



**HAL**  
open science

# Observations Gravimétriques et Modélisation de la Dynamique Globale de la Terre

Séverine Rosat

► **To cite this version:**

Séverine Rosat. Observations Gravimétriques et Modélisation de la Dynamique Globale de la Terre. Géophysique [physics.geo-ph]. Université de Strasbourg, 2016. tel-01516905v1

**HAL Id: tel-01516905**

**<https://hal.science/tel-01516905v1>**

Submitted on 2 May 2017 (v1), last revised 1 Dec 2020 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Observations Gravimétriques et Modélisation de la Dynamique Globale de la Terre

-

## Gravimetric Observations and Modeling of the Earth's Global Dynamics

---

Séverine ROSAT



MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME D'HABILITATION À  
DIRIGER DES RECHERCHES

soutenu le 02 décembre 2016 à l'Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre  
devant le jury composé de :

Marianne GREFF-LEFFTZ	Professeur, IPGP	<i>Rapporteur externe</i>
Philippe CARDIN	Directeur de Recherche, ISTERre Université Joseph Fourier	<i>Rapporteur externe</i>
Rudolf WIDMER-SCHNIDRIG	Chercheur, Black Forest Observatory Université de Stuttgart	<i>Rapporteur externe</i>
Christian BIZOUARD	Astronome, SYRTE Observatoire de Paris	<i>Examineur</i>
Jacques HINDERER	Directeur de Recherche, IPGS-EOST Université de Strasbourg	<i>Garant</i>



# TABLE DES MATIÈRES

Table des matières . . . . .	i
<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction générale . . . . .	5
1.2 Modes propres étudiés . . . . .	8
1.2.1 Modes de translation de la graine . . . . .	8
1.2.2 Modes de rotation . . . . .	10
1.3 Données d'observations . . . . .	12
<b>2 Les modes de rotation</b>	<b>23</b>
2.1 Motivation . . . . .	23
2.2 Equations de la rotation . . . . .	25
2.2.1 Terre rigide . . . . .	26
2.2.2 Terre déformable . . . . .	27
2.3 Free Core Nutation . . . . .	29
2.3.1 Analyse Bayésienne de la résonance du noyau fluide - <i>Article : Rosat et al. (2009)</i> . . . . .	31
2.3.2 Analyse jointe des données gravimétriques et géodésiques de nutation - <i>Article : Rosat &amp; Lambert (2009)</i> . . . . .	41
2.4 Free Inner Core Nutation . . . . .	47
2.4.1 Motivation . . . . .	47
2.4.2 Recherche dans les données gravimétriques . . . . .	50
2.4.3 Recherche dans les données de nutation VLBI . . . . .	51
2.5 Chandler Wobble . . . . .	51
2.5.1 Motivation . . . . .	52
2.5.2 Estimation de la marée polaire . . . . .	53
2.6 Couplages et termes du 2nd ordre . . . . .	54
2.6.1 Effet de la déformation de marée zonale . . . . .	56
2.6.2 Stabilité temporelle des paramètres de la FCN . . . . .	57
2.6.3 Influence du champ électro-magnétique et termes non-linéaires sur la rotation . . . . .	58
2.7 Conclusion et perspectives . . . . .	62
<b>3 Les modes de Slichter</b>	<b>63</b>
3.1 Enjeux . . . . .	63
3.2 Une revue . . . . .	64

3.3	Modélisation de leur excitation . . . . .	80
3.3.1	Excitation sismique - <i>Article : Rosat (2007)</i> . . . . .	81
3.3.2	Excitation par des pressions fluides aux interfaces, par l'impact d'une météorite - <i>Article : Rosat &amp; Rogister (2012)</i> . . . . .	88
3.3.3	Excitation par l'atmosphère - <i>Article : Rosat et al. (2014)</i> . . . . .	97
3.4	Effet des changements de phase . . . . .	103
3.4.1	Motivation . . . . .	103
3.4.2	Croissance dendritique . . . . .	103
3.5	Conclusion et perspectives . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Relativité et modes propres</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction . . . . .	107
4.2	Le projet MIGA . . . . .	110
4.3	Théorie de la gravitation . . . . .	111
4.3.1	Gravitation de Newton . . . . .	111
4.3.2	Gravitation générale . . . . .	111
4.4	Relativité générale linéarisée . . . . .	114
4.4.1	Limite newtonienne . . . . .	115
4.4.2	Exemple : Solutions statiques à symétrie sphérique . . . . .	116
4.5	Les ondes gravitationnelles . . . . .	117
4.5.1	Émission des ondes gravitationnelles . . . . .	117
4.5.2	Couplage des ondes gravitationnelles avec la Terre . . . . .	118
4.5.3	Effet des ondes gravitationnelles sur le système Terre-Lune . . . . .	121
4.6	Conclusion et perspectives . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Autres travaux</b>	<b>123</b>
5.1	Mesures de hauteurs d'eau dans un puits . . . . .	123
5.2	Gravimétrie fond-de-mer . . . . .	128
5.3	Analyse des modes sismiques . . . . .	131
5.4	Conclusion et perspectives . . . . .	131
	<b>Annexes</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Oscillations libres et forcées</b>	<b>135</b>
A.1	Analogie à une dimension . . . . .	135
A.2	Lien avec la FCN . . . . .	136
<b>B</b>	<b>Perturbations de g</b>	<b>137</b>
B.1	Contributions statiques à la pesanteur . . . . .	137
B.2	Contributions dynamiques à la pesanteur . . . . .	137
<b>C</b>	<b>Repères et rotations</b>	<b>139</b>
C.1	Les relations cinématiques d'Euler . . . . .	139
C.2	Repères fixes et repère instantané . . . . .	140

---

<b>D</b>	<b>Sur la forme de la Terre</b>	<b>143</b>
D.1	Equilibre hydrostatique . . . . .	143
D.2	Expression du potentiel gravitationnel . . . . .	144
D.3	Lien avec les moments d'inertie . . . . .	145
D.4	Ellipsoïde de Clairaut . . . . .	145
D.5	Pesanteur sur l'ellipsoïde de Clairaut . . . . .	147
D.6	Condition générale d'équilibre . . . . .	149
<b>E</b>	<b>On the tidal modulation of Chandler Wobble</b>	<b>153</b>
<b>F</b>	<b>Quelques dates clés sur l'histoire de la géodésie dynamique : rotation, figure de la Terre</b>	<b>159</b>
<b>G</b>	<b>Activités d'encadrement</b>	<b>161</b>
<b>H</b>	<b>Participation à des projets financés</b>	<b>163</b>

---

## ABRÉVIATIONS UTILISÉES

BEP	Basic Earth Parameters
BFO	Black Forest Observatory, Schiltach (Allemagne)
CIP	Celestial Intermediate Pole
CMB	Core Mantle Boundary
CNES	Centre national d'études spatiales
CW	Chandler Wobble
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
EOP	Earth Orientation Parameter
FCN	Free Core Nutation
FICN	Free Inner Core Nutation
GGP	Global Geodynamics Project
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
IAG	International Association of Geodesy ( <a href="http://iag-aig.org">http://iag-aig.org</a> ), composante de l'IUGG
IAU	International Astronomical Union ( <a href="http://www.iau.org">http://www.iau.org</a> )
ICB	Inner Core Boundary
ICET	International Center for Earth Tides
ICRF	International Celestial Reference Frame
ICRS	International Celestial Reference System
ICW	Inner Core Wobble
IERS	International Earth Rotation and reference system Service
IGETS	International Geodynamics and Earth Tide Service ( <a href="http://igets.u-strasbg.fr">http://igets.u-strasbg.fr</a> )
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
IVS	International VLBI Service for Geodesy & Astrometry
LLR	Lunar Laser Ranging
LOD	Length Of Day
LSBB	Laboratoire Souterrain à Bas Bruit, Underground Research Laboratory, Rustrel (France)
MHB	Mathews, Herring & Buffet's nutation model
MIGA	Matter wave - laser Interferometry Gravitation Antenna
PREM	Preliminary Reference Earth Model
SG	Superconducting Gravimeter
SI	Système International
SLR	Satellite Laser Ranging
<i>TAI</i>	Temps Atomique International
TOM	Tilt-Over Mode
<i>UT1</i>	Universal Time 1
<i>UTC</i>	Coordinated Universal Time
VLBI	Very Long Baseline Interferometry

---

## UNITÉS UTILISÉES

as	arcsecond	$= \frac{2\pi}{360 \times 3600} \text{ rad}$
cpd	cycle per day	période associée : 1 jour solaire = 86400 s
cpsd	cycle per sidereal day	période associée : 1 jour sidéral = 86164 s
deg/h	degree per hour	15 deg/h = 1 cpd
mas	milliarcsecond	$\approx 3.1 \text{ cm}$
$\mu\text{Gal}$	microgal	$= 10 \text{ nm/s}^2 \approx 10^{-9} g_0$ ( $g_0$ valeur moyenne de la pesanteur en surface)
nGal	nanogal	$\approx 10^{-12} g_0$



# REMERCIEMENTS

Ce mémoire d'habilitation a pour vocation de faire un point sur les travaux de recherche menés depuis ma thèse soutenue en 2004 et de servir de support pour les projets à venir. C'est pourquoi j'ai mis sous forme d'annexes ou d'encadrés certains rappels théoriques en lien avec mes travaux. Une coloration historique est également apportée à cet ouvrage, influencée par de nombreuses discussions avec Hilaire Legros. Dès mes premières années en tant qu'étudiante à l'EOST, j'ai été attirée par les problèmes de dynamique globale de la Terre. Mes premiers pas dans la recherche ont débuté lors d'un stage DEA (2000) sur la « Modélisation de la croûte terrestre à l'échelle globale par inversion de données de topographie, bathymétrie, épaisseurs et potentiel en minimisant un déviateur de contraintes » sous la supervision de Bernard Valette. Puis, en 2001, j'ai débuté une thèse intitulée « Variations temporelles de la gravité en relation avec la dynamique interne de la Terre - Apport des gravimètres supraconducteurs » sous la direction de Jacques Hinderer. Après la thèse, j'ai eu le plaisir de travailler deux ans au Japon avec Tadahiro Sato (National Astronomical Observatory of Japan, Mizusawa, Oshu) de 2004 à 2006 puis un an à Bruxelles avec Véronique Dehant (Observatoire Royal de Belgique) (08/2006-09/2007). J'ai finalement intégré le CNRS en octobre 2007 au sein de l'IPGS.

Ces douze années de recherche au sein de l'IPGS ont été soutenues par de nombreuses discussions autour de l'ambiance animée du café du troisième étage avec Hilaire, Jacques, Pascal, Maksim, Jean-Paul, Fred, Gilbert, etc... Ces moments « pause-café » ont fortement contribué à motiver mes recherches scientifiques. Le support technique de Caroline, Binta et Patricia pour tous les aspects gestion et missions ne doit pas être oublié.

Je remercie également l'ensemble de mes collaborateurs externes à l'IPGS qui apparaissent à travers les articles publiés, les projets financés et les discussions informelles qui ont marqué ce mémoire, parmi eux, Sébastien Lambert (SYRTE, Paris), Nicolas Florsch (UPMC, Paris), Walter Zürn (BFO, Allemagne), David Crossley (St Louis, USA), Janusz Bogusz (MUT, Varsovie), José Arnosó (UCM, Madrid), Marta Calvo (IGN, Madrid), Umberto Riccardi (Univ. Naples, Italie), Yuichi Imanishi (ERI, Tokyo), Shingo Watada (ERI, Tokyo), ...

Enfin, je tiens à montrer ma gratitude auprès de Marianne, Philippe, Ruedi, Christian et Jacques, qui ont accepté de composer mon jury de soutenance de HDR.

*Cet ouvrage a été réalisé à l'aide de MikTeX, TeXworks et TikZ. Pour les figures, GMT et ParaView ont également été utilisés.*



---

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

La Terre est un système complexe constitué d'une graine solide, d'un noyau liquide, d'un manteau visco-élastique, d'une croûte rigide et de couches fluides superficielles (atmosphère, océans et couche hydrique continentale). Chacune de ces parties a sa propre dynamique et interagit avec les autres. Connaître la Terre en profondeur est difficile et repose sur la détection de signaux en surface de très faible amplitudes. Heureusement, comme tout système mécanique, la Terre possède un certain nombre (dans le cas de la Terre, même une infinité) de modes propres de vibration aussi appelés modes normaux qui nous apportent des informations sur la structure interne et la dynamique de la Terre et même du noyau. Après une excitation instantanée, la Terre va osciller et générer des oscillations libres à des fréquences et avec des temps d'amortissement qui dépendent des propriétés physiques du milieu. Ce sont les modes propres ou modes normaux de la Terre.

En plus des modes normaux, il existe une classe de modes, dits « triviaux », dont les fréquences propres sont nulles et les vecteurs propres associés consistent en des déplacements indépendants du temps et qui n'affectent pas le potentiel gravito-élastique de la Terre (Dahlen & Tromp, 1998). Ces triviaux ont un rôle conséquent dans la réponse d'une Terre en rotation à un forçage externe. Il existe deux types de modes triviaux : les modes dits « rigides » de la Terre globale, et les modes dits « géostrophiques » confinés dans les parties fluides. Les modes rigides découlent fondamentalement des six degrés de liberté du mouvement rigide d'un corps. Notons  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  un système de coordonnées cartésien attaché à la Terre dont l'axe  $\hat{z}$  est aligné avec l'axe de rotation  $\hat{\Omega}$  et dont  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont équatoriaux. Apparaissent alors un mode axial de translation (translation rigide le long de l'axe de rotation), un mode axial de rotation (« spin ») (rotation rigide autour de l'axe de rotation), deux modes équatoriaux de translation consistant en un mouvement de translation équatorial constant dans un repère inertiel, et un mode équatorial de rotation, fixe dans un repère inertiel, appelé « tilt-over mode » (TOM). Le « tilt-over mode » correspond à un basculement de la Terre par rapport à son axe de rotation, autrement dit, il s'agit d'une rotation rigide du corps autour d'un axe qui ne coïncide pas avec l'axe  $z$  du repère en rotation uniforme, lequel axe est fixe dans le repère céleste. Ces deux modes équatoriaux de translation et le TOM ont des mouvements apparents diurnes dans un système de référence terrestre en rotation. Les deux modes équatoriaux de translation rendent bien compte des deux degrés de liberté liés à une translation équatoriale,

alors que le TOM ne rend compte que d'un degré de liberté associé à une rotation équatoriale. Le deuxième degré de liberté est représenté par un autre mode de rotation équatorial qui est l'oscillation de Chandler ou « Chandler Wobble » (Smith & Dahlen, 1981) sur lequel nous reviendrons en section 2.5.

Les modes géostrophiques ont des fréquences propres nulles et un déplacement confiné dans les parties fluides. Leur espace des vecteurs propres contient tout flux continu le long des équi-densités (qui sont aussi des isobares), qui conserve la densité en tout point de l'espace. Ces flux géostrophiques résultent de l'équilibre entre force de Coriolis et gradient de pression. En général, tout flux continu qui n'affecte pas l'énergie potentielle élasto-gravitationnelle de la Terre, est un flux géostrophique. Dans une région de stratification neutre (voir Encadré 1.1), qui obéit donc à la condition d'Adams-Williamson, le nombre de flux géostrophiques est même encore plus grand.

Nous pouvons distinguer trois grandes familles de modes propres pour une Terre solide : les modes sismiques, les modes du noyau fluide et les modes de rotation (voir Fig. 1.1.1). Les deux premières catégories de modes existent même pour un modèle de Terre sphérique en équilibre hydrostatique alors que les modes de rotation, comme leur nom l'indique, n'existent que dans le cas d'une Terre en rotation et aplatie. A contrario, une Terre en rotation parfaitement rigide ne possède qu'un seul mode non trivial qui est l'oscillation de Chandler (CW), appelé dans ce cas oscillation ou mouvement d'Euler (Euler, 1765). Les modes sismiques sont des oscillations libres dont les forces de rappel sont élastiques. Dans le cas des modes de rotation, ce sont différents couples qui s'exercent pour rétablir l'équilibre de rotation uniforme. Par exemple, dans le cas d'une Terre rigide, c'est le couple qui s'exerce sur le bourrelet équatorial qui joue ce rôle de couple de rappel, introduisant un effet gyroscopique lié au mouvement d'Euler. Pour les modes du noyau fluide (modes aussi appelés sub-sismiques car leurs fréquences sont plus petites que les fréquences sismiques), différentes forces de rappel sont possibles :

- la force d'Archimède, associée aux ondes de gravité,
- la force de Coriolis, associée aux ondes inertielles,
- la force de Lorentz, pour les ondes hydromagnétiques ou d'Alfvén.

Il existe un mode, dont la force de rappel principale est la force d'Archimède, mais qui est souvent mentionné dans les catalogues de modes sismiques et noté  ${}_1S_1$ . C'est le « mode de Slichter » que nous présentons au paragraphe 1.2.1.

La Terre subit également des forçages externes. En effet, sous l'action du potentiel de marée, la Terre se déforme et sa rotation est perturbée par le couple gravitationnel associé. Les variations périodiques de l'axe de rotation de la Terre sous l'action du potentiel de marée sont appelées nutations. La fonction de transfert de la Terre, qui caractérise sa réponse en une quantité géophysique (nutations ou variations de pesanteur) à un forçage, dépend aussi de ses propriétés rhéologiques et physiques (densité, élasticité, forme des interfaces, etc...).

La présence des couches internes et externes va modifier non seulement les périodes des modes propres de la Terre mais également la réponse de la Terre au forçage des marées.

En outre, sous l'action du potentiel de marée, qui constitue une source excitatrice de forme sinusoïdale avec des fréquences diurnes, des résonances ont lieu avec les modes propres de période quasi-diurne.

**Encadré 1.1: FRÉQUENCE DE BRUNT-VÄISÄLÄ, ÉQUATION D'ADAMS-WILLIAMSON**

La structure d'un fluide est représentée par sa stratification en densité, elle-même définie par une fréquence, appelée **fréquence de Brunt-Väisälä** et couramment notée  $N$ . Cette fréquence décrit le rôle de la force d'Archimède dans un fluide stratifié. Sa valeur est définie en fonction de la coordonnée sphérique radiale  $r$  par :

$$N^2(r) = -g(r) \left[ \frac{\dot{\rho}(r)}{\rho(r)} + \frac{\rho(r)g(r)}{\kappa(r)} \right],$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle locale positive,  $\rho$  la densité locale,  $\dot{\rho}$  le gradient de densité et  $\kappa$  l'incompressibilité locale dans le fluide.  $N$  correspond ainsi à la fréquence angulaire à laquelle une particule de fluide, légèrement déplacée de sa position d'équilibre, va osciller de manière adiabatique (Eckart, 1960). Il existe trois états de stratification suivant le signe ou la nullité de  $N^2$  :

- $N^2 > 0$  : stratification stable. Si une particule est déplacée de sa position d'équilibre, elle oscille pour revenir à celle-ci sous l'action de la force d'Archimède. L'onde qui se propage est une onde de gravité. Plus  $N^2$  est grande, plus la force de rappel est grande et donc plus l'oscillation est rapide.
- $N^2 = 0$  : stratification neutre ou adiabatique. Si une particule est déplacée de sa position d'équilibre, elle reste à sa nouvelle position et l' **équation d'Adams-Williamson** est satisfaite. On considère  $N^2 = 0$  pour les modes sismiques et inertiels.
- $N^2 < 0$  : stratification instable. Si une particule est déplacée de sa position d'équilibre, elle continue de s'en éloigner. Il n'y a donc pas de solution oscillatoire mais la convection est possible.

**EQUATION D'ADAMS-WILLIAMSON** L'équation d'Adams-Williamson décrit une relation fondamentale entre les vitesses des ondes sismiques ( $V_p$  et  $V_s$ ), l'accélération gravitationnelle ( $g$ ), la variation adiabatique de densité ( $d\rho$ ) dans la Terre (en supposant la pression hydrostatique  $\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$ ) en fonction du rayon ( $r$ ). Cette relation n'est pas valable quand la composition est variable, la pression est non hydrostatique ou quand la variation de pression n'est pas adiabatique. Cette équation s'écrit pour une Terre à symétrie sphérique, de composition homogène, et en équilibre hydrostatique :

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho(r)g(r)}{V_p^2 - 4/3V_s^2}.$$

Par l'étude de la réponse de la Terre au couple de marée et par l'analyse des modes propres, directement ou par leur résonance associée lorsqu'elle existe, il est donc possible de déterminer les propriétés internes de la Terre. En particulier, l'étude de certains modes permet de contraindre des paramètres géophysiques caractéristiques du noyau, de la graine et de leurs interfaces.

