



**HAL**  
open science

# Étude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique : aspects expérimentaux et modélisation

Alexandre Gangnant

► **To cite this version:**

Alexandre Gangnant. Étude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique : aspects expérimentaux et modélisation. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Bordeaux, 2016. Français. NNT : . tel-01528829

**HAL Id: tel-01528829**

**<https://hal.science/tel-01528829v1>**

Submitted on 29 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Étude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique : aspects expérimentaux et modélisation

Alexandre Gangnant

## ► To cite this version:

Alexandre Gangnant. Étude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique : aspects expérimentaux et modélisation. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Bordeaux, 2016. Français. <NNT : 2016BORD0401>. <tel-01434716>

**HAL Id: tel-01434716**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01434716>**

Submitted on 13 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR  
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

Par **Alexandre GANGNANT**

**Étude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle  
mésoscopique. Aspects expérimentaux et modélisation.**

Sous la direction de : **Stéphane MOREL**

Soutenue le 09 Décembre 2016

Membres du jury :

M. GATUINGT Fabrice,	Professeur, ENS Cachan	Examineur
M. LA BORDERIE Christian,	Professeur, Université de Pau et des pays de l'Adour	Encadrant
M. LOUKILI Ahmed,	Professeur, École Centrale de Nantes	Examineur
M. MOREL Stéphane,	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur de Thèse
M. PLANAS Jaime,	Professeur, Universidad Politécnica de Madrid	Rapporteur
Mme. SALIBA Jacqueline,	Maître de Conférences, Université de Bordeaux	Encadrant
M. SELLIER Alain,	Professeur, Université Paul Sabatier	Rapporteur



**Titre** : Etude de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique. Aspects expérimentaux et modélisation.

**Résumé** : Le béton présente une rupture quasi-fragile du fait de la présence d'une zone d'élaboration de la rupture principalement microfissurée et de taille conséquente, se développant en avant du front de fissure. L'objectif de ces travaux consiste à mettre en évidence le processus d'évolution de la zone d'élaboration et l'étendue de cette dernière, et ce, sur la base d'une campagne d'essai Wedge Splitting suivie de simulations numériques aux éléments-finis utilisant le modèle d'endommagement isotrope de Fichant – La Borderie à l'échelle mésoscopique. Expérimentalement, les courbes de résistance obtenues dans le cadre de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture équivalente attestent d'un phénomène de confinement précoce de la zone d'élaboration manifestement lié à la géométrie testée et aux propriétés du béton étudié. Les simulations numériques obtenues sur la base du modèle d'endommagement sont en accord avec les résultats expérimentaux et conduisent également à soupçonner ce phénomène de confinement. Par la suite, la simulation numérique est à nouveau utilisée sur cette même géométrie de spécimen mais en réduisant les propriétés de rupture de la matrice cimentaire afin de diminuer la taille de la zone d'élaboration. Les résultats de cette nouvelle simulation montrent un développement libre de la zone d'élaboration suivie d'une propagation auto-similaire de la fissure principale attestée par la présence d'un régime plateau de la courbe de résistance correspondante. Une analyse détaillée du champ d'endommagement puis du champ d'énergie restituée est réalisée et permet de mettre en évidence un critère de développement de la zone d'élaboration fondée sur une valeur maximale du taux local de restitution d'énergie d'endommagement.

**Mots clés** : béton, quasi-fragile, Zone d'élaboration de la rupture, courbe de résistance, Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture équivalente, endommagement, rupture, méthode des éléments-finis

---

**Title** : Study of quasibrittle fracture of concrete at mesoscale. Experimental aspects and modelling.

**Abstract** : Concrete exhibits a quasibrittle fracture due to the existence of a large fracture process zone (FPZ), mainly microcracked, which develops ahead of the crack front. The aim of the current work consists in highlighting the FPZ development and its extent. For that purpose, an experimental campaign using Wedge Splitting Test was carried out and followed by finite element simulation using Fichant – La Borderie isotropic damage model acting at the mesoscale of concrete. Experimental analysis exhibits that by the use from Resistance curves estimated in the framework of equivalent Linear Elastic Fracture Mechanics, the used geometry combined to the studied concrete properties are subjected to a confinement of FPZ. Numerical simulations achieved by the damage model are in agreement with experimental results and also seem to show FPZ confinement. Thereafter, numerical simulations are used again on the same specimen geometry but by decreasing fracture properties of cementitious matrix, in order to minimize the FPZ size. Numerical results exhibit that the FPZ was now freely developed and followed by a self-similar propagation of the main crack as shown by the existence of a “plateau” value on the corresponding Resistance curve. A numerical analysis is performed and leads to the proposition of a FPZ development criteria based on a maximal value of the local damage energy release rate.

**Keywords** : concrete, quasibrittle, Fracture Process Zone, Resistance curve, equivalent Linear Elastic Fracture Mechanics, damage, fracture, finite element method



« *Na in zour i appelle demain* »





# Remerciements

Cette thèse a été le fruit d'un travail long, rempli de doutes mais également et surtout de joies. Avant ces trois ans de thèse, cela faisait déjà trois autres années que j'avais investi les lieux (stage, stage et puis stage). A l'époque j'étais tout jeune (21 ans), frêle et incertain sur mon avenir, découvrant la lumière lors de mes premiers pas dans le monde fou de la recherche à l'époque de Pierreton (c'était tout de même agréable de travailler dans la forêt). On me qualifie de vieux meuble ayant vu la fin de l'US2B et le début de l'I2M, l'inauguration du bâtiment A11 Capforest, ce meuble qui change de bureau tous les quatre matins. Aujourd'hui, ce meuble quitte ce laboratoire pleins de souvenirs et surtout de remerciements.

En premier lieu et tout naturellement je souhaite, du fond du cœur à remercier mon directeur de thèse (et mon ancien professeur de fac) Stéphane Morel qui dès la licence a su déceler cette flamme naissante en moi. Personne de passion, je partage aujourd'hui sa vision de la recherche. Sa disponibilité, sa pédagogie et ses éclairs de génie ont été des qualités que j'ai très apprécié. Je tiens profondément à remercier mes encadrants, en commençant par Christian La Borderie, celui le plus éloigné géographiquement de la thèse dans ce beau pays Basque. Christian, un jedi de l'élément fini et de l'expérimental avec qui je me sentais tel un Padawan. Nos échanges et discussions ont toujours été scientifiquement agréables. Je remercie également Jacqueline Saliba, qui ici encadrerait sa première thèse et pas avec le doctorant le moins têtue. Elle a su rester à mon écoute et même me remonter le moral lors des moments de doute.

J'exprime toute ma reconnaissance à cet incroyable jury de soutenance de thèse en commençant par Pr Jaime Planas, qui m'a fait le grand honneur de rapporter ma thèse. Pr Planas a su mettre en valeur mon travail. Je remercie également le second rapporteur Pr Alain Sellier de m'avoir apporté sa vision des modèles d'endommagement (et le non-local dans tout ça ?). Je remercie le président du jury Pr Fabrice Gatuingt d'avoir accepté cette tâche et Pr Ahmed Loukili pour toutes ses remarques.

Cette thèse n'aurait également pu aboutir sans l'équipe technique du laboratoire à qui un grand remerciement leur est adressé : Bernard, toujours prêt avec sa vis micrométrique à étalonner des LVDTs, à brancher des câbles BNC dans tous les sens et chercher les PID avec lui fut très agréable. Philippe aux mains d'argent, je le remercie de m'avoir confectionné deux magnifiques moules de compétition pour mes éprouvettes, et aussi un coin de 30° en acier (avec une précision de 0.1%) pour mes essais.

Merci à Coco et son côté maternel pour la gestion financière et administrative de ma thèse.

Un grand merci à mes anciens professeurs devenus collègues, à l'IUT : Alain, Philippe, Medhi, et à l'université : Myriam (tes blagues vont me manquer), Franck, Denys, Régis et sans oublier ceux que je n'ai pas eu la chance d'avoir : Jean-Luc (mon premier référent Cast3M) et Jean-Christophe.

Et je ne vous oublie pas Michel, Sylvain, Guillaume, Christophe, Amadou et j'en passe des meilleurs pour tous les moments sympathiques, merci également à vous.

Un grand merci à toutes ces personnes qui ont vécu leur thèse auprès de moi, et à leur indéniable soutien. J'ai vu et vécu avec deux générations de thésards, la cuvée Pierreton et la nouvelle cuvée, deux ambiances différentes mais toujours aussi plaisantes. Je commence par les anciens doctorants, Huyen, Anne, Guillaume et Boris (We built this city et C'est lundi !), et mention

---

spéciale à mes deux copines doctorantes qui ont fait tant de chemin aujourd'hui : Julie et Cécile. Julie et sa bonne humeur, sa spontanéité, et ses chocolats ! Elle est surtout le premier visage que j'ai vu en entrant au laboratoire (un goujon collé à la main). Cécilus, tellement de choses à dire, elle a toujours été à mes côtés d'un soutien sans faille, s'impliquant énormément pour mon confort mental. Merci également, à la nouvelle cuvée, Mathieu, Edouard, Pierre, Chinh, et les deux petits derniers, mes anciens étudiants Vincent et Cédric. Je tiens plus particulièrement à remercier Agnès et Antoine qui ont été auprès moi ces deux dernières années et surtout à l'approche de la soutenance. Agnès, finalement je ne suis plus sur de la remercier (en fait je ne sais pas, je suis tellement indécis) et Antoine, mon grand copain de la thèse, ses blagues et nos discussions vont cruellement me manquer. Entre ces deux belles cuvées, il y a deux ex-doctorants, initialement de ma promo, qui ont longtemps été là pour moi et qui se sont impliqués dans ma thèse. Le premier, Phan (de son prénom Ngoc Anh), toujours là à m'aider sur Cast3M, nos discussions scientifiques vont également me manquer. La seconde, Marie, d'une bienveillance sans faille à mon égard, et qui m'a montré la voie du Python ! Et encore une fois... merci les amis !

Et en parlant d'amis, je tiens à remercier mes amis de la Réunion aka les gros débiles, auprès de moi depuis plus d'une décennie ! Merci Jérôme, Orny, Fily, Michèle, Didi, Bou, Sofia, William (qui avant était une meute de un loup). Merci à mon grand copain Bordelais, Théo qui a su être là pour moi.

Un merci à mon groupe de TPE, les météores ! Mes deux meilleurs amis, Paul et Harry, j'espère qu'un jour nous retrouverons tous les trois.

Je n'oublie pas ma famille, d'un soutien hors du commun, malgré les 10 000 km qui nous séparent. Merci à mon cousin Jérôme, un frère pour moi qui a fait grandir en moi la fibre scientifique et aiguisé ma curiosité en physique. Merci à ma sœur, mon père et ma mère pour leur amour inconditionnel.

Et également en parlant d'amour, je terminerai par un énorme remerciement, à celle qui partage mon quotidien depuis tant d'années, celle qui m'a soutenu, rassuré, me fait sourire et me pousse toujours en avant, merci Chou, ma Chloé d'être simplement là et je l'espère pour le plus longtemps et merci Toby mon chat de m'avoir soutenu par tes multiples ronronnements.

*To be continued...*



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'Art : modélisation de l'endommagement et la rupture du béton</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	7
1.2 Béton : matériau quasi-fragile	8
1.3 Mécanique de la rupture adaptée à la quasi-fragilité du béton	18
1.4 Modélisation de l'endommagement du béton	27
1.5 Choix de l'échelle de la modélisation de l'endommagement	40
1.6 Conclusion	45
<b>2 Modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique</b>	<b>47</b>
2.1 Implémentation numérique du modèle	48
2.2 Génération de la mésostructure	52
2.3 Application du modèle sur un VER	54
2.4 Exemple d'application : poutres entaillées en flexion 3 points	68
2.5 Conclusion sur le béton numérique utilisé	80
<b>3 Campagne d'essai et estimation des propriétés de rupture</b>	<b>81</b>
3.1 Campagne d'essai Wedge Splitting (WST)	82
3.2 Courbes-R expérimentales (MLEReq)	89
3.3 Application du béton numérique aux essais expérimentaux	95
3.4 Conclusions	103
<b>4 Vers une mise en lumière de la zone d'élaboration de la rupture</b>	<b>104</b>
4.1 Simulations de l'essai WST : diminution des propriétés de rupture des constituants	105
4.2 Analyse du processus de rupture	109
4.3 Mise en évidence de la zone d'élaboration : analyse énergétique	117
4.4 Conclusion sur l'étude du processus de rupture à partir du modèle mésoscopique	134
<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>136</b>
<b>A Thermodynamique des processus irréversibles : formulation d'une loi de comportement</b>	<b>149</b>
A.1 Deux principes de la thermodynamique	149
A.2 Variables d'état	151
A.3 Potentiel d'état, lois d'état et forces thermodynamiques associées	151
A.4 Lois complémentaires et potentiel de dissipation	153
<b>B Influence des paramètres d'entrée sur la réponse globale et locale</b>	<b>154</b>
B.1 Paramètres élastiques : $E$ et $\nu$	154
B.2 Paramètres de rupture : $f_t$ et $G_f$	158

<b>C</b>	<b>Influence de la suppression des petites classes des granulats</b>	<b>159</b>
C.1	Les réponses macroscopiques . . . . .	159
C.2	Évolutions des paramètres $E$ , $f_t$ et $G_f$ . . . . .	160
<b>D</b>	<b>Champs d'endommagement des poutres entaillées</b>	<b>163</b>
<b>E</b>	<b>Étude sur la modélisation EF WST</b>	<b>167</b>
E.1	Étude sur les conditions aux limites simulations WST . . . . .	167
E.2	Étude sur les différents calculs du taux de restitution numérique . . . . .	169
E.3	Étude sur la possibilité de confinement de la FPZ dans les éprouvettes WST étudiées . . . . .	171
E.4	Point sur l'influence de la boîte mésoscopique . . . . .	171
<b>F</b>	<b>Détermination du champ d'énergie restituée</b>	<b>173</b>
<b>G</b>	<b>Champs d'endommagement des nouvelles simulations WST</b>	<b>175</b>
<b>H</b>	<b>Énergie restituée VS Endommagement instantané</b>	<b>177</b>
<b>I</b>	<b>Illustration de la zone d'élaboration de la rupture sur quelques simulations</b>	<b>179</b>
I.1	Étude de la simulation WST 250 #3 . . . . .	180
I.2	Étude de la simulation WST 300 #2 . . . . .	182
I.3	Étude de la simulation WST 300 #4 . . . . .	184
<b>J</b>	<b>Courbe force-déplacement et courbe-R de la SENB 400</b>	<b>186</b>

# Liste des figures

1.1	La mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture : une science complémentaire . . . . .	7
1.2	Principaux essais de caractérisation en traction indirecte . . . . .	9
1.3	Comportement du béton sous sollicitation uniaxiale : réponse expérimentale . . . . .	9
1.4	Comportement macroscopique et faciès de fissuration sous sollicitation uniaxiale . . . . .	10
1.5	Chargement cyclique traction-compression . . . . .	11
1.6	Réponses contrainte-déformation en compression pour différentes géométries . . . . .	12
1.7	Loi d'effet d'échelle énergétique sur des structures entaillées . . . . .	12
1.8	Types des zones de rupture existantes suivant différents types de matériaux . . . . .	13
1.9	Mécanismes physiques en jeu dans la zone d'élaboration de la rupture . . . . .	14
1.10	Concept de la zone d'élaboration et répartition des contraintes au sein de cette dernière . . . . .	15
1.11	Évolution de la longueur de la zone d'élaboration de la fissure en fonction des dimensions des éprouvettes . . . . .	16
1.12	Mise en image de la zone d'élaboration de la rupture par la corrélation d'images numériques . . . . .	16
1.13	Localisation des événements sur le champ de déformations issu de la corrélation d'images numériques . . . . .	17
1.14	Zones d'un milieu élastique fissuré . . . . .	18
1.15	Modes de rupture . . . . .	19
1.16	Représentation schématique de la MLEReq . . . . .	22
1.17	Illustration de l'évaluation de la résistance à la propagation de la fissure (Courbe-R) . . . . .	23
1.18	Distribution et évolution de la fissure cohésive en mode I . . . . .	24
1.19	Fonction d'adoucissement bi-linéaire de la loi cohésive . . . . .	25
1.20	Réponse contrainte-déformation pour une éprouvette sollicitée en mode I et en considérant un adoucissement linéaire . . . . .	26
1.21	Concept de surface endommagée et effective . . . . .	28
1.22	Comportements élémentaires en compression et en traction considérés dans le modèle de Mazars . . . . .	33
1.23	Réponse en traction-compression du modèle de La Borderie . . . . .	35
1.24	Problème de localisation lors d'une utilisation d'un modèle local d'endommagement fragile . . . . .	37
1.25	Représentation des échelles d'observations et des modèles numériques pour les matériaux multiphasiques . . . . .	40
1.26	Génération exacte du squelette granulaire à partir d'une image et sa simplification circulaire . . . . .	41
1.27	Formes des granulats possibles pour la création du squelette granulaire . . . . .	42
1.28	Illustrations des principales approches numériques existantes pour la modélisation du béton à l'échelle mésoscopique . . . . .	43

1.29	Maillage d'un modèle lattice et description de la liaison lattice . . . . .	44
1.30	Comparaison d'une mésostructure exacte et idéalisée par des disques . . . . .	45
2.1	Réponse macroscopique théorique considérée pour une éprouvette en béton sous chargement uniaxial en traction pure . . . . .	48
2.2	Courbe granulométrique du béton étudié . . . . .	52
2.3	Procédure de tirage des granulats . . . . .	53
2.4	Exemple d'application de la création d'un maillage diffus . . . . .	54
2.5	VER soumis à la traction : dimensions et conditions aux limites . . . . .	55
2.6	Évolution théorique de (a) la contrainte et de (b) l'endommagement de chaque constituant . . . . .	56
2.7	Réponse globale et locale du modèle à la suite d'une simulation traction-compression	57
2.8	Évolution des propriétés de rupture globale du VER par modification du module de Young de la pâte ( $E_{gr\grave{a}}=35$ GPa) . . . . .	58
2.9	Évolution des propriétés de rupture globale du VER par modification module de Young des granulats ( $E_{p\grave{a}te}=25$ GPa) . . . . .	59
2.10	Évolution des propriétés de rupture globale du VER par modification du coeffi- cient de Poisson des constituants . . . . .	59
2.11	Analyse locale de l'influence du module d'élasticité de la pâte . . . . .	60
2.12	Réponse de la simulation avec la variation de la résistance à la traction de la pâte et des granulats . . . . .	61
2.13	Réponse de la simulation avec la variation de l'énergie de fissuration de la pâte et des granulats . . . . .	62
2.14	Champs d'endommagement pour les différentes configurations . . . . .	62
2.15	Évolutions du nombre d'éléments endommagés dans le cas où $f_t$ varie . . . . .	63
2.16	Évolutions du nombre d'éléments endommagés dans le cas où $G_f$ varie . . . . .	63
2.17	Évolution de $E_{MH}$ et $f_{tMH}$ en fonction de la fraction volumique globale . . . . .	66
2.18	Résultats des simulations sur l'exhaustivité de la représentation des classes de granulats . . . . .	67
2.19	Schéma de l'essai de flexion 3 points et les différentes tailles de poutre . . . . .	69
2.20	Maillage mésoscopique de la poutre H1 et conditions aux limites . . . . .	69
2.21	Champ d'endommagement d'une poutre H1 pour un tirage mésoscopique donné . . . . .	70
2.22	Courbes des réponses macroscopiques des poutres entaillées H1-H2-H3 suivant différents tirages des granulats . . . . .	71
2.23	Ajustement de la loi classique d'effet d'échelle aux résultats numériques . . . . .	73
2.24	Cycles charge-endommagement-propagation-décharge . . . . .	74
2.25	Maillage EF pour la simulation élastique . . . . .	75
2.26	Évolution de la raideur et de la complaisance en fonction de la fissure . . . . .	75
2.27	La méthode CCT pour des éléments à 4 noeuds . . . . .	77
2.28	Courbes-R via différentes méthodes (H1-Tirage 3) . . . . .	77
2.29	Ajustement de la courbe-R (H1-Tirage 3) . . . . .	78
2.30	Courbes de Résistance des poutres entaillées H1-H2-H3 . . . . .	79
3.1	L'essai Wedge Splitting : principes, géométrie et conditions limites . . . . .	83
3.2	Schéma et photos du moule et d'une éprouvette . . . . .	84
3.3	Photos de l'essai WST : conditions limites et métrologie . . . . .	85
3.4	Impact du pilotage sur la réponse et la fissuration . . . . .	86
3.5	Comparaison de la consigne et de la réponse par asservissement PID . . . . .	87
3.6	Courbes forces transversales - CMOD expérimentales . . . . .	87

3.7	Modélisation EF (modèle élastique) d'une éprouvette WST : conditions limites et chargement . . . . .	89
3.8	Évolution des données numériques en fonction de la taille . . . . .	90
3.9	Courbes de résistance expérimentales - WST 250 . . . . .	90
3.10	Courbes de résistance expérimentales - WST 300 . . . . .	91
3.11	Cycles charge-propagation-décharge et complaisances sécantes correspondantes . . . . .	93
3.12	Distribtion des contraintes le long du ligament d'une éprouvette WS fissurée . . . . .	93
3.13	Champ de contraintes pour une éprouvette WST 250 soumise à une force unitaire pour un incrément de fissure donné . . . . .	94
3.14	Etude de la position limite de la zone de ligament tendu . . . . .	94
3.15	Modélisation WST avec le maillage mésoscopique . . . . .	96
3.16	Courbes force transversale-CMOD numériques - WST 250 . . . . .	97
3.17	Courbes force transversale-CMOD numériques - WST 300 . . . . .	97
3.18	Courbes de résistance numériques - WST 250 . . . . .	98
3.19	Courbes de résistance numériques - WST 300 . . . . .	98
3.20	Courbe force déplacement WST 250 #2 . . . . .	100
3.21	Courbe de résistance WST 250 #2 . . . . .	100
3.22	Champs d'endommagement cumulé à différents moments de la simulation . . . . .	102
3.23	Champs des énergies restitué à différents moments de la simulation . . . . .	102
4.1	Nouvelles courbes force transversale-CMOD - WST 250 . . . . .	106
4.2	Nouvelles courbes force transversale-CMOD - WST 300 . . . . .	106
4.3	Nouvelles courbes de résistance - WST 250 . . . . .	107
4.4	Nouvelles courbes de résistance - WST 300 . . . . .	107
4.5	Endommagement géométrique moyen par longueur de fissure élastique équivalente $\bar{D}_{geo/\delta a}$ - WST 250 #2 . . . . .	110
4.6	Endommagement géométrique instantané moyen par longueur de fissure élastique équivalente $\bar{D}_{geo/\delta a}$ - WST 250 #2 . . . . .	111
4.7	Surface où l'endommagement est actif par longueur de fissure élastique équivalente - WST 250 #2 . . . . .	111
4.8	Illustration des zones filtrées suivant 4 critères - WST 250 #2 . . . . .	112
4.9	Longueur des zones filtrées - WST 250 #2 . . . . .	113
4.10	Largeur des zones filtrées - WST 250 #2 . . . . .	113
4.11	Champ d'énergie restituée à l'instant T1 (lors du régime plateau) . . . . .	114
4.12	Explication de la création et de l'évolution de la boite jouant le rôle de la zone d'élaboration . . . . .	115
4.13	Évolution de la dimension de la boite faisant office de zone d'élaboration . . . . .	115
4.14	Évolutions des distances moyennes réelles $\bar{dr}$ . . . . .	116
4.15	Évolutions des distances moyennes $\bar{dx}$ . . . . .	117
4.16	Courbe de résistance obtenue à partir du champ d'énergie restituée- WST 250 #2 . . . . .	118
4.17	Évolution du ratio entre l'énergie globale restituée au sein d'une zone et la totalité de l'éprouvette . . . . .	119
4.18	Distribution de l'énergie restituée $W_r$ pendant la propagation (à l'instant A) . . . . .	119
4.19	Endommagement actif $\Delta D$ aux interfaces à l'extérieur de la zone d'élaboration de la rupture à l'instant A . . . . .	119
4.20	Principe de la distribution des taux locaux de restitution d'énergie . . . . .	120
4.21	Instants considérés pour l'étude de la distribution des énergies restituées - WST 250 #2 . . . . .	121
4.22	Distribution du taux de restitution d'énergie d'endommagement local le long du ligament- WST 250 #2 . . . . .	121



4.23	Comparaison des réponses macroscopiques entre les propriétés des chapitres 3 et 4 sur la simulation WST 250 #2 . . . . .	122
4.24	Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élaboration de la rupture - WST 250 #2 (propriétés du béton expérimental) . . . . .	123
4.25	Distribution Gaussienne des points de Gauss endommagés à deux instants (Pic et P0) et détermination de $h_{FPZ}$ - WST 250 #2 . . . . .	124
4.26	Évolution de la largeur de la zone d'élaboration $h_{FPZ}$ calculé à partir de la loi Gaussienne . . . . .	124
4.27	Taux de restitution d'énergie volumique $G_d$ - WST 250 #2 . . . . .	125
4.28	Taux de restitution d'énergie volumique $G_d$ - WST 300 #4 . . . . .	125
4.29	Taux de restitution d'énergie volumique $G_d$ - WST 250 #2 (propriétés du Chapitre 3) . . . . .	126
4.30	Maxima locaux des distribution du taux de restitution pour chaque tranche $h_{tr} = 4mm$ - WST 250 #2 . . . . .	127
4.31	Évolution du taux local de restitution d'énergie $G_{dam}$ dans chaque bande $h_{tr}=10$ mm - WST 250 #2 . . . . .	128
4.32	Évolution du taux local de restitution d'énergie $G_{dam}$ dans chaque bande $h_{tr}=10$ mm - WST 300 #4 . . . . .	128
4.33	Évolution de $G_{dam}(y, a)$ dans la bande considérant les 20 à 30 premiers millimètre du ligament - WST 250 #2 . . . . .	129
4.34	Évolution du taux local de restitution d'énergie $G_{dam}$ dans chaque bande $h_{tr}=10$ mm pour une simulation présentant un confinement précoce de la zone d'élaboration - WST 250 #2 (propriétés béton expérimental du Chapitre 3) . . . . .	130
4.35	Énergie de rupture locale $G_{F_{loc}}(y)$ - WST 250 #2 . . . . .	131
4.36	Énergie de rupture locale $G_{F_{loc}}(y)$ - WST 300 #2 . . . . .	131
4.37	Champs d'endommagement à la fin des simulations sur les trois géométries considérées . . . . .	132
4.38	Évolution du taux de restitution d'énergie d'endommagement local $G_{dam}(a)$ pour une bande située entre 10 et 20 mm de l'entaille initiale pour les trois géométries considérées . . . . .	133
4.39	Évolution de $G_{F_{loc}}(y)$ le long du ligament pour les trois géométries considérées . . . . .	133
4.40	Courbes de résistance des trois géométries considérées . . . . .	134
B.1	Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de module d'élasticité de la pâte . . . . .	154
B.2	Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de module d'élasticité des granulats . . . . .	155
B.3	Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de coefficient de Poisson . . . . .	155
B.4	Champ d'endommagement pour différentes valeurs de module de Young de la pâte cimentaire ( $E_{gra} = 35GPa$ ) . . . . .	156
B.5	Champ d'endommagement pour différentes valeurs de module de Young des granulats ( $E_{pâte} = 25GPa$ ) . . . . .	156
B.6	Champ d'endommagement pour différentes valeurs de coefficient de Poisson . . . . .	157
B.7	Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de résistance à la traction . . . . .	158
B.8	Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs d'énergie de rupture . . . . .	158
C.1	Courbes contrainte-déformation pour des mortiers homogénéisés . . . . .	159
C.2	Courbes contrainte-déformation avec l'utilisation de $G_{fMH_{moyen}}$ . . . . .	160
C.3	Courbes contrainte-déformation avec l'utilisation de $G_{fMH_{min}}$ . . . . .	160
C.4	Évolution de $E$ suivantes les différentes configurations de béton simplifié . . . . .	161
C.5	Évolution de $f_t$ suivantes les différentes configurations de béton simplifié . . . . .	161

C.6	Évolution de $G_f$ suivantes les différentes configurations de béton simplifié . . . .	162
D.1	Champs d'endommagement - dimension H1 . . . . .	164
D.2	Champs d'endommagement - dimension H2 . . . . .	165
D.3	Champs d'endommagement - dimension H3 . . . . .	166
E.1	Les différents chargements et conditions aux limites testés . . . . .	167
E.2	Evolution du CMOD selon les différents cas . . . . .	168
E.3	Maillage et différentes méthodes de calcul du taux de restitution numérique . . .	170
E.4	Comparaison des différentes méthodes de calcul du taux de restitution numérique	170
E.5	Limite Ligament tendu-comprimé . . . . .	171
E.6	Possibilité de propagation de la fissure dans une zone tendue . . . . .	171
E.7	Champs d'endommagement perturbés par les dimensions de la boîte mésosco- pique . . . . .	172
F.1	Identification de l'énergie restituée à partir de la réponse macroscopique . . . .	173
G.1	Champs d'endommagement WST 250 pour différents tirages . . . . .	175
G.2	Champs d'endommagement WST 300 pour différents tirages . . . . .	176
H.1	Distribution du nombre de points de Gauss suivant différentes variables - lors du régime plateau (instant A) . . . . .	178
H.2	Distribution des valeurs $W_r$ et $\Delta D$ - lors du régime plateau (instant A) . . . . .	178
I.1	(a) Champ d'endommagement en fin de simulation, (b) courbe-R correspondant incluant les instants considérés pour l'étude - WST 250 #3 . . . . .	180
I.2	Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration - WST 250 #3 . . . . .	180
I.3	Distances moyennes réelles $\overline{dr}$ - WST 250 #3 . . . . .	181
I.4	Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élabora- tion de la rupture - WST 250 #3 . . . . .	181
I.5	(a) Champ d'endommagement en fin de simulation, (b) courbe-R correspondant incluant les instants considérés pour l'étude - WST 300 #2 . . . . .	182
I.6	Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration - WST 300 #2 . . . . .	182
I.7	Distances moyennes réelles $\overline{dr}$ - WST 300 #2 . . . . .	183
I.8	Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élabora- tion de la rupture - WST 300 #2 . . . . .	183
I.9	(a) Champ d'endommagement en fin de simulation, (b) courbe-R correspondant incluant les instants considérés pour l'étude - WST 300 #4 . . . . .	184
I.10	Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration - WST 300 #4 . . . . .	184
I.11	Distances moyennes réelles $\overline{dr}$ - WST 300 #4 . . . . .	185
I.12	Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élabora- tion de la rupture - WST 300 #4 . . . . .	185
J.1	Courbe force déplacement SENB 400 . . . . .	186
J.2	Courbe-R . . . . .	186

# Liste des tableaux

2.1	Fraction volumique $f_{g_i}$ des différentes classes de granulats . . . . .	52
2.2	Paramètres d'entrée utilisés pour le modèle d'endommagement . . . . .	55
2.3	Paramètres globaux « homogénéisés » du VER pour 10 tirages aléatoires . . . . .	64
2.4	Propriétés du mortier homogénéisé pour les différentes configurations . . . . .	65
2.5	Propriétés globales des configurations du béton simplifié et comparaison à celui de référence (étape 4)- moyenne sur 10 Tirages . . . . .	68
2.6	Dimensions des poutres entaillées (en mm) . . . . .	69
2.7	Résultats des simulations . . . . .	70
2.8	Valeurs de $\Delta a$ et de $G_R$ au pic . . . . .	79
3.1	Dimensions des éprouvettes WST . . . . .	83
3.2	Formulation du béton utilisé pour la fabrication des éprouvettes WST . . . . .	84
3.3	Propriétés mécaniques du béton étudié . . . . .	84
3.4	Vitesse d'ouverture d'entaille retenue pour les essais WST . . . . .	86
3.5	Réponses éprouvettes WST 250 . . . . .	88
3.6	Réponses éprouvettes WST 300 . . . . .	88
3.7	Analyse des courbes-R des éprouvettes WST 250 . . . . .	91
3.8	Analyse des courbes-R des éprouvettes WST 300 . . . . .	92
3.9	Dimensions de la boîte mésoscopique . . . . .	95
3.10	Paramètres utilisés pour les simulations WST avec le modèle d'endommagement . . . . .	96
3.11	Résultats des simulations numériques sur les éprouvettes WST 250 . . . . .	99
3.12	Résultats des simulations numériques sur les éprouvettes WST 300 . . . . .	99
4.1	Paramètres utilisés dans les nouvelles simulations WST . . . . .	105
4.2	Résultats des nouvelles simulations numériques sur les éprouvettes WST 250 . . . . .	108
4.3	Résultats des nouvelles simulations numériques sur les éprouvettes WST 300 . . . . .	108
A.1	Variables d'états et forces thermodynamiques associées . . . . .	151

# Introduction générale

## Comportement complexe du béton : vers une compréhension plus fine

Après plus d'un siècle d'industrialisation, le béton trouve son champ d'utilisation dans la plupart des domaines de l'ingénierie civil sans pour autant avoir dévoilé tous ses secrets. L'endommagement mécanique du béton est principalement lié à sa faible résistance à la traction qui favorise la nucléation de micro-fissures qui en se collapsant forment une ou des macro-fissures. A l'échelle de la structure, l'endommagement provoque une perte de performance et de durabilité. A l'échelle du matériau, la dégradation apporte une modification des propriétés physiques et mécaniques initiales. De plus, les mécanismes physiques accompagnant l'endommagement font apparaître des déformations non-homogènes au sein du matériau. Ainsi, la compréhension du comportement complexe de ce matériau a fait l'objet de nombreuses études au cours des 50 dernières années où plusieurs modèles ont été proposés afin de décrire de manière convenable son comportement endommageable.

Le comportement à la rupture des matériaux quasi-fragiles tels que les bétons et plus généralement les matériaux de constructions (bois, maçonnerie, céramique...) est caractérisé par le développement, en fond de fissure, d'une zone d'élaboration de la rupture (ou *fracture process zone*, FPZ) principalement micro-fissurée. L'existence de cette zone d'élaboration favorise la dissipation de l'énergie élastique stockée dans la structure par un « jeu » de redistributions de contraintes contribuant à la propagation stable de la fissure principale. Ainsi, la zone d'élaboration est la clé de voûte du comportement quasi-fragile du béton et il va de soi que la compréhension du processus d'évolution de la zone d'élaboration et sa caractérisation soit un objectif majeur dans l'étude du comportement à la rupture du béton. Ainsi, malgré le caractère intrinsèquement fragile de l'endommagement, le comportement à rupture montre une certaine ductilité en s'accompagnant d'un comportement adoucissant qualifié de comportement quasi-fragile. La difficulté de ce type de comportement porte sur le fait qu'à partir de ce moment, la loi de comportement du matériau n'est plus directement observée et dont l'apparition d'une ou plusieurs surfaces de discontinuités cinématiques (fissures) au sein du béton conduit à parler d'un passage d'un comportement de type matériau à un comportement de type structure : l'échelle d'observation devient la clé de la compréhension. De plus, la taille de la zone d'élaboration de la rupture apparaît dépendante de la géométrie des structures entraînant également une dépendance analogue des propriétés de rupture vis-à-vis de la géométrie des structures. Le comportement de la structure dépend de l'étendue de la zone d'élaboration pour une taille de structure donnée : c'est l'effet d'échelle. De surcroît, le béton est par nature un matériau hétérogène constitué de granulats de formes et de tailles différentes repartis aléatoirement dans une pâte de ciment. Au final, le comportement à la rupture du béton est lié à la zone d'élaboration, elle-même liée au caractère hétérogène du béton. Autrement dit, la prise en compte des constituants du béton est cruciale dans l'étude du comportement du béton. Ce couplage entre propriétés de rupture et géométrie des structures, encore mal compris aujourd'hui, représente un verrou majeur pour le

---

dimensionnement optimal des structures du génie civil. A terme, une meilleure compréhension du comportement du béton, pourrait permettre de revoir les coefficients de sécurité appliqués et ainsi pourrait permettre une économie des matières premières et de l'énergie nécessaire à la réalisation d'un béton.

De plus, de nos jours, les structures sont dimensionnées suivant une contrainte nominale maximale qui contraint la structure à rester dans la limite d'élasticité du matériau. Cependant, ce type de calcul n'empêche pas la structure de rompre à partir d'une fissure dont l'amorçage exige une certaine quantité d'énergie, énergie qui nécessiterait d'être incluse dans les règles de calculs. L'aspect adoucissant du béton n'est également pas prise en compte lors du dimensionnement : ce type de comportement atteste d'une certaine résistance résiduelle après que la contrainte nominale maximale ait été atteinte.

## **Échelle d'étude et modèle appliqué**

Étant donné que le processus de fissuration, prenant place dans la zone d'élaboration est fortement lié au caractère hétérogène du béton et à la géométrie de la structure, une analyse micro-mésoscopique s'avère être nécessaire. Les modèles mécaniques classiques établis sur la base des milieux continus perdent leur sens dès qu'on passe d'une échelle macroscopique à une échelle microscopique approchant la structure même du matériau. A cette échelle, le milieu ne peut plus être considéré comme homogène et la description classique s'avère défailante. Ainsi, des solutions alternatives sont donc nécessaires pour apporter une description plus fine du milieu hétérogène. D'un point de vue numérique, 2 types de modèles sont aujourd'hui capables d'apporter des réponses quant au phénomène de couplage entre propriétés de rupture et géométrie des structures : les modèles microscopiques et les modèles mésoscopiques. Parmi les modèles microscopique, les modèles treillis (*lattice models*) bien qu'efficaces pour modéliser la zone d'élaboration de la rupture nécessitent l'emploi de nombreux paramètres pour décrire le comportement de rupture à l'échelle microscopique, lesquels paramètres sont difficilement identifiables. De plus, la microstructure d'un béton est très complexe et une modélisation précise de cette dernière est assez irréaliste. Ainsi, le choix est fait ici de se tourner vers un modèle agissant à l'échelle mésoscopique, s'étendant de l'échelle du grain de sable à l'échelle du plus gros granulats, puisque le cœur de la problématique se situe à l'échelle de la zone d'élaboration, i.e., à des échelles de longueur de l'ordre de quelques centimètres. En effet, si la micro-fissuration agit à l'échelle microscopique, son effet est supplanté par les mécanismes de redistribution de contraintes et de dissipation d'énergie agissant à l'échelle de la zone d'élaboration.

L'utilisation d'un modèle à l'échelle mésoscopique devrait permettre la description des conséquences du désordre initial local sur la réponse macroscopique ainsi que des différentes interactions prenant place entre les constituants au cours du processus de rupture. Un modèle mésoscopique développé récemment au laboratoire SIAME (UPPA), basé sur le modèle d'endommagement isotrope de Fichant et s'appuyant sur un maillage diffus de la mésostructure du béton (matériau bi-phasique : propriétés des granulats et de la matrice cimentaire projetées sur les points de Gauss d'éléments finis répartis sur une grille de maille régulière), a montré des premiers résultats très prometteurs permettant notamment d'estimer la distribution de l'endommagement au sein de la zone d'élaboration ainsi que les champs d'ouverture de fissure. Ce modèle utilisant peu de paramètres (essentiellement le module d'élasticité, l'énergie de rupture et la résistance à la traction et compression des granulats et de la matrice) est celui utilisé dans ces travaux de thèse afin de mettre en évidence le processus de rupture quasi-fragile du béton

---

et, l'influence de l'hétérogénéité et de la géométrie des structures.

## Objectifs et stratégies de ces travaux

En s'appuyant sur les résultats d'essais de rupture d'un béton au travers de différentes géométries de spécimens entaillés (flexion 3 points et Wedge Splitting), le modèle mésoscopique est utilisé pour décrire la rupture quasi-fragile du béton. On s'attachera à mettre en évidence la capacité du modèle à décrire le développement de la zone d'élaboration ainsi que la propagation énergétique stationnaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration (propagation à résistance constante « *self-similar crack propagation* »).

L'intérêt de ces travaux de thèse, est dans un premier temps, la description de l'élaboration d'un béton numérique, par une approche aux éléments finis, créé dans le cadre de la théorie de l'endommagement, et plus particulièrement la mécanique de l'endommagement isotrope. Dans un second temps, les résultats des simulations d'essais de rupture en mode I menés au laboratoire couplés aux outils de la mécanique de la rupture, permettront de mettre en évidence le processus d'endommagement et de rupture et, de surcroît sur la pertinence du modèle utilisé. Ainsi, une description détaillée de la zone d'élaboration de la rupture sera réalisée à partir de la réponse globale et locale (champs numériques) des simulations. En effet, l'analyse couplée par l'intermédiaire des courbes de résistance, estimées dans le cadre de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture équivalente (MLEReq), et des champs locaux (numériques) d'endommagement et d'énergie restituée, apporte un éclairage intéressant du processus de fissuration.

La mise en lumière de la zone d'élaboration de la rupture ou encore le confinement de cette dernière au cours de la propagation de la fissure principale sera réalisée. Effectivement, les énergies de rupture calculées à partir de la réponse macroscopique peuvent être sur-estimées dans le cas où la zone d'élaboration de taille conséquente par rapport au spécimen, ne peut se développer librement sans être contrainte par un champ de compression et/ou par la proximité d'une condition aux limites. Ainsi, l'estimation et l'analyse des courbes de résistance (image énergétique de la courbe force-déplacement) permet de montrer l'existence ou non de ce phénomène et, également de proposer une énergie de rupture uniquement liée au développement et/ou à la propagation de la fissure avec sa zone d'élaboration.

Enfin, un critère de développement de la zone d'élaboration sera étudié et nous conduira à analyser l'évolution du champ d'endommagement au cours du processus de rupture.

## Organisation du manuscrit

Le Chapitre 1 « État de l'art » proposera dans un premier temps de dresser un portrait du comportement du béton et de ces différents aspects phénoménologiques devant être retranscrits lors d'une modélisation du comportement. Par la suite, un point sera réalisé sur la prise en compte d'une discontinuité cinématique en présentant le cadre général de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER), et plus particulièrement la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture équivalente qui permet de résoudre un problème non-linéaire en utilisant des outils de la MLER. Dans cette section, nous présenterons l'intérêt et l'estimation de la courbe de résistance, élément fondamental dans ces travaux. En partant de la théorie de l'endommagement, énoncé dans la cadre de la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI), un point sur un grand nombre de modèles d'endommagement (isotrope, anisotrope, plastique) du béton sera réalisé et leurs limites seront abordées. Et enfin, pour terminer cet état de l'art, il sera proposé

---

une section traitant de la modélisation de la mésostructure et des simplifications possibles de cette dernière.

Le Chapitre 2 sera centré sur le modèle de Fichant-Laborderie à l'échelle mésoscopique. Après une présentation détaillée de la loi de comportement utilisée, de l'implémentation du modèle dans le code de calcul aux éléments finis Cast3M et de la génération de la mésostructure, une batterie de test est réalisée sur un Volume Élémentaire Représentatif à l'échelle mésoscopique. Dans un premier temps, la bonne description du comportement macroscopique du béton par le modèle mésoscopique sera abordée. Dans un second temps, une étude paramétrique sera réalisée afin d'analyser l'influence des différents paramètres d'entrée sur la réponse globale et locale. Et enfin, un point sur l'importance d'une représentation exhaustive du squelette granulaire dans l'étude du processus de rupture sera fait. Ce chapitre se terminera par un exemple d'application du modèle sur des poutres entaillées, de tailles homothétiques, sollicitées en flexion 3 points où l'effet d'échelle sera illustré. Cette dernière section amorcera la suite de ces travaux en abordant le problème de confinement détecté par les courbes-R.

Le Chapitre 3 sera le chapitre expérimental de ce manuscrit. Il traitera d'une campagne expérimentale réalisée aux travers d'essai Wedge Splitting sur 2 géométries différentes à partir desquelles les propriétés de rupture seront estimées. Un point sur la possibilité de confinement de la zone d'élaboration dans ce type d'essai sera également abordé. Par la suite, des simulations à partir du modèle mésoscopique seront réalisées sur la base de ces essais afin de valider le modèle par l'expérimental et d'obtenir des réponses locales non accessible par l'étude expérimentale.

Le dernier chapitre, à savoir le Chapitre 4, montrera la dépendance de la taille de la zone d'élaboration par rapport aux propriétés des constituants du béton. Ensuite, il sera proposé différents traitements des résultats numériques, par couplage des courbes de résistances, afin de mettre en lumière les mécanismes présents au sein de la zone d'élaboration. Une étude énergétique locale sera réalisée afin de mettre en évidence la zone d'élaboration de la rupture et d'établir un critère de développement de cette dernière. *In fine*, l'utilisation d'un béton numérique, en plus d'estimer des propriétés de rupture, permettra une compréhension et une illustration du fonctionnement de la zone d'élaboration sur la base d'une analyse fine des champs d'endommagement. L'analyse de différents critères conduira à proposer l'utilisation du taux de restitution d'énergie d'endommagement local comme critère de développement de la zone d'élaboration du béton.

# Chapitre 1

## État de l'Art : modélisation de l'endommagement et la rupture du béton

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Béton : matériau quasi-fragile</b> . . . . .	<b>8</b>
1.2.1	Comportement à la rupture du béton sous sollicitations quasi-statiques : aspects phénoménologiques . . . . .	8
1.2.1.1	Dissymétrie de comportement en compression et en traction . . . . .	9
1.2.1.2	Effet unilatéral du béton . . . . .	11
1.2.1.3	Effet d'échelle dans les structures en béton . . . . .	11
1.2.2	Zone d'élaboration de la fissure : clé de voûte du comportement adoucissant . . . . .	13
1.2.2.1	La zone d'élaboration : observation locale . . . . .	13
1.2.2.2	Évolution de la zone d'élaboration de la rupture : développement et taille critique . . . . .	14
1.2.2.3	Caractérisation de la zone d'élaboration de la rupture . . . . .	15
<b>1.3</b>	<b>Mécanique de la rupture adaptée à la quasi-fragilité du béton</b> . . . . .	<b>18</b>
1.3.1	Mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) . . . . .	18
1.3.1.1	Approche locale : champs asymptotiques en fond de fissure et facteur d'intensité de contrainte . . . . .	18
1.3.1.2	Approche globale : étude énergétique . . . . .	20
1.3.2	Mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente . . . . .	21
1.3.2.1	Approximation de la longueur de fissure : longueur de fissure élastique équivalente . . . . .	21
1.3.2.2	Courbe de résistance . . . . .	21
1.3.3	Mécanique non-linéaire de la rupture . . . . .	24
1.3.3.1	Modèle de zone cohésive . . . . .	24
1.3.3.2	Modèle à bande de fissuration . . . . .	25
<b>1.4</b>	<b>Modélisation de l'endommagement du béton</b> . . . . .	<b>27</b>
1.4.1	Modèles d'endommagement des bétons . . . . .	27
1.4.1.1	Théorie de l'endommagement . . . . .	27
1.4.1.2	Modèle d'endommagement local isotrope de Mazars . . . . .	32
1.4.1.3	Modèles d'endommagement anisotrope . . . . .	33
1.4.1.4	Modèles unilatéraux . . . . .	34
1.4.2	Modèles de plasticité . . . . .	36



1.4.2.1	Critère de von Mises . . . . .	36
1.4.2.2	Critère de Drucker-Prager . . . . .	36
1.4.2.3	Critère de Nadai . . . . .	36
1.4.3	Problème de localisation : techniques de régularisation . . . . .	37
1.4.3.1	Régularisation non-locale . . . . .	37
1.4.3.2	Régularisation énergétique . . . . .	39
1.4.4	Conclusion sur la modélisation de l'endommagement des bétons . . . . .	39
<b>1.5</b>	<b>Choix de l'échelle de la modélisation de l'endommagement . . . . .</b>	<b>40</b>
1.5.1	Génération de la mésostructure . . . . .	41
1.5.2	Approches numériques disponibles pour l'application des modèles . . . . .	42
1.5.2.1	Approche aux éléments finis . . . . .	42
1.5.2.2	Approche par éléments discrets particuliers . . . . .	43
1.5.2.3	Approche lattice ou treillis . . . . .	44
1.5.3	Idéalisation de la forme des granulats . . . . .	44
<b>1.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>45</b>

---

## 1.1 Introduction

L'essentiel de l'activité dans les matériaux de construction est assuré par la filière béton avec plus de 70% de chiffre d'affaire. Autrement dit, en France, il est le matériau le plus utilisé. Cependant, scientifiquement, le matériau béton reste un matériau très complexe n'ayant pas dévoilé tous ses secrets. En effet, le béton mais également la majeure partie des matériaux de constructions (bois, roches, céramiques...) ont un comportement qualifié de quasi-fragile, i.e., un comportement de type adoucissant lié à l'endommagement progressif qui se met en place au cours d'une certaine sollicitation (mécanique voire thermique et/ou hydrique). A l'échelle de la structure, le béton est considéré comme « macroscopiquement » homogène. Néanmoins, constitué de plusieurs composants, le béton est bel et bien un matériau composite, i.e., hétérogène où des granulats de formes et de tailles différentes sont pris dans une matrice à pâte cimentaire. Ce caractère hétérogène doit être pris en compte puisque le comportement dépend directement des propriétés de ces constituants. La mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture sont des outils permettant la modélisation du comportement à la rupture du béton et contribuent également à l'amélioration de la compréhension du processus d'endommagement dans ce type de matériau. Ceci permet à terme d'optimiser la conception, la performance et de surcroît la durée de vie des ouvrages en béton, le tout dans une optique de développement durable.

Cet état de l'art, a pour objectif, de présenter dans un premier temps les particularités du matériau béton et dans un second temps, de manière non-exhaustive, les modèles mécaniques existants : de la mécanique de l'endommagement en passant par la mécanique de la rupture (Figure 1.1).

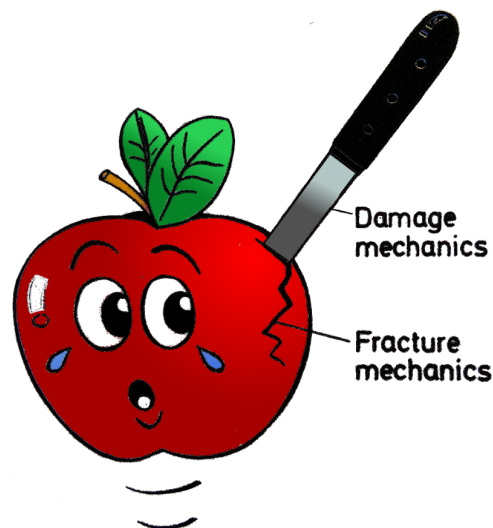


FIGURE 1.1 – La mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture : une science complémentaire [Lemaitre, 1996]

La bonne modélisation du comportement à la rupture du béton nécessite la description de la zone d'élaboration de la rupture précédant la formation d'une fissure principale. A terme, un modèle numérique complet, robuste et implémentable dans un code de calcul, permettra l'utilisation d'un béton numérique dans le cadre, par exemple, de l'étude d'un ouvrage complexe.

## 1.2 Béton : matériau quasi-fragile

Le béton est un matériau composite isotrope présentant un comportement non-linéaire très complexe dû d'une part à son caractère hétérogène et d'autre part à la présence d'une zone d'élaboration de la rupture (ou en langue anglaise « Fracture Process Zone ou FPZ »).

### 1.2.1 Comportement à la rupture du béton sous sollicitations quasi-statiques : aspects phénoménologiques

Le comportement macroscopique du béton a été identifié au travers d'essais de caractérisation et de rupture [Mazars, 1984, Torrenti, 1987]. Par l'étude de la réponse macroscopique du matériau, des caractéristiques mécaniques peuvent être obtenues : le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , les résistances maximales à la compression  $f_c$  et à la traction  $f_t$ . Il est possible de classer ces essais en quatre grandes familles :

- Compression directe : certainement l'essai le plus répandu, puisqu'il est très utilisé en dehors du domaine de la recherche (NF EN-206-1) notamment en bureau de contrôle. Cependant, il a été dénoté la forte influence des conditions aux limites imposées pendant l'essai sur le comportement post-pic [Torrenti, 1996].
- Traction directe : cet essai est difficile à mettre en œuvre (pilotage complexe en post-pic dû à l'instabilité du matériau). *In fine*, il y a très peu d'études dans la littérature sur ce mode de chargement et ceux qui y sont présents restent une référence (Figure 1.3b) [Terrien, 1980, Reinhardt et al., 1986]. Face à cette difficulté l'essai P.I.E.D [Mazars et al., 1988] (Pour Identifier l'Endommagement Diffus), où l'effet de traction est transmis au matériau par des barrettes métalliques collées le long des faces latérales, a été mis en œuvre et permet ainsi d'avoir une réponse du matériau en traction directe.
- Traction indirecte : essais de flexion 3 ou 4 points, de traction par fendage (ou essai Brésilien) ou encore essai de fendage par enfoncement d'un coin (Wedge Splitting Test) (Figure 1.2). La complexité de la mise en œuvre des essais de traction directe a conduit à la réalisation de ce genre d'essai. L'intérêt réside dans le confinement des zones de traction créées à l'intérieur des éprouvettes et des propriétés supplémentaires peuvent être obtenues, comme l'énergie de rupture  $G_f$  [50-FMC, 1985]. Notons que ces travaux de thèse se basent sur des essais de traction indirecte.
- Multiaxial : ce type d'essai permet de se rapprocher au mieux du comportement d'une structure réelle [Torrenti, 1987]. L'éprouvette peut être sollicitée de manière biaxiale ou encore triaxiale. L'essai triaxial classique consiste à appliquer un chargement de compression avec une pression de confinement constante (proportionnelle ou non). Cette dernière a une influence sur le comportement du matériau : la fissure se stabilise empêchant une propagation et conduisant ainsi à une réponse ductile.

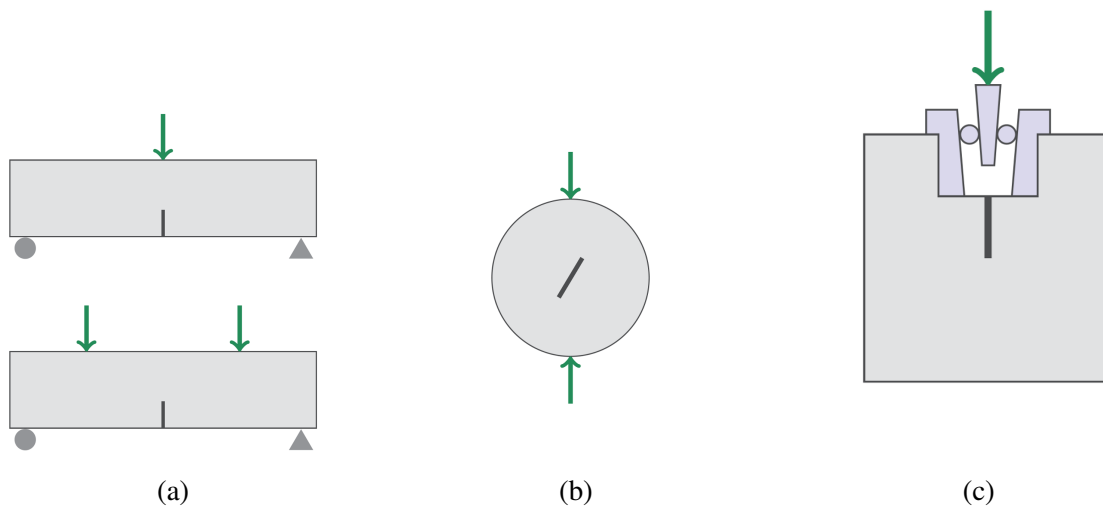
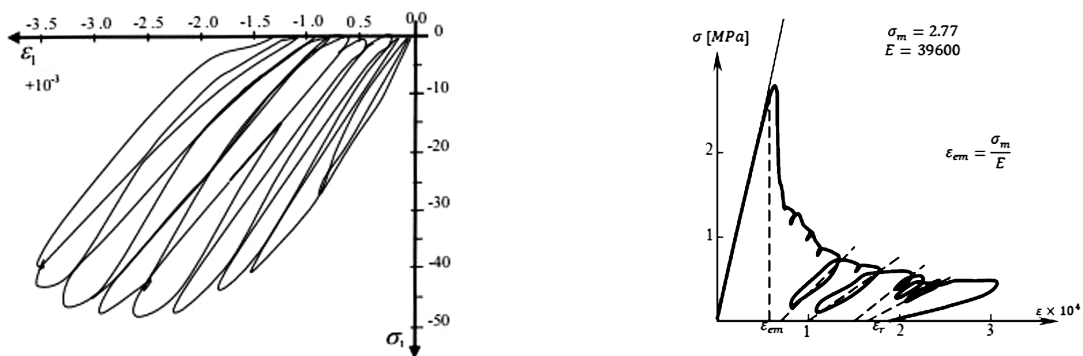


FIGURE 1.2 – Principaux essais de caractérisation en traction indirecte (a) flexion trois et quatre points, (b) essai de fendage sur cylindre, (c) Wedge Splitting Test

### 1.2.1.1 Dissymétrie de comportement en compression et en traction

Empiriquement, le béton a une résistance en compression  $f_c$  environ 10 fois supérieure à sa résistance en traction  $f_t$ . Cette différence peut être constatée en comparant la réponse macroscopique d'une éprouvette sollicitée en traction et en compression (Figure 1.3). De plus, à partir d'un certain seuil de déformation, des déformations permanentes se mettent en place (visibles à partir du décalage des cycles représentés en Figure 1.3).



(a) Réponse macroscopique du béton sollicité en compression simple [Ramtani, 1990]

(b) Réponse macroscopique du béton sollicité en traction [Terrien, 1980]

FIGURE 1.3 – Comportement du béton sous sollicitation uniaxiale : réponse expérimentale

### Comportement en compression

Lorsqu'une éprouvette de béton est comprimée, une non-linéarité apparaît au-delà d'un certain seuil estimé environ de 30 à 50 % de  $f_c$ . Dès lors, une décohérence pâte/granulats apparaît : des micro-fissures parallèles au sens de chargement apparaissent et le module de rigidité tangent ( $E_t$ ) commence à diminuer. Juste avant le pic de contrainte, un phénomène de dilatance prend place (augmentation du volume apparent, i.e.,  $\varepsilon_L > \varepsilon_T$ ). En post-pic, une interconnexion des micro-fissures se fait donnant progressivement naissance à une, voire plusieurs macro-fissures :

une phase adoucissante-ductile se met alors en place, associée à un frottement interne entre les lèvres des fissures (Figure 1.4a).

### Comportement en traction

Le processus d'endommagement reste quasiment identique au comportement en compression mais sous cette sollicitation, les micro-fissures s'orientent perpendiculairement à la direction de chargement (Figure 1.4b). Notons également une fin du domaine élastique un peu plus tardive (entre 50 à 60 % de  $f_t$ ) suivie d'une faible dégradation de la rigidité du matériau jusqu'au pic : il peut être considéré un comportement élastique jusqu'au pic [Mazars et al., 1990]. En post-pic, il y a apparition de déformations inélastiques accompagnant la chute brutale du module de Young. Le mode I de rupture prédomine avec une ouverture des micro-fissures : le comportement adoucissant est réellement prononcé. Dans cette phase le matériau a encore la possibilité de transmettre des contraintes par le biais de ponts de matière entre les lèvres des fissures (crack bridging). La partie adoucissante peut être divisée en deux phases :

- Juste après le pic de contrainte en traction ( $\sigma = f_t$ ), il y a une localisation des déformations traduite par une micro-fissuration concentrée avec apparition d'une macro-fissure. Les granules, pouvant être considérés comme des éléments rigides, font obstacle à la propagation de cette dernière.
- En fin du post-pic, une phase asymptotique apparaît, la vitesse de propagation diminue et la friction entre les granules impose des contraintes résiduelles empêchant la diminution de la contrainte appliquée vers la rupture complète de l'éprouvette.

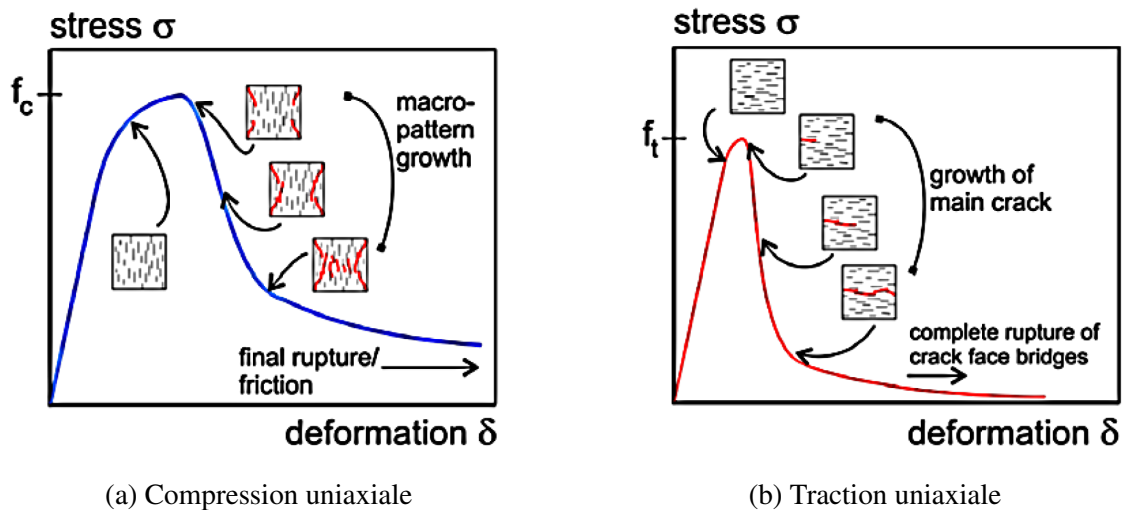


FIGURE 1.4 – Comportement macroscopique et faciès de fissuration sous sollicitation uniaxiale [van Mier, 2008]

En résumé, la résistance du béton, sous sollicitation mécanique, diminue à la suite de la formation de fissures plus ou moins diffuses. Une localisation des déformations prend place, conduisant le matériau béton à avoir un comportement du type adoucissant et des déformations anélastiques peuvent apparaître. Ce phénomène de localisation de l'endommagement de micro-fissuration doit être pris explicitement en compte afin de décrire précisément la loi de comportement [Torrenti, 1996]. Notons que la faible résistance en traction du béton, rend le paramètre  $f_t$  prépondérant dans la modélisation à la rupture du béton. Toutefois, un autre phénomène doit être pris en compte : l'effet unilatéral [La Borderie, 1991].

### 1.2.1.2 Effet unilatéral du béton

L'effet unilatéral, a été mis en évidence par Terrien [Terrien, 1980] pour des ruptures localisées en une seule macro-fissure et confirmé par Ramtani [Ramtani, 1990] dans le cas d'une distribution diffuse des micro-fissures. Ce phénomène est le constat d'une restauration de la raideur lors d'un passage d'un chargement en traction (où un endommagement a déjà eu lieu) à un chargement en compression. Cette observation macroscopique peut se faire au travers d'un essai traction-endommagement-déchargement-compression (Figure 1.5). Localement, ce phénomène peut s'expliquer par la refermeture des micro-fissures et micro-cavités créées lors d'une dégradation en traction. Notons qu'une refermeture complète des fissures peut être attendue sous de fortes contraintes de compression.

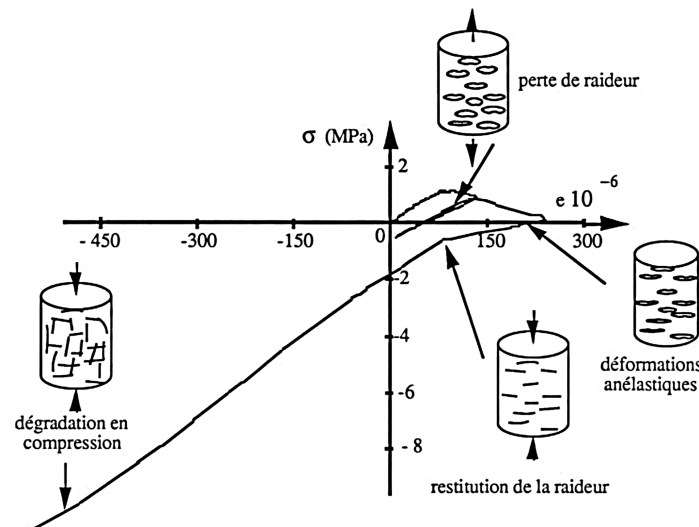


FIGURE 1.5 – Chargement cyclique traction-compression : mise en exergue de l'effet unilatéral [Ramtani, 1990]

### 1.2.1.3 Effet d'échelle dans les structures en béton

Un autre aspect du comportement du béton, et plus généralement des matériaux quasi-fragiles, est l'« effet d'échelle ». Les caractéristiques et les réponses obtenues en laboratoire ne reflètent pas nécessairement le comportement des ouvrages. En effet, la contrainte nominale maximale obtenue en laboratoire est modifiée avec la taille de la structure considérée [L'Hermitte, 1973, Bažant, 1999]. Sous une sollicitation uniaxiale, la contrainte nominale  $\sigma_N$  augmente avec la diminution de la taille de l'éprouvette (Figure 1.6). L'effet d'échelle peut être en partie expliqué de la façon suivante : le béton n'est pas un matériau parfaitement homogène. Ainsi, à l'échelle du grain, l'hétérogénéité du matériau se manifeste par la présence de micro-défauts, de micro-fissures et de micro-vides d'orientations quelconques. Sous l'effet d'un chargement, les déformations se localisent rapidement dans les zones où il y a ces défauts. Ainsi plus une structure est importante, plus la probabilité de contenir des défauts augmente. Ce dernier constat est la cause de la présence de théories statistiques, telles que la loi de distribution de Weibull [Weibull, 1939] (également appelée « loi du maillon le plus faible »). Dans ce cadre, Bažant [Bažant, 2000] propose une analogie avec la « faiblesse des géants » énoncée par Galilée. Néanmoins, il s'est avéré que ces modèles probabilistes n'étaient pas totalement applicables dans le cas d'un matériau quasi-fragile [Carpinteri, 1994].

Fort de ce dernier constat, une loi déterministe d'effet d'échelle, qui permet de décrire l'évolution de la résistance en fonction de la taille de la structure considérée, a été établie par

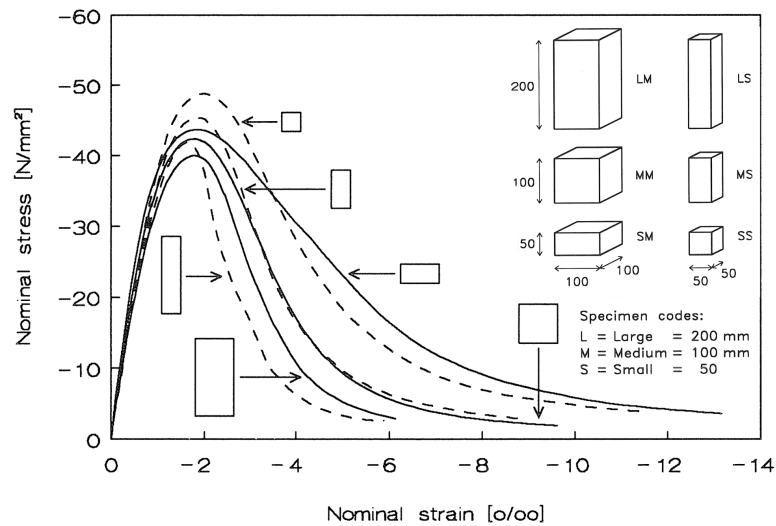


FIGURE 1.6 – Réponses contrainte-déformation en compression pour différentes géométries : effet d'échelle [Vonk, 1993]

Bažant & Planas [Bažant et Planas, 1997]. Bažant considère que l'effet d'échelle est piloté par le rapport entre la taille de la FPZ ( $L_{FPZ}$ ) et celle de la structure  $D$  considérée. Considérant des éprouvettes entaillées ayant une géométrie similaire, la contrainte nominale  $\sigma_N$  de ces éprouvettes serait comprise entre deux comportements asymptotiques (Figure 1.7). La jonction de ces deux comportements est repérée par une constante  $D_0$  (dépendante de la géométrie). Dans le cas de petites structures (i.e.,  $D \ll D_0$ ), la zone d'élaboration occuperait l'intégralité du volume de ces dernières où un comportement ductile est attendu : il n'y pas d'effet d'échelle et la rupture apparaît sans réelle propagation de fissure. La contrainte nominale peut alors être estimée à partir d'un critère de résistance ou de plasticité. Dans le cas de larges structures, la zone d'élaboration occupe une fraction infinitésimale du volume total de la structure : l'effet d'échelle est celui attendu par la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER - Section 1.3.1), i.e.,  $\sigma_N \sim D^{-1/2}$  [Bažant et Kazemi, 1990, Morel et Dourado, 2011].

Néanmoins, malgré la définition précise des comportements asymptotiques selon la loi de Bažant, l'évolution de la contrainte nominale des structures de tailles intermédiaires. i.e., des éprouvettes testées en laboratoire, est estimée par un raccordement approximatif entre les deux comportements asymptotiques. Dans ce cas, l'utilisation de la Mécanique Non Linéaire de la Rupture (MNLR) s'avère nécessaire. La zone d'élaboration de la rupture occupe une majeure partie de l'éprouvette et doit être explicitement prise en compte.

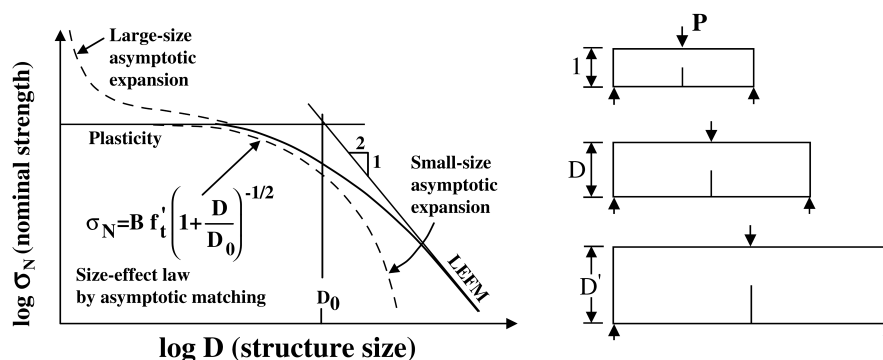


FIGURE 1.7 – Loi d'effet d'échelle énergétique sur des structures entaillées [Bažant et Yavari, 2005]

En somme, la question d'effet d'échelle occupe une place centrale dans les problèmes mécaniques en restant un verrou majeur dans le passage entre le monde de la recherche et de la construction.

### 1.2.2 Zone d'élaboration de la fissure : clé de voûte du comportement adoucissant

Comme énoncé précédemment, le régime non-linéaire du comportement est marqué localement par un processus de nucléation et de coalescence de micro-fissures conduisant à la formation de macro-fissure(s). Il s'agit d'un phénomène localisé : la déformation devient hétérogène et un important gradient de déformation prend place au sein d'une zone localisée dont l'épaisseur présente une longueur caractéristique  $l_c$  définissant la taille de la zone d'élaboration de la fissure (ou FPZ) (Figure 1.8c). On parle alors de longueur interne formée par des micro-fissures dans la matrice. La décohérence de l'interface pâte/granulats (résultat d'une faible interface entre les granulats et la pâte de ciment) et le pontage de fissure favorise la dissipation de l'énergie élastique stockée dans cette zone d'élaboration de la rupture et conduit à une propagation stable de la fissure principale. Autrement dit, des contraintes persistent dans cette zone expliquant le caractère adoucissant, et la rupture macroscopique associée est alors qualifiée de quasi-fragile. La Figure 1.8 propose une comparaison entre la taille de la FPZ suivant le type de matériau (linéaire élastique, plastique ductile et quasi-fragile). En effet, la taille de la zone d'élaboration de la rupture associée à la taille de la structure (cf effet d'échelle 1.2.1.3) est l'élément pilotant le comportement du matériau.

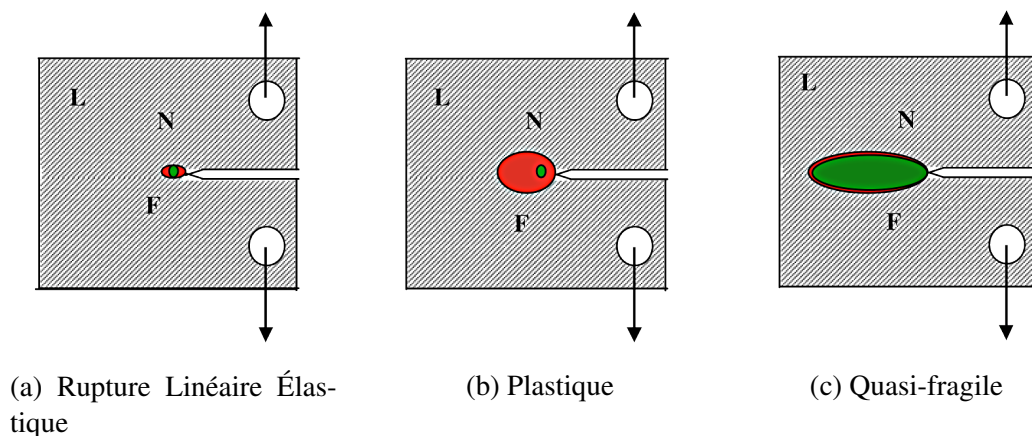


FIGURE 1.8 – Différentes tailles de la zone d'élaboration de la fissure suivant différents matériaux (L (zone en noire) signifie linéaire, N (zone en rouge) signifie non-linéaire due à la plasticité et F (zone en verte) pour FPZ) [Karihaloo, 1995]

Les principaux mécanismes physiques présents au sein de la zone d'élaboration de la rupture et participant au processus de fissuration du béton sont énoncés dans la Figure 1.9.

#### 1.2.2.1 La zone d'élaboration : observation locale

La Figure 1.10a illustre schématiquement cette zone non-linéaire pouvant être approximativement divisée en deux grandes parties : une zone de pontage de fissures et en avant une zone micro-fissurée. A l'intérieur de la zone d'élaboration de la fissure, les mécanismes dissipatifs réduisent le module élastique d'un matériau non endommagé  $E$  à un module élastique



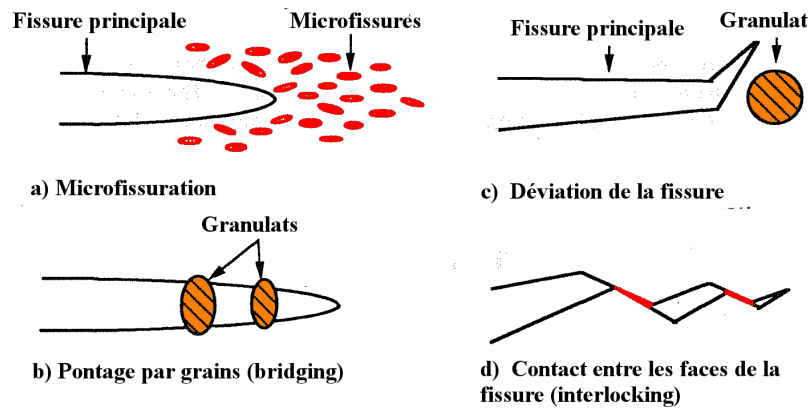


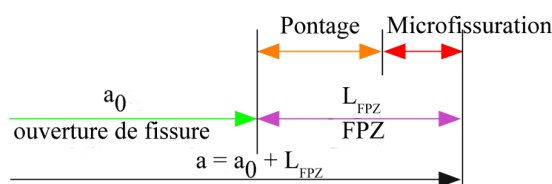
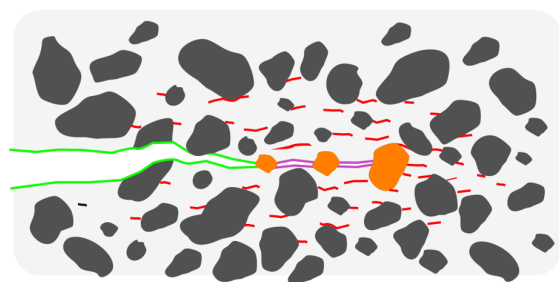
FIGURE 1.9 – Les mécanismes physiques en jeu dans la zone d'élaboration [Shah et Ouyang, 1992]

effectif (endommagé)  $\tilde{E}$  (Figure 1.10c). Comme illustré dans la Figure 1.10b, la répartition de la contrainte le long de la macro-fissure montre une contrainte maximum en fond de la zone d'élaboration de la fissure équivalente à la résistance en traction  $f_t$ . Cette répartition de contrainte décroît jusqu'à l'endroit où la zone d'élaboration atteint une ouverture critique  $w_c$ , de telle sorte que plus l'ouverture de la zone d'élaboration  $w$  augmente et plus les contraintes transmissibles entre les lèvres de la zone diminuent. Notons que la relation entre la contrainte cohésive et l'ouverture de fissure ( $w$ ),  $\sigma = f(w)$ , qualifiée de « fonction d'adoucissement », permet une description du comportement local à l'intérieur de la zone d'élaboration.

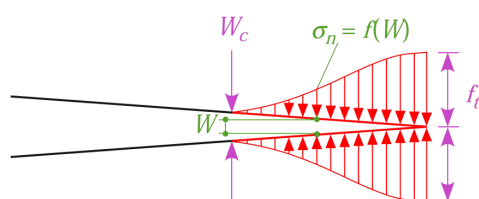
### 1.2.2.2 Évolution de la zone d'élaboration de la rupture : développement et taille critique

La zone d'élaboration de la rupture évolue au cours du processus de fissuration. Prenons l'exemple d'une éprouvette entaillée soumise à un essai d'ouverture en mode  $I$  (soit la Figure 1.8c) :

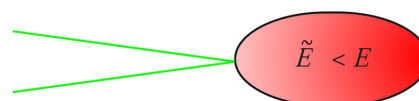
- La fin de linéarité de la réponse macroscopique indique que la zone d'élaboration est présente et a atteint une taille suffisamment importante pour marquer le comportement macroscopique de la structure. Macroscopiquement, une perte de raideur, due à la dégradation du module de Young dans cette zone a lieu.
- Cette zone se développe et l'ouverture de l'entaille augmente. Les redistributions de contrainte à l'intérieur de cette zone favorisent la dissipation d'énergie.
- En post-pic, la zone d'élaboration de la rupture atteint une taille critique associée à un état énergétique stationnaire. Cet état stationnaire de la zone d'élaboration engendre la propagation d'une fissure principale. On parle alors de propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration critique.



(a) Zone d'élaboration en fond d'entaille



(b) Répartition de la contrainte en traction en fonction de l'ouverture de l'entaille : adoucissement



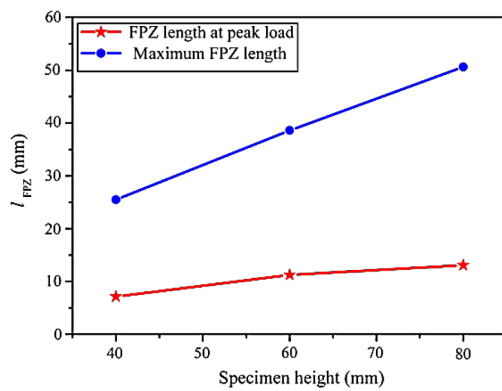
(c) Réduction du module élastique effectif dans la zone d'élaboration

FIGURE 1.10 – Concept de la zone d'élaboration et répartition des contraintes au sein de cette dernière [Wittmann et Hu, 1991]

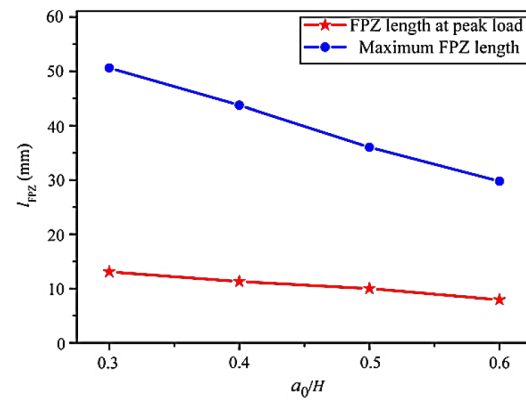
### 1.2.2.3 Caractérisation de la zone d'élaboration de la rupture

La zone d'élaboration étant l'élément « pilote » du comportement, une attention toute particulière lui est donc attribuée lors de l'étude du comportement du béton. En effet, sa caractérisation constitue un défi majeur pour la compréhension du comportement du béton. Empiriquement, ces 30 dernières années, de nombreuses études ont porté sur sa caractérisation (longueur, largeur, forme...) par le biais de mesures directes (microscope optique et électronique, caméra ultra-rapide) et/ou indirectes (laser, ultrasons, thermographie infrarouge, émission acoustique). Dans le cas d'un matériau à forte hétérogénéité comme le béton, les dimensions de la zone d'élaboration de la rupture sont pilotées par des mécanismes de dissipation d'énergie [Shah et al., 1995]. Ainsi, la granulométrie (taille et fraction volumique des granulats) joue un rôle important dans le développement de la zone d'élaboration et au niveau de sa taille critique. Bažant et Oh [Bažant et Oh, 1983] estiment, dans le cadre d'un béton standard, que la largeur de la zone d'élaboration est égale à trois fois la taille du plus grand granulat. Ce résultat a été expérimentalement confirmé au travers de la technologie de fibre optique [Denarié et al., 2001]. De plus, la dépendance de la taille de la zone d'élaboration à la hauteur de l'éprouvette (Figure 1.11a) et à la longueur de l'entaille initiale (Figure 1.11b) a été démontrée à partir d'une analyse par corrélation d'images numériques (CIN) [Wu et al., 2011]. *In fine*, la taille critique de la zone d'élaboration semble donc dépendre du matériau considéré, mais également de la géométrie de la structure.

La corrélation d'images numériques couplée à un traitement analytique (statistique, théorie de l'endommagement et de la rupture...) a récemment permis d'obtenir une « image » de



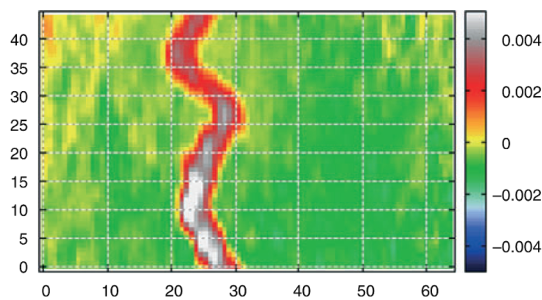
(a) Relation entre la longueur de la FPZ et la hauteur de l'éprouvette



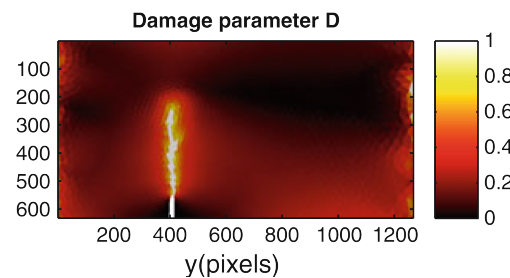
(b) Relation entre la longueur de la FPZ et le ratio entaille/hauteur de l'éprouvette

FIGURE 1.11 – Évolution de la longueur de la zone d'élaboration de la rupture en fonction de la dimension d'une éprouvette [Wu et al., 2011]

la zone d'élaboration de la rupture à partir de laquelle les dimensions de la zone peuvent être estimées (Figure 1.12) [Wu et al., 2011, Skarżyński et al., 2011, Alam, 2011, Leplay et al., 2011].



(a) Image de la FPZ à partir d'une étude CIN [Skarżyński et al., 2011]



(b) Champ analytique d'endommagement à partir d'un traitement CIN [Leplay et al., 2011]

FIGURE 1.12 – Mise en image de la zone d'élaboration de la rupture par la corrélation d'images numériques

Hormis, l'analyse des champs de déplacements (ou déformations) obtenus par la CIN, l'utilisation de l'émission acoustique (EA) peut mettre aussi en exergue la zone d'élaboration. En effet, en étudiant l'évolution de l'activité acoustique par rapport au chargement appliqué [Otsuka et Date, 2000], ou la distribution des événements [Haidar, 2005] ou encore l'évolution de l'énergie absolue libérée [Muralidhara et al., 2010], un portrait de la zone d'élaboration de la fissure peut être dressé. Notons que le couplage CIN/EA (Figure 1.13) permet d'apporter des informations supplémentaires sur le processus de fissuration [Alam et al., 2014, Alam et al., 2015].

Le comportement quasi-fragile du béton et les phénomènes physiques associés comme la propagation stable de la fissure principale ou encore l'effet d'échelle trouvent leurs sources dans cette zone d'élaboration. L'utilisation de la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (MLEReq) permettant l'obtention de courbes de résistance [Bažant et Jirásek, 1993, Morel, 2007] ou encore la mécanique non-linéaire de la rupture et notamment les modèles de zone cohésive (MZC) [Elices et al., 2002, Veselý et Frantík, 2010]) sont alors des outils très utiles à la description du comportement quasi-fragile du béton dans la mesure où ces approches considèrent de manière directe (MZC) ou indirecte (MLEReq) l'existence de la zone d'élaboration.

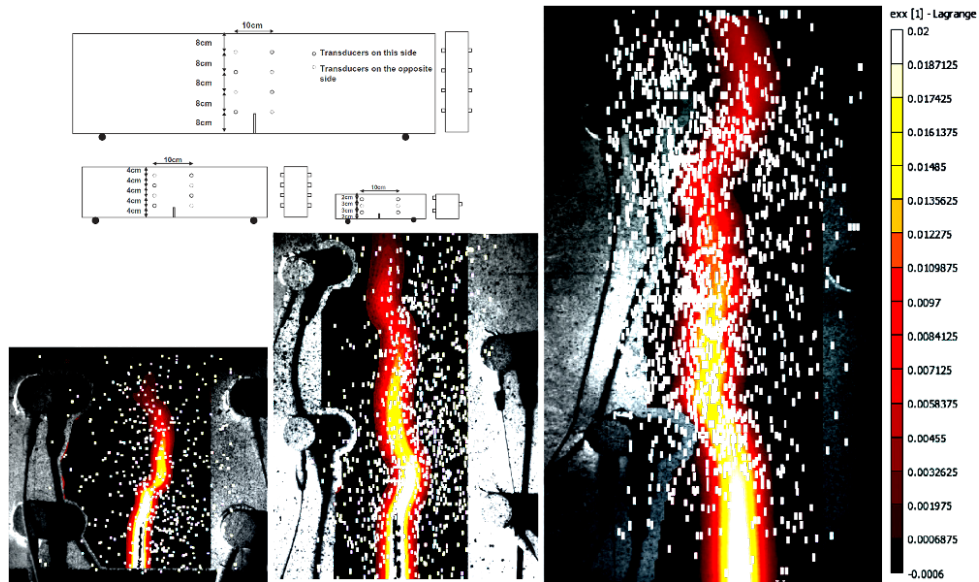


FIGURE 1.13 – Localisation des événements sur le champ de déformations issu de la corrélation d'images numériques [Alam et al., 2014]

## 1.3 Mécanique de la rupture adaptée à la quasi-fragilité du béton

Au sein de la zone d'élaboration de la rupture, les micro-fissures coalescent pour former une fissure principale. C'est dans ce cadre que la mécanique de la rupture<sup>1</sup> rentre en jeu puisque la prise en compte explicite de cette discontinuité cinématique est appropriée à la description de l'évolution des macro-fissures. Dans cette section, la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER en français ou LEFM en anglais) est présentée. Dans le cadre d'un matériau à comportement linéaire élastique, la MLER établit les champs analytiques de contraintes et de déformations prenant place en avant du fond de fissure.

