



HAL
open science

Analyse cinématique des manipulateurs sériels 3R orthogonaux et des manipulateurs parallèles plan

Mazen Zein

► **To cite this version:**

Mazen Zein. Analyse cinématique des manipulateurs sériels 3R orthogonaux et des manipulateurs parallèles plan. Robotique [cs.RO]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2007. Français. NNT: . tel-01526385

HAL Id: tel-01526385

<https://hal.science/tel-01526385>

Submitted on 23 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

Mécanique, Thermique et Génie Civil

Année 2007.

N° B.U. :

THESE DE Doctorat

***Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

SPECIALITE : GÉNIE MÉCANIQUE

PRESENTEE ET SOUTENUE PUBLIQUEMENT PAR :

Mazen Zein

LE 9 JUILLET 2007
A L'École Centrale de Nantes

TITRE

**ANALYSE CINEMATIQUE DES MANIPULATEURS SERIELS 3R ORTHOGONAUX ET DES
MANIPULATEURS PARALLELES PLANS**

JURY

Président :	Fabrice Rouillier	Directeur de Recherche INRIA, LIP6, Université de Paris VI
Rapporteurs :	Vigen ARAKELYAN Grigore GOGU	Professeur, INSA de Rennes Professeur, Institut Français de Mécanique Avancée IFMA Clermont-Ferrand
Examineurs :	Patrick CHEDMAIL Olivier COMPANY Damien CHABLAT Philippe WENGER	Professeur, École Centrale de Nantes Maître de Conférences, LIRMM, Montpellier Chargé de Recherche CNRS, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes Directeur de Recherche CNRS, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
Directeur de thèse :	Philippe WENGER	
Laboratoire :	Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes	
Co-encadrant :	Damien CHABLAT	
Laboratoire :	Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes	

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à Philippe Wenger, mon directeur de thèse, je lui exprime toute ma reconnaissance pour sa disponibilité, pour son encadrement professionnel et rigoureux, pour ses qualités scientifiques et pour sa grande gentillesse.

Je remercie de même Damien Chablat, mon co-encadrant, pour sa disponibilité, pour son dynamisme, pour ses qualités scientifiques, pour les discussions et les conseils précieux,

Je remercie très sincèrement les membres de mon jury pour leurs remarques constructives, et surtout mes rapporteurs Vigen Arakelyan et Grigore Gogu pour l'intérêt qu'ils ont manifesté sur mon travail.

Je remercie les membres de l'équipe MCM, au sein de laquelle j'ai pu accomplir ce travail dans une ambiance agréable.

Mes AMIS !! à Nantes, en France, au Liban, à Dubai, je ne vous oublie jamais, GRAND MERCI !!

Mes PARENTS et mes FRÈRES !! Mes remerciements les plus chaleureux vont à vous. Pour votre grand amour, je vous dédie ce DOCTORAT.

Résumé.....	10
Abstract.....	10
Introduction.....	11
<u>Chapitre 1 : Cinématique et propriétés des manipulateurs</u>	
1. INTRODUCTION.....	19
2. MECANISMES DE TYPE MANIPULATEUR.....	19
2.1. LES MANIPULATEURS D'ARCHITECTURE SERIELLE	19
2.2. LES MANIPULATEURS D'ARCHITECTURE PARALLELE.....	20
2.3. COMPARAISON DES MANIPULATEURS SERIELS ET PARALLELES	21
3. MODELISATION GEOMETRIQUE.....	22
3.1. ESPACE ARTICULAIRE ET ESPACE OPERATIONNEL	23
3.2. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT	23
3.3. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE.....	24
4. SINGULARITES	24
4.1. SINGULARITES DES MANIPULATEURS SERIELS	25
4.2. SINGULARITES DES MANIPULATEURS PARALLELES.....	25
5. L'ESPACE ARTICULAIRE ACCESSIBLE ET L'ESPACE DE TRAVAIL.....	27
5.1. L'ESPACE ARTICULAIRE ACCESSIBLE	27
5.2. L'ESPACE DE TRAVAIL	28
6. PROPRIETES DES MANIPULATEURS	30
6.1. NOTION D'ASPECT	31
6.2. NOTION DE PARCOURABILITE	32
6.3. MANIPULATEURS CUSPIDAUX	32
7. CONCLUSION	35

1.	INTRODUCTION.....	37
2.	PRELIMINAIRES.....	38
2.1.	PROPRIETES DES MANIPULATEURS SERIELS	38
2.2.	PRESENTATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX	39
2.3.	CLASSIFICATION DES DEUX FAMILLES DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX	41
3.	LES FAMILLES DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX PARTICULIERS	48
4.	CRITERES DE CLASSIFICATION	49
4.1.	NOMBRE DE POINTS CUSPS	49
4.2.	NOMBRE DE NŒUDS	50
5.	CLASSIFICATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX PARTICULIERS	52
5.1.	FAMILLE A ($D_2 = 0, R_2 \neq 0, D_3 \neq 0, R_3 = 0$).....	53
5.2.	FAMILLE B ($D_2 = 0, R_2 = 0, D_3 \neq 0, R_3 = 0$)	57
5.3.	FAMILLE C ($D_2 = 0, R_2 \neq 0, D_3 = 0, R_3 = 0$).....	61
5.4.	FAMILLE D ($D_2 \neq 0, R_2 = 0, D_3 \neq 0, R_3 = 0$).....	63
5.5.	FAMILLE E ($D_2 \neq 0, R_2 = 0, D_3 = 0, R_3 = 0$)	69
5.6.	FAMILLE F ($D_2 = 0, R_2 \neq 0, D_3 \neq 0, R_3 \neq 0$)	71
5.7.	FAMILLE G ($D_2 = 0, R_2 = 0, D_3 \neq 0, R_3 \neq 0$).....	74
5.8.	FAMILLE H ($D_2 = 0, R_2 \neq 0, D_3 = 0, R_3 \neq 0$).....	76
5.9.	FAMILLE I ($D_2 \neq 0, R_2 = 0, D_3 \neq 0, R_3 \neq 0$)	78
5.10.	FAMILLE J ($D_2 \neq 0, R_2 = 0, D_3 = 0, R_3 \neq 0$)	82
6.	CONCLUSION	84
1.	INTRODUCTION.....	87
2.	COMPARAISON PRELIMINAIRE DES TYPES DE MANIPULATEURS.....	87
3.	ANALYSE ET COMPARAISON DES MANIPULATEURS SUIVANT DES CRITERES DE PERFORMANCES LOCALES.....	89
3.1.	OUTILS D'ANALYSE DES PERFORMANCES LOCALES	90
3.2.	INDICES DE PERFORMANCES RELATIF A L'ESPACE DE TRAVAIL	92
3.3.	NOUVEL INDICE DE PERFORMANCE DES MANIPULATEURS	93
3.4.	COMPARAISON DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX.....	100
3.5.	AIDE A LA CONCEPTION DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX	112
4.	CONCLUSION	113
1.	INTRODUCTION.....	116
2.	PRELIMINAIRES.....	117

3.	EQUATIONS DE CONTRAINTES.....	118
4.	SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE DES MANIPULATEURS PARALLELES 3-RPR	121
4.1.	EQUATION DES SINGULARITES.....	121
4.2.	SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE	122
4.3.	ANALYSE DESCRIPTIVE DES SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE.....	125
5.	DETERMINATION DES POINTS CUSP DES MANIPULATEURS 3-RPR PARALLELES 130	
5.1.	CONDITION D'EXISTENCE DES POINTS CUSP.....	131
5.2.	ALGORITHME POUR LE CALCUL DES POINTS CUSP	133
6.	CONCLUSION	140
1.	INTRODUCTION.....	143
2.	PRELIMINAIRES.....	144
3.	PREMIERE CONDITION DE DEGENERESCENCE.....	146
3.1.	DETERMINATION DE LA PREMIERE CONDITION	146
3.2.	RESOLUTION DU MODELE GEOMETRIQUE DIRECT DEGENERE	147
3.3.	UNE DEGENERESCENCE PARTICULIERE ET SON INTERPRETATION GEOMETRIQUE	149
3.4.	EXEMPLE D'UN CAS DEGENERE	150
4.	DEGENERESCENCE DANS TOUT L'ESPACE ARTICULAIRE	151
4.1.	CONDITION SUR LA GEOMETRIE DU MANIPULATEUR	151
4.2.	CALCUL DU MODELE GEOMETRIQUE DIRECT	152
4.3.	EXEMPLE D'UN MANIPULATEUR DEGENERE	153
5.	CINEMATIQUE DES MANIPULATEURS DEGENERES.....	155
5.1.	SINGULARITES DES MANIPULATEURS DEGENERES	155
5.2.	DETERMINATION DES POINTS CUSP.....	160
6.	CONCLUSION	162
1.	INTRODUCTION.....	165
2.	CHANGEMENT NON SINGULIER DE MODE D'ASSEMBLAGE	166
2.1.	PRELIMINAIRES.....	166
2.2.	SINGULARITES ET ASPECTS.....	167
2.3.	POSITION DU PROBLEME : ANALYSE D'UNE TRAJECTOIRE FERMEE CONTOURNANT UN POINT CUSP	168

2.4.	UN MODELE D'ESPACE DE CONFIGURATION	171
2.5.	CONCLUSION.....	178
3.	ZONES EXEMPTES DE SINGULARITES DES MANIPULATEURS 3-RPR PARALLELES	178
3.1.	ZONES EXEMPTES DE SINGULARITES MAXIMALES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE	179
3.2.	ZONES EXEMPTES DE SINGULARITES MAXIMALES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL	185
4.	CONCLUSION	189
A.1.	FAMILLE A ($D_2 = 0, R_2 \neq 0, D_3 \neq 0, R_3 = 0$).....	210
A.2.	FAMILLE B ($D_2 = 0, R_2 = 0, D_3 \neq 0, R_3 = 0$).....	211
A.3.	FAMILLE C ($D_2 = 0, R_2 \neq 0, D_3 = 0, R_3 = 0$).....	211
A.4.	FAMILLE D ($D_2 \neq 0, R_2 = 0, D_3 \neq 0, R_3 = 0$).....	211
A.5.	FAMILLE E ($D_2 \neq 0, R_2 = 0, D_3 = 0, R_3 = 0$).....	212
	Conclusion Générale.....	189
	Perspectives.....	192
	Bibliographie.....	194
	Publications personnelles.....	206
	Annexes.....	208

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1.1 : Structure d'un mécanisme de type manipulateur sériel	20
Figure 1.2 : Manipulateur à chaîne cinématique fermée	21
Figure 1.3 : Manipulateurs d'architectures parallèles plane (à gauche) et spatiale (à droite)	21
Figure 1.4 : Mécanisme à 5 barres en configurations singulières parallèle, sérielle et structurelle respectivement de gauche à droite.	26
Figure 1.5 : Deux sections d'espaces de travail où des trous et des cavités apparaissent.	29
Figure 1.6 : Points cusps dans une section de l'espace de travail d'un manipulateur cuspidal.....	34
Figure 2.1 : Manipulateur 3R orthogonal.....	40
Figure 2.2 : Partition de l'espace des paramètres selon le nombre de points cusps et le nombre des nœuds dans une section $r_2 = 1$ [Baili 04].....	44
Figure 2.3 : Arbre de classification de la famille des manipulateurs 3R orthogonaux tels que $r_3 = 0$ en 9 topologies d'espace de travail [Baili 04].....	45
Figure 2.4 : Les 9 cas pointés dans une section $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$	47
Figure 2.5 : Les deux cas possibles pour $E_{1\text{gén}}$ et $E_{3\text{gén}}$	48
Figure 2.6 : Les dix familles de manipulateurs particuliers	49
Figure 2.7 : Manipulateur de la famille A en configuration initiale.....	53
Figure 2.8 : L'espace des paramètres de la famille A et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type A1 ($d_3=2, d_4=1.5$ et $r_2=1$); Type A2 ($d_3=2, d_4=2.2$ et $r_2=1.5$); Type A3 ($d_3=2, d_4=3$ et $r_2=1$); Transition A1-A2 ($d_3=2, d_4=2$ et $r_2=1$); Transition A2-A3 ($d_3=3,$ $d_4=5$ et $r_2=4$).....	55
Figure 2.9 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type A1	56
Figure 2.10 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type A2.....	57
Figure 2.11 : Manipulateur de la famille B en configuration initiale.....	58
Figure 2.12 : L'espace des paramètres de la famille B et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type B1 ($d_3=2, d_4=1$); Type B2 ($d_3=2, d_4=3$); Transition B1-B2 ($d_3=2, d_4=2$). ..	59
Figure 2.13 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type B1	60
Figure 2.14 : Manipulateur de la famille A en configuration initiale.....	61
Figure 2.15 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type C ayant les paramètres suivants $d_4=2$ et $r_2=1.5$	63
Figure 2.16 : Manipulateur de la famille D en configuration initiale.....	63
Figure 2.17 : L'espace des paramètres de la famille D et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type D1 ($d_3=1.4, d_4=0.7$ et $d_2=1$); Type D2 ($d_3=2, d_4=1.5$ et $d_2=1$); Type D3 ($d_3=2, d_4=2.5$ et $d_2=1$); Type D4 ($d_3=0.5, d_4=2$ et $d_2=1$); Type D5 ($d_3=0.6, d_4=0.7$ et $d_2=1$); Type D6 ($d_3=0.7, d_4=0.5$ et $d_2=1$); Transition D1-D2 ($d_3=2, d_4=1$ et $d_2=1$);	

Transition D2-D3 ($d_3=2, d_4=2$ et $d_2=1$) ; Transition D3-D4 ($d_3=1, d_4=2$ et $d_2=1$) ; Transition D4-D5 ($d_3=0.5, d_4=1$ et $d_2=1$) ; Transition D5-D6 ($d_3=0.6, d_4=0.6$ et $d_2=1$) ; Transition D6-D1 ($d_3=1, d_4=0.5$ et $d_2=1$) ;	65
Figure 2.18 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type D5.....	68
Figure 2.19 : Manipulateur de la famille E en configuration initiale	69
Figure 2.20 : Espace de travail d'un manipulateur de type E ayant les paramètres suivants $d_2=1$ et $d_4=1.5$	70
Figure 2.21 : Manipulateur de la famille F en configuration initiale, ayant $r_2=30, d_3=30$ et $d_4=60$..	71
Figure 2.22 : L'espace des paramètres de la famille F et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type F1 ($r_2=1, r_3=1, d_3=2, d_4=1.5$); Transition F1-F2 ($r_2=1, r_3=1, d_3=2, d_4=2.24$) ; Type F2 ($r_2=1, r_3=1, d_3=1, d_4=2$).....	72
Figure 2.23 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type F1	73
Figure 2.24 : Manipulateur de la famille G en configuration initiale.....	74
Figure 2.25 : Espace de travail d'un manipulateur de type G ayant les paramètres suivants $d_3=1, d_4=3$, et $r_3=1$	76
Figure 2.26 : Manipulateur de la famille H en configuration initiale.....	76
Figure 2.27 : Espace de travail d'un manipulateur de type G ayant les paramètres suivants $d_4=1, r_2=3$, et $r_3=1$	78
Figure 2.28 : Manipulateur de la famille I en configuration initiale	78
Figure 2.29 : L'espace des paramètres de la famille I pour $r_3=0.5$ et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type I1 ($d_3=2.5, d_4=1.5$ et $d_2=1$); Type I2 ($d_3=3, d_4=0.7$ et $d_2=1$) ; Type I3 ($d_3=0.3, d_4=2$ et $d_2=1$) ; Type I4 ($d_3=0.5, d_4=0.7$ et $d_2=1$) ; Transition I1-I2 ($d_3=3, d_4=1$ et $d_2=1$) ; Transition I1-I3 ($d_3=1, d_4=4$ et $d_2=1$) ; Transition I2-I3 ($d_3=1, d_4=0.7$ et $d_2=1$) ; Transition I3-I4 ($d_3=0.2, d_4=0.8$ et $d_2=1$);.....	80
Figure 2.30 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type I4	82
Figure 2.31 : Manipulateur de la famille J en configuration initiale	83
Figure 2.32 : Espace de travail d'un manipulateur de type J.....	84
Figure 3.1 : Les espaces de travail t+-parcourables des cinq meilleurs types de manipulateurs.....	89
Figure 3.2 : Espace de travail d'un manipulateur 3R orthogonal de type C.....	96
Figure 3.3 : Espace de travail Régulier du manipulateur 3R orthogonal du type C	97
Figure 3.4 : Espace de travail Dextre Régulier EDR (en bleu) pour $K_{\min}^{-1}=0.25$ du manipulateur 3R orthogonal du type C.....	99
Figure 3.5 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de la famille B (Figure 3.5a), courbe de variation de η en fonction du d_3/d_4 (Figure 3.5b).	102
Figure 3.6 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type B1 ayant les paramètres : $d_3=4$ et $d_4=2.6$ (à gauche) ; $d_3=4$ et $d_4=1$ (à droite)	103
Figure 3.7 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type C (Figure 3.7a), courbe de variation de η en fonction du r_2/d_4 (Figure 3.7b).....	104
Figure 3.8 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type C ayant les paramètres : $r_2=4$ et $d_4=4$ (à gauche) ; $r_2=1.1$ et $d_4=4$ (à droite)	105
Figure 3.9 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type E (Figure 3.9a), courbe de variation de η en fonction du d_2/d_4 (Figure 3.9b).	106
Figure 3.10 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type E ayant les paramètres : $d_2=4$ et $d_4=4$ (à gauche) ; $d_2=4$ et $d_4=2$ (à droite)	106
Figure 3.11 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type G107	

Figure 3.12 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type G ayant les paramètres : $d_3=4$, $d_4=2.5$ et $r_3=1$ (à gauche) ; $d_3=4.1$, $d_4=1.1$ et $r_3=1$ (à droite)	108
Figure 3.13 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type H109	
Figure 3.14 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type H ayant les paramètres : $r_2=4$, $d_4=4$ et $r_3=1$ (à gauche) ; $r_2=4$, $d_4=1.1$ et $r_3=1$ (à droite).....	110
Figure 3.15 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs anthropomorphes ayant le meilleur indice η (d_2 , r_2 et r_3 nuls)	112
Figure 3.16 : Manipulateurs ayant les paramètres suivants $r_2=4$ et $d_4=4$ (Type C) (Figure 3.15a) $r_2=4$, $d_4=3.8$ et $r_3=0.8$ (Type H) (Figure 3.15b)	113
Figure 4.1 : Manipulateur planaire parallèle de type 3-RPR.....	117
Figure 4.2 : Manipulateur 3-RPR parallèle en configuration singulière	121
Figure 4.3 : Singularités dans le plan (α, θ_1) pour $\rho_1=17$	123
Figure 4.4 : Singularités dans une section (ρ_2, ρ_3) de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$. Le nombre de modes d'assemblage est indiqué dans chaque région.	124
Figure 4.5 : Courbes de singularités dans l'espace articulaire pour des valeurs de ρ_1 croissantes.....	126
Figure 4.6 : Singularités dans l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR étudié pour ρ_1 variant de 0 à 50.	128
Figure 4.7 : Sections de singularités de l'espace articulaire pour $\rho_1=5$ (à gauche) et $\rho_1=20$ (à droite). Topologie stable.....	129
Figure 4.8 : Singularités dans l'espace articulaire de deux manipulateurs 3-RPR à plateformes semblables pour ρ_1 variant de 0 à 50	130
Figure 4.9 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR étudié pour $\rho_1=14.98$	137
Figure 4.10 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du manipulateur 3- RPR étudié pour $\rho_1=27$	138
Figure 4.11 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du manipulateur 3- RPR étudié pour $\rho_1=34$	139
Figure 4.12 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du nouveau manipulateur 3-RPR pour $\rho_1=3$	140
Figure 5.1 : Manipulateur 3-RPR paramétré selon [Gosselin 92]	144
Figure 5.2 : Manipulateurs analytiques de troisième classe	146
Figure 5.3 : Les six modes d'assemblage associés au tableau 5.1	151
Figure 5.4 : Un manipulateur dégénéré défini par $c_2 = l_2 = 1.5$, $c_3 = 0$, $d_3 = 1$, $l_3 = 1$ et $\beta = -\pi/2$, la plateforme est représenté en bleu et la base en gris	152
Figure 5.5 : Les six modes d'assemblage associés au tableau 5.2.....	154
Figure 5.6 : Surface de singularités stable dans l'espace de travail de tous les manipulateurs dégénérés pour $x = [-10,10]$, $y = [-10,10]$ et $\alpha = [-\pi, \pi]$	156
Figure 5.7 : Les surfaces des singularités dans l'espace de travail du manipulateur dégénéré ayant les paramètres géométriques $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, et $d_3 = 1$ pour $x = [-10,10]$, $y = [-10,10]$ et $\alpha = [-\pi,$ $\pi]$	157
Figure 5.8 : Les singularités dans une section de l'espace de travail pour $\rho_1=1.5$ du manipulateur dégénéré ayant les paramètres géométriques $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, et $d_3 = 1$	158
Figure 5.9 : Singularités dans l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR dégénéré étudié pour ρ_1 variant de 0 à 5.....	159
Figure 6.1 : Singularités dans (α, θ_1) pour $\rho_1=17$ (Fig. 6.1a). Singularités dans (ρ_2, ρ_3) pour $\rho_1=17$ (Fig. 6.1b).....	168

Figure 6.2 : Une trajectoire fermée contournant un point cusp dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$ (Fig. 6.2a) et les trajectoires associées dans l'espace de travail (Fig. 6.2b)....	170
Figure 6.3 : Les espaces de configuration de CS_1 (Fig.6.3a) et de CS_2 (Fig.6.3b) associés aux aspects 1 et 2 respectivement. Les six modes d'assemblages calculés au point $\mathbf{q}=[17 \ 19 \ 17]^T$ (P_1, P_2 et P_3 dans l'aspect 1 et P_4, P_5 et P_6 dans l'aspect 2).Les singularités (en noir gras) définissent les frontières de CS_1 et CS_2	174
Figure 6.4 : Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant les deux modes d'assemblage P_1 et P_2 dans l'aspect 1 dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ (Fig. 6.4a), dans (ρ_2, ρ_3) (Fig. 6.4b).	175
Figure 6.5 : Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant les deux modes d'assemblage P_2 et P_3 dans l'aspect 1 dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ (Fig. 6.5a), dans (ρ_2, ρ_3) (Fig. 6.5b).	176
Figure 6.6 : Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant les deux modes d'assemblage P_1 et P_3 dans l'aspect 1 dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ (Fig. 6.6a), dans (ρ_2, ρ_3) (Fig. 6.6b).	177
Figure 6.7 : Surfaces de singularités dans l'espace articulaire et le cube exempt de singularités le plus large de centre $Q(41.625, 24.875, 44.125)$ (Fig6.7a). Manipulateur 3-RPR étudié et amplitudes des joints en rouge (Fig6.7b).....	182
Figure 6.8 : Les images par MGD du cube exempt de singularités (en noir) et leur projection sur le plan (x,y) (en gris).	182
Figure 6.9 : Les volumes exempts de singularités et les singularités dans l'espace de travail.....	183
Figure 6.10 : Surfaces de singularités dans l'espace articulaire et le cube exempt de singularités le plus large de centre $Q(38.125, 50, 33)$ (Fig6.10a). Manipulateur 3-RPR étudié et amplitudes des joints en rouge (Fig6.10b).....	184
Figure 6.11 : Les images par modèle géométrique direct du cube exempt de singularités (en noir) et leur projection sur le plan (x,y) (en gris).	184
Figure 6.12 : Surfaces de singularités dans l'espace de travail et le parallélépipède exempt de singularités le plus large de centre $W_0(-20,-20,-1.5)$	188
Figure 6.13 : Surfaces de singularités dans l'espace articulaire et l'image par modèle géométrique inverse du parallélépipède exempt de singularités (en rouge).	189

TABLEAUX

Tableau 1.1 : Comparaison des manipulateurs sériels et parallèles	22
Tableau 3.1 : Les types de manipulateurs et leurs propriétés cinématiques	88
Tableau 4.1 : Paramètres géométriques des deux manipulateurs non cuspidaux	129
Tableau 4.2 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=14.98$	137
Tableau 4.3 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=27$	138
Tableau 4.4 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=34$	139
Tableau 4.5 : Coordonnées des quatre points cusp pour $\rho_1=3$	140
Tableau 4.1. Tableau 5.1 : Les six solutions (x, y, φ) du manipulateur défini par $c_2=l_2=2, c_3=1/2,$ $d_3=1, l_3=3/2, \beta=\pi/3$ pour les variables articulaires $\rho_1=\rho_2=1$ et $\rho_3=7/10$	151
Tableau 5.2 : Les six solutions (x, y, φ) du manipulateur dégénéré défini par $c_2=l_2=1, c_3=0, d_3=1, l_3=1$ et $\beta=-\pi/2$ pour les variables articulaires $\rho_1=4/5$ et $\rho_2=\rho_3=3/2$	154
Tableau 5.3 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=1.5$	162

RESUME

La diversité des tâches dans l'industrie entraîne un besoin de mise en place de nouveaux manipulateurs. Une analyse de comportement de ces manipulateurs est nécessaire afin de comparer leurs performances. Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude cinématique et la comparaison de performances de deux types de manipulateurs : les manipulateurs 3R sériels à axes orthogonaux et les manipulateurs 3-RPR parallèles plans. Tout d'abord des notions importantes liées à la cinématique et à la conception de manipulateurs sont présentées. Dans la 2^{ème} partie de cette thèse, une classification exhaustive des manipulateurs 3R sériels orthogonaux particuliers est établie. Le critère de classification est la topologie des singularités dans l'espace de travail (E.T). Vingt deux types différents de manipulateurs sont trouvés. Dans la 3^{ème} partie, les vingt deux types sont comparés tout d'abord suivant la topologie de leur E.T, ensuite suivant un nouvel indice de performance. Les manipulateurs les plus performants sont mis en évidence. Dans la 4^{ème} partie, les singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR parallèles plans sont déterminées et analysées. Un algorithme pour le calcul des points cusp est établi. Dans la 5^{ème} partie, deux nouvelles conditions de dégénérescence du modèle géométrique direct (MGD) des ces mêmes manipulateurs sont établies. Une nouvelle classe de ces manipulateurs a été découverte : les manipulateurs dégénérés. Ces manipulateurs ont leur MGD toujours dégénéré et des propriétés cinématiques intéressantes. Enfin, deux méthodes pour éviter les singularités de ces manipulateurs sont proposées : la planification de trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage, la recherche de zones non singulières dans les espaces de travail et articulaire. Les résultats présentés dans ce travail constituent un outil intéressant d'aide à la conception de nouveaux manipulateurs.

ABSTRACT

The variety of tasks in industry necessitates implementation of new manipulators. A behaviour analysis of these manipulators is necessary to compare their performances. The work presented in this thesis deals with the study of kinematical properties and of the performances comparison of two types of manipulators: 3-revolute (3R) serial orthogonal manipulators and 3-RPR planar parallel manipulators. First, a state of the art on important notions on kinematics and design of manipulators is presented. Then, in the 2nd section of this thesis, an exhaustive classification of 3R serial orthogonal manipulators with geometric simplifications is established. The classification criterion is the singularities topology in the workspace. Twenty-two different manipulators types are found. In the 3rd section, the twenty-two types are compared first according to the topology of their workspace, then according to a new performance index that we have introduced. In the 4th section, the singularities in the joint space of 3-RPR planar parallel manipulators are determined and analysed. An algorithm for the detection of cusp points is established. In the 5th section, two new forward kinematics degeneracy conditions for these manipulators are found. A new class of these manipulators is discovered: the degenerate manipulators. These degenerate manipulators have always a degenerate forward kinematic model and interesting kinematic properties. Finally, two methods for avoiding the singularities of the 3-RPR parallel manipulators are proposed: the planning of non singular assembly mode changing trajectories and the determination of maximal singularity free regions in the workspace and in the joint space of these manipulators. Results presented in this thesis can serve as an efficient help tool for the design of new manipulators.

INTRODUCTION

Sous l'effet combiné des progrès techniques et de la baisse des coûts, le nombre de robots industriels en activité est en pleine explosion depuis une quinzaine d'années. Les robots industriels, dont on recense plus de 20 000 applications, devraient atteindre dans le monde le nombre symbolique d'un million en 2007, soit une hausse de 25 %. De nos jours, les robots industriels savent tout faire et peuvent se charger des tâches les plus diverses au sein d'entreprises de production. Et si les applications industrielles qu'ils peuvent avoir sont nombreuses, c'est aussi dû aux recherches scientifiques en robotique.

Or malgré les progrès technologiques, les industriels n'utilisent que des manipulateurs « standards » qui sont en général de type sériel pour lesquels les axes des articulations successives peuvent être parallèles. Leurs comportements sont en effet bien maîtrisés. Parmi ces manipulateurs, on peut citer les robots anthropomorphes, les robots cylindriques, les robots SCARA et les robots cartésiens ou portiques.

La diversité des tâches à réaliser et le développement rapide des cellules et installations de fabrication flexible entraînent un besoin de mise en place de plusieurs types de manipulateurs. Les concepteurs de sites robotisés ont été alors demandeurs de solutions innovantes. Par conséquent, des fabricants de robots ont été amenés à employer des morphologies originales de manipulateurs. Depuis quelques années, l'évolution des manipulateurs était marquée par l'apparition d'une espèce aux capacités surprenantes : les manipulateurs parallèles. D'une puissance, d'une rapidité et d'une précision sans égales, ces machines aux bras multiples révolutionnent l'univers de la robotique. Dans le même cadre, de nouvelles morphologies de manipulateurs de type sériels ont été explorées, à savoir les manipulateurs ayant des axes orthogonaux.

Une analyse de comportement de ces nouvelles structures est nécessaire afin de permettre la comparaison de leurs performances. Cette thèse est située dans ce cadre et contribue à

répondre à ce besoin. Les manipulateurs qu'elle traite sont les manipulateurs sériels à axes orthogonaux et les manipulateurs parallèles plans. Des architectures simplifiées de ces deux types de manipulateurs seront étudiées dans le but de mettre évidence des architectures simples et innovantes de manipulateurs.

Ce mémoire se compose de deux parties : la première étudie les propriétés des manipulateurs sériels à trois articulations rotoïdes, à axes orthogonaux et ayant des simplifications géométriques, et propose une classification en fonction de leurs performances. La deuxième partie consiste à étudier les singularités et le modèle géométrique direct des manipulateurs parallèles plans de type 3-RPR.

Deux familles de manipulateurs sériels 3R à axes orthogonaux ont été étudiées dans [Baili 04]. Une classification des manipulateurs de ces deux familles a été établie. Les critères de cette classification reposent sur la topologie de l'espace de travail, qui a été définie par le nombre de points cusp et de nœuds qui apparaissent sur les singularités. Les manipulateurs de ces deux familles ont des architectures plus ou moins complexes. Dans notre travail, nous nous intéressons aux familles de manipulateurs 3R orthogonaux ayant des architectures simplifiées, nous classifions ces manipulateurs et nous comparons leurs performances.

Les propriétés cinématiques des manipulateurs parallèles plans de type 3-RPR ont été fréquemment étudiées. Leur modèle géométrique direct et les équations de leurs singularités ont été établis respectivement dans [Gosselin 90] [Gosselin 92]. Les domaines d'unicité de modes d'assemblage de ces manipulateurs ont été déterminés dans [Chablat 98a]. Les changements de mode d'assemblage non singuliers de ces manipulateurs ont été trouvés dans [Innocenti 92], [Chablat 98a] et [McAree 99]. Des aspects de conception concernant ces manipulateurs ont été traités dans [Li 06]. Dans cette thèse, nous étudions en détail les singularités de ces manipulateurs et leurs problèmes.

Ce mémoire est articulé suivant six chapitres :

Le premier chapitre présente des notions liées à la cinématique et à la conception de manipulateurs sériels et parallèles et rappelle les différentes études qu'elles ont suscitées.

Dans le deuxième chapitre, les différentes familles des manipulateurs 3R à axes orthogonaux ayant des architectures simplifiées sont tout d'abord énumérées. Les manipulateurs de ces familles ont au moins un de leur paramètres de DHm¹ (Denavit-

¹ Denavit et Hartenberg modifiés [Khalil 86]

Hartenberg modifiés [Khalil 86]) égal à zéro. Au total, dix familles différentes de manipulateurs sont analysées. Les propriétés cinématiques des manipulateurs de chacune de ces familles sont étudiées. Ensuite, les manipulateurs de chaque famille sont classifiés suivant la topologie de leurs singularités et de leur espace de travail. Vingt deux topologies différentes sont obtenues. Pour chaque topologie d'espace de travail trouvée, nous analysons chacune des propriétés décrites dans le premier chapitre, à savoir la t-parcourabilité, l'existence de cavités dans l'espace de travail, le nombre de solutions au modèle géométrique inverse et le nombre de points nœuds.

Dans le troisième chapitre, les vingt deux types de manipulateurs 3R orthogonaux trouvés sont classifiés suivant la topologie de leur espace de travail. Cinq types de manipulateurs particulièrement intéressants sont mis en évidence. Ensuite, les manipulateurs de ces cinq types sont comparés suivant des critères de performances locales notamment la compacité de l'espace de travail et le conditionnement. Un nouvel indice de performance pour les manipulateurs, basé sur la notion de l'espace de travail dextre, est introduit. Les manipulateurs les plus performants et ayant les meilleures propriétés sont mis en évidence à la fin du chapitre.

Dans le quatrième chapitre, une approche pour déterminer les singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs parallèles plans 3-RPR est établie. Une analyse descriptive des singularités dans des sections de l'espace articulaire est menée. Finalement, on décrit un algorithme pour la détection et le calcul des points cusp, dans des sections de l'espace articulaire d'un manipulateur 3-RPR.

Dans le cinquième chapitre, deux nouveaux cas de dégénérescence du modèle géométrique direct des manipulateurs 3-RPR parallèles sont découverts et exposés. Une nouvelle famille de manipulateurs 3-RPR, nommés « manipulateurs dégénérés », est découverte. Les manipulateurs dégénérés ont leur modèle géométrique direct qui est toujours dégénéré. Les propriétés cinématiques de ces nouveaux manipulateurs sont présentées.

Dans le sixième chapitre, nous proposons deux approches pour éviter les singularités des manipulateurs 3-RPR parallèles. Dans une première partie, les changements non singuliers de mode d'assemblage pour ces manipulateurs sont expliqués en détail et une nouvelle méthode pour les représenter est exposée. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous proposons deux méthodes de détermination des zones non singulières les plus grandes à l'intérieur des espaces de travail et articulaires des manipulateurs 3-RPR.

Finalement, nous résumons notre contribution dans la conclusion et nous exposons les pistes de recherche ouvertes par ce travail dans les perspectives.

CHAPITRE 1

CINEMATIQUE ET PROPRIETES DES MANIPULATEURS

1. INTRODUCTION

Un mécanisme est une combinaison, un agencement de pièces, d'organes, montés en vue d'un fonctionnement d'ensemble [GDT 04]. Les mécanismes étudiés dans cette thèse sont principalement des mécanismes articulés, que nous nommons *manipulateurs*.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et notions de base de la robotique. Après avoir défini la notion de manipulateur, nous donnerons les définitions relatives au calcul de leurs propriétés géométriques et cinématiques ainsi que leur espace de travail et leurs configurations singulières. Nous faisons la distinction entre deux classes de manipulateurs : les manipulateurs d'architecture sérielle et les manipulateurs d'architecture parallèle.

2. MECANISMES DE TYPE MANIPULATEUR

Selon la norme ISO 8373 intitulée «Robots manipulateurs industriels - Vocabulaire» (1994), un manipulateur est une machine, un mécanisme constitué normalement d'une série de segments qui sont reliés par un joint assurant une rotation ou une translation relative entre segments, dont le but est de prendre et déplacer des objets (pièces ou outils) avec plusieurs degrés de liberté. Il peut être commandé par un opérateur, une unité de commande électronique ou un système logique (dispositif à cames, relais, câbles, etc.).

Actuellement les applications de ce qu'on nomme manipulateur, ne se limitent pas seulement à la manipulation et au déplacement d'objets, mais elles sont étendues aux tâches d'usinage, de chirurgie, de simulations.

Un manipulateur peut se présenter sous la forme d'une chaîne cinématique simple ou d'une chaîne cinématique fermée d'où la distinction entre manipulateurs d'architecture sérielle et manipulateurs d'architecture parallèle.

2.1. LES MANIPULATEURS D'ARCHITECTURE SERIELLE

Un manipulateur d'architecture sérielle est formé d'une chaîne cinématique simple dont la base et l'organe effecteur possèdent un degré de connexion égal à un (i.e. : ils ne sont reliés qu'à un seul corps) et les autres éléments possèdent un degré de connexion égal à deux (i.e. : ils sont reliés à deux corps).

La figure 1.1 illustre la structure d'un manipulateur d'architecture sérielle composé de $n+1$ corps, notés C_0, \dots, C_n , et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du mécanisme et l'organe terminal est attaché au corps C_n . La $j^{\text{ème}}$ articulation connecte le corps C_j au corps C_{j+1} et chaque corps C_j a son propre repère. Le paramétrage de Denavit Hartenberg modifié peut être utilisé pour paramétrer ce type d'architecture [Khalil 02].

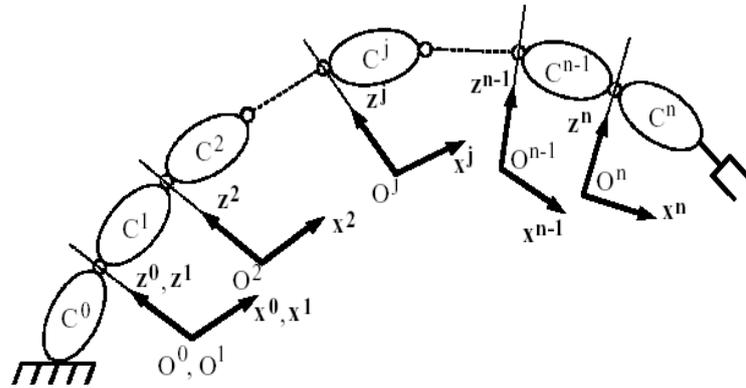


Figure 1.1 : Structure d'un mécanisme de type manipulateur sériel

Ces manipulateurs sont actuellement les plus répandus dans l'industrie, vue l'importance de leur espace de travail. On peut citer à titre d'exemple, les manipulateurs anthropomorphes, cylindriques, sphériques, cartésiens, orthogonaux etc. De nombreuses études ont été menées sur ces manipulateurs.

2.2. LES MANIPULATEURS D'ARCHITECTURE PARALLELE

Selon [Merlet 00], un manipulateur parallèle est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes.

Une chaîne cinématique fermée est une chaîne cinématique dont l'un des membres, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à trois [Merlet 00]. Les corps C_1, C_2, C_3 , et C_4 représentés sur la figure 1.2 forment une chaîne cinématique fermée.

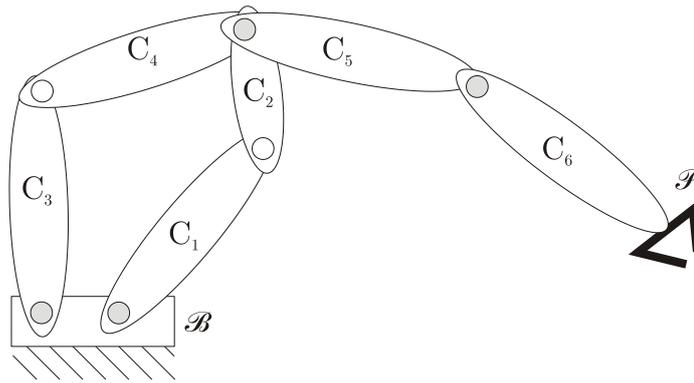


Figure 1.2 : Manipulateur à chaîne cinématique fermée

Les manipulateurs d'architecture parallèle présentent la particularité d'être rigides, précis, et de pouvoir transporter de lourdes charges. Cependant, leur espace de travail est généralement restreint. En faisant varier le nombre et la topologie des chaînes cinématiques du manipulateur, nous obtenons un grand nombre de manipulateurs d'architecture parallèle. Nous distinguons les manipulateurs plans et les manipulateurs spatiaux. La figure 1.3 représente deux manipulateurs parallèles. Le premier ayant une architecture plane est à trois degrés de liberté (ddl) de type 3-RPR, ce manipulateur sera étudié en détail dans cette thèse. Le second appelé l'Orthoglide est à 5 ddl, ses applications principales sont l'usinage 5 axes, le soudage laser et le prototypage rapide [Chablat 04a].

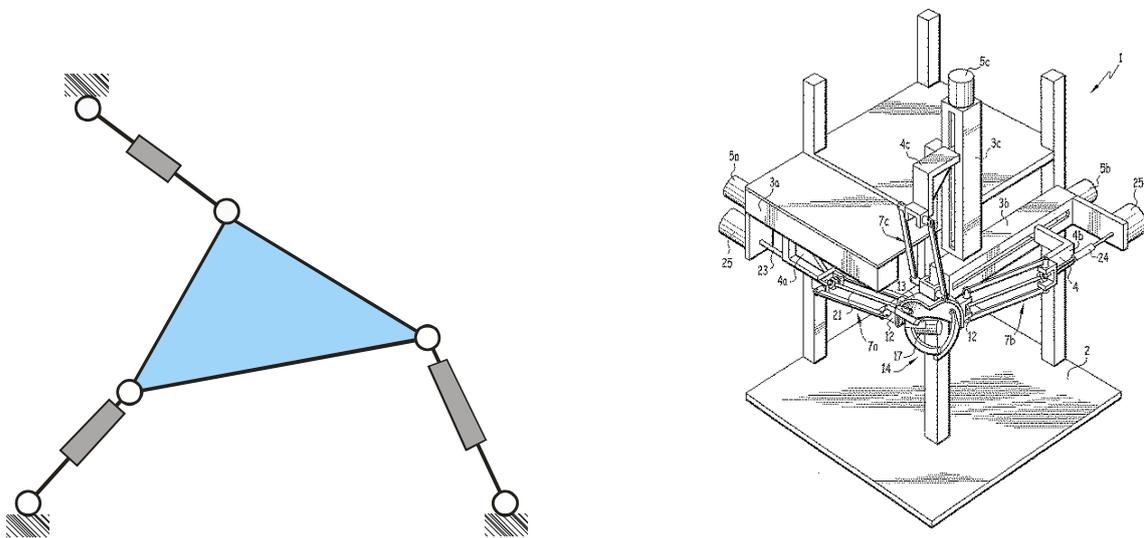


Figure 1.3 : Manipulateurs d'architectures parallèles plane (à gauche) et spatiale (à droite)

2.3. COMPARAISON DES MANIPULATEURS SERIELS ET PARALLELES

Les manipulateurs d'architecture sérielle présentent l'avantage d'avoir un large espace de travail, alors que les manipulateurs d'architecture parallèle sont généralement plus précis, plus

rigides, et la charge transportable est plus importante. Le tableau 1 regroupe les propriétés des manipulateurs sériels et parallèles.

Manipulateur sériel	Manipulateur parallèle
= Succession de segments en série de la base vers l'effecteur = Chaîne cinématique ouverte + Important espace de travail -Faible précision -Faible charge transportable -Faible rigidité	= Tout segment au contact de la base et de l'effecteur = Chaînes cinématiques fermées - Espace de travail restreint + Grande précision + Lourde charge transportable + Très rigide

Tableau 1.1 : Comparaison des manipulateurs sériels et parallèles

Des notions propres aux deux types de manipulateurs, telles que celles d'espace articulaire et d'espace de travail, de modèles géométriques direct et inverse, et de singularités sont rappelées dans les parties suivantes.

3. MODELISATION GEOMETRIQUE

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que: les modèles de transformation entre l'espace de travail (dans lequel est définie la situation de l'effecteur) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration articulaire du robot). Nous distinguons parmi ces modèles : les modèles géométriques direct et inverse (MGD et MGI), qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement, les modèles cinématiques direct et inverse (MCD et MCI), qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement, les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

Nous nous intéressons dans ce mémoire seulement au calcul des modèles géométriques et cinématiques direct et inverse du manipulateur, les aspects dynamiques n'étant pas étudiés dans ce travail.

3.1. ESPACE ARTICULAIRE ET ESPACE OPERATIONNEL

Pour un manipulateur à n degrés de liberté, on définit une relation entre les variables articulaires motorisées (les entrées) notées \mathbf{q} et les coordonnées opérationnelles de position et d'orientation de l'effecteur (les sorties) notées \mathbf{X} . Cette relation est définie par un opérateur géométrique F tel que :

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = 0 \quad (1.1)$$

Nous noterons :

- EA^n l'espace articulaire lié aux articulations motorisées \mathbf{q} (n est le nombre d'articulations motorisées).
- EO^m l'espace opérationnel de dimension m lié à la position et à l'orientation de l'effecteur.

3.2. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT

Le modèle géométrique direct d'un manipulateur permet de trouver la position et l'orientation de l'effecteur en fonction des coordonnées articulaires.

Pour les manipulateurs sériels, la détermination de ce modèle ne pose pas de problème, et la solution est unique : il s'agit d'une multiplication de matrices. En effet, nous considérons la matrice de transformation ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$ entre les repères R_{j-1} lié au corps $(j-1)$ et R_j lié au corps (j) , le résultat est donné par la matrice ${}^0\mathbf{T}_n$ telle que :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \times \dots \times {}^{j-1}\mathbf{T}_j {}^j\mathbf{T}_{j+1} \times \dots \times {}^{n-1}\mathbf{T}_n \quad (1.2)$$

Pour les manipulateurs parallèles, la résolution du modèle géométrique direct est un problème complexe, en général la solution n'est pas unique. Pour une configuration articulaire précise, le manipulateur pourra avoir plusieurs *modes d'assemblage*. Les méthodes de résolution du modèle géométrique direct des manipulateurs parallèles diffèrent suivant l'architecture du manipulateur et le type de ses articulations. Un état de l'art des méthodes de résolution du modèle géométrique direct de la majorité des manipulateurs parallèles est exposé dans [Merlet 00].

3.3. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE

Le modèle géométrique inverse permet de trouver l'ensemble des configurations articulaires possibles pour une position et une orientation données de l'effecteur ou de la plateforme.

Pour les manipulateurs sériels, la détermination du modèle géométrique inverse (MGI) est un problème complexe. On doit inverser un système d'équations non linéaires ce qui n'est pas trivial. Toutefois et selon la structure du manipulateur étudié, il existe des méthodes permettant de résoudre le MGI sous une forme explicite. Par exemple pour la plupart des manipulateurs utilisés dans l'industrie, la méthode de Paul permet de donner les solutions du MGI sous forme explicite [Paul 81].

Dans le cas général, la résolution du MGI pour un manipulateur sériel à 3 ddl consiste à résoudre un polynôme, appelé le polynôme du MGI, de degré 4 en la tangente de l'angle moitié de l'une des articulations. Les coefficients de ce polynôme dépendent des paramètres de DHm du manipulateur étudié ainsi que de la position de l'effecteur dans l'espace cartésien. Le nombre maximal de solutions est de 4 [Pieper 68], [Miko 05].

Pour les manipulateurs parallèles, la résolution du MGI ne pose généralement pas de problème. Pour calculer le MGI, nous écrivons un système d'équations non linéaires dont chaque équation est associée à une jambe du manipulateur. Chaque jambe est caractérisée par une origine A_i et une extrémité C_i . La configuration \mathbf{X} de la plateforme permet de définir la position des points extrêmes de chaque jambe. Nous pouvons ainsi écrire le MGI de chaque jambe : $A_i C_i = H(\mathbf{X})$. Ce modèle est parfois difficile à résoudre, notamment pour les manipulateurs spatiaux et lorsque la structure de leurs jambes est complexe, nous citons à titre d'exemple le cas de la machine VERNE dont l'une des jambes est différente des deux autres [Kanaan 07].

4. SINGULARITES

Les manipulateurs d'architectures sérielle et parallèle comportent des configurations dites singulières pour lesquelles le comportement du manipulateur se dégrade. Ces configurations peuvent se situer aussi bien à l'intérieur de l'espace de travail que sur ses frontières. Celles situées à l'intérieur de l'espace de travail sont les plus gênantes pour la génération de trajectoires puisque le manipulateur peut se bloquer dans de telles configurations. Les problèmes suivants peuvent aussi survenir au voisinage de ces configurations singulières :

- Une augmentation importante des efforts dans les articulations qui peut endommager la structure du manipulateur ;
- Une perte de rigidité du manipulateur qui peut se traduire par une instabilité de son organe terminal lorsque les articulations motorisées sont bloquées.

4.1. SINGULARITES DES MANIPULATEURS SERIELS

Pour les manipulateurs sériels, la détermination des singularités se fait le plus souvent à partir de la matrice jacobienne \mathbf{J} , en recherchant les configurations pour lesquelles cette matrice n'est plus de rang plein (son déterminant est nul).

Les configurations singulières des manipulateurs sériels peuvent être de type position (i.e. l'effecteur ne peut pas exécuter certaines translations), de type orientation (i.e. l'effecteur ne peut pas exécuter n'importe quelle rotation), ou de type mixte (s'il s'agit d'une combinaison des deux précédentes où l'effecteur ne peut pas exécuter n'importe quel mouvement hélicoïdal) [**Burdick 91**], [**Smith 93**].

4.2. SINGULARITES DES MANIPULATEURS PARALLELES

Pour déterminer les configurations singulières des manipulateurs parallèles, deux approches existent. La première est une méthode analytique fondée sur l'étude des matrices jacobienes du manipulateur. La seconde est une méthode géométrique utilisant des outils de géométrie tels que la théorie des visseurs (Screw Theory) et la géométrie de Grassmann.

4.2.1. Approche analytique

Nous commençons par le travail fondateur de Gosselin et Angeles [**Gosselin 90**], qui repose sur l'étude de l'équation (1.3) obtenue en différentiant l'équation (1.1) par rapport au temps :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

Où $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\omega} \ \dot{\mathbf{c}}]^T$ représente le torseur des vitesses de la plateforme du manipulateur (avec $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des vitesses de rotation et $\dot{\mathbf{c}}$ le vecteur des vitesses de déplacement), $\dot{\mathbf{q}}$ représente le torseur des vitesses articulaires et \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices jacobienes. La matrice \mathbf{A} est nommée matrice *jacobienne parallèle* et la matrice \mathbf{B} matrice *jacobienne sérielle*. A partir de l'étude de ces deux matrices, Gosselin a défini trois types de configurations singulières [**Gosselin 90**]:

- Les *singularités parallèles* qui sont dues à la perte de rang de la matrice jacobienne parallèle **A** (lorsque $\text{Det}(\mathbf{A})= 0$). Dans ce cas, l'effecteur peut bouger alors que les articulations motorisées sont bloquées. Le manipulateur gagne ainsi un ou plusieurs degré(s) de liberté ;
- Les *singularités sérielles* qui sont dues à la perte du rang de la matrice jacobienne sérielle **B**. Dans ce cas, certains déplacements de l'effecteur ne peuvent pas être réalisés et le manipulateur perd un ou plusieurs degré(s) de liberté. Les singularités sérielles représentent aussi les limites de l'espace de travail du manipulateur;
- Les *singularités parallèles/sérielles* qui sont dues à la perte de rang simultanée de **A** et **B**. Dans ce cas, il est possible de déplacer de manière infinitésimale l'effecteur alors que les articulations motorisées sont bloquées et inversement ;

Il existe un autre type de singularités, les *singularités structurelles*, qui apparaissent pour des dimensions particulières des manipulateurs. Dans ce cas, pour des configurations articulaires particulières, le modèle géométrique direct admet une infinité de solutions c-à-d une infinité de configurations pour la plate-forme mobile.

La figure 1.4 présente respectivement de gauche à droite des configurations singulières parallèle, sérielle et structurelle d'un manipulateur à 5 barres.

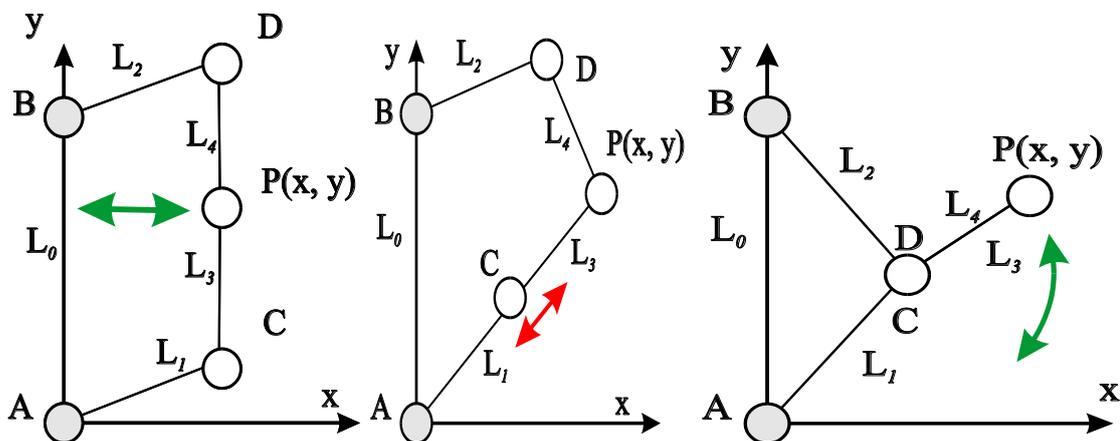


Figure 1.4 : Mécanisme à 5 barres en configurations singulières parallèle, sérielle et structurelle respectivement de gauche à droite.

De nombreuses études utilisent les matrices jacobiniennes cinématiques pour déterminer les singularités des manipulateurs parallèles. Parmi celles-ci, nous pouvons citer [Sefrioui 93], [Gosselin 95] pour les manipulateurs plans et [Ma 91], [Khalil 96], [Dheeman 97] pour les manipulateurs spatiaux.

Ce formalisme [Gosselin 90] est souvent utilisé aujourd'hui mais, contrairement à ce qui a longtemps été admis dans le passé (et parfois encore aujourd'hui), il ne s'applique pas à tous les robots parallèles. En effet, certaines singularités ne peuvent pas être détectées par ce formalisme (en particulier les singularités internes et les « singularités de contraintes » pour les robots à moins de 6 degrés de liberté). D'autre part, l'écriture symbolique des matrices jacobiniennes peut être très difficile en raison de la complexité des expressions. Un important travail d'analyse des singularités a été réalisé par Zlatanov [Zlatanov 94], où il a introduit la notion de « C-space singularity » (singularité de l'espace des configurations) qui a permis par la suite de bien comprendre le phénomène de singularité de contrainte [Zlatanov 01]. Plus récemment, S. Krut a proposé une méthode d'analyse des singularités adaptée aux robots à trois translations et une rotation, comme le robot H4. Cette méthode permet de recenser toutes les singularités de ce type de robot [Krut 03] mais son extension à d'autres architectures de robots n'est pas évidente.

Ces travaux ont clairement mis en évidence les limitations du formalisme de Gosselin.

4.2.2. Approche géométrique

Les limites de l'approche analytique de détermination des singularités sont dues à la complexité de la matrice jacobienne parallèle lorsque l'on étudie des mécanismes spatiaux à 6 degrés de liberté.

Pour résoudre ce problème, quelques chercheurs ont utilisé les travaux de J. Merlet [Merlet 89] portant sur la géométrie de Grassmann qui repose sur l'utilisation des vecteurs de Plücker.

D'autres ont utilisé la notion de « reciprocal screws » (les visseurs réciproques : torseurs cinématiques et statiques) pour analyser les singularités, citons en particulier les travaux de Bonev pour la détermination des singularités des manipulateurs plans [Bonev 02], [Bonev 03].

5. L'ESPACE ARTICULAIRE ACCESSIBLE ET L'ESPACE DE TRAVAIL

5.1. L'ESPACE ARTICULAIRE ACCESSIBLE

L'espace articulaire accessible Q représente l'ensemble des vecteurs de coordonnées articulaires du manipulateur respectant les butées articulaires. C'est aussi un domaine de EA^n qui dépend de la morphologie du manipulateur.

$$Q = \{ \mathbf{q} \in EA^n, \forall i \leq n, q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max} \}$$

Le calcul de l'espace articulaire accessible est, à notre connaissance, peu abordé dans la littérature. Dans notre étude, nous serons amenés à le calculer pour étudier les propriétés des deux types de manipulateurs sériels et parallèles (singularités, parcourabilité...). Pour simplifier, nous appellerons Q l'espace articulaire au lieu d'espace articulaire accessible.

5.2. L'ESPACE DE TRAVAIL

L'espace de travail W d'un robot manipulateur est défini comme étant l'ensemble des positions et orientations accessibles par un repère particulier lié, en général, à l'organe terminal du manipulateur. W est un domaine EO^m et sa structure dépend donc de celle de l'espace opérationnel.

L'espace de travail est un outil précieux pour différentes applications en robotique, il est utilisé pour analyser les performances des robots manipulateurs, pour la conception optimale de manipulateurs, pour le choix de morphologie en fonction d'une tâche déterminée, pour la préparation hors ligne des trajectoires, etc...

Selon la morphologie et les paramètres géométriques des manipulateurs, l'espace de travail pourra avoir des formes très variées et en général complexes. Les limites de l'espace de travail sont définies par les singularités d'une part et les butées articulaires d'autre part.

Plusieurs caractéristiques de forme existent, nous citons par exemple les cavités et les trous qui peuvent se trouver à l'intérieur de l'espace de travail des manipulateurs sériels [Gupta 82]. Un trou apparaît lorsqu'il existe une droite qui est entourée par l'espace de travail sans aucun contact avec celui-ci, on peut le trouver souvent autour du premier axe du manipulateur. Une cavité est une zone inaccessible enfermée à l'intérieur de l'espace de travail, il existe deux types de cavités : les cavités centrales et les cavités toroïdales. Les cavités centrales apparaissent autour du premier axe comme les trous mais contrairement aux trous, elles ne débouchent pas. La figure 1.5 nous montre deux sections génératrices différentes d'espaces de travail dans le plan $(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, Z)$, où trou et cavités apparaissent.

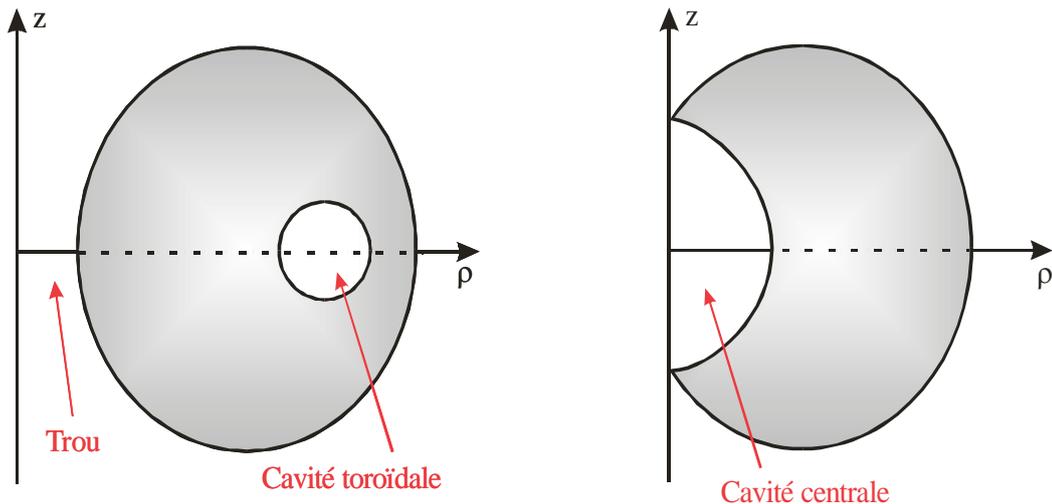


Figure 1.5 : Deux sections d'espaces de travail où des trous et des cavités apparaissent.

Les cavités toroïdales sont beaucoup plus gênantes que les trous et les cavités centrales. Pour cela la plupart des robots industriels ne comporte pas des cavités toroïdales. [Gupta 82] et [Yan 83] expriment des critères analytiques d'existence des trous et des cavités dans l'espace de travail.

5.2.1. Calcul de l'espace de travail des manipulateurs sériels

L'espace de travail des manipulateurs sériels est représenté, dans la plupart du temps, par l'espace des positions accessibles engendré par les trois premières articulations. Plusieurs méthodes de représentation de l'espace travail existent dans la littérature, ces méthodes peuvent être regroupées en deux grandes catégories : celles qui consistent à calculer les frontières de l'espace de travail, et celles qui procèdent par balayage.

Représentation par les frontières :

Les singularités et les butées articulaires définissent les frontières de l'espace de travail dans l'espace opérationnel. Il est donc naturel de déterminer l'espace de travail calculant les lieux des singularités dans l'espace cartésien. Le plus souvent, les frontières sont obtenues en calculant les singularités dans l'espace articulaire à partir de la matrice jacobienne, puis en calculant leur image dans l'espace opérationnel à partir de l'opérateur géométrique direct. Dans ce mémoire, nous utilisons cette méthode pour calculer l'espace de travail des manipulateurs 3R orthogonaux en annulant le déterminant de la matrice jacobienne. D'autres méthodes existent, elles consistent à calculer directement les frontières dans l'espace cartésien en calculant les lieux des racines multiples du polynôme du MGI [Ran 94] [Kohli 87].

Représentation par balayage :

Les obstacles causent de grands problèmes pour la représentation de l'espace de travail par les frontières. Les méthodes de représentation par balayage sont plus adaptées aux environnements encombrés. Le principe général de ces méthodes consiste à représenter une approximation de l'espace de travail. Le balayage dans l'espace opérationnel est le plus utilisé [WEN 89]. Il consiste le plus souvent à construire une grille, et à tester l'appartenance de chaque cellule de la grille à l'espace de travail.

5.2.2. Calcul de l'espace de travail des manipulateurs parallèles

Pour calculer l'espace de travail des manipulateurs parallèles, plusieurs méthodes existent, citons: (i) les méthodes géométriques [Merlet 00] [Bonev 02] ; (ii) les méthodes algébriques [Jo 89] [Haugh 95] ; (iii) les méthodes algébriques par discrétisation;

Les méthodes géométriques permettent de calculer rapidement la frontière de l'espace de travail. Elles peuvent intégrer les contraintes liées aux limites articulaires et des collisions entre segments. Cependant, la reconstruction de l'espace de travail totale est difficile. Cette méthode est le plus souvent utilisée pour calculer des espaces de travail de manipulateurs dont les articulations motorisées sont des articulations prismatiques.

Les méthodes algébriques sont plus difficiles à appliquer car elles augmentent la dimension du problème en introduisant des variables supplémentaires. Elles consistent à résoudre un problème d'optimisation en introduisant des pénalités aux frontières [Jo 89].

Les méthodes algébriques par discrétisation utilisent les modèles géométriques direct et inverse pour calculer l'ensemble des configurations que le manipulateur peut atteindre. Ces données sont enregistrées dans une structure hiérarchique. Nous citons à titre d'exemple les quadrees et les octrees utilisés dans [Chablat 98a] pour le calcul des domaines d'unicité des manipulateurs planaires et la méthode d'analyse par intervalles utilisée pour le calcul de l'espace de travail et la détermination des singularités des manipulateurs parallèles [Merlet 01], [Chablat 04b].

6. PROPRIETES DES MANIPULATEURS

Depuis longtemps, les industriels se sont contentés d'utiliser des manipulateurs « standards » dont les propriétés sont parfaitement maîtrisées. Or, avec le progrès technologique, la diversité des tâches à réaliser ou pour satisfaire la tendance de minimisation

des coûts des manipulateurs et de la concurrence, les concepteurs se retrouvent obligés de proposer des manipulateurs nouveaux satisfaisant les demandes du marché. Cette innovation n'est pas automatique puisqu'elle exige une connaissance globale de leurs propriétés. Dans ce paragraphe, on va décrire les généralités et les propriétés importantes des manipulateurs qu'un concepteur doit maîtriser afin de satisfaire un cahier des charges donné.

6.1. NOTION D'ASPECT

Afin de formaliser le phénomène de la multiplicité de solutions au MGI pour les manipulateurs sériels, Borrel a introduit la notion d'aspect [Borrel 86]. Les aspects pour les manipulateurs sériels sont définis comme étant les plus grands domaines connexes de l'espace articulaire Q dépourvus de toutes configurations singulières. Ils réalisent alors une partition de Q . Pour la plupart des manipulateurs industriels sériels, les aspects sont les domaines d'unicité de solutions pour le MGI. Un aspect est donc associé à une posture du manipulateur.

Contrairement aux manipulateurs sériels, les manipulateurs parallèles peuvent admettre plusieurs solutions au modèle géométrique direct. Chablat a redéfini la notion d'aspects pour les manipulateurs parallèles ayant une ou plusieurs solutions au MGI [Chablat 98a], [Chablat 01]. Ainsi, les aspects pour les manipulateurs parallèles ayant une solution unique au MGI sont définis comme étant les plus grands domaines connexes de l'espace de travail W dépourvus de toutes configurations singulières.

Cependant, la notion d'aspect a été remise en cause en 1988 [Parenti-Castelli 88] avec la découverte de manipulateurs jusqu'ici alors inconnus qu'on a appelé par la suite les manipulateurs cuspidaux. Ces manipulateurs peuvent avoir plus d'une solution au MGI (respectivement au MGD) dans le même aspect s'ils sont de type sériels (respectivement s'ils sont de type parallèles). On détaillera les propriétés de ce type de manipulateurs dans le paragraphe suivant.

L'application principale de la notion d'aspect est l'analyse de la faisabilité de trajectoires continues dans l'espace de travail. Dans ce mémoire, nous utilisons la notion d'aspect pour tester la t-parcourabilité des manipulateurs sériels orthogonaux, et pour expliquer les trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage pour les manipulateurs parallèles.

6.2. NOTION DE PARCOURABILITE

L'espace de travail permet d'analyser les performances globales d'accessibilité d'un manipulateur. Or, une simple analyse d'accessibilité peut s'avérer insuffisante dans la plupart des cas, puisque si deux points sont bien accessibles dans l'espace de travail, l'effecteur ne peut en général pas les relier par n'importe quelle trajectoire. On parle ici d'une autre notion que l'accessibilité, la parcourabilité.

On distingue deux types de trajectoires : les trajectoires discrètes et les trajectoires continues. Une *trajectoire discrète* est une trajectoire définie par la donnée de p points de l'espace de travail sans spécifier un chemin entre ces p points. Une *trajectoire continue* est une trajectoire de longueur finie entre une origine et une extrémité. Elle est faisable lorsque l'effecteur peut la suivre de manière continue.

Nous rappelons les définitions de deux notions relatives à la parcourabilité dans l'espace de travail des manipulateurs:

La n-parcourabilité : Un domaine de l'espace de travail sera dit n-parcourable si toute trajectoire discrète de ce domaine est réalisable [Wenger 91].

La t-parcourabilité : Un domaine de l'espace de travail sera dit t-parcourable si toute trajectoire continue de ce domaine est réalisable [Wenger 91].

La t⁺-parcourabilité : Elle est définie comme étant l'aptitude du manipulateur à suivre n'importe quelle trajectoire continue avec un libre choix de posture [Chedmail 98].

Ces trois notions ont été utilisées pour l'étude des propriétés des espaces de travail des manipulateurs sériels [Chedmail 98] et de ceux des manipulateurs parallèles [Chablat 98a]. La t-parcourabilité et la t⁺-parcourabilité seront utilisées dans les chapitres suivants comme critères de performance dans la classification des manipulateurs 3R orthogonaux.