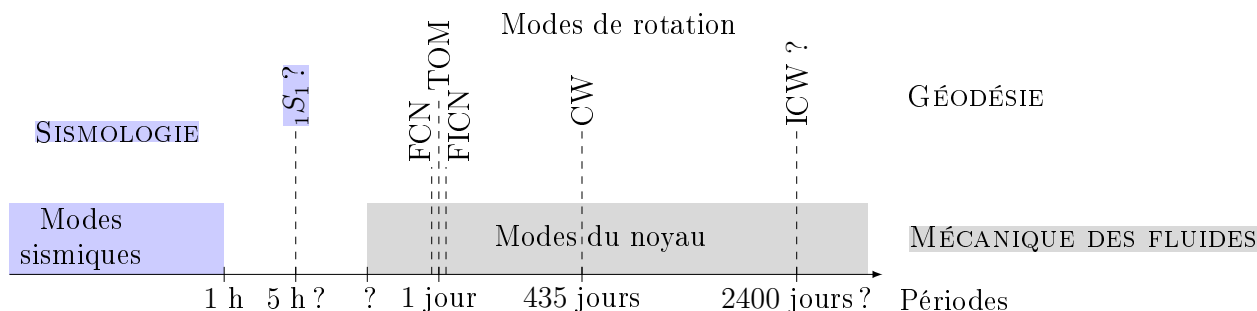


FIGURE 1.1.1: Représentation schématique des modes propres de la Terre en fonction de leur période sur Terre. FCN (Free Core Nutation) est la nutation libre du noyau, FICN (Free Inner Core Nutation) celle de la graine. CW (Chandler Wobble) est l'oscillation de Chandler pour la Terre et ICW pour la graine.  $1S_1$  est le mode de Slichter et TOM le « tilt-over mode ».

## 1.2 MODES PROPRES ÉTUDIÉS

Durant mon post-doctorat à l'observatoire astro-géodynamique de Mizusawa, au Japon (2004-2006), et dans la continuité de mon travail thèse, je m'étais intéressée aux modes propres sismiques. Il s'agit des oscillations libres de la Terre déclenchées principalement par de forts séismes (magnitude généralement supérieure à 6.5) et de période inférieure à l'heure. En réalité, certains modes sismiques, les fondamentaux, sont excités en permanence et constituent un bruit de fond permanent que l'on appelle « bourdonnement » ou « hum » en anglais. La source de cette excitation permanente est restée longtemps inconnue et diverses origines ont été proposées (par exemple Rhie & Romanowicz, 2004; Tanimoto, 2006; Webb, 2008). Récemment Ardhuin et al. (2015) ont montré que le « hum » provient de l'action des vagues sur le fond océanique produisant des ondes sismiques de périodes allant de 1 à 500 secondes, mettant la Terre solide dans un état de résonance permanente. L'observation du « hum » en un site est un gage de qualité de ce site en terme de niveau de bruit (Widmer-Schmidrig, 2003; Rosat & Hinderer, 2011).

Mes travaux sur les modes sismiques ont été approfondis lors de deux séjours à l'Earthquake Research Institute, Université de Tokyo (Japon) en 2012 et 2014.

Dans ce manuscrit, je ne parlerai que des **modes propres de translation de la graine**, qui sont un cas particulier de mode sismique, et des **modes propres de rotation** de la Terre. Mon intérêt pour les modes de rotation a en fait débuté lors de mon séjour post-doctoral à l'Observatoire Royal de Belgique (2006-2007), durant lequel je me suis intéressée à la rotation des planètes telluriques, en particulier Mars et Mercure. Quant aux modes de translation de la graine, aussi appelés « modes de Slichter », c'est une longue histoire qui a débuté pendant ma thèse de doctorat...

### 1.2.1 MODES DE TRANSLATION DE LA GRAINE

Ces modes propres de la Terre sont liés à la présence d'une graine solide dans un noyau liquide. L'existence de ces modes a été suggérée en premier par Slichter (1961), d'où la dénomination actuelle de « modes de Slichter ». Ils consistent en un mouvement de translation



rigide du centre de masse de la graine autour du centre de masse de la Terre. La contribution du manteau à ce mouvement est complètement négligeable dans le cas de la Terre, mais pas dans le cas de Mercure (Grinfeld & Wisdom, 2005). La force de rappel étant la poussée d'Archimède exercée par le noyau fluide, leur période dépend du saut de densité à l'interface graine - noyau liquide. Pour un modèle de Terre de type PREM (Dziewonski & Anderson, 1981), il y a un seul mode (dit « dégénéré », voir Encadré 1.2) et sa période est de 5.42 h (Rogister, 2003). Lorsque nous introduisons la rotation et l'ellipticité de la Terre, comme pour les modes sismiques, le mode de Slichter est éclaté en un triplet de fréquences (voir Encadré 1.2). Dans un système de référence lié au manteau, le mouvement des particules associé au triplet de Slichter se décompose alors en un mouvement axial (selon l'axe de rotation de la Terre) et en deux mouvements équatoriaux dont l'un est prograde et l'autre rétrograde, c'est-à-dire, respectivement dans le même sens et dans le sens contraire de la rotation terrestre (Smith, 1976). Pour chacun de ces modes équatoriaux la trajectoire du centre de masse de la graine est circulaire et la combinaison des deux résulte en une trajectoire elliptique (Fig. 1.2.1).

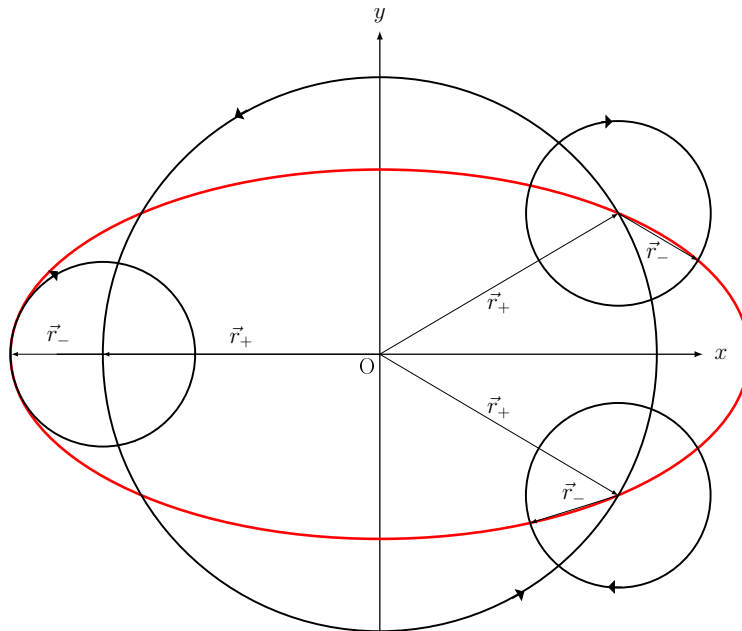


FIGURE 1.2.1: Combinaison des mouvements circulaires prograde et rétrograde donnant lieu à une trajectoire elliptique du centre de masse associée au triplet de Slichter.

Une partie de mon travail de thèse et de post-doctorat avait consisté à rechercher la signature gravimétrique en surface de ces modes. Au vu de la difficulté d'observer ces faibles signaux, j'ai développé un volet plus théorique de modélisation. Au chapitre 3, je présente les travaux réalisés sur l'excitation de ce mode par différentes sources géophysiques. J'aborderai également la question de l'influence possible des changements de phase.

### 1.2.2 MODES DE ROTATION

Un modèle de Terre en rotation possède quatre modes propres de rotation : la nutation libre du noyau (FCN), l'oscillation de Chandler (CW), la nutation libre de la graine (FICN)



**Encadré 1.2: DÉGÉNÉRESCENCE ET « SPLITTING »**

Dans le cas d'une Terre (ou tout autre corps élastique) à symétrie sphérique, les équations élastiques qui décrivent la déformation de ce corps ont des solutions propres découplées, c'est-à-dire que les déplacements purement tangentiels (« toroïdaux ») sont distincts des déformations dites « sphéroïdales » qui affectent la forme externe et la densité interne de la Terre. Aucune des relations scalaires gouvernant les fonctions propres radiales ne montre de dépendance avec l'ordre azimutal  $m$  lors du développement en harmoniques sphériques vectorielles. Par conséquent, toutes les fréquences propres sont dégénérées avec un espace propre associé de dimension  $(2l + 1)$  défini par les harmoniques sphériques de surface. Cette dégénérescence en  $(2l + 1)$  est propre à un modèle de Terre à symétrie sphérique, sans rotation, parfaitement élastique et isotrope. Tout écart à cette symétrie sphérique va lever cette dégénérescence et entraîner la séparation des modes propres. Cette perte de dégénérescence est appelée « splitting ». La principale cause de « splitting » des modes est la rotation de la Terre.

On peut voir un mode propre comme une onde stationnaire qui résulte de la superposition de deux ondes progressives (ondes de surface) ayant fait plusieurs fois le tour de la Terre dans des directions opposées. Il est alors facile d'imaginer intuitivement qu'en cas de rupture de la symétrie sphérique, ces ondes interféreront avec un léger déphasage puisqu'elles n'auront pas eu exactement le même parcours et les ondes stationnaires obtenues oscilleront à  $(2l + 1)$  fréquences au lieu d'une seule.

et l'oscillation de Chandler de la graine (ICW). Nous avons vu précédemment qu'il existait en réalité un cinquième mode, le Tilt-Over Mode (TOM), correspondant au basculement de l'axe de figure de la Terre dans l'espace (Fig. 1.1.1). L'oscillation de l'axe de rotation par rapport à l'axe de figure définit la nutation diurne<sup>1</sup> (Fig. 1.1.2).

Le mouvement de Chandler est une composante périodique de la rotation terrestre de période proche de 435 jours. La réponse gravimétrique de la Terre à la fréquence de Chandler dépend de la rhéologie du manteau. Or, aux échelles de temps supérieures au jour, la rhéologie du manteau est très mal contrainte. L'observation de la réponse de la Terre à la fréquence chandlérienne fournit donc des informations actuellement manquantes sur les propriétés anélastiques du manteau. Nous présenterons au chapitre 2, section 2.5 quelques résultats d'analyse du mouvement du pôle.

La réponse théorique de la Terre au forçage des marées présente un effet de résonance lorsque la fréquence du forçage est proche de la fréquence propre d'un de ses modes (voir Annexe A). Cet effet de résonance perturbe non seulement les amplitudes et les phases des ondes de marées observées par gravimétrie mais également les amplitudes et les phases des ondes de nutation observées par radio-interférométrie à très longue base (VLBI). Dans le chapitre 2, sections 2.3 et 2.4, nous étudierons de manière précise les fonctions de transfert de la Terre aux périodes de la FCN et de la FICN. Nous évoquerons également des effets du second ordre sur la FCN et sur l'oscillation chandlérienne (CW) en section 2.6.

1. Cette nutation diurne ne doit pas être confondue avec le « sway », qui est une oscillation dans le repère céleste entre l'axe de rotation instantané animé du seul mouvement de précession-nutation de période supérieure à 2 jours et l'axe de rotation « intégral » incluant le mouvement du pôle. Le « sway » est donc la contribution du mouvement du pôle sur les oscillations de l'axe instantané de rotation dans le repère céleste.

## 1.3 DONNÉES D'OBSERVATIONS

Ainsi, dans l'analyse des modes propres de rotation et de leur résonance, nous considèrerons deux types de données :

- les variations temporelles de la pesanteur,
- les paramètres d'orientation de la Terre.

### VARIATIONS TEMPORELLES DE LA PESANTEUR

Les potentiels d'attraction gravitationnelle des corps externes (Lune, Soleil, autres planètes) exercent des forces de marées sur Terre, induisant des déformations élasto-gravitationnelles de la Terre et des variations temporelles associées de la gravité mesurée en surface. En plus de cet effet gravifique majeur, les variations de la rotation terrestre par rapport à un référentiel co-mobile induisent une déformation du manteau et des variations de la force centrifuge qui, à leur tour, génèrent des variations de la gravité en surface. Les couches superficielles (océans, atmosphère, contenu hydrique continental), de par leur dynamique (masses en mouvement et effets de charge) et indirectement leurs effets sur la rotation terrestre, induisent aussi des variations de gravité.

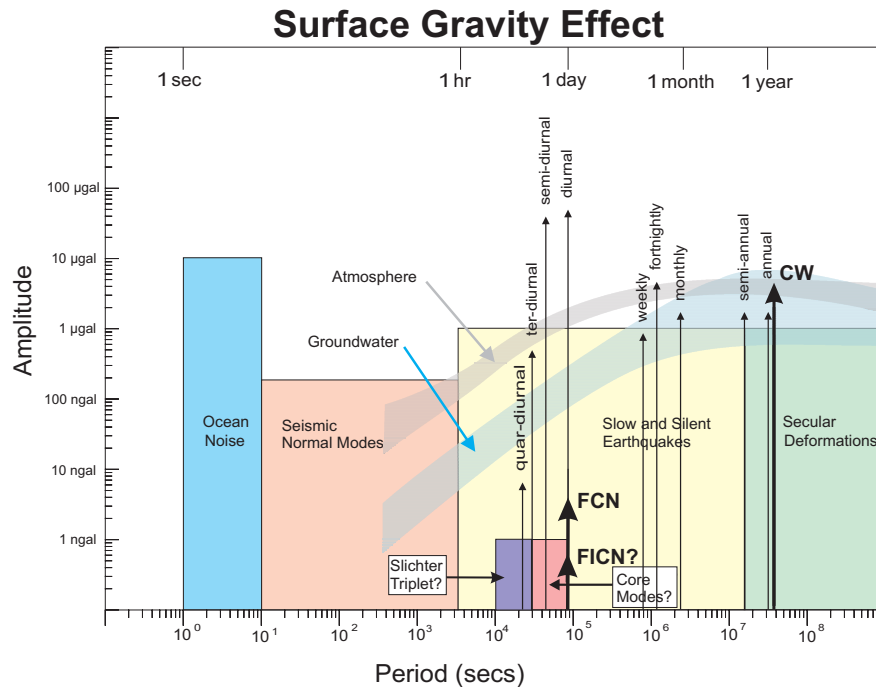


FIGURE 1.3.1: Spectre des contributions géophysiques aux variations temporelles de la pesanteur observables en surface. Crédit Image : Hinderer et al. (2007)

A cela s'ajoutent tous les processus internes de déformation et redistribution de masse, qui induisent des perturbations de la gravité en surface. Les mesures de variations temporelles de la pesanteur (gravité + force centrifuge) en surface intègrent donc l'ensemble de ces phénomènes géophysiques. Nous donnons l'ordre de grandeur des différentes contributions géophysiques en Annexe B.

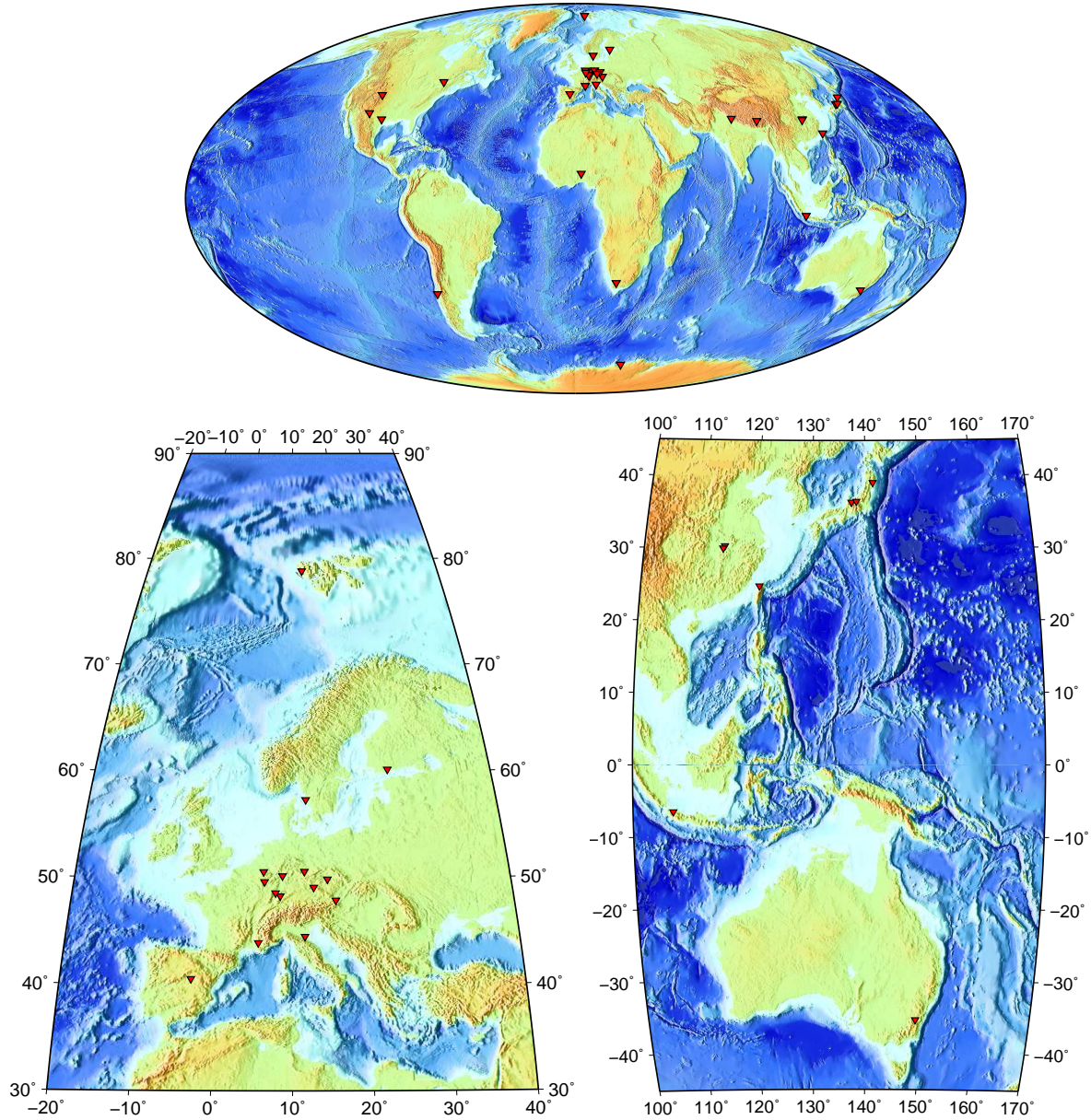
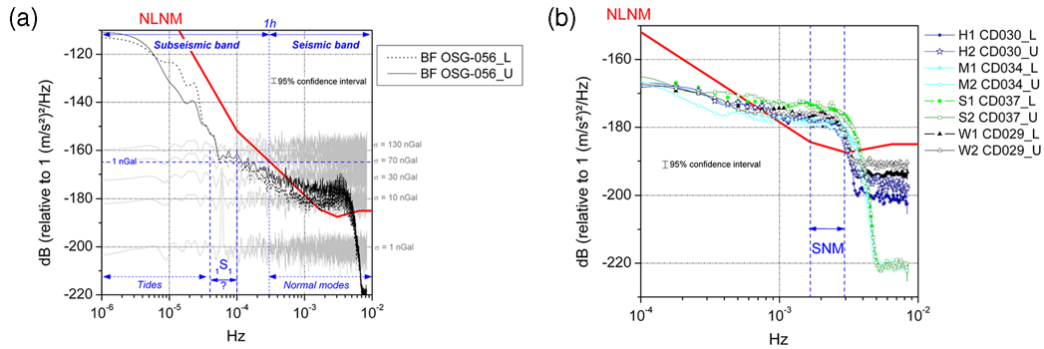


FIGURE 1.3.2: Cartes des stations équipées d'un gravimètre supraconducteur et contribuant au réseau mondial GGP, renommé IGETS.