### 1.3.1 Mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER)

En considérant une fissure plane ayant un front rectiligne dans un milieu élastique, homogène, et isotrope fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones :

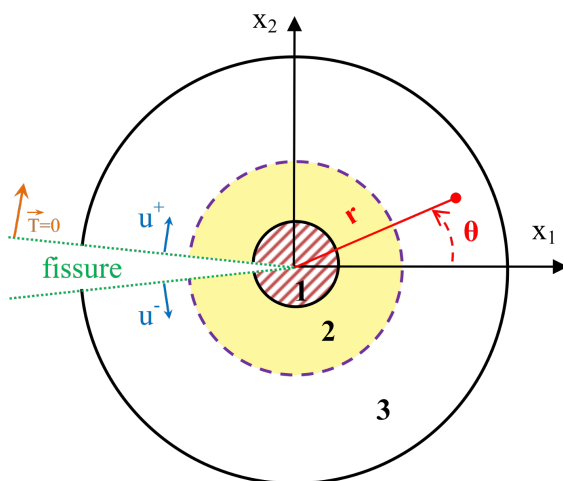


FIGURE 1.14 – Zones d'un milieu élastique fissuré

- Zone 1 : zone de discontinuité au voisinage direct de la pointe de fissure, les contraintes tendent vers l'infini. D'un point de vue mécanique, cette zone est considérée comme ponctuelle ;
- Zone 2 : zone singulière où les champs de contrainte présentent une singularité en  $r^{1/2}$  ;
- Zone 3 : zone des champs lointains raccordant la zone singulière aux conditions aux limites. Les champs de contraintes peuvent être approchés par des éléments finis classiques.

Deux approches sont disponibles pour l'étude de la zone singulière (Zone 2) :

- l'approche locale (étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage du front de fissure)
- l'approche globale (étude du bilan énergétique global de la structure fissurée)

#### 1.3.1.1 Approche locale : champs asymptotiques en fond de fissure et facteur d'intensité de contrainte

La mécanique de la rupture considère 3 modes de rupture (Figure 1.15) :

- Mode *I* ou mode d'ouverture de fissure dans lequel les déplacements des lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de la propagation. Il s'agit du mode le plus dangereux où les liaisons atomiques en tête de fissure sont en sur-tension.
- Mode *II* et Mode *III* qui sont respectivement le mode de cisaillement dans le plan et hors plan.

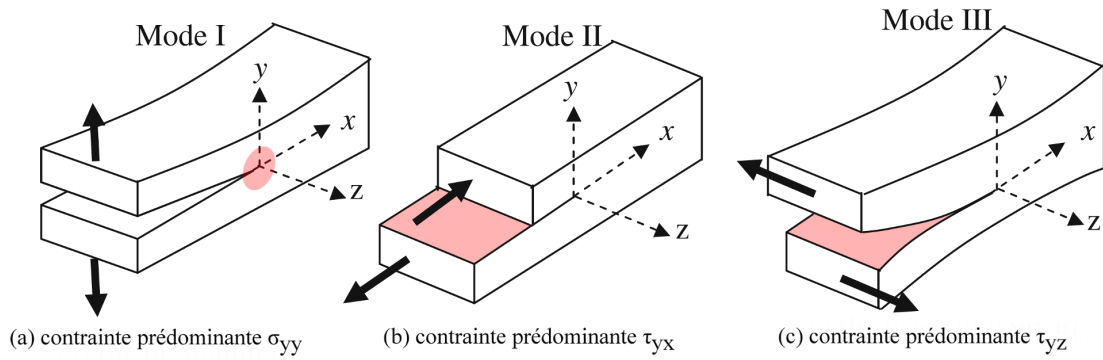


FIGURE 1.15 – Modes de rupture : (a) mode I (ou mode d'ouverture), (b) mode II (ou cisaillement), (c) mode III (ou vissage)

Suivant ces 3 modes, il existe un facteur d'intensité des contraintes<sup>2</sup>  $K_\alpha$  (en  $Pa\sqrt{m}$ ) (avec  $\alpha = I, II, III$ ) fonction à la fois du chargement et de la géométrie qui permet de décrire l'ensemble de la singularité spatiale du champ des contraintes en pointe de fissure. Ce facteur pourrait s'apparenter à une description de la résistance de la singularité en question. A un facteur multiplicatif près, le facteur d'intensité des contraintes (abréviation FIC) correspond au premier terme du développement limité des contraintes devant une fissure pour un mode d'ouverture donné [Irwin, 1957]. Il possède la forme suivante :

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}f(a, \Omega) \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est une contrainte qui dépend linéairement du chargement,  $a$  est une longueur relative à la géométrie de la fissure et  $f$  une fonction sans dimension de la géométrie  $\Omega$  de l'éprouvette et de la fissure. Une résolution numérique est en général nécessaire pour évaluer les facteurs d'intensité de contrainte. En effet, il existe de nombreuses méthodes permettant de définir ce facteur (création d'éléments singuliers, superposition des solutions, introduction d'une fonction poids ou par interpolation) [Bouchard, 2000]. Notons que lors d'un essai en mode d'ouverture ( $I$ ), lorsque la contrainte atteint sa valeur maximum, il est possible d'établir un facteur d'intensité critique noté  $K_{Ic}$  qui représente la capacité d'un matériau à résister à la propagation d'une fissure et peut être défini comme un critère de rupture. En 1957, Irwin [Irwin, 1957] proposa une solution analytique des champs de contrainte (1.2) et de déplacement (1.3) de fond de fissure correspondant à l'ordre 1 d'un développement en série [Williams, 1957] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) \quad (1.2)$$

$$u_i = K_\alpha \frac{r}{\sqrt{2\pi}} g_i^\alpha(G, \kappa, \theta) \quad (1.3)$$

où  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement du matériau et  $\kappa$  la constante de Kolossov définie par :

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformation plane} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en contrainte plane} \end{cases} \quad (1.4)$$

1. Cotterell propose un article détaillé sur l'histoire et l'utilisation de la mécanique de la rupture [Cotterell, 2002].

2. A ne pas confondre avec le facteur de concentration de contrainte  $K_t$

Si les champs de la zone 2 (Figure 1.14) sont définis par les termes du 1<sup>er</sup> ordre de la série, il peut être nécessaire de considérer les termes supérieurs [Meite, 2012] permettant de décrire les champs plus lointains (zone 3) et non-singuliers décrits par la série de Williams [Williams, 1957]. Par exemple en mode I, à l'ordre 2, un nouveau terme apparaît, décrivant une contrainte parallèle au plan de fissure (contrainte  $T$ ). Notons qu'une analyse de la rupture peut se faire par une étude des paramètres  $K$ - $T$  [Seitl et al., 2011].

### 1.3.1.2 Approche globale : étude énergétique

Lors de la déformation d'une structure sous un chargement, cette dernière stocke de l'énergie élastique qui peut se libérer sous forme d'une propagation de fissure. Sur ce constat, Griffith [Griffith, 1921] a proposé une théorie fondée sur la compétition entre l'énergie élastique restituée lors de l'avancée de la fissure et l'énergie dissipée sous forme de création de nouvelles surfaces. Il a introduit la notion de taux de restitution d'énergie noté  $G$  représentant l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une unité de surface :

$$G = -\frac{dW_p}{dA}, \quad (1.5)$$

où  $W_p$  est l'énergie potentielle totale nécessaire pour incrémenter une longueur de fissure  $a$  de  $da$  provoquant ainsi la création d'une nouvelle surface fissurée  $dA$ . L'énergie potentielle stockée dans la structure résulte d'un bilan énergétique entre l'énergie de déformation élastique  $W_e$  et le travail des forces extérieures  $W_{ext}$  :

$$W_p = W_e + W_{ext} \quad (1.6)$$

Notons que suivant cette approche énergétique, il existe un critère de rupture annonçant que si le taux de restitution d'énergie  $G$  dépasse une valeur critique notée  $G_c$  il y a propagation de la fissure. Le taux de restitution d'énergie peut être déterminé de plusieurs manières :

- **A partir de l'approche locale : relation de Irwin**

Par additivité des modes de rupture ( $I$ ,  $II$ ,  $III$ ), il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes.

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2 (1 + \nu)}{E} \quad (1.7)$$

où  $E'$  est le module d'élasticité effectif dépendant de l'hypothèse plane considérée :

$$E' = \begin{cases} \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en déformation plane} \\ E & \text{en contrainte plane} \end{cases} \quad (1.8)$$

- **A partir de la réponse globale : méthode de la complaisance**

Il est également possible de relier le taux de restitution d'énergie  $G$  à la complaisance  $\lambda$  (inverse de la raideur  $k$ ) de la structure. En mode  $I$ , le taux de restitution d'énergie  $G$  peut être exprimé sous la forme :

$$G = \frac{P^2}{2} \frac{d\lambda}{dA} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (1.9)$$

où  $P$  est la force extérieure appliquée à la structure provoquant un incrément de surface de fissure  $dA$  associé à la variation de la complaisance  $\lambda$  de la structure. La complaisance est estimée par le ratio  $\lambda = \delta/P$  où  $\delta$  est le déplacement de la force.

- **A partir de l'étude numérique : intégrales de contour**

Une étude numérique de la singularité du champ des contraintes au voisinage d'une fissure peut se faire grâce à certaines intégrales de contour déduites de la loi de conservation de l'énergie. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie  $G$ . Il est possible de dénombrer l'intégrale duale I, hybride, ou T et A, et l'une des plus connues : l'intégrale de Rice  $J$  [Rice, 1968].

$$G = J = \int_{\Gamma} \left( W_e n_j T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma \quad (1.10)$$

où  $W_e$  désigne la densité d'énergie élastique ( $= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ),  $\Gamma$  est un contour élaboré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et orienté par son vecteur normal  $n_j$ .  $T_i$  est la composante en traction du vecteur  $= \sigma_{ij} n_j$ .

L'utilisation de la MLER reste limitée et restrictive dans le cadre du béton du fait de la présence de la zone d'élaboration de la rupture. La MLER classique devient donc obsolète. Ainsi, l'utilisation de la mécanique non linéaire de la rupture (MNLR en français ou NLFM en anglais) ou l'utilisation d'approches basées sur le concept de la MLER tel que la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (MLEReq) deviennent alors des outils très utiles à la description de la rupture quasi-fragile.

## 1.3.2 Mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente

### 1.3.2.1 Approximation de la longueur de fissure : longueur de fissure élastique équivalente

Par l'approche énergétique initiée par Griffith, une approximation du comportement quasi-fragile est possible en utilisant la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (MLEReq) [Bažant et Kazemi, 1990]. En émettant le postulat que l'augmentation de la complaisance sécante (inverse de la raideur) de la structure est uniquement due au développement de la FPZ et/ou à la propagation de la fissure avec sa zone d'élaboration, il est possible d'introduire une longueur de fissure élastique équivalente ou effective (Figure 1.16). Ainsi, la longueur élastique équivalente ( $a_{eq}$ ) est une longueur qui, dans un modèle élastique parfait donnerait la même complaisance que celle constatée sur la structure réelle fissurée avec sa zone d'élaboration (Figure 1.16). L'évolution de la complaisance sécante en terme de longueur élastique équivalente de fissure doit toutefois être vérifiée par l'intermédiaire de cycle de charge/endommagement/propagation/décharge [Morel et al., 2005, Gangnant et Morel, 2013].

### 1.3.2.2 Courbe de résistance

Sur la base de la longueur de fissure élastique équivalente, il est alors possible d'estimer la résistance à la propagation de la fissure élastique équivalente en utilisant les outils de la MLER [Morel, 2007, Gangnant et Morel, 2013]. Les courbes de résistance ou courbes-R ainsi obtenues sont un puits d'informations mais ne sont pas intrinsèques au matériau car elles dépendent également de la géométrie de l'éprouvette étudiée. Non seulement les propriétés de rupture peuvent être évaluées par une lecture directe des courbes-R, mais ces courbes nous informent également sur l'étendue de la zone d'élaboration.



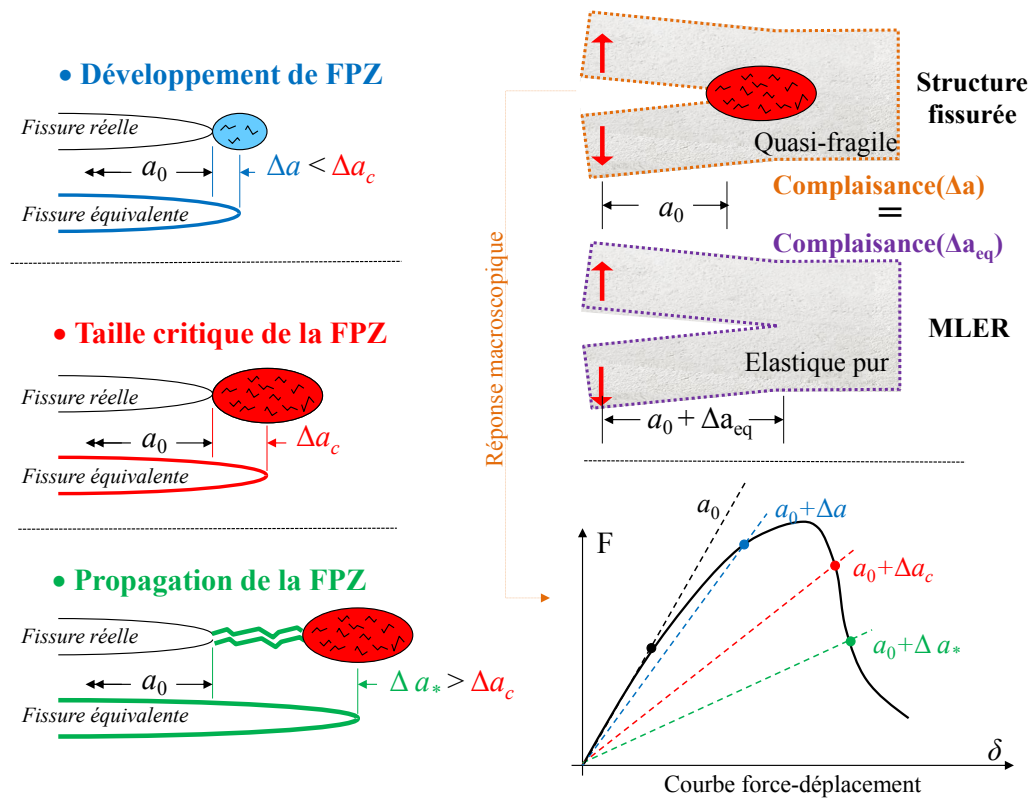


FIGURE 1.16 – Représentation schématique de la MLEReq

Lorsque la fissure élastique équivalente se propage d'un incrément  $\delta a$ , la résistance à la propagation de la fissure peut être estimée à partir du taux de restitution d'énergie. En reprenant l'équation 1.9 (dorénavant par souci de simplification, nous écrirons  $a$  pour  $a_{eq}$ ) il est possible d'écrire :

$$G_R(a) = G(a) = \frac{P^2}{2b} \frac{d\lambda(a)}{da}, \quad (1.11)$$

où  $b$  est l'épaisseur de l'éprouvette et  $\lambda(a)$  la complaisance de la structure pouvant être considérée comme une fonction polynomiale. Notons qu'une correction sur la complaisance doit être réalisée car une différence entre le module élastique réel et numérique peut avoir lieu.

*In fine*, la courbe-R est l'image énergétique de la courbe force-déplacement. La Figure 1.17 illustre schématiquement le passage d'une réponse force-déplacement à une courbe-R par la méthode de la complaisance.

Selon Bažant [Bažant et Planas, 1997], la courbe-R d'un matériau quasi-fragile est divisée en deux parties :

- Une première partie croissante (de forme convexe pouvant être décrite par une loi puissance) associée à la phase de développement de la zone d'élaboration. Cette partie croissante est souvent associée à une propagation stable de la fissure élastique équivalente.
- Une seconde partie marquée par un régime plateau de la résistance traduisant la propagation auto-similaire de la fissure principale (la zone d'élaboration a atteint sa taille critique et se translate amenant avec elle la fissure principale). La propagation de la fissure peut s'avérer instable. *Notons que pour les matériaux fragiles, seule cette partie existe.*

Les valeurs caractéristiques du régime plateau  $G_{RC}$  et  $a_c$  sont des propriétés de rupture :

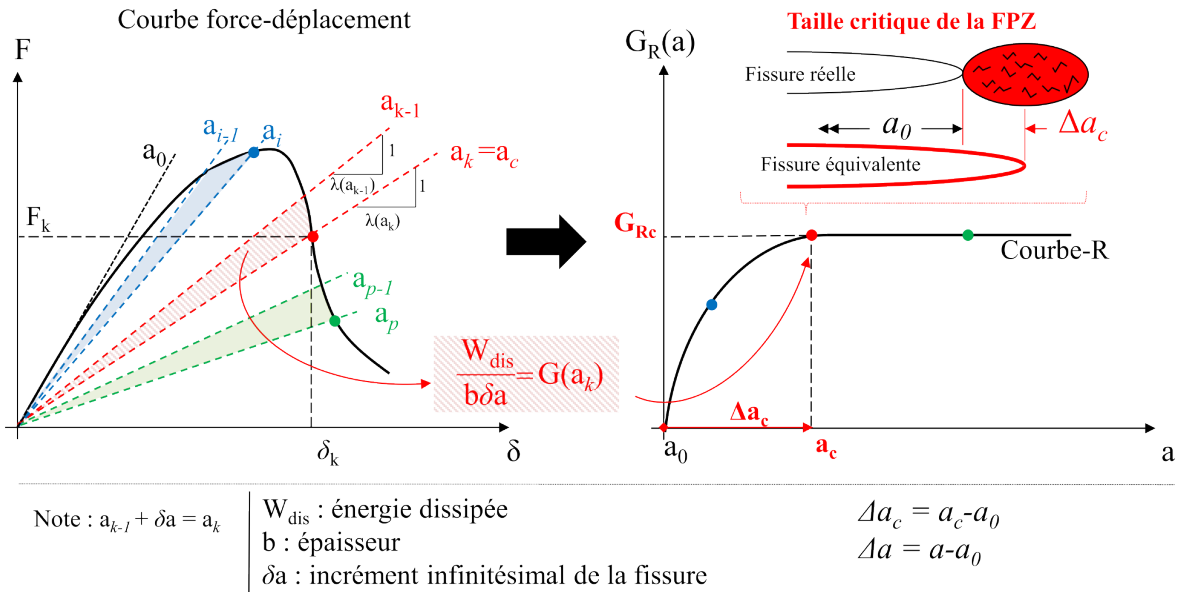


FIGURE 1.17 – Illustration de l'évaluation de la résistance à la propagation de la fissure (Courbe-R)

la première correspond à la résistance à la propagation de la fissure principale avec sa zone d'élaboration, et la seconde correspond à la longueur de fissure caractéristique liée à la longueur élastique équivalente de la zone d'élaboration avec  $\Delta a_c = a_c - a_0$  comme étant la longueur interne. La courbe-R peut être ajustée par deux fonctions analytiques [Morel, 2008] :

$$G_R(\Delta a) = \begin{cases} \frac{G_{Rc}}{\Delta a_c^\beta} \Delta a^\beta & \text{si } \Delta a = a - a_0 < \Delta a_c \\ G_{Rc} & \text{si } \Delta a = a - a_0 > \Delta a_c \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $\beta$  est l'exposant de la fonction puissance ( $\beta < 1$  si convexe). La force au pic de la réponse force-déplacement de l'éprouvette, obtenue pour une longueur de fissure notée  $a_u$  satisfaisant le critère  $\frac{dG}{da} = \frac{dG_R}{da}$ , a généralement lieu avant la propagation auto-similaire, i.e., lors du développement de la FPZ ( $a_u < a_c$ ).

Le problème peut être adimensionné par l'introduction d'une longueur de fissure relative  $\alpha = a/D$  où  $D$  est la hauteur caractéristique<sup>3</sup> et de la fonction adimensionnelle du taux de restitution d'énergie  $g(\alpha)$  [Morel et Dourado, 2011] directement liée à la complaisance  $\lambda$  de la structure.

$$g(\alpha) = \frac{E'b}{2} \frac{\partial \lambda(\alpha)}{\partial \alpha} \quad (1.13)$$

où  $E'$  est le module effectif comme défini dans la relation 1.8. De ce fait, la relation 1.11 devient :

$$G_R(a) = G(a) = \frac{P^2}{Eb^2D} g(\alpha) \quad (1.14)$$

Pour finir, la MLEReq permet de « contourner » la condition de non-linéarité du matériau béton et des autres matériaux quasi-fragiles. Cette théorie n'est pas un modèle en soit mais

3. La hauteur caractéristique n'est pas à confondre avec la hauteur totale du spécimen, elle correspond à la longueur du ligament ajoutée à la longueur de l'entaille initiale (si présente).

consiste en une approximation du comportement quasi-fragile permettant l'évaluation de propriétés de rupture et l'évolution de la zone d'élaboration. Le concept de courbe-R peut très bien être appliqué par une approche locale où la variable étudiée est le facteur d'intensité des contraintes (introduction de  $K_R$  basé sur les forces cohésives [Xu et Reinhardt, 1998]).

### 1.3.3 Mécanique non-linéaire de la rupture

Comme mentionné précédemment, la mécanique non-linéaire de la rupture (MNLr) peut également être appliquée de manière complémentaire à la MLEReq. Dans cette section, deux modèles pouvant être décrits comme extrême l'un de l'autre sont présentés. L'un remplace la zone d'élaboration par une ligne de fissure fictive et l'autre considère une bande de largeur finie.

#### 1.3.3.1 Modèle de zone cohésive

Le modèle de zone cohésive (MZC ou CZM pour Cohesive Zone Model) [Elices et al., 2002] a été créé dans le cadre du modèle de fissure fictive (fictitious crack model FCM) initialement appliqué pour le matériau béton [Hillerborg et al., 1976]. Dans ce dernier modèle, Hillerborg *et al.* considèrent une zone cohésive en fond de fissure, modélisant la zone d'élaboration, constituée d'une interface soumise à des forces cohésives, i.e., le long de laquelle le champ de déplacement a la possibilité d'admettre des discontinuités tout en continuant à transmettre des efforts (Figure 1.18).

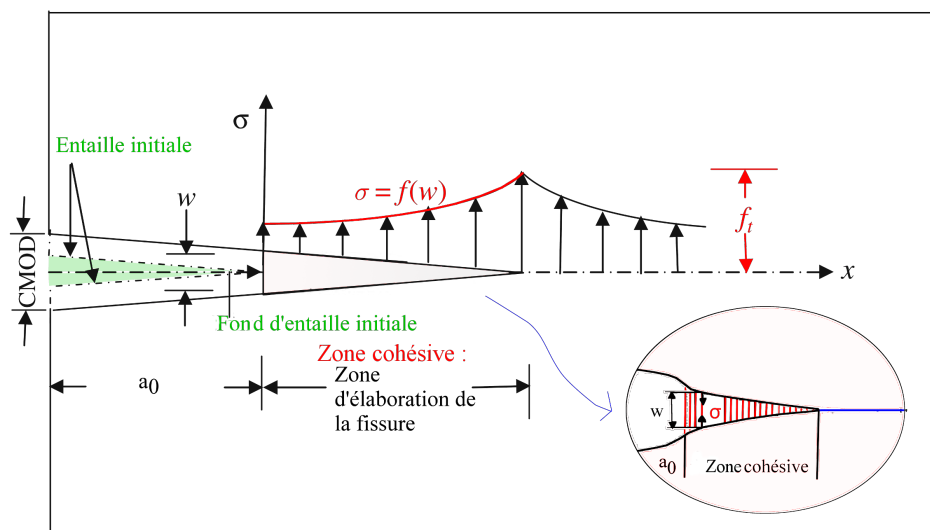


FIGURE 1.18 – Distribution et évolution de la fissure cohésive en mode I

Le modèle de zone cohésive repose sur l'identification de la loi d'interface (paramètres cohésifs) pilotant le comportement à la rupture du matériau. Ces lois d'interfaces incluent donc le comportement quasi-fragile et elles sont introduites de telle façon que la contrainte décroît à zéro de manière progressive au fur et à mesure que l'ouverture de la fissure augmente. De manière générale, il existe une fonction adoucissante de l'ouverture  $w$  de l'interface en fonction de la contrainte normale  $\sigma$  aux lèvres de la fissure (1.15).

$$\sigma = f(w) \quad (1.15)$$

La fissure se propage dans le milieu élastique en considérant un critère de contrainte en traction  $f_t$  comme seuil limite pour une fissure en mode I. La somme totale de l'énergie dissipée

lors de la création d'une discontinuité (lorsque  $f_t$  est atteinte) et ce jusqu'à la rupture complète est l'énergie de fissuration cohésive  $G_f$  (1.17).

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (1.16)$$

Petersson [Petersson, 1981] proposa une approximation du comportement cohésif concave du béton par une loi dite « bi-linéaire » (Figure 1.19). Cette loi bi-linéaire a souvent été reprise pour les matériaux quasi-fragiles (bois [Dourado et al., 2008], béton [Gangnant et Morel, 2013] ou encore la maçonnerie [Bisoffi-Sauve, 2016]).

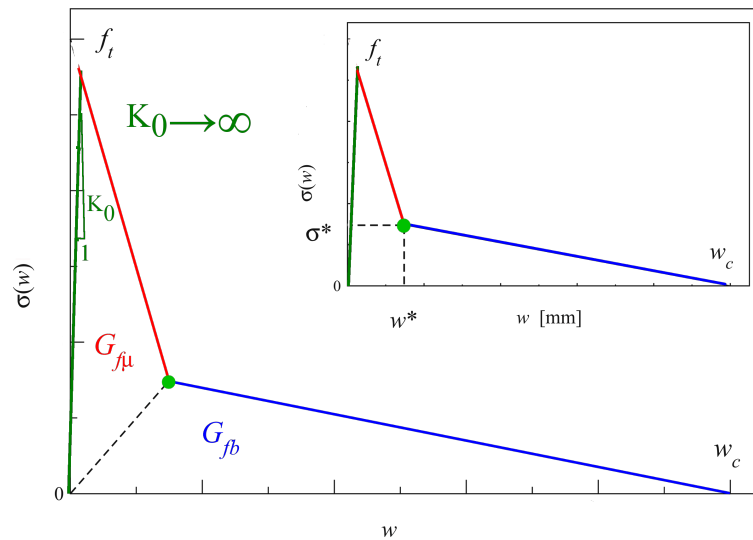


FIGURE 1.19 – Fonction d'adoucissement bi-linéaire de la loi cohésive

Les paramètres cohésifs de la loi bi-linéaire sont :

- L'énergie cohésive  $G_f$  correspondant à l'énergie de rupture ou la résistance plateau  $G_{RC}$  de la courbe-R. Il s'agit de l'énergie nécessaire pour séparer complètement 2 points en vis-à-vis au niveau de l'interface cohésive.
- L'ouverture critique  $w_c$  marquant l'ouverture de la fissure pour laquelle la contrainte cohésive devient nulle. Cette ouverture critique est également associée à la longueur de fissure élastique équivalente critique ( $w_c \sim a_c$ ). Lorsque cette valeur est atteinte, la zone d'élaboration de la rupture atteint sa taille critique, i.e., elle s'est totalement développée.
- La résistance à la traction  $f_t$  donnant la contrainte à partir de laquelle l'endommagement s'initie (i.e., début du comportement cohésif).
- Le ratio  $\mu$  définissant la répartition d'énergie entre les comportements cohésifs principaux que sont la micro-fissuration (énergie  $G_{f\mu}$ ) et le pontage de fissures (énergie  $G_{fb}$ ) avec  $G_f = G_{f\mu} + G_{fb}$ .

D'un point de vue simulation numérique, l'utilisation de cette méthode nécessite l'introduction d'éléments d'interface en imposant le trajet de la fissure ou en utilisant des techniques de remaillage (gourmand en ressource). Des relations entre les paramètres cohésifs et les caractéristiques de la courbe-R ont été établies par Morel *et al.* [Morel et al., 2010].

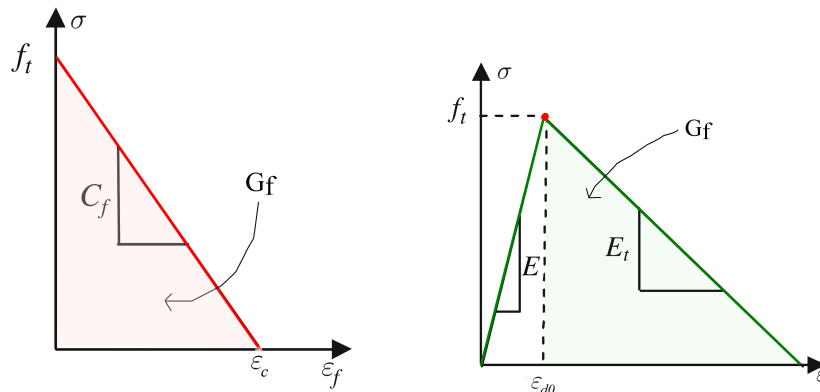
### 1.3.3.2 Modèle à bande de fissuration

Contrairement au modèle de zone cohésive, le modèle à bande de fissuration (ou CBM pour Crack Band Model) considère la rupture comme la propagation d'une bande de micro-fissuration diffuse uniforme [Bažant et Oh, 1983]. Ce modèle considère que la largeur de la

bande de fissuration  $l_b$  reste constante afin d'éviter toute sensibilité au maillage. Dans ce cas, l'énergie dissipée pour la création d'une longueur unitaire de fissure est considérée constante et égale à l'énergie de fissuration  $G_f$  du matériau. L'équation de l'énergie de fissuration du modèle de fissure fictive (Equation 1.17) peut s'écrire :

$$G_f = l_b \int_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon^f \quad (1.17)$$

où  $\varepsilon^f$  est la déformation de rupture (également appelée ouverture de fissure). Ainsi, tout comme le modèle de zone cohésive, la rupture commence quand la contrainte atteint la résistance à la traction  $f_t$  (moment où  $\varepsilon^f$  est nulle). Ensuite, avec l'augmentation de l'ouverture de la fissure  $w$ , la contrainte  $\sigma$  continue linéairement de diminuer (Figure 1.20b).



(a) Relation contrainte-déformation dans le modèle à bande de fissuration

(b) Réponse macroscopique

FIGURE 1.20 – Réponse contrainte-déformation pour une éprouvette sollicitée en mode I et en considérant un adoucissement linéaire

La Figure 1.20a montre la relation contrainte-déformation dans le modèle à bande de fissuration, où  $C_f = f_t/\varepsilon_c$  et  $\varepsilon_c$  est la déformation à la fin de l'adoucissement, i.e., au moment où il y a la coalescence des micro-fissures vers une fissure continue (et où la contrainte devient nulle). Ainsi, la loi d'évolution peut s'écrire :

$$f(\sigma) = \varepsilon_f = \varepsilon_c \left(1 - \frac{\sigma}{f_t}\right) \quad (1.18)$$

Conformément à la Figure 1.20b, la partie post-pic de la relation contrainte déformation peut être décrite par le module tangent élastique ( $-E_t$ ) défini par la condition suivante :

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} - \frac{1}{C_f} \leq 0 \quad (1.19)$$

A partir des équations 1.17 et 1.19, l'énergie de fissuration par la théorie de la bande de fissuration peut être définie comme :

$$G_f = \frac{1}{f_t^2 l_b} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_t} \right) \quad (1.20)$$

Au final, le module tangent  $E_t$  peut s'écrire au signe près et en considérant un seuil d'endommagement  $\varepsilon_{d0} = f_t/E$  :

$$E_t = \frac{l_b f_t^2}{2G_f - l_b f_t \varepsilon_{d0}} \quad (1.21)$$

Néanmoins, notons que le modèle classique de la bande de fissuration comporte quelques limitations, comme la taille de l'élément ne devant pas être inférieure à la largeur de la bande, un traitement mathématique doit se faire si la fissure n'est plus rectiligne.

## 1.4 Modélisation de l'endommagement du béton

La cadre de la mécanique de la rupture permet l'étude de la propagation de la fissure, mais avant de se propager, la fissure subit un stade d'initiation via le développement de la zone d'élaboration de la rupture. Numériquement, les modèles d'endommagement, en ne prenant pas en compte explicitement la discontinuité cinématique, s'avèrent être capable d'initier la macro-fissure. Les modèles d'endommagement se basent sur l'introduction d'une loi de comportement prenant en compte les particularités du matériau considéré (Section 1.2). La difficulté de la modélisation d'un matériau quasi-fragile réside en son comportement adoucissant, conséquence de la présence de la zone d'élaboration. En effet, mécaniquement ce type de comportement s'accompagne d'une perte de stabilité puisque le module tangent n'est plus positif (on parle alors de violation du postulat de Drucker [Mandel, 1966] (avec  $d\sigma < 0$  et  $d\varepsilon > 0$ ). Par la méthode des éléments finis, la modélisation du comportement adoucissant entraîne naturellement l'apparition d'une zone de localisation de l'endommagement sensible à la taille du maillage.

Rappelons que la modélisation du comportement du béton doit prendre au minimum en compte ces aspects phénoménologiques (décrits à la Section 1.2.1) :

- Comportement initiale de type élastique isotrope piloté par la loi de Hooke et uniquement dépendant des caractéristiques mécaniques  $E$  et  $\nu$ .
- Dès l'apparition de micro-fissures, l'endommagement s'amorce et évolue,
- Le phénomène de localisation des déformations dû à la coalescence des micro-fissures donne un caractère adoucissant, le module d'élasticité est dégradé.
- La présence d'une dissymétrie du comportement où la résistance en traction  $f_t$  est nettement inférieure à celle en compression  $f_c$ . Le comportement adoucissant est également différent avec une ductilité apparente plus importante en compression.
- L'effet unilatéral.

### 1.4.1 Modèles d'endommagement des bétons

#### 1.4.1.1 Théorie de l'endommagement

La théorie de l'endommagement formulée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI) permet de décrire le processus de fissuration jusqu'à l'amorçage d'une ou de plusieurs fissures macroscopiques [Lemaitre et Chaboche, 1985].

#### L'histoire de la théorie de l'endommagement

Le concept d'endommagement est né dans la fin des années 50 et son développement est quasiment une histoire européenne, à contrario des chercheurs américains qui sont plus préoccupés par la mécanique de la rupture. Néanmoins, ces deux notions issues de la mécanique du solide sont complémentaires selon l'échelle d'analyse : micro- à mésoscopique pour la mécanique de l'endommagement et méso- à macroscopique pour la mécanique de la rupture. En France, ce sont les physiciens métallurgistes de l'Institut de Recherche de la Sidérurgie (I.R.S.I.D) qui ont mis le doigt sur ce concept afin d'interpréter certains faciès de rupture. Ce n'est cependant

qu'en 1970 que le terme de « Mécanique de l'Endommagement » a été inventé, suite à une collaboration active entre les physiciens et mécaniciens français. Ainsi, les lois de la mécanique de l'endommagement ont été établies dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Annexe A). Dans un premier temps, le concept de mécanique de l'endommagement a été appliqué sur les métaux [Lemaitre et Chaboche, 1978] pour les ruptures en fluage et en fatigue. Ce n'est qu'à partir des années 80 que cette théorie est appliquée aux matériaux quasi-fragiles, et plus précisément au béton [Mazars, 1984].

Plusieurs concepts ont été créés dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continue. La première étant l'endommagement représenté par une ou plusieurs variables scalaires ou un tenseur. Selon la TPI, il s'agit d'une variable d'état interne et non observable. La seconde consiste à considérer une contrainte différente de celle appliquée. En effet, elle est uniquement appliquée sur une surface résistante (non prise en compte des surfaces endommagées) : on parle de contrainte effective. Lemaitre introduit également le principe d'équivalence en déformation afin d'écrire le couplage entre l'endommagement et la déformation [Lemaitre, 1978].

### Définition et mesure de l'endommagement

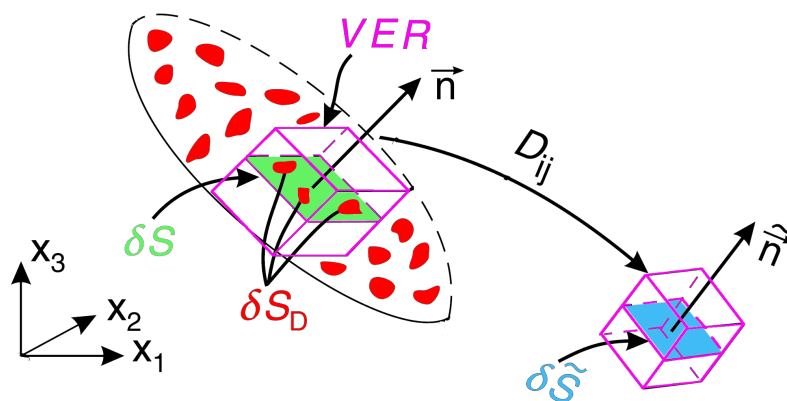


FIGURE 1.21 – Concept de surface endommagée et effective

Une variable d'état définit l'état physique actuel d'un système. Cette variable, prenant en compte les micro-fissures, peut être définie comme la densité de surface de micro-fissures  $\delta S_D$  contenues dans une surface plane  $\delta S$  d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) (Figure 1.21). Suivant une normale  $\vec{n}$ , où la densité d'endommagement s'avère être le maximum, l'endommagement est obtenu par la relation suivante :

$$D_{(\vec{n})} = \frac{\delta S_D(\text{défauts})}{\delta S(\text{VER})} \quad (1.22)$$

Dans le cadre d'un endommagement qualifié d'isotrope, la variable scalaire d'endommagement  $D_{\vec{n}}$  ne dépend plus de la normale  $\vec{n}$ . L'équation 1.22 se simplifie et devient [Kachanov, 1958] :

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (1.23)$$

La variable interne scalaire  $D$  peut être utilisée pour des problèmes à une dimension, mais aussi comme une bonne approximation dans des problèmes en trois dimensions.

Cependant, l'orientation des micro-fissures plus ou moins perpendiculaires à la plus grande contrainte positive implique un endommagement qualifié d'anisotrope. Une surface continue construite à partir de la normale  $\vec{n}$  est alors considérée dans ce cas. Une surface effective  $\delta\tilde{S} = \delta S - \delta S_D$  est calculée suivant une nouvelle normale  $\tilde{\vec{n}}$ , où  $\delta S_D$  est la densité de surface endommagée [Murakami et Ohno, 1981]. Ainsi, dans le cas non-isotrope, la variable interne scalaire  $D$  devient un tenseur de second ordre  $D_{ij}$  et répond à la relation suivante :

$$(\delta_{ij} - D_{ij}) n_j \delta S = \tilde{n}_i \delta \tilde{S} \quad (1.24)$$

Le tenseur d'endommagement  $D_{ij}$  peut devenir un tenseur d'endommagement du 4<sup>ème</sup> ordre, soit  $D_{ijkl}$  si l'endommagement est défini comme un opérateur qui modifie le tenseur initial élastique  $E_{ijkl}$  en un tenseur affecté par l'endommagement  $\tilde{E}_{ijkl}$ . Cependant, l'utilisation d'un tel tenseur apporte une certaine difficulté. Ladevèze [Ladevèze, 1983] propose une variable scalaire  $D_k$  pour chaque mécanisme d'endommagement présent : rupture des fibres, fissures traversantes dans la matrice et fendage par cisaillement. Une seconde solution consiste à considérer un autre ensemble de variables scalaires où une variable serait responsable de l'endommagement de la matrice et agissant uniquement sur la partie hydrostatique du tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$ . L'autre scalaire, responsable de la décohésion entre les fibres et la matrice, agit sur la partie déviatorique (cisaillement) du tenseur des contraintes.

L'effet de l'endommagement sur la résistance et la rigidité d'une structure est différent si cette dernière est sollicitée en traction ou en compression. Cela est dû au fait que les micro-fissures s'ouvrent en traction et se referment en compression (principe de l'effet unilatéral voir Section 1.2.1.2). En somme, la variable d'endommagement  $D$  peut prendre différentes formes (scalaire ou tenseur) et peut expliquer des mécanismes dans un ensemble global ou de manière séparée.

Dans notre étude, l'hypothèse d'un endommagement isotrope (eq.1.23) est considérée et semble dans un premier temps appropriée dans le cadre de ce travail. Cependant, cette dernière relation est plutôt une relation de « principe » basée sur un principe de « mesure » (observation de la microstructure par méthode destructive par exemple) et ne permet pas à elle seule de décrire l'évolution de l'endommagement de manière analytique/prédictive. En effet, lors d'une modélisation, la variable interne s'exprime en fonction des propriétés mécaniques du matériau et la cinématique de déformation du milieu.

En général, et cela sera le cas ici :

- $D = 0$  correspond à l'état sain du matériau, i.e., exempt de tout micro-défaut.
- $0 < D < 1$  caractérise l'état de l'endommagement du matériau
- $D = 1$  correspond à l'état totalement endommagé : la rupture a lieu, la surface résistante est nulle. i.e., une macro-fissure sépare l'élément de matière en deux parties.

Notons que l'endommagement peut être évalué de manière indirecte à partir de l'évaluation de certaines propriétés physiques. Ainsi, il est connu que l'endommagement :

- diminue le module élastique initial  $E$  en un module élastique effectif  $\tilde{E}$  où<sup>4</sup>

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}, \quad (1.25)$$

- diminue la vitesse des ultrasons,

4. La relation 1.25 fournit une méthode simple pour évaluer l'endommagement  $D$  lors d'un essai de traction avec charge-décharge. Cependant cette mesure perd toute signification lorsque l'endommagement se localise (perte de sa répartition diffuse) juste avant l'apparition d'une fissure macroscopique.



- diminue la densité du matériau,
- diminue la limite d'élasticité.

### Contraintes effectives et principe d'équivalence en déformation

Introduite par Rabotnov [Rabotnov, 1969], la notion de la contrainte effective permet l'introduction de la variable d'endommagement dans une loi de comportement. Mazars et Pijaudier-Cabot ont défini la contrainte effective comme suit : « Un volume de matériau endommagé et sujet à une contrainte  $\sigma$  montre la même réponse que le matériau à l'état vierge soumis à une contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  » [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989]. Autrement dit, la contrainte effective est la contrainte appliquée à la surface résistante  $\delta\tilde{S} = \delta S - \delta S_D$  qui résiste à un chargement. De ce fait, il apparaît clairement l'égalité suivante :

$$\tilde{\sigma}\delta\tilde{S} = \sigma\delta S. \quad (1.26)$$

Mettons en équation ces propos. Pour cela prenons le cas d'un endommagement isotrope d'un élément de matière endommagée soumis à un effort  $F$  en traction (et sans prise en compte de l'effet unilatéral).

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} = \tilde{\sigma} = \frac{F}{S\left(1 - \frac{S_D}{S}\right)}. \quad (1.27)$$

L'équation 1.23, permet d'introduire la variable scalaire d'endommagement  $D$  dans 1.27 :

$$\frac{F}{S\left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{F}{S(1 - D)}. \quad (1.28)$$

Ainsi, la contrainte effective équivaut à :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (1.29)$$

En supposant que le comportement du matériau est traduit par la loi de comportement du matériau non-endommagé ( $D = 0$ ) dans laquelle le tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  est remplacé par la contrainte effective  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , il est possible alors d'écrire, dans un cas unidimensionnel, la loi de comportement suivante :

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon^e \text{ et } \sigma = \tilde{E}\varepsilon^e. \quad (1.30)$$

L'équation 1.30 met en exergue le fait que l'endommagement affecte directement le module élastique, ce qui permet d'écrire l'équation 1.31 permettant également d'obtenir la relation 1.25 :

$$\tilde{E} = (1 - D) E \quad (1.31)$$

Il est possible de généraliser dans un cas multiaxial, toujours dans le cadre d'un endommagement isotrope, où toutes les composantes de contraintes agissent sur la même surface effective. Ainsi le tenseur de contrainte effective s'écrit simplement comme suit,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D}. \quad (1.32)$$

De plus, l'introduction d'un tenseur  $M_{ijkl}$  d'ordre 4, dépendant des tenseurs d'élasticité du solide endommagé et non-endommagé, permet de considérer un endommagement anisotrope. Ainsi la contrainte effective devient :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} : \sigma_{kl} \quad (1.33)$$

Le principe d'équivalence en déformations suppose que les divers comportements (élastique, plastique...) sont affectés de la même façon par l'endommagement. Cela permet d'introduire naturellement le tenseur  $M_{ijkl}$  de la relation 1.33. En considérant  $C_{ijkl}$  comme le tenseur d'élasticité du matériau non endommagé et  $\tilde{C}_{ijkl}$  comme le tenseur d'élasticité du matériau endommagé, dans le cas tri-dimensionnel, la relation 1.30 peut s'écrire :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl}^e \text{ et } \sigma_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} : \varepsilon_{kl}^e. \quad (1.34)$$

Les équations 1.33 et 1.34 définissent le tenseur d'effet de dommage  $M_{ijkl}$  comme étant :

$$M_{ijkl} = C_{ijkl} : (\tilde{C}_{ijkl})^{-1}. \quad (1.35)$$

Notons que la dépendance de la contrainte effective à l'endommagement implique un enrichissement nécessaire dans la description de cette dernière. Notamment lors de la prise en compte de l'effet unilatéral, une séparation de la partie positive  $\langle \bullet \rangle_+$  et négative  $\langle \bullet \rangle_-$  du tenseur  $\tilde{\sigma}_{ij}$  est attendue. De plus, lors de la prise en compte de l'anisotropie induite par le chargement, la contrainte effective s'exprime en fonction du tenseur d'endommagement. En considérant un matériau élasto-endommageable, l'énergie libre de Gibbs  $\Psi^*$  (Equation A.18) duale du potentiel thermodynamique  $\Psi$  (défini en Annexe A.3) permet d'établir une première loi de comportement d'endommagement isotrope :

$$\rho\Psi^* = \frac{1 + \nu}{2E} \frac{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}{1 - D} - \frac{\nu}{2E} \frac{\sigma_{kk}^2}{1 - D}, \quad (1.36)$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson. La loi dérivée de ce potentiel d'état en fonction de la contrainte effective  $\tilde{\sigma}_{ij}$  équivaut à :

$$\varepsilon_{ij}^e = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \tilde{\sigma}_{kk} \delta_{ij}. \quad (1.37)$$

Si les déformations plastiques  $\varepsilon_{ij}^p$  sont négligées, la relation 2.2 peut s'écrire en fonction de la déformation totale ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e$  car  $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (1.38)$$

Enfin, il est possible d'établir la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = (1 - D) (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}), \quad (1.39)$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé.

Au niveau de la TPI, l'opposé de la force thermodynamique de la variable d'état interne  $D$  est le taux de restitution de l'énergie élastique  $Y$ . Cette variable est définie comme ceci :

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial D} = \left( \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{2E} \right) \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right], \quad (1.40)$$

où  $\sigma_H = \sigma_{kk}/3$  est la contrainte hydrostatique,  $\sigma_{eq} = \left( 3/2 \sigma_{ij}^D : \sigma_{ij}^D \right)^{1/2}$  est la contrainte équivalente de Von Mises exprimée en fonction du déviateur  $\sigma_{ij}^D$ . Le ratio  $\sigma_H / \sigma_{eq}$  est la contrainte

triaxiale. Notons que la variable thermodynamique  $Y$  est positive. Ainsi l'inégalité de Clausius-Duhem (Annexe A.1.3) impose une vitesse d'endommagement positive ou nulle ( $\dot{D} \geq 0$ ).

Au final, l'évolution de la variable d'endommagement peut se faire soit en fonction des déformations  $\varepsilon_{ij}$  [Mazars, 1984], soit en fonction du taux de restitution d'énergie  $Y$  [Pijaudier-Cabot et Bode, 1992].

### 1.4.1.2 Modèle d'endommagement local isotrope de Mazars

Le modèle local<sup>5</sup> d'endommagement de Mazars<sup>6</sup> [Mazars, 1984] est l'un des tout premiers modèles d'endommagement du béton. Il constitue aujourd'hui la base de nombreux modèles. Il s'agit d'un modèle d'endommagement isotrope. Ce modèle considère que l'endommagement est contrôlé par le tenseur des déformations. Partant du postulat que les déformations positives contrôlent la croissance de l'endommagement, Mazars introduit la notion de déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  comme étant :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} , \quad (1.41)$$

où  $\varepsilon_i$  représente les déformations principales avec  $i \in [1, 3]$ .  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0$  si  $\varepsilon_i < 0$  et  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i$  si  $\varepsilon_i \geq 0$ . *In fine*, la déformation équivalente définie par Mazars permet de traduire l'état local des extensions suivant les directions principales du tenseur des déformations. La fin du domaine élastique est pilotée par une fonction seuil  $f(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{d0})$  :

$$f(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{d0}) = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0} \quad (1.42)$$

Si  $f(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{d0}) > 0$ , alors  $D > 0$  sinon  $D = 0$ . Où  $\varepsilon_{d0}$  est le seuil initial d'endommagement. La reproduction du comportement dissymétrique se fait par l'introduction d'une variable d'endommagement en traction ( $D_t$ ) et en compression ( $D_c$ ). Ainsi la relation donnant l'endommagement total s'écrit sous forme linéaire et par combinaison des deux comportements élémentaires (Figure 1.29) :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c , \quad (1.43)$$

avec  $\alpha_t + \alpha_c = 1$  où  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  représentent respectivement le couplage de traction-endommagement et de compression-endommagement et sont fonctions des déformations principales (suivant les directions  $i$ ) des tenseurs de déformations en traction ( $\varepsilon^t$ ) et en compression ( $\varepsilon^c$ ) (Equation 1.44).

$$\alpha_{c,t} = \sum_{k \in [1,3]} \left( \frac{\varepsilon_k^{c,t} \langle \varepsilon_k \rangle_+}{\varepsilon_{eq}^2} \right)^\beta \quad (1.44)$$

Enfin, les deux lois d'évolution  $D_{c,t}$  suivent une loi exponentielle et s'écrivent :

$$D_{c,t} = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} (1 - A_{c,t})}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_{c,t}}{\exp(B_{c,t} (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}))} \quad (1.45)$$

5. Les notions de localité et de non-localité sont explicitées dans la Section 1.4.3

6. Le modèle de Mazars, un des premiers du genre, se décline sous différentes formes. Celui présenté est le modèle d'origine. D'autres modèles « revisités » ont été créés afin de répondre aux différentes lacunes du modèle de base (chargement en cisaillement ou bi-compression par exemple).

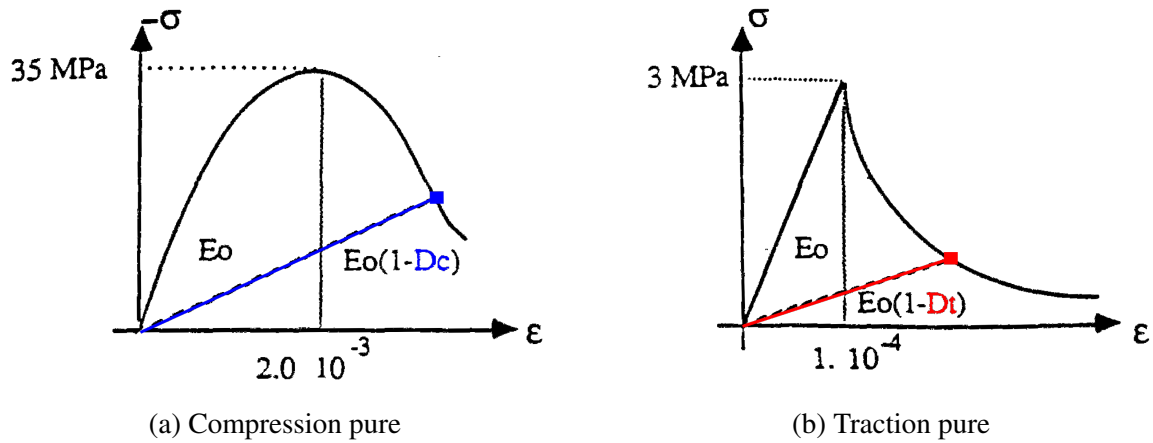


FIGURE 1.22 – Comportements élémentaires en compression et en traction considérés dans le modèle de Mazars

où  $A_{c,t}$ ,  $B_{c,t}$  et également  $\beta$  (de la relation 1.44) sont des paramètres du modèle à identifier expérimentalement et permettent de moduler la partie adoucissante.

Le modèle d'endommagement isotrope de Mazars est un modèle d'« endommagement à deux vitesses ». Malheureusement, il reste très limité car il n'est pas capable de rendre compte de l'effet unilatéral. En conséquence, il fait état d'une dissipation plus faible de l'énergie par rapport à la réalité.

Notons que de Vree *et al.* [de Vree *et al.*, 1995] proposent une simplification du modèle de Mazars par l'utilisation d'une déformation équivalente de von Mises modifiée  $\varepsilon_{eq}$  tout en gardant la forme originale de la loi d'évolution de l'endommagement où cette dernière n'est plus découplée. Cela a pour conséquence une allure identique des réponses en traction et en compression, contrairement à ce qui a été constaté expérimentalement (Figure 1.3).

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma(1 - 2\nu)} I_1 + \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma - 1}{1 - 2\nu} I_1\right)^2 + \frac{12\gamma}{(1 + \nu)^2} J_2} \quad (1.46)$$

où  $\gamma = f_t/f_c$  et  $I_1$  et  $J_2$  sont respectivement le premier et le second invariant du tenseur de déformation. De plus :

$$D = 1 - \frac{(1 - A)}{\varepsilon_{eq}} + \frac{A}{\exp(B(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}))} \quad (1.47)$$

### 1.4.1.3 Modèles d'endommagement anisotrope

Rappelons que pour le béton l'orientation des fissures dépend de la direction de la sollicitation. Cette dépendance à la direction de chargement conduit à un phénomène d'anisotropie induit par l'endommagement [Mazars, 1984, La Borderie, 1991, Fichant, 1996, Desmorat *et al.*, 2007a, Sellier *et al.*, 2013]. Dans les cas de structures simples, sous des chargements proportionnels, l'anisotropie a peu d'effet. Cependant dans le cas de chargement plus complexe et pour les matériaux anisotropes, une modélisation d'endommagement anisotrope doit être considérée. Pour ce faire, il existe des modèles qui « étendent » la théorie de l'endommagement scalaire isotrope. Dans un premier temps, de manière générale la relation 1.33 introduisant un tenseur d'endommagement d'ordre 4  $M_{ijkl}$  peut être considérée. Cependant le nombre important de composantes du tenseur rend difficile l'établissement des différentes lois d'évolution. Néanmoins une simplification du tenseur peut se faire, puisque les fissures sont soit perpendiculaires

ou parallèles au sens de chargement. De ce constat, le tenseur d'endommagement peut être représenté par un tenseur d'ordre 2 dont seules les valeurs propres peuvent évoluer [Desmorat et al., 2007b].

### Modèles avec fissuration diffuse

Un des tout premiers modèles établis afin de décrire le comportement d'une fissure au sein d'un matériau est basé sur la théorie de la fissuration diffuse (smeared crack model) [Rashid, 1968]. Il part du principe que la rupture localisée qui a lieu dans l'élément est diffusée sur ce même élément. Au fur et à mesure des années, ce modèle a été amélioré afin d'intégrer le comportement adoucissant du béton et de prendre en compte un éventuel frottement entre les lèvres (introduction d'un coefficient de rétention au cisaillement), ou encore les phénomènes liés à la rotation du repère des contraintes principales.

En partant du postulat que le matériau considéré est isotrope et élastique avant fissuration (ce qui est le cas pour le béton), les modèles avec fissuration diffuse sont la combinaison de deux types de modèles :

- les modèles à fissuration fixe où la direction de la normale  $\vec{n}$  à la fissure reste fixe après amorçage, permettant de traiter séparément le comportement du béton non-endommagé et celui de la fissure. Dans un cas unidimensionnel, l'incrément de déformations totales  $\Delta\varepsilon$  correspond à la somme des incréments de déformations dus au comportement élastique du béton seul  $\Delta\varepsilon^{ebet}$  et de l'incrément de déformations dus aux fissures  $\Delta\varepsilon^{fiss}$ . Ce dernier incrément peut être subdivisé par l'apport de chaque incrément de déformations de  $n$  fissures ( $\Delta\varepsilon^{fiss} = \Delta\varepsilon^{fiss1} + \Delta\varepsilon^{fiss2} + \Delta\varepsilon^{fissn}$ ).
- les modèles avec fissuration tournante permettent de généraliser le modèle à fissuration fixe. Ici la direction de la normale  $\vec{n}$  peut tourner pendant le processus de fissuration en suivant les axes du repère principal  $i$  des déformations. Le repère local est le même que le repère du tenseur principal.

### Modèles à microplans

Toujours dans une approche anisotrope, la théorie des microplans utilisée par Bažant pour décrire la dégradation des matériaux comme le béton [Bažant et Oh, 1985] peut être considérée comme une alternative à l'utilisation d'un tenseur d'endommagement d'ordre 4. La loi de comportement est discrétisée suivant un certain nombre de microplans. Sur chaque plan  $\alpha$  d'orientation  $\vec{n}$ , des relations uniaxiales reliant les composantes du vecteur déformation aux composantes du vecteur contrainte sont définies. Seules les contraintes normales et tangentielles sont actives et le paramètre qui caractérise l'endommagement sur chaque microplan est désormais un scalaire. Sa valeur est différente d'un microplan à l'autre, ce qui conduit à une description anisotrope à l'échelle macroscopique. Cependant la dépendance de la réponse au nombre de points d'intégration reste problématique.

#### 1.4.1.4 Modèles unilatéraux

Le phénomène unilatéral (voir Section 1.2.1.2), lié à la refermeture de fissures entraîne la restauration de la raideur initiale de la structure en compression, préalablement endommagée en traction, a également fait l'objet de modèles. La Borderie, au travers de ces travaux de thèse [La Borderie, 1991] proposa un modèle prenant en compte ce phénomène. Il propose tout comme dans le modèle de Mazars l'introduction de plusieurs variables d'endommagement susceptibles de traduire l'état du matériau. Au minimum, deux variables sont nécessaires afin

de séparer les effets mécaniques d'ouverture ( $D_1$  lié à la traction) et de fermeture de microfissures ( $D_2$  lié à la compression). Cependant La Borderie considère en plus les déformations permanentes (ou anélastiques)  $\varepsilon^{an}$ . Ce qui conduit à la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{an} \quad , \quad (1.48)$$

où, le tenseur de déformations élastiques  $\varepsilon_{ij}^e$  s'écrit toujours dans le cadre d'un matériau isotrope à endommagement isotrope :

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle_+}{E(1-D_1)} + \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle_-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E} (\sigma_{ij} - Tr(\sigma_{ij}) \cdot I_{ij}) \quad , \quad (1.49)$$

et, le tenseur de déformations anélastiques  $\varepsilon_{ij}^{an}$  comme étant égal à :

$$\varepsilon_{ij}^{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} F(\sigma_{ij}) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} \cdot I_{ij} \quad , \quad (1.50)$$

où,  $I_{ij}$  est le tenseur unité d'ordre 2,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des paramètres matériaux à identifier décrivant l'évolution des déformations anélastiques.  $\langle \sigma_{ij} \rangle_+$  et  $\langle \sigma_{ij} \rangle_-$  sont respectivement le tenseur des contraintes de traction et de compression établis dans le repère principal (termes positifs pour la traction et négatifs pour la compression). Et enfin,  $F(\sigma_{ij})$  est la fonction de refermeture de fissures dont le rôle est d'annuler les déformations anélastiques de traction lors de la reprise de raideur et s'exprime en fonction de la trace du tenseur des contraintes et en fonction de  $\sigma_f$  la contrainte de refermeture de fissure (Figure 1.23).

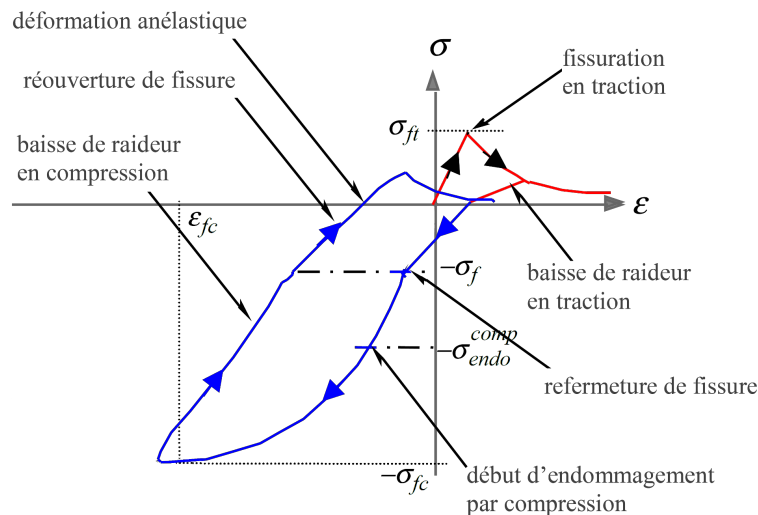


FIGURE 1.23 – Réponse en traction-compression du modèle de La Borderie

Autre constat, l'endommagement n'évolue plus suivant une déformation équivalente mais en fonction de sa force thermodynamique associée (Relation 1.40). Un critère de plasticité avec écrouissage peut également être ajouté dans le calcul des déformations anélastiques. Ramtani [Ramtani, 1990] propose l'utilisation de deux tenseurs de d'ordre 2 pour décrire l'endommagement en traction et en compression et en plus une variable scalaire d'endommagement volumique. Ce modèle, en plus de traduire le comportement dissymétrique et l'effet unilatéral, traduit l'anisotropie.

## 1.4.2 Modèles de plasticité

Lors d'un déchargement, les micro-fissures ne se referment pas totalement et la rugosité des fissures formées empêche le retour à l'état initial. La plupart des modèles considèrent les déformations permanentes comme des déformations plastiques et sont donc associées à une fonction de charge. Dans la suite de cette section seront présentées les différentes surfaces<sup>7</sup> seuils de plasticité considérées par différents auteurs.

### 1.4.2.1 Critère de von Mises

Le critère de von Mises représente l'une des fonctions seuils les plus simples à mettre en œuvre numériquement. La surface seuil de plasticité  $f$  (régime élastique est défini lorsque  $f < 0$ ) s'écrit alors :

$$f = \sigma_{eq} - \omega(\kappa) - \omega_0 = 0 \quad , \quad (1.51)$$

où  $\sigma_{eq}$  est la contrainte de von Mises,  $\omega(\kappa)$  est le paramètre d'écrouissage fonction de la déformation plastique effective et qui vaut initialement  $\omega_0$ . Notons que la seule prise en compte de la partie déviatorique (par le biais du second invariant du déviateur  $J_2$ ) rend ce critère obsolète dans des cas de pression hydrostatique (prise en compte d'effets de confinement sous pression par exemple).

### 1.4.2.2 Critère de Drücker-Prager

Le critère de von Mises a été modifié afin d'introduire une sensibilité à la pression hydrostatique en ajoutant le premier invariant du tenseur de contrainte  $I_1$ . La surface seuil de plasticité s'écrit alors :

$$f = \sigma_{eq} + \alpha I_1 - \omega(\kappa) - \omega_0 = 0 \quad (1.52)$$

où  $\alpha$  est un paramètre matériau calculé à partir de l'angle de frottement interne.

### 1.4.2.3 Critère de Nadai

Le critère de Nadai est de même type que le critère de Drücker-Prager, avec une prise en compte de  $I_1$  et  $J_2$  et se traduit par deux expressions linéaires  $f_1$  et  $f_2$  sous la forme générale suivante :

$$f_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 + A_{1,2} I_1 - B_{1,2} (\omega(\kappa) - \omega_0) = 0 \quad , \quad (1.53)$$

où  $A_{1,2}$  et  $B_{1,2}$  sont des paramètres identifiés expérimentalement à partir d'essais en compression simple et biaxiale. Notons que le passage d'une expression  $f_1$  à  $f_2$  se fait en fonction d'un critère piloté par la valeur du premier invariant  $I_1$ . Dans le cas d'un couplage éventuel avec l'endommagement, il devient plus simple d'exprimer ces surfaces dans l'espace des contraintes effectives. La forme de la fonction d'écrouissage  $\omega(\kappa)$  peut suivre une loi puissance ou une loi linéaire.

7. Surface dans l'espace des contraintes définissant des états de contraintes pour lesquels se développent des déformations plastiques

### 1.4.3 Problème de localisation : techniques de régularisation

La simulation numérique du comportement non-linéaire du béton est confrontée à un problème majeur de localisation de l'endommagement, dû principalement au caractère adoucissant. Numériquement, ce problème est lié à la nature même de l'approximation aux éléments finis : les discontinuités sont repoussées aux frontières des éléments puisque les champs de déplacements sont continus dans un élément. Il en résulte une localisation des déformations dans une bande dont l'épaisseur est contrôlée directement par la taille des éléments finis  $h_{el}$ . Il y a donc une dépendance du comportement simulé à la taille de l'élément fini. De plus, l'énergie dissipée se trouve ainsi confinée dans les éléments où l'adoucissement est actif. De ce fait, deux constats peuvent être établis : la taille de la zone de localisation diminue avec le raffinement du maillage et elle est également sensible à l'orientation des éléments (Figure 1.24). Notons que d'un point de vue mathématique, le phénomène de localisation est caractérisé par une perte d'ellipticité du système d'équations différentielles décrivant le processus de déformation, i.e., le problème devient mal posé admettant une infinité de solution.

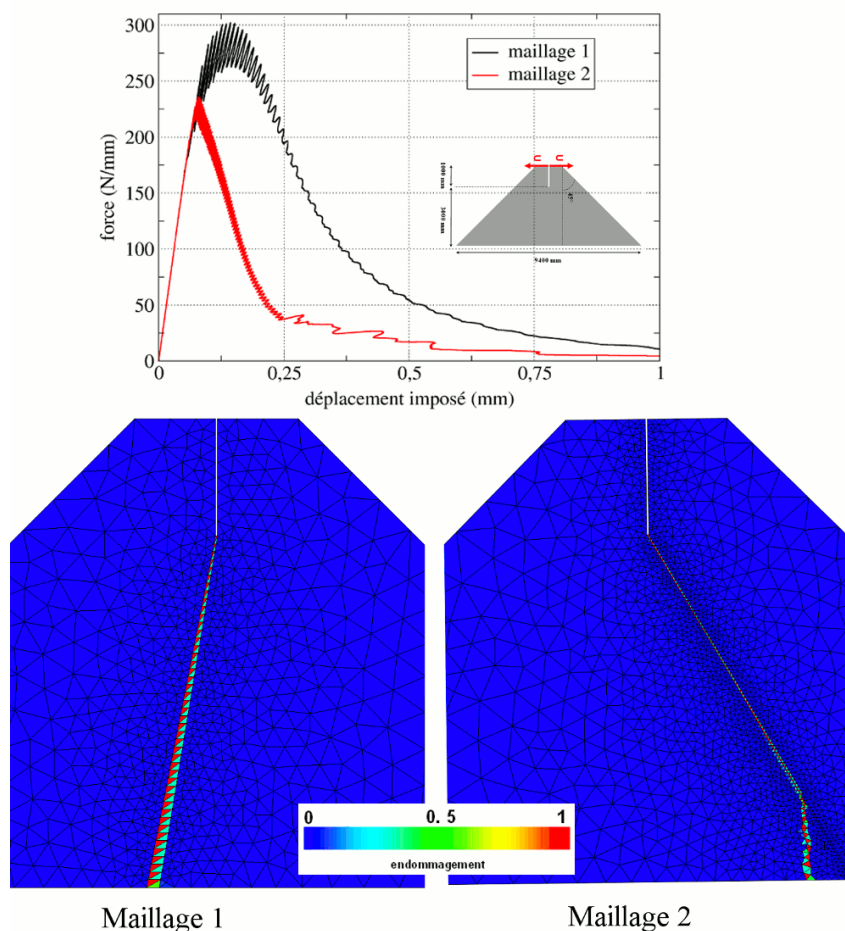


FIGURE 1.24 – Problème de localisation lors d'une utilisation d'un modèle local d'endommagement fragile : champ d'endommagement et réponse macroscopique [Cuvilliez, 2012]

Afin de surmonter cette problématique, un enrichissement de la description mécanique du milieu est crucial : cela passe par une méthode de régularisation.

#### 1.4.3.1 Régularisation non-locale

L'idée principale de la régularisation non-locale consiste à considérer en chaque point, à la place de la quantité locale, une quantité prenant en compte l'influence du voisinage. Deux



principaux types de modèle non-local existent : le modèle non-local de type intégral et le modèle non-local de type gradient. Dans le modèle non-local de type intégral, la loi constitutive en un point tient compte d'une moyenne pondérée d'une des variables d'états dans un voisinage de ce point. Dans le modèle non-local de type gradient, la relation constitutive locale en un point, et dans son voisinage, est enrichie avec le gradient de certaines variables d'états.

### Modèle non-local de type intégral

Les modèles non-locaux de type intégral [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] reposent sur le moyennage de certaines variables agissant sur le comportement, afin de régulariser les réponses du modèle local. De ce fait, en reprenant le modèle de Mazars présenté à la Section 1.4.1.2, il est possible de régulariser le problème en redéfinissant la déformation équivalente, qui est pour rappel, celle qui pilote l'endommagement (Equation 1.46). Pour ce faire une fonction poids  $\Phi_0$  de type Gaussienne est utilisée (Equation 1.56).

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{1}{\Omega_r} \int_{\Omega} \varepsilon_{eq}(\xi) \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \Phi_0(x, \xi) d\xi \quad (1.54)$$

où,

$$\Omega_r(x) = \int_{\Omega} \Phi_0(x, \xi) d\xi \quad , \quad (1.55)$$

et,

$$\Phi_0(x, \xi) = \exp\left(-\left(\frac{2\|x - \xi\|}{l_c}\right)^2\right) \quad , \quad (1.56)$$

où  $\Phi_0(x, \xi)$  est la fonction poids,  $\Omega$  est le volume total de la structure et  $\Omega_r$  un volume caractéristique introduit afin de ne pas perturber le champ uniforme de déformation. La variable  $l_c$  est la longueur interne du modèle liée à la taille de la zone d'élaboration. Notons que Bažant et Pijaudier-Cabot proposent une relation entre cette longueur et le diamètre du plus gros granulat  $\varnothing_{max}$  en considérant que  $l_c \simeq 2.7\varnothing_{max}$  [Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989]. Cependant, il n'existe toujours pas de relation explicite reliant cette longueur à la nature même du matériau, ce qui constitue un verrou majeur dans l'utilisation de ce type de modèle. De plus, l'indépendance au maillage se fait uniquement si cette longueur caractéristique reste supérieure à la taille des éléments. Notons que certains auteurs appliquent cette régularisation directement sur la variable d'endommagement  $D$ . Rojas [Rojas Solano, 2012] soulève des limitations dans le modèle d'endommagement non-local classique à type d'intégral (incapacité de décrire la transition continu/discret, à reproduire une discontinuité forte et à retrouver un comportement local sur un bord) et propose une version modifiée en intégrant une fonction d'interactions.

### Modèle non-local de type gradient

D'autres formulations introduisent un gradient d'ordre supérieur des déformations, des contraintes ou des variables internes : il s'agit des modèles à gradient<sup>8</sup>. Le gradient d'une variable est introduit comme une variable supplémentaire du modèle [Frémond et Nedjar, 1996]. Explicitement, la régularisation en gradient ajoute à la quantité locale  $g(x)$  son Laplacien  $\nabla^2 g(x)$ . Sur cette base, Peerlings *et al.* [Peerlings *et al.*, 1996] proposent d'appliquer ce type de régularisation aux modèles d'endommagement en considérant la déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  comme variable interne. Par une régularisation par gradient, la déformation équivalente devient alors :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} + l_g^2 \nabla^2 \varepsilon_{eq} \quad , \quad (1.57)$$

8. Il existe le modèle à gradient explicite qui apporte directement aux lois constitutives des termes de type gradient et le modèle à gradient implicite qui améliore les lois constitutives en apportant un champ non-local.

où  $l_g$  peut être interprétée comme la longueur caractéristique du modèle.

En somme le point commun entre les deux types présentés est l'introduction d'une longueur caractéristique considérée comme un paramètre intrinsèque du matériau. Certaines études ont mis en exergue la dépendance de cette longueur aux conditions aux limites, du type de structure, du chemin de fissure... L'introduction d'une longueur caractéristique peut être vue comme un artefact numérique ayant pour but de régulariser une solution et de s'affranchir de la dépendance au maillage.

### 1.4.3.2 Régularisation énergétique

Les travaux de Dugdale (sur les aciers) et Barenblatt (sur les matériaux fragiles) repris ensuite par Hillerborg *et al.* (dans le cas des matériaux quasi-fragiles) [Hillerborg *et al.*, 1976] ont mis en évidence le rôle de l'énergie de fissuration  $G_f$  comme outil de régularisation de la solution. Cette régularisation est basée sur des modèles de rupture par approche globale, i.e., énergétique - *les modèles de fissures fictives et de bandes de fissuration* (présentés à la Section 1.3.3). Rappelons qu'étant donné que l'énergie de rupture est liée au volume de la zone de localisation, si la taille des éléments finis tend vers zéro, une structure est capable d'atteindre la ruine sans dissipation d'énergie. Ainsi l'utilisation de l'énergie de fissuration  $G_f$  permet, dans un calcul aux éléments finis, de préserver la dissipation de l'énergie en la rendant totalement indépendante à la taille des éléments. L'énergie de fissuration peut être définie comme la somme des énergies nécessaires pour créer une unité de surface d'une fissure en mode  $I$  (ouverture). Notons que ce type de régularisation dans un modèle d'endommagement est uniquement possible si une relation directe est établie entre l'énergie de fissuration et la loi contrôlant l'adoucissement. Cette relation est généralement obtenue pour un cas unidimensionnel. Ce dernier point peut être considéré comme un verrou puisque ceci conduit à fausser (surestimer ou sous-estimer) la dissipation dans les éléments qui subissent des états de contraintes non uniaxiales. En analogie avec le modèle de bande de fissuration, la régularisation énergétique peut être vue comme un ajustement du module tangent ( $E_t$  de la relation 1.21) en fonction de la taille de l'élément. Cette dernière est considérée comme équivalente à la largeur de la bande fissuration ( $h_{el} = l_b$ ).

### 1.4.4 Conclusion sur la modélisation de l'endommagement des bétons

Le matériau béton est complexe. Dans la mise en place d'un modèle numérique suivant différentes approches discrètes [Jirásek et Bažant, 1995], lattices [Grassl et Jirásek, 2010] ou aux éléments finis [Skarżyński et Tejchman, 2010], certains aspects phénoménologiques doivent impérativement être pris en compte. La littérature rend compte d'un grand nombre de modèles décrivant plus ou moins fidèlement la plupart des traits de caractère du béton. Ici, une partie d'entre eux a été évoquée, comme les formulations de type endommagement (isotrope, anisotrope), de fissures diffuses, microplans. Ces modèles retranscrivent les phénomènes d'initiation de l'endommagement à la propagation de la fissure, i.e., le processus de rupture dans son ensemble. D'un point de vue ingénierie, ces modèles sont intéressants car la position des fissures ne peut pas être connue à l'avance dans un ouvrage. En résumé, les modèles d'endommagement isotrope se révèlent assez efficaces et sont adaptés aux comportements fondamentaux du béton mais seront réservés à des cas de sollicitations non complexes. En combinant ce type de modèle avec des modèles de plasticité, il est possible de reproduire plus fidèlement le comportement du béton [Fichant *et al.*, 1999].

L'application directe d'un modèle local, comme celui développé par Mazars, est limitée par le phénomène de localisation dépendant du maillage (Figure 1.24). Il y a donc la néces-

sité d'introduire une technique de régularisation pour éviter le phénomène de localisation de l'endommagement. Le passage à une approche non-locale par le biais d'une fonction poids ou l'introduction d'un terme de gradient reste une solution, mais nécessite l'introduction d'une longueur caractéristique. Cependant une autre solution réside en l'utilisation de l'énergie de fissuration comme outil de régularisation. Cette dernière technique, basée sur une approche « bande de fissuration » ou « crack band », est utilisée dans ce travail en soutien d'un modèle d'endommagement isotrope.

## 1.5 Choix de l'échelle de la modélisation de l'endommagement

Un dernier point, mais pas des moindres, reste l'échelle de description du comportement dans une démarche de modélisation. En effet, plusieurs choix s'offrent en fonction du type de problème à résoudre et du résultat souhaité mais également en fonction du matériau étudié et des mécanismes d'endommagement qui lui sont associés. Le choix de l'approche numérique utilisée dépend également de l'échelle d'observation choisie (Figure 1.25). Selon Zaitsev et Wittmann [Zaitsev et Wittmann, 1981], un système hiérarchique multi-échelles (macro-meso-micro-nano) doit être pris en compte lors de l'étude de la propagation de la fissure et la rupture du béton dans une structure réelle.

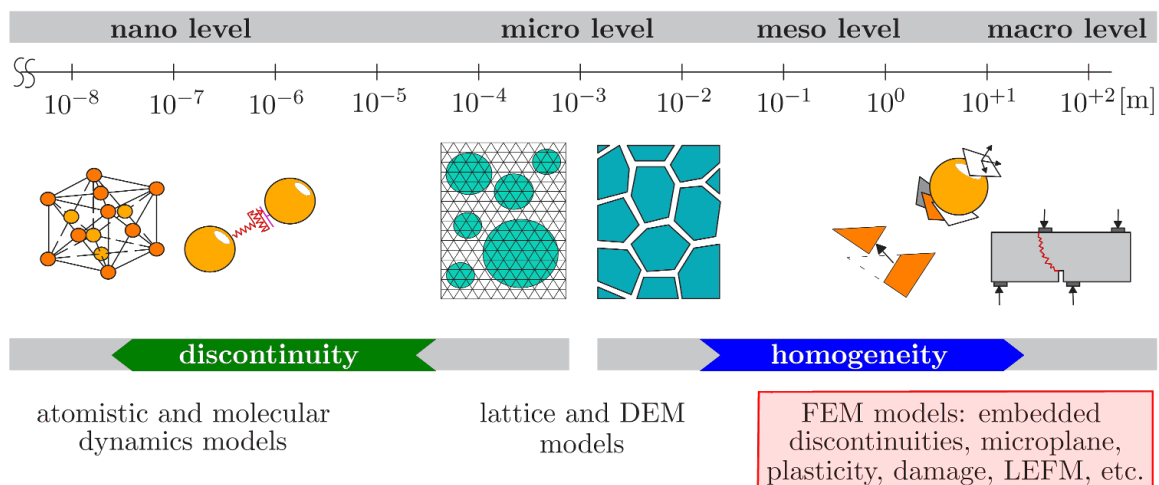


FIGURE 1.25 – Représentation des échelles d'observations et des modèles numériques pour les matériaux multiphasiques [Morice, 2014]

Les modélisations à l'échelle macroscopique ont le défaut de posséder un nombre important de paramètres nécessaires pour décrire la complexité du comportement du matériau sous diverses sollicitations. Une grande partie de cette complexité du comportement est liée à la géométrie et la structure hétérogène du béton [La Borderie et al., 2007]. Les modélisations à l'échelle mésoscopique sont donc un bon compromis entre des modélisations macroscopiques complexes et difficiles à calibrer et des modélisations à l'échelle microscopique souvent lourdes à mettre en place et ne permettant pas l'étude de grandes structures. Dans ces travaux de thèse, la volonté de caractériser numériquement la zone d'élaboration de la rupture implique naturellement une étude à son échelle, et donc à l'échelle mésoscopique (de l'ordre du  $mm$ ). Travailler à cette échelle permet de modéliser le contraste des propriétés entre la pâte de ciment et les granulats.

Dans cette étude le matériau béton sera décrit via une approche continue et en conséquence la méthode des éléments finis sera utilisée.

### 1.5.1 Génération de la mésostructure

Rappelons que le matériau béton est un matériau composite, de forte hétérogénéité (avec une microstructure très complexe). Il peut être considéré et modélisé soit comme :

- biphasique : des inclusions (granulats) en toute rigueur de différentes tailles et de formes différentes, occupant généralement entre 60 et 75% du volume du béton, entourées par une matrice à pâte cimentaire.
- triphasique : en plus des deux premières phases, une auréole de transition (ITZ) située à l'interface granulats/pâte de ciment. Son épaisseur augmente avec la taille des granulats mais reste inférieure à  $50 \mu m$ , elle représente le point faible de la microstructure du béton [Maso, 1980].

Notons que la porosité naturelle peut également être prise en compte lors des modélisations [Wang et al., 2015]. Connaissant la taille et la fraction volumique (ou surfacique) des granulats à modéliser (par exemple à partir d'une courbe granulométrique du béton étudié) la mésostructure peut être générée. Deux grandes familles sont proposées : la méthode « exacte » basée sur une vraie image de la mésostructure et la méthode « aléatoire » basée sur la génération stochastique des granulats en respectant certaines conditions.

#### Génération à partir d'une image

La position des granulats ainsi que leurs tailles peuvent être connues de manière exacte à partir d'une image [Guo et al., 2009]. Cependant, cette méthode intéressante est très limitée et coûteuse en ressource informatique et expérimentale. Les méthodes les plus connues sont la numérisation d'un échantillon de béton poli, le microscope à balayage électronique, la tomographie pour la 3D ou encore la microphotographie. Par un traitement de l'image obtenue, il devient alors possible de modéliser chaque constituant du béton (Figure 1.26).

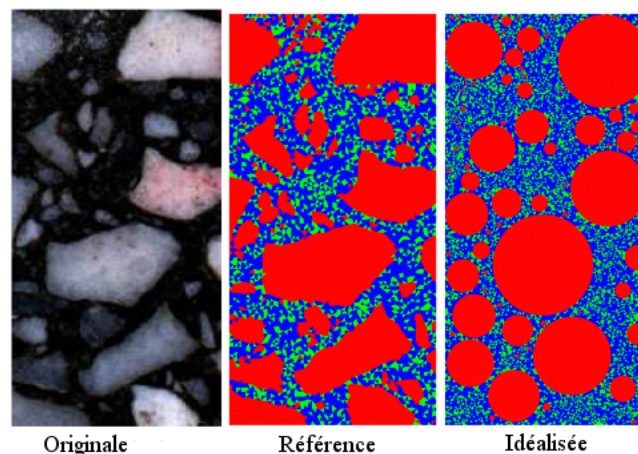


FIGURE 1.26 – Génération exacte du squelette granulaire à partir d'une image et sa simplification circulaire [La Borderie et al., 2007]

#### Génération aléatoire du squelette granulaire

Il est également possible de générer aléatoirement les granulats. Deux questions se posent : « De quelles formes doivent être les granulats ? » et « Comment les placer tout en respectant la

compacité ? ». Les réponses à ces questions sont ici apportées dans un cas bi-dimensionnel.

Pour répondre à la première question, le manque d'informations sur la forme exacte des granulats utilisés amène à l'idéalisation de ces dernières par des formes plus ou moins complexes (forme angulaire [Wang et al., 1999]; forme circulaire [Bažant et al., 1990]) comme illustrées en Figure 1.27. Notons que des lois morphologiques peuvent également être utilisées pour définir les granulats [Wittmann et al., 1985, Roelfstra et al., 1985].

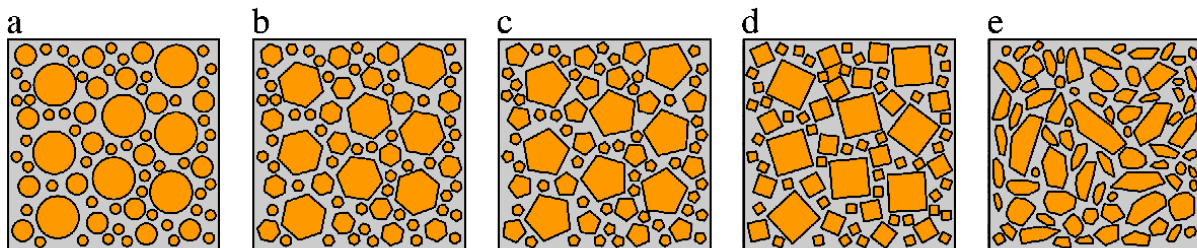


FIGURE 1.27 – Formes des granulats possibles pour la création du squelette granulaire en 2D :(a) Circulaire (cas simple de la forme ellipsoïdale), (b) Hexagonale, (c) Pentagonale, (d) tétragonale et (e) Polygonale de formes arbitraires [Kim et Abu Al-Rub, 2011]

Pour répondre à la seconde question, les modèles de génération aléatoire des granulats sont basés pour la plupart sur des algorithmes tels que la Méthode de Monte Carlo ou encore les générateurs de nombres aléatoires. Si la procédure de tirage n'est pas vraiment la problématique, la procédure de placement peut quant à elle être relativement complexe dans le cas de compacité granulaire importante ( $Fvg \simeq 0.7$ ). La méthode la plus couramment utilisée est la méthode « take and place », où la notion de tirage prend tout son sens, car les granulats sont tirés et placés un par un avec une condition de non-recouvrement jusqu'à un placement total de toutes les inclusions. La manière optimale d'utiliser cette méthode est d'utiliser un algorithme stochastique-heuristique où une hiérarchie est établie dans le tirage : on commence par placer les plus gros granulats et ainsi de suite jusqu'au plus petits [Leite et al., 2004]. Au niveau de la condition de non-recouvrement, le granulat chevauchant un autre peut être soit retiré suivant la procédure aléatoire, soit déplacé (combinaison d'une translation et d'une rotation). Notons qu'une zone d'influence représentant la distance minimum possible entre granulats peut être considérée. Cette distance est due à l'épaisseur de pâte séparant deux granulats et dépend de la taille de ces derniers : c'est le concept de « Maximum Paste Thickness » [De Larrard, 1999].

## 1.5.2 Approches numériques disponibles pour l'application des modèles

Il existe trois approches numériques principales à partir desquelles le comportement à la rupture du béton est étudié. Ces 3 approches prennent toutes place à l'échelle mésoscopique : l'approche par éléments finis (FEM), l'approche lattice, et l'approche particulaire ou discrète (DEM) (Figure 1.28).