6.3. MANIPULATEURS CUSPIDAUX

Il a longtemps été acquis que pour changer de posture (respectivement de mode d'assemblage), un manipulateur sériel (respectivement parallèle) devait franchir une singularité. Ce résultat a été démontré théoriquement par [Borrel 86] pour les manipulateurs sériels en utilisant la notion d'aspect, et par [Hunt 93] pour les manipulateurs parallèles. Une étude faite par Parenti-Castelli sur un manipulateur sériel 6R a remis en question cet acquis [Parenti-Castelli 88]. Burdick a également remis en question cet acquis pour quelques manipulateurs sériels 3R [Burdick 88]. Innocenti a prouvé l'existence de manipulateurs

parallèles plans pouvant changer leur mode d'assemblage sans franchir une singularité [Innocenti 92]. Finalement, Wenger a proposé un nouveau formalisme pour l'étude de ces robots en définissant de nouveaux domaines d'unicité [Wenger 92], [Wenger 04a].

Un manipulateur est dit cuspidal s'il peut changer de posture ou de mode d'assemblage sans passer par une singularité. Ceci veut dire que le changement de posture (respectivement de mode d'assemblage) peut s'effectuer au sein d'un même aspect, qui n'est donc plus un domaine d'unicité de solution au modèle géométrique direct (respectivement inverse).

D'autres études ont été conduites par la suite sur ce type de manipulateurs, nous citons les plus récentes [Baili 04], [Ottaviano 04] et [Miko 05] pour les manipulateurs sériels, [McAree 99] pour les manipulateurs parallèles.

6.3.1. Identification des manipulateurs cuspidaux

Classifier les manipulateurs cuspidaux et non cuspidaux reste un problème difficile. Certes, l'observation d'exemples de manipulateurs a permis la formulation de quelques conjectures. [Smith 93] et [Burdick 95] ont émis l'hypothèse qu'un manipulateur sériel présentant des simplifications géométriques telles que les intersections, l'orthogonalité ou le parallélisme de ses axes ne peut pas éviter les singularités lors d'un changement de posture. [Burdick 88] et [Tsai 93a-b], ont pensé qu'un manipulateur sériel dont les paramètres de DHm sont arbitraires est nécessairement cuspidal. Toutefois aucune de ces deux conjectures n'est facilement contredite par un contre-exemple.

Dans [El Omri 96], un nouveau résultat a permis l'identification des manipulateurs sériels cuspidaux : un manipulateur sériel à 3 ddl peut changer de posture sans passer par une position singulière, si et seulement si, il existe dans son espace de travail trois solutions au modèle géométrique inverse qui coïncident ; Un tel point est appelé point cusp, d'où la terminologie « robot cuspidal ». La figure 1.6 montre dans une section de l'espace de travail, les singularités d'un manipulateur cuspidal (paramètres de DHm : $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1,5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90^\circ$ et $\alpha_3 = 90^\circ$). Il existe 4 points cusps, deux régions avec 2 et 4 postures possibles.

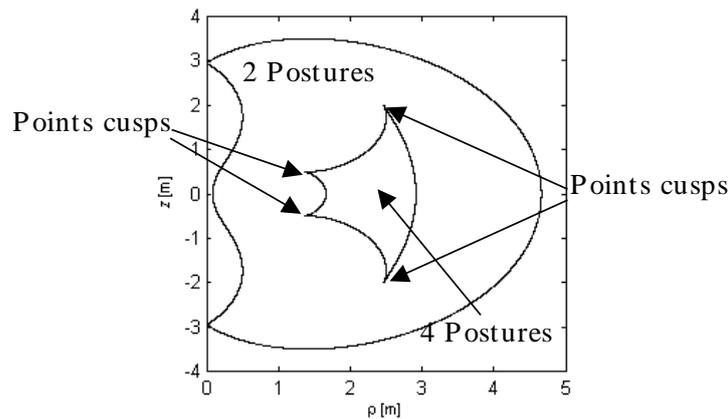


Figure 1.6 : Points cusps dans une section de l'espace de travail d'un manipulateur cuspidal

Des méthodes numériques ou graphiques peuvent être utilisées pour vérifier les conditions d'existence de points cusp. Elles constituent une aide intéressante pour le concepteur dans le choix d'un manipulateur. Dans le cas général, il n'existe pas d'écriture simple des conditions d'existence de point cusp en fonction des paramètres DHm sous forme explicite [El Omri 96]. Baili a classifié deux familles de manipulateurs sériels à trois articulations rotoïdes (3R) et à axes orthogonaux en fonction du nombre de points cusp existant dans l'espace de travail [Baili 04].

Contrairement aux travaux sur les manipulateurs sériels, ceux sur les manipulateurs parallèles cuspidaux ne sont pas nombreux, nous pouvons citer l'étude de [McAree 99], où une condition d'existence des points cusp dans l'espace articulaire de ces manipulateurs a été introduite. La résolution de cette condition est très compliquée pour aboutir à des solutions réelles. Pour cela, cette condition n'a jamais été exploitée. McAree vérifiait l'existence des points cusps et cherchait leurs coordonnées graphiquement.

Nous présenterons dans ce mémoire une étude détaillée des manipulateurs parallèles cuspidaux et nous proposons un algorithme efficace pour la résolution de la condition d'existence des points cusps de [McAree 99] et une exploitation de cette condition.

6.3.2. Changements de posture et de mode d'assemblage non singuliers

Pour un manipulateur cuspidal, le changement de posture ou de mode d'assemblage s'effectue sans franchissement de singularité. Par suite les aspects ne sont plus les domaines d'unicité de solution.

Des études sur les domaines d'unicité de l'espace de travail ont été menées dans [Wenger 92] et [Wenger 04a] sur les manipulateurs sériels et dans [Chablat 98a] sur les

manipulateurs parallèles. Les notions de surfaces caractéristiques, de régions et composantes de base et d'aspects généralisés ont été introduites.

Dans ce mémoire, les changements de mode d'assemblage non singuliers des manipulateurs parallèles seront expliqués en détail, une approche de planification de ces trajectoires sera présentée.

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, la modélisation cinématique et géométrique, l'espace de travail et les singularités des manipulateurs sériels et parallèles ont été exposés. Différentes propriétés caractérisant ces manipulateurs et des notions importantes en robotique ont été évoquées: la notion d'aspects, la parcourabilité, les manipulateurs cuspidaux...

Le comportement et les performances d'un manipulateur diffèrent suivant les propriétés de ce dernier. En fonction de leurs paramètres de conception, les propriétés qu'un manipulateur peut avoir varient, d'où l'importance de classifier les manipulateurs suivant leurs paramètres de conception.

L'un des objectifs principaux de cette thèse est la recherche de manipulateurs sériels et parallèles performants et ayant des architectures relativement simples.

Nous nous intéressons dans la première partie de la thèse aux manipulateurs sériels à trois articulations rotoïdes et à axes orthogonaux. Nous classifierons ces manipulateurs et nous les comparerons suivant plusieurs critères de performances. Les manipulateurs les plus performants et ayant les meilleures propriétés seront mis en évidence à la fin de l'étude.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudierons une famille de manipulateurs parallèles plans à 3 ddl de type 3-RPR. Nous proposerons premièrement une étude détaillée sur les singularités de ces manipulateurs, et deuxièmement nous investiguerons la dégénérescence de leur modèle géométrique direct. Finalement, nous clôturons par une approche de conception optimale des manipulateurs parallèles 3-RPR.

CHAPITRE 2

ETUDE CINEMATIQUE DES FAMILLES DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX AYANT DES MORPHOLOGIES SIMPLIFIEES

1. INTRODUCTION

Plusieurs études ont portées sur la classification des manipulateurs sériels orthogonaux suivant la topologie de leurs singularités, nous citons [Baili 04], [Gogu 05], [Miko 05].

Deux familles de manipulateurs sériels 3R orthogonaux ont été étudiées dans [Baili 04]. Les manipulateurs de ces deux familles ont été classifiés suivant la topologie de leur espace de travail. Une topologie d'espace de travail est définie à partir de points singuliers particuliers qui apparaissent sur les lieux de singularité. Ces points particuliers sont les cusps et les nœuds². Nous verrons par la suite l'importance de ces points singuliers pour définir des propriétés d'un manipulateur tel que le caractère cuspidal et le degré d'accessibilité par région dans son espace de travail. La classification de [Baili 04] a montré que les manipulateurs 3R orthogonaux peuvent être cuspidaux/non cuspidaux, génériques/non génériques et binaires/quaternaires. Ils peuvent avoir une cavité toroïdale ou pas dans leur espace de travail

L'étude de [Baili 04] concernait seulement les manipulateurs 3R orthogonaux ayant leurs paramètres de DHm d_2 , d_3 , d_4 et r_2 non nuls. La première famille étudiée est celle des manipulateurs n'ayant pas d'offset sur leur dernier axe ($r_3=0$). La deuxième présente un offset ($r_3\neq 0$).

Les manipulateurs 3R orthogonaux ayant des morphologies simplifiées (au moins un de leurs paramètres DHm est nul) n'ont pas été pris en compte dans [Baili 04] (sauf la famille des manipulateurs ayant seulement $r_3=0$), et n'ont jamais été étudiés et classifiés. Étudier et classifier ces manipulateurs s'avère d'une grande importance et d'une grande utilité, vu que la majorité des manipulateurs utilisés dans l'industrie ont des simplifications géométriques.

Dans ce chapitre, une étude exhaustive de toutes les familles des manipulateurs ayant des simplifications géométriques est présentée.

Nous divisons, tout d'abord, ces manipulateurs en dix familles différentes suivant leurs paramètres de DHm nuls. Ensuite, nous étudions les manipulateurs de chaque famille, nous les classifions selon la topologie de leur espace de travail. Ces manipulateurs étant tous non cuspidaux, le seul critère de classification est le nombre de nœuds dans leur espace de travail.

² Un nœud est défini dans une section (ρ, z) de l'espace de travail comme un point d'intersection de courbes singulières, c'est un point où coïncident deux solutions doubles au MGI.

Différentes classes de manipulateurs ayant la même topologie d'espace de travail apparaissent pour chaque famille.

La classification menée dans ce chapitre ne constitue jamais un cas particulier de celle qui a été conduite dans [Baili 04]. En effet:

- tous les paramètres ont été normalisés par d_2 dans [Baili 04] pour réduire la dimension du problème.
- dans la plupart des cas, les équations des surfaces de séparation (dans l'espace des paramètres) peuvent avoir des formes dégénérées quand la valeur d'un ou plusieurs paramètres de DHm s'annule.

Ainsi, chacune des familles devra être étudiée et classifiée séparément.

Globalement, vingt-deux classes de manipulateurs seront distinguées. Les manipulateurs d'une même classe ont les mêmes topologies d'espace de travail et les mêmes propriétés cinématiques (nombre de nœuds, nombre de cavités, nombre de zones à 2 et à 4 solutions, n-parcourabilité et t-parcourabilité).

Finalement, les classes les plus intéressantes seront mises en évidence.

2. PRELIMINAIRES

Dans cette section, nous présentons tout d'abord quelques propriétés propres aux manipulateurs sériels, puis nous exposons les manipulateurs 3R orthogonaux, ensuite nous rappelons la classification menée dans [Baili 04].

2.1. PROPRIETES DES MANIPULATEURS SERIELS

2.1.1. Manipulateurs quadratiques et quartiques

Les manipulateurs quadratiques sont ceux dont le polynôme du MGI peut être réduit à des polynômes du second degré au plus. [Smith 90] propose une méthode basée sur les coniques permettant de trouver toutes les conditions sur les paramètres de DHm conduisant à des manipulateurs quadratiques.

Les manipulateurs quartiques sont ceux dont le polynôme du MGI peut s'écrire à l'aide de polynômes de quatrième degré. Ces manipulateurs sont les plus nombreux. La classe des manipulateurs quartiques peut contenir des manipulateurs cuspidaux ou non cuspidaux.

2.1.2. Manipulateurs binaires et quaternaires

Les manipulateurs binaires sont ceux qui ne possèdent que deux solutions au plus au MGI. Pour les manipulateurs sériels à 3 ddl d'architecture générale, aucune condition dépendant des paramètres de DHm n'a été établie pour qu'un manipulateur soit binaire.

Il a été montré que les manipulateurs à 3 ddl ayant deux articulations prismatiques sont tous binaires (voir [Bennis 91] par exemple).

Finalement, [El Omri 96] a démontré que les manipulateurs orthogonaux sans offset ($r_2 = r_3 = 0$) et tel que $d_2 \neq d_3$ sont binaires si et seulement si ils vérifient la relation suivante : $d_2 > d_3 > d_4$.

Contrairement aux manipulateurs binaires, les manipulateurs quaternaires peuvent avoir jusqu'à 4 solutions au MGI et représentent la majorité des manipulateurs.

[Burdick 95] a montré que les manipulateurs 3R tel que : $d_2 = 0$ ou $d_3 = 0$ (manipulateurs dont deux axes se coupent) sont des manipulateurs quaternaires. Une condition nécessaire et suffisante dépendant des paramètres de DHm pour qu'un manipulateur 3R orthogonal et tel que $r_3 = 0$ soit quaternaire est établie dans [Wenger 04b].

2.2. PRESENTATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX

Les manipulateurs 3R orthogonaux sont des manipulateurs à 3 articulations rotoïdes à axes orthogonaux ($\alpha_2 = -90^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$). L'étude d'un tel type de manipulateur se fera en fonction des paramètres de DHm : d_2 , d_3 , d_4 , r_2 et r_3 . Les trois variables articulaires considérées sont : θ_1 , θ_2 et θ_3 . On ne considèrera pas de butées articulaires donc les trois variables articulaires sont illimitées. La figure 2.1 (a) représente l'architecture cinématique d'un manipulateur de la famille étudiée dans la configuration zéro. La figure 2.1 (b) représente un modèle solide d'un tel manipulateur. L'effecteur est représenté par le point P qui est repéré par ses 3 coordonnées cartésiennes x , y et z dans le repère de référence (\mathbf{o} , \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z}) lié à la base du manipulateur.

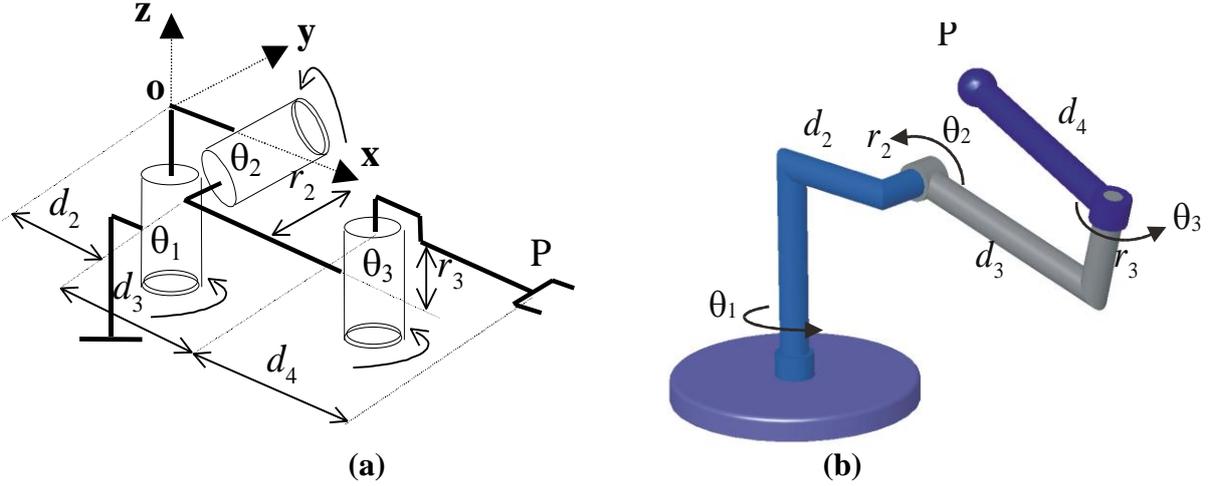


Figure 2.1 : Manipulateur 3R orthogonal

Pour les manipulateurs 3R orthogonaux, le MGD est décrit par le système des équations (2.1) suivant :

$$\begin{aligned}
 x &= [d_2 + r_3 s_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] c_1 - (r_2 + d_4 s_3) s_1 \\
 y &= [d_2 + r_3 s_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] s_1 + (r_2 + d_4 s_3) c_1 \\
 z &= r_3 c_2 - (d_3 + d_4 c_3) s_2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

L'étude de la famille de manipulateurs repose sur la topologie des surfaces de singularités dans l'espace de travail. On rappelle la matrice jacobienne préférentielle [Gorla 84] d'un manipulateur appartenant à cette famille :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -s_3 c_2 d_4 - c_2 r_2 & r_3 & -s_3 d_4 \\ s_3 s_2 d_4 + s_2 r_2 & d_3 + c_3 d_4 & 0 \\ c_2 d_3 + c_2 c_3 d_4 + d_2 + s_2 r_3 & 0 & c_3 d_4 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne s'écrit :

$$\det(\mathbf{J}) = d_4 \{ (d_3 + d_4 c_3) [(d_2 + r_3 s_2) s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2] + r_3 (r_2 + d_4 s_3) s_2 c_3 \} \tag{2.3}$$

Le polynôme du MGI d'un manipulateur 3R orthogonal est défini comme le polynôme $P(t)$ donné dans l'équation (2.4) obtenu d'après [Pieper 68]. Le polynôme $P(t)$, dit caractéristique, est de degré 4 en fonction de $t = \tan(\theta_3/2)$. Ses coefficients a , b , c , d et e dépendent des paramètres de DHm et de la position de l'effecteur dans une section génératrice (définie par $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et z).

$$P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \quad (2.4)$$

$$\text{où : } \begin{cases} a = 4[m_0 - m_2 + m_5] \\ b = 4[2m_1 - 2m_3] \\ c = 4[2m_0 + 4m_4 - 2m_5] \\ d = 4[2m_1 + 2m_3] \\ e = 4[m_0 + m_2 + m_5] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} m_0 = -d_2^2 \rho^2 + d_2^2 r_2^2 + \frac{(L_1 - K_1)^2}{4} \\ m_1 = 2d_2^2 d_4 r_2 + (L_1 - K_1) d_4 r_2 \\ m_2 = d_3 d_4 (L_1 - K_1) \\ m_3 = 2d_3 r_2 d_4^2 \\ m_4 = d_4^2 (r_2^2 + d_2^2) \\ m_5 = d_3^2 d_4^2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} K_1 = d_2^2 + \rho^2 + z^2 \\ L_1 = r_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \end{cases}$$

Les manipulateurs 3R orthogonaux sont caractérisés par l'existence ou non d'une cavité toroïdale dans leur espace de travail, le caractère cuspidal / non cuspidal ainsi que les propriétés générique / non générique et binaire / quaternaire [Baili 04].

2.3. CLASSIFICATION DES DEUX FAMILLES DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX

Une étude portant sur l'analyse et la classification des manipulateurs 3R orthogonaux a été menée dans [Baili 04]. Les auteurs ont introduit une classification de ces manipulateurs qui repose sur la notion de topologie d'espace de travail. Ils ont défini la topologie d'espace de travail par le nombre de points cusps et le nombre de nœuds qui apparaissent sur les surfaces de singularité.

Deux familles de manipulateurs 3R orthogonaux étaient étudiées séparément dans [Baili 04], la première concernait les manipulateurs n'ayant pas d'offset sur leur dernier axe ($r_3=0$), la deuxième famille est celle des manipulateurs ayant un offset sur leur dernier axe ($r_3 \neq 0$).

2.3.1. Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3=0$

2.3.1.1. Partition de l'espace des paramètres suivant le nombre de points cusps

Le problème consiste tout d'abord à rechercher des conditions sur les paramètres de DHm pour qu'un manipulateur soit cuspidal.

Pour qu'un manipulateur appartenant à la famille étudiée soit cuspidal, il faut que le polynôme $P(t)$ de son MGI donné par l'équation (2.4) admette une ou plusieurs racines

triples. $P(t)$ admet une ou plusieurs racines triples revient à dire que le système suivant admet des solutions.

$$S(t, a, b, c, d, e) : \begin{cases} P(t, z, \rho, d_2, d_3, d_4, r_2) = 0 \\ \frac{\partial P(t, z, \rho, d_2, d_3, d_4, r_2)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 P(t, z, \rho, d_2, d_3, d_4, r_2)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

L'élimination des variables t , ρ et z entre les équations du système (2.5) aboutit à des équations très complexes et difficilement exploitables. Afin de réduire le nombre de paramètres et sans perte de généralité, tous les paramètres sont normalisés par rapport à d_2 . Ceci veut dire que les paramètres à considérer sont d_3 , d_4 et r_2 et $d_2 = 1$.

Dans le cadre du projet Math-Stic (Robots Cuspiaux et Racines triples), Corvez a éliminé les variables t , ρ et z en utilisant les bases de Groebner [Corvez 02]. L'étude et l'analyse du système triangulaire obtenu permettent de trouver 5 polynômes dont chacun représente une surface dans l'espace des paramètres. Les régions de l'espace des paramètres sont obtenues en utilisant l'algorithme de Décomposition Cylindrique Algébrique (DCA). Les surfaces ont permis de partitionner l'espace des paramètres en 105 régions différentes ayant 0, 2 ou 4 cusps. Dans chaque région, tous les manipulateurs ont le même nombre de points cusps [Corvez 02].

Baili montre, en effectuant des balayages dans des sections (d_3, d_4) pour des r_2 donnés, que dans l'espace des paramètres (d_3, d_4, r_2) , il existe seulement 5 domaines dans lesquels le nombre de points cusps est constant parmi les 105 fournis [Baili 04]. Les équations des surfaces séparant ces 5 domaines ont été déterminées par une analyse géométrique des transitions, et ont été retrouvées mathématiquement parmi les 5 polynômes de [Corvez 02]. Les équations de ces 5 surfaces sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \\ C_2 : d_4 = \frac{d_3}{1 + d_3} \cdot A \\ C_3 : d_4 = \frac{d_3}{d_3 - 1} \cdot B \quad \text{et } d_3 > 1 \\ C_4 : d_4 = \frac{d_3}{1 - d_3} \cdot B \quad \text{et } d_3 < 1 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec $A = \sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2}$ et $B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2}$

2.3.1.2. Partition de l'espace des paramètres suivant le nombre de nœuds

Définition : Un point nœud est le lieu de croisement de deux singularités dans l'espace de travail d'un manipulateur. Sur un point nœud, le polynôme caractéristique $P(t)$ du manipulateur admet deux paires de solutions coïncidentes, qui se traduit par la condition suivante sur $P(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) = 0 \\ \frac{\partial P(t)}{\partial t} = 0 \\ \text{discriminant} \left(\frac{\partial P(t)}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Baili a affiné la partition de l'espace des paramètres en prenant en compte le nombre de nœuds dans l'espace de travail des manipulateurs de cette famille. Les surfaces séparant deux topologies d'espace de travail différentes (ayant des nombres de nœuds différents) ont été déterminées en utilisant des raisonnements géométriques. Les équations de ces surfaces sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : d_4 = \frac{1}{2}(A - B) \\ E_2 : d_4 = d_3 \\ E_3 : d_4 = \frac{1}{2}(A + B) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Les manipulateurs appartenant à la famille étudiée peuvent avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 nœuds uniquement et 9 topologies différentes d'espace de travail existent [Baili 04].

2.3.1.3. Synthèse des résultats

En partant de la partition de l'espace des paramètres de la famille de manipulateurs orthogonaux étudiée ($r_3=0$) selon le nombre de point cusps, et en tenant compte du nombre de nœuds, une nouvelle partition de l'espace des paramètres en plusieurs topologies d'espace de travail a été proposée. La figure 2.2 représente une section de l'espace des paramètres dans le plan $r_2 = 1$. Les surfaces séparant les régions dont le nombre de points cusps varie sont les C_i ($1 \leq i \leq 4$) tandis que les surfaces séparant les régions dont le nombre de nœuds varie sont les E_i ($1 \leq i \leq 3$). Dans chacune des 9 topologies d'espaces de travail, on note le couple (nombre de point cusps, nombre de nœuds).

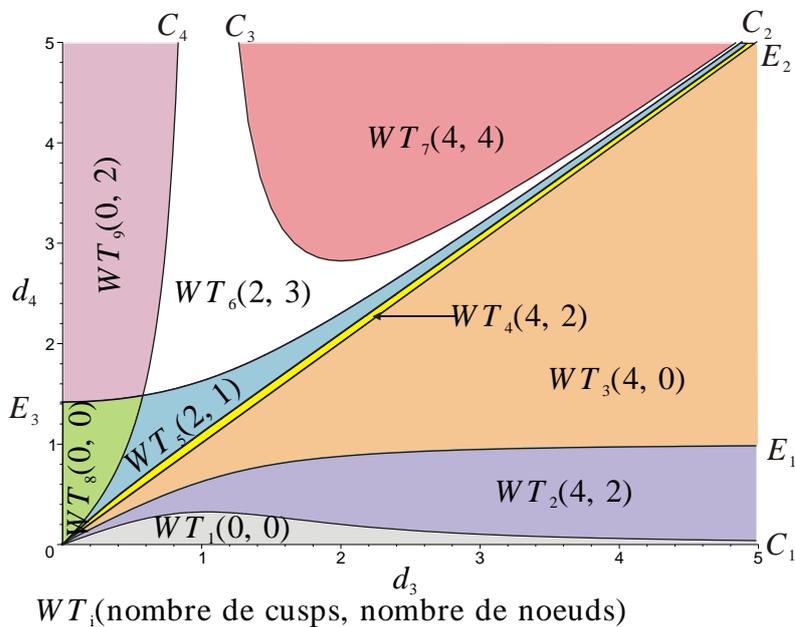


Figure 2.2 : Partition de l'espace des paramètres selon le nombre de points cusps et le nombre des nœuds dans une section $r_2 = 1$ [Baili 04]

Les espaces articulaires et de travail d'un manipulateur de chaque région et leurs propriétés sont représentés sur l'arbre suivant (Figure 2.3):

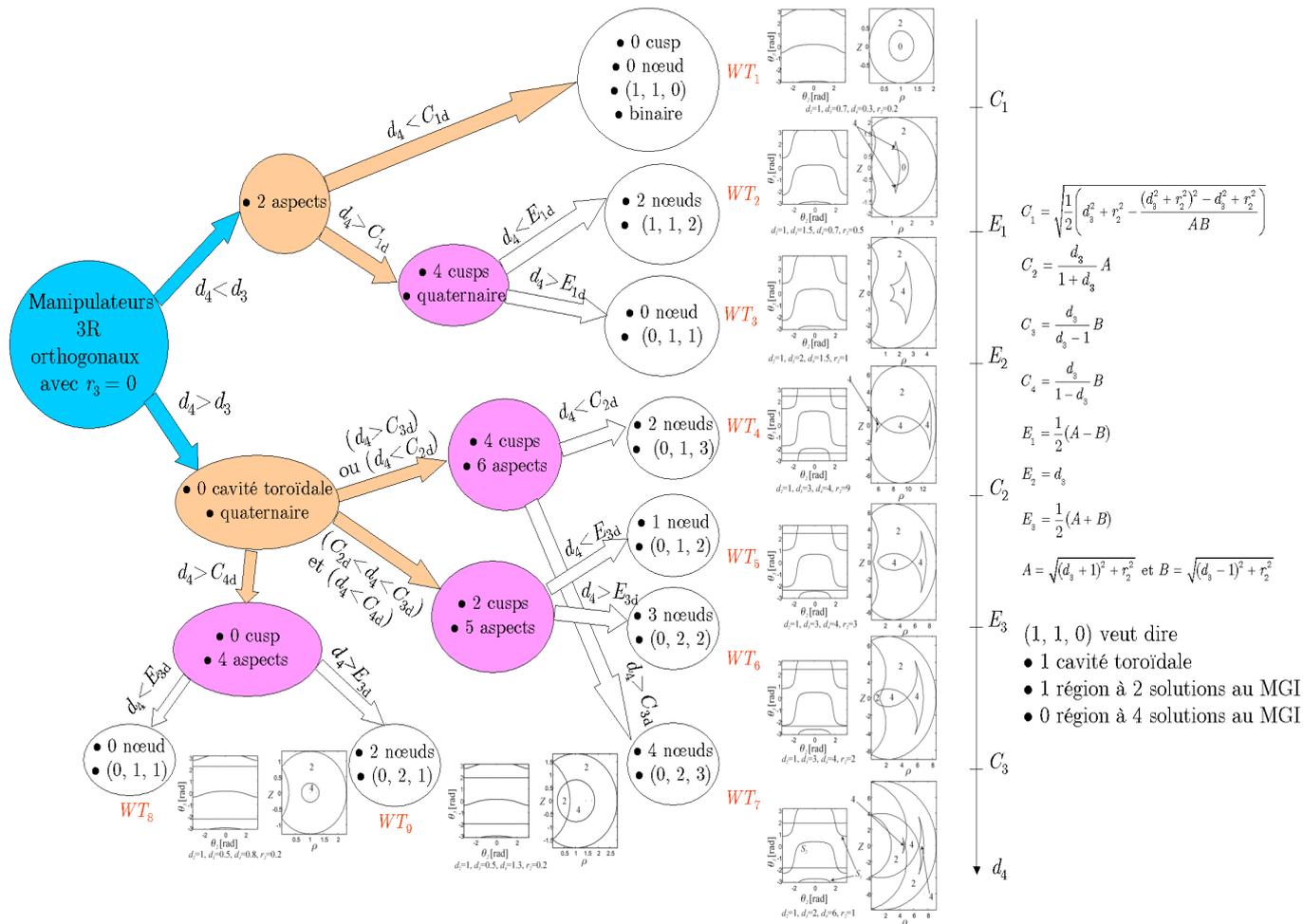


Figure 2.3 : Arbre de classification de la famille des manipulateurs 3R orthogonaux tels que $r_3 = 0$ en 9 topologies d'espace de travail [Baïli 04]

2.3.2. Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3 \neq 0$

Comme pour le cas $r_3=0$, le but est de déterminer toutes les topologies d'espace de travail possibles ainsi que les équations des surfaces les séparant et dont chacune représente la transition entre deux topologies d'espace de travail.

2.3.2.1. Partition de l'espace des paramètres suivants le nombre de points cusps

Dans ce cas, en plus des variables x , y et z représentant la position de l'effecteur et les 3 paramètres de DHm d_3 , d_4 et r_2 , on rajoute un autre paramètre de DHm à savoir r_3 . Ceci complique naturellement le problème. La résolution du système polynomial S (Equation 2.5) devient complexe, même en utilisant les bases de Groebner, qui donnent un nombre très élevé de cellules dont l'analyse est fastidieuse.

Dans [Baili 04], comme pour le cas $r_3=0$, une exploration numérique des différents domaines a été effectuée grâce à un balayage dans plusieurs sections (d_3, d_4) de l'espace des paramètres pour un couple (r_2, r_3) donné. Des domaines contenant des manipulateurs non cuspidaux et des domaines contenant des manipulateurs cuspidaux ayant 2, 4, 6 ou 8 cusps ont été trouvés. Les équations des surfaces (2.9) séparant ces domaines ont été déterminées par une analyse géométrique des transitions, et ont été retrouvées mathématiquement parmi les 5 polynômes de [Corvez 02] :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \\ C_{1\text{bis}} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \\ C_{\text{cône}} : d_4 = \sqrt{d_3^2 + r_2^2} \\ C_{234} : f(d_3, d_4, r_2, r_3) = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

C_{234} est une surface dont l'équation, très compliquée, est de degré 12 en d_3^2, d_4^2, r_2^2 et r_3^2 , ayant 536 monômes et qui ne peut pas être factorisée. C_{234} est composée de 2 ou 3 « parties ». Ces parties ne sont pas des composantes connexes et ne peuvent pas être écrites sous forme explicite. Par commodité et par similitude avec le cas précédent, ces trois « parties » de la surface C_{234} seront appelées: partie C_2 , partie C_3 et partie C_4 (il se trouve que l'annulation de r_3 dans C_{234} permet d'exprimer C_{234} comme le produit de trois facteurs qui correspondent aux surfaces C_2, C_3 et C_4).

Les 4 surfaces de séparation de l'espace des paramètres divise ce dernier en 9 domaines où le nombre de points cusps est constant. La figure 2.4 représente une section (d_3, d_4) dans l'espace des paramètres avec $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$ subdivisée en 9 domaines. Dans chaque domaine, un manipulateur représentant est donné.

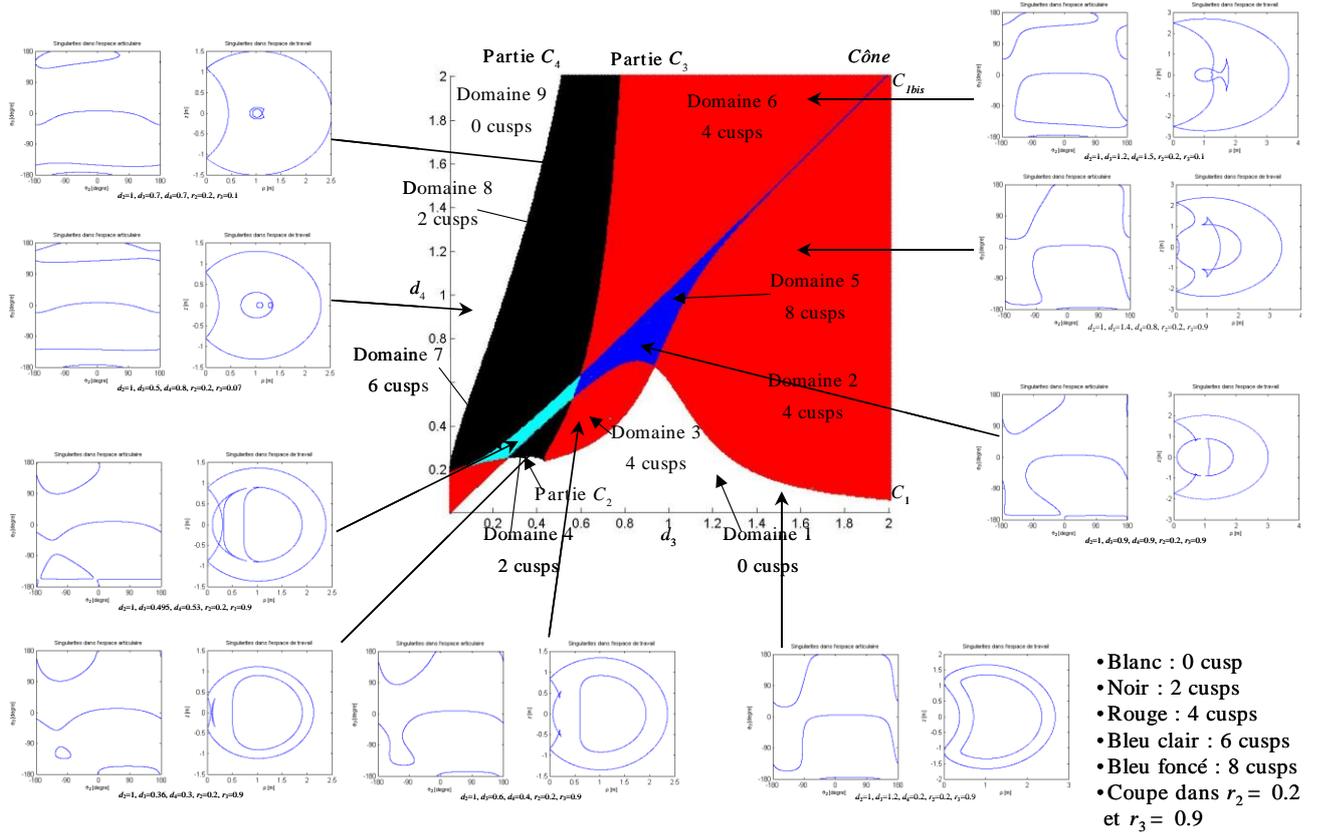


Figure 2.4 : Les 9 cas pointés dans une section $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$

2.3.2.2. Partition de l'espace des paramètres suivant le nombre de nœuds

En effectuant un balayage dans chacun des 9 domaines trouvés, les équations des surfaces séparant deux topologies d'espace de travail différentes (ayant des nombres de nœuds différents) ont été déterminées en utilisant des raisonnements géométriques. Les équations de ces surfaces sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1\text{gén}} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + r_2^2 + d_3^2 \left(1 - \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 - AB \left| \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)} \\ E_{3\text{gén}} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + r_2^2 + d_3^2 \left(1 - \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left| \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Ces 2 surfaces divisent l'espace des paramètres de DHm et les 9 domaines en sous-domaines dont chacun correspond à une seule topologie d'espace de travail.

On distingue les deux cas : $r_2 < r_3$ et $r_2 > r_3$. En effet, lorsque $r_2 < r_3$, la surface $E_{1\text{gén}}$ est au-dessus de la surface $E_{3\text{gén}}$ (Figure 2.5(a)) et lorsque $r_2 > r_3$ la surface $E_{1\text{gén}}$ passe en dessous de la surface $E_{3\text{gén}}$ (Figure 2.5(b)).

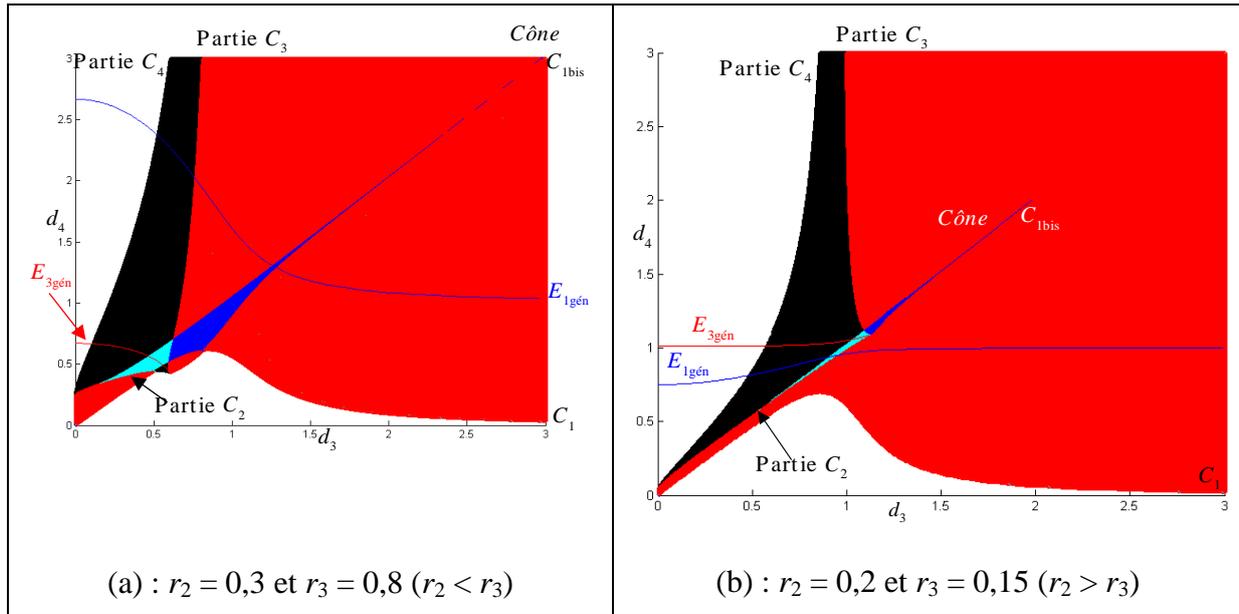


Figure 2.5 : Les deux cas possibles pour $E_{1g\acute{e}n}$ et $E_{3g\acute{e}n}$

Au total, 22 topologies d'espace de travail différentes ont été trouvées. Tous les manipulateurs appartenant à ces 22 topologies d'espace de travail ne peuvent avoir que 0, 2 ou 4 nœuds [Baili 04].

3. LES FAMILLES DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX PARTICULIERS

Les paramètres de DHm des manipulateurs 3R orthogonaux sont les suivants : d_2 , d_3 , d_4 , r_2 , r_3 , α_2 et α_3 , avec $\alpha_2 = -90^\circ$ et $\alpha_3 = -90^\circ$. Les deux familles de manipulateurs 3R orthogonaux étudiées dans [Baili 04] sont celles des manipulateurs ayant tous les paramètres de DHm non nuls et celle des manipulateurs ayant tous les paramètres de DHm non nuls sauf r_3 .

Dans ce chapitre, les manipulateurs 3R orthogonaux ayant des morphologies simplifiées sont classifiés. Dans le reste de ce mémoire, ces manipulateurs seront appelés « les manipulateurs particuliers ».

Les manipulateurs particuliers peuvent être divisés en dix familles selon leurs paramètres de DHm nuls. Les dix familles de manipulateurs particuliers sont obtenues en recherchant des combinaisons de paramètres de DHm nuls. Seul le paramètre d_4 sera toujours considéré non nul, parce que si on l'annule, le manipulateur devient toujours singulier. La figure 2.6 nous montre toutes ces combinaisons :

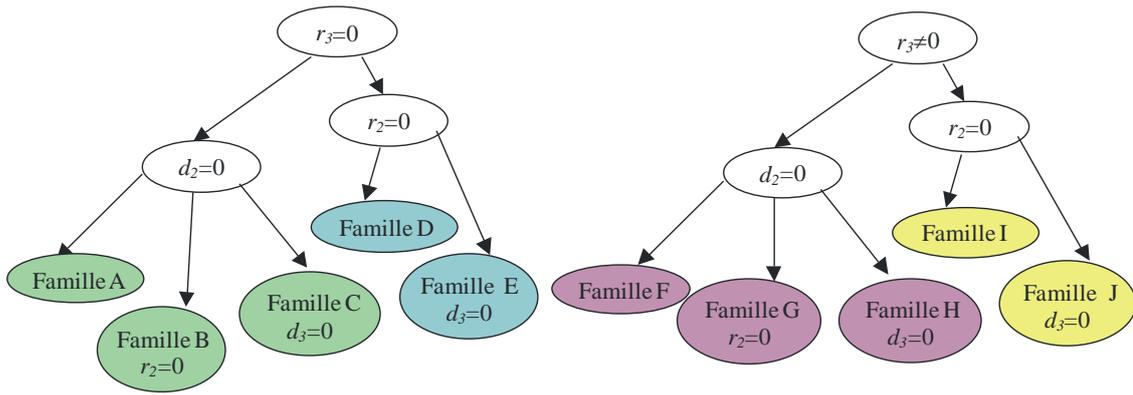


Figure 2.6 : Les dix familles de manipulateurs particuliers

Les dix familles de manipulateurs particuliers sont caractérisées par les paramètres de DHm nuls suivants :

Famille A : $d_2=0$ et $r_3=0$

Famille F : $d_2=0$.

Famille B : $d_2=0$, $r_2=0$ et $r_3=0$.

Famille G : $d_2=0$ et $r_2=0$.

Famille C : $d_2=0$, $d_3=0$ et $r_3=0$.

Famille H : $d_2=0$ et $d_3=0$.

Famille D : $r_2=0$ et $r_3=0$.

Famille I : $r_2=0$.

Famille E : $d_3=0$, $r_2=0$ et $r_3=0$.

Famille J : $d_3=0$ et $r_2=0$.

4. CRITERES DE CLASSIFICATION

Le principal critère de sélection et de performance des manipulateurs sériels est leur espace de travail. L'espace de travail est caractérisé principalement par les singularités qui définissent ses frontières et ses surfaces internes.

En conclusion, deux manipulateurs sériels peuvent être différenciés par leur espace de travail, par suite par la topologie de leurs singularités.

On a vu que la topologie d'une surface de singularité dans l'espace de travail peut être caractérisée par le nombre de points cusps et le nombre de nœuds.

4.1. NOMBRE DE POINTS CUSPS

Les manipulateurs 3R particuliers ont l'un de leurs paramètres de DHm d_2 , d_3 , r_2 et/ou r_3 nul, ce qui implique qu'ils sont quadratiques (leur polynôme caractéristique est de degré 2)

[Kohli 85] [Wenger 94]. Par suite, ils ne peuvent pas avoir de points cusps, vu qu'un point cusp est une racine triple du polynôme caractéristique.

Dans l'étude cinématique des manipulateurs de chacune des dix familles, nous calculerons les polynômes caractéristiques et nous montrerons qu'ils ont bien des formes quadratiques.

En conclusion, le seul critère de classification des topologies des singularités des manipulateurs particuliers des dix familles exposées dans le paragraphe précédent sera le nombre de nœuds.

4.2. NOMBRE DE NŒUDS

Dans [Baili 04], les surfaces de transition entre les régions de l'espace des paramètres où les manipulateurs ont un nombre constant de nœuds, ont été calculées géométriquement et analytiquement :

- Pour la première famille ($r_3=0$), les surfaces de transition étaient calculées géométriquement et elles ont les équations suivantes pour $d_1=1$:

$$\begin{cases} E_1 : d_4 = \frac{1}{2}(A - B) \\ E_2 : d_4 = d_3 \\ E_3 : d_4 = \frac{1}{2}(A + B) \end{cases} \quad \text{avec } A = \sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \text{ et } B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad (2.11)$$

- Pour la deuxième famille ($r_3 \neq 0$), [Baili 04] a remarqué que l'apparition ou la disparition des nœuds se fait sur l'axe $z = 0$. Pour cela, les surfaces de transition ont été calculées analytiquement en recherchant à l'aide de la fonction « Résultant » de MAPLE, la relation permettant de traduire la condition d'existence d'un tel point, définie par l'équation (2.7), sur l'axe $z = 0$. Les surfaces de transition trouvées ont les équations suivantes pour $d_2=1$:

$$\begin{cases} E_{1\text{gén}} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + r_2^2 + d_3^2 \left(1 - \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 - AB \left| \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)} \\ E_{3\text{gén}} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + r_2^2 + d_3^2 \left(1 - \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left| \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)} \end{cases} \quad (2.12)$$

On remarque que les équations (2.11) et (2.12) sont normalisées par d_2 ($d_2=1$), et on remarque aussi que l'équation (2.12) dégénère lorsque le paramètre r_2 s'annule.

Dans notre étude, pour le cas des manipulateurs particuliers, ces deux systèmes d'équations ne sont pas valables, parce qu'ils ne s'appliquent pas aux familles où les paramètres DHm d_2 et/ou r_2 sont nuls. D'où la nécessité d'écrire les équations de transition sans normalisation et sans la contrainte posée sur l'apparition des nœuds sur l'axe $z = 0$. Nous verrons plus tard dans ce chapitre que pour les manipulateurs de quelques familles, les nœuds apparaissent sur un point où $z \neq 0$.

Pour les manipulateurs particuliers ayant leur troisième offset nul ($r_3 = 0$), c'est à dire les familles A, B, C, D et E, nous calculerons les équations des surfaces de transition dans l'espace des paramètres directement d'après l'équation (2.13), en considérant le paramètre d_2 comme une variable arbitraire différente de 1. Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} E_1 : d_4 = \frac{1}{2}(A - B) \\ E_2 : d_4 = d_3 \\ E_3 : d_4 = \frac{1}{2}(A + B) \end{cases} \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{(d_3 + d_2)^2 + r_2^2} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2} \quad (2.13)$$

Pour les manipulateurs particuliers ayant leur troisième offset non nul ($r_3 \neq 0$), c'est à dire les familles F, G, H, I et J, nous calculerons les équations des surfaces de transition associées au changement de nombre de noeuds en suivant la méthode de calcul de **[Baili 04]**, mais en considérant tout d'abord que les nœuds pourront apparaître sur un point où $z \neq 0$ et puis en considérant le paramètre d_2 comme une variable arbitraire différente de 1. Ensuite, nous vérifierons numériquement les équations obtenues en faisant des balayages dans les espaces des paramètres de chacune des familles en question. Les équations générales des surfaces de transition obtenues, pour les familles de manipulateurs ayant $r_3 \neq 0$, sont les suivantes :

$$(\Sigma_1) : d_4 = \sqrt{d_3^2 + r_2^2} \quad (2.14)$$

$$(\Sigma_2) : \begin{cases} d_4^4 r_2^2 + (-r_2^4 - d_3^2 r_2^2 + r_3^2 r_2^2 - d_2^2 r_2^2 + d_3^2 r_3^2 - d_2^2 r_3^2) d_4^2 \\ + d_2^2 d_3^2 r_2^2 - d_2^2 r_3^4 + d_2^4 r_3^2 + d_2^2 r_2^2 r_3^2 - d_2^2 d_3^2 r_3^2 = 0 \end{cases}$$

(Σ_2) est une réécriture des deux équations $(E_{1\text{gén}})$ et $(E_{3\text{gén}})$ du système d'équations (2.11), qui évite la dégénérescence lorsque le paramètre r_2 s'annule. En effet, $(E_{1\text{gén}})$ et $(E_{3\text{gén}})$ sont obtenues en résolvant (Σ_2) pour d_4^2 .

5. CLASSIFICATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX PARTICULIERS

Dans ce paragraphe, nous classifions les manipulateurs particuliers des dix familles exposées dans la figure 2.6. Les manipulateurs de chaque famille seront classifiés séparément.

Pour une famille déterminée, la méthodologie de classification des manipulateurs est la suivante :

Premièrement, nous substituons les valeurs des paramètres de DHm nuls dans les équations des surfaces de transition (2.13) si $r_3 = 0$ ou (2.14) si $r_3 \neq 0$.

Deuxièmement, nous testons soigneusement par un balayage la validité de ces surfaces, nous choisissons plusieurs points tests de l'espace des paramètres de part et d'autre de chaque surface de transition. Nous rappelons qu'un point de l'espace des paramètres est associé à un manipulateur. Nous calculons les singularités de chacun des manipulateurs tests choisis dans le balayage. S'il y a apparition ou disparition de nœuds pour les manipulateurs tests à proximité d'une surface de transition précise, nous constatons que celle-ci est valide et existe vraiment dans l'espace des paramètres. Une surface sera rejetée si (i) elle n'est pas valide, (il n'y aura pas d'apparition ni de disparition de nœuds sur les singularités des manipulateurs testés) (ii) elle définit un manipulateur toujours singulier (e.g. $d_4 = 0$). La situation (i) est due au fait que l'élimination numérique, dans le système (2.7), est effectuée pour le cas général (e.g. tous les paramètres sont considérés non nuls) et ne prend pas en compte dès le début les paramètres nuls des manipulateurs particuliers, ce qui aboutit à la génération des surfaces parasites et non valides pour certaines familles.

Les surfaces de transition valides trouvées divisent l'espace des paramètres d'une famille de manipulateurs en plusieurs zones. Les manipulateurs appartenant à chacune de ces zones ont la même topologie des singularités, et par suite ils ont les mêmes propriétés suivantes dans leur espace de travail: le nombre de nœuds, l'existence de cavités, les nombres de zones à 2 et à 4 solutions et la t-parcourabilité.

Dans la classification suivante, les familles A, B, C, D et E définissent les manipulateurs 3R orthogonaux ayant le paramètre $r_3 = 0$ et au moins un autre paramètre de DHm nul. Les manipulateurs de ces familles sont donc caractérisés par, au maximum, trois paramètres non nuls. Par suite l'espace des paramètres de chacune des familles sera définie par deux ou trois paramètres. Dans les cas où l'espace des paramètres est défini par trois paramètres, nous

normalisons par un paramètre tous les autres paramètres. De cette façon, pour chaque famille une section bidimensionnelle de l'espace des paramètres sera analysée.

Les familles F, G, H, I et J définissent les manipulateurs 3R orthogonaux ayant au moins un paramètre de DHm nul. Les manipulateurs de ces familles sont donc caractérisés par, au maximum, quatre paramètres non nuls. Par suite l'espace des paramètres de chacune des familles sera définie par deux, trois ou quatre paramètres. Pour les familles dont l'espace des paramètres est défini par trois paramètres, nous procéderons par une normalisation suivant un paramètre. Pour celles dont l'espace des paramètres est défini par quatre paramètres, nous normaliserons par un paramètre de DHm et nous en fixerons un autre pour pouvoir faire l'analyse dans une section bidimensionnelle.

5.1. FAMILLE A ($d_2 = 0, r_2 \neq 0, d_3 \neq 0, r_3 = 0$)

Les manipulateurs de la première famille étudiée sont définis par $d_2 = 0$ et $r_3 = 0$. La figure 2.7 nous montre un manipulateur de cette famille.

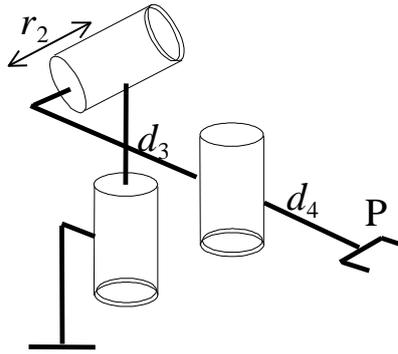


Figure 2.7 : Manipulateur de la famille A en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille A s'écrit sous une forme quadratique, ce qui confirme que ces manipulateurs ne sont pas cuspidaux, il est obtenu en substituant $d_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.4) :

$$P(t) = (At^2 + Bt + C)^2 \quad (2.15)$$

où A , B , et C sont fonction des paramètres de DHm (cf. Annexe A)

Le déterminant de la matrice jacobienne a une forme simplifiée, il est obtenu en substituant $d_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\text{Dét}(J) = d_4 V_1 c_2 \quad (2.16)$$

$$\text{où: } V_1 = -d_4 r_2 c_3^2 + d_3 d_4 s_3 c_3 - d_3 r_2 c_3 + d_3^2 s_3$$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités dans l'espace articulaire. Si on annule le déterminant dans l'équation (2.16), on aura la solution suivante :

$$\begin{cases} \theta_2 = \pm\pi/2 \\ P_1(\theta_3/2) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

où P_1 est un polynôme du 4^{ème} degré en $\text{tg}(\theta_3/2)$ qui dépend de V_I (cf. Annexe A).

Nous concluons alors que dans l'espace articulaire, il y a deux branches de singularités droites verticales pour $\theta_2 = \pm\pi/2$, et quatre branches de singularités horizontales au maximum pour θ_3 égale aux racines du polynôme P_1 .

Surfaces de transition :

Pour cette famille, $d_2 = 0 \Rightarrow A = B$, alors l'équation (E_1) de (2.13) prend la forme $d_4 = 0$. Par suite, la surface (E_1) est à rejeter parce qu'elle définit un manipulateur singulier.

En substituant $d_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans les équations (E_2) et (E_3) de (2.13), nous obtenons les équations des surfaces de transitions suivantes :

$$(E_2): d_4 = d_3 \quad (2.18)$$

$$(E_3): d_4 = \sqrt{d_3^2 + r_2^2} \quad (2.19)$$

Après un balayage dans l'espace des paramètres à proximité de ces 2 surfaces, nous constatons qu'elles sont valides. Ces deux surfaces (E_2) et (E_3) divisent l'espace des paramètres en trois domaines rassemblant respectivement les manipulateurs ayant 0 (Type A1), 2 (Type A2) et 4 nœuds (Type A3) dans leur espace de travail.

La figure 2.8 montre pour $r_2 = 1$, une section de l'espace des paramètres avec les trois domaines, les courbes de transition (E_2) et (E_3), l'espace de travail d'un manipulateur de chaque domaine, et d'un manipulateur sur chaque transition. Pour chaque espace de travail représenté, les régions à 4 solutions au MGI sont représentées en gris foncé, et celles à 2 solutions au MGI en gris clair.

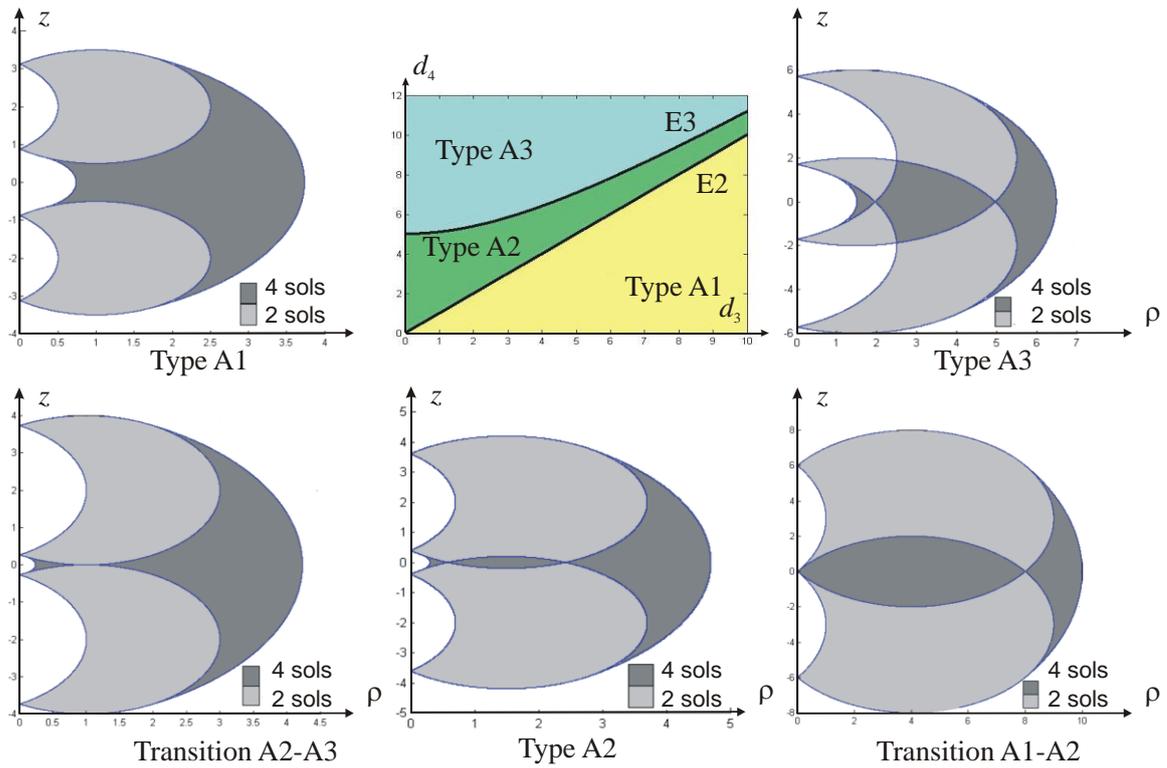


Figure 2.8 : L'espace des paramètres de la famille A et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type A1 ($d_3=2$, $d_4=1.5$ et $r_2=1$); Type A2 ($d_3=2$, $d_4=2.2$ et $r_2=1.5$); Type A3 ($d_3=2$, $d_4=3$ et $r_2=1$); Transition A1-A2 ($d_3=2$, $d_4=2$ et $r_2=1$); Transition A2-A3 ($d_3=3$, $d_4=5$ et $r_2=4$).

Les manipulateurs de la famille A sont classés suivant trois types selon la topologie de leurs singularités. Nous décrirons ci-dessous les propriétés des manipulateurs de chaque type.

5.1.1. Type A1

Les manipulateurs de type A1 sont tels que $d_3 > d_4$. Leur espace de travail n'a pas de cavités ni de nœuds. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI et d'une région à 4 solutions. Il est t-parcourable.

La figure 2.9 présente les deux espaces articulaire et de travail du même manipulateur de type A1 présenté dans la figure 2.8. Sur cette figure, nous montrons les 4 aspects de l'espace articulaire, et leurs images par le MGD dans l'espace de travail. L'image par le MGD de chacun des aspects 1 et 2 est tout l'espace de travail (gris), ce qui implique que la totalité de l'espace de travail de ces manipulateurs est t-parcourable. L'image de chacun des aspects 3 et 4 est juste la partie hachurée de l'espace de travail. Ce résultat est obtenu en balayant chacun des aspects de l'espace articulaire et en calculant l'image dans l'espace de travail par le MGD des points du balayage selon la méthode décrite dans [Wenger 04a]. Ce même test de t-parcourabilité sera appliqué sur les différents types de manipulateurs des dix familles.

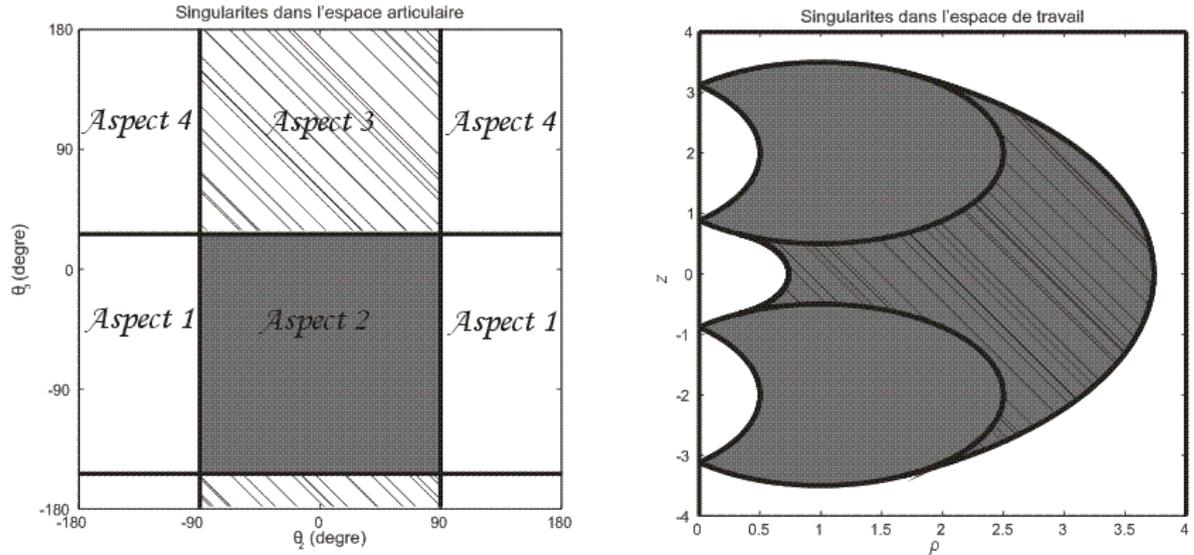


Figure 2.9 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type A1

Nous rappelons que tous les manipulateurs de type A1 ont ces propriétés, et ont cette même topologie d'espace de travail.

5.1.2. Type A2

Les manipulateurs de type A2 sont tels que $d_3 < d_4 < \sqrt{d_3^2 + l_2^2}$. Leur espace de travail n'a pas de cavités, il a deux nœuds. Il est t-parcourable.

La transition entre la topologie de l'espace de travail des manipulateurs de type A1 et celle des manipulateurs de type A2 est montrée sur la figure 2.8 (Transition A1-A2). Les deux zones à deux solutions au MGI de l'espace de travail des manipulateurs de type A1 s'élargissent, les singularités limitant ces deux zones deviennent tangentes sur la transition, puis se coupent dans le cas des manipulateurs A2 donnant lieu à l'apparition de deux nœuds et à la naissance d'une deuxième zone à 4 solutions au MGI.

L'espace articulaire des manipulateurs de type A2 est divisé en 8 aspects par six branches de singularités dont deux verticales et quatre horizontales.

La figure 2.10 présente les deux espaces articulaire et de travail du même manipulateur de type A2 présenté dans la figure 2.8. Sur cette figure, nous montrons les 8 aspects de l'espace articulaire, et leurs images obtenues par le MGD dans l'espace de travail. L'image par le MGD de chacun des aspects 1 et 2 est tout l'espace de travail (hachuré), ce qui implique que la totalité de l'espace de travail de ces manipulateurs est t-parcourable. L'image de

chacun des aspects 3 et 4 est la partie gris clair, celle de chacun des aspects 5 et 6 est la partie gris foncé et celle de chacun des aspects 7 et 8 est la partie rose de l'espace de travail.

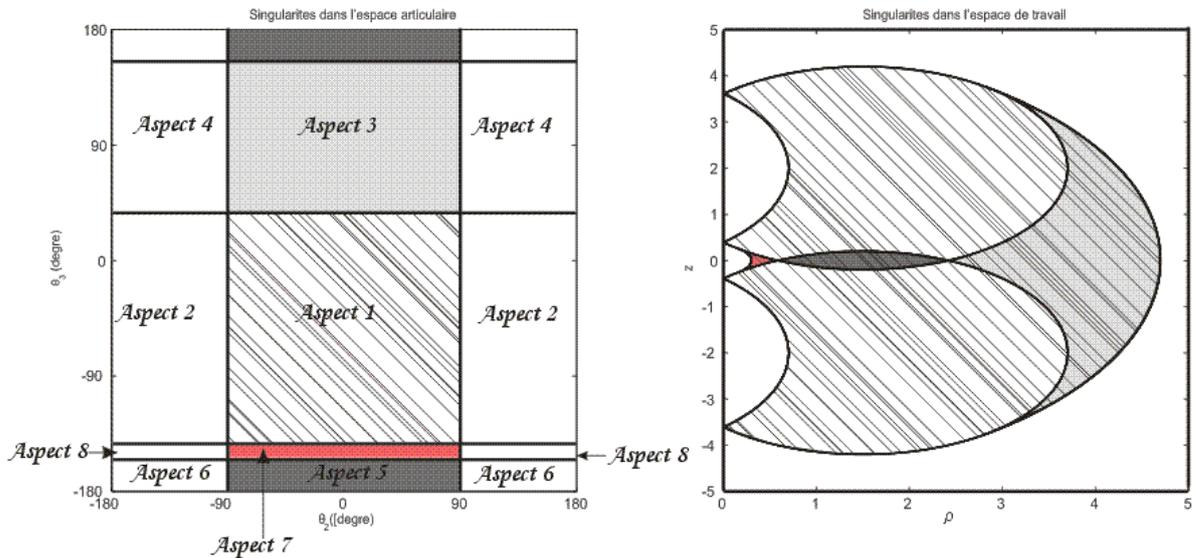


Figure 2.10 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type A2

5.1.3. Type A3

Les manipulateurs de type A3 sont tels que $d_4 > \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$. Leur espace de travail n'a pas de cavités, il a quatre nœuds. Il est composé de quatre régions à 2 solutions au MGI et de trois régions à 4 solutions. Il n'est pas t-parcourable. Sur la figure 2.8, on voit l'espace de travail d'un manipulateur de type A3, nous remarquons qu'il est très encombré par les singularités internes.

L'espace articulaire des manipulateurs de type A3 est divisé par six branches de singularités dont deux verticales et quatre horizontales en 8 aspects dont aucun a pour image par le MGD tout l'espace de travail, ce qui signifie que les espaces de travail des manipulateurs de type A3 ne sont pas t-parcourables. Pour cela, on n'a pas présenté une figure montrant la t-parcourabilité comme pour les groupes A1 et A2.

5.2. FAMILLE B ($d_2 = 0, r_2 = 0, d_3 \neq 0, r_3 = 0$)

Les manipulateurs de la famille B sont définis par $d_2 = 0, r_2 = 0$ et $r_3 = 0$. La figure 2.11 nous montre un manipulateur de cette famille.

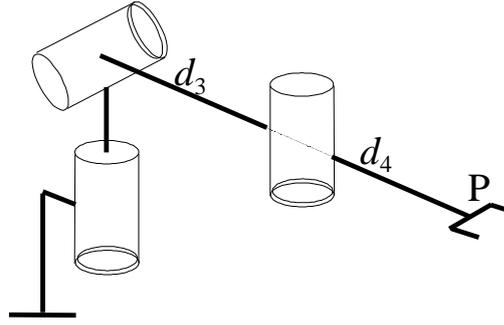


Figure 2.11 : Manipulateur de la famille B en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille B s'écrit sous une forme quadratique, ce qui confirme que ces manipulateurs ne sont pas cuspidaux, il est obtenu en substituant $d_2 = 0$, $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.4) :

$$P(t) = (At^2 + C)^2 \quad (2.20)$$

où A , B , et C sont fonction des paramètres de DHM (cf Annexe A).