Dans nos travaux, nous analysons les données des gravimètres supraconducteurs (SGs) qui enregistrent en continu les variations temporelles de la pesanteur en surface. Ces gravimètres relatifs sont actuellement les seuls instruments capables de mesurer les variations de  $g$  avec une précision de l'ordre du nanogal, où  $1 \text{ nGal} \approx 10^{-12}g$ , avec  $g$  la valeur de la pesanteur en surface ( $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ ). Ils ont également une très faible dérive instrumentale (de l'ordre de quelques  $\mu\text{Gal}$  par an). Cette grande stabilité permet l'étude de phénomènes géophysiques sur une large gamme de fréquences, comprenant modes sismiques (périodes inférieures à une heure), mouvement du pôle ( $\approx 435$  jours) et marées zonales à longue-période (comme celle en 18.6 ans) (voir Fig. 1.3.1).

Il existe actuellement une trentaine de gravimètres supraconducteurs répartis dans le monde (Fig. 1.3.2). Ces instruments étaient regroupés au sein du GGP (Global Geodynamics Project) de 1996 à 2015. Depuis 2015, GGP s'est transformé, conjointement avec ICET (International Center for Earth Tides), en un nouveau service de l'IAG (Association Internationale de Géodésie) et se fait désormais appelé IGETS (International Geodynamics and Earth Tide Service - <http://igets.u-strasbg.fr>). Ce service est hébergé au sein de l'EOST.

Plusieurs études des niveaux de bruit de ces instruments ont été publiées, la dernière datant de 2011. Nous avons montré que les SGs avaient des niveaux de bruit plus bas que les sismomètres aux fréquences inférieures à 1 mHz et surtout très stables dans le temps (voir Fig. 1.3.3 extraite de Rosat & Hinderer, 2011). Ils sont donc les instruments les plus appropriés pour détecter en surface les effets gravimétriques de signaux évanescents venant de la Terre profonde, comme par exemple les modes de Slichter.



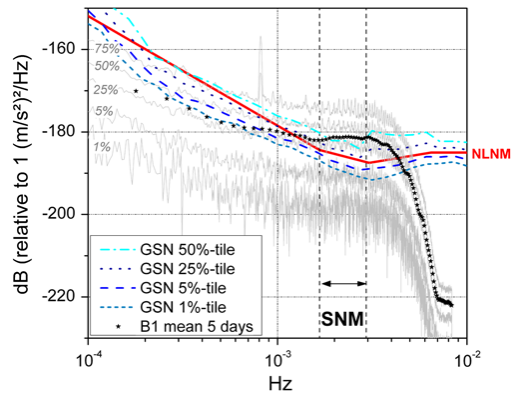
**Figure 4.** Noise levels from the lower and upper spheres of the double-sphere SGs. (a) PSDs on the same 15 days at BFO from the lower (heavier) and upper spheres of the dual OSG; the PSD level of an undamped harmonic signal of amplitude 1 nGal ( $10^{-2} \text{ nm/s}^2$ ) excited over 15 days at the frequency  $6 \times 10^{-5} \text{ Hz}$  and buried in white noise ( $\sigma$  varying from 1 to 130 nGal) is represented and the expected frequency ranges of the translational oscillation of the inner core, noted  ${}_1S_1$ , are indicated by the vertical dashed lines; (b) PSDs on the 5 quietest days of the dual Compact SGs at Bad Homburg (H1, H2), Moxa (M1, M2), Sutherland (S1, S2), and Wettzell (W1, W2). The color version of this figure is available only in the electronic edition.

Comparison with the Seismological Noise Models

The NLNM is an ambient Earth noise model that corresponds to the lowest envelope of the PSDs (0 percentile of the PSD distribution in time) computed from the IRIS Global Seismographic Network (GSN) stations. More recently, based on 118 GSN stations, Berger *et al.* (2004) have developed a new robust ambient Earth noise model that we would refer to as the GSN Noise Model. From the spectral estimates at each station-channel, they have computed the first, fifth, twenty-fifth, and fiftieth percentile values of the distribution in time from one year of seismic data. So they have obtained minimum noise levels at the first, fifth, twenty-fifth, and fiftieth percentiles that can be compared with the Peterson (1993) NLNM (Fig. 5). For the sake of comparison, we have also computed the percentiles of the daily PSDs computed at the station BFO for the lower and heavier sphere gravity records (B1). We can see from Figure 5 that the noise level of the SG at the first percentile is about 20 dB lower than the GSN noise model at the first percentile. It means that 1% of the time (here 182 days for BFO), the noise level of B1 is 20 dB lower than the 1% of GSN noise level. The mean PSD of the five quietest days is at about the same level as the noise level at the first quartile (twenty-fifth percentile).

The comparison of the twenty-fifth percentile of the GSN model and the twenty-fifth percentile of the B1 gravity PSD shows that the gravity PSD is crossing the GSN model at a frequency of 1.7 mHz. The SG gravity data have been corrected for atmospheric pressure effect so a part of the long-period vertical noise has been removed (Zuern and Widmer, 1995), while it is not the case for the GSN stations. Note that at 0.8 mHz the  ${}_0S_0$  radial mode is visible; at frequencies larger than 2 mHz, the continuous background oscillations (hum) can be observed in the twenty-fifth, fiftieth, and seventy-fifth percentiles of the gravity residuals.

These background free oscillations are well-known to be a rough criterion of noise quality of a site (Widmer-Schmidrig, 2003). They correspond to a permanent excitation of the fundamental spheroidal seismic modes in the band 2–7 mHz and were first observed by Nawa *et al.* (1998) from the SG data recorded at the Syowa station. The source of excitation of this hum is still unknown. The atmospheric pressure variations (Tanimoto, 1999; Fukao *et al.*, 2002) and infragravity waves (e.g., Tanimoto, 2007; Webb, 2007) are plausible causes. However, since the observation of a horizontal hum



**Figure 5.** Minimum noise levels at the first, fifth, twenty-fifth, and fiftieth percentiles for the vertical component of the GSN noise model (after Berger *et al.* (2004)—in dash) and for the observed gravity residuals at the station BFO with the OSG-056 (lower sphere, B1) together with the Peterson (1993) NLNM for comparison. For the gravity records, we have also plotted the seventy-fifth percentile and the mean PSD of the five quietest days (stars). The color version of this figure is available only in the electronic edition.

FIGURE 1.3.3: Page extraite de Rosat & Hinderer (2011). La figure 4 (a) de l'article montre le niveau de détection à 1 nGal par rapport au niveau de bruit le plus bas obtenu à la station BFO avec le gravimètre OSG-056. La notation  ${}_1S_1$  désigne le mode de Slichter avec une amplitude théorique de 1 nGal et une période de 5.42 h pour le modèle PREM. La figure 5 de l'article montre que d'un point de vue statistique, basé sur le calcul de densités spectrales de puissance, les gravimètres cryogéniques ont des niveaux de bruit plus bas que les sismomètres aux fréquences inférieures à 1 mHz.

## PARAMÈTRES DE ROTATION DE LA TERRE

Les paramètres de rotation de la Terre dans l'espace constituent les éléments correctifs des matrices de rotation qui permettent la transformation complète entre un repère terrestre et un repère céleste, tous les deux définis de manière conventionnelle. Actuellement, la seule technique permettant la réalisation d'un repère céleste est le VLBI (Very Long Baseline Interferometry). Aujourd'hui, une trentaine d'antennes VLBI (Fig. 1.3.4) contribue à l'IVS (International VLBI Service for Geodesy & Astrometry).



FIGURE 1.3.4: Cartes des stations équipées d'une antenne VLBI et contribuant à l'IVS.

Source : <http://ivs.nict.go.jp>

Les mesures VLBI, comme pour les autres techniques spatiales (GNSS, SLR, LLR, DORIS,...) permettent également de réaliser un système de référence terrestre et d'estimer les paramètres de rotation de la Terre (ERP pour « Earth Rotation Parameter »). Le passage d'un repère terrestre à un repère céleste, et vice-versa, nécessite trois rotations selon les angles d'Euler (voir Annexe C). Cependant, la rotation diurne de la Terre sur elle-même entraînant des changements d'orientation dans l'espace très rapides (15 secondes d'arc en une seconde), déterminer les angles d'Euler nécessiterait des observations extrêmement rapprochées (toutes les 0.1 ms pour une précision de la milliseconde d'arc (Bizouard, 2014)). Dans la paramétrisation utilisée en pratique, les variations plus lentes associées aux basculements de l'axe de rotation et aux variations de la vitesse de rotation sont séparées de l'effet de rotation diurne uniforme. Un repère intermédiaire est donc introduit (cf. Fig. 1.3.5) et les ERPs sont définis par rapport à cette référence. Ce repère lié à la Terre est réalisé par la définition d'un pôle intermédiaire s'approchant du pôle moyen de rotation sur la journée et de son équateur instantané, et d'une origine prise sur cet équateur pour mesurer la vitesse de rotation axiale. La rotation de la Terre peut ainsi être décrite par 5 paramètres : 2 paramètres  $x_p$  et  $y_p$  pour décrire la direction de l'axe intermédiaire dans le repère terrestre, 1 paramètre pour suivre la rotation axiale de la Terre autour de l'axe intermédiaire et 2 paramètres  $X$  et  $Y$  pour

décrire la direction de l'axe intermédiaire dans le repère céleste (cf. Fig. 1.3.5). La rotation de la Terre, considérée comme une transformation géométrique entre les repères terrestre et céleste, est donc décrite par trois composantes variables :

1. « précession - nutations » : l'orientation de la Terre dans l'espace varie sous l'action du couple gravitationnel externe (marées luni-solaires et planétaires) agissant sur le bourrelet équatorial et plus minoritaire sous l'action des enveloppes fluides superficielles et de la rotation propre du noyau fluide. La partie constante du couple de marées luni-solaires agissant sur le bourrelet équatorial induit un mouvement de l'axe de figure qui décrit un cône dans l'espace en 26000 ans et d'ouverture  $23^\circ 26'$ . C'est la **précession**. Les variations périodiques du couple gravitationnel induisent des variations périodiques de l'axe de figure dans l'espace. Ce sont les **nutations**. La nutation la plus grande est celle de période 18.6 ans (correspondant à la période de révolution du noeud ascendant de la Lune, intersection entre son plan orbital et le plan écliptique de la Terre). Ces mouvements de nutation - précession sont caractérisés par les variations temporelles des paramètres  $X$  et  $Y$ .
2. « mouvement du pôle » : la position, définie par  $x_p$  et  $y_p$ , de l'axe de rotation instantané bouge dans la Terre. Ce mouvement du pôle lui-même se décompose en plusieurs composantes. Il y a le mouvement libre correspondant au mode d'oscillation de Chandler de période 14 mois, un mouvement annuel forcé majoritairement par l'atmosphère et une lente dérive du pôle de rotation imputée principalement au rebond post-glaciaire.
3. UT1-TAI : les écarts du temps universel UT1 (temps solaire moyen de Greenwich) par rapport au temps atomique international (TAI) (voir Encadré 1.4), c'est-à-dire les variations de l'angle de rotation de la Terre par rapport à la rotation uniforme  $\Omega_{TAI}$ . Mis à part la dérive parabolique, associée à une seconde S.I. en moyenne plus courte que la seconde UT1, les variations à long terme sont attribuées principalement au couplage électro-magnétique à la CMB, aux marées zonales et aux déplacements des masses atmosphériques.

La réalisation du repère intermédiaire doit être définie de manière géométrique de telle sorte que les coordonnées  $(x_p, y_p)$  et  $(X, Y)$  ne contiennent pas les mêmes mouvements. L'IAU a donc adopté en 2000 comme pôle intermédiaire conventionnel le pôle céleste intermédiaire (noté CIP). Il correspond à l'intersection avec l'hémisphère nord de la sphère céleste de l'axe de figure restreint à ses mouvements de précession-nutation de périodes supérieures à deux jours plus la FCN (Capitaine, 2002). Le CIP est très proche du pôle instantané de rotation avec une différence inférieure à 20 milliarcsecondes (quelques dizaines de centimètres) et en constitue une moyenne journalière avec une différence au maximum de 1 mas ( $1 \text{ mas} \approx 3 \text{ cm}$  à l'équateur). Le CIP permet ainsi de clairement séparer les variations courtes périodes de la rotation terrestre de ses variations longues périodes (cf. Table 1.3.1). Nous avons représenté sur la Fig. 1.3.5 les différents axes fondamentaux qui interviennent pour décrire la rotation et l'orientation de la Terre (voir aussi Annexe C.2).

La matrice de passage entre le CIP et le pôle géographique contient donc le mouvement du pôle (périodes supérieures à 2 jours dans l'ITRS), les termes de nutation de l'axe de figure dont la période est inférieure à 2 jours dans l'espace, et les termes diurnes et sub-diurnes du mouvement du pôle induits principalement par les marées océaniques.

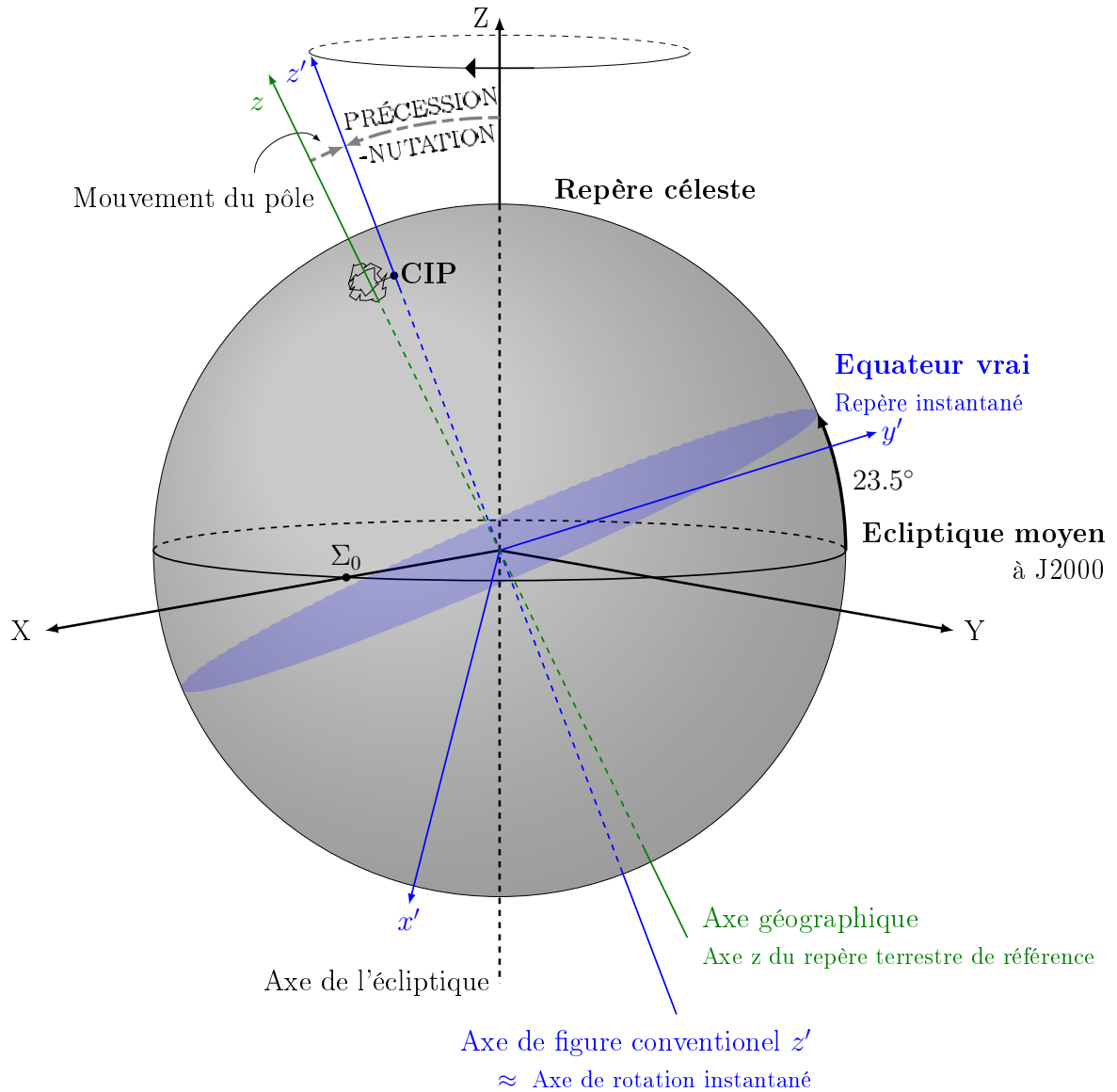


FIGURE 1.3.5: Repère terrestre ( $Oxyz$ ), repère conventionnel instantané ( $x', y', z'$ ) et repère céleste géocentrique ( $OXYZ$ ). Le CIP désigne le « Celestial Intermediate Pole », pôle céleste intermédiaire adopté en 2000 par l'Union Astronomique Internationale (IAU), défini dans Capitaine (2002). Dans le repère ( $OXYZ$ ), les coordonnées du CIP sont notées  $(X, Y)$  et représentent les écarts au pôle céleste. Les coordonnées du pôle  $(x, y)$  sont les angles de rotation permettant de passer du repère intermédiaire ( $Ox'y'z'$ ) au repère terrestre ( $Oxyz$ ). Dans le repère terrestre ( $Oxyz$ ), les coordonnées du CIP sont  $(x_p = x, y_p = -y)$  et donnent la position du vecteur complémentaire pour atteindre l'axe des pôles géographiques.  $\Sigma_0$  est l'origine des ascensions droites.

Le lien entre les ERPs définis de manière conventionnelle et les composantes du vecteur instantané de rotation qui interviennent dans les équations dynamiques de la Terre déformable en rotation se fait en introduisant les perturbations des angles d'Euler et en séparant la perturbation de l'axe géographique en une composante céleste  $P$  variant lentement et



**Encadré 1.3: POURQUOI ÉTUDIER LA ROTATION ?**

La rotation de la Terre est complexe, puisque son axe de rotation, défini par un vecteur rotation instantané, varie à la fois dans l'espace par rapport à un repère céleste, et sur Terre par rapport à un repère géographique (voir Fig. 1.1.2).

- Comprendre la dynamique des planètes et autres corps déformables (aspects mathématiques) ;
- Prédire l'évolution à long terme des corps célestes (astrophysique, planétologie) ;
- Réduire les observations célestes au sol (astronomie) ;
- Prédire les éclipses et autres évènements astronomiques ;
- Sonder l'intérieur des corps (planétologie et géophysique) ;
- Comprendre les processus géophysiques liés à la dynamique des enveloppes fluides (atmosphère et océans), incluant les changements climatiques ;
- Se positionner sur Terre, positionner une sonde spatiale observée depuis la Terre ;
- Prédire les variations de la longueur du jour et le mouvement du pôle, utile pour les techniques de géodésie spatiale ;
- Garder le temps universel coordonné (UTC) synchronisé avec le temps UT1 de la rotation terrestre (voir Encadré 1.4) en introduisant des sauts de seconde ; la cause principale de l'ajout actuel des secondes intercalaires est le fait que la seconde SI a été choisie trop courte par rapport à la seconde UT1 des années 1960 (elle a été prise égale à une seconde UT1 des années 1830). Dans une centaine d'années l'élongation de la seconde UT1 pourrait intervenir en raison du ralentissement séculaire, mais pour le moment ce n'est pas le cas, puisque la seconde UT1 a même plutôt tendance à diminuer (variations multi-décennales) (C. Bizouard, *communication personnelle*) ;
- etc.

en une composante terrestre  $pe^{i\Phi}$  contenant les oscillations rapides (Bizouard, 2014). Cette séparation en fréquences permet ainsi de définir le CIP par ses coordonnées équatoriales  $p = x - iy$  dans le repère terrestre (ITRF) et  $P = dX + idY \approx \Delta\Psi\sin\theta_0 + i\Delta\theta$  dans le repère céleste (ICRF), avec  $\theta_0$  l'obliquité moyenne à l'époque de référence,  $dX$  l'écart en obliquité et  $dY$  l'écart en longitude.

Nous écrivons le vecteur instantané de rotation du repère terrestre par rapport au repère céleste  $\vec{\omega} = \Omega(m_1\vec{x} + m_2\vec{y} + (1 + m_3)\vec{z})$ , où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  définissent les trois axes du repère terrestre et  $\Omega$  est la vitesse de rotation moyenne de la Terre. On introduit habituellement  $\tilde{m} = m_1 + im_2$  pour décrire la position du vecteur instantané de rotation dans le plan équatorial du repère terrestre.