### 1.5.2.1 Approche aux éléments finis

L'approche éléments finis est la plus courante des approches pour l'étude du béton à l'échelle mésoscopique et sera celle utilisée ici. Cette méthode repose sur une discrétisation du domaine d'étude à l'aide d'un maillage. Chaque pavé du maillage voire, chaque point de Gauss se voit assigner des propriétés mécaniques et une loi de comportement d'un des constituants en fonction de sa position, le but étant de reproduire la géométrie initiale du béton que l'on veut étudier. Plus le maillage est fin, plus la représentation est fidèle à la structure hétérogène du béton. Il

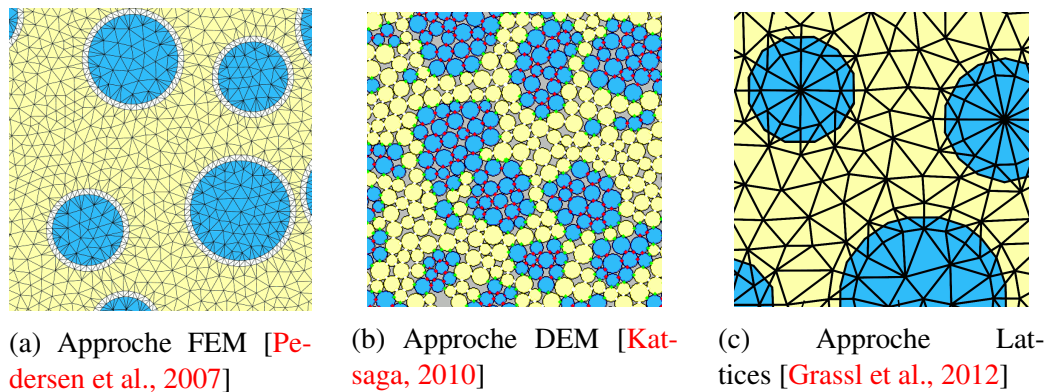


FIGURE 1.28 – Illustrations des principales approches numériques existantes pour la modélisation du béton à l'échelle mésoscopique : idéalisation circulaire des inclusions

existe cependant une limite imposée par le temps de calcul avec la condition *sine qua non* où la taille de la maille  $h_{el}$  reste inférieure à la taille du plus petit granulat  $\varnothing_{min}$ . Un maillage trop fin implique des calculs trop coûteux mais permettrait d'avoir la représentation de fines ( $\varnothing_{min} \approx 1 \text{ mm}$ ) dans la limite du possible de la génération du maillage (préservation d'un angle minimum d'un élément). Ainsi, le plus souvent les tailles de grains les plus petites ne peuvent pas être prises en compte. Lors d'un maillage exact de la mésostructure, à la suite d'une image numérisée, une méthode de triangulation de Delaunay (maximisation des petits angles et les cercles circonscrits ne contiennent pas de 4<sup>ème</sup> point) est utilisée. Une autre méthode existe : la projection d'un maillage régulier ou aléatoire sur le squelette granulaire et les propriétés de chaque constituant sont affectées selon leur position (par identification) [Wang et al., 1999].

Dans une représentation triphasique du béton, l'auréole de transition, zone de faiblesse et d'initiation de l'endommagement, peut également être représentée par cette approche numérique [Pedersen et al., 2007], et ce, souvent aux dépens de la bonne représentation de la compacité granulaire. Néanmoins, sa faible épaisseur et ses propriétés physiques et mécaniques difficilement identifiables complexifient la modélisation. C'est donc pour ces raisons que dans les présents travaux, le béton sera considéré comme biphasique et l'introduction d'un maillage de type diffus permettra de simuler de manière indirecte le rôle de l'ITZ.

### 1.5.2.2 Approche par éléments discrets particuliers

L'approche par éléments discrets particuliers (DEM) est utilisée pour l'étude et la modélisation d'impacts (problèmes dynamiques, de grands déplacements...) et de la propagation des fissures dans les géomatériaux. L'approche DEM consiste à remplacer le domaine d'étude par un nombre important de particules. Chaque particule possède les propriétés mécaniques d'un des constituants et interagit avec les particules voisines à l'aide de fonctions d'interactions de contact. Les particules peuvent également être liées entre elles par des poutres (lattice) afin d'assurer une cohésion du milieu modélisé. Cette méthode s'avère efficace pour gérer les contacts et interactions entre les granulats et la pâte de ciment et donc pour modéliser le processus de fissuration du matériau. Un paramètre important, dont l'algorithme de détection des contacts est tributaire, est la forme des particules. Ces particules peuvent être circulaires (Figure 1.28b), elliptiques, polygonales ou en clusters (amas de particule).

### 1.5.2.3 Approche lattice ou treillis

L'approche lattice, développée par les physiciens, représente le matériau comme un ensemble de poutres projetées sur la structure mésoscopique. Ces poutres sont reliées entre elles sur la base de diagrammes de Voronoï (graphe dual de la triangulation de Delaunay) formant ainsi une grille, appelée également maillage. Généralement, la grille est de forme triangulaire (Figures 1.28c et 1.29a). L'hétérogénéité du béton est introduite en affectant aux liens des paramètres mécaniques différents selon qu'ils représentent des granulates, de la pâte de ciment ou une interface. Cette approche est une des plus populaires pour expliquer la rupture du béton à l'échelle mésoscopique. L'introduction d'une fissure est assez aisée par l'élimination des poutres au fur et à mesure de la propagation de la fissure. En effet, les poutres rompent lorsqu'un critère de contrainte approprié est atteint. La prise en compte de l'ITZ par ce type d'approche numérique est possible. Les propriétés équivalentes à la liaison sont évaluées à partir des propriétés de chaque constituant et en fonction d'une longueur associée (Figure 1.29b). Cependant, l'approche lattice est également réputée pour avoir un coût de calcul prohibitif, notamment quand il s'agit de modéliser l'ITZ (augmentation importante du nombre de poutres).

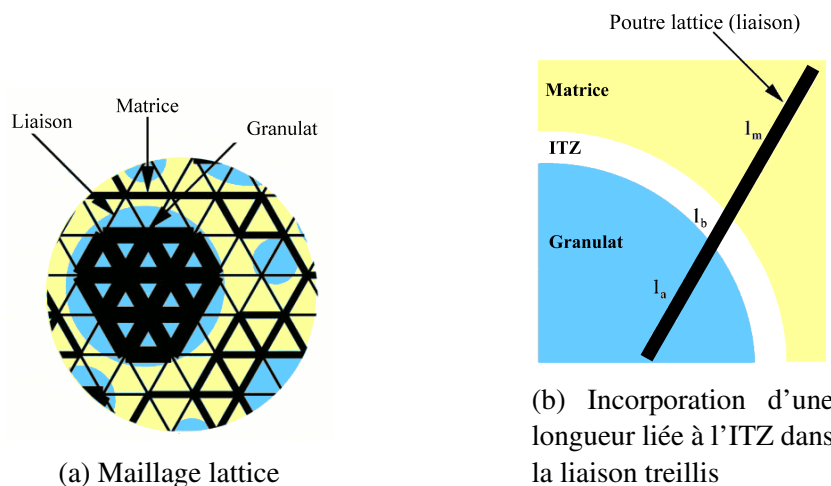


FIGURE 1.29 – Maillage d'un modèle lattice et description de la liaison lattice [Lilliu et van Mier, 2003]

### 1.5.3 Idéalisisation de la forme des granulates

Cette section recense différentes études sur la légitimité d'idéaliser la forme des granulates sous des formes simples, notamment des disques. Dans cette optique, La Borderie *et al.* proposent une étude en comparant un squelette granulaire exact (issu d'une image réelle) et sa version idéalisée par des disques (Figure 1.26) [La Borderie *et al.*, 2007]. Ils étudient la réponse macroscopique via un modèle d'endommagement basé sur une approche aux éléments finis. Il a été observé un chemin de fissuration identique et une réponse macroscopique similaire (Figures 1.30). Cependant lors d'un chargement en compression, les chemins de fissuration sont plus complexes pour l'échantillon de référence (mésostructure exacte) qui montre une résistance en compression et une dissipation de l'énergie plus importantes.

Wang *et al.* [Wang *et al.*, 2015] ont procédé également à une étude de sensibilité à la forme du granulat (circulaires vs elliptiques vs polygonaux) en s'appuyant sur une approche aux éléments finis et par utilisation d'éléments cohésifs. Ils ont montré que l'utilisation de formes polygonales conduit à une contrainte maximale en traction légèrement inférieure ( $\approx -5\%$ ) aux deux autres formes. Ce constat peut s'expliquer par l'augmentation du nombre d'interfaces cohésives et par la création de concentration de contraintes aux angles des inclusions. Ces concentrations

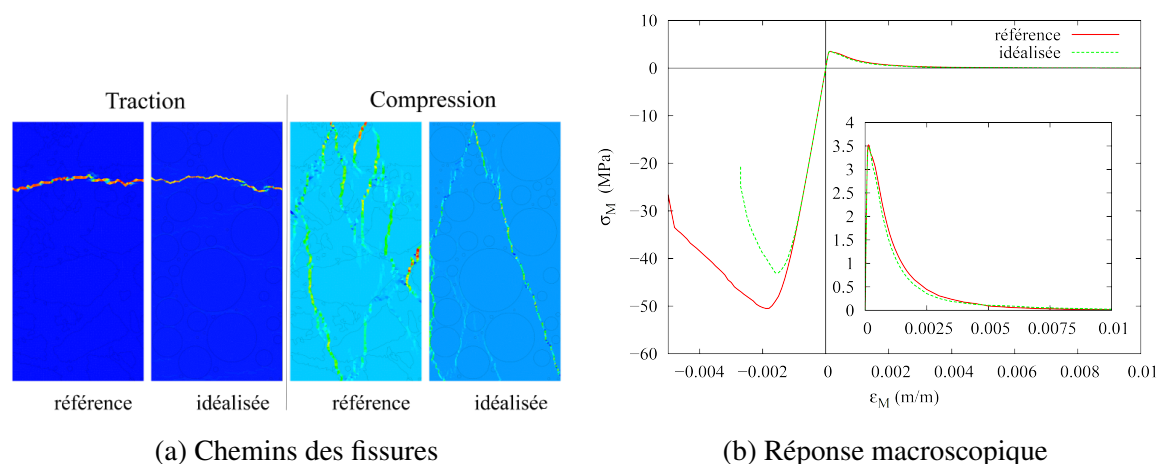


FIGURE 1.30 – Comparaison d’une mésostructure exacte et idéalisée par des disques au travers de l’analyse de la réponse (a) locale et (b) globale [La Borderie et al., 2007]

tendent à diminuer lorsqu’on utilise des disques ou des ellipses. Sur la base de simulations d’éprouvettes en traction et par l’utilisation d’un modèle élasto-plastique endommageable, Kim et Abu Al-Rub ont également comparé différentes formes de granulats (Figure 1.27) et sont arrivés au même constat [Kim et Abu Al-Rub, 2011]. *In fine*, par souci de simplification, la génération aléatoire d’un squelette granulaire circulaire semble être justifiée.

## 1.6 Conclusion

Le matériau béton est un matériau composite, hétérogène, complexe et présentant un comportement quasi-fragile. Il a été vu que les grands aspects phénoménologiques du comportement du béton (Section 1.2.1) doivent être pris en compte pour aboutir à une modélisation pertinente. Le caractère adoucissant est la conséquence de la présence de la zone d’élaboration de la rupture qui se développe et atteint une taille critique provoquant la propagation d’une fissure principale (Section 1.2.2). Dans une volonté de modéliser le comportement du béton, vu comme « macroscopiquement » homogène et/ou « mésoscopiquement » hétérogène, la théorie de l’endommagement énoncée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Annexe A) semble être une solution adéquate permettant à la fois de retranscrire le développement de la zone d’élaboration et sa croissance jusqu’à la propagation d’une fissure principale (Section 1.4.1). Le chemin de la fissure n’a pas besoin d’être préalablement connu. Néanmoins, le caractère adoucissant pose un problème aussi bien d’un point de vue mathématique que mécanique. Sur la base d’une approche aux éléments finis, une dépendance de l’endommagement et donc du chemin de fissure à la taille et l’orientation du maillage apparaît. C’est pour cette raison qu’une technique de régularisation doit être utilisée (Section 1.4.3). La littérature montre un grand nombre de modèles d’endommagement du béton et leurs régularisations adaptées. Chaque modèle présente toutefois ses avantages et ses inconvénients. L’utilisation de tel type de modèle ou de tel autre dépendra des critères fixés par le chercheur (objectifs, cadre de l’étude, hypothèses, type de sollicitation...). La mécanique de la rupture, science plus ancienne que la mécanique de l’endommagement, permet l’étude de la propagation des fissures. La mécanique linéaire élastique de la rupture, très utilisée dans des contextes aéronautiques, propose une description des champs de contraintes et de déplacements en pointe de fissure mais aussi du jeu des énergies au cours du processus de fissuration (Section 1.3.1). Pour les bétons, et plus généralement les matériaux quasi-fragiles, i.e., ceux présentant une zone d’élaboration de la rupture de taille conséquente, la MLER n’est plus applicable. Il faut alors faire appel, aux théories non-linéaires (Section 1.3.3) ou à une adaptation de la MLER (Section 1.3.2) appelée MLER



équivalente. Grâce à cette dernière, l'estimation de courbes de résistance (Section 1.3.2.2) permet d'évaluer les propriétés de rupture mais aussi l'étendue de la zone d'élaboration. En ce qui concerne l'échelle d'observation appropriée à la modélisation du comportement quasi-fragile du béton, l'échelle de la zone d'élaboration semble être la plus adéquate. Ainsi, une modélisation prenant place à l'échelle mésoscopique semble la plus pertinente. Enfin, l'idéalisation des granulats sous forme de disques (2D) ou de sphères (3D) semble aussi conduire à une approximation raisonnable du comportement à la rupture du béton (Section 1.5.3).

Ce chapitre présente les outils numériques existants permettant la création d'un modèle numérique complet à l'échelle mésoscopique et les techniques d'évaluation de la zone d'élaboration de la fissure par une approche numérique et analytique (courbe-R et modèle de zone cohésive).

Dans ce travail de thèse, il est proposé d'utiliser un récent modèle, adapté à l'échelle mésoscopique qui est le modèle de Fichant - La Borderie, extension du modèle de Mazars (Section 1.4.1.2). Il s'agit d'un modèle élasto-plastique endommageable capable de représenter le comportement dissymétrique et unilatéral du béton. Une régularisation énergétique est également utilisée sur la base de la théorie de la bande de fissuration (Section 1.3.3.2). Ce modèle sera appliqué à la mésostructure du béton dans laquelle les granulats seront idéalisés par des disques.

Au chapitre suivant, le modèle sera détaillé aussi bien que la loi de comportement utilisée ainsi que la génération du squelette granulaire, et ce, au travers d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). Ce VER servira de point de départ pour tester le modèle, d'étudier l'influence des certains paramètres, et également, de vérifier certaines hypothèses comme la suppression des plus petites classes de granulats. Enfin, une application du modèle sur un cas concret au travers d'essais de flexion 3 points sur des poutres entaillées sera réalisée.

# Chapitre 2

## Modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Implémentation numérique du modèle</b> . . . . .	<b>48</b>
2.1.1	Loi constitutive du modèle . . . . .	48
2.1.2	Méthode de résolution numérique . . . . .	51
<b>2.2</b>	<b>Génération de la mésostructure</b> . . . . .	<b>52</b>
2.2.1	Granulométrie du béton étudié . . . . .	52
2.2.2	Tirages aléatoires des granulats . . . . .	52
2.2.3	Maillage éléments-finis : méthode diffuse . . . . .	53
<b>2.3</b>	<b>Application du modèle sur un VER</b> . . . . .	<b>54</b>
2.3.1	Description du VER étudié . . . . .	54
2.3.2	Paramètres du béton numérique . . . . .	55
2.3.3	Réponse globale-locale du modèle . . . . .	56
2.3.4	Étude de l'influence des paramètres d'entrée sur le comportement du béton . . . . .	57
2.3.5	Influence des classes de granulats . . . . .	63
<b>2.4</b>	<b>Exemple d'application : poutres entaillées en flexion 3 points</b> . . . . .	<b>68</b>
2.4.1	Modélisation des poutres entaillées . . . . .	69
2.4.2	Effet d'échelle : analyse par la loi déterministe de Bazant . . . . .	70
2.4.3	Courbes de Résistances : image énergétique . . . . .	73
<b>2.5</b>	<b>Conclusion sur le béton numérique utilisé</b> . . . . .	<b>80</b>

---

Ce chapitre purement numérique présente les résultats obtenus avec le modèle d'endommagement isotrope de Fichant-La Borderie à l'échelle mésoscopique. La première partie de ce chapitre énonce la loi constitutive du matériau, obtenue à partir de la loi d'endommagement isotrope considérée. Un Volume Élémentaire Représentatif (VER) est ensuite étudié, afin d'introduire le modèle et de vérifier la bonne retranscription des phénomènes présents dans le béton lors de son endommagement. L'application du modèle sur ce VER permet l'analyse de l'influence des paramètres d'entrée et des différentes classes de granulats. Sur ce dernier point, une interrogation est posée sur la légitimité de la suppression des plus petites classes de granulats ( $< 5$  mm) afin d'améliorer le temps de calcul. Une application numérique sur des poutres entaillées, de tailles homothétiques différentes, est alors présentée afin d'étudier l'effet d'échelle. A la suite de ces simulations, les courbes de résistance obtenues dans le cadre de la MLEReq sont déterminées et analysées.

## 2.1 Implémentation numérique du modèle

Le modèle d'endommagement utilisé est le modèle d'endommagement isotrope de Fichant-La Borderie qui est une extension du modèle d'endommagement isotrope de Mazars. Il permet de maîtriser l'effet de la taille du maillage par l'intermédiaire d'une régularisation énergétique, i.e., l'énergie de fissuration  $G_f$  du matériau.

### 2.1.1 Loi constitutive du modèle

#### Loi de comportement élasto-endommageable

Considérons un essai de traction pure sur une éprouvette en béton. Le comportement adoucissant est régi par une loi exponentielle de type  $\sigma \sim \exp(\varepsilon_{d0} - \varepsilon)$  (partie en rouge de la Figure 2.1).

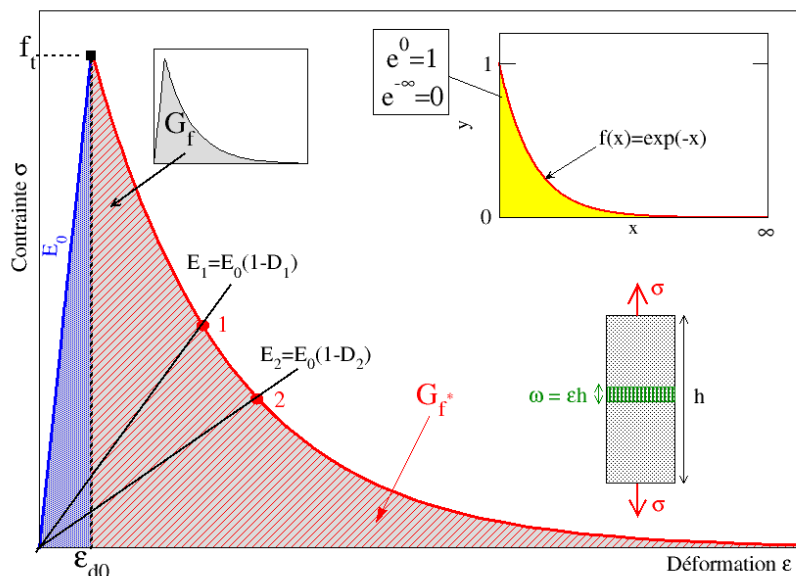


FIGURE 2.1 – Réponse macroscopique théorique considérée pour une éprouvette en béton sous chargement uniaxial en traction pure

L'endommagement débute lorsque la déformation atteint sa valeur seuil  $\varepsilon_{d0}$  avec  $\varepsilon_{d0} = f_t/E$  (avec  $f_t$  et  $E$  sont respectivement la résistance à la traction et le module d'élasticité du

matériau) :

$$\text{Si } \varepsilon_{d0} - \varepsilon = 0 \text{ alors } \sigma = f_t. \quad (2.1)$$

Ainsi lorsque la déformation équivaut à sa valeur seuil ( $\varepsilon_{d0} - \varepsilon = 0$ ), l'ouverture  $\omega$  peut s'exprimer en fonction de la déformation et la hauteur de l'éprouvette  $h$  :

$$(\varepsilon_{d0} - \varepsilon) h = \omega \quad (2.2)$$

En considérant, uniquement la partie adoucissante, soit lorsque  $\varepsilon > \varepsilon_{d0}$ , l'intégrale de la courbe contrainte-déformation en post-pic est équivalent à une énergie de fissuration notée  $G_f^*$  (à un facteur dimensionnel près représentant l'épaisseur de l'éprouvette). Mathématiquement rappelons que :

$$\int b e^{ax} = \frac{b}{a} e^{ax}. \quad (2.3)$$

Ainsi, en posant  $b = f_t$  et  $a = \frac{f_t}{G_f^*}$  et  $x = (h(\varepsilon_{d0} - \varepsilon))$ , l'aire sous la courbe de la partie adoucissante correspond bien à  $G_f^*$  :

$$\int_{\varepsilon_{d0}}^{\infty} f_t e^{\frac{f_t}{G_f^*}(h(\varepsilon_{d0}-\varepsilon))} = G_f^* (e^0 - e^{\infty}) = G_f^*. \quad (2.4)$$

L'équation 2.5 peut également s'écrire en fonction de l'énergie de fissuration moyenne du matériau  $G_f$  comme définie par la RILEM 50-FMC [50-FMC, 1985], i.e., égale l'aire sous la courbe entière contrainte-déformation. Pour cela, il est nécessaire d'identifier l'énergie élastique  $G_{elas}$  :

$$G_{elas} = \frac{1}{2} \varepsilon_{d0} h f_t, \quad (2.5)$$

et l'énergie de fissuration  $G_f$  du matériau s'exprime alors sous la forme :

$$G_f = G_{elas} + G_f^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{d0} h f_t + G_f^*. \quad (2.6)$$

Ainsi, la loi de comportement  $\sigma(\varepsilon)$  dans la partie adoucissante (i.e., pour  $\varepsilon > \varepsilon_{d0}$ ) peut s'écrire, en fonction de  $G_f$ , sous la forme :

$$\sigma(\varepsilon) = f_t \exp\left(\frac{f_t h}{G_f - 0.5 \varepsilon_{d0} h f_t} (\varepsilon_{d0} - \varepsilon)\right), \quad (2.7)$$

où le rapport  $\frac{f_t h}{G_f - 0.5 \varepsilon_{d0} h f_t}$  est communément noté  $B_t$  et représente le paramètre permettant de contrôler la forme de la partie adoucissante. Il est important de souligner que ce paramètre inclut la régularisation énergétique basée sur la théorie de la bande fissuration [Bažant et Oh, 1983].

La théorie de l'endommagement permet d'écrire dans le cas d'une éprouvette sous sollicitation uniaxiale, dans le cas d'un matériau isotrope et à endommagement isotrope :

$$\sigma = (1 - D) E \varepsilon, \quad (2.8)$$

avec  $D$ , une variable interne scalaire qui affecte directement, localement, le module d'élasticité initial du matériau en le dégradant en fonction de la sollicitation mécanique appliquée. Ainsi, les équations 2.6 et 2.8 permettent d'écrire la loi d'évolution de l'endommagement  $D$ , comme énoncée par Fichant en 1996 [Fichant, 1996] où la déformation considérée est la déformation équivalente définie par Mazars (Section 1.4.1.2) :

$$D = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \exp(B_t (\varepsilon_{d0} - \varepsilon_{eq})) \quad . \quad (2.9)$$

Pour rappel, la déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  est exprimée en fonction des déformations principales  $\varepsilon_i$  :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2}, \quad (2.10)$$

Sur la base de l'équation 2.9, deux points sont à souligner :

- La résistance à la traction (liée à l'ouverture des fissures) est le paramètre considéré pour décrire l'évolution de l'endommagement. Néanmoins, de l'endommagement en compression peut être détecté. En effet, la contrainte totale rend compte d'une participation de la variable d'endommagement  $D$  à la fois sur le tenseur de contrainte effective en traction  $\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_+$  et en compression  $\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_-$  (ce point sera abordé dans la Section 2.1.2 et illustré dans la Section 2.3.3). Soulignons que l'endommagement en compression peut être désactivé.
- L'inconnu est la déformation équivalente, fonction du tenseur de déformation totale  $\varepsilon_{ij}$ . Peu de paramètres sont nécessaires : le module d'élasticité  $E$ , deux paramètres de rupture  $f_t$  et  $G_f$  et enfin une variable liée à la taille des mailles EF  $h_{el}$ . Pour un maillage quadrangle régulier  $h_{el} = \sqrt{\int_{\Omega_e} dx dy}$  en (2D) et  $h_{el} = \sqrt[3]{\int_{\Omega_e} dx dy dz}$  (en 3D), où  $\Omega_e$  représente la surface ou le volume de l'élément fini [La Borderie et al., 2007].

### Couplage avec la plasticité

Dans ce modèle, la plasticité est un module indépendant pouvant être activé à des fins de couplage avec l'endommagement. La plasticité, essentiellement provoquée par le glissement des micro-fissures, et l'endommagement sont supposés localement découplés. Ainsi l'incrément de déformations totales  $d\varepsilon_{ij}$  est composé d'une partie élastique  $d\varepsilon_{ij}^e$  et d'une partie plastique  $d\varepsilon_{ij}^p$ .

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (2.11)$$

La règle de la normalité établie la loi d'évolution de l'incrément de déformation plastique :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{dF_i}{d\tilde{\sigma}_{ij}}, \quad (2.12)$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique ( $\dot{\lambda} > 0$  quand la plasticité a lieu) et  $F_i$  la fonction seuil (ou fonction de chargement) qui correspond, ici, à deux surfaces seuils de type Drucker-Prager. Ces surfaces sont exprimées dans l'espace des contraintes effectives.

$$\begin{cases} F_t = \alpha_t J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_t I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - R(p) - w_0 \\ F_c = \alpha_c J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_c I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - R(p) - w_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

avec une relation pour un état de contrainte de traction ( $F_t$ ) et une autre pour un état de compression et compression-compression dans le cas de contraintes biaxiales ( $F_c$ ).  $I_1$  et  $J_2$  sont respectivement le premier et le second invariant du tenseur des contraintes effectives.  $w_0$  est la contrainte de fin domaine élastique. Dans ce modèle,  $R(p)$  est la loi d'écrouissage isotrope suivant une évolution linéaire :

$$R(p) = q \times p + w_0 \quad , \quad (2.14)$$

$q$  est un paramètre matériau et  $p$  est la déformation plastique effective, également appelée déformation plastique équivalente. Les calculs plastiques peuvent être activés dans ce modèle et ont déjà été validés dans le cas de structure en béton [Dubé et al., 2003]. Dans ces travaux, par souci de simplification, la plasticité a été désactivée.

## 2.1.2 Méthode de résolution numérique

Ce modèle d'endommagement est déjà implémenté dans le code de calcul aux éléments finis Cast3M<sup>1</sup> sous le nom de « microiso ». Le code principal décrivant l'endommagement fait appel à un second code afin de déterminer les déformations plastiques  $\varepsilon^p$  si la plasticité est activée. Chaque point de Gauss possède les propriétés du constituants qu'il représente, et en chacun se trouve la loi de comportement (Eq. 2.7) comprenant la loi d'évolution de l'endommagement (Eq. 2.9). Dans cette section, les grandes étapes de calcul sont énoncées.

1. Calcul élastique de l'incrément de contrainte  $d\sigma_{ij}$  à partir de l'incrément de déformation totale  $d\varepsilon_{ij}$  et de la matrice de rigidité élastique isotrope de Hooke exprimée dans le repère global ;
2. Calcul élastique du tenseur de contrainte effective  $\tilde{\sigma}_{ij}$ . La contrainte effective correspond à la somme de l'incrément de contrainte élastique (calculé à l'étape 1) et de la contrainte anélastique  $\sigma^{an}$  ;
3. Si l'écoulement plastique a lieu, la contrainte de von Mises, exprimée en fonction du tenseur de contrainte effective est calculée ainsi que la trace de ce dernier. Ces deux valeurs permettent d'établir la fonction seuil de type Drucker-Prager qui permet de remonter à la déformation plastique  $\varepsilon_{ij}^p$  ;
4. Calcul de la contrainte effective totale en prenant en compte la déformation plastique ;
5. Calcul de la déformation totale à partir de la déformation élastique calculée en fonction de la contrainte effective et la déformation plastique déterminée précédemment ;
6. Calcul de la variable interne d'endommagement  $D$  à partir de la déformation équivalente ;
7. Séparation, dans le tenseur des contraintes effectives, des parties positives (liées à la traction) et les parties négatives (liées à la compression). Cela est nécessaire afin de retranscrire l'effet unilatéral lors du calcul de la contrainte finale (soit la contrainte comprenant l'endommagement) ;
8. Calcul de la contrainte finale :

$$\sigma_{ij} = (1 - D) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_+ + (1 - D^\alpha) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_- , \quad (2.15)$$

où  $\alpha$  est un paramètre d'influence du matériau affectant la variable d'endommagement lors d'un état de compression.

9. Calcul de la contrainte anélastique finale :

$$\sigma_{ij}^{an} = \tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}. \quad (2.16)$$

Comme dit précédemment, à l'échelle mésoscopique, dans un cas biphasique, chaque point de Gauss représente soit la matrice cimentaire, soit le granulat. La section suivante décrira la procédure de génération de la mésostructure (du tirage aléatoire des granulats à l'opération de maillage des éléments finis).

1. Cast3M est un logiciel « libre » de calcul par la méthode des éléments finis dédié la mécanique des structures et des fluides. Il est développé au Département de Modélisation des Systèmes et Structures (DM2S) de la Direction de l'Énergie Nucléaire du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA).

## 2.2 Génération de la mésostructure

L'utilisation du modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique permet en quelque sorte une régularisation « naturelle » du problème incluant les interactions élastiques entre les différents constituants au cours de l'endommagement et la tortuosité du chemin de fissure. Pour ce faire, un tirage des granulats idéalisés en disque suivant un algorithme « stochastique-heuristique » est réalisé.

### 2.2.1 Granulométrie du béton étudié

Les tirages aléatoires se font en respectant la courbe granulométrique du béton étudié. Une fraction volumique globale des granulats  $Fvg$ , équivalente à 70% est utilisée (Figure 2.2). Cette courbe granulométrique sera utilisée tout au long de ces travaux, i.e., aussi bien dans la partie numérique que expérimentale. Dix classes de granulats sont présentes, variant de 1 à 14 mm de diamètre (Tableau 2.1). Ainsi, la partie appelée mortier ou pâte inclura la matrice cimentaire et les granulats ayant un diamètre inférieur à 1 mm.

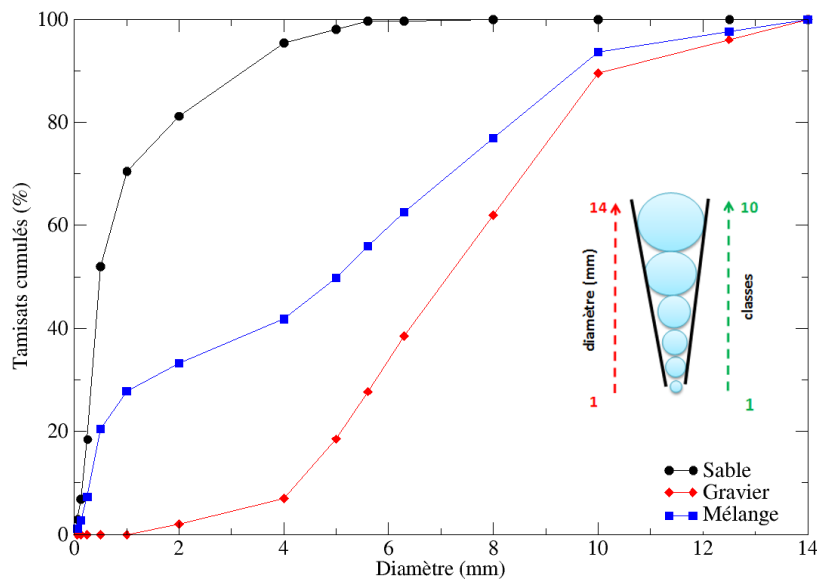


FIGURE 2.2 – Courbe granulométrique du béton étudié

N° classe $i$	Diamètre $\varnothing_i [mm]$	$fg_i [%]$	N° classe $i$	Diamètre $\varnothing_i [mm]$	$fg_i [%]$
1	1	27,750	6	6,3	6,576
2	2	5,444	7	8	14,324
3	4	8,616	8	10	16,713
4	5	7,999	9	12,5	3,979
5	5,6	6,211	10	14	2,388

TABLEAU 2.1 – Fraction volumique  $fg_i$  des différentes classes de granulats

### 2.2.2 Tirages aléatoires des granulats

Une procédure de tirage de granulats est utilisée. La frontière de l'étude est représentée par la boîte mésoscopique. Les différentes étapes de la procédure du tirage sont :

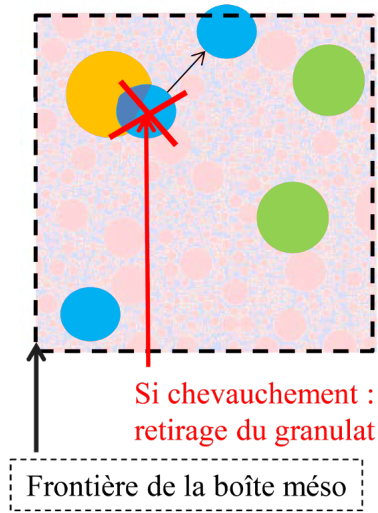


FIGURE 2.3 – Procédure de tirage des granulates

- Tirage des coordonnées  $(X_i, Y_i)$  du centre de gravité des plus gros granulates aux plus petits granulates ;
- Chaque coordonnée est associée à un diamètre, si le disque tiré chevauche un disque déjà présent, alors un nouveau tirage aléatoire est réalisé pour ce dernier ;
- Une condition de découpage des granulates ou non est présente afin de mieux représenter les conditions de coffrage et de réalisation de l'entaille initiale ;
- Lorsque la fraction volumique de la classe est atteinte au sein de la boîte mésoscopique, les tirages de la classe immédiatement inférieure débute.

Notons que dans notre cas, aucune distance minimale entre les granulates est considérée. A la suite du tirage, les données récupérées sont la position du centre de chaque granulat ainsi que son rayon correspondant. Ces données sont importées dans le code de calcul aux éléments finis afin de procéder à l'étape du maillage numérique.

### 2.2.3 Maillage éléments-finis : méthode diffuse

Dans un premier temps, une grille de maille régulière utilisant des éléments quadrangles est tracée. Pour une inclusion donnée, tous les points de Gauss compris à l'intérieur de cette dernière prennent une valeur scalaire égale à 1. Les éléments non traversés par le disque ont quant à eux des points de Gauss ayant la valeur scalaire de 0. A ce stade, il s'agit d'un maillage de type discret. Cependant, une méthode diffuse est ici utilisée, elle vise les éléments partageant une frontière interne et externe à l'inclusion. Dans ce cas, une diffusion de valeur de 1 (granulat) vers 0 (matrice) est réalisée (Figure 2.4). Avec l'utilisation de cette méthode la répartition des différents matériaux constitutifs est prise en compte lors du calcul de la matrice de rigidité élémentaire  $Ke_{ij}$  :

$$Ke_{ij} = \sum_{g=1}^N \omega_g B_{ki}(\xi_g, \eta_g) C_{kl}(\xi_g, \eta_g) B_{lj}(\xi_g, \eta_g) \quad , \quad (2.17)$$

où  $N$  est le nombre de points de Gauss,  $\omega_g$  sont les poids associés à chaque point de Gauss,  $\xi_g$  et  $\eta_g$  sont les coordonnées des points de Gauss,  $B_{ij}$  est la matrice gradient des fonctions de forme et  $C_{kl}$  est le tenseur de rigidité du matériau au point de Gauss  $g$ .

Contrairement à la méthode de maillage exacte où chaque inclusion est indépendamment et automatiquement maillée, la méthode de maillage diffus permet une génération plus aisée des plus petits granulates. En effet, lors du maillage exact, des problèmes de maillage peuvent avoir lieu lors de la création d'un petit granulat proche d'un plus grand. Néanmoins, l'inconvénient du maillage diffus réside dans le fait que la taille de la maille dépend du diamètre du plus petit granulates. A ce titre, N'Guyen (Section 2.2 de [N'Guyen, 2010]) a montré numériquement que dans le cas d'un maillage diffus, si la taille d'un élément  $h_{el}$  est inférieure au tiers du diamètre minimum ( $\varnothing_{min}$ ), le comportement à la rupture obtenu est similaire à celui obtenu sur la base d'un maillage exacte. Dans notre cas, la taille d'un élément  $h_{el}$  de 0,3 mm de côté est choisie :

$$h_{el} < \frac{\varnothing_{min}}{3} \simeq 0,3 \text{ mm}. \quad (2.18)$$



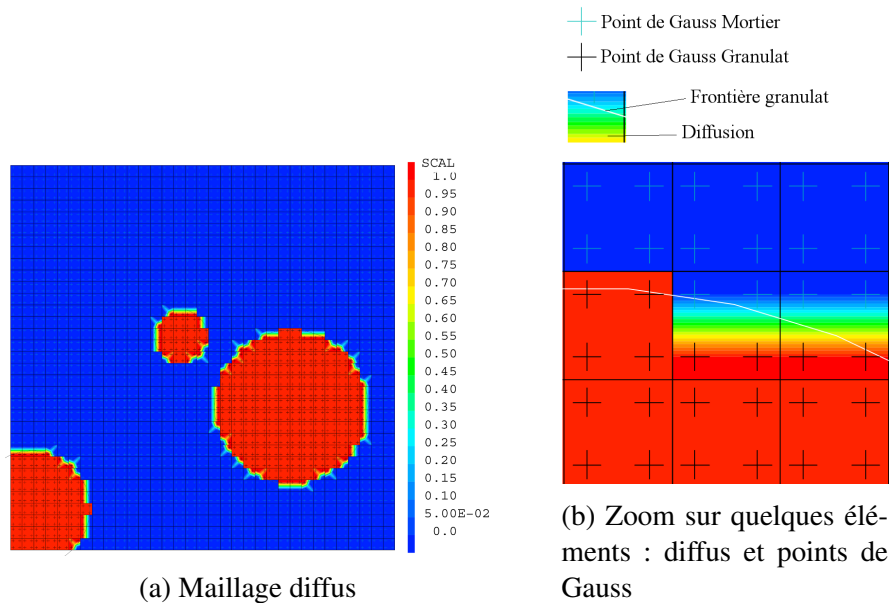


FIGURE 2.4 – Exemple d'application de la création d'un maillage diffus

Cette taille minimale d'élément sera utilisée dans la quasi-totalité des simulations de cette thèse. Le maillage diffus, en représentant la granulométrie complète (Tableau 2.1), permet ainsi de respecter la compacité granulaire du béton étudié. En contrepartie, le choix de représenter au mieux la compacité granulaire se fera au détriment de la représentation de l'ITZ (Interface de Transition). En utilisant la méthode diffuse, il est effectivement difficile de mailler indépendamment chaque granulat et son ITZ dont l'épaisseur est de l'ordre du  $\mu m$ . Cependant le contraste de propriétés mécaniques entre mortier et granulats provoque une concentration de contrainte au niveau de l'interface et favorise l'endommagement dans cette zone. En conclusion, la méthode diffuse permet une génération aisée de la mésostructure du béton respectant le ratio pâte/granulat mais ne fonctionne que lorsque les deux matériaux suivent le même comportement mécanique. Une fois les processus de tirage et de maillage terminés, les simulations aux éléments finis suivant un comportement non-linéaire peuvent avoir lieu. Dans la suite, une étude sur un Volume Élémentaire Représentatif est réalisée afin de :

- Vérifier la capacité du modèle à rendre compte le comportement propre au béton ;
- Analyser l'influence de certains paramètres d'entrée ;
- Vérifier si une homogénéisation numérique est possible afin d'inclure les plus petites classes de granulats dans le mortier sans pour autant modifier le comportement à la rupture du béton (diminution du temps de calcul).

## 2.3 Application du modèle sur un VER

### 2.3.1 Description du VER étudié

Selon une étude de Mounajed *et al.* la taille d'un VER  $L_{VER}$  représentant le béton à l'échelle mésoscopique doit être supérieure à 5 fois la taille du diamètre maximum  $\varnothing_{max}$  [Mounajed *et al.*, 2006]. Dans ce cas,  $L_{VER} > 5\varnothing_{max} = 5 \times 14 \text{ mm} = 70 \text{ mm}$ . Ainsi, un VER de  $100 \times 100 \text{ mm}^2$  pour une épaisseur de 50 mm est réalisé et est soumis à des sollicitations uniaxiales (Figure 2.5a). De plus, afin d'estimer l'énergie de fissuration macroscopique  $G_F$ , l'utilisation de VER entaillés est proposée (Figure 2.5b). En effet, la valeur de l'énergie de fissuration macroscopique peut être surestimée si le chemin de fissure devient complexe (ramification), ce qui généralement le cas lors de l'utilisation de spécimen non-entaillé.

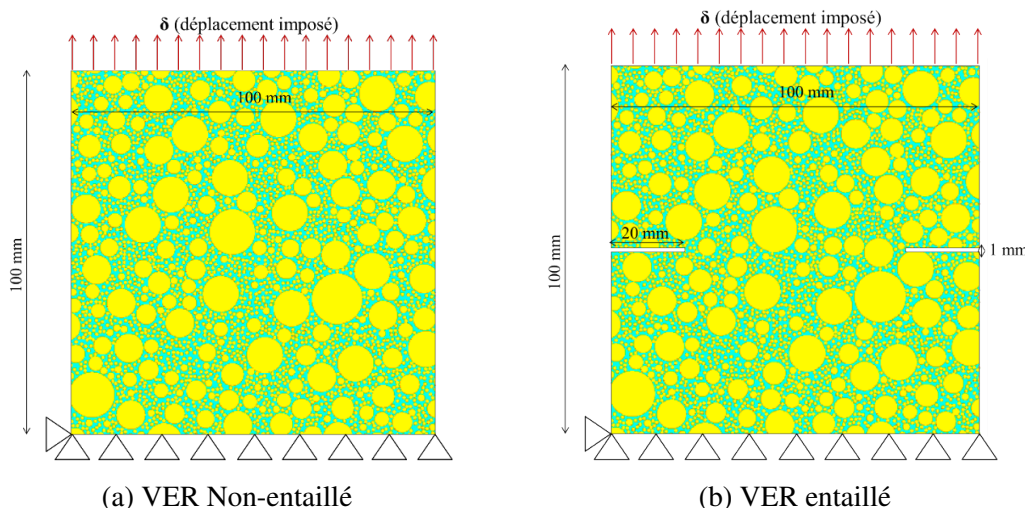


FIGURE 2.5 – VER soumis à la traction : dimensions et conditions aux limites - exemple d'un tirage représentant la totalité des classes de granulats

### 2.3.2 Paramètres du béton numérique

Les paramètres d'entrée du modèle (module de Young, coefficient de Poisson, résistance en traction et énergie de fissuration), facilement identifiable par des essais de traction et de compression pour la matrice cimentaire et les granulats sont résumés dans le Tableau 2.2. Ce jeu de paramètres est celui utilisé dans la thèse de N'Guyen (Chapitre 4 [N'Guyen, 2010]). Le cadre de cette étude se limite à un béton ordinaire, i.e., des granulats plus résistants que la pâte et dont le seuil d'endommagement  $\varepsilon_{d0}$  des granulats est plus élevé que la pâte. Ici, un granulat de type calcaire est considéré, conformément au type d'agrégat utilisé dans la partie expérimentale. Cela permet de justifier en partie le « faible » module d'élasticité [Schmidt, 1976]. Le jeu de paramètre (Tableau 2.2) choisi impose une rupture peri-granulaire, même si ce modèle est capable de rendre compte d'une rupture trans-granulaire.

	Propriétés	Granulats	Matrice Cimentaire
Propriétés élastiques	$E(\text{GPa})$	35	25
	$\nu$	0,2	0,2
Propriétés de rupture	$f_t(\text{MPa})$	6	3
	$G_f(\text{J/m}^2)$	60	20
	$\varepsilon_{d0}$	1,714e-4	1,2e-4
	$B_t^{**}$	30,08	45,12

Remarque :  $B_t^{**}$  est calculé pour  $h_{el}$  constant de 0,3 mm

TABLEAU 2.2 – Paramètres d'entrée utilisés pour le modèle d'endommagement

La Figure 2.6 présente la loi de comportement théorique de chaque constituant et ainsi que l'évolution de la variable d'endommagement  $D$  avec l'application du modèle d'endommagement de Fichant-La Borderie en utilisant les paramètres du Tableau 2.2. Pour une déformation  $\varepsilon$  donnée la variable d'endommagement  $D$  sera plus importante au niveau de la pâte de ciment par rapport aux granulats (Figure 2.6b). De plus, au regard des seuils d'endommagement  $\varepsilon_{d0}$  considérés, l'endommagement s'initiera tout d'abord au sein de la matrice cimentaire.

En terme de comportement, la matrice cimentaire est plus « fragile » que les granulats puisque que l'énergie de fissuration de la matrice cimentaire est nettement inférieure à celle du granulat ( $G_{fp\grave{a}te} \ll G_{fgra}$ ). De plus, une contrainte élevée est attendue dans le granulat avant d'initier l'endommagement (Figure 2.6a).

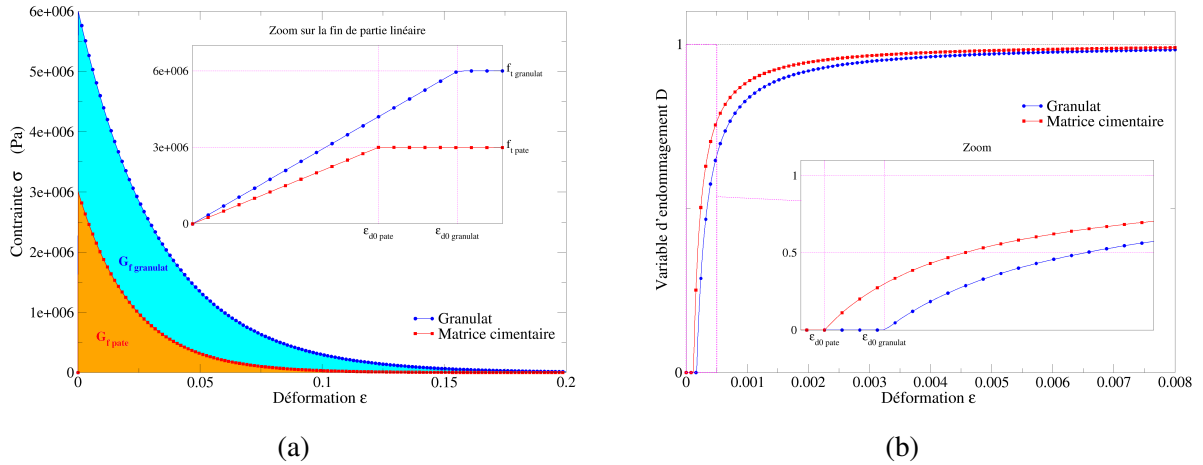


FIGURE 2.6 – Évolution théorique de (a) la contrainte et de (b) l'endommagement de chaque constituant (en considérant les paramètres du tableau 2.2)

### 2.3.3 Réponse globale-locale du modèle

Une modélisation 2D en contrainte plane est réalisée sur un VER non-entailé (Figure 2.5a) pour un tirage donné des granulats. Il s'agit d'une simulation traction-endommagement-décharge-compression. Cette dernière permet de mettre en exergue la capacité du modèle à prendre en compte le comportement dissymétrique et l'effet unilatéral du béton.

La Figure 2.7a représente la réponse macroscopique en contrainte-déformation et atteste de la bonne représentation du comportement dissymétrique traction-compression du béton. Des marqueurs de « temps » (de A à G) sont placés afin d'avoir une meilleure lisibilité de la Figure 2.7. De A à C, l'éprouvette est sollicitée en traction uniaxiale, de C à D la décharge a lieu et, de D à G l'éprouvette est mise en compression. L'effet unilatéral est mis en évidence sur la Figure 2.7b qui montre une reprise partielle de la raideur (près de 60% de la raideur initiale) lors de la mise en compression. Cette dernière est associée à la refermeture des fissures. Cette reprise partielle peut s'expliquer par l'échelle d'étude et par la nature scalaire de la variable d'endommagement. Localement, soulignons que le nombre d'éléments endommagés devient constant peu après le début du post-pic (marqueur B) et jusqu'à la remise en compression, où le nombre d'élément endommagé augmente considérablement (Figure 2.7b). Ce palier signifie que l'endommagement est localisé et où la valeur  $D$  des points de Gauss augmente jusqu'au déchargement (où l'endommagement s'arrête) avant de reprendre en compression.

La Figure 2.7c montre l'évolution du champ d'endommagement pour les différents niveaux de chargement : le chemin de fissuration est bel et bien associé au sens du chargement. La Figure 2.7d met en évidence l'effet unilatéral, conséquence de la refermeture de fissure lors du passage d'un état de traction à un état de compression. Elle présente le champ d'ouverture unitaire de fissure  $\varepsilon_{ouf_{ij}}$  suivant la composante  $yy$ . Ce tenseur est déterminé par une procédure mise en place par Matallah *et al.* [Matallah *et al.*, 2010] : en faisant l'hypothèse qu'un élément endommagé est traversé par une fissure unique et que la partie du matériau non-fissurée est élastique. Ainsi, l'idée est de déterminer un tenseur de déformation élastique par la loi de Hooke, en fonction, non pas de la contrainte  $\sigma_{ij}$  mais, de la contrainte anélastique  $\sigma_{ij}^{an}$  (relation 2.16). Ainsi, les lois de l'élasticité proposent :

$$\varepsilon_{ouf_{ij}} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij}^{an} - \frac{\nu}{E} Tr(\sigma_{ij}^{an}) \delta_{ij} \quad , \quad (2.19)$$

où  $\delta_{ij}$  est la matrice identité.

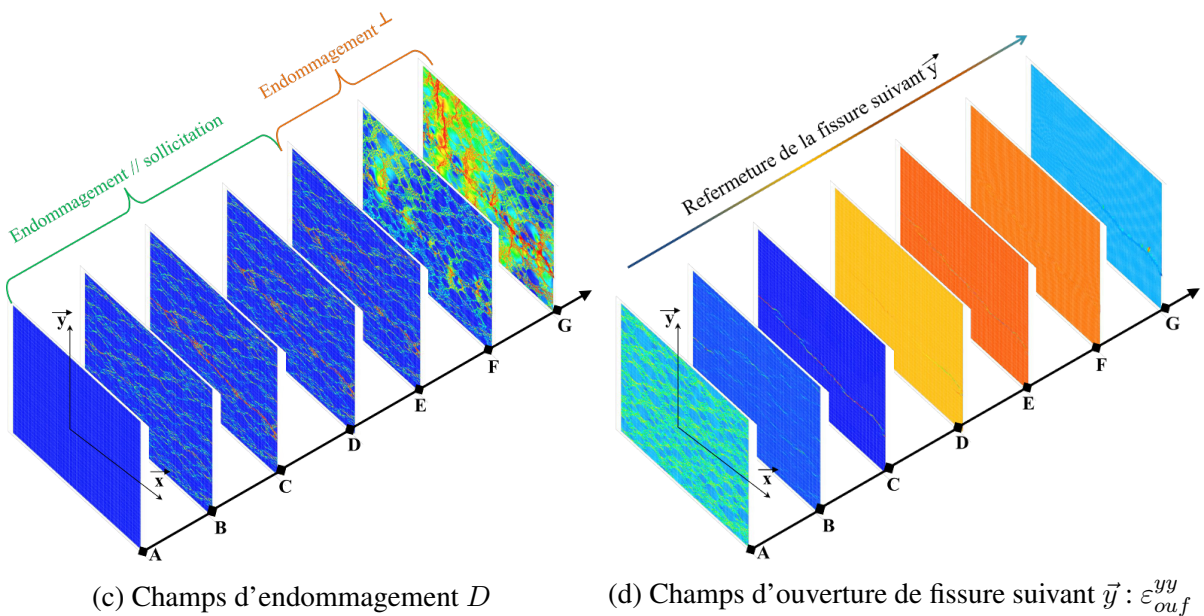
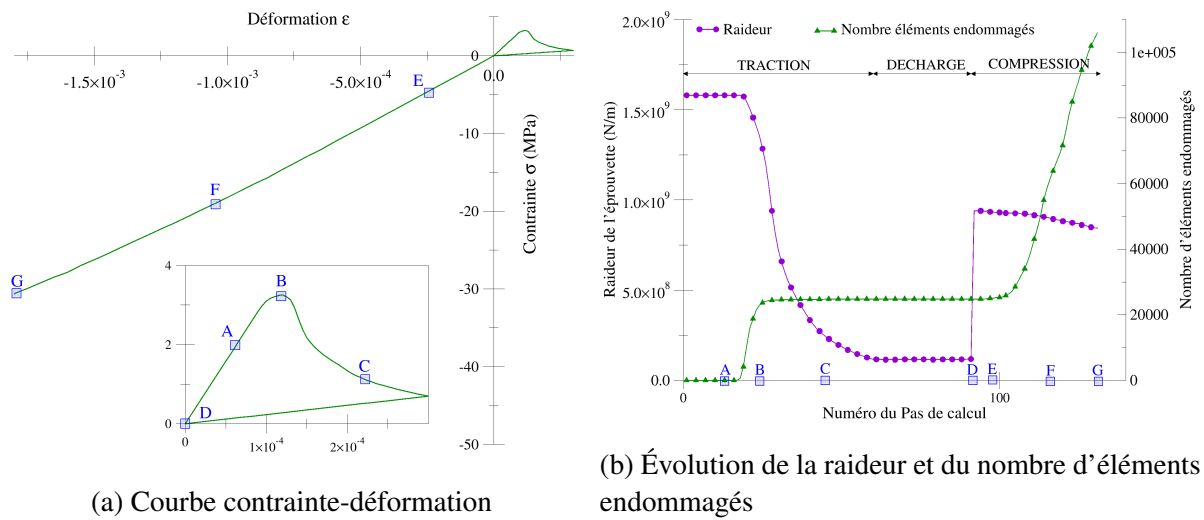


FIGURE 2.7 – Réponse (a) et (b) globale - (c) et (d) locale du modèle à la suite d'une simulation traction-endommagement-décharge-compression

### 2.3.4 Étude de l'influence des paramètres d'entrée sur le comportement du béton

Une étude de l'influence des principaux paramètres d'entrée, élastiques ( $E$  et  $\nu$ ) et de rupture ( $f_t$  et  $G_f$ ) est réalisée sur le VER non-entaillé présenté à la figure 2.5a. Des simulations en traction ont été réalisées. Cette étude, pour un tirage donné, permet d'apporter une certaine grille de lecture du modèle. A partir des réponses macroscopiques obtenues pour les différents cas d'études, les propriétés de rupture du VER sont analysées ainsi que les champs d'endommagement correspondants (ces réponses macroscopiques sont mises en Annexe B.1.1 et B.2.1)

#### Les paramètres élastiques : $E$ et $\nu$

Dans un premier temps, les propriétés élastiques de chaque constituant (pâte et granulats) sont modifiées, dans une gamme « réaliste ». L'objectif est de regarder la réponse globale, en termes de propriétés de rupture du VER à l'échelle macroscopique. Dans cette étude, quand les propriétés d'un constituant ne sont pas spécifiées, cela signifie qu'elles sont les mêmes que celles énoncées dans la Tableau 2.2. Notons que la résistance en traction a été obtenue en

divisant la force au pic par la surface sollicitée soit :

$$f_t = \frac{F_{max}}{b.l} , \quad (2.20)$$

où  $l$  est la largeur ( $l=100$  mm) et  $b$  l'épaisseur ( $b=50$  mm) du VER. L'énergie de fissuration  $G_f$  est obtenue en divisant l'aire sous la courbe force-déplacement par la surface fissurée projetée sur le ligament  $A_{lig}$  qui correspond au produit ( $b.l$ ) dans le cas d'un traction uniaxiale :

$$G_f = G_F = \frac{W_0}{A_{lig}} = \frac{\int_0^{\delta_{max}} F \delta d\delta}{b.l} , \quad (2.21)$$

où  $W_0$  est l'énergie (en J) correspondante à l'aire limitée par la courbe ( $F$ - $\delta$ ),  $\delta$  est le déplacement imposé lors de la simulation et  $A_{lig} = bl$  la surface du ligament.

La Figure 2.8 représente les évolutions des propriétés de rupture lorsque le module d'élasticité de la pâte  $E_{pâte}$  varie de 15 GPa à 55 GPa. Le module d'élasticité de la pâte a peu d'effet sur la résistance à la traction (faible augmentation de moins de 1%), cependant ce dernier influence l'énergie de fissuration  $G_f$  avec une augmentation de plus de 10% lorsque le module de l'élasticité de la pâte atteint 55 GPa.

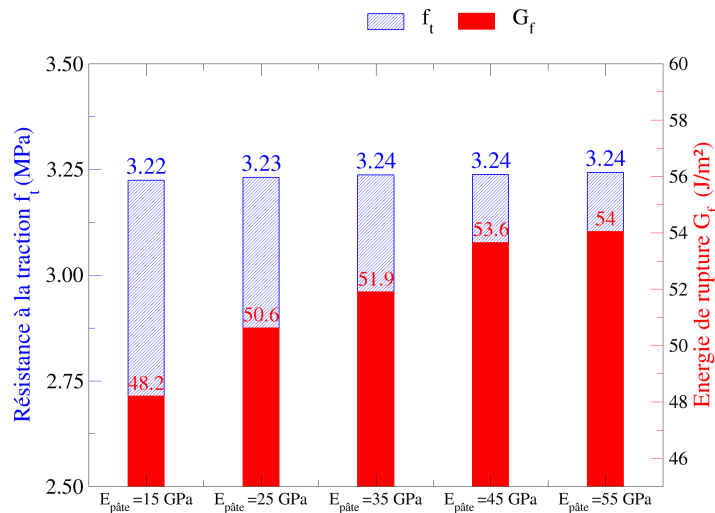


FIGURE 2.8 – Évolution des propriétés de rupture globale du VER par modification du module de Young de la pâte ( $E_{gra}=35$  GPa)

La Figure 2.9 représente l'évolution des propriétés de rupture lorsque le module d'élasticité des granulats  $E_{gra}$  varie de 35 GPa à 75 GPa. Ce paramètre semble avoir très peu d'influence sur les paramètres de rupture du VER. En effet, il y a une légère augmentation de la résistance à la traction (+2%) et une légère diminution de l'énergie de fissuration (-2%). Cela est dû au fait que c'est la pâte de ciment, de part son faible seuil d'endommagement  $\varepsilon_{d0}$  qui pilote l'endommagement et donc la rupture.

Une seconde étude est réalisée sur l'influence du coefficient de Poisson de chaque constituant (Figure 2.10). Il semblerait que le coefficient de Poisson de la pâte ( $\nu_p$ ) ait plus d'influence sur la résistance à la traction finale que le coefficient de Poisson du granulat ( $\nu_g$ ). En effet  $\nu_g$  n'a aucune influence sur  $f_t$  toutefois une variation du coefficient de Poisson de la pâte entre

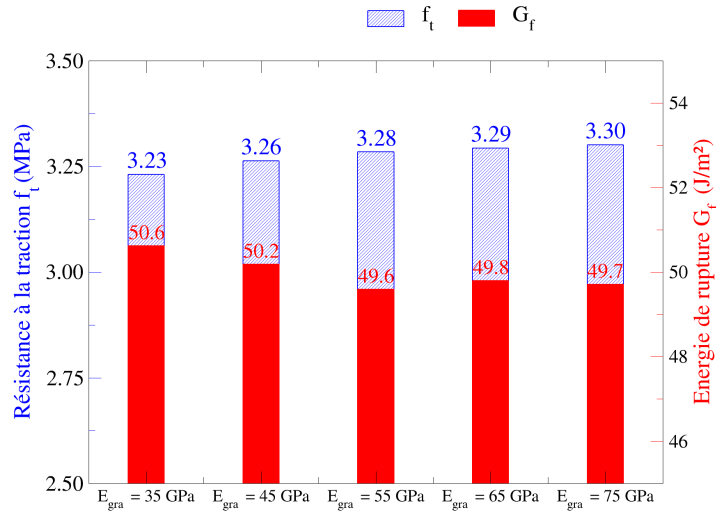


FIGURE 2.9 – Évolution des propriétés de rupture globale du VER par modification module de Young des granulats ( $E_{pâte}=25$  GPa)

0,2 et 0,3 entraîne une augmentation de la résistance en traction d'environ +3%. Le coefficient de Poisson  $\nu_g$  semble avoir une très légère influence sur l'énergie de fissuration finale avec une augmentation de +2%.

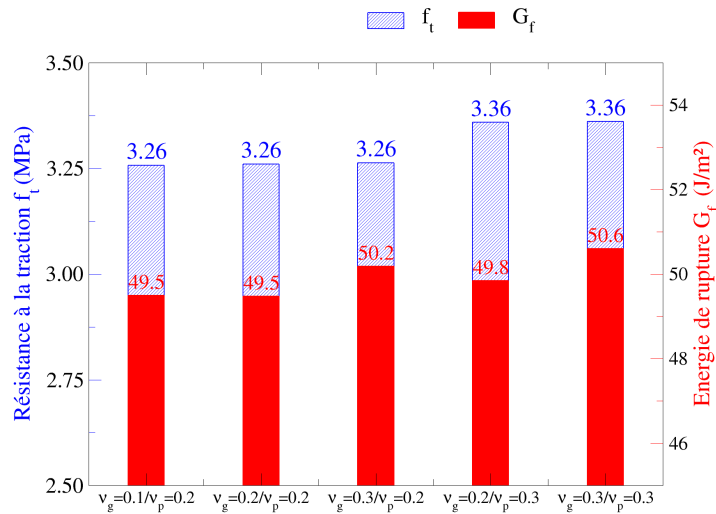
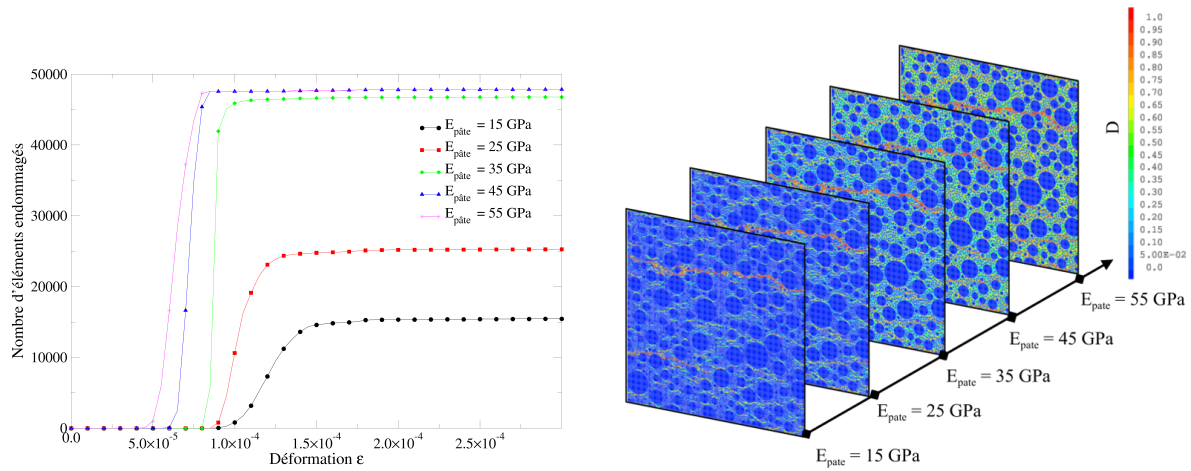


FIGURE 2.10 – Évolution des propriétés de rupture globale du VER par modification du coefficient de Poisson des constituants

En somme, sur les propriétés de rupture des constituants données dans le tableau 2.2, seul le module d'élasticité de la pâte  $E_{pâte}$  semble avoir un effet notable sur l'énergie de fissuration finale. Les autres paramètres  $E_{gra}$ ,  $\nu_p$ , et  $\nu_g$  ont quant à eux très peu d'influence. Cela peut s'expliquer par le fait que, plus le module d'élasticité augmente et plus le seuil d'endommagement  $\varepsilon_{d0}$  diminue. Ainsi, en augmentant le module de Young, pour le jeu de paramètre donné, le nombre d'éléments de la matrice qui s'endommagent est plus important comme illustré en

Figure 2.11b. Ceci entraîne une augmentation globale de l'énergie de fissuration (Figure 2.11). Néanmoins, si l'énergie de fissuration augmente avec  $E_{p\grave{a}te}$ , le chemin de la fissure ne semble pas influencé par les propriétés élastiques (Figures en Annexe B.1.2).



(a) Évolution du nombre d'éléments endommagés en fonction  $E_{p\grave{a}te}$  (b) Champs d'endommagement en fin de simulation en fonction  $E_{p\grave{a}te}$

FIGURE 2.11 – Analyse locale de l'influence du module d'élasticité de la pâte

### Les paramètres de rupture : $f_t$ et $G_f$

Une seconde étude se focalise sur la réponse globale et locale des simulations en fonction des paramètres de rupture  $f_t$  et  $G_f$  des constituants. L'étude réalisée considère les mêmes conditions aux limites et hypothèses que précédemment. Toutes les autres propriétés sont fixées conformément au tableau 2.2.

Considérons une variation de la résistance à la traction  $f_t$  des constituants (Figure 2.12). L'idée est de fixer dans un premier temps la résistance à la traction des granulats  $f_{tgra} = 6$  MPa et de faire varier celle de la pâte entre 1 et 5 MPa avec un pas de 1 MPa. La seconde étape de l'analyse consiste à fixer la résistance à la traction de la pâte à 3 MPa et d'évaluer l'effet de la résistance à la traction des granulats pour les valeurs de 2, 4, 6, 8 et 10 MPa.

La Figure 2.12 montre que la résistance à la traction de la pâte est un paramètre qui influence fortement la réponse macroscopique. En effet, une forte évolution de la résistance à la traction (valeur homogénéisée car calculée à partir de la force au pic) quasiment linéaire est constatée. Même constat concernant l'énergie de rupture finale. En somme, en multipliant par 5 la résistance à la traction de la pâte, le système restitue jusqu'à 2 fois plus d'énergie et augmente de presque 4 fois sa force au pic. D'un autre côté, la résistance à la traction des granulats a peu d'influence sur la résistance à la traction globale, avec néanmoins une augmentation non-négligeable de l'énergie de rupture (+20%). De plus, les courbes contraintes déformations attestent d'un comportement de plus en plus ductile, i.e., une diminution plus lente du module d'élasticité tangent ( $E_t$ ), si la résistance à la traction de la pâte diminue (Figure B.7 mis en Annexe B).

Notons que le cas où  $f_{tp\grave{a}te} = 3$  MPa et  $f_{tgra} = 2$  MPa impose que le seuil d'endommagement du granulat soit 2 fois inférieur à celui de la pâte ( $\epsilon_{d0gra} = 5,7e^{-5}$  et  $\epsilon_{d0p\grave{a}te} = 1,2e^{-4}$ ). Il s'agit donc d'un cas particulier où l'endommagement s'initie au sein des granulats (Figure 2.14d). Ainsi la rupture trans-granulaire est obtenue lorsque la résistance à la traction de la pâte

est supérieure à celle des granulats ( $f_{tpâte} > f_{tgra}$ ). Cependant ce constat n'est plus valable si le module d'élasticité des granulats reste très supérieur à celui de la pâte.

L'influence de l'énergie de fissuration  $G_f$  a été également étudiée. Le seuil d'endommagement de la pâte est inférieur à celui des granulats ( $\varepsilon_{d0gra} = 1,7e^{-4}$  et  $\varepsilon_{d0pâte} = 1,2e^{-4}$ ). Dans un premier temps, l'énergie de fissuration des granulats est fixée à  $G_{fgra} = 60 \text{ J/m}^2$  et celle de la pâte varie de 20 à 100  $\text{J/m}^2$  (avec un pas de 20  $\text{J/m}^2$ ). Dans un second temps, l'énergie de fissuration de la pâte est fixée à  $G_{fpâte} = 20 \text{ J/m}^2$  et celle des granulats varie également de 20 à 100  $\text{J/m}^2$  (avec un pas de 20  $\text{J/m}^2$ ) (Figure 2.13).

La Figure 2.13 montre que l'énergie de fissuration de la pâte a une légère influence sur la résistance à la traction (+5%) tandis que celle des granulats ne modifie quasiment pas la résistance à la traction. Néanmoins, l'énergie de rupture dans les deux cas varie. En effet, plus l'énergie de fissuration de la pâte augmente et plus l'énergie de rupture augmente entraînant un comportement de plus en plus ductile du matériau (Figure B.8 mis en Annexe B). Ce dernier constat est valable également pour l'énergie de fissuration des granulats mais dans une moindre mesure.

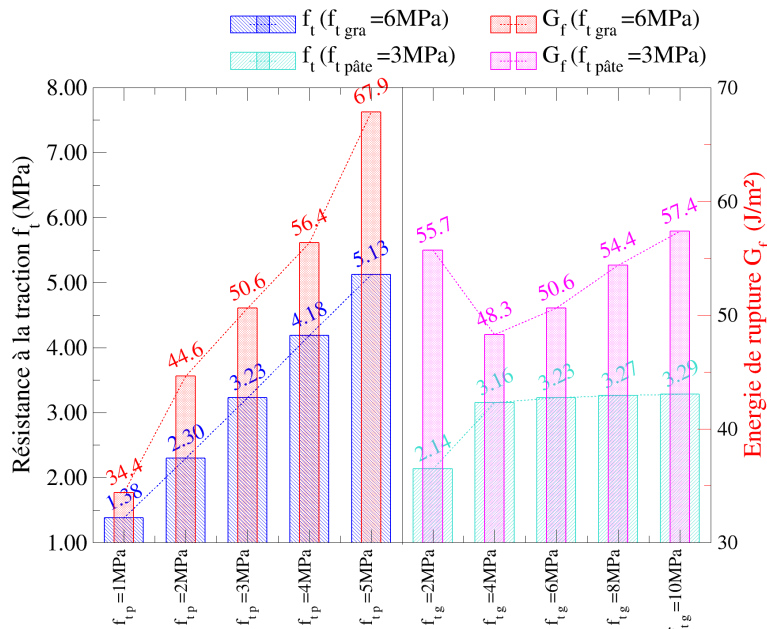


FIGURE 2.12 – Réponse de la simulation avec la variation de la résistance à la traction de la pâte et des granulats

En résumé, ces résultats permettent de mettre en évidence l'importance du seuil d'endommagement  $\varepsilon_{d0}$ . Le constituant possédant le seuil d'endommagement le plus faible pilotera majoritairement la réponse du matériau. Localement, cette étude permet également d'analyser le champ d'endommagement (Figure 2.14). Considérons quatre cas d'étude (Figure 2.14), principalement issus de l'étude de l'influence des résistances à la traction des constituants (les autres propriétés sont gardés fixes) :

- Cas de référence, les paramètres du Tableau 2.2 ;
- Cas A :  $f_{tpâte} = 1\text{MPa}$ , i.e., une faible résistance à la traction de la pâte ;
- Cas B :  $f_{tpâte} = 5\text{MPa}$ , i.e., une importante résistance à la traction de la pâte ;
- Cas C :  $f_{tgra} = 2\text{MPa}$ , i.e., une faible résistance à la traction des granules entraînant une rupture trans-granulaire.



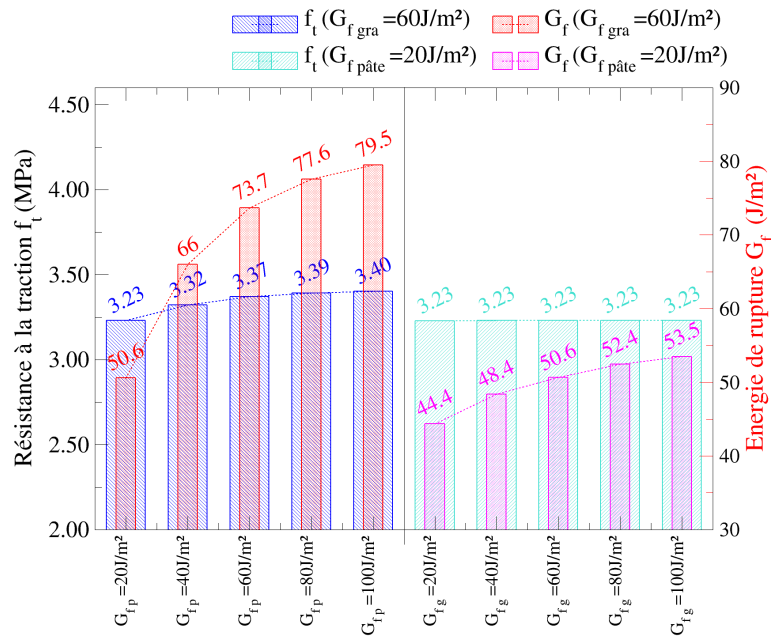


FIGURE 2.13 – Réponse de la simulation avec la variation de l'énergie de fissuration de la pâte et des granulats

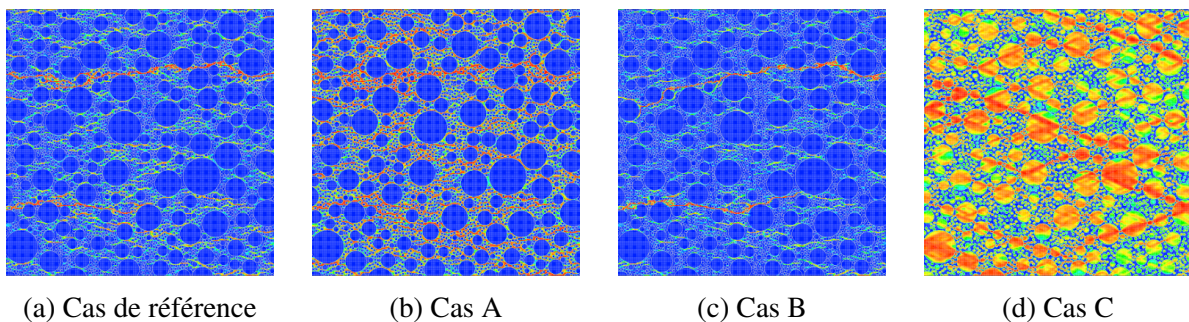


FIGURE 2.14 – Champs d'endommagement pour les différentes configurations

Lors d'une faible résistance à la traction de la matrice cimentaire (Figure 2.14b - cas A), il y a un endommagement diffus au sens où le nombre d'éléments endommagés devient important, entraînant une certaine difficulté dans la localisation de l'endommagement. A contrario lorsque la résistance à la traction de la matrice cimentaire est élevée (Figure 2.14c - cas B), l'endommagement se localise assez aisément, entraînant une augmentation de l'énergie de fissuration et de surcroît un comportement fragile (Figure B.7). Le cas C (Figure 2.14d) montre quant à lui un endommagement granulaire, où un grand nombre d'éléments s'endommagent (70% de surface granulaire).

La Figure 2.16 montre que plus l'énergie de fissuration de la pâte (élément faible ici) est élevée, plus le nombre d'éléments endommagés augmente. De plus, l'énergie de fissuration des granulats, dans le cas où ces derniers ont un seuil d'endommagement élevé, n'influence pas le champ d'endommagement.

### Impact du tirage aléatoire

Dix tirages sont réalisés avec les paramètres d'entrée énoncés dans le Tableau 2.2. Cette étude vise à montrer l'influence du tirage des granulats sur la variabilité des propriétés macroscopiques (homogénéisées) obtenue. Les propriétés obtenues pour chaque tirage sont reportées dans le Tableau 2.3 et montrent que le tirage a presque uniquement une influence sur l'énergie

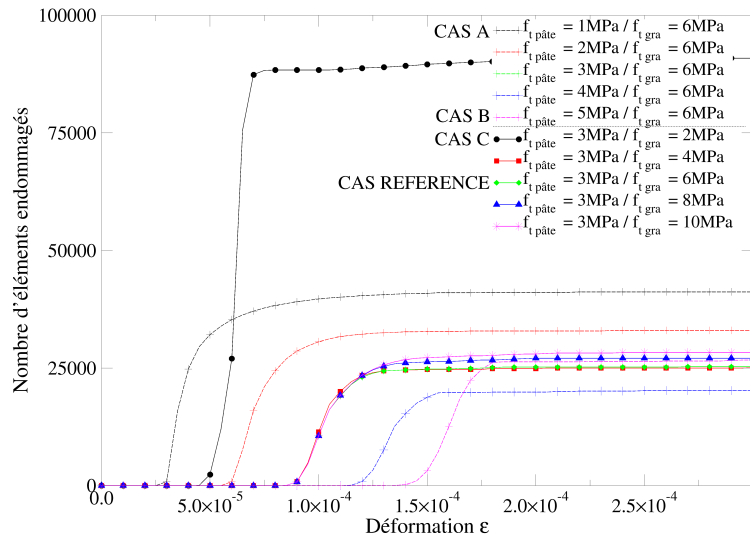


FIGURE 2.15 – Évolutions du nombre d'éléments endommagés dans le cas où  $f_t$  varie

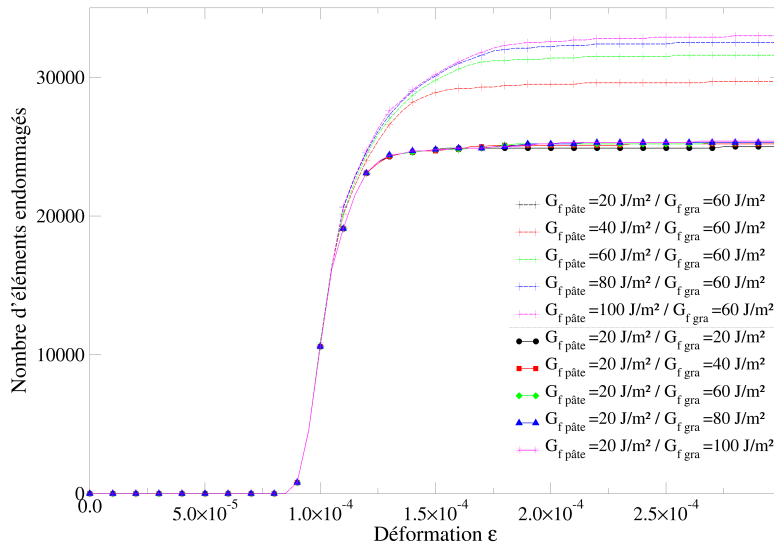


FIGURE 2.16 – Évolutions du nombre d'éléments endommagés dans le cas où  $G_f$  varie

de fissuration  $G_f$ , conséquence d'un chemin de fissure plus ou moins tortueux. En effet, le système restitue plus d'énergie pour faire propager la fissure en contournant les granulats (souvent le cas des bétons ordinaires). Ainsi, la dépendance de l'énergie restituée au chemin de fissure, lui même dépendant du tirage aléatoire de la mésostructure, implique un coefficient de variation à hauteur de 25%. Le module d'élasticité et la résistance à la traction sont quant à eux très peu influencés par le tirage.

### 2.3.5 Influence des classes de granulats

L'objectif est à présent de savoir si la suppression des classes de granulats de faibles diamètres affecte sensiblement la réponse mécanique (globale et locale). Comme énoncé précédemment (Section 2.2.3), la taille  $h_{el}$  des éléments fins est conditionnée par la taille du plus petit granulat  $\varnothing_{min}$ . La suppression des petits granulats permettrait d'augmenter la taille des éléments fins et en conséquence conduirait à un gain de temps de calcul considérable notamment dans le cas d'un calcul 3D. Une étude est donc menée dans la suite sur la légitimité de la

Tirage	$\nu_{homogénéisé}$	$E_{homogénéisé}$ (GPa)	$f_{t, homogénéisé}$ (MPa)	$G_{f, homogénéisé}$ (J/m <sup>2</sup> )
1	0,2	31,42	3,23	105,8
2	0,2	31,46	3,23	64,0
3	0,2	31,49	3,24	112,4
4	0,2	31,44	3,24	72,7
5	0,2	31,39	3,23	109,1
6	0,2	31,55	3,28	111,5
7	0,2	31,53	3,24	74,1
8	0,2	31,43	3,23	59,7
9	0,2	31,61	3,24	98,5
10	0,2	31,58	3,27	63,6
Moyenne	0,2	31,49	3,23	87,1
Ecart-Type	4,39e-05	0,01	0,02	21,00
COV	0,02%	0,22%	0,56%	24,10%

TABLEAU 2.3 – Paramètres globaux « homogénéisés » du VER pour 10 tirages aléatoires

représentation de l'intégralité des classes de granulats lors des simulations à l'échelle mésoscopique [Gangnant et al., 2016].

### Stratégie de calcul

L'objectif des simulations suivantes est d'étudier l'influence liée au retrait successif des classes inférieures des granulats sur la réponse macroscopique, la cartographie de l'endommagement et le chemin de la fissure du béton. Pour les différents cas de calcul, 10 tirages aléatoires ont été réalisés. L'ensemble des calculs sont menés à partir du VER présenté en Figure 2.5 sollicité en traction, en considérant une configuration de contrainte plane. Durant les simulations, l'incrément de déplacement suit une progression géométrique de  $0,4 \mu m$  à  $300 \mu m$ . Ce type de progression facilite la convergence des résultats, dans la mesure où de faibles incréments de déplacement sont imposés aux alentours du pic puis augmente progressivement en phase post-pic. Le squelette granulaire d'étude correspond ici à celui présenté en Figure 2.2 et Tableau 2.1 dans lequel 10 classes de granulats sont présentes, correspondant à une fraction volumique globale de référence de 70%. L'idée est de supprimer successivement les classes inférieures des granulats notées  $i$  jusqu'au diamètre  $\varnothing_i = 6,3 \text{ mm}$  (soit 1, 2, 4, 5, 5,6 et 6,3 mm). Une première simulation contenant la matrice cimentaire et les granulats supprimés (dont la fraction volumique a été réajustée) permet d'obtenir des propriétés homogénéisées de ce mortier tout nouvellement créé. Ces propriétés sont ensuite injectées à la place des propriétés de matrice dans une simulation et où seules les classes supérieures ( $i + 1$  à 10) sont présentes. La stratégie de calcul proposée est la suivante :

1. Calcul de référence, i.e., en présence de toutes les classes de granulats  $i = 1$  à 6<sup>2</sup>.
2. Création d'un mortier (pâte + classes de granulats à supprimer de 1 à  $i$ ). Les classes inférieures de granulats sont incorporées successivement dans la pâte de ciment afin de former un mortier (Figure 2.18a). Pour un mortier donné, la fraction volumique des granulats nécessite d'être modifiée en fonction du volume de mortier considéré et non en fonction du volume initial de l'éprouvette. Pour un mortier constitué de classe 1 à  $i$ , la fraction volumique globale  $Fvg^*$  s'obtient à partir de l'équation suivante :

2. Les classes de granulats 7 à 10 seront toujours conservées dans les simulations.

$$Fvg_{1-i}^* = \frac{Fvg \sum_1^i fg_i}{1 - Fvg \sum_{i+1}^{10} fg_i} \quad (2.22)$$

La nouvelle fraction volumique par classe  $fv g_i^*$  est ensuite obtenue par une loi de proportionnalité utilisant  $Fvg^*$ .

Le mortier créé est identifié par la nomenclature suivante : « **1\_(i)P-(i+1)\_10M** » où  $i$  correspond à la classe la plus haute présente dans le mortier, P signifiant « présent » et M « manquant ». Les différents mortiers sont obtenus en utilisant la procédure de tirage aléatoire des granulats décrite précédemment.

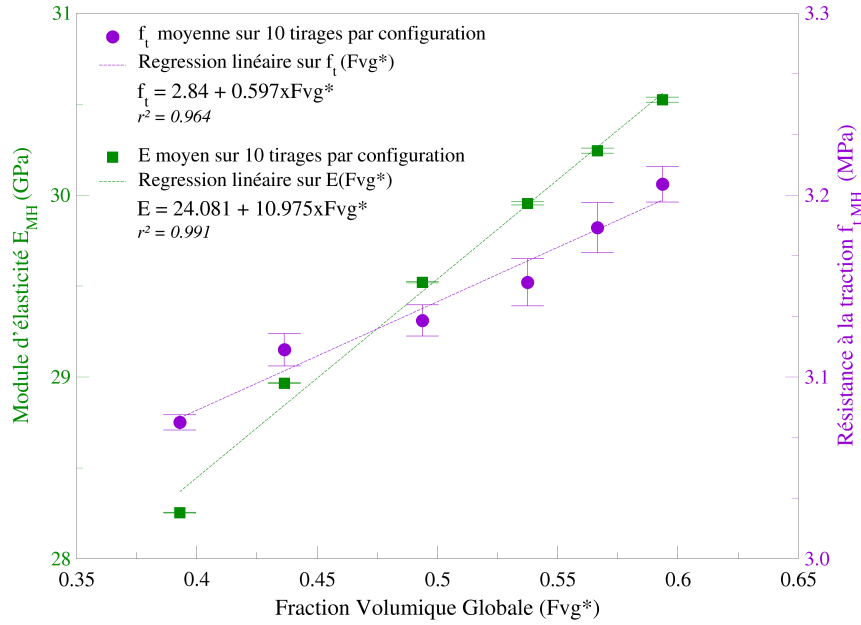
3. Estimation des propriétés du mortier « **1\_(i)P-(i+1)\_10M** » défini à l'étape 2. Le module d'élasticité  $E_{MH}$ , le coefficient de Poisson  $\nu_{MH}$  et la résistance à la traction  $f_{tMH}$  sont estimés à partir des réponses force-déplacement obtenues à partir d'une simulation en traction sur une éprouvette non-entaillée (Figure 2.5a) tandis que l'énergie de rupture  $G_{fMH}$  est estimée à partir d'une éprouvette entaillée (Figure 2.5b) afin de favoriser la formation d'une fissure unique et ainsi obtenir une valeur pertinente de  $G_f$ . Notons que la résistance à la traction a été estimée sur des éprouvettes non-entaillées afin d'éviter tout effet d'entaille.
4. La dernière étape consiste à simuler un béton simplifié à partir d'une éprouvette entaillée et pour lequel la mésosstructure est constituée des classes de granulats comprises entre  $i + 1$  à 10 et d'une matrice correspondant au mortier homogénéisé dont les propriétés ont été estimées à l'étape 3 (Figure 2.18b). La nomenclature retenue pour ces bétons est la suivante : « **1\_(i)H-(i+1)\_10P** » où H signifie « homogénéisé » et P « présent ». Les résultats de ces simulations sont comparés à ceux obtenus à partir du calcul de référence (Figures 2.18c et 2.18d). Notons que 10 tirages de référence sont réalisés : les mésostructures des configurations de béton simplifié sont issues directement de la suppression de classes à partir des 10 mésostructures initiales, i.e., complètes. Cela permet l'analyse de l'effet des classes sur le champ d'endommagement et le chemin de fissure.

### Identification des propriétés du mortier homogénéisé

120 simulations sont réalisées afin de (i) obtenir les propriétés moyennes des mortiers homogénéisés (Tableau 2.4) et de (ii) analyser l'influence de la fraction volumique globale sur le comportement à la rupture du béton (Figure 2.17).