Le déterminant de la matrice jacobienne a une forme simplifiée, il est obtenu en substituant $d_2 = 0$, $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\text{Dét}(J) = d_4 V_1 c_2 \quad (2.21)$$

$$\text{où: } V_1 = d_3 d_4 s_3 c_3 + d_3^2 s_3$$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités dans l'espace articulaire. Si on annule le déterminant dans l'équation (2.21), on aura la solution suivante :

$$\begin{cases} \theta_2 = \pm\pi/2 \\ \theta_3 = 0, +\pi \\ \theta_3 = \pm \text{Arc cos}\left(-d_3/d_4\right) \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous concluons alors que dans l'espace articulaire, deux branches de singularités droites verticales existent pour $\theta_2 = \pm\pi/2$, deux branches de singularités droites horizontales pour $\theta_3 = 0, +\pi$ et deux branches de singularités droites horizontales pour $\theta_3 = \pm \text{Arccos}(-d_3/d_4)$ si $d_3 < d_4$.

Surfaces de transition :

Pour cette famille, $d_2 = 0 \Rightarrow A = B$, alors l'équation (E_1) de (2.13) prend la forme $d_4 = 0$. Par suite, la surface (E_1) est à rejeter parce qu'elle définit un manipulateur singulier.

En substituant $d_2 = 0$, $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans les équations (E_2) et (E_3) de (2.13), nous remarquons que l'équation de (E_2) est équivalente à celle (E_3) :

$$(E_2): d_4 = d_3 \tag{2.23}$$

Après un balayage dans l'espace des paramètres à proximité de cette surface, nous constatons qu'elle est valide. Cette surface (E_2) divise l'espace des paramètres en deux domaines rassemblant respectivement les manipulateurs ayant 0 (Type B1), et 2 nœuds (Type B2) dans leur espace de travail.

La figure 2.12 montre l'espace des paramètres (d_3, d_4) avec les deux domaines, la courbe de transition (E_2), l'espace de travail d'un manipulateur de chaque domaine, et d'un manipulateur sur la transition. Pour chaque espace de travail représenté, les régions à 4 solutions au MGI sont représentées en gris foncé, et celles à 2 solutions au MGI en gris clair.

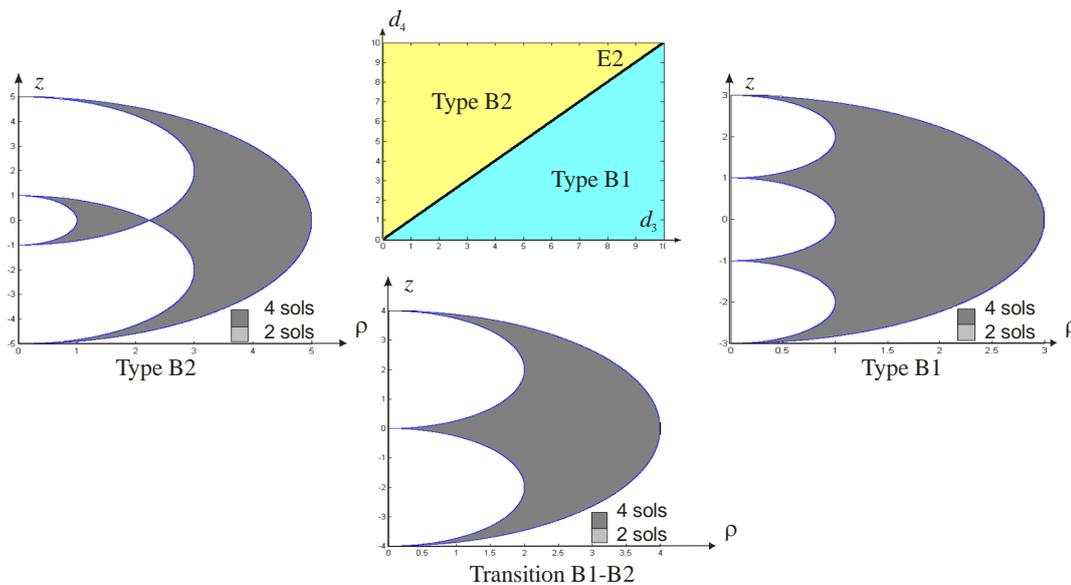


Figure 2.12 : L'espace des paramètres de la famille B et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type B1 ($d_3=2, d_4=1$); Type B2 ($d_3=2, d_4=3$); Transition B1-B2 ($d_3=2, d_4=2$).

Les manipulateurs de la famille B sont classés suivant deux types. Nous décrivons ci-dessous les propriétés des manipulateurs de chaque type.

5.2.1. Type B1

Les manipulateurs de type B1 sont tels que $d_3 > d_4$. Leur espace de travail n'a pas de cavités ni de nœuds. Il est composé d'une seule région à 4 solutions au MGI.

Leur espace articulaire est divisé en 6 aspects par cinq branches de singularités, deux verticales et trois horizontales. Chaque aspect a pour image tout l'espace de travail. Ce qui signifie que l'espace de travail de ces manipulateurs est t^+ -parcourable. Cette propriété est très intéressante. Rappelons en effet que dans un espace t^+ -parcourable, toute trajectoire continue peut être exécutée dans n'importe quelle posture du robot [Wenger 91].

La figure 2.13 montre l'espace articulaire, les quatre aspects et l'espace de travail du même manipulateur de type B1 de la figure 2.12.

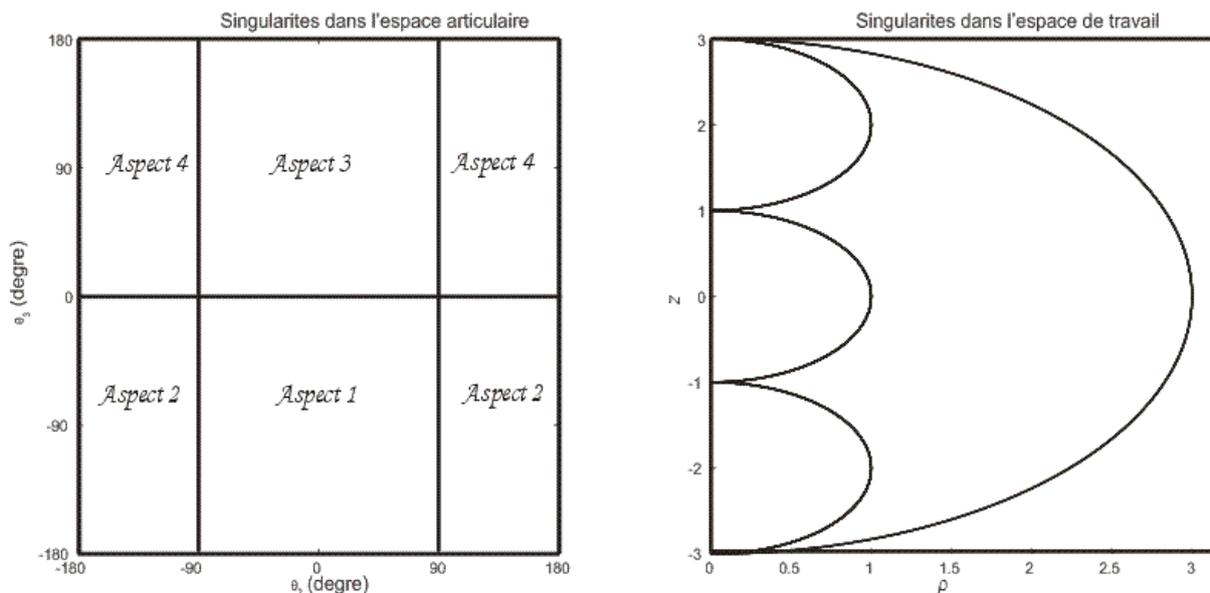


Figure 2.13 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type B1

Les manipulateurs de type B1 ont des propriétés très intéressantes, leur espace de travail n'est encombré par aucune singularité interne, chacun de ses points est accessible suivant quatre postures différentes, et il est t^+ -parcourable.

5.2.2. Type B2

Les manipulateurs de type B2 sont tels que $d_3 < d_4$. Leur espace de travail n'a pas de cavités, il a un seul nœud. Il est composé de deux régions à 4 solutions au MGI (Figure 2.12 Type B2). Il n'est pas t -parcourable.

Leur espace articulaire est divisé en 8 aspects par sept branches de singularités, deux verticales et cinq horizontales.

La figure 2.12 nous montre un espace de travail d'un manipulateur de type B2, nous remarquons que cet espace de travail est formé de deux parties entièrement séparées par un point singulier.

Les manipulateurs de type B2 sont peu intéressants vue la mauvaise topologie de leurs singularités.

5.3. FAMILLE C ($d_2 = 0, r_2 \neq 0, d_3 = 0, r_3 = 0$)

Les manipulateurs de la famille C sont définis par $d_2 = 0, d_3 = 0$ et $r_3 = 0$. La figure 2.14 nous montre un manipulateur de cette famille.

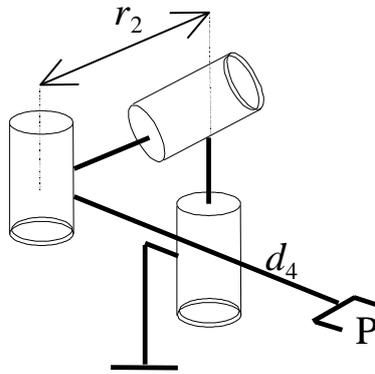


Figure 2.14 : Manipulateur de la famille A en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille C s'écrit sous une forme quadratique, ce qui confirme que ces manipulateurs ne sont pas cuspidaux, il est obtenu en substituant $d_2 = 0, d_3 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.4) :

$$P(t) = (At^2 + Bt + C)^2 \quad (2.24)$$

où $A, B,$ et C sont fonction des paramètres de DHM (cf Annexe A)

Le déterminant de la matrice jacobienne a une forme très simplifiée, il est obtenu en substituant $d_2 = 0, d_3 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \text{Dét}(J) &= d_4 V_1 c_2 \\ \text{où: } V_1 &= -d_4 r_2 c_3^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités dans l'espace articulaire. Si on annule le déterminant dans l'équation (2.25), on aura la solution suivante :

$$\begin{cases} \theta_2 = \pm\pi/2 \\ \theta_3 = \pm\pi/2 \end{cases} \quad (2.26)$$

Nous concluons alors que dans l'espace articulaire, deux branches de singularités droites verticales existent pour $\theta_2 = \pm\pi/2$, et deux branches de singularités horizontales au maximum pour $\theta_3 = \pm\pi/2$.

Surfaces de transition :

Pour cette famille, $d_2 = 0 \Rightarrow A = B$, alors l'équation (E_1) de (2.13) prend la forme $d_4 = 0$. De même puisque $d_3 = 0$, l'équation (E_2) de (2.13) s'écrit aussi $d_4 = 0$. Par suite, les surfaces (E_1) et (E_2) sont à rejeter parce qu'elles définissent un manipulateur singulier.

En substituant $d_2 = 0$, $d_3 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (E_3) de (2.13), nous obtenons l'équation de la surface de transition suivante :

$$(E_3): d_4 = r_2 \quad (2.27)$$

Après un balayage dans l'espace des paramètres à proximité de cette surface (E_3), nous constatons qu'elle n'est pas valide, parce qu'elle n'a aucune influence sur la topologie des singularités des manipulateurs de la famille C.

Nous constatons alors que tous les manipulateurs de la famille C ont la même topologie des singularités dans tout l'espace des paramètres (r_2, d_4) . Nous appellerons ces manipulateurs : manipulateurs de type C.

L'espace de travail des manipulateurs de type C n'a pas de cavités ni de nœuds. Il est composé d'une seule région à 4 solutions au MGI.

Leur espace articulaire est divisé en 4 aspects par quatre branches de singularités, deux verticales et deux horizontales. Chaque aspect a pour image tout l'espace de travail. Ce qui signifie que l'espace de travail de ces manipulateurs est t^+ -parcourable.

La figure 2.15 montre l'espace articulaire, les quatre aspects et l'espace de travail d'un manipulateur de type C.

Ces manipulateurs ont des propriétés très intéressantes.

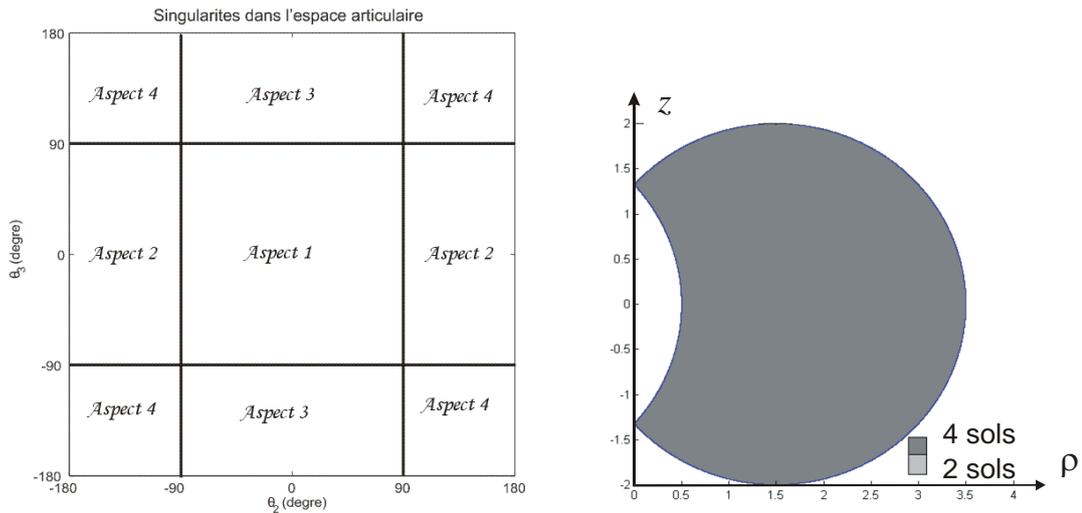


Figure 2.15 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type C ayant les paramètres suivants $d_4=2$ et $r_2=1.5$.

5.4. FAMILLE D ($d_2 \neq 0, r_2 = 0, d_3 \neq 0, r_3 = 0$)

Les manipulateurs de la famille D sont définis par $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$. La figure 2.16 nous montre un manipulateur de cette famille.

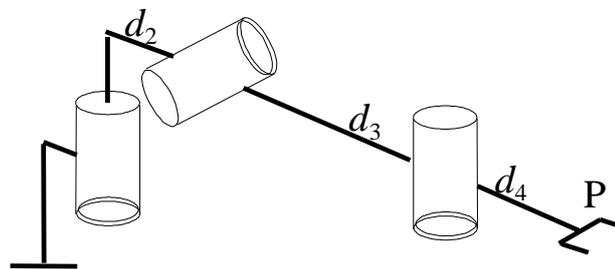


Figure 2.16 : Manipulateur de la famille D en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille D s'écrit sous une forme quadratique, ce qui confirme que ces manipulateurs ne sont pas cuspidaux, il est obtenu en substituant $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.4) :

$$P(t) = at^4 + ct^2 + e \quad (2.28)$$

où a, b, et c sont fonction des paramètres de DHM (cf Annexe A)

Le déterminant de la matrice jacobienne a une forme simplifiée, il est obtenu en substituant $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.4). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \text{Dét}(J) &= d_4(V_1c_2 + V_3) \\
 \text{où: } &\begin{cases} V_1 = d_3d_4s_3c_3 + d_3^2s_3 \\ V_3 = d_2d_4c_3s_3 + d_2d_3s_3 \end{cases} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités dans l'espace articulaire. Si on annule le déterminant dans l'équation (2.29), on aura la solution suivante :

$$\begin{cases} \theta_3 = 0, +\pi \\ \theta_3 = \pm \text{Arc cos}\left(-d_3/d_4\right) \\ \theta_2 = \pm \text{Arc cos}\left(-d_2/d_3\right) \end{cases} \quad (2.30)$$

Nous concluons alors que dans l'espace articulaire, deux branches de singularités droites verticales existent si $d_2 < d_3$, deux branches de singularités droites horizontales pour $\theta_3 = 0, +\pi$ et deux branches de singularités droites horizontales pour $\theta_3 = \pm \text{Arccos}(-d_3/d_4)$ si $d_3 < d_4$.

Surfaces de transition :

Pour la famille D, en substituant $r_2 = 0$ et $r_3 = 0$ dans les équations (E_1) , (E_2) et (E_3) de (2.13), nous aurons les équations de transition suivantes :

$$(E_1): d_4 = d_2 \quad (2.31)$$

$$(E_2): d_4 = d_3 \quad (2.32)$$

$$(E_3): d_3 = d_2 \quad (2.33)$$

Après le test de balayage dans l'espace des paramètres à proximité des surfaces (E_1) , (E_2) et (E_3) , nous constatons qu'elles sont toutes les trois valides.

Ces trois surfaces divisent l'espace des paramètres (d_2, d_3, d_4) en six domaines rassemblant les manipulateurs ayant respectivement 2 (Type D1), 0 (Type D2), 1 (Type D3), 2 (Type D4), 0 (Type D5) et 0 nœuds (Type D6) dans leur espace de travail.

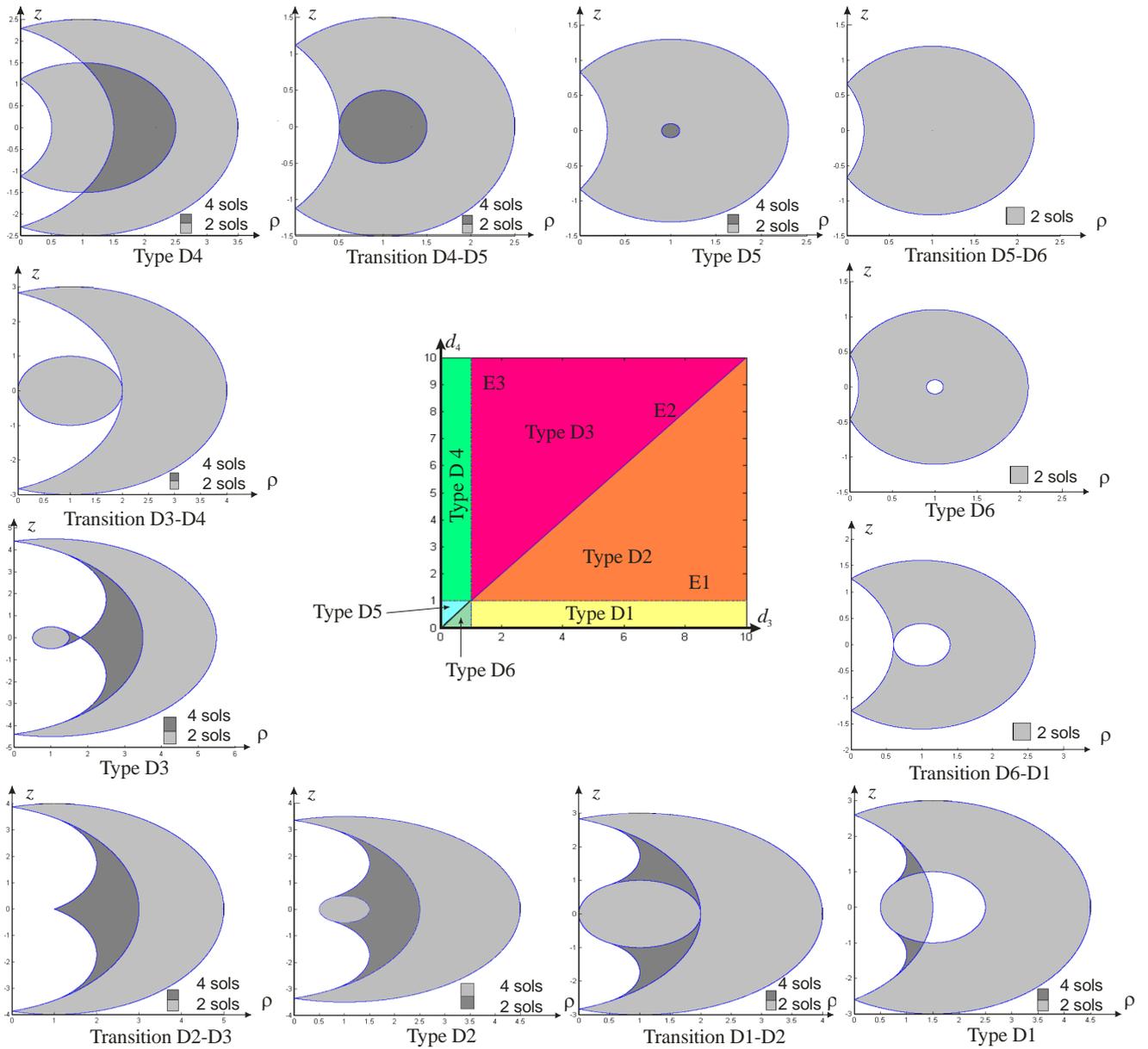


Figure 2.17 : L'espace des paramètres de la famille D et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type D1 ($d_3=1.4$, $d_4=0.7$ et $d_2=1$); Type D2 ($d_3=2$, $d_4=1.5$ et $d_2=1$); Type D3 ($d_3=2$, $d_4=2.5$ et $d_2=1$); Type D4 ($d_3=0.5$, $d_4=2$ et $d_2=1$); Type D5 ($d_3=0.6$, $d_4=0.7$ et $d_2=1$); Type D6 ($d_3=0.7$, $d_4=0.5$ et $d_2=1$); Transition D1-D2 ($d_3=2$, $d_4=1$ et $d_2=1$); Transition D2-D3 ($d_3=2$, $d_4=2$ et $d_2=1$); Transition D3-D4 ($d_3=1$, $d_4=2$ et $d_2=1$); Transition D4-D5 ($d_3=0.5$, $d_4=1$ et $d_2=1$); Transition D5-D6 ($d_3=0.6$, $d_4=0.6$ et $d_2=1$); Transition D6-D1 ($d_3=1$, $d_4=0.5$ et $d_2=1$);

La figure 2.17 montre pour $d_2 = 1$, une section de l'espace des paramètres avec les six domaines, les courbes de transition (E_1), (E_2) et (E_3), l'espace de travail d'un manipulateur de chaque domaine, et d'un manipulateur sur chaque transition.

Les manipulateurs de la famille D sont classifiés suivant six types. Les manipulateurs de chaque type ont des propriétés similaires. Nous décrivons ci-dessous les propriétés de ces types.

5.4.1. Type D1

Les manipulateurs de type D1 sont tels que $d_4 < d_2 < d_3$. Leur espace de travail a une cavité toroïdale et deux nœuds. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI, de 2 régions à 4 solutions et d'une région à 0 solutions qui constitue la cavité (Figure 2.17, Type D1). Il n'est pas totalement t-parcourable.

D'après l'équation (2.30), et en prenant en compte que $d_2 < d_3$ et $d_4 < d_3$, nous constatons que deux branches de singularités droites horizontales et deux droites verticales existent dans l'espace articulaire des manipulateurs de type D1. Ces droites divisent l'espace articulaire en 4 aspects dont aucun a la totalité de l'espace de travail comme image par le MGD.

La figure 2.17 nous montre un espace de travail d'un manipulateur de type D1, nous remarquons que cet espace de travail est encombré par les singularités. Nous concluons que la topologie de ses singularités rend ces manipulateurs peu intéressants.

5.4.2. Type D2

Les manipulateurs de type D2 sont tels que $d_2 < d_4 < d_3$. Leur espace de travail n'a pas de cavités toroïdales ni de nœuds. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI et d'une région à 4 solutions (Figure 2.17 Type D2). Il n'est pas totalement t-parcourable.

La transition entre la topologie de l'espace de travail des manipulateurs de type D1 et celle des manipulateurs de type D2 est montrée sur la figure 2.17 (Transition D1-D2). Les deux zones à deux solutions au MGI de l'espace de travail des manipulateurs de type D1 deviennent tangentes sur la transition, la cavité et les deux nœuds disparaissent.

De même, comme pour les manipulateurs de type D1, puisque $d_2 < d_3$ et $d_4 < d_3$, l'espace articulaire de ces manipulateurs est divisé en quatre aspects par cinq branches de singularités dont deux droites verticales et deux droites horizontales. Deux de ces aspects ont pour image par le MGD tout l'espace de travail sauf la petite région ovale à 2 solutions au MGI (Figure 2.17, Type D2), et les 2 autres aspects ont comme image la région ovale à 2 solutions et la région à 4 solutions (Figure 2.17, Type D2).

5.4.3. Type D3

Les manipulateurs de type D3 sont tels que $d_2 < d_3 < d_4$. Leur espace de travail a un nœud et aucune cavité toroïdale. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI, et de deux régions à 4 solutions (Figure 2.17 Type D3). Il n'est pas totalement t-parcourable.

L'espace articulaire des manipulateurs de type D3 est divisé en huit aspects par six branches de singularités dont deux droites verticales et quatre droites horizontales. Aucun des aspects a la totalité de l'espace de travail comme image par le MGD.

Les manipulateurs de ce type ne peuvent être classés parmi les manipulateurs intéressants, vu la forme de leur espace de travail.

5.4.4. Type D4

Les manipulateurs de type D4 sont tels que $d_3 < d_2 < d_4$. Leur espace de travail a deux nœuds et aucune cavité toroïdale. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI, et d'une seule région à 4 solutions (Figure 2.17, Type D4). Il n'est pas totalement t-parcourable.

L'espace articulaire des manipulateurs de type D4 est divisé par quatre branches de singularités droites horizontales, en quatre aspects dont aucun a la totalité de l'espace de travail comme image par le MGD. Aucune singularité droite verticale existe dans l'espace articulaire des manipulateurs de ce type puisque $d_3 < d_2$.

5.4.5. Type D5

Les manipulateurs de type D5 sont tels que $d_3 < d_4 < d_2$. Leur espace de travail n'a ni nœuds ni cavités toroïdales. Il est composé d'une région à 2 solutions au MGI, et d'une région à 4 solutions. Il est totalement t-parcourable.

La figure 2.18 nous montre les espaces articulaire et de travail et illustre la propriété de t-parcourabilité du même manipulateur de type D5 de la figure 2.17.

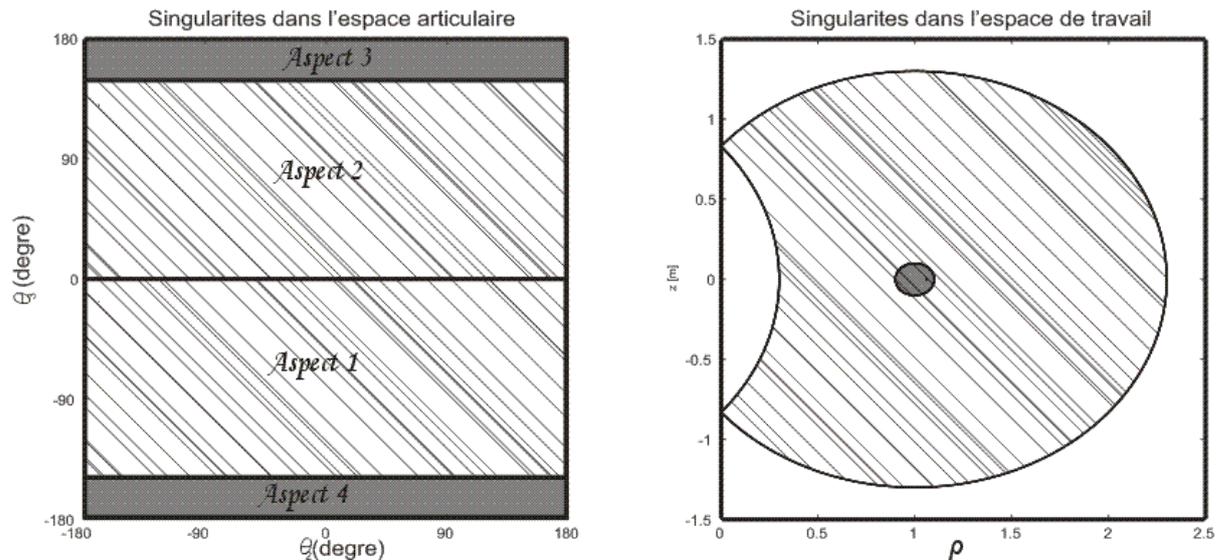


Figure 2.18 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type D5

Comme pour les manipulateurs de type D4, l'espace articulaire des manipulateurs de type D5 est divisé par quatre branches de singularités droites horizontales, en quatre aspects dont deux (Aspects 1 et 2 sur la figure 2.18) ont la totalité de l'espace de travail comme image par le MGD.

5.4.6. Type D6

Les manipulateurs de type D6 sont tels que $d_4 < d_3 < d_2$. Leur espace de travail a une cavité toroïdale et aucun noeud. Il est composé d'une région à 2 solutions au MGI, et d'une région à 0 solutions qui constitue la cavité (Figure 2.17, Type D6). Il est totalement t-parcourable.

Puisque $d_2 > d_3$ et $d_3 > d_4$, l'espace articulaire de ces manipulateurs est divisé en deux aspects juste par deux branches de singularités droites horizontales. Chacun des aspects a pour image par le MGD tout l'espace de travail.

Les manipulateurs de type D6 sont non cuspidaux, et ont juste deux aspects, par suite ces manipulateurs sont toujours binaires.

En conclusion, la majorité des manipulateurs de la famille D ne présente pas des propriétés intéressantes. Ils ont toujours, soit des cavités, soit des encombrements de singularités à l'intérieur de l'espace de travail.

5.5. FAMILLE E ($d_2 \neq 0, r_2 = 0, d_3 = 0, r_3 = 0$)

Les manipulateurs de la famille E sont définis par $r_2 = 0, d_3 = 0$ et $r_3 = 0$. La figure 2.19 nous montre un manipulateur de cette famille.

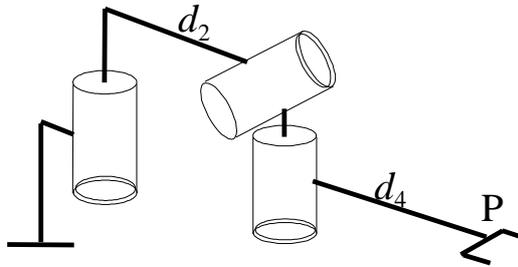


Figure 2.19 : Manipulateur de la famille E en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille E s'écrit sous une forme quadratique, ce qui confirme que ces manipulateurs ne sont pas cuspidaux, il est obtenu en substituant $r_2 = 0, d_3 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.4) :

$$P(t) = m_0 t^4 + c t^2 + m_0 \quad (2.34)$$

où m_0 et c sont fonction des paramètres de DHM (cf Annexe A)

Le déterminant de la matrice jacobienne a une forme simplifiée, il est obtenu en substituant $r_2 = 0, d_3 = 0$ et $r_3 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\text{Dét}(J) = d_4 V_3 \quad (2.35)$$

où: $V_3 = d_2 d_4 c_3 s_3$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités dans l'espace articulaire suivantes :

$$\begin{cases} \theta_3 = 0, +\pi \\ \theta_3 = \pm \pi/2 \end{cases} \quad (2.36)$$

Nous concluons alors que dans l'espace articulaire, quatre branches de singularités droites horizontales existent.

Surfaces de transition :

En substituant $r_2 = 0$, $d_3 = 0$ et $r_3 = 0$ dans les équations (E_1) , (E_2) et (E_3) de (2.13), les équations (E_1) et (E_2) s'écrivent $d_4 = 0$. Par suite, elles sont à rejeter parce qu'elles définissent un manipulateur singulier. L'équation (E_3) prend la forme suivante :

$$(E_3): d_4 = d_2 \tag{2.37}$$

Après un balayage dans l'espace des paramètres à proximité de cette surface (E_3) , nous constatons qu'elle n'est pas valide, parce qu'elle n'a aucune influence sur la topologie des singularités des manipulateurs de la famille E.

Nous constatons alors que tous les manipulateurs de la famille E ont la même topologie des singularités dans tout l'espace des paramètres (d_2, d_4) . Nous appellerons ces manipulateurs les manipulateurs de type E.

Les espaces de travail des manipulateurs de type E n'ont pas de cavités ni de nœuds. Ils sont composés d'une seule région à 4 solutions au MGI.

Leur espace articulaire est divisé en 4 aspects par cinq branches de singularités droites horizontales. Chacun des quatre aspects a pour image tout l'espace de travail. Ce qui signifie que l'espace de travail de ces manipulateurs est t^+ -parcourable.

La figure 2.20 montre l'espace de travail d'un manipulateur de type E. L'espace articulaire de ce manipulateur n'est pas présenté parce qu'il a une forme très simple.

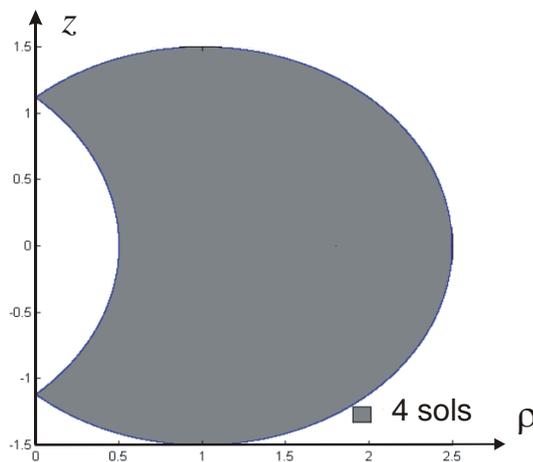


Figure 2.20 : Espace de travail d'un manipulateur de type E ayant les paramètres suivants $d_2=1$ et $d_4=1.5$.

Les manipulateurs de type E pourront être classés parmi les manipulateurs particuliers intéressants.

5.6. FAMILLE F ($d_2 = 0, r_2 \neq 0, d_3 \neq 0, r_3 \neq 0$)

Les manipulateurs de la famille F sont définis par $d_2 = 0$. La figure 2.21 nous montre un manipulateur de cette famille.

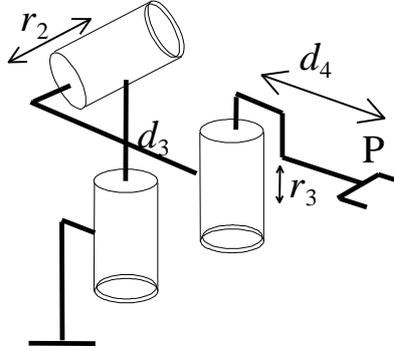


Figure 2.21 : Manipulateur de la famille F en configuration initiale, ayant $r_2 = 30, d_3 = 30$ et $d_4 = 60$

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille F s'écrit sous la même forme que le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille A. Ce qui confirme que les manipulateurs de type F ne sont pas cuspidaux.

Le déterminant de la matrice jacobienne est obtenu en substituant $d_2 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \text{Dét}(J) &= d_4 \cdot (V_1 \cdot c_2 + V_2 \cdot s_2) \\ \text{où: } \begin{cases} V_1 = -d_4 r_2 c_3^2 + d_3 d_4 s_3 c_3 - d_3 r_2 c_3 + d_3^2 s_3 \\ V_2 = -r_2 r_3 c_3 + d_3 r_3 s_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.38)$$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités suivantes dans l'espace articulaire :

$$\begin{cases} d_3 s_3 - r_2 c_3 = 0 \\ r_3 s_2 + d_3 c_2 + d_4 c_2 c_3 = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Dans l'espace articulaire, deux branches de singularités droites horizontales au maximum peuvent exister, ayant pour équations : $\theta_3 = \pm \text{Arc tan} \left(\frac{r_2}{d_3} \right)$, et une courbe de singularité qui est la solution du second polynôme de (2.39).

Surfaces de transition :

Nous étudierons, dans ce cas et dans les cas suivants, les manipulateurs ayant $r_3 \neq 0$, alors pour calculer les équations des surfaces de transition, nous utiliserons donc les équations (2.14) au lieu des équations (2.13).

Pour les manipulateurs de la famille F, en substituant $d_2 = 0$ dans les équations (Σ_1) et (Σ_2) de (2.14), et en testant la validité de chacune des surfaces obtenues, nous trouvons que seule la surface (Σ_1) est valide. Cette surface divise l'espace des paramètres en deux domaines rassemblant respectivement les manipulateurs ayant 0 et 2 nœuds dans leur espace de travail. L'équation de (Σ_1) est la suivante :

$$(\Sigma_1) : d_4 = \sqrt{d_3^2 + r_2^2} \tag{2.40}$$

Dans le cas de la famille F, quatre paramètres sont non nuls. Mais nous remarquons que l'équation de la surface de transition (Σ_1) est indépendante du paramètre r_3 . Nous pourrions donc réduire l'espace des paramètres à trois dimensions, et en normalisant les paramètres par r_2 , seuls deux paramètres subsistent d_3 et d_4 .

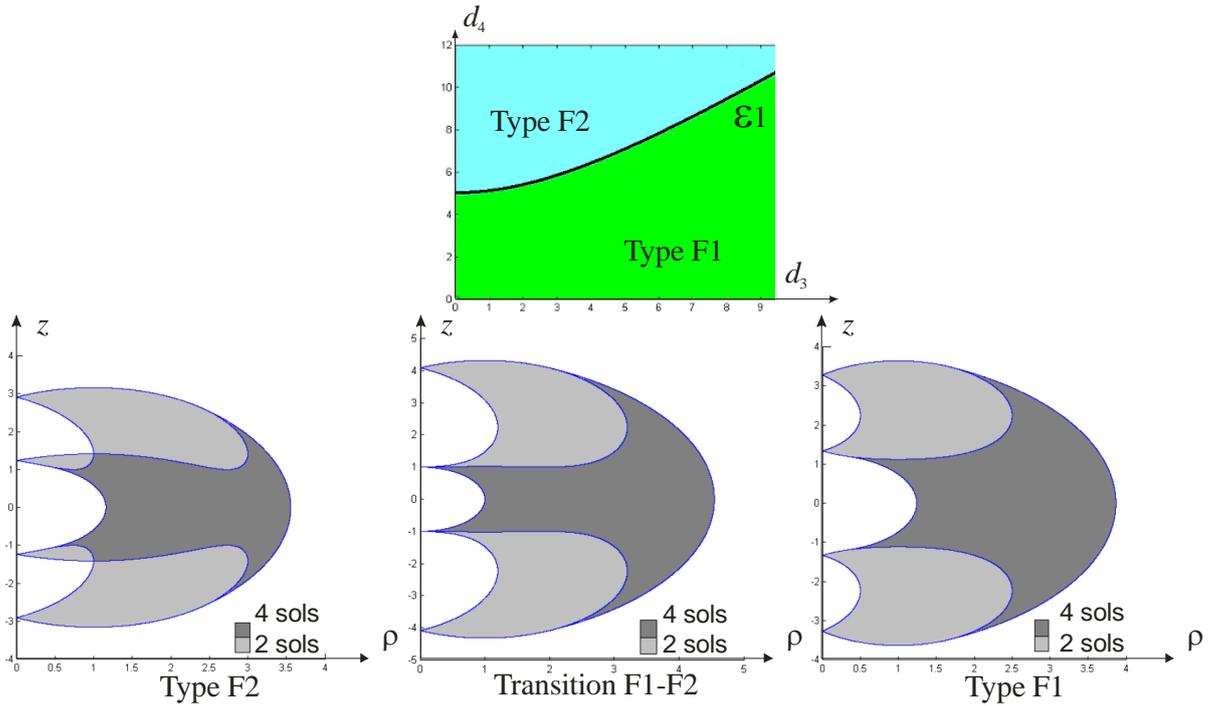


Figure 2.22 : L'espace des paramètres de la famille F et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type F1 ($r_2=1, r_3=1, d_3=2, d_4=1.5$); Transition F1-F2 ($r_2=1, r_3=1, d_3=2, d_4=2.24$); Type F2 ($r_2=1, r_3=1, d_3=1, d_4=2$).

La figure 2.22 nous montre pour $r_2 = 1$, une section de l'espace des paramètres avec les deux domaines, la courbe de transition (Σ_1) , l'espace de travail d'un manipulateur de chaque domaine, et d'un manipulateur sur chaque transition. Nous rappelons que pour chaque espace

de travail représenté, les régions à 4 solutions au MGI sont représentées en gris foncé, et celles à 2 solutions au MGI en gris clair.

Les manipulateurs de la famille F sont classés suivant deux types. Nous décrivons ci-dessous les propriétés des manipulateurs de chaque type.

5.6.1. Type F1

Les manipulateurs de type F1 sont tels que $d_4 < \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$. Leur espace de travail n'a ni noeuds ni cavités toroïdales. Il est composé d'une région à 2 solutions au MGI, et d'une région à 4 solutions.

Leur espace articulaire est divisé en quatre aspects par quatre branches de singularités, dont deux sont des droites horizontales.

La figure 2.23 montre l'espace articulaire, les quatre aspects et l'espace de travail du même manipulateur de type F1 de la figure 2.22. Les aspects 1 et 2 de l'espace articulaire ont pour image chacun tout l'espace de travail (surface grise sur la figure 2.23), et les aspects 3 et 4 ont pour image chacun la partie hachurée de l'espace de travail sur la figure 2.23. Ce qui signifie que l'espace de travail de ces manipulateurs est t-parcourable pour deux aspects de l'espace articulaire. Cette propriété est intéressante.

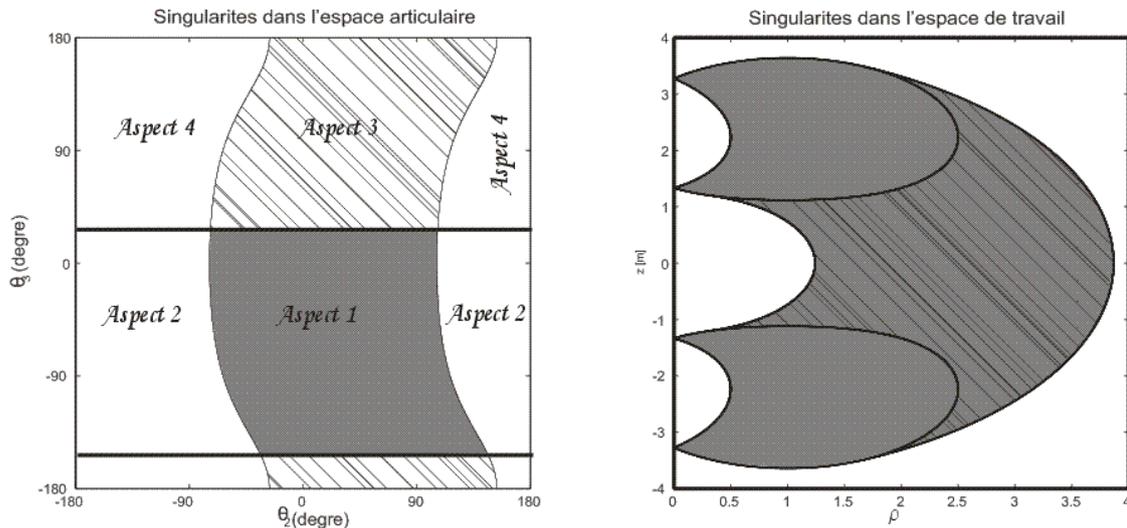


Figure 2.23 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type F1

5.6.2. Type F2

Les manipulateurs de type F2 sont tels que $d_4 > \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$. Leur espace de travail a deux noeuds et aucune cavité toroïdale. Il est composé de quatre régions à 2 solutions au MGI, et d'une région à 4 solutions (Figure 2.22, Type F2). Il n'est pas totalement t-parcourable.

Leur espace articulaire ressemble à celui des manipulateurs de type F1 est divisé en quatre aspects, par quatre branches de singularités, dont deux sont des droites horizontales.

Aucun des quatre aspects a pour image par le MGD la totalité de l'espace de travail.

5.7. FAMILLE G ($d_2 = 0, r_2 = 0, d_3 \neq 0, r_3 \neq 0$)

Les manipulateurs de la famille G sont définis par $d_2 = 0$ et $r_2 = 0$. La figure 2.24 nous montre un manipulateur de cette famille.

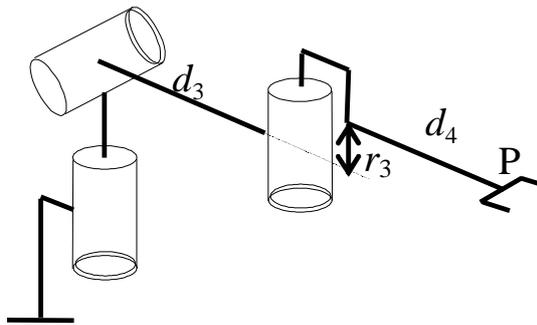


Figure 2.24 : Manipulateur de la famille G en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille G s'écrit sous la même forme que le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille B.

Le déterminant de la matrice jacobienne est obtenu en substituant $d_2 = 0$ et $r_2 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \text{Dé}t(J) &= d_4 (V_1 c_2 + V_2 s_2) \\ \text{où: } \begin{cases} V_1 = d_3 d_4 s_3 c_3 + d_3^2 s_3 \\ V_2 = d_3 r_3 s_3 \end{cases} & \end{aligned} \quad (2.41)$$

La résolution de l'équation du déterminant (2.41) n'est pas aussi simple que pour les familles précédentes. Les singularités dans l'espace articulaire sont constituées de deux

droites horizontales définies par $\theta_3 = 0, +\pi$, et des courbes dépendant des deux variables articulaires θ_2 et θ_3 .

Surfaces de transition :

En substituant $d_2 = 0$ et $r_2 = 0$ dans les équations (Σ_1) et (Σ_2) de (2.14), nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &: d_4 = d_3 \\ (\Sigma_2) &: d_3 = 0 \text{ ou } d_4 = 0 \text{ ou } r_3 = 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

La surface (Σ_2) est à rejeter parce qu'elle ne définit aucune surface à l'intérieur de l'espace des paramètres (d_3, d_4, r_3) . En testant la validité de la surface (Σ_1) , nous trouvons qu'elle n'est pas valide.

Nous constatons alors que tous les manipulateurs de la famille G ont la même topologie des singularités dans tout l'espace des paramètres (d_3, d_4, r_3) . Nous appelons ces manipulateurs les manipulateurs de type G.

L'espace de travail des manipulateurs de type G ne comporte ni cavités ni nœuds. Il est composé d'une seule région à 4 solutions au MGI.

La figure 2.25 montre l'espace de travail d'un manipulateur de type G. Leur espace articulaire est divisé en 4 aspects par cinq branches de singularités dont trois droites horizontales et deux courbes. Chacun des quatre aspects a pour image tout l'espace de travail. Ce qui signifie que l'espace de travail de ces manipulateurs est t^+ -parcourable.

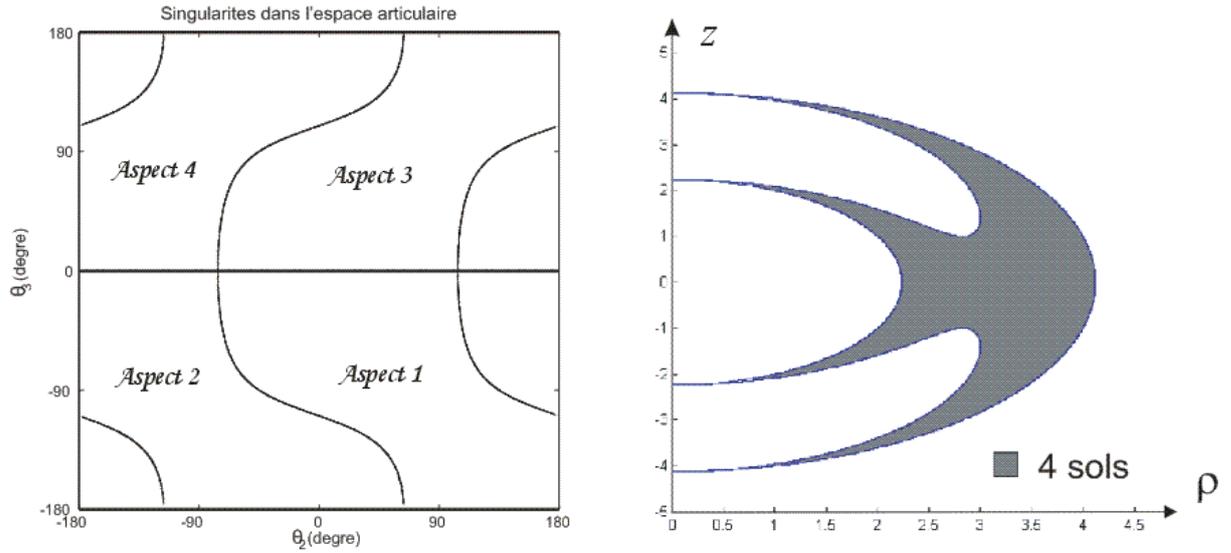


Figure 2.25 : Espace de travail d'un manipulateur de type G ayant les paramètres suivants $d_3=1, d_4=3, \text{ et } r_3=1$

5.8. FAMILLE H ($d_2=0, r_2 \neq 0, d_3=0, r_3 \neq 0$)

Les manipulateurs de la famille H sont définis par $d_2=0$ et $d_3=0$. La figure 2.26 nous montre un manipulateur de cette famille.

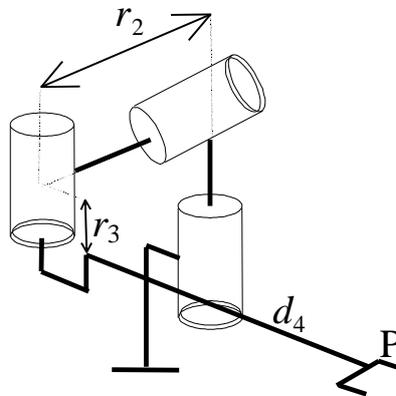


Figure 2.26 : Manipulateur de la famille H en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille H s'écrit sous la même forme que le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille C.

Le déterminant de la matrice jacobienne est obtenu en substituant $d_2=0$ et $d_3=0$ dans l'équation (2.4). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \text{Dé}t(J) &= d_4 (V_1 c_2 + V_2 s_2) \\ \text{où: } \begin{cases} V_1 = -d_4 r_2 c_3^2 \\ V_2 = -r_2 r_3 c_3 \end{cases} & \end{aligned} \quad (2.43)$$

La résolution de l'équation du déterminant (2.43) aboutit aux solutions suivantes :

$$\begin{cases} \theta_3 = \pm \pi/2 \\ \theta_2 = \text{Arc tan} \left(\left(\frac{-d_4}{r_3} \right) \cos \theta_3 \right) \pm k\pi \end{cases} \quad (2.44)$$

Les singularités dans l'espace articulaire sont constituées de deux droites horizontales pour $\theta_3 = \pm \pi/2$, et de courbes dépendant des deux variables articulaires θ_2 et θ_3 .

Surfaces de transition :

En substituant $d_2 = 0$ et $d_3 = 0$ dans les équations (Σ_1) et (Σ_2) de (2.14), nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) & : d_4 = r_2 \\ (\Sigma_2) & : d_4 = \sqrt{r_3^2 - r_2^2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

En testant la validité des deux surfaces (Σ_1) et (Σ_2) obtenues, nous trouvons qu'aucune des deux n'est valide.

Nous constatons alors que tous les manipulateurs de la famille H ont la même topologie des singularités dans tout l'espace des paramètres (r_2, r_3, d_4) . Nous appelons ces manipulateurs : manipulateurs de type H.

La figure 2.27 montre les espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type H. L'espace de travail des manipulateurs de type H n'a pas de cavités ni de nœuds. Il est composé d'une seule région à 4 solutions au MGI. Leur espace articulaire est divisé en 4 aspects par quatre branches de singularités dont deux droites horizontales et deux courbes. Chacun des quatre aspects a pour image tout l'espace de travail. Ce qui signifie que l'espace de travail de ces manipulateurs est t^+ -parcourable

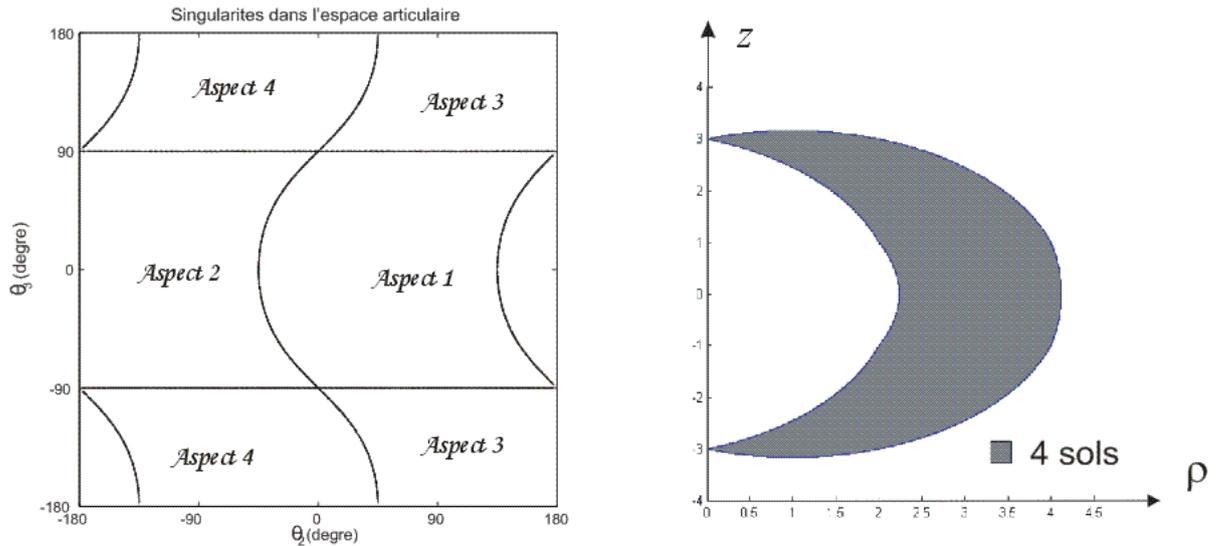


Figure 2.27 : Espace de travail d'un manipulateur de type G ayant les paramètres suivants $d_4=1$, $r_2=3$, et $r_3=1$

Les manipulateurs de type H ont des propriétés très intéressantes et pourront être classés parmi les manipulateurs particuliers les plus intéressants.

5.9. FAMILLE I ($d_2 \neq 0, r_2 = 0, d_3 \neq 0, r_3 \neq 0$)

Les manipulateurs de la famille I sont définis par $r_2 = 0$. La figure 2.28 nous montre un manipulateur de cette famille.

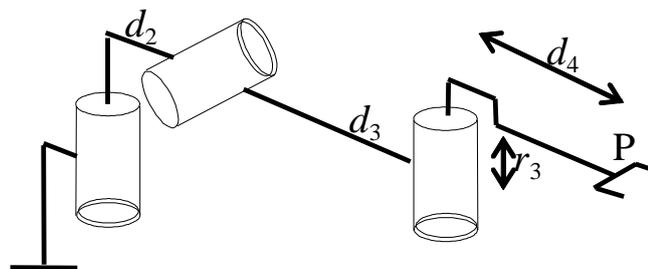


Figure 2.28 : Manipulateur de la famille I en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille I s'écrit sous la même forme que le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille D.

Le déterminant de la matrice jacobienne est obtenu en substituant $r_2 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
& \text{Dét}(J) = d_4 (V_1 c_2 + V_2 s_2 + V_3) \\
& \text{où: } \begin{cases} V_1 = d_3 d_4 s_3 c_3 + d_3^2 s_3 \\ V_2 = d_3 r_3 s_3 \\ V_3 = d_2 d_4 s_3 c_3 + d_2 d_3 s_3 \end{cases} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation du déterminant (2.46) est complexe. Les singularités dans l'espace articulaire sont constituées par deux droites horizontales pour $\theta_3 = 0, +\pi$, et des courbes dépendant des deux variables articulaires θ_2 et θ_3 .

Surfaces de transition :

En substituant $r_2 = 0$ dans les équations (Σ_1) et (Σ_2) de (2.14), nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& (\Sigma_1) : d_4 = d_3 \\
& (\Sigma_2) : d_4 = \delta \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{d_2^2 + \frac{d_2^2 r_3^2}{d_3^2 - d_2^2}} \quad (2.47)
\end{aligned}$$

En testant la validité des surfaces (Σ_1) et (Σ_2) , nous trouvons que (Σ_2) est valide et que (Σ_1) ne l'est pas.

La surface (Σ_2) dépend des quatre paramètres de DHm non nuls d_2, d_3, d_4 et r_3 . Nous normalisons par d_2 , en fixant $d_2=1$, pour réduire la dimension de l'espace des paramètres. L'équation de (Σ_2) devient :

$$(\Sigma_2) : d_4 = \delta = \sqrt{1 + \frac{1}{d_3^2 - 1}} \quad (2.48)$$

Après la normalisation par d_2 , l'espace des paramètres des manipulateurs de cette famille devient tridimensionnelle. Pour faire notre classification, nous procéderons à l'analyse de sections bidimensionnelles de l'espace des paramètres en fixant le paramètre r_3 .

Pour une valeur déterminée de r_3 , l'équation (Σ_2) définit une ou deux courbes de transition dans la section de l'espace des paramètres suivant la valeur de r_3 . Dans le cas où deux courbes de transition existent, ces deux courbes seront situées de la part et d'autre de l'asymptote $d_3=1$ (ou $= d_2$ dans le cas général) où (Σ_2) n'est pas définie. C'est ce fait qui cause l'apparition d'une deuxième courbe de transition.

En effectuant des balayages dans l'espace des paramètres nous retrouvons que l'asymptote $d_3 = d_2$ est bien une courbe de transition.

La figure 2.29 nous montre pour $d_2 = 1$ et pour $r_3 = 0.5$, une section de l'espace des paramètres avec quatre domaines, les courbes de transition (Σ_2), l'asymptote, l'espace de travail d'un manipulateur de chaque domaine, et d'un manipulateur sur chaque transition.

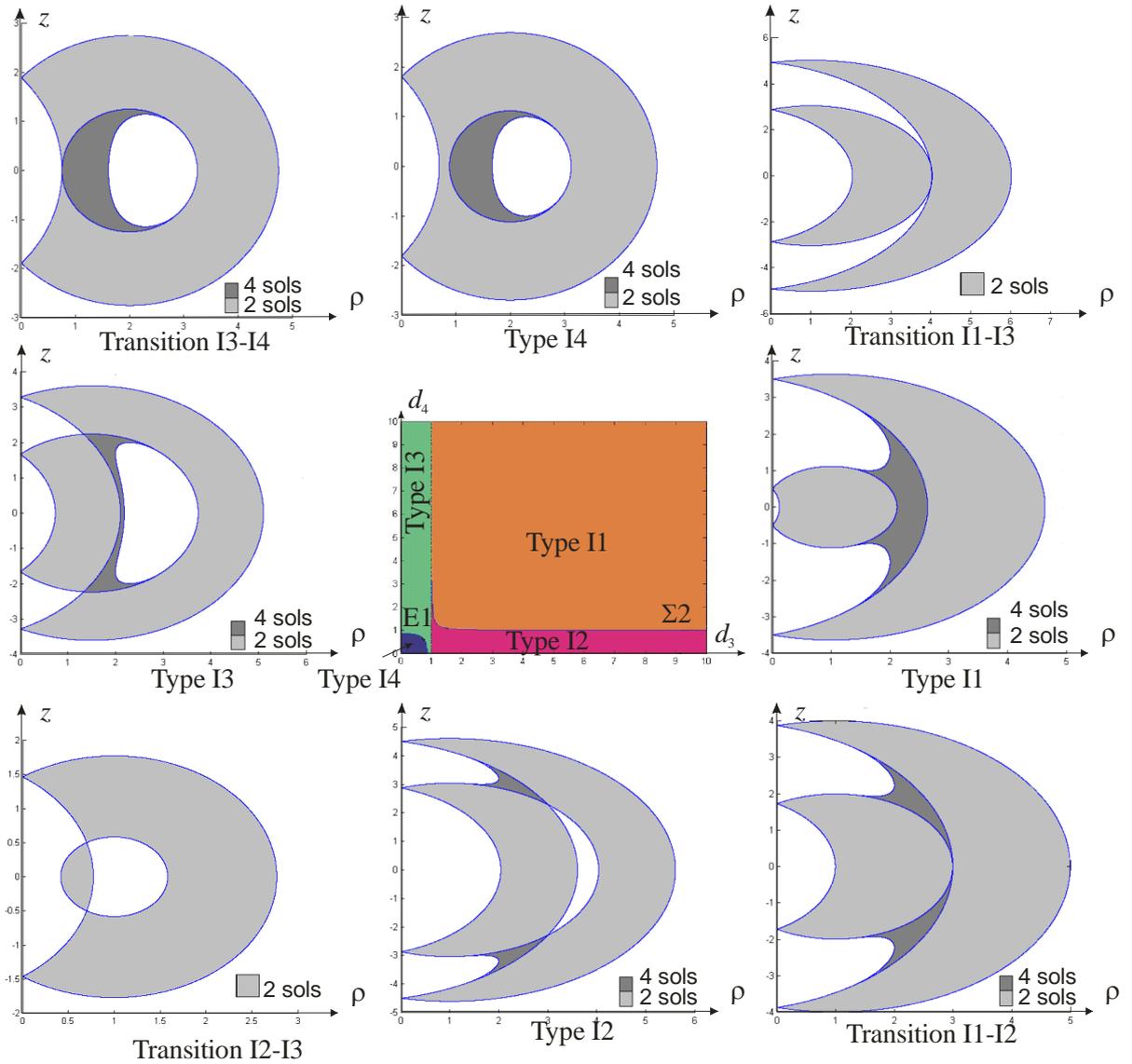


Figure 2.29 : L'espace des paramètres de la famille I pour $r_3 = 0.5$ et les espaces de travail des manipulateurs suivants : Type I1 ($d_3=2.5$, $d_4=1.5$ et $d_2=1$); Type I2 ($d_3=3$, $d_4=0.7$ et $d_2=1$); Type I3 ($d_3=0.3$, $d_4=2$ et $d_2=1$); Type I4 ($d_3=0.5$, $d_4=0.7$ et $d_2=1$); Transition I1-I2 ($d_3=3$, $d_4=1$ et $d_2=1$); Transition I1-I3 ($d_3=1$, $d_4=4$ et $d_2=1$); Transition I2-I3 ($d_3=1$, $d_4=0.7$ et $d_2=1$); Transition I3-I4 ($d_3=0.2$, $d_4=0.8$ et $d_2=1$);

Les manipulateurs de la famille I sont classés suivant quatre types. Nous décrivons ci-dessous les propriétés de ces types.

5.9.1. Type I1

Les manipulateurs de type I1 sont tels que $d_3 > d_2$ et $d_4 > \delta$. Leur espace de travail n'a ni cavités toroïdales ni nœuds. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI et d'une région à 4 solutions (Figure 2.29, Type I1). Il n'est pas totalement t-parcourable.

Leur espace articulaire est divisé en quatre aspects par quatre branches de singularités, dont deux droites horizontales et deux courbes. Aucun des quatre aspects a pour image par le MGD la totalité de l'espace de travail.

5.9.2. Type I2

Les manipulateurs de type I2 sont tels que $d_3 > d_2$ et $d_4 < \delta$. Leur espace de travail a une cavité toroïdale et deux nœuds. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI, de deux régions à 4 solutions et d'une région à 0 solutions qui constitue la cavité (Figure 2.29, Type I2). Il n'est pas totalement t-parcourable.

Leur espace articulaire est divisé en quatre aspects par quatre branches de singularités, dont deux droites horizontales et deux courbes. Aucun des quatre aspects a pour image par le MGD la totalité de l'espace de travail.

5.9.3. Type I3

Les manipulateurs de type I3 sont tels que $d_3 < d_2$ et $d_4 > \delta$. Leur espace de travail a une cavité toroïdale et deux nœuds. Il est composé de deux régions à 2 solutions au MGI et d'une région à 4 solutions et d'une région à 0 solutions qui constitue la cavité (Figure 2.29, Type I3). Il n'est pas totalement t-parcourable.

Leur espace articulaire est divisé en quatre aspects par quatre branches de singularités, dont deux droites horizontales et deux courbes. Aucun des quatre aspects a pour image par le MGD la totalité de l'espace de travail.

5.9.4. Type I4

Les manipulateurs de type I4 sont tels que $d_3 < d_2$ et $d_4 < \delta$. Leur espace de travail a une cavité toroïdale et aucun nœud. Il est composé d'une région à 2 solutions au MGI, d'une région à 4 solutions et d'une région à 0 solutions qui constitue la cavité (Figure 2.29, Type I4). Il est totalement t-parcourable.

Leur espace articulaire est divisé en quatre aspects par trois branches de singularités, dont deux droites horizontales et une courbe. Deux des quatre aspects ont pour image par le MGD la totalité de l'espace de travail.

Sur la figure 2.30, on présente les espaces articulaire et de travail du même manipulateur de type I4 présenté sur la figure 2.29 en exposant la t-parcourabilité de ce type de manipulateurs, les aspects 1 et 2 ont pour image par le MGD tout l'espace de travail (partie hachurée), et les aspects 3 et 4 juste la partie grise.

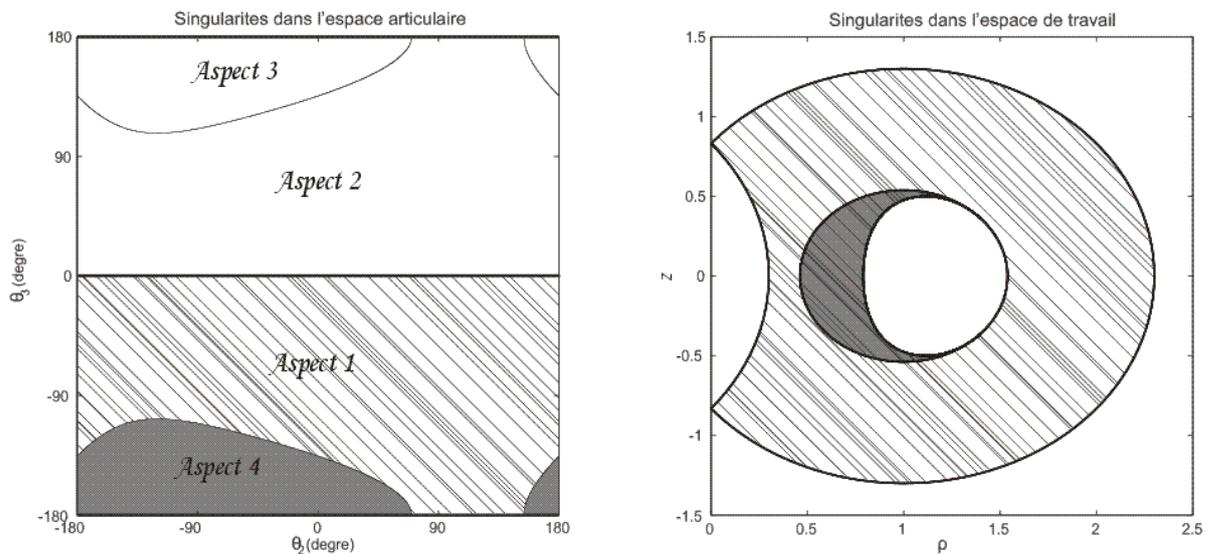


Figure 2.30 : Espaces articulaire et de travail d'un manipulateur de type I4

En conclusion, la majorité des manipulateurs de la famille I ne présente pas des propriétés intéressantes. Ils ont toujours, soit des cavités, soit des encombrements de singularités à l'intérieur de l'espace de travail.

5.10.FAMILLE J ($d_2 \neq 0, r_2 = 0, d_3 = 0, r_3 \neq 0$)

Les manipulateurs de la famille J sont définis par $r_2 = 0$ et $d_3=0$. La figure 2.31 nous montre un manipulateur de cette famille.