Brzeziński & Capitaine (1993) ont donné l'expression explicite qui relie les coordonnées du pôle  $p$ , et les écarts  $P$  du pôle céleste, aux perturbations du vecteur instantané de rotation dans le repère terrestre. Cette équation est :

$$\tilde{m} = p - i\frac{\dot{p}}{\Omega} + i\frac{\dot{P}}{\Omega}e^{i\Phi},$$

avec  $\Phi$  l'angle d'Euler par rapport au repère terrestre non perturbé qui peut s'écrire en

**Encadré 1.4: SAUT DE SECONDE ET TEMPS UNIVERSEL**

Depuis le développement des horloges au césium, la seconde atomique est devenue l'unité temporelle du système international (SI). Depuis le 1er janvier 1958, le temps atomique international (TAI) est défini par un réseau mondial d'horloges atomiques, dont le temps a été rapporté au géoïde terrestre. Mais le temps légal, radiodiffusé et mondialement utilisé est le temps universel coordonné (UTC). L'UTC correspond au temps atomique TAI décalé d'un nombre entier de secondes, de telle sorte que l'écart entre l'UTC et le temps de la rotation terrestre (UT1) reste inférieur à 0.9 s (Bizouard, 2014). Au 1er janvier 1958, on avait égalité entre TAI et UT1. Mais depuis, UT1 a pris du retard sur TAI. Au 1er juillet 2015, on avait 36 s d'écart cumulé entre TAI et le temps de la rotation. Pour maintenir la condition  $|UT1 - UTC| < 0.9$  s, une seconde atomique intercalaire a été introduite à plusieurs dates fixes par le passé, de sorte qu'aujourd'hui nous avons  $TAI - UTC = 36$  s. Cette introduction d'une seconde intercalaire est maintenue jusqu'en 2018, mais au-delà, il est possible qu'elle soit abandonnée pour utiliser le TAI ou  $TAI + n$  secondes, où  $n$  correspondra à la dernière seconde ajoutée, comme temps universel coordonné (Gibney, 2015).

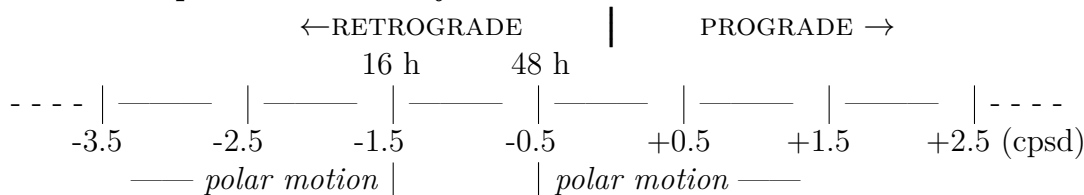
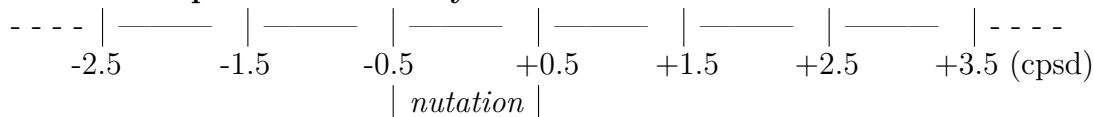
**Fréquences dans le système de référence terrestre ITRS****Fréquences dans le système de référence céleste ICRS**

TABLE 1.3.1: Représentation schématique du mouvement du pôle intermédiaire céleste (CIP).

fonction de la vitesse de rotation  $\Phi = \Omega(t - t_0) + \Phi_0$ .  $\Phi$  donne le temps sidéral de Greenwich. L'époque de référence  $t_0$  correspond au 01/01/2000 à 12 h UT1 et est notée J2000. Les relations cinématiques d'Euler (cf. Annexe C.1.1) permettent de relier les paramètres de la rotation terrestre au vecteur instantané de rotation et d'exprimer les EOPs comme perturbations des angles d'Euler.

Nous avons donc le lien entre mouvement du pôle (partie en  $p$ ), nutations et précession (partie en  $P$ ) et le déplacement de l'axe de rotation.

La composante axiale  $m_3$  du vecteur instantané de rotation s'écrit quant à elle en fonction des variations relatives de la durée du jour  $\frac{\Delta LOD}{LOD}$  et  $UT_1$  :

$$m_3 = \frac{dUT_1 - TAI}{dt} = -\frac{\Delta LOD}{LOD}.$$

Alors que les écarts au pôle céleste ( $P$ ) sont très bien modélisés avec une précision de 1 mas, le mouvement du pôle  $p$  est imprévisible à long terme et doit donc être constam-

ment observé. C'est pourquoi les valeurs de ces paramètres sont fournies quotidiennement par l'EOP PC (EOP Product Centre - <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc>), service de l'IERS (International Earth Rotation Service and Reference Systems - <http://www.iers.org>). Les services de l'IERS réalisent également les repères de référence terrestre (ITRF) et céleste (ICRF) internationaux.

**Encadré 1.5: UN PEU D'HISTOIRE...** (VOIR AUSSI ANNEXE F)

La précession fut découverte dès l'antiquité par Hipparque (environ 190 - 125 avant J.-C.) en se basant sur des observations de Timocharis (observations faites entre 294 et 283 av. J.-C.). Mais ce mouvement fut attribué à une variation de l'axe de rotation de la Terre seulement en 1532 par Copernic et il faudra attendre Newton pour une explication physique dans ses *Principia mathematica* (1687). La nutation de 18.6 ans, découverte par Bradley en 1748, fut expliquée un an après par d'Alembert dans son ouvrage intitulé *Recherches sur la précession des équinoxes* (1749), et dans lequel il donne la première théorie analytique de la précession-nutation d'une Terre supposée rigide. Cette explication a également été reprise par Euler en 1749 et publiée dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre* (Euler, 1751).

Le mouvement libre du pôle, qui existe pour tout corps dont l'axe d'inertie et l'axe de rotation ne sont pas confondus, a été démontré par Euler en 1758 puis publié en 1765. L'axe de rotation décrit un cône autour de l'axe d'inertie et on parle donc de « précession eulérienne ». Pour une Terre rigide, la période de ce mouvement libre est de 304.4 jours. Lagrange (1788) a repris les équations d'Euler et présenté les équations d'un corps libre en rotation. Puis Poinsot (1834, 1851) décrivit géométriquement le mouvement de l'axe de rotation d'un corps en rotation et montra que l'axe de rotation instantané décrit deux cônes : un cône attaché au corps autour de l'axe principal d'inertie et un cône fixe dans l'espace. Il introduit ainsi sa théorie des cônes circulaires roulants (Poinsot, 1853). Suite à la prédiction par Euler d'un possible mouvement du pôle, des preuves observationnelles ont été cherchées. Peters (1844) prédit que le mouvement du pôle devait se traduire par une variation périodique de la latitude des observatoires. Bessel (1844) observa une variation de latitude dans ses observations réalisées de 1842 à 1844 mais l'attribua à des variations internes à la Terre. Thomson (1876) suggéra que le mouvement du pôle devait être plus compliqué qu'admis jusque là à cause des redistributions de masses dans la Terre et en surface. Ce sont finalement les observations de variations de latitude de Küstner réalisées de 1884 à 1885 qui ont mis en évidence ce mouvement du pôle et plus particulièrement la composante annuelle (Küstner, 1888; Brosche, 2000). La découverte du mouvement du pôle est souvent attribuée à Küstner (1888) mais en réalité elle résulte d'un long processus qui a couvert presque tout le XIX<sup>ème</sup> siècle et auquel ont participé de nombreux astronomes allemands (Verdun & Beutler, 2000).

Cependant, l'existence du mouvement du pôle n'était pas admise unanimement. En 1890, Tisserand rédigea son second volume de *Mécanique Céleste* (Tisserand, 1890) dans lequel il écrit « *les portions conservées ainsi dans p et q ne pourront pas être contrôlées par l'observation, qui donne à peine quelques présomptions de leur existence* » (Melchior, 2000). En fait, Tisserand (1890) développe les petits termes quasi-diurnes du mouvement du pôle induits par le couple de marées luni-solaire et d'amplitude quelques centimètres à la surface. Ce sont les termes calculés et publiés par von Oppolzer (1882) qui donnent les rayons des cônes circulaires de Poinsot qui roulent dans l'espace sur les grands cônes correspondants à la précession, à la nutation en 13.6 jours et à la nutation semi-annuelle.

Finalement, en 1891, Chandler découvrit que le mouvement du pôle se décompose essentiellement en un mouvement libre circulaire, désormais appelé « oscillation de Chandler », et en un mouvement elliptique forcé de période annuelle. Cette découverte importante déclencha la publication de plusieurs articles fondamentaux (voir aussi Melchior, 2000) sur l'élasticité de la Terre (Newcomb, 1892; Hough, 1895; Love, 1909; Larmor, 1909) et sur les problèmes soulevés par la présence d'un noyau fluide (Sloudsky, 1895; Hough, 1895; Poincaré, 1910).

---

# CHAPITRE 2

## LES MODES DE ROTATION

*[...] Et de même que notre Copernic à nous nous a dit : Il est plus commode de supposer que la terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de l'astronomie dans un langage bien plus simple ; celui-là dirait : Il est plus commode de supposer que la terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de la mécanique dans un langage bien plus simple.*

Henri POINCARÉ    *La Valeur de la science*, ouvrage paru en 1905

### 2.1 MOTIVATION

Un modèle de Terre en rotation possède quatre modes propres de rotation : la nutation libre du noyau (FCN), l'oscillation de Chandler (CW), la nutation libre de la graine (FICN) et l'oscillation de Chandler de la graine (ICW). La réponse de la Terre au forçage des marées prédit un effet de résonance lorsque la fréquence du forçage est proche de la fréquence propre d'un de ces modes. Cet effet de résonance perturbe non seulement les amplitudes et les phases des ondes de marées observées par gravimétrie mais également les amplitudes et les phases des ondes de nutation observées par VLBI. Puisque la fonction de transfert de la Terre aux forçages des marées dépend de certains paramètres géophysiques (nommés « Basic Earth Parameters » ou BEP en abrégé), en inversant les amplitudes des ondes de marées et de nutation affectées par les résonances, il est ainsi possible d'estimer les valeurs de ces paramètres caractéristiques de la Terre profonde.

Les valeurs de ces paramètres géophysiques sont assez mal contraintes. Il s'agit de l'aplatissement de la graine et du noyau liquide, des densités de la graine et du noyau liquide, de la déformation des interfaces graine-noyau liquide (ICB) et noyau-manteau (CMB) sous l'action des pressions fluides qui agissent dessus (Dehant et al., 1997), des constantes de couplage visco-magnétiques aux frontières du noyau liquide (Mathews et al., 2002), la viscosité de la graine et la friction à l'ICB (Greff-Lefftz et al., 2000, 2002). L'inversion des paramètres géophysiques à partir des observations de résonance dans les données de nutation VLBI a déjà été effectuée par Mathews et al. (2002) en utilisant une méthode par moindres carrés. Ils ont proposé un modèle de référence, appelé MHB2000, qui est le modèle standard utilisé par l'Association Internationale d'Astronomie (IAU) pour représenter la réponse de la Terre au forçage des marées (IERS Conventions 2010). Plus tard, Koot et al. (2008) puis

Koot et al. (2010) ont ré-estimé les valeurs de certains paramètres géophysiques par inversion des données de nutations à l'aide d'une méthode Bayésienne appliquée aux séries temporelles. En réalité, les BEPs obtenus aussi bien par Mathews et al. (2002) que par Koot et al. (2008, 2010), sont fortement contraints par les valeurs a priori du modèle PREM. En effet, les paramètres géophysiques qu'ils ont inversés sont fortement corrélés les uns aux autres (cf. Fig. 2.1.1). En fixant un certain nombre de paramètres à leurs valeurs théoriques pour un modèle de Terre PREM, ils arrivent ainsi à estimer les autres avec des valeurs proches de leur valeur théorique moyennant un écart introduit par le bruit des données de nutation. Ils ont donc fortement contraint les paramètres de la FICN à partir du modèle PREM. En fait, nous avons montré que l'effet de la FICN n'est pas détectable dans les données VLBI (cf. Rosat et al., 2016a) et qu'il n'est donc pas possible de contraindre sa fréquence complexe à partir des observations seules (Rosat et al., 2017).

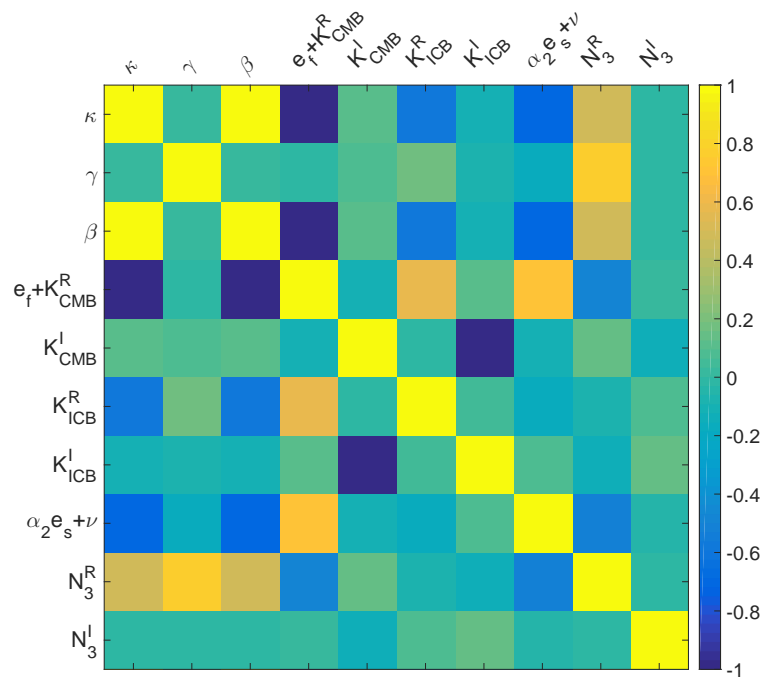


FIGURE 2.1.1: Matrice de corrélation des paramètres qui caractérisent la Terre (BEP) définis dans Mathews et al. (2002). Le paramètre  $\alpha_2 e_s + \nu$  a été fixé à sa valeur théorique pour PREM dans Koot et al. (2008).

En outre, depuis la mise en place du modèle de référence MHB2000, nous disposons de séries temporelles de nutation VLBI de 15 ans plus longues et plus précises. Remarquons aussi que depuis les dernières estimations (Koot et al., 2010), l'impact du choix des stratégies de traitement des données sur les solutions de nutation est mieux connu (Gattano et al., 2015) ainsi que celui du catalogue de radiosources (Lambert, 2014). En effet, les solutions proposées par les différents centres mondiaux d'analyse VLBI s'avèrent avoir des différences notables associées à des écarts significatifs sur les amplitudes des nutations permettant de contraindre l'inversion des paramètres géophysiques. La mise en évidence de ces différences est récente et nécessite donc une réévaluation des paramètres géophysiques. En parallèle, sur Terre, la longueur des séries gravimétriques nous permet désormais des analyses de marées

plus détaillées. L'effet des résonances dues à la FCN et à la FICN se caractérise par une perturbation de l'amplitude des ondes de marées diurnes. Ainsi la résonance avec la FCN, qui amplifie en particulier l'onde  $\Psi_1$  (correspondant à la nutation annuelle rétrograde), a été largement observée et analysée, dans les données de nutation VLBI (e.g. Lambert & Dehant, 2007), dans des observables géophysiques (gravimétrie, mesures de déformation par extensométrie, inclinométrie, mesures de hauteurs d'eau dans des puits,...) de surface (par exemple Blum et al., 1973; Neuberg & Zürn, 1986; Zaske et al., 2000; Ducarme et al., 2007; Amoruso et al., 2012) ou dans un traitement combiné des nutations et des marées gravimétriques (Defraigne et al., 1994, 1995; Rosat & Lambert, 2009). En revanche, la résonance due à la FICN n'a pas encore été clairement observée. La présence de la graine va également modifier certaines ondes de marées, en particulier, celles entre  $S_1$  (nutation annuelle prograde) et  $K_1$  (précession). L'inversion des résonances gravimétriques associées à la FCN et à la FICN permettrait de contraindre des paramètres géophysiques additionnels par rapport aux nutations, en particulier les nombres de Love qui caractérisent la déformation des frontières du noyau et de la graine.

Après un rappel sur les équations qui gouvernent la rotation de la Terre, nous analysons les effets de résonance dus à la FCN et FICN à partir des données de nutation spatiales et des données de gravimétrie terrestre, dans le but d'estimer les paramètres géophysiques qui caractérisent la Terre profonde.

## 2.2 EQUATIONS DE LA ROTATION

Nous reprenons les équations de Smith (1974), Smith (1977) et Legros (1987) pour décrire la rotation de la Terre. Considérons une Terre en rotation, légèrement elliptique, auto-gravitante et initialement en équilibre hydrostatique. Cette Terre possède un noyau liquide compressible et stratifié et une graine solide. Ajoutons lui une relation constitutive parfaitement élastique et isotrope pour décrire son comportement rhéologique. Il faut dans un premier temps définir des systèmes de référence. Notons  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère terrestre lié au corps (repère principal d'inertie) et tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_0$  autour de  $\vec{z}$  par rapport à un repère inertiel noté  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . L'origine de ces repères est commune et prise au centre de masse de la Terre. Le vecteur  $\vec{\Omega}_0$  est constant quelque soit les perturbations que subit la Terre. Notons  $A, B$  and  $C$  les moments d'inertie de la Terre globale. Suivant Smith (1974), nous adoptons une description basée sur les angles de rotation et leur perturbation, plutôt que sur les vitesses de rotation habituellement employées. Utiliser les angles permettra par la suite de mieux décrire le déplacement des particules. Notons  $\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$  les composantes cartésiennes des rotations infinitésimales autour des axes de notre repère tournant qui permettent de passer du repère lié au corps tournant uniformément au repère lié au corps après perturbation (cf. Fig. 2.2.1). Le tenseur d'inertie de la Terre en équilibre s'écrit :

$$I_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

## 2.2.1 TERRE RIGIDE

Après perturbation, le tenseur d'inertie devient dans le repère  $(x, y, z)$  non perturbé :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} A & \theta_z(A-B) & \theta_y(C-A) \\ \theta_z(A-B) & B & \theta_x(B-C) \\ \theta_y(C-A) & \theta_x(B-C) & C \end{pmatrix}.$$

Le vecteur rotation instantané est défini dans le repère principal d'inertie par :  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{x}' + \omega_2 \vec{y}' + \omega_3 \vec{z}'$ . Le moment cinétique est donné par :

$$\vec{H}(t) = \int_V \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega} \quad (2.2.1)$$

Dans le repère principal d'inertie le moment cinétique de la Terre globale s'écrit alors

$$H_1 = A\omega_1 + \Omega_0 \theta_y(C-A); \quad H_2 = B\omega_2 + \Omega_0 \theta_x(B-A); \quad H_3 = C(\Omega_0 + \omega_3),$$

après avoir négligé les termes de perturbation du second ordre.

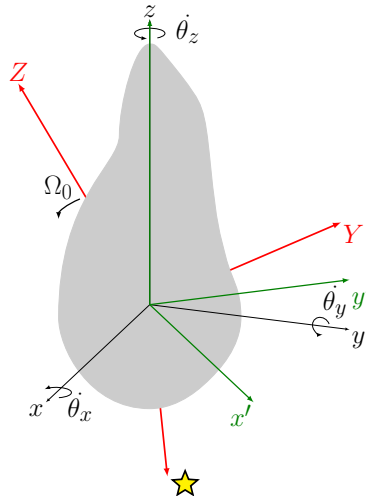


FIGURE 2.2.1: Schéma des rotations infinitésimales d'un corps rigide tri-axial autour des axes du repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tournant à la vitesse uniforme  $\Omega_0$  autour de l'axe  $\vec{z}$ . Les axes  $x', y'$  et  $z'$  définissent les axes principaux d'inertie du corps en rotation.

**THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE** Dans un système de référence inertiel, le moment cinétique total se conserve. Ainsi la variation du moment cinétique est égale au couple  $\vec{L}$  des forces agissantes. Dans le repère tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_0$  par rapport au repère céleste inertiel et en l'absence de couple externe, le théorème du moment cinétique devient :

$$\frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} + \vec{\Omega}_0 \times \vec{H}(t) = 0$$

En posant  $\dot{\theta}_x = \omega_1$ ,  $\dot{\theta}_y = \omega_2$  et  $\dot{\theta}_z = \omega_3$ , il vient :

$$\begin{aligned} A\ddot{\theta}_x + \Omega_0 \dot{\theta}_y(C-A) - \Omega_0 B \dot{\theta}_y - \Omega_0^2 (B-C) \theta_x &= 0 \\ B\ddot{\theta}_y + \Omega_0 \dot{\theta}_x(B-C) + \Omega_0 A \dot{\theta}_x + \Omega_0^2 (C-A) \theta_y &= 0 \\ C\ddot{\theta}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$



**Encadré 2.1: REPÈRE ET AXES DE TISSERAND**

Un repère de Tisserand est un repère attaché à un corps en rotation dont le moment cinétique interne est nul (Munk & MacDonald, 1960). Ainsi, pour un corps parfaitement rigide (gelé), c'est-à-dire si les vents, les courants océaniques, et tous les autres mouvements relatifs s'arrêtaient, alors les axes du repère tourneraient avec le corps rigide. Pour définir un repère de Tisserand, il s'agit donc de trouver des axes moyens pour lesquels le moment cinétique relatif  $h$  (associé à un mouvement relatif) est nul.

En posant  $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 e^{i\sigma t}$ , ce système constitue un problème aux valeurs propres, dont les solutions sont les modes propres d'un corps rigide en rotation. Il y a trois solutions indépendantes qui s'obtiennent en prenant les racines du déterminant donné par :

$$\sigma^2(\sigma^2 - \Omega_0^2) \left[ \sigma^2 - \frac{(C - A)(C - B)}{AB} \right] = 0$$

Les trois fréquences propres obtenues sont (Smith, 1977) :

$$\sigma_{AS} = 0, \quad \sigma_{TOM} = -\Omega_0 \quad \text{et} \quad \sigma_e = \Omega_0 \left[ \frac{(C - A)(C - B)}{AB} \right]^{1/2}.$$

La première solution de fréquence propre nulle correspond au mode axial (« axial spin mode ») de rotation uniforme autour de l'axe  $z$ . C'est un exemple de mode séculaire (Dahlen & Smith, 1975). Le deuxième mode est le mode diurne appelé « Tilt-Over Mode » (TOM). Il correspond à l'inclinaison du vrai axe de rotation (axe de rotation instantané) de la Terre par rapport à l'axe  $z$  du repère terrestre en rotation uniforme. Sa période est d'un jour sidéral. Le TOM apparaît comme un terme de résonance diurne associé à la nutation de l'axe principal d'inertie (Dehant & Capitaine, 1997). Dans le repère de Tisserand (voir encadré 2.1) attaché à la Terre, l'amplitude du TOM est nulle (Dahlen & Smith, 1975) (et l'expression des nutations spatiales ne contient pas de termes d'Oppolzer). Ce mode n'est accompagné d'aucune déformation et est indépendant de la structure interne du corps en rotation. Il existe aussi pour un corps complètement liquide. La troisième solution est la précession eulérienne.

**2.2.2 TERRE DÉFORMABLE**

Pour une Terre déformable, il faut prendre en compte les variations des tenseurs d'inertie. Dans un référentiel dont les axes sont orientés avec les axes principaux d'inertie, le tenseur d'inertie  $\bar{\bar{I}}$  s'écrit :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

où le tenseur  $\bar{\bar{c}}$  de composantes  $c_{ij}$  représente la perturbation du tenseur d'inertie  $\bar{\bar{I}}$ . En introduisant les moments d'inertie à l'aide de la formule de MacCullagh (Allman, 1853)

rappelée en Annexe D.3, les composantes  $c_{ij}$  peuvent s'exprimer en fonction des coefficients de degré 2 du développement en harmoniques sphériques du potentiel de pesanteur  $\Phi$  (cf. Eq. D.2.1) :

$$\begin{aligned}\Phi &= \phi^0 + \phi = -\frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) P_l^m(\cos \theta) \right\} \\ &= -\frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \left[ J_l P_l(\cos \theta) + \sum_{m=1}^l (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) P_l^m(\cos \theta) \right] \right\},\end{aligned}$$

où  $\phi^0$  est le potentiel gravitationnel statique et  $\phi$  la perturbation du potentiel. Les coefficients  $J_l$ ,  $C_l^m$  et  $S_l^m$  dépendent du temps. Les relations entre les coefficients de degré 2 du potentiel et les composantes du tenseur d'inertie  $\bar{c}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{C - \frac{A+B}{2}}{Ma^2} + \frac{c_{33} - \frac{c_{11}+c_{22}}{2}}{Ma^2} \\ C_{21} &= -\frac{c_{13}}{Ma^2} \\ S_{21} &= -\frac{c_{23}}{Ma^2} \\ C_{22} &= \frac{c_{22} - c_{11}}{Ma^2} \\ S_{22} &= -\frac{c_{12}}{Ma^2}.\end{aligned}$$

Les variations du potentiel gravitationnel  $\phi$  sont dues aux variations du potentiel centrifuge  $\phi_{\text{cent}}$  et au potentiel externe de marées  $\phi_{\text{tid}}$ . La déformation associée aux variations du potentiel centrifuge est appelée « marée polaire ». Le potentiel centrifuge est défini par

$$\vec{\nabla} \phi_{\text{cent}} = -\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

On note habituellement  $\vec{\omega} = \Omega_0(m_1, m_2, 1 + m_3)$  avec  $\Omega_0$  la vitesse de rotation terrestre moyenne de période 86164.10 secondes et  $m_1, m_2, m_3$  des composantes sans dimensions. En ne gardant que les termes du premier ordre en  $m_i$  (avec  $i=1, 2$  ou  $3$ ), la perturbation  $\phi_{\text{cent}}$  du potentiel centrifuge s'exprime sous la forme :

$$\phi_{\text{cent}} = -\frac{2}{3}\Omega_0^2 m_3 r^2 (P_2^0(\cos \theta) - 1) - \frac{\Omega_0^2}{3} (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) r^2 P_2^1(\cos \theta), \quad (2.2.3)$$

où le terme dominant est celui en  $P_2^1(\cos \theta)$  causé par la polhodie puisque  $m_3 \leq 10^{-8}$  et  $m_1, m_2 \leq 10^{-6}$  (Bizouard, 2014).

Notons  $\phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{cent}} + \phi_{\text{tid}}$ . La perturbation du potentiel de la Terre en rotation, à l'extérieur des masses, est alors proportionnelle au potentiel exciteur  $\phi_{\text{ext}}$  (Love, 1909). Leur rapport dépend uniquement de la structure interne de la Terre et de la fréquence. Pour une Terre à symétrie sphérique, on représente généralement les rapports entre déplacement ou variation du potentiel et potentiel exciteur par des nombres de Love et de Shida, sans dimension. La perturbation du géopotential fait ainsi intervenir le nombre de Love  $k_l$  de degré  $l$  défini à la surface  $r = a$  de la Terre par  $\phi_l^m = k_l \phi_{\text{ext},l}^m$ .

A partir des expressions de  $C_{21}$  et  $S_{21}$  et de l'équation 2.2.3, on obtient :

$$c_{13} = -k_2 \frac{a^5}{3G} \Omega_0^2 (\phi_{\text{tid},2}^{1c} - m_1)$$

$$c_{23} = -k_2 \frac{a^5}{3G} \Omega_0^2 (\phi_{\text{tid},2}^{1s} - m_2)$$

soit, en introduisant le nombre de Love séculaire  $k_s$  défini en Annexe D.6 :

$$c_{13} = -\frac{k_2}{k_s} (C - A) (\phi_{\text{tid},2}^{1c} - m_1)$$

$$c_{23} = -\frac{k_2}{k_s} (C - A) (\phi_{\text{tid},2}^{1s} - m_2)$$

## 2.3 FREE CORE NUTATION

L'existence d'un noyau dans la Terre a été suggérée déjà au *XVIII<sup>ème</sup>* siècle. D'Alembert envisage le premier le cas d'un sphéroïde non homogène constitué de couches de densités différentes et dresse les équations donnant la forme du sphéroïde (D'Alembert, 1749). Il envisage également le cas où l'intérieur de la Terre serait constitué d'un fluide homogène. Au même moment, Euler dans ses « Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre » (Euler, 1751) envisage dans ses équations le cas d'une Terre contenant un noyau. Mais on ne savait pas encore si ce noyau est plus dense ou moins dense que la croûte. Bouguer (Bouguer, 1749), par ses mesures pendulaires au Pérou, a montré comment la gravimétrie pouvait apporter des connaissances sur la constitution interne de la Terre et a prouvé que la Terre ne pouvait ni être creuse ni contenir un noyau aqueux. En 1798, Lord Cavendish (Cavendish, 1798) a estimé la valeur de  $G$ , la constante universelle de gravitation, et la densité moyenne de la Terre. Cette estimation mena la communauté scientifique à considérer l'intérieur de la Terre comme étant beaucoup plus dense en son centre. Cent ans plus tard Wiechert (1897) suggéra que la Terre devait avoir un noyau composé de fer et de nickel (comme les météorites) entouré par une coquille ou un manteau constitué de roche. Déjà en 1895, Hough (1895) et Sloudsky (1895) ont suggéré l'existence d'un noyau interne fluide et d'un mode de nutation associé de période quasi diurne. En 1906, grâce au développement de la sismologie, Richard Dixon Oldham (Oldham, 1906) mit en évidence la présence du noyau. En 1910, Henri Poincaré (Poincaré, 1910) décrivit en détails le mouvement d'un noyau liquide dans une coquille solide légèrement aplatie aux pôles et animée d'un mouvement de rotation et de précession. Il montra que le noyau avait son propre axe de rotation, intermédiaire entre l'axe de rotation instantané du manteau et l'axe de précession. En 1913, Gutenberg estima pour la première fois la profondeur de ce noyau (Gutenberg, 1913). C'est en 1926 que Sir Harold Jeffreys (Jeffreys, 1926) démontra grâce aux observations des marées et des ondes sismiques que le noyau devait être moins rigide que la manteau et pouvait même être fluide. Puis en 1949, Jeffreys (1949) publia ses travaux sur la dynamique du noyau liquide. Il montra en particulier qu'un effet de résonance devait avoir lieu avec les marées de période proche de celle du mouvement de nutation du noyau, c'est-à-dire proche du jour sidéral. Cette résonance avait déjà été mentionnée par Poincaré (1910) mais de manière moins détaillée. Jeffreys & Vicente (1957) ont ensuite considéré un

**Encadré 2.2: EQUATIONS D'EULER ET DE LIOUVILLE**

1. Théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned}\dot{H} + i\Omega_0[(1 + m_3)H - mH_3] &= L \\ \dot{H}_3 + i\Omega_0[m_1H_2 - m_2H_1] &= L_3\end{aligned}$$

où  $H = H_1 + iH_2$ ,  $m = m_1 + im_2$  et  $L = L_1 + iL_2$  sont les composantes équatoriales complexes du moment cinétique, des écarts à la rotation et du couple externe agissant sur la Terre. Ces équations de conservation du moment cinétique sont aussi appelées équations d'Euler.

2. Expression du moment cinétique en fonction des moments d'inertie :

$$\vec{H} = \Omega_0 \begin{pmatrix} (A + c_{11})m_1 + c_{12}m_2 + c_{13}(1 + m_3) \\ (B + c_{22})m_2 + c_{12}m_1 + c_{23}(1 + m_3) \\ (C + c_{33})(1 + m_3) + c_{13}m_1 + c_{23}m_2 \end{pmatrix} + \vec{h}$$

3. Equations linéarisées au premier ordre :

$$\begin{aligned}i\Omega_0^2(Am_1 + iBm_2 - Cm) + \Omega_0(A\dot{m}_1 + iB\dot{m}_2) + ic\Omega_0^2 + ih\Omega_0 + \dot{h} &= L \\ C\Omega_0\dot{m}_3 + \dot{c}_{33}\Omega_0 + \dot{h}_3 &= L_3\end{aligned}$$

Ce sont les équations de Liouville (Liouville, 1858) qui permettent de découpler les équations de la rotation axiale et de la rotation équatoriale. Si l'on considère différentes couches de la Terre, les équations de Liouville s'écrivent de la même manière en substituant au moment cinétique relatif et aux moments d'inertie de la Terre globale les moments de la couche considérée, et en ajoutant les termes de couplage entre les différentes couches, en plus du couple externe, à droite de l'équation.

Les termes  $h_1, h_2, h_3$  donnent les composantes du moment cinétique relatif associé au champ des vitesses relatives  $\vec{v}_r$ . Celles-ci sont les vitesses additives  $\vec{v}_r$  à la vitesse de rotation  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ , telles que  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{v}_r$ . Ce moment cinétique relatif est appelé composante *mouvement* et est défini par  $\int_V \vec{r} \wedge \vec{v}_r dm$ . Le moment cinétique de rotation du système défini par  $\int_V [r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}] dm$  est quant à lui appelé composante *matière*. Dans un système d'axes de Tisserand attaché à la croûte, l'apport de la croûte à  $\vec{h}$  est nul et ce terme contient les moments cinétiques relatifs du manteau, du noyau fluide, des océans et de l'atmosphère. Le système de référence terrestre international (ITRF) est obtenu en essayant de minimiser le moment cinétique relatif de la croûte à un instant donné. Cette démarche permet de déterminer l'orientation du repère mais pas son centre.

modèle de Terre plus réaliste avec un manteau compressible non-uniforme et un noyau, dans un cas homogène, dans l'autre distribué en densité. Ils ont ainsi donné pour la première fois des valeurs numériques pour les facteurs gravimétriques. Molodensky (1961) a confirmé les résultats de Jeffreys & Vicente (1957) dans le cas d'une théorie unifiée des nutations et des marées diurnes pour une Terre stratifiée avec un noyau liquide.

Ces deux études théoriques ont stimulé la communauté gravimétrique pour la recherche de l'effet du noyau liquide. Un chapitre de la thèse de Marta Calvo (Calvo, 2015) est consacré à cet aspect historique de recherche de la résonance due au noyau liquide dans les données gravimétriques. Nous ne mentionnerons donc ici que la première observation de la résonance

de la FCN par Lecolazet & Steinmetz (1974) dans les séries gravimétriques enregistrées à l'observatoire sismologique de Strasbourg. Depuis cette première observation, l'effet de résonance dû à la FCN a été largement observé et analysé et la précision de la détermination de ses paramètres s'est considérablement améliorée en particulier avec la technique VLBI.

Dans la section suivante nous présentons les résultats obtenus pour la période et le facteur de qualité de la FCN par analyse statistique bayésienne appliquée aux données des gravimètres cryogéniques.

### 2.3.1 ANALYSE BAYÉSIENNE DE LA RÉSONANCE DU NOYAU FLUIDE - *Article : Rosat et al. (2009)*

L'article qui suit a été publié en 2009 dans Journal of Geodynamics (Rosat et al., 2009).



# Estimation of the Free Core Nutation parameters from SG data: Sensitivity study and comparative analysis using linearized least-squares and Bayesian methods

S everine Rosat<sup>a,\*</sup>, Nicolas Florsch<sup>b,c,d</sup>, Jacques Hinderer<sup>a</sup>, Muriel Llubes<sup>e</sup>

<sup>a</sup> Institut de Physique du Globe de Strasbourg (UMR 7516 CNRS, Université de Strasbourg/EOST), 5 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

<sup>b</sup> UPMC, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

<sup>c</sup> UMI n  209 UMMISCO - Institut de Recherche pour le Développement, France

<sup>d</sup> Dpt of Mathematics and Applied Mathematics, UCT, South Africa

<sup>e</sup> Université de Toulouse, OMP – LEGOS, 14 Av. Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

## ARTICLE INFO

### Keywords:

Free Core Nutation  
Superconducting Gravimeter  
Bayesian analysis

## ABSTRACT

The Free Core Nutation (FCN) is investigated with the help of its resonance effect on the tidal amplitudes in Superconducting Gravimeter (SG) records of the GGP network. The FCN resonance parameters are combined in a resonance equation involving the Earth's interior parameters. The sensitivity of the FCN parameters to the diurnal tidal waves demonstrates that the quality factor of the FCN is strongly dependent on the accuracy of the imaginary part estimates of the gravimetric factors close to the resonance. The weak amplitude of  $\Psi_1$  tidal wave on the Earth, which is the closest in frequency to the FCN, in addition to errors in ocean loading correction, explains the poor determination of the quality factor  $Q$  from surface gravimetric data. The inversion of tidal gravimetric factors leads to estimates of the period,  $Q$  and resonance strength of the FCN. We show that, by inverting  $\log(Q)$  instead of  $Q$ , the results using the least-squares method optimized using the Levenberg–Marquardt algorithm are in agreement with the Bayesian probabilistic results and agree with the results obtained from VLBI nutation data. Finally, a combined inversion of 7 GGP European SG data is performed giving  $T = 428 \pm 3$  days and  $7762 < Q < 31,989$  (90% C.I.). An experimental estimate of the internal pressure Love number is also proposed.

  2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Because of the fluidity of the core, the Earth has a rotational mode, called the Free Core Nutation (FCN) with a period almost diurnal in Earth-fixed coordinates. The FCN parameters (period, damping) strongly depend on the coupling mechanism at the core–mantle boundary (flattening, topography, electro-magnetic coupling. . .). The FCN can be detected by its effect on the Earth's rotation, using the VLBI network analyses, or by studying its effects on the gravity field. As the tidal potential contains some diurnal components, a resonance occurs in the diurnal frequency band. This resonance effect can be observed in time-varying gravity data continuously recorded on the Earth's surface by Superconducting Gravimeters (SGs) of the Global Geodynamics Project (GGP) network (Crossley et al., 1999). The FCN resonance in gravity data is commonly represented by a damped harmonic oscillator model that we invert in order to determine the FCN frequency, quality factor  $Q$  and the transfer function of the mantle (or the resonance strength). The usual approach to solve this non-linear inverse prob-

lem is to use a linearized least-squares method optimized based on the Levenberg–Marquardt algorithm (Marquardt, 1963 – Numerical Recipes Fortran Chapter 15.5 – see for instance Defraigne et al., 1994, 1995; Sato et al., 2004; Ducarme et al., 2007). However Florsch and Hinderer (2000) have demonstrated the inadequacy of using such a least-squares method, because the statistical distribution of  $Q$  is definitely not Gaussian. They have proposed instead the use of a Bayesian approach to invert the FCN parameters, since the Bayesian method better propagates the information to the parameters.

Neuberg et al. (1987) first proposed an inversion of stacked gravity tide measurements in central Europe to retrieve the FCN parameters using the Marquardt optimized linearized least-squares. Then Defraigne et al. (1994) extended the gravity stack to the nutation observations. In those past studies, the obtained  $Q$ -value was abnormally small and sometimes even negative. Sato et al. (2004) used  $1/Q$  instead of  $Q$  as a parameter to be inverted using a modified Marquardt least-squares method since  $1/Q$  seems to be Gaussian (Sato et al., 1994). However they obtained a  $Q$ -value still smaller than the one retrieved from the VLBI nutation analysis (Table 1). The first application of the Bayesian method was proposed by Florsch and Hinderer (2000), who introduced  $\log(Q)$  as a parameter instead of  $Q$ , in order to preserve the positivity of  $Q$ , and

\* Corresponding author. Fax: +33 03 90 24 02 91.

E-mail address: [Severine.Rosat@eost.u-strasbg.fr](mailto:Severine.Rosat@eost.u-strasbg.fr) (S. Rosat).

**Table 1**  
A summary of various estimates of period and quality factor of the FCN. In addition to theoretical results relative to an elastic Earth, to a slightly inelastic one and to MHB2000 model of Mathews et al. (2002), we have added experimental results from the IDA (International Digital Accelerometers) network of spring gravimeters and from VLBI (Very Long Baseline Interferometry). The other results are from superconducting gravimeter (SG) datasets: B, Brussel (Belgium); BH, Bad-Homburg (Germany); ST, Strasbourg (France); CA, Cantley (Canada); J, 3 Japanese stations; ES, Esashi (Japan); MA, Matsushiro (Japan); CB, Canberra (Australia); MB, Membach (Belgium).