Configurations	$Fvg^*$	$E_{MH}$ (GPa)	$\nu_{MH}$	$f_{tMH}$ (MPa)	$G_{fMH}$ (J/m <sup>2</sup> )
1_1P-2_10M	39,3%	28,25 ±2,45e-3	0,2 ±1,71e-5	3,08 ±0,04	65,7 ±10,1
1_2P-3_10M	43,6%	28,97 ±2,54e-3	0,2 ±1,90e-5	3,12 ±0,09	65,1 ±9,6
1_3P-4_10M	49,4%	29,52 ±3,86e-3	0,2 ±1,47e-5	3,13 ±0,09	67,5 ±17,3
1_4P-5_10M	53,8%	29,95 ±8,64e-3	0,2 ±2,29e-5	3,15 ±0,013	73,7 ±15,5
1_5P-6_10M	56,7%	30,24 ±1,36e-2	0,2 ±2,45e-5	3,18 ±0,014	69,5 ±22,0
1_6P-7_10M	59,4%	30,52 ±1,42e-2	0,2 ±2,27e-5	3,21 ±0,10	70,8 ±19,1

TABLEAU 2.4 – Propriétés du mortier homogénéisé pour les différentes configurations (étape 3) - moyenne sur 10 tirages


 FIGURE 2.17 – Évolution de  $E_{MH}$  et  $f_{tMH}$  en fonction de la fraction volumique globale

A partir des résultats reportés dans le Tableau 2.4, on peut constater que le module d'élasticité et la résistance à la traction des mortiers semblent augmenter linéairement avec l'ajout des classes de granulats et donc avec l'augmentation de la fraction volumique globale ( $Fvg^*$ ) (Figure 2.17). Notons que ce comportement avait déjà été observé par Kim et Abu Al-Rub [Kim et Abu Al-Rub, 2011]. Ainsi une approximation du module d'élasticité d'un béton semble pouvoir être obtenue sur la base d'une simple loi des mélanges telle que :

$$E_{homo} = Fvg(E_{gra} - E_{pâte}) + E_{pâte} \quad , \quad (2.23)$$

Globalement, les coefficients de variation des modules d'élasticité et de la résistance à la traction sont faibles (respectivement au maximum de 0,05% et 3%). De plus, avec l'ajout des classes de granulats, le chemin de fissure devient de plus en plus tortueux, ce qui a pour conséquence l'augmentation de l'énergie de fissuration [Petersson, 1981, Karihaloo, 1995]. La variabilité importante de l'énergie de rupture, due à la mésostructure, implique l'utilisation pour les simulations du béton simplifié (étape 4) de deux valeurs extrêmes, en plus de  $G_{fMH}$  :  $G_{fMH_{min}}$  et  $G_{fMH_{max}}$ , correspondant respectivement à :

$$\begin{aligned} G_{fMH_{max}} &= G_{fMH} + 2\Delta G_{fMH} \\ G_{fMH_{min}} &= G_{fMH} - 2\Delta G_{fMH} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où  $\Delta G_{fMH}$  est l'écart type des valeurs de  $G_{fMH}$  (une distribution normale est constatée à la suite d'un test de normalité Anderson-Darling). Notons que la population comprise entre les bornes  $G_{fMH_{min}}$  et  $G_{fMH_{max}}$  correspond à 95% des éprouvettes.

### Simulations du béton simplifié : influence des classes de granulats de faibles diamètres

La Figure 2.18 montre les différents champs numériques obtenus pour chaque béton simplifié pour un tirage donné (les autres tirages ont un résultat analogue). Ainsi, un champ d'endommagement de plus en plus étalé est observé avec la suppression successive des classes inférieures. Notons également que le chemin de fissure devient de moins en moins tortueux

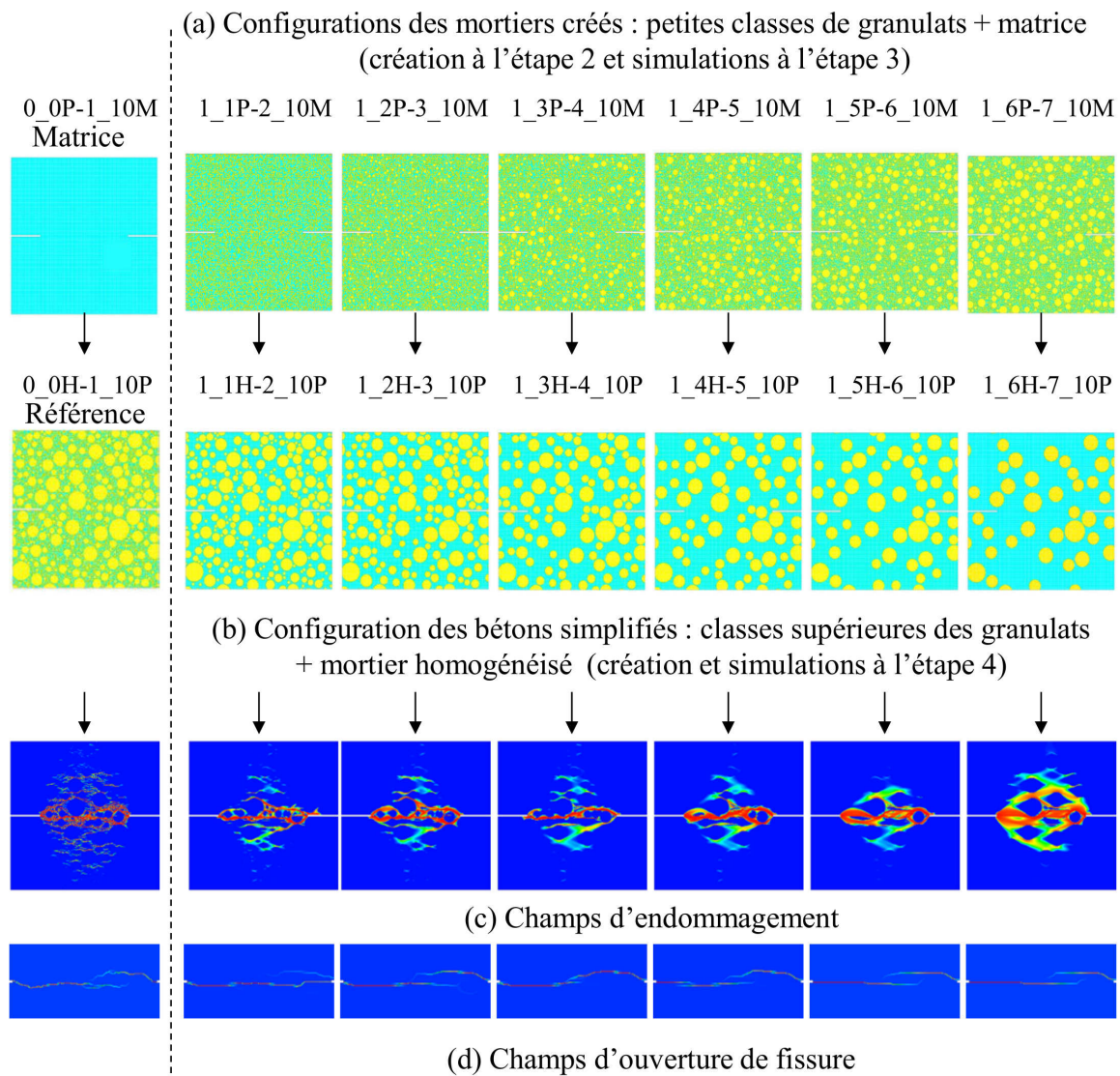


FIGURE 2.18 – Résultats des simulations sur l'exhaustivité de la représentation des classes de granulats (a) les mortiers à homogénéiser (b) les configurations où la pâte est remplacée par le mortier homogénéisé (c) les champs d'endommagement (d) le chemin de fissure.

avec la suppression des classes inférieures.

Le module d'élasticité et la résistance en traction sont quasiment équivalents à ceux du béton de référence attestant la réussite de cette technique d'homogénéisation numérique jusqu'au pic de chargement. L'énergie de fissuration finale du béton simplifié diminue avec la suppression des classes de granulats de faibles diamètres mais on note toutefois une surestimation par rapport à l'énergie de rupture du béton de référence, et ce qu'elle que soit la configuration testée (Tableau 2.5). Les graphiques relatifs au Tableau 2.5 sont mis en Annexe C.2 et les réponses macroscopiques en terme de force-déplacement sont également mises en Annexe C.1. Si la procédure d'homogénéisation est pertinente pour l'estimation de  $E$  et  $f_t$ , il n'en va pas de même pour ce qui concerne l'énergie de rupture. En effet, l'énergie de fissuration  $G_f$  des bétons (simplifiés et de référence), déterminée à partir de la réponse macroscopique, est plus élevée que celle utilisée dans les paramètres d'entrée. Cela est lié à la tortuosité induite par la mésostructure apportant ainsi une dépense supplémentaire d'énergie. *In fine*, les énergies de fissurations locales sont toujours plus faible par rapport aux globales et ceci est d'autant plus vrai quand

Configurations	Fvg	$E_{finale}$	$f_{tfinale}$	$G_{ffinale}$	$E_{finale}$	$f_{tfinale}$	$G_{ffinale}$	$E_{finale}$	$f_{tfinale}$	$G_{ffinale}$
		(GPa)	(MPa)	(J/m <sup>2</sup> )	(GPa)	(MPa)	(J/m <sup>2</sup> )	(GPa)	(MPa)	(J/m <sup>2</sup> )
Référence	70%	31,5 <sup>±0,09</sup>	3,22 <sup>±0,11</sup>	87 <sup>±21</sup>	31,5 <sup>±0,09</sup>	3,22 <sup>±0,11</sup>	87 <sup>±21</sup>	31,5 <sup>±0,09</sup>	3,22 <sup>±0,11</sup>	87 <sup>±21</sup>
		Avec $G_{fMH_{min}}$			Avec $G_{fMH_{moyen}}$			Avec $G_{fMH_{max}}$		
1_1H-2_10P	51%	31,4 <sup>±0,07</sup>	3,15 <sup>±0,07</sup>	132 <sup>±31</sup>	31,4 <sup>±0,07</sup>	3,2 <sup>±0,07</sup>	183 <sup>±34</sup>	31,4 <sup>±0,07</sup>	3,23 <sup>±0,06</sup>	221 <sup>±38</sup>
1_2H-3_10P	47%	31,6 <sup>±0,07</sup>	3,16 <sup>±0,07</sup>	136 <sup>±37</sup>	31,6 <sup>±0,07</sup>	3,21 <sup>±0,06</sup>	171 <sup>±36</sup>	31,6 <sup>±0,07</sup>	3,24 <sup>±0,06</sup>	215 <sup>±48</sup>
1_3H-4_10P	41%	31,6 <sup>±0,04</sup>	3,17 <sup>±0,07</sup>	134 <sup>±32</sup>	31,6 <sup>±0,04</sup>	3,21 <sup>±0,06</sup>	168 <sup>±29</sup>	31,6 <sup>±0,04</sup>	3,24 <sup>±0,06</sup>	200 <sup>±31</sup>
1_4H-5_10P	35%	31,6 <sup>±0,07</sup>	3,17 <sup>±0,05</sup>	142 <sup>±24</sup>	31,6 <sup>±0,07</sup>	3,22 <sup>±0,05</sup>	180 <sup>±29</sup>	31,6 <sup>±0,07</sup>	3,25 <sup>±0,04</sup>	220 <sup>±34</sup>
1_5H-6_10P	31%	31,6 <sup>±0,06</sup>	3,15 <sup>±0,06</sup>	109 <sup>±25</sup>	31,6 <sup>±0,06</sup>	3,23 <sup>±0,05</sup>	150 <sup>±37</sup>	31,6 <sup>±0,06</sup>	3,27 <sup>±0,04</sup>	189 <sup>±40</sup>
1_6H-7_10P	26%	31,6 <sup>±0,06</sup>	3,18 <sup>±0,04</sup>	113 <sup>±2</sup>	31,6 <sup>±0,06</sup>	3,24 <sup>±0,04</sup>	148 <sup>±33</sup>	31,6 <sup>±0,06</sup>	3,28 <sup>±0,04</sup>	181 <sup>±43</sup>

TABLEAU 2.5 – Propriétés globales des configurations du béton simplifié et comparaison à celui de référence (étape 4)- moyenne sur 10 Tirages

le modèle rend compte d'une grande hétérogénéité, i.e., une compacité granulaire élevée et des petits granulats.

Cette analyse montre que lors d'une étude complète et détaillée du comportement à la rupture du béton, la représentation exhaustive des classes de granulats est nécessaire puisque ces derniers affectent le processus d'endommagement et le trajet de la fissure (Figure 2.18). Ainsi, l'utilisation d'un béton simplifié provoquerait une perte significative d'information concernant la zone d'élaboration de la rupture dont va dépendre l'énergie de fissuration. En somme, le comportement adoucissant des bétons simplifiés n'est pas représentatif de la « réalité » puisque localement, les champs d'endommagement ne sont plus identiques pour un tirage donné. En effet, l'opération d'homogénéisation numérique des propriétés de rupture du mortier ne permet pas de rendre compte des processus d'interaction prenant place au niveau de la mésostructure et notamment les interactions entre les granulats constituant le mortier et les granulats de classes supérieures présents dans le béton. Néanmoins, dans un contexte d'ingénierie, où seul la charge au pic importe, l'homogénéisation numérique permet d'obtenir une approximation acceptable de la réponse d'un béton possédant l'intégralité de son squelette granulaire (Figures C.2 et C.3).

Etant donné que ces travaux de thèse proposent une étude de la zone d'élaboration de la fissure, et ce à partir notamment d'un modèle d'endommagement, il faudra donc que l'ensemble des classes de granulats du béton considéré soit représenté dans les simulations numériques.

## 2.4 Exemple d'application : poutres entaillées en flexion 3 points

L'objectif de cette section est de montrer que ce modèle peut s'intégrer dans un calcul de structure complet et qu'il est également capable de décrire l'effet d'échelle du béton. Les réponses force-déplacement obtenues numériquement seront analysées par la MLER équivalentes (ou MLEReq) qui permettra d'obtenir les courbes de résistance correspondante. L'analyse des courbes-R montrera que le modèle mésoscopique est capable de rendre compte du processus de développement de la zone d'élaboration et de propagation de la fissure principale avec sa zone d'élaboration. Pour ce faire, cette étude est réalisée sur la base d'une campagne expérimentale et numérique sur des poutres homothétiques de béton entaillées et de tailles différentes utilisées dans le cadre du projet européen Failflow (Failure and Fluid Flow in Porous Quasibrittle Mate-

rials) [Rojas Solano, 2012]. Le modèle numérique est appliqué pour la simulation de poutres de 3 tailles différentes entaillées à 50% de leur hauteur.

### 2.4.1 Modélisation des poutres entaillées

Trois tailles de poutre H1-H2-H3 sont simulées à partir du modèle mésoscopique (Tableau 2.6 et Figure 2.19). Pour chaque taille, 5 tirages du squelette granulaire sont réalisés.

	D	L	S	$a_0$	b
H1	200	700	500	100	50
H2	100	350	250	50	50
H3	50	175	125	25	50

où  $b$  correspond à l'épaisseur  
et  $a_0$  est l'entaille initiale

TABLEAU 2.6 – Dimensions des poutres entaillées (en mm)

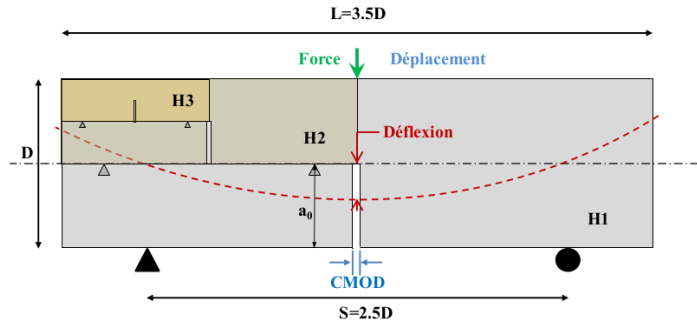


FIGURE 2.19 – Schéma de l'essai de flexion 3 points et les différentes tailles de poutre

Les simulations sont réalisées en 2D conformément à l'hypothèse de contrainte plane. Les éléments choisis sont des quadrangles linéaires. Dans un souci d'économie de temps de calcul sur ce genre de structure, les tirages sont réalisés dans une boîte mésoscopique qui est insérée directement dans le maillage macroscopique (Figure 2.20). En dehors de la boîte mésoscopique, un modèle élastique pure est considéré pour lequel les paramètres élastiques sont obtenus par une loi de mélange simple des paramètres élastiques des constituants (Eq.2.23). Dans la boîte mésoscopique, les propriétés des constituants sont celles présentées dans le Tableau 2.2. La taille des éléments de la partie élastique correspond à 1/100 de la hauteur  $D$  des poutres et la taille des éléments dans la boîte mésoscopique est fixée à  $h_{el} = 0,2$  mm. Le raccordement entre la boîte mésoscopique et la partie homogène du maillage se fait de manière à ce que tout point du maillage homogène est assujéti à suivre une combinaison linéaire des déplacements des nœuds de l'élément du maillage mésoscopique auquel il est raccordé (illustration sur la partie en zoom de la Figure 2.20). De plus, afin d'éviter de faux effets de concentration de contrainte numérique, les supports accueillant les appuis et celui à partir duquel le chargement est appliqué, sont modélisés, de manière élastique, par une ligne finie de 5 mm de longueur (où les propriétés mécaniques basiques de l'acier sont utilisées).

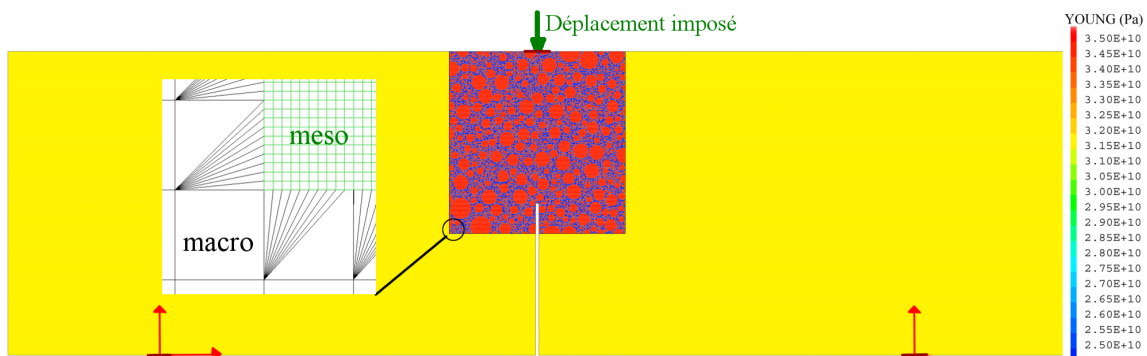


FIGURE 2.20 – Maillage mésoscopique de la poutre : champ par éléments du module d'élasticité ; et conditions aux limites : raccordement entre les maillages macroscopique et mésoscopique, chargement et conditions aux appuis



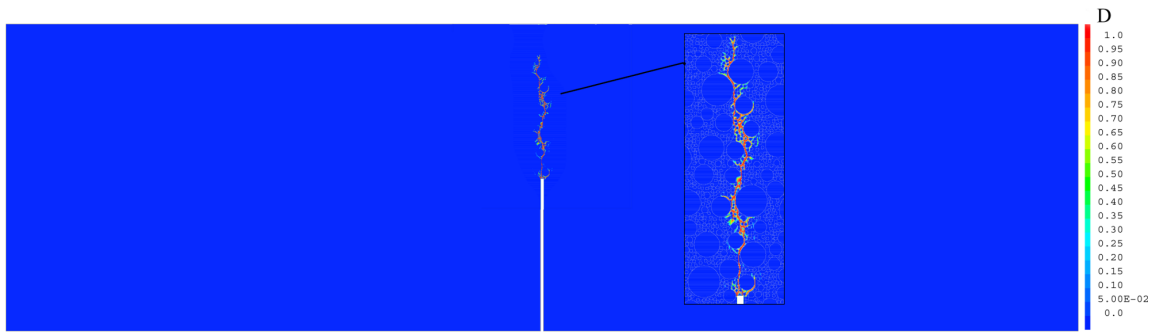


FIGURE 2.21 – Champ d'endommagement d'une poutre H1 pour un tirage mésoscopique donné

## 2.4.2 Effet d'échelle : analyse par la loi déterministe de Bažant

### Analyse de la réponse macroscopique

Les réponses force-CMOD obtenues à partir des simulations numériques sont présentées en Figure 2.22. Par ailleurs, la Figure 2.21 montre un exemple d'un champ d'endommagement obtenu à la suite d'une simulation (H1-Tirage 2). On peut observer que l'endommagement progresse dans la boîte mésoscopique en contournant les granulats présents le long du ligament. A partir des réponses force-CMOD, il est possible d'estimer :

- La résistance du ligament  $\sigma_{liga}$  définie comme étant la contrainte normale maximale dans le ligament d'une hauteur  $h$  ( $h = D - a_0$ , où  $a_0 = D/2$  et  $S = 5D/2$ ) :

$$\sigma_{liga} = \frac{3 FS}{2 bh^2} = \frac{15F}{bD} \quad (2.25)$$

- La contrainte nominale  $\sigma_N$  définie comme :

$$\sigma_N = \frac{3 FS}{2 bD^2} \quad (2.26)$$

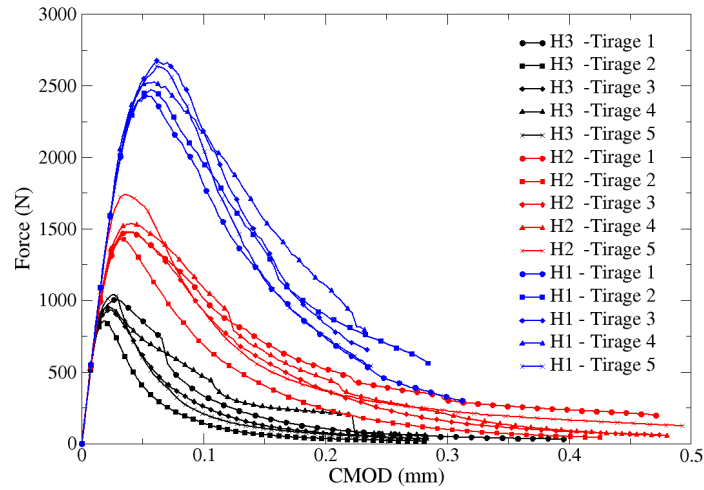
Les résultats du Tableau 2.7 indiquent une diminution de la résistance avec l'augmentation de la hauteur caractéristique  $D$  symptomatique de l'effet d'échelle attendu.

Cas	$D$ (mm)		$k_{ini}$ (N/mm)	$F_{max}$ (N)	$\sigma_N$ (MPa)	$\sigma_{liga}$ (MPa)	$G_F$ (J/m <sup>2</sup> )
H1	200	Moyenne	72331	2548,8	0,96	3,8	47,5*
		Ecart Type	123	93,1	0,03	0,14	2,78
H2	100	Moyenne	74603	1532,2	1,15	4,6	57,2
		Ecart Type	554	109,4	0,08	0,33	8,45
H3	50	Moyenne	76724	958,3	1,44	5,8	57,8
		Ecart Type	322	63,8	0,10	0,38	14,61

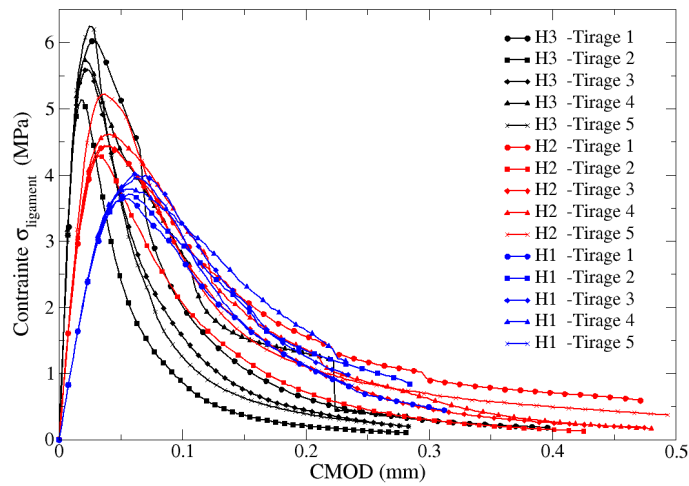
\* valeur indicative, les simulations ne sont pas menées jusqu'à rupture complète

TABLEAU 2.7 – Résultats des simulations

Dans le Tableau 2.7,  $k_{ini}$  correspond à la raideur initiale des poutres,  $F_{max}$  la force maximale (force au pic),  $\sigma_N$  et  $\sigma_{liga}$  les contraintes nominales et contraintes maximales sur le ligament définies respectivement par les équations 2.26 et 2.25, et  $G_F$  l'énergie de rupture définie comme dans l'équation 2.21 (aire sous la courbe force-déplacement divisée par la surface fissurée projetée). Notons que le poids propre est négligé dans les analyses qui vont suivre.



(a) Force-CMOD



(b) Contrainte dans le ligament-CMOD

FIGURE 2.22 – Courbes des réponses macroscopiques des poutres entaillées H1-H2-H3 suivant différents tirages des granulats

### Loi d'effet d'échelle

Dans ce paragraphe, la loi d'effet d'échelle de Bažant [Bažant et Planas, 1997] est appliquée après calibrage de certains paramètres. L'objectif est de montrer, que le modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique rend compte du phénomène d'effet d'échelle. Dans le cas présent, i.e, de structures homothétiques entaillées, la contrainte nominale  $\sigma_N$  peut également être estimée en fonction de la taille caractéristique  $D$  suivant la loi classique de Bažant par la relation suivante :

$$\sigma_N = \frac{B f_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}}, \quad (2.27)$$

où  $D_0$  est une longueur correspondant à l'intersection de deux comportements asymptotiques (critère de contraintes et effet d'échelle attendu par la MLER  $\sigma_N \sim D^{-1/2}$ ). L'effet d'échelle est inexistant dans les structures de petites tailles (i.e.,  $D \ll D_0$ ). Dans ce cas, la zone d'élaboration de la rupture occupe l'intégralité du volume de la structure, la contrainte nominale  $\sigma_N$  peut être alors estimée à partir d'un critère de résistance.  $B$  est une constante adimensionnelle déterminée à partir d'une fonction analytique  $Y(\alpha)$  dépendante de la géométrie et de la taille de l'éprouvette étudiée où  $\alpha$  correspond à la longueur relative de fissure de longueur,  $\alpha = a/D$ . Dans le cas de

structures homothétiques, la fonction  $Y(\alpha)$  est unique car adimensionnée. Cette fonction est de la forme suivante :

$$Y(\alpha) = \pi \alpha c_N^2 (F(\alpha))^2, \quad (2.28)$$

où  $C_N = \frac{3S}{2D} = 3.75$  et la fonction  $F(\alpha)$  est obtenue à partir d'un résultat éléments finis [Pastor et al., 1995, Bažant et Planas, 1997] et est dépendante de la hauteur  $D$  et de la distance entre les appuis  $S$  :

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left( \frac{p_\infty(\alpha) + \frac{4D}{S} (p_4(\alpha) - p_\infty)}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{1,5}} \right)},$$

$$\text{avec } p_\infty(\alpha) = 1,989 - \alpha(1 - \alpha) \left( 0,488 - 0,458(1 - \alpha) + 1,226(1 - \alpha)^2 \right)$$

$$\text{et } p_4(\alpha) = 1,9 - \alpha \left( -0,089 + 0,603(1 - \alpha) - 0,441(1 - \alpha)^2 + 1,223(1 - \alpha)^3 \right) \quad (2.29)$$

La fonction adimensionnelle  $Y(\alpha)$  permet de déterminer la constante  $B$  par la relation suivante :

$$B(\alpha_0) = \sqrt{\frac{Y'(0)}{Y'(\alpha_0)}} \quad (2.30)$$

Ainsi, par ajustement des contraintes nominales numériques à la loi d'effet d'échelle, les paramètres  $f_t$  et  $D_0$  sont obtenus après un calibrage. Il devient alors possible d'estimer l'énergie de fissuration  $G_f$  et une longueur effective de la zone d'élaboration de la fissure  $c_f$  :

$$G_f = \frac{B^2 f_t^2}{\sigma_N^2 E'} \quad \text{et} \quad c_f = \frac{Y(\alpha_0)}{Y'(\alpha_0)} D_0, \quad (2.31)$$

où  $E'$  est le module effectif, ici en hypothèse de contrainte plane  $E' = E$ . L'ajustement à la loi déterministe de Bažant pour nos simulations numériques est présenté à la Figure 2.23. Le modèle mésoscopique permet donc d'obtenir un effet d'échelle (effet de taille) transitionnel entre les 2 comportements asymptotiques attendus pour les petites et grandes tailles de structure (Figure 2.23). L'effet d'échelle constaté indique également l'existence d'une zone d'élaboration de la rupture non-négligeable devant la taille des structures modélisées.

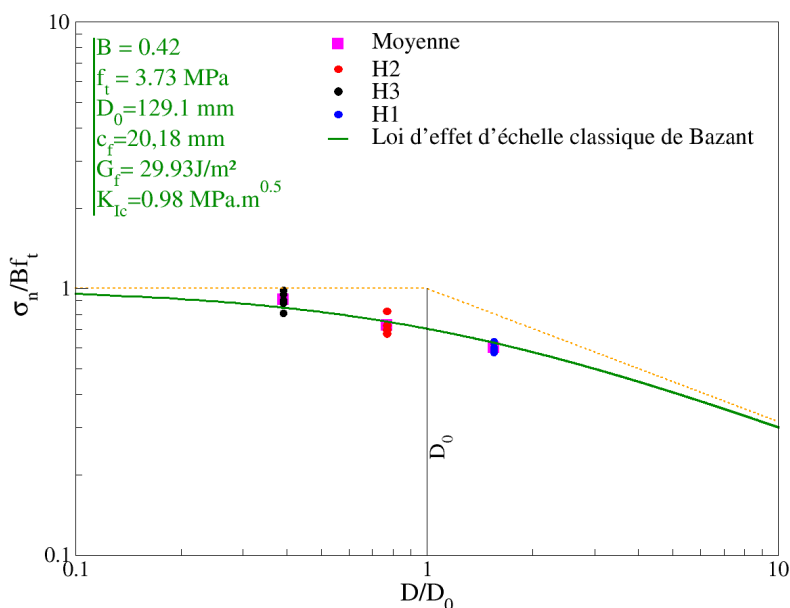


FIGURE 2.23 – Ajustement de la loi classique d’effet d’échelle aux résultats numériques

### 2.4.3 Courbes de Résistances : image énergétique

Les courbes de résistance (courbe-R) sont tracées à partir des courbes force-déplacement obtenues numériquement. Ces courbes sont estimées sur la base de la mécanique élastique de la rupture équivalente (MLEReq). Elles permettent d’obtenir non seulement une estimation des propriétés de rupture mais également des informations sur l’étendue de la zone d’élaboration de la rupture. Elles caractérisent l’énergie consommée pour propager la fissure élastique équivalente et donc celle liée à la croissance de la zone d’élaboration (partie croissante de la courbe-R) et celle associée à la propagation de la fissure principale avec sa zone d’élaboration (plateau de la courbe-R). Selon la MLEReq, toute variation de raideur sécante (ou de son inverse la complaisance sécante) correspond à une propagation de la fissure élastique équivalente i.e., une fissure qui, dans un modèle élastique pur donnera la même raideur que l’éprouvette fissurée avec sa zone d’élaboration. Autrement dit, avec le développement de la zone d’élaboration, et donc de l’endommagement, la raideur  $k$  de l’éprouvette diminue avec l’augmentation de la longueur élastique équivalente  $a_{eq}$  (la notation sera simplifiée par  $a$ )

#### Applicabilité de la MLEReq au modèle d’endommagement

Afin de vérifier l’applicabilité de la MLEReq au modèle d’endommagement, des cycles charge-endommagement-propagation décharge à déplacement imposé ont été effectuée sur le VER entaillé (Figure 2.5b). La méthode de la MLEReq est applicable dès que la raideur initiale d’un cycle donné (i.e., la raideur élastique effective du spécimen) passe par le point de décharge du cycle précédent (point à partir duquel le déplacement diminue) ou en d’autre terme correspond à la raideur sécante calculée au point de décharge du cycle précédent [Morel et al., 2005]. En conséquence, en tout point d’une courbe force-déplacement, la complaisance (inverse de la raideur) apparente du spécimen  $\lambda$  (ou complaisance sécante  $\lambda = \delta / F$ ) correspond à la complaisance élastique de ce dernier. Ainsi, l’augmentation de la complaisance apparente du spécimen pourra être traduite par la propagation d’une fissure élastique équivalente, i.e., une fissure qui, dans un modèle élastique, produira la même complaisance que celle constatée expérimentalement c’est à dire celle due à la fissure principale avec sa zone d’élaboration.

La Figure 2.24 atteste que la MLEReq est applicable au modèle d’endommagement, ce

qui était cependant attendu puisque la plasticité a été désactivé et donc aucun déplacement irréversible est attendu. En d'autre terme, le seul mécanisme dissipatif présent est le phénomène d'endommagement.

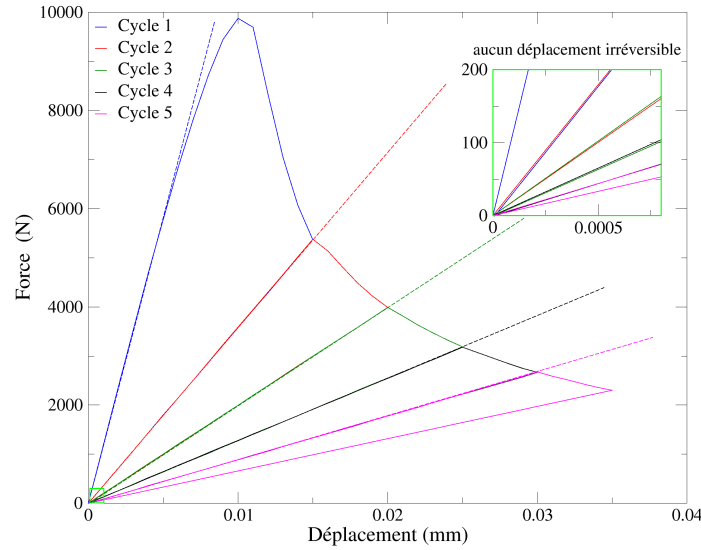


FIGURE 2.24 – Cycles charge-endommagement-propagation-décharge

### Détermination de la longueur élastique équivalente

La première étape est la détermination de la longueur élastique équivalente  $a$ . Pour cela, un premier modèle numérique éléments finis est considéré. Ce modèle est purement élastique homogène et les propriétés élastiques correspondent à  $E=32$  GPa et  $\nu=0,2$ . Ce modèle EF est en 2D (contrainte plane), cependant l'épaisseur de la structure est incluse dans le calcul : les résultats sont ainsi équivalents à un modèle 3D. Le maillage, ayant servi au modèle mésoscopique est réutilisé mais le matériau est considéré comme homogène (i.e., les propriétés élastiques de la boîte mésoscopique, sont les mêmes que les propriétés de la partie utilisée pour le reste de la structure (Figure 2.25)). L'idée est d'appliquer une force unitaire  $F_{uni}=1N$  et de déboutonner la fissure (en faisant avancer le point de fond de fissure  $pf$ ) par une procédure de remaillage après un incrément de fissure  $d_{fiss}$ . Pour chaque nouvel incrément de fissure de longueur  $d_{fiss}$ , la raideur  $k_{num}$  est calculée par rapport au déplacement de la force  $\delta_{uni}$ . Ainsi,  $k_{num} = \frac{F_{uni}(=1N)}{\delta_{uni}}$ . La complaisance est également calculée par l'inverse de la raideur à savoir  $\lambda_{num} = 1/k_{num}$ . Afin de rendre le problème adimensionnel, les raideurs et complaisances seront exprimées en fonction de la longueur relative de fissure  $\alpha$  (définie plus haut 2.4.2). Un ajustement polynomial<sup>3</sup> est réalisé permettant de savoir pour toute longueur de fissure la complaisance (relations 2.32) et la raideur correspondantes (Figure 2.26).

$$\begin{aligned}
 \lambda_{num}^{H1-fit}(\alpha) &= 0.47\alpha^{10} - 3.20\alpha^9 + 9.73\alpha^8 - 17.47\alpha^7 + 20.51\alpha^6 - 16.46\alpha^5 + 9.14\alpha^4 - 3.47\alpha^3 + 0.86\alpha^2 - 0.13\alpha + 0.01 \\
 \lambda_{num}^{H2-fit}(\alpha) &= 0.36\alpha^{10} - 2.44\alpha^9 + 7.45\alpha^8 - 13.41\alpha^7 + 15.78\alpha^6 - 12.70\alpha^5 + 7.07\alpha^4 - 2.69\alpha^3 + 0.67\alpha^2 - 0.09\alpha + 0.01 \\
 \lambda_{num}^{H3-fit}(\alpha) &= 0.01\alpha^8 - 0.05\alpha^7 + 0.12\alpha^6 - 0.15\alpha^5 + 0.12\alpha^4 - 0.07\alpha^3 + 0.02\alpha^2 - 0.01\alpha
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Un coefficient de correction  $cor$  est appliqué (eq. 2.33) afin d'ajuster la raideur initiale numérique  $k_{num}(\alpha_0)$  pour qu'elle soit égale à la raideur initiale de la simulation étudiée  $k_{ini}$ , i.e.,

3. L'ajustement est intentionnellement réalisé jusqu'à  $\alpha=0,9$  afin de faciliter le processus de fit, au-delà de 0,9 les effets des conditions aux limites se font ressentir.

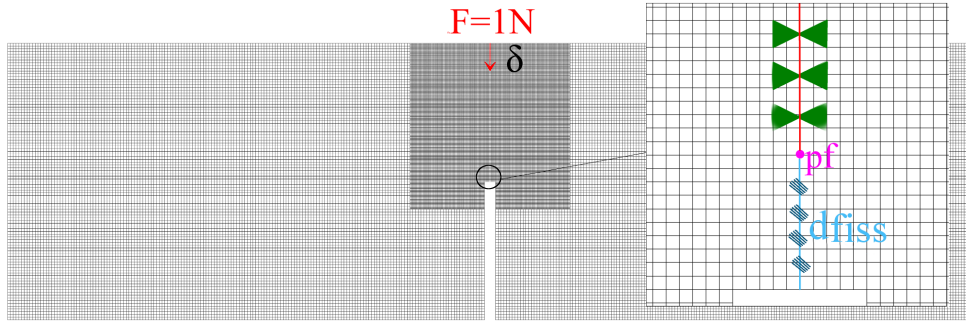
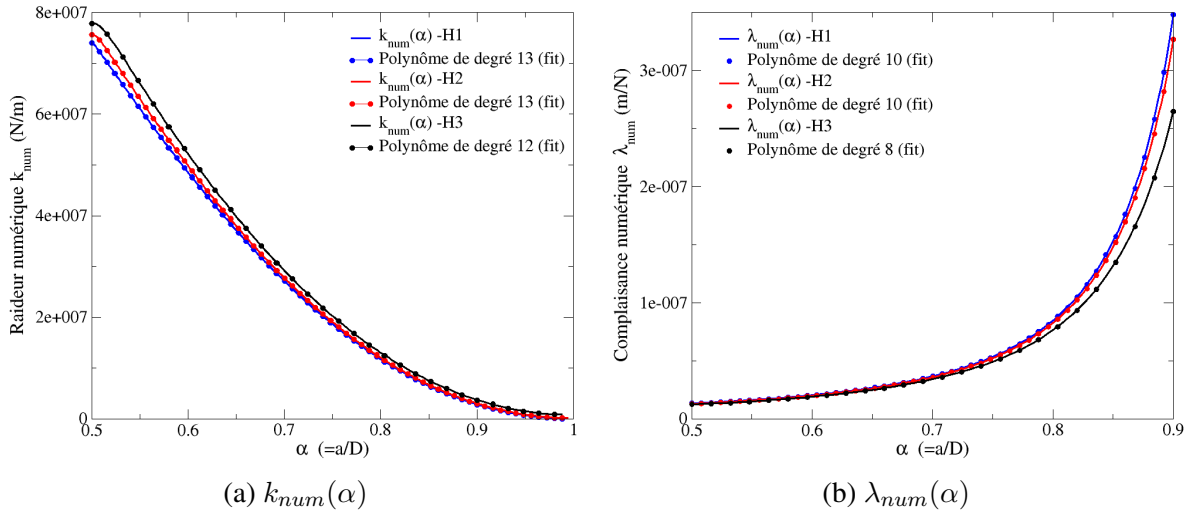


FIGURE 2.25 – Maillage EF pour la simulation élastique


 FIGURE 2.26 – Évolution de (a) la raideur et de (b) la complaisance lors de l'avancée de la fissure  $a_{eq}$  sous un chargement unitaire

la raideur dans la partie élastique de la poutre simulée par le modèle d'endommagement. Cette correction est liée à l'écart entre le module d'élasticité utilisé dans la simulation numérique élastique et le module d'élasticité effectif des simulation menées avec le modèle mésoscopique.

$$cor = \frac{k_{num}(\alpha_0)}{k_{ini}} = \frac{\lambda_{ini}}{\lambda_{num}(\alpha_0)} \sim \frac{E_{num}}{E_{reel}} \quad (2.33)$$

Ce coefficient est ensuite appliqué aux données initiales brutes et un nouvel ajustement est réalisé ; de nouveaux polynômes de raideur et de complaisance corrigées sont ainsi obtenus  $\lambda_{num}^{H_{1,2,3}cor}$  et  $k_{num}^{H_{1,2,3}cor}$ . La dernière étape dans la recherche de la longueur de fissure élastique équivalente, où ici la longueur relative de fissure élastique équivalente  $\alpha$ , consiste à déterminer par la méthode de la dichotomie la valeur de  $\alpha$  qui donnerait à l'éprouvette la même raideur que celle constatée sur la simulation à savoir  $k_{reel} = \frac{F}{\delta}$ . Ainsi en chaque point de la courbe déplacement issu de la simulation, la raideur sécante et sa longueur de fissure élastique équivalente correspondante sont déterminées. Notons qu'une seconde méthode est possible par interpolation linéaire ; cela ne nécessiterait aucun ajustement polynomial mais juste une correction des raideurs numériques du modèle élastique.

### Détermination de la résistance à la propagation de la fissure

La résistance à la propagation de la fissure  $G_R(a)$  est estimée à partir du taux de restitution d'énergie  $G(a)$ , au sens de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture, lors de la propagation de la fissure principale d'un incrément  $\delta a$  :

$$G(a) = \frac{W_{rest}}{b\delta a} = \frac{F^2}{2bD} \frac{\partial \lambda(\alpha)}{\partial \alpha} = G_R(a) \quad , \quad (2.34)$$

où  $W_{rest}$  est l'énergie restituée ou dissipée lors de l'incrément de fissure  $\delta a$ . Prenons deux instants de la courbe force déplacement  $t_1$  et  $t_2$  où à  $t_1$  il y a  $F_1$ ,  $\delta_1$  et  $a_1$  connus et de même pour le temps  $t_2$ . Ainsi l'énergie restituée, par une méthode graphique, peut être exprimée comme étant :

$$W_{rest}^{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} (F_1 \delta_2 - F_2 \delta_1) \quad , \quad (2.35)$$

et,

$$\delta a = a_2 - a_1. \quad (2.36)$$

La résistance à la propagation de la fissure peut également être déterminée par 2 autres méthodes :

- Par utilisation de la fonction du taux adimensionnel de restitution d'énergie  $g(\alpha)$  (caractéristique de la géométrie de l'éprouvette) [Morel et Durado, 2011] :

$$G(a) = \frac{F^2}{E'b^2D} g(\alpha) = G_R(a) \quad (2.37)$$

Cette fonction est la même pour les trois spécimens H1-H2-H3 et est équivalente à :

$$g(\alpha) = \frac{E'b}{2} \lambda_{num}^{H_{1,2,3}cor} = -\frac{E'b}{2} \frac{k_{num}^{H_{1,2,3}cor}}{k_{num}^2} \quad (2.38)$$

- Par utilisation d'un taux de restitution  $G_{num}^{H_{1,2,3}cor}(\alpha)$  numérique directement issus de la modélisation élastique :

$$G(a) = \frac{F^2}{F_{uni}^2} G_{num}^{H_{1,2,3}cor}(\alpha) = G_R(a) \quad (2.39)$$

Numériquement, plusieurs méthodes permettent de déterminer le taux de restitution d'énergie  $G_{num}$ . Dans cette thèse, deux méthodes ont été utilisées. La première étant la méthode de la complaisance reprenant la relation 2.34.

$$G_{num}(\alpha) = \frac{F_{uni}^2}{2b} \frac{d\lambda(a)}{da} \quad (2.40)$$

où une dérivée numérique est utilisée pour  $\frac{d\lambda(a)}{da}$ .

La seconde méthode est l'approche « Crack Closure Technique » (notée CCT) [Krueger, 2004]. C'est une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie ayant l'avantage de connaître la part de chaque mode de ruine dans le processus de restitution d'énergie d'une structure. La CCT suppose que l'énergie libérée pour étendre la fissure d'un incrément  $\delta a$ , de  $a$  à  $a + \delta a$  (i.e., entre les points  $l$  et  $i$ ) est identique à l'énergie nécessaire pour fermer la fissure entre les points  $l$  (nœud juste avant le fond de fissure) et  $i$  (le nœud du fond de fissure) (Figure 2.27). Ainsi en mode I :

$$G_{num}(\alpha) = \frac{Z_i (w_l - w_{l*})}{2b\delta a} \quad , \quad (2.41)$$

avec  $w$  étant le déplacement suivant l'ouverture de l'entaille aux nœuds  $l$  et  $l^*$  placés en arrière du point de fond de fissure  $i$ ,  $Z$  est la force nodale appliquée au nœud  $i$  et  $b$  est l'épaisseur d'un élément (l'indice \* indique qu'il s'agit d'un nœud en vis à vis).

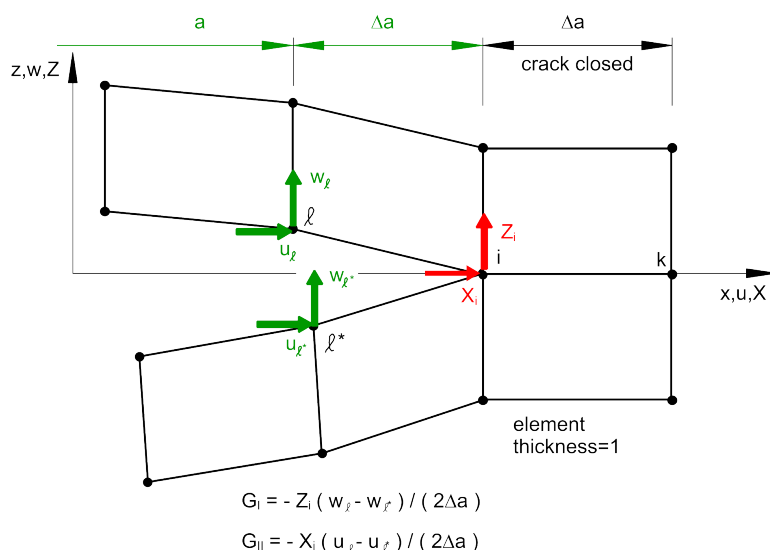


FIGURE 2.27 – La méthode CCT pour des éléments à 4 noeuds [Krueger, 2004]

### Courbes de Résistances des poutres entaillées

La Figure 2.28 représente la courbe-R du Tirage 3 de l'éprouvette H1. Cette dernière montre l'efficacité des différentes méthodes de calcul de la résistance à la propagation de la fissure. Elle souligne également que sur les éprouvettes H1 (plus grande dimension) qu'il existe, dans une moindre mesure, une propagation auto-similaire de la fissure sur quelques millimètres. Si un régime plateau est constaté, le processus de rupture change de régime au sens où la zone d'élaboration a atteint sa taille critique ( $\Delta a_c = a_c - a_0$ ) et entraîne la propagation auto-similaire ( $G_R(a) = G_{RC}$ ) de la fissure principale avec sa zone d'élaboration.  $\Delta a$  est l'incrément de longueur de fissure exprimée comme étant la différence entre la longueur de fissure  $a$  et la longueur de l'entaille initiale  $a_0$ .

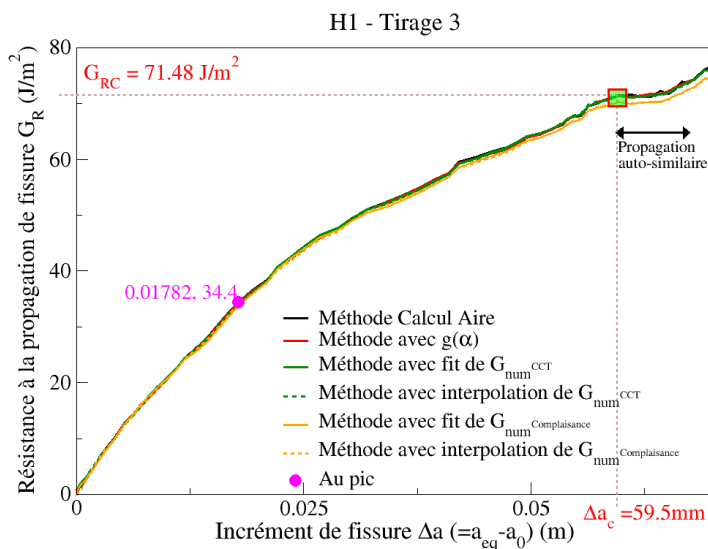


FIGURE 2.28 – Courbes-R via différentes méthodes (H1-Tirage 3)

La présence d'un régime plateau indique que le modèle utilisé est capable de rendre compte d'une longueur interne liée à la longueur critique de la zone d'élaboration de la fissure ( $\Delta a_c \sim$



$L_{FPZ}$ ).

Lorsque  $\Delta a < \Delta a_c$  la zone d'élaboration de la rupture est en phase de développement et l'ajustement de la partie croissante de la courbe-R peut être obtenue par une loi puissance d'exposant  $\beta$  (Figure 2.29) :

$$G_R(a) = \frac{G_{RC}}{\Delta a_c^\beta} \Delta a^\beta \quad (2.42)$$

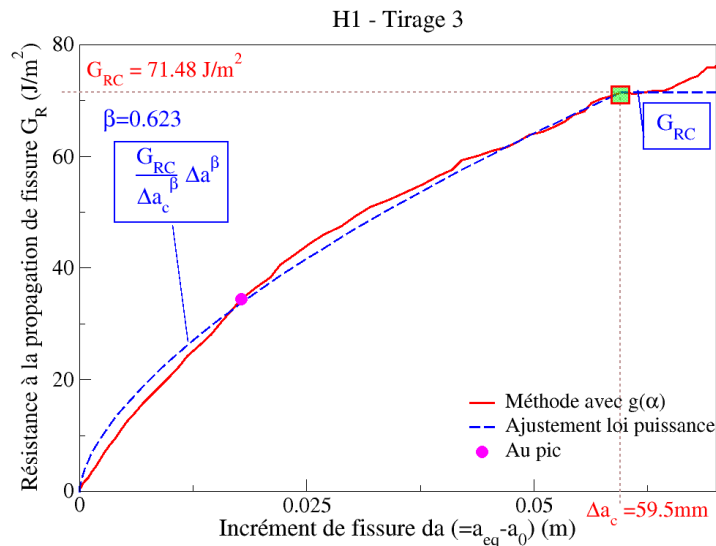
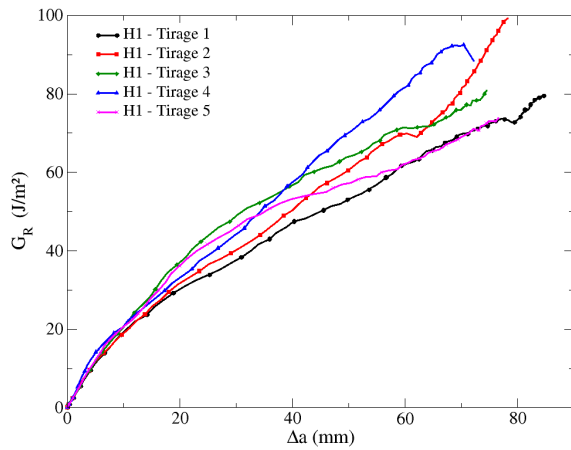


FIGURE 2.29 – Ajustement de la courbe-R (H1-Tirage 3)

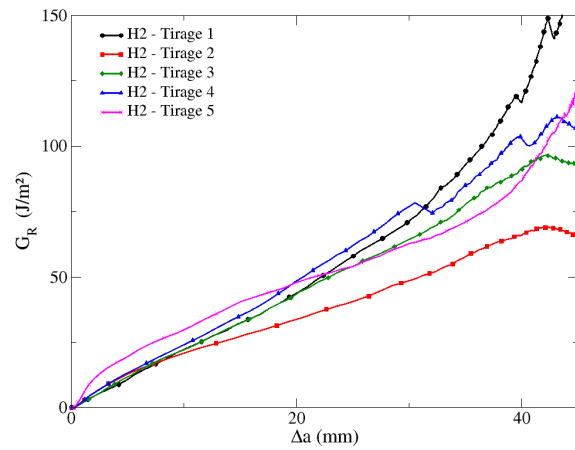
Les courbes-R de chaque tirage des poutres H1-H2-H3 ont été déterminées (Figure 2.30). Les poutres H2 et H3 ne présentent aucun régime plateau mais une augmentation importante de la résistance à la propagation de la fissure dès que  $\alpha \approx 0.6$ . Ce phénomène serait la conséquence d'un confinement précoce de la zone d'élaboration qui semble être tout en longueur. L'exposant  $\beta$  de l'ajustement semble être supérieur à 1 pour les poutres de petites dimensions. Notons que même pour les spécimens de grandes dimensions (i.e., H1), seule l'éprouvette correspondante au tirage 3 montre un semblant de plateau ; les autres courbes-R montre une allure monotone croissante. En conséquence, même dans les spécimens de plus grandes tailles, la zone d'élaboration semble majoritairement confinée. Ce résultat est en accord avec la localisation de la taille H1 sur le graphe d'effet d'échelle (Figure 2.23), i.e.,  $D^{H1}/D_0 = 1,5$  qui se trouve très éloignée des tailles de structures montrant l'effet d'échelle de la MLER ( $D/D_0 \gg 10$ ).

Par ailleurs, au pic de chargement, les longueurs relatives de fissures élastiques équivalentes  $\alpha_u$  semblent être quasi-identiques pour les différentes dimensions. Néanmoins plus les dimensions sont grandes et plus la résistance à la propagation de fissure correspondante est élevée (Tableau 2.8). Pour chaque dimension, les différences notables entre les courbes-R obtenues attestent de l'influence du tirage et donc de la mésostructure sur le chemin de la fissure et sur l'énergie nécessaire à sa propagation (Annexe D).

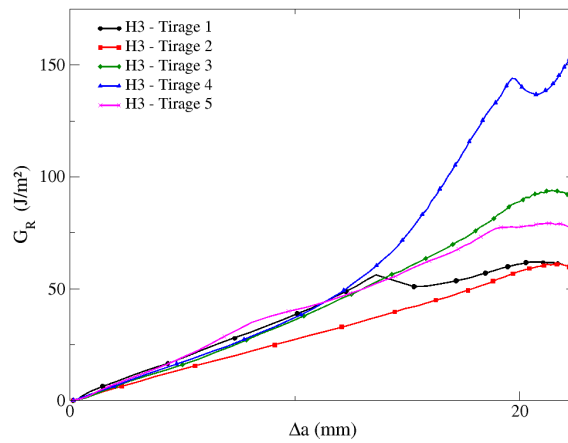
Soulignons, que théoriquement, dans le cas des structures homothétiques entaillées où un développement libre de la zone d'élaboration de la rupture a lieu, les courbes-R sont attendues pour être identiques [Morel et Dourado, 2011].



(a) Courbes-R H1



(b) Courbes-R H2



(c) Courbes-R H3

FIGURE 2.30 – Courbes de Résistance des poutres entaillées H1-H2-H3

Cas	$D$		$\Delta a_u$ (mm)	$\alpha_u$	$G_{Ru}$ (J/m <sup>2</sup> )
H1	200	Moyenne	17,63	0,59	30,76
		Ecart Type	1,19	0,01	3,26
H2	100	Moyenne	10,10	0,60	24,27
		Ecart Type	1,48	0,01	3,04
H3	50	Moyenne	6,48	0,63	22,78
		Ecart Type	0,55	0,01	4,71

TABLEAU 2.8 – Valeurs de  $\Delta a$  et de  $G_R$  au pic

## 2.5 Conclusion sur le béton numérique utilisé

Le modèle d'endommagement isotrope a été appliqué à l'échelle mésoscopique sur un VER puis sur des poutres entaillées soumises en flexion 3 points. Le modèle rend compte du phénomène d'endommagement diffus avant localisation des déformations ainsi de la formation et la propagation de la fissure principale et ce, avec peu de paramètres d'entrée. Les aspects phénoménologiques du béton sont également bien décrits (dissymétrie de comportement, effet unilatéral, effet d'échelle).

Une étude des paramètres d'entrée atteste de l'importance du seuil d'endommagement, (fonction du module d'élasticité et de la résistance à la traction) sur le choix du type de rupture (trans ou péri-granulaire)<sup>4</sup>. L'énergie de fissuration du constituant où le seuil est le plus faible est le paramètre prépondérant qui pilote le comportement adoucissant du béton. Le tirage aléatoire des granulats influence le trajet de la fissure et l'énergie de fissuration finale. Enfin, l'étude de l'influence des différentes classes de granulats sur le comportement à rupture atteste de l'importance de la représentation de la totalité des classes de granulats dans l'étude détaillée de la zone d'élaboration.

Le modèle peut être appliqué sur des structures à grandes dimensions et intégré *via* une boîte mésoscopique. L'effet d'échelle est bel et bien représenté et cela par la loi classique de Bažant. L'application de la MLEReq permet l'estimation de courbes de résistance. La présence d'un régime plateau pour les poutres de grandes dimensions (tirage 3 de H1 uniquement) montre la capacité du modèle à rendre compte d'une longueur interne (longueur de la zone d'élaboration de la fissure), longueur faisant partie des paramètres d'entrée dans d'autres types de modèles (modèle d'endommagement non-local). La mise en évidence de cette longueur atteste donc que le modèle mésoscopique est capable de décrire la phase de développement de la zone d'élaboration et de la phase de propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration.

Dans la suite de cette étude, une campagne expérimentale à partir d'essai Wedge Splitting (WST) est mise en place permettant dans un premier temps, une caractérisation expérimentale de la zone d'élaboration par l'estimation de courbes de résistances. Dans un second temps, le modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique est appliqué sur ces essais dans le but (i) de valider le modèle numérique par l'expérimental et (ii) d'utiliser les résultats de ce dernier pour comprendre le processus de développement de la zone d'élaboration et la propagation auto-similaire de la fissure principale.

---

4. Notons qu'un « bruitage » sur le module d'élasticité suivant une gaussienne ou de manière aléatoire via des bandes tournantes permettrait une rupture mixte (trans et péri-granulaire) afin de se rapprocher de la réalité.

# Chapitre 3

## Campagne d'essai et estimation des propriétés de rupture

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Campagne d'essai Wedge Splitting (WST)</b> . . . . .	<b>82</b>
3.1.1	Principe et géométrie du Wedge Splitting Test (WST) . . . . .	82
3.1.2	Détail du béton étudié : formulation et réalisation . . . . .	83
3.1.3	Montage de l'essai et pilotage . . . . .	85
3.1.4	Réponses macroscopiques des essais . . . . .	87
<b>3.2</b>	<b>Courbes-R expérimentales (MLEReq)</b> . . . . .	<b>89</b>
3.2.1	Courbes-R et estimation des propriétés de rupture . . . . .	90
3.2.2	Confinement de la zone d'élaboration . . . . .	93
<b>3.3</b>	<b>Application du béton numérique aux essais expérimentaux</b> . . . . .	<b>95</b>
3.3.1	Modélisation de l'essai WST à l'échelle mésoscopique . . . . .	95
3.3.2	Étude locale : champs d'endommagement et d'énergie restituée . . . . .	99
<b>3.4</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>103</b>

---

Le chapitre précédent a montré la dépendance de la zone d'élaboration par rapport à la taille du spécimen étudié. En effet, les poutres entaillées en flexion 3 points sont sujettes à un confinement de la zone d'élaboration où, afin d'obtenir un développement libre de la zone d'élaboration, il faudrait des poutres de grandes hauteurs ,i.e., un ligament plus important. Néanmoins, le fait d'augmenter la hauteur impacte le poids de l'éprouvette et donc la mise en œuvre de l'essai (capacité de la machine, moyens de levage...) et également la nécessité de prendre en compte le poids propre dans le calcul des courbes-R [Dourado, 2008]. Ainsi, la solution proposée est de réaliser des essais Wedge Splitting permettant d'obtenir une longueur de ligament conséquente et ce, pour un poids d'éprouvette acceptable.

### 3.1 Campagne d'essai Wedge Splitting (WST)

Une campagne d'essai de rupture en mode d'ouverture de fissure (mode I) est réalisée à partir de l'essai WS (essai de fendage par enfoncement d'un coin ou en anglais Wedge Splitting Test). Deux hauteurs différentes des éprouvettes sont considérées. Le premier objectif de ces essais est de déterminer les propriétés de rupture du béton via le tracé de courbes-R. Dans un second temps, nous présenterons des simulations numériques des essais à partir du modèle mésoscopique présenté au chapitre précédent (Section 2.1).

#### 3.1.1 Principe et géométrie du Wedge Splitting Test (WST)

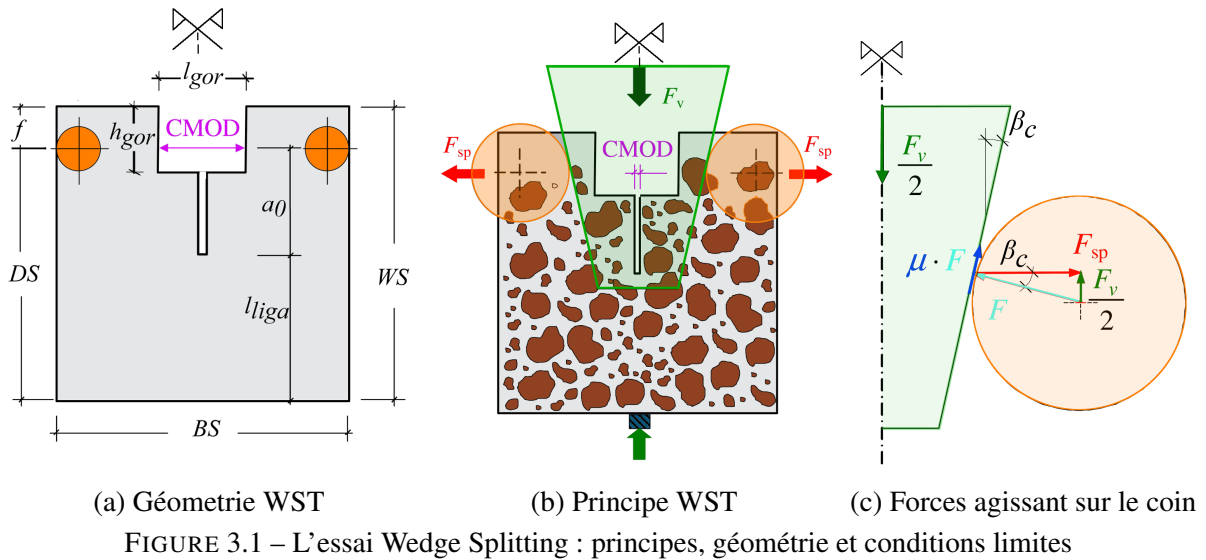
L'essai WST entre dans la catégorie des essais de traction indirecte, au même titre que la flexion 3 points (TPBT) et la compact tension (CT). Ces essais (TPBT, WST et CT) sont utilisés pour la détermination des propriétés de rupture des matériaux (énergie de rupture, ténacité, résistance à la traction...). Du point de vue de la mécanique de la rupture, l'essai WST est un essai en ouverture de fissure, qui génère donc à priori des sollicitations de Mode I pur. Il s'agit d'une variante de l'essai Compact Tension. La géométrie de l'éprouvette a initialement été introduite par Linsbauer et Tschegg en 1986 [Linsbauer et Tschegg, 1986] afin de réaliser des essais de rupture stables. Par la suite, le protocole expérimental a été amélioré par Brühwiler et Wittmann en 1990 [Brühwiler et Wittmann, 1990] (Figure 3.1a). Un système de roulement apposé sur une éprouvette entaillée permet l'enfoncement d'un coin d'un demi-angle  $\beta_c$ . Le déplacement vertical du coin induit alors une force verticale  $F_v$ , qui, au contact des roulements, engendre une force latérale d'ouverture, aussi appelée « Splitting Force »  $F_{sp}$  (Figures 3.1b et 3.1c). Cette force latérale est à l'origine de l'ouverture de fissure  $CMOD$  (Crack Mouth Opening Displacement) et peut s'écrire :

$$F_{sp} = \frac{1 - \mu \cdot \tan \beta_c}{2(\mu + \tan \beta_c)} F_v \quad (3.1)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement coin-roulement, qui d'après Bažant, peut prendre la valeur limite de 0,01 [Bažant, 1992]. Le frottement sera cependant ici négligé<sup>1</sup> :  $\mu = 0$ .

Afin de répartir de façon équivalente le chargement vertical sur les roulements, il est impératif que les demi-angles  $\beta_c$  soient identiques. Cependant, une valeur trop faible de  $\beta_c$  favoriserait le frottement et compliquerait la mise en place de l'éprouvette. A contrario, un angle trop grand ( $\beta_c > 30^\circ$ ) entraînerait d'importantes contraintes normales parallèles au plan de fissuration et donc au sein de la zone d'élaboration de la rupture. Ainsi, la réponse force-déplacement serait alors affectée, et il deviendrait alors difficile d'estimer l'énergie de rupture  $G_F$  à partir de l'aire

1. Notons que si  $\beta_c = 15^\circ$  et en assumant un coefficient de frottement  $\mu = 0,005$ , la force latérale est diminuée d'au moins 3,5% par rapport au cas sans frottement.



sous la courbe force-déplacement. Dans ces travaux, la valeur du demi-angle  $\beta_c$  est prise égale à  $15^\circ$ , qui est souvent utilisée dans la littérature [Tschegg et al., 1995, Xiao et al., 2004, Kumar et Barai, 2009, Seitl et al., 2014].

En ne considérant aucun frottement et un demi-angle de  $15^\circ$  la relation 3.1 se simplifie :

$$F_{sp} = \frac{F_v}{2 \tan \beta_c (=15^\circ)} = 1,866 F_v \quad (3.2)$$

Le respect de la symétrie du coin et les effets possibles du frottement peuvent compliquer le traitement et l'analyse de l'essai, néanmoins les avantages de l'essai WS sont nombreux :

- Les éprouvettes sont compactes et légères, ce qui facilite leur mise en place (moyens de levage inutiles). Le ratio surface de rupture/volume de l'éprouvette est en effet plus grand que pour les autres essais de ce type (5,2 fois plus grand que l'essai flexion 3 points).
- Les éprouvettes sont cubiques ou cylindriques et peuvent ainsi être directement extraites d'une structure existante.
- L'effet du poids propre est négligeable, contrairement aux poutres entaillées, où le moment de flexion dû au poids propre peut représenter plus de 50% du moment de flexion total.
- L'essai peut être réalisé sur des machines à faible raideur puisque l'utilisation du coin, qui génère la force d'ouverture, permet une augmentation de la raideur du montage.

Dans ces travaux, nous réaliserons deux types d'éprouvettes qui se différencient par leur hauteur caractéristique  $DS$  (Tableau 3.1). L'épaisseur  $b$  reste quant à elle de 100 mm.

Nom	WS	DS	BS	$a_0$	$l_{liga}$	$h_{gor}$	$l_{gor}$
WST 250	250	235	250	105	130	30	60
WST 300	300	285	250	105	180	30	60

TABLEAU 3.1 – Dimensions des éprouvettes WST (selon la Figure 3.1a) (en millimètres)

### 3.1.2 Détail du béton étudié : formulation et réalisation

Le béton étudié est basé sur la formulation d'un mélange commercial obtenu chez le fabricant Unibéton. Ce béton est couramment utilisé dans la construction de chaussée, et sa formulation est détaillée dans le Tableau 3.2. Des rapports  $E/C=0,63$  et  $G/S=1,54$  sont considérés. La

granulométrie, dont la fraction volumique globale est de 70%, a déjà été présentée au chapitre précédent (Section 2.2.1).

Produit	Détail	Désignation <sup>2</sup>	Masse (kg)
Sable semi-concassé	Alluvions siliceuses	Cemex 0/4	740
Granulats concassés criblés	Calcaire	Durruty 4/10	1140
Ciment	-	Calcia CEM II/A 42,5	286
Adjuvant	Plastifiant réducteur d'eau	Sika Cimplast 115	1
Eau	-	-	179
Total			2346

TABLEAU 3.2 – Formulation du béton utilisé pour la fabrication des éprouvettes WST

Soulignons que ce béton a déjà été le sujet de diverses recherches dans lesquelles les propriétés mécaniques ont été caractérisées [Rojas Solano, 2012, Grégoire et al., 2013] (Tableau 3.3). De plus, les granulats utilisés dans cette étude proviennent des mêmes carrières que ceux utilisés dans les études précédemment citées.

Module de Young (GPa)	$E$	$37^{\pm 0,9}$
Coefficient de Poisson	$\nu$	$0,21^{\pm 0,02}$
Contrainte de compression (MPa)	$f_c$	$42,3^{\pm 2,8}$
Résistance à la traction par fendage (MPa)	$f_{tf}$	$3,9^{\pm 0,2}$

TABLEAU 3.3 – Propriétés mécaniques du béton étudié [Grégoire et al., 2013]

Quatre éprouvettes sont réalisées par jour (2 de chaque dimension). Les moules sont réalisés sur-mesure et permettent la création de l'entaille en pré-coulage, par l'intermédiaire d'un clinquant de 0,4 mm d'épaisseur (Figure 3.2a). Les éprouvettes sont coulées gorge en bas afin d'obtenir une meilleure planéité des surfaces qui accueilleront par la suite le système de roulement.

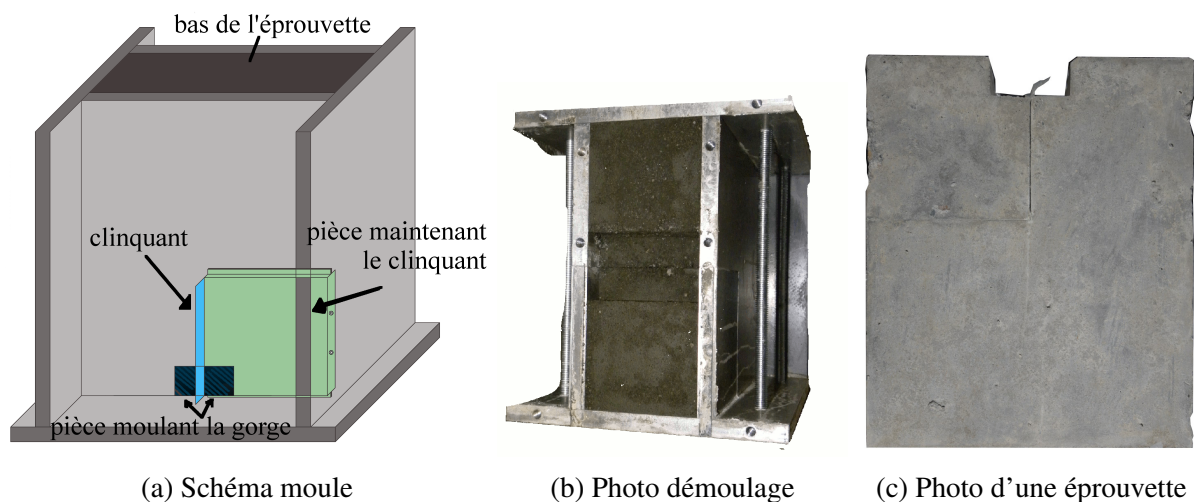


FIGURE 3.2 – Schéma et photos du moule et d'une éprouvette

Le démoulage a lieu 24h après le coulage. Le clinquant est alors retiré et une feuille de Teflon est insérée dans l'entaille afin d'empêcher sa refermeture lors du séchage. Les éprouvettes

2. L'auteur tient à remercier Cemex, Durruty, Calcia Ciment et Sika pour avoir gracieusement fourni les différents produits pour l'élaboration du béton

sont ensuite conditionnées dans une eau à  $20^{\pm 2}$  afin de limiter les phénomènes de retrait et de contrôler l'humidité. Nous pouvons souligner que les moules et la procédure mis au point pour cette étude permettent la création d'éprouvettes avec des entailles extrêmement fines, cas idyllique pour une application de la mécanique de la rupture (l'entaille réalisée étant proche d'une fissure).

Au total, 8 éprouvettes WST 250 et 12 éprouvettes WST 300 sont testées à un âge de plus de 190 jours. Enfin, les éprouvettes sont retirées de l'eau 48h avant la réalisation de l'essai WS.

### 3.1.3 Montage de l'essai et pilotage

Les essais sont réalisés sur une machine électro-mécanique MTS de capacité 100 kN. L'éprouvette est placée sur une articulation centrée au niveau de la face inférieure (Figure 3.1b). Au niveau de l'application de la force, le coin présente une liaison articulée avec la traverse (axe d'articulation dans le plan de l'éprouvette). Cette liaison évite des moments parasites dus par exemple à un mauvais positionnement du spécimen. Une fois l'éprouvette mise en place, nous effectuons une pré-charge verticale d'au moins 50 N pour la maintenir en équilibre. Cette pré-charge sera prise en compte dans l'analyse et le traitement des réponses force-déplacement. La mise en place finale de l'éprouvette est assurée par 3 cycles charges-décharges (jusqu'à  $F_v = 200$  N) avant le début de l'essai.

Deux capteurs LVDT de 2 mm de course sont positionnés de part et d'autre de l'éprouvette, au niveau de l'entaille dans l'axe du roulement (donc de la force transversale). La moyenne des déplacements enregistrés par les capteurs est considérée égale à l'ouverture de fissure  $CMOD$  (Figure 3.3).

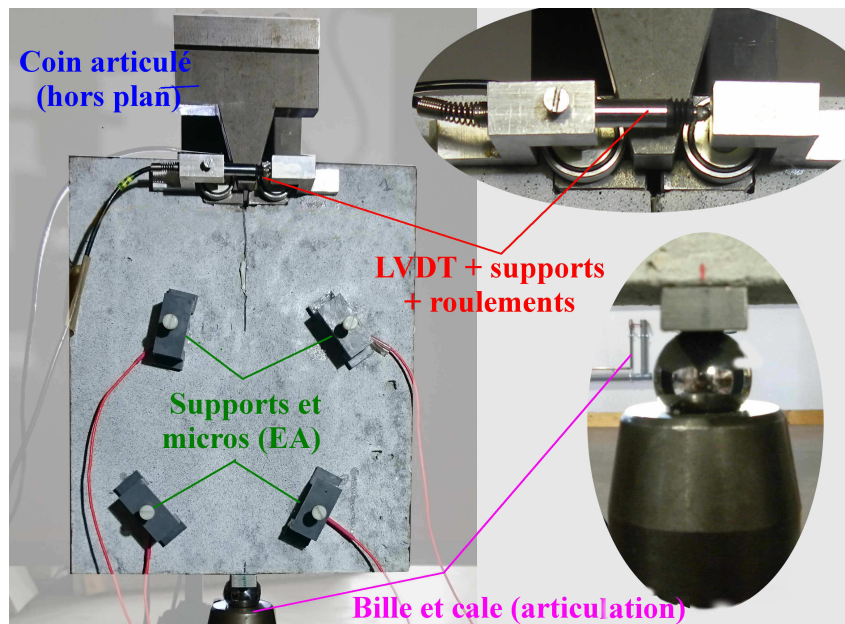
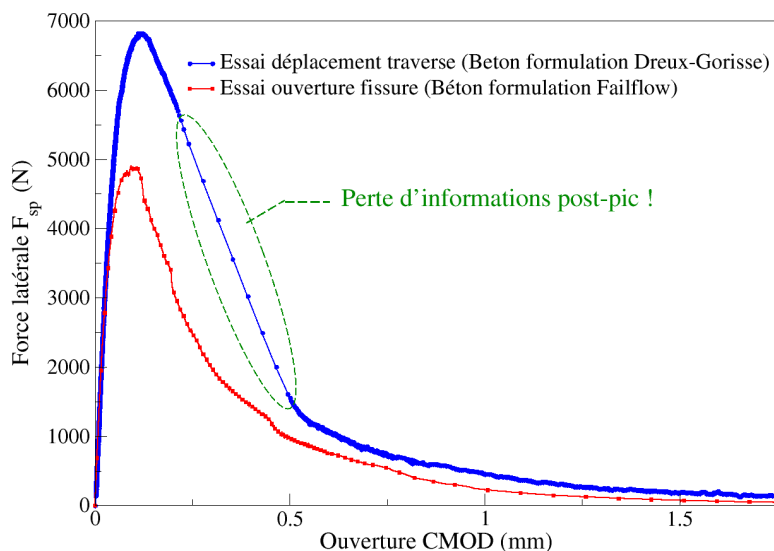


FIGURE 3.3 – Photos de l'essai WST : conditions limites et métrologie

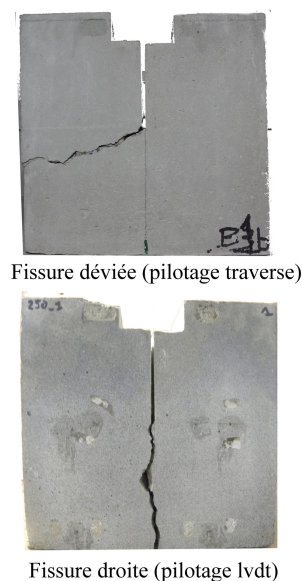
Lors d'essais préliminaires réalisés à partir d'une formulation différente [Gangnant et Morel, 2013], un pilotage de l'essai en déplacement traverse avait été utilisé. Il a alors été constaté une rupture rapide et non-contrôlée qui implique une perte d'information non-négligeable dans la première partie du post-pic (Figure 3.4a). De plus, cette rupture non-contrôlée augmente la probabilité d'obtenir une fissure déviée (pour 50 % des éprouvettes, Figure 3.4b). A partir de



ce constat, les essais sont pilotés à partir de l'ouverture d'entaille (asservissement de l'essai par rapport à la moyenne des déplacements mesurés par les LVDT et des valeurs de PID adaptées).



(a) Comparaison des réponses en fonction du pilotage



(b) Comparaison des fissures en fonction du pilotage

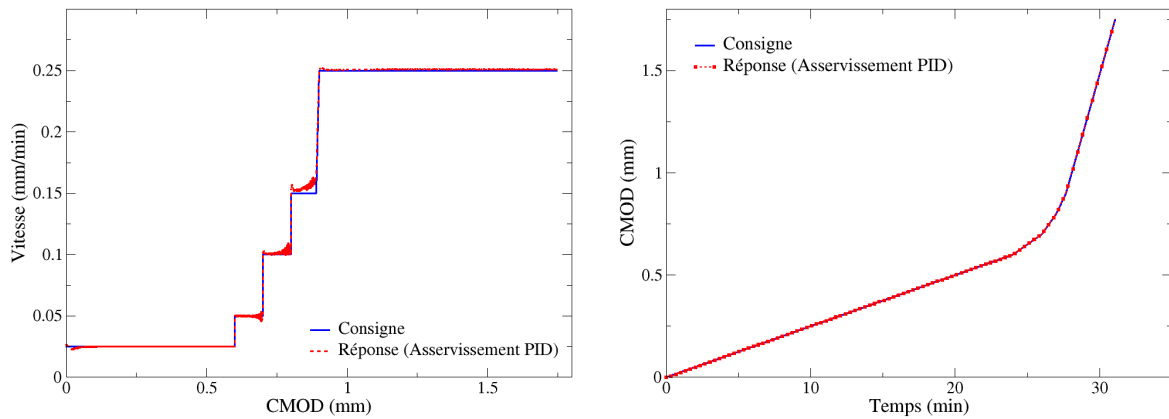
FIGURE 3.4 – Impact du pilotage sur la réponse et la fissuration

De plus, dans le but d'obtenir une fissuration aussi stable que possible, la vitesse d'ouverture d'entaille augmente au cours de l'essai [Löfgren et al., 2005]. Ces vitesses sont consignées dans le tableau suivant :

Vitesse LVDT (mm/min)	Condition de changement de vitesse
0,025	$CMOD > 0,6$ mm
0,050	$CMOD > 0,7$ mm
0,100	$CMOD > 0,8$ mm
0,150	$CMOD > 0,9$ mm
0,250	$CMOD = 1,8$ mm

TABLEAU 3.4 – Vitesse d'ouverture d'entaille retenue pour les essais WST

La Figure 3.5 montre le respect de la consigne des vitesses (Tableau 3.4).



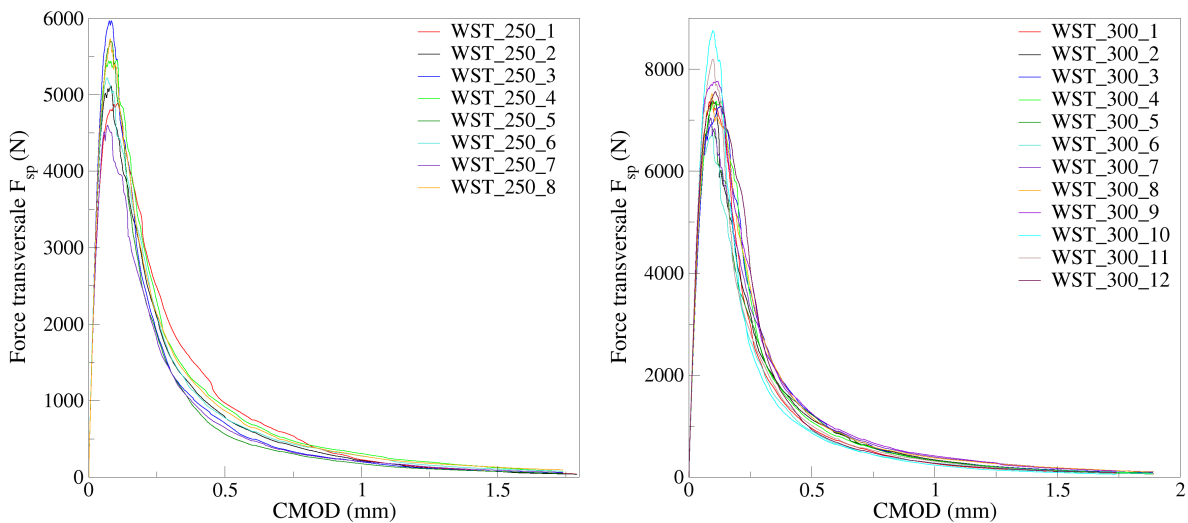
(a) Vitesse en fonction de CMOD

(b) CMOD en fonction temps

FIGURE 3.5 – Comparaison de la consigne et de la réponse par asservissement PID

### 3.1.4 Réponses macroscopiques des essais

Les courbes force transversale-CMOD obtenues lors des essais WS sont tracées sur la Figure 3.6. Pour chaque éprouvette, la raideur initiale est estimée par régression linéaire de la partie élastique de la réponse force-CMOD et est reportée dans les Tableaux 3.5 et 3.6 accompagnée de la force marquant la fin de domaine élastique<sup>3</sup>  $F_e$ , la force au pic  $F_{max}$  et le  $CMOD$  correspondant.



(a) WST 250

(b) WST 300

FIGURE 3.6 – Courbes forces transversales - CMOD expérimentales

D'après les Tableaux résultats 3.5 et 3.6, les éprouvettes WST 250 ont une raideur 13% inférieure aux éprouvettes WST 300. La force au pic  $F_{max}$  est elle aussi influencée par la hauteur des éprouvettes : les spécimens de 250 mm de hauteur montrent une force au pic 30% plus faible que ceux de 300 mm. Les forces de fin de domaine élastique  $F_e$  sont quant à elles peu influencées par la hauteur du spécimen : en moyenne l'endommagement s'initie entre 15 % et 20 % de la force au pic. A noter que les éprouvettes WST 300 n° 9 à n° 12 ont été testées à plus

3. La force  $F_e$  est déterminée comme étant la dernière valeur de la force qui satisfait un coefficient de corrélation proche de 1 à la suite d'une régression linéaire. Au-delà, cela signifie que l'endommagement s'initie et qu'il y a une diminution de la raideur sécante.

de 600 jours. Les résultats confirment donc qu'après 200 jours les propriétés optimales ont bel et bien été atteintes.

# Epreuve	Age (j)	Densité	Raideur (N/mm)	$F_e$ (N)	$F_{max}$ (N)	$CMOD(F_{max})$ (mm)
1	195	2,41	132023	736	4885	0,107
2	195	2,46	136365	1491	5112	0,082
3	195	2,31	137823	1325	5966	0,083
4	195	2,40	133833	1273	5448	0,103
5	195	2,42	135265	1222	5696	0,079
6	195	2,45	142163	947	5219	0,069
7	184	2,42	133978	817	4600	0,069
8	184	2,44	131355	1162	5731	0,079
Moyenne		2,41	135351	1122	5332	0,084
Ecart-Type		0,04	3255	246	434	0,013
COV		1,8%	2,4%	21,9%	8,1%	15,7%

TABLEAU 3.5 – Réponses éprouvettes WST 250

# Epreuve	Age (j)	Densité	Raideur (N/mm)	$F_e$ (N)	$F_{max}$ (N)	$CMOD(F_{max})$ (mm)
1	195	2,41	158997	897	7365	0,084
2	195	2,46	153161	853	7387	0,098
3	195	2,31	152382	728	7268	0,128
4	195	2,40	151108	916	7372	0,112
5	195	2,42	149635	1909	7027	0,088
6	195	2,45	152009	1863	6724	0,095
7	184	2,42	162810	933	7046	0,089
8	184	2,44	158471	795	7521	0,095
9	628	2,37	159848	2242	7761	0,118
10	635	2,38	156691	2012	8754	0,098
11	634	2,43	165155	874	8197	0,097
12	634	2,36	155518	998	7557	0,108
Moyenne		2,41	156315	1252	7498	0,10
Ecart-Type		0,03	4665	544	521	0,01
COV		1,1%	3,0%	43,5%	7,0%	12,4%

TABLEAU 3.6 – Réponses éprouvettes WST 300

### 3.2 Courbes-R expérimentales (MLEReq)

Les courbes-R expérimentales sont tracées grâce à la démarche proposée dans le chapitre précédent (Section 2.4.3). Des modèles numériques élastiques sont réalisés en deux dimensions (contraintes planes) afin d'obtenir les fonctions de complaisances  $\lambda_{num}(a)$  des éprouvettes qui serviront à l'estimation des longueurs de fissures élastiques équivalentes. Un module d'élasticité  $E_{num}= 32$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu=0,2$  sont considérés pour ces modèles élastiques.