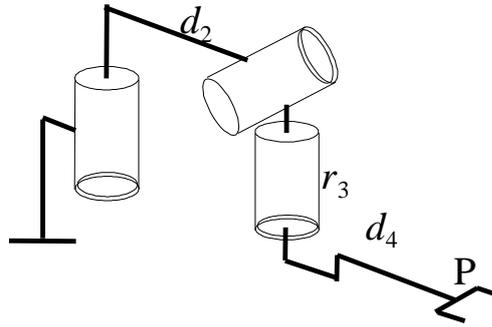


Figure 2.31 : Manipulateur de la famille J en configuration initiale

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille J s'écrit sous la même forme que le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille E.

Le déterminant de la matrice jacobienne est obtenu en substituant $r_2 = 0$ et $d_3 = 0$ dans l'équation (2.3). Il s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \text{Dét}(J) &= d_4 V_3 \\ \text{où: } V_3 &= d_2 d_4 s_3 c_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

La résolution de l'équation du déterminant donne les équations des singularités suivantes dans l'espace articulaire :

$$\begin{cases} \theta_3 = 0, +\pi \\ \theta_3 = \pm \pi/2 \end{cases} \quad (2.50)$$

Nous concluons alors que dans l'espace articulaire, quatre branches de singularités droites horizontales existent.

Surfaces de transition :

En substituant $r_2 = 0$ et $d_3 = 0$ dans les équations (Σ_1) et (Σ_2) de (2.14), et en testant la validité de chacune des surfaces obtenues, nous trouvons qu'aucune des surfaces n'est valide.

Nous constatons alors que tous les manipulateurs de la famille J ont la même topologie des singularités dans tout l'espace des paramètres (d_2, r_3, d_4) . Nous appellerons ces manipulateurs: manipulateurs de type J.

L'espace de travail des manipulateurs de type J a une cavité toroïdale et aucun nœud. Il est composé d'une seule région à 4 solutions au MGI et d'une région à 0 solutions qui constitue la cavité.

Leur espace articulaire est divisé en quatre aspects par quatre branches de singularités droites horizontales. Leurs quatre aspects ont chacun pour image par le MGD la totalité de l'espace de travail. L'espace de travail est donc t^+ -parcourable.

La figure 2.32 montre l'espace de travail d'un manipulateur de type J ayant les paramètres de DHm $d_2=1$, $d_4=2$, et $r_3=1$. L'espace articulaire n'est pas représenté parce qu'il a une forme très simple.

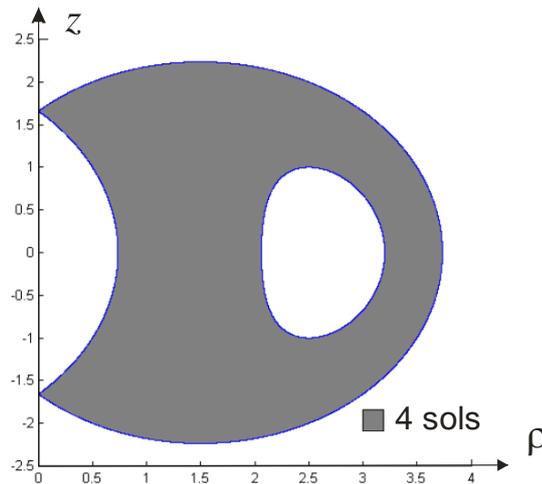


Figure 2.32 : Espace de travail d'un manipulateur de type J

6. CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre était d'étudier et de classier les manipulateurs sériels à trois articulations rotoïdes et à axes orthogonaux ayant des architectures simplifiées.

Après avoir présenté ces manipulateurs et leurs paramètres de DHm, nous avons rappelé la classification suivant la topologie des singularités de deux familles de ces manipulateurs ayant des architectures plus ou moins complexes [Baili 04]. La topologie des singularités était définie par le nombre de points cusp et de nœuds.

Notre contribution a été de classier les manipulateurs 3R orthogonaux simplifiés suivant la topologie de leurs singularités qui est définie seulement par le nombre de points nœuds, vu que ces manipulateurs sont tous non cuspidaux. Nous avons divisé tout d'abord ces manipulateurs simplifiés suivant dix familles séparément selon leurs paramètres de DHm nuls. Ensuite, nous avons étudié chacune des familles. Pour chaque famille, nous avons calculé, dans l'espace des paramètres, les équations des courbes de transition entre les domaines où les manipulateurs ont un nombre de nœuds différent. Nous avons classifié les

manipulateurs de chaque famille suivant leur appartenance aux différents domaines de l'espace des paramètres par suite suivant le nombre de nœuds.

Vingt-deux types de manipulateurs différents ont été répertoriés. Les manipulateurs de chaque type ont la même topologie des singularités et par suite les mêmes propriétés cinématiques globales dans l'espace de travail. Pour chaque type, les propriétés suivantes ont été étudiées : nombre de nœuds, existence de cavités, nombres de zones à 2 et à 4 solutions, t-parcourabilité. Plusieurs types de manipulateurs ont présenté des propriétés intéressantes **[Zein 06a]**.

Notre étude est exhaustive, elle présente un outil d'aide à la conception des manipulateurs sériels.

Dans le prochain chapitre, nous compléterons notre étude par une analyse quantitative basée sur quelques critères de performances. Parmi ces critères de performances, on étudiera la compacité de l'espace de travail et le conditionnement. Nous comparerons les différents types de manipulateurs suivant ces critères pour choisir les manipulateurs les plus performants.

CHAPITRE 3

ANALYSE ET COMPARAISON DES PERFORMANCES DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX

1. INTRODUCTION

La classification des topologies d'espace de travail pour les manipulateurs orthogonaux est un outil pour l'ingénieur dans sa recherche de manipulateurs innovants. Le chapitre précédent a mis en évidence l'existence de vingt-deux de types de manipulateurs 3R orthogonaux qui ont des propriétés différentes, les uns sont défectueux et les autres sont intéressants.

L'objectif de ce chapitre est de comparer les différents types de manipulateurs trouvés, et de mettre en évidence les meilleurs et les plus performants de ces types.

Les types de manipulateurs seront comparés premièrement suivant les critères suivants : le volume de l'espace de travail, le degré d'accessibilité, la parcourabilité, l'existence de cavités et le conditionnement. Deuxièmement, nous effectuerons une comparaison suivant des critères de performances locales. Un nouvel indice de performance sera introduit : l'espace de travail dextre régulier.

2. COMPARAISON PRELIMINAIRE DES TYPES DE MANIPULATEURS

Dans le chapitre précédent, les dix familles de manipulateurs 3R orthogonaux ayant des simplifications géométriques ont été classifiées suivant la topologie de l'espace de travail. Vingt-deux types de manipulateurs différents ont été trouvés et analysés. Pour les manipulateurs d'un même type, les propriétés cinématiques suivantes sont les mêmes : (i) nombre de noeuds (ii) nombre de cavités (iii) nombre de zones à 2 solutions et à 4 solutions (iv) t-parcourabilité et t^+ -parcourabilité de l'espace de travail.

Dans ce paragraphe, nous comparons les différents types de manipulateurs suivant leurs propriétés cinématiques qu'on vient de citer. Nous les classons par ordre de performance, les types de manipulateurs ayant des propriétés défectueuses (cavités, noeuds) seront classés parmi les moins performants, et ceux ayant un espace de travail totalement t^+ -parcourable et dépourvu de cavités seront parmi les plus performants. Nous dressons notre classement dans le tableau suivant où nous citons les vingt deux types de manipulateurs, les conditions sur leurs paramètres de DHm, leurs propriétés cinématiques. Les types de manipulateurs sont cités dans le tableau par ordre de leurs performances.

Type	Conditions DHm	Cavité	Points Noeud	Zone de l'espace de travail à 4 solutions	Espace de travail t ₋ parcourable	Espace de travail t ⁺ -parcourable
B1	$d_2=0, r_2=0, r_3=0$ $d_3>d_4$	0	0	Tout l'espace	Oui	Oui
C	$d_2=0, d_3=0, r_3=0$	0	0	Tout l'espace	Oui	Oui
E	$d_3=0, r_2=0, r_3=0$	0	0	Tout l'espace	Oui	Oui
G	$d_2=0, r_2=0$	0	0	Tout l'espace	Oui	Oui
H	$d_2=0, d_3=0$	0	0	Tout l'espace	Oui	Oui
A1	$d_2=0, r_3=0, d_4<d_3$	0	0		Oui	Non
D5	$r_2=0, r_3=0, d_3<d_4<d_2$	0	0		Oui	Non
F1	$d_2=0,$ $d_4 < \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$	0	0		Oui	Non
D2	$r_2=0, r_3=0, d_2<d_4<d_3$	0	0		Non	Non
I1	$r_2=0,$ $d_3 > d_2$ et $d_4 > \delta$	0	0		Non	Non
B2	$d_2=0, r_2=0, r_3=0,$ $d_3<d_4$	0	1	Tout l'espace	Non	Non
D3	$r_2=0, r_3=0, d_2<d_3<d_4$	0	1		Non	Non
A2	$d_2=0, r_3=0,$ $d_3 < d_4 < \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$	0	2		Oui	Non
D4	$r_2=0, r_3=0,$ $d_3<d_2<d_4$	0	2		Non	Non
F2	$d_2=0,$ $d_4 > \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$	0	2		Non	Non
A3	$d_2=0, r_3=0,$ $d_4 > \sqrt{d_3^2 + r_2^2}$	0	4		Oui	Non
D6	$r_2=0, r_3=0, d_4<d_3<d_2$	1	0	Nulle	Oui	Oui
I3	$r_2=0,$ $d_3 < d_2$ et $d_4 > \delta$	1	0		Oui	Non
J	$r_2=0$ et $d_3=0$	1	0	Tout l'espace	Oui	Oui
D1	$r_2=0, r_3=0, d_4>d_2>d_3$	1	2		Non	Non
I2	$r_2=0,$ $d_3 > d_2$ et $d_4 < \delta$	1	2		Non	Non
I4	$r_2=0$	1	2		Oui	Non

Tableau 3.1 : Les types de manipulateurs et leurs propriétés cinématiques

D'après le tableau 3.1, nous voyons que certains types de manipulateurs ont des propriétés cinématiques meilleures et beaucoup plus intéressantes que celles des autres. Cinq types de manipulateurs, notamment les types B1, C, E, G et H, se démarquent des autres types par leur espace de travail t⁺-parcourable dépourvu de cavités. D'autre part, les types de manipulateurs A3, D1, D6, I2, I3, I4 et J occupent les dernières classes du tableau 3.1 à cause

de leurs propriétés cinématiques peu intéressantes, ces types de manipulateurs devront être exclus lors de la conception de manipulateurs.

Nous concluons que les meilleurs types de manipulateurs 3R orthogonaux ayant des simplifications géométriques sont les cinq types B1, C, E, G et H. La figure 3.1 nous montre l'espace de travail d'un manipulateur de chacun des cinq types. Ces types sont des candidats très intéressants à la conception de géométries de manipulateurs alternatives.

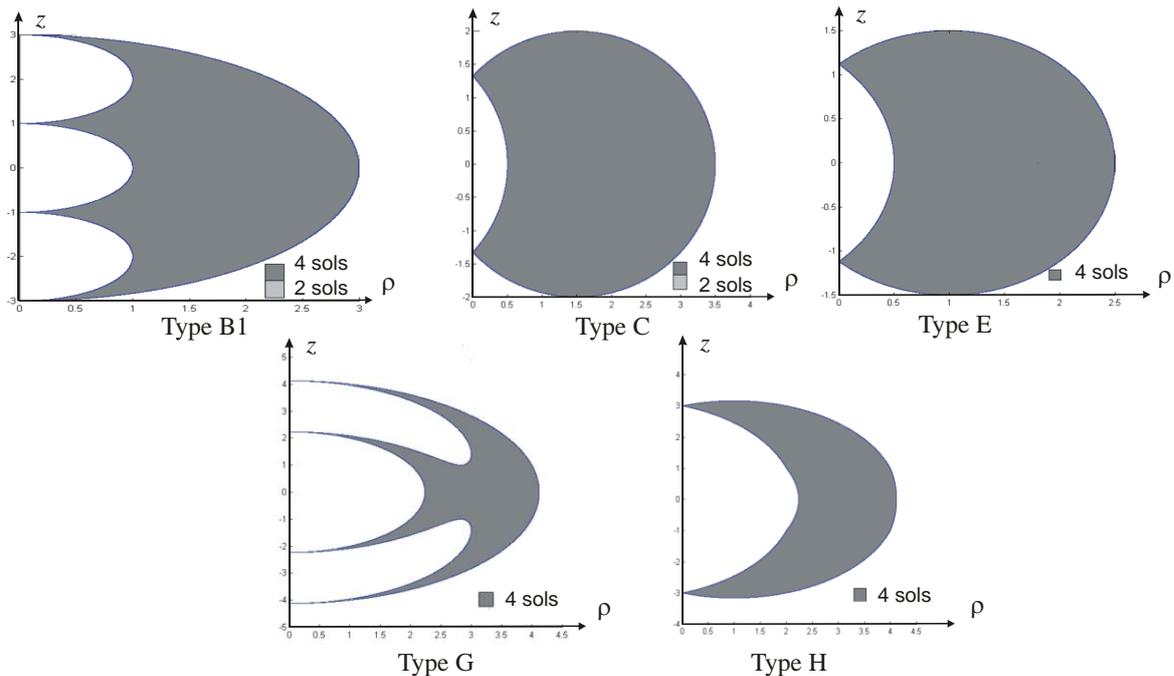


Figure 3.1 : Les espaces de travail t+-parcourables des cinq meilleurs types de manipulateurs.

Nous précisons que les formes des espaces de travail exposés sur la figure 3.1 peuvent être optimisées pour chaque type de manipulateurs en faisant varier les paramètres DHm.

3. ANALYSE ET COMPARAISON DES MANIPULATEURS SUIVANT DES CRITERES DE PERFORMANCES LOCALES

La topologie de l'espace de travail est le critère de comparaison le plus important entre manipulateurs. Dans le paragraphe précédent, la comparaison entre les différents types de manipulateurs était basée sur la topologie de l'espace de travail qui constitue un outil d'analyse globale et qui rassemble les analyses globales d'accessibilité et de parcourabilité.

D'autres critères de comparaison, comme la compacité de l'espace de travail ou le conditionnement n'ont pas été pris en compte. Dans ce paragraphe, pour compléter notre

étude, nous prenons en compte ces deux critères supplémentaires. Dans les paragraphes suivants, nous rappelons quelques outils permettant l'évaluation des performances locales des manipulateurs, nous intégrons un nouvel index de performance, et nous l'utilisons pour l'analyse des manipulateurs d'un même type, et pour la comparaison des cinq meilleurs types de manipulateurs mis en évidence dans le paragraphe précédent.

3.1. OUTILS D'ANALYSE DES PERFORMANCES LOCALES

Dans ce paragraphe, nous rappelons la notion de dextérité et nous exposons les différentes façons de la mesurer.

La dextérité peut être définie comme « l'agilité de la main ». C'est l'aptitude de l'organe terminal du manipulateur à effectuer « facilement » des petits déplacements autour du point de travail considéré. La dextérité est liée à une configuration articulaire et fait intervenir la matrice jacobienne. Cette notion est étroitement liée au rapport entre les vitesses articulaires et les vitesses opérationnelles. La dextérité est utile pour mesurer la proximité d'une configuration singulière. La dextérité peut être mesurée de quatre manières différentes [Angeles 92] que l'on va rappeler dans les paragraphes suivants :

3.1.1. Manipulabilité

Ce concept a été introduit par Yoshikawa en 1985 [Yoshikawa 85]. C'est un moyen d'évaluer « la facilité de changer de manière arbitraire la position et l'orientation de l'organe terminal ». Il définit pour cela deux outils (i) l'ellipsoïde des vitesses opérationnelles et (ii) l'indice de manipulabilité.

L'ellipsoïde des vitesses opérationnelles est défini par l'inéquation suivante :

$$\dot{\mathbf{X}}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{X}} \leq 1 \quad (3.1)$$

où $\dot{\mathbf{X}}$ définit la vitesse opérationnelle. Les axes principaux de l'ellipsoïde sont les vecteurs propres de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ et les longueurs de ses demi-axes sont les valeurs singulières σ_i de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ c'est-à-dire les racines carrées des valeurs propres λ_i de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$.

L'indice de manipulabilité est défini par l'équation (3.2).

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (3.2)$$

Cet indice est relatif au volume de l'ellipsoïde des vitesses et peut être calculé comme le produit des valeurs singulières de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. Cet indice constitue une mesure de l'aptitude de l'effecteur à se déplacer à partir d'un point donné et pour une configuration articulaire donnée. Par définition, il est nul sur une configuration singulière. Notons qu'une valeur « correcte » de cet indice peut traduire une forte disproportion entre les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde des vitesses.

[Singh 92] propose une méthode permettant d'obtenir le volume de l'ellipsoïde des vitesses pour les manipulateurs non redondants. Cette méthode est basée sur une approche de probabilité. Elle permet aussi de calculer le volume de l'ellipsoïde des forces et les limites de l'espace de travail. Les résultats sont obtenus sans aucun calcul direct de singularités ou du MGI.

3.1.2. Plus petite valeur singulière

Une autre méthode de mesure de la dextérité d'un manipulateur est la détermination de la plus petite valeur singulière de la matrice jacobienne \mathbf{J} [Klein 87]. On a vu que l'indice de manipulabilité constitue une mesure moyenne de l'aptitude d'un manipulateur à déplacer son effecteur dans toutes les directions autour d'un point donné. La plus petite valeur singulière est néanmoins plus fiable et mieux recommandée lorsque l'effecteur évolue à proximité d'une singularité. En effet, elle évalue l'aptitude du déplacement de l'effecteur dans la direction la plus défavorable (le plus petit axe de l'ellipsoïde des vitesses).

3.1.3. Indice d'isotropie

L'indice d'isotropie k est défini comme l'indice de conditionnement de la matrice jacobienne \mathbf{J} , qui peut s'exprimer comme le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de \mathbf{J} [Salisbury 82] :

$$k = \sigma_{\max} / \sigma_{\min} \quad (3.3)$$

Cette définition est valable uniquement lorsque les éléments de la matrice jacobienne \mathbf{J} ont la même dimension. Dans le cas où la tâche est définie en position et en orientation, il est possible d'homogénéiser les dimensions en divisant les lignes de \mathbf{J} correspondant aux positions par « la longueur caractéristique » du manipulateur étudié [Angeles 97]. On obtient alors une matrice sans dimensions. La longueur caractéristique correspond au minimum du conditionnement de la nouvelle matrice jacobienne sans dimensions. En robotique, l'indice d'isotropie traduit la précision de suivi des vitesses opérationnelles de consigne à partir des

vitesse articulaires calculées à l'aide de l'inverse de **J**. Cet indice évolue dans l'intervalle $[1, +\infty]$. Lorsque sa valeur est grande, ceci se traduit par un mauvais conditionnement. Dans ce cas, les vitesses opérationnelles de l'effecteur du manipulateur sont très sensibles aux erreurs des vitesses articulaires. La valeur 1 de cet indice traduit une isotropie : l'ellipsoïde des vitesses prend la forme d'une sphère. Physiquement, lorsque le manipulateur est dans une position isotrope, l'effecteur aura la même facilité pour se déplacer dans toutes les directions.

3.1.4. Angle de pression

À proximité des configurations singulières, les mécanismes parallèles perdent leur rigidité et par conséquent la qualité de la transmission de mouvement (de force). L'angle de pression a été introduit comme indicateur de cette qualité de transmission. Nous citons les travaux de Sutherland sur les mécanismes spatiaux [**Sutherland 73**].

L'angle de pression est défini comme étant un angle entre les vecteurs de la force et de la vitesse d'un point auquel la force est appliquée. Ainsi, pour une meilleure transmission de force, il est souhaitable d'avoir l'angle de pression près de zéro. On connaît aussi l'angle de transmission, qui est égal à l'angle de pression moins 90.

3.2. INDICES DE PERFORMANCES RELATIF A L'ESPACE DE TRAVAIL

Un des critères d'évaluation des différentes caractéristiques globales de l'espace de travail est la mesure du volume de l'espace des positions accessibles. Or, on a vu que l'espace de travail d'un manipulateur n'est en général pas compact et peut comporter des cavités toroïdales, des trous et des cavités centrales. Dans [**Wenger 89**], une mesure de la proportion du vide dans l'espace de travail est donnée par la valeur :

$$V = 1 - \frac{\text{Volume de (trous + cavités toroïdales + cavités cantrales)}}{\text{Volume de l'espace de travail}}$$

Ce paramètre ne renseigne pas sur les répartitions des trous, des cavités centrales et toroïdales dans l'espace de travail.

Pour les manipulateurs 3R, un autre paramètre d'évaluation de la taille de l'espace de travail peut être utilisé. Il s'agit de la portée du manipulateur qui représente la position la plus éloignée qu'un manipulateur 3R peut atteindre [**Wenger 89**].

Un autre critère de performance introduit dans [**Baili 04**] est la proportion de la région à 2 solutions, ou à 4 solutions ou de l'espace de travail par rapport à une sphère englobant

l'espace de travail. Ce critère ne sera pas utile dans notre étude car les espaces de travail des cinq meilleurs types de manipulateurs sont formés d'une seule région à 4 solutions.

3.3. NOUVEL INDICE DE PERFORMANCE DES MANIPULATEURS

Nous introduisons dans ce paragraphe un nouvel indice de performance pour les manipulateurs 3R. Cet indice est basé sur la notion d'espace de travail dextre régulier. Cette notion, définie par Majou [Majou 04] pour les manipulateurs parallèles à trois translations, est adaptée ici pour les manipulateurs sériels.

Nous exposons dans ce paragraphe la définition de l'espace de travail dextre régulier et une façon de le déterminer dans le cas des manipulateurs 3R sériels, puis nous introduisons le nouvel indice de performance de ces manipulateurs, et nous comparons les manipulateurs des cinq meilleurs types suivant cet indice.

3.3.1. Espace de travail Dextre Régulier : Définition et détermination

3.3.1.1. Définition

L'espace de travail dextre régulier (ou EDR) est une portion de l'espace de travail exempt de singularités, ayant une forme régulière (cube, sphère...) à l'intérieur duquel un indice de performance locale donné est borné.

La notion d'EDR pour évaluer des manipulateurs nous semble très réaliste vis-à-vis des problèmes posés par ceux-ci aux utilisateurs. L'EDR est un volume où les performances cinéostatiques – évaluées avec un indice choisi selon les tâches à accomplir – sont garanties. De plus avec sa forme régulière, il est plus simple à visualiser que la totalité de l'espace de travail, ce qui facilite le placement intuitif de trajectoires.

L'EDR est très utile lorsqu'il s'agit de manipulateurs ayant des espaces de travail très encombrés par les singularités et ayant des formes trop complexes et irrégulières.

Pour déterminer l'EDR d'un manipulateur, il faut connaître :

- i. sa forme, notée F , dont le choix dépend de l'emplacement et du type du manipulateur et des tâches à accomplir ;
- ii. l'indice de performance locale ψ , dont le choix dépend de la nature des tâches à accomplir ;

- iii. les limites imposées sur l'indice de performance ψ , dont le choix dépend des performances minimales requises.

L'EDR est définie par l'équation suivante :

$$W_{EDR} = \{ p \in W \mid \psi_{\min} \leq \psi(p) \leq \psi_{\max} \mid W_{EDR} \text{ de forme } F \} \quad (3.4)$$

Où W est l'espace de travail.

L'EDR alors est une notion qui prend en compte les deux types d'indices introduits dans les deux paragraphes précédents, un indice de performance locale et un indice de performance relatif à la compacité de l'espace de travail.

Nous appliquons, dans ce qui suit, la notion d'EDR sur les manipulateurs 3R orthogonaux qu'on a étudiés. Nous proposons une approche pour déterminer l'EDR dans l'espace de travail d'un manipulateur 3R orthogonal, et nous donnons un exemple pour illustrer clairement l'approche.

3.3.1.2. Détermination

Pour déterminer l'EDR d'un manipulateur 3R orthogonal, nous commençons par fixer la forme F de cet espace, l'indice de performance locale ψ et les bornes de cet indice.

Pour la forme de l'EDR, puisque l'espace de travail des manipulateurs 3R orthogonaux étudiés a la forme d'un toroïde ayant pour section la section génératrice des singularités dans le plan ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, Z), nous définissons l'EDR comme étant aussi toroïdale mais avec une section de forme régulière. Nous choisissons une forme carrée pour la section de l'EDR mais d'autres choix sont possibles (forme circulaire, rectangulaire..).

L'indice de performance locale ψ que nous choisissons est le conditionnement. Nous exposons la méthode de calcul du conditionnement :

Conditionnement :

Le calcul du conditionnement de la matrice jacobienne repose sur la connaissance de la position articulaire ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) et de la position de l'effecteur (x, y, z).

On calculera plutôt l'inverse du conditionnement de la matrice jacobienne cinématique de façon à ce que cet indice évolue entre 0 et 1. On le notera K^{-1} .

Pour évaluer le conditionnement dans l'espace de travail, on peut calculer deux indices issus de K^{-1} : K^{-1} maximum ou K^{-1} moyen (maximum ou moyenne des conditionnements sur

chacune des images dans l'espace articulaire par le MGI de la configuration en question dans l'espace de travail). Le premier indice (K^{-1} maximum) est un indice local qui permet de trouver un ensemble de manipulateurs possédant une configuration isotrope [Angeles 97] alors que le second est une mesure globale (K^{-1} moyen).

Dans le cas des cinq types de manipulateurs étudiés, les deux indices K^{-1} maximum et K^{-1} moyen sont égaux. En effet, pour ces cas la valeur du conditionnement K^{-1} est la même pour toutes les configurations articulaires images par le MGI d'une seule configuration dans l'espace de travail. Cela est dû à l'absence de singularités internes et à la t^+ -parcourabilité dans l'espace de travail des manipulateurs des cinq types.

Nous exposons maintenant notre démarche pour déterminer l'EDR d'un manipulateur 3R.orthogonal. Cette démarche se compose de deux processus. Le premier consiste à calculer l'espace de travail régulier (ou ER, que nous définissons ci-après) qui ne prend pas en compte l'indice de performance locale, le deuxième processus consiste à calculer l'EDR d'après l'ER.

Approche de détermination de l'espace de travail dextre régulier EDR :

A. Calcul de l'Espace Régulier

On définit l'espace de travail régulier comme étant la plus grande portion de l'espace de travail ayant une forme particulière.

Déterminer l'ER d'un manipulateur 3R consiste à trouver le plus grand carré exempt de singularités dans une section génératrice de l'espace de travail. Nous illustrons notre approche en l'appliquant sur un manipulateur orthogonal de type C ayant les paramètres non nuls suivants : $d_4=1.5$ et $r_2=1$. La figure 3.2 nous montre la section génératrice de l'espace de travail de ce manipulateur.

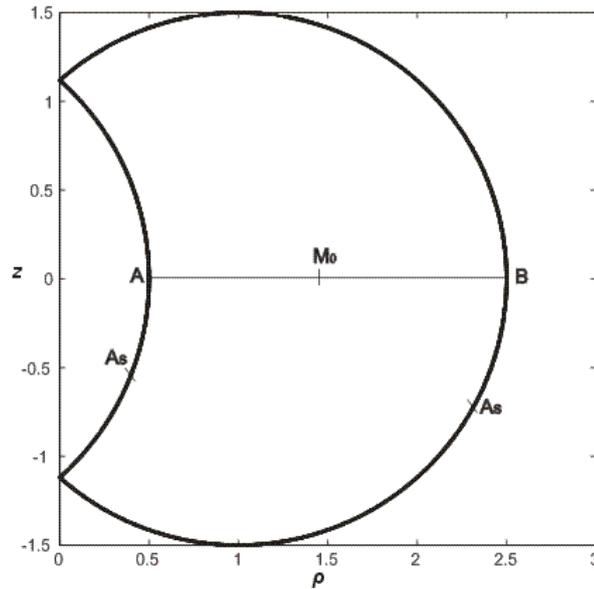


Figure 3.2 : Espace de travail d'un manipulateur 3R orthogonal de type C

Étape 1 : Nous calculons les coordonnées du point $M_0(\rho_0, 0)$ milieu du segment $[AB]$ de l'axe $z=0$, où A et B sont les points singuliers de l'axe $z=0$. Le point M_0 sera le centre initial du carré exempt de singularités (ER). Le choix du centre de l'ER sur l'axe $z=0$ est justifié par la symétrie de l'espace de travail par rapport à cet axe (cette symétrie est due à l'orthogonalité des axes des manipulateurs 3R étudiés).

Étape 2 : Nous calculons le plus grand carré de centre $M_0(\rho_0, 0)$ exempt de singularités dans la section génératrice de l'espace de travail.

Pour ce faire, nous calculons la distance de Chebyshev, ou la distance de norme « sup », entre le point centre M_0 et chaque point singulier $A_s(\rho_s, z_s)$, où les points A_s représentent tous les points singuliers de la section de l'espace de travail (Figure 3.2).

$$d = \max(|\rho_0 - \rho_s|, |z_0 - z_s|) \quad (3.5)$$

Nous conservons la distance minimale d_{\min} obtenue du calcul. Et ce parce que nous cherchions la distance entre le point centre M_0 et le point singulier A_s le plus proche.

L'arête du carré initial sera le double de la distance d_{\min} .

Nous signalons que le choix de la norme de la distance à utiliser dans cette étape dépend de la forme de l'ER choisie. Par exemple, si la forme de l'ER était circulaire, la distance à utiliser serait la distance euclidienne (3.6).

$$d_{euc} = \sqrt{(\rho_0 - \rho_s)^2 + (z_0 - z_s)^2} \quad (3.6)$$

Étape 3 : Le choix de la position du centre M_0 de l'ER, comme milieu du segment $[AB]$, ne permet pas de définir le carré exempt de singularités le plus large de la section de l'espace de travail.

Pour faire face à ce problème, la position du centre M_0 de l'ER doit être optimisée, ce que nous faisons à l'aide de l'algorithme d'optimisation de HOOKE et JEEVES [Hooke 61], pour aboutir, à la fin, à la surface du carré la plus grande, qui sera l'ER et dont le centre est le point optimisé M et l'arête est :

$$a = 2 \times d_{\min} \quad (3.7)$$

La figure 3.3 montre la section de l'ER (en hachuré) du manipulateur 3R orthogonal de type C étudié.

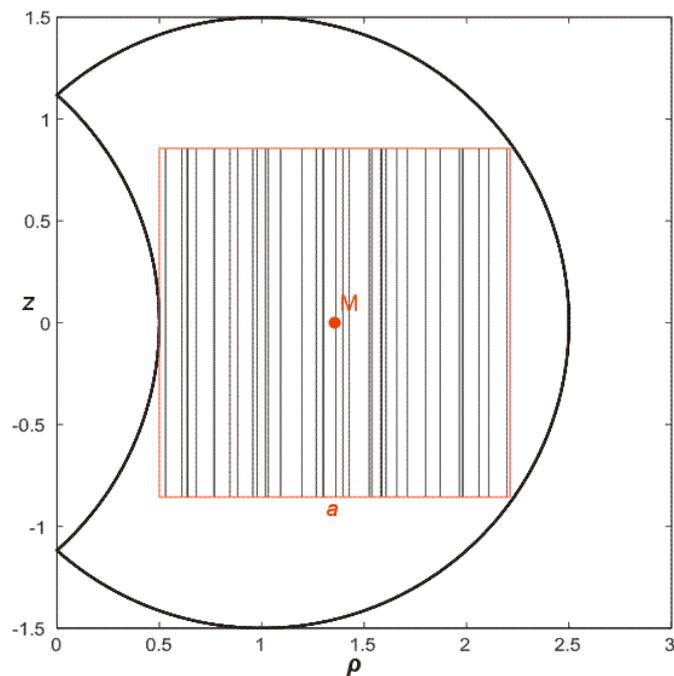


Figure 3.3 : Espace de travail Régulier du manipulateur 3R orthogonal du type C

Pour obtenir la totalité de l'ER, il suffit de faire tourner sa section carrée de 360° autour de l'axe z .

B. Calcul de l'EDR

Pour calculer l'EDR, nous continuons notre approche en prenant en compte maintenant le conditionnement dans l'espace de travail. Nous partons de la dernière étape de calcul de l'ER, nous cherchons, dans la section carrée de l'ER, le plus grand carré où toutes les configurations ont un conditionnement supérieur à une valeur minimale déterminée.

Étape 4 : Nous fixons une valeur minimale K_{\min}^{-1} pour le conditionnement K^{-1} . Dans l'exemple qu'on donne sur le manipulateur 3R orthogonal de type C, nous fixons K_{\min}^{-1} à 0.25.

Étape 5 : Nous effectuons un balayage dans la section carrée de l'ER obtenue dans l'étape 3. Nous calculons le conditionnement K_{scan}^{-1} sur chaque point de l'ER balayé.

Pour ce faire, nous calculons les images dans l'espace articulaire par le modèle géométrique inverse de chaque point balayé de l'ER, puis nous calculons le conditionnement sur chacune des images calculées, et nous choisissons la valeur maximale ou moyenne, dépendant de l'objectif cherché. Comme il s'agit d'un manipulateur 3R orthogonal des cinq meilleurs types, le conditionnement sur chacune des images dans l'espace articulaire est le même. Par suite il suffit de calculer le conditionnement K_{scan}^{-1} sur une seule image du point balayé.

Étape 6 : Nous partons d'un carré ayant pour centre le même point M calculé dans l'étape 3 centre de l'ER, et pour arête une valeur infinitésimale a_ε , où a_ε est de l'ordre de grandeur du pas de balayage utilisé dans l'étape précédente. Nous testons si les points balayés dans l'étape 3 et appartenant à ce même carré ont un conditionnement supérieur à la valeur fixée du conditionnement minimal K_{\min}^{-1} , si le test est positif nous augmentons la valeur de l'arête du carré de départ a_ε et nous répétons le test à nouveau. Nous continuons à augmenter la valeur de a_ε jusqu'à ce que le carré testé contienne un point balayé ayant un conditionnement tel que $K_{\text{scan}}^{-1} < K_{\min}^{-1}$.

Comme le choix du point M comme centre de l'EDR n'est pas un choix optimal, la position du centre M de l'EDR doit être optimisée. A l'aide de l'algorithme d'optimisation de HOOKE et JEEVES [Hooke 61], nous optimisons la position du centre M et nous déterminons le carré de l'EDR correspondant. On note M_{RDW} le centre de l'EDR et a_{RDW} son arête.

La figure 3.4 montre, pour $K_{\min}^{-1} = 0.25$, la section de l'EDR du manipulateur 3R orthogonal de type C étudié (la section de l'ER est représentée aussi en hachuré).

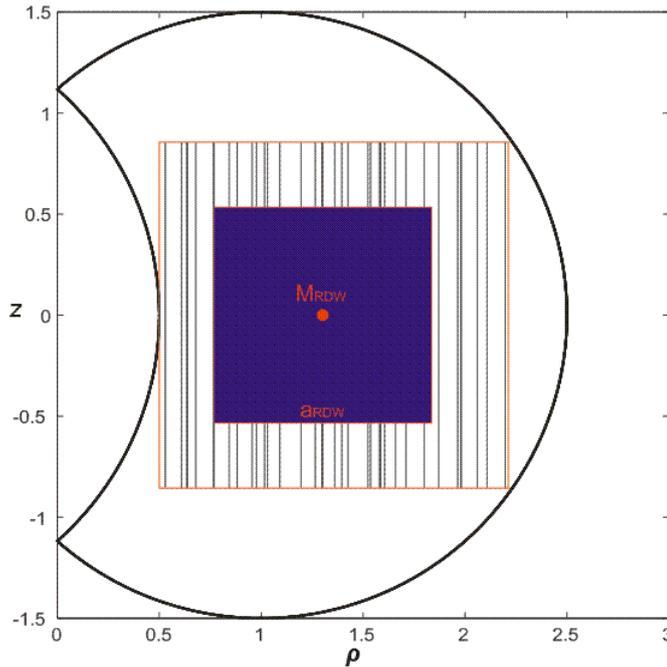


Figure 3.4 : Espace de travail Dextre Régulier EDR (en bleu) pour $K_{min}^{-1} = 0.25$ du manipulateur 3R orthogonal du type C.

Pour étendre cette approche sur tous les manipulateurs 3R, il suffit de ne pas considérer la symétrie de l'espace de travail par rapport à l'axe $z=0$. Cela signifie que dans l'étape 1, il faut choisir un centre M_0 arbitrairement dans l'espace de travail, et puis dans l'étape 3 il faut faire exécuter l'algorithme d'optimisation de HOOKE et JEEVES dans les quatre directions de l'espace.

3.3.2. Définition d'un nouvel indice de performance

La notion d'EDR permet de définir de nouveaux indices de performances pour les manipulateurs 3R. Nous proposons dans ce paragraphe un nouvel indice de performance, basé sur le calcul de l'EDR, qu'on utilisera pour la comparaison des manipulateurs 3R orthogonaux.

Pour un manipulateur donné, on définit ce nouvel indice de performance η comme le ratio entre l'arête de l'EDR et la portée maximale ρ_{max} de ce manipulateur :

$$\eta = \frac{a_{RDW}}{\rho_{max}} \quad (3.8)$$

L'indice η , compris entre 0 et 1, évalue si un manipulateur 3R possède dans son espace de travail un grand volume régulier dont les performances locales sont bornées. La nouveauté et

l'importance de cet indice résident dans le fait qu'il prend en compte deux propriétés importantes des manipulateurs 3R : la compacité de l'espace de travail et le conditionnement.

Ce nouvel indice peut s'employer pour (i) la comparaison de manipulateurs 3R entre eux lors d'un choix d'architecture au moment de la synthèse topologique (voir §3.4) (ii) l'optimisation des paramètres géométriques d'un manipulateur 3R lors de la synthèse géométrique.

Remarques :

- i. La définition (3.8) reste valide si la section de l'EDR est choisie comme un disque. Dans ce cas a_{RDW} est le diamètre de ce disque.
- ii. D'autres indices pourront être similaires à l'indice η , comme par exemple le ratio entre le volume de l'EDR et le volume de l'espace de travail. Le calcul de ce dernier est moins facile que celui de l'indice η car le calcul du volume de l'espace de travail est beaucoup moins facile que celui de la portée maximale.

3.4. COMPARAISON DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX

La comparaison préliminaire des manipulateurs 3R orthogonaux suivant la topologie de leur espace de travail a privilégié les cinq types de manipulateurs B1, C, E, G et H par rapport aux autres types. Cette comparaison ne peut pas privilégier un de ces cinq types par rapport aux quatre restants, car les manipulateurs des ces cinq types ont la même topologie d'espace de travail et les mêmes propriétés d'accessibilité et de parcourabilité. D'où la nécessité d'un nouveau critère de comparaison pour pouvoir classer ces cinq types par ordre d'importance et pour pouvoir comparer les manipulateurs d'un même type entre eux.

Les critères les plus intéressants pour comparer des manipulateurs ayant une même topologie d'espace de travail sont la compacité de l'espace de travail et le conditionnement. Ces deux propriétés sont combinées par le nouvel indice de performance η introduit dans le paragraphe précédent.

Nous utilisons cet indice dans ce paragraphe pour comparer les manipulateurs des cinq types, et pour comparer les manipulateurs d'un même type entre eux.

Pour chaque type de manipulateurs, nous discrétisons l'espace des paramètres, nous calculons l'indice de performance η sur les points de la discrétisation et nous traçons finalement dans l'espace des paramètres les courbes d'iso-valeurs de l'indice η . Ces courbes doivent nous permettre de définir des tendances sur l'évolution des indices dans l'espace des

paramètres d'un même type. Par suite, en inspectant les courbes d'iso-valeurs, nous pourrions relever les régions de l'espace des paramètres rassemblant les meilleurs manipulateurs du type étudié, c'est-à-dire les manipulateurs ayant l'indice η le plus élevé.

Pour une meilleure représentation des résultats, pour les types G et H qui ont trois paramètres de DHm non nuls, et sans perte de généralité, nous appliquons notre approche dans une coupe bidimensionnelle de l'espace des paramètres en normalisant par un paramètre. Ce problème ne se pose pas pour les types B1, C et E parce que leurs espaces de paramètres sont bidimensionnels vu qu'ils n'ont que deux paramètres DHm non nuls chacun. Pour les types B1, C et E dont l'espace des paramètres est bidimensionnel, nous appliquons en outre une deuxième approche. Cette approche consiste tout d'abord à normaliser par un paramètre, ensuite à effectuer un balayage suivant le paramètre non normalisé et de tracer l'évolution de l'indice de performance. Nous obtenons finalement le rapport de paramètres non nuls donnant l'indice de performance le plus élevé.

Nous appliquerons cette approche sur chacun des cinq types de manipulateurs, nous commenterons le résultat obtenu, et nous relevons, pour chaque type, un exemple de manipulateurs ayant un indice η élevé et un autre ayant un indice η faible.

3.4.1. Analyse des manipulateurs de type B1

Les manipulateurs de type B1 sont tels que $d_3 \neq 0$, $d_4 \neq 0$ et $d_3 > d_4$. L'espace des paramètres des manipulateurs de ce type est bidimensionnel (d_3, d_4).

Nous commençons par appliquer notre première approche sur les manipulateurs de ce type. Après avoir balayé l'espace des paramètres, et avoir calculé l'indice de performance η des manipulateurs du balayage, nous traçons les courbes d'iso-valeurs. La valeur minimale du conditionnement choisie pour calculer l'EDR est $K_{\min}^{-1} = 0.25$ pour tous les types. Nous appliquons ensuite la deuxième approche et nous traçons finalement la courbe de variation de η en fonction du rapport d_3/d_4 .

La figure 3.5 nous montre l'espace des paramètres des manipulateurs de la famille B, la surface de transition entre les types B1 et B2, et les courbes d'iso-valeurs de l'indice η (Figure 3.5a), et la courbe de variation de l'indice η en fonction du rapport des paramètres non nuls d_3/d_4 (Figure 3.5b).

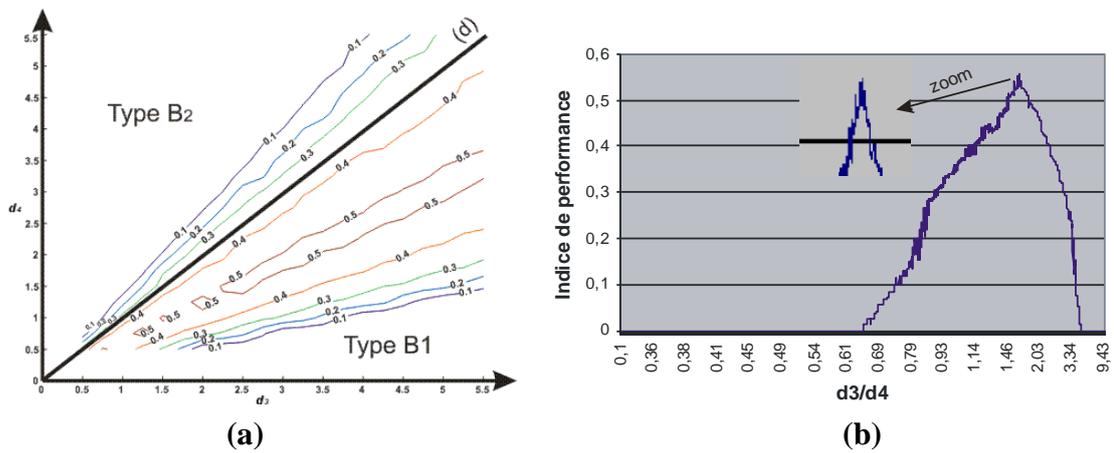


Figure 3.5 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de la famille B (Figure 3.5a), courbe de variation de η en fonction du d_3/d_4 (Figure 3.5b).

Nous remarquons clairement que les manipulateurs de type B2 ont des indices η très inférieurs à ceux des manipulateurs de type B1 (Figure 3.5a), cela est dû à la présence de singularités internes dans leur espace de travail.

D'après la figure 3.5b, nous concluons que l'indice de performance η le plus élevé est de l'ordre de 0.52, et que les manipulateurs de type B1 ayant les indices η les plus élevés ont leurs paramètres DHm tels que $d_3 \approx 1.55d_4$.

Pour illustrer ce résultat, nous montrons les espaces de travail et les EDR de deux manipulateurs de type B1, le premier ayant un indice η élevé, et l'autre un indice faible.

La figure 3.6 nous montre les espaces de travail et les EDRs des manipulateurs de type B1 ayant les paramètres DHm suivants : $d_3=4$ et $d_4=2.6$ pour le premier, et $d_3=4$ et $d_4=1$ pour le second, et leur EDR.

Le premier manipulateur de la figure 3.6 est le meilleur, il a un espace de travail plus compact et bien conditionné (EDR large), cela se traduit par son indice de performance élevé $\eta=0.53$, alors que pour le deuxième manipulateur $\eta=0.1$ (EDR très petit).

Nous constatons qu'il y a une grande différence entre les propriétés des manipulateurs d'un même type, ce qui confirme que la comparaison préliminaire, toute seule, ne suffit pas pour classer les types de manipulateurs. Ceci renforce la nécessité de notre approche et l'importance du nouvel indice de performance η .

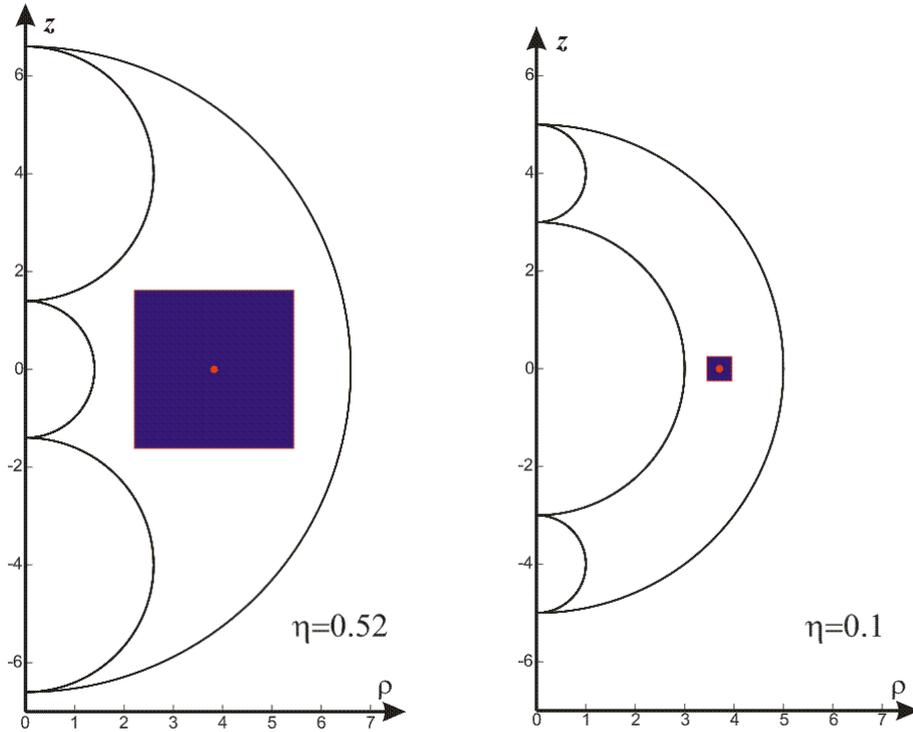


Figure 3.6 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type B1 ayant les paramètres : $d_3=4$ et $d_4=2.6$ (à gauche) ; $d_3=4$ et $d_4=1$ (à droite)

3.4.2. Analyse des manipulateurs de type C

Les manipulateurs de type C sont tels que $r_2 \neq 0$ et $d_4 \neq 0$. L'espace des paramètres des manipulateurs de ce type est bidimensionnel (r_2, d_4).

Nous procédons d'une façon similaire à celle des manipulateurs de type B1. Après avoir balayé l'espace des paramètres, et avoir calculé l'indice de performance η des manipulateurs du balayage, nous dressons les courbes d'iso-valeurs, nous appliquons aussi la deuxième approche en normalisant par d_4 et en traçant la courbe de variation de l'indice en fonction du rapport des paramètres non nuls r_2/d_4 .

La figure 3.7 nous montre l'espace des paramètres des manipulateurs de type C et les courbes d'iso-valeurs de l'indice η pour $K_{\min}^{-1} = 0.25$ (Figure 3.7a), et la courbe de variation de l'indice η en fonction du rapport des paramètres non nuls r_2/d_4 (Figure 3.7b).

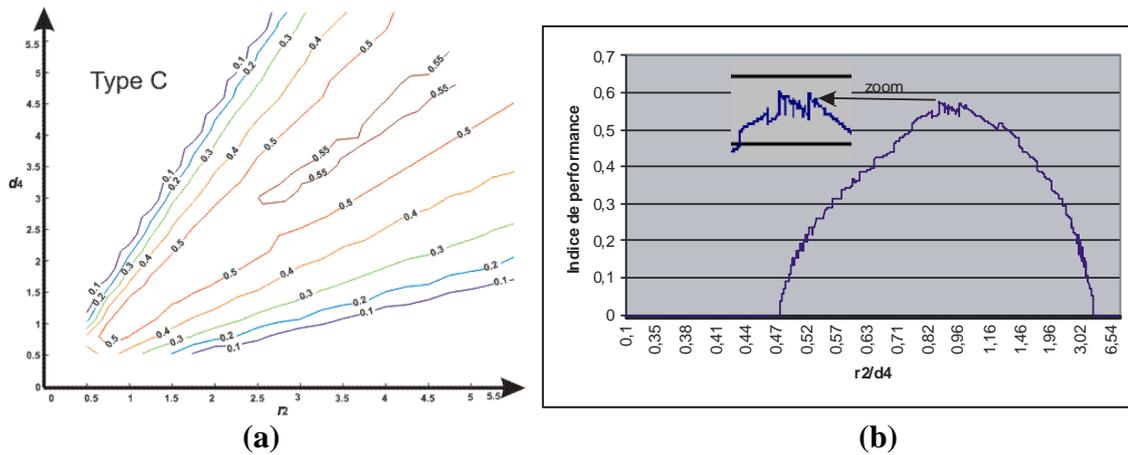


Figure 3.7 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type C (Figure 3.7a), courbe de variation de η en fonction du r_2/d_4 (Figure 3.7b).

D'après cette figure, nous remarquons que l'indice de performance η le plus élevé est de l'ordre de 0.58, alors supérieur à l'indice η maximal des manipulateurs de type B1, et que les manipulateurs de type C ayant les indices η les plus élevés ont leurs paramètres DHm tels que $r_2 \approx d_4$ (Figure 3.7b).

Nous remarquons aussi que les manipulateurs ayant un indice $\eta > 0.5$ occupent une bonne partie de l'espace des paramètres (Figure 3.7b), ce qui n'est pas le cas pour les manipulateurs de type B1. Cela signifie que même si les valeurs des paramètres de DHm ne sont pas trop proches, le manipulateur pourra toujours avoir un bon indice η , et donc un espace de travail compact et bien conditionné.

Pour voir la différence entre les manipulateurs de ce type, nous illustrons les espaces de travail de deux manipulateurs de type C, le premier ayant un indice η élevé, et l'autre un indice faible.

La figure 3.8 nous montre les espaces de travail et les EDRs des manipulateurs de type C ayant les paramètres DHm suivants : $r_2=4$ et $d_4=4$ pour le premier, et $r_2=4$ et $d_4=1.1$ pour le second, et leur EDR.

Le premier manipulateur de la figure 3.8 est le meilleur, il a un espace de travail plus compact et bien conditionné (EDR large), cela se traduit par son indice de performance élevé $\eta=0.56$. Le deuxième manipulateur est défectueux, il a un indice $\eta=0.1$, son principal défaut est qu'il présente un trou axial très large.

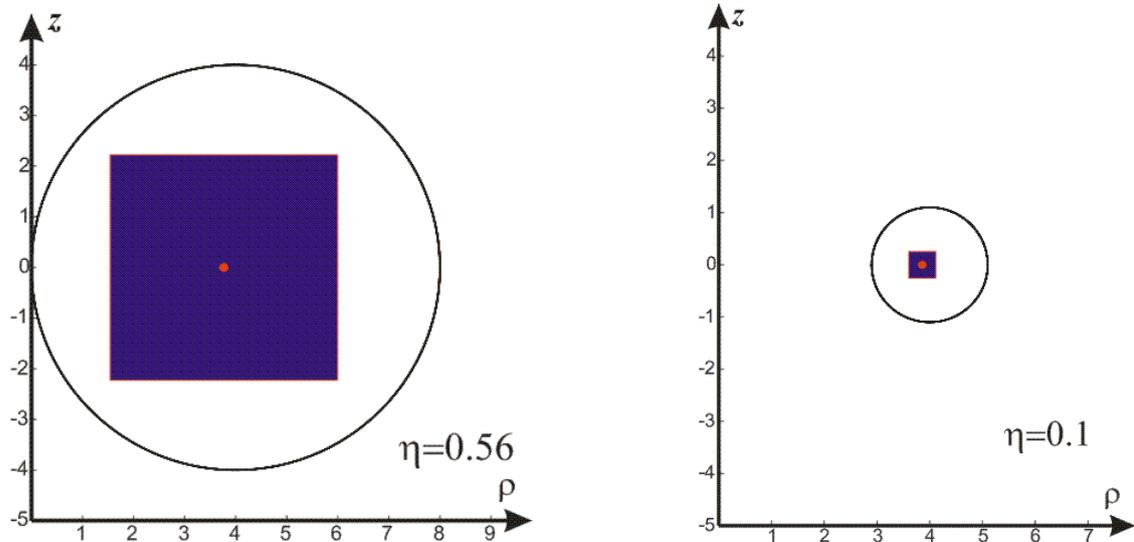


Figure 3.8 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type C ayant les paramètres : $r_2=4$ et $d_4=4$ (à gauche) ; $r_2=1.1$ et $d_4=4$ (à droite)

3.4.3. Analyse des manipulateurs de type E

Les manipulateurs de type E sont tels que $d_2 \neq 0$ et $d_4 \neq 0$. L'espace des paramètres des manipulateurs de ce type est bidimensionnel (d_2, d_4).

Nous procédons d'une façon similaire à celle des manipulateurs de type C. Après avoir balayé l'espace des paramètres, et avoir calculé l'indice de performance η des manipulateurs du balayage, nous dressons les courbes d'iso-valeurs, et en normalisant par d_4 , nous traçons la courbe de variation de η par rapport à d_2/d_4 .

La figure 3.9 nous montre l'espace des paramètres des manipulateurs de type E et les courbes d'iso-valeurs de l'indice η pour $K_{\min}^{-1} = 0.25$ (Figure 3.9a), et la courbe de variation de l'indice η en fonction du rapport des paramètres non nuls d_2/d_4 (Figure 3.9b).

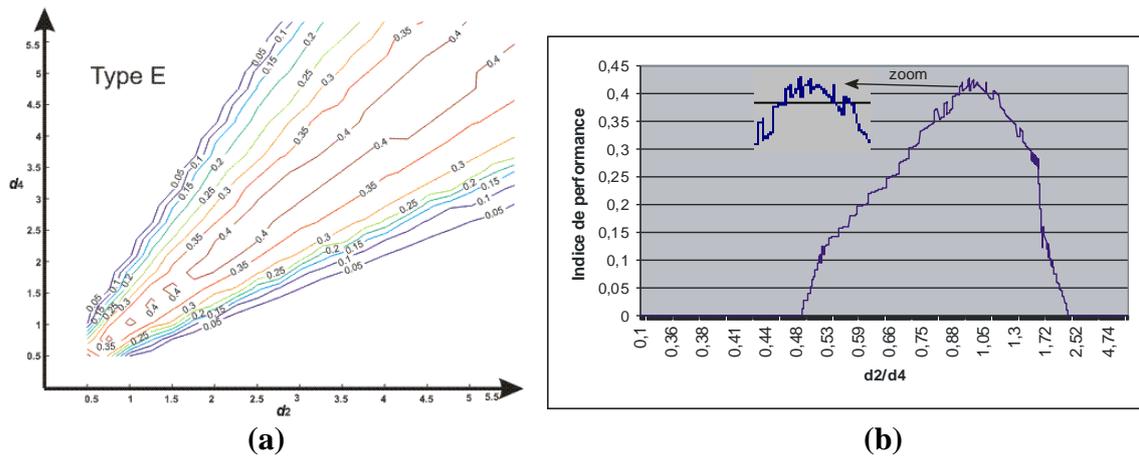


Figure 3.9 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type E (Figure 3.9a), courbe de variation de η en fonction du d_2/d_4 (Figure 3.9b).

D'après cette figure, nous remarquons que l'indice de performance η le plus élevé est de l'ordre de 0.42, alors inférieur à l'indice η maximal des manipulateurs de types B1 et C, et que les manipulateurs de type E ayant les indices η les plus élevés ont leurs paramètres DHm tels que $d_2 \approx d_4$ (Figure 3.9b).

Comme pour les types précédents, nous illustrons les espaces de travail de deux manipulateurs de type E, le premier ayant un indice η élevé, et l'autre un indice faible.

La figure 3.10 nous montre les espaces de travail et les EDRs des manipulateurs de type E ayant les paramètres DHm suivants : $d_2=4$ et $d_4=4$ pour le premier, et $d_2=4$ et $d_4=2$ pour le second, et leur EDR.

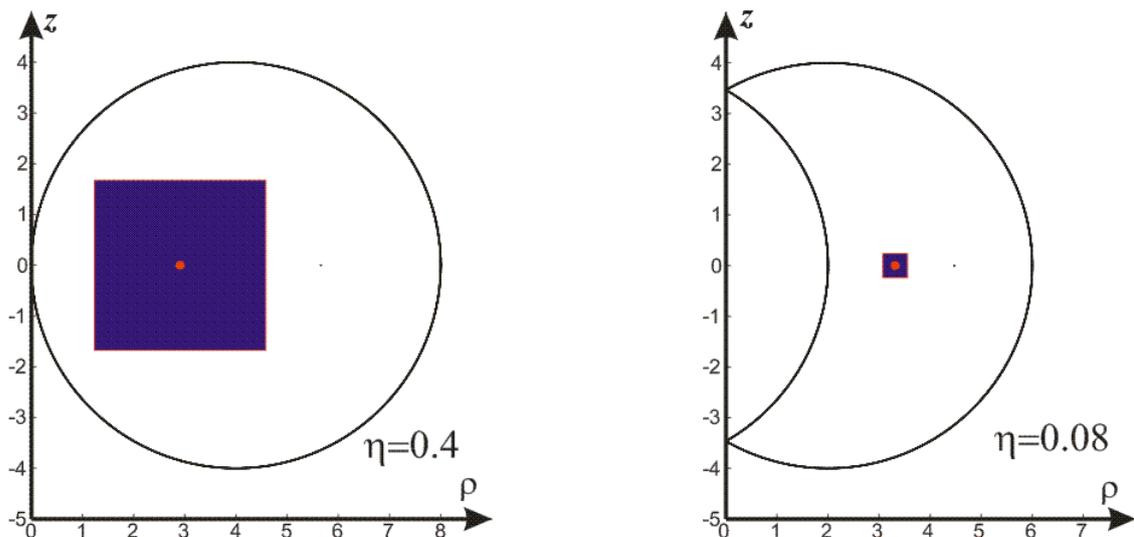


Figure 3.10 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type E ayant les paramètres : $d_2=4$ et $d_4=4$ (à gauche) ; $d_2=4$ et $d_4=2$ (à droite)

Le premier manipulateur de la figure 3.10 est le plus intéressant. Le deuxième manipulateur est défectueux malgré sa topologie d'espace de travail, son indice η est de 0.08, son EDR est très faible parce que son espace de travail n'est pas bien conditionné.

En effet, le conditionnement, à l'intérieur de l'espace de travail des manipulateurs du type E, n'est pas élevé comme pour les autres types, cela est dû à l'existence d'un point singulier à l'intérieur de leur espace de travail, nous pouvons voir ce point sur les deux sections de la figure 3.10.

Les manipulateurs du type E sont donc moins intéressants que les manipulateurs des deux types précédents.

3.4.4. Analyse des manipulateurs de type G

Les manipulateurs de type G sont tels que $d_3 \neq 0$, $d_4 \neq 0$ et $r_3 \neq 0$. L'espace des paramètres des manipulateurs de ce type est tridimensionnel (d_3, d_4, r_3). Pour réduire la dimension du problème et pour une meilleure présentation des résultats, nous normalisons les trois paramètres de DHm non nuls par r_3 . Pour cela nous fixons $r_3=1$. Par suite l'espace des paramètres des manipulateurs de type G devient bidimensionnel (d_3, d_4) avec $r_3=1$.

La figure 3.11 nous montre l'espace des paramètres des manipulateurs de type G et les courbes d'iso-valeurs de l'indice η pour $K_{\min}^{-1} = 0.25$.

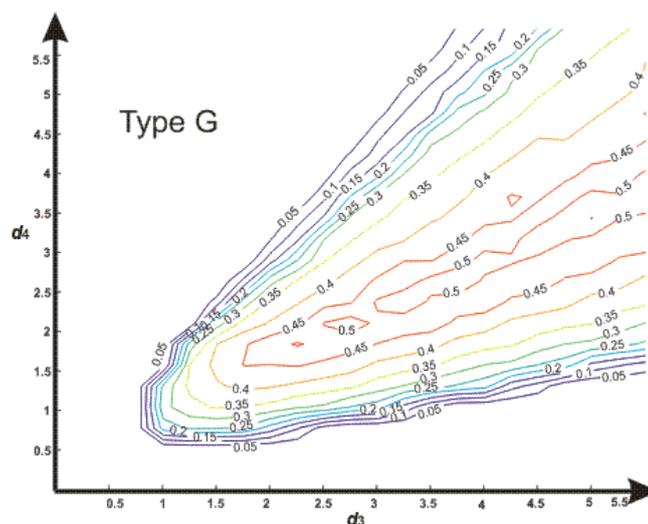


Figure 3.11 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type G

D'après cette figure, nous remarquons que l'indice de performance η le plus élevé est de l'ordre de 0.52, alors inférieur à l'indice η maximal des manipulateurs de type C et supérieur à

celui des manipulateurs de type E, nous remarquons aussi que les manipulateurs de type G ayant les indices η les plus élevés ont leurs paramètres de DHm tels que $d_3 \approx 1.5d_4$.

Comme pour les types précédents, nous illustrons les espaces de travail de deux manipulateurs de type G, le premier ayant un indice η élevé, et l'autre un indice faible.

La figure 3.12 nous montre les espaces de travail et les EDRs des manipulateurs de type E ayant les paramètres de DHm suivants : $d_3=4$, $d_4=2.5$ et $r_3=1$ pour le premier, et $d_3=4.1$ et $d_4=1.1$ et $r_3=1$ pour le second, et leur EDR.

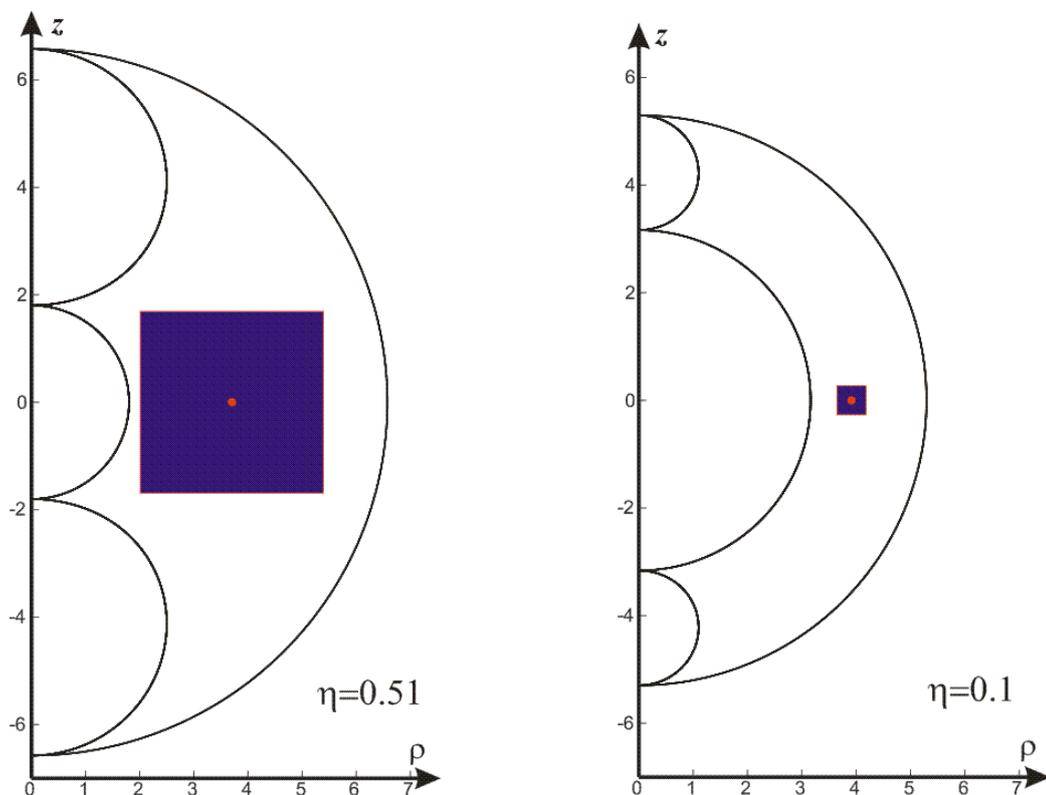


Figure 3.12 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type G ayant les paramètres : $d_3=4$, $d_4=2.5$ et $r_3=1$ (à gauche) ; $d_3=4.1$, $d_4=1.1$ et $r_3=1$ (à droite)

D'après cette figure, nous remarquons que les espaces de travail des manipulateurs de type G ressemblent à ceux des manipulateurs de type B1. Le premier manipulateur de la figure 3.12 est le meilleur, il a un espace de travail plus compact et bien conditionné (EDR large), cela se traduit par son indice de performance élevé $\eta=0.51$. Le deuxième manipulateur est défectueux, il a un indice $\eta=0.1$, son principal défaut est qu'il présente une cavité toroïdale très large.

3.4.5. Analyse des manipulateurs de type H

Les manipulateurs de type H sont tels que $r_2 \neq 0$, $d_4 \neq 0$ et $r_3 \neq 0$. L'espace des paramètres des manipulateurs de ce type est tridimensionnel (r_2, d_4, r_3).

Nous procédons d'une façon similaire à celle des manipulateurs de type G, nous normalisons les trois paramètres de DHm non nuls par r_3 , en fixant $r_3=1$. Par suite l'espace des paramètres devient bidimensionnel (r_2, d_4) avec $r_3=1$.

La figure 3.13 nous montre l'espace des paramètres des manipulateurs de type G et les courbes d'iso-valeurs de l'indice η pour $K_{\min}^{-1} = 0.25$.