Author	Data	$T$	$Q$
Neuberg et al. (1987)	Stacked gravity (B+BH)	431 ± 6	2800 ± 500
Sasao et al. (1980)	Theory elastic	465	∞
Wahr and Bergen (1986)	Theory anelastic	474	78,000
Herring et al. (1986)	VLBI	435 ± 1	22,000–10 <sup>5</sup>
Cummins and Wahr (1993)	Stacked gravity IDA	428 ± 12	3300–37,000
Sato et al. (1994)	Stacked gravity J	437 ± 15	3200–∞
Defraigne et al. (1994)	Stacked gravity	424 ± 14	2300–8300
	VLBI	432 ± 4	$Q > 15,000$
	Stacked gravity + VLBI	433 ± 3	$Q > 17,000$
Florsch et al. (1994)	Gravity ST	431 ± 1	1700–2500
Merriam (1994)	Gravity CA	430 ± 4	5500–10,000
Hinderer et al. (1995)	Stacked gravity (ST+CA)	429 ± 8	7700–∞
Roosbeek et al. (1999)	VLBI	431–434	–
Florsch and Hinderer (2000)	Gravity ST (Bayes)	428	$Q > 20,000$
Hinderer et al. (2000)	Gravity + VLBI	431–434	15,000–30,000
Mathews et al. (2002)	MHB2000 model	430.20 ± 0.28	20,000
Sato et al. (2004)	Stacked gravity (ES+MA+CB+MB)	429.7 ± 1.4	9350–10,835
Vondrák and Ron (2006)	VLBI	430.32 ± 0.07	20,600 ± 340
Ducarme et al. (2007)	Mean gravity	429.7 ± 2.4	Not estimated
Lambert and Dehant (2007)	VLBI	430 ± 0.4	17,000 ± 3000
Ducarme et al. (2009)	Mean gravity in Europe	430 ± 2	15,000 ± 8000
Koot et al. (2008)	VLBI (Bayes)	430	13,750 ± 514
This paper	Stacked gravity of 7 European SGs (Bayes)	428 ± 3	7762 < $Q$ < 31,989 (90% C.I.)

obtained a  $Q$ -value greater than 20,000. More recently, Ducarme et al. (2009) inverted  $\log(Q)$  using both a Bayesian and a least-squares approach but applied on averaged gravimetric factors from European sites. They obtained a value for  $Q$  consistent with the VLBI result. The other studies based on the least-squares method are summarized in Table 1. Note that Koot et al. (2008) performed an estimation of the FCN resonance parameters from VLBI nutation series using a Bayesian statistical approach in the time domain.

Here we propose a comparison of the results given by the linearized least-squares method optimized by the Levenberg–Marquardt algorithm with the Bayesian inversion applied on SG gravity records. We show that the  $Q$ -value obtained from SG data is now in agreement with the value inverted from VLBI nutation series whatever the method used, least-squares or Bayesian inversion. Besides, we demonstrate that the poor constraint on the  $Q$ -value obtained by Florsch and Hinderer (2000) was due to the large uncertainty on the phase of the diurnal tidal waves close to the resonance.

In the first part we describe the FCN resonance model. Then, we review the theory of the Bayesian method and the Levenberg–Marquardt optimization algorithm applied to linearized least-squares. A qualitative study is then performed to check the sensitivity of the gravity factors to the FCN parameters. Finally, we invert the FCN resonance parameters using a combination of 7 European SG time-series.

## 2. The FCN resonance model

The basic equation used to describe the resonance of the FCN in the tidal gravity is usually written as (Hinderer et al., 1991a):

$$\tilde{\delta}_j = \tilde{\delta}_{ref} + \frac{\tilde{a}}{\sigma_j - \tilde{\sigma}_{nd}}, \quad (1)$$

where  $\tilde{\delta}_j$  corresponds to the complex gravimetric factor observed for every tidal wave of frequency  $\sigma_j$ ,  $\tilde{\sigma}_{nd} = \sigma_{nd}^R + i\sigma_{nd}^I$  is the complex eigenfrequency of the FCN,  $\tilde{a} = a^R + ia^I$  refers to the resonance strength corresponding to the response of the whole Earth to the FCN. The quantity  $\tilde{\delta}_{ref}$  is the value of the gravimetric factor without

any resonance process (classical tidal gravimetric factor); it is also the asymptotic value of  $\tilde{\delta}_j$  for frequencies far away from the resonance frequency. The eigenperiod  $T$  of the FCN expressed in sidereal days in the rotating frame is related to  $\sigma_{nd}^R$  by

$$T = \frac{2\pi}{\sigma_{nd}^R},$$

where  $\sigma_{nd}^R$  is expressed in radian per sidereal day. In the inertial reference frame, the period can be written:

$$T' = \frac{1}{\sigma_{nd}^R C - 1}$$

where  $C = 86,164/15 \times 86,400$  and  $\sigma_{nd}^R$  is given in degrees/solar hour. The quality factor  $Q$ , expressing the damping due to all the physical processes involved in the resonance, is defined as  $Q = \sigma_{nd}^R / 2\sigma_{nd}^I$ . The quantities  $\sigma_{nd}^R$  and  $\sigma_{nd}^I$  are positive by definition, therefore they should follow a log-normal distribution law (Tarantola, 2005; Florsch and Hinderer, 2000) to avoid possible negative values. It is therefore recommended to include the *a priori* positivity of  $Q$  in the model by changing the variable  $Q = 10^x$  and inverting for  $x$ , instead of  $Q$ .

Florsch and Hinderer (2000) performed the inversion by treating  $\tilde{\delta}_{ref}$  as an unknown and showed that a correlation exists between the real parts  $\delta_{ref}^R$  and  $\sigma_{nd}^R$ , and between  $a^R$  and  $\delta_{ref}^R$ , but the correlation between  $a^R$  and  $T$  is much stronger. As  $\tilde{\delta}_{ref}$  has a weak influence on the values of  $T$  and  $Q$ , we do not include this parameter in the inversion process. In previous studies (e.g. Defraigne et al., 1994, 1995; Ducarme et al., 2007), the observed value for the tidal wave  $O_1$  was used as the reference gravimetric factor. In our case we will use the mean value of the theoretical inelastic amplitude factors of the  $O_1$  and  $OO_1$  waves computed for the Wahr–Dehant model (Wahr, 1974; Dehant, 1987). By doing so, we suppose that the scale factors of the SG used here are accurate enough, which is usually true (better than 0.3% accuracy, e.g. Amalvict et al., 2001; Sato et al., 2004). We could also have normalized by the observed  $O_1$  amplitude as done by Sato et al. (2004) but we suppose that the scaling error is negligible with respect to the ocean loading uncertainty.

The equations relative to the resonance model are written:

$$\begin{cases} \delta_j^R = \delta_{ref} + \frac{a^R(\sigma_j - \sigma_{nd}^R) - a^l((\sigma_{nd}^R 10^{-x})/2)}{(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)^2 + ((\sigma_{nd}^R 10^{-x})/2)^2} \\ \delta_j^l = \frac{((a^R \sigma_{nd}^R 10^{-x})/2) + a^l(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)}{(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)^2 + ((\sigma_{nd}^R 10^{-x})/2)^2} \end{cases} \quad (2)$$

with  $\delta_{ref} = \frac{\delta_{O_1}^R + \delta_{OO_1}^R}{2}$ .

Eq. (2) will be our formulation for the resonance model.

Hinderer (1986), Hinderer and Legros (1989), Defraigne (1992) and Legros et al. (1993) have written the analytical expression for the resonance strength as a function of the Earth's interior parameters:

$$\tilde{a} = -\tilde{\delta}_2 \frac{A}{A_m} e \left( \sigma \left( 1 - \frac{A}{A_f} \frac{\gamma}{e} \right) - \frac{A_m}{A} \tilde{\sigma}_{nd}' \right) - \tilde{\delta}_1 \frac{A}{A_m} e \Omega \left( 1 - \frac{\gamma}{e} \right) \quad (3)$$

where  $\gamma$  is a compliance (Mathews et al., 2002) related to the geodetic parameter  $q_0$  (ratio of centrifugal acceleration to gravitational acceleration) and the Love number  $h^f$  by  $\gamma = (q_0/2)h^f$ .  $\tilde{\delta}_1$  is the pressure Love number that represents the gravity response to the pressure potential acting at the CMB (Hinderer et al., 1991a).  $e$  is the dynamic ellipticity of the Earth,  $\Omega$  its rotation rate and  $A/A_m$  is the ratio of Earth to mantle moments of inertia.  $\tilde{\sigma}_{nd}' = -\Omega(A/A_m)(e^f - \beta)$  is the FCN frequency in the inertial reference frame ( $\tilde{\sigma}_{nd}' = \tilde{\sigma}_{nd} + \Omega$ ),  $e^f$  is the dynamical flattening of the CMB and  $\beta$  the compliance defined by  $\beta = (q_0/2)h_1^f$ .  $h_1^f$  is the displacement Love number at the CMB associated with the fluid pressure on the mantle caused by the relative rotation.

Legros et al. (1993) also considered the effect of the inner core including the Free Inner Core Nutation (FICN) resonance effect. We neglect it here as the effect would be too small to be seen in SG records.

In the following, we will estimate the period  $T$ , the quality factor  $Q$ , as well as the real and imaginary parts of the resonance strength  $\tilde{a}$  using two methods: a probabilistic approach based on the Bayesian inversion and the more classical linearized least-squares optimized using the Levenberg–Marquardt algorithm.

### 3. A review of the methods

#### 3.1. The Bayesian approach

The Bayesian inversion consists in propagating the information (or knowledge) provided by the measurements through an assumed physical model (perfectly or probabilistically known) to the parameters and to include the *a priori* knowledge of the model parameters. Both the data and the model parameters are described with probability distributions. The Bayesian approach preserves the full knowledge provided by the data combined with the physical law and the *a priori* information on the data and model parameters. Therefore, it is the most suitable method to perform the inversion of non-linear problems (Tarantola and Valette, 1982a,b). For more details about the Bayesian method, please refer to Florsch and Hinderer (2000).

The Bayesian probability distribution of the parameter vector  $\theta$  is given by

$$p(\theta) = p(x, \sigma_{nd}^R, a^R, a^l) = k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_j \left[ \left( \frac{\text{Re}(\delta_j^{th}) - \text{Re}(\delta_j)}{\Delta \text{Re}(\delta_j)} \right)^2 + \left( \frac{\text{Im}(\delta_j^{th}) - \text{Im}(\delta_j)}{\Delta \text{Im}(\delta_j)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4)$$

where  $k$  is a normalization factor in order that the integral of this equation is unity, Re denotes the real part and Im the imaginary

part,  $\delta_j$  holds for the  $j$ th measurement value of the gravimetric factor,  $th$  refers to the theoretical value, and  $\Delta\delta$  is the error on  $\delta$  (standard deviation).

The previous formula gives the general probability laws for the parameter vector  $\theta$ . In order to obtain the law for one or two parameters, we compute the marginal pdfs by integration of the probability function over selected parameters. For instance, the joint pdf integrated with respect to  $\sigma_{nd}^R$  is defined by

$$p_{x,a^R,a^l}(x, a^R, a^l) = \int p(x, \sigma_{nd}^R, a^R, a^l) d\sigma_{nd}^R.$$

Notice that when integrating over selected parameters, we limit *a priori* the space parameter on a finite domain. Two further integrations of the pdf lead to the marginal probability law for each of the parameters.

#### 3.2. The linearized least-squares approach

As for the Bayesian method, the linearized least-squares approach is a subset of the non-linear least-squares generalized by Tarantola and Valette (1982b). The only difference is how to treat *a priori* information, and what pdfs are involved. The least-squares method is based on the determination of the best-fit parameters by minimizing the merit function:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{|\tilde{\delta}_j - (\delta_{ref} + (\tilde{a}/(\sigma_j - \tilde{\sigma}_{nd})))|^2}{(\Delta \tilde{\delta}_j)^2} \quad (5)$$

However, when the model is non-linear, the minimization must proceed iteratively given initial values for the parameters. The procedure finishes when  $\chi^2$  stops decreasing. The  $\chi^2$  function is linearized to a quadratic form depending on the Hessian matrix for the inverse-Hessian method or the gradient of  $\chi^2$  for the steepest descent method. The Levenberg–Marquardt (also called Marquardt method; Marquardt, 1963) algorithm is in fact a smooth variant between these two methods. The Marquardt method works very well in practice and has become a standard of non-linear least-squares routines. It has been widely used in previous FCN retrieval studies like in Neuberger et al. (1987), Richter and Zürn (1986), Zürn and Rydelek (1991), and Defraigne et al. (1994, 1995). We refer to the Numerical Recipes (Press et al., 1992) Chapter 15.5 for the optimization subroutines.

The set of linear equations  $\sum_j \alpha_{kj} \Delta\theta_j = \beta_k$  is solved for the

increments  $\Delta\theta_j$  that, added to the current trial parameters, gives the next approximation. The matrix  $\alpha$  is called the curvature matrix and is equal to one-half times the Hessian matrix:  $\alpha_{kj} = (1/2)((\partial^2 \chi^2)/(\partial a_k \partial a_j))$  and  $\beta_k = -(1/2)(\partial \chi^2/\partial a_k)$ , where  $a_k$  (or  $a_j$ ) corresponds to one parameter. In the Marquardt optimization algorithm, the increments are related to the curvature matrix through a “damping factor”  $\lambda$  as  $\Delta\theta_j = (1/(\lambda \alpha_{jj}))\beta_j$ . When  $\lambda$  is very large, the diagonal of the curvature matrix is dominant and the solution tends to the initial parameters (the increments tend towards zero). On the other hand, as  $\lambda$  approaches zero, the increments become very large and we may have a divergence problem. The damping factor  $\lambda$  is also known as the Marquardt factor. The damping factor effectively constrains the range of values that the increments  $\Delta\theta_j$  can take.

The model used for the inversion is described by Eq. (2). In order to impose the positivity of the quality factor  $Q$ , we perform the change of variable  $x = \log_{10}(Q)$ , as for the Bayesian approach, then we minimize Eq. (5). We also estimate the damping factor  $\lambda$ , which best minimizes  $\chi^2$ .



#### 4. Sensitivity and correlations between the FCN parameters

In order to check the sensitivity of the diurnal tidal wave amplitudes to the FCN parameters, we perform some qualitative studies of the resonance transfer function presented in Eq. (2) and based on the previously estimated values. We have  $\sigma_{nd}^R \cong 7.30910^{-5}$  rad/s,  $Q \approx 2 \times 10^4$  (based on VLBI results, e.g. Mathews et al., 2002),  $a^R \approx 3.4 \times 10^{-9}$  rad/s  $\approx 7 \times 10^{-4\circ}$ /h and  $a^I \approx 2 \times 10^{-10}$  rad/s  $\approx 4 \times 10^{-5\circ}$ /h (e.g. Hinderer et al., 1991b; Florsch and Hinderer, 2000; see next section).

From Eq. (2) and with these values, for any diurnal waves of angular frequency  $\sigma_j$ , we can see that the quantity  $a^I(\sigma_{nd}^R/2Q)$  is negligible with respect to  $a^R(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)$  and  $(\sigma_{nd}^R/2Q)^2 \ll (\sigma_j - \sigma_{nd}^R)^2$ , hence the amplitude gravimetric factor can be approximated by

$$\begin{cases} \delta_j^R \approx \delta_{ref} + \frac{a^R}{\sigma_j - \sigma_{nd}^R} \\ \delta_j^I \approx \frac{((a^R \sigma_{nd}^R 10^{-x})/2) + a^I(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)}{(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)^2} \end{cases} \quad (6)$$

For diurnal waves situated far from the resonance, i.e. for  $(\sigma_j - \sigma_{nd}^R) \gg 3 \times 10^{-8}$  rad/s, we have  $\delta_j^I \approx a^I/(\sigma_j - \sigma_{nd}^R)$ . Therefore, the FCN quality factor is only constrained by the imaginary part of the gravimetric factor of the diurnal waves close to the resonance ( $K_1$ ,  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$ ) and from Eq. (6) we can see that the imaginary part of the resonance strength is mainly constrained by the imaginary part of the gravimetric factors. However, the imaginary parts of the tidal gravity factors are poorly determined, especially for  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$  that have small amplitudes (particularly a small imaginary part) and are therefore very sensitive to the ocean loading correction error (Sato et al., 2004). We have tested the influence of the error of the imaginary part of the gravimetric factors on the resulting pdfs of the Bayesian inversion. For that, we have considered synthetic gravimetric factors computed from Eq. (2) with  $x=4$ ,  $T=430$  days,  $a^R=6 \times 10^{-4\circ}$ /h and  $a^I=-5 \times 10^{-5\circ}$ /h. Then we assume an error of 0.1% on the real part of the gravimetric factors for nine diurnal waves (from  $Q_1$  to  $OO_1$  waves). We increase the relative error on the imaginary part from 1% to 100%, and we also test the case when the error on  $\delta^I(\Psi_1)$  and  $\delta^I(\Phi_1)$  becomes larger than their values themselves (relative uncertainty larger than 100%). The corresponding pdfs are plotted in Fig. 1. When the relative error on the imaginary part of  $\Phi_1$  and  $\Psi_1$  reaches 100%, the pdf for  $x$  begins to be non-Gaussian and tends to an asymmetric probability law (Fig. 1(b)). If we still increase the relative error on  $\delta^I(\Psi_1)$  and  $\delta^I(\Phi_1)$  to 200% (Fig. 1(c)) or increase the error for all the waves to 100% (Fig. 1(e)), then the probability law for  $x$  is definitely not Gaussian any more and tends to the infinity towards larger values. For a relative error of 50%, the pdf for  $x$  can still be approximated by a Gaussian law (Fig. 1(d)). In a previous paper, Florsch and Hinderer (2000) obtained a probability law for  $x$  that tends to infinity: that is because of the large errors they had on the imaginary parts of the smallest diurnal waves ( $\Psi_1$  and  $\Phi_1$ ). As a consequence, if the estimations of the gravimetric factors were more accurate (i.e. with relative errors smaller than 50%), then the probability law for  $x$  should be Gaussian. Moreover, using VLBI nutation data, for which the amplitudes of the equivalent  $\Phi_1$  and  $\Psi_1$  nutations are high and well-determined, Rosat and Lambert (2009) have indeed obtained a Gaussian law for  $x$ .

We can also check the influence of the precision on the estimated  $\Psi_1$  gravimetric factor on the FCN resonance parameters. We use the generalized non-linear least-squares formulation of Tarantola and Valette (1982b) and we make the  $\Psi_1$  gravimetric factors varying around its observed value at Strasbourg ( $\tilde{\delta}_{\Psi_1} = 1.2684 \pm 0.004 + i0.0063 \pm 0.004$ ) with a range defined by twice the observed standard deviation. Note that the std ( $\tilde{\delta}_{\Psi_1}$ ) = 0.004

value attributed as an error on both the real and imaginary parts of  $\tilde{\delta}_{\Psi_1}$  does not take into account the ocean loading correction error as it must reflect the minimal error that we have on the determination of the gravimetric factors at the site. The results of the least-squares inversion lead to the conclusion that, with an error of 0.004 on the real part of  $\tilde{\delta}_{\Psi_1}$ , the *a posteriori* error on  $T$  from the least-squares inversion is about 2.3 days. For  $x = \log_{10}(Q)$ , the correlation with  $\delta_{\Psi_1}^I$  is much stronger and  $x$  varies between 4.2 and 4.6, corresponding to  $Q$ -values between 15,849 and 39,811, when  $\delta_{\Psi_1}^I$  ranges from 0.002 to 0.012. Therefore the uncertainty on the estimation of  $Q$  is large even if the ocean loading correction was perfect. The error on  $Q$  is therefore mostly due to the fitting error of  $\Psi_1$  because of its small amplitude. There is also a strong correlation between  $\delta_{\Psi_1}^I$  and  $a^I$ . Similar computations could be done for  $K_1$  and  $\Phi_1$ .