Afin de se rapprocher au mieux de la réalité des conditions aux limites, la cale et le système contenant les roulements sont modélisés (Figure 3.7). Une étude sur le choix du chargement et des conditions aux limites a été réalisée et est développée en Annexe E.1. La cale et les pièces contenant les roulements sont caractérisées avec les propriétés usuelles de l'acier et des conditions de glissement et de non-pénétration acier/béton sont stipulées. L'ouverture  $CMOD$  est calculée en moyennant les déplacements des nœuds appartenant à une ligne de 5 cm de longueur, s'apparentant en réalité aux supports LVDT. La fonction de complaisance  $\lambda_{num}(a)$  est obtenue en divisant l'ouverture  $CMOD$  par la composante horizontale de la force unitaire de  $1N$  orientée selon l'angle  $\beta_c=15^\circ$  et centrée dans l'axe des roulements et ce, pour toute longueur de fissure  $a$ .

$$\lambda_{num}(a) = \frac{CMOD(a)}{1 \cdot \cos(\beta_c)} \quad (3.3)$$

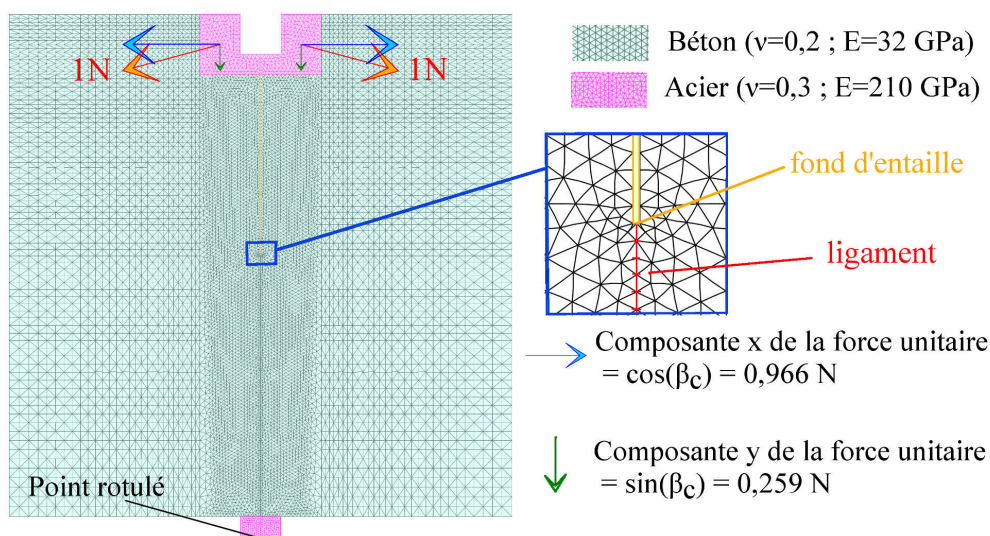


FIGURE 3.7 – Modélisation EF (modèle élastique) d'une éprouvette WST : conditions limites et chargement

Les taux restitutions numériques  $G_{num}(a)$  sont quant à eux obtenus de la même manière que pour les poutres entaillées étudiées au chapitre précédent. Notons qu'une étude comparative de différentes techniques d'obtention du taux de restitution d'énergie a été réalisée et est reportée en Annexe E.2 (à partir de la complaisance, intégrale de contour, Crack Closure Technique). Après déboutonnage par incrémentation de 0,1 mm, les évolutions de la complaisance, de la raideur et du taux de restitution d'énergie sont obtenues en fonction de longueur relative de fissure, pour les deux hauteurs d'éprouvettes (Figure 3.8).

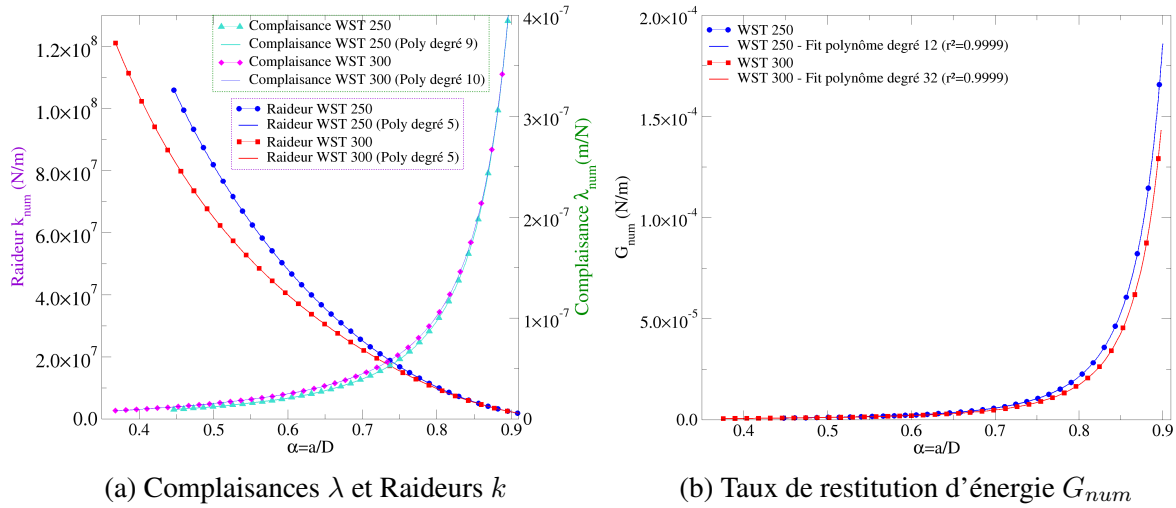


FIGURE 3.8 – Évolution des données numériques en fonction de la taille

### 3.2.1 Courbes-R et estimation des propriétés de rupture

Les courbes-R obtenues (Figures 3.9 et 3.10) présentent très peu, voire pas du tout de régime plateau. Ainsi, à priori la zone d'élaboration de la fissure semble être sujette à un confinement précoce. Ce confinement peut être dû à plusieurs facteurs pouvant être combinés : la formulation étudiée, la géométrie et les dimensions des éprouvettes. A fortiori, une augmentation de la hauteur caractéristique  $DS$  laisserait la FPZ se développer librement mais favoriserait également la déviation de la fissure. On pourrait alors soit augmenter la largeur  $BS$  (augmentation du poids de l'éprouvette), soit modifier la longueur initiale de l'entaille. Cependant, malgré cette absence manifeste de régime plateau, les courbes-R sont tout de même analysées et ajustées par une loi puissance. Pour cela, l'instant « critique » est déterminé lorsque la courbe semble changer de régime (point d'inflexion ou semblant de régime plateau). Les résultats de cette analyse sont reportés dans les Tableaux 3.7 et 3.8.

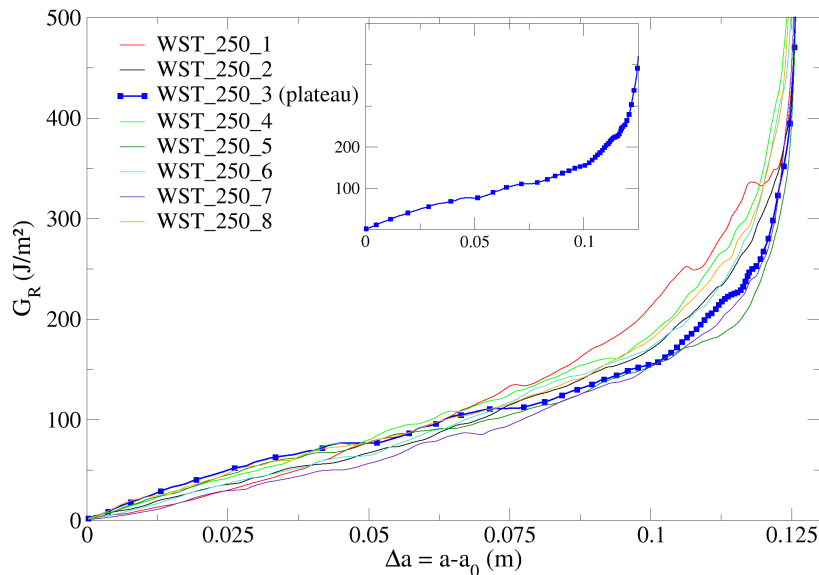


FIGURE 3.9 – Courbes de résistance expérimentales - WST 250

Rappelons que le coefficient de correction  $cor$  permet de faire le lien entre le modèle numérique (élastique pur) et l'expérimental. Ce coefficient peut être admis comme  $cor = E_{num}/E_{reel}$ , ce qui permet de déduire le module d'élasticité du béton étudié  $E_{reel} = 41.55^{\pm 1.25}$  GPa.  $F_C$  est

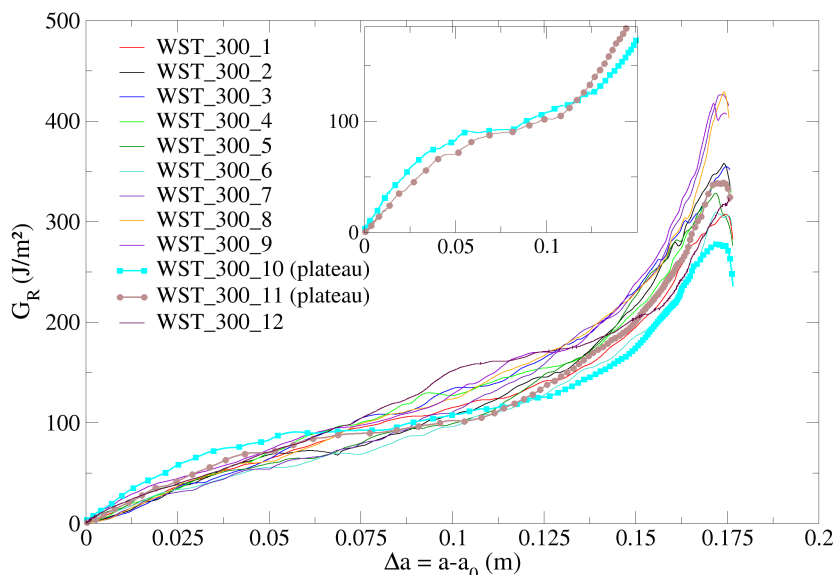


FIGURE 3.10 – Courbes de résistance expérimentales - WST 300

la force critique, généralement en post-pic, au moment où l'instant critique est décelé. L'énergie  $G_{Ru}$  (exprimée en  $J/m^2$ ) correspond à la résistance à la propagation de la fissure élastique équivalente au pic de charge  $F_{max}$ . La longueur relative de fissure au pic est notée  $\alpha_u = a_u/DS$ . En moyenne, la résistance au pic des éprouvettes WST 250 est légèrement plus faible que celle des éprouvettes WST 300. Cependant le fort coefficient de variation sur ces valeurs ne permet pas de conclure réellement sur la dépendance de la hauteur vis-à-vis de la résistance à la propagation de la fissure élastique équivalente au pic. La longueur de fissure relative est légèrement plus longue pour les éprouvettes WST 250 mais encore une fois, la dispersion des résultats ne permet pas de conclure à la dépendance à la hauteur du spécimen.

#Eprouvette	cor	$G_{Ru}$ ( $J/m^2$ )	$\alpha_u$	$G_{RC}^*$ ( $J/m^2$ )	$\alpha_C^*$	$F_C^*$ (N)	$\beta$	$G_{F_{trans}}$ ( $J/m^2$ )	$G_{F_{axi}}$ ( $J/m^2$ )
1	0,80	71	0,64	82	0,67	4700	1,38	128	168
2	0,78	52	0,60	55	0,62	4938	0,95	114	146
3	0,77	59	0,57	77	0,64	5372	0,78	114	155
4	0,79	73	0,62	74	0,63	5438	0,99	130	161
5	0,78	53	0,58	67	0,62	5340	0,87	106	131
6	0,75	42	0,57	63	0,64	4817	0,95	119	141
7	0,79	38	0,58	50	0,63	4436	1,06	101	117
8	0,81	53	0,56	73	0,63	5183	0,81	126	145
Moyenne	0,78	55	0,59	68	0,63	5028	0,97	117	146
Ecart-Type	0,02	12	0,03	10	0,02	339	0,18	10	15
COV	2,4%	21,0%	4,5%	15,1%	2,4%	6,7%	18,2%	8,4%	10,5%

Remarque : \* signifie pseudo-critique, i.e., estimées au point d'inflexion de la courbe-R

TABLEAU 3.7 – Analyse des courbes-R des éprouvettes WST 250

A l'instant critique (i.e., au point d'inflexion de la courbe-R ou au début de la résistance plateau), les paramètres de rupture rassemblant la résistance à la propagation de la fissure critique  $G_{RC}$ , la longueur relative de fissure critique  $\alpha_C$ , la force critique  $F_C$  et l'exposant déterminant la convexité de la courbe-R  $\beta$  sont définis par un ajustement de la courbe-R. Rappelons que ces valeurs sont données à titre indicatif du fait de l'absence notoire de régime plateau.

#Eprouvette	$cor$	$G_{Ru}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\alpha_u$	$G_{RC}^*$ (J/m <sup>2</sup> )	$\alpha_C^*$	$F_C^*$ (N)	$\beta$	$G_{F_{trans}}$ (J/m <sup>2</sup> )	$G_{F_{axi}}$ (J/m <sup>2</sup> )
1	0,76	51	0,49	60	0,53	7316	0,83	117	142
2	0,79	60	0,52	70	0,56	7122	0,95	121	181
3	0,80	82	0,57	108	0,65	6461	1,05	131	195
4	0,80	70	0,54	97	0,61	6975	0,95	127	165
5	0,81	52	0,50	64	0,56	6654	0,66	119	144
6	0,80	54	0,53	68	0,60	6101	0,76	106	149
7	0,74	53	0,52	69	0,58	6555	0,80	128	155
8	0,77	59	0,51	60	0,52	7487	1,05	134	165
9	0,76	77	0,56	95	0,60	7290	0,81	139	179
10	0,77	69	0,49	90	0,56	8106	0,63	115	168
11	0,73	65	0,51	70	0,53	8073	0,82	119	147
12	0,78	67	0,54	78	0,57	7335	0,82	129	196
Moyenne	0,77	62,1	0,52	76	0,57	7155	0,81	123	159
Ecart-Type	0,03	8,6	0,02	14	0,03	673	0,13	10	11
COV	3,4%	13,9%	4,0%	18,6%	5,7%	9,4%	16,0%	8,0%	7,2%

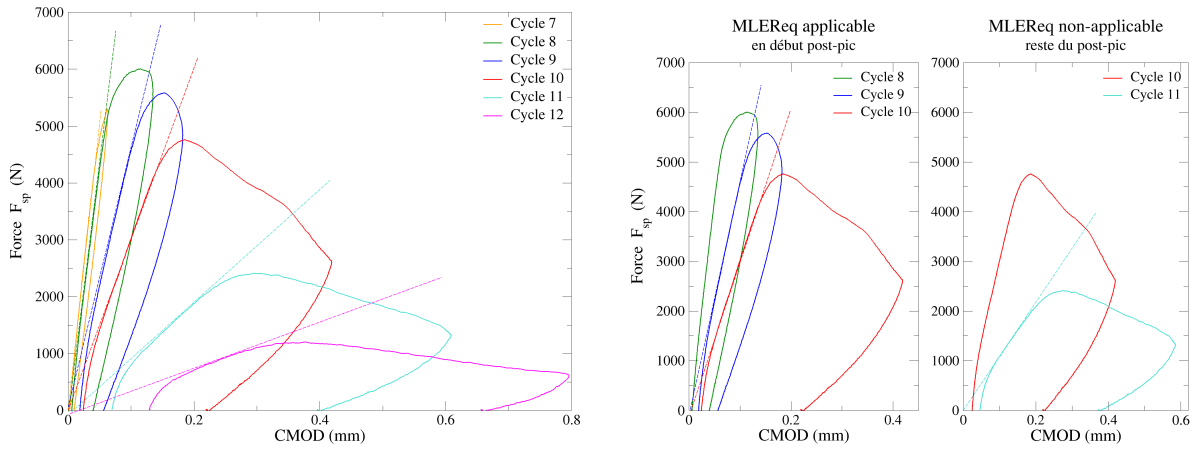
Remarque : \* signifie pseudo-critique, i.e., estimées au point d'inflexion de la courbe-R

TABLEAU 3.8 – Analyse des courbes-R des éprouvettes WST 300

Les énergies de rupture moyennes  $G_{F_{trans}}$  et  $G_{F_{axi}}$  (au sens de la RILEM 50-FMC [50-FMC, 1985]) sont respectivement déterminées à partir de la courbe force transversale-CMOD et la courbe force axiale-déplacement traverse et reportées dans les Tableaux 3.7 et 3.8. Les différences constatées entre les valeurs  $G_{RC}$ ,  $G_{F_{trans}}$  et  $G_{F_{axi}}$  permettent de dire que :

- L'énergie moyenne  $G_{F_{axi}}$  est surestimée par l'utilisation du déplacement traverse, lequel intègre des déplacements (montage, dynamomètre, etc) autres que ceux participant au travail de la force (travail externe).
- Le fait que l'énergie moyenne  $G_{F_{trans}}$  soit supérieure à  $G_{RC}$  confirme le confinement de la zone d'élaboration. En effet, lorsque la propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration est présente et conséquente, l'énergie de rupture moyenne  $G_F$  est attendue pour être approximativement égale à la résistance plateau  $G_{RC}$  (résistance à la propagation auto-similaire) et supérieure dans le cas contraire [Coureau et al., 2013]. D'autre part, même dans le cas des éprouvettes ayant montré un semblant de régime plateau (sur 10 à 20 mm au plus pour les éprouvettes WST 250 #3, WST 300 #10 et #11), le fait que  $G_{F_{trans}}$  est supérieure à  $G_{RC}$  pourrait indiquer que le processus de rupture s'accompagne de mécanismes dissipatifs autres que la micro-fissuration et le pontage de fissure, et notamment de mécanismes s'accompagnant de déplacements irréversibles (frottement des lèvres des micro-fissures, plasticité...) prenant place en fin de rupture (i.e., pour de grandes longueurs de fissure élastique équivalente correspondant à la queue de la réponse force-CMOD). Rappelons que dans le cas de l'existence de déplacements irréversibles accompagnant la rupture, la MLER équivalente n'est plus applicable. Des cycles de charge-propagation-décharge ont montré que si des déplacements irréversibles pouvaient apparaître lors des essais WST (Figure 3.11b), ces derniers se manifestaient uniquement en phase post-pic et pour des valeurs de force inférieures à 40 à 50% de la force au pic  $F_{max}$  (Figure 3.11a). Cette partie du post-pic correspond à des longueurs de fissure élastiques équivalentes supérieures à  $a_C$  (se situant au alentour de 95% de  $F_{max}$  en partie post-pic) et donc les mécanismes dissipatifs de type frottement ne remettent pas en cause la partie initiale de la courbe-R correspondant au développement de la zone d'élaboration, ni le début de la propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa

zone d'élaboration.



(a) Cycles charge-propagation-décharge (b) Vérification de l'applicabilité de la MLEReq  
 FIGURE 3.11 – Cycles charge-propagation-décharge et complaisances sécantes correspondantes

En résumé, la géométrie et la taille des éprouvettes WST utilisées ici semblent favoriser le confinement de la zone d'élaboration de la fissure. Ce point est abordé dans la prochaine section à partir d'une étude élastique.

### 3.2.2 Confinement de la zone d'élaboration

Löfgren a montré la présence non-négligeable d'une zone de compression en avant du front de fissure dans l'éprouvette WST [Löfgren et al., 2005]. L'existence de cette zone de compression peut en partie expliquer le confinement précoce de la FPZ au sein de l'éprouvette (Figure 3.12). De plus, le même auteur propose une approximation de la longueur de la zone comprimée (notée  $x$  cf Figure 3.12c) comme étant un dixième de la hauteur du ligament initial.

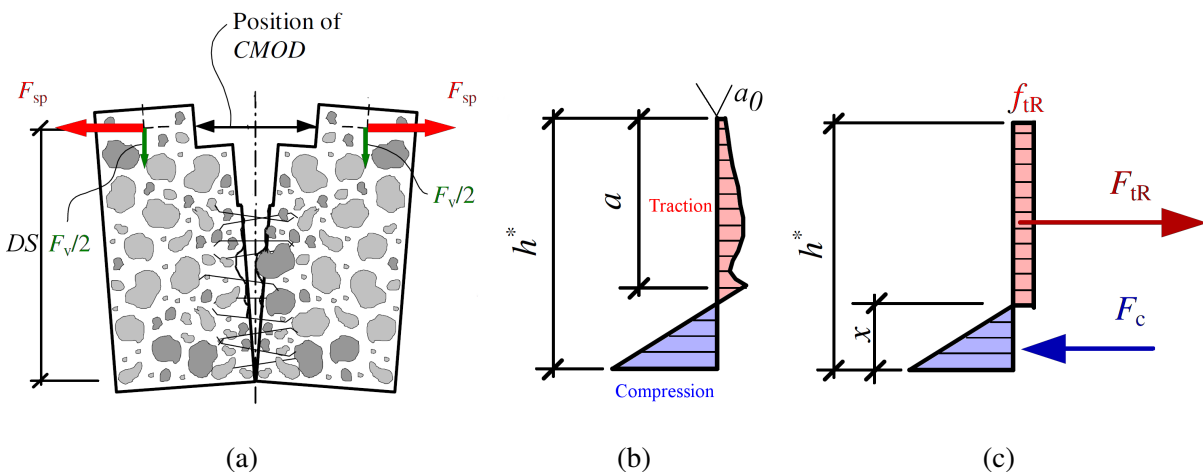


FIGURE 3.12 – (a) Vue schématique d'une éprouvette WS fissurée. (b) Distribution théorique des contraintes le long du ligament initial ( $h^*$ ) d'une éprouvette WS pour une longueur de fissure effective ( $a$ ). (c) Distribution simplifiée des contraintes basée sur l'hypothèse d'une contrainte de traction résiduelle  $f_{tR}$ .  $x$  est le longueur de la hauteur de la zone de compression. [Löfgren et al., 2005]

Nous proposons une illustration du problème de confinement de la FPZ sur la base d'une étude aux éléments finis conduite en élasticité linéaire sous un chargement unitaire, pour les



deux dimensions d'éprouvettes. Les champs de contraintes sont analysés (Figure 3.13), et plus particulièrement la distribution des contraintes perpendiculaires au plan moyen de la fissure. La position de fin du ligament tendu, i.e., le moment où des contraintes de compression apparaissent, est déterminée pour différentes longueurs de fissures élastiques équivalentes (Figure 3.14a).

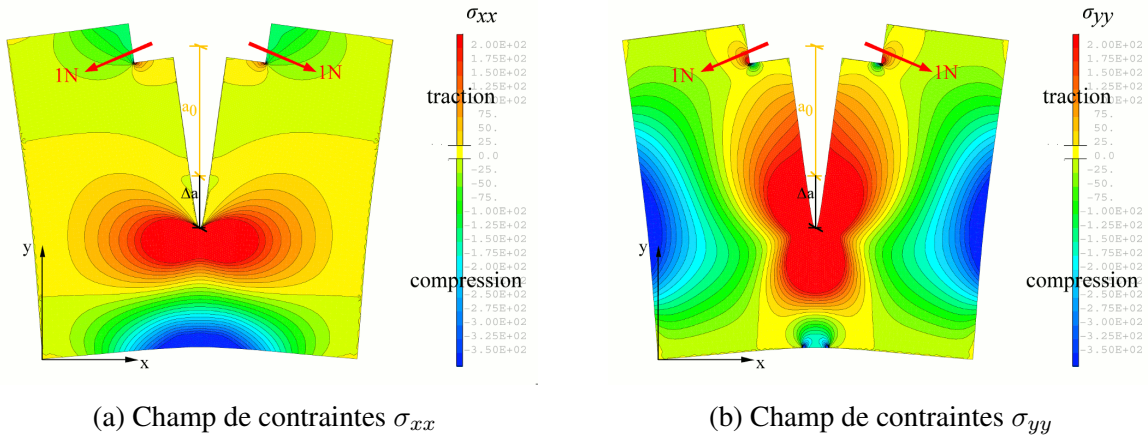
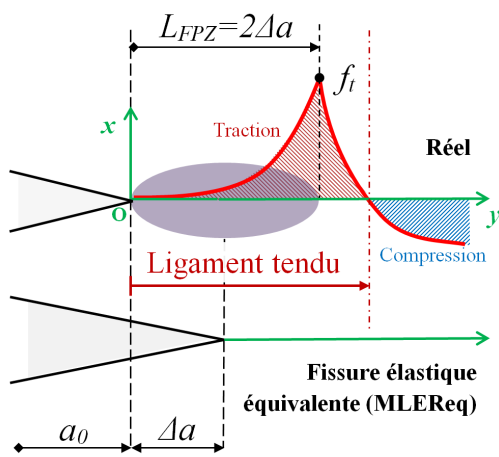
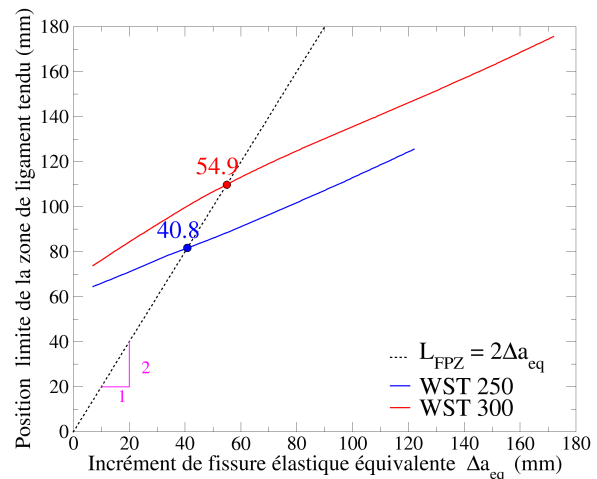


FIGURE 3.13 – Champ de contraintes pour une éprouvette WST 250 soumise à une force unitaire pour un incrément de fissure donné

En partant du postulat que la longueur de la zone d'élaboration ( $L_{FPZ}$ ) est d'environ de 2 fois l'incrément de fissure élastique  $\Delta a$  [Bažant, 2002], un critère est mis en place. Celui-ci permet de déterminer, pour une longueur de fissure donnée, si l'avant de la FPZ se trouve ou non dans une zone comprimée (Figure 3.14b).



(a) Répartition théorique de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long du ligament (étude EF élastique cf Figure 3.13)



(b) Position de la fin du ligament tendu pour les deux dimensions WS en fonction de l'incrément de longueur élastique équivalente

FIGURE 3.14 – Etude de la position limite de la zone de ligament tendu

L'étude numérique permet de montrer que la zone d'élaboration peut très vite se retrouver limitée par la zone comprimée. Ainsi, si la longueur élastique équivalente de la zone d'élaboration excède 40,8 mm pour la WST 250 et 54,9 mm pour la WST 300, alors la zone d'élaboration se trouvera confinée avant que la propagation auto-similaire de la fissure principale apparaisse. Dans ce cas, une phase croissante de la résistance se substituera au régime plateau associé à la propagation auto-similaire. En terme de longueur relative de fissure ( $\alpha = a_0 + \Delta a / D_S$ ), cela

correspond à des valeurs limites  $\alpha_{lim}^{WST250} = 62\%$  et  $\alpha_{lim}^{WST300} = 56\%$ . Ces dernières valeurs confirment les résultats obtenus avec les courbes-R expérimentales (Tableaux 3.7 et 3.8). En effet, les valeurs de  $\alpha_{lim}^{WST250}$  et  $\alpha_{lim}^{WST300}$  approchent les valeurs de fissures relatives critiques trouvées lors de l'ajustement des courbes-R associées au changement de régime de la résistance (point d'inflexion des courbe-R). Finalement, cette analyse complète les constatations de Löfgren [Löfgren et al., 2005], à savoir que la longueur  $x$  de la zone comprimée évolue en fonction de l'incrément de fissure et que cette dernière semble représenter plus d'un dixième de la hauteur du ligament.

En résumé, l'étude numérique (2D) permet d'expliquer la non-présence du régime plateau des courbes-R par un confinement précoce de la zone d'élaboration, c'est à dire avant que cette dernière est atteint sa taille critique et entraine la propagation auto-similaire de la fissure principale. Une étude plus détaillée du phénomène de confinement sur les éprouvettes WST, en considérant la possibilité que  $L_{FPZ} < 2\Delta a$ , est exposée en Annexe E.3.

### 3.3 Application du béton numérique aux essais expérimentaux

Le modèle d'endommagement appliqué l'échelle mésoscopique présenté, au Chapitre 2 (Section 2.1), est appliqué à l'essai WST. Ce couplage numérique/expérimental permet la validation du modèle et l'obtention d'informations supplémentaires sur le processus de fissuration.

#### 3.3.1 Modélisation de l'essai WST à l'échelle mésoscopique

Pour la modélisation de l'essai Wedge Splitting à l'échelle mésoscopique, les conditions aux limites retenues sont les mêmes que pour le modèle élastique (Figure 3.7). Pour simuler le coin distribuant le chargement, des éléments ultra-rigides (non-déformables) inclinés d'un angle  $\beta_C$  sont utilisés. Comme pour les poutres entaillées (Section 2.4.1), une boîte mésoscopique de dimensions  $l_{meso} \times h_{meso}$  est insérée afin de diminuer le coût de calcul (Tableau 3.9). Dans le but d'éviter tout phénomène de bord au niveau de la frontière entre les parties macroscopiques élastique et mésoscopique endommageable, les dimensions de la boîte mésoscopique sont ajustées (une illustration de ce problème est mise en Annexe E.4). La moitié de l'entaille initiale et l'intégralité du ligament sont compris dans la boîte. De plus, les valeurs des dimensions retenues pour la boîte mésoscopique sont choisies afin d'avoir une grille de mailles régulières carrées  $h_{el}=0,3$  mm. L'endommagement doit évoluer jusqu'à la condition d'appui (Figure 3.15) afin d'obtenir une modélisation de la rupture quasi-intégrale du spécimen. Lors du tirage des inclusions, des conditions de découpe des granulats sont imposées afin de répondre aux conditions de coulage et de fabrication de l'entaille. En effet, en périphérie de l'éprouvette, ou au niveau de l'entaille initiale, aucun granulat ne doit être découpé. La granulométrie est également la même que celle présentée jusqu'à maintenant.

Désignation	$l_{meso}$ (mm)	$h_{meso}$ (mm)	$h_{meso}$ entaille (mm)	$nb$ éléments $_{meso}$ (u)	$nb$ éléments $_{total}$ (u)
WST 250	135	175	45	262050	272760
WST 300	172,5	225	45	431700	443100

TABLEAU 3.9 – Dimensions de la boîte mésoscopique

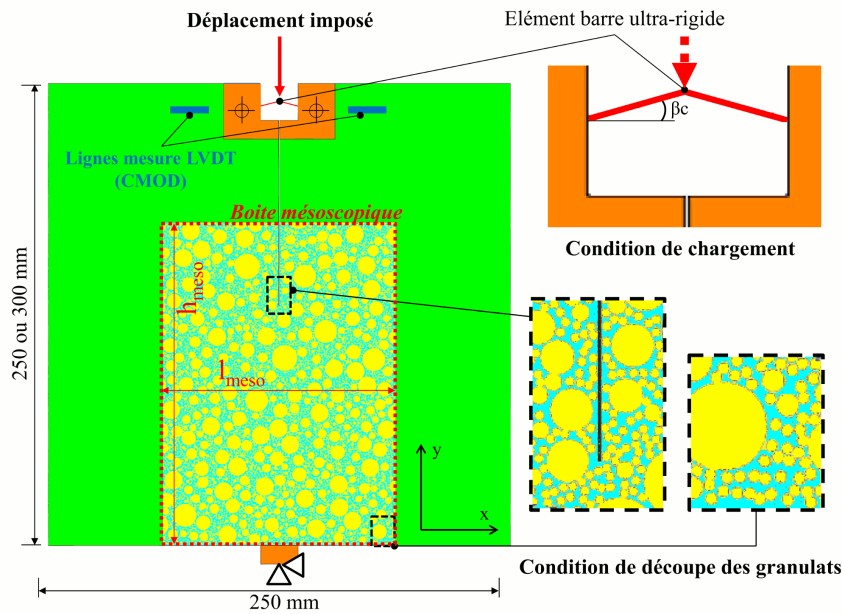


FIGURE 3.15 – Modélisation WST avec le maillage mésoscopique

Le Tableau 3.10 recense les paramètres utilisés dans le modèle mésoscopique pour la simulation des éprouvettes WST. Les paramètres utilisés pour les granulats sont les mêmes que pour l'étude sur le VER et la poutre entaillée (Chapitre 2) [Nguyen et al., 2010]. Cependant, une étude interne au laboratoire SIAME réalisée à partir de carottes de calcaire, a permis de déterminer un coefficient de Poisson de l'ordre de 0,3 et un module d'élasticité de l'ordre 70 GPa, qui devraient être utilisés pour la définition des granulats. Néanmoins, cette valeur du module d'élasticité a dû être modifiée dans le modèle à la suite de la calibration de la réponse élastique des spécimens<sup>4</sup>. Les propriétés utilisées pour la pâte de ciment sont celles déterminées dans une précédente étude menée sur un mortier normalisé (selon la norme EN 196-1) caractérisé par des essais Wedge Splitting de mêmes dimensions que les éprouvettes WST 300 [Gangnant et Morel, 2013]. L'application du modèle de zone cohésive suite à l'élaboration de la courbe de résistance a permis de déterminer les paramètres mécaniques et de rupture à prendre en compte pour le mortier. Les paramètres mécaniques et de rupture obtenus à l'issue de la précédente calibration sont reportés dans le Tableau 3.10.

Modèle :		<i>Elastique Linéaire</i>			<i>Endommagement</i>	
Paramètres		Coin (barre)	Roulement et cale (appui)	Béton homogénéisé	Granulats	Matrice Cimentaire
Elastique	$E$ (Gpa)	2,00e8	210	39	45	25
	$\nu$	0,3	0,3	0,27	0,3	0,2
Rupture	$f_t$ (Mpa)	-	-	-	6	2
	$G_f$ (J/m <sup>2</sup> )	-	-	-	60	40
	$\varepsilon_{d0}$	-	-	-	1,33e-4	8,00e-5
	$B_t$	-	-	-	30,06	15,01

TABLEAU 3.10 – Paramètres utilisés pour les simulations WST avec le modèle d'endommagement

Cinq tirages de la boite mésoscopique sont simulés via le modèle et ce, pour chaque géomé-

4. Cette diminution conséquente du module d'élasticité pourrait être attribuée à l'opération de concassage des granulats qui doit sans doute endommager ces derniers.

tries WST. Les réponses macroscopiques obtenues numériquement, avec le jeu de paramètres reportés dans le Tableau 3.10, attestent que le modèle est capable de retranscrire la réponse mécanique du béton étudié à l'échelle macroscopique (Figures 3.16 et 3.17).

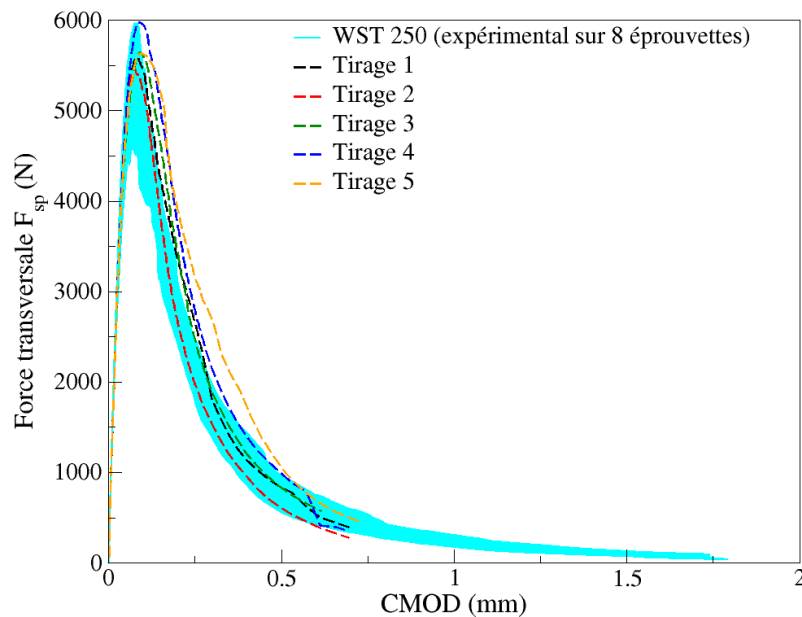


FIGURE 3.16 – Courbes force transversale-CMOD numériques - WST 250

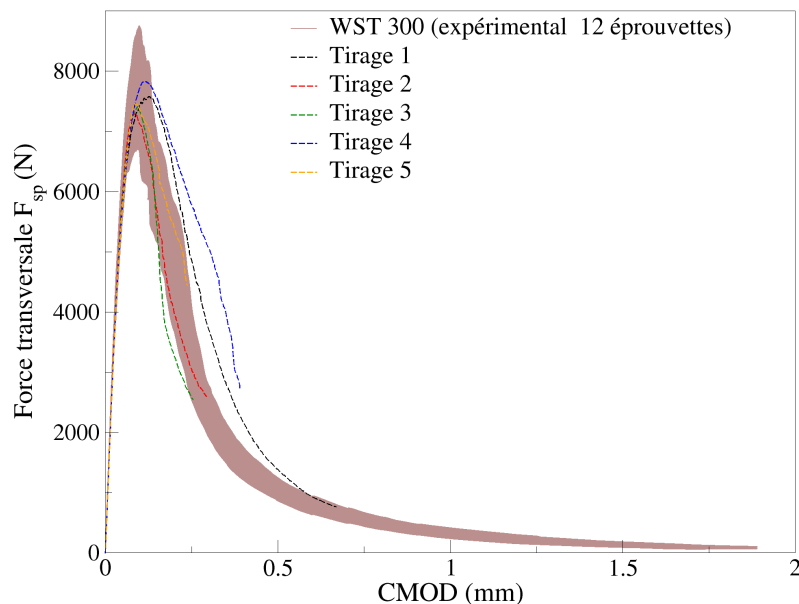


FIGURE 3.17 – Courbes force transversale-CMOD numériques - WST 300

Le comportement global étant respecté, l'utilisation du modèle mésoscopique permet l'accès à plusieurs types d'informations à l'échelle locale tels que les champs d'endommagement, les champs de déformations, les champs d'ouverture de fissures [Matallah et al., 2009]... ) qui peuvent aider à mieux comprendre le processus de fissuration réel du béton. En premier lieu, l'analyse des réponses force-CMOD et plus particulièrement la variabilité des réponses numériques montre l'influence de la disposition spatiale des granulats pour une compacité granulaire

identique.

Les courbes de résistance sont déterminées à partir des réponses force transversale-CMOD des simulations numériques (Figures 3.18 et 3.19) et comparées à l'enveloppe des courbe-R expérimentales. On constate une nouvelle fois la bonne représentativité du modèle, ce qui est logique puisque la courbe-R est l'image énergétique de la courbe force-CMOD. Sur la base de ces courbes-R, on peut constater que pour les 2 géométries, aucun des tirages réalisés ne présentent de propagation auto-similaire. Le confinement précoce de la zone d'élaboration du modèle numérique pourrait également être à l'origine de cette absence de propagation auto-similaire. Ce phénomène sera mis en évidence au chapitre 4.

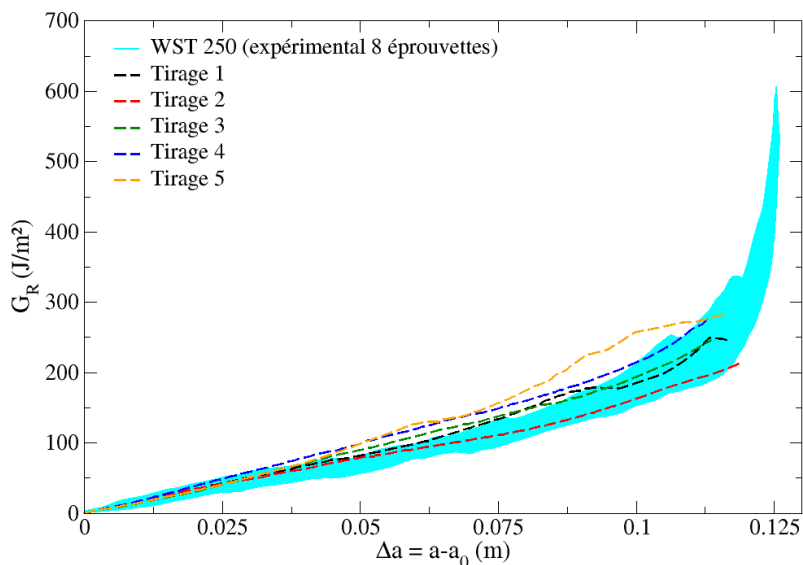


FIGURE 3.18 – Courbes de résistance numériques - WST 250

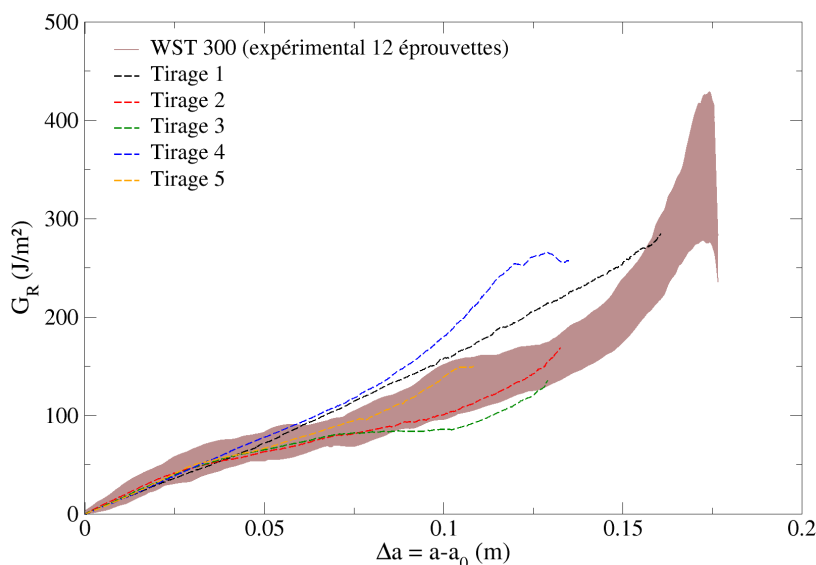


FIGURE 3.19 – Courbes de résistance numériques - WST 300

Les Tableaux 3.11 et 3.12 résument les propriétés élastiques et de rupture estimées à partir du modèle numérique sur les deux dimensions d'éprouvettes utilisées. Les paramètres de

courbe-R  $G_{RC}^*$ ,  $\alpha_C^*$ ,  $P_C^*$  et  $\beta$  sont donnés à titre indicatif dans la mesure où aucun plateau n'a été détecté (pseudo valeurs critiques, i.e., estimées au point d'inflexion de la courbe-R).

#Tirage	cor	Raideur (N/mm)	$F_{max}$ (N)	$CMOD_{F_{max}}$ (mm)	$G_{Ru}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\alpha_u$	$G_{RC}^*$ (J/m <sup>2</sup> )	$\alpha_C^*$	$P_C^*$ (N)	$\beta$	$G_{F_{trans}}$ (J/m <sup>2</sup> )
1	0,785	134993	5584	0,0794	51	57,5%	78	64,7%	5150	0,985	112
2	0,789	134277	5465	0,0751	47	56,8%	80	66,3%	4846	0,935	98
3	0,788	134603	5648	0,0902	61	58,3%	83	64,3%	5423	1,15	124,5
4	0,791	133962	5975	0,0894	63	59,6%	88	63,4%	5753	1,05	112
5	0,788	134540	5633	0,0937	64	60,3%	72	61,7%	5621	1,12	134
<b>Moyenne</b>	<b>0,788</b>	<b>134475</b>	<b>5661</b>	<b>0,0856</b>	<b>57</b>	<b>58,5%</b>	<b>80</b>	<b>64,1%</b>	<b>5359</b>	<b>1,048</b>	<b>116</b>
Ecart-Type	0,002	385	190	0,0079	7,5	1,4%	6,0	1,7%	366	0,090	14
COV	0,3%	0,3%	3,4%	9,3%	13,2%	2,4%	7,5%	2,6%	6,8%	8,6%	11,7%
<b>Exp.</b>	<b>0,784</b>	<b>135351</b>	<b>5332</b>	<b>0,084</b>	<b>55</b>	<b>59%</b>	<b>68</b>	<b>63%</b>	<b>5028</b>	<b>0,972</b>	<b>117</b>

Remarque : \* signifie pseudo-critique, i.e., estimées au point d'inflexion de la courbe-R

TABLEAU 3.11 – Résultats des simulations numériques sur les éprouvettes WST 250

#Tirage	cor	Raideur (N/mm)	$F_{max}$ (N)	$CMOD_{F_{max}}$ (mm)	$G_{Ru}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\alpha_u$	$G_{RC}^*$ (J/m <sup>2</sup> )	$\alpha_C^*$	$P_C^*$ (N)	$\beta$	$G_{F_{trans}}$ (J/m <sup>2</sup> )
1	0,798	152025	7579	0,1268	81	56,5%	92	58,6%	7520	1	112
2	0,800	151553	7299	0,0868	51	49,3%	80	61,6%	6259	0,65	98
3	0,802	151174	7412	0,0944	57	50,7%	82	62,3%	6134	0,685	50
4	0,799	151790	7833	0,1148	74	53,7%	90,0	57,2%	7739	1	118
5	0,805	150593	7470	0,0838	50	47,9%	62	52,6%	7306	0,805	75
<b>Moyenne</b>	<b>0,801</b>	<b>151427</b>	<b>7519</b>	<b>0,1013</b>	<b>63</b>	<b>51,6%</b>	<b>81</b>	<b>58,5%</b>	<b>6992</b>	<b>0,828</b>	<b>91</b>
Ecart-Type	0,003	562	203	0,0187	14	3,5%	12	3,9%	743	0,167	28
COV	0,4%	0,4%	2,7%	18,4%	23,0%	6,8%	14,7%	6,6%	10,6%	20,2%	31,1%
<b>Exp.</b>	<b>0,773</b>	<b>156315</b>	<b>7499</b>	<b>0,101</b>	<b>62</b>	<b>52%</b>	<b>76</b>	<b>57%</b>	<b>7155</b>	<b>0,811</b>	<b>123</b>

Remarque : \* signifie pseudo-critique, i.e., estimées au point d'inflexion de la courbe-R

TABLEAU 3.12 – Résultats des simulations numériques sur les éprouvettes WST 300

### 3.3.2 Étude locale : champs d'endommagement et d'énergie restituée

La précédente application permet une validation supplémentaire du modèle. La bonne correspondance des réponses numériques et expérimentales légitime l'hypothèse que les champs locaux numériques obtenus retranscrivent correctement la réalité. Prenons l'exemple d'une éprouvette WST 250 avec le tirage de granulats n°2. Des marqueurs temporels repérés par les lettres A à E sont apposés sur la courbe force-CMOD (Figure 3.20) et sur la courbe-R correspondante (Figure 3.21).

De plus, comme présenté sur la Figure 3.20, il est possible de tracer la courbe force-CMOD obtenue à partir de la courbe-R (ajustée ou non). Ainsi, par analyse inverse, la force peut s'exprimer comme suit :

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2 \cdot G_R(\alpha) \cdot b \cdot DS}{\lambda'(\alpha)}} \quad (3.4)$$

et, l'ouverture de fissure

$$CMOD(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{k(\alpha)} \quad (3.5)$$

où,  $\lambda'(\alpha)$  est la dérivé du polynôme de complaisance et  $k(\alpha)$  le polynôme de raideur. Rappelons que ces polynômes ont été obtenus à partir d'une modélisation élastique (Figure 3.8a). Ainsi, si on considèrerait une propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration à partir du point C, alors la résistance à la propagation de la fissure serait constante et égale à  $G_{RC}$  (plateau  $G_{RC}$ ), et, impliquerait une allure de la courbe force-CMOD égale à celle représentée en traits pointillés à partir du point C. Les surfaces hachurées en vert sur les Figures 3.20 et 3.21 représentent donc l'énergie supplémentaire consommée par le phénomène de confinement de la zone d'élaboration à partir du point C.

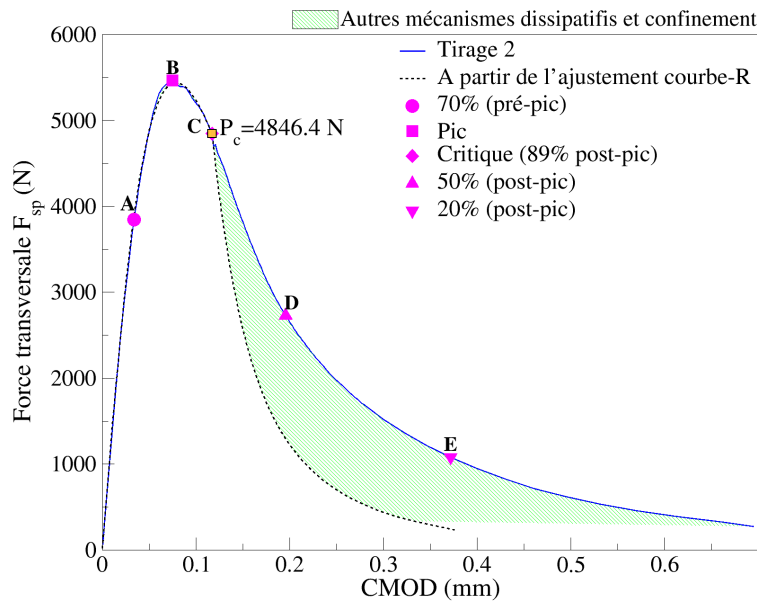


FIGURE 3.20 – Courbe force déplacement WST 250 #2

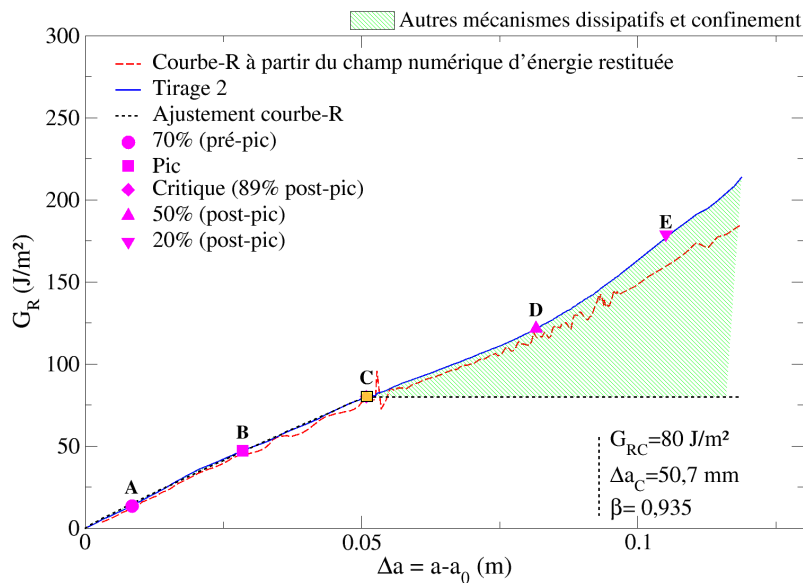


FIGURE 3.21 – Courbe de résistance WST 250 #2

A chaque marqueur temporel, les Figures 3.22 et 3.23 donnent respectivement les champs numériques d'endommagement représentés par la variable interne  $D$ , et l'énergie restituée. L'énergie restituée est l'énergie libérée par la structure entre deux instants donnés. Le champ

d'énergie restituée est caractérisé par la variable  $W_r$  (en  $J/m^3$ ) déterminée en chaque point de Gauss à partir des du tenseur de contraintes  $\sigma_{ij}$  et du tenseur déformation  $\varepsilon_{ij}$ . De manière générale, en considérant deux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , ce champ peut être calculé par un produit tensoriel :

$$W_r^{t_i \rightarrow t_{i+1}} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{t_i} \otimes \varepsilon_{ij}^{t_{i+1}} - \sigma_{ij}^{t_{i+1}} \otimes \varepsilon_{ij}^{t_i} \right) \quad (3.6)$$

Le détail du calcul de  $W_r^{t_i \rightarrow t_{i+1}}$  est proposé en Annexe F.

Les champs obtenus dans la Figure 3.22 montrent un endommagement occupant une largeur non-négligeable. Le champ d'énergie restituée est quant à lui très localisé sur quelques éléments et laisse apparaître la fissure principale formée. En intégrant le champ d'énergie restituée sur le volume de l'éprouvette, il est alors possible de retrouver la résistance à la propagation de la fissure  $G_R$ , à l'instant considéré (Figure 3.21) il vient :

$$G_R^{t_{i+1}} = \frac{\int_V W_r^{t_i \rightarrow t_{i+1}} dV}{(\Delta a^{t_{i+1}} - \Delta a^{t_i}) b} \quad , \quad (3.7)$$

où  $V$  est le volume de la boîte mésoscopique,  $b$  est l'épaisseur de l'éprouvette,  $\Delta a^{t_2}$  et  $\Delta a^{t_1}$  sont respectivement les incréments de longueurs de fissures élastiques équivalentes à l'instant  $t_2$  et  $t_1$ . La courbe-R tracée avec la relation 3.7 montre une dépendance au choix de l'incrément de temps, et donc au pas de calcul choisi pour la simulation. On remarque également une légère différence entre cette méthode et la méthode usuelle lorsque la fissure s'approche de l'appui.

A première vue, la simple observation des champs d'endommagement et de d'énergie restituée ne laissent pas présager de phénomène de confinement de la zone d'élaboration de la rupture. Néanmoins, une analyse détaillée des champs numériques comme l'étude de l'évolution des distances moyennes entre les sites à endommagement actif ou encore la distribution des énergies restituées le long du ligament pourrait mettre en lumière le processus d'évolution de la zone d'élaboration. Cette analyse fine du processus de rupture sera abordée au chapitre suivant (Chapitre 4).



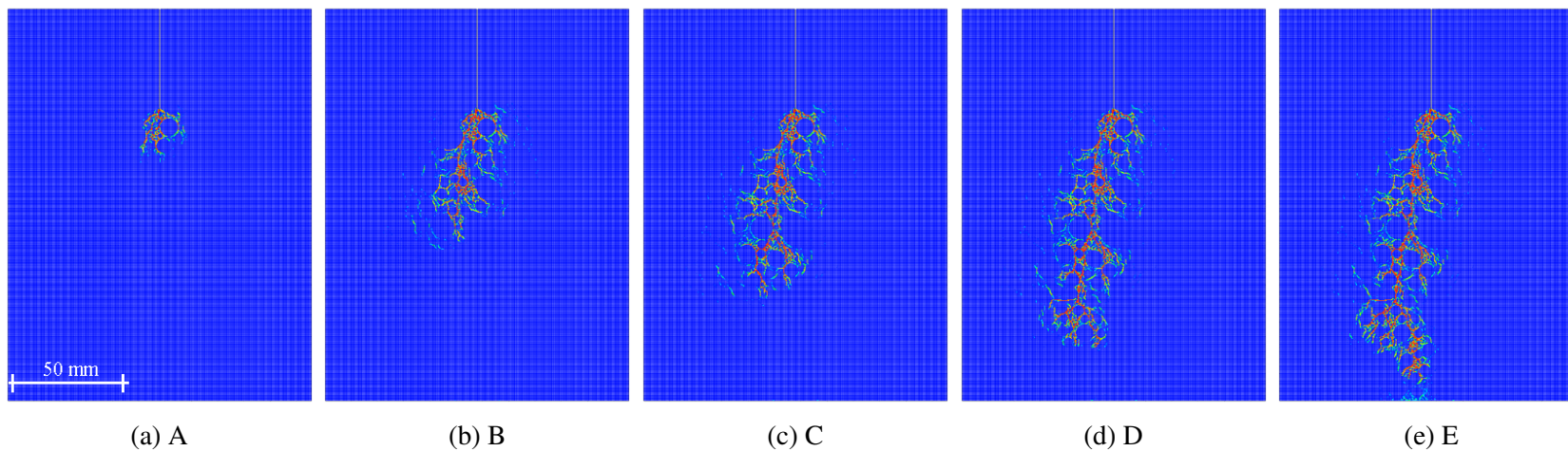


FIGURE 3.22 – Champs d'endommagement cumulé à différents moments de la simulation

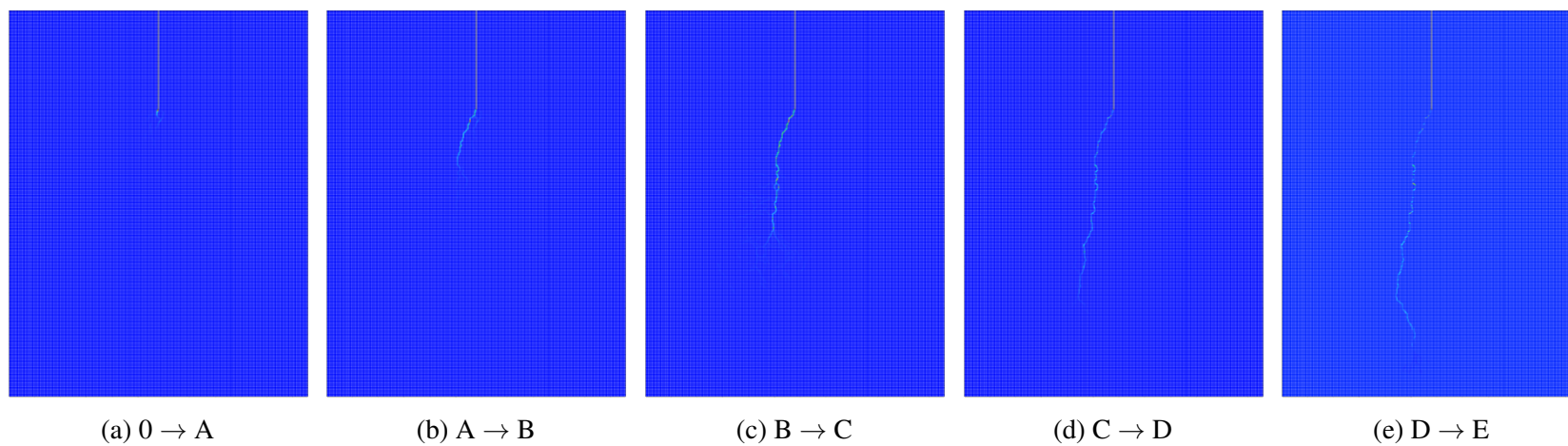


FIGURE 3.23 – Champs des énergies restitué à différents moments de la simulation

### 3.4 Conclusions

Une campagne d'essai de rupture en mode I est réalisée à partir d'éprouvette WS de 2 hauteurs différentes. Pour ce faire, des protocoles de création des éprouvettes et de l'essai ont été mis en place. L'essai est piloté par ouverture de fissure (CMOD), ce qui permet une rupture stable et lente de l'éprouvette. Sur la base des courbes force-CMOD expérimentales, les courbes-R sont évaluées. Ces courbes de résistance marquent une absence notoire de régime plateau, i.e., une absence de propagation auto-similaire de la fissure principale. Cette absence peut être attribuée au phénomène de confinement de la zone d'élaboration de la rupture. Ce confinement peut être partiellement expliqué par la présence d'une zone comprimée au niveau du ligament empêchant le développement libre de la zone d'élaboration ou la propagation de la fissure principale avec cette zone. Une étude numérique à partir d'un modèle élastique homogène permet de mettre en lumière cette zone comprimée dans les éprouvettes WST et ce, pour les dimensions choisies. *In fine*, les dimensions utilisées ici favorisent un confinement précoce de la FPZ. De plus, indirectement, ce constat donne une indication sur la longueur de la zone d'élaboration de la rupture qui semble être importante.

Par la suite, le modèle d'endommagement Fichant-La Borderie a été appliqué à l'échelle mésoscopique afin de simuler ces essais. Cinq tirages par dimensions sont réalisés. Les réponses macroscopiques numériques obtenues attestent par leur variabilité de l'importance de la considération de la mésostructure et notamment de la distribution spatiale des granulats. Le bon accord entre les réponses obtenues par simulation numérique et expérimentalement montre la pertinence du modèle d'endommagement appliqué à l'échelle mesoscopique et ce malgré l'aspect bi-dimensionnel de la modélisation et l'idéalisation des granulats sous forme de disques. Sur cette base, l'analyse « locale » des champs numériques (d'endommagement et d'énergie restituée) apparaît comme une source potentielle d'information complémentaire sur le processus de rupture. Néanmoins, en l'absence de propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration, il apparaît difficile de se prononcer sur les phénomènes mécaniques conduisant la zone d'élaboration de la rupture à passer d'une phase de développement à un régime stationnaire provoquant la propagation de la fissure principale. Dans cette objectif, il est proposé dans la suite de s'appuyer sur des simulations numériques utilisant le modèle mésoscopique afin de tenter d'expliquer le fonctionnement de la zone d'élaboration et des conséquences du phénomène de confinement sur ce fonctionnement. Pour ce faire, 2 solutions s'offrent à nous. La première consiste à utiliser les paramètres du modèles mésoscopiques identifiés à partir des résultats expérimentaux et à mener des simulations sur des éprouvettes de taille plus importante. La seconde solution consiste à utiliser les mêmes tailles d'éprouvette mais à conduire des simulations utilisant des paramètres de rupture plus faibles afin de limiter l'étendue de la zone d'élaboration et ainsi favoriser la propagation auto-similaire. Pour des raisons de limitation des temps de calcul, la seconde solution sera préférée à la première et développée au chapitre 4.

# Chapitre 4

## Vers une mise en lumière de la zone d'élaboration de la rupture

### Sommaire

---

<b>4.1 Simulations de l'essai WST : diminution des propriétés de rupture des constituants</b> . . . . .	<b>105</b>
4.1.1 Résultats des simulations . . . . .	106
4.1.2 Courbes-R . . . . .	107
4.1.3 Synthèse des nouvelles réponses macroscopiques . . . . .	108
<b>4.2 Analyse du processus de rupture</b> . . . . .	<b>109</b>
4.2.1 Analyse des champs numériques d'endommagement bruts . . . . .	109
4.2.2 Création de zones filtrées . . . . .	111
4.2.3 Synthèse sur le processus de rupture apporté par l'étude de l'endommagement . . . . .	113
4.2.4 Simulation d'une boîte jouant le rôle de la zone d'élaboration : analyse des distances moyennes entre sites actifs . . . . .	114
<b>4.3 Mise en évidence de la zone d'élaboration : analyse énergétique</b> . . . . .	<b>117</b>
4.3.1 Mésostructure et zone d'élaboration de la rupture . . . . .	118
4.3.2 Distribution des taux locaux de restitution d'énergie le long du ligament	120
4.3.3 Taux de restitution critique d'endommagement volumique . . . . .	123
4.3.4 Taux de restitution d'énergie d'endommagement local . . . . .	127
<b>4.4 Conclusion sur l'étude du processus de rupture à partir du modèle mésoscopique</b> . . . . .	<b>134</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de proposer différents traitements des résultats proposés par le modèle d'endommagement Fichant-La Borderie à l'échelle mésoscopique. Ainsi, une analyse fine des champs numériques obtenus est réalisée afin d'illustrer le processus de rupture lié au développement de la zone d'élaboration et de l'étendue de cette dernière. Afin de mener à bien cette étude, il est impératif que la réponse en courbe-R atteste d'un régime plateau, symptomatique du développement libre de la zone d'élaboration et de la propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration.

Pour ce faire, au vu des résultats du chapitre précédent (Section 3.3), des nouvelles simulations de l'essai Wedge Splitting Test sont réalisées. Rappelons qu'à la suite de la campagne expérimentale décrite au Chapitre 3, il a été suspecté un confinement précoce de la zone d'élaboration dans les éprouvettes testées. Ce confinement est partiellement dû à un ligament trop court, où la zone d'élaboration, en fin de développement voire en début de phase de propagation, se retrouve contrainte à changer de forme du fait de la proximité de la zone de compression. Ce dernier constat a pu se faire sur la base des courbes-R expérimentales et numériques qui ne montrait quasiment aucun régime plateau traduisant l'absence de propagation auto-similaire de la fissure principale.

## 4.1 Simulations de l'essai WST : diminution des propriétés de rupture des constituants

Comme énoncé en conclusion du chapitre précédent, deux solutions s'offrent à nous afin de favoriser la propagation auto-similaire de la fissure principale. Soit on augmente la hauteur caractéristique des éprouvettes WST afin d'augmenter la longueur du ligament, soit on modifie certains paramètres d'entrée du modèle afin de diminuer l'étendue de la zone d'élaboration. Dans cette optique, on peut par exemple diminuer l'énergie de rupture  $G_f$  de la matrice cimentaire (ce qui aura également pour effet de conserver le caractère peri-granulaire de la rupture). Dans un souci de limitation du temps de calcul et de réutilisation des maillages EF réalisés, la seconde solution (diminution de  $G_f$  de la matrice) est ici retenue. De plus, le jeu de paramètre utilisé pour les analyses sur les éprouvettes entaillées soumises à une flexion 3 points (Chapitre 2), considérant une faible énergie de fissuration de la pâte cimentaire, s'est révélé adéquate pour le développement libre de la zone d'élaboration numérique (cf courbe-R du tirage 3 de la taille H1 - Figure 2.28).

En résumé, des nouvelles simulations sont réalisées à partir des mêmes tirages de granulats utilisés dans la précédente étude (Section 3.3) mais cette fois-ci en utilisant les paramètres d'entrée utilisés au Chapitre 2 et reportés dans le Tableau 4.1 ci-dessous :

	Propriétés	Granulats	Matrice Cimentaire
Propriétés élastiques	$E(\text{GPa})$	35	25
	$\nu$	0,2	0,2
Propriétés de rupture	$f_t(\text{MPa})$	6	3
	$G_f(\text{J/m}^2)$	60	20

TABLEAU 4.1 – Paramètres utilisés dans les nouvelles simulations WST

### 4.1.1 Résultats des simulations

Les Figures 4.1 et 4.2 montrent les réponses force-CMOD obtenues à la suite des nouvelles simulations. A titre indicatif, les enveloppes des courbes force-CMOD des précédentes simulations y sont intégrées. Les paramètres d'entrée utilisés ici provoquent une réponse plus « fragile » (très marquée sur les éprouvettes WST 250), et également légèrement moins raide (diminution de -30 % du module d'élasticité des granulats). On peut également constater que, malgré une augmentation de la résistance en traction de la pâte (+50 %), la force au pic diminue : ce phénomène est dû à la faible énergie de fissuration de la pâte (-100 %). On peut noter que ce résultat est en accord avec l'analyse réalisée sur le VER (Chapitre 2 - Figure 2.13). Les champs d'endommagement des différentes simulations sont proposés en Annexe G.

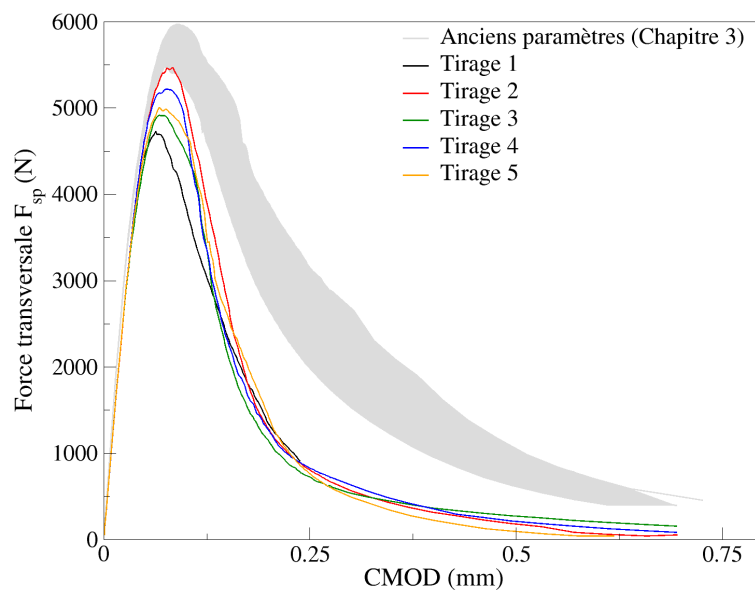


FIGURE 4.1 – Nouvelles courbes force transversale-CMOD - WST 250

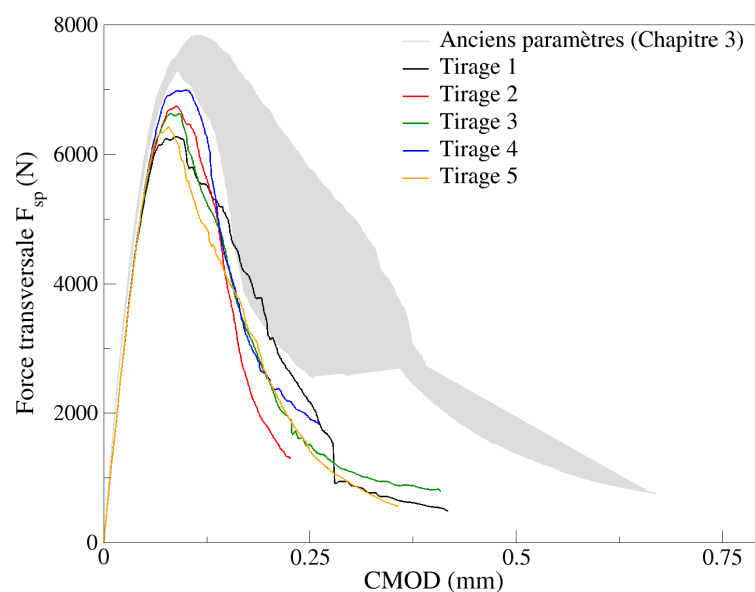


FIGURE 4.2 – Nouvelles courbes force transversale-CMOD - WST 300

### 4.1.2 Courbes-R

Les courbes-R correspondant aux réponses force-CMOD ont été estimées et tracées dans les Figures 4.3 et 4.4. De la même manière que pour les courbes force-CMOD, les enveloppes des anciennes courbes de résistance sont proposées à des fins de comparaison visuelle. L'allure des courbes-R montre clairement que la partie croissante initiale des courbes présente maintenant une forme convexe, et est suivie d'un pseudo régime plateau plus ou moins étendu avant que la résistance  $G_R$  augmente à nouveau (allure concave) du fait du confinement en fin de rupture du ligament.

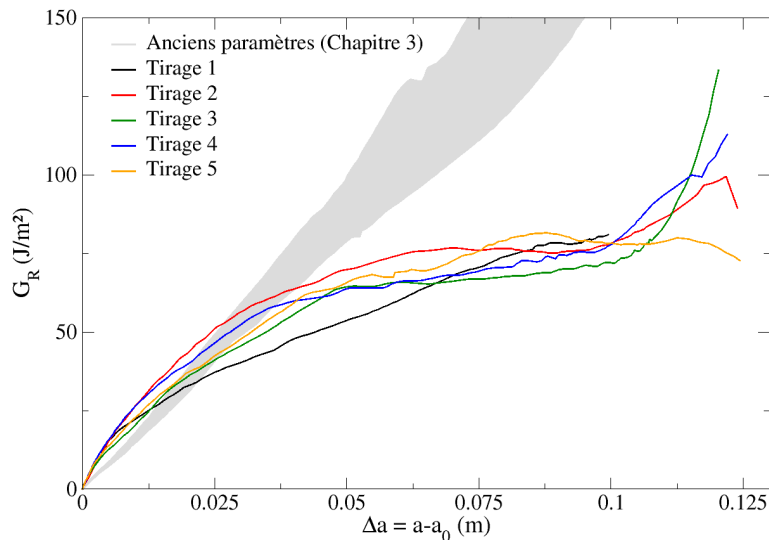


FIGURE 4.3 – Nouvelles courbes de résistance - WST 250

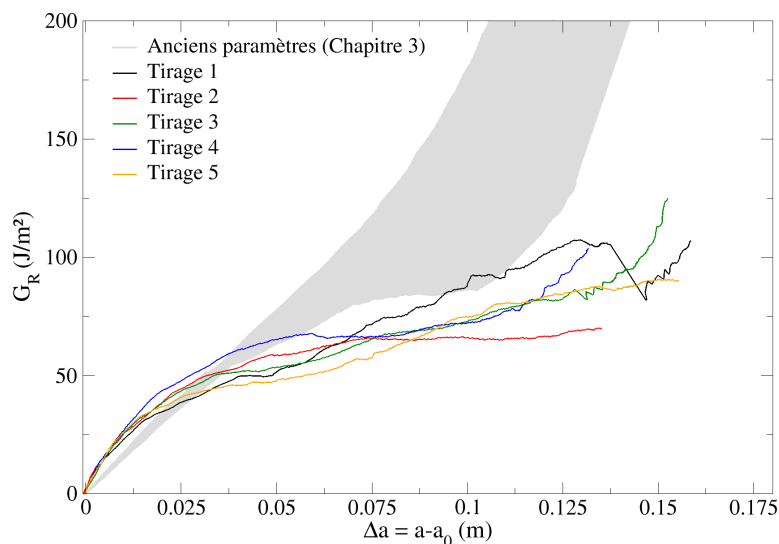


FIGURE 4.4 – Nouvelles courbes de résistance - WST 300

On constate, sur quelques tirages et tailles, un régime plateau irréfutable à l'image des tirages 2 et 3 des simulations WST 250 et des tirages 2 et 4 des simulations WST 300. Ainsi, pour ces quatre simulations, les propriétés de rupture  $G_{RC}$  et  $\Delta a_C$  peuvent être déterminées. Soulignons encore une fois que pour chaque géométrie, les différences observées entre les courbes-R

sont uniquement dues à l'arrangement spatial aléatoire des granulats, d'où l'importance de se situer à l'échelle de la mésostructure.

### 4.1.3 Synthèse des nouvelles réponses macroscopiques

Les Tableaux 4.2 et 4.3 référencent les valeurs notables des résultats obtenus à partir des nouvelles simulations ainsi que leur variabilité due à l'arrangement spatial des granulats. A l'instant critique, le régime plateau intervient à environ 70 % de la force en post-pic contre 90 % (rapport  $F_C/F_{max}$ ) pour respectivement les éprouvettes WST 250 et WST 300. Cela s'explique par un incrément de longueur de fissure élastique équivalent critique ( $\Delta a_C = (\alpha_C - \alpha_0) DS$ ) plus longue dans les plus petites éprouvettes. Rappelons que  $F_c$  correspond à la valeur de la force au moment où la zone d'élaboration atteint sa taille critique et ce, généralement dans la partie post-pic de la courbe force-CMOD.

#Tirage	$F_{max}$ (N)	$CMOD_{F_{max}}$ (mm)	$G_{Ru}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\Delta a_u$ (mm)	$\alpha_u$ (%)	$G_{RC}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\Delta a_C$ (mm)	$\alpha_C$ (%)	$\beta$	$F_C$ (N)	$G_F$ (J/m <sup>2</sup> )
1	4730	0,0628	32	19,1	52,8	77*	85,0*	80,9*	0,60	1753*	41
2	5469	0,0838	52	25,5	55,5	75	61,4	70,8	0,51	3344	63
3	4918	0,0673	36	20,4	53,4	65	52,0	66,8	0,60	3790	57
4	5220	0,0768	45	23,5	54,7	64*	48,0*	65,1*	0,48	4108*	61
5	5009	0,0672	37	19,5	53,0	68*	54,7*	68,0*	0,62	3576*	60
<b>Moyenne</b>	<b>5070</b>	<b>0,0716</b>	<b>40</b>	<b>21,6</b>	<b>53,9</b>	<b>70</b>	<b>60,2</b>	<b>70,3</b>	<b>0,57</b>	<b>3314</b>	<b>56</b>
Ecart-Type	285	0,009	8	2,8	1,2	6	14,7	6,2	0,069	910	8,9
COV (%)	5,6	11,9	19,2	12,8	2,2	8,5	24,4	8,9	12,1	27,7	15,7

Remarque : \* signifie que la propriété de rupture est identifiée au moment où un pseudo-régime plateau est présent

TABLEAU 4.2 – Résultats des nouvelles simulations numériques sur les éprouvettes WST 250 ( $\alpha_0 = 44,7\%$ )

#Tirage	$F_{max}$ (N)	$CMOD_{F_{max}}$ (mm)	$G_{Ru}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\Delta a_u$ (mm)	$\alpha_u$ (%)	$G_{RC}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\Delta a_C$ (mm)	$\alpha_C$ (%)	$\beta$	$F_C$ (N)	$G_F^{**}$ (J/m <sup>2</sup> )
1	6268	0,0879	45	35,2	49,2	49*	39,8*	50,8*	0,54	6230*	49
2	6740	0,0878	49	31,0	47,7	65	72,0	62,1	0,45	5031	42
3	6629	0,0797	43	25,9	45,9	52*	36,9*	49,8*	0,60	6445*	52
4	6992	0,0984	57	35,4	49,3	66	53,1	55,5	0,50	6350	46
5	6420	0,0783	41	25,6	45,8	46*	37,5*	50,0*	0,42	6120*	46
<b>Moyenne</b>	<b>6610</b>	<b>0,0864</b>	<b>47</b>	<b>30,6</b>	<b>47,6</b>	<b>56</b>	<b>47,9</b>	<b>53,6</b>	<b>0,50</b>	<b>6035</b>	<b>47</b>
Ecart-Type	281	0,0081	6	4,8	1,7	9	15,0	5,3	0,07	575	3,7
COV (%)	4,3	9,3	12,6	15,6	3,5	17,0	31,4	9,8	14,5	9,5	8,0

Remarque : \* signifie que la propriété de rupture est identifiée au moment où un pseudo-régime plateau est présent

\*\* signifie que la simulation n'a pas été menée jusqu'à la rupture complète

TABLEAU 4.3 – Résultats des nouvelles simulations numériques sur les éprouvettes WST 300 ( $\alpha_0 = 36,8\%$ )

Pour la suite, sur la base des courbes de résistance, une étude locale des champs numériques obtenues est réalisée afin (i) d'estimer l'étendue de la zone d'élaboration et (ii) d'illustrer le processus de développement de cette zone.

## 4.2 Analyse du processus de rupture

Afin de mener à bien cette nouvelle étude, considérons une simulation où la courbe-R obtenue présente un régime plateau marqué. Ce qui est le cas du tirage 2 de l'éprouvette WST 250 (courbe rouge de la Figure 4.3). Les figures qui sont proposées incluent, pour la plupart, une seconde ordonnée correspondant à la résistance à la propagation de la fissure  $G_R(a)$  et une abscisse commune qui est l'incrément de longueur de fissure élastique équivalente  $\Delta a$ . Dans la suite, une variable liée à l'endommagement actif ou instantané est introduite et est notée  $\Delta D$ . Elle correspond à l'incrément d'endommagement ayant eu lieu entre deux instants de calcul ( $t_i$  et  $t_{i+1}$ ), i.e., deux longueurs de fissure élastique équivalente différentes correspondant à  $a_i$  et  $a_{i+1}$  et ce, pour un point de Gauss donné :

$$\Delta D = D_{t_{i+1}} - D_{t_i} \quad (4.1)$$

### 4.2.1 Analyse des champs numériques d'endommagement bruts

Un des premier objectif est de déterminer si les champs numériques obtenus à la suite des simulations et sans traitement préalable (i.e., les champs bruts) attestent d'un processus de rupture en accord avec l'hypothèse de développement de la zone d'élaboration de la rupture suivi d'une propagation auto-similaire de la fissure principale comme semble le montrer les courbes-R de forme convexe suivie d'un plateau. Comme énoncé précédemment, 3 variables décrivant l'endommagement et/ou la rupture sont analysées : l'endommagement cumulé  $D$ , l'endommagement instantané  $\Delta D$  et l'énergie restituée  $W_r$  (en Joules). Ces dernières sont à la base exprimées en chaque point de Gauss mais sont, ici, globalisées sur la surface ou le volume de la boîte mésoscopique afin de pouvoir suivre leur évolution en fonction de celle de la fissure élastique équivalente. L'endommagement instantané  $\Delta D$  et l'énergie restituée  $W_r$  sont directement liés à une activité participant à la rupture de l'éprouvette. Ainsi, entre deux pas de calcul ( $t_i$  et  $t_{i+1}$ ), les points de Gauss pour lesquels l'endommagement est actif restituent de l'énergie.

Dans une optique de globalisation des variables locales, les champs d'endommagement cumulé et instantané sont intégrés sur la surface de la boîte mésoscopique et permettent d'estimer l'endommagement géométrique total  $D_{geo}$  et l'endommagement géométrique instantané  $\Delta D_{geo}$ . Ces deux variables sont exprimées comme suit et pour chaque instant considéré :

$$D_{geo} = \int_{A_{meso}} D dA_{meso} \quad \text{et} \quad \Delta D_{geo} = \int_{A_{meso}} \Delta D dA_{meso} \quad (4.2)$$

où  $A_{meso}$  est la surface de la boîte mésoscopique. En d'autres termes, l'endommagement géométrique (en m<sup>2</sup>) représente la somme des valeurs locales de l'endommagement  $D$  (ou  $\Delta D$ ) des points de Gauss multipliées par la surface occupée par ces derniers. Il est alors possible de moyenner les valeurs  $D_{geo}$  et  $\Delta D_{geo}$  par le nombre de points de Gauss concerné par l'endommagement cumulé  $n_{PG}^D$  et ou l'endommagement instantané  $n_{PG}^{\Delta D}$  :

$$\overline{D}_{geo} = \frac{D_{geo}}{n_{PG}^D} \quad \text{et} \quad \overline{\Delta D}_{geo} = \frac{\Delta D_{geo}}{n_{PG}^{\Delta D}} \quad (4.3)$$

Afin, d'analyser l'évolution des données de l'endommagement en fonction de la longueur élastique équivalente, une normalisation par la valeur de l'incrément de fissure élastique équivalente  $\delta a$  entre deux instants (soit  $\delta a = a_{i+1} - a_i$  ou  $\delta a = \Delta a_{i+1} - \Delta a_i$ ) est effectuée. Cette normalisation permet de s'affranchir de la dépendance de  $\Delta D$  au temps effectif du pas de calcul. L'évolution de la variable  $\overline{D}_{geo/\delta a}$  en fonction de la longueur élastique équivalente de fissure est représentée sur la Figure 4.5. On peut constater une augmentation de la variable



$\overline{D}_{geo/\delta a}$  au moment où la zone d'élaboration atteint sa taille critique selon la courbe-R. Avant ce changement de régime, la valeur globale de l'endommagement géométrique total pour une unité de longueur de fissure élastique équivalente est quasi-constante (hormis au début du processus d'endommagement, où un fort endommagement est constaté).

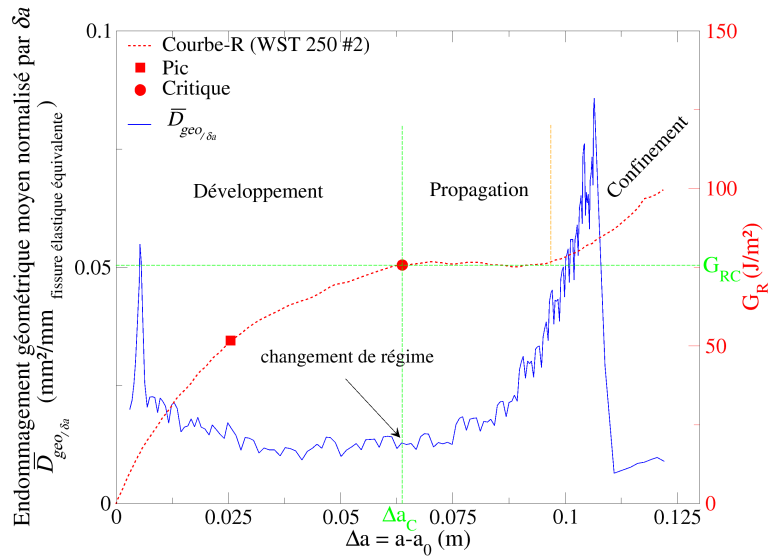


FIGURE 4.5 – Endommagement géométrique moyen par longueur de fissure élastique équivalente  $\overline{D}_{geo/\delta a}$  - WST 250 #2

La Figure 4.6 représente l'évolution de  $\overline{\Delta D}_{geo/\delta a}$ , variable liée à l'activité d'endommagement entre deux longueurs de fissures élastiques équivalentes. Un régime stationnaire est atteint au moment où la courbe-R montre un régime plateau. Ainsi,  $\overline{\Delta D}_{geo/\delta a}$  pourrait mettre en évidence la propagation auto-similaire au sens où la moyenne des incréments d'endommagement semble rester constante au cours de la propagation auto-similaire de la fissure principale. En effet, l'activité de la zone d'élaboration est attendue pour être énergétique stationnaire durant cette phase [Morel et al., 2010]. En revanche, il semblerait qu'en phase de développement de la zone d'élaboration, de fortes valeurs d'incrément d'endommagements  $\Delta D$  se manifestent et tendent à se stabiliser à l'approche de la propagation auto-similaire.

La Figure 4.7 montre l'évolution de la surface où l'endommagement est actif  $S_{\Delta D}$  par unité de longueur élastique équivalente  $\delta a$ . En phase de développement de la zone d'élaboration, la quantité de surface à endommagement actif semble quasi-constante (environ 50 mm<sup>2</sup>/mm de  $\delta a$ ). En phase de propagation auto-similaire, cette quantité croît (et pas nécessairement la valeur de  $\Delta D$  cf Figure 4.6) laissant penser à la nécessité d'activer plusieurs sites lors de la translation de la zone d'élaboration avec la propagation de la fissure principale.