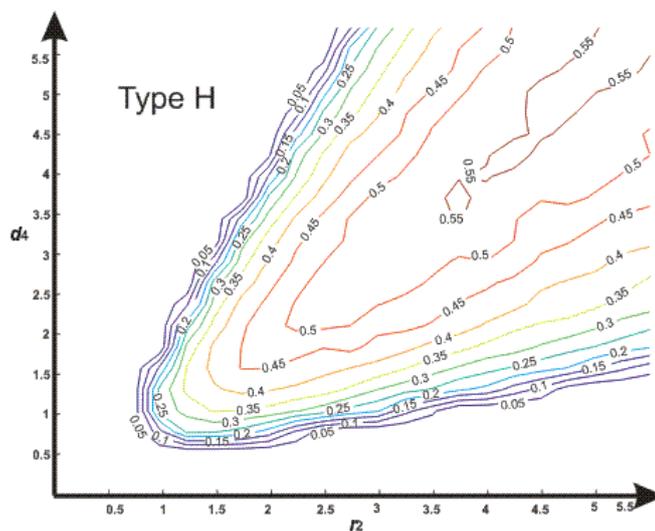


Figure 3.13 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs de type H

D'après cette figure, nous remarquons que l'indice de performance η le plus élevé est de l'ordre de 0.58, alors supérieur à l'indice η maximal des manipulateurs de type B1, E et G, et que les manipulateurs de type G ayant les indices η les plus élevés ont leurs paramètres de DHm tels que $r_2 \approx d_4$.

Nous remarquons aussi que les manipulateurs ayant un indice $\eta > 0.5$ occupent une bonne partie de l'espace des paramètres, ce qui n'est pas le cas pour les autres types de manipulateurs sauf le type C. Nous voyons aussi que les espaces des paramètres des types C et H sont presque similaires.

Comme pour les types précédents, nous illustrons les espaces de travail de deux manipulateurs de type H, le premier ayant un indice η élevé, et l'autre un indice faible. La figure 3.14 nous montre les espaces de travail et les EDRs des manipulateurs de type E ayant

les paramètres DHm suivants : $r_2=4$, $d_4=4$ et $r_3=1$ pour le premier, et $r_2=4$ et $d_4=1.1$ et $r_3=1$ pour le second, et leur EDR .

Le premier manipulateur de la figure 3.14 est le meilleur, il a un espace de travail plus compact et bien conditionné (EDR large), cela se traduit par son indice de performance élevé $\eta=0.55$. Le deuxième manipulateur est défectueux, il a un indice $\eta=0.09$, son principal défaut est qu'il présente un trou axial très large.

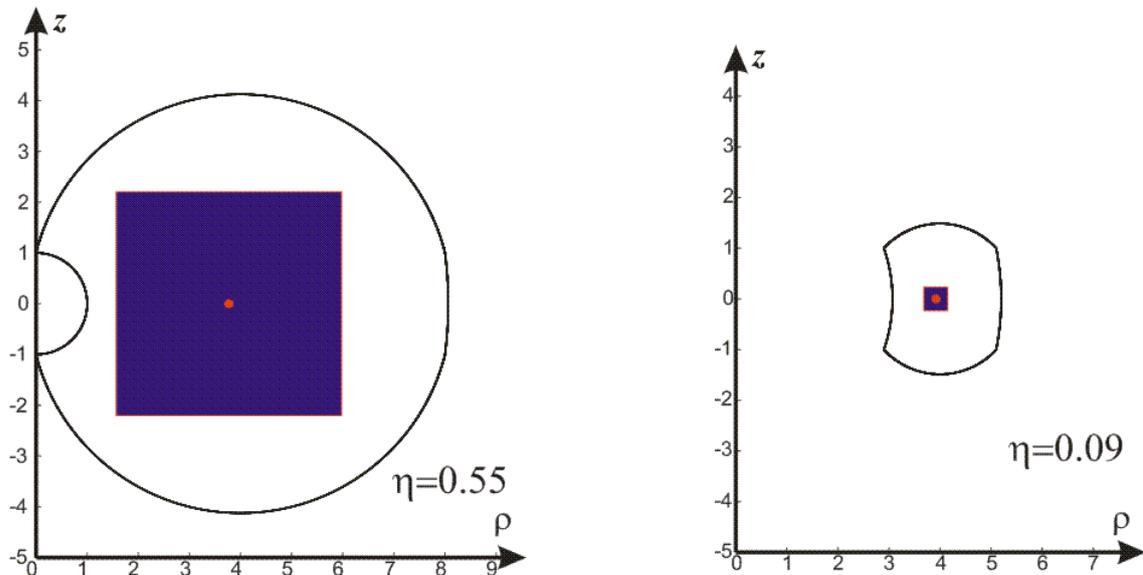


Figure 3.14 : Espaces de travail et EDRs (en bleu) des manipulateurs de type H ayant les paramètres : $r_2=4$, $d_4=4$ et $r_3=1$ (à gauche) ; $r_2=4$, $d_4=1.1$ et $r_3=1$ (à droite)

3.4.6. Comparaison des cinq types de manipulateurs 3R orthogonaux

D'après l'étude et les analyses menées dans les espaces des paramètres des cinq types de manipulateurs 3R orthogonaux, nous comparons, dans ce paragraphe, ces types entre eux, dans le but d'établir un classement par ordre de pertinence de ces manipulateurs.

Les principaux outils qui seront utilisés pour faire cette comparaison sont les courbes d'iso-valeurs de l'indice de performance η pour chacun des types (Figures 3.5, 3.7, 3.9, 3.11 et 3.13).

Nous considérons les deux critères de comparaison suivants (i) l'indice η_{sup} le plus élevé pour chaque type de manipulateurs (ii) la surface de la région de l'espace des paramètres où les indices η sont supérieurs à 0.45. Cette valeur est choisie volontairement élevée pour que nous puissions différencier les différents types.

Pour le premier critère, les manipulateurs de types C et H ont un indice η_{sup} le plus élevé (de l'ordre de 0.55). Pour les types B1 et G η_{sup} est de l'ordre de 0.5. Finalement pour le type E η_{sup} est de l'ordre de 0.4. L'indice η_{sup} du type E est inférieur aux η_{sup} des quatre autres types, et de la valeur de minimale fixée pour le deuxième critère. Par suite ce type sera classé dernier en considérant la compacité de l'espace de l'espace de travail et le conditionnement qui sont exprimés par l'indice de performance η .

Pour le deuxième critère, en inspectant les espaces des paramètres des quatre types de manipulateurs B1, C, G et H, nous constatons que la zone de l'espace des paramètres occupée par des manipulateurs dont l'indice η est supérieur à 0.45 est beaucoup plus large pour les types C et H que pour les types B1 et G. Ainsi, le deuxième critère de comparaison privilégie aussi les manipulateurs des types C et H par rapport aux deux autres.

Vu la grande similarité entre les courbes d'iso-valeurs des types B1 et G d'une part et entre celles des types C et H d'autre part et vu la grande similarité entre les topologies des espaces de travail des manipulateurs des types B1 et G (Figures 3.6 et 3.12), nous optons de classer ces cinq types de manipulateurs suivant trois classes par ordre de pertinence, sans faire une comparaison entre les types qui ont des propriétés similaires C et H ou B1 et G:

- Première classe : Types C et H ($\eta_{max} = 0,58$).
- Deuxième classe : Types B1 et G ($\eta_{max} = 0,52$).
- Troisième classe : Type E ($\eta_{max} = 0,42$).

Ce classement ne considère pas les mauvais manipulateurs de chaque type (les manipulateurs ayant un indice η faible), qui doivent être éliminés par le concepteur.

3.4.7. Comparaison avec les manipulateurs à porteurs anthropomorphes

Les manipulateurs ayant des porteurs anthropomorphes sont ceux dont les axes de la deuxième et la troisième articulations sont parallèles entre eux et orthogonaux à l'axe de la première articulation. Les manipulateurs orthogonaux peuvent constituer des solutions alternatives raisonnables aux manipulateurs anthropomorphes à condition que leur indice de performance η soit du même ordre de grandeur. Après avoir appliqué la procédure de calcul du nouvel indice de performance η pour différentes classes de manipulateurs anthropomorphes, nous avons pu constater que l'indice η maximal pour les meilleures classes

est de l'ordre de 0,6, ce qui est un résultat très proche de l'indice maximal des meilleurs manipulateurs orthogonaux (0.55).

La figure 3.15 montre l'espace des paramètres des manipulateurs anthropomorphes ayant le meilleur indice η (paramètres de DHm d_2 , r_2 et r_3 nuls) et les courbes d'iso-valeurs de l'indice η pour $K_{\min}^{-1} = 0.25$. L'espace des paramètres des manipulateurs de ce type est bidimensionnel (d_3 , d_4).

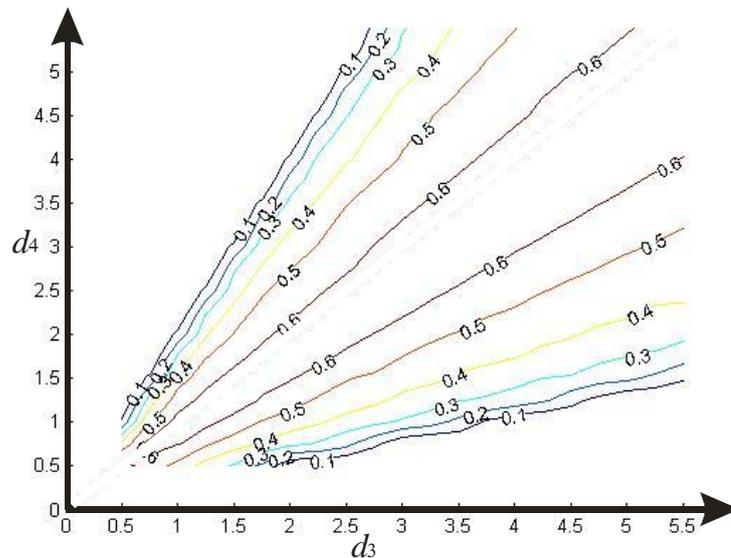


Figure 3.15 : Espace des paramètres et courbes d'iso-valeurs de l'indice η des manipulateurs anthropomorphes ayant le meilleur indice η (d_2 , r_2 et r_3 nuls)

3.5. AIDE A LA CONCEPTION DE MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX

La classification et la comparaison proposées dans ce chapitre constituent un outil très intéressant d'aide à la conception pour les manipulateurs 3R orthogonaux, mais cet outil tout seul ne suffit pas pour la conception parce que plusieurs autres aspects ne sont pas pris en compte, comme l'étude des collisions internes ou la dynamique. Par conséquent, durant la phase de conception, cet outil devra être accompagné d'autres outils prenant en compte tous ces aspects.

Nous illustrons sur la figure 3.15 un cas simplifié de conception de manipulateurs 3R orthogonaux où nous utilisons les résultats de la comparaison établie dans ce chapitre accompagnés de l'étude des collisions internes. Nous considérons un manipulateur de type C ayant $r_2 = d_4$ (Figure 3.15a). Ce manipulateur a un indice de performance η très élevé étant donné que $r_2 = d_4$. Mais nous nous apercevons que la troisième articulation de ce

manipulateur ne peut tourner de 360 degrés à cause de la collision avec le deuxième bras (Figure 3.15a).

Pour éviter cette collision sans ajouter des butées articulaires et en conservant un indice de performance η élevé, nous ajoutons au manipulateur un offset r_3 faible pour éviter la collision avec le deuxième bras et nous raccourcissons légèrement la longueur d_4 du troisième bras de manière à éviter la collision avec le premier bras lorsque la deuxième variable articulaire θ_2 est égale à 180 degrés. De cette façon, le manipulateur final sera du type H et il aura le paramètre d_4 légèrement inférieur à r_2 par suite, son indice de performance η reste élevé (Figure 3.15b).

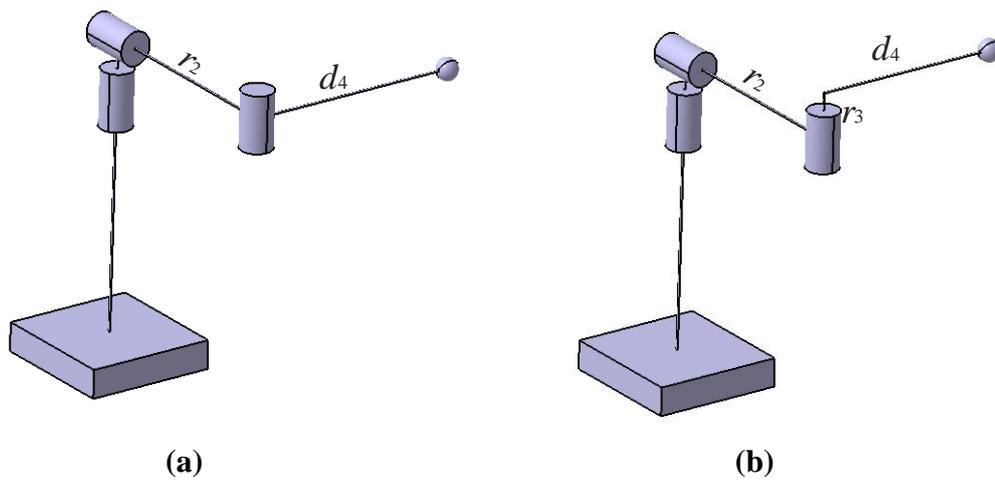


Figure 3.16 : Manipulateurs ayant les paramètres suivants $r_2=4$ et $d_4=4$ (Type C) (Figure 3.15a) $r_2=4$, $d_4=3.8$ et $r_3=0.8$ (Type H) (Figure 3.15b)

4. CONCLUSION

Le but de ce chapitre était de partir des classifications établies dans les deux chapitres précédents, d'analyser et de comparer ces manipulateurs en utilisant des indices de performance. Notre choix a été partagé entre une analyse globale et une analyse locale.

Une comparaison préliminaire suivant la topologie de l'espace de travail a été effectuée. Elle a mis en évidence la pertinence de cinq types de manipulateurs. Les manipulateurs de ces cinq types ont un espace de travail t+-parcourable.

Une nouvelle notion pour les manipulateurs sériels a été introduite : l'espace de travail dextre régulier. Une approche pour déterminer l'EDR des manipulateurs 3R a été exposée. Un

nouvel indice de performance a été introduit, cet indice rassemble la compacité et le conditionnement de l'espace de travail [Zein 07a].

Les manipulateurs des cinq types, ébauchés par la première comparaison, ont été analysés et comparés entre eux suivant ce nouvel indice de performance. Les meilleurs manipulateurs de chaque type ont été mis en évidence. Finalement, un classement des cinq types de manipulateurs a été fait. Les deux types de manipulateurs C et H ont été classés comme les meilleurs.

CHAPITRE 4

ANALYSE DES SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE DES MANIPULATEURS PARALLELES DE TYPE 3- RPR

1. INTRODUCTION

Etudier les singularités des manipulateurs parallèles s'avère d'une grande importance, puisque ces manipulateurs perdent leur rigidité sur ces configurations. Cette tâche n'est pas simple pour les manipulateurs parallèles spatiaux. Les singularités des manipulateurs parallèles planaires ont été fréquemment étudiées en raison de la simplicité relative de ces manipulateurs par rapport à leurs homologues spatiaux [Gosselin 90], [Gosselin 92], [Sefrioui 95], [Wenger 97], [Merlet 00], [Bonev 03].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux manipulateurs planaires parallèles, ayant trois articulations prismatiques motorisées, de type 3-RPR. Ces manipulateurs peuvent avoir jusqu'à six modes d'assemblage [Hunt 83], leur modèle géométrique direct s'écrit sous la forme d'un polynôme de degré six [Gosselin 92]. Les singularités de ces manipulateurs coïncident avec les configurations où au moins deux solutions au modèle géométrique direct coïncident.

Hunt avait démontré que pour changer de mode d'assemblage un manipulateur parallèle devait franchir une singularité [Hunt 93]. Cette démonstration avait été mise en cause par Innocenti et Parenti-Castelli qui avaient trouvé un manipulateur de type 3-RPR pouvant effectuer une trajectoire particulière reliant deux modes d'assemblage sans franchir aucune singularité [Innocenti 92]. Il a été démontré par la suite que les résultats de Hunt ne sont valides que sous certaines conditions géométriques sur les manipulateurs telles que la similarité entre la base et la plateforme mobile des manipulateurs 3-RPR [Kong 01].

Ce même phénomène existe dans les manipulateurs sériels cuspidaux qui peuvent changer leur posture sans franchir une singularité [Innocenti 92]. Ce phénomène est dû à l'existence de points cusp dans l'espace de travail de ces manipulateurs [El Omri 95].

McAree a montré que pour les manipulateurs parallèles planaires de type 3-RPR et leurs homologues spatiaux, si un point ayant trois solutions coïncidentes au modèle géométrique direct existe dans l'espace articulaire, alors les trajectoires de changement non singulier de mode d'assemblage seront possibles, ce point est aussi appelé un point cusp [McAree 99]. Une condition d'existence de points cusp pour ces manipulateurs a été établie dans cette même étude. Cette condition n'a jamais été exploitée à cause de sa grande complexité algébrique, et le travail de McAree n'a jamais été poursuivi.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs parallèles planaires de type 3-RPR. La détermination des singularités dans l'espace articulaire présente un intérêt pour la compréhension de la topologie de l'espace articulaire, pour la planification de trajectoires et de changement non singuliers de modes d'assemblage et finalement pour la détermination des butées articulaires du manipulateur.

Nous commençons par présenter les manipulateurs 3-RPR et leurs équations de contraintes. Ensuite, nous proposons une approche pour déterminer les singularités dans l'espace articulaire de ces manipulateurs. Nous présentons une analyse descriptive des topologies des singularités en sections de l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR. Finalement, nous exploitons la condition d'existence de points cusp de McAree et nous proposons un algorithme pour la détection systématique des points cusps.

2. PRELIMINAIRES

Les manipulateurs étudiés sont des manipulateurs planaires parallèles. Ces manipulateurs ont trois degrés de liberté, ils sont formés d'une base et d'une plateforme mobile triangulaires, et de trois chaînes de type RPR dont chacune est motorisée par son articulation prismatique (Figure 4.1).

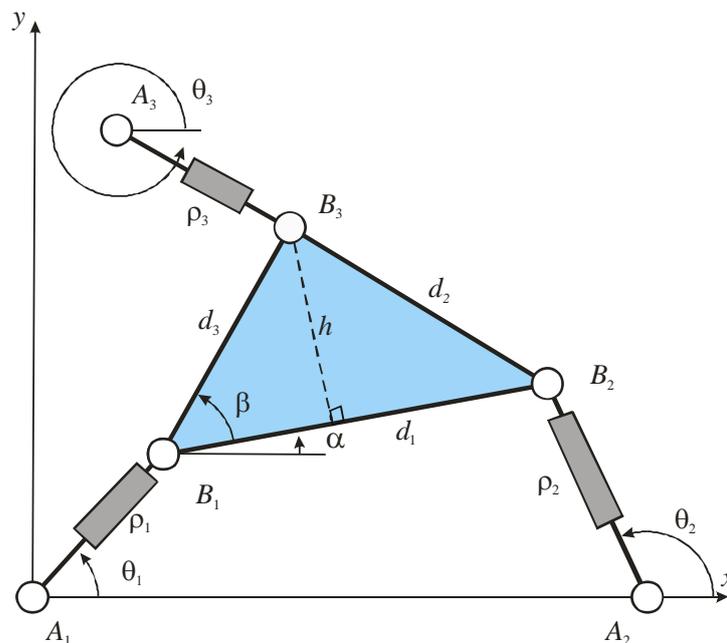


Figure 4.1 : Manipulateur planaire parallèle de type 3-RPR

Les paramètres de conception de ces manipulateurs sont les longueurs d_1 , d_2 et d_3 des trois côtés de la plateforme mobile, et les positions des trois centres de rotation sur la base,

définis par les points A_1 , A_2 et A_3 . Le repère de référence sera choisi tel que A_1 est son origine et que son axe x passe par A_2 . Alors les coordonnées des trois points de base sont : $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (A_{2x}, 0)$ et $A_3 = (A_{3x}, A_{3y})$.

Les variables d'entrée de ces manipulateurs sont les longueurs ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 des trois articulations prismatiques, et les variables de sortie sont les trois variables x , y et α où x et y sont les coordonnées d'un point de la plateforme, que nous choisissons ici comme B_1 et α est l'orientation de la plateforme.

Ce type de manipulateurs a été fréquemment étudié, par exemple dans [Sefrioui 95], [Wenger 97], [McAree99], [Merlet 00], [Kong 01], [Bonev 03].

Le modèle géométrique direct des manipulateurs 3-RPR parallèles est donné par les équations suivantes [Gosselin 92]:

$$\begin{cases} \rho_1^2 = x^2 + y^2 \\ \rho_2^2 = (x + d_1 \cos(\alpha) - A_{2x})^2 + (y + d_1 \cos(\alpha))^2 \\ \rho_3^2 = (x + d_3 \cos(\alpha + \beta) - A_{3x})^2 + (y + d_3 \cos(\alpha + \beta) - A_{3y})^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Les singularités de ce type de manipulateurs étaient calculées dans [Sefrioui 95] à partir des matrices jacobiniennes sérielles et parallèles \mathbf{A} et \mathbf{B} (cf. Chapitre 1), leurs équations étaient établies en fonction des variables x , y et α , les singularités étaient représentées alors dans l'espace de travail.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la représentation et à l'analyse des singularités dans l'espace articulaire, et au calcul des points cusps. Ces points apparaissent dans l'espace articulaire. Ce travail est utile pour la compréhension de la topologie de l'espace articulaire, pour la détermination des points cusp, pour la conception de manipulateurs et pour la planification de trajectoires. Rares sont les études qui ont traité ce sujet, à notre connaissance seul McAree a travaillé sur les singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons les équations des contraintes des manipulateurs 3-RPR parallèles utilisées dans [McAree99].

3. EQUATIONS DE CONTRAINTES

On définit $\mathbf{L} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ comme l'ensemble des longueurs des trois jambes du manipulateur, ou des trois variables articulaires, et $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ comme l'ensemble des

angles entre les jambes et l'horizontale (Figure 4.1). Les six paramètres $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})$ peuvent être considérés comme une configuration du manipulateur, sachant que seulement trois de ces six paramètres sont indépendants. La dépendance entre ces six paramètres peut être identifiée en écrivant les équations des trois distances fixes entre les sommets B_1 , B_2 et B_3 de la plateforme. Les équations de contraintes sont les suivantes (4.2):

$$\begin{cases} \Gamma_1(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{b}_2(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}_1(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})]^T [\mathbf{b}_2(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}_1(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})] - d_1^2 = 0 \\ \Gamma_2(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{b}_3(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}_2(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})]^T [\mathbf{b}_3(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}_2(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})] - d_2^2 = 0 \\ \Gamma_3(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}_3(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})]^T [\mathbf{b}_1(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}_3(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})] - d_3^2 = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Où \mathbf{b}_i définit le vecteur des coordonnées du point B_i de la plateforme, \mathbf{b}_i est fonction de \mathbf{L} et $\boldsymbol{\theta}$.

En développant les équations des contraintes Γ_i en série, on aboutit à une équation ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_i = & \left(\sum_{j=1}^3 \Delta \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=1}^3 \Delta \rho_j \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right) \Gamma_i + \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=1}^3 \Delta \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=1}^3 \Delta \rho_j \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right)^2 \Gamma_i + \dots + \\ & \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^3 \Delta \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=1}^3 \Delta \rho_j \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right)^n \Gamma_i + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si nous ne conservons que les termes de premier et de deuxième ordre de l'équation (4.3), celle-ci s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\Delta \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{L}} \Delta \mathbf{L} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{L}} \Delta \mathbf{L} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{L}} \Delta \mathbf{L} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{L}} \Delta \mathbf{L} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{L}^T \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \mathbf{L}^2} \Delta \mathbf{L} \\ \Delta \mathbf{L}^T \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial \mathbf{L}^2} \Delta \mathbf{L} \\ \Delta \mathbf{L}^T \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial \mathbf{L}^2} \Delta \mathbf{L} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

L'équation (4.4) peut être utilisée pour décrire un mouvement local arbitraire en une configuration précise du manipulateur. Si les termes de premier ordre suffisent pour décrire le mouvement, alors le manipulateur est en une configuration régulière et l'équation (4.5) suivante peut être utilisée au lieu de l'équation (4.4) :

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{L}} \Delta \mathbf{L} = 0 \quad (4.5)$$

Sinon, la configuration $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\theta})$ est une configuration singulière. Cela est dû à la perte d'une contrainte de premier ordre de la plate-forme. Ceci aura lieu lorsque la contrainte jacobienne $\partial\Gamma/\partial\boldsymbol{\theta}$ n'est plus de rang plein. Les termes de second ordre de l'équation (4.4) sont alors nécessaires pour décrire le mouvement.

Pour le manipulateur 3-RPR parallèle planaire, les vecteurs \mathbf{b}_i ont les coordonnées suivantes dans un repère fixe :

$$\mathbf{b}_1 = [\rho_1 \cos(\theta_1) \quad \rho_1 \sin(\theta_1)]^T; \mathbf{b}_2 = [A_{2x} + \rho_2 \cos(\theta_2) \quad \rho_2 \sin(\theta_2)]^T;$$

$$\mathbf{b}_3 = [A_{3x} + \rho_3 \cos(\theta_3) \quad A_{3y} + \rho_3 \sin(\theta_3)]^T.$$

Alors, la contrainte jacobienne peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\theta}} = 2 \begin{bmatrix} \rho_1 (A_{2x}s_1 + \rho_2 s_{12}) & \rho_2 (\rho_1 s_{21} - A_{2x}s_2) & 0 \\ 0 & -\rho_2 ((A_{2x} - A_{3x})s_2 - \rho_3 ((A_{2x} - A_{3x})s_3 - \rho_3 s_{23} + A_{3y}c_2)) & -\rho_2 s_{23} + A_{3y}c_3 \\ \rho_1 (A_{3x}s_1 - \rho_3 s_{31} - A_{3y}c_1) & 0 & -\rho_3 (A_{3x}s_3 - \rho_1 s_{31} - A_{3y}c_3) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\text{Où } s_i = \sin(\theta_i), c_i = \cos(\theta_i) \text{ et } s_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j).$$

McAree calculait les configurations singulières des manipulateurs 3-RPR en annulant le déterminant de la matrice $\partial\Gamma/\partial\boldsymbol{\theta}$ de l'équation (4.6).

McAree a démontré que lorsque la plate-forme perd une contrainte de premier ordre, sur la configuration singulière correspondante coïncident deux solutions au modèle géométrique direct. De même, il a démontré que lorsque la plate-forme perd une contrainte de premier et une de second ordre, sur la configuration singulière correspondante coïncident trois solutions au modèle géométrique direct [McAree 99]. Ces résultats ont aussi été démontrés par Innocenti [Innocenti 92], mais d'une autre façon. Sur les points cusp le manipulateur perd donc ses contraintes de premier et de second ordre.

4. SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE DES MANIPULATEURS PARALLELES 3-RPR

Pour le calcul des singularités des manipulateurs parallèles 3-RPR, McAree a calculé le déterminant de la matrice $\partial\Gamma/\partial\theta$ (4.6) [McAree 99]. Ainsi calculé, ce déterminant a une forme compliquée.

4.1. EQUATION DES SINGULARITES

Dans notre étude, pour calculer l'équation des singularités nous utilisons une approche géométrique plus avantageuse que celle utilisée dans [McAree 99]. Le manipulateur est en configuration singulière lorsque les axes de ces trois jambes sont concourants ou parallèles (sur cette configuration singulière, en fixant les articulations motorisées, la plateforme du manipulateur pourra toujours bouger suivant une rotation autour du point de rencontre des trois jambes). La figure 4.2 montre un manipulateur parallèle 3-RPR en configuration singulière.

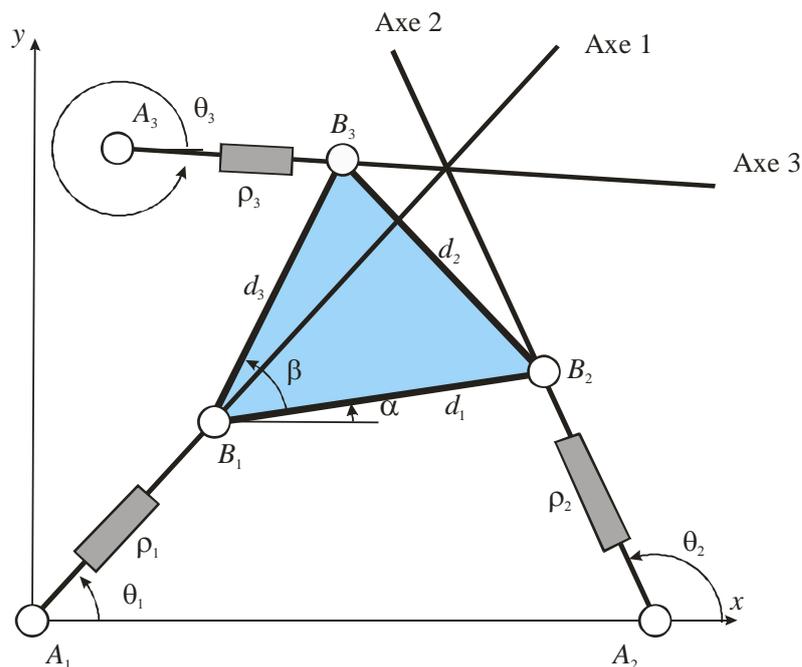


Figure 4.2 : Manipulateur 3-RPR parallèle en configuration singulière

Pour écrire la condition géométrique d'existence des singularités, nous calculons la condition pour laquelle les axes des trois jambes du manipulateur se rencontrent en un seul point (éventuellement à l'infini). Nous écrivons tout d'abord les équations des trois axes :

$$\begin{cases} (\text{Axe 1}) : y \cos(\theta_1) = x \sin(\theta_1) \\ (\text{Axe 2}) : y \cos(\theta_2) = (x - A_{2x}) \sin(\theta_2) \\ (\text{Axe 3}) : y \cos(\theta_3) = (x - A_{3x}) \sin(\theta_3) + A_{3y} \cos(\theta_3) \end{cases} \quad (4.7)$$

En éliminant x et y dans le système d'équations (4.7), nous obtenons l'équation des singularités (4.8) dans l'espace $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Cet espace pourra être assimilé à l'espace de travail parce que le triplet $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ définit de façon unique une pose (x, y, α) de la plateforme mobile (voir preuve en Annexe B):

$$A_{2x}s_2s_{31} + (A_{3x}s_3 - A_{3y}c_3)s_{12} = 0 \quad (4.8)$$

Où $s_i = \sin(\theta_i)$, $c_i = \cos(\theta_i)$ et $s_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j)$.

4.2. SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

Il est possible d'exprimer l'équation des singularités (4.8) en fonction des variables articulaires (ρ_1, ρ_2, ρ_3) en utilisant les équations de contraintes du manipulateur 3-RPR, mais l'équation résultante serait d'un degré élevé en ρ_1, ρ_2 et ρ_3 et sa résolution serait difficile.

Notre approche pour calculer les singularités dans l'espace articulaire consiste à réduire la dimension du problème en considérant des sections bidimensionnelles de l'espace des configurations en fixant l'une des trois variables articulaires. Nous choisissons de fixer la première variable articulaire ρ_1 dans notre étude.

Approche :

Étape 1 : Nous écrivons l'équation (4.8) en fonction des variables ρ_1, α et θ_1 en utilisant les équations des contraintes (4.9) du manipulateur 3-RPR parallèle :

$$\begin{cases} A_{2x} + \rho_2 c_2 - \rho_1 c_1 - d_1 \cos(\alpha) = 0 \\ \rho_2 s_2 - \rho_1 s_1 - d_1 \sin(\alpha) = 0 \\ A_{3x} + \rho_3 c_3 - \rho_1 c_1 - d_3 \cos(\alpha + \beta) = 0 \\ A_{3y} + \rho_3 s_3 - \rho_1 s_1 - d_3 \sin(\alpha + \beta) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

Les expressions de c_2 et s_2 (respectivement c_3 et s_3) sont exprimées en fonction de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \alpha$ et θ_1 grâce aux deux premières (respectivement dernières) équations de (4.9), et leurs expressions sont substituées dans l'équation des singularités (4.8) qui dépend plus que de ρ_1, α et θ_1 (cf. Annexe B).

Étape 2 : Nous fixons la première variable articulaire ρ_1 . L'équation (4.8) ne dépend alors que des variables α et θ_1 .

Étape 3 : Nous effectuons un balayage suivant α , pour chaque valeur α du balayage nous calculons les racines θ_1 de l'équation (4.8) des singularités. Puis nous faisons un autre balayage mais suivant θ_1 et nous calculons les racines α de (4.8).

Nous obtenons finalement, pour un ρ_{1s} fixé, les couples de points singuliers (α_s, θ_{1s}) . Le triplet $(\rho_{1s}, \alpha_s, \theta_{1s})$ définit une configuration singulière dans l'espace de travail. Les coordonnées x_s et y_s de la position de la plateforme peuvent être calculés par : $x_s = \rho_{1s}\cos(\theta_{1s})$ et $y_s = \rho_{1s}\sin(\theta_{1s})$.

La figure 4.3 nous montre les singularités dans l'espace (α, θ_1) pour $\rho_1=17$ pour le manipulateur 3-RPR parallèle ayant les mêmes paramètres de conception que celui qui est étudié dans [Innocenti 92], [McAree 99] et [Merlet 00]. Les paramètres de conception de ce manipulateur sont rappelés ci-dessous dans une unité de longueur arbitraire :

$A_1=(0, 0)$	$d_1=17.04$
$A_2=(15.91, 0)$	$d_2=16.54$
$A_3=(0, 10)$	$d_3=20.84$

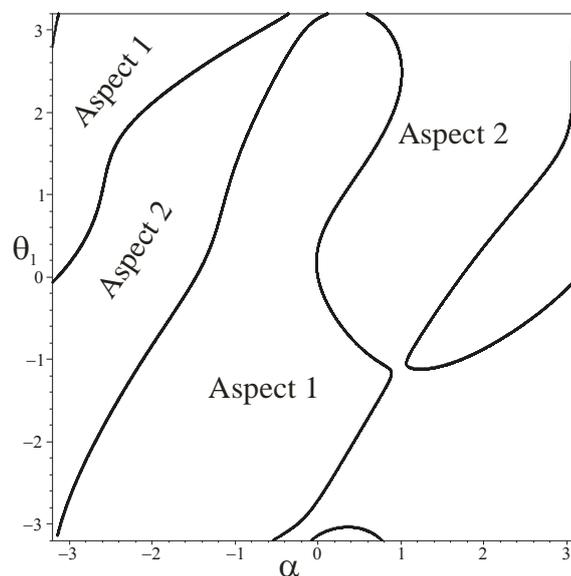


Figure 4.3 : Singularités dans le plan (α, θ_1) pour $\rho_1=17$.

Étape 4 : Pour chaque configuration singulière $(\rho_{1s}, \alpha_s, \theta_{1s})$, nous calculons les variables articulaires correspondantes ρ_{2s} et ρ_{3s} suivant le système d'équations (4.10). Nous aurons ainsi les singularités dans une section (ρ_2, ρ_3) de l'espace articulaire avec ρ_1 fixé:

$$\begin{cases} \rho_2 = \sqrt{\begin{aligned} &(-A_{2x} + \rho_1 \cos(\theta_1) + d_1 \cos(\alpha))^2 + \\ &(\rho_1 \sin(\theta_1) + d_1 \sin(\alpha))^2 \end{aligned}} \\ \rho_3 = \sqrt{\begin{aligned} &(A_{3x} - \rho_1 \cos(\theta_1) - d_3 \cos(\alpha + \beta))^2 + \\ &(A_{3y} - \rho_1 \sin(\theta_1) - d_3 \sin(\alpha + \beta))^2 \end{aligned}} \end{cases} \quad (4.10)$$

La figure 4.4 montre les singularités dans une section (ρ_2, ρ_3) de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$ du même manipulateur 3-RPR.

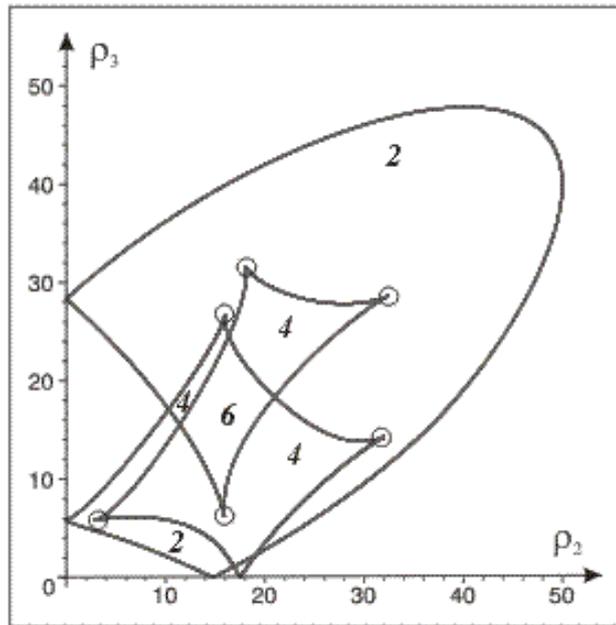


Figure 4.4 : Singularités dans une section (ρ_2, ρ_3) de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$. Le nombre de modes d'assemblage est indiqué dans chaque région.

Les courbes singulières partagent la section de l'espace articulaire en plusieurs régions non singulières où le nombre de modes d'assemblage du manipulateur est constant, égal à 2, 4 ou 6 (Figure 4.4). Nous rappelons que le nombre de modes d'assemblage pour le manipulateur est le nombre de solutions au modèle géométrique direct. Les points encerclés sur la figure 4.4 représentent les points cusps, ces points ont trois solutions coïncidentes au modèle géométrique direct.

Cette approche pour le calcul des singularités par sections de l'espace articulaire est simple. Nous l'avons implantée dans le logiciel de calcul MAPLE. Le temps de calcul d'une section des singularités dans l'espace articulaire est faible (de l'ordre de 5s pour un pas de balayage de 0.01 et sur un ordinateur équipé d'un 3GHz-Pentium 4 et de 512 Mo en Ram). L'intérêt principal de cette approche est qu'elle nous montre les points cusp, points qui

n'apparaissent pas sur les singularités dans l'espace de travail, et qu'elle montre aussi la topologie complexe des singularités dans l'espace articulaire.

4.3. ANALYSE DESCRIPTIVE DES SINGULARITES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

Dans cette section, nous présentons une analyse descriptive des singularités dans différentes sections de l'espace articulaire du manipulateur utilisé dans [Innocenti 92], [McAree 99] et [Merlet 00] et dont les paramètres ont été rappelés ci-dessus.

En utilisant l'approche présentée dans le paragraphe précédent, nous calculons pour différentes valeurs de ρ_1 les sections des singularités. La figure 4.5 montre, pour des valeurs croissantes de ρ_1 , les singularités dans l'espace articulaire. Sur la figure 4.5, les points cusp sont encerclés en bleu, les zones à 0, 2, 4 et 6 modes d'assemblage sont colorées respectivement en blanc, gris clair, gris foncé et noir.

Nous remarquons tout d'abord, à partir de l'analyse des différentes sections des singularités (Figure 4.5) du manipulateur étudié, que le nombre des points cusp n'est pas le même pour toutes les sections. Nous trouvons pour ce manipulateur des sections à 0, 2, 4, 6 ou 8 points cusp. Ce phénomène est nouveau, il n'apparaît pas pour les manipulateurs sériels où le nombre de points cusp est constant dans toutes les sections de l'espace de travail d'un manipulateur précis.

Les sections à zéro points cusp pour ce manipulateur sont obtenues pour des petites valeurs de ρ_1 (pour $\rho_1=0.05$ seulement sur la figure 4.5), où les singularités sont composées de deux courbes singulières séparées et fermées définissant une petite région à deux modes d'assemblage du manipulateur et une grande cavité (les courbes sont très proches sur la figure 4.5 pour $\rho_1=0.05$, c'est pour cette raison qu'on ne voit pas la région à deux modes d'assemblage). Nous appelons « cavités » les zones à 0 modes d'assemblage du manipulateur.

En augmentant la valeur de ρ_1 , deux points cusps apparaissent, la cavité devient plus petite, et une zone à 4 modes d'assemblage apparaît (pour $\rho_1=2$). Ensuite deux nouveaux points cusps apparaissent donnant lieu à la naissance d'une nouvelle zone à 4 modes d'assemblage (pour $\rho_1=2.8$). Nous avons six points cusp et une petite cavité pour $\rho_1=6$, pour $\rho_1=8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$ et 26 nous avons aussi six points cusp mais la cavité est remplacée par une zone à six modes d'assemblage. Huit points cusps apparaissent pour des sections ayant des valeurs de ρ_1 voisines de 27. Ensuite, deux points cusp et la zone à six

modes d'assemblage disparaissent pour $\rho_1=29$. Finalement, le nombre de points cusps se stabilise à quatre définissant une zone centrale à quatre modes d'assemblage entourée par une zone à deux modes d'assemblage ($\rho_1 \geq 31$).

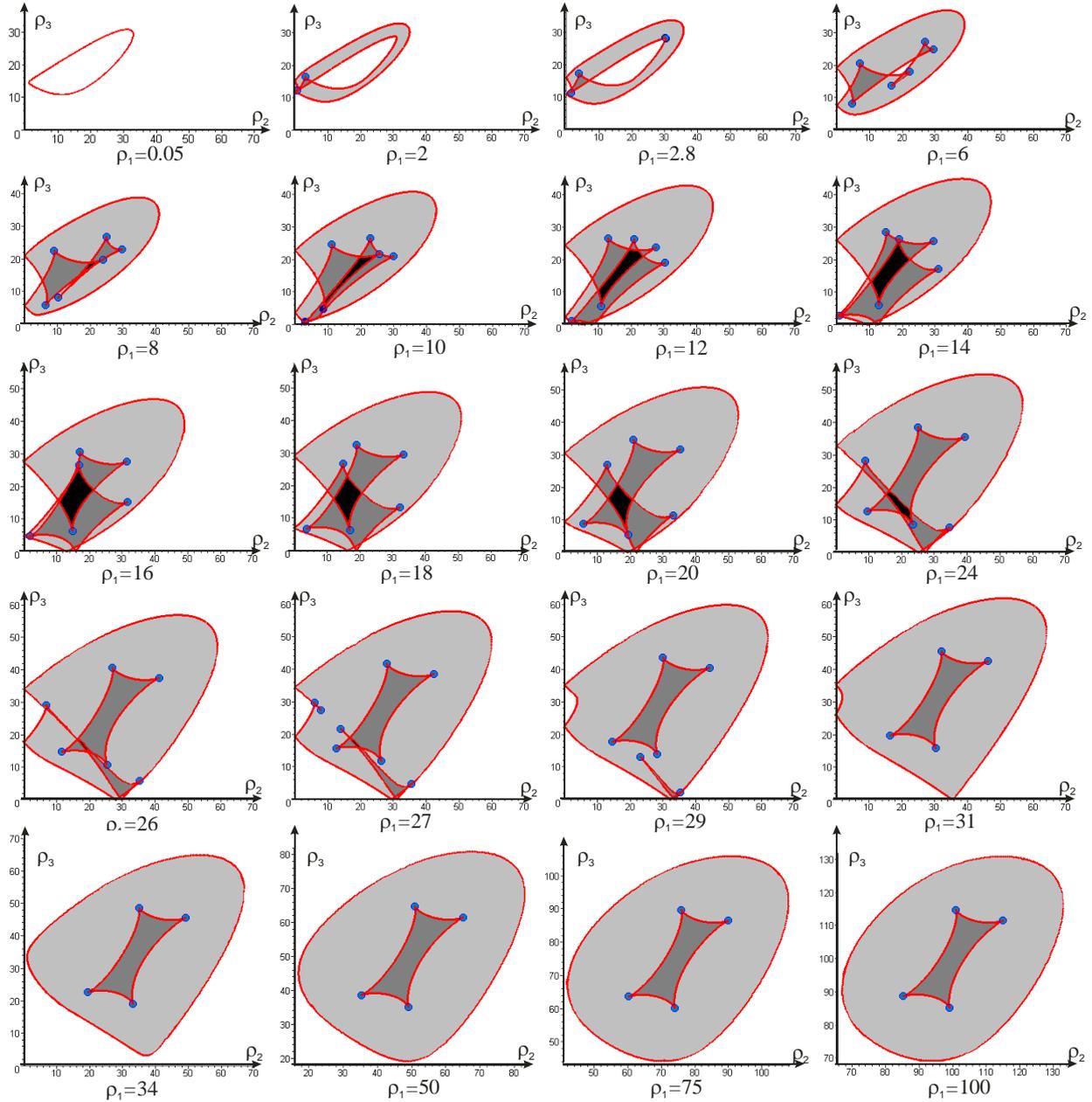


Figure 4.5 : Courbes de singularités dans l'espace articulaire pour des valeurs de ρ_1 croissantes

Il est intéressant de noter que la topologie stable des singularités pour $\rho_1 \geq 31$ est similaire à une topologie fréquemment trouvée des sections de l'espace de travail des manipulateurs sériels 3R orthogonaux [Baili 04]. Cependant les manipulateurs sériels présentent les mêmes sections partout dans leur espace de travail (les sections qui passent par l'axe de la première

articulation) et le changement de nombre de points cusp n'aura lieu qu'en changeant la géométrie du manipulateur.

L'analyse menée ci-dessus montre la complexité de la topologie de l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR planaires parallèles. Contrairement aux manipulateurs sériels, la forme des courbes de singularités et le nombre de points cusps dépendent de la section choisie de l'espace articulaire. Par suite la planification des trajectoires n'est pas simple dans les zones de l'espace articulaire où les courbes de singularités ont des formes compliquées. Cependant, il est plus pertinent de planifier des trajectoires dans les zones où la topologie des singularités est stable (pour les valeurs élevées de ρ_1).

Pour avoir les singularités dans tout l'espace articulaire (en 3D), nous pouvons étendre notre approche présentée dans le paragraphe précédent en ajoutant l'étape suivante :

Étape 5 : Nous calculons les singularités dans des sections de l'espace articulaire pour une série de valeurs de ρ_1 très proches et consécutives. Pour ce faire, nous exécutons les étapes 2 à 4 de l'approche pour les différentes valeurs de ρ_1 . Finalement, nous rassemblons les points singuliers calculés dans un seul fichier pour avoir les singularités dans l'espace articulaire (ρ_1, ρ_2, ρ_3). Pour une meilleure représentation surfacique, nous avons utilisé la fonction « mesh » d'un outil de CAO.

La figure 4.6 montre la surface des singularités dans l'espace articulaire du manipulateur étudié pour ρ_1 variant de 0 à 50.

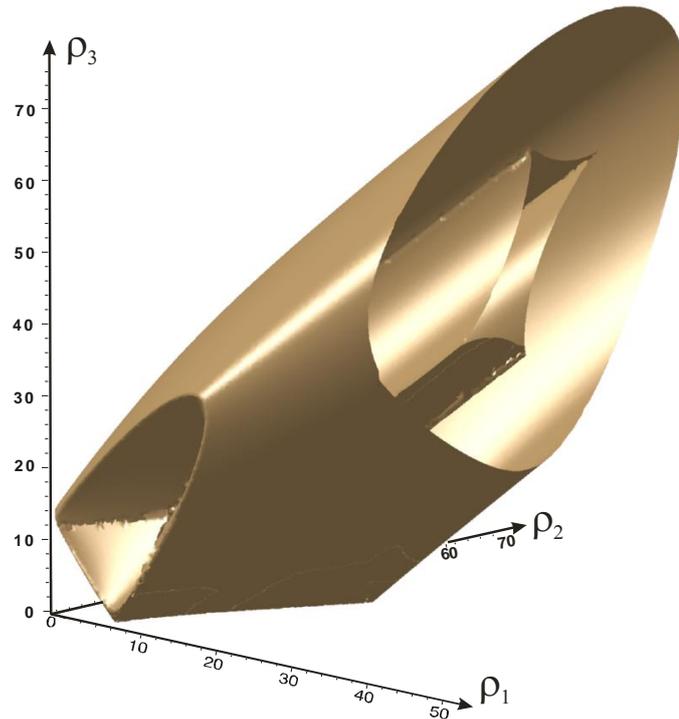


Figure 4.6 : Singularités dans l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR étudié pour ρ_1 variant de 0 à 50.

La surface des singularités en 3D dans l'espace articulaire présente un intérêt certain :

i : pour la planification de trajectoires dans l'espace articulaire, parce qu'elle montre clairement les zones non singulières dans cet espace.

ii : pour la conception de manipulateurs, parce que cette surface constitue un outil intéressant pour la définition des butées articulaires du manipulateur (voir chapitre 6).

On voit bien sur la surface de la figure 4.6 que le nombre de points cusp et la topologie des singularités deviennent stables à partir d'une certaine valeur de ρ_1 ($\rho_1 > 31$).

Ce phénomène a été observé dans l'espace articulaire de tous les manipulateurs 3-RPR que nous avons étudiés. Nous le montrons sur un autre manipulateur 3-RPR défini par les paramètres de conception suivants : $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (3,0)$, $A_3 = (1.1,2.7)$, $d_1 = 1.3$, $d_2 = 0.9$ et $d_3 = 0.4$. La topologie stable des singularités de ce manipulateur a lieu pour des valeurs de ρ_1 supérieures à 5. La figure 4.7 montre la topologie stable des singularités dans deux sections de l'espace articulaire pour ρ_1 égal à 5 et 20. La topologie est similaire et le nombre de points cusp est le même pour ces deux sections.

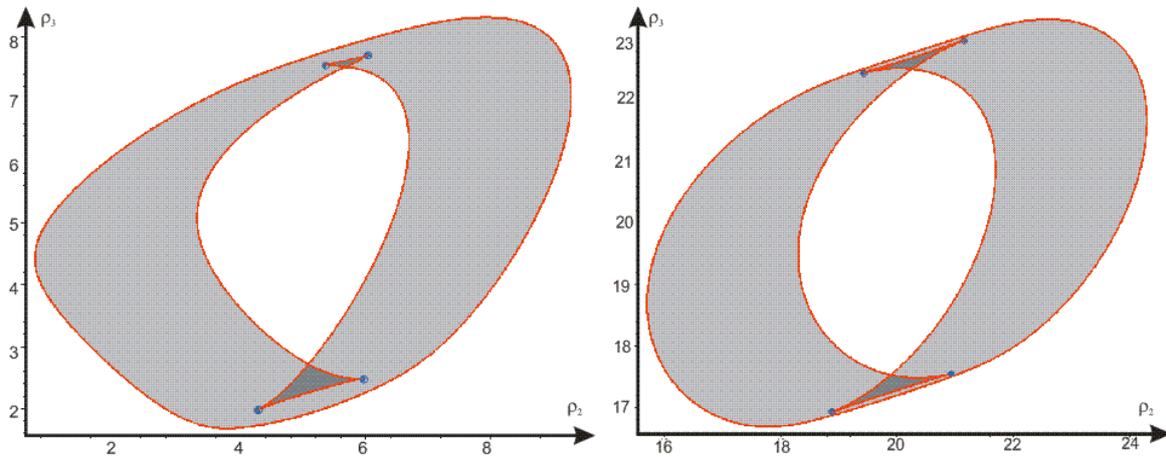


Figure 4.7 : Sections de singularités de l'espace articulaire pour $\rho_1=5$ (à gauche) et $\rho_1=20$ (à droite). Topologie stable.

Pour faire face à la complexité de la topologie des singularités dans l'espace articulaire, nous pouvons, au début du processus de conception, choisir des manipulateurs 3-RPR ayant une base et une plateforme mobile semblables. Ces manipulateurs ne sont pas cuspidaux [McAree 99] [Kong 01], par suite la topologie de leurs singularités est moins complexe que celle des manipulateurs cuspidaux. Sur la figure 4.8, nous montrons les surfaces de singularités dans l'espace articulaire de deux manipulateurs 3-RPR ayant une base et une plateforme semblables (leurs angles sont égaux deux à deux) pour ρ_1 variant de 0 à 50, le manipulateur 2 a une base et une plateforme congruentes (leurs côtés sont égaux deux à deux). Leurs paramètres sont les suivants :

Manipulateur 1		Manipulateur 2	
$A_1=(0, 0)$	$d_1=10$	$A_1=(0, 0)$	$d_1=10$
$A_2=(20, 0)$	$d_2=13.416$	$A_2=(10, 0)$	$d_2=13.416$
$A_3=(8, 24)$	$d_3=12.649$	$A_3=(4, 12)$	$d_3=12.649$

Tableau 4.1 : Paramètres géométriques des deux manipulateurs non cuspidaux

Ces deux manipulateurs ont des topologies de singularités très simples même pour les petites valeurs des variables articulaires. Nous remarquons sur la figure 4.8 que le manipulateur 2 n'admet pas de surfaces de singularités à l'intérieur de son espace articulaire, ce qui le rend intéressant a priori. Cependant ce genre de manipulateur est toujours en configuration singulière lorsque la plateforme mobile est parallèle à la base (orientation nulle de la plateforme).

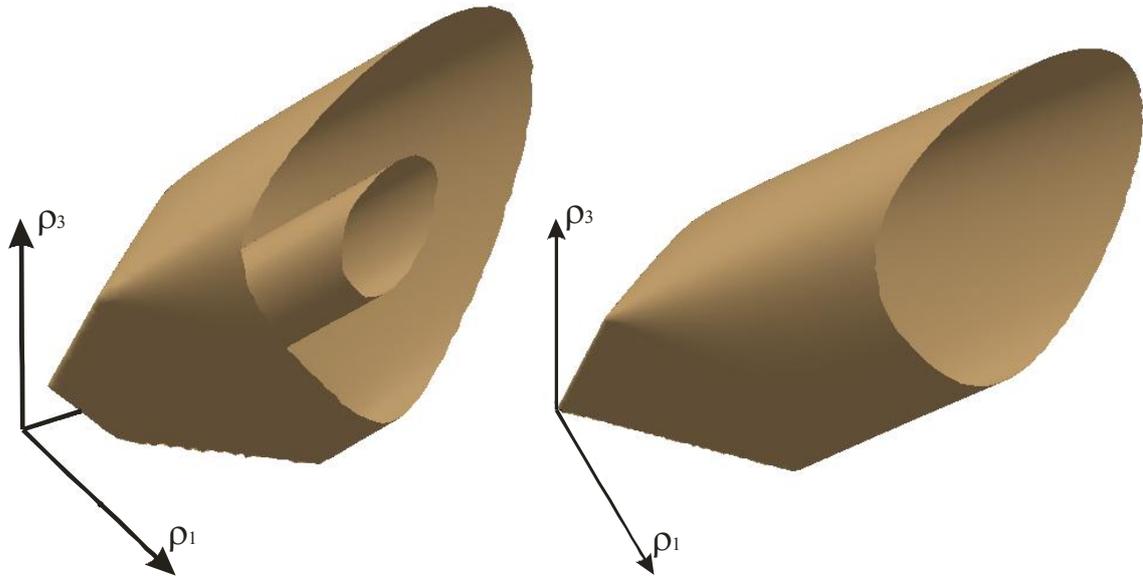


Figure 4.8 : Singularités dans l'espace articulaire de deux manipulateurs 3-RPR à plateformes semblables pour ρ_1 variant de 0 à 50

La majorité des travaux de recherche sur les manipulateurs parallèles était centrée sur l'analyse et l'optimisation de l'espace de travail. L'étude de la topologie des singularités dans l'espace articulaire pourra être considérée comme un outil complémentaire pour la conception de manipulateurs. Elle pourra être très utile pour la comparaison de différentes géométries de manipulateurs.

5. DETERMINATION DES POINTS CUSP DES MANIPULATEURS 3-RPR PARALLELES

Pour les manipulateurs 3R sériels, les points cusp étaient calculés en dérivant la condition pour laquelle le polynôme caractéristique du modèle géométrique inverse du manipulateur admettait une racine triple, ce polynôme étant du 4^{ème} degré [El Omri 95], [Baili 04]. Cette approche est beaucoup plus compliquée si on l'applique au polynôme du modèle géométrique direct des manipulateurs 3-RPR parallèles, parce que ce polynôme est du 6^{ème} degré.

Dans ce paragraphe, nous présentons la condition d'existence des points cusp établie dans [McAree 99] et ses limites. Puis nous proposons un algorithme de détection et de calcul des points cusp d'un manipulateur 3-RPR quelconque. Finalement nous illustrons quelques exécutions de cet algorithme.

5.1. CONDITION D'EXISTENCE DES POINTS CUSP

L'approche intéressante proposée par McAree pour étudier les points cusp consiste à écrire la condition pour laquelle le manipulateur 3-RPR perd ses contraintes de premier et de second ordre. Sur la configuration où le manipulateur 3-RPR perd ses contraintes de premier et de second ordre, trois solutions au modèle géométrique direct coïncident (par suite trois modes d'assemblage coïncident).

McAree a montré que cette condition conduit à la forme algébrique suivante [McAree 99]:

$$\mathbf{v}^T \left[u_1 \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} + u_2 \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} + u_3 \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right] \mathbf{v} = 0 \quad (4.11)$$

Où \mathbf{v} est un vecteur unitaire du noyau gauche de la matrice $\partial \Gamma / \partial \boldsymbol{\theta}$, et u_1 , u_2 et u_3 sont les trois composantes d'un vecteur unitaire \mathbf{u} du noyau droite de $\partial \Gamma / \partial \boldsymbol{\theta}$. Cette équation a été obtenue après un calcul algébrique compliqué que nous avons repris.

Nous rappelons que le noyau d'une matrice \mathbf{A} est défini comme le groupe des vecteurs \mathbf{w} tel que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$.

McAree, dans son étude, a cherché les points cusp graphiquement mais il n'a pu utiliser cette condition (4.11), à cause de la difficulté de sa résolution. Cette condition sera développée et exploitée dans ce chapitre, elle sera à la base d'un algorithme de détection des points cusp des manipulateurs 3-RPR.

Les lignes et les colonnes non nulles de la matrice adjointe de la matrice $\partial \Gamma / \partial \boldsymbol{\theta}$, sont les noyaux gauches et droites respectivement. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de l'équation (4.11) peuvent être choisis parmi les lignes et les colonnes non nulles de la matrice adjointe de $\partial \Gamma / \partial \boldsymbol{\theta}$ respectivement.

La matrice adjointe de la matrice $\partial \Gamma / \partial \boldsymbol{\theta}$ est la matrice conjuguée de la matrice transposée de $\partial \Gamma / \partial \boldsymbol{\theta}$:

$$\text{adj} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) = \begin{pmatrix} k_1 k_2 & -k_2 k_5 & k_3 k_5 \\ k_3 k_4 & k_2 k_6 & k_3 k_6 \\ -k_1 k_4 & k_4 k_5 & k_1 k_6 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Où

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 2\rho_2 \left((A_{3x} - A_{2x})s_2 + \rho_3 s_{23} - A_{3y}c_2 \right) & k_4 &= 2\rho_1 \left(\rho_3 s_{13} + A_{3x}s_1 - A_{3y}c_1 \right) \\
 k_2 &= -2\rho_3 \left(\rho_1 s_{13} + A_{3x}s_3 - A_{3y}c_3 \right) & k_5 &= -2\rho_2 \left(\rho_1 s_{12} + A_{2x}s_2 \right) \\
 k_3 &= -2\rho_3 \left((A_{3x} - A_{2x})s_3 + \rho_2 s_{23} - A_{3y}c_3 \right) & k_6 &= 2\rho_1 \left(\rho_2 s_{12} + A_{2x}s_1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

En supposant que les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont respectivement les premières lignes et colonnes de la matrice adjointe, la condition d'existence des points cusp (4.11) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} k_1 k_2 & k_3 k_4 & -k_1 k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 k_2 \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \theta^2} - k_2 k_5 \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial \theta^2} + k_3 k_5 \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial \theta^2} \\ \begin{pmatrix} k_1 k_2 \\ k_3 k_4 \\ -k_1 k_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.14}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \theta^2} &= 2 \begin{bmatrix} \rho_1 (A_{2x}c_1 + \rho_2 c_{21}) & -\rho_1 \rho_2 c_{21} & 0 \\ -\rho_1 \rho_2 c_{21} & -\rho_2 (A_{2x}c_2 - \rho_1 c_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial \theta^2} &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_2 ((A_{2x} - A_{3x})c_2 - \rho_3 c_{23} - A_{3y}s_2) & -\rho_2 \rho_3 c_{23} \\ 0 & -\rho_2 \rho_3 c_{23} & \rho_3 ((A_{2x} - A_{3x})c_3 + \rho_2 c_{23} - A_{3y}s_3) \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial \theta^2} &= 2 \begin{bmatrix} \rho_1 (A_{3x}c_1 + \rho_3 c_{31} + A_{3y}s_1) & 0 & -\rho_1 \rho_3 c_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\rho_1 \rho_3 c_{31} & 0 & \rho_3 (\rho_1 c_{31} - A_{3x}c_3 - A_{3y}s_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

L'équation (4.14) est alors fonction des paramètres géométriques du manipulateur et des variables $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2$ et θ_3 .

Dans [McAree 99], cette équation a été laissée sous la forme (4.14) et n'a pas été exploitée. L'auteur pensait que son développement n'apporterait pas d'information supplémentaire.

Nous pensons, au contraire, que le développement de cette équation peut être utile, ne serait-ce que pour l'identification et le calcul des points cusps. Dans notre travail, nous avons développé un algorithme pour la détermination des points cusp dans l'espace articulaire de n'importe quel manipulateur 3-RPR. Cet algorithme, implémenté dans MAPLE, permet de résoudre cette équation.

Note : les formules (4.13) et (4.15) ont été intégralement recalculées dans ce mémoire. En effet, les expressions fournies dans [McAree 99] se sont avérées comporter plusieurs erreurs.

5.2. ALGORITHME POUR LE CALCUL DES POINTS CUSP

5.2.1. Algorithme

L'équation d'existence des points cusps (4.14) est fonction des six variables $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2$ et θ_3 . Nous ne pouvons pas résoudre cette équation telle quelle, en raison du nombre élevé de ses variables. Pour diminuer le nombre de variables, nous considérons aussi l'équation des singularités (4.8) qui est exprimée en fonction des variables $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Notre premier but est d'établir une équation, pour la détermination des points cusp, exprimée seulement en fonction des variables ρ_1, α et θ_1 . Ainsi nous considérons le système d'équations suivant, calculé d'après la géométrie du manipulateur 3-RPR.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_2) = \frac{-A_{2x} + \rho_1 \cos(\theta_1) + d_1 \cos(\alpha)}{\rho_2} \\ \cos(\theta_3) = \frac{-A_{3x} + \rho_1 \cos(\theta_1) + d_3 \cos(\alpha + \beta)}{\rho_3} \\ \sin(\theta_2) = \frac{\rho_1 \sin(\theta_1) + d_1 \sin(\alpha)}{\rho_2} \\ \sin(\theta_3) = \frac{-A_{3y} + \rho_1 \sin(\theta_1) + d_3 \sin(\alpha + \beta)}{\rho_3} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Les étapes de notre algorithme sont les suivantes :

1. Nous substituons les expressions de $\cos(\theta_2), \cos(\theta_3), \sin(\theta_2)$ et $\sin(\theta_3)$ du système (4.16) dans l'équation des singularités (4.8). Puis, nous remplaçons dans cette même équation, $\sin(\alpha), \cos(\alpha), \cos(\theta_1)$ et $\sin(\theta_1)$ par leurs expressions correspondantes en fonction de la tangente de leurs angles moitié $\tan(\alpha/2)$ et $\tan(\theta_1/2)$. Ainsi, l'équation (4.8) s'écrira sous la forme suivante :

$$F_1(\rho_1, t, t_1) = 0 \quad (4.17)$$

Où $t = \tan(\alpha/2)$ et $t_1 = \tan(\theta_1/2)$.

2. Nous substituons les expressions de $\cos(\theta_2), \cos(\theta_3), \sin(\theta_2)$ et $\sin(\theta_3)$ du système (4.16) dans l'équation d'existence des points cusp (4.14). Puis, nous remplaçons dans cette même équation, $\sin(\alpha), \cos(\alpha), \cos(\theta_1)$ et $\sin(\theta_1)$ par leurs expressions

correspondantes en fonction de la tangente de leurs angles moitié $\tan(\alpha/2)$ et $\tan(\theta_1/2)$. Ainsi, l'équation (4.14) s'écrira sous la forme suivante :

$$E_1(\rho_1, t, t_1) = 0 \quad (4.18)$$

Les équations des singularités et d'existence des points cusp sont alors maintenant fonction seulement de 3 variables ρ_1 , t et t_1 .

3. Nous fixons la valeur de ρ_1 , et nous introduisons les valeurs des paramètres de conception du manipulateur $d_1, d_2, d_3, A_{2x}, A_{3x}$ et A_{3y} . Nous avons remarqué que la substitution directe des valeurs réelles de $\sin(\beta)$ et $\cos(\beta)$ dans les équations (4.17) et (4.18) rend la résolution des équations difficiles dans les étapes suivantes, leurs valeurs réelles alourdissant le calcul. Pour cela, nous exprimons $\sin(\beta)$ et $\cos(\beta)$ en fonction d'un paramètre intermédiaire h , ce paramètre est la hauteur du triangle de la plateforme (Figure 4.1).
4. Nous éliminons la variable $t = \tan(\alpha/2)$ des deux équations (4.17) et (4.18) en utilisant la fonction « *Resultant* » de MAPLE. L'équation obtenue est un polynôme de degré 96 en $t_1 = \tan(\theta_1/2)$. Ce polynôme peut être factorisé sous la forme suivante :

$$P_1^{a_1} P_2^{a_2} P_3^{a_3} \dots P_{n-1}^{a_{n-1}} P_n^{a_n} Q = 0 \quad (4.19)$$

Où Q est un polynôme de degré 24 en t_1 , et P_1, P_2, \dots, P_n sont des polynômes quartiques et quadratiques en t_1 . Nous signalons que cette factorisation n'a pas pu être obtenue sans l'utilisation du paramètre intermédiaire h .

5. Nous substituons la valeur réelle du paramètre h , et nous résolvons l'équation (4.19) pour t_1 . Chaque racine t_{1i} du polynôme (4.19) obtenue est substituée dans l'équation des singularités (4.17) qui à son tour est résolue pour t_i . Ainsi, à chaque t_{1i} correspondent plusieurs t_{ij} racines de (4.17). Par conséquent, nous obtenons plusieurs couples solutions (t_{ij}, t_{1i}) .
6. Nous substituons les valeurs de chaque couple solution (t_{ij}, t_{1i}) dans l'équation d'existence des points cusp (4.18). Nous conservons les couples qui satisfont l'égalité dans cette équation et nous rejetons les autres couples.

Les couples solutions conservés (t_{ij}, t_{1i}) doivent donner les coordonnées des points cusp. Pour vérifier cela, nous calculons les solutions au modèle géométrique

direct pour chacune des solutions. Dans plusieurs exemples, nous avons trouvé des couples qui ne correspondaient pas à trois solutions coïncidentes au modèle géométrique direct, ce qui signifie qu'ils ne sont pas associés à des points cusp. Nous rejetons ces couples, et nous ne conservons que les couples qui admettent trois solutions coïncidentes au MGD. Ces couples sont les coordonnées des points cusp. Nous calculons les valeurs de leurs angles α et θ_1 et nous les nommons $(\alpha_{ij}, \theta_{1i})_{\text{cusp}}$.

Après de nombreuses exécutions de l'algorithme pour différents manipulateurs, nous avons remarqué que tous les points cusp étaient déterminés par le polynôme Q de degré 24 de l'équation (4.19), et que tous les autres polynômes P_1, P_2, \dots, P_n ne généraient que des solutions parasites. Par suite, nous pouvons conjecturer que les points cusp sont déterminés par le polynôme Q bien que nous n'ayons pas de preuve mathématique. Toutes les racines réelles de Q correspondent aux points cusp.