We have shown that the diurnal waves close to the resonance are very sensitive to the FCN parameters. Besides, some correlations exist between the FCN resonance parameters. As shown by the tilted shapes in Fig. 1, two strong correlations exist between  $a^R$  and  $T$ , on the one hand, and between  $a^I$  and  $x$ , on the other hand. Physically it comes from the response of the whole Earth to the FCN that depends also on the complex eigenfrequency of the core oscillation. Indeed, the damping of the nearly diurnal free wobble introduced through the complex eigenfrequency could be due to the dissipation by viscomagnetic and topographic coupling at the CMB and to the anelasticity (Mathews et al., 2002) while the imaginary part introduced in the resonance strength, reflects the anelasticity of the Earth which is related to the imaginary part of the Love numbers. As a consequence, the  $Q$ -factor is physically correlated to the imaginary part of the resonance strength through the anelasticity of the interface.

Florsch and Hinderer (2000) have also shown that the reference gravimetric factor is correlated to  $a^R$  and hence to the real part of  $\tilde{\delta}_1$ . As we have an uncertainty (usually less than 0.3%) on the SG scale factor, this error will be propagated to the estimation of  $\tilde{\delta}_1$ . As we will see in the next part, this scaling error of 0.3% is smaller than the uncertainty that we obtain for  $\tilde{\delta}_1$ .

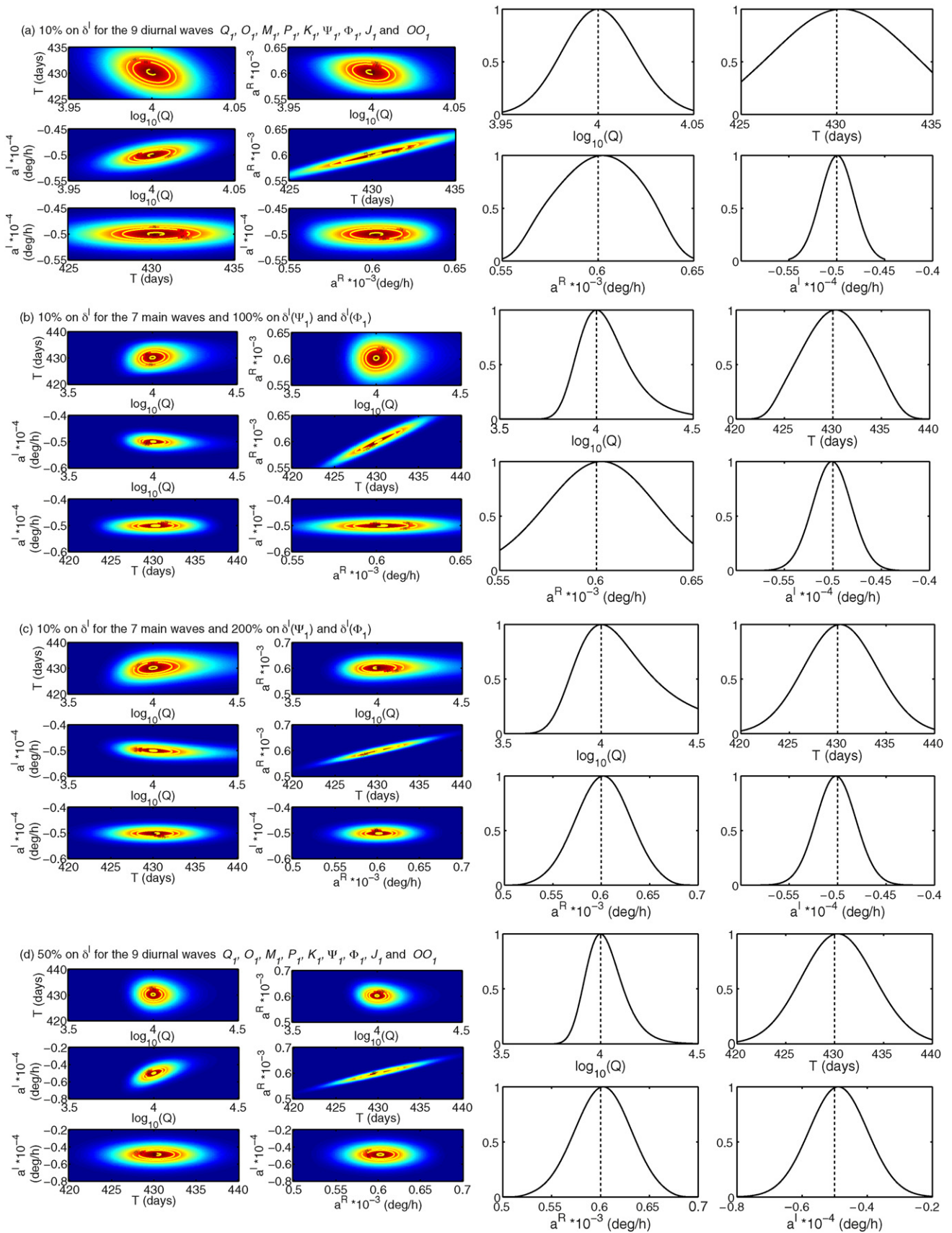
The exploration performed by Florsch and Hinderer (2000) has shown that the imaginary part of the strength  $a^I$  is close to zero with an error much larger than the value itself. They proposed to cancel this parameter in order to restrict the scanning to a 3-parameter space. However,  $a^I$  is strongly correlated to  $Q$  particularly for  $Q$ -values less than 1000: putting  $a^I=0$  forces  $Q$  to be around 2600 (cf. Fig. 2(a)). Note that in this case (elastic model), the obtained  $T$  value is close to 465 days, which is the value inferred by Sasao et al. (1980) for an elastic Earth with a hydrostatic CMB flattening.

When imposing  $a^I$  equal to a value close to the estimation from the 4D inversion, i.e.  $a^I = -5 \times 10^{-5\circ}$ /h, then we obtain a most probable values for  $Q$  of  $21,241 \pm 6956$  (cf. Fig. 2(b)) which is in agreement with predictions of the MHB model (Mathews et al., 2002) and with VLBI nutation observations (e.g. Lambert and Dehant, 2007; Koot et al., 2008). In the next part, we will finally estimate the FCN resonance parameters.

To conclude this part, we have seen that the FCN resonance damping is strongly correlated to the anelasticity of the mantle through the imaginary part of the internal Love number. The large errors on the determined phases of the diurnal waves close to the resonance make the parameter  $x$  follow a non-Gaussian probability law.

#### 5. Combined GGP inversion

Here we propose to analyze, in the spectral domain, 7 tidal European SG observations to invert the FCN parameters. Contrary to Ducarme et al. (2009), we do not compute averaged gravimetric factors but combine them by using relation (4) and we



**Fig. 1.** Influence of the error of the imaginary part of the gravimetric factors on the resulting pdfs for  $a^R$ ,  $a^I$ ,  $x$  and  $T$  retrieved from the Bayesian analysis of synthetic data. The error is expressed in percent of the gravimetric factor (imaginary part) amplitude. The relative error is (a) 10% for the 9 diurnal waves  $Q_1, O_1, M_1, P_1, K_1, \Psi_1, \Phi_1, J_1$  and  $OO_1$ ; (b) 10% for the 7 waves  $Q_1, O_1, M_1, P_1, K_1, J_1, OO_1$  and 100% for  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$ ; (c) 10% for  $Q_1, O_1, M_1, P_1, K_1, J_1, OO_1$  and 200% for  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$ ; (d) 50% for  $Q_1, O_1, M_1, P_1, K_1, \Psi_1, \Phi_1, J_1$  and  $OO_1$ ; (e) 100% for  $Q_1, O_1, M_1, P_1, K_1, \Psi_1, \Phi_1, J_1$  and  $OO_1$ . The vertical dot lines indicate the values of  $x, T, a^R$  and  $a^I$  used to compute the synthetic delta-factors:  $x=4, T=430$  days,  $a^R=6 \times 10^{-4}$ /h and  $a^I=-5 \times 10^{-5}$ /h.

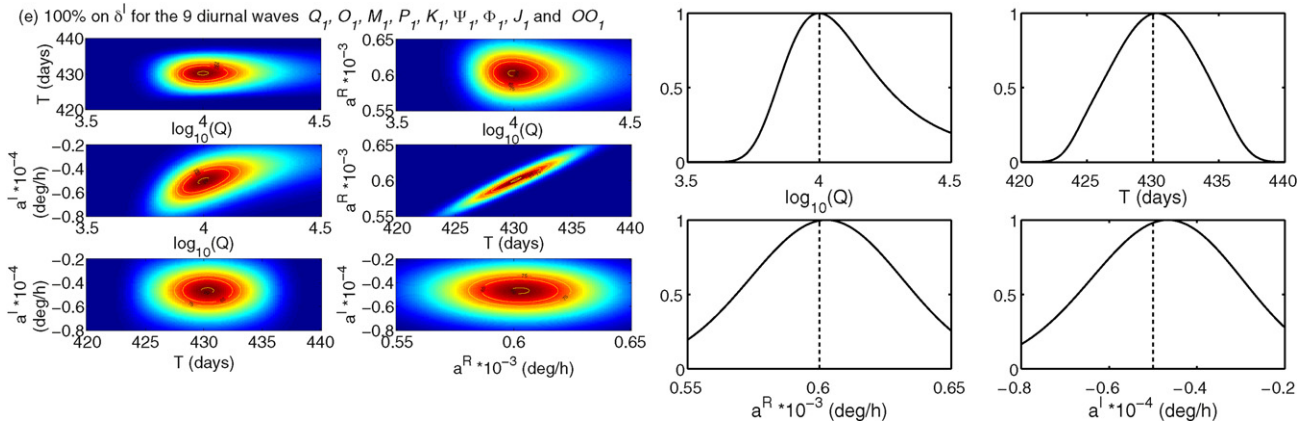


Fig. 1. (Continued).

suppose that the resonance strength  $\tilde{a}$  is the same for all the sites. Because  $\tilde{a}$  corresponds to the mantle response to the FCN, supposing a homogeneous response at all SG sites enables to retrieve the global parameters (cf. paragraph 2) like the inter-

nal pressure Love number at the CMB. The weight in Eq. (4) is the combination of the standard deviation of the fitted gravimetric factor by ETERNA software and of the ocean loading error.

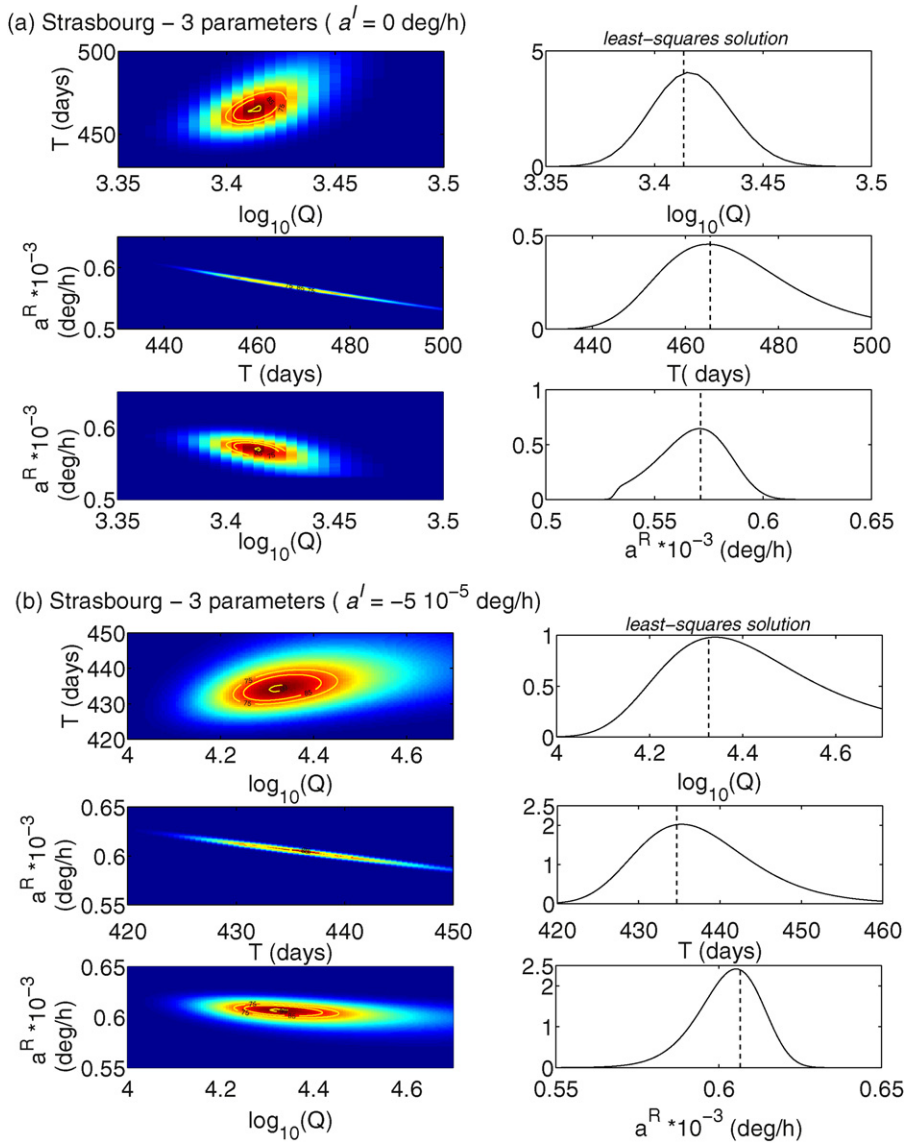
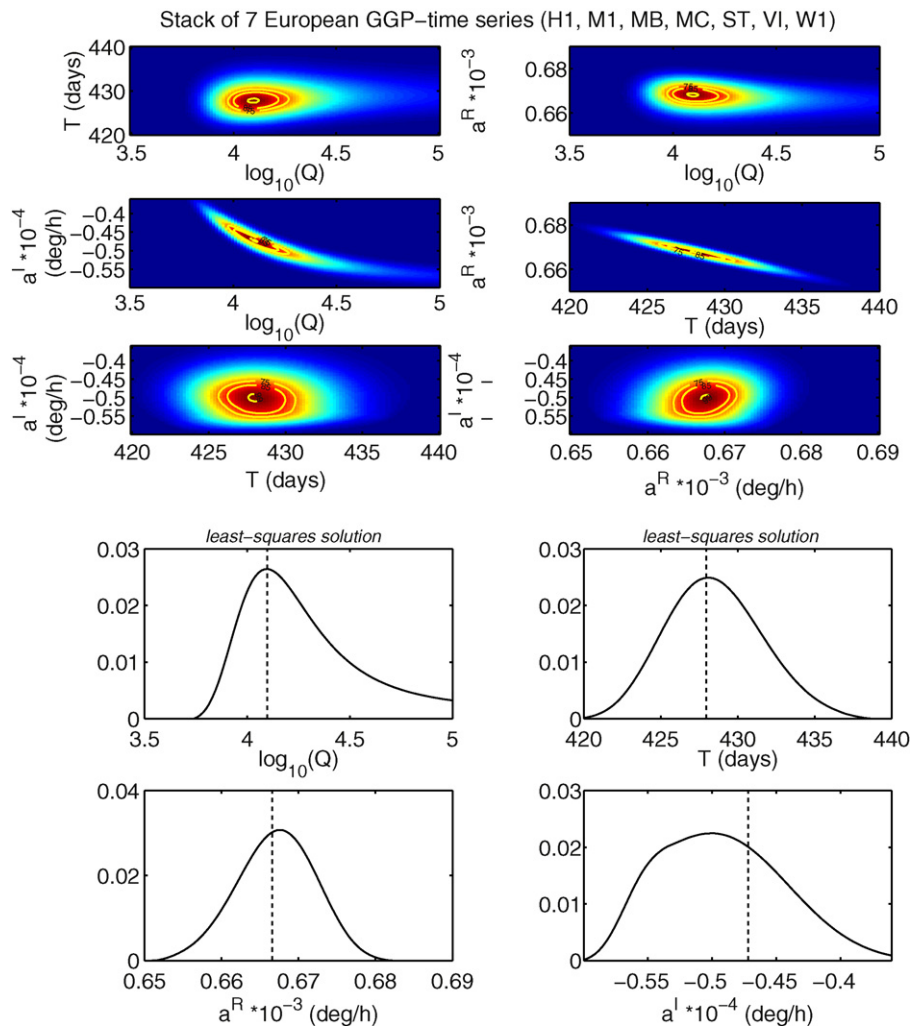


Fig. 2. Joint and marginal pdfs for the FCN parameters ( $a^R$ ,  $T$  and  $x$ ) estimated from Strasbourg SG tidal gravity factors using the Bayesian method with (a)  $a^I = 0^\circ/h$ ; (b)  $a^I = -5 \times 10^{-5}^\circ/h$ . The Marquardt least-squares inversion results are also indicated as vertical dotted lines.



**Fig. 3.** Joint and marginal pdfs for the FCN parameters ( $a^R$ ,  $a^I$ ,  $T$  and  $x$ ) estimated from stacking 7 European SG (Bad-Homburg, Moxa, Membach, Medicina, Strasbourg, Vienna, Wetzell) records using the Bayesian method. The Marquardt least-squares inversion results are also indicated as vertical dotted lines.

The SG sites considered here are Bad-Hambourg (H1, Germany), Moxa (M1, Germany), Membach (MB, Belgium), Medicina (MC, Italy), Strasbourg (ST, France), Vienna (VI, Austria) and Wetzell (W1, Germany). H1 (resp. M1, W1) refer to the lower sphere of the double-sphere SG installed at these German sites. The record length that has been used to retrieve the gravimetric factors from the ETERNA tidal analysis is larger than 5 years for every time-series. These sites have been chosen because they are relatively far from the ocean (except Membach) and their SGs are known to be well calibrated (better than 0.3% accuracy).

The raw data have been corrected for gaps, spikes, steps and other disturbances so that a tidal analysis with ETERNA software (Wenzel, 1996) is possible. Before the tidal analysis, the minute data are decimated to 1 h (using a filter with a cut-off period of 3 h). The ETERNA software then performs a least-squares fit to tides, local air pressure and instrumental drift to retrieve the complex gravimetric factors, the residual gravity, an adjusted barometric admittance, and a polynomial drift function.

The data to be inverted are the complex gravimetric factors corrected for the ocean tide loading effect according to FES2004 ocean model (Lyard et al., 2006, for ocean loading computation see for instance Llubes et al., 2008). We have attributed a nominal error of  $0.02 \text{ nm/s}^2$  on the ocean loading correction vector.

This value has been roughly estimated based on the comparison between different ocean tide models. The inversion is carried out for the four parameters ( $x$ ,  $\sigma_{nd}^R$ ,  $a^R$ ,  $a^I$ ) on a  $10^{14}$  points space. The explored parameter space is defined based on the results by Florsch and Hinderer (2000), namely  $x$  spans from 3 to 8,  $T$  varies between 380 and 520 sidereal days,  $a^R$  is ranging from 0.0004 to  $0.001^\circ/\text{h}$  and  $a^I$  varies between  $-10^{-4}$  and  $10^{-4}^\circ/\text{h}$ . Therefore we have defined *a priori* locally uniform laws for these parameters.

The pdfs obtained from the Bayesian estimation are plotted in Fig. 3. The mean values of the FCN parameters computed from the marginal probability laws are  $T = 428 \pm 3$  days,  $a^R = (0.667 \pm 0.005) \times 10^{-3}^\circ/\text{h}$  and  $a^I = (-0.492 \pm 0.05) \times 10^{-4}^\circ/\text{h}$ . The law for  $Q$  is not symmetric (and not Gaussian) so we define confidence intervals:  $Q$  is between 7762 and 31,989 within 90% C.I. Note the good agreement with the Levenberg–Marquardt least-squares results represented by the vertical dotted lines.

Based on the MHB Earth's parameter values and using Eq. (3), this resonance strength estimate leads to an observed determination of the  $\tilde{\delta}_1$  internal pressure gravimetric factor of  $\tilde{\delta}_1 = 0.0306 - i0.00223$  with an error of  $2 \times 10^{-4}$ . Theoretical values of the rotational pressure gravimetric factor  $\tilde{\delta}_1$  have been computed by Dehant et al. (1993). A first experimental determination of  $\tilde{\delta}_1$  has been proposed by Hinderer et al. (1991b) by stacking gravity measurements. They have found  $\tilde{\delta}_1 \approx 0.043$  and they have esti-

mated that the imaginary part of  $\delta_1$  is 1.6% of the real part, i.e. around  $7 \times 10^{-4}$ . In our case  $\delta_1^i$  is about 7% of  $\delta_1^r$ . From the FCN frequency, the combination of the dynamic flattening of the fluid core and the compliance (or the displacement Love number  $h_1^f$ ) can be evaluated from  $\tilde{\sigma}'_{nd} = -\Omega(A/A_m)(e^f - \beta)$  (cf. Section 2). From our observed value,  $(e^f - \beta) \approx 0.002$  which is in agreement with the MHB values of  $e^f = 2.6456 \times 10^{-3}$  and  $\beta = 6 \times 10^{-4}$  (Mathews et al., 2002).