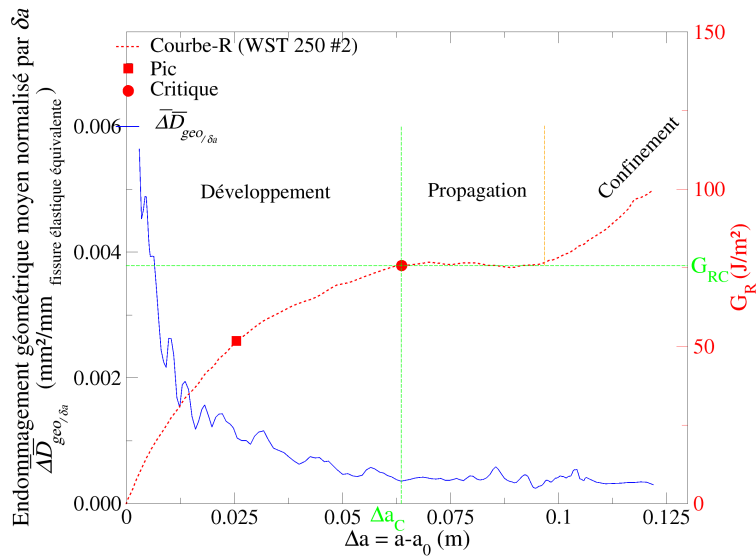


FIGURE 4.6 – Endommagement géométrique instantané moyen par longueur de fissure élastique équivalente  $\bar{\Delta D}_{geo/\delta a}$  - WST 250 #2

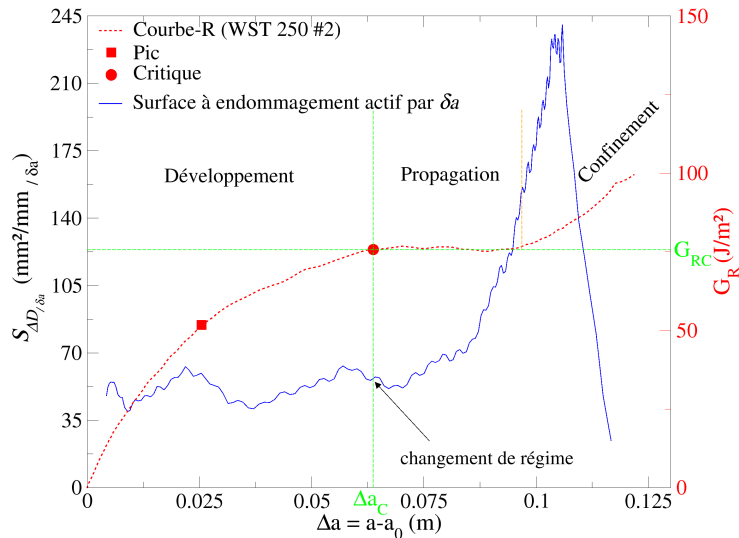


FIGURE 4.7 – Surface où l'endommagement est actif par longueur de fissure élastique équivalente - WST 250 #2

## 4.2.2 Création de zones filtrées

Après une analyse du champ d'endommagement brut, i.e., en considérant tous les points de Gauss où  $D > 0$  et  $\Delta D$ , une seconde étude des champs d'endommagement cumulé et instantané est proposée, mais cette fois en ajoutant l'information de localisation des points de Gauss endommagés. Afin d'imager l'activité spatiale de l'endommagement au cours du processus de rupture, des zones regroupant le niveau d'activité d'endommagement des points de Gauss sont créées (Figure 4.8). Les critères d'activité d'endommagement définis ci-dessous en terme de valeurs de  $D$  et en  $\Delta D$  permettent de considérer ou d'estimer les points de Gauss ayant une trop forte ou une trop faible activité :

- Critère A :  $0,01 \leq D \leq 0,99$ . Ce critère englobe l'historique des points de Gauss endommagés.
- Critère B :  $0,01 \leq D \leq 0,99$  et  $0,02 \leq \Delta D$ . Ce critère permet de déterminer les points

de Gauss en cours d'endommagement et pour lesquels l'endommagement est actif durant le pas de calcul.

- Critère C :  $\Delta D = D$  et  $\Delta D \geq 0,05$ . Ce critère permet de considérer uniquement les points de Gauss nouvellement endommagés et pour lesquels l'endommagement est significatif.
- Critère D :  $0,95 \leq D \leq 0,99$  et  $\Delta D \geq 0$ . Ce dernier critère considère les points de Gauss ayant une forte valeur d'endommagement  $D$  et qui continue à s'endommager.

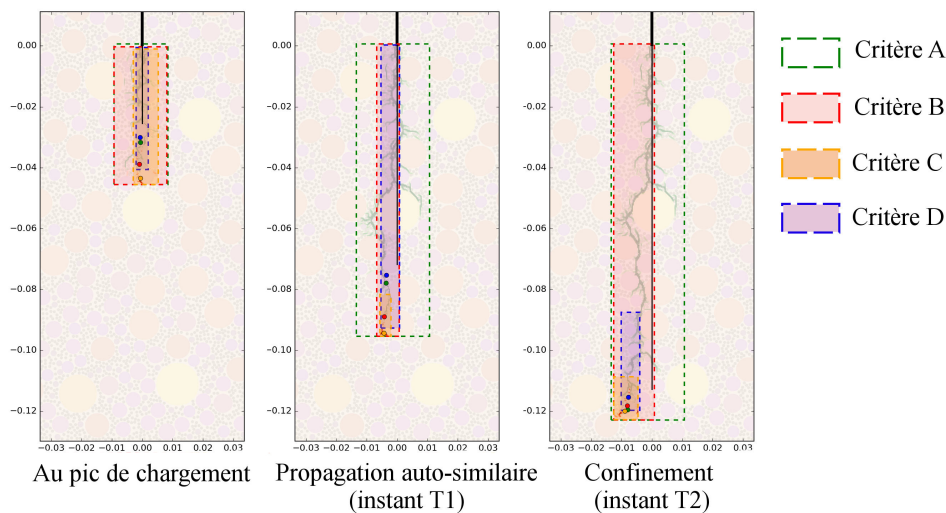


FIGURE 4.8 – Illustration des zones filtrées suivant 4 critères - WST 250 #2

Les dimensions des zones sont analysées en fonction de l'avancée de la fissure élastique équivalente. La Figure 4.9 montre que les longueurs de zones suivant le critère A et D augmentent de manière continue a contrario de celles suivant le critère B et C. La zone considérant les points de Gauss où l'endommagement est actif (critère B) et celle où les points de Gauss sont tout nouvellement endommagés diminuent fortement dès que  $\Delta a > \Delta a_C$ . Pour  $\Delta a > \Delta a_C$ , attendu pour correspondre à la propagation auto-similaire, la zone régit par le critère C se localise en avant de la zone d'élaboration de la fissure (instant T1 sur la Figure 4.8). Néanmoins, la zone régit par le critère B devrait avoir une longueur quasi-constante pendant la propagation auto-similaire attestant d'une translation de la zone d'élaboration mais ce phénomène n'est pas manifeste à partir de cette analyse.

La Figure 4.10 traite des largeurs des zones filtrées. Si la zone endommagée (critère A) n'évolue plus avant le régime plateau, ce n'est pas le cas pour les trois autres zones. Cette figure, par couplage à la courbe-R, ne met pas totalement évidence le processus de rupture au travers de la zone d'élaboration mais plutôt le phénomène de localisation après un endommagement plus ou moins diffus. Néanmoins, il semblerait toutefois qu'à l'instant du régime plateau les largeurs des zones (B,C,D) restent quasi-constantes.

En résumé, l'étude de la position des points de Gauss suivant différents critères d'endommagement ne permet pas de mettre en évidence la zone d'élaboration de la fissure mais juste le processus d'endommagement du modèle au travers de la mésostructure.

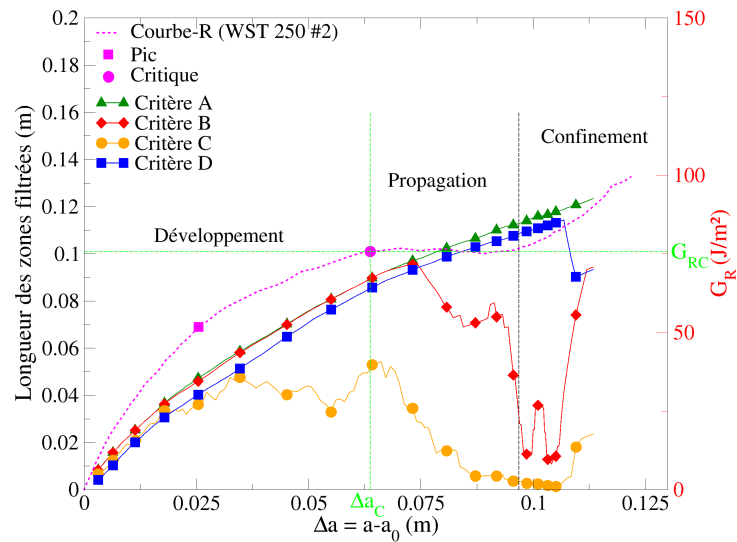


FIGURE 4.9 – Longueur des zones filtrées - WST 250 #2

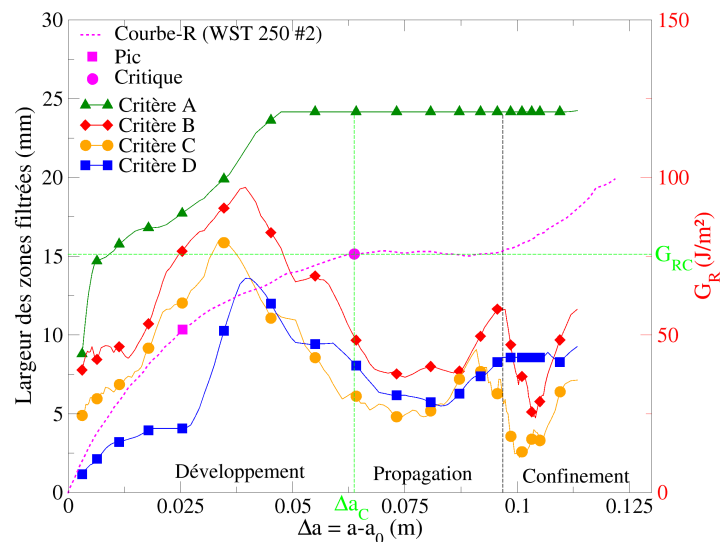


FIGURE 4.10 – Largeur des zones filtrées - WST 250 #2

### 4.2.3 Synthèse sur le processus de rupture apporté par l'étude de l'endommagement

Les variables d'endommagement seules ne permettent pas de mettre en évidence la zone d'élaboration. Néanmoins, en normalisant les endommagements géométriques par l'incrément de fissure élastique équivalente  $\delta a$ , l'évolution de la zone d'élaboration (développement et propagation auto-similaire) peut être mise en exergue et ce, en considérant l'intégralité de la boîte mésoscopique (Figures 4.5 et 4.6). Par la suite, un système de zones filtrées a été mis en place. Ces zones ont été créées en se focalisant uniquement sur la position extrême des points de Gauss suivant différents critères d'endommagement (sur  $D$  et  $\Delta D$ ). L'étude de l'évolution de leurs dimensions ne permettent pas d'acquérir une quelconque information sur l'évolution de la zone d'élaboration et de son étendue.

L'étude la zone d'élaboration numérique peut s'avérer compliquée par la présence de la mésostructure. En effet, comme le montre la Figure 4.11, à l'instant T1 (instant indiqué sur

la Figure 4.16), il y a toujours de l'énergie restituée (ou par analogie, de l'endommagement actif) dans une zone au niveau du fond de l'entaille initiale et cela pendant la propagation auto-similaire de la fissure principale. Or, lors du régime plateau, la zone d'élaboration s'est déjà translattée et porte en son sein la quasi-totalité de l'activité de l'énergie restituée.

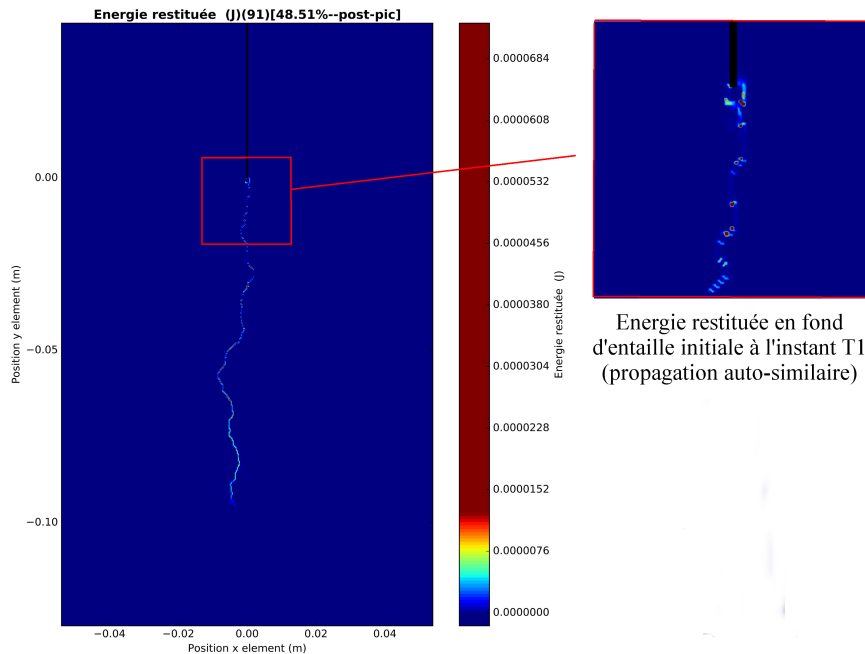


FIGURE 4.11 – Champ d'énergie restituée à l'instant T1 (lors du régime plateau)

En conclusion, pendant la propagation de la fissure, à cause de la modélisation mésoscopique, il y a de fortes probabilités d'avoir de l'énergie restituée (et de l'endommagement actif) au niveau des interfaces pâte/granat situées en arrière de ladite zone d'élaboration. L'idée pour la suite de l'étude est de filtrer ces zones, ne participant plus au processus d'évolution de la zone d'élaboration.

#### 4.2.4 Simulation d'une boîte jouant le rôle de la zone d'élaboration : analyse des distances moyennes entre sites actifs

En théorie, la zone d'élaboration de la rupture est attendue pour se translater en phase de propagation auto-similaire de la fissure principale en restant liée à la pointe de cette dernière. L'intégralité des activités liées à la fissuration se trouve au sein de cette frontière finie [Bažant et Kazemi, 1990, Morel, 2008]. Dans cette section, les champs numériques sont analysés au regard de la courbe de résistance. Une « boîte » de taille imposée est définie et on lui fait jouer le rôle de la zone d'élaboration de la rupture :

- En phase de développement, lorsque  $\Delta a < \Delta a_C$  la longueur de la boîte notée  $L_{box}$  évolue. A l'intérieur de cette boîte on retrouve toutes les activités liées à l'endommagement où  $\Delta D > 0$ .
- Au début du régime plateau, i.e., à l'instant critique ( $\Delta a = \Delta a_C$ ), on conserve la taille de la boîte effective à cet instant et on considère cette dernière comme la taille critique de la zone d'élaboration :  $L_{box} = L_{box_C} = L_{FPZ}$ .
- En phase de propagation ( $\Delta a > \Delta a_C$ ) la boîte de taille fixe  $L_{box_C}$  est translattée d'un incrément de fissure  $\delta a$  égal à l'incrément de fissure élastique équivalente  $\delta a$  entre les deux

pas de calcul considérés. En effet, en phase de propagation auto-similaire, l'incrément de fissure réelle est attendu pour être égal à celui de la fissure élastique équivalente [Morel et al., 2010]. Ce schéma d'analyse est présenté en Figure 4.12 pour un incrément de longueur de fissure correspondant à celui entre les points bleu et rouge.

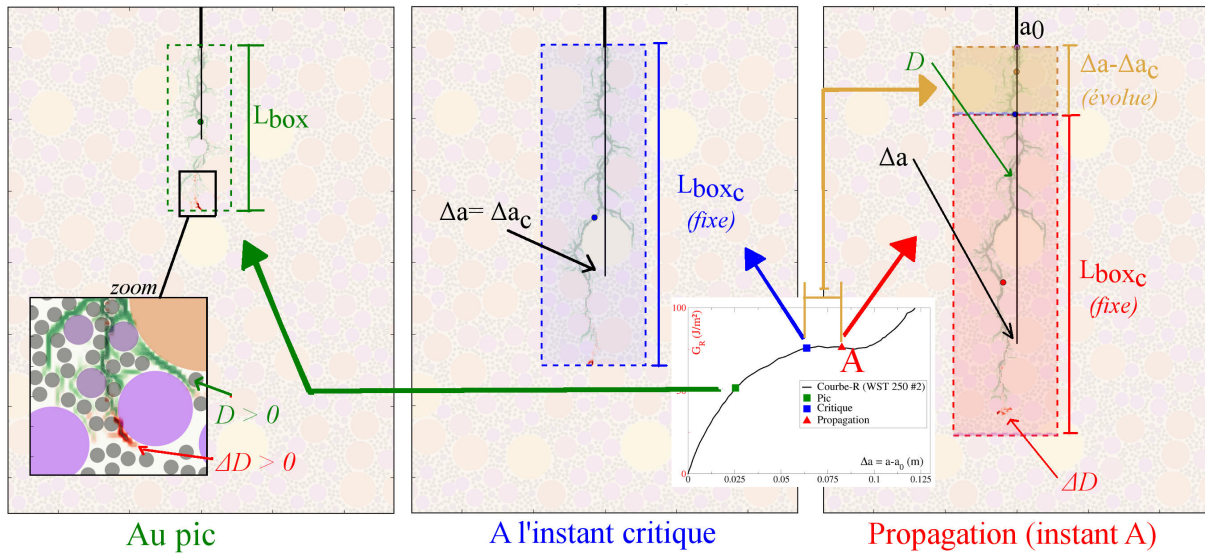


FIGURE 4.12 – Explication de la création et de l'évolution de la boîte jouant le rôle de la zone d'élaboration

Une analyse sur des distances moyennes entre sites où l'endommagement est actif (i.e., restituant de l'énergie) est réalisée. Il est à souligner que durant la translation de la boîte de longueur fixe  $L_{BoxC}$  (i.e, durant la propagation auto-similaire) la partie avant de cette dernière entre en contact avec la frontière de l'éprouvette approximativement au moment où la courbe-R indique une phase de confinement de la zone d'élaboration (Figure 4.13).

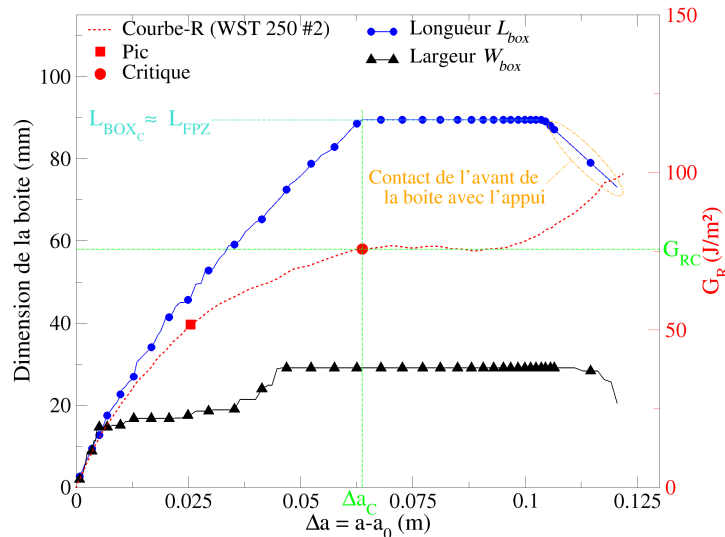


FIGURE 4.13 – Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration

La Figure 4.13 montre l'évolution de la boîte considérée. Lorsque  $\Delta a_C$  est atteint, la longueur  $L_{box}$  est fixée jusqu'au moment où elle entre en contact avec le bas de l'éprouvette. On remarque que cette longueur augmente de manière non-linéaire en phase de développement supposée de la zone d'élaboration. La largeur de la boîte  $W_{box}$  est, quant à elle, laissée libre (i.e.,

aucune valeur  $n$ 'est imposée lors de la phase de régime plateau). On peut ainsi remarquer sur la Figure 4.13 que la boîte atteint une largeur constante avant le régime plateau et la conserve ensuite en phase de propagation auto-similaire et durant le confinement en fin de propagation.

Les distances entre chaque site actif sont calculées pour chaque pas de calcul et suivant les deux directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  respectivement perpendiculaire et parallèle au sens de propagation de la fissure. La distance réelle  $dr_{ij}$  est ensuite calculée :

$$dr_{ij} = \sqrt{dx_{ij}^2 + dy_{ij}^2} \quad , \quad (4.4)$$

où  $i$  et  $j$  sont deux points de Gauss où l'endommagement est actif, i.e., où de l'énergie est restituée et où les distances  $dx_{ij}$  et  $dy_{ij}$  sont déterminées à partir des coordonnées des points  $i$  et  $j$ . Entre deux instants donnés, il y a donc  $n_{dis}$  distance de calculée et une moyenne est par la suite réalisée afin d'exprimer une variable globale pour une longueur de fissure élastique équivalente  $a$  donnée. Les moyennes sont équivalentes à :

$$\overline{d_{r,x,y}} = \frac{1}{n_{dis}} \sum_{ij=1}^{n_{dis}} dr_{ij}, x_{ij}, y_{ij} \quad , \quad (4.5)$$

où  $n_{dis}$  étant le nombre de distance calculée :

$$n_{dis} = \sum_{n=1}^{n_{\Delta D}} (n_{\Delta D} - i) \quad , \quad (4.6)$$

et  $n_{\Delta D}$  est le nombre de points de Gauss où l'endommagement est actif à l'instant considéré. Les évolutions des distances moyennes  $\overline{dr}$ ,  $\overline{dx}$ ,  $\overline{dy}$  sont analysées en comparaison avec la courbe-R (Figures 4.14 et 4.15 ).

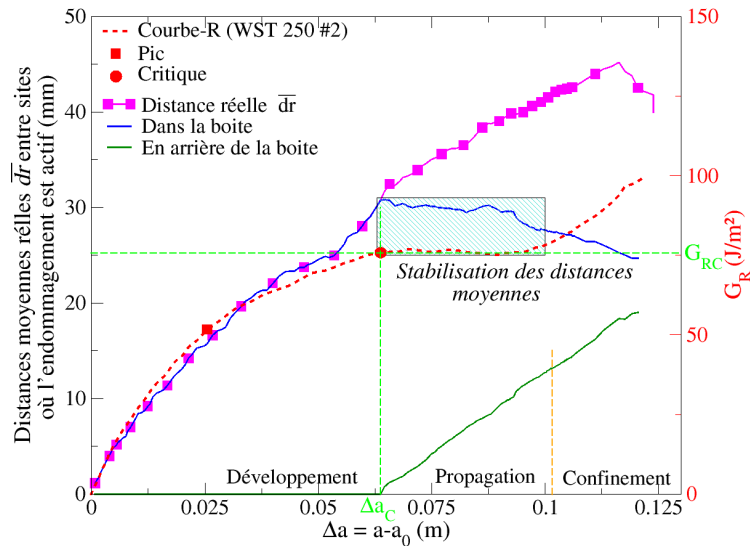
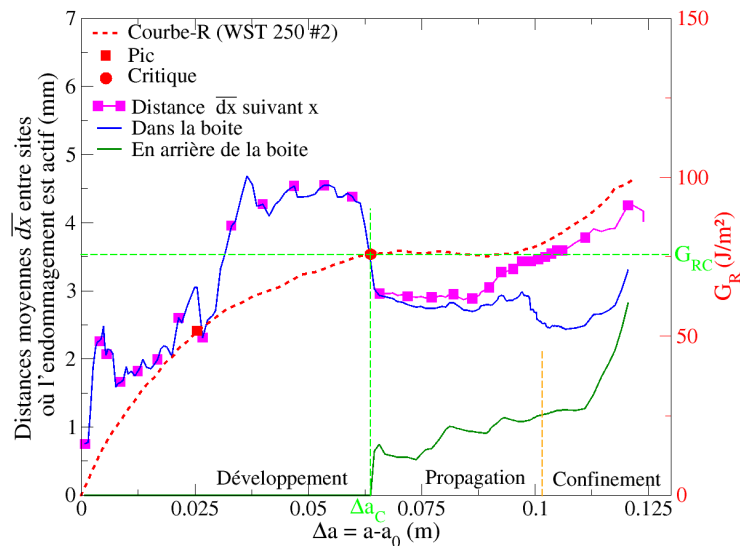


FIGURE 4.14 – Évolutions des distances moyennes réelles  $\overline{dr}$

La Figure 4.14 indique que la distance moyenne réelle  $\overline{dr}$  ne cesse de croître lorsqu'on considère tous les points de Gauss restituant de l'énergie. Or, en se focalisant sur la boîte jouant le rôle de zone d'élaboration, on remarque que la distance moyenne entre les sites actifs se stabilisent attestant d'un régime stationnaire associé au régime plateau de la courbe-R. En phase de confinement, les distances moyennes  $\overline{dr}$  diminuent. Cette diminution est tout de même captée


 FIGURE 4.15 – Évolutions des distances moyennes  $\overline{dx}$ 

en considérant l'intégralité de l'éprouvette, néanmoins ce phénomène peut être en partie dû à la diminution de la longueur de la boîte qui devient à son tour confinée (Figure 4.13). En se focalisant sur l'évolution des distances moyennes  $\overline{dx}$  suivant l'axe  $\vec{x}$  liées d'une certaine manière à la largeur d'une bande endommagée, la Figure 4.15 montre un régime stationnaire en phase de propagation auto-similaire suivi d'une ré-augmentation des distances  $\overline{dx}$  : cela est sans doute lié au confinement. En phase développement de la zone d'élaboration, la distance moyenne  $\overline{dx}$  augmente attestant d'une prise en largeur et également d'une certaine répartition diffuse des points de Gauss actifs (Figure 4.13). Notons que les distances moyennes  $\overline{dx}$  dans la zone arrière de la zone d'élaboration simulée ne cesse d'évoluer, et ce, de manière non constante. Ce constat est le signe d'une poursuite d'activité non-continue dans la zone où s'est développée la zone d'élaboration sans doute liée à la mésostructure (ce point sera abordé plus bas Section 4.3.1). Soulignons également, qu'à la vue des valeurs des distances  $\overline{dx}$ , la distance réelle moyenne  $\overline{dr}$  est clairement pilotée par la distance moyenne  $\overline{dy}$  attestant ainsi d'une évolution des sites actifs dans le sens de la propagation de la fissure.

En résumé, l'étude des distances en sites actifs semble être riches d'informations pour ce qui concerne l'étendue et l'évolution de la zone d'élaboration. Cette analyse a également été menée sur d'autres simulations présentant un régime plateau manifeste à l'Annexe I. Une analyse énergétique du processus de rupture est proposée dans la suite du chapitre afin de tenter d'expliquer précisément le processus de développement de la zone d'élaboration et la propagation auto-similaire.

### 4.3 Mise en évidence de la zone d'élaboration : analyse énergétique

Rappelons que la courbe-R est estimée à partir de l'énergie restituée lors d'un incrément de longueur de fissure  $\delta a$ . Sur cette base, il est intéressant d'étudier le champ d'énergie restituée entre 2 instants de simulation et ce, en correspondance avec la longueur de fissure élastique équivalente associée. L'énergie restituée locale  $W_r$  (i.e., exprimé en chaque point de Gauss) est issue d'un produit tensoriel entre les champs de contraintes et de déformations totales, et ce,



entre deux instants ( $t_i$  et  $t_{i+1}$ ). Comme pour l'endommagement, une globalisation de l'énergie restituée est effectuée par une intégration du champ d'énergie sur le volume  $V_{meso}$  de la boîte mésoscopique :

$$W_r^{glob} = \int_{V_{meso}} W_r^{t_i \rightarrow t_{i+1}} dV_{meso} \quad (4.7)$$

En normalisant  $W_r^{glob}$  par l'incrément de longueur de fissure élastique équivalent  $\delta a$ , on obtient la quantité d'énergie nécessaire à la propagation de la fissure élastique équivalente d'un incrément  $\delta a$ , et ce, tout en s'affranchissant du pas de calcul choisi pour la simulation. Cette normalisation revient finalement à recréer une courbe-R à partir d'un champ entier (Figure 4.16) et (à un facteur dimensionnel près représenté par l'épaisseur  $b$  de l'éprouvette) :

$$G_R = \frac{W_r^{glob}}{b\delta a} \quad (4.8)$$

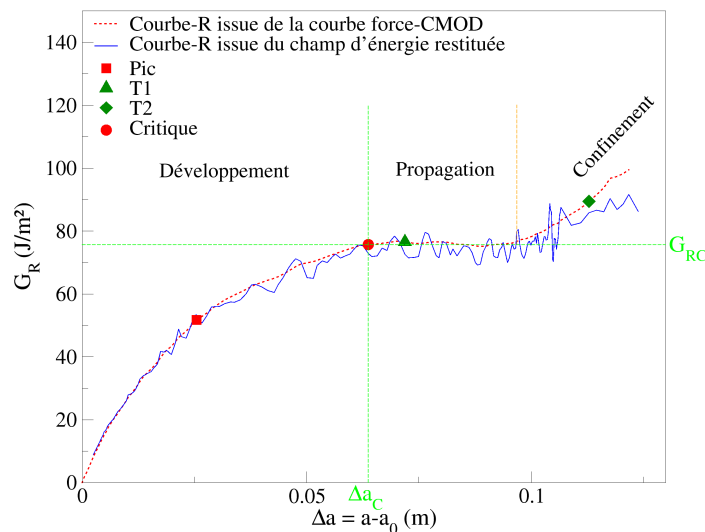


FIGURE 4.16 – Courbe de résistance obtenue à partir du champ d'énergie restituée- WST 250 #2

### 4.3.1 Mésostructure et zone d'élaboration de la rupture

La Figure 4.17 montre que l'activité énergétique à l'intérieur de zone d'élaboration simulée, selon la procédure de la boîte décrite à la Section 4.2.4, reste constante par rapport à l'énergie restituée sur l'intégralité de l'éprouvette : en phase de propagation, il y a 10 % de l'énergie restituée totale qui est contenue dans la zone arrière de la boîte.

Cela corrobore la synthèse effectuée à la Section 4.2.3 et des analyses sur les distances où l'endommagement est actif, réalisées précédemment (Figure 4.14). De plus, la Figure 4.18 montre une activité énergétique en dehors de la boîte  $L_{boxC}$ . Ainsi, cela confirme que des mécanismes liés à l'endommagement peuvent avoir lieu en dehors de la zone d'élaboration et cela est dû à la mésostructure : l'endommagement peut continuer et même commencer au sein d'une interface granulats/pâte (Figure 4.19 à l'instant A pendant le régime plateau). Notons qu'un point sur la corrélation entre l'énergie restituée  $W_r$  et l'incrément d'endommagement  $\Delta D$  est proposé en Annexe H).

En résumé, en créant une boîte simulant la zone d'élaboration de la rupture d'un point de vue de la MLEReq, il est possible d'illustrer les activités liées à l'endommagement au sein de

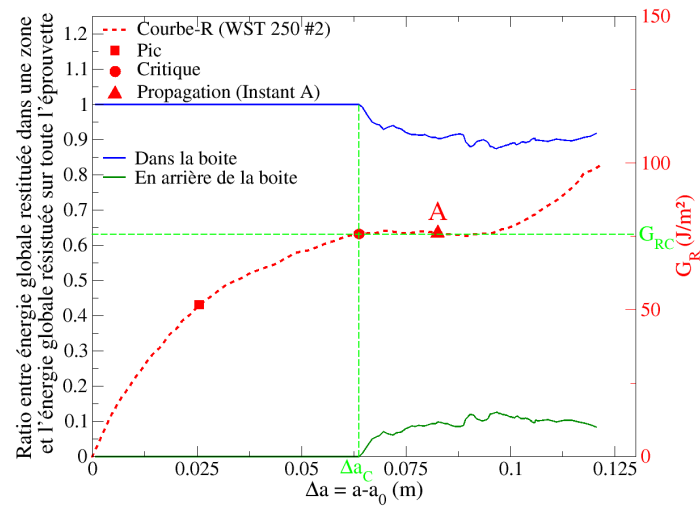


FIGURE 4.17 – Évolution du ratio entre l'énergie globale restituée au sein d'une zone et la totalité de l'éprouvette

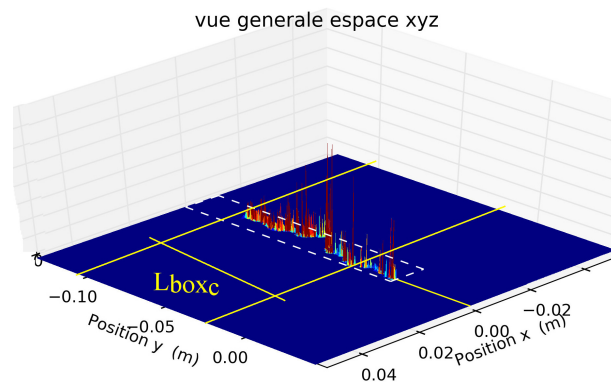


FIGURE 4.18 – Distribution de l'énergie restituée  $W_r$  pendant la propagation (à l'instant A)

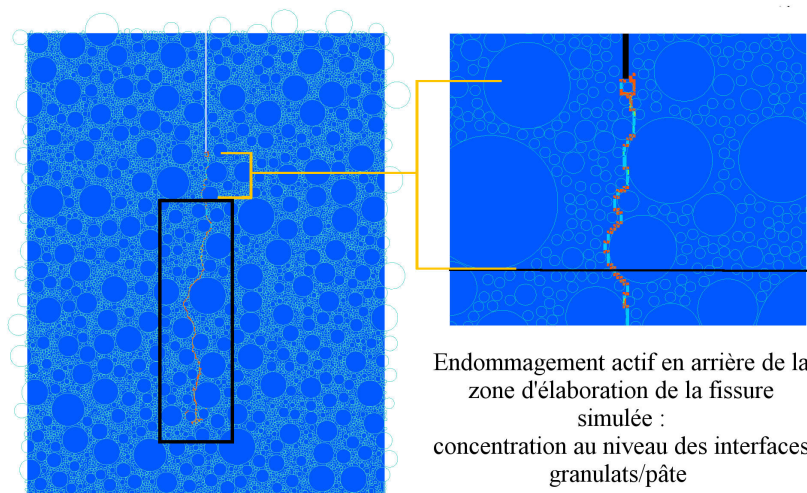


FIGURE 4.19 – Endommagement actif  $\Delta D$  aux interfaces à l'extérieur de la zone d'élaboration de la rupture à l'instant A

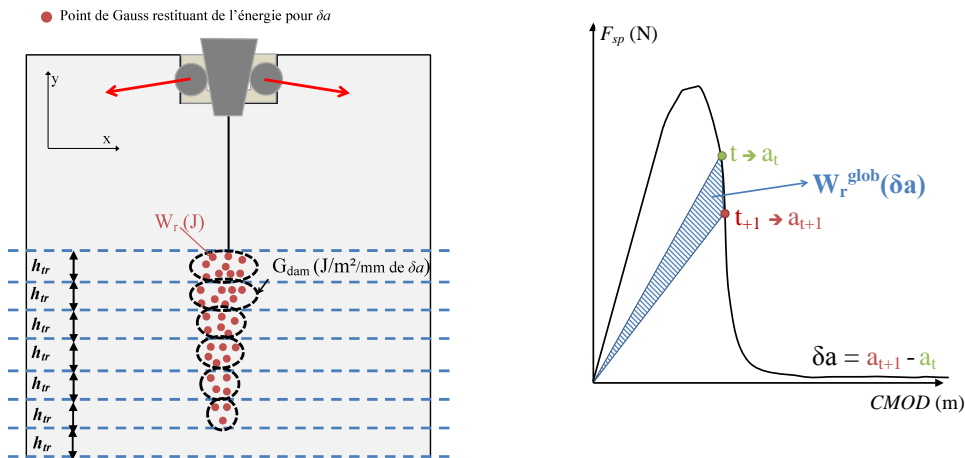
la zone d'élaboration.

### 4.3.2 Distribution des taux locaux de restitution d'énergie le long du ligament

Dans cette section, nous proposons une étude à l'échelle de la zone d'élaboration afin d'illustrer le fonctionnement énergétique de cette dernière. Pour cela, l'éprouvette WST 250 #2 est subdivisée en bandes  $h_{tr}$  de 4 mm d'épaisseur orientées perpendiculairement au ligament. Afin de s'affranchir du pas de calcul, l'énergie restituée  $W_r$  (en Joules) à chaque point de Gauss est divisée par l'incrément de fissure élastique équivalente  $\delta a$ . Par la suite, cette nouvelle énergie normalisée  $W_{r/\delta a}$  est divisée par la surface du ligament de chaque tranche ( $b.h_{tr}$ ). Il est ainsi obtenu un taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}(y)$  exprimée en  $J/m^2/mm/\delta a$  pour une abscisse  $y$  (position) donnée le long du ligament, i.e., l'abscisse de la tranche considérée (Figure 4.20) :

$$G_{dam}(y) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n W_{r,i}}{b.h_{tr}} \right) \frac{1}{\delta a} , \quad (4.9)$$

où  $n$  correspond au nombre de points de Gauss  $i$  restituant de l'énergie (en Joules) dans la bande considérée.



(a) Schéma du principe de découpage en tranches

(b) Courbe force-déplacement, incrément de fissure élastique  $\delta a$

FIGURE 4.20 – Principe de la distribution des taux locaux de restitution d'énergie

Par la suite, nous étudions pour différents incréments de fissure élastique équivalente les différentes distributions des taux locaux de restitution d'énergie le long du ligament de l'éprouvette. Ainsi, pour cette nouvelle étude, 4 instants sont étudiés et illustrés sur la Figure 4.21 :

- Pic : instant au pic de chargement, pendant la phase de développement de la zone d'élaboration ;
- Plateau 0 (ou P0) : instant en début du régime plateau ;
- Plateau 1 (ou P1) : instant en fin du régime plateau ;
- Confinement (ou C) : instant pendant le confinement présumé de la zone d'élaboration de la rupture.

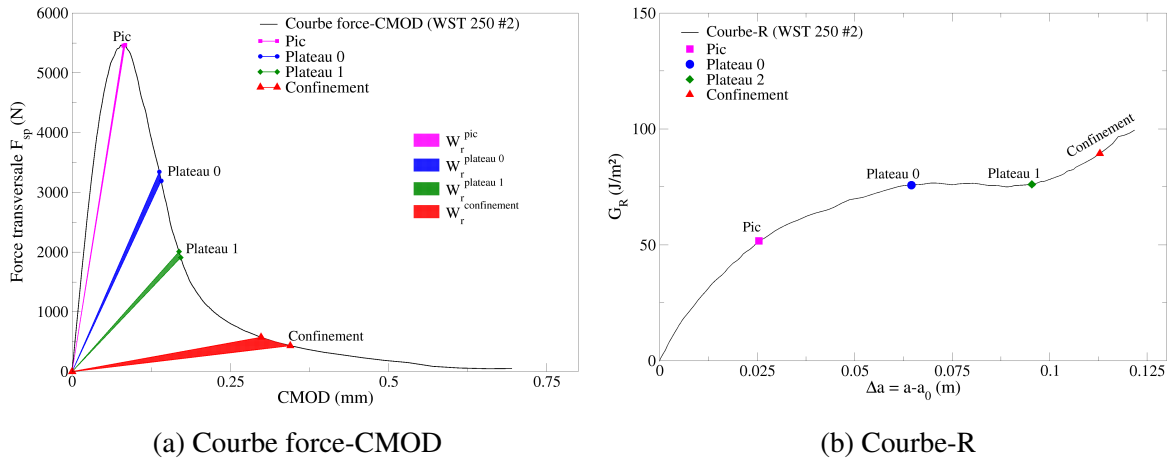


FIGURE 4.21 – Instants considérés pour l'étude de la distribution des énergies restituées - WST 250 #2

La Figure 4.22 représente la distribution du taux de restitution d'énergie d'endommagement le long du ligament aux instants Pic, Plateau 0 (P0), Plateau 1 (P1) et Confinement (C). Notons que l'image élastique équivalente de la zone d'élaboration à chaque instant est représentée (boîtes créées suivant la procédure énoncée dans la Section 4.2.4). En phase de développement (instant Pic), la distribution est quasi-homogène, avec en moyenne une valeur de  $G_{dam}$  avoisinant  $1 \text{ J/m}^2/\text{mm}$  de  $\delta a$ . En phase de propagation auto-similaire (instant P0 à P1), les distributions ont la même allure. En effet, on retrouve en tête de la zone d'élaboration de la rupture simulée les mêmes valeurs (avoisinant également  $1 \text{ J/m}^2/\text{mm}$  de  $\delta a$ ) et en queue, des valeurs qui diminuent. Notons la présence de pics certainement dus à la nature mésosocpique de la simulation (mésosstructure). En phase de confinement (instant C), la distribution des taux locaux de restitution d'énergie change complètement de forme, à l'image de la zone d'élaboration, avec en tête de forte valeur des taux de restitution  $G_{dam}$ .

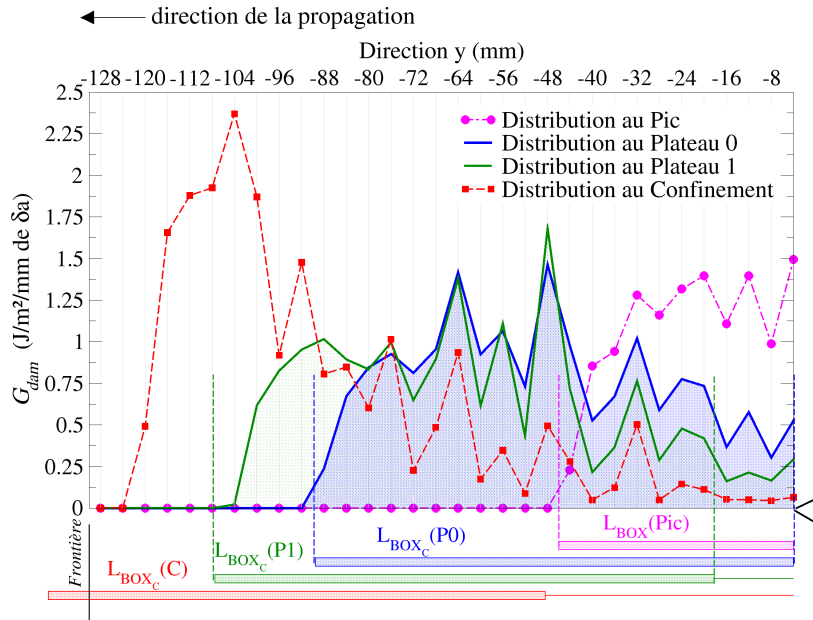


FIGURE 4.22 – Distribution du taux de restitution d'énergie d'endommagement local le long du ligament- WST 250 #2

La Figure 4.22, illustre l'évolution de la zone d'élaboration, et un régime stationnaire des taux locaux de restitution d'énergie semble effectivement se dessiner en phase de propagation

auto-similaire (translation de la distribution P0 vers P1). Cela se retrouve sur d'autres simulations mises en Annexe I.

En prenant en exemple la simulation WST 250 #2 avec les propriétés du béton expérimental (utilisées dans le Chapitre 3), où la courbe-R correspondante avait montré un confinement précoce important de la zone d'élaboration (Figure 4.23), la distribution des taux de restitution d'énergie d'endommagement le long du ligament est également analysée et représentée sur la Figure 4.24.

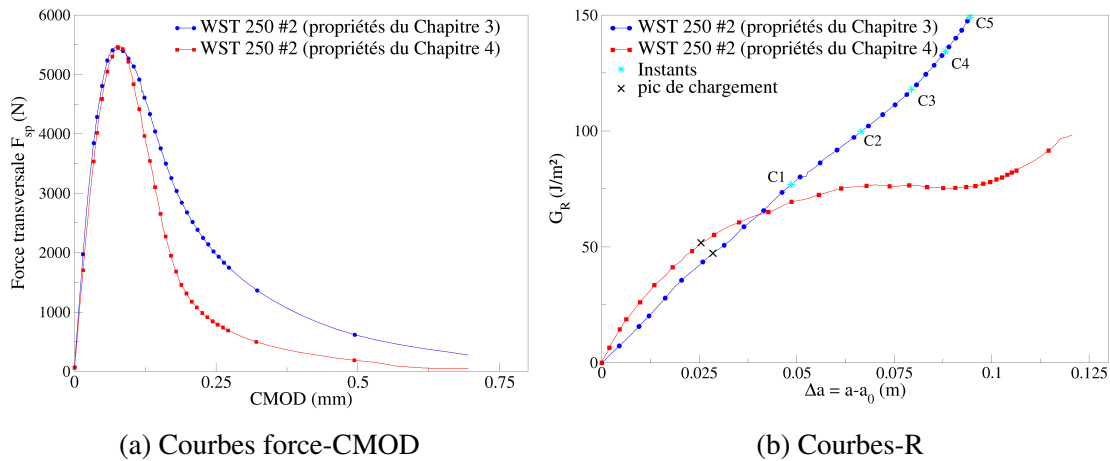


FIGURE 4.23 – Comparaison des réponses macroscopiques entre les propriétés des chapitres 3 et 4 sur la simulation WST 250 #2

On constate que l'allure de la distribution des taux locaux de restitution d'énergie d'endommagement ne cesse de changer de forme avec une augmentation continue en tête de distribution (en avant du front de fissure). On dénote également d'importants taux locaux de restitution d'énergie en queue des distributions (près de l'entaille initiale) et ce, jusqu'à la fin de la simulation (courbe Instant C5).

En résumé, la distribution des taux locaux de restitution d'énergie le long du ligament (distribution instantanée) semble mettre en lumière une signature du fonctionnement de la zone d'élaboration au sens où la distribution spatiale de ces taux présente une allure quasi-constante au cours de la propagation auto-similaire (Figure 4.22).

Sur cette base, nous proposons d'étudier dans la suite si un critère prenant place à l'échelle de la zone d'élaboration ou plus exactement, exprimé par rapport au volume réel de cette dernière, existe. Cette hypothèse, avancée par Bažant [Bažant et Chen, 1997] et reprise plus tard par Morel [Morel, 2008] et Coureau et al [Coureau et al., 2013] n'a toutefois jamais été mise en évidence. Nous proposons donc de confronter cette hypothèse aux données issues des simulations dans la section suivante.

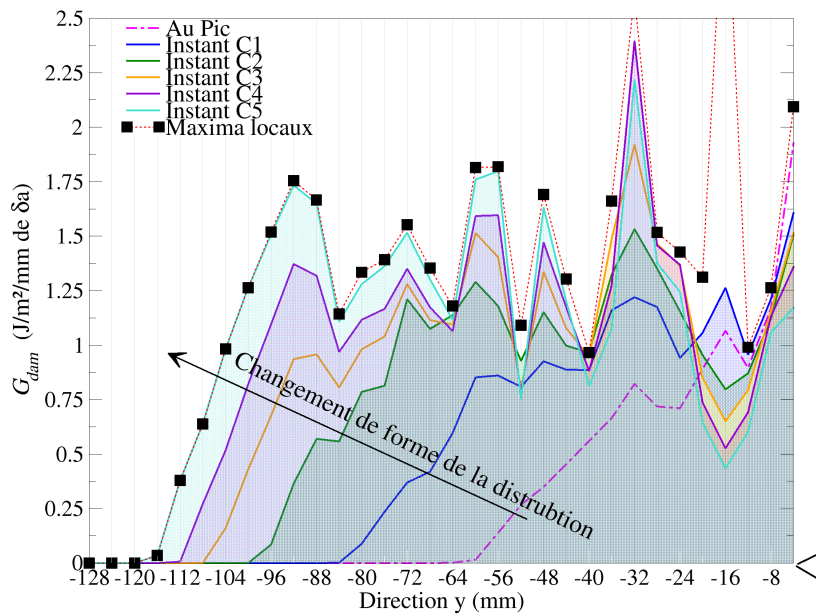


FIGURE 4.24 – Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élaboration de la rupture - WST 250 #2 (propriétés du béton expérimental)

### 4.3.3 Taux de restitution critique d'endommagement volumique

D'après Bažant [Bažant et Chen, 1997], la rupture d'un matériau quasi-fragile n'est pas seulement caractérisée par le taux de restitution d'énergie critique ( $G_{RC}$ ) mais également par un taux de restitution critique d'endommagement volumique (i.e., exprimé par unité de volume de la zone d'élaboration) noté  $G_d$ .

Le taux de restitution critique d'énergie d'endommagement volumique  $G_d$  est ici estimé à partir des champs numériques d'énergie restituée mais pas uniquement pour la configuration critique de la zone d'élaboration (i.e., au moment de la propagation auto-similaire de la fissure principale) mais également en phase de développement de cette zone. En effet, le volume de la zone d'élaboration  $V_{FPZ}$  peut être estimé à partir de la longueur  $L_{box}$  (définie à la Section 4.2.4) et la hauteur  $h_{FPZ}$  :  $V_{FPZ} = L_{box} \cdot h_{FPZ} \cdot b$ . Dans un premier temps, la largeur moyenne  $h_{FPZ}$  de la zone d'élaboration est estimée à partir des champs d'endommagement obtenus numériquement. Pour cela nous proposons une méthode analogue à celle utilisée dans le cadre de l'émission acoustique. On considère la distribution des points de Gauss endommagés ( $D > 0$ ) suivant  $\vec{x}$  (i.e., perpendiculaire en sens de propagation). Pour chaque longueur élastique équivalente, un ajustement de la distribution des sites endommagés ( $D > 0$ ) suivant  $\vec{x}$  est réalisé par une loi Gaussienne. Selon Haidar [Haidar, 2005], la hauteur de la zone d'élaboration peut alors être estimée par une ligne horizontale qui intercepte la fonction de densité de probabilité (exprimée par la loi Gaussienne) à 20% de la valeur maximale (Figure 4.25).

La Figure 4.26 montre l'évolution de la largeur moyenne de la zone d'élaboration  $h_{FPZ}$  pour différentes longueurs élastiques équivalentes de fissure (simulation WST 250 #2). En comparant l'évolution de  $h_{FPZ}$  avec la courbe-R correspondante, on peut constater que la largeur  $h_{FPZ}$  augmente en phase de développement de la zone d'élaboration de la rupture puis reste approximativement constante en phase de propagation auto-similaire. Sur cette base, la valeur  $h_{FPZC}$  est considérée ici comme la largeur critique de la zone d'élaboration.

La largeur moyenne  $h_{FPZ}$  étant définie pour chaque instant du processus de rupture le vo-

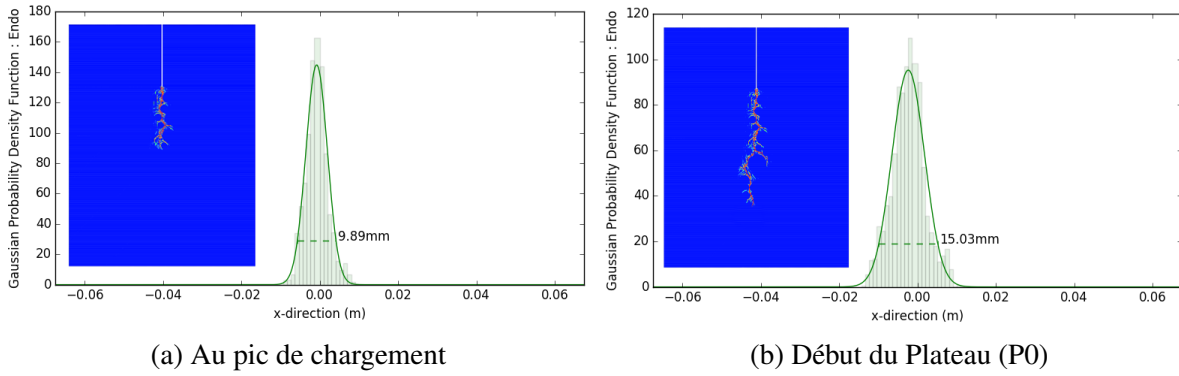


FIGURE 4.25 – Distribution Gaussienne des points de Gauss endommagés à deux instants (Pic et P0) et détermination de  $h_{FPZ}$  - WST 250 #2

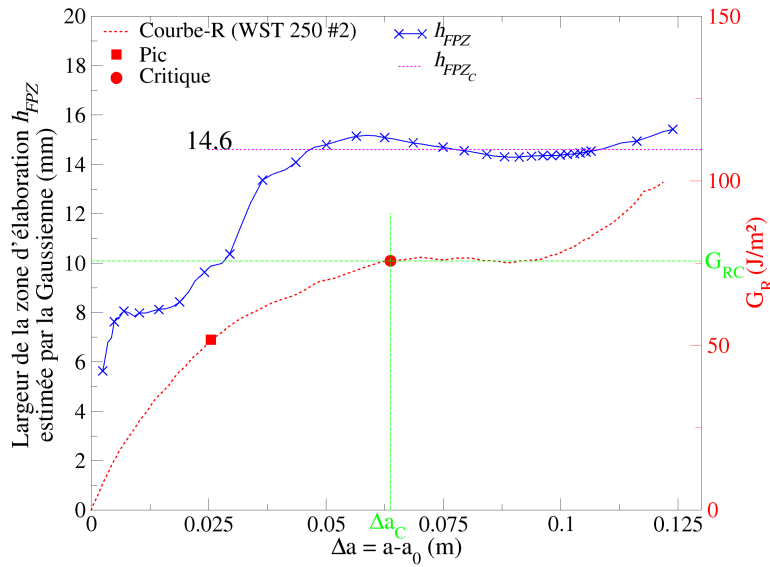


FIGURE 4.26 – Évolution de la largeur de la zone d'élaboration  $h_{FPZ}$  calculé à partir de la loi Gaussienne

lume de la zone d'élaboration  $V_{FPZ} = L_{box} \cdot h_{FPZ} \cdot b$  est estimé et permet d'exprimer le taux de restitution d'énergie d'endommagement volumique  $G_d$  (par volume de zone d'élaboration) :

$$G_d(\delta a, h_{FPZ}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n W_{r,i}}{L_{box} \cdot h_{FPZ} \cdot b} \right) \frac{1}{\delta a} \quad (4.10)$$

où  $W_{r,i}$  est l'énergie restituée en Joules par un point de Gauss  $i$  situé dans le volume  $V_{FPZ}$  pour un incrément de fissure élastique équivalente  $\delta a$  et  $n$  le nombre de points de Gauss restituant de l'énergie ( $\Delta D > 0$  pendant l'incrément considéré) dans  $V_{FPZ}$ . Notons qu'il est à nouveau nécessaire de normaliser la quantité  $G_d$  (exprimé ici en  $J/m^3/mm$  de zone d'élaboration) par rapport à l'incrément de fissure élastique équivalente  $\delta a$  car ce dernier n'est pas constant entre 2 pas successifs de calcul. La Figure 4.27, montre l'évolution de  $G_d$  pour différentes longueurs de fissures élastiques équivalentes  $\Delta a$ . On peut constater que le paramètre  $G_d$  chute fortement en début de processus, sur les premières valeurs de longueur de fissure, avant d'atteindre une valeur constante peu avant la phase de propagation auto-similaire de la fissure principale. Ainsi, du fait que  $G_d$  montre une forte évolution en phase de développement de la zone d'élaboration, le taux de restitution d'énergie d'endommagement volumique ne semble pas le critère approprié pour décrire ce développement.

Prenons maintenant l'exemple d'une simulation portant sur une autre géométrie, à savoir

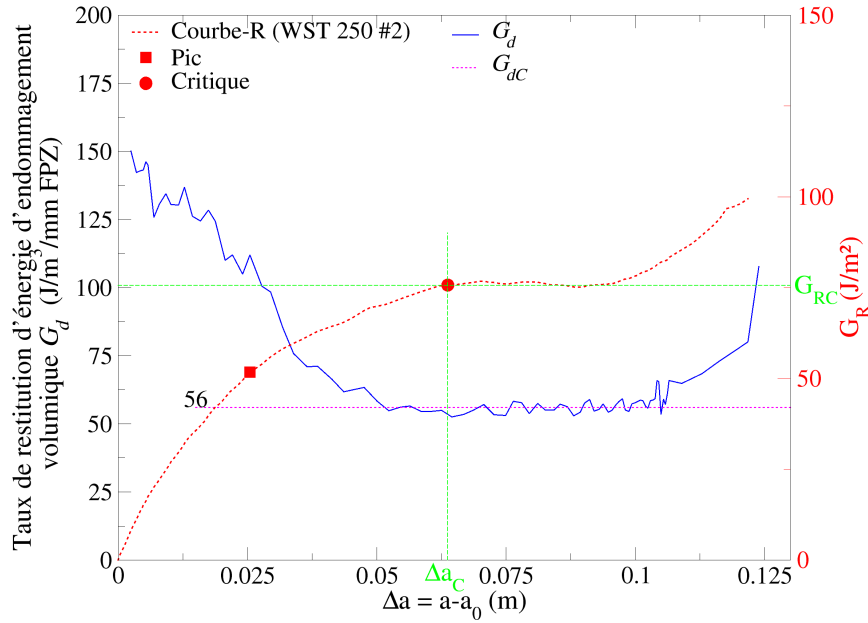


FIGURE 4.27 – Taux de restitution d'énergie volumique  $G_d$  - WST 250 #2

la WST 300 et plus particulièrement, celle du tirage #4 montrant un régime plateau manifeste. Suivant la même procédure que décrite précédemment, l'évolution du taux de restitution d'énergie volumique  $G_d$  en fonction de l'avancée de la fissure élastique équivalente est tracée sur la Figure 4.28. Encore une fois, précédé d'une chute importante en début de processus, un régime stationnaire de  $G_d$  semble se mettre en place légèrement avant le régime plateau (à partir d'une avancée de fissure élastique équivalente  $\Delta a = 34 \text{ mm} < \Delta a_C = 53,1 \text{ mm}$ ). A partir du régime stationnaire, le paramètre  $G_{dC}$ , comme étant le taux de restitution d'énergie d'endommagement volumique critique, est calculé comme étant la moyenne des  $G_d$  du régime du stationnaire.

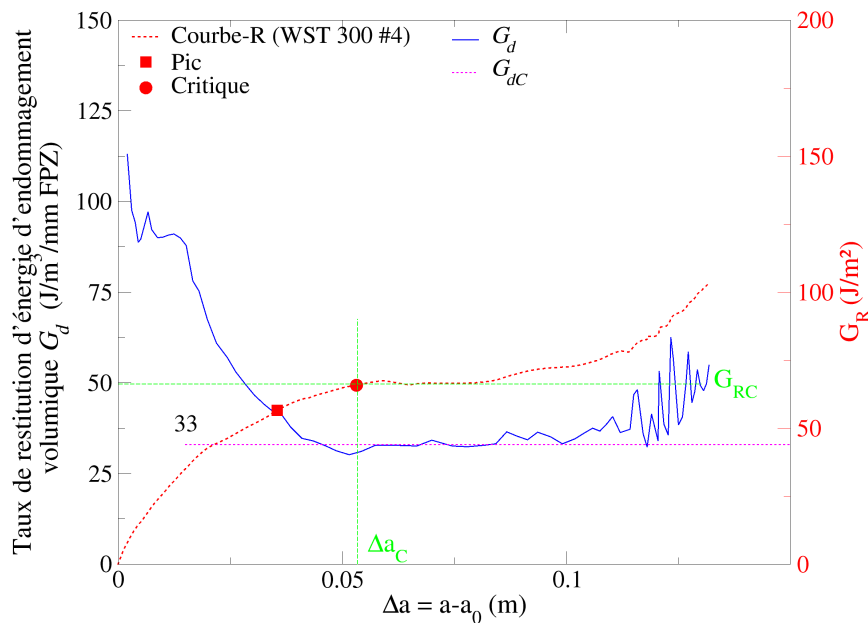


FIGURE 4.28 – Taux de restitution d'énergie volumique  $G_d$  - WST 300 #4

Notons que pour les 2 simulations présentées en Figures 4.27 (WST 250 #2) et 4.28 (WST



300 #4),  $G_d$  montre une augmentation en fin de simulation au moment où la résistance de la fissure élastique équivalente augmente à nouveau après le régime plateau. Cette augmentation conjointe de  $G_d$  et  $G_R$  illustre le phénomène de confinement de la zone d'élaboration : le changement de volume de la zone d'élaboration du fait des conditions aux limites du spécimen et l'augmentation des énergies restituées dans ce volume (jusqu' alors stationnaires) provoque une augmentation du taux de restitution d'endommagement volumique et donc de la résistance à la propagation de la fissure élastique équivalente correspondante.

A ce titre, si on considère maintenant un spécimen ayant montré une courbe-R monotone croissante (i.e., sans propagation auto-similaire de la fissure principale) comme l'éprouvette WST 250 #2 simulée au Chapitre 3, alors on peut constater sur la Figure 4.29 que l'évolution du taux de restitution d'énergie d'endommagement volumique  $G_d$  n'est plus du tout la même que celles des précédentes simulations (Figure 4.27 et 4.28). En effet, en début de processus, la chute de  $G_d$  constatée sur les précédentes simulations, laisse place à un régime pseudo-stationnaire en début de processus suivi d'une évolution continue en fonction de  $\Delta a$  confirmant l'influence des conditions aux limites sur le développement de la zone d'élaboration et la propagation de la fissure principale (avec sa zone d'élaboration) et ce tout au long du processus de fissuration.

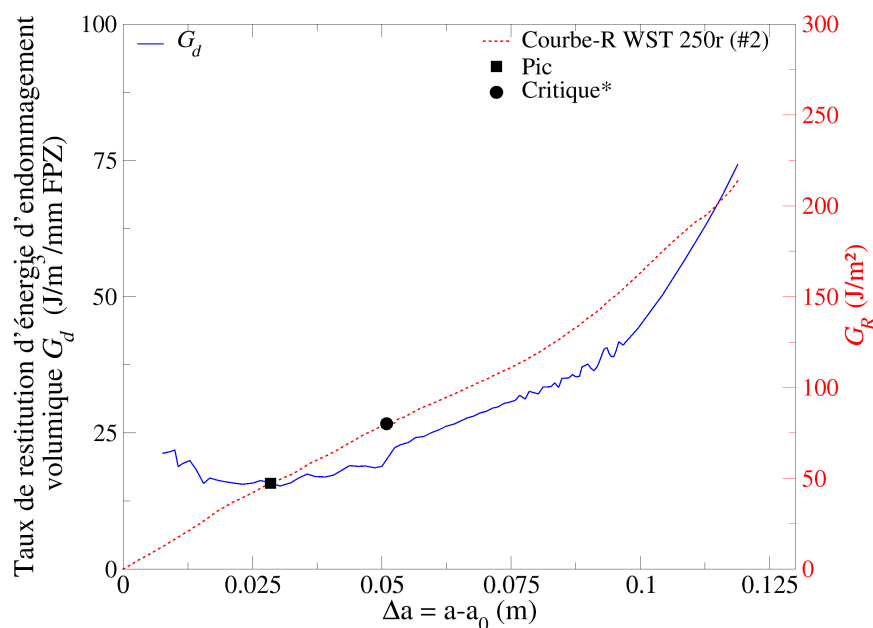


FIGURE 4.29 – Taux de restitution d'énergie volumique  $G_d$  - WST 250 #2 (propriétés du Chapitre 3)

Pour résumer, il semble donc que l'hypothèse d'un taux de restitution d'énergie critique d'endommagement volumique  $G_{dC}$  (i.e., exprimé par unité de volume de la zone d'élaboration) ne soit pas un critère pertinent du développement de la zone d'élaboration à partir de l'entaille initiale tout comme celui du régime de propagation auto-similaire de la fissure principale. En effet, la forte évolution de  $G_d$  en phase de développement comme critère de développement de la zone d'élaboration élimine de fait ce paramètre. De plus, pour affirmer que le taux de restitution critique d'énergie d'endommagement volumique soit un critère de développement de la zone d'élaboration dans les matériaux quasi-fragiles, il faudrait que ce taux ne dépende que de la mésostructure du matériau et donc soit indépendant de la géométrie du spécimen. Cela ne semble pas être le cas des simulations analysées où une différence importante est constatée entre les taux critiques de restitution d'énergie d'endommagement volumique ( $G_{dC}^{WST250 \#2} = 56$

contre  $G_{dC}^{WST300 \#4} = 33 \text{ J/m}^3/\text{mm}$ ).

### 4.3.4 Taux de restitution d'énergie d'endommagement local

Dans cette dernière section, reprenons l'étude réalisée à la Section 4.3.2 sur la distribution des taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}(y)$ . Dans un premier temps, les maxima locaux, liée à l'historique des distributions jusqu'aux différents instants (Pic, P0, P1 et C) sont tracées et analysées (Figure 4.30). On remarque qu'à la fin de la simulation et en omettant les 20 derniers millimètres (i.e, les 5 dernières bandes proches de l'extrémité du spécimen), chaque bande montre une valeur maximum qui semble décroître de  $1,70 \text{ J/m}^2/\text{mm}$  pour la bande proche de l'entaille initiale jusqu'à  $0,9 \text{ J/m}^2/\text{mm}$  pour les bandes proches de l'extrémité opposée du spécimen. Notons toutefois qu'en fin de simulation cette tendance à la décroissance des maxima des taux locaux de restitution d'énergie d'endommagement s'inverse au profit d'une augmentation significative des maxima locaux notamment dans les bandes correspondant aux 20 derniers millimètres du ligament. Cette forte croissance des valeurs des taux est sans doute liée au phénomène de confinement de la zone d'élaboration.

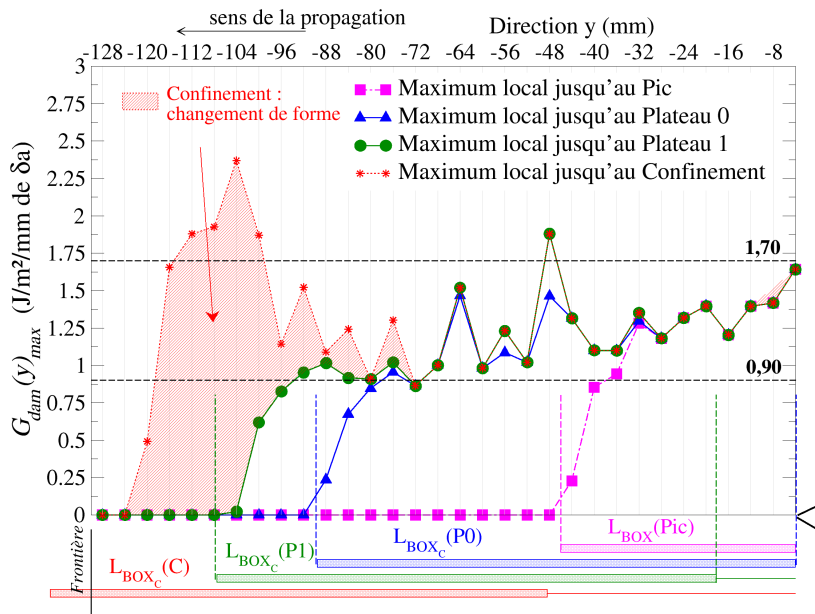


FIGURE 4.30 – Maxima locaux des distribution du taux de restitution pour chaque tranche  $h_{tr} = 4 \text{ mm}$  - WST 250 #2

Revenons cependant, sur la valeur des taux de restitution d'énergie d'endommagement constatée pour les bandes situées près de l'entaille initiale pour lesquelles une valeur moyenne semble se dessiner. A l'exception de la bande située à proximité de l'entaille initiale montrant une valeur de  $1,70 \text{ J/m}^2/\text{mm}$ , les bandes suivantes semblent montrer une valeur quasi-constante avoisinant les  $1,25 \text{ J/m}^2/\text{mm}$ . Notons que les valeurs de  $G_{dam}$  sont tributaires de la largeur de bande choisie, ici  $h_{tr} = 4 \text{ mm}$ , qui pourrait être un peu faible en regard de la mésostructure du matériau et pourrait induire une dispersion des résultats. Ainsi, dans la suite, nous proposons d'augmenter la largeur  $h_{tr}$  afin de diminuer l'influence de la mésostructure et de regarder, pour chaque bande considérée l'historique de l'évolution du taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}(y, a)$  en fonction de la longueur de fissure élastique équivalente.

Les Figures 4.31 et 4.32 montrent respectivement l'évolution de  $G_{dam}(y, a)$  au sein de chaque bande pour les spécimens WST 250 #2 et WST 300 #4. Ces figures montrent qu'il existe effectivement une valeur maximale du taux local de restitution d'énergie d'endommagement approximativement égale à 1,25 J/m<sup>2</sup>/mm pour les premières bandes, i.e., celle situées près de l'entaille initiale.

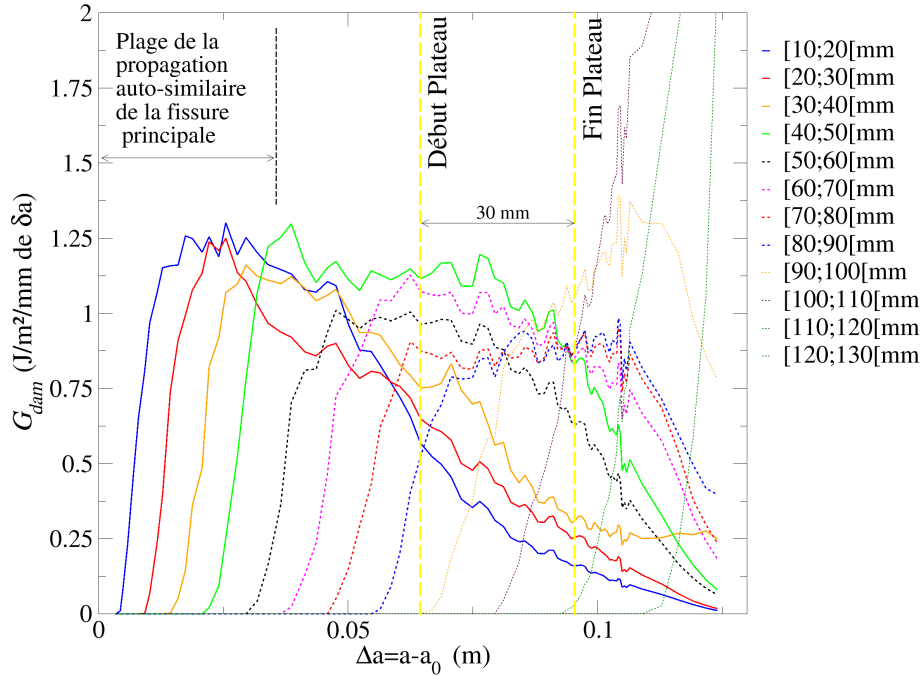


FIGURE 4.31 – Évolution du taux local de restitution d'énergie  $G_{dam}$  dans chaque bande  $h_{tr}=10$  mm - WST 250 #2

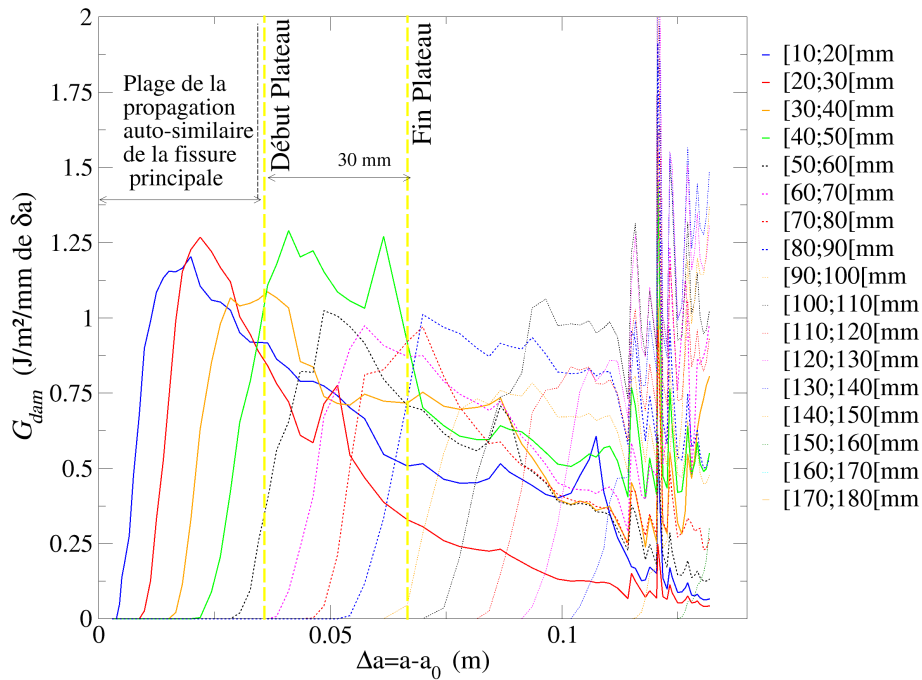


FIGURE 4.32 – Évolution du taux local de restitution d'énergie  $G_{dam}$  dans chaque bande  $h_{tr}=10$  mm - WST 300 #4

Soulignons également que les évolutions du taux de restitution d'énergie d'endommagement

local constatées pour les premières bandes montrent une allure analogue à celle d'un comportement cohésif, comme mis en évidence sur la Figure 4.33 (monté rapide jusqu'à  $G_{dam} = 1,25$  J/m<sup>2</sup>/mm suivie d'une décroissance lente). L'allure « post-pic » de ces évolutions, dépend grandement de la mésostructure, i.e., la présence d'une densité importante de granulats au voisinage de la fissure réelle passant dans la bande considérée et également de la présence des conditions aux limites. Ainsi, l'évolution des  $G_{dam}$  locaux semblent mettre en évidence l'existence d'un taux de restitution d'énergie d'endommagement critique  $G_{dam_C}$  qui pourrait expliquer le développement de la zone d'élaboration

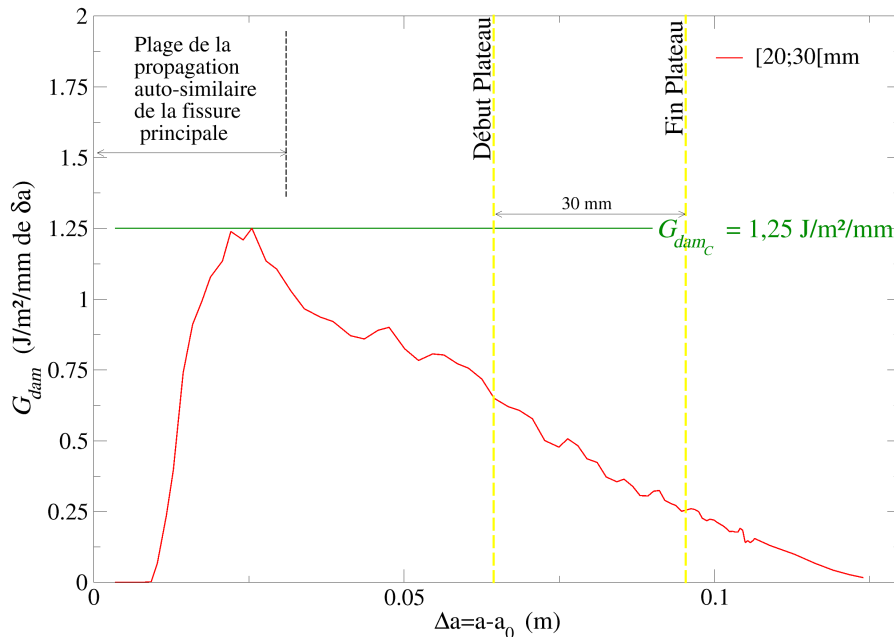


FIGURE 4.33 – Évolution de  $G_{dam}(y, a)$  dans la bande considérant les 20 à 30 premiers millimètre du ligament - WST 250 #2

Notons que ce  $G_{dam_C} = 1,25$  J/m<sup>2</sup>/mm est ici uniquement observé sur les 30 à 40 premiers millimètres de ligament à partir de l'entaille initiale c'est à dire dans la zone sur laquelle la fissure principale est attendue pour se propager de manière auto-similaire avant de subir les effets du confinement de la zone d'élaboration. La même analyse réalisée sur la simulation WST 300 #4 en Figure 4.32 montre que les maxima locaux  $G_{dam}(y, a)$  constatés sur les premières bandes semblent effectivement être les mêmes que ceux constatés pour le spécimen WST 250 #2, i.e.,  $G_{dam_C} = 1,25$  J/m<sup>2</sup>/mm. Ainsi, un critère indépendant à la géométrie semble se dégager.

Dans le cas d'un spécimen ayant montré un confinement précoce de la zone d'élaboration (par exemple le spécimen WST 250 #2 présenté au Chapitre 3), les distributions des taux de restitution d'énergie d'endommagement locaux ne montrent pas de valeurs critiques comme illustré sur la Figure 4.34.

Ainsi, il semble bien que le critère de développement de la zone d'élaboration puisse s'exprimer à partir du taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}(y)$  par l'intermédiaire d'une valeur critique  $G_{dam_C}$  à partir de laquelle l'endommagement prenant place dans une bande proche de l'entaille initiale est contraint de se propager aux bandes suivantes car ne pourra plus restituer que des énergies inférieures à  $G_{dam_C}$  sur la bande considérée.

1. Cette évolution peut être vue comme une « ligne d'influence du taux de restitution d'énergie d'endommagement  $G_{dam}(y)$  ».

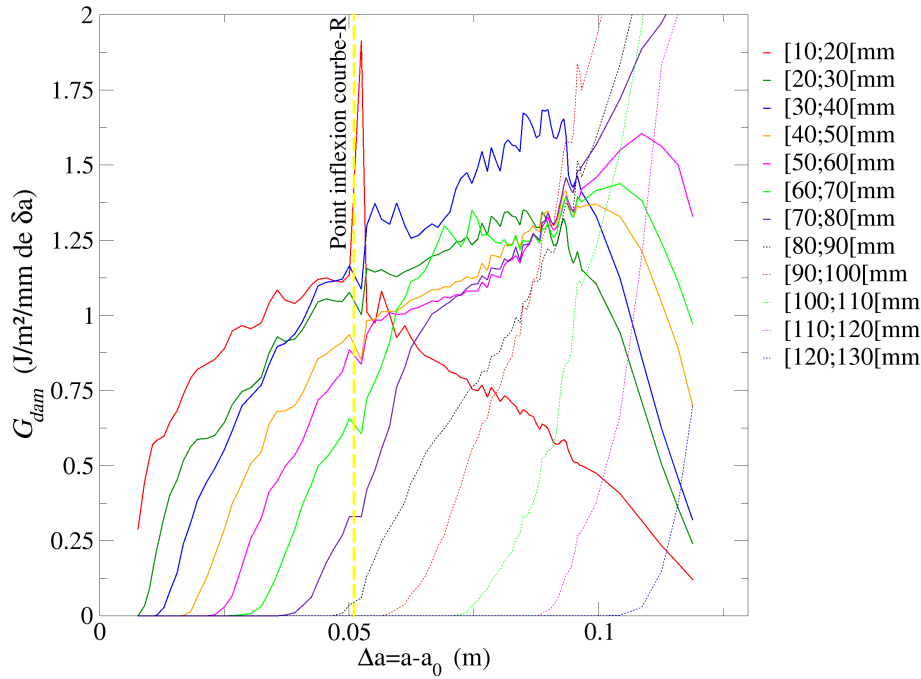


FIGURE 4.34 – Évolution du taux local de restitution d'énergie  $G_{dam}$  dans chaque bande  $h_{tr}=10$  mm pour une simulation présentant un confinement précoce de la zone d'élaboration - WST 250 #2 (propriétés béton expérimental du Chapitre 3)

Par ailleurs, notons que la résistance à la propagation de la fissure élastique équivalente  $G_R(a)$  peut être obtenue à partir des évolutions des  $G_{dam}(y, a)$  (Figures 4.31 et 4.32) en effectuant la somme des valeurs de  $G_{dam}$  de toutes les positions  $y$  pour une valeur de  $a$  considérée :

$$G_R(a) = \int_y G_{dam}(y, a) \quad (4.11)$$

De plus, l'énergie de rupture locale  $G_{F_{loc}}$  d'une bande considérée à la position  $y$  peut être obtenue à partir de l'intégrale de  $G_{dam}(y)$  pour toutes les longueurs  $a$  :

$$G_{F_{loc}}(y) = \int_a G_{dam}(y, a) \quad (4.12)$$

Les Figures 4.35 et 4.36 montrent respectivement l'évolution des énergies de rupture locales, i.e., le long du ligament, pour les spécimens WST 250 #2 et WST 300 #4. On peut constater à partir des Figures 4.35 et 4.36 que, si l'énergie de rupture est effectivement constante et égale à la résistance plateau  $G_{RC}$  dans les premières bandes associées à la propagation auto-similaire de la fissure principale, cette énergie de rupture diminue ensuite de manière continue jusqu'à la fin du processus de rupture. Cette diminution est sans doute la signature du phénomène de confinement de la zone d'élaboration lors de la propagation de la fissure principale. Ainsi, seule l'estimation à la plage de propagation auto-similaire de la fissure principale permet d'obtenir une estimation fiable de l'énergie de rupture. Néanmoins, cette énergie de rupture ne peut être considérée comme intrinsèque à la mésostructure car, comme la résistance plateau  $G_{RC}$ , cette dernière apparaît également dépendante de la géométrie considérée.

Enfin, les énergies de rupture locale  $G_{F_{loc}}(y)$  sont également comparées à l'énergie de rupture moyenne  $G_F$  (calculée à partir de l'aire sous la courbe force-CMOD divisée par la surface

du ligament<sup>2</sup> comme le montre les Figures 4.35 et 4.36. On peut constater que  $G_F$  conduit à une estimation par défaut de l'énergie de rupture associée à la propagation auto-similaire de la fissure principale.

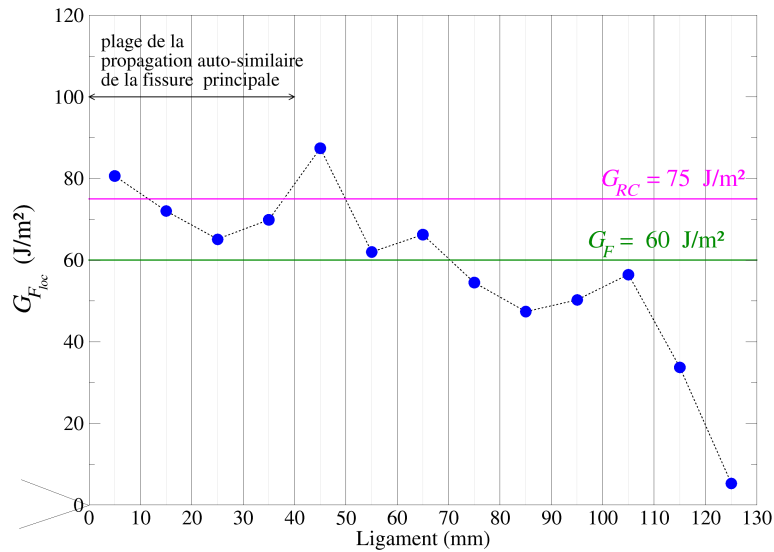


FIGURE 4.35 – Énergie de rupture locale  $G_{F_{loc}}(y)$  - WST 250 #2

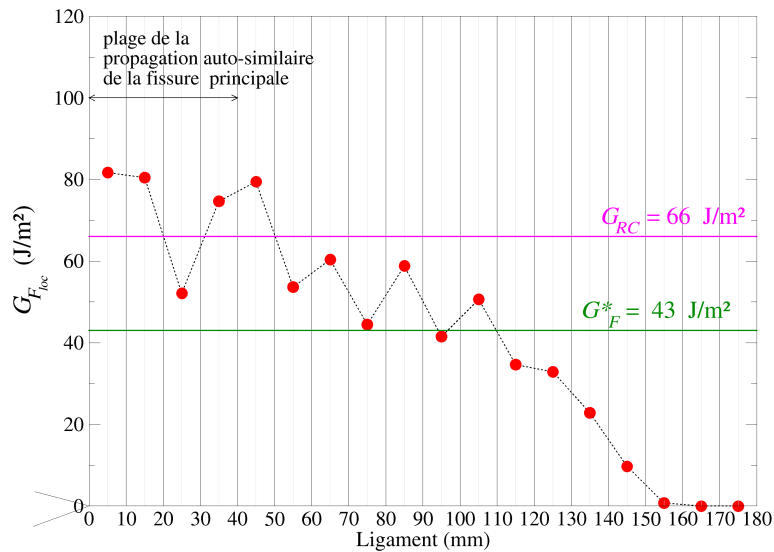


FIGURE 4.36 – Énergie de rupture locale  $G_{F_{loc}}(y)$  - WST 300 #2

Ainsi, si le taux local de restitution d'énergie d'endommagement critique  $G_{dam_C}$  semble être uniquement dépendant de la mésostructure, tous les autres paramètres de rupture calculés sur la base de la MLER équivalente ( $G_R(a)$ ,  $G_{RC}$ ) ou relevant d'une estimation moyenne comme l'énergie de rupture  $G_F$  sont non seulement dépendants de la mésostructure mais également de la géométrie du spécimen.

2. L'énergie de rupture moyenne  $G_F$  peut également être obtenue à partir des distributions des taux de restitutions d'énergie d'endommagement locaux  $G_F = \frac{\int_y G_{F_{loc}}(y)b.dy}{A_{lig}}$ .

Néanmoins, l'affirmation de  $G_{dam_C}$  comme critère de développement de la zone d'élaboration et intrinsèque à la mésostructure devrait être étayée par des simulations supplémentaires portant sur la même mésostructure de béton (compacité granulaire et propriétés de rupture des méso-constituants identiques) mais effectuées sur d'autres géométries<sup>3</sup> de spécimens (spécimen SENB par exemple).

Pour ce faire, une nouvelle étude est réalisée à partir de trois géométries de spécimens différentes correspondant aux éprouvettes WST 250 et WST 300 utilisées précédemment et une nouvelle géométrie nommée SENB 400 géométriquement similaire à l'éprouvette SENB utilisée au Chapitre 2 mais présentant une hauteur de 400 mm (i.e., dont les dimensions sont multipliées par deux par rapport au spécimen H1). Pour ces simulations les propriétés des mésoconstituants sont celles reportées au tableau 4.1. De plus, afin de minimiser l'effet de l'arrangement granulaire sur les propriétés de rupture, les simulations des trois géométries sont effectuées à partir d'un même arrangement granulaire. Notons que le choix d'une hauteur de 400 mm pour le spécimen SENB est ici effectué afin de favoriser la propagation auto-similaire de la fissure principale. La réponse macroscopique force-déplacement et la courbe-R correspondante obtenues à partir du spécimen SENB 400 sont présentées en Annexe J.

En premier lieu, la Figure 4.37 montre que les champs d'endommagement obtenus à partir de ces trois simulations sont quasi-identiques, mettant en exergue l'importance de la position des granulats sur la fissuration.

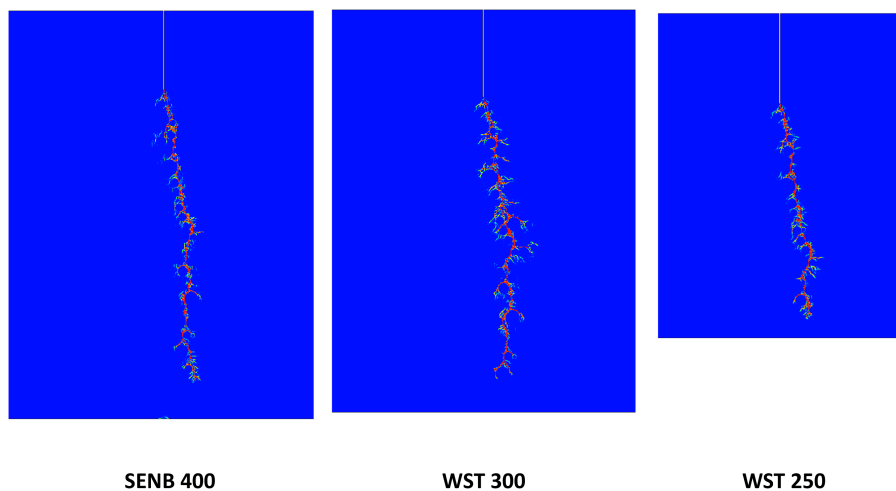


FIGURE 4.37 – Champs d'endommagement à la fin des simulations sur les trois géométries considérées

La procédure d'estimation du taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}$  est de nouveau reconduite pour ces trois simulations. La Figure 4.38 présente l'évolution du taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}$  pour une bande située à proximité de l'entaille initiale (entre 10 et 20 mm) pour les trois géométries. Ces évolutions de  $G_{dam}(a)$  confirment l'existence d'un critère  $G_{dam_C}$  ( $\simeq 1,25 \text{ J/m}^2/\text{mm}$ ) dépendant uniquement de la mésostructure. En revanche, la partie décroissante des évolutions de  $G_{dam}(a)$  apparaît clairement dépendante de la géométrie du spécimen (et bien évidemment de la mésostructure). L'existence d'un  $G_{dam_C}$  identique sur les trois géométries ainsi que la dépendance à la géométrie de la queue de distribution de  $G_{dam}(a)$  sont également constatées sur les autres bandes situées à proximité

3. La définition de géométrie inclut le mode de sollicitation.

immédiate de l'entaille initiale pour les trois géométries.