Avec cette conjecture, notre algorithme se simplifie considérablement parce qu'au lieu de résoudre un polynôme de degré 96 (4.19) nous en résolvons un de degré 24 (Q). Nous n'avons plus besoin de vérifier par calcul du modèle géométrique direct la validité de chaque solution obtenue.

Pour implémenter ce résultat dans notre algorithme, nous remplaçons les étapes 5 et 6 par les étapes 5' et 6' suivantes, et nous supprimons l'étape 7.

- 5'. Nous substituons la valeur du paramètre h . Nous résolvons le polynôme Q (4.19) pour t_1 . Nous substituons chaque racine réelle t_{1i} dans l'équation des singularités (4.17) qui à son tour est résolue pour t_i . Ainsi, pour chaque t_{1i} correspondent plusieurs t_{ij} racines de (4.17). Par conséquent, nous obtenons plusieurs couples solutions (t_{ij}, t_{1i}) .
- 6'. Nous substituons les valeurs de chaque couple solution (t_{ij}, t_{1i}) dans l'équation d'existence des points cusp (4.18). Les couples qui satisfont l'égalité dans cette équation sont les coordonnées des points cusp. Nous les nommons $(\alpha_{ij}, \theta_{1i})_{\text{cusp}}$.

Finalement, pour calculer les coordonnées des points cusp dans l'espace articulaire (ρ_1, ρ_2, ρ_3) , nous utilisons le système d'équations (4.10) du paragraphe précédent qui nous donne les valeurs de ρ_2 et ρ_3 . Ainsi, nous obtenons les coordonnées des points cusp dans une section de l'espace articulaire pour une valeur de ρ_1 fixée.

5.2.2. Conclusion importante

Dans l'étape 7, nous avons remarqué que l'équation d'existence des points cusp génère des solutions qui n'admettent pas trois solutions coïncidentes pour leur modèle géométrique direct, ces solutions sont parasites et ne sont pas associées à des points cusp. Cela signifie que la condition d'existence des points cusp établie dans [McAree 99] n'est pas une condition nécessaire et suffisante mais seulement une condition suffisante.

5.2.3. Exécution de l'algorithme

Après l'exécution de l'algorithme sur différents manipulateurs 3-RPR parallèles et pour différentes sections de l'espace articulaire, nous avons retrouvé les résultats des analyses descriptives menées dans le paragraphe 4.3. Nous avons trouvé que le nombre de points cusp varie d'une section de l'espace articulaire à une autre, et qu'il devient stable à partir d'une certaine valeur de ρ_1 . Nous avons remarqué que le nombre maximal de points cusp pour un manipulateur dépend des paramètres de ce manipulateur, le premier manipulateur qui va être présenté admet au maximum huit points cusp, tandis que le deuxième manipulateur n'en admet que six. Nous n'avons pas pu trouver un manipulateur ayant plus que huit points cusp dans une section de son espace articulaire.

La durée d'exécution de l'algorithme dépend des paramètres du manipulateur choisi et de la valeur de ρ_1 . Elle dépend aussi énormément du nombre de digits (chiffres après la virgule) utilisé, environ 90 digits sont nécessaires pour garantir des résultats précis et sans solutions parasites. Pour 90 digits, la durée d'exécution de l'algorithme sur un ordinateur équipé d'un 3GHz-Pentium 4 et de 512 Mo de Ram est de 2 minutes environ.

Nous présentons ci-dessous les résultats de l'exécution de l'algorithme sur deux manipulateurs 3-RPR différents, pour quelques sections de l'espace articulaire.

5.2.3.1. Manipulateur 3-RPR étudié dans [Innocenti 92] et [McAree 99]

Nous commençons par le manipulateur dont les paramètres sont présentés au début de ce chapitre, nous montrons trois exécutions différentes dans trois sections de l'espace articulaire.

➤ Section de l'espace articulaire pour $\rho_1=14.98$:

Pour la même valeur de ρ_1 fixée dans [Innocenti 92] et [McAree 99], l'algorithme détecte six points cusp au lieu de cinq trouvés graphiquement dans [McAree 99]. La figure 4.9 montre les singularités dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=14.98$, les six

points cusp sont encerclés. Le sixième point cusp manqué dans [McAree 99] est le point A, il est encerclé en gras sur la figure 4.9, et encadré séparément. La vue agrandie confirme que le point A est bien un point cusp.

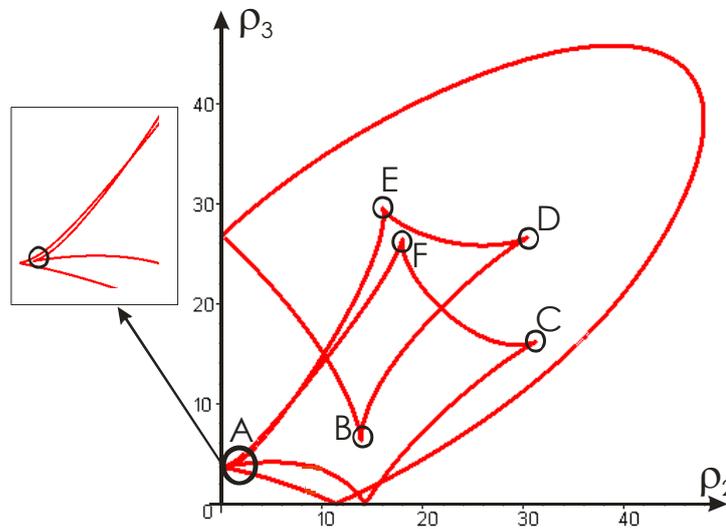


Figure 4.9 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR étudié pour $\rho_1=14.98$

Les coordonnées des points cusp sont données dans le tableau suivant :

	α	θ_1	ρ_2	ρ_3
Cusp A	50.67 deg	-69.12 deg	0.84	3.77
Cusp B	-2.59 deg	177.32 deg	13.85	6.26
Cusp C	-122.89 deg	114.05 deg	31.27	16.17
Cusp D	57.48 deg	133.77 deg	30.44	26.61
Cusp E	-0.59 deg	15.46 deg	16.02	29.56
Cusp F	170.37 deg	-10.65 deg	17.98	26.44

Tableau 4.2 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=14.98$

Ce résultat montre bien que McAree relevait les coordonnées des points cusp graphiquement sur le tracé des singularités au lieu de résoudre l'équation qu'il a écrite pour les calculer, ce qui justifie la manqué du sixième point cusp A dans son étude. Cela met en relief l'intérêt et la nouveauté de notre étude.

➤ Section de l'espace articulaire pour $\rho_1=27$:

Pour le même manipulateur avec $\rho_1=27$, huit points cusp existent. La figure 4.10 montre les singularités dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=27$ et les huit points cusp (encerclés).

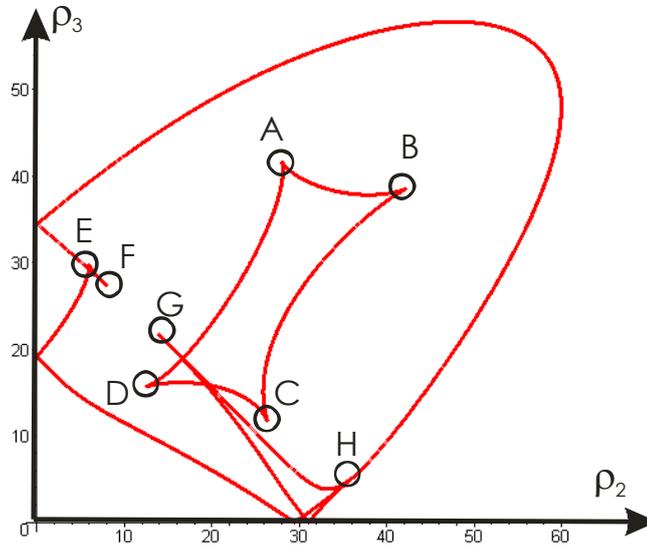


Figure 4.10 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR étudié pour $\rho_1=27$

Les coordonnées des huit points cusp sont données dans le tableau suivant :

	α	θ_1	ρ_2	ρ_3
Cusp A	-0.95 deg	15.47 deg	28.01	41.63
Cusp B	56.20 deg	129.36 deg	42.21	38.54
Cusp C	-5.11 deg	-168.45 deg	26.31	11.84
Cusp D	52.23 deg	-63.22 deg	12.56	15.71
Cusp E	-168.17 deg	8.70 deg	5.92	29.74
Cusp F	-125.54 deg	43.86 deg	7.98	27.36
Cusp G	-113.95 deg	63.88 deg	13.96	21.66
Cusp H	-129.36 deg	103.65 deg	35.57	4.80

Tableau 4.3 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=27$

➤ Section de l'espace articulaire pour $\rho_1=34$:

Pour le même manipulateur avec $\rho_1=34$, quatre points cusp existent. La figure 4.11 montre les singularités dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=34$ et les quatre points cusp (encerclés).

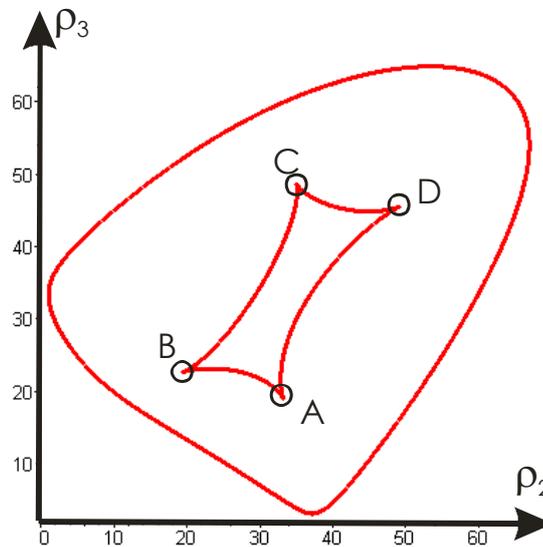


Figure 4.11 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR étudié pour $\rho_1=34$

Les coordonnées des quatre points cusp sont données dans le tableau suivant :

	α	θ_1	ρ_2	ρ_3
Cusp A	-3.84 deg	-167.01 deg	33.22	19.00
Cusp B	52.71 deg	-61.76 deg	19.46	22.68
Cusp C	-1.07 deg	15.43 deg	35.00	48.64
Cusp D	55.85 deg	128.19 deg	49.14	45.52

Tableau 4.4 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=34$

5.2.3.2. Autre manipulateur 3-RPR parallèle

Nous choisissons arbitrairement un autre manipulateur 3-RPR parallèle, ses paramètres géométriques sont les suivants :

$$\begin{array}{ll}
 A_1=(0, 0) & d_1=13 \\
 A_2=(30, 0) & d_2=9 \\
 A_3=(11, 27) & d_3=4
 \end{array}$$

Nous calculons les points cusp dans une section de l'espace articulaire de ce manipulateur pour $\rho_1=3$. En exécutant l'algorithme nous trouvons quatre points cusp. La figure 4.12 montre les singularités dans une section de l'espace articulaire de ce nouveau manipulateur pour $\rho_1=3$ et les quatre points cusp (encerclés).

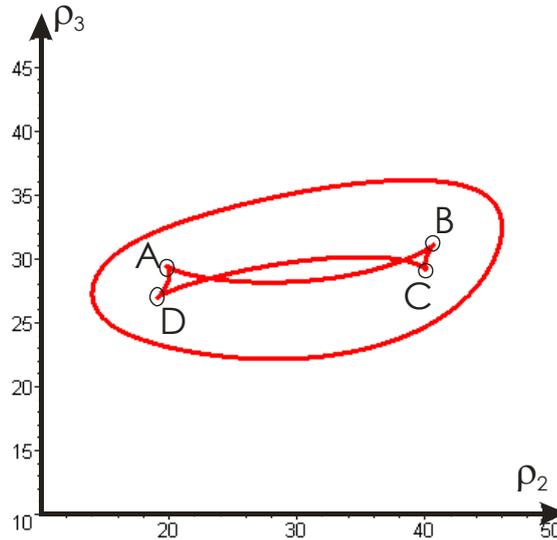


Figure 4.12 : Singularités et points cusp dans une section de l'espace articulaire du nouveau manipulateur 3-RPR pour $\rho_1=3$

Les coordonnées des quatre points cusp sont données dans le tableau suivant :

	α	θ_1	L_2	L_3
Cusp A	12.52 deg	-145.11 deg	19.80	29.43
Cusp B	156.76 deg	-63.48 deg	40.68	31.11
Cusp C	-168.74 deg	26.38 deg	40.08	29.14
Cusp D	-20.32 deg	114.01 deg	19.11	27.01

Tableau 4.5 : Coordonnées des quatre points cusp pour $\rho_1=3$

6. CONCLUSION

Le travail présenté dans ce chapitre est basé sur une révision minutieuse d'une étude théorique précédente assez compliquée et qui, à notre connaissance, n'avait jamais été exploitée. Au cours de cette révision nous avons corrigé quelques unes de ses formules mathématiques qui comportaient des erreurs.

Une approche pour le calcul des singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR planaires parallèles a été présentée premièrement dans ce chapitre. Deuxièmement une analyse descriptive des singularités dans des sections de l'espace articulaire de ces manipulateurs a été exposée, avec une attention particulière portée au nombre de points cusp sur ces courbes singulières [Zein 06b], [Zein 07b]. Contrairement aux manipulateurs sériels, nous avons trouvé que la topologie des singularités et le nombre des points cusp changent d'une section à une autre, et deviennent stables à partir d'une certaine valeur de leur première variable articulaire. Nous avons aussi remarqué que le nombre maximal des points cusp dépend des paramètres géométriques du manipulateur. Après tous nos calculs nous n'avons pas trouvé plus de huit points cusp dans une section de l'espace articulaire d'un manipulateur.

Troisièmement la condition d'existence des points cusp présentée dans [McAree 99] a été révisée et exploitée. Nous avons trouvé que cette condition est suffisante seulement et non nécessaire pour l'existence des points cusp. Un algorithme pour la détection et le calcul des points cusp, dans des sections de l'espace articulaire d'un manipulateur 3-RPR, a été établi. A notre connaissance, ce type d'algorithme n'avait jamais été proposé auparavant. Cet algorithme aboutit à un polynôme de degré 96 qui peut être factorisé grâce à l'introduction d'un paramètre supplémentaire. Nous avons montré au travers d'expérimentations numériques intensives que les coordonnées des points cusp sont les racines réelles d'un polynôme de degré 24 qui constitue l'un des facteurs du polynôme de degré 96 [Zein 06c], [Zein 07b].

Finalement, les résultats de quatre exécutions numériques de l'algorithme de détermination des points cusp sur deux manipulateurs 3-RPR différents ont été exposés.

Cette étude facilite la compréhension des topologies des singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR parallèles. Elle constitue un outil complémentaire pour la conception de ces manipulateurs. Elle est d'un grand intérêt pour la planification des trajectoires étant donné que la détermination des points cusp est nécessaire pour la planification des changements non singuliers de modes d'assemblage.

Cette étude sera exploitée dans le dernier chapitre de ce mémoire où nous établissons des méthodes pour éviter les singularités des manipulateurs 3-RPR parallèles plans.

Dans le chapitre suivant, les conditions de dégénérescence du modèle géométrique direct des manipulateurs 3-RPR seront étudiées.

CHAPITRE 5

DEGENERESCENCE DU MODELE GEOMETRIQUE DIRECT DES MANIPULATEURS PARALLELES DE TYPE 3- RPR

1. INTRODUCTION

Le problème du modèle géométrique direct consiste, pour un manipulateur parallèle dont la géométrie est définie, à déterminer la position et l'orientation de la plateforme mobile à partir de la connaissance des coordonnées articulaires.

Contrairement aux manipulateurs sériels, la résolution du MGD des manipulateurs parallèles est plus compliquée que celle du MGI et nécessite des calculs supplémentaires. Elle conduit généralement à des équations algébriques non linéaires complexes, même si les manipulateurs considérés sont des manipulateurs planaires et à trois degrés de liberté [Hunt 78].

Les manipulateurs planaires parallèles à 3ddl peuvent avoir jusqu'à six solutions différentes à leur modèle géométrique direct [Hunt 83]. Il a été démontré par plusieurs chercheurs que le problème du MGD de ces manipulateurs peut se ramener à la résolution d'un polynôme caractéristique de degré 6 [Pennock 90], [Gosselin 92].

Dans ce chapitre, nous étudions les conditions de dégénérescence du polynôme du MGD des manipulateurs 3-RPR parallèles planaires. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons le problème en rappelant les résultats de travaux antérieurs. Puis, la première condition de dégénérescence sera établie, cette condition aura lieu lorsque les variables articulaires satisfont une certaine relation. Ensuite, une deuxième condition de dégénérescence sera étudiée, cette condition dépend de la géométrie du manipulateur. Elle a permis de définir une nouvelle géométrie de manipulateurs ayant son MGD dégénéré pour toutes leurs configurations articulaires. Finalement, la cinématique du nouveau manipulateur trouvé sera étudiée avec une attention particulière portée sur la topologie des singularités dans l'espace articulaire.

Cette étude sera indispensable dans le chapitre suivant pour établir la procédure de représentation des changements non singuliers de modes d'assemblage du manipulateur 3-RPR. Elle servira à définir les variables nécessaires pour caractériser de façon unique une pose du manipulateur.

2. PRELIMINAIRES

Etant donné que les études précédentes sur le MGD des manipulateurs 3-RPR parallèles, considéraient une paramétrisation unique pour ces manipulateurs [Gosselin 92], nous utilisons dans ce chapitre cette même paramétrisation. Cette paramétrisation est décrite sur le manipulateur 3-RPR de la figure 5.1.

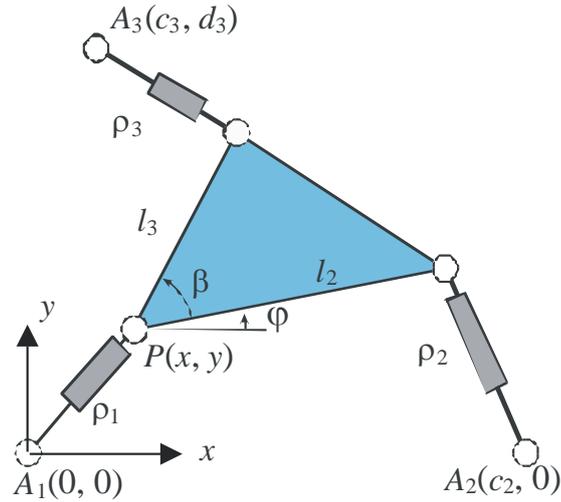


Figure 5.1 : Manipulateur 3-RPR paramétré selon [Gosselin 92]

Le MGD de ce manipulateur pourra être exprimé suivant les trois équations suivantes [Gosselin 92]:

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 \quad (5.1)$$

$$\rho_2^2 = (x + l_2 \cos(\varphi) - c_2)^2 + (y + l_2 \sin(\varphi))^2 \quad (5.2)$$

$$\rho_3^2 = (x + l_3 \cos(\varphi + \beta) - c_3)^2 + (y + l_3 \sin(\varphi + \beta) - d_3)^2 \quad (5.3)$$

Pour résoudre le modèle géométrique direct, Gosselin retranche l'équation (5.1) des équations (5.2) et (5.3) pour obtenir un système de deux équations linéaires en x et y :

$$Rx + Sy + Q = 0 \quad (5.4)$$

$$Ux + Vy + W = 0 \quad (5.5)$$

où :

$$\begin{aligned}
R &= 2l_2 \cos(\varphi) - 2c_2 \\
S &= 2l_2 \sin(\varphi) \\
Q &= -2c_2 l_2 \cos(\varphi) + l_2^2 + c_2^2 - \rho_2^2 + \rho_1^2 \\
U &= 2l_3 \cos(\varphi + \beta) - 2c_3 \\
V &= 2l_3 \sin(\varphi + \beta) - 2d_3 \\
W &= -2d_3 l_3 \sin(\varphi + \beta) - 2c_3 l_3 \cos(\varphi + \beta) + l_3^2 + c_3^2 + d_3^2 - \rho_3^2 + \rho_1^2
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Les expressions de x et y en fonction des paramètres du manipulateur, des variables articulaires et de l'orientation de la plateforme sont calculées d'après les équations (5.4) et (5.5), s'écrivant alors :

$$\begin{cases} x = \frac{SW - VQ}{RV - SU} \\ y = \frac{RW - UQ}{RV - SU} \end{cases} \tag{5.7}$$

Ces expressions sont substituées finalement dans l'équation (5.1) où les sinus et cosinus de l'orientation φ de la plateforme sont exprimés en fonction de $t = \tan(\varphi/2)$. Ceci aboutit au polynôme du MGD qui est un polynôme de degré 6 en t .

Pour obtenir les coordonnées de position de la plateforme mobile dans l'espace de travail, φ est calculée d'après le polynôme caractéristique de degré 6, puis x et y sont obtenus en substituant les valeurs de φ dans le système d'équations (5.7).

Or, les valeurs de x et y ne peuvent être obtenues que si le déterminant $RV-SU$ est non nul. Si ce n'est pas le cas, le MGD dégénère et ne pourra pas être résolu suivant cette méthode. A notre connaissance, le cas dégénéré du MGD $RV-SU=0$ n'a jamais été traité auparavant.

Les conditions sous lesquelles le degré du polynôme caractéristique du MGD diminue ont été recherchées dans [Gosselin 94] et [Kong 01]. Quatre cas différents ont été étudiés : (i) les manipulateurs ayant deux articulations coïncidentes (Figure 5.2a) (ii) les manipulateurs ayant une base et une plateforme alignées non semblables (Figure 5.2b) (iii) les manipulateurs ayant une base et une plateforme semblables (Figure 5.2c) (iv) les manipulateurs ayant une base et une plateforme alignées semblables (Figure 5.2d). Ces quatre types de manipulateurs ont été appelés manipulateurs analytiques de troisième classe [Kong 01].

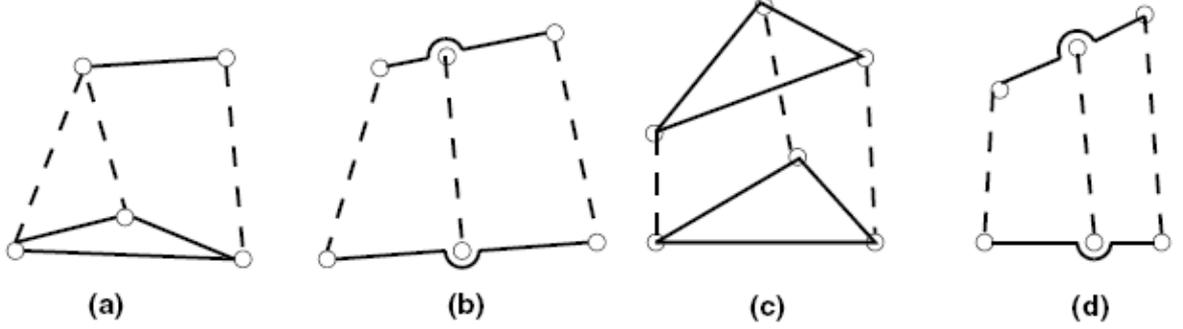


Figure 5.2 : Manipulateurs analytiques de troisième classe

Pour les cas (i), (iii) et (iv) la solution du polynôme du MGD se réduit à la résolution de deux polynômes quadratiques. Pour le cas (ii) la résolution du MGD se réduit à la résolution d'un polynôme de degré 3 en x et à un polynôme quadratique en séquence.

A notre connaissance, aucune autre condition de dégénérescence du MGD n'a été identifiée. Dans la suite de ce chapitre, nous montrons que le MGD pourra dégénérer sous d'autres conditions.

3. PREMIERE CONDITION DE DEGENERESCENCE

3.1. DETERMINATION DE LA PREMIERE CONDITION

La première condition de dégénérescence du MGD est due à la perte de rang de la matrice de résolution des équations (5.4) et (5.5), c'est à dire lorsque le déterminant $RV-SU$ de cette matrice s'annule ($RV-SU=0$).

Comme le déterminant $RV-SU$ dépend seulement des paramètres géométriques du manipulateur et de l'orientation φ de la plateforme, l'équation $RV-SU=0$ génère une condition de dégénérescence du système linéaire (équations 5.4 et 5.5) qui ne dépend que de φ . Cette condition est la suivante :

$$c_2 d_3 + l_2 l_3 \sin(\beta) - (l_2 d_3 + c_2 l_3 \sin(\beta)) \cos(\varphi) + (l_2 c_3 - c_2 l_3 \cos(\beta)) \sin(\varphi) = 0 \quad (5.8)$$

En exprimant les expressions de $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$ en fonction de la tangente de l'angle moitié, l'équation (5.8) aura la forme d'un polynôme quadratique en $t = \tan(\varphi/2)$ définissant deux orientations différentes de la plateforme. Ce polynôme a la forme suivante :

$$\begin{aligned} & (d_3(l_2 + c_2) + l_3 \sin(\beta)(l_2 + c_2))t^2 + \\ & 2(l_2 c_3 - c_2 l_3 \cos(\beta))t - d_3(l_2 - c_2) + l_3 \sin(\beta)(l_2 - c_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pour pouvoir vérifier cette condition de dégénérescence en résolvant le MGD dans l'espace articulaire, il est plus pertinent de l'exprimer en fonction des variables articulaires ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 . Quand le déterminant du système linéaire des équations (5.4) et (5.5) s'annule ($RV-SU=0$), la règle de Cramer implique qu'une condition supplémentaire soit satisfaite pour qu'une solution du système existe : soit $SW-VQ=0$ soit $RW-UQ=0$. Ces deux conditions sont calculées d'après le même système (équations 5.4 et 5.5).

En exprimant la condition $SW-VQ=0$ en fonction de $t = \tan(\varphi/2)$ et des paramètres géométriques du manipulateur, cette condition prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \left(l_3(2c_2l_2 + c_2^2 - \rho_2^2 + l_2^2 + \rho_1^2) \sin(\beta) + d_3(2c_2l_2 + c_2^2 - \rho_2^2 + l_2^2 + \rho_1^2) \right) t^4 \\
& + \left(4l_2d_3l_3 \sin(\beta) - 2l_3(l_2^2 + c_2^2 + 2l_2(c_2 - c_3) + \rho_1^2 - \rho_2^2) \cos(\beta) \right) t^3 + \\
& \left(+2l_2(\rho_1^2 - \rho_3^2 + c_3^2 + d_3^2 + l_3^2) \right) t^2 + \\
& \left(-4l_2l_3(c_2 - 2c_3) \sin(\beta) - 8l_2d_3l_3 \cos(\beta) + 2d_3(l_2^2 + c_2^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2) \right) t + \\
& \left(-4l_2d_3l_3 \sin(\beta) - 2l_3(l_2^2 + c_2^2 + 2l_2(c_2 - c_3) + \rho_1^2 - \rho_2^2) \cos(\beta) + \right) t + \\
& \left(2l_2(\rho_1^2 - \rho_3^2 + c_3^2 + d_3^2 + l_3^2) \right) t + \\
& -l_3(c_2^2 - \rho_2^2 + l_2^2 + \rho_1^2 - 2c_2l_2) \sin(\beta) + d_3(c_2^2 + l_2^2 - 2c_2l_2 + \rho_1^2 - \rho_2^2) = 0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Soient t_1 et t_2 les solutions du polynôme de degré 2 défini par l'équation (5.9). La substitution de ces deux solutions dans l'équation (5.10) donne deux conditions de dégénérescence différentes D1 et D2 dépendant des variables articulaires et des paramètres géométriques du manipulateur. Vu que le polynôme de l'équation (5.10) est de degré 2 en ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 et vu que les solutions t_1 et t_2 de l'équation (5.9) sont indépendantes de ces trois variables, alors les deux conditions de dégénérescence D1 et D2 sont aussi des polynômes de degré 2 en ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 . Les expressions des deux conditions de dégénérescence D1 et D2 sont très lourdes lorsque les paramètres géométriques du manipulateur sont laissés comme variables. Lorsque des valeurs réelles sont affectées aux paramètres du manipulateur, les conditions D1 et D2 auront la forme simple d'un polynôme du 2nd degré et pourront être résolues facilement. Un cas particulier sera présenté et interprété géométriquement dans la section 3.3.

3.2. RESOLUTION DU MODELE GEOMETRIQUE DIRECT DEGENERE

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté les conditions que doivent satisfaire les variables articulaires d'un manipulateur 3-RPR pour que le modèle géométrique direct de

ce manipulateur dégénère. Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode de résolution du MGD dans le cas de dégénérescence.

Considérons que les variables articulaires ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 satisfont l'une des deux conditions de dégénérescence D1 ou D2. Le polynôme caractéristique de degré 6 $P(t)$ pourra être toujours utilisé pour le calcul des orientations de la plateforme dès lors que nous n'avons pas recours à la division par $RV-SU (=0)$ lors de la détermination du polynôme $P(t)$.

Les équations (5.4) et (5.5) peuvent toujours s'écrire sous cette forme :

$$\begin{cases} x(RV - SU) = SW - VQ \\ y(RV - SU) = RW - UQ \end{cases} \quad (5.11)$$

En multipliant l'équation (5.1) par $(RV-SU)^2$, et en substituant $x^2(RV-SU)^2$ et $y^2(RV-SU)^2$ par $(SW-VQ)^2$ et $(RW-UQ)^2$ respectivement, nous aurons l'équation (5.12), qui en substituant $t = \tan(\varphi/2)$, donne le polynôme caractéristique $P(t)$:

$$\rho_1^2 (RV - SU)^2 = (SW - VQ)^2 + (RW - UQ)^2 \quad (5.12)$$

Etant donné que l'une des deux conditions de dégénérescence est satisfaite, alors $RV-SU = 0$, $SW-VQ = 0$ et $RW-UQ = 0$, par suite l'équation (5.12) devient nulle, le polynôme caractéristique $P(t)$ aussi. Cela signifie que les racines t_1 et t_2 définies par l'équation (5.9) sont aussi racines de $P(t)$, ces deux racines sont des racines doubles de $P(t)$ car les termes $RV-SU$, $SW-VQ$ et $RW-UQ$ apparaissent au carré dans l'équation (5.12). Contrairement aux cas non dégénérés, nous verrons dans la suite qu'une racine double de $P(t)$ ne signifie pas que le manipulateur admet deux modes d'assemblage confondus. Nous montrons au contraire que cette racine est associée à deux coordonnées de position différentes (x,y) .

En effet, les équations (5.4) et (5.5) ne peuvent pas être utilisées pour le calcul de x et y puisque $RV-SU=0$. Pour savoir quelles équations il faut utiliser pour le calcul de x et y , plusieurs cas doivent être considérés :

- 1- Si $R \neq 0$, x est exprimé en fonction de y à travers l'équation (5.4). Puis, l'expression de x est substituée dans l'équation (5.1), ce qui aboutit à un polynôme du 2nd degré en y , par suite à deux solutions y (racines de ce polynôme). Chacune de ses deux solutions y est introduite dans l'équation (5.4), qui est à son tour résolue pour x . Finalement deux couples solutions différents (x,y) existent pour chaque racine t du polynôme (5.9).

- 2- Si $R=0$ et $U \neq 0$, la même procédure est utilisée en considérant l'équation (5.5) au lieu de l'équation (5.4).
- 3- Si $R=0$, $U=0$ et $S \neq 0$ (respectivement $V \neq 0$), y est directement calculée à partir de l'équation (5.4) (respectivement de l'équation 5.5). Sa valeur est introduite dans l'équation (5.1) qui à son tour est résolue pour x , aboutissant à deux solutions x différentes. Par suite, dans ce cas deux couples solutions différents (x,y) , où y a la même valeur dans les deux couples, existent pour chaque racine t du polynôme (5.9).
- 4- Finalement, si $R=U=S=V=0$, alors les deux équations (5.4) et (5.5) montrent que W et Q sont nulles aussi, par suite l'équation (5.2) s'écrit $x^2+y^2=0$, donc $x=y=0$. Par suite, en introduisant ces résultats dans les équations (5.1) (5.2) et (5.3) nous aurons $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0$. Cette situation n'est possible que pour les manipulateurs ayant les triangles de leur base et de leur plateforme congruents. Nous rappelons que deux triangles congruents ont leurs côtés égaux deux à deux.

3.3. UNE DEGENERESCENCE PARTICULIERE ET SON INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Nous présentons dans ce paragraphe un cas particulier où la condition de dégénérescence D1 se simplifie, et nous interprétons géométriquement le résultat.

Considérons que $l_2 = c_2$ (les bases des triangles de la base et de la plateforme ont la même longueur), alors dans ce cas $t = 0$ est une racine de l'équation (5.9) puisque le terme constant de cette équation devient nul. En substituant $t = 0$ dans l'équation (5.10), cette équation se simplifie énormément puisque seulement le terme constant persiste tandis que les autres termes s'annulent.

Après avoir factorisé le terme constant de cette équation, la condition de dégénérescence D1 prend la forme suivante :

$$D1: (d_3 - l_3 \sin(\beta))((c_2 - l_2)^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2) = 0 \quad (5.13)$$

En supposant que $l_2 = c_2$ est la seule condition géométrique sur le manipulateur, si $d_3 - l_3 \sin(\beta) \neq 0$ alors la condition de dégénérescence D1 devient tout simplement $\rho_1^2 - \rho_2^2 = 0$, ou $\rho_1 = \rho_2$ si nous considérons des variables articulaires toujours positives.

L'interprétation géométrique de ces données $t = 0$, $l_2 = c_2$ et $\rho_1 = \rho_2$ est que le mécanisme à quatre barres défini en déconnectant la troisième jambe du manipulateur et en conservant ρ_1 et ρ_2 constants est un parallélogramme. La courbe définie par l'articulation rotoïde de la plateforme mobile associée à la troisième jambe est un cercle.

Pour une valeur constante de ρ_3 , l'extrémité de la troisième jambe définit aussi un cercle, dont l'intersection avec celui du parallélogramme définit les deux modes d'assemblage du manipulateur. Ce cas est illustré sur l'exemple du paragraphe suivant.

3.4. EXEMPLE D'UN CAS DEGENERÉ

Le manipulateur étudié dans cet exemple est défini par les paramètres suivants : $c_2 = l_2 = 2$, $c_3 = 1/2$, $d_3 = 1$, $l_3 = 3/2$ et $\beta = \pi/3$.

Dans ce cas la première condition de dégénérescence D1 est $\rho_1 = \rho_2$ puisque $c_2 = l_2$. Pour des variables articulaires telles que $\rho_1 = \rho_2$, le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme d'un premier facteur qui est t^2 et d'un deuxième facteur du 4^{ème} degré en t ayant cette forme :

$$\begin{aligned} & \left(16\rho_2^4 - (196 + 32\rho_3^2 + 48\sqrt{3})\rho_2^2 + 16\rho_3^4 + \right. \\ & \left. (24 - 48\sqrt{3})\rho_3^2 + 348\sqrt{3} + 805 \right) t^4 + \\ & \left((64 - 24\sqrt{3})\rho_2^2 + (48\sqrt{3} - 32)\rho_3^2 - 12\sqrt{3} - 368 \right) t^3 + \\ & \left(32\rho_2^4 - (64\rho_3^2 + 96\sqrt{3} + 112)\rho_2^2 - 64\rho_3^2 - 142 + 120\sqrt{3} + 32\rho_3^4 \right) t^2 + \\ & \left((64 - 24\sqrt{3})\rho_2^2 + (48\sqrt{3} - 32)\rho_3^2 - 180\sqrt{3} + 304 \right) t + \\ & 16\rho_2^4 + (84 - 48\sqrt{3} - 32\rho_3^2)\rho_2^2 + 16\rho_3^4 + (48\sqrt{3} - 88)\rho_3^2 \\ & - 132\sqrt{3} + 229 = 0 \end{aligned}$$

Le premier facteur t^2 donne la racine dégénérée $t = 0$. Les coordonnées x et y peuvent être calculées suivant la méthode exposée dans la section 3.2 en prenant en compte que $R = 0$.

Nous supposons que les variables articulaires ont les valeurs suivantes $\rho_1 = \rho_2 = 1$ et $\rho_3 = 7/10$, dans ce cas le facteur de degré 4 du polynôme caractéristique admet quatre racines réelles. Les orientations de la plateforme associées à ces valeurs et leurs coordonnées x et y correspondantes sont calculées et affichées dans le tableau 5.1 ci-dessous.

	Racine #1	Racine #2	Racine #3	Racine #4	Racine dégénérée t=0
φ	-43.8049 deg	-6.6271 deg	23.6384 deg	58.4876 deg	0

x	-0.3395	-0.9849	0.9768	0.6632	-0.1394	-0.9499
y	0.9406	0.1728	-0.2141	-0.7485	-0.9902	-0.3126

Tableau 4.1. Tableau 5.1 : Les six solutions (x, y, φ) du manipulateur défini par $c_2=l_2=2$, $c_3=1/2$, $d_3=1$, $l_3=3/2$, $\beta=\pi/3$ pour les variables articulaires $\rho_1=\rho_2=1$ et $\rho_3=7/10$

La figure 5.3 montre les six modes d'assemblage différents du manipulateur étudié, les deux derniers sont les modes d'assemblage associés à la racine dégénérée $t = 0$ (l'orientation φ de la plateforme est nulle).

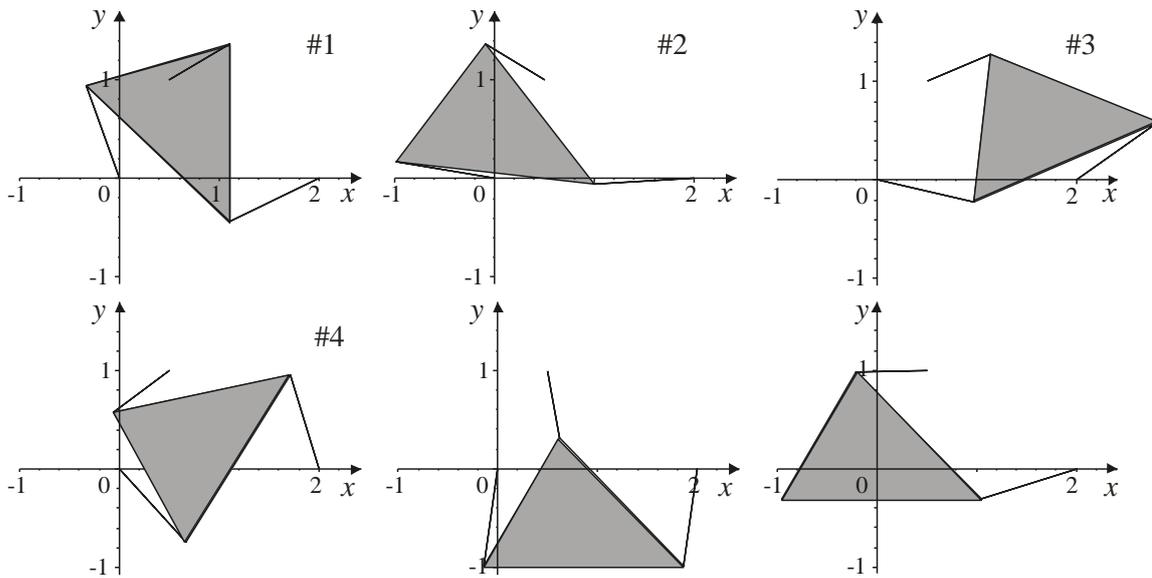


Figure 5.3 : Les six modes d'assemblage associés au tableau 5.1.

4. DEGENERESCENCE DANS TOUT L'ESPACE ARTICULAIRE

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté une condition de dégénérescence d'un manipulateur 3-RPR parallèle, cette condition est satisfaite lorsque les variables articulaires vérifient une certaine relation entre eux. Dans ce paragraphe, nous présentons une nouvelle condition de dégénérescence, cette dernière est dépendante seulement des paramètres géométriques du manipulateur, elle est indépendante des variables articulaires. Par suite le MGD sera dégénéré dans tout l'espace articulaire.

4.1. CONDITION SUR LA GEOMETRIE DU MANIPULATEUR

Nous cherchons la possibilité de trouver des manipulateurs pour lesquels le système d'équations (5.4) et (5.5) dégénère pour n'importe quelles valeurs des variables articulaires.

Pour un tel manipulateur, l'équation (5.9) doit être vérifiée pour n'importe quelle valeur de t , par suite les coefficients de t^2 et de t et le terme constant dans l'équation (5.9) doivent être nuls, donc les trois équations suivantes doivent être simultanément vérifiées :

$$d_3(l_2 + c_2) + l_3 \sin(\beta)(l_2 + c_2) = 0 \quad (5.14)$$

$$l_2 c_3 - c_2 l_3 \cos(\beta) = 0 \quad (5.15)$$

$$-d_3(l_2 - c_2) + l_3 \sin(\beta)(l_2 - c_2) = 0 \quad (5.16)$$

Les équations (5.14) et (5.16) donnent les conditions respectives suivantes $\sin(\beta) = -d_3/l_3$ et $l_2 = c_2$. En substituant $l_2 = c_2$ dans l'équation (5.15), nous obtenons $\cos(\beta) = c_3/l_3$. Les deux conditions $\sin(\beta) = -d_3/l_3$ et $\cos(\beta) = c_3/l_3$ sont équivalentes à $l_3 = \sqrt{d_3^2 + c_3^2}$.

L'interprétation géométrique de ces conditions est que les triangles de la base et de la plateforme sont congruents et que le triangle de la plateforme est pivoté de 180 degrés autour du segment l_2 . La figure 5.4 montre un manipulateur 3-RPR dégénéré défini par $c_2 = l_2 = 1.5$, $c_3 = 0$, $d_3 = 1$, $l_3 = 1$ et $\beta = -\pi/2$.

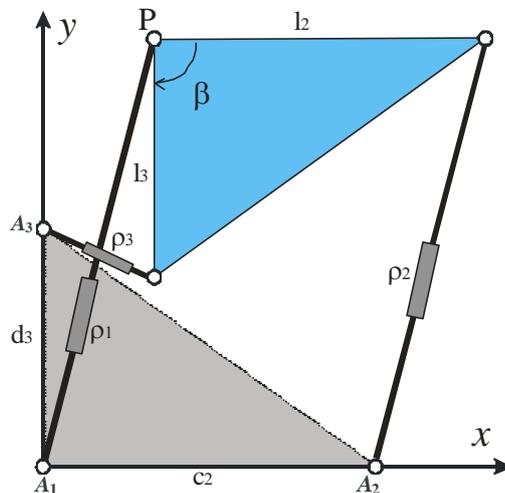


Figure 5.4 : Un manipulateur dégénéré défini par $c_2 = l_2 = 1.5$, $c_3 = 0$, $d_3 = 1$, $l_3 = 1$ et $\beta = -\pi/2$, la plateforme est représenté en bleu et la base en gris

4.2. CALCUL DU MODELE GEOMETRIQUE DIRECT

Etant donné que le système d'équations (5.4) et (5.5) est toujours singulier, alors le déterminant $RV - SU$ est nul pour n'importe quelles valeurs de ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 , et par suite $SW - VQ$ est aussi nul. Ceci signifie que t devra être calculée à partir de l'équation (5.10).

Si nous introduisons $l_2 = c_2$, $\sin(\beta) = -d_3/l_3$, $\cos(\beta) = c_3/l_3$ et $l_3 = \sqrt{d_3^2 + c_3^2}$ dans l'équation (5.10), le coefficient de t^4 s'annule, par suite l'équation (5.10) se transforme en un polynôme du 3^{ème} degré en $t = \tan(\varphi/2)$ ayant la forme suivante:

$$\begin{aligned} & (c_3(\rho_1^2 - \rho_2^2 + 4c_2^2 - 4c_3c_2) + c_2(\rho_3^2 - \rho_1^2))t^3 + d_3(8c_3c_2 - 4c_2^2 + \rho_2^2 - \rho_1^2)t^2 + \\ & (c_3(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \rho_3^2c_2 - 4d_3^2c_2 - \rho_1^2c_2)t + d_3(\rho_2^2 - \rho_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Le polynôme de l'équation (5.17) est le polynôme caractéristique de cette famille de manipulateurs 3-RPR ayant leur MGD dégénéré dans tout leur espace articulaire.

Ainsi une nouvelle famille de manipulateurs analytiques est découverte, cette famille est celle des manipulateurs 3-RPR ayant les triangles de la base et de la plateforme congruents et le triangle de la plateforme pivoté de 180 degrés autour du segment de longueur l_2 de ce triangle.

Après avoir calculé les racines t du polynôme caractéristique, les coordonnées de position x et y de la plateforme sont calculées par la résolution successive d'une équation quadratique et d'une autre linéaire selon l'une des méthodes exposées au paragraphe 3.2.

Ces manipulateurs analytiques peuvent avoir jusqu'à six modes d'assemblage différents, mais contrairement aux manipulateurs 3-RPR généraux, ces manipulateurs ont seulement trois orientations différentes de la plateforme dont chacune est associée à deux positions différentes de la plateforme.

Cette nouvelle famille de manipulateurs découverte peut être ajoutée aux familles de manipulateurs analytiques étudiées dans [Kong 01] (ces familles de manipulateurs ont été rappelées au début de ce chapitre). Les manipulateurs de cette famille seront appelés «*manipulateurs dégénérés*», vu que ces manipulateurs ont leur MGD dégénéré pour toutes les configurations articulaires.

4.3. EXEMPLE D'UN MANIPULATEUR DEGENERERE

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple de manipulateur dégénéré, et nous montrons ses différents modes d'assemblage.

Nous considérons le manipulateur ayant les paramètres géométriques suivants : $c_2 = l_2 = 1$, $c_3 = 0$, $d_3 = 1$, $l_3 = 1$ et $\beta = -\pi/2$. Ces paramètres vérifient les conditions sur les paramètres géométriques pour qu'un manipulateur soit dégénéré.

Nous calculons le modèle géométrique direct pour les variables articulaires suivantes : $\rho_3 = 4/5$, $\rho_2 = \rho_3 = 3/2$. Le polynôme caractéristique est le polynôme de 3^{ème} degré suivant calculé d'après l'équation (5.17) :

$$161t^3 - 239t^2 - 239t + 161 = 0$$

Les orientations de la plateforme calculées à partir de ce polynôme et les coordonnées x et y correspondantes sont données dans le tableau 5.2 ci-dessous.

	#1	#2	#3	#4	#5	#6
φ (deg)	-90	-90	53.6102	53.610	126.389	126.389
X	0.6547	-0.459	0.3963	-0.794	0.6950	0.0933
Y	-0.4597	0.6547	0.6950	0.0933	0.3963	-0.7945

Tableau 5.2 : Les six solutions (x, y, φ) du manipulateur dégénéré défini par $c_2=l_2=1$, $c_3=0$, $d_3=1$, $l_3=1$ et $\beta=-\pi/2$ pour les variables articulaires $\rho_1=4/5$ et $\rho_2=\rho_3=3/2$.

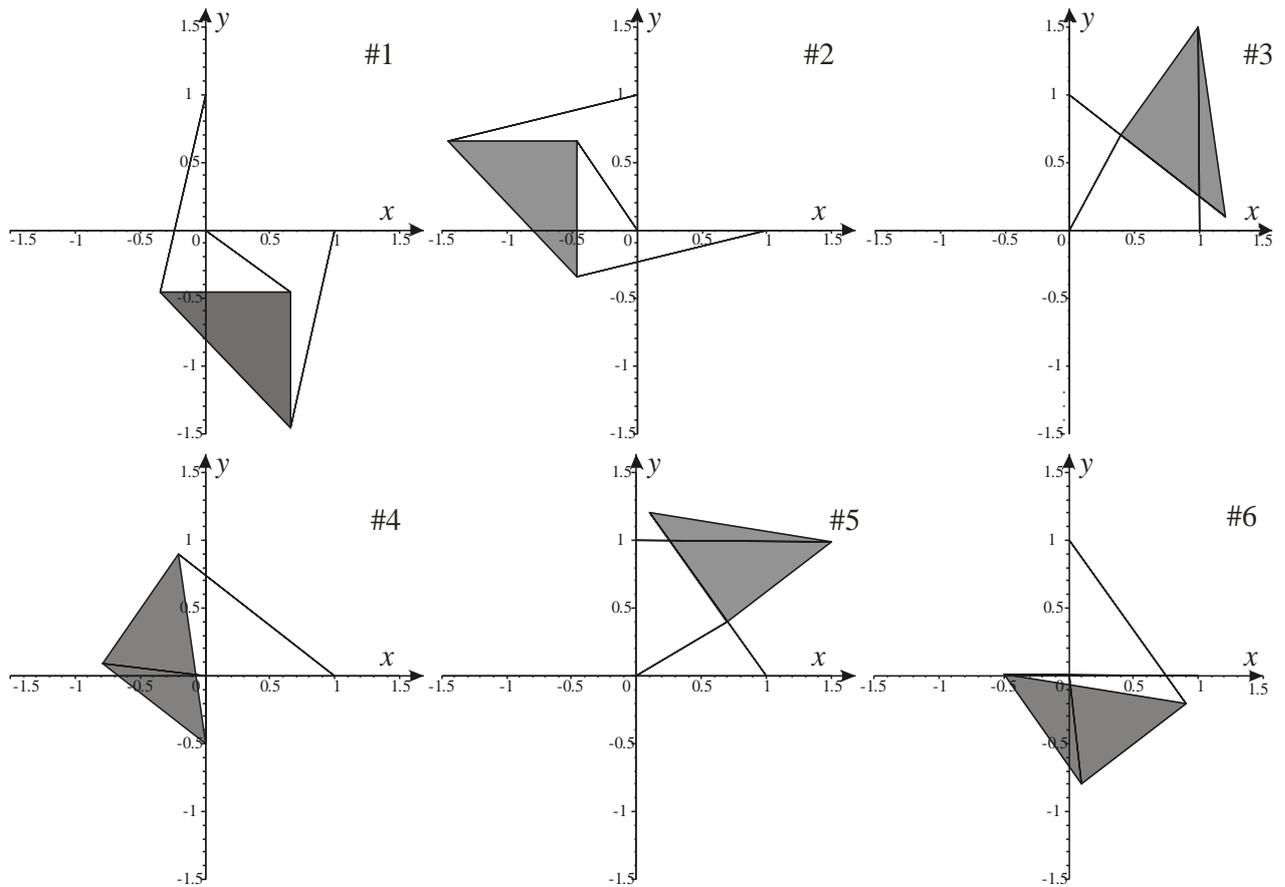


Figure 5.5 : Les six modes d'assemblage associés au tableau 5.2

La figure 5.5 montre les six modes d'assemblage différents du manipulateur dégénéré étudié.

5. CINEMATIQUE DES MANIPULATEURS DEGENERES

D'après le paragraphe précédent, nous constatons que les manipulateurs 3-RPR dégénérés ont un MGD simplifié. Dans ce paragraphe, nous étudions la cinématique de ces manipulateurs en détail pour voir si cette dernière est plus simple que celle des manipulateurs 3-RPR non dégénérés. Nous nous intéressons particulièrement au calcul des singularités et à la détermination des points cusp de ces manipulateurs.

5.1. SINGULARITES DES MANIPULATEURS DEGENERES

Pour calculer les singularités des manipulateurs dégénérés, nous utilisons la même procédure de calcul établie dans le paragraphe 4.2 du chapitre précédent. Nous calculons l'équation des singularités d'après la condition d'intersection des trois axes des jambes du manipulateur en un seul point. Ensuite, nous exprimons cette équation en fonction des variables ρ , t et t_1 où $t = \tan(\alpha/2)$ et $t_1 = \tan(\theta_1/2)$. Cette équation a alors la forme suivante $f(\rho_1, t, t_1) = 0$. Elle dépend aussi des paramètres géométriques du manipulateur.

En factorisant cette équation f , nous nous apercevons qu'elle peut être exprimée suivant le produit de deux facteurs différents. Le premier facteur est du 2^{ème} degré en t_1 et du 1^{er} degré en t , le second est du 2^{ème} degré en t_1 et du 3^{ème} degré en t . Par suite les singularités des manipulateurs dégénérés s'obtiennent à l'aide de deux équations différentes, qui sont les deux facteurs de l'équation des singularités f . Cela simplifie énormément la détermination des singularités. Ces deux équations sont les suivantes :

$$f1: \quad t_1^2 - 2t_1t - 1 = 0 \quad (5.18)$$

$$f2: \quad \left[(\rho_1 d_3 + 2c_3 d_3) t_1^2 - \rho_1 d_3 + 2c_3 d_3 \right] t^3 + 2 \left[(c_3^2 - c_2 c_3 - d_3^2) t_1^2 + \rho_1 d_3 t_1 + c_3^2 - c_2 c_3 - d_3^2 \right] t^2 + 2\rho_1 d_3 t_1 t + 2\rho_1 d_3 t_1 = 0 \quad (5.19)$$

Nous remarquons que la première équation (5.18) ne dépend pas des paramètres géométriques du manipulateur, ce qui veut dire que cette surface de singularités ne varie pas si la géométrie du manipulateur change, elle est la même pour tous les manipulateurs 3-RPR dégénérés.

5.1.1. Singularités dans l'espace de travail des manipulateurs dégénérés

En exprimant l'équation (5.18) suivant les paramètres de l'espace de travail x , y et α , elle prend la forme suivante :

$$f1: \quad x\cos(\alpha) + y(\sin(\alpha)+1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + ty = 0 \quad \text{avec} \quad t = \tan(\alpha/2) \quad (5.20)$$

La surface des singularités correspondant à l'équation (5.20) est tracée, pour $-10 < x < 10$, $-10 < y < 10$ et $-\pi < \alpha < \pi$, sur la figure 5.6. Rappelons que cette surface est la même pour tous les manipulateurs 3-RPR dégénérés. Cette propriété est nouvelle pour les manipulateurs 3-RPR. A notre connaissance, elle n'existe pas pour d'autres types de manipulateurs 3-RPR.

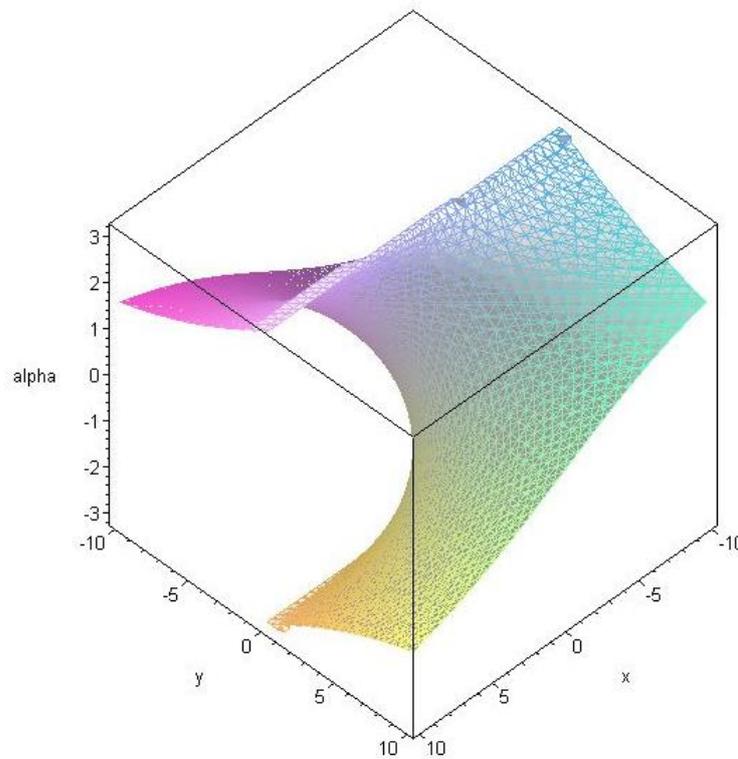


Figure 5.6 : Surface de singularités stable dans l'espace de travail de tous les manipulateurs dégénérés pour $x = [-10,10]$, $y = [-10,10]$ et $\alpha = [-\pi, \pi]$.

La deuxième équation des singularités $f2$ peut être exprimée, dans l'espace de travail, suivant la forme suivante :

$$f2: \quad (-2c_3d_3 + xd_3)t^3 + (-2c_3^2 + 2c_2c_3 + 2d_3^2 - yd_3)t^2 + (2c_3d_3 - 2c_2d_3 + xd_3)t - d_3y = 0 \quad (5.21)$$

La figure 5.7 montre la deuxième surface de singularités f2 (en bleu) correspondant à l'équation (5.21) pour le manipulateur dégénéré ayant les paramètres géométriques suivants $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, et $d_3 = 1$ (les valeurs des paramètres de la plateforme peuvent être calculés d'après la 2^{ème} condition de dégénérescence du MGD, $l_2, l_3 = 1$ et $\beta = -\pi/2$), et la surface de singularités stable f1 (en rouge) pour les mêmes valeurs de x , y et α utilisées pour tracer la figure 5.5.

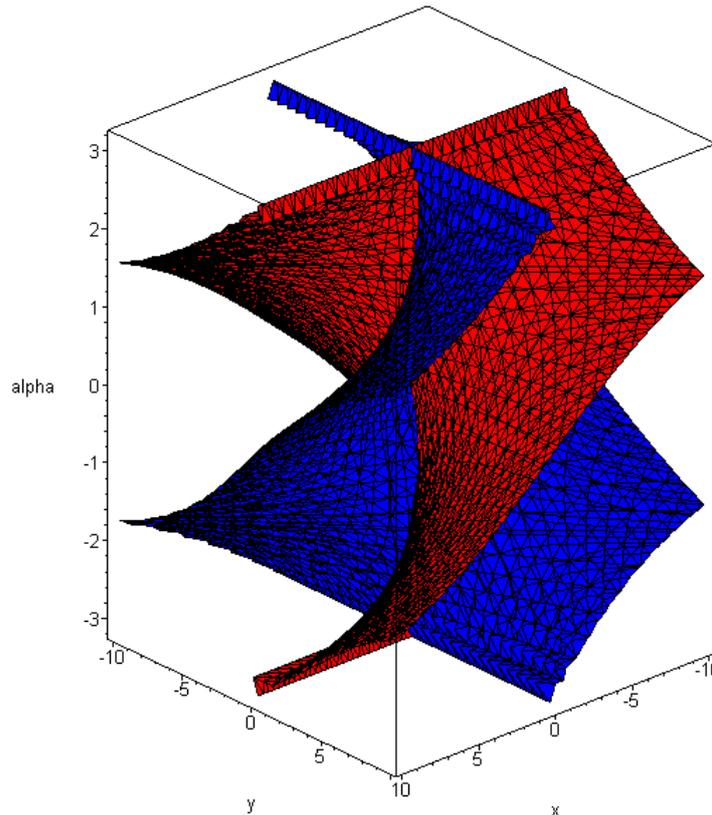


Figure 5.7 : Les surfaces des singularités dans l'espace de travail du manipulateur dégénéré ayant les paramètres géométriques $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, et $d_3 = 1$ pour $x = [-10,10]$, $y = [-10,10]$ et $\alpha = [-\pi, \pi]$

En conclusion, dans l'espace de travail des manipulateurs dégénérés, deux types de singularités existent. Le premier type définit des singularités stables qui sont indépendantes de la géométrie du manipulateur. Elles peuvent être calculées d'après l'équation (5.20). Le deuxième type correspond aux singularités qui dépendent de la géométrie du manipulateur. Elles peuvent être calculées d'après l'équation (5.21). Les deux types de singularités sont très simples et faciles à calculer.

5.1.2. Singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs dégénérés

Pour calculer les singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs dégénérés, nous utilisons la même méthode de calcul des singularités dans l'espace articulaire établie dans le paragraphe 4.2 du chapitre précédent. Nous calculons les singularités dans des sections de l'espace articulaire en fixant la première variable articulaire ρ_1 . En effectuant un balayage suivant la variable t et un autre suivant t_1 , nous résolvons les équations (5.18) et (5.19) pour obtenir les couples singuliers (α_s, θ_{1s}) , et nous calculons les variables articulaires ρ_{2s} et ρ_{3s} correspondantes à partir du système d'équations (4.10).

Nous montrons un exemple d'application sur la figure 5.8, où nous calculons les singularités dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=1.5$ du même manipulateur étudié dans le paragraphe précédent. Deux branches de singularités différentes sont obtenues, chacune correspond à un type de singularités. Sur la figure 5.8, nous traçons chacune de ces branches par une couleur différente, la courbe extérieure rouge représente le premier type de singularités, la courbe intérieure bleue représente le deuxième type. Nous signalons ici, que les singularités du premier type, dans l'espace articulaire, dépendent de la géométrie du manipulateur dégénéré. En effet pour les calculer nous faisons appel au système d'équations (4.10) où interviennent les paramètres géométriques du manipulateur.

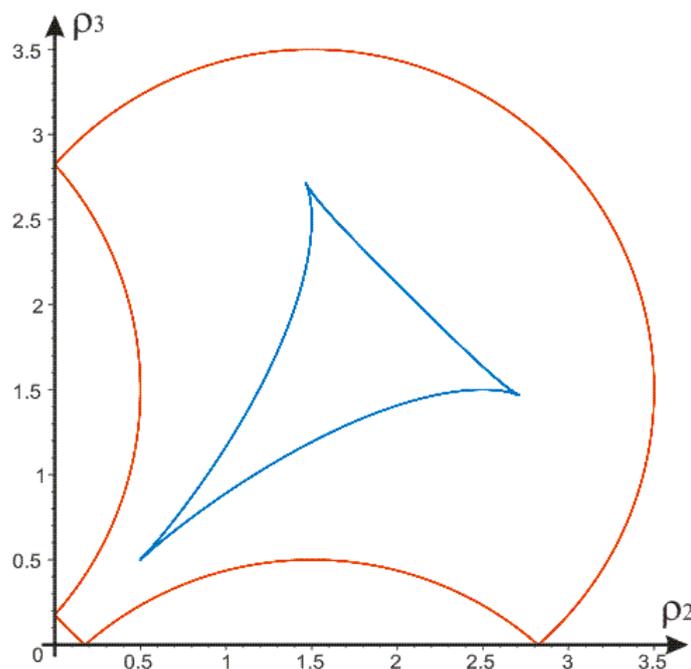


Figure 5.8 : Les singularités dans une section de l'espace de travail pour $\rho_1=1.5$ du manipulateur dégénéré ayant les paramètres géométriques $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, et $d_3 = 1$

Dans l'étude réalisée dans le chapitre précédent, nous n'avions pas découvert de manipulateurs présentant un nombre impair de points cusp dans les sections de leur espace articulaire, contrairement au cas présenté sur la figure 5.8 où trois points cusp seulement apparaissent. Tout cela montre que les manipulateurs 3-RPR dégénérés ont des propriétés cinématiques originales propres à eux.

En utilisant la procédure de détermination des singularités dans tout l'espace articulaire présentée au chapitre précédent, nous calculons la surface des singularités pour $0 < \rho_1 < 5$ pour le même manipulateur. Nous calculons les singularités dans des sections de l'espace articulaire, nous rassemblons toutes les sections et nous les traitons dans un outil CAO pour avoir la surface. La figure 5.9 nous montre cette surface.

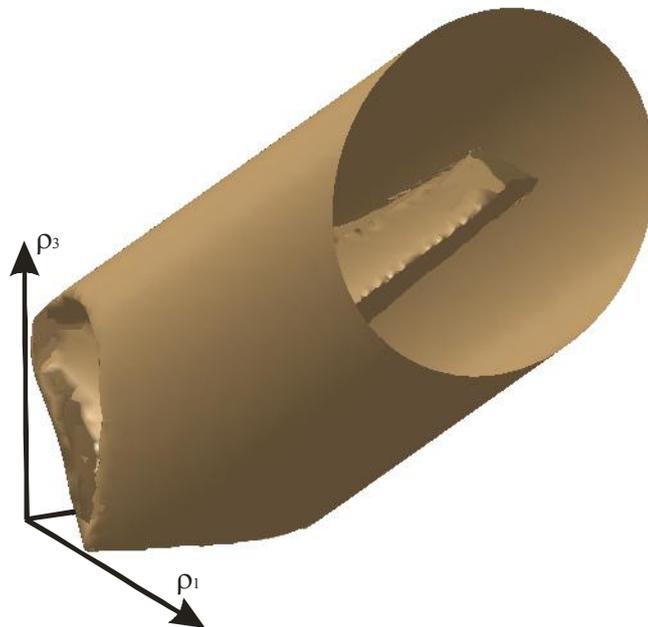


Figure 5.9 : Singularités dans l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR dégénéré étudié pour ρ_1 variant de 0 à 5.

Nous remarquons que la topologie stable des singularités de ce manipulateur est composée d'une branche de singularités ayant une forme régulière (singularités du premier type), et d'une autre branche présentant trois points cusp (singularités du deuxième type). Cette surface de singularités est beaucoup moins sophistiquée que celle des manipulateurs non dégénérés surtout pour les petites valeurs des variables articulaires (au niveau bas de cette surface).

5.2. DETERMINATION DES POINTS CUSP

En appliquant la procédure présentée dans le chapitre précédent pour calculer les points cusp dans l'espace articulaire des manipulateurs dégénérés, nous remarquons tout d'abord que le temps de calcul se réduit énormément en le comparant au temps de calcul des points cusp des manipulateurs non dégénérés. Ensuite, nous découvrons que les coordonnées des points cusp sont les solutions d'un polynôme Q' du sixième degré au lieu du polynôme Q de degré 24 de l'équation (4.19).

Dans la procédure de calcul des points cusp des manipulateurs non dégénérés, nous introduisons les valeurs réelles des paramètres de conception dans les équations des singularités F_1 et d'existence des points cusp E_1 . Ensuite nous calculons le polynôme Q de degré 24, pour l'avoir finalement en fonction seulement de $t_1 = \tan(\theta_1/2)$. Dans le cas des manipulateurs dégénérés, vu les simplifications ajoutées, nous avons pu calculer le polynôme Q' des points cusp de degré 6 en t_1 sans introduire les valeurs réelles des paramètres géométriques, mais en normalisant seulement l'un de ces paramètres. Ce qui donne une équation qui pourra être utilisée pour le calcul direct des points cusp dans l'espace articulaire de tous les manipulateurs 3-RPR dégénérés sans le recours à la lourde élimination de variables dans les équations de la procédure établie dans le chapitre précédent.

