current-vortex sheet to the incompressible MHD equations. *ArXiv e-prints*, October 2015. 22, 24, 30, 67, 70, 199, 200
- [Syr53] S. I. Syrovatskiĭ. The stability of tangential discontinuities in a magnetohydrodynamic medium. *Zurnal Eksper. Teoret. Fiz.*, 24 :622–629, 1953. 20, 26, 29, 66, 107, 110, 117, 120
- [Tay96] M. E. Taylor. *Partial differential equations*, volume 23 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory. 52
- [Tra05] Y. Trakhinin. On the existence of incompressible current-vortex sheets : study of a linearized free boundary value problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28(8) :917–945, 2005. 22, 66, 112, 198
- [Tra09] Y. Trakhinin. The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 191(2) :245–310, 2009. 22, 25, 70, 112, 198

- [Tri10] H. Triebel. *Theory of function spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010. Reprint of 1983 edition [MR0730762], Also published in 1983 by Birkhäuser Verlag [MR0781540]. 35, 37
- [Wil96] M. Williams. Nonlinear geometric optics for hyperbolic boundary problems. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(11-12) :1829–1895, 1996. 26
- [Wil99] M. Williams. Highly oscillatory multidimensional shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(2) :129–192, 1999. 26, 112
- [Wu06] S. Wu. Mathematical analysis of vortex sheets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(8) :1065–1206, 2006. 15
- [YM91] T. Yanagisawa and A. Matsumura. The fixed boundary value problems for the equations of ideal magnetohydrodynamics with a perfectly conducting wall condition. *Comm. Math. Phys.*, 136(1) :119–140, 1991. 52, 62
- [Yud63] V. I. Yudovich. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 :1032–1066, 1963. 14
- [Zui02] C. Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*. Sciences sup. Dunod, 2002. 35

Thèse de Doctorat

Olivier PIERRE

Nappes de tourbillon-courant
en magnétohydrodynamique

Current-vortex sheets
in magnetohydrodynamics

Résumé

On considère dans cette thèse le couplage de deux plasmas homogènes et idéaux, présentant une discontinuité tangentielle le long d'une hypersurface évoluant au cours de temps. Le mouvement d'un tel fluide est dicté par les équations de la magnétohydrodynamique idéale incompressible. Le phénomène de cisaillement du plasma conduit à la création d'une nappe de tourbillon-courant.

Un premier travail consiste à construire des solutions analytiques au système des nappes de tourbillon-courant, en utilisant un théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

Dans une seconde partie, on s'attarde sur le comportement qualitatif des solutions exactes du système des nappes de tourbillon-courant, issues de données initiales de faible amplitude et fortement oscillantes. Pour ce faire, on utilise des outils d'optique géométrique, et on met en évidence la formation d'ondes de surface lorsque les données initiales oscillent à des fréquences bien particulières.

Mots clés

magnétohydrodynamique, nappes de tourbillon-courant, fonctions analytiques, théorème de Cauchy-Kowalevskaya, optique géométrique, ondes de surface, développements BKW

Abstract

In this thesis, we consider the coupling between two ideal and homogeneous plasmas, giving rise to a tangential discontinuity across a time-dependent hypersurface. The motion of such a fluid is described by the ideal incompressible magnetohydrodynamics equations. This shear flow leads to the creation of a current-vortex sheet.

The first part of this work is devoted to the construction of analytic solutions to the current-vortex sheet system, using a Cauchy-Kowalevskaya theorem.

In a second part, we look at the qualitative behavior of exact solutions to the current-vortex sheet system, obtained from highly oscillating initial data. We use tools of geometric optics and we exhibit the creation of surface waves when the initial datum is oscillating with particular frequencies.

Key Words

magnetohydrodynamics, current-vortex sheets, analytic functions, Cauchy-Kowalevskaya theorem, geometric optics, surface waves, WKB expansions