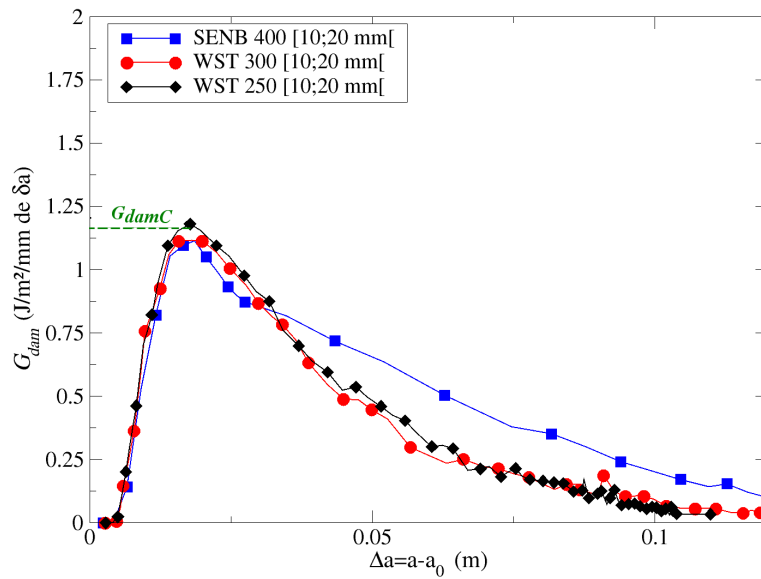


FIGURE 4.38 – Évolution du taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}(a)$  pour une bande située entre 10 et 20 mm de l'entaille initiale pour les trois géométries considérées

La Figure 4.39 montre les évolutions de l'énergie de rupture locale  $G_{F_{loc}}(y)$  (correspondant à l'intégrale de  $G_{dam}(a)$  pour une bande donnée) pour les trois géométries. Conformément à la dépendance de  $G_{dam}(a)$  vis-à-vis de la géométrie mise en évidence sur la Figure 4.38, les énergies de rupture locale apparaissent fonction de la géométrie et montrent une décroissance marquée vers la fin du ligament. Néanmoins, si l'énergie de rupture locale apparaît assez fluctuante le long du ligament du fait de la mésostructure, ces énergies avoisinent une valeur correspondant à la résistance plateau  $G_{RC}$  (Figure 4.40) sur les bandes situées à proximité de l'entaille initiale et correspondant à la plage de propagation auto-similaire de la fissure principale.

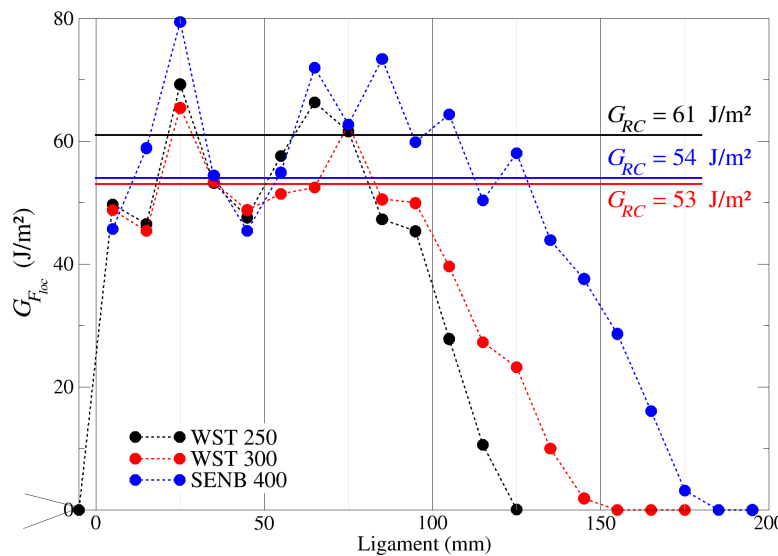


FIGURE 4.39 – Évolution de  $G_{F_{loc}}(y)$  le long du ligament pour les trois géométries considérées



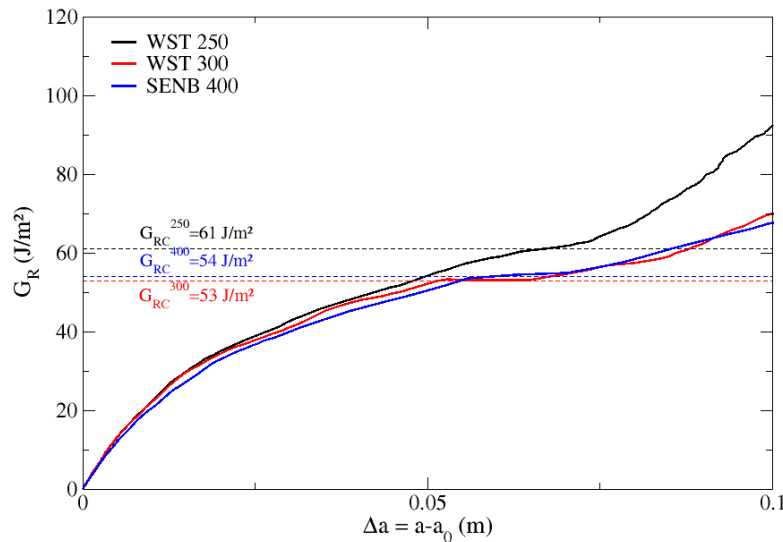


FIGURE 4.40 – Courbes de résistance des trois géométries considérées

## 4.4 Conclusion sur l'étude du processus de rupture à partir du modèle mésoscopique

L'objectif de ce dernier chapitre était de mettre en lumière le processus de développement de la zone d'élaboration de la rupture sur la base de simulations numériques effectuées à partir du modèle d'endommagement Fichant - La Borderie à l'échelle mésoscopique. Rappelons que les courbes de résistance, élaborées dans le cadre de la MLEReq, apporte une information à la fois sur le processus d'évolution de la zone d'élaboration et sur son étendue par l'intermédiaire de la longueur interne  $\Delta a_C$ . Ainsi, pour mener à bien cette étude, les simulations traitées se doivent de présenter un développement libre de la zone d'élaboration traduit par un régime plateau de la courbe-R correspondante. Sur cette base, une analyse détaillée sur les champs numériques d'endommagement  $D$ , d'endommagement instantané  $\Delta D$  et d'énergie restituée  $W_r$  a été réalisée en regard des différents régimes de la courbe-R servant de « grille de lecture ». Des nouvelles simulations WST, avec un nouveau jeu de paramètres, ont été réalisées afin d'obtenir des courbes-R présentant un développement libre de la zone d'élaboration suivi d'une propagation auto-similaire de la fissure principale. Dans un souci de clarté de l'analyse, seuls les résultats issus d'une simulation présentant une courbe-R ayant trois régimes distincts (développement, propagation et confinement de la zone d'élaboration) est présentée au cours de ce chapitre (d'autres simulations sont présentées en Annexe I).

Le processus de rupture est analysé à partir des champs numériques d'endommagement  $D$  et  $\Delta D$  (Section 4.2). L'étude de l'endommagement géométrique cumulé  $\overline{D}_{geo/\delta a}$  et de l'endommagement géométrique instantané  $\overline{\Delta D}_{geo/\delta a}$  (intégration des variables  $D$  et  $\Delta D$  sur la surface) moyens normalisés par l'incrément de fissure élastique  $\delta a$  montrent des changements de régime associés au développement et la propagation auto-similaire. Néanmoins, les variables d'endommagements  $D$  et  $\Delta D$ , à elles seules, ne permettent pas de rendre compte du phénomène de confinement de la zone d'élaboration.

L'évolution du processus d'endommagement est ensuite mise en exergue par la création de zones géométriques filtrées qui sont régies par des critères sur  $D$  et  $\Delta D$ . Ces zones montrent le phénomène de localisation de l'endommagement (précédé par un endommagement diffus). De

plus, la zone traitant de la création de nouvelles zones endommagées (critère C) montre que cette dernière se réduit en taille et se localise en avant de la zone d'élaboration au moment de la propagation auto-similaire.

La modélisation de la mésostructure ne rend pas facile l'étude de l'endommagement provoqué par une zone d'élaboration. En effet, des sites où l'endommagement est actif ( $\Delta D > 0$ ) peuvent se retrouver en arrière de la supposée zone d'élaboration après qu'elle est atteinte sa taille critique. Pour cette raison, un filtre a ensuite été réalisé sur la base des régimes de la courbe-R (Section 4.2.2). L'idée est d'imposer une taille limite de la zone d'élaboration ( $L_{box_C}$ ), de la faire propager d'un incrément  $\delta a$  égal à son image élastique équivalente et de regarder les activités à l'intérieur de cette boîte. L'étude de l'évolution de la distance moyenne entre les sites actifs  $\bar{dr}$  montrent que cette procédure est prometteuse afin d'isoler la zone d'élaboration et donc les mécanismes d'endommagement qui lui sont liés, et permet de s'affranchir d'une certaine manière du « bruit » pouvant être apporté par la mésostructure.

Enfin une étude énergétique de la zone d'élaboration a été réalisée. Si l'existence, d'un taux de restitution critique d'énergie d'endommagement volumique exprimé par unité de volume de la zone d'élaboration a été écartée, une étude de la distribution des taux locaux de restitution d'énergie d'endommagement  $G_{dam}$  le long du ligament a permis de manière visuelle et explicite d'illustrer l'évolution de la zone d'élaboration au sein de la simulation à l'échelle mésoscopique. Sur la base de cette étude, il semblerait qu'un critère local de type énergétique  $G_{dam_C}$  (J/m<sup>2</sup>) prenne place en phase de développement de la zone d'élaboration de la rupture et ce, indépendamment de la géométrie de la structure considérée. Néanmoins, si cette valeur critique apparaît uniquement fonction de la mésostructure, la queue de distribution de l'évolution  $G_{dam}(a)$  semble quant à elle fonction de la géométrie de la structure considérée. Cette dépendance de l'évolution de  $G_{dam}(a)$  vis-à-vis de la géométrie entraîne une dépendance analogue de l'énergie de rupture locale  $G_{F_{loc}}(y)$  vis-à-vis de la géométrie. De plus, l'énergie de rupture locale montre une forte décroissance en fin de ligament qui semble pouvoir être associée au phénomène de confinement de la zone d'élaboration de la rupture. Néanmoins, si ces premières analyses du taux de restitution d'énergie d'endommagement local  $G_{dam}$  semblent montrer l'existence d'une valeur critique dépendante de la mésostructure, suivie d'une queue de distribution dépendante de la géométrie, ces premières constatations méritent d'être confortées par l'analyse de simulations supplémentaires car ces résultats restent très perturbés par l'arrangement granulaire. Ces simulations supplémentaires devraient notamment être effectuées pour une mésostructure donnée mais pour différents tirages aléatoires des granulats afin d'effectuer une analyse à partir des valeurs moyennes de  $G_{dam}(a)$  le long du ligament.

# Conclusions générales et perspectives

## Conclusion générales

Ces travaux de thèse s'inscrivent à la suite de la thèse de N'Guyen (2010) portant sur « *L'apport de la modélisation mésoscopique dans la prédiction des écoulements dans les ouvrages en béton fissuré en conditions d'accident grave* » [N'Guyen, 2010] réalisée au laboratoire SIAME et en collaboration avec l'IRSN (Institut de Radio-protection de la Sûreté Nucléaire), durant lequel les potentiels du modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique, utilisé ici, ont été pour la première fois exposés. L'objectif, ici, est de renforcer la description du modèle d'endommagement Fichant-La Borderie à l'échelle mésoscopique et d'appliquer les outils de la Mécanique de la Rupture afin de mettre en lumière les grandes lignes du processus de rupture quasi-fragile du béton. Au cœur même du problème, on retrouve la zone d'élaboration de la rupture, élément pilotant le comportement et dépendant à la fois de la géométrie et de la taille de la structure, de la granulométrie, de l'arrangement spatial des granulats et des propriétés des constituants. Cette zone d'élaboration fait office ces dernières années d'une recherche accrue dans la communauté étudiant le comportement quasi-fragile. Ces travaux proposent une analyse de la zone d'élaboration de la rupture par une approche numérique, i.e., à partir des réponses du modèle mésoscopique, et s'appuyant sur des résultats expérimentaux.

Le Chapitre 2 présente le processus d'endommagement du béton numérique simulé par le modèle mésoscopique. Outre l'impact du sens de la sollicitation mécanique sur le processus de fissuration et de la bonne représentation de l'effet unilatéral, l'importance du seuil d'endommagement  $\varepsilon_{d0} = f_t/E$  et du paramètre  $B_t$  contrôlant la partie adoucissante de la réponse globale est mise en avant. En effet, le constituant ayant le plus faible seuil d'endommagement est le plus souvent celui qui pilotera l'endommagement global et pour lequel le paramètre  $B_t$ , largement influencé par l'énergie de fissuration moyenne  $G_f$  du constituant, donnera le caractère ductile de la réponse adoucissante et ce, pour une résistance à la traction  $f_t$  donnée. En d'autres termes, pour une résistance à la traction donnée, une énergie de fissuration élevée (i.e., un paramètre  $B_t$  faible), imposera un caractère plus ductile (et inversement). À l'échelle mésoscopique, le choix de ces paramètres a une influence sur la type de rupture, à savoir trans ou péri-granulaire. Un autre point aborde la grande dépendance de l'énergie de rupture finale  $G_F$  vis-à-vis de l'arrangement spatial des granulats du béton étudié. En effet, cette énergie est totalement dépendante du chemin de fissure et devient sur-estimée lors de la création de multiples fissures, d'où l'intérêt d'estimer l'énergie de rupture à partir d'éprouvettes entaillées. Ainsi, plus les petits granulats sont représentés, et plus la dépendance de  $G_F$  au tirage aléatoire est importante. Une étude sur la possibilité de la suppression des petites classes de granulats par une technique d'homogénéisation numérique a montré que si cette suppression est possible dans un contexte d'ingénierie (bonne estimation de la force au pic), l'homogénéisation est défailante pour reproduire l'intégralité du processus de fissuration du béton. En effet, le processus de fissuration et l'énergie mis en jeu sont totalement dépendants de la granulométrie et des différents mécanismes dissipatifs induits par les différentes classes des granulats.

Une application du modèle mésoscopique sur des poutres entaillées, de tailles homothétiques, sollicitées en flexion 3 points, a attesté l'influence de l'étendue de la zone d'élaboration, de taille conséquente, sur le processus de rupture et notamment du phénomène de confinement de la zone d'élaboration, phénomène souvent peu abordé dans la communauté. De plus, cette étendue a été rendue prévisible par lecture du positionnement des différentes tailles de poutres dans la loi d'effet d'échelle de Bažant.

L'application du modèle mésoscopique à la suite d'une campagne expérimentale sur des 2 géométries d'éprouvette Wedge Splitting a été réalisée (Chapitre 3). Les résultats expérimentaux et numériques, par estimation des courbes de résistance, attestent d'un développement non-libre de la zone d'élaboration dans le béton utilisé. A posteriori, les propriétés du béton, et plus particulièrement, les propriétés de ces constituants, couplées aux dimensions des éprouvettes WST choisies, permettent difficilement l'obtention d'un développement libre de la zone d'élaboration. L'importance du choix de la géométrie et de la taille d'une éprouvette en fonction des propriétés des constituants lors d'un essai de rupture a été mise en avant. Le développement non-libre de la zone d'élaboration, souvent invisible par lecture de la réponse macroscopique, apporte une information erronée sur l'énergie de rupture  $G_F$  obtenue à partir de l'aire sous la courbe force-déplacement qui semble alors être sur-estimée. Il devient donc cruciale, à la suite d'un essai de rupture, de déterminer si la zone d'élaboration est négligeable par rapport à la taille et dans le cas échéant si elle a pu se développer librement. Cette détermination peut se faire notamment à partir de l'estimation de courbes de résistance. Au final, après une étude EF en élasticité, l'essai WST (ouverture de fissure) semble présenter une zone de compression, non-négligeable pouvant grandement perturber l'évolution de la zone d'élaboration : l'utilisation de ce type d'essai devrait aujourd'hui être précédée d'une analyse du risque de confinement de la zone d'élaboration pour une dimension donnée.

A la suite du Chapitre 3 un confinement manifeste de la zone d'élaboration a été détecté en utilisant les propriétés du béton expérimental. Ce confinement n'est pas souhaitable pour l'étude de l'évolution des paramètres locaux, exprimés aux points de Gauss (endommagement et énergie restituée essentiellement). En effet, si l'on veut voir apparaître une tendance, liée au processus de rupture, il est indispensable pour cette nouvelle étude, d'avoir un développement libre de la zone d'élaboration. C'est pour cette raison que des nouvelles simulations avec un nouveau jeu de paramètres ont été réalisées dans le but d'obtenir un matériau plus « fragile » et favorisant un développement libre de la zone d'élaboration (i.e., une simulation présentant clairement une propagation auto-similaire de la fissure principale). En se servant de la courbe-R de la simulation analysée comme « grille de lecture », les évolutions de différents paramètres sont étudiées. Ainsi, il a été remarqué, que l'étude seule des paramètres d'endommagement ( $D$  et  $\Delta D$ ) n'apportait pas vraiment d'information sur le processus de rupture lié au développement de la zone d'élaboration mais plus sur le processus d'endommagement proposé par le modèle. De plus, la prise en compte de la mésostructure complexifie grandement cette étude dans la mesure où de l'endommagement actif aux niveaux des interfaces a été constaté et ce, continuellement au bord des lèvres de fissures créées. Cette problématique peut être résolue par la création d'une zone filtrée jouant le rôle d'une zone d'élaboration. Zone appelée « boîte » a été créée par couplage avec les courbes-R attestant d'un régime plateau probant.

Le choix d'étudier le champ des énergies restituées semble être une solution afin d'analyser le processus de rupture apporté par la zone d'élaboration de la rupture. Si l'étude menée a permis d'éliminer l'existence d'un taux de restitution critique d'endommagement volumique (exprimé par unité de volume de la zone d'élaboration), l'analyse de la distribution des taux

locaux de restitution d'énergie d'endommagement (exprimée en  $J/m^2/mm$  de  $\delta a$ ) illustre très bien le processus d'évolution, du développement de la zone d'élaboration au confinement en passant par la propagation auto-similaire de la fissure principale avec sa zone d'élaboration. De plus, l'étude de l'évolution du taux local de restitution d'énergie d'endommagement dans différentes bandes du ligament montre l'existence d'une valeur critique de ce taux de restitution d'énergie d'endommagement, assimilable à un critère énergétique en phase de développement de la zone d'élaboration. Cependant, ce critère est visible sur les premières bandes, proche de l'entaille initiale, qui sont très peu influencées par le confinement de la zone d'élaboration et par les conditions aux limites. L'étude de la distribution des taux locaux de restitution d'énergie d'endommagement a également permis d'estimer les énergies de rupture locales. Si ces dernières restent constantes sur la plage de propagation auto-similaire de la fissure principale, elles diminuent ensuite sur le reste du ligament et ne peuvent être considérées comme intrinsèque à la mésostructure car dépendantes de la géométrie considérée et influencées par le phénomène de confinement de la zone d'élaboration.

## Perspectives

Lors de la campagne d'essai WST, des capteurs piézoélectriques positionnés sur une face latérale ont enregistré les événements acoustiques causés par le relâchement soudain d'une énergie résultante d'une micro-fissuration. Ces données de l'émission acoustique (analogie des sites à endommagement actifs aux localisations des événements possédant une énergie et une amplitude) mériteraient d'être traitées en suivant une démarche analogue proposée au cours du dernier chapitre, afin de mettre en évidence le processus d'évolution de la zone d'élaboration et son confinement manifeste. De plus, deux caméras placées de part et d'autre des spécimens ont enregistré au cours de chaque essai l'évolution de l'éprouvette, à des fins d'un traitement de corrélation d'images numériques (CIN). Ainsi, les champs de déplacements (et de déformations) expérimentaux obtenus pourraient être traités afin d'illustrer la zone d'élaboration. Notons que l'utilisation des données CIN peuvent s'avérer intéressante afin d'expliquer des phénomènes perçus par l'EA. A partir, d'une procédure intéressante, développée au laboratoire GEMH (Université de Limoges), il serait possible d'apporter une visualisation de la zone d'élaboration expérimentale. Cette procédure se base sur la résolution, dans le cadre de la MLER, des séries de Williams [Williams, 1957] (termes de haut degrés) par calage du champ analytique des déplacements sur le champ expérimental des déplacements [Jamaoui et al., 2015]. A partir de là, en omettant ce calage sur une zone d'intérêt prenant place le long du ligament, la partie où les champs attendus (i.e., optimisés) par la MLER ne coïncident pas les champs expérimentaux, pourrait fournir une estimation du volume de la zone d'élaboration.

Numériquement, afin de se rapprocher au plus du comportement réel, il faudrait réaliser des simulations en 3D et/ou un « bruitage » des paramètres d'entrée du modèle ( $E$ ,  $f_t$ , et  $G_f$  par exemple) suivant une distribution Gaussienne ou par la théorie des bandes tournantes, afin de favoriser à la fois une rupture péri et intra-granulaire. De plus, afin de valider l'existence d'un taux local de restitution d'énergie d'endommagement critique  $G_{damC}$  comme étant un paramètre intrinsèque à la mésostructure, des analyses supplémentaires devraient être réalisées dans un premier temps sur différentes géométries et, dans un second temps en modifiant les propriétés de rupture des méso-constituants pour l'ensemble des géométries.

Enfin, sur la base de ces travaux, il serait intéressant de formuler un critère permettant l'estimation du volume/taille de la zone d'élaboration fonction du matériau et de la géométrie considérée dans le but à l'avenir de proposer des essais de rupture favorisant la propagation auto-

similaire de la fissure principale ou en d'autres termes limitant le phénomène de confinement de la zone d'élaboration.

# Bibliographie

- [50-FMC, 1985] 50-FMC, R. (1985). Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. *Materials and Structures*, 18(106) :45–48. [8](#), [49](#), [92](#)
- [Alam et al., 2015] Alam, S., Loukili, A., Grondin, F., and Rozière, E. (2015). Use of the digital image correlation and acoustic emission technique to study the effect of structural size on cracking of reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 143 :17–31. [16](#)
- [Alam, 2011] Alam, S. Y. (2011). *Experimental study and numerical analysis of crack opening in concrete*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes. [16](#)
- [Alam et al., 2014] Alam, S. Y., Saliba, J., and Loukili, A. (2014). Fracture examination in concrete through combined digital image correlation and acoustic emission techniques. *Construction and Building Materials*, 69 :232–242. [16](#), [17](#)
- [Bažant, 1992] Bažant, Z. P. (1992). *Fracture Mechanics of Concrete Structures : Proceedings of the First International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FraM-CoS1), held at Beaver Run Resort, Breckenridge, Colorado, USA, 1-5 June 1992.*, volume 1. CRC Press. [82](#)
- [Bažant, 1999] Bažant, Z. P. (1999). Size effect on structural strength : a review. *Archive of applied Mechanics*, 69(9-10) :703–725. [11](#)
- [Bažant, 2000] Bažant, Z. P. (2000). Size effect. *International Journal of Solids and Structures*, 37(1–2) :69–80. [11](#)
- [Bažant, 2002] Bažant, Z. P. (2002). Concrete fracture models : testing and practice. *Engineering fracture mechanics*, 69(2) :165–205. [94](#)
- [Bažant et Chen, 1997] Bažant, Z. P. and Chen, E.-P. (1997). Scaling of structural failure. *Applied Mechanics Reviews*, 50(10) :593–627. [122](#), [123](#)
- [Bažant et Jirásek, 1993] Bažant, Z. P. and Jirásek, M. (1993). R-curve modeling of rate and size effects in quasibrittle fracture. *International Journal of Fracture*, 62(4) :355–373. [16](#)
- [Bažant et Kazemi, 1990] Bažant, Z. P. and Kazemi, M. T. (1990). Size effect in fracture of ceramics and its use to determine fracture energy and effective process zone length. *Journal of the American Ceramic Society*, 73(7) :1841–1853. [12](#), [21](#), [114](#)
- [Bažant et Oh, 1983] Bažant, Z. P. and Oh, B. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16 :155–177. [15](#), [25](#), [49](#)
- [Bažant et Oh, 1985] Bažant, Z. P. and Oh, B. H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(4) :559–582. [34](#)
- [Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989] Bažant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. (1989). Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4) :755–767. [38](#)
- [Bažant et Planas, 1997] Bažant, Z. P. and Planas, J. (1997). *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. New Directions in Civil Engineering. Taylor & Francis. [12](#), [22](#), [71](#), [72](#)

- [Bažant et al., 1990] Bažant, Z. P., Tabbara, M. R., Kazemi, M. T., and Pijaudier-Cabot, G. (1990). Random particle model for fracture of aggregate of fiber composites. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(8) :1686–1705. 42
- [Bažant et Yavari, 2005] Bažant, Z. P. and Yavari, A. (2005). Is the cause of size effect on structural strength fractal or energetic–statistical ? *Engineering Fracture Mechanics*, 72(1) :1–31. 12
- [Bisoffi-Sauve, 2016] Bisoffi-Sauve, M. (2016). *Etude des ouvrages maçonnés en pierre par la méthode des éléments discrets - caractérisation et modélisation du comportement cohésif des joints*. Thèse, Bordeaux. 25
- [Bouchard, 2000] Bouchard, P. O. (2000). *Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structure multimatériaux*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. 19
- [Brühwiler et Wittmann, 1990] Brühwiler, E. and Wittmann, F. (1990). The wedge splitting test, a new method of performing stable fracture mechanics tests. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(1-3) :117–125. 82
- [Carpinteri, 1994] Carpinteri, A. (1994). Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mechanics of materials*, 18(2) :89–101. 11
- [Cotterell, 2002] Cotterell, B. (2002). The past, present, and future of fracture mechanics. *Engineering fracture mechanics*, 69(5) :533–553. 19
- [Coureau et al., 2013] Coureau, J.-L., Morel, S., and Durado, N. (2013). Cohesive zone model and quasibrittle failure of wood : A new light on the adapted specimen geometries for fracture tests. *Engineering Fracture Mechanics*, 109 :328–340. 92, 122
- [Cuvilliez, 2012] Cuvilliez, S. (2012). *Passage d'un modèle d'endommagement continu régularisé à un modèle de fissuration cohésive dans le cadre de la rupture quasi-fragile*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. 37
- [De Larrard, 1999] De Larrard, F. (1999). *Concrete mixture proportioning : a scientific approach*. CRC Press. 42
- [de Vree et al., 1995] de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M., and van Gils, M. A. J. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, 55(4) :581–588. 33
- [Denarié et al., 2001] Denarié, E., Saouma, V. E., Iocco, A., and Varelas, D. (2001). Concrete fracture process zone characterization with fiber optics. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(5) :494–502. 15
- [Desmorat et al., 2007a] Desmorat, R., Gatingt, F., and Ragueneau, F. (2007a). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10) :1539–1560. 33
- [Desmorat et al., 2007b] Desmorat, R., Gatingt, F., and Ragueneau, F. (2007b). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10) :1539–1560. 34
- [Durado, 2008] Durado, N. (2008). *R-Curve behaviour and size effect of a quasibrittle material : Wood*. Thèse, Université Bordeaux I. 82
- [Durado et al., 2008] Durado, N., Morel, S., De Moura, M., Valentin, G., and Morais, J. (2008). Comparison of fracture properties of two wood species through cohesive crack simulations. *Composites Part A : Applied science and manufacturing*, 39(2) :415–427. 25
- [Dubé et al., 2003] Dubé, J.-F., Pijaudier-Cabot, G., and La Borderie, C. (2003). Modèle d'endommagement microplans : Modèle utilisé par le LGCNSN et le LaSAGeC. *Revue Française de Génie Civil*, 7(5) :621–634. 50



- [Elices et al., 2002] Elices, M., Guinea, G. V., Gomez, J., and Planas, J. (2002). The cohesive zone model : advantages, limitations and challenges. *Engineering fracture mechanics*, 69(2) :137–163. [16](#), [24](#)
- [Fichant, 1996] Fichant, S. (1996). *Endommagement et anisotropie induite du béton de structures : modélisations approchées*. Thèse, Cachan, Ecole normale supérieure. [33](#), [49](#)
- [Fichant et al., 1999] Fichant, S., La Borderie, C., and Pijaudier-Cabot, G. (1999). Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 4 :339–359. [39](#)
- [Frémond et Nedjar, 1996] Frémond, M. and Nedjar, B. (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8) :1083–1103. [38](#)
- [Gangnant et Morel, 2013] Gangnant, A. and Morel, S. (2013). Rupture quasifragile des bétons et mortiers. MLER équivalente et courbe-R. In *Congrès Français de la Mécanique*, Bordeaux. [21](#), [25](#), [85](#), [96](#)
- [Gangnant et al., 2016] Gangnant, A., Saliba, J., La Borderie, C., and Morel, S. (2016). Modeling of the quasibrittle fracture of concrete at meso-scale : Effect of classes of aggregates on global and local behavior. *Cement and Concrete Research*, 89 :35–44. [64](#)
- [Grassl et al., 2012] Grassl, P., Grégoire, D., Rojas Solano, L., and Pijaudier-Cabot, G. (2012). Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13) :1818–1827. [43](#)
- [Grassl et Jirásek, 2010] Grassl, P. and Jirásek, M. (2010). Meso-scale approach to modelling the fracture process zone of concrete subjected to uniaxial tension. *International Journal of Solids and Structures*, 47(7-8) :957–968. [39](#)
- [Grégoire et al., 2013] Grégoire, D., Rojas-Solano, L., and Pijaudier-Cabot, G. (2013). Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams : failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(10) :1434–1452. [84](#)
- [Griffith, 1921] Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221 :163–198. [20](#)
- [Guo et al., 2009] Guo, L.-P., Carpinteri, A., Roncella, R., Spagnoli, A., Sun, W., and Vantadori, S. (2009). Fatigue damage of high performance concrete through a 2d mesoscopic lattice model. *Computational Materials Science*, 44(4) :1098–1106. [41](#)
- [Haidar, 2005] Haidar, K. (2005). Correlations between the internal length, the fracture process zone and size effect in mortar and model materials. *Materials and Structures*, 38(276) :201–210. [16](#), [123](#)
- [Hillerborg et al., 1976] Hillerborg, A., Modéer, M., and Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6) :773–781. [24](#), [39](#)
- [Irwin, 1957] Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :361–364. [19](#)
- [Jamaaoui et al., 2015] Jamaaoui, A., Gangnant, A., Pop, O., Morel, S., and Dubois, F. (2015). Assessment of concrete fracture parameters using Wedge Splitting Test and Mark Tracking method. In *Congrès Français de la Mécanique*, Lyon. [138](#)
- [Jirásek et Bažant, 1995] Jirásek, M. and Bažant, Z. P. (1995). Particle model for fracture and statistical micro-macro correlation of material constants. *Fracture mechanics of concrete structures (FraMCoS 2)*. Aedificatio Publishers, Freiburg, Zurich, Switzerland. [39](#)

- [Kachanov, 1958] Kachanov, L. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk*, 8 :26–31. [28](#)
- [Karihaloo, 1995] Karihaloo, B. L. (1995). *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. Longman Scientific & Technical. [13](#), [66](#)
- [Katsaga, 2010] Katsaga, T. (2010). *Geophysical imaging and numerical modelling of fractures in concrete*. Thèse, University of Toronto. [43](#)
- [Kim et Abu Al-Rub, 2011] Kim, S.-M. and Abu Al-Rub, R. K. (2011). Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites. *Cement and Concrete Research*, 41(3) :339–358. [42](#), [45](#), [66](#)
- [Krueger, 2004] Krueger, R. (2004). Virtual crack closure technique : history, approach, and applications. *Applied Mechanics Reviews*, 57(2) :109–143. [76](#), [77](#), [169](#)
- [Kumar et Barai, 2009] Kumar, S. and Barai, S. (2009). Determining double-K fracture parameters of concrete for compact tension and wedge splitting tests using weight function. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(7) :935–948. [83](#)
- [La Borderie, 1991] La Borderie, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton*. Thèse. [10](#), [33](#), [34](#)
- [La Borderie et al., 2007] La Borderie, C., Lawrence, C., and Menou, A. (2007). Approche mésoscopique du comportement du béton : Apport de la représentation géométrique. *Revue européenne de génie civil*, 11(4) :407–421. [40](#), [41](#), [44](#), [45](#), [50](#)
- [Ladevèze, 1983] Ladevèze, P. (1983). *Sur une théorie de l'endommagement anisotrope*. Laboratoire de Mécanique et Technologie. [29](#)
- [Leite et al., 2004] Leite, J. P. B., Slowik, V., and Mihashi, H. (2004). Computer simulation of fracture processes of concrete using mesolevel models of lattice structures. *Cement and Concrete Research*, 34(6) :1025–1033. [42](#)
- [Lemaitre, 1978] Lemaitre, J. (1978). Théorie mécanique de l'endommagement isotrope appliqué à la fatigue des métaux. *Séminaire Matériaux et Structures sous chargement cyclique, Ecole Polytechnique, Palaiseau*. [28](#)
- [Lemaitre, 1996] Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg. [7](#), [151](#)
- [Lemaitre et Chaboche, 1985] Lemaitre, J. and Chaboche, J. (1985). Mécanique des milieux solides. *Dunod, Paris*. [27](#)
- [Lemaitre et Chaboche, 1978] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1978). Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J Méc Appl*, 2(3). [28](#), [151](#)
- [Leplay et al., 2011] Leplay, P., Réthoré, J., Meille, S., and Baietto, M.-C. (2011). Identification of damage and cracking behaviours based on energy dissipation mode analysis in a quasi-brittle material using digital image correlation. *International journal of fracture*, 171(1) :35–50. [16](#)
- [Löfgren et al., 2005] Löfgren, I., Olesen, J. F., and Flansbjer, M. (2005). The WST-method for fracture testing of fibre-reinforced concrete. *Nordic Concret Research*, (34). [86](#), [93](#), [95](#)
- [L'Hermite, 1973] L'Hermite, R. (1973). Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion. *Annales de l'ITBTP*, 309 :39–41. [11](#)
- [Lilliu et van Mier, 2003] Lilliu, G. and van Mier, J. G. (2003). 3d lattice type fracture model for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(7) :927–941. [44](#)
- [Linsbauer et Tschegg, 1986] Linsbauer, H. and Tschegg, E. (1986). Fracture energy determination of concrete with cube-shaped specimens. *Zement und Beton*, 31 :38–40. [82](#)

- [Mandel, 1966] Mandel, J. (1966). Conditions de Stabilité et Postulat de Drucker. In Kravtchenko, P. J. and Sirieys, P. P. M., editors, *Rheology and Soil Mechanics / Rhéologie et Mécanique des Sols*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, pages 58–68. Springer Berlin Heidelberg. DOI : 10.1007/978-3-642-46047-0\_5. [27](#)
- [Maso, 1980] Maso, J. (1980). La liaison entre les granulats et la pâte de ciment hydraté. *7ème Congrès International de la chimie des ciments, Rapport principal*. [41](#)
- [Matallah et al., 2009] Matallah, M., La Borderie, C., and Maurel, O. (2009). A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, pages n/a–n/a. [97](#)
- [Matallah et al., 2010] Matallah, M., La Borderie, C., and Maurel, O. (2010). A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34(15) :1615–1633. [56](#)
- [Mazars, 1984] Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse. [8](#), [28](#), [32](#), [33](#)
- [Mazars et al., 1990] Mazars, J., Berthaud, Y., and Ramtani, S. (1990). The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(4) :629 – 635. [10](#)
- [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989] Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. (1989). Continuum damage theory-application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(2) :345–365. [30](#)
- [Mazars et al., 1988] Mazars, J., Ramtani, S., and Berthaud, Y. (1988). An experimental procedure to delocalize tensile failure and to identify the unilateral effect of distributed damage. In *Proc. France-US Workshop on Strain Localization and Size Effect due to Cracking and Damage*, pages 55–64. Elsevier London. [8](#)
- [Meite, 2012] Meite, M. (2012). *Caractérisation des paramètres de fissuration par un couplage corrélation d'images et éléments finis*. Thèse, Limoges. [20](#), [169](#)
- [Morel, 2007] Morel, S. (2007). R-curve and size effect in quasibrittle fractures : Case of notched structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44(13) :4272–4290. [16](#), [21](#)
- [Morel, 2008] Morel, S. (2008). Size effect in quasibrittle fracture : derivation of the energetic Size Effect Law from equivalent LFM and asymptotic analysis. *International Journal of Fracture*, 154(1-2) :15–26. [23](#), [114](#), [122](#)
- [Morel et Dourado, 2011] Morel, S. and Dourado, N. (2011). Size effect in quasibrittle failure : Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10) :1403–1412. [12](#), [23](#), [76](#), [78](#)
- [Morel et al., 2005] Morel, S., Dourado, N., and Valentin, G. (2005). Wood : a quasibrittle material R-curve behavior and peak load evaluation. *International Journal of Fracture*, 131(4) :385–400. [21](#), [73](#)
- [Morel et al., 2010] Morel, S., Lespine, C., Coureau, J.-L., Planas, J., and Dourado, N. (2010). Bilinear softening parameters and equivalent LFM R-curve in quasibrittle failure. *International Journal of Solids and Structures*, 47(6) :837–850. [25](#), [110](#), [115](#)
- [Morice, 2014] Morice, E. (2014). *Fissuration dans les matériaux quasi-fragiles : approche numérique et expérimentale pour la détermination d'un modèle incrémental à variables condensées*. Thèse, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan. [40](#)
- [Mounajed et al., 2006] Mounajed, G., Grondin, F., Dumontet, H., and Hamida, A. B. (2006). Digital concrete : A multi-scale approach for the concrete behavior. *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, 6(5, 6) :325–337. [54](#)

- [Murakami et Ohno, 1981] Murakami, S. and Ohno, N. (1981). A continuum theory of creep and creep damage. In *Creep in structures*, pages 422–444. Springer. 29
- [Muralidhara et al., 2010] Muralidhara, S., Prasad, B. K. R., Eskandari, H., and Karihaloo, B. L. (2010). Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission. *Construction and Building Materials*, 24(4) :479–486. 16
- [Nguyen et al., 2010] Nguyen, D., Lawrence, C., La Borderie, C., Matallah, M., and Nahas, G. (2010). A mesoscopic model for a better understanding of the transition from diffuse damage to localized damage. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 14(6-7) :751–776. 96
- [N’Guyen, 2010] N’Guyen, T. (2010). *Apport de la modélisation mésoscopique dans la prédiction des écoulements dans les ouvrages en béton fissuré en conditions d’accident grave*. Thèse, Pau. 53, 55, 136
- [Otsuka et Date, 2000] Otsuka, K. and Date, H. (2000). Fracture process zone in concrete tension specimen. *Engineering Fracture Mechanics*, 65(2–3) :111–131. 16
- [Pastor et al., 1995] Pastor, J. Y., Guinea, G., Planas, J., and Elices, M. (1995). Nueva expresión del factor de intensidad de tensiones para la probeta de flexión en tres puntos. *Anales de Mecánica de la Fractura*, (12) :85–90. 72
- [Pedersen et al., 2007] Pedersen, R. R., Simone, A., Stroeve, M., and Sluys, L. J. (2007). Mesoscopic modelling of concrete under impact. In *6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures-FRAMCOS VI*, pages 571–578. 43
- [Peerlings et al., 1996] Peerlings, R., de Borst, R., Brekelmans, W., and de Vree, J. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3391–3403. 38
- [Petersson, 1981] Petersson, P. (1981). *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*. Thèse, Division, Inst. 25, 66
- [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. P. (1987). Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10) :1512–1533. 38
- [Pijaudier-Cabot et Bode, 1992] Pijaudier-Cabot, G. and Bode, L. (1992). Localization of damage in a nonlocal continuum. *Mechanics Research Communications*, 19(2) :145–153. 32
- [Rabotnov, 1969] Rabotnov, Y. N. (1969). Creep rupture. In Hetényi, M. and Vincenti, W. G., editors, *Applied Mechanics*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, pages 342–349. Springer Berlin Heidelberg. DOI : 10.1007/978-3-642-85640-2\_26. 30
- [Ramtani, 1990] Ramtani, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse, Paris 6. 9, 11, 35
- [Rashid, 1968] Rashid, Y. R. (1968). Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7(4) :334–344. 34
- [Reinhardt et al., 1986] Reinhardt, H., Cornelissen, H., and Hordijk, D. (1986). Tensile Tests and Failure Analysis of Concrete. *Journal of Structural Engineering*, 112(11) :2462–2477. 8
- [Rice, 1968] Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of applied mechanics*, 35(2) :379–386. 21
- [Roelfstra et al., 1985] Roelfstra, P., Sadouki, H., and Wittmann, F. (1985). Le béton numérique. *Materials and Structures*, 18(5) :327–335. 42

- [Rojas Solano, 2012] Rojas Solano, L. B. (2012). *Endommagement non-local, interactions et effets d'échelle*. Thèse, Pau. 38, 69, 84
- [Schmidt, 1976] Schmidt, R. A. (1976). Fracture-toughness testing of limestone. *Experimental Mechanics*, 16(5) :161–167. 55
- [Seitl et al., 2014] Seitl, S., García, B. N., and Merta, I. (2014). Wedge splitting test method : quantification of influence of glued marble plates by two-parameter fracture mechanics. *Frattura ed Integrità Strutturale*, (30) :174. 83
- [Seitl et al., 2011] Seitl, S., Veselý, V., and Řoutil, L. (2011). Two-parameter fracture mechanical analysis of a near-crack-tip stress field in wedge splitting test specimens. *Computers & Structures*, 89(21–22) :1852–1858. 20
- [Sellier et al., 2013] Sellier, A., Casaux-Ginestet, G., Buffo-Lacarrière, L., and Bourbon, X. (2013). Orthotropic damage coupled with localized crack reclosure processing. part i : Constitutive laws. *Engineering Fracture Mechanics*, 97 :148–167. 33
- [Shah et Ouyang, 1992] Shah, S. and Ouyang, C. (1992). Failure of concrete : fracture mechanics approach. *Anal Mecán Fract*, 9 :352–375. 14
- [Shah et al., 1995] Shah, S. P., Swartz, S. E., and Ouyang, C. (1995). *Fracture Mechanics of Concrete : Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and Other Quasi-Brittle Materials*. John Wiley & Sons. 15
- [Skarżyński et Tejchman, 2010] Skarżyński, I. and Tejchman, J. (2010). Calculations of fracture process zones on meso-scale in notched concrete beams subjected to three-point bending. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29(4) :746–760. 39
- [Skarżyński et al., 2011] Skarżyński, Ł., Syroka, E., and Tejchman, J. (2011). Measurements and calculations of the width of the fracture process zones on the surface of notched concrete beams. *Strain*, 47(s1). 16
- [Terrien, 1980] Terrien, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées*, (105). 8, 9, 11
- [Torrenti, 1996] Torrenti, J. (1996). *Comportement mécanique du béton : bilan de six années de recherche*. Études et recherches des LPC. Laboratoire central des ponts et chaussées. 8, 10
- [Torrenti, 1987] Torrenti, J.-M. (1987). *Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation*. Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 8
- [Tschegg et al., 1995] Tschegg, E., Elser, M., and Stanzl-Tschegg, S. (1995). Biaxial fracture tests on concrete—Development and experience. *Cement and Concrete Composites*, 17(1) :57–75. 83
- [van Mier, 2008] van Mier, J. G. (2008). Framework for a generalized four-stage fracture model of cement-based materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(18) :5072 – 5086. 10
- [Veselý et Frantík, 2010] Veselý, V. and Frantík, P. (2010). Reconstruction of a fracture process zone during tensile failure of quasi-brittle materials. 16
- [Vonk, 1993] Vonk, R. (1993). *A Micromechanical Investigation of Softening of Concrete Loaded in Compression*. Stevin-Laboratory of the Faculty of Civil Engineering, University of Technology. 12
- [Wang et al., 2015] Wang, X. F., Yang, Z. J., Yates, J. R., Jivkov, A. P., and Zhang, C. (2015). Monte Carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores. *Construction and Building Materials*, 75 :35–45. 41, 44

- [Wang et al., 1999] Wang, Z., Kwan, A., and Chan, H. (1999). Mesoscopic study of concrete I : generation of random aggregate structure and finite element mesh. *Computers & Structures*, 70(5) :533–544. [42](#), [43](#)
- [Weibull, 1939] Weibull, W. (1939). *A Statistical Theory of the Strength of Materials*. Swedish Royal Institute for Engineering Research. Generalstabens litografiska anstalts förlag, Stockholm. [11](#)
- [Williams, 1957] Williams, M. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, (24) :109–114. [19](#), [20](#), [138](#)
- [Wittmann et al., 1985] Wittmann, F., Roelfstra, P., and Sadouki, H. (1985). Simulation and analysis of composite structures. *Materials Science and Engineering*, 68(2) :239–248. [42](#)
- [Wittmann et Hu, 1991] Wittmann, F. H. and Hu, X. (1991). Fracture process zone in cementitious materials. *International Journal of Fracture*, 51(1) :3–18. [15](#)
- [Wu et al., 2011] Wu, Z., Rong, H., Zheng, J., Xu, F., and Dong, W. (2011). An experimental investigation on the FPZ properties in concrete using digital image correlation technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(17) :2978–2990. [15](#), [16](#)
- [Xiao et al., 2004] Xiao, J., Schneider, H., Dönnecke, C., and König, G. (2004). Wedge splitting test on fracture behaviour of ultra high strength concrete. *Construction and Building Materials*, 18(6) :359–365. [83](#)
- [Xu et Reinhardt, 1998] Xu, S. and Reinhardt, H. W. (1998). Crack extension resistance and fracture properties of quasi-brittle softening materials like concrete based on the complete process of fracture. *International Journal of Fracture*, 92(1) :71–99. [24](#)
- [Zaitsev et Wittmann, 1981] Zaitsev, Y. B. and Wittmann, F. H. (1981). Simulation of crack propagation and failure of concrete. *Matériaux et Constructions*, 14(5) :357–365. [40](#)

# Annexes

<b>A</b>	<b>Thermodynamique des processus irréversibles : formulation d'une loi de comportement</b>	<b>149</b>
A.1	Deux principes de la thermodynamique	149
A.2	Variables d'état	151
A.3	Potentiel d'état, lois d'état et forces thermodynamiques associées	151
A.4	Lois complémentaires et potentiel de dissipation	153
<b>B</b>	<b>Influence des paramètres d'entrée sur la réponse globale et locale</b>	<b>154</b>
B.1	Paramètres élastiques : $E$ et $\nu$	154
B.2	Paramètres de rupture : $f_t$ et $G_f$	158
<b>C</b>	<b>Influence de la suppression des petites classes des granulats</b>	<b>159</b>
C.1	Les réponses macroscopiques	159
C.2	Évolutions des paramètres $E$ , $f_t$ et $G_f$	160
<b>D</b>	<b>Champs d'endommagement des poutres entaillées</b>	<b>163</b>
<b>E</b>	<b>Étude sur la modélisation EF WST</b>	<b>167</b>
E.1	Étude sur les conditions aux limites simulations WST	167
E.2	Étude sur les différents calculs du taux de restitution numérique	169
E.3	Étude sur la possibilité de confinement de la FPZ dans les éprouvettes WST étudiées	171
E.4	Point sur l'influence de la boîte mésoscopique	171
<b>F</b>	<b>Détermination du champ d'énergie restituée</b>	<b>173</b>
<b>G</b>	<b>Champs d'endommagement des nouvelles simulations WST</b>	<b>175</b>
<b>H</b>	<b>Énergie restituée VS Endommagement instantané</b>	<b>177</b>
<b>I</b>	<b>Illustration de la zone d'élaboration de la rupture sur quelques simulations</b>	<b>179</b>
I.1	Étude de la simulation WST 250 #3	180
I.2	Étude de la simulation WST 300 #2	182
I.3	Étude de la simulation WST 300 #4	184
<b>J</b>	<b>Courbe force-déplacement et courbe-R de la SENB 400</b>	<b>186</b>

# Annexe A

## Thermodynamique des processus irréversibles : formulation d'une loi de comportement

Il est supposé que la déformation d'un milieu continu doit satisfaire les principes de la Thermodynamique. Ainsi l'évolution des phénomènes irréversibles tels que la plasticité ou l'endommagement est décrite dans le cadre de la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI) qui propose une description des échanges de chaleur et d'énergie mécanique. Il en découle deux sortes de loi :

1. Les lois d'états définissant les forces thermodynamiques  $V_k^{thermo}$  disponibles pour la propagation des phénomènes irréversibles.
2. Les lois complémentaires qui décrivent la cinétique de propagation de ces phénomènes irréversibles décrites par des variables d'état  $V_k^{etat}$ .

Dans le cadre des matériaux standards généralisés, ces deux lois dérivent d'un potentiel d'état  $\Psi$  et de dissipation  $\varphi$ . En résumé, afin d'établir une loi de comportement d'un matériau, ici, endommageable, l'approche thermodynamique s'avère cruciale. Pour ce faire, trois étapes sont nécessaires :

1. Définition des variables d'état : les valeurs définissent l'état actuel du système étudié pour un ou plusieurs mécanismes donnés.
2. Définition du potentiel d'état  $\Psi$  (équivalent à l'énergie libre spécifique) duquel dérivent les lois d'état et la définition des variables associées à chaque variable interne (forces thermodynamiques).
3. Définition du potentiel de dissipation  $\varphi$  (équivalent à l'enthalpie libre spécifique)  $\varphi$  duquel dérivent les lois complémentaires des variables d'état associées aux mécanismes dissipatifs.

### A.1 Deux principes de la thermodynamique

Tout d'abord, il existe deux scalaires fonctions de l'état du système ( $\Omega$ ) dépendant tous les deux de la masse volumique  $\rho$  :

1.  $E$  l'énergie interne dépendante de  $e$  la densité spécifique de l'énergie interne avec

$$E(t) = \int_{\Omega} \rho(x,t) e(x,t) d\Omega \quad (\text{A.1})$$



2.  $S$  l'entropie dépendante de  $s$  la densité spécifique de l'entropie interne avec

$$S(t) = \int_{\Omega} \rho(x,t) e(x,t) d\Omega \quad (\text{A.2})$$

### A.1.1 Premier principe : la loi de conservation

Le premier principe de la thermodynamique est basé sur un bilan énergétique. Soit dans un système fermé, pour toute transformation infinitésimale, la dérivé de l'énergie interne spécifique (Eq. A.1)  $\dot{E}$  est la somme de la puissance  $P$  des efforts exercés sur le système et du taux de chaleur  $\dot{Q}$  reçu par le système. Ce qui donne

$$\rho \dot{E} = \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} + r - \text{div} \vec{q}, \quad (\text{A.3})$$

avec  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont respectivement le tenseur des contraintes et des déformations dont le produit tensoriel représente la puissance  $P$ . Le taux de chaleur  $\dot{Q}$  est représenté par la différence de la densité volumique du taux de chaleur reçu  $r$  et la divergence du vecteur de flux de chaleur échangé avec l'extérieur  $\vec{q}$ .

### A.1.2 Second principe : l'entropie

Le second principe indique, après vérification du premier principe, si une transformation du système est possible. Ainsi le second principe postule que le taux de production d'entropie  $S$  (Eq. A.2) est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue  $\dot{Q}$  divisé par la température  $T$ . La variation de l'entropie, pour une transformation infinitésimale isotherme à température  $T$  répond à la relation suivante :

$$dS \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad (\text{A.4})$$

Notons que lorsque  $\dot{Q} = TdS$  le processus est réversible et que la différence  $dQ - TdS$  représente le travail des irréversibilités internes.

### A.1.3 Inégalité de Clausius-Duhem

Par combinaison des deux principes énoncés ci-dessus (Eq. A.3 et A.4), écrits sous forme locale, il est possible d'aboutir à l'expression de la dissipation volumique  $\varphi$ . De plus, le second principe implique que cette dissipation totale soit toujours positive ou nulle pour un processus réversible. Dès lors apparaît l'inégalité suivante :

$$\varphi = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{e} - T\dot{s}) - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad} T}{T} \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

En introduisant l'énergie libre spécifique  $\Psi$  tributaire de la densité spécifique de l'énergie  $e$  et de l'entropie  $s$  interne (Eq. A.6) :

$$\Psi = e - Ts, \quad (\text{A.6})$$

l'équation A.5 de la dissipation volumique totale devient :

$$\varphi = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{\Psi} + s\dot{T}) + \frac{\vec{q} \cdot \text{grad} T}{T} \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

La dissipation totale peut se découpler en :

— Dissipation volumique intrinsèque  $\varphi_1$  (d'origine mécanique) :

$$\varphi_1 = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{\Psi} + s\dot{T}) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

— Dissipation volumique thermique  $\varphi_2$

$$\varphi_2 = \frac{\vec{q} \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

Les inégalités A.8 et A.9 permettent d'écrire l'inégalité fondamentale de Clausius-Duhem, point de départ de la formulation des lois de comportement :

$$\varphi_1 + \varphi_2 \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Variables d'état

Dans un contexte de formulation générale [Lemaitre, 1996], le potentiel thermodynamique  $\Psi$  dépend de variables d'état (Tableau A.1). Il faut distinguer les variables « observables » et « internes ». Les variables observables, accessibles par la mesure, sont les déformations totales  $\varepsilon_{ij}$  et la température  $T$ . Notons qu'un comportement purement élastique dépend uniquement de ces variables observables. Les comportements de type non-linéaire, i.e., faisant intervenir des mécanismes dissipatifs nécessitent l'introduction de variables internes qui seront notées  $\alpha_k$ . En somme, ces variables sont des grandeurs physiques objectives (invariantes par rapport à tout changement de référentiel) et indépendantes dont la donnée de l'ensemble des valeurs à l'instant  $t$  suffit à caractériser complètement l'état du système à cet instant. Notons également, qu'en prenant en compte les petites déformations, il advient que le tenseur de déformations totales  $\varepsilon_{ij}$  peut-être divisé en une partie thermo-élastique  $\varepsilon_{ij}^e$  et une partie plastique  $\varepsilon_{ij}^p$  :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (\text{A.11})$$

Mécanismes ( $k$ )	Type	Variables d'état ( $V_k^{etat}$ )		Variables associées ( $V_k^{thermo}$ )
		Observable	Interne ( $\alpha_k$ )	
Déformations	Tenseur	$\varepsilon_{ij}$		$\sigma_{ij}$
Entropie	Scalaire	$T$		$s$
Thermo-élastique	Tenseur		$\varepsilon_{ij}^e$	$\sigma_{ij}$
Plasticité	Tenseur		$\varepsilon_{ij}^p$	$-\sigma_{ij}$
Ecrouissage isotrope	Scalaire		$r$	$R$
Ecrouissage Cinématique	Tenseur		$\alpha_{ij}$	$X_{ij}$
Endommagement isotrope	Scalaire		$D$	$-Y$
Endommagement anisotrope	Tenseur		$D_{ij}$	$-Y_{ij}$

TABLEAU A.1 – Variables d'états et forces thermodynamiques associées [Lemaitre et Chaboche, 1978]

## A.3 Potentiel d'état, lois d'état et forces thermodynamiques associées

Généralement pour les matériaux solides, le potentiel d'état  $\Psi$  est l'énergie libre spécifique, i.e., l'énergie stockée dans le matériau nécessaire à l'évolution de la déformation et des phénomènes irréversibles considérés. Ainsi il est directement associé aux variables d'état (définies dans le paragraphe précédent). Autrement, dit :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij}, T, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, r, \alpha_{ij}, D \text{ ou } D_{ij}) = \Psi(\varepsilon_{ij}, T, \varepsilon_{ij}^e, \alpha_k) \quad (\text{A.12})$$

avec,

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} : \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \geq 0. \quad (\text{A.13})$$

Le potentiel d'état peut être considéré comme la somme des potentiels dus à la thermo-élasticité ( $\Psi^e$ ), la plasticité ( $\Psi^p$ ) et purement thermique ( $\Psi^T$ ). A partir des équations A.8 et A.13, l'inégalité de Clausius-Duhem (Eq. A.8) devient :

$$\varphi_1 = \left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) : \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} \right) \dot{\alpha}_k \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

Les variables d'état sont supposées indépendantes, de là, il est en découle différentes lois d'état desquelles l'inégalité de Clausius-Duhem doit être vérifiée :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \quad s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (\text{A.15})$$

Ces deux expressions définissent les lois d'état de la thermo-élasticité. Les forces dynamiques associées aux variables internes (variables listées dans la dernière colonne du tableau A.1) sont quant à elles obtenues de la sorte :

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} \quad (\text{A.16})$$

Dans certains cas, il est plus commode de considérer le potentiel d'état comme étant l'énergie libre de Gibbs  $\Psi^*$  (écrite en fonction des contraintes) plutôt que l'énergie libre de Helmholtz  $\Psi$  considérée plus haut. La transformée de Legendre-Fenchel permet de définir l'énergie libre de Gibbs (duale du potentiel d'état). Dans un cas général, c'est-à-dire, avec la prise en compte de l'endommagement anisotrope et la plasticité, l'énergie libre de Gibbs s'écrit :

$$\Psi^* = \frac{1 + \nu}{2\rho E} H_{ij} \sigma_{ij}^D H_{kl} \sigma_{li}^D + \frac{3(1 - 2\nu)}{2\rho E} \frac{\sigma_H^2}{1 - \eta D_H} + \Psi^P(r, \alpha_{ij}) \quad (\text{A.17})$$

avec :

- $E$  et  $\nu$ , respectivement le module d'élasticité du matériau isotrope et son coefficient de Poisson,
- $H_{ij}$  le tenseur de 2<sup>ème</sup> ordre avec  $H_{ij} = (\delta_{ij} - D_{ij})^{-1/2}$  où  $D_{ij}$  est le tenseur d'endommagement anisotrope,
- $\sigma_{ij}^D$  est la partie déviatorique et  $\sigma_H \delta_{ij}$  représentant la pression hydrostatique de telle sorte que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^D + \sigma_H \delta_{ij}$
- $\eta$  est un coefficient nécessaire pour ajuster la variation du coefficient de Poisson. Les expériences montrent que pour la plupart des matériaux  $\eta \approx 3$ ,
- $D_H$  est équivalent au tiers de la trace de la matrice d'endommagement.

L'énergie libre de Gibbs peut également se simplifier dans le cas d'un endommagement isotrope sans plasticité (suppression du potentiel d'état dû aux mécanismes de type plasticité  $\Psi^P$ ). La relation A.17 devient :

$$\Psi^* = \frac{1 + \nu}{2E(1 - D)} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D + \frac{3(1 - 2\nu)}{2E(1 - D)} \sigma_H^2. \quad (\text{A.18})$$

## A.4 Lois complémentaires et potentiel de dissipation

Le potentiel thermodynamique fournit les lois d'états et donc les forces thermodynamiques. Maintenant, afin de déterminer les variables internes, l'utilisation des lois complémentaires, fournissant des équations supplémentaires, s'avère nécessaire. Les lois complémentaires sont des lois d'évolution qui décrivent la cinétique de propagation de ces phénomènes irréversibles décrites par des variables d'état. L'association des variables d'état aux variables duales associées permet de passer du potentiel de dissipation intrinsèque  $\varphi$  (Eq. A.14) au potentiel duale de dissipation  $\varphi_1^*$  par la transformation de Legendre-Fenchel.

Ainsi les lois complémentaires s'écrivent :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A.19})$$

et pour les variables internes autres que la déformation plastique,

$$-\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial A_k} . \quad (\text{A.20})$$

# Annexe B

## Influence des paramètres d'entrée sur la réponse globale et locale

### B.1 Paramètres élastiques : $E$ et $\nu$

#### B.1.1 Réponses macroscopiques

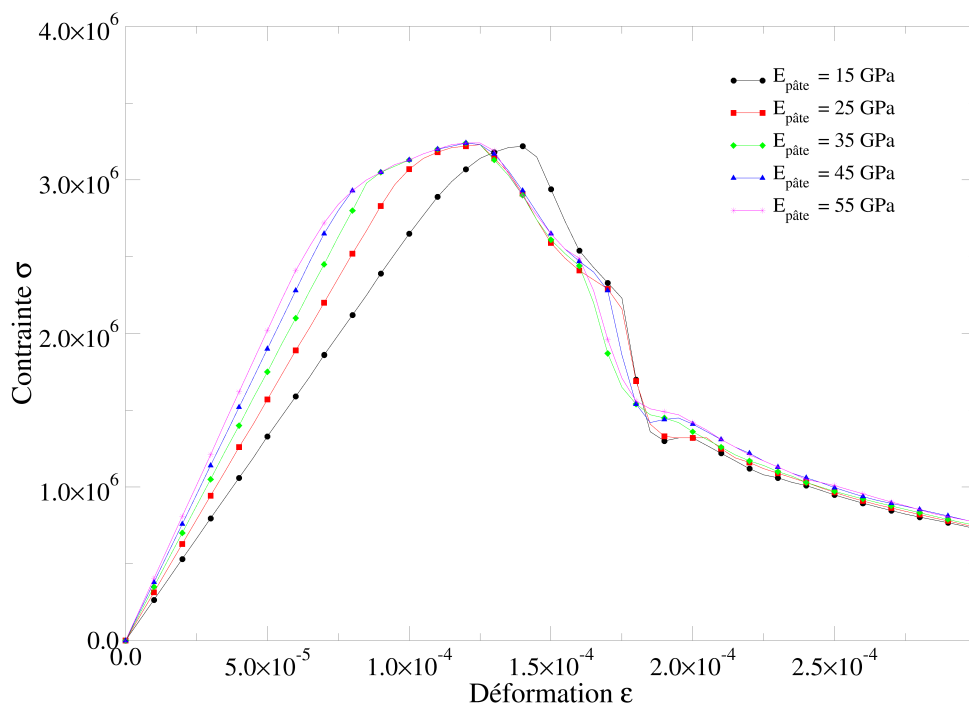


FIGURE B.1 – Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de module d'élasticité de la pâte

#### B.1.2 Champs d'endommagement

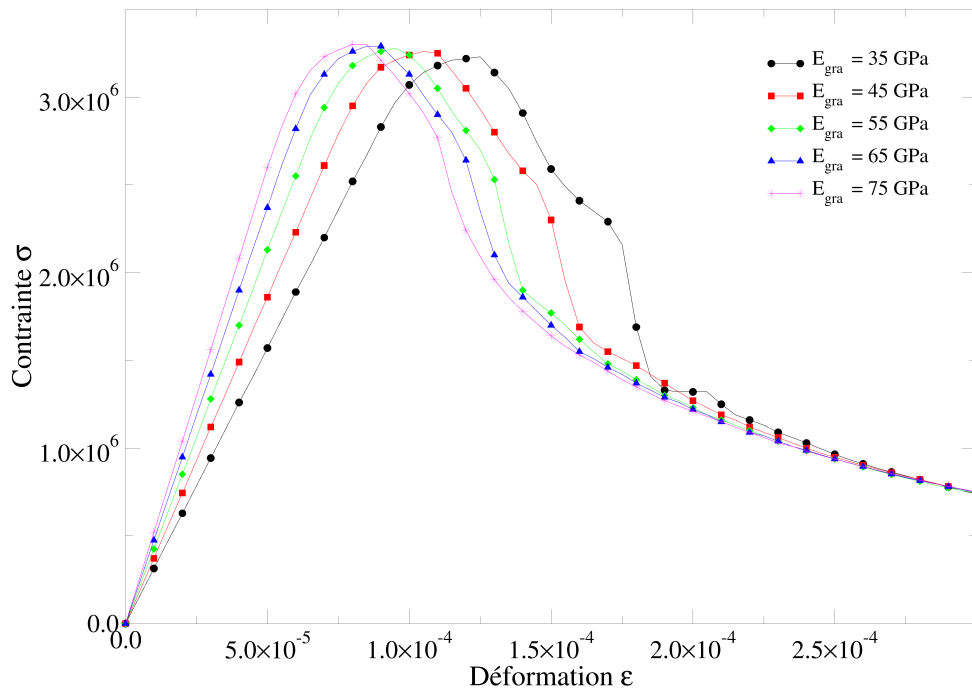


FIGURE B.2 – Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de module d'élasticité des granulats

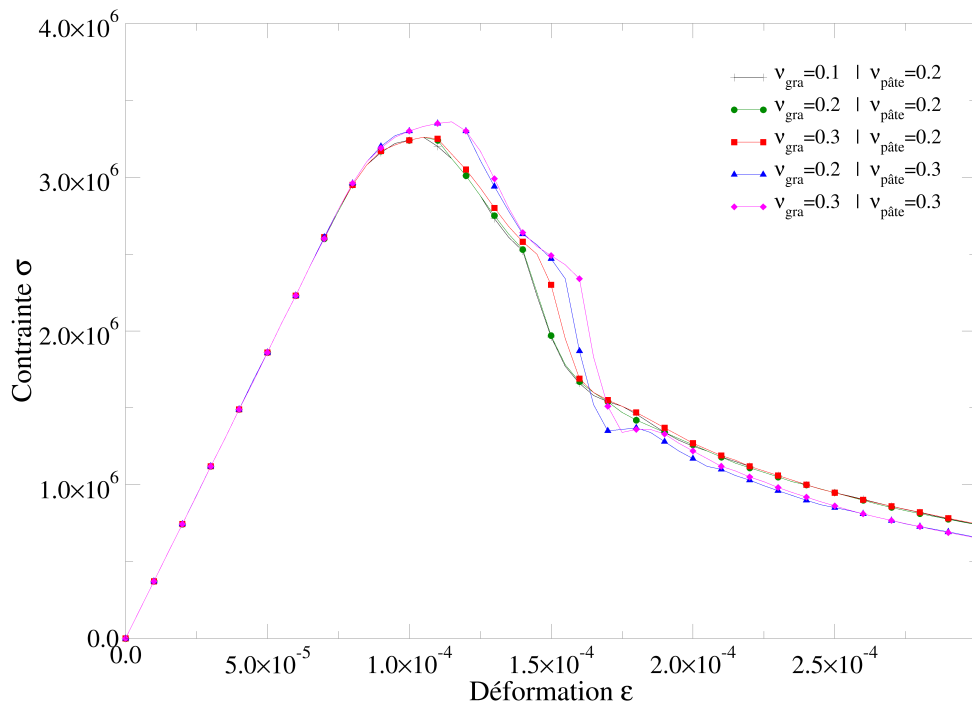


FIGURE B.3 – Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de coefficient de Poisson

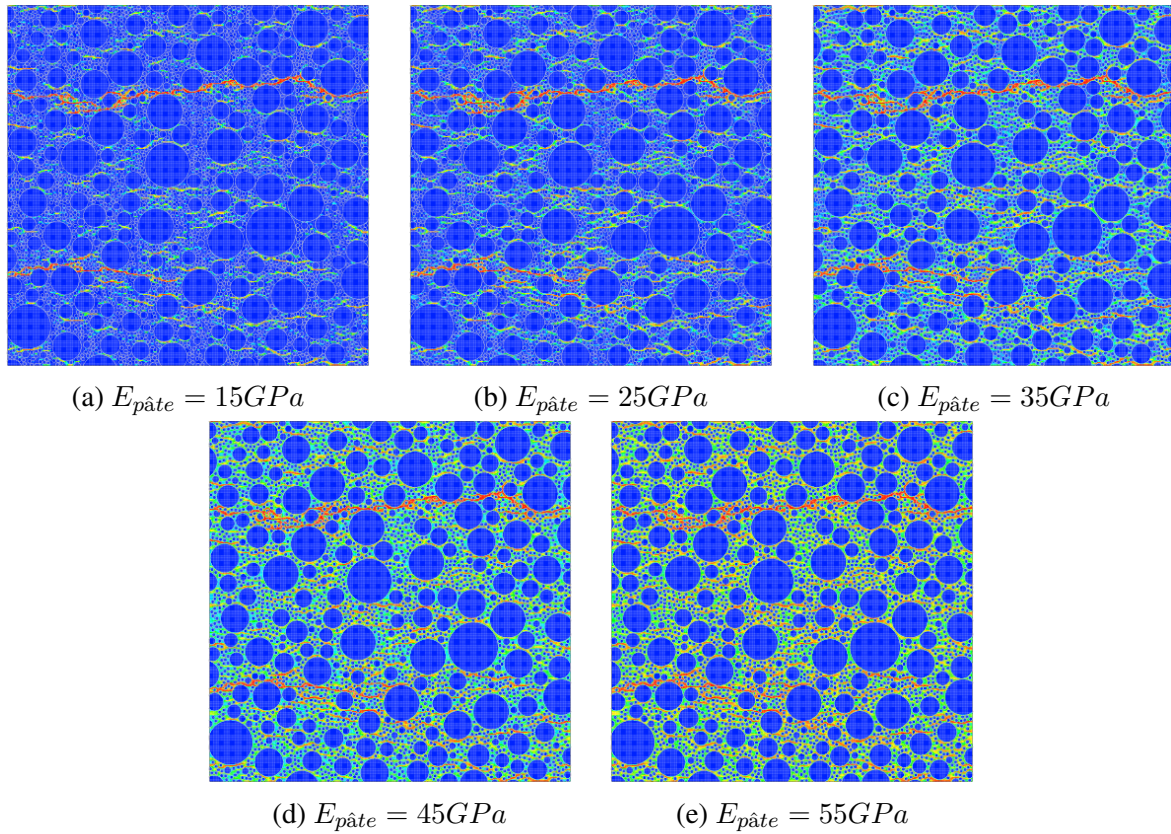


FIGURE B.4 – Champ d'endommagement pour différentes valeurs de module de Young de la pâte cimentaire ( $E_{gra} = 35GPa$ )

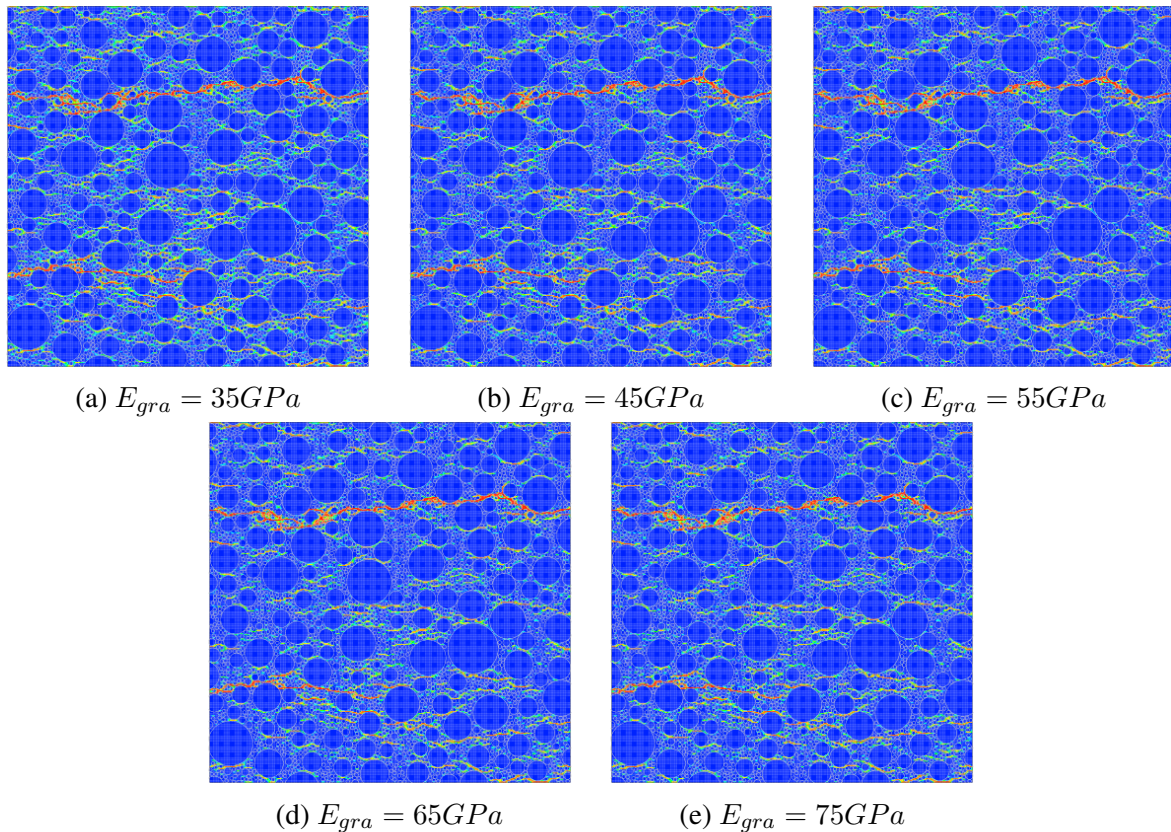


FIGURE B.5 – Champ d'endommagement pour différentes valeurs de module de Young des granulats ( $E_{p\grave{a}te} = 25GPa$ )

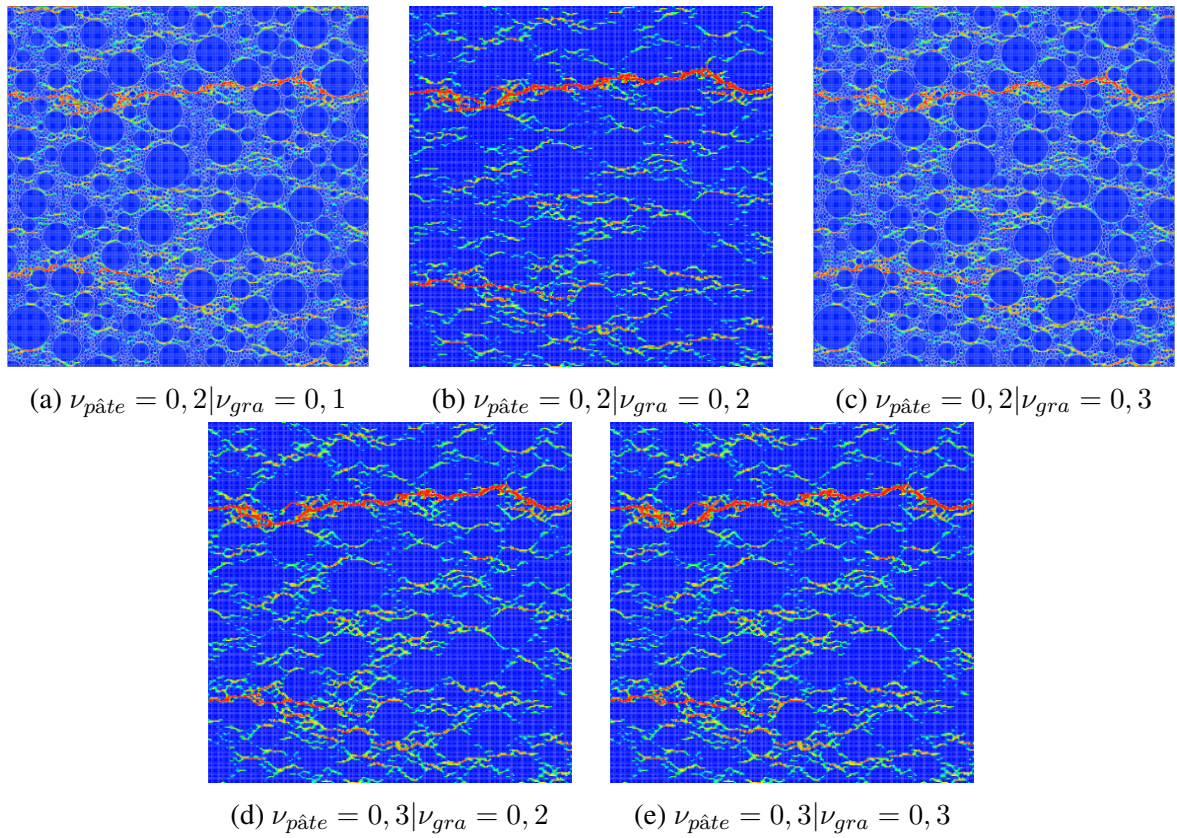


FIGURE B.6 – Champ d'endommagement pour différentes valeurs de coefficient de Poisson



## B.2 Paramètres de rupture : $f_t$ et $G_f$

### B.2.1 Réponses macroscopiques

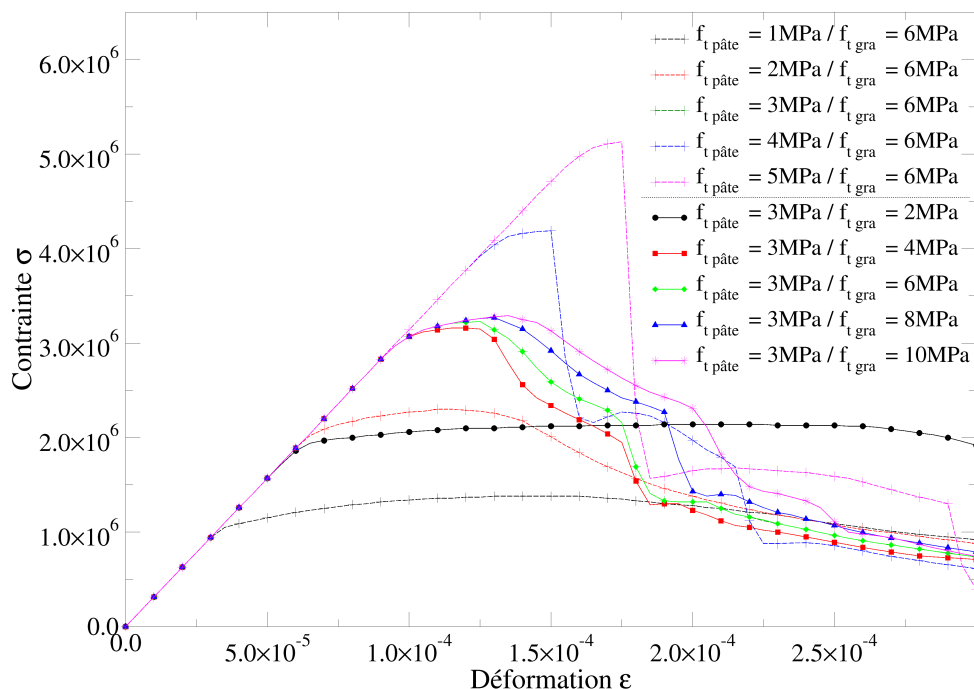


FIGURE B.7 – Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de résistance à la traction

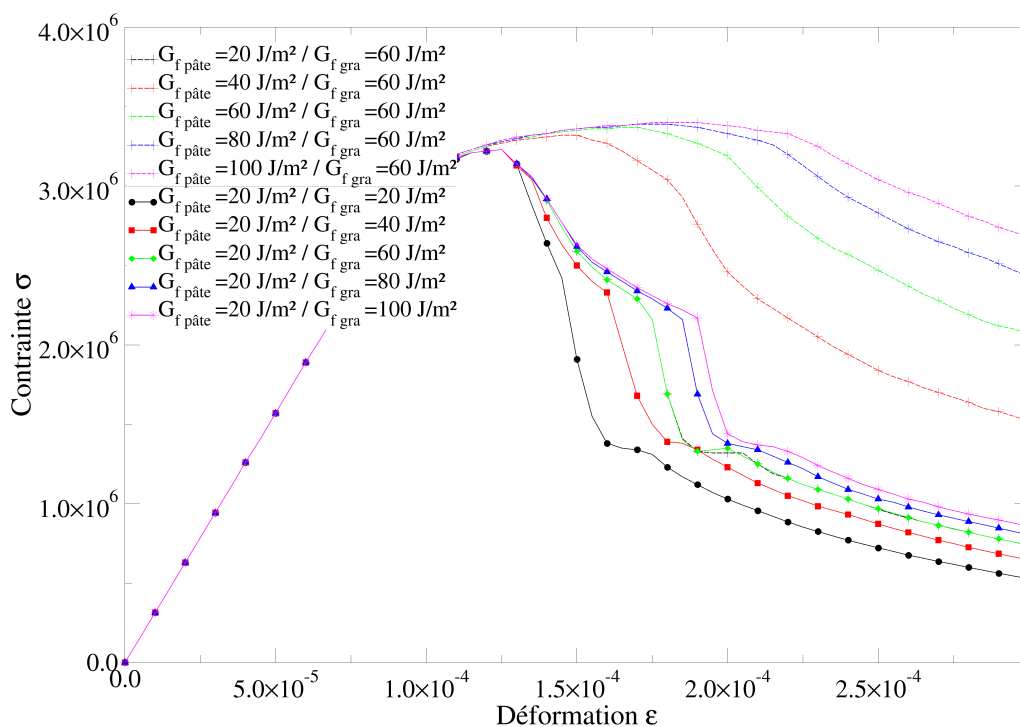


FIGURE B.8 – Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs d'énergie de rupture

# Annexe C

## Influence de la suppression des petites classes des granulats

### C.1 Les réponses macroscopiques

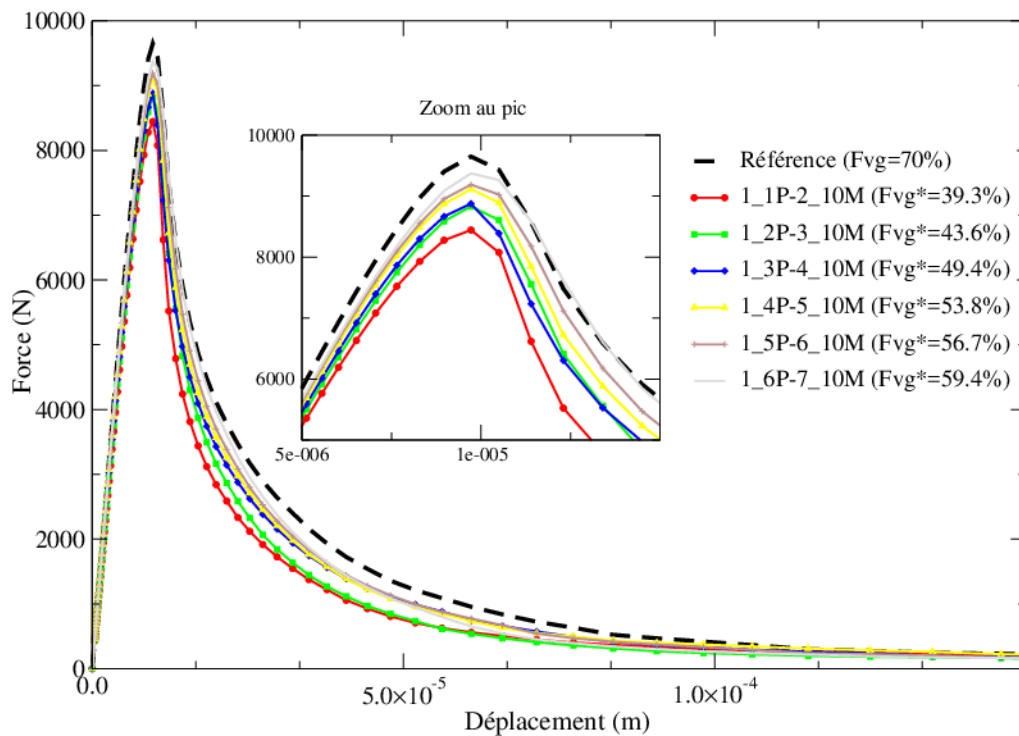


FIGURE C.1 – Courbes contrainte-déformation pour des mortiers homogénéisés

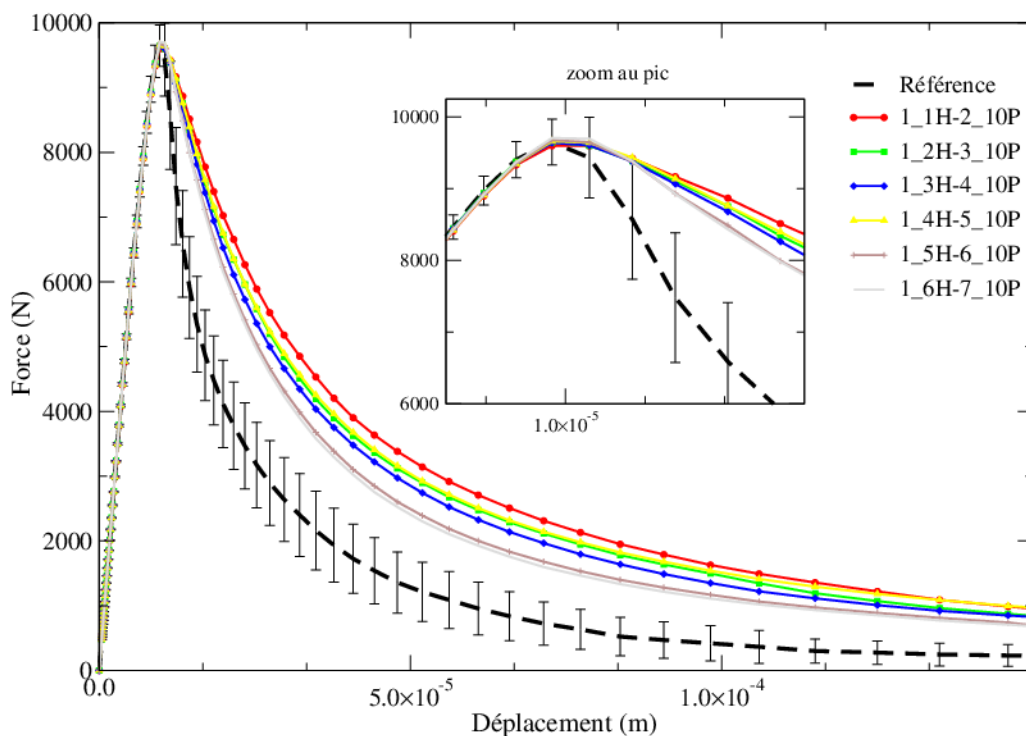


FIGURE C.2 – Courbes contrainte-déformation avec l'utilisation de  $G_{fMH_{moyen}}$