L'équation suivante est l'expression du polynôme Q' en fonction de c_3 , d_3 , ρ_1 et t_1 avec $c_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned} & -12\rho_1^2 d_3^3 - 9\rho_1 d_3^3 + 4d_3^5 + 3\rho_1 d_3^5 - 4\rho_1^3 d_3^3 - 18c_3^5 d_3 + 4c_3^6 d_3 \\ & + 8c_3^4 d_3^3 - 18c_3^3 d_3 - 28c_3^3 d_3^3 + 8c_3^2 d_3^5 + 32c_3^2 d_3^3 - 10c_3 d_3^5 + 4c_3^2 d_3 \\ & + 28c_3^4 d_3 - 10c_3 d_3^3 - 12\rho_1 c_3^3 d_3^3 - 12\rho_1 c_3^3 d_3 - 6\rho_1 c_3 d_3^5 + 24\rho_1^2 c_3 d_3^3 \\ & + 18\rho_1 c_3^2 d_3^2 + 12\rho_1 c_3 d_3^3 + 3\rho_1 c_3^2 d_3 + 8\rho_1^3 c_3 d_3^3 - 6\rho_1 c_3^5 d_3 + 15\rho_1 c_3^4 d_3 \end{aligned} \right) t_1^6 + \\
& \left(\begin{aligned} & -18\rho_1 c_3^6 - 18\rho_1 c_3 - 48\rho_1^2 d_3^4 + 54\rho_1 c_3^5 + 18\rho_1 c_3^3 - 54\rho_1 c_3^4 \\ & - 48\rho_1^2 c_3 d_3^2 - 18\rho_1 c_3^4 d_3^2 - 24\rho_1^3 c_3 d_3^2 + 24\rho_1^2 c_3^2 d_3^2 + 36\rho_1 c_3^3 d_3^2 \\ & - 12\rho_1 c_3^2 d_3^2 - 6\rho_1 c_3 d_3^2 - 6\rho_1 d_3^4 + 48\rho_1^2 c_3^2 d_3^2 + 18\rho_1 c_3^2 d_3^4 + 18\rho_1 d_3^6 - 24\rho_1^3 d_3^4 \end{aligned} \right) t_1^5 + \\
& \left(\begin{aligned} & 12\rho_1^2 d_3^3 - 9\rho_1 d_3^3 + 12d_3^5 + 3\rho_1 d_3^5 + 60\rho_1^3 d_3^3 - 54c_3^5 d_3 + 12c_3^6 d_3 + 24c_3^4 d_3^3 \\ & - 54c_3^3 d_3 - 84c_3^3 d_3^3 + 12c_3^2 d_3^5 + 96c_3^2 d_3^3 - 30c_3 d_3^5 + 12c_3^2 d_3 + 84c_3^4 d_3 - 30c_3 d_3^3 \\ & - 48\rho_1^2 c_3^4 d_3 - 12\rho_1 c_3^3 d_3^3 - 12\rho_1 c_3^3 d_3 - 6\rho_1 c_3 d_3^5 - 24\rho_1^2 c_3 d_3^3 + 18\rho_1 c_3^2 d_3^3 \\ & + 12\rho_1 c_3 d_3^3 + 3\rho_1 c_3^2 d_3 - 120\rho_1^3 c_3 d_3^3 - 6\rho_1 c_3^5 d_3 + 15\rho_1 c_3^4 d_3 - 48\rho_1^2 d_3^5 \\ & - 96\rho_1^2 c_3^2 d_3^3 - 48\rho_1^2 c_3^2 d_3 + 96\rho_1^2 c_3^3 d_3 \end{aligned} \right) t_1^4 + \\
& \left(\begin{aligned} & -24\rho_1 c_3^2 d_3^2 + 80\rho_1^3 c_3 d_3^2 + 36\rho_1 d_3^6 - 108\rho_1 c_3^4 - 12\rho_1 d_3^4 - 36\rho_1 c_3^6 - 36\rho_1 c_3^4 d_3^2 \\ & + 80\rho_1^3 d_3^4 - 80\rho_1^3 c_3^3 d_3^2 + 36\rho_1 c_3^3 + 72\rho_1 c_3^3 d_3^2 + 36\rho_1 c_3^2 d_3^4 + 108\rho_1 c_3^5 \\ & - 36\rho_1 c_3 d_3^4 - 12\rho_1 c_3 d_3^2 \end{aligned} \right) t_1^3 + \\
& \left(\begin{aligned} & -12\rho_1^2 d_3^3 + 9\rho_1 d_3^3 + 12d_3^5 - 3\rho_1 d_3^5 - 60\rho_1^3 d_3^3 - 54c_3^5 d_3 + 12c_3^6 d_3 + 24c_3^4 d_3^3 \\ & - 54c_3^3 d_3 - 84c_3^3 d_3^3 + 12c_3^2 d_3^5 + 96c_3^2 d_3^3 - 30c_3 d_3^5 + 12c_3^2 d_3 + 84c_3^4 d_3 - 30c_3 d_3^3 \\ & - 48\rho_1^2 c_3^4 d_3 + 12\rho_1 c_3^3 d_3^3 + 12\rho_1 c_3^3 d_3 + 6\rho_1 c_3 d_3^5 - 24\rho_1^2 c_3 d_3^3 - 18\rho_1 c_3^2 d_3^3 \\ & - 12\rho_1 c_3 d_3^3 - 3\rho_1 c_3^2 d_3 + 120\rho_1^3 c_3 d_3^3 + 6\rho_1 c_3^5 d_3 - 15\rho_1 c_3^4 d_3 - 48\rho_1^2 d_3^5 \\ & - 96\rho_1^2 c_3^2 d_3^3 - 48\rho_1^2 c_3^2 d_3 + 96\rho_1^2 c_3^3 d_3 \end{aligned} \right) t_1^2 + \\
& \left(\begin{aligned} & 48\rho_1^2 c_3 d_3^2 + 24\rho_1^3 c_3^2 d_3^2 + 18\rho_1 d_3^6 - 18\rho_1 c_3 d_3^4 - 6\rho_1 d_3^4 + 18\rho_1 c_3^3 - 18\rho_1 c_3^4 d_3^2 \\ & - 18\rho_1 c_3^6 + 18\rho_1 c_3^2 d_3^4 - 48\rho_1^2 c_3^2 d_3^2 - 54\rho_1 c_3^4 - 12\rho_1 c_3^2 d_3^2 - 24\rho_1^3 d_3^4 \\ & + 36\rho_1 c_3^3 d_3^2 + 48\rho_1^2 d_3^4 - 6\rho_1 c_3 d_3^2 - 24\rho_1^3 c_3 d_3^2 + 54\rho_1 c_3^5 \end{aligned} \right) t_1 + \\
& -12\rho_1^2 d_3^3 + 9\rho_1 d_3^3 + 4d_3^5 - 3\rho_1 d_3^5 + 4\rho_1^3 d_3^3 - 18c_3^5 d_3 + 4c_3^6 d_3 + 8c_3^4 d_3^3 - 18c_3^3 d_3 \\
& - 28c_3^3 d_3^3 + 4c_3^2 d_3^5 + 32c_3^2 d_3^3 - 10c_3 d_3^5 + 4c_3^2 d_3 + 28c_3^4 d_3 - 10c_3 d_3^3 + 12\rho_1 c_3^3 d_3^3 \\
& + 12\rho_1 c_3^3 d_3 + 6\rho_1 c_3 d_3^5 + 24\rho_1^2 c_3 d_3^3 - 18\rho_1 c_3^2 d_3^3 - 12\rho_1 c_3 d_3^3 - 3\rho_1 c_3^2 d_3 \\
& - 8\rho_1^3 c_3 d_3^3 + 6\rho_1 c_3^5 d_3 - 15\rho_1 c_3^4 d_3 \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Pour obtenir les coordonnées des points cusp, nous suivons la procédure de détermination des points cusp du chapitre précédent, mais en éliminant l'étape 4 la plus lourde en calcul et la plus coûteuse en temps (élimination de la variable t entre l'équation des singularités F_1 et celle de l'existence des points cusp E_1). Ensuite il faut résoudre dans l'étape 5 le polynôme de l'équation (5.22) pour t_1 .

Nous expérimentons cette méthode pour calculer les points cusp du manipulateur 3-RPR dégénéré étudié dans ce chapitre ($c_2 = 1$, $c_3 = 0$, et $d_3 = 1$), et dans la même section de l'espace articulaire $\rho_1=1.5$ où nous avons calculé les singularités (Figure 5.7).

Les coordonnées de ces points cusp sont données dans le tableau suivant :

	α	θ_1	ρ_2	ρ_3
Cusp #1	30 deg	-151.37 deg	1.47	2.71
Cusp #1	30 deg	1.37 deg	1.47	2.71
Cusp #2	150 deg	-118.63 deg	2.71	1.47
Cusp #2	150 deg	88.63 deg	2.71	1.47
Cusp #3	90 deg	25.53 deg	0.5	0.5
Cusp #3	90 deg	64.47 deg	0.5	0.5

Tableau 5.3 : Coordonnées des six points cusp pour $\rho_1=1.5$

Nous remarquons que les trois points cusp et les singularités aussi (Figure 5.8) sont symétriques par rapport à la diagonale $\rho_2 = \rho_3$. Ce phénomène n'apparaît pas pour tous les manipulateurs dégénérés, nous l'apercevons ici parce que le manipulateur a des paramètres géométriques particuliers ($c_2=d_3$, $c_3=0$).

Finalement, nous pouvons démontrer que les manipulateurs dégénérés sont toujours cuspidaux. En effet, nous avons calculé l'équation des points cusp d'après les équations du MGD de ces manipulateurs et nous avons trouvé qu'elle est du troisième degré en ρ_3^2 . Ceci explique qu'il n'y ait que trois valeurs différentes de ρ_3 dans le tableau 5.3. Nous avons prouvé finalement que cette équation admet toujours une racine positive, ce qui veut dire qu'un manipulateur dégénéré admet toujours au moins un point cusp. La démonstration est détaillée dans l'Annexe C. Les points cusp des manipulateurs dégénérés peuvent être calculés aussi à partir de cette équation aussi qui est plus simple que l'équation (5.22).

6. CONCLUSION

De nouvelles conditions sur les paramètres géométriques des manipulateurs 3-RPR parallèles, pour lesquelles le polynôme caractéristique du 6^{ème} degré du MGD dégénère, ont été découvertes.

La première condition de dégénérescence existe pour n'importe quel manipulateur 3-RPR. Le système d'équations en x et y , utilisé pour le calcul du polynôme caractéristique, devient singulier pour deux orientations de la plateforme. Chacune de ces orientations définit une relation entre les variables articulaires. En résolvant le MGD, si les variables articulaires du manipulateur vérifient l'une des ces relations, le polynôme caractéristique présente une racine double qui est une racine dégénérée pour laquelle le système d'équations est singulier. Cette racine ne doit pas être interprétée comme deux modes d'assemblage coïncidents, et par suite comme une singularité, en effet cette racine double correspond à deux positions différentes de la plateforme.

La deuxième condition de dégénérescence peut apparaître pour n'importe quelle configuration articulaire lorsque le manipulateur 3-RPR est tel que ses deux triangles de base et de plateforme sont congruents et le triangle de la plateforme est pivoté de 180 degrés autour du segment l_2 . Le MGD de ces manipulateurs peut être résolu à l'aide d'un polynôme du 3^{ème} degré et d'un polynôme quadratique en cascade. Ainsi, ces nouveaux manipulateurs que nous avons appelés « manipulateurs dégénérés » définissent une nouvelle classe de manipulateurs analytiques qui peuvent trouver des applications industrielles en raison de la simplicité de calcul de leur MGD.

Finalement, les propriétés cinématiques des manipulateurs dégénérés ont été étudiées. D'abord, leurs singularités ont été déterminées. Deux types de singularités différents ont été obtenus. Les singularités du premier type sont des singularités stables dans l'espace de travail de ces manipulateurs dégénérés car indépendantes de leurs paramètres géométriques. Ensuite, l'équation de calcul des points cusp a été calculée pour ces manipulateurs. Nous avons montré que cette équation se réduit à un polynôme de degré 6 au lieu du polynôme de degré 24 dans le cas des manipulateurs non dégénérés. Enfin, nous avons démontré que ces manipulateurs sont toujours cuspidaux. En conclusion, nous pourrions constater que les manipulateurs dégénérés découverts sont très intéressants vu la simplicité de leurs propriétés cinématiques.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons deux méthodes différentes pour éviter les singularités des manipulateurs 3-RPR parallèles plans. Les résultats du chapitre 5 seront utilisés pour établir la procédure de représentation des changements non singuliers de modes d'assemblage du manipulateur 3-RPR.

CHAPITRE 6

EVITEMENT DES SINGULARITES DES MANIPULATEURS PARALLELES DE TYPE 3- RPR

1. INTRODUCTION

La majorité des manipulateurs parallèles présentent des configurations singulières. Les plus dangereuses sont celles associées au modèle géométrique direct, où deux modes d'assemblage du manipulateur coïncident. En effet, ces singularités engendrent une perte de rigidité du manipulateur et une augmentation d'efforts dans les actionneurs. Donc, ces configurations sont indésirables et doivent être évitées.

Trois façons différentes pour faire face aux singularités méritent d'être citées. La première approche consiste à éliminer les singularités dès la phase de conception du manipulateur en choisissant bien l'architecture, les paramètres géométriques et les limites articulaires [Chablat 98b], [Wenger 01], [Chablat 03], [Arsenault 04]. Cette approche est sûre mais difficile à appliquer en général et elle limite les choix en conception. La deuxième approche consiste à déterminer les régions non singulières de l'espace de travail [Wenger 97], [Merlet 98], [Kong 00], [Li 06], [Li 07]. Cette approche est aussi difficile étant donnée la complexité des surfaces singulières des manipulateurs parallèles. Finalement, la troisième approche consiste à planifier des trajectoires non singulières dans l'espace de travail [Merlet 94], [Bhattacharya 98], [Dash 03], [Sen 03]. Avec cette approche, nous serons confrontés à la complexité des équations des singularités mais de larges régions de l'espace de travail seront accessibles.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à deux de ces façons pour éviter les singularités. Dans la première partie de ce chapitre, nous traitons un sujet pouvant concerner une grande partie des manipulateurs parallèles : le changement non singulier de mode d'assemblage. Malgré son grand intérêt dans la planification des trajectoires, peu de chercheurs ont travaillé sur ce sujet [Innocenti 92], [McAree 99]. Nous expliquons ce phénomène en détail tout d'abord, nous mettons en évidence la position du problème, puis nous proposons une approche pour planifier les trajectoires de changement non singulier de mode d'assemblage des manipulateurs 3-RPR parallèles plans et nous l'illustrons au travers d'exemples.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous nous intéressons à la détermination de régions exemptes de singularités dans les espaces articulaire et de travail. Nous développons notre étude pour qu'elle prenne en compte des aspects de conception des manipulateurs 3-RPR parallèles plans notamment le choix des butées articulaires.

2. CHANGEMENT NON SINGULIER DE MODE D'ASSEMBLAGE

2.1. PRELIMINAIRES

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux changements non singuliers de mode d'assemblage des manipulateurs 3-RPR plans parallèles. Ces manipulateurs peuvent avoir jusqu'à six modes d'assemblage [Hunt 83]. Leurs singularités coïncident avec les configurations où deux solutions au modèle géométrique direct coïncident. Hunt avait démontré que pour changer de mode d'assemblage un manipulateur parallèle devait franchir une singularité [Hunt 93]. Cette démonstration avait été mise en cause par Innocenti et Parenti-Castelli qui avaient trouvé un manipulateur de type 3-RPR pouvant effectuer une trajectoire particulière reliant deux modes d'assemblage sans franchir aucune singularité [Innocenti 92]. Un phénomène similaire existe chez les manipulateurs sériels cuspidaux qui peuvent changer leur posture sans franchir une singularité [Innocenti 92]. Ce phénomène est dû à l'existence de points dans l'espace de travail de ces manipulateurs ayant trois solutions identiques au modèle géométrique inverse, ces points sont appelés des points cusp [Elomri 95]. De même, McAree et Daniel ont démontré qu'un manipulateur 3-RPR parallèle peut exécuter une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage s'il existe un point dans son espace articulaire ayant trois solutions identiques au MGD: un point cusp [McAree 99]. Un algorithme pour la détermination des points cusp d'un manipulateur 3-RPR a été établi dans le chapitre 4 de ce mémoire.

McAree a démontré aussi que pour changer de mode d'assemblage sans franchir une singularité, la trajectoire correspondante devra contourner un point cusp dans l'espace articulaire du manipulateur. Wenger et Chablat ont étudié les possibilités de changer de mode d'assemblage en reliant deux configurations dans l'espace de travail. Ils ont défini les domaines d'unicité de solutions au MGD dans l'espace de travail, comme étant les plus grands domaines associés à un seul mode d'assemblage du manipulateur [Wenger 98]. Ils ont démontré que jusqu'à trois domaines d'unicité peuvent exister dans chaque région non singulière de l'espace de travail d'un manipulateur 3-RPR. En reliant deux configurations, si elles sont dans une même région non singulière, et dans deux domaines d'unicité différents, un changement non singulier de mode d'assemblage aura lieu. Mais, les auteurs n'ont pas étudié ce genre de trajectoires, ni trouvé une explication à ce phénomène complexe : le changement non singulier de mode d'assemblage.

Pour les manipulateurs 3-RPR parallèles particuliers, ceux dont le triangle base et le triangle de la plateforme sont semblables, Kong et Gosselin ont montré que les changements de mode d'assemblage ne peuvent pas avoir lieu, parce que chaque région non singulière de leur espace de travail correspond à un seul domaine d'unicité [Kong 00]. McAree a obtenu ce même résultat en démontrant que ces mêmes manipulateurs ne peuvent pas avoir de points cusp dans leur espace articulaire [McAree 99].

En se déplaçant d'une configuration arbitraire à une autre dans l'espace de travail, si le mode d'assemblage du manipulateur change sans que ce dernier franchisse une singularité, il sera difficile de déterminer le mode d'assemblage réel, car il n'existe pas de méthodes évidentes pour détecter le changement. Par conséquent, il est nécessaire de trouver une explication au phénomène de changement non singulier de mode d'assemblage. Dans les paragraphes suivants, nous expliquons en détail ces changements, et nous proposons une approche pour planifier les trajectoires correspondantes.

2.2. SINGULARITES ET ASPECTS

Les aspects pour les manipulateurs parallèles ayant une solution unique au MGI sont définis comme étant les plus grands domaines connexes de l'espace de travail dépourvus de toutes configurations singulières. Les surfaces de singularités divisent l'espace de travail des manipulateurs 3-RPR en deux aspects différents [Wenger 97].

Pour montrer les aspects des manipulateurs 3-RPR, nous illustrons les singularités calculées dans le chapitre 4 du même manipulateur utilisé dans [Innocenti 92], [McAree 99], [Merlet 00].

Sur la figure 6.1a, nous voyons les singularités dans une section de l'espace de travail (α, θ_1) pour $\rho_1=17$. Nous considérons l'espace (α, θ_1) comme étant l'espace de travail, vu que les coordonnées de position x et y de la plateforme peuvent être calculées par les relations : $x = \rho_1 \cos(\theta_1)$ et $y = \rho_1 \sin(\theta_1)$.

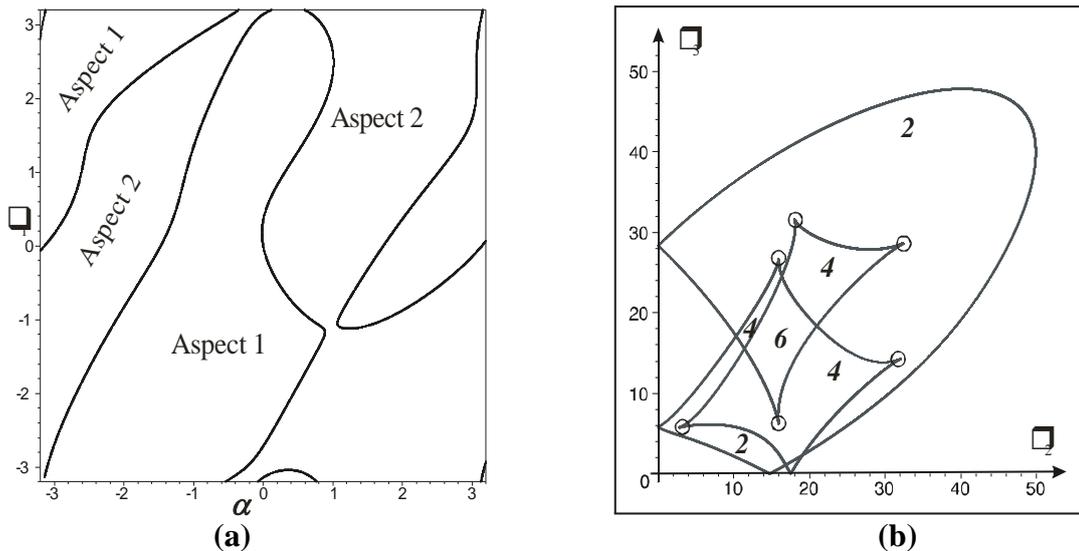


Figure 6.1 : Singularités dans (α, θ_1) pour $\rho_1=17$ (Fig. 6.1a). Singularités dans (ρ_2, ρ_3) pour $\rho_1=17$ (Fig. 6.1b)

Nous signalons que les cotés opposés de la figure 6.1a sont coïncidents ; En effet l'espace (α, θ_1) peut être considéré comme un tore car que les variables α et θ_1 sont supposées illimitées.

Les deux aspects nommés Aspect 1 et Aspect 2 sont montrés sur cette même figure, le premier aspect est défini par $\det(\mathbf{A})>0$ et le second par $\det(\mathbf{A})<0$, où \mathbf{A} est la matrice jacobienne parallèle définie dans le chapitre 1 [Gosselin 90].

La figure 6.1b montre les courbes de singularité dans une section (ρ_2, ρ_3) de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$. Ces courbes partagent l'espace en plusieurs régions ayant 2, 4 et 6 solutions au MGD [Zein 06b], [Zein 06c]. Cette section de l'espace articulaire est l'image par le MGI de chacun des deux aspects de la section de l'espace de travail de la figure 6.1a. En d'autres termes, la projection de l'un ou l'autre de ces deux aspects dans le plan (ρ_2, ρ_3) définira le même motif, celui de la figure 6.1b. Dans chacune des régions de la section de l'espace articulaire, le nombre de solutions au MGD est distribué également entre les deux aspects. Par exemple dans la région centrale ayant six 6 solutions au MGD, trois de ces six solutions seront dans l'Aspect 1 et les trois restantes seront dans l'Aspect 2.

2.3. POSITION DU PROBLEME : ANALYSE D'UNE TRAJECTOIRE FERMEE CONTOURNANT UN POINT CUSP

Tout ce que nous connaissons sur les changements non singuliers de mode d'assemblage est qu'ils ont lieu lorsque la trajectoire du manipulateur contourne un point cusp dans l'espace articulaire. Dans ce paragraphe, nous montrons à travers un exemple que cette information

toute seule est insuffisante car elle ne permet pas de déterminer le nouveau mode d'assemblage du manipulateur.

Considérons une trajectoire fermée T dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$, contournant un point cusp (Figure 6.2a). Le vecteur de la configuration articulaire initiale (et finale) $\mathbf{q}=[\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3]^T$ est choisi tel que $\mathbf{q}=[17 \ 19 \ 17]^T$, le MGD en \mathbf{q} admet six solutions réelles P_i , $i=1, 2, \dots, 6$. En prenant en compte le fait que les cotés opposés de la représentation carrée (Figure 6.2b) sont coïncidents, les solutions P_1, P_2 et P_3 sont situées dans l'aspect 1 et les trois solutions restantes sont dans l'aspect 2. La trajectoire fermée T croise des courbes de singularités en quatre configurations articulaires différentes qu'on appelle $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c$ et \mathbf{q}_d .

Nous calculons les solutions au MGD de tous les points de la trajectoire T et nous les représentons dans la section (α, θ_1) de l'espace de travail (Fig. 6.2b). Selon le sens d'exécution de T (sens trigonométrique direct ou inverse) et selon le mode d'assemblage initial, 12 trajectoires résulteront dans l'espace de travail. Ces 12 trajectoires peuvent être classifiées selon les trois types suivants :

- Les trajectoires où le manipulateur s'arrête sur l'un des points singuliers S_a, S_b, S_c et S_d qui sont associés aux configurations articulaires $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c$ et \mathbf{q}_d respectivement. Huit trajectoires de ce type existent, quatre pour chaque sens d'exécution de T . Lorsque T est exécutée dans le sens trigonométrique inverse, les quatre trajectoires de ce type sont de P_2 à S_a , de P_1 à S_d , de P_5 à S_a et de P_6 à S_d . Lorsque T est exécutée dans le sens trigonométrique direct, les quatre trajectoires de ce type sont de P_3 à S_b , de P_1 à S_c , de P_5 à S_b et de P_6 à S_c . Dans chaque cas, la solution au MGD du mode d'assemblage initial est perdue sur le point singulier, c'est pour cela que la trajectoire s'arrête et que T ne peut pas être exécutée totalement. En conséquent, aucun changement de mode d'assemblage n'est faisable suivant ces types de trajectoires.
- Deux trajectoires fermées dans l'espace de travail, partant de P_4 et finissant sur P_4 (Figure 6.2b). Ces deux trajectoires fermées diffèrent seulement par leur sens d'exécution qui dépend du sens de l'exécution de T . Ces deux trajectoires ne permettent pas au manipulateur de changer de mode d'assemblage, parce que la plateforme retourne à sa position de départ dans l'espace de travail. Contrairement aux huit trajectoires décrites ci-dessus, pour ces deux trajectoires fermées, T est totalement exécutée. Chacune de ces

deux trajectoires est composée de trois morceaux dont chacun est associé à un segment de la trajectoire (triangulaire) T .

- Deux trajectoires non singulières qui diffèrent par leur sens d'exécution seulement (de P_2 à P_3 ou de P_3 à P_2 selon le mode d'assemblage initial). Ces deux trajectoires sont tracées en gris foncé sur la figure 6.2b. Aussi, chacune de ces deux trajectoires est composée de trois morceaux dont chacun est associé à un segment de la trajectoire T . Mais dans ce cas, le mode d'assemblage final est différent du mode d'assemblage initial. Ainsi, ces deux trajectoires sont des trajectoires de changement non singulier de mode d'assemblage.

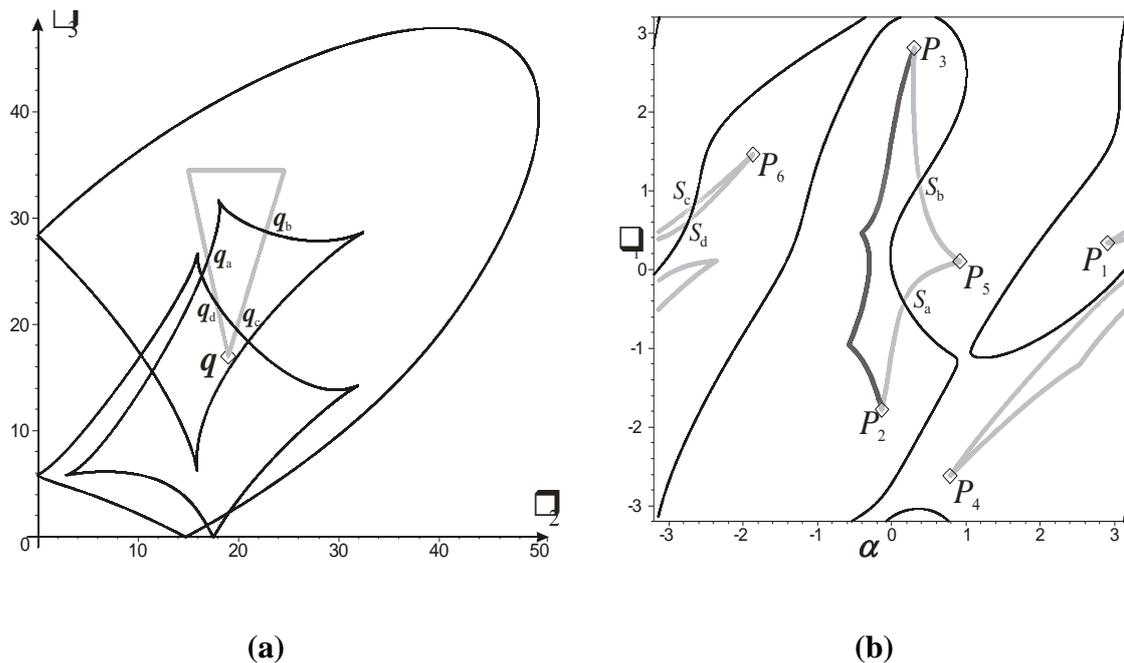


Figure 6.2 : Une trajectoire fermée contournant un point cusp dans une section de l'espace articulaire pour $\rho_1=17$ (Fig. 6.2a) et les trajectoires associées dans l'espace de travail (Fig. 6.2b)

L'analyse de la figure 6.2 soulève les questions et les commentaires suivants :

- Deux modes d'assemblage seulement, à savoir P_2 et P_3 , sont connectés par une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage. Deux autres trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage dans l'aspect 1 peuvent exister (i.e. connectant P_2 et P_1 ou P_3 et P_1), de même trois trajectoires non singulières dans l'aspect 2 peuvent exister (i.e. connectant P_4 et P_5 ou P_5 et P_6 ou P_4 et P_6) ;
- Quelles seront les trajectoires résultantes dans l'espace de travail si la trajectoire T contourne un autre point cusp (parmi six points cusp existants) dans la même section de l'espace articulaire ? Et quels modes d'assemblage seront reliés ?

- Si nous voulons relier deux modes d'assemblage dans l'espace de travail associés à la même configuration articulaire donnée \mathbf{q} , sans franchir une singularité, quel point cusp dans la section de l'espace articulaire la trajectoire T doit-on contourner ?

Clairement, ces questions ne peuvent pas avoir de réponses en s'appuyant seulement sur les informations pourvues par le tracé des singularités et de la trajectoire T dans les espace de travail et articulaire. D'autres informations complémentaires sont manquantes, ce manque d'informations est causé par la représentation actuelle de l'espace de configuration. Plus précisément, en planifiant la trajectoire T (contournant un point cusp) dans la section de l'espace articulaire (ρ_2, ρ_3) seulement, la multiplicité de solutions au MGD ne sera pas prise en compte, par suite nous ne pouvons pas savoir quels modes d'assemblage seront reliés. En conséquences, une nouvelle représentation doit être recherchée.

2.4. UN MODELE D'ESPACE DE CONFIGURATION

2.4.1. L'espace de configuration comme une surface dans un espace tridimensionnelle

La représentation des singularités utilisée dans le paragraphe précédent (Figure 6.2) résulte de la projection de l'espace de configuration sur l'un des deux espaces (ρ_1, ρ_2, ρ_3) ou $(\rho_1, \alpha, \theta_1)$. Cet espace de configuration (EC) est un espace à six dimensions représenté par le produit des espaces (ρ_1, ρ_2, ρ_3) et $(\rho_1, \alpha, \theta_1)$. En fixant la première variable articulaire ρ_1 , nous considérons des sections bidimensionnelles, ainsi l'espace de configuration devient une surface dans un espace à quatre dimensions représenté par le produit des espaces (ρ_2, ρ_3) et (α, θ_1) . La figure 6.2 est alors la projection de cet espace à quatre dimensions suivant (ρ_2, ρ_3) et (α, θ_1) séparément. C'est de cette projection que vient le manque d'informations mis en évidence dans le paragraphe précédent.

La solution consiste alors à représenter cette surface de l'espace de configuration (pour ρ_1 fixé) dans un espace tridimensionnel.

Puisque les trajectoires de changement non singulier de modes d'assemblage ne peuvent avoir lieu que dans un seul aspect, un espace de configuration doit être construit pour chaque aspect : deux espaces de configuration EC_1 et EC_2 pour les aspects 1 et 2 respectivement.

Les espaces EC_1 et EC_2 doivent être représentés dans un espace tridimensionnel, cet espace sera fonction de trois paramètres parmi les quatre suivants : ρ_2, ρ_3, α et θ_1 (nous

rappelons que la variable ρ_1 est fixée). Cet espace doit être fonction obligatoirement des deux variables articulaires ρ_2 et ρ_3 puisque les points cusp, indispensables pour la planification des trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage, n'apparaissent que dans l'espace articulaire. En conséquence, EC_1 et EC_2 pourront être représentés soit dans l'espace (ρ_2, ρ_3, α) soit dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ au lieu de l'espace produit entre (ρ_2, ρ_3) et (α, θ_1) . Pour faire le choix du troisième paramètre entre α et θ_1 , il faut s'assurer que la combinaison correspondante des trois variables (ρ_2, ρ_3, α) ou $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ définit bien une configuration du manipulateur et une seule (avec ρ_1 connue). Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que pour les manipulateurs dégénérés ou pour des variables articulaires vérifiant une équation précise, le MGD pouvait dégénérer. Ainsi pour un ensemble de variables articulaires (ρ_1, ρ_2, ρ_3) deux modes d'assemblage du manipulateur sont associés à une seule orientation α de la plateforme, ces deux modes d'assemblage peuvent être dans le même aspect aussi [Wenger 07]. Par suite, dans ces conditions particulières, pour un ρ_1 fixé le triplet (ρ_2, ρ_3, α) ne pourra pas à lui seul définir totalement une seule configuration du manipulateur. D'autre part, aucun manipulateur ne pourra avoir toujours deux modes d'assemblage dans un même aspect associés à une même valeur de θ_1 [Tancredi 95]. Par suite, les espaces de configuration EC_1 et EC_2 doivent être construits dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ et non dans (ρ_2, ρ_3, α) .

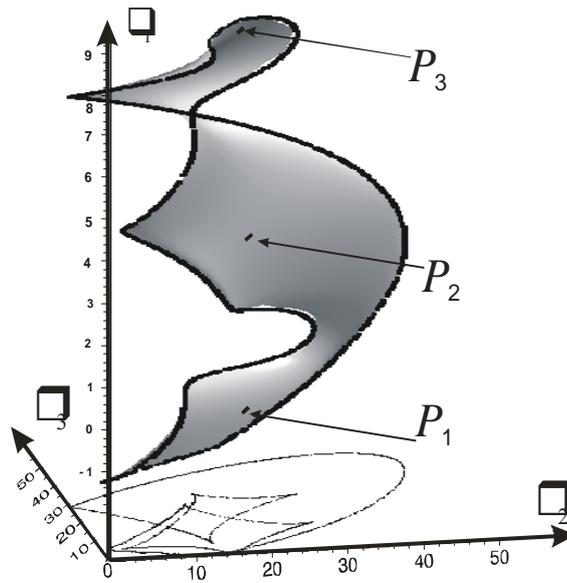
2.4.2. Construction de l'espace de configuration dans chaque aspect

Pour construire les espaces de configuration CS_1 et CS_2 du manipulateur 3-RPR parallèle, nous procédons comme suit :

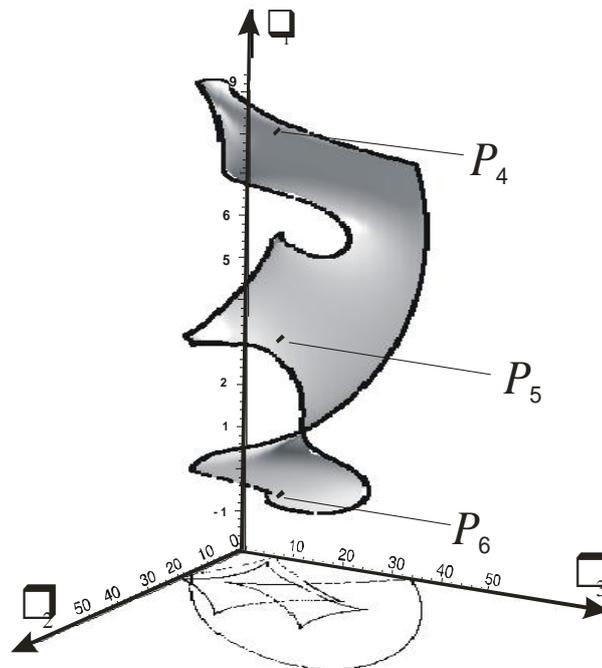
- Nous fixons la valeur de la première variable articulaire ρ_1 à celle correspondant à la configuration courante du manipulateur.
- Nous effectuons un balayage de la section de l'espace articulaire (ρ_2, ρ_3) et nous déterminons la variable θ_1 correspondant à chaque point du balayage, en résolvant le MGD pour θ_1 .
- Pour chaque configuration $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ calculée, nous déterminons le signe du déterminant de la matrice jacobienne. Si le signe est positif, la configuration $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ correspondante sera représentée dans l'aspect, sinon elle sera représentée dans l'aspect 2.

La figure 6.3 montre les deux espaces de configurations CS_1 et CS_2 pour $\rho_1=17$ du manipulateur 3-RPR parallèle étudié dans la section précédente (§2.3). Les deux surfaces sont représentées sous deux angles différents pour une meilleure visualisation. Pour avoir ces deux espaces sous cette forme surfacique, nous avons utilisé un outil CAO selon un procédé similaire à celui décrit dans le chapitre 4. Cet outil nous permettra de tourner ces deux surfaces pour mieux les visualiser. Les courbes de singularités définissant les frontières de CS_1 et CS_2 sont représentées avec des lignes en noir gras. Les projections de CS_1 et CS_2 sur le plan (ρ_2, ρ_3) sont également représentées sur la même figure. Nous considérons aussi que le manipulateur est dans la même configuration \mathbf{q} définie dans la section précédente. Les points associés aux six modes d'assemblage P_1, P_2, \dots, P_6 sont représentés sur la figure 6.3 (pour plus de simplicité ces points ont été nommés sur la figure 6.3 P_1, P_2, \dots, P_6 comme leur nomination sur la figure 6.2). Les trois premiers sont dans l'aspect 1 et les trois autres sont dans l'aspect 2.

Nous constatons que cette représentation nous donne plus de visibilité au problème traité. Nous remarquons en effet qu'avec cette représentation, toutes les trajectoires non singulières entre P_1, P_2 et P_3 d'une part et entre P_4, P_5 et P_6 d'autre part, peuvent être visibles et planifiées facilement.



(a)



(b)

Figure 6.3 : Les espaces de configuration de CS_1 (Fig.6.3a) et de CS_2 (Fig.6.3b) associés aux aspects 1 et 2 respectivement. Les six modes d'assemblages calculés au point $\mathbf{q} = [17 \ 19 \ 17]^T$ (P_1 , P_2 et P_3 dans l'aspect 1 et P_4 , P_5 et P_6 dans l'aspect 2). Les singularités (en noir gras) définissent les frontières de CS_1 et CS_2 .

2.4.3. Exemples de trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage

Dans ce paragraphe, nous planifions les trois trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage possibles dans l'aspect 1 du manipulateur 3-RPR étudié pour $\rho_1=17$, reliant les trois modes d'assemblage P_1 , P_2 et P_3 .

Pour ce faire, les trajectoires sont construites dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ en suivant la forme de la surface de CS_1 . Une interface CAO est utilisée pour définir ces trajectoires à partir d'un groupe de points et de segments linéaires. Dans les trois exemples de trajectoires que nous avons construites (Figures 6.4, 6.5 et 6.6), chaque trajectoire est définie par trois points intermédiaires et quatre segments. La projection de chaque trajectoire sur le plan (ρ_2, ρ_3) est réalisée sur chaque figure pour montrer quel point cusp sera contourné dans l'espace articulaire. Les angles de vue de chaque figure ont été choisis pour montrer aussi clairement que possible les trajectoires dans CS_1 .

La figure 6.4 montre une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant P_1 et P_2 . Nous remarquons que le point cusp contourné dans l'espace articulaire est différent de celui contourné par la trajectoire T montrée sur la figure 6.2a.

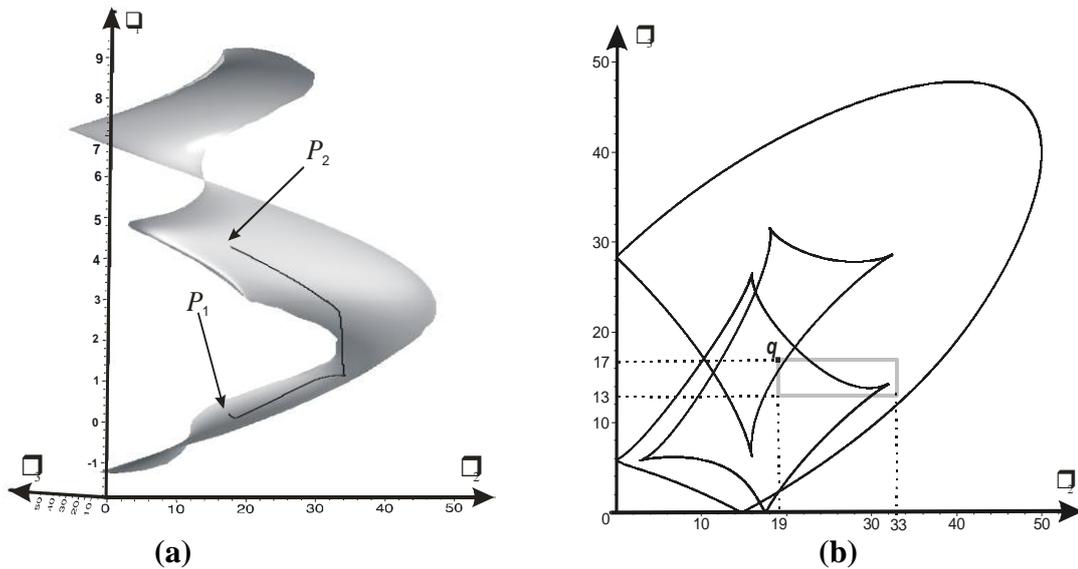


Figure 6.4 : Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant les deux modes d'assemblage P_1 et P_2 dans l'aspect 1 dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ (Fig. 6.4a), dans (ρ_2, ρ_3) (Fig. 6.4b).

La figure 6.5 montre une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant P_2 et P_3 . La trajectoire contourne deux points cusp dans l'espace articulaire (Figure 6.5a), mais en fait un seul de ces deux points est nécessaire pour le changement non singulier de mode d'assemblage, notamment le point cusp contourné par la trajectoire T de la figure 6.2a.

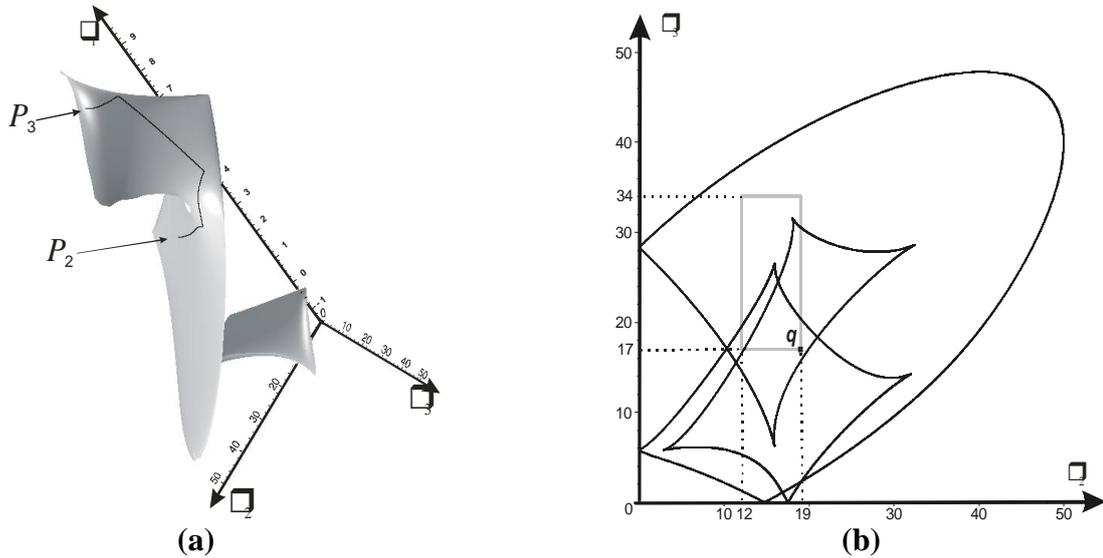


Figure 6.5 : Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant les deux modes d'assemblage P_2 et P_3 dans l'aspect 1 dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ (Fig. 6.5a), dans (ρ_2, ρ_3) (Fig. 6.5b).

Finalement, la figure 6.6 montre la trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant P_1 et P_3 .

Nous remarquons que pour relier les deux modes d'assemblage P_1 et P_3 , la trajectoire dans l'espace articulaire contourne deux points cusp (Figure 6.6b). En effet, nous avons vérifié que toute trajectoire de P_1 à P_3 doit contourner ces deux points cusp. Cela est justifié par le fait que la surface de CS_1 a une structure à plusieurs « couches », nous détaillons cela dans le paragraphe suivant. Ce résultat est nouveau, car d'après [McAree 99] un seul point cusp devait être contourné pour effectuer un changement non singulier de mode d'assemblage. Ce résultat n'aurait jamais pu être découvert avec la seule information fournie par la représentation des espaces articulaire et de travail séparément montrée en figure 6.2.

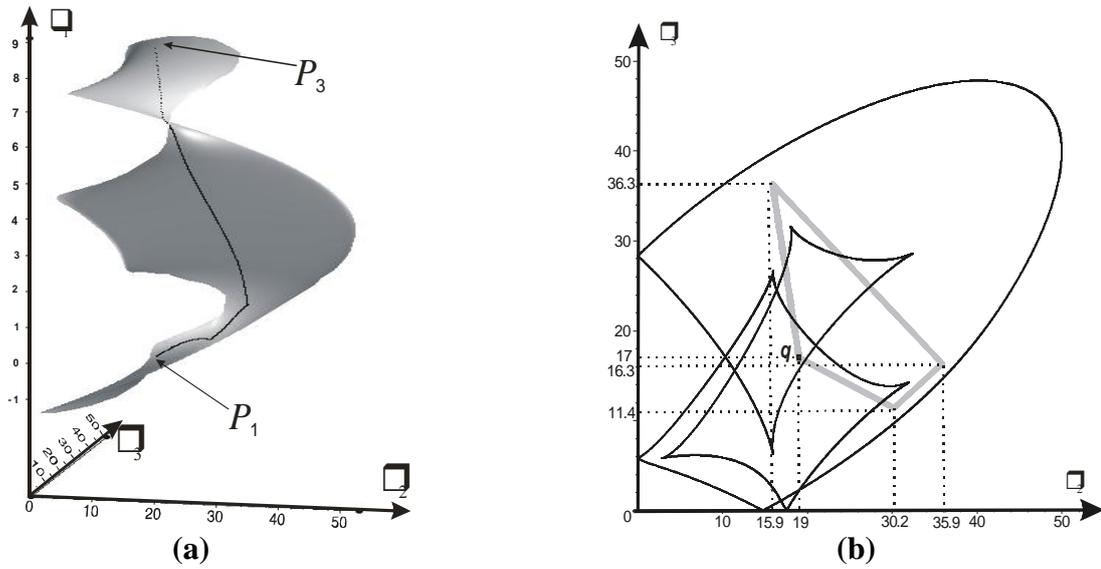


Figure 6.6 : Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage reliant les deux modes d'assemblage P_1 et P_3 dans l'aspect 1 dans $(\rho_2, \rho_3, \theta_1)$ (Fig. 6.6a), dans (ρ_2, ρ_3) (Fig. 6.6b).

2.4.4. Commentaires

Avec le modèle de la surface de l'espace de configuration proposé dans les paragraphes précédents, il n'est plus nécessaire de résoudre le problème du choix du point cusp à contourner pour la planification d'une trajectoire non singulière entre deux modes d'assemblage. Cependant, il sera possible de répondre à cette question en effectuant une projection sur (ρ_2, ρ_3) de la trajectoire construite sur CS_1 ou CS_2 .

Les deux surfaces des espaces de configuration CS_1 et CS_2 peuvent être vues comme étant composées de trois couches adjacentes L_1 , L_2 et L_3 (suivant θ_1). Ces trois couches sont associées aux trois modes d'assemblage P_1 , P_2 et P_3 . La première et la deuxième couche L_1 et L_2 sont adjacentes, de même la deuxième et troisième couche L_2 et L_3 le sont aussi.

La présence d'un point cusp dans (ρ_2, ρ_3) représente l'existence d'une liaison continue entre deux couches de la surface de CS_1 ou de celles de CS_2 . Cela donne une explication suffisante du fait que se déplacer d'une couche à une autre (ou se déplacer d'un mode d'assemblage à un autre sans franchir de singularité) est équivalent à contourner un point cusp dans l'espace articulaire.

Pour planifier la troisième trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage de l'exemple précédent (Figure 6.6), il a fallu qu'on se déplace de la première

couche L_1 de CS_1 jusqu'à la troisième couche L_3 (parce que P_1 est sur L_1 et P_3 est sur L_3), c'est pour cela que la trajectoire correspondante projetée sur (ρ_2, ρ_3) a contourné deux points cusp.

Les surfaces de l'espace de configuration pour ρ_1 fixe dépendent de la valeur de ρ_1 . Dans le cas traité dans ce chapitre pour $\rho_1 = 17$, le manipulateur peut avoir jusqu'à six modes d'assemblage, trois dans chaque aspect, ainsi chaque surface est formée de trois parties. Si dans une section de l'espace articulaire pour une certaine valeur de ρ_1 , le manipulateur ne peut avoir que quatre modes d'assemblage (deux chaque aspect), alors les surfaces de l'espace de configuration CS_1 et CS_2 seront formées chacune de deux parties seulement au lieu de trois.

2.5. CONCLUSION

Une approche globale a été proposée dans cette section §2 pour l'explication des changements non singuliers de mode d'assemblage pour les manipulateurs 3-RPR parallèles plans. Nous avons montré que la représentation des espaces de travail et articulaire n'est pas suffisante pour décrire des trajectoires non singulières entre différents modes d'assemblage. L'approche proposée consiste d'abord à fixer l'une des variables articulaires, ensuite l'espace de configuration est réduit à deux surfaces dans un espace tridimensionnel, une surface pour chaque aspect. Cette description globale fournit les informations suffisantes pour comprendre la topologie de l'espace de configuration avec une variable articulaire fixée, elle montre clairement toutes les trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage du manipulateur.

Cette approche pourra être développée pour être appliquée au cas des manipulateurs octaédraux parallèles. Ces manipulateurs sont des manipulateurs particuliers de type Gough-Stewart, ils ont 6 degrés de liberté, ils sont formés d'une base et d'une plateforme triangulaires connectées par six chaînes. L'idée dans le cas de ces manipulateurs serait de fixer quatre variables articulaires (cf. § Perspectives).

3. ZONES EXEMPTES DE SINGULARITES DES MANIPULATEURS 3-RPR PARALLELES

Dans cette section, nous nous intéressons à une deuxième approche pour éviter les singularités des manipulateurs parallèles, cette dernière consiste à calculer les régions exemptes de singularités dans les espaces articulaire et de travail de ces manipulateurs. Tout d'abord, nous proposons une méthode pour le calcul des régions non singulières de l'espace

articulaire des manipulateurs 3-RPR parallèles, puis une autre méthode pour le calcul des régions non singulières dans l'espace de travail.

Nous montrons que les méthodes proposées pourront constituer un outil intéressant d'aide à la conception de manipulateurs et de planification de trajectoires.

3.1. ZONES EXEMPTES DE SINGULARITES MAXIMALES DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

La majorité des chercheurs calculent les zones exemptes de singularités dans l'espace de travail seulement. A notre connaissance, il n'y a pas de travaux dans la littérature portant sur la détermination des zones exemptes de singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR parallèles. Le calcul de ces zones dans l'espace articulaire présente plusieurs avantages. Premièrement, le calcul des zones exemptes de singularités dans l'espace articulaire aide à trouver les valeurs des butées articulaires. Ensuite, la planification de trajectoires dans ces zones garantit que le manipulateur ne change pas de mode d'assemblage. En effet, l'absence de singularités et en particulier de points cusp dans ces zones garantit que le manipulateur n'effectuera aucun changement de mode d'assemblage non singulier. Dans l'espace de travail, en revanche, planifier une trajectoire dans une zone sans singularités ne garantit pas que le manipulateur ne changera pas de mode d'assemblage car on sait qu'un manipulateur peut effectuer un changement de mode d'assemblage non singulier au sein d'une zone dépourvue de toute singularité. Enfin, il est possible de calculer une distance aux singularités dans l'espace articulaire, contrairement à ce qui se passe dans l'espace de travail.

Dans ce qui suit, nous proposons une procédure pour le calcul des zones exemptes de singularités les plus larges de l'espace articulaire. Pour plus de simplicité, nous choisissons ces zones comme des cubes. Pour vérifier la validité de notre procédure, nous l'appliquons sur le même manipulateur 3-RPR utilisé dans ce chapitre.

3.1.1. Procédure

Étape 1 : Après avoir calculé les singularités dans l'espace articulaire du manipulateur parallèle étudié (Étape 5 §4.3), nous choisissons une configuration articulaire initiale $Q_0(\rho_{10}, \rho_{20}, \rho_{30})$ à l'intérieur de cet espace. Cette configuration sera le centre du cube exempt de singularités à calculer. On peut la choisir comme l'image par le MGI du centre prescrit de l'espace de travail ou directement dans l'espace articulaire comme le centre d'une large région exempte de singularités.

Étape 2 : Dans cette étape, nous calculons le cube le plus large dans l'espace articulaire ayant pour centre $Q_0(\rho_{10}, \rho_{20}, \rho_{30})$. Pour ce faire, nous calculons tout d'abord la distance de Chebyshev entre Q_0 et chacun des points singuliers de l'espace articulaire $Q_s(\rho_{1s}, \rho_{2s}, \rho_{3s})$ calculés dans l'étape 5 de la section §4.3. La distance de Chebyshev d a la forme suivante :

$$d = \max(|\rho_{10} - \rho_{1s}|, |\rho_{20} - \rho_{2s}|, |\rho_{30} - \rho_{3s}|) \quad (6.1)$$

Ensuite parmi toutes les distances calculées, nous conservons la distance minimale d_{\min} , parce qu'en effet nous recherchons la distance entre le centre Q_0 et le point singulier Q_s le plus proche de Q_0 .

Par conséquent, la longueur de l'arête du cube exempte de singularités sera :

$$a = 2 \times d_{\min} \quad (6.2)$$

Étape 3 : Le choix de la configuration initiale Q_0 comme centre du cube exempt de singularités n'est pas un choix optimal. Modifier légèrement la position de Q_0 dans l'espace articulaire peut aboutir à un cube plus large.

Pour optimiser la position du centre Q_0 du cube nous utilisons un algorithme de type HOOKE et JEEVES [Hooke 61]. Avec ce type d'algorithme, la solution obtenue correspond à un minimum local. Par suite la différence entre les positions initiale et finale de Q_0 ne sera pas très importante. Ceci permet de ne pas éloigner trop du choix initial fait par le concepteur.

Étape 4 : Le cube exempt de singularités calculé dans l'étape précédente touche le point singulier le plus proche du centre Q . Afin que le cube ne touche pas les surfaces de singularités de l'espace articulaire et pour plus de sécurité, nous soustrayons une distance de sécurité s de la distance d_{\min} . Cette distance de sécurité a pour seul objectif d'empêcher le robot de rencontrer une singularité et sera choisie en tenant compte du pas de discrétisation utilisé pour le calcul des surfaces de singularité. Selon le type d'applications visées par le robot et en fonction des trajectoires à réaliser, il pourra être nécessaire d'augmenter cette distance de sécurité au niveau de la planification de trajectoires. Par exemple pour garantir une certaine rigidité au robot pour des tâches d'usinage, on pourra utiliser des critères cinétostatiques pour optimiser cette distance comme l'angle de pression [Arakelyan 07], le conditionnement de la matrice jacobienne normalisée ou des critères géométriques [Alba-Gomez 06].

Finalement, un des grands avantages de cette procédure est qu'elle nous aide à fixer les butées articulaires du manipulateur 3-RPR parallèle. Les valeurs de ces butées, correspondant

au cube exempt de singularités, peuvent être calculées facilement suivant les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_{i\min} = \rho_{i0} - (d_{\min} - s) \\ \rho_{i\max} = \rho_{i0} + (d_{\min} - s) \end{cases} \quad (6.3)$$

où : $i=1,2,3$ et $\rho_{i\min}$ et $\rho_{i\max}$ sont les valeurs des butées minimales et maximales respectivement de la jambe i .

3.1.2. Exemple de l'application de la procédure

Pour illustrer l'efficacité de la procédure établie ci-dessus, nous l'appliquons pour calculer le cube le plus large exempt de singularités dans l'espace articulaire du même manipulateur étudié dans ce chapitre. Nous illustrons deux exemples avec un centre initial de cube Q_0 différent pour chaque exemple. Nous déterminons les cubes correspondants dans chaque cas, et nous calculons leurs images dans l'espace de travail.

Exemple 1 :

Pour le même manipulateur 3-RPR parallèle étudié, nous choisissons la configuration $Q_0(35,25,45)$ comme centre initial du cube à calculer, le choix de cette configuration a été effectué dans une grande région sans singularités de l'espace articulaire grâce à la représentation 3D des surfaces de singularités.

Après avoir calculé la distance de Chebyshev entre Q_0 et chacun des points singuliers Q_s de l'espace articulaire, la distance minimale trouvée est $d_{\min}=5.3$. Par suite la longueur de l'arête du cube exempt de singularités le plus large de l'espace articulaire et dont Q_0 est le centre est $a = 2*d_{\min} = 10.6$.

En exécutant l'algorithme d'optimisation de la position du centre du cube Q_0 , nous aboutissons à une distance maximale $d_{\min}=7.175$ pour le centre $Q(41.625, 24.875, 44.125)$. Nous soustrayons une valeur de sécurité de 0.1 de d_{\min} qui devient alors $d_{\min}=7.075$.

La figure 6.7a montre les singularités dans l'espace articulaire du manipulateur étudié et le cube exempt de singularités le plus large dont le centre est $Q(41.625, 24.875, 44.125)$. La figure 6.7b montre le manipulateur 3-RPR étudié et les amplitudes des joints (en rouge) limitées par les butées articulaires correspondant au cube exempt de singularités calculé, ces butées articulaires sont calculées d'après les équations (6.3).

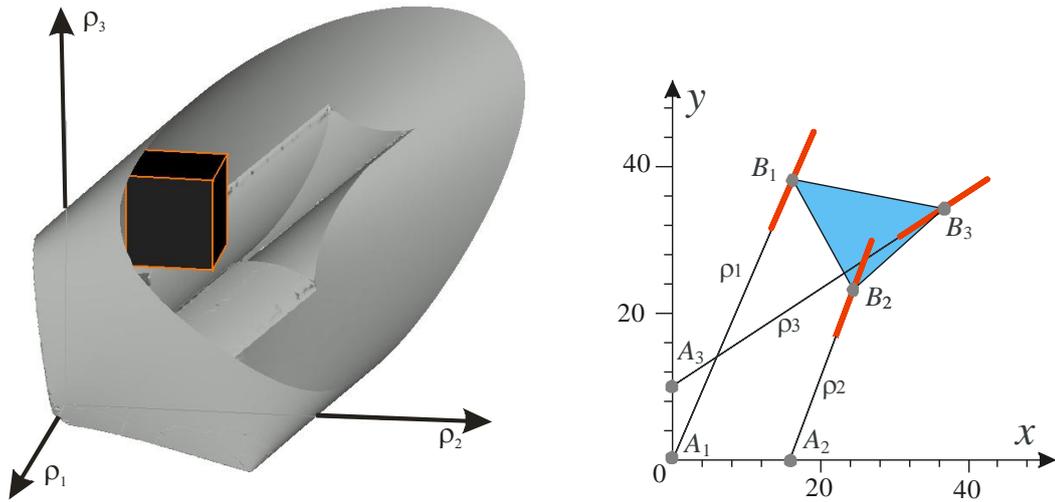


Figure 6.7 : Surfaces de singularités dans l'espace articulaire et le cube exempt de singularités le plus large de centre $Q(41.625, 24.875, 44.125)$ (Fig6.7a). Manipulateur 3-RPR étudié et amplitudes des joints en rouge (Fig6.7b).

La figure 6.8 montre l'image par le MGD du cube calculé. Son image est composée de deux volumes séparés exempts de singularités dans l'espace de travail, chacun de ces deux volumes est situé dans un aspect différent de l'espace de travail. Les projections de ces deux volumes sur le plan (x,y) sont illustrées en gris sur la figure 6.8.

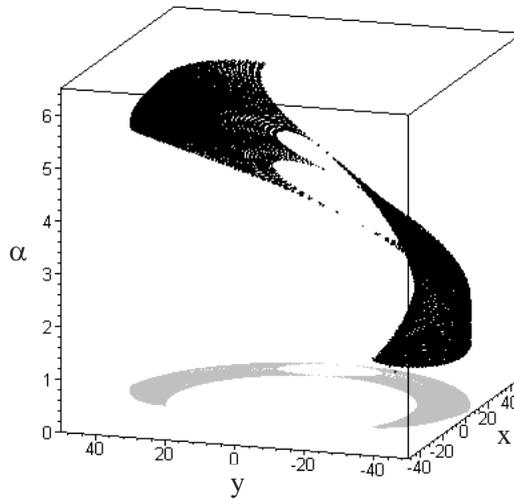


Figure 6.8 : Les images par MGD du cube exempt de singularités (en noir) et leur projection sur le plan (x,y) (en gris).

La figure 6.9 montre les deux volumes obtenus dans l'espace de travail et les singularités du manipulateur étudié (les singularités sont tracées en couleur).

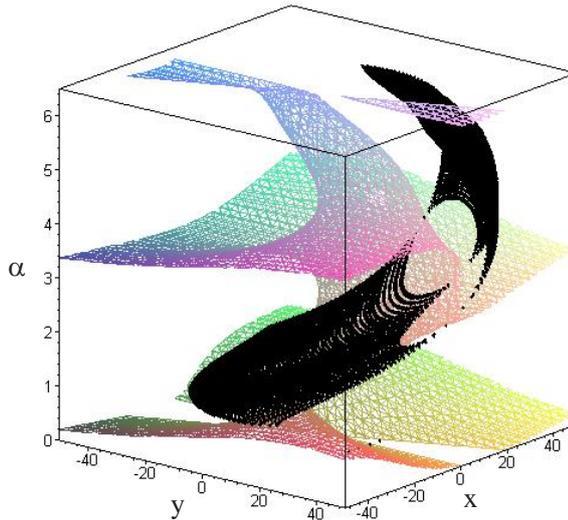


Figure 6.9 : Les volumes exempts de singularités et les singularités dans l'espace de travail.

Si le cube calculé était situé dans la région stable centrale à quatre solutions au MGD de l'espace articulaire, nous aurions obtenu, comme image par le MGD de ce cube, quatre volumes exempts de singularités séparés dans l'espace de travail au lieu de deux, sachant qu'il y aurait deux volumes dans chaque aspect.

Exemple 2 :

Pour le même manipulateur 3-RPR parallèle, nous considérons dans cet exemple une autre configuration $Q_0(30,50,35)$ comme centre initial du cube à calculer, le choix de cette configuration est effectué dans une autre grande région sans singularités de l'espace articulaire. La distance de Chebyshev minimale trouvée entre Q_0 et chacun des points singuliers Q_s de l'espace articulaire est $d_{\min}=4$, alors la longueur de l'arête du cube exempt de singularités le plus large de l'espace articulaire de centre Q_0 est $a = 2*d_{\min} = 8$. Après l'exécution de l'algorithme d'optimisation de la position du centre du cube Q_0 , nous aboutissons à une distance maximale $d_{\min}=5.794$ pour le centre $Q(38.125, 50, 33)$. Nous soustrayons une valeur de sécurité de 0.1 de d_{\min} qui devient $d_{\min}=5.694$.

La figure 6.10a montre les singularités dans l'espace articulaire du manipulateur étudié et le cube exempt de singularités le plus large dont le centre est $Q(38.125, 50, 33)$. La figure 6.10b montre le manipulateur 3-RPR étudié et les amplitudes des joints (en rouge) limitées par les butées articulaires correspondant au cube exempt de singularités calculé.

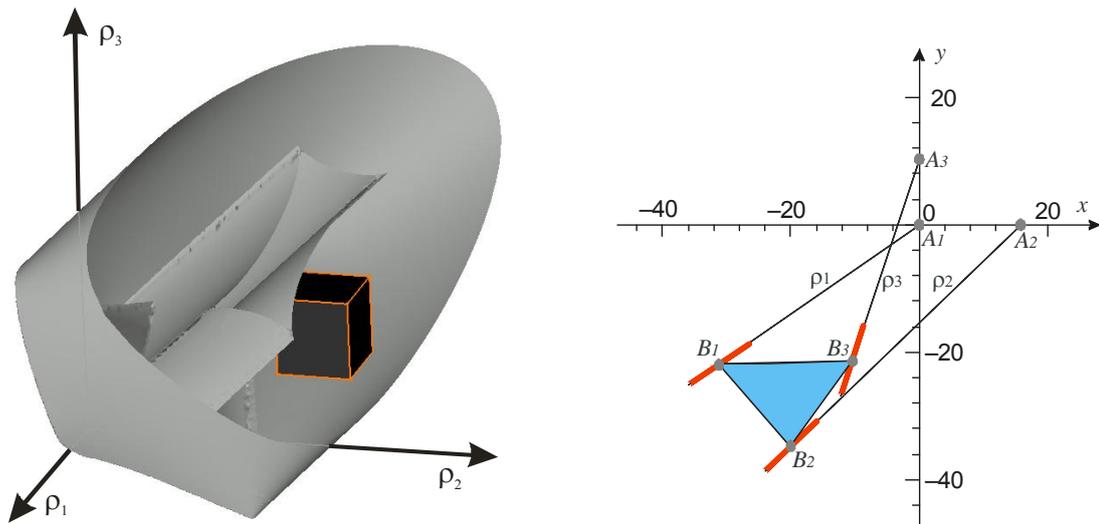


Figure 6.10 : Surfaces de singularités dans l'espace articulaire et le cube exempt de singularités le plus large de centre $Q(38.125, 50, 33)$ (Fig.6.10a). Manipulateur 3-RPR étudié et amplitudes des joints en rouge (Fig.6.10b).

La figure 6.11 montre l'image par le modèle géométrique direct du cube. Son image est aussi composée de deux volumes séparés exempts de singularités dans l'espace de travail, chacun de ces deux volumes est situé dans un aspect différent de l'espace de travail. Les projections de ces deux volumes sur le plan (x,y) sont illustrées en gris sur la figure 6.11. Les volumes sont montrés avec le même angle de vue que la figure 6.8 pour montrer la différence entre les deux cas.

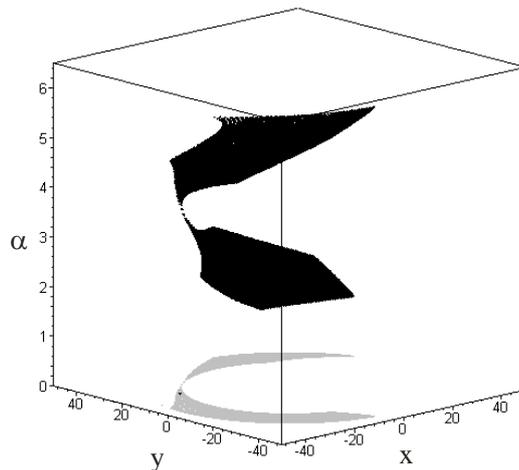


Figure 6.11 : Les images par modèle géométrique direct du cube exempt de singularités (en noir) et leur projection sur le plan (x,y) (en gris).

Sans surprise, nous remarquons d'après les figures 6.8 et 6.11 que les deux volumes dans l'espace de travail n'ont pas une forme régulière bien qu'ils soient l'image d'un cube dans l'espace articulaire.

Sur les deux exemples illustrés ci-dessus, nous remarquons que les plages de variation des articulations ne sont pas proches de la base du manipulateur, cela est dû à notre choix initial des coordonnées du centre du cube exempt de singularités à calculer. En choisissant un centre initial du cube ayant des coordonnées de petites valeurs, les les plages de variation des articulations seront sûrement proches de la base du manipulateur, mais le cube exempt de singularités aura un volume réduit, les amplitudes des joints seront donc réduites par conséquent.

3.2. ZONES EXEMPTES DE SINGULARITES MAXIMALES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL

Le calcul des zones exemptes de singularités dans l'espace de travail est aussi important que celui des zones dans l'espace articulaire. A son tour, il présente des avantages que le calcul dans l'espace articulaire ne peut pas fournir. Son avantage principal est que la forme de la zone non singulière calculée pourra être régulière si nous le désirons. Mais le calcul des butées articulaires n'est pas immédiat comme dans le cas du calcul des zones non singulières dans l'espace articulaire.

Li et Gosselin ont proposé une approche analytique pour calculer, dans l'espace de travail des manipulateurs 3-RPR parallèles plans, les plus grands cylindres exempts de singularités ayant un axe parallèle à l'axe de l'orientation de la plateforme α [Li 06]. Après avoir fixé la position de l'axe du cylindre et sa hauteur, ils calculent analytiquement la distance minimale de cet axe aux surfaces singulières. Cette distance est le rayon du cylindre exempt de singularités.

La procédure que nous proposons pour le calcul des zones exemptes de singularités les plus larges de l'espace de travail, est proche de celle proposée dans la section précédente. Mais dans ce cas, nous choisissons que ces zones ont la forme d'un parallélépipède ayant une base carrée, et dont la hauteur sera fixée auparavant. En d'autres termes, le problème consiste à calculer, pour une amplitude fixée de l'orientation de la plateforme du manipulateur et pour un centre prescrit, le plus grand volume de l'espace de travail exempt de singularités ayant la forme d'un parallélépipède.

Finalement, pour vérifier l'efficacité de notre procédure, nous l'appliquons sur le même manipulateur 3-RPR utilisé dans ce chapitre.

3.2.1. Procédure

Dans le chapitre 4, les coordonnées articulaires (ρ_{2s}, ρ_{3s}) sont obtenues à partir du calcul des coordonnées $(\rho_{1s}, \alpha_s, \theta_{1s})$ des singularités. A partir des triplets $(\rho_{1s}, \alpha_s, \theta_{1s})$, nous pourrions calculer les coordonnées (x_s, y_s, α_s) des singularités dans l'espace de travail en utilisant les formules suivantes : $x_s = \rho_{1s}\cos(\theta_{1s})$ et $y_s = \rho_{1s}\sin(\theta_{1s})$.

Les surfaces de singularités de l'espace de travail du manipulateur 3-RPR étudié sont représentées sur la figure 6.12, les points singuliers (x_s, y_s, α_s) calculés ont été traités par un outil de CAO pour avoir cette forme surfacique des singularités.

Les étapes de la procédure de calcul des zones exemptes de singularités les plus larges de l'espace de travail sont les suivantes :

Étape 1 : Nous choisissons tout d'abord une configuration initiale $W_0(x_0, y_0, \alpha_0)$ dans un volume sans singularités suffisamment large de l'espace de travail. Cette configuration sera le centre du parallélépipède exempt de singularités à calculer. Ensuite, nous choisissons l'amplitude de l'orientation de la plateforme $\Delta\alpha_0$, ce choix sera influencé par le type de tâches que le manipulateur doit effectuer.

Étape 2 : Dans cette étape, nous calculons le parallélépipède le plus large dans l'espace de travail ayant pour centre $W_0(x_0, y_0, \alpha_0)$. La hauteur de ce parallélépipède sera égale à l'amplitude $\Delta\alpha_0$ choisie. Cependant, nous calculons tout d'abord la distance de Chebyshev entre W_0 et chacun des points singuliers de l'espace de travail $W_s(x_s, y_s, \alpha_s)$ ayant une orientation de la plateforme α_s tel que $\alpha_0 - \Delta\alpha_0/2 < \alpha_s < \alpha_0 + \Delta\alpha_0/2$. La distance de Chebyshev sera calculée suivant x et y seulement parce la base du parallélépipède a une forme carrée, cette distance d a la forme suivante :

$$d = \max(|x_0 - x_s|, |y_0 - y_s|) \quad (6.4)$$

Ensuite parmi toutes les distances calculées, nous conservons la distance minimale d_{\min} , parce qu'en effet nous cherchons la distance entre le centre W_0 et le point singulier W_s le plus proche de W_0 .

Par conséquent, les longueurs des arêtes du parallélépipède exempt de singularités seront :

$$a = b = 2 \times d_{\min} \quad \text{et} \quad c = \Delta\alpha_0 \quad (6.5)$$

Étape 3: Le parallélépipède exempt de singularités trouvé dans l'étape précédente touche le point singulier le plus proche du centre W_0 . Afin que le parallélépipède ne touche pas les surfaces de singularités de l'espace de travail et pour plus de sécurité, nous soustrayons une petite valeur de sécurité s de la distance d_{\min} .

Le choix de la configuration initiale W_0 comme centre du parallélépipède exempt de singularités n'est pas un choix optimal. Alors similairement à l'approche précédente de calcul dans l'espace articulaire, nous optimisons la position du centre W_0 du cube en utilisant un algorithme de type HOOKE et JEEVES, sauf que dans ce cas il faut ajouter des limites sur les coordonnées x et y de l'espace de travail. La solution obtenue correspondra à un minimum local, par suite la différence entre les positions initiale et finale de W_0 ne sera pas très importante. Ceci permet de respecter le choix initial fait par le concepteur.

3.2.2. Exemple de l'application de la procédure

Pour le même manipulateur 3-RPR parallèle étudié, nous choisissons la configuration $W_0(-20,-20,-1.5)$ comme centre initial de l'espace à calculer et $\Delta\alpha_0 = 1$ rd comme l'amplitude de l'orientation de la plateforme du manipulateur.

Après avoir calculé la distance de Chebyshev suivant x et y entre W_0 et chacun des points singuliers W_s de l'espace de travail respectant cette relation $-2 < \alpha_s < -1$, la distance minimale trouvée est $d_{\min} = 20$. Par suite, les longueurs des arêtes du parallélépipède exempt de singularités le plus large de l'espace de travail et dont W_0 est le centre sont $a = b = 2*d_{\min} = 40$, et $c = 1$. Nous soustrayons une valeur de sécurité de 0.1 de d_{\min} qui devient $d_{\min}=19.9$. Cette valeur de sécurité a été choisie arbitrairement.

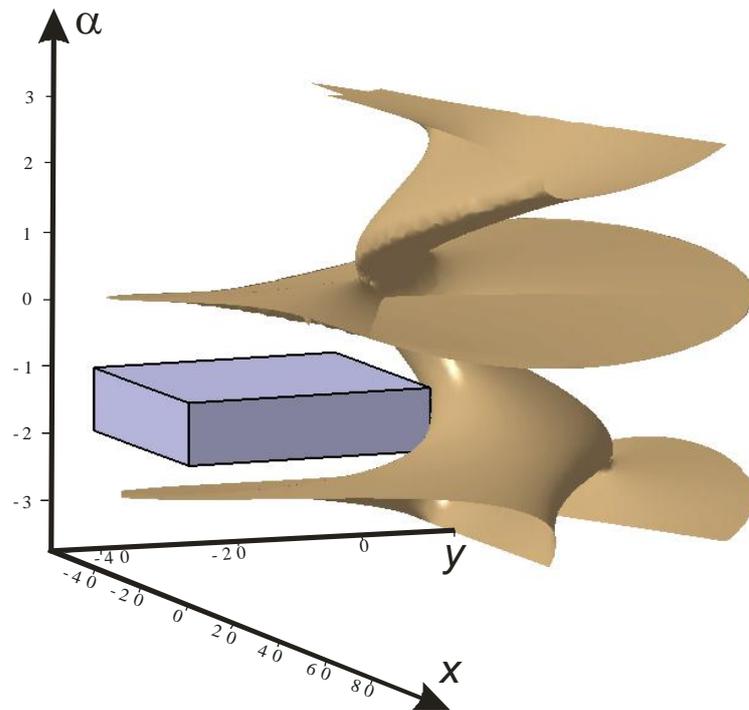


Figure 6.12 : Surfaces de singularités dans l'espace de travail et le parallélépipède exempt de singularités le plus large de centre $W_0(-20,-20,-1.5)$.

La figure 6.12 montre les singularités dans l'espace de travail du manipulateur étudié et le parallélépipède exempt de singularités le plus large dont le centre est $W_0(-20,-20,-1.5)$.

La figure 6.13 montre l'image par le MGI du parallélépipède calculé.

Outre que l'espace de travail du manipulateur 3-RPR a une forme régulière, l'avantage principal que présente cette procédure est que l'utilisateur peut contrôler la position et les dimensions de l'espace de travail du manipulateur (centre, volume, arêtes), ce qui n'est pas le cas en utilisant la procédure de la section précédente.

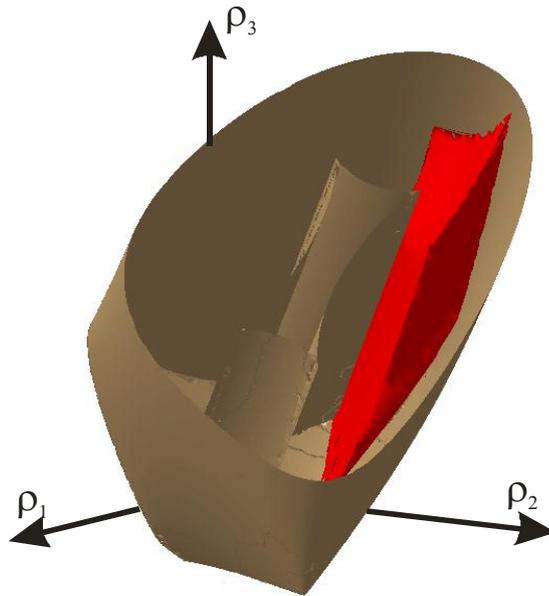


Figure 6.13 : Surfaces de singularités dans l'espace articulaire et l'image par modèle géométrique inverse du parallélépipède exempt de singularités (en rouge).

Nous remarquons sur figure 6.13 que le calcul des butées articulaires dans ce cas n'est pas aussi facile que dans le cas précédent. Cela est dû à la forme irrégulière de l'image par MGI du parallélépipède exempt de singularités.

Finalement, notre étude présente deux avantages par rapport à celle de Li et Gosselin [Li 06]. Le premier est que le temps de calcul du volume exempt de singularités dans l'espace de travail est plus réduit avec notre approche (de l'ordre de 5s pour une résolution normale, les singularités étant calculées auparavant) au lieu d'un temps d'exécution de 2 min avec l'approche de Li. Ceci est dû en effet au fait que notre approche est numérique et que la seule équation à calculer est celle de la distance de Chebyshev qui a une forme très simple, tandis que l'approche de Li est analytique et fait intervenir des équations plus ou moins compliquées. Le deuxième avantage est que nous pouvons optimiser le choix initial de la position du centre du volume exempt de singularités, ce qui n'est pas le cas avec l'étude de Li.

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, deux procédures différentes ont été utilisées pour éviter les singularités des manipulateurs 3-RPR parallèles plans. La première consiste à planifier des trajectoires non singulières, et la seconde consiste à déterminer des zones exemptes de singularités dans les espaces articulaire et de travail du manipulateur.

La première partie du chapitre a été consacrée à l'étude des changements non singuliers de mode d'assemblage pour les manipulateurs 3-RPR parallèles. La représentation des espaces de travail et articulaire n'est pas suffisante pour décrire des trajectoires non singulières entre différents modes d'assemblage. Une nouvelle approche a été proposée pour expliquer les changements non singuliers de mode d'assemblage et pour planifier ces trajectoires. Elle consiste à fixer l'une des variables articulaires, par suite l'espace de configuration est réduit à deux surfaces dans un espace tridimensionnel, une surface pour chaque aspect [Zein 07c]. Cette description globale fournit les informations suffisantes pour comprendre la topologie de l'espace de configuration avec une variable articulaire fixée. Elle montre clairement toutes les trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage du manipulateur.

Dans la deuxième partie du chapitre, une méthode pour le calcul de boîtes ayant une forme cubique, exemptes de singularités dans l'espace articulaire, a été introduite [Zein 07d]. Cette méthode permet de calculer facilement les valeurs des butées articulaires.

Ensuite, une méthode pour le calcul de boîtes, ayant une forme parallélépipédique, exemptes de singularités dans l'espace de travail a été exposée. L'amplitude de l'orientation de la plateforme du manipulateur et le centre prescrit de l'espace de travail sont fixés par l'utilisateur. L'avantage de cette méthode est que la forme de la zone de travail sans singularités est régulière et que l'utilisateur peut contrôler sa position et ses dimensions, ce qui n'est pas le cas pour la première méthode.

Finalement, chacune de ses deux méthodes présente ses propres avantages par rapport à l'autre.

CONCLUSION GENERALE

Les travaux exposés dans ce mémoire concernent l'étude cinématique et la comparaison de mécanismes de type manipulateur. Cette thèse a abordé l'étude et l'analyse de deux types de manipulateurs : les manipulateurs sériels à trois articulations rotoïdes et à axes orthogonaux, et les manipulateurs plans parallèles de type 3-RPR.

La contribution majeure de ces recherches a été :

- la classification exhaustive des manipulateurs 3R orthogonaux ayant des simplifications géométriques, en fonction de la topologie de leur espace de travail, et la comparaison des performances de ces manipulateurs.
- l'analyse des singularités des manipulateurs plans parallèles de type 3-RPR et l'ébauche de méthodes pour éviter ces configurations.

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux manipulateurs sériels à trois articulations rotoïdes et à axes orthogonaux ayant des simplifications géométriques (au moins un de leurs paramètres DHm est nul). Dans le deuxième chapitre, nous avons énuméré toutes les familles. Dix familles en total ont été trouvées. Après avoir calculé leurs singularités, nous avons classifié les manipulateurs de chacune de ces dix familles suivant la topologie de leur espace de travail, la topologie de l'espace de travail étant définie par le nombre de nœuds qui apparaissent sur les singularités de ces manipulateurs. Vingt deux types différents de manipulateurs ont été trouvés (ayant des topologies d'espace de travail différentes). Nous avons étudié les propriétés des manipulateurs de chacun de ces vingt deux types, à savoir le nombre de nœuds, l'existence ou non de cavités, la t-parcourabilité et le nombre de solutions inverses [**Zein 06a**].

Ensuite, dans le troisième chapitre, notre objectif était de comparer les performances des manipulateurs étudiés. Tout d'abord, nous avons comparé les vingt deux types de manipulateurs trouvés suivant la topologie de leur espace de travail. Cinq types de

manipulateurs, ayant des topologies intéressantes et des espaces de travail t^+ -parcourables, ont été mis en évidence. Ensuite, nous avons comparé les performances locales de ces cinq types de manipulateurs suivant un nouvel indice de performance que nous avons introduit. Cet indice de performance prend en compte la compacité de l'espace de travail et le conditionnement à l'intérieur de celui-ci. Le calcul de ce nouvel indice est basé sur le calcul de l'espace de travail dextre des manipulateurs 3R sériels. Les meilleurs manipulateurs au sens de cet indice ont été mis évidence [Zein 07a].

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons étudié les manipulateurs parallèles plans de type 3-RPR. Dans le chapitre 4, nous avons étudié les singularités de ces manipulateurs. Tout d'abord, nous avons proposé une méthode pour déterminer leurs singularités dans des sections de l'espace articulaire. Nous avons mené une analyse descriptive de ces singularités avec une attention particulière au nombre de points cusp dans chaque section [Zein 06b] [Zein 07b]. Contrairement aux manipulateurs sériels 3R orthogonaux, nous avons trouvé que le nombre de points cusp de ces manipulateurs peut varier d'une section à l'autre. Ensuite, nous avons proposé un algorithme pour le calcul des points cusp de ces manipulateurs [Zein 06c] [Zein 07b].

Nous nous sommes intéressés ensuite à l'étude de la dégénérescence du modèle géométrique direct des manipulateurs 3-RPR parallèles. Nous avons découvert deux nouveaux cas où le modèle géométrique du manipulateur dégénère. Le premier cas a lieu lorsque les variables articulaires du manipulateur vérifient une certaine condition. Le deuxième cas de dégénérescence a lieu, pour n'importe quelles valeurs des variables articulaires, lorsque les paramètres géométriques du manipulateur vérifient une certaine relation. Les manipulateurs dont les paramètres obéissent à cette relation ont été appelés « manipulateurs dégénérés », leur modèle géométrique direct est toujours dégénéré. Nous avons, ensuite, étudié la cinématique de ces nouveaux manipulateurs que nous avons découverts. Nous avons montré que leurs singularités et leurs points cusp sont très faciles à calculer [Wenger 07].

Nous avons finalement proposé des méthodes différentes pour éviter les singularités des manipulateurs 3-RPR parallèles. Nous avons commencé par trouver une explication pertinente aux phénomènes de changements non singuliers de mode d'assemblage. Nous avons défini une nouvelle représentation de l'espace de configuration de ces manipulateurs, et nous avons proposé une approche pour planifier les trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage [Zein 07c]. Ensuite, nous nous sommes intéressés à une

autre façon pour éviter les singularités. Nous avons proposé tout d'abord une méthode pour la détermination des zones non singulières de formes cubiques dans l'espace articulaire de ces manipulateurs, nous avons exploité cette méthode en calculant les butées articulaires de ces manipulateurs [Zein 07d]. Ensuite, nous avons présenté une approche pour calculer les zones non singulières dans l'espace de travail pour une amplitude d'orientation donnée du manipulateur et pour un centre prescrit de l'espace de travail.

PERSPECTIVES

Les perspectives de ce travail peuvent se décomposer suivant quatre grandes voies.

Dans ce mémoire, nous avons analysé et classifié les manipulateurs 3R à axes orthogonaux particuliers selon plusieurs critères. Ensuite, nous les avons comparés suivant la topologie et la compacité de leur espace de travail et le conditionnement à l'intérieur de celui-ci, pour mettre en évidence finalement les manipulateurs les plus performants au regard de ces critères. Or, malgré leur importance dans la phase de conception, ces critères à eux seuls ne garantissent pas la pertinence de ces manipulateurs. Pour obtenir un outil d'aide complet à la conception de ces manipulateurs et pour permettre à l'ingénieur de faire son choix, ces critères sont à mettre en relation avec d'autres indices de performance comme par exemple les performances dynamiques qui n'ont pas été abordées dans ce mémoire, les aspects liés à l'équilibrage et la gestion des collisions internes. Enfin dans l'objectif de trouver un manipulateur optimal, nous nous retrouverons face à un problème multicritères. Ainsi, nous pourrions être amenés à utiliser des outils d'optimisation multicritères et d'aide à la décision comme ceux élaborés dans notre équipe de recherche.

Une seconde direction de recherche pourrait être envisagée. Il s'agit d'étudier la robustesse des manipulateurs 3R orthogonaux particuliers vis-à-vis de la précision de fabrication et d'assemblage et du placement du manipulateur dans son environnement. Une partie de cette recherche a déjà été initiée dans les travaux de thèse de Caro [**Caro 04**]. L'apport de la classification et la comparaison suivant la topologie de l'espace de travail est un outil supplémentaire pour ce travail.

Les résultats présentés sur les manipulateurs 3R orthogonaux dans ce mémoire restent valables si nous considérons que les manipulateurs 3R étudiés constituent des porteurs de manipulateurs 6R dont le poignet est à axes concourants. Une piste de recherche envisageable

dans le cas des manipulateurs 6R est d'étudier l'influence du porteur 3R sur l'orientation du poignet

Ainsi, une autre extension possible de notre travail pourra être de classer et de comparer les manipulateurs 6R à géométrie quelconque en fonction des mêmes critères utilisés dans ce mémoire. Cependant la complexité des modèles augmente compte tenu du nombre plus important de paramètres de DHm à prendre en compte.

Concernant les manipulateurs parallèles, nous avons proposé une procédure pour le calcul des points cusp des manipulateurs 3-RPR parallèles plans et une procédure pour la planification de trajectoires non singulières de changement de modes d'assemblage de ces manipulateurs. Les perspectives de cette partie de notre travail consistent à étendre notre étude et à la développer pour l'appliquer aux manipulateurs parallèles spatiaux de type octaédral. Ces manipulateurs sont des manipulateurs particuliers de Gough-Stewart, ils ont 6 degrés de liberté, ils sont formés d'une base et d'une plateforme triangulaires connectées par six chaînes. Il a été démontré que ces manipulateurs peuvent être cuspidaux et par suite qu'ils peuvent changer de modes d'assemblage sans franchir de singularités [McAree 99]. Pour déterminer les points cusp de ces manipulateurs, il s'agit d'actualiser le calcul du chapitre 4 en tenant compte des paramètres de ces manipulateurs. Cependant, ce calcul pourra être confronté à la complexité des équations étant donné le nombre plus important de paramètres géométriques de ces manipulateurs. Enfin, pour montrer les trajectoires non singulières de modes d'assemblage, l'idée dans le cas de ces manipulateurs sera de fixer quatre variables articulaires (deux variables restantes non fixées) et de construire les surfaces de l'espace de configuration dans $(\rho_5, \rho_6, \theta_1)$, où ρ_5 et ρ_6 sont les deux articulations non fixées et θ_1 est l'angle entre la base et un des triangles formés par les chaînes cinématiques.

Nous avons démontré que les manipulateurs dégénérés découverts dans ce mémoire disposent de bonnes propriétés cinématiques (singularités simples, modèle géométrique simplifié). La dernière voie de recherche consiste donc à étudier plus en détail ces manipulateurs qui peuvent être des candidats intéressants pour la conception de manipulateurs parallèles plans. Il s'agit de prendre d'autres aspects en considération comme le conditionnement, la dynamique, la fabrication et la gestion des collisions internes.

BIBLIOGRAPHIE

- [Alba-Gomez 06]** Alba-Gomez O., Wenger Ph., Pamanes A., “Performance Indices for Kinematically Redundant Parallel Planar manipulators”, IFToMM International Journal Problems of Mechanics, Vol.22, No.1, pp.24-40, 2006.
- [Angeles 97]** Angeles J., “Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms”, Springer, 1997.
- [Arakelian 07]** Arakelian V., Briot S., Glazunov V., “Improvement of functional performance of spatial parallel manipulators using mechanisms of variable structure”, Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besancon, France, 18-21 Juin.
- [Arsenault 04]** Arsenault M., Boudreau R., “The Synthesis of three-degree-of-freedom Planar Parallel Mechanisms with Revolute Joints (3-*RRR*) for an Optimal Singularity Free Workspace”, Journal of Robotic Systems, Vol.21, No.5, pp.259–274, 2004.
- [Baili 04]** Baili M., “Analyse et Classification de Manipulateurs 3R à axes Orthogonaux”, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Décembre 2004.
- [Bennis 91]** Bennis F., “Contribution à la Modélisation Géométrique et Dynamique des Robots à Structure Simple et Complexes”, Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes, Janvier 1991.

- [Bhattacharya 98]** Bhattacharya S., Hatwal H., Gosh A., “Comparison of an Exact and an Approximate Method of Singularity Avoidance in Platform Type Parallel Manipulators”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol.33, No.7, pp.965–974, 1998.
- [Bonev 02]** Bonev I.A., “Geometric Analysis of Parallel Mechanisms”, Thèse de doctorat, Université Laval, Novembre 2002.
- [Bonev 03]** Bonev I.A., Zlatanov D., Gosselin C.M., “Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory”, *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, No. 3, pp. 573–581, 2003.
- [Borrel 86]** Borrel P., Liegeois A., “A Study of Manipulator Inverse Kinematic Solutions with Application to Trajectory Planning and Workspace Determination”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp.1180-1185, 1986.
- [Burdick 88]** Burdick J.W., “Kinematic Analysis and Design of Redundant Manipulators”, Thèse de doctorat, Stanford, 1988.
- [Burdick 91]** Burdick J.W., “A Classification of 3R regional manipulator Singularities and Geometries”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2670-2675, Sacramento, California, Avril 1991.
- [Burdick 95]** Burdick J.W., “A Recursive method for Finding Revolute-Jointed Manipulator Singularities”, *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol.117, pp.55-63, 1995.
- [Chablat 98a]** Chablat D., “Domaines d’Unicité et Parcourabilité pour les Manipulateurs Pleinement Parallèles”, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Novembre 1998.
- [Chablat 98b]** Chablat D., Wenger Ph., Angeles J., “The Kinematic Design of a 3-DOF Hybrid Manipulator”, *2nd International Conference On Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Compiègne, France, Mai 1998.

-
- [Chablat 01]** Chablat D., Wenger Ph., “Séparation des Solutions au Modèles Géométriques Direct et Inverse pour les Manipulateurs pleinement Parallèles”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol.36, No.6, pp. 763-783, 2001.
- [Chablat 03]** Chablat D., Wenger P., “Architecture Optimization of a 3-DOF Parallel Mechanism for Machining Applications, the Orthoglide”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.19, No.3, pp.403-410, juin 2003.
- [Chablat 04a]** Chablat D., Wenger P., “Dispositif de déplacement et d'orientation d'un objet dans l'espace et utilisation en usinage rapide”, Brevet français : FR2850599 (06/08/2004); Brevet Européen EP1597017 (23/11/2005); Canadien CA2515024 (26/08/2004) Demande PCT: WO2004071705 (26/08/2004). Mandataire : Cabinet LAVOIX,CNRS/ECN,pp. 1-27. 2004.
- [Chablat 04b]** Chablat D., Wenger Ph., Majou F., Merlet J-P, “An Interval Analysis Based Study for the Design and the Comparison of 3-DOF Parallel Kinematic Machines”, *International Journal of Robotics Research*, Vol.23, No.6, pp. 615-624, juin 2004.
- [Chedmail 98]** Chedmail P., Dombre E., Wenger Ph., « La CAO en Robotique : Outils et Méthodologie », Hermes, Paris, 1998.
- [Corvez 02]** Corvez S., Rouillier F., “Using computer algebra tools to classify serial manipulators”, *Proceedings of the Fourth International Workshop on Automated Deduction in Geometry*, Linz, 2002.
- [Dash 03]** Dash A.K., Chen I.M., Yeo S.H., Yang G., “Singularity-free Path Planning of Parallel Manipulators Using Clustering Algorithm and Line Geometry”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan, Septembre 14-19, 2003.
- [Dheeman 97]** Dheeman B., Ashitava G., “Singularity Analysis of Platform-Type Multi-Loop Spatial Mechanisms”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol.33, pp.375-389, 1997.

- [El Omri 95]** El Omri J., Wenger Ph., “How to Recognize Simply a Nonsingular Posture Changing 3-DOF Manipulators”, Proceedings of the 7th International Conference on Advanced Robotics, ICAR’95, Vol.1, pp.215-222, San Felieu de Glixol, Espagne, Septembre 1995.
- [El Omri 96]** El Omri J., “Analyse Géométrique et Cinématique des Mécanismes de Type Manipulateur”, Thèse de Doctorat, Nantes, Février 1996.
- [GDT 04]** Grand Dictionnaire Terminologique, Office Québécois de la Langue Française, <http://www.granddictionnaire.com>.
- [Gogu 05]** Gogu G., “Structural Synthesis and Singularity Analysis of 6R Orthogonal Robotic Manipulators with three parallel axes”, Proceedings of the International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics, Brésil, Mars 2005.
- [Gorla 84]** Gorla B., Renaud M., “Modèles des Robots Manipulateurs ; Application à leur Commande”, Cepadues Édition, Toulouse, 1984.
- [Gosselin 90]** Gosselin C.M., Angeles J., “Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol.6, pp.281-290, Juin 1990.
- [Gosselin 92]** Gosselin C.M., Sefrioui J., Richard M.J., “Solutions polynomiales au problème de la cinématique des manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté”, Mechanism and Machine Theory, Vol.27, pp.107-119, 1992.
- [Gosselin 94]** Gosselin C.M., Merlet J-P, “On the Direct Kinematics of Planar Parallel Manipulators: Special Architectures and Number of Solutions,” Mechanism and Machine Theory, Vol.29, No.8, pp.1083-1097, Novembre 1994.
- [Gosselin 95]** Gosselin C.M., Wang J., “Singular Loci of Planar Parallel Manipulators”, 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Vol.3, Milan, Italie, Août/Septembre 1995.
- [Gupta 82]** Gupta K.C., Roth B., “Design Considerations for Manipulator Workspace”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol.104, pp.704-711, Octobre 1982.

-
- [Haugh 95]** Haugh R.J., Adkins F.A.; Luh C.M., “Domain of Operation and Interference for Bodies in Mechanisms and Manipulators”, In J-P.Merlet, B. Ravani editor, Computational Kinematics, pp. 193-202, Kluwer, 1995.
- [Hooke 61]** Hooke R., Jeeves T.A., “Direct search solution of numerical and statistical problems”, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.8, No.2, pp.212-229, 1961.
- [Hunt 78]** Hunt K.H., “Geometry of Mechanisms”, Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [Hunt 83]** Hunt K.H., “Structural Kinematics of In Parallel-Actuated Robot-Arms”, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol.105, pp.705-712, Décembre 1983.
- [Hunt 93]** Hunt K.H, Primrose E.J.F., “Assembly Configurations of some In-Parallel-Actuated Manipulators”, Mechanism and Machine Theory, Vol.28, No.1, pp.31-42, 1993.
- [Innocenti 92]** Innocenti C., Parenti-Castelli V., “Singularity-Free Evolution from one Configuration to another in Serial and fully-Parallel Manipulators”, Robotic, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, ASME 1992.
- [Jo 89]** Jo D.Y., Haug E.J., “Workspace Analysis of Closed-Loop Mechanisms with Unilateral Constraints », ASME Design and Automation Conference, Mars 1989.
- [Kanaan 07]** Kanaan D., Wenger P., Chablat D., “Kinematics Analysis of the Parallel Module of the VERNE Machine”, Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besançon-France, Juin18-21, 2007.
- [Khalil 86]** Khalil W., Kleinfinger J. F., “A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1174-1179, 1986.
- [Khalil 96]** Khalil W., Murareci D., “Kinematic Analysis and Singular Configurations of a Class of Parallel Robots”, Mathematics and Computers in Simulation, pp.377-390, 1996.

- [Khalil 02]** Khalil W., Dombre E., “Modeling, Identification and Control of Robots”, Hermes Penton Science, ISBN 1-9039-9613-9, 2002.
- [Klein 87]** Klein C.A., Blaho B.E., “Dexterity Measures for the Design and Control of Kinematically Redundant Manipulators”, The International Journal of Robotics Research, Vol.6, No.2, pp.72-83, 1987.
- [Kohli 85]** Kohli D., Spanos J., “Workspace Analysis of Mechanical Manipulator Using Polynomial Discriminants”, Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design, Vol.107, pp. 209-215, Juin 1985.
- [Kohli 87]** Kohli D., Hsu M.S., “The Jacobian Analysis of Workspaces of Mechanical Manipulators”, Mechanism and Machine Theory, Vol.22, N°3, pp. 265-275, 1987.
- [Kong 00]** Kong X., Gosselin C.M., “Determination of the Uniqueness Domains of 3-*RPR* Planar Parallel Manipulators with Similar Platforms,” Proceedings of the 2000 ASME Design Engineering Technical conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, USA 2000.
- [Kong 01]** Kong X., Gosselin C.M., “Forward displacement analysis of third-class analytic 3-*RPR* planar parallel manipulators,” Mechanism and Machine Theory, Vol.36, No.9, pp.1009-1018, 2001.
- [Krut 03]** Krut S., “Contributions à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires”, Thèse de Doctorat, LIRMM, Université de Montpellier II, Octobre 2003.
- [Li 06]** Li H., Gosselin C.M., “Determination of Maximal Singularity-free Zones in the Workspace of Planar three-degree-of-freedom Parallel Mechanisms”, Mechanism and Machine Theory, Vol.41, No.10, pp.1157-1167, 2006.
- [Li 07]** Li H., Gosselin C.M., “Determination of Maximal Singularity-free Zones in the Six-dimensional Workspace of the General Gough-Stewart Platform”, Mechanism and Machine Theory, Vol.42, No.4, pp.497-511, 2007.

-
- [Ma 91]** Ma O., Angeles J., “Architecture Singularities of Platform Manipulators”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1542-1547, Sacramento, Californie, Avril 1991.
- [Majou 04]** Majou F., “Analyse Cinétostatique des Machines Parallèles à Translations”, Thèse de doctorat de l’Ecole Centrale de Nantes, 2004.
- [McAree 99]** McAree P.R., Daniel R.W., “An Explanation of never-special Assembly Changing Motions for 3-3 Parallel Manipulators”, The International Journal of Robotics Research, Vol.18, No.6, pp.556-574, 1999.
- [Merlet 89]** Merlet J-P., “Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 8, N° 5, Octobre 1989.
- [Merlet 94]** Merlet J-P., “Trajectory verification in the workspace for parallel manipulators”, International Journal of Robotics Research, Vol.13, No.4, pp.326–333, 1994.
- [Merlet 98]** Merlet J-P., “Determination of the Presence of Singularities in 6D Workspace of a Gough parallel manipulator,” Proceedings of the Advances on Robots Kinematics, ARK, Strobl, pp.39–48, Juin 1998.
- [Merlet 00]** Merlet J.P., “Parallel Robots, Solid Dynamics and its Applications”, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [Merlet 01]** Merlet J.P., “An Improved Design Algorithm Based on Interval Analysis for Parallel Manipulator with Specified Workspace”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, 23-25 Mai 2001.
- [Miko 05]** Miko P., “The Closed Form Solution of the Inverse Kinematic Problem of 3R Positioning Manipulators”, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

- [Ottaviano 04]** Ottaviano E., Husty M., Ceccarelli M., “A cartesian representation for the boundary workspace of 3R manipulators”, Proceedings On Advances in Robot Kinematics, ARK’04, Kluwer Academic Publisher, pp. 247-254, Sestri Levante, Italie, Juin 2004.
- [Parenti 88]** Parenti-Castelli V., Innocenti C., “Spatial Open Kinematic Chains: Singularities, Regions and Subregions”, Proceedings of the 7th CISM-IFTOMM Romansy, pp. 400-407, Udine, Italy, Septembre 1988.
- [Paul 81]** Paul R-P., “ Robot Manipulators : Mathematics, Programming and Control ”, M.I.T Press, 1981.
- [Pennock 90]** Pennock G.R., Kassner D.J., “Kinematic Analysis of a Planar Eight-bar Linkage: Application to a Platform-type Robot,” ASME Proceedings of the 21th Biennial Mechanisms Conference, pp. 37-43, Chicago, September 1990.
- [Pieper 68]** Pieper D.L., “The Kinematics of Manipulators under Computer Control”, PhD Thesis, Stanford University, Stanford, 1968.
- [Ranjbaran 94]** Ranjbaran F., Angeles J., “On positioning Singularities of 3-Revolute Robotic Manipulators”, Proceedings of the 12th Symposium on Engineering Applications in Mechanics, pp. 273-282, Montreal, Canada, Juin 1994.
- [Salisbury 82]** Salisbury J.K., Craig J.J., “Articulated Hands : Force and Kinematic Issues”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 1, No.1, pp. 4-17, 1982.
- [Sefrioui 93]** Sefrioui J., Gosselin C.M., “Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators”, Robotic and Autonomous Systems, pp.209-224, 1993.
- [Sefrioui 95]** Sefrioui J., Gosselin C.M., “On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 30, No. 4, pp. 535-551, 1995.
- [Sen 03]** Sen S., Dasgupta B., Mallik A.K., “Variational Approach for Singularity-free-path-planning of Parallel Manipulators”, Mechanism and Machine Theory, Vol.38, No.11, pp.1165–1183, 2003.

-
- [Singh 92]** Singh J.R., Rastegar J., Snee S., “Determination of Manipulator Kinematic Characteristics : A Probabilistic Approach”, International Journal of Robotics and Automation, Vol. 7, No.4, pp. 161-170, 1992.
- [Smith 90]** Smith D.R., “Design of Solvable 6R Manipulators”, Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 1990.
- [Smith 93]** Smith D. R., Lipkin H., “Higher Order Singularities of Regional Manipulators”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993.
- [Sutherland 73]** Sutherland G., Roth B., “A Transmission Index for Spatial Mechanism”, ASME Journal of Engineering for Industry, 589-597, 1973.
- [Tancredi 95]** Tancredi L., “De la Simplification et la Résolution du Modèle Géométrique Direct des Robots Parallèles,” Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.
- [Tsai 93a]** Tsai K.Y., Kohli D., “Trajectory Planning in Task Space for General Manipulators”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol.115, pp.909-914, Décembre 1993.
- [Tsai 93b]** Tsai K.Y., Kohli D., Arnold J., “Trajectory Planning in Joint Space for Mechanical Manipulators”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol.115, pp.915-921, Décembre 1993.
- [Wenger 89]** Wenger Ph., “Aptitude d’un Robot Manipulateur à Parcourir son Espace de Travail en Présence d’Obstacles”, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, Octobre 1989.
- [Wenger 91]** Wenger Ph., Chedmail P., “Ability of a robot to travel through its workspace”, International Journal of Robotics Research, Vol.10, No.3, pp.214-227, Juin 91.
- [Wenger 92]** Wenger Ph., “A New General Formalism for the Kinematic Analysis for all Non-Redundant Manipulators”, Proceedings of the International Conference on Robotics and automation, pp.442-447, Nice, France, Mai 1992.

- [Wenger 94]** Wenger Ph., El Omri J., “On the Kinematics Of Singular and Nonsingular Posture Changing Manipulators”, Proceedings of the Advances in Robots Kinematics, ARK’94, Kluwer Academic Publisher, pp.29-38, Ljubjana, Juillet 1994.
- [Wenger 97]** Wenger Ph., Chablat D., “Definition Sets for the Direct Kinematics of Parallel Manipulators”, Proceedings of the 8th Conference on Advanced Robotics, pp.859-864, 1997.
- [Wenger 98]** Wenger Ph., Chablat D., “Workspace and Assembly modes in Fully-Parallel Manipulators : A Descriptive Study”, Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control”, Kluwer Academic Publishers, pp.117-126, 1998.
- [Wenger 01]** Wenger Ph., Gosselin C., Chablat D., “A Comparative Study of Parallel Kinematic Architectures for Machining Applications ”, 2nd Workshop on Computational Kinematics, Séoul, Korée, pp. 249-258, Mai 2001.
- [Wenger 04a]** Wenger Ph., “Uniqueness Domains and Regions of Feasible Paths for Cuspidal Manipulators”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 20, No.4, pp.745-750, 2004.
- [Wenger 04b]** Wenger Ph., Chablat D., Baili M., “A DH-Parameter Based Condition for 3R Orthogonal Manipulators to have 4 Distinct Inverse Kinematic Solutions”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol.127, No.1, pp. 150–155, 2004.
- [Wenger 07]** Wenger Ph., Chablat D., Zein M., “Degeneracy Study of the Forward Kinematics of Planar 3-RPR Parallel Manipulators”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol.129, No.12, 2007.
- [Yan 83]** Yang D.C.H., Lee T.W., “On the Workspace of Mechanical Manipulators”, ASME Journal of Mechanisms, Transmission and automation in design, Vol.105, pp.62-70, mars 1983.
- [Yoshikawa 85]** Yoshikawa T., “Manipulability and Redundant Control of Mechanisms”, Proceedings of the International Conference on Robotics and automation, pp. 1004-1009, St Louis, Mars 1985.

-
- [Zlatanov 94]** Zlatanov D., Fenton R.G., Benhabib B., “Singularity analysis of mechanism and Robots via a Velocity Equation Model of the Instantaneous Kinematics”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 986-991, San Diego, 1994.
- [Zlatanov 01]** Zlatanov D., Bonev I.A., Gosselin C.M., “Constraint singularities”, Web review , www.parallemic.org/Reviews/Review005.html, Laboratoire de robotique de l'Université Laval, Canada, 2001.
- [Zein 06a]** Zein M., Wenger P., Chablat D., “An exhaustive study of the workspaces topologies of all 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications”, Mechanism and Machine Theory, Vol.41. No.8, pp.971-986, 2006.
- [Zein 06b]** Zein M., Wenger Ph., Chablat D., “Singular Curves and Cusp Points in The Joint Space of 3-RPR Parallel Manipulators,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Orlando, Mai 2006.
- [Zein 06c]** Zein M., Wenger Ph., Chablat D., “An Algorithm for Computing Cusp Points in the Joint Space of 3-RPR Parallel Manipulators”, Proceedings of the European Conference on Mechanisms Science EUCOMES, Autriche 2006.
- [Zein 07a]** Zein M., Wenger P., Chablat, D., “A design oriented study for 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications”, Proceedings of the 2nd World Congress of Design and Modelling of Mechanical Systems, Monastir-Tunisie, 19-21 Mars, 2007.
- [Zein 07b]** Zein M., Wenger P., Chablat D., “Singular curves in the joint space and cusp points of 3-RPR parallel manipulators”, ROBOTICA, acceptée avec revisions en 2007.
- [Zein 07c]** Zein M., Wenger P., Chablat D., “Non Singular Assembly Mode Changing motions for 3-RPR parallel manipulators”, Mechanism and Machine Theory, à paraître en 2007.

[Zein 07d]

Zein M., Wenger P., Chablat D., “Singularity surfaces and maximal singularity-free boxes in the joint space of planar 3-RPR parallel manipulators”, Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besançon-France, 18-21 Juin, 2007.

PUBLICATIONS PERSONNELLES

Publications dans des revues avec comités de lecture

1. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*An exhaustive study of the workspaces topologies of all 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications*”, Mechanism and Machine Theory, Vol.41. N°.8, August 2006, Pages 971-986.
2. Wenger, P., Chablat, D. et Zein, M. “*Degeneracy study of the forward kinematics of planar 3-RPR parallel manipulators*”, ASME Journal of Mechanical Design, à paraître en 2007.
3. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*Non singular assembly mode changing motions for 3-RPR parallel manipulators*”, Mechanism and Machine Theory, à paraître en 2007.
4. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*Singular curves in the joint space and cusp points of 3-RPR parallel manipulators*”, ROBOTICA, acceptée avec révisions en 2007.

Publications dans des conférences internationales

1. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*Singularity surfaces and maximal singularity-free boxes in the joint space of planar 3-RPR parallel manipulators*”, Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, Besançon-France, 18-21 Juin, 2007.
2. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*A design oriented study for 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications*”, Proceedings of the 2nd World Congress of Design and Modelling of Mechanical Systems, Monastir-Tunisie, 19-21 Mars, 2007.

3. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*Singular curves and cusp points in the joint space of 3-RPR parallel manipulators*”, Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Orlando-Etats Unis, 15-19 Mai, 2006.
4. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*An algorithm for computing cusp points in the joint space of 3-RPR parallel manipulators*”, Proceedings of the European Conference on Mechanism Science (EuCoMeS), Obergurgl-Autriche, 21-26 Fevrier, 2006.
5. Zein, M., Wenger, P. et Chablat, D. “*Workspaces topologies of all 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications*”, Proceedings of the International Workshop on Computational Kinematics (CK), Cassino-Italie, 4-6 Mai, 2005.

Dans cette annexe, nous présentons les équations des polynômes caractéristiques du modèle géométrique inverse et des déterminants des matrices jacobiennes de quelques types de manipulateurs sériels 3R à axes orthogonaux ayant des structures simplifiées.

A.1. FAMILLE A ($d_2 = 0, r_2 \neq 0, d_3 \neq 0, r_3 = 0$)

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille A a la forme suivante:

$$P(t) = (At^2 + Bt + C)^2$$

$$\text{Où : } \begin{cases} A = d_3 d_4 - \left(\frac{-K_2 + L_2}{2} \right) \\ B = -2d_4 r_2 \\ C = -d_3 d_4 - \left(\frac{-K_2 + L_2}{2} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} K_2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ L_2 = d_3^2 + d_4^2 + r_2^2 \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne des manipulateurs de la famille A a la forme suivante :

$$\text{Dét}(J) = d_4 V_1 c_2$$

$$\text{où: } V_1 = -d_4 r_2 c_3^2 + d_3 d_4 s_3 c_3 - d_3 r_2 c_3 + d_3^2 s_3$$

Les équations des configurations singulières sont obtenues en résolvant l'équation du déterminant de la matrice jacobienne. Les équations des singularités des manipulateurs de la famille A sont:

$$\begin{cases} \theta_2 = \pm \pi / 2 \\ P_1(\theta_3 / 2) = 0 \end{cases}$$

où P_1 est un polynôme de 4^{ème} degré en $\text{tg}(\theta_3/2)$ obtenu en exprimant V_1 en fonction de $\text{tg}(\theta_3/2)$, P_1 a la forme suivante :

$$P_1(\theta_3/2) = (-d_4r_2 + d_3r_2)t_3^4 + 2(d_3^2 - d_3d_4)t_3^3 + 2d_4r_2t_3^2 + 2(d_3^2 + d_3d_4)t_3 - d_4r_2 - d_3r_2$$

A.2. FAMILLE B ($d_2 = 0, r_2 = 0, d_3 \neq 0, r_3 = 0$)

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille B a la forme suivante:

$$P(t) = (At^2 + C)^2.$$

$$\text{Où : } \begin{cases} A = d_3d_4 - \left(\frac{-K_2 + L_2}{2}\right) \\ C = -d_3d_4 - \left(\frac{-K_2 + L_2}{2}\right) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} K_2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ L_2 = d_3^2 + d_4^2 \end{cases}$$

A.3. FAMILLE C ($d_2 = 0, r_2 \neq 0, d_3 = 0, r_3 = 0$)

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille C a la forme suivante:

$$P(t) = (At^2 + Bt + C)^2$$

$$\text{Où : } \begin{cases} A = -\left(\frac{-K_2 + L_2}{2}\right) \\ B = -2d_4r_2 \\ C = -\left(\frac{-K_2 + L_2}{2}\right) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} K_2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ L_2 = d_4^2 + r_2^2 \end{cases}$$

A.4. FAMILLE D ($d_2 \neq 0, r_2 = 0, d_3 \neq 0, r_3 = 0$)

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille D a la forme suivante:

$$P(t) = at^4 + ct^2 + e$$

$$\text{Où : } \begin{cases} a = m_5 - m_2 + m_0 \\ c = -2m_5 + 4m_4 + 2m_0 \\ e = m_5 + m_2 + m_0 \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} m_0 = d_2^2(-x^2 - y^2) + \frac{(L_2 - K_2)^2}{4} \\ m_2 = (L_2 - K_2)d_4d_3 \\ m_4 = d_4^2d_2^2 \\ m_5 = d_3^2d_4^2 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} K_2 = x^2 + y^2 + z^2 + d_2^2 \\ L_2 = d_3^2 + d_4^2 \end{cases}$$

A.5. FAMILLE E ($d_2 \neq 0, r_2 = 0, d_3 = 0, r_3 = 0$)

Le polynôme caractéristique des manipulateurs de la famille E a la forme suivante:

$$P(t) = m_0t^4 + ct^2 + m_0$$

$$\text{Où : } c = 4m_4 + 2m_0$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} m_0 = d_2^2(-x^2 - y^2) + \frac{(L_2 - K_2)^2}{4} \\ m_4 = d_4^2d_2^2 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} K_2 = x^2 + y^2 + z^2 + d_2^2 \\ L_2 = d_4^2 \end{cases}$$

Dans cette annexe, nous exposons tout d'abord les équations démontrant que le triplet $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ définit de façon unique une pose (x, y, α) de la plateforme mobile d'un manipulateur 3-RPR parallèle. Ensuite, nous exposons les équations nécessaires au calcul des singularités du même manipulateur dans l'espace $(\rho_1, \alpha, \theta_1)$.

D'après la géométrie du manipulateur parallèle plan 3-RPR (Equations 4.9), les équations montrant que l'espace $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ peut être assimilé à l'espace de travail (x, y, α) (**e.g.** le triplet $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ définit de façon unique une pose (x, y, α)) sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho_1 \cos(\theta_1) \\ y = \rho_1 \sin(\theta_1) \\ \alpha = \text{Arc cos}\left(\frac{A_{2x} + \rho_2 \cos(\theta_2) - \rho_1 \cos(\theta_1)}{b_1}\right) \\ \alpha = \text{Arc sin}\left(\frac{\rho_2 \cos(\theta_2) - \rho_1 \cos(\theta_1)}{b_1}\right) \end{cases}$$

Pour des variables articulaires (ρ_1, ρ_2, ρ_3) et le triplet $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ correspondant, les deux premières équations ci-dessus définissent la valeur de x et celle de y , les deux dernières équations définissent une valeur et une seule pour α .

Pour exprimer l'équation des singularités du manipulateur suivant les variables ρ_1, α et θ_1 , nous utilisons le système d'équations (4.9) pour calculer les expressions de $\cos(\theta_2)$, $\cos(\theta_3)$, $\sin(\theta_2)$ et $\sin(\theta_3)$, qui auront la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_2) = \frac{-A_{2x} + \rho_1 \cos(\theta_1) + d_1 \cos(\alpha)}{\rho_2} \\ \cos(\theta_3) = \frac{-A_{3x} + \rho_1 \cos(\theta_1) + d_3 \cos(\alpha + \beta)}{\rho_3} \\ \sin(\theta_2) = \frac{\rho_1 \sin(\theta_1) + d_1 \sin(\alpha)}{\rho_2} \\ \sin(\theta_3) = \frac{-A_{3y} + \rho_1 \sin(\theta_1) + d_3 \sin(\alpha + \beta)}{\rho_3} \end{array} \right.$$

Nous substituons ensuite ces expressions dans l'équation des singularités (4.8) qui sera donc exprimée en fonction de ρ_1 , α et θ_1 sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & (A_{2x}A_{3y}b_3 \cos(\beta) - A_{2x}A_{3x}b_3 \sin(\beta))\cos(\alpha) \sin(\theta_1) + \\ & (A_{2x}b_1b_3 \sin(\beta) - A_{3x}b_1b_3 \sin(\beta) + A_{3y}b_1b_3 \cos(\beta))\cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\theta_1) + \\ & (-A_{3y}b_1b_3 \sin(\beta) + A_{2x}b_1b_3 \cos(\beta) - A_{3x}b_1b_3 \cos(\beta))\sin^2(\alpha) \cos(\theta_1) + \\ & (-A_{3x}b_1\rho_1 + A_{2x}b_3\rho_1 \cos(\beta))\sin(\alpha) \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + \\ & (-A_{3y}b_1\rho_1 + A_{2x}b_3\rho_1 \sin(\beta))\cos(\alpha) \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + \\ & (A_{2x}A_{3x}b_1 - A_{2x}A_{3y}b_3 \sin(\beta) - A_{2x}A_{3x}b_3 \cos(\beta))\sin(\alpha) \sin(\theta_1) + \\ & (A_{3y}b_1b_3 \sin(\beta) + A_{3x}b_1b_3 \cos(\beta) - A_{2x}b_1b_3 \cos(\beta))\cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\theta_1) + \\ & (-A_{3y}b_1b_3 \cos(\beta) + A_{3x}b_1b_3 \sin(\beta))\sin(\theta_1) + \\ & (A_{3x}b_1\rho_1 - A_{2x}\rho_1b_3 \cos(\beta))\cos(\alpha) \sin^2(\theta_1) + (-A_{3y}b_1\rho_1 + A_{2x}\rho_1b_3 \sin(\beta))\sin(\alpha) \sin^2(\theta_1) + \\ & (A_{2x}b_1b_3 \sin(\beta) - A_{3x}b_1b_3 \sin(\beta) + A_{3y}b_1b_3 \cos(\beta))\sin^2(\alpha) \sin(\theta_1) - \\ & A_{2x}A_{3y}b_1 \sin(\alpha) \cos(\theta_1) + A_{3y}b_1\rho_1 \sin(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Dans cette annexe, nous démontrons que les manipulateurs 3-RPR découverts dans le chapitre 5, que nous avons appelés « manipulateurs dégénérés », sont toujours cuspidaux.

Pour calculer l'équation d'existence des points cusp de ces manipulateurs, nous utilisons le modèle géométrique direct, vu sa forme simplifiée, au lieu de l'équation existence des points cusp établie par McAree.

Etant donné que le déterminant de Cramer $RV-SU$ des équations du modèle géométrique direct (5.4) et (5.5) est nul, nous utilisons l'équation $SW-VQ = 0$ comme l'équation du MGD des manipulateurs dégénérés.

Les points cusp sont les configurations du manipulateur où trois solutions au modèle géométrique direct coïncident, donc un point cusp est une racine triple de l'équation du modèle géométrique direct ($SW-VQ = 0$ pour les manipulateurs dégénérés). La condition d'existence d'un point cusp consiste alors à ce que l'équation du MGD, sa dérivée et sa dérivée seconde soient nulles. Pour calculer les points cusp des manipulateurs dégénérés, il faut alors calculer la solution d'un système de trois équations : $SW-VQ = 0$, sa dérivée et sa dérivée seconde.

Nous exprimons l'équation $SW-VQ = 0$ en fonction de $t = \tan(\varphi/2)$, et nous calculons ses dérivées première et seconde par rapport à t , pour avoir le système des trois équations (C.1), (C.2) et (C.3) respectivement (avec $c_2 = 1$):

$$\begin{aligned}
 & (4 c_3 \rho_1^2 - 4 c_3 \rho_2^2 + 16 c_3 - 16 c_3^2 + 4 \rho_3^2 - 4 \rho_1^2) t^3 \\
 & + (32 d_3 c_3 - 4 d_3 \rho_1^2 + 4 d_3 \rho_2^2 - 16 d_3) t^2 \\
 & + (4 \rho_3^2 - 16 d_3^2 - 4 \rho_1^2 - 4 c_3 \rho_2^2 + 4 c_3 \rho_1^2) t + 4 d_3 \rho_2^2 - 4 d_3 \rho_1^2 = 0 \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3(-4c^3\rho^2 + 16c^3 - 16c^3 + 4\rho^3 - 4\rho^1 + 4c^3\rho^1)t^2 \\
& + 2(-16d^3 + 32d^3c^3 + 4d^3\rho^2 - 4d^3\rho^1)t - 4\rho^1 + 4\rho^3 - 16d^3 - 4c^3\rho^2 \\
& + 4c^3\rho^1 = 0
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
& 6(-4c^3\rho^2 + 16c^3 - 16c^3 + 4\rho^3 - 4\rho^1 + 4c^3\rho^1)t - 32d^3 + 64d^3c^3 \\
& + 8d^3\rho^2 - 8d^3\rho^1 = 0
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Pour avoir une équation unique pour l'existence des points cusp, nous éliminons la variable t entre les équations (C.1) et (C.2) premièrement, puis entre (C.2) et (C.3) en utilisant la fonction *Resultant* de MAPLE pour avoir respectivement deux équations (C.1') et (C.2') en fonction de ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 seulement.

Ensuite, nous éliminons la variable ρ_2 entre les équations (C.1') et (C.2') pour avoir l'équation (C.4) suivante, qui est en fonction de ρ_1 et ρ_3 :

$$\begin{aligned}
& -6d^3c^3\rho^4 - \frac{3d^3c^3\rho^1}{2} + \frac{69\rho^3c^3d^3}{4} + 3\rho^4c^3d^3 + 3d^3\rho^3\rho^1 \\
& - 6\rho^3d^3\rho^1 - \frac{3d^4\rho^3c^3}{2} + \frac{3d^3c^3\rho^3}{2} - 3d^3\rho^1\rho^3 + 15d^3\rho^1c^3 \\
& + 3d^3\rho^1c^3 + \frac{3d^4\rho^1c^3}{2} - \frac{57d^4\rho^1c^3}{4} - \frac{69d^3\rho^1c^3}{4} - 6d^3\rho^3c^3 \\
& - 15d^3c^3\rho^3 + \frac{57\rho^3d^4c^3}{4} - 8d^3c^3 - 12d^4c^3 + \frac{27d^4\rho^3}{4} + c^3d^3 \\
& - \rho^3d^3 - 6d^3c^3 + 3d^3c^3 + 12d^4c^3 - \frac{15\rho^1d^3}{4} - \frac{27d^4\rho^1}{4} \\
& + \frac{27c^3\rho^1}{2} + 12d^3c^3 - \frac{27c^3\rho^3}{2} - \frac{27c^3\rho^1}{4} + \frac{27c^3\rho^3}{4} + \frac{15d^3\rho^3}{4} \\
& + 3\rho^4d^3 - 6d^3c^3 + 3d^4c^3 + 3d^4\rho^1 + \frac{27\rho^3c^3}{4} + d^3 - \frac{27c^3\rho^1}{4} \\
& + d^3\rho^1 - 6d^3\rho^1\rho^3c^3 + 12d^3\rho^1\rho^3c^3 = 0
\end{aligned} \tag{C.4}$$

L'équation (C.4) est donc l'équation d'existence des points cusp. Elle est du 6^{ème} degré en ρ_1 et ρ_3 . Nous remarquons que la variable ρ_3 dans l'équation (C.4) a toujours une puissance paire, par suite pour simplifier la résolution nous pouvons la remplacer par la variable $R_3 = \rho_3^2$. L'équation (C.4) devient alors du 6^{ème} degré en ρ_1 et du 3^{ème} en R_3 :

$$\begin{aligned}
& \left(12 d^3 \rho^2 c^3 - 15 d^3 c^3 - 6 d^3 \rho^2 c^3 + \frac{69}{4} d^3 c^3 - \frac{27}{2} c^3 + \frac{27}{4} c^3 + \frac{57}{4} d^3 c^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} d^3 c^3 + \frac{27}{4} d^3 - 6 d^3 \rho^2 + \frac{3}{2} d^3 c^3 + \frac{27}{4} c^3 + \frac{15}{4} d^3 - 3 d^3 \rho^4 \right) R_3 \\
& + (3 d^3 c^3 + 3 d^3 + 3 d^3 \rho^2 - 6 d^3 c^3) R_3^2 - d^3 R_3^3 - \frac{27 c^3 \rho^2}{4} \\
& + 3 c^3 d^3 - \frac{57 d^3 \rho^2 c^3}{4} - 6 c^3 d^3 + 3 d^3 \rho^4 - 6 d^3 c^3 + c^3 d^3 \\
& - \frac{69 d^3 \rho^2 c^3}{4} - \frac{3 d^3 \rho^2 c^3}{2} - 8 d^3 c^3 + 12 d^3 c^3 - 6 d^3 \rho^4 c^3 \\
& + 3 d^3 \rho^4 c^3 + 15 d^3 \rho^2 c^3 - \frac{27 c^3 \rho^2}{4} + d^3 \rho^6 + \frac{27 c^3 \rho^2}{2} + 3 d^3 c^3 \\
& - \frac{27 d^3 \rho^2}{4} - 12 d^3 c^3 + \frac{3 d^3 \rho^2 c^3}{2} + 12 d^3 c^3 + d^3 - \frac{15 d^3 \rho^2}{4} = 0 \quad (C.5)
\end{aligned}$$

Pour démontrer que les manipulateurs 3-RPR dégénérés sont toujours cuspidaux, il suffit de démontrer que l'équation (C.5) a toujours au moins une racine R_3 positive.

Étant donné que l'équation (C.5) est un polynôme de degré 3 en R_3 et que le coefficient de R_3^3 est toujours négatif ($-d^3$), alors pour démontrer que l'équation (C.5) admet toujours une racine R_3 positive, il suffit de démontrer que la plus grande racine de sa dérivée est toujours positive et que pour cette racine, l'équation (C.5) est aussi positive.

Nous dérivons l'équation (C.5) suivant R_3 :

$$\begin{aligned}
& 6 d^3 \rho^2 R_3 - 12 d^3 c^3 R_3 + 6 d^3 R_3 + 6 d^3 c^3 R_3 - \frac{27 c^3}{2} - \frac{3 d^3 c^3}{2} \\
& + \frac{57 d^3 c^3}{4} + \frac{3 d^3 c^3}{2} + 12 d^3 c^3 \rho^2 - 6 d^3 \rho^2 + \frac{69 d^3 c^3}{4} - 15 d^3 c^3 \\
& + \frac{27 c^3}{4} - 3 d^3 \rho^4 + \frac{27 d^3}{4} + \frac{15 d^3}{4} - 6 d^3 c^3 \rho^2 + \frac{27 c^3}{4} - 3 d^3 R_3^2 = 0 \quad (C.6)
\end{aligned}$$

La plus grande racine de la dérivée de l'équation d'existence des points cusp (C.6) s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{2 d^3 - 4 d^3 c^3 + 2 d^3 c^3 + 2 d^3 \rho^2 + 3 \sqrt{(d^3 + c^3 - 2 c^3 + 1)(d^3 + c^3)^2}}{2 d^3} \quad (C.7)$$

En substituant la racine R_3 donnée par l'équation (C.7) dans l'équation d'existence des points cusp (C.5), nous aurons le terme suivant après l'avoir factorisé:

$$\frac{27 (d^3 + c^3)^2 (d^3 + (c^3 - 1)^2)}{(d^3 (d^3 + c^3 - 2c) + (d^3 + c^3) \sqrt{d^3 + c^3 - 2c + 1}) / (4d^3)} \quad (\text{C.8})$$

Pour que (C.8) soit positif, il suffit que le terme suivant soit positif :

$$d^3 (d^3 + c^3 - 2c) + (d^3 + c^3) \sqrt{d^3 + c^3 - 2c + 1} \quad (\text{C.9})$$

Pour faciliter le calcul, nous posons que $c_3 = k.d_3$, où k est un réel positif, nous substituons la nouvelle valeur de c_3 dans la plus grande racine de la dérivée de l'équation des points cusp (C.7) et dans le terme (C.9) qui prend alors la forme suivante:

$$d^3 (d^3 + d^3 k^2 - 2k + \sqrt{d^3 k^2 - 2k d^3 + d^3 + 1} + \sqrt{d^3 k^2 - 2k d^3 + d^3 + 1} k^2) \quad (\text{C.10})$$

En résolvant l'équation (C.10) pour d_3 pour $k > 0$, nous obtenons trois racines dont deux sont nulles, et la troisième ayant cette forme :

$$\frac{-1 + k^2}{(k^2 + 1)k} \quad (\text{C.11})$$

Vu que d_3 est toujours positif, alors seuls les $k > 1$ sont à considérer. En calculant la dérivée du terme (C.10) suivant d_3 et en y substituant la valeur la valeur de la racine de d_3 donnée par (C.11) nous trouvons qu'elle s'annule.

La racine du terme (C.10) annule la dérivée de ce dernier. Cela veut dire que le terme (C.10) est toujours positif, par suite l'équation d'existence des points cusp l'est aussi.

Il reste à démontrer que (C.7), la plus grande racine de la dérivée de l'équation d'existence des points cusp, est aussi toujours positive. Nous remarquons que cette équation est en fonction de ρ_1 aussi. Le coefficient de ρ_1 dans le terme (C.7) est positif, par suite pour démontrer que la racine est (C.7) est toujours positive, il nous suffit de démontrer qu'elle est positive pour $\rho_1 = 0$.

Nous substituons $\rho_1 = 0$ et $c_3 = k.d_3$ dans (C.7) :

$$(k^2 + 1) \left(2d^3 + 3\sqrt{d^3 k^2 - 2k d^3 + d^3 + 1} - \frac{4k}{k^2 + 1} \right) \quad (\text{C.12})$$

Le premier terme de (C.12) est toujours positif, il reste à démontrer que le second terme est aussi positif.

Nous essayons de résoudre le second terme de (C.12) pour voir s'il s'annule. Nous relevons au carré ses termes en mettant la radicale de l'autre côté de l'équation, nous aurons enfin l'équation suivante, qui est de degré 2 en d_3 :

$$\left(2 d_3 - \frac{4 k}{k^2 + 1}\right)^2 - 9 d_3^2 k^2 + 18 k d_3 - 9 d_3^2 - 9 = 0 \quad (\text{C.13})$$

Le discriminant du polynôme (C.13) est égale à -180, par suite cette équation ne s'annule jamais, de même pour l'équation (C.12).

Pour déterminer le signe de l'équation (C.12), il suffit d'y substituer une valeur réelle de d_3 . En substituant $d_3 = 1$ et en factorisant, nous aurons :

$$(-k + 1)^2 + \frac{3 \sqrt{(k^2 - 2 k + 2) (k^2 + 1)^2}}{2} \quad (\text{C.14})$$

L'expression (C.14) est toujours positive, par suite l'équation (C.12) l'est aussi. Alors la plus grande racine de la dérivée de l'équation d'existence des points cusp (C.7) est toujours positive.

Ainsi nous avons démontré que la plus grande racine de la dérivée de l'équation d'existence des points cusp est toujours positive, et que pour cette même racine l'équation d'existence des points cusp est aussi positive.

En conclusion, étant donné que, dans l'équation d'existence des points cusp, le coefficient de R_3^3 est négatif, alors cette équation admet toujours au moins une racine positive. Donc les manipulateurs 3-RPR dégénérés sont toujours cuspidaux.

Analyse cinématique des manipulateurs sériels 3R orthogonaux et des manipulateurs parallèles plan

La diversité des tâches dans l'industrie entraîne un besoin de mise en place de nouveaux manipulateurs. Une analyse de comportement de ces manipulateurs est nécessaire afin de comparer leurs performances. Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude cinématique et la comparaison de performances de deux types de manipulateurs : les manipulateurs 3R sériels à axes orthogonaux et les manipulateurs 3-RPR parallèles plans. Tout d'abord des notions importantes liées à la cinématique et à la conception de manipulateurs sont présentées. Dans la 2^{ème} partie de cette thèse, une classification exhaustive des manipulateurs 3R sériels orthogonaux particuliers est établie. Le critère de classification est la topologie des singularités dans l'espace de travail (E.T). Vingt deux types différents de manipulateurs sont trouvés. Dans la 3^{ème} partie, les vingt deux types sont comparés tout d'abord suivant la topologie de leur E.T, ensuite suivant un nouvel indice de performance. Les manipulateurs les plus performants sont mis en évidence. Dans la 4^{ème} partie, les singularités dans l'espace articulaire des manipulateurs 3-RPR parallèles plans sont déterminées et analysées. Un algorithme pour le calcul des points cusp est établi. Dans la 5^{ème} partie, deux nouvelles conditions de dégénérescence du modèle géométrique direct (MGD) des ces mêmes manipulateurs sont établies. Une nouvelle classe de ces manipulateurs a été découverte : les manipulateurs dégénérés. Ces manipulateurs ont leur MGD toujours dégénéré et des propriétés cinématiques intéressantes. Enfin, deux méthodes pour éviter les singularités de ces manipulateurs sont proposées : la planification de trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage, la recherche de zones non singulières dans les espaces de travail et articulaire. Les résultats présentés dans ce travail constituent un outil intéressant d'aide à la conception de nouveaux manipulateurs.

Mots-clés : Manipulateur sériel orthogonal, Manipulateur parallèle plan, singularités, classification, espace articulaire.

Kinematic Analysis of 3R serial orthogonal manipulators and planar parallel manipulators

The variety of tasks in industry necessitates implementation of new manipulators. A behaviour analysis of these manipulators is necessary to compare their performances. The work presented in this thesis deals with the study of kinematical properties and of the performances comparison of two types of manipulators: 3-revolute (3R) serial orthogonal manipulators and 3-RPR planar parallel manipulators. First, a state of the art on important notions on kinematics and design of manipulators is presented. Then, in the 2nd section of this thesis, an exhaustive classification of 3R serial orthogonal manipulators with geometric simplifications is established. The classification criterion is the singularities topology in the workspace. Twenty-two different manipulators types are found. In the 3rd section, the twenty-two types are compared first according to the topology of their workspace, then according to a new performance index that we have introduced. In the 4th section, the singularities in the joint space of 3-RPR planar parallel manipulators are determined and analysed. An algorithm for the detection of cusp points is established. In the 5th section, two new forward kinematics degeneracy conditions for these manipulators are found. A new class of these manipulators is discovered: the degenerate manipulators. These degenerate manipulators have always a degenerate forward kinematic model and interesting kinematic properties. Finally, two methods for avoiding the singularities of the 3-RPR parallel manipulators are proposed: the planning of non singular assembly mode changing trajectories and the determination of maximal singularity free regions in the workspace and in the joint space of these manipulators. Results presented in this thesis can serve as an efficient help tool for the design of new manipulators.

Mots-clés : Serial orthogonal manipulator, planar parallel manipulator, singularities, classification, joint space.