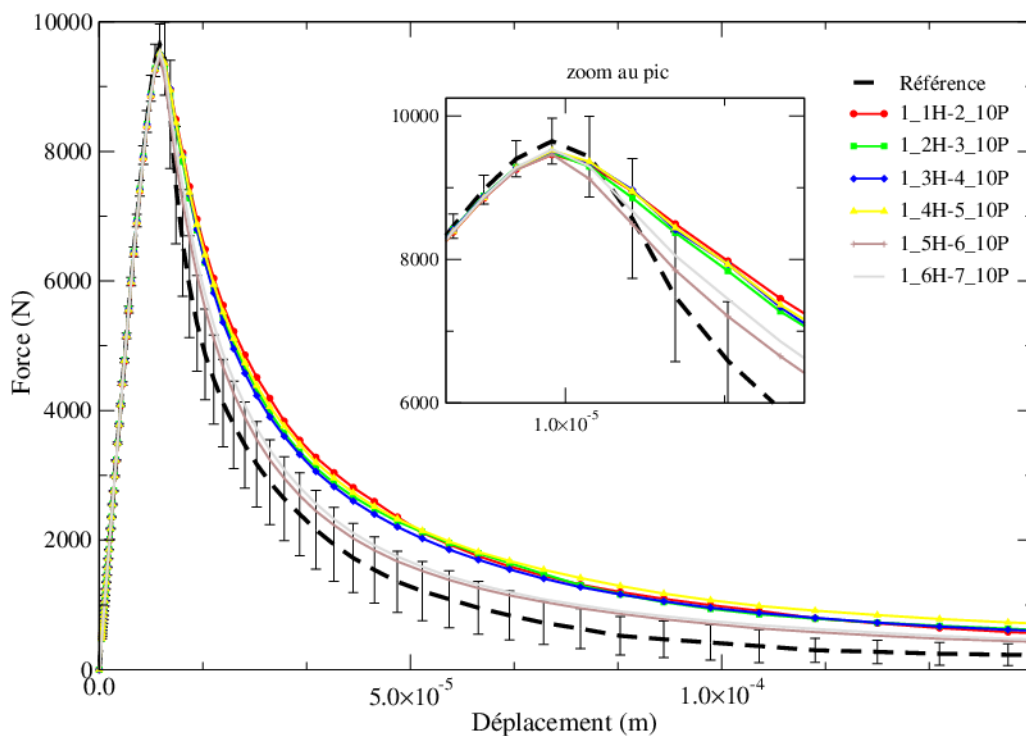


FIGURE C.3 – Courbes contrainte-déformation avec l'utilisation de  $G_{fMH_{min}}$

## C.2 Évolutions des paramètres $E$ , $f_t$ et $G_f$

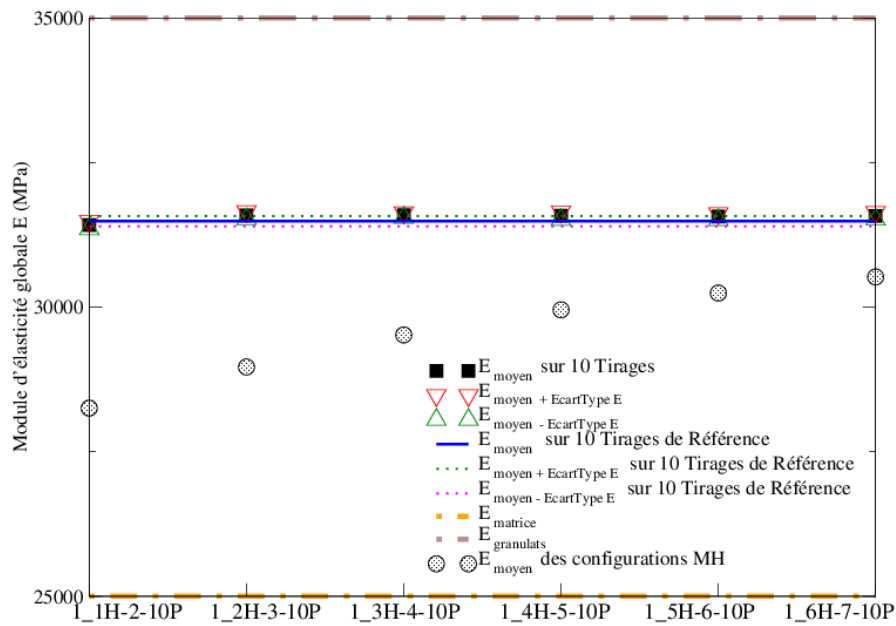


FIGURE C.4 – Évolution de  $E$  suivantes les différentes configurations de béton simplifié

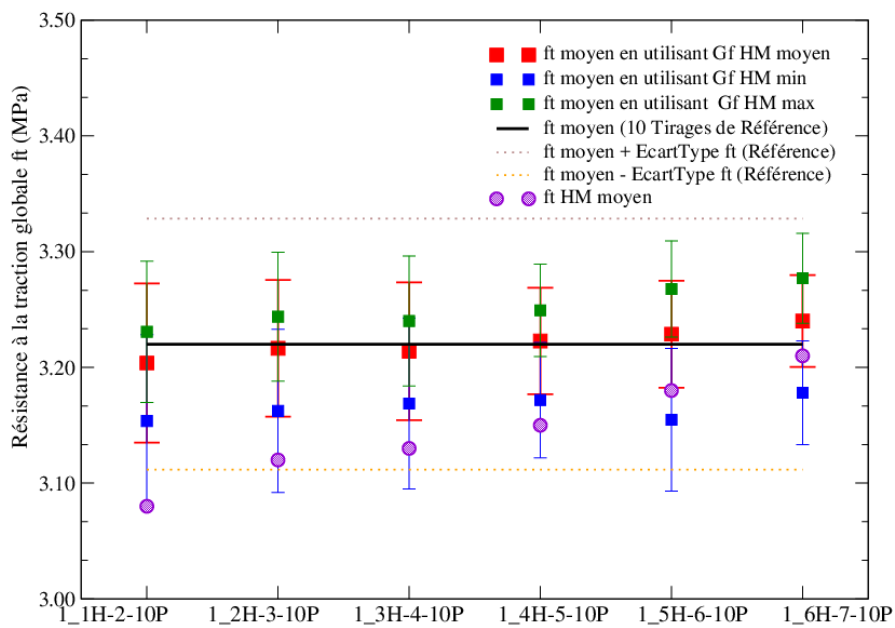


FIGURE C.5 – Évolution de  $f_t$  suivantes les différentes configurations de béton simplifié

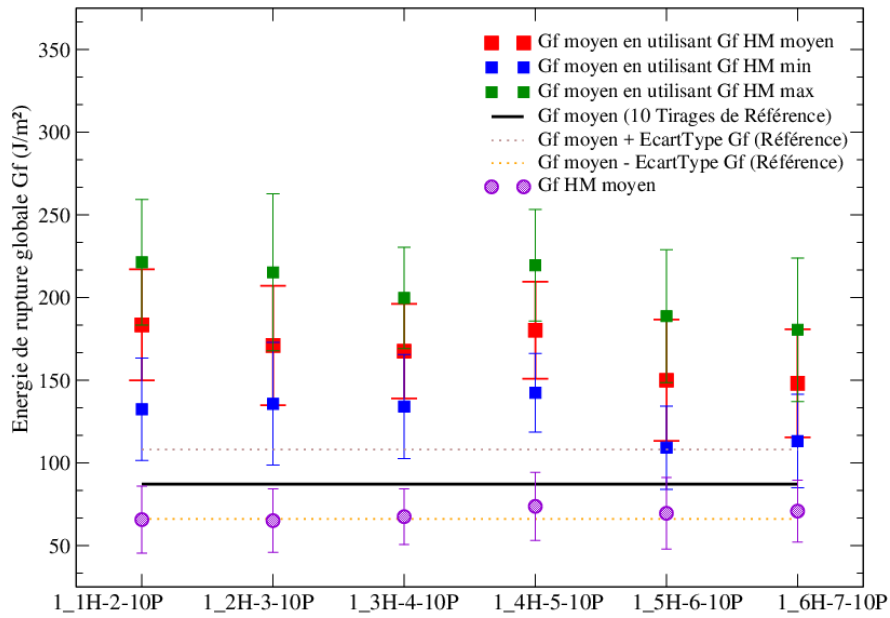


FIGURE C.6 – Évolution de  $G_f$  suivantes les différentes configurations de béton simplifié

## **Annexe D**

# **Champs d'endommagement des poutres entaillées**

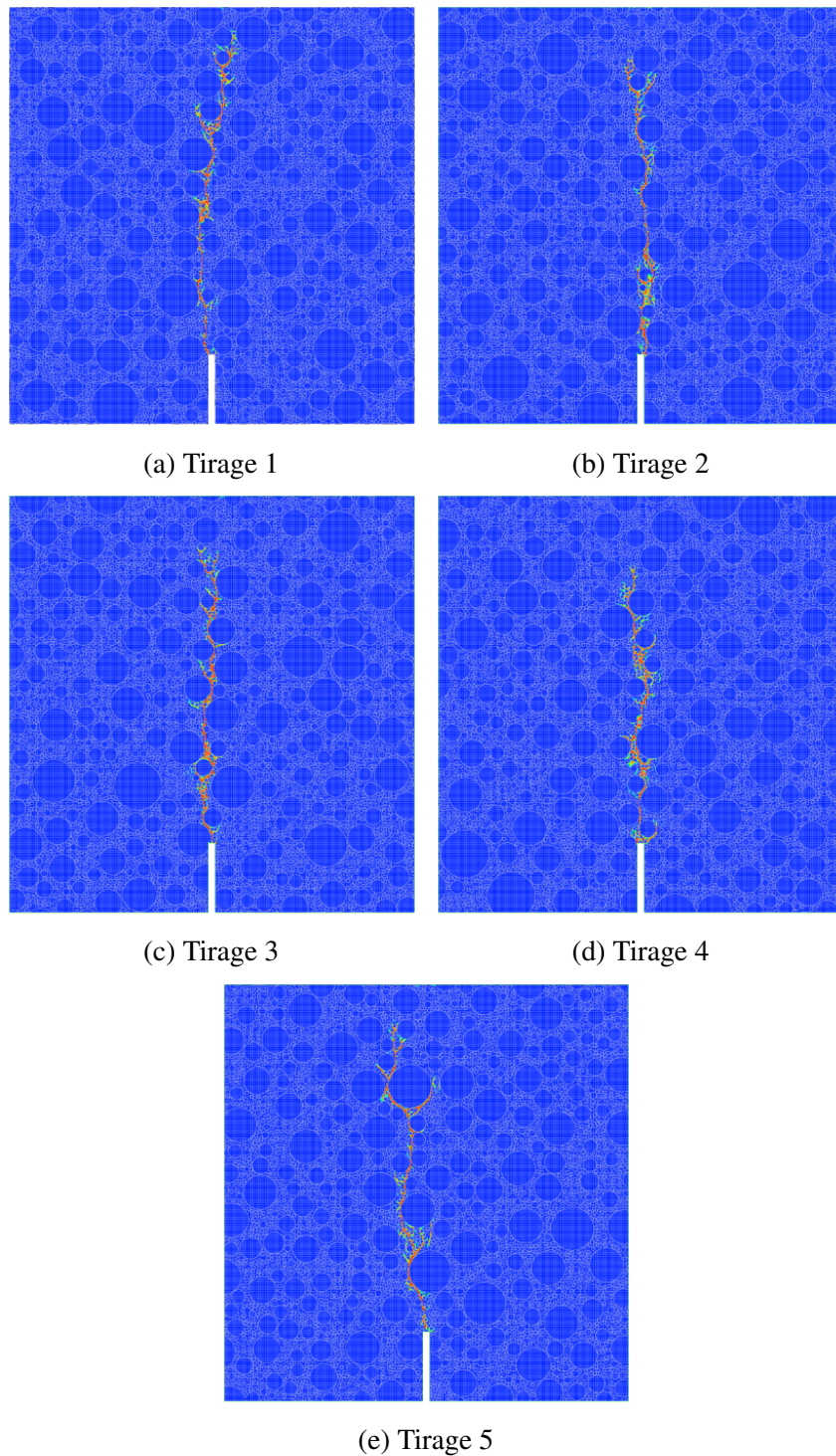


FIGURE D.1 – Champs d'endommagement - dimension H1

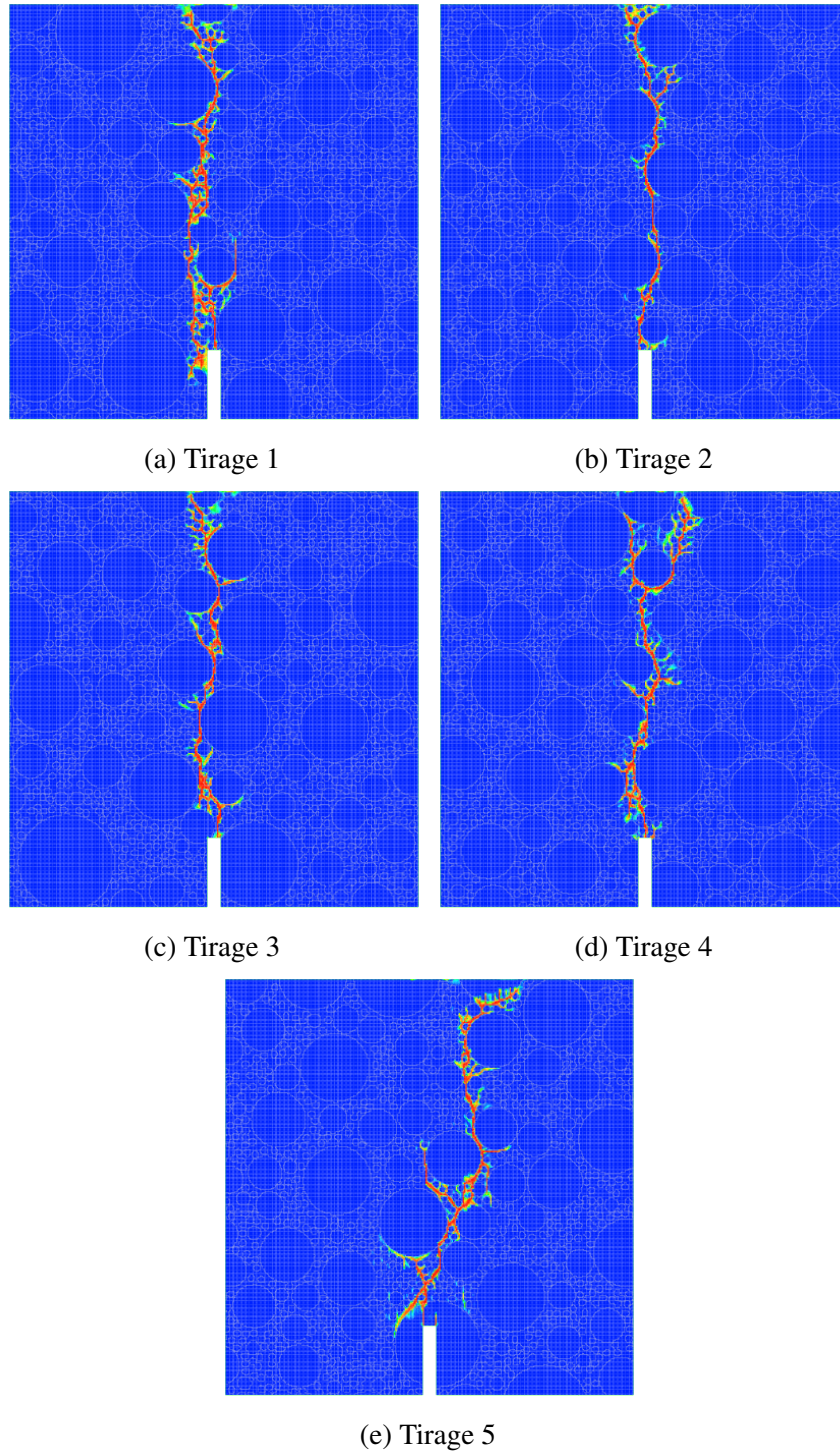


FIGURE D.2 – Champs d'endommagement - dimension H2



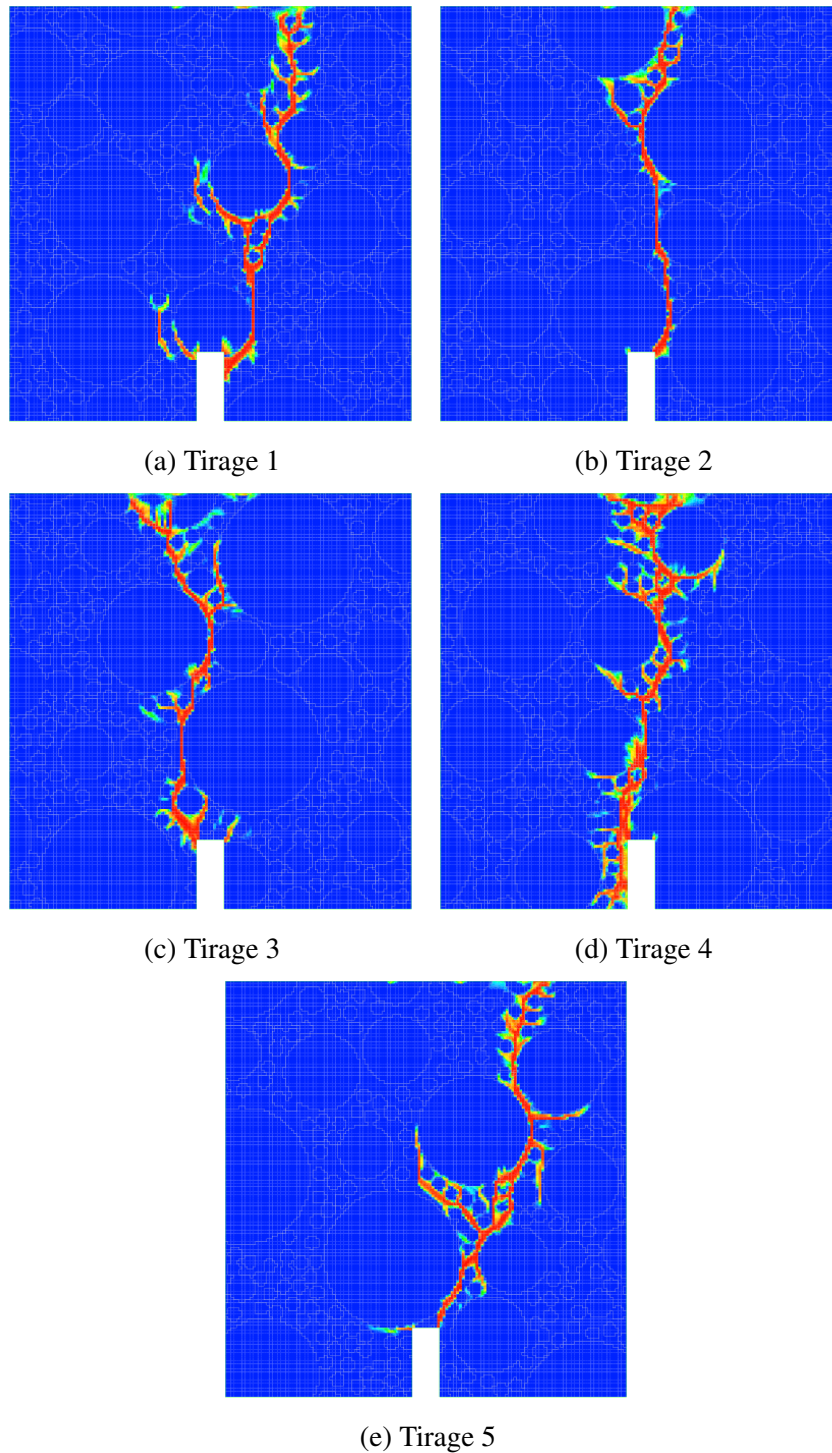


FIGURE D.3 – Champs d'endommagement - dimension H3

# Annexe E

## Étude sur la modélisation EF WST

### E.1 Étude sur les conditions aux limites simulations WST

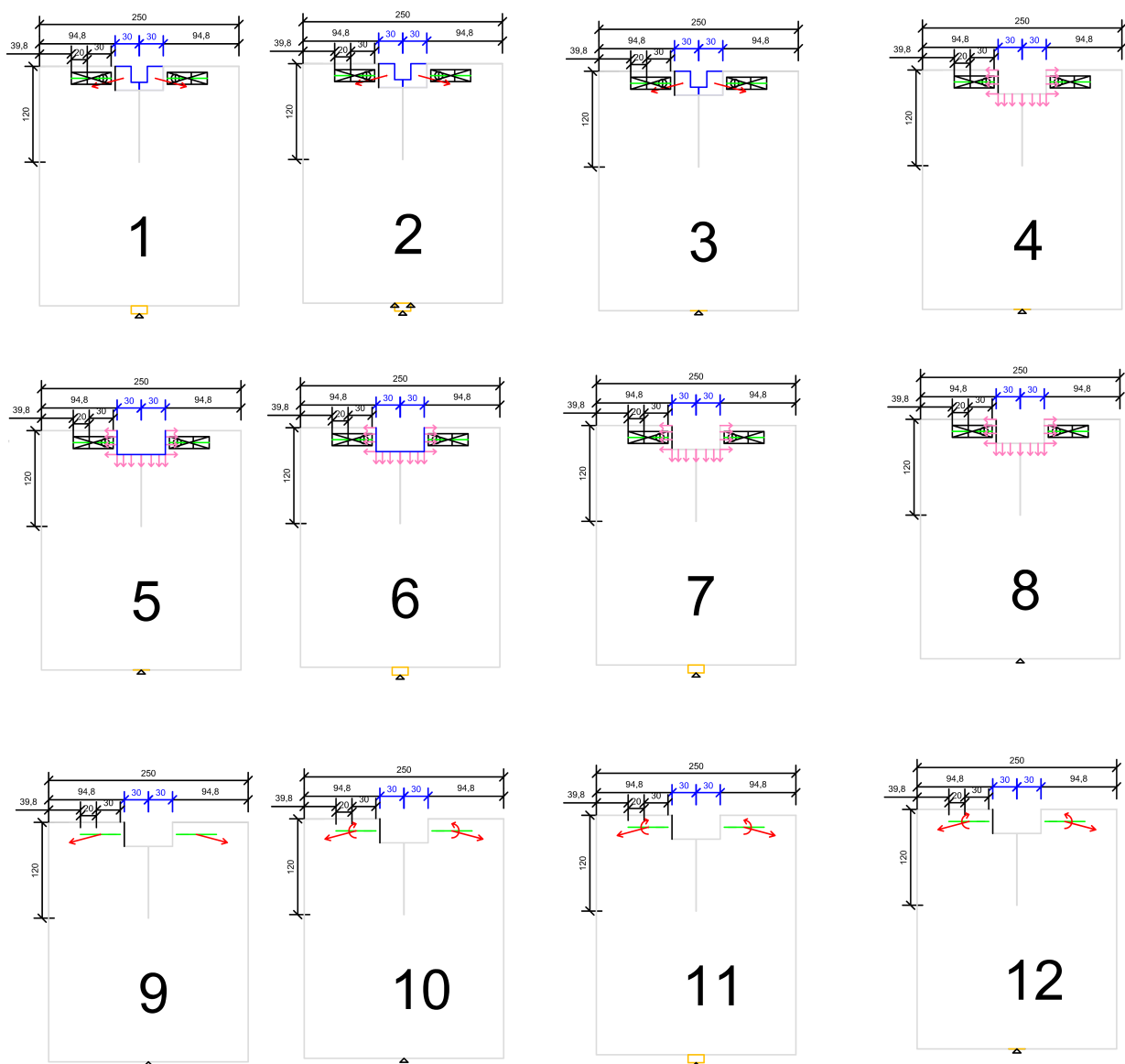


FIGURE E.1 – Les différents chargements et conditions aux limites testés

Différents cas sont testés (Figure E.1). Le cas 1 est le plus complet et celui se rapprochant

au plus de la réalité. Ces tests permettent d'analyser le choix du chargement et de la condition d'appui. A propos du chargement, 3 cas sont possibles :

- Cas 1-2-3 : Force unitaire orientée suivant le demi-angle du coin et centrée au niveau de l'axe des roulements : il y a alors la nécessité de modéliser les supports des roulements ;
- Cas 4-5-6-7-8 : Force répartie le long de la gorge suivant les composantes x et y de la force unitaire présente dans les cas 1-2-3. L'avantage de cette méthode est de ne pas être contraint à modéliser les supports des roulements ;
- Cas 9-10-11-12 : Il y a également la possibilité de supprimer les supports des roulements en décalant le point d'application de la force d'une longueur  $l_{decal}$  afin de se retrouver directement sur l'éprouvette. Il faut ensuite ajouter un moment parasite d'un bras de levier équivalent à  $l_{decal}$ .

A propos de l'appui :

- Cas 1-6-7-11 modélisent la cale en acier avec un point rotulé avec la possibilité de pénétration et de glissement du béton sur l'acier ;
- Cas 3-4-5-12 modélisent une ligne en acier liée au béton avec un point rotulé ;
- Cas 8-9-10 ne modélisent pas la cale : un point rotulé est directement appliqué au béton ;
- Cas 2 est un cas spécial où la cale est modélisée mais avec des conditions d'appuis supplémentaires (les extrémités de la cale sont attachées à l'éprouvette).

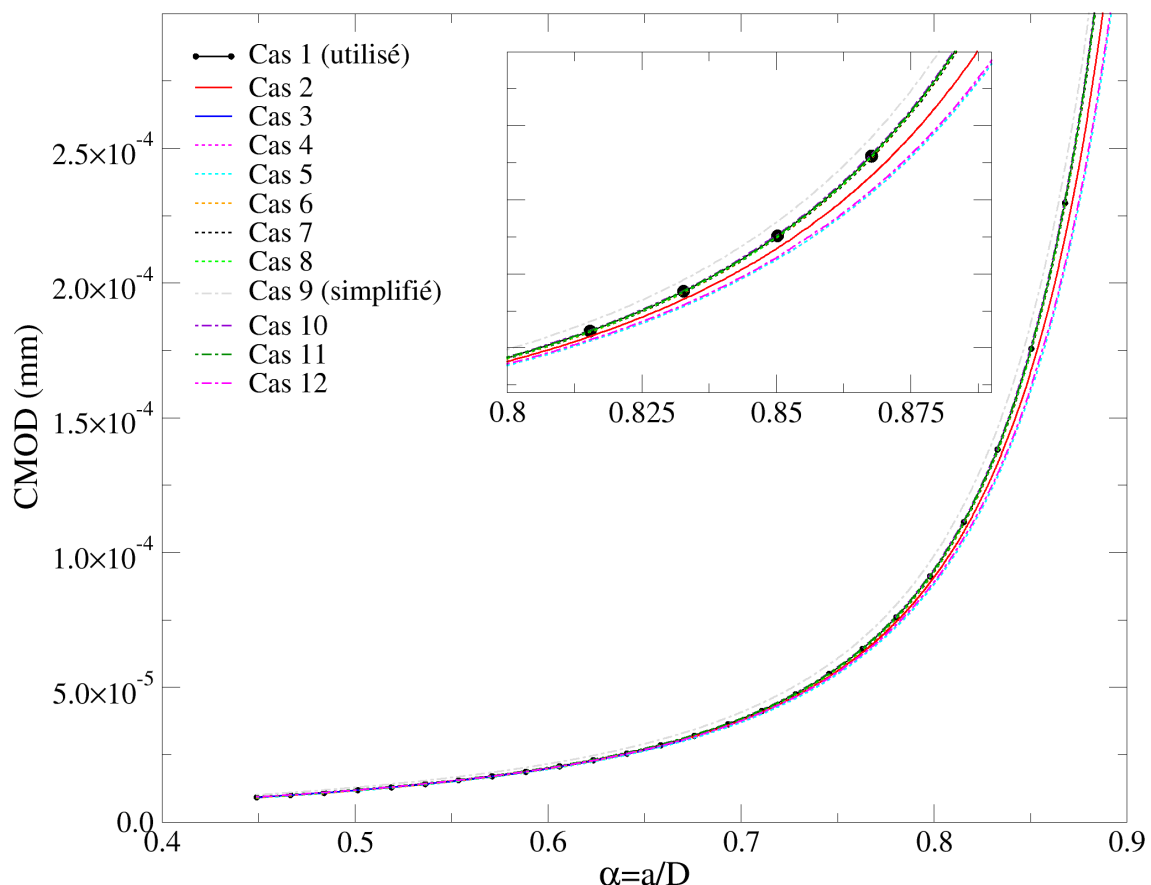


FIGURE E.2 – Evolution du CMOD selon les différents cas

Plusieurs constats se font à la vue de la Figure E.2. Les trois méthodes de chargement semblent être équivalentes. Au niveau des conditions d'appuis, il s'avère que le choix des conditions se fait ressentir à près de 70% de longueur relative de fissure. La différence de la réponse

d'une modélisation de la cale avec des conditions de pénétrations et de glissements ou du choix de laisser libre avec juste un nœud articulé est très minime. Néanmoins, une différence notable apparaît lorsque la cale est remplacée par une ligne d'élément de type coque liée à l'éprouvette.

## E.2 Étude sur les différents calculs du taux de restitution numérique

3 méthodes d'obtention du taux de restitution numérique unitaire sont réalisées. L'objectif est de montrer que ces méthodes donnent des résultats semblables. Ces méthodes sont :

- La méthode CCT [Krueger, 2004] (explicitée à la Section 2.4.3).
- La méthode de la complaisance liée à la relation :

$$G(a) = \frac{F^2}{2bD} \frac{\partial \lambda(\alpha)}{\partial \alpha} \quad (\text{E.1})$$

- La méthode d'intégrale de contour de type intégrale de Rice. Le logiciel de calcul aux éléments-finis Cast3M propose une procédure de calcul nommée @G\_THETA qui permet de déterminer le taux de restitution  $G$  au sein d'un maillage rayonnant défini par un rayon, un nombre de couches et de morceaux (Figure E.6b). L'intégrale invariante  $G\theta$  transforme l'intégrale  $J$  de contour curviligne (RICE) en une intégrale de contour surfacique par le biais du théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradsky [Meite, 2012]. La forme finale de l'intégrale  $G\theta$  est la suivante :

$$G\theta = \int_S (-W.\theta_{k,k} + \sigma_{ij}.u_{i,k}.\theta_{k,j}) dS \quad (\text{E.2})$$

où  $W$  est l'énergie de déformation élastique,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes,  $u$  le vecteur des déplacements et  $\theta$  les coordonnées polaires.

L'intérêt de la méthode CCT et  $G\theta$  est la possibilité d'un découplage des modes de rupture (rupture mixte). Ici, uniquement le mode I est considéré. Les résultats de la Figure E.4 attestent de l'équivalence de ces méthodes. Dans ce travaux il a été fait le choix de la Crack Closure Technique.

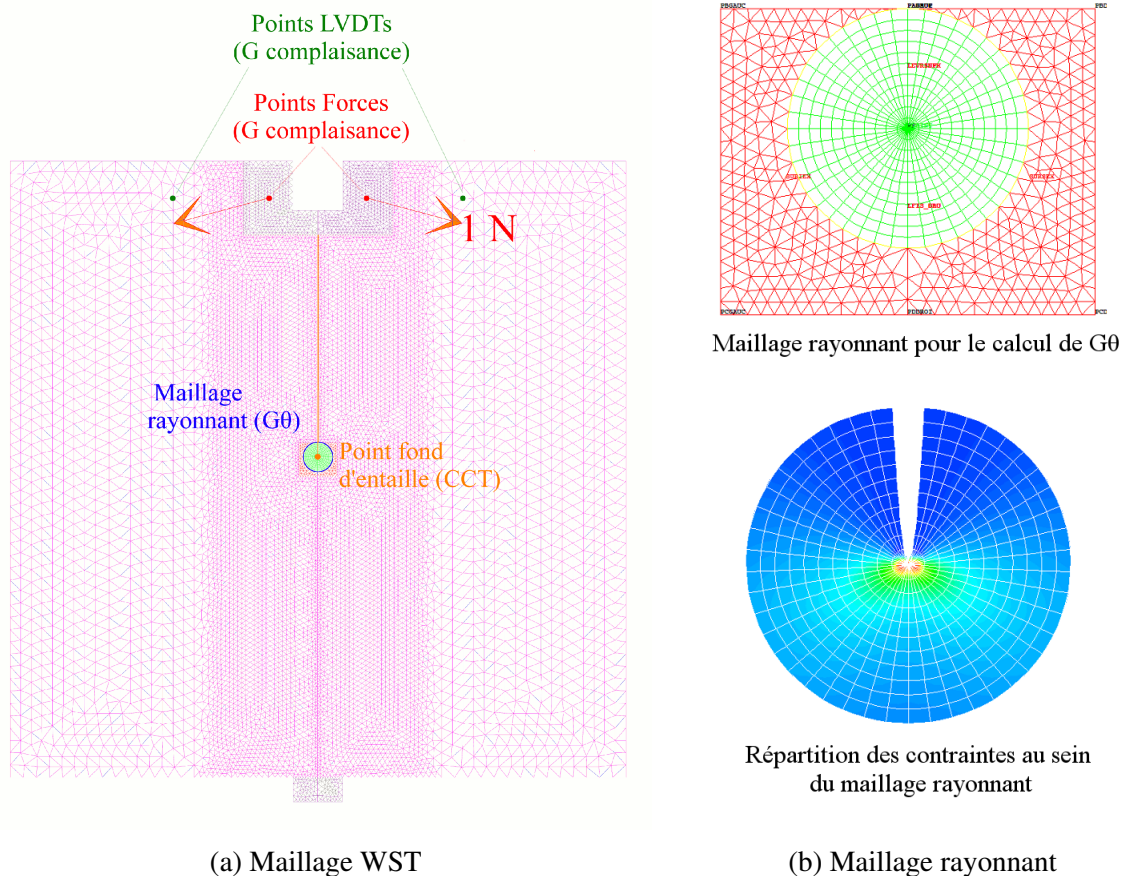


FIGURE E.3 – Maillage et différentes méthodes de calcul du taux de restitution numérique

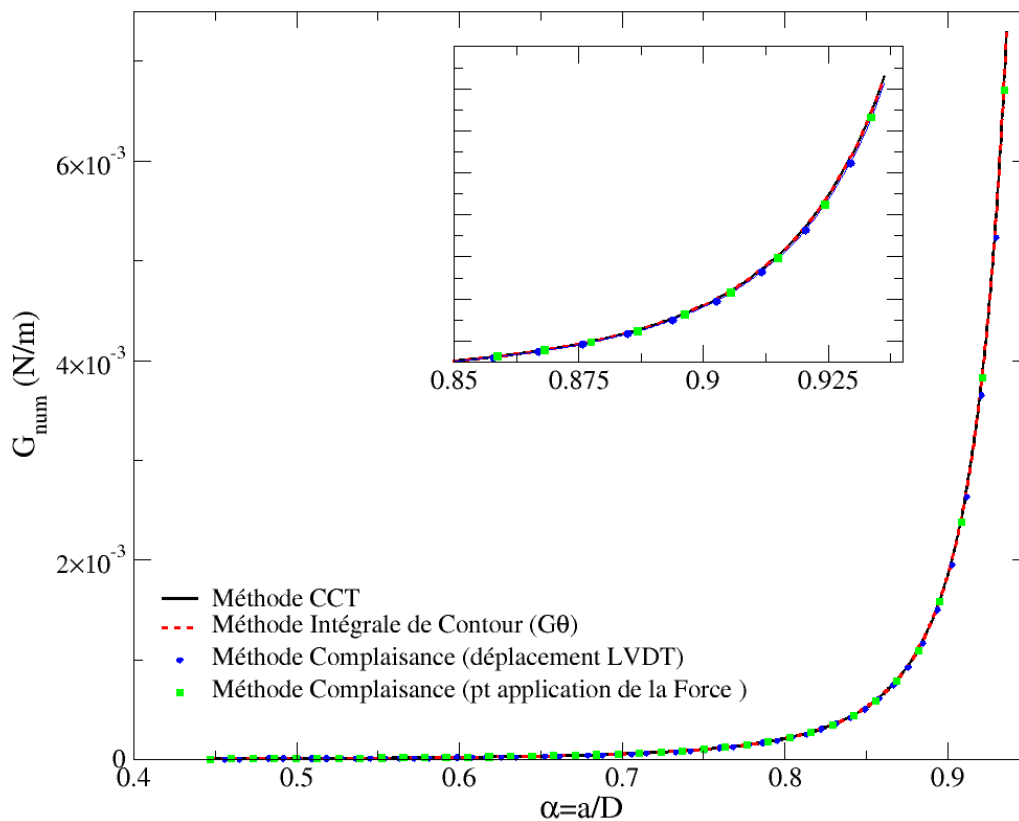


FIGURE E.4 – Comparaison des différentes méthodes de calcul du taux de restitution numérique

### E.3 Étude sur la possibilité de confinement de la FPZ dans les éprouvettes WST étudiées

Une étude est réalisée en 2D et en élasticité sur les deux dimensions des éprouvettes (WST 250 & WST 300). La contrainte perpendiculaire à la propagation de la fissure effective sur le long du ligament est étudiée. Plusieurs cas où la longueur de la FPZ est proportionnelle à l'incrément de fissure élastique équivalente sont considérés.

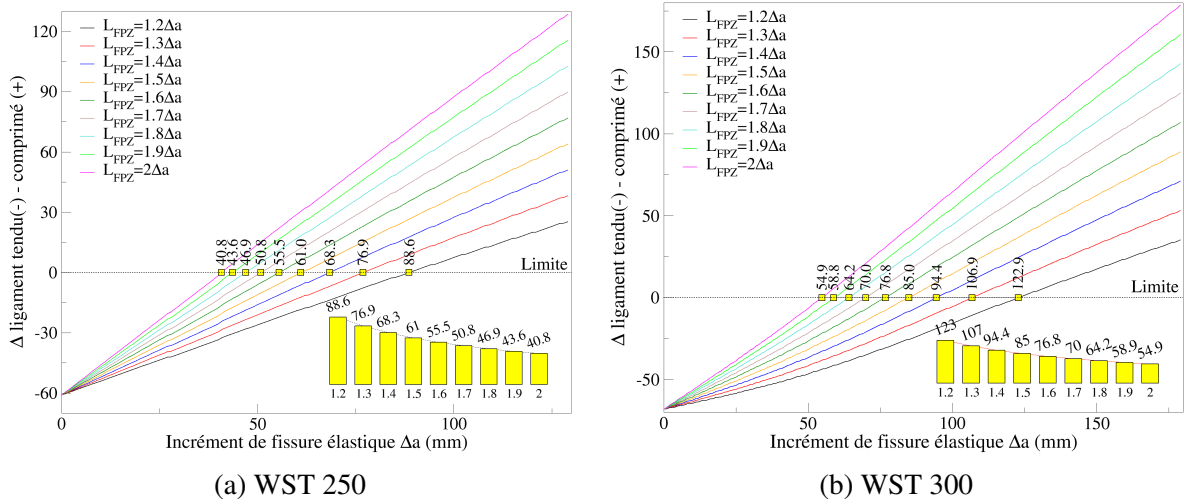


FIGURE E.5 – Limite Ligament tendu-comprimé

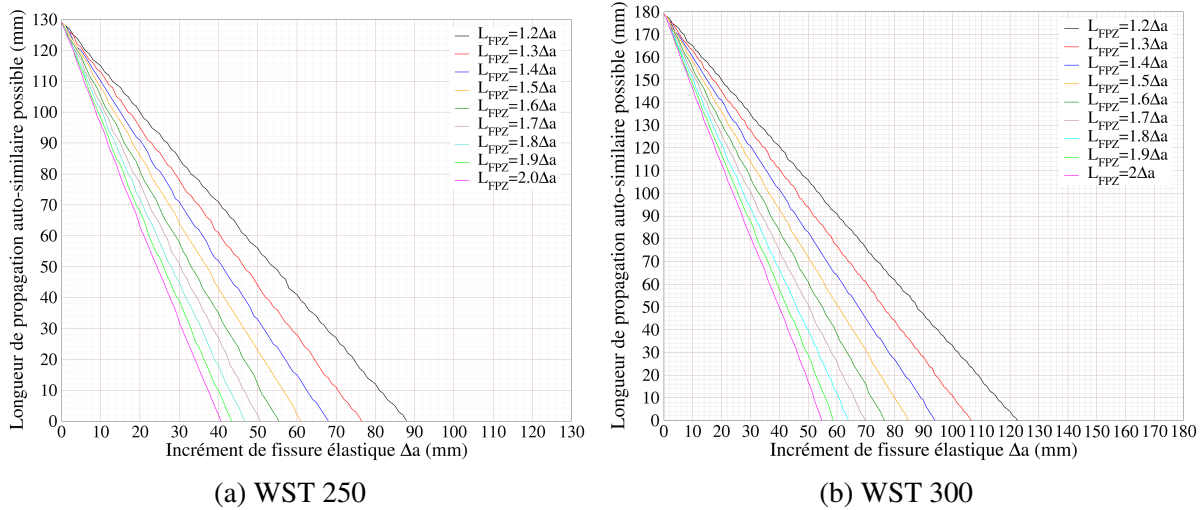


FIGURE E.6 – Possibilité de propagation de la fissure dans une zone tendue

### E.4 Point sur l'influence de la boîte mésoscopique

Ce paragraphe fait un point sur la dimension de la boîte mésoscopique. Le choix de la dimension de la boîte mésoscopique doit se faire à bon escient. Effectivement, comme le montre la figure E.7, des dimensions trop petites entraîneraient des conditions limites parasites. En conséquence le chemin de fissuration se verrait perturber et modifier sans compter l'apparition d'une force résiduelle au niveau de la réponse macroscopique.

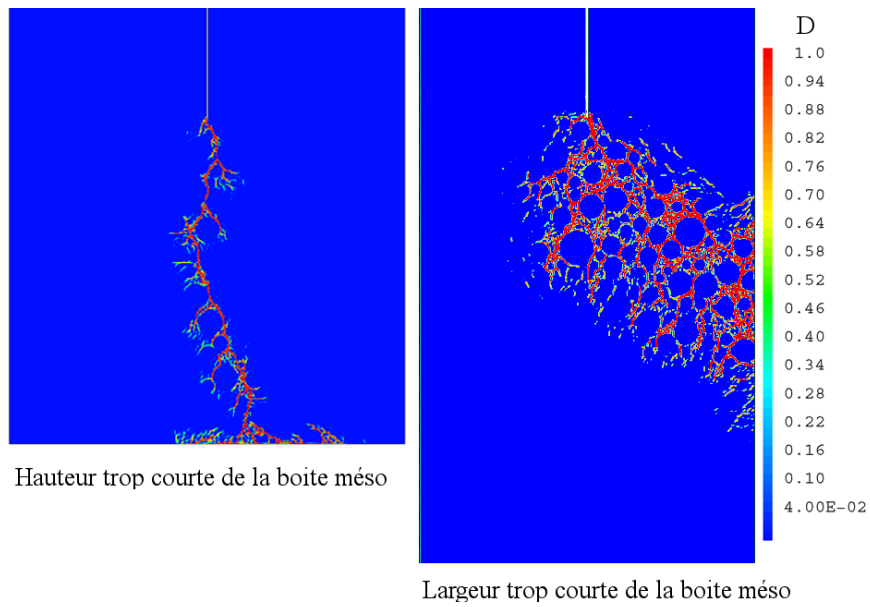


FIGURE E.7 – Champs d’endommagement perturbés par les dimensions de la boîte mésoscopique

# Annexe F

## Détermination du champ d'énergie restituée

En appui de la Figure F.1, représentant la réponse macroscopique en contrainte-déformation d'un élément soumis à la traction, il est possible de déterminer une relation afin de calculer l'énergie restituée entre deux temps de calcul, i.e., entre deux incréments de longueurs de fissures élastiques équivalentes.

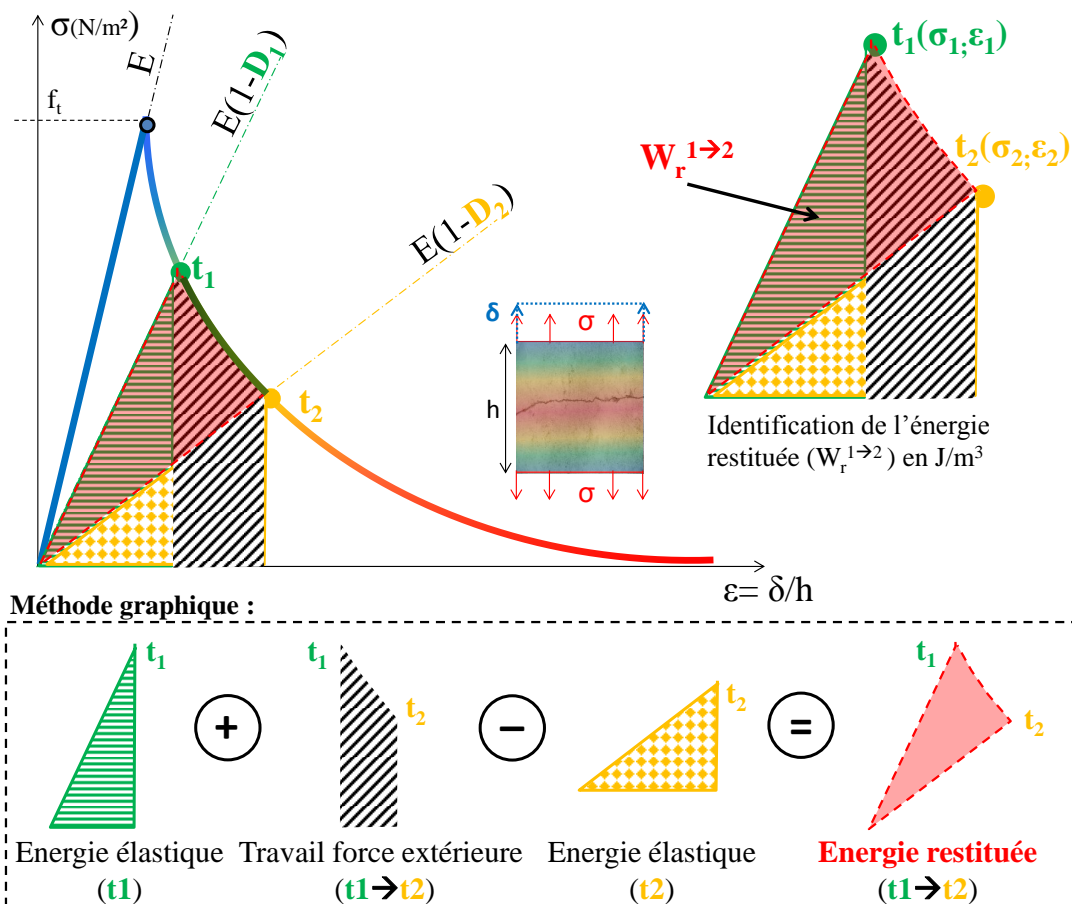


FIGURE F.1 – Identification de l'énergie restituée à partir de la réponse macroscopique

De manière graphique (calcul de surfaces), l'énergie restituée  $W_r^{t_1 \rightarrow t_2}$  est dépendante de l'énergie élastique aux instants  $t_1$  et  $t_2$  et au travail des forces extérieures entre  $t_1$  et  $t_2$ . Détaillons chaque énergie :



- L'énergie élastique à l'instant  $t_1$  :

$$W_e^{t_1} = \frac{1}{2} \sigma^{t_1} \varepsilon^{t_1} \quad (\text{F.1})$$

- L'énergie élastique à l'instant  $t_2$  :

$$W_e^{t_2} = \frac{1}{2} \sigma^{t_2} \varepsilon^{t_2} \quad (\text{F.2})$$

- Le travail des forces extérieures entre  $t_1$  et  $t_2$  :

$$W_t^{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{1}{2} (\sigma^{t_1} + \sigma^{t_2}) (\varepsilon^{t_1} - \varepsilon^{t_2}) \quad (\text{F.3})$$

Ainsi, en soustrayant l'énergie élastique  $W_e^{t_2}$  de la somme entre l'énergie élastique à  $W_e^{t_1}$  et le travail  $W_t^{t_1 \rightarrow t_2}$ , soit **F.1** + **F.3** - **F.2**, il est possible de trouver une relation de l'énergie dissipée  $W_r^{t_1 \rightarrow t_2}$  en fonction de la contrainte et de la déformation :

$$W_r^{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{1}{2} [(\sigma^{t_1} \varepsilon^{t_2}) - (\sigma^{t_2} \varepsilon^{t_1})] \quad (\text{F.4})$$

Il est dès lors possible de généraliser cette dernière équation (eq. **F.4**) en utilisant le produit tensoriel entre les tenseurs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformations  $\varepsilon_{ij}$ , où  $W_r^{t_1 \rightarrow t_2}$  est variable scalaire exprimée en  $J/m^3$  :

$$W_r^{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{t_1} \otimes \varepsilon_{ij}^{t_2} - \sigma_{ij}^{t_2} \otimes \varepsilon_{ij}^{t_1}) \quad (\text{F.5})$$

### Un point sur la relation entre champ d'énergie restituée et le champ d'endommagement

En toute théorie, et suivant la théorie de l'endommagement isotrope. Il est possible de déterminer une relation de l'énergie restituée en fonction de la variable scalaire d'endommagement  $D$  et de la déformation totale  $\varepsilon$ . Partons du principe que l'endommagement affecte le module d'élasticité initiale, ainsi la loi de Hooke « endommagée » peut s'écrire pour les deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\begin{cases} \sigma^{t_1} = E(1 - D_{t_1}) \varepsilon^{t_1} \\ \sigma^{t_2} = E(1 - D_{t_2}) \varepsilon^{t_2} \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

En injectant la relation **F.6** dans la relation **F.4**, on obtient une relation reliant l'énergie restituée à l'endommagement :

$$W_r^{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{1}{2} E \varepsilon^{t_1} \varepsilon^{t_2} (\Delta D) \quad , \quad (\text{F.7})$$

où  $\Delta D$  est l'incrément d'endommagement entre l'instant  $t_1$  et  $t_2$  ( $\Delta D = D_{t_2} - D_{t_1}$ ). Cette dernière relation considère que l'énergie peut être restituée seulement et seulement si, il y a de l'endommagement actif ( $\Delta D > 0$ ). Cependant, la généralisation (dans des cas de chargement non-uniaxiale) de la relation **F.7** est correcte dans le cas où la variable d'endommagement  $D$  affecte de la même manière le tenseur de contraintes effectives positives (traction) et négatives (compression). Or, ce n'est pas le cas dans le modèle d'endommagement considéré dans ces travaux, puisque :

$$\sigma_{ij} = (1 - D) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_+ + (1 - D^\alpha) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_- \quad (\text{F.8})$$

## Annexe G

### Champs d'endommagement des nouvelles simulations WST

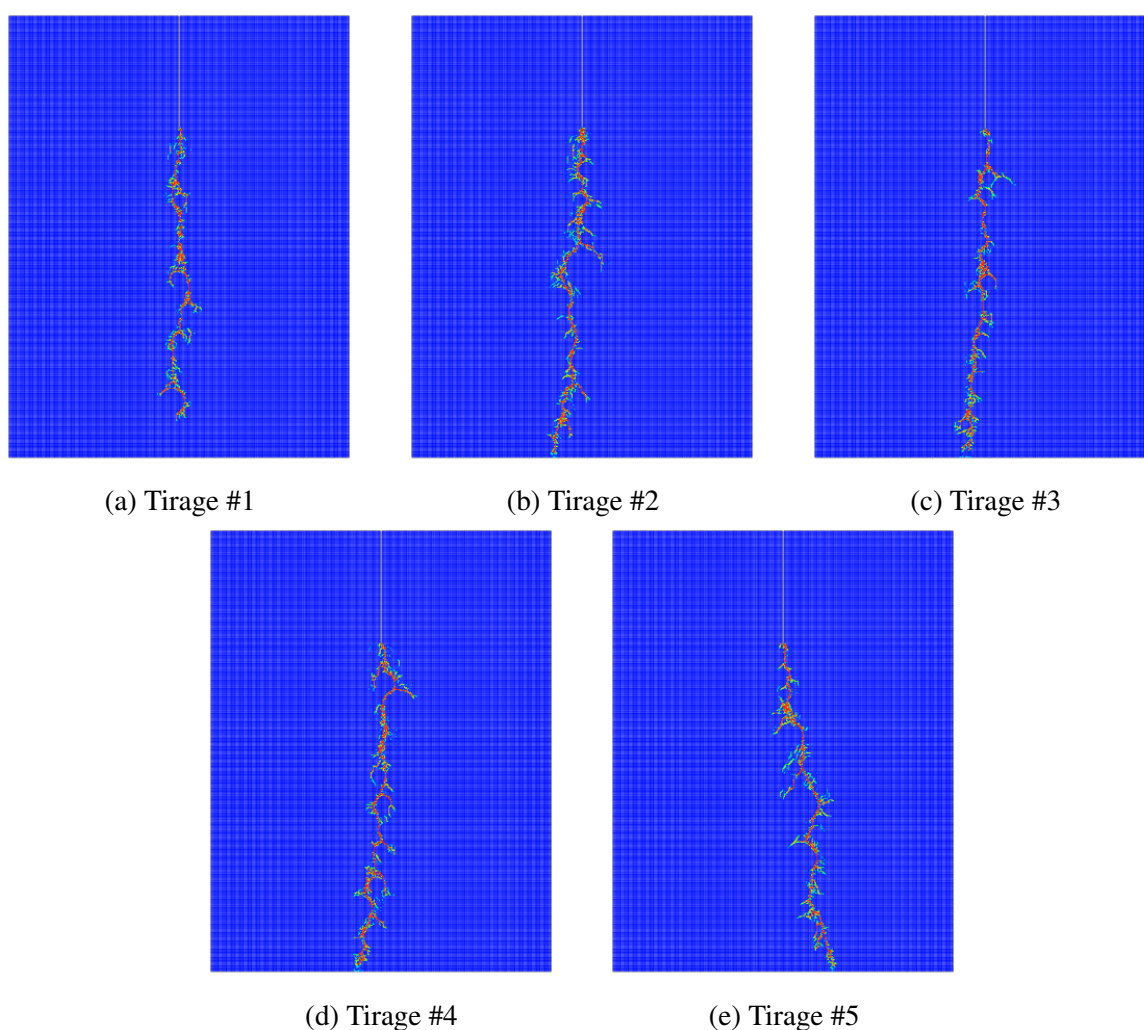
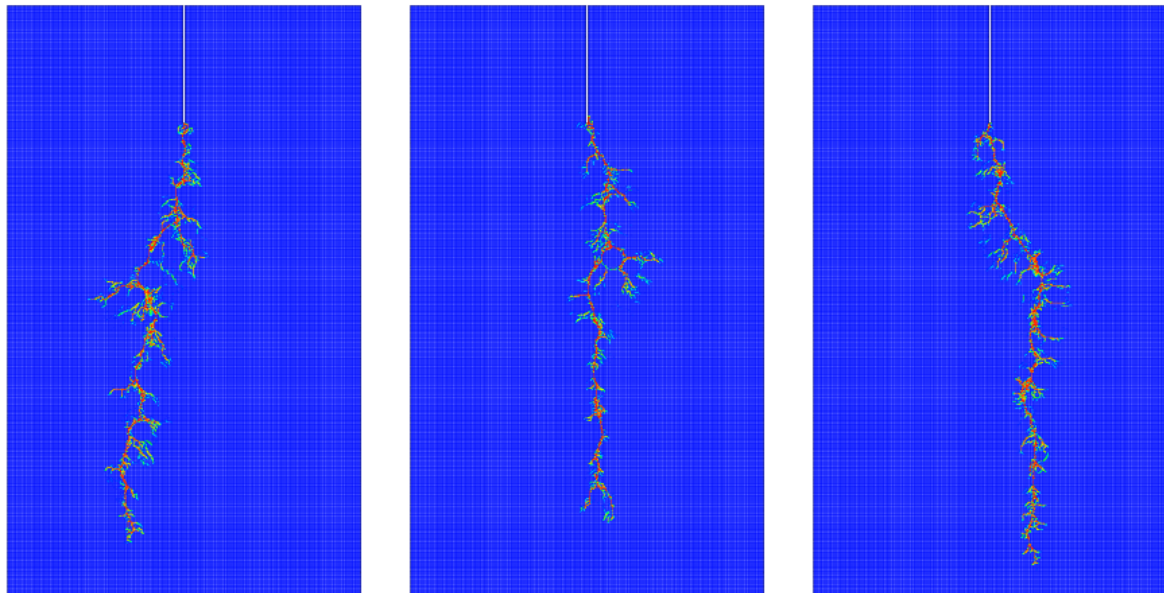


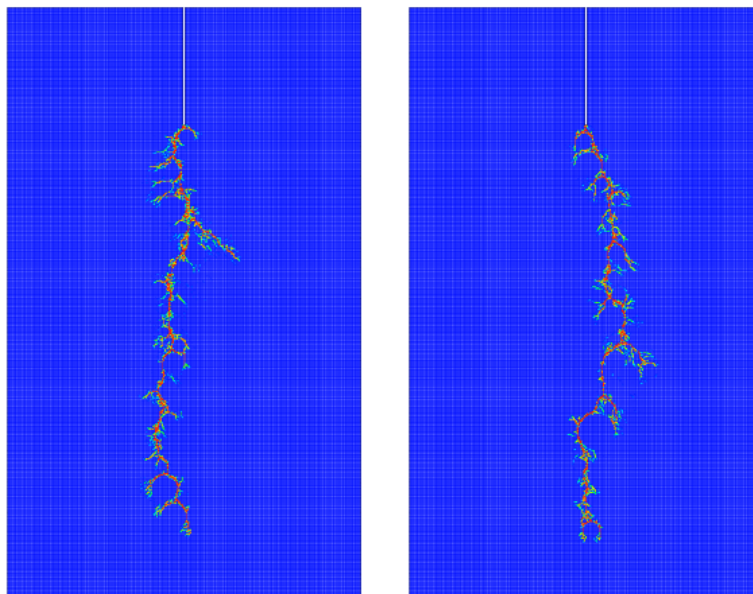
FIGURE G.1 – Champs d'endommagement WST 250 pour différents tirages



(a) Tirage #1

(b) Tirage #2

(c) Tirage #3



(d) Tirage #4

(e) Tirage #5

FIGURE G.2 – Champs d'endommagement WST 300 pour différents tirages

## Annexe H

# Énergie restituée VS Endommagement instantané

Le processus de rupture peut, rappelons-le, être mis en évidence par deux variables : l'énergie restituée  $W_r$ , et l'endommagement instantané  $\Delta D$  lié au champ d'endommagement. Situons nous à l'instant A (indiquée sur la Figure 4.8 dans la Section 4.2.2 ou autrement dit en phase de fin de propagation auto-similaire de la fissure principale. Localement à l'échelle mésoscopique, il semblerait de manière quantitative que les nombres points de Gauss restituant de l'énergie correspondent aux points de Gauss où l'endommagement est actif (Figure H.1). Néanmoins, qualitativement parlant, les distributions des variables  $W_r$  et  $\Delta D$  ne sont pas les mêmes le long de l'éprouvette (Figure H.2). En effet, on remarque que l'énergie restituée met en évidence une activité continue le long de la fissure principale formée. Ainsi, de l'énergie non-négligeable continue à être restituée aux abords des lèvres de la fissure formées. La variable d'endommagement instantané ( $\Delta D$ ) par sa valeur met plutôt en évidence les sites où un fort endommagement à lieu, i.e., la création d'un nouveau de front de fissure en avant de la zone d'élaboration de la rupture.

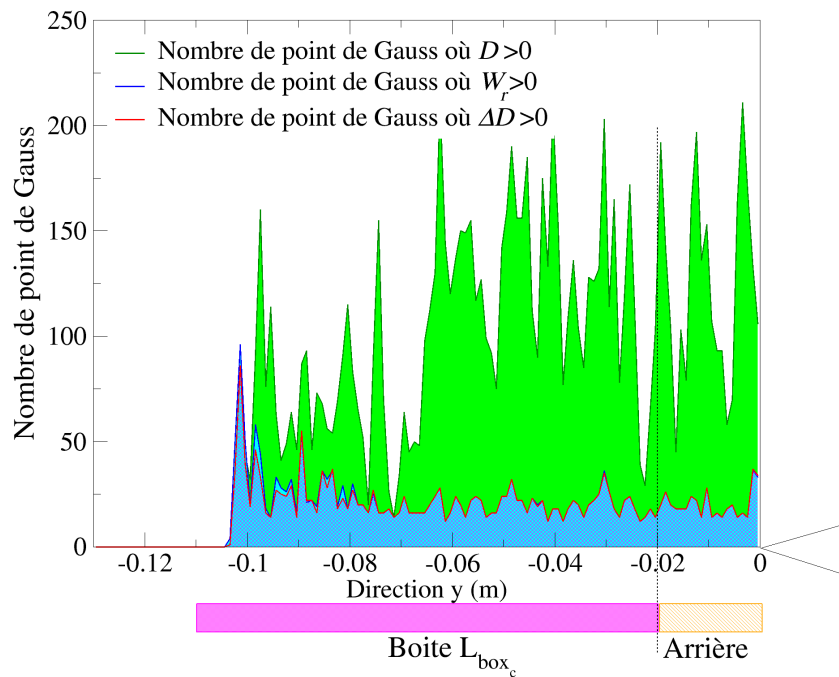


FIGURE H.1 – Distribution du nombre de points de Gauss suivant différentes variables - lors du régime plateau (instant A)

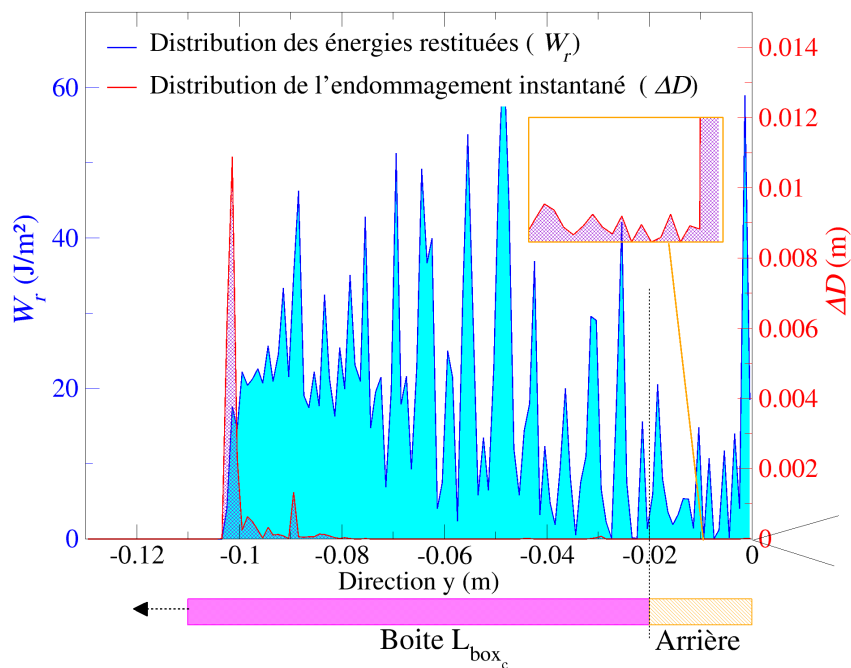


FIGURE H.2 – Distribution des valeurs  $W_r$  et  $\Delta D$  - lors du régime plateau (instant A)

# **Annexe I**

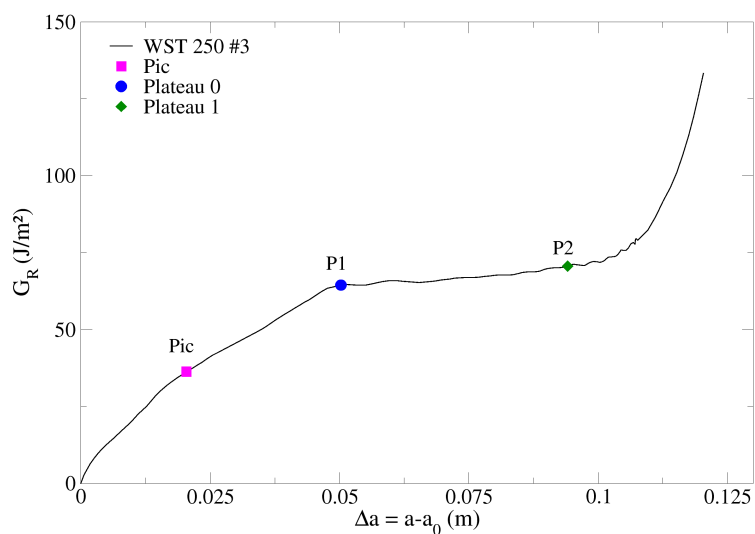
## **Illustration de la zone d'élaboration de la rupture sur quelques simulations**

Cette annexe illustre ce qui a été proposé dans les Sections [4.2.4](#) et [4.3.2](#) du Chapitre 4. Ce dernier chapitre traitait uniquement la nouvelle simulation WST 250 #2, nous proposons ici, quelques figures sur 3 autres nouvelles simulations afin de valider ce qui a été présenté. Ainsi, les simulations WST 250 #3, WST 300 #2 et WST 300 #4 sont analysées. Les Figures ainsi obtenues attestent que le modèle est capable de rendre compte et d'illustrer, après traitement (couplage courbe-R) et filtrage, d'une certaine zone d'élaboration de la rupture.

## I.1 Étude de la simulation WST 250 #3



(a) Endommagement en fin de simulation



(b) Courbe de résistance

FIGURE I.1 – (a) Champ d'endommagement en fin de simulation, (b) courbe-R correspondant incluant les instants considérés pour l'étude - WST 250 #3

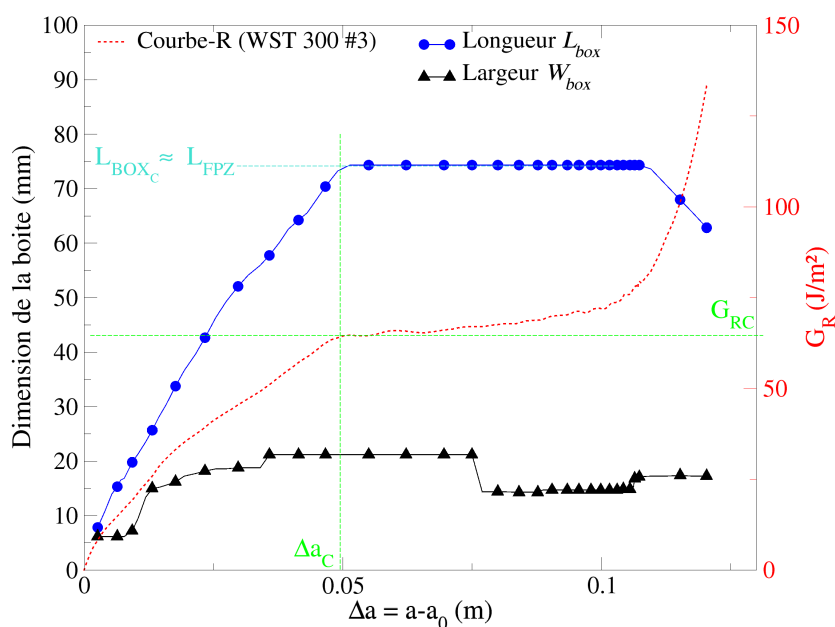


FIGURE I.2 – Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration - WST 250 #3

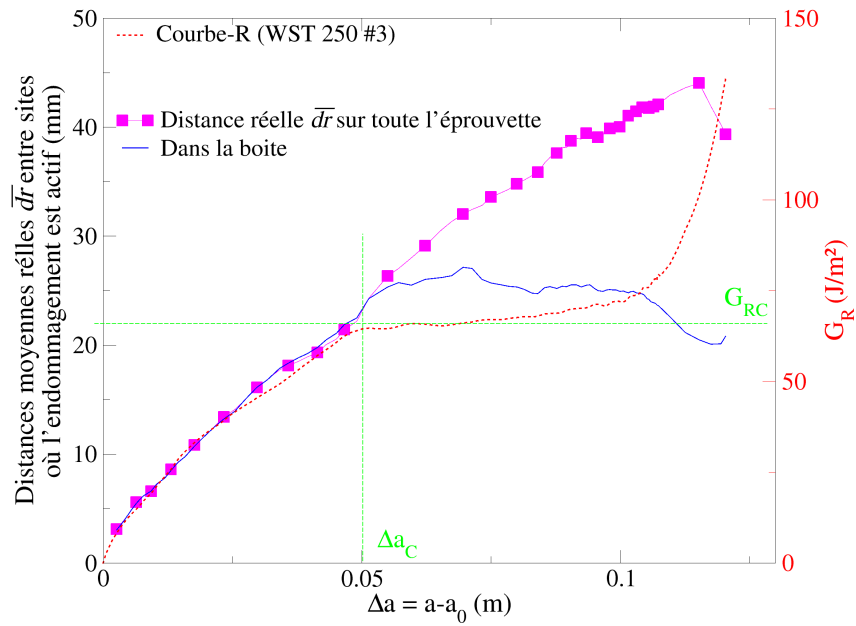


FIGURE I.3 – Distances moyennes réelles  $\bar{d}_r$  - WST 250 #3

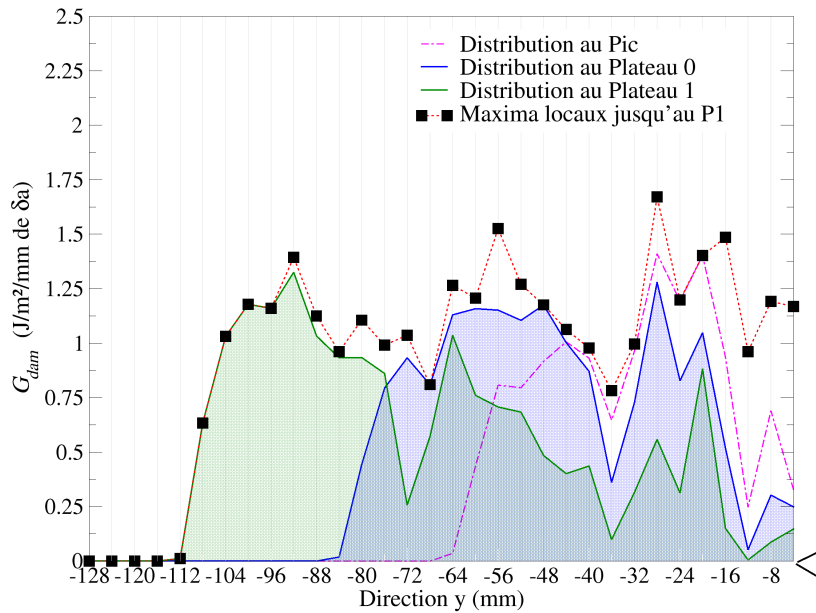
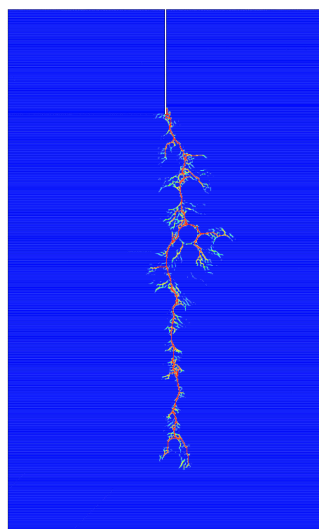


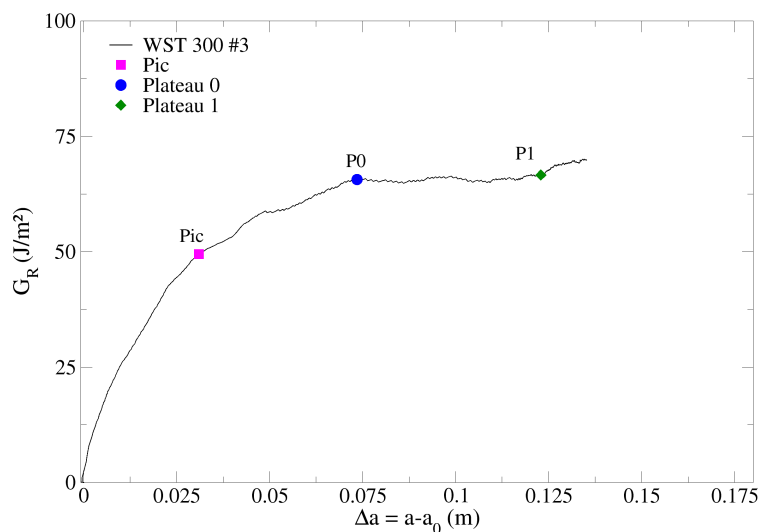
FIGURE I.4 – Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élaboration de la rupture - WST 250 #3



## I.2 Étude de la simulation WST 300 #2



(a) Endommagement en fin de simulation



(b) Courbe de résistance

FIGURE I.5 – (a) Champ d'endommagement en fin de simulation, (b) courbe-R correspondant incluant les instants considérés pour l'étude - WST 300 #2

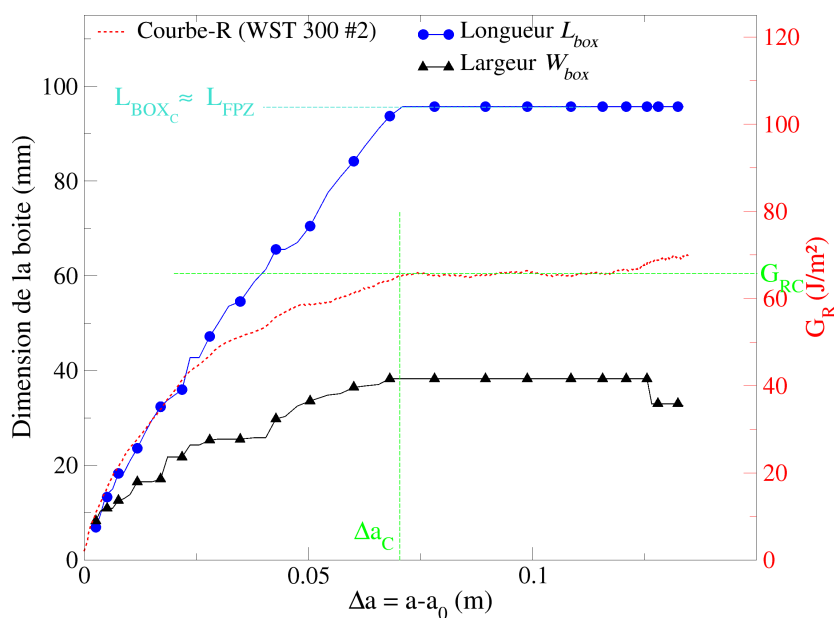


FIGURE I.6 – Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration - WST 300 #2

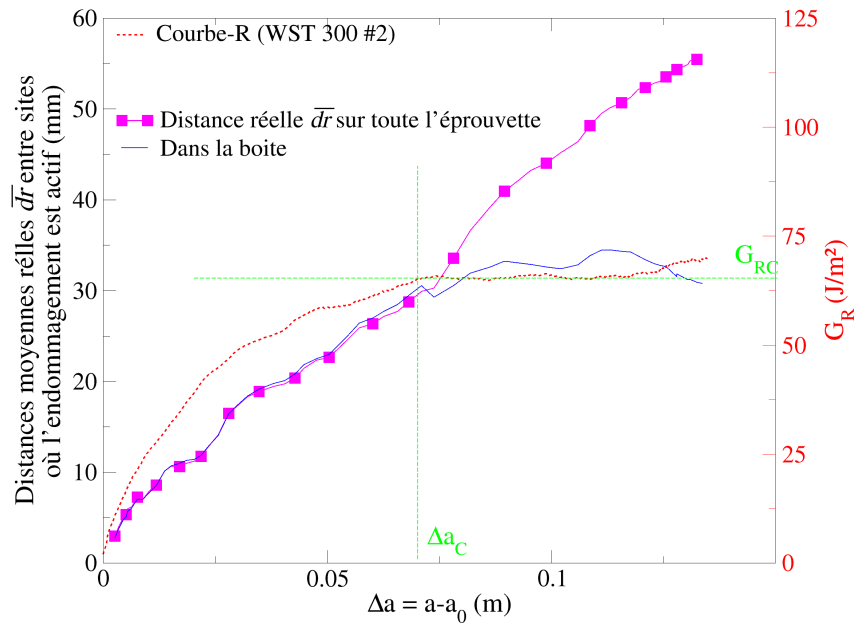


FIGURE I.7 – Distances moyennes réelles  $\bar{d}r$  - WST 300 #2

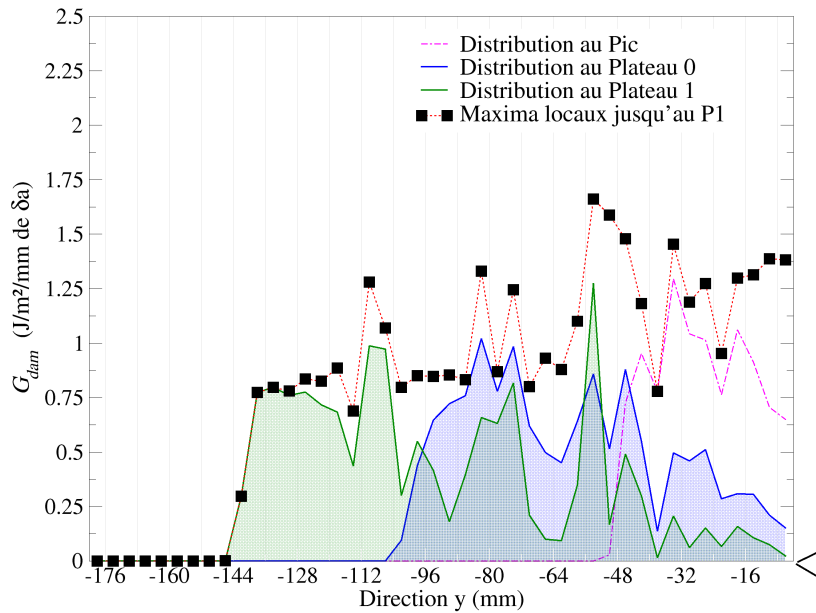


FIGURE I.8 – Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élaboration de la rupture - WST 300 #2

### I.3 Étude de la simulation WST 300 #4

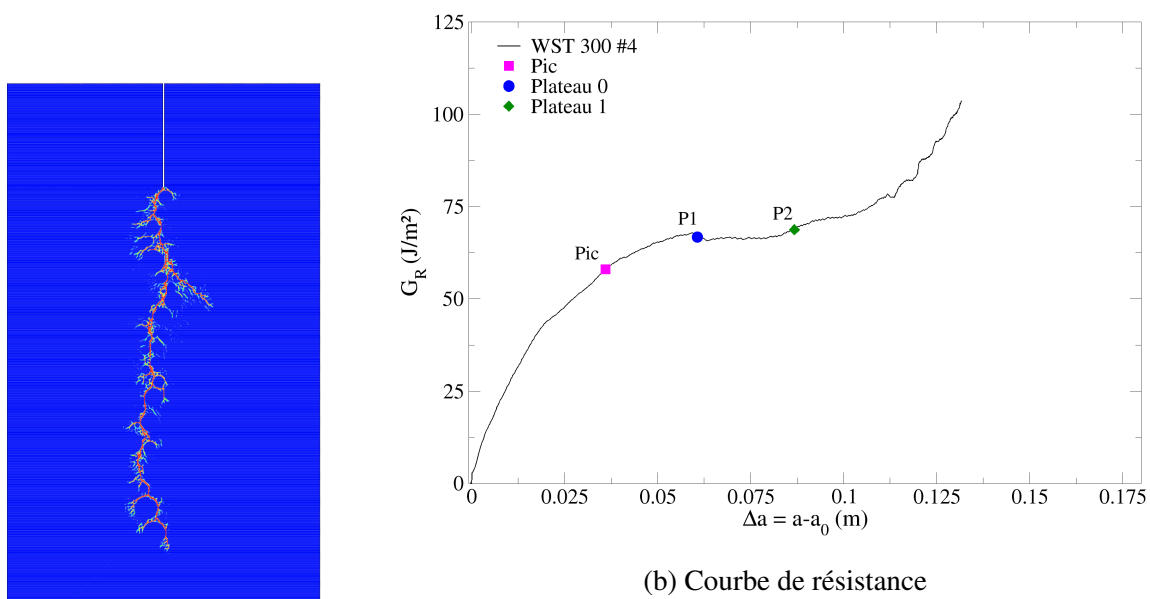


FIGURE I.9 – (a) Champ d'endommagement en fin de simulation, (b) courbe-R correspondant incluant les instants considérés pour l'étude - WST 300 #4

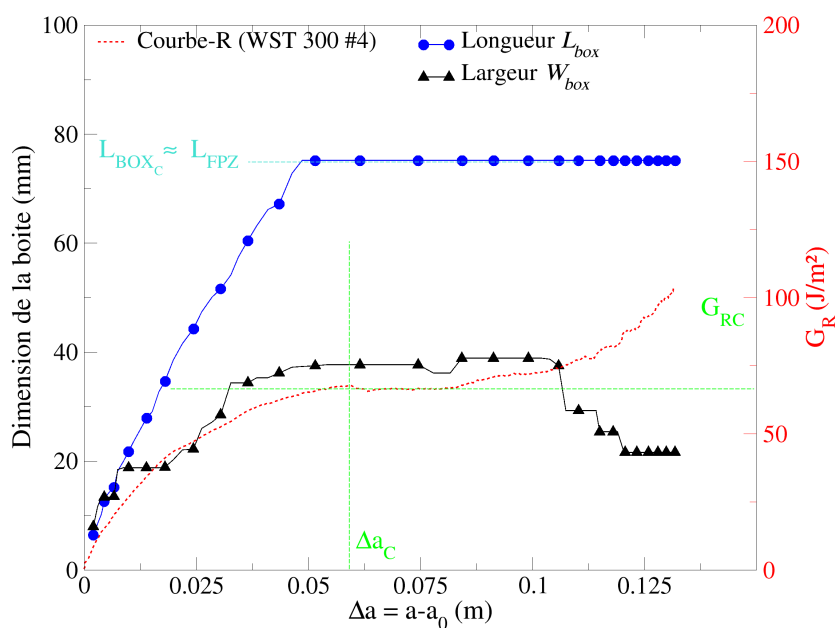


FIGURE I.10 – Évolution de la dimension de la boîte faisant office de zone d'élaboration - WST 300 #4

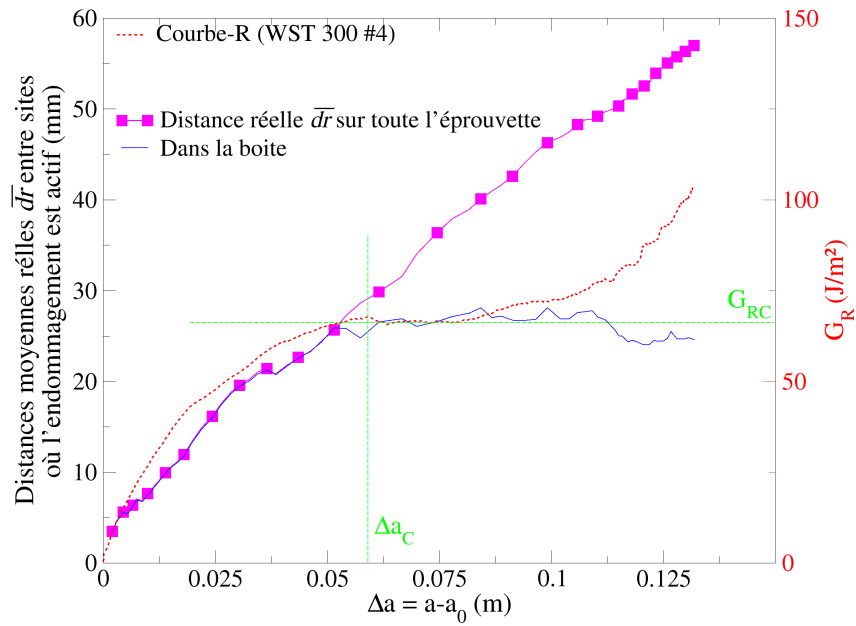


FIGURE I.11 – Distances moyennes réelles  $\bar{d}r$  - WST 300 #4

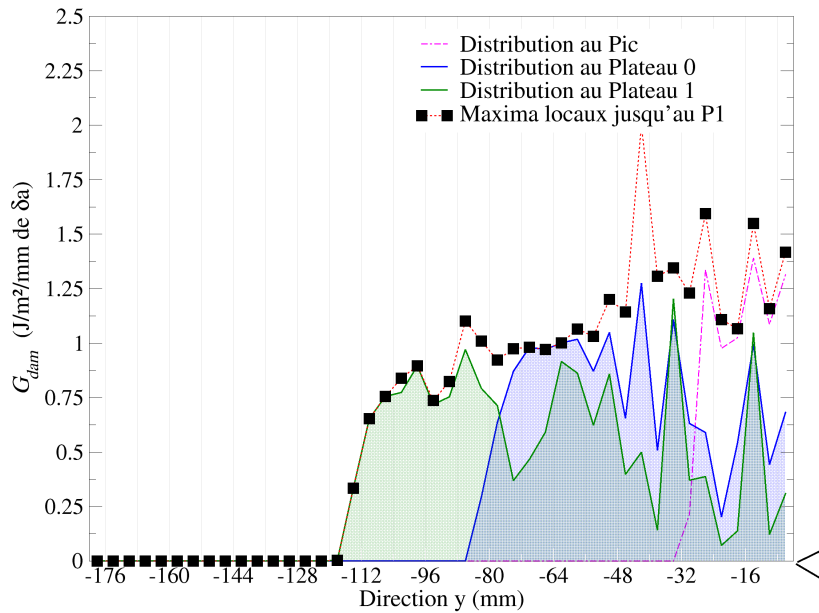


FIGURE I.12 – Distribution du taux de restitution pour une tranche d'1 mm de zone d'élaboration de la rupture - WST 300 #4

## Annexe J

### Courbe force-déplacement et courbe-R de la SENB 400

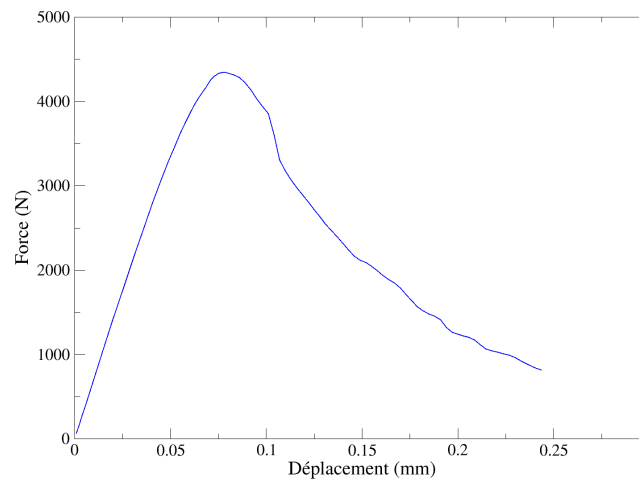


FIGURE J.1 – Courbe force déplacement SENB 400

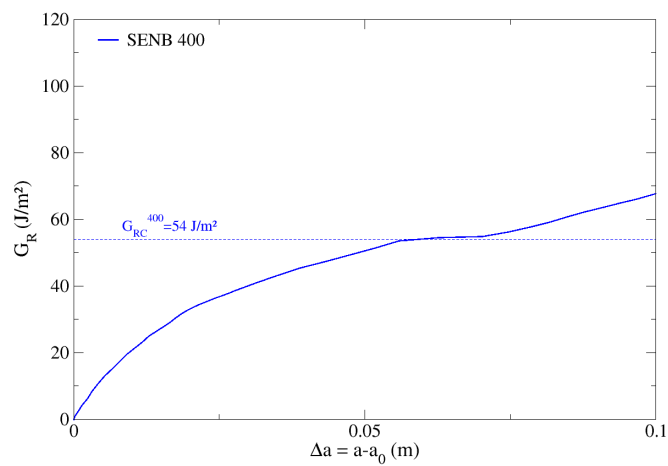


FIGURE J.2 – Courbe-R