## 6. Conclusion

The problem of negative  $Q$ -values encountered in previous studies has been avoided using the logarithm of  $Q$  in the inversion scheme.

We have solved the FCN resonance damping equation for four parameters using on the one hand, the more traditional linearized least-squares method optimized with the Levenberg–Marquardt algorithm, and on the other hand, a statistical Bayesian approach. We have demonstrated the good agreement between both results.

Because of the correlation existing between the quality factor  $Q$  and the imaginary part of the resonance strength  $a^i$ , and the necessity for the mantle to possess some anelasticity, this latter parameter cannot be neglected and must be considered in the inversion scheme. Because of the large error on the phase of the diurnal waves close to the resonance, the parameter  $x = \log_{10}(Q)$  does not follow a Gaussian law.

From stacking the SG tidal gravity data, we can improve the determination of the FCN resonance parameters, which are in agreement with VLBI nutation determination. In order to further improve these estimates, the ocean loading correction must be improved at these diurnal frequencies. The nutation has the advantage to be less affected by the ocean loading uncertainty as the contribution of the ocean to the Earth's wobble is much smaller than its effect (mainly local) on the surface gravity.

Time-varying gravity data appear to provide complementary information to the VLBI nutation data as the latter cannot determine the precession while gravity can determine the  $K_1$  tidal wave. Besides, gravity observations enable to retrieve additional Earth's interior parameters like the internal pressure Love numbers.

## Acknowledgements

We acknowledge GGP members (<http://www.eas.slu.edu/GGP/ggphome.html>) for providing SG data. We thank also two anonymous referees for their comments on the manuscript.

## References

Amalvict, M., McQueen, H., Govind, R., 2001. Absolute gravity measurements and calibration of SG-CT031 at Canberra, 1999–2000. *J. Geod. Soc. Jpn.* 47 (1), 410–416.

Crossley, D., Hinderer, J., Casula, G., Francis, O., Hsu, H.T., Imanishi, Y., Jentzsch, G., Kääriäinen, J., Merriam, J., Meurers, B., Neumeyer, J., Richter, B., Shibuya, K., Sato, T., Van Dam, T., 1999. Network of superconducting gravimeters benefits a number of disciplines. *EOS* 80 (11), 121/125–126.

Cummins, P., Wahr, J., 1993. A study of the Earth's core nutation using gravity data. *J. Geophys. Res.* 98, 2091–2104.

Defraigne, P., 1992. Détermination de la fréquence et du facteur de qualité du "Nearly-Diurnal Free Wobble" en utilisant conjointement des observations de marées et de nutations, Master degree, Univ. Cath. Louvain, Belgium.

Defraigne, P., Dehant, V., Hinderer, J., 1994. Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble. *J. Geophys. Res.* 99 (B5), 9203–9213.

Defraigne, P., Dehant, V., Hinderer, J., 1995. Correction to 'Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble'. *J. Geophys. Res.* 100 (B2), 2041–2042.

Dehant, V., 1987. Tidal parameters for an inelastic Earth. *Phys. Earth Planet. Inter.* 49, 97–116.

Dehant, V., Hinderer, J., Legros, H., Lefftz, M., 1993. Analytical approach to the computation of the Earth, the outer core and the inner core rotational motions. *Phys. Earth Planet. Inter.* 76, 259–282.

Ducarme, B., Sun, H.-P., Xu, J.-Q., 2007. Determination of the free core nutation period from tidal gravity observations of the GGP superconducting gravimeter network. *J. Geod.* 81, 179–187.

Ducarme, B., Rosat, S., Vandercoilden, L., Xu, J.Q., Sun, H.P., 2009. European tidal gravity observations: comparison with Earth Tides models and estimation of the Free Core Nutation (FCN) parameters. In: Sideris, M.G. (Ed.), Proceedings of the 2007 IAG General Assembly. Perugia, Italy, July 2–13, 2007. Observing our Changing Earth, vol. 133. Springer Verlag, International Association of Geodesy Symposia, pp. 523–532, doi:10.1007/978-3-540-85426-5.

Florsch, N., Chambat, F., Hinderer, J., Legros, H., 1994. A simple method to retrieve the complex eigenfrequency of the Earth's nearly diurnal free wobble: application to the Strasbourg superconducting gravimeter data. *Geophys. J. Int.* 116, 53–63.

Florsch, N., Hinderer, J., 2000. Bayesian estimation of the free core nutation parameters from the analysis of precise tidal gravity data. *Phys. Earth Planet. Inter.* 117, 21–35.

Herring, T., Gwinn, C., Shapiro, I., 1986. Geodesy by radiointerferometry: studies of the forced nutations of the Earth. 1. Data analysis. *J. Geophys. Res.* 91, 4745–4755.

Hinderer, J., 1986. Resonance effects of the Earth's fluid core. In: Cazenave, A. (Ed.), Earth Rotation: Solved and Unsolved Problems. Reidel, Dordrecht, pp. 277–296.

Hinderer, J., Legros, H., 1989. Elasto-gravitational deformation, relative changes in gravity and earth dynamics. *Geophys. J.* 97, 481–495.

Hinderer, J., Legros, H., Crossley, D., 1991a. Global Earth dynamics and induced gravity changes. *J. Geophys. Res.* 96, 20257–20265.

Hinderer, J., Zürn, W., Legros, H., 1991b. Interpretation of the strength of the nearly diurnal free wobble resonance from stacked gravity tide observations. In: Kakkuri, J. (Ed.), Proc. 11th Int. Symp., Earth Tides. Schweitzerbart, Verlag, Stuttgart, pp. 549–555.

Hinderer, J., Crossley, D., Xu, H., 1995. The accuracy of tidal gravimetric factors and nearly diurnal free wobble resonance parameters in superconducting gravimetry. In: Proc. 12th Int. Symp. Earth Tides, Beijing, pp. 289–295.

Hinderer, J., Boy, J.-P., Gegout, P., Defraigne, P., Roosbeek, F., Dehant, V., 2000. Are the free core nutation parameters variable in time? *Phys. Earth Planet. Inter.* 117, 37–49.

Koot, L., Rivoldini, A., de Viron, O., Dehant, V., 2008. Estimation of Earth interior parameters from a Bayesian inversion of very long baseline interferometry nutation time series. *J. Geophys. Res.* 113, B08414, doi:10.1029/2007JB005409.

Lambert, S.B., Dehant, V., 2007. The Earth's core parameters as seen by the VLBI. *Astron. Astrophys.* 469, 777–781.

Legros, H., Hinderer, J., Lefftz, M., Dehant, V., 1993. The influence of the solid inner core on gravity changes and spatial nutations induced by luni-solar tides and surface loading. *Phys. Earth Planet. Inter.* 76, 283–315.

Llubes, M., Florsch, N., Boy, J.P., Amalvict, M., Bonnefond, P., Bouin, M.N., Durand, S., Esnault, M.F., Exertier, P., Hinderer, J., Lalancette, M.F., Masson, F., Morel, L., Nicolas, J., Vergnolle, M., Wöppelmann, G., 2008. A multi-technique monitoring of ocean loading in North of France. *C.R. Geoscience* 340, 379–389, doi:10.1016/j.crte.2008.03.005.

Lyard, F., Lefevre, F., Letellier, T., Francis, O., 2006. Modelling the global ocean tides: modern insights from FES2004. *Ocean Dynam.* 56, 394–415.

Marquardt, D., 1963. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 11 (2), 431–441.

Mathews, P.M., Herring, T.A., Buffet, B.A., 2002. Modeling of nutation and precession: new nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *J. Geophys. Res.* 107 (B4), 2068, doi:10.1029/2001JB000390.

Merriam, J.B., 1994. The nearly diurnal free wobble resonance in gravity measured at Cantley, Quebec. *Geophys. J. Int.* 119, 369–380.

Neuberg, J., Hinderer, J., Zürn, W., 1987. Stacking gravity tide observations in Central Europe for the retrieval of the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 91, 853–868.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992. Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, second ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Richter, B., Zürn, W., 1986. Chandler effects and the nearly diurnal free wobble as determined from observations with a superconducting gravimeter. In: Babcock, A., Wilkins, G. (Eds.), The Earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics. Kluwer, Dordrecht, pp. 309–315.

Roosbeek, F., Defraigne, P., Feissel, M., Dehant, V., 1999. The free core nutation period stays between 431 and 434 sidereal days. *Geophys. Res. Lett.* 26 (1), 131–134.

Rosat, S., Lambert, S.B., 2009. Free core nutation resonance parameters from VLBI and superconducting gravimeter data. *Astron. Astrophys.* 503, 287–291.

Sasao, T., Okubo, S., Saito, M., 1980. A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth. In: Fedorov, E., Smith, M., Bender, P. (Eds.), Proc. IAU Symp., vol. 78, Nutation and the Earth's rotation, Kiev, pp. 165–183.

Sato, T., Tamura, Y., Higashi, T., Takemoto, I., Nakagawa, I., Morimoto, N., Fukuda, Y., Segawa, J., Seama, N., 1994. Resonance parameters of nearly diurnal free core nutation measured with three superconducting gravimeters in Japan. *J. Geomagn. Geoelectr.* 46, 571–586.

Sato, T., Tamura, Y., Matsumoto, K., Imanishi, Y., McQueen, H., 2004. Parameters of the fluid core resonance inferred from superconducting gravimeter data. *J. Geodyn.* 38, 375–389.

Tarantola, A., 2005. Inverse Problem Theory and Model Parameter Estimation. SIAM.

Tarantola, A., Valette, B., 1982a. Inverse problems = quest for information. *J. Geophys.* 50, 159–170.

- Tarantola, A., Valette, B., 1982b. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys.* 20 (2), 219–232.
- Vondrák, J., Ron, C., 2006. Resonant period of free core nutation—its observed changes and excitations. *Acta Geodyn. Geomater.* 3 (143), 53–60.
- Wahr, J.M., 1974. Body tides on anelliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. *Geophys. J. Astron. Soc.* 64, 677–703.
- Wahr, J., Bergen, Z., 1986. The effects of mantle anelasticity on nutations, earth tides, and tidal variations in rotation rate. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 87, 633–668.
- Wenzel, H.-G., 1996. The nanogal software: earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Bull. Inf. Marées Terrestres* 124, 9425–9439.
- Zürn, W., Rydelek, P., 1991. Investigation of the nearly diurnal free wobble resonance in individual tidal records. In: Kakkuri, J. (Ed.), *Proc. 11th Int. Symp. Earth Tides*. Schweitzerbart, Verlag, Stuttgart, pp. 521–530.

### 2.3.2 ANALYSE JOINTE DES DONNÉES GRAVIMÉTRIQUES ET GÉODÉSIQUES DE NUTATION - *Article : Rosat & Lambert (2009)*

Dans cette section nous déterminons les paramètres de la FCN par une analyse conjointe de nutation VLBI et des séries gravimétriques des SGs. Nous caractérisons la sensibilité des termes de nutations et des facteurs gravimétriques à ces paramètres et nous montrons que les résultats obtenus par les deux techniques sont en accord. Cependant, l'observation des nutations reste la méthode la plus sensible et la plus précise pour contraindre les paramètres de la FCN. Ces résultats ont été publiés en 2009 dans *Astronomy & Astrophysics* (Rosat & Lambert, 2009). Il apparaît que les paramètres de la FCN obtenus par analyse gravimétrique sont plus précis que ceux obtenus dans l'étude précédente de Rosat et al. (2009). Il y a deux raisons à cela : la première est que l'inversion a été réalisée à partir de 15 séries gravimétriques au lieu de 7 ; la seconde raison est que les paramètres inversés étaient différents puisque nous n'avons pas inversé le numérateur  $N_2$  intervenant dans l'expression de la résonance mais le nombre de Love  $\bar{\delta}_1$ . Ce paramètre  $N_2$  (« resonance strength ») est en effet corrélé à la période et au facteur de qualité de la FCN (Rosat et al., 2009). Sachant qu'il est très bien estimé par VLBI, le fixer a priori va donc permettre de mieux contraindre les autres paramètres de l'inversion.

# Free core nutation resonance parameters from VLBI and superconducting gravimeter data

S. Rosat<sup>1</sup> and S. B. Lambert<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut de Physique du Globe de Strasbourg, IPGS - UMR 7516, CNRS et Université de Strasbourg (EOST), 67084 Strasbourg, France

e-mail: srosat@eost.u-strasbg.fr

<sup>2</sup> Observatoire de Paris, Département Systèmes de Référence Temps Espace (SYRTE), UMR 8630, CNRS, 75014 Paris, France

e-mail: sebastien.lambert@obspm.fr

Received 9 December 2008 / Accepted 20 May 2009

## ABSTRACT

**Context.** Free core nutation (FCN) can be observed by its associated resonance effects on the forced nutations of the Earth's figure axis, as observed by very long baseline interferometry (VLBI), or on the diurnal tidal waves, retrieved from the time-varying surface gravity recorded by superconducting gravimeters (SG).

**Aims.** In this paper, we study the sensitivity of both techniques to FCN parameters.

**Methods.** We analyze surface gravity data from 15 SG stations and VLBI delays accumulated over the last 24 years.

**Results.** We obtain estimates of the FCN period and quality factor that are consistent for both techniques. The inversion leads to a quality factor centered on  $\sim 16\,600$  with an uncertainty of  $\sim 3500$  from SG and of  $\sim 900$  from VLBI, and to a resonant period within  $[-423.3, -430.5]$  days for SG and  $[-427.8, -431.4]$  days for VLBI ( $3\sigma$  interval).

**Key words.** reference systems – Earth

## 1. Introduction

Free core nutation (FCN) is a rotational normal mode of the Earth that exists because of the presence of a fluid core inside the visco-elastic mantle. In a space-fixed reference frame, the resonant period of the FCN is close to 430 days retrograde, leading to an amplification of the Earth's nutational and deformational responses to tidal forcing.

The resonance associated with the FCN has been widely studied in time-varying gravity data recorded with relative gravimeters, mainly superconducting gravimeters (SG) of the Global Geodynamics Project (GGP, Crossley et al. 1999). The first analysis of the FCN effects in gravity data was performed by Neuberg et al. (1987); attempting to determine the resonant period, they obtained  $T_{\text{FCN}} = -431 \pm 6$  days and a quality factor  $Q_{\text{FCN}} = 2\,800 \pm 500$ , defined so the complex frequency is  $(0.99727/T_{\text{FCN}} - 1)(1 - i/2Q_{\text{FCN}})$  in cycles per sidereal day. This study was followed by many others (e.g., Cummins & Wahr 1993; Sato et al. 1994, 2004; Ducarme et al. 2009). Defraigne et al. (1994, 1995), using a combination of very long baseline interferometry (VLBI) nutation and SG gravity data, obtained a period of  $-433 \pm 3$  days and a quality factor higher than 17 000. More recently, Ducarme et al. (2009) analyzed the European SG data, and found a period of  $-430 \pm 2$  days and a quality factor of  $15\,000 \pm 8000$ .

The signature of the FCN in the forced nutations was studied by Herring et al. (1986) and Gwinn et al. (1986) using VLBI observations. The authors interpreted the enhancement of the amplitude of the retrograde annual nutation induced by the resonance in terms of a departure of the core-mantle boundary from its hydrostatic figure. Using an improved theoretical background, Mathews et al. (2002) built a nutation model (referred

to as MHB) based on a limited number of parameters describing the Earth's interior and adjusted to VLBI data up to 1999. Comparisons of the VLBI nutation time series with this model reveal differences of the order of 200 microarc seconds ( $\mu\text{as}$ ) in rms. These residuals are the consequence of various mismodeled or unmodeled influences in the observational strategy as well as in geophysical processes (see e.g., Dehant et al. 2003). The authors found an FCN resonant period of  $-430.21$  days and a quality factor of 20 000. The values of the FCN period and quality factor were confirmed by Vondrák et al. (2005) using a combination of VLBI and GNSS-derived nutation amplitudes and inverting only the resonance parameters (to which the nutation amplitudes are the most sensitive within the diurnal band). However, Lambert & Dehant (2007), who analyzed VLBI data sets produced independently by various VLBI analysis centers, noticed a smaller value for  $Q_{\text{FCN}}$ . (Note that in their paper, the values of the quality factor were incorrect due to a sign error in the code: their symmetry with respect to 20 000 must be considered, leading to values around 17 000 instead of 23 000.) The values of other geophysical parameters estimated in MHB were recently confirmed by Koot et al. (2008) using a longer VLBI data set and a different estimation method. Although the FCN period found in the latter work is close to the MHB value, the quality factor appears to be lower by  $\sim 30\%$ . The reason for the discrepancy has not yet been determined.

Some studies tried to identify a time variation of the frequency of the FCN resonance, either in VLBI nutation or in SG gravity data (Roosbeek et al. 1999; Hinderer et al. 2000). In both papers, the authors concluded that the apparent time-variation is not real but is due to the time-variable excitation of the free mode. Vondrák & Ron (2006) and Lambert & Dehant (2007) have shown that the resonant period is stable around  $-430$  days



to within half a day. The former authors argued that the FCN period, being given by the internal structure of the Earth (mainly the flattening of the core), it is highly improbable that it is very variable in time.

In the studies listed above, large discrepancies appear between VLBI- and SG-derived values of  $Q_{\text{FCN}}$ . This paper aims at investigating these differences. To that purpose, we check the sensitivity of both gravity and nutation data to the Earth's interior parameters. The functions describing the response in gravity and in nutation to the tidal forcing, and their sensitivity, are addressed in Sect. 2. In Sect. 3, the FCN resonance parameters are retrieved from the gravity and nutation data. Results are discussed in Sect. 4.

## 2. Response in gravity and nutation to the tidal forcing

### 2.1. Tidal gravity

The tidal variations observed at the Earth's surface are induced by the direct effect of the tidal potential, the deformation and the mass redistribution in the mantle due to this potential. The (direct, deformation and mass redistribution) effects of the centripetal potential due to the Earth's wobble must also be considered. Also, the inertial pressure at the core-mantle boundary (CMB) due to the differential rotation between the mantle and the core induces a deformation of the CMB as well as mass redistribution in the mantle that also generates time variations of the gravity field. Summing all these effects and dividing by the gravity variations for a non-rotating rigid Earth leads to the tidal gravimetric factor (Neuberg et al. 1987; Hinderer et al. 1991; Legros et al. 1993):

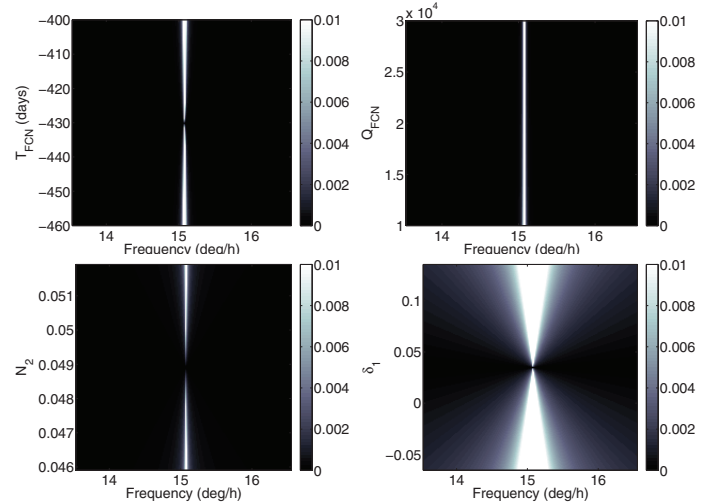
$$T^{(g)}(\sigma) = \delta_2(1 - e) - \frac{eN_2}{\sigma' - s_2} \left[ \delta_2\sigma' + \bar{\delta}_1 \frac{A}{A_f} \right], \quad (1)$$

hereafter referred to as the gravimetric transfer function, where

$$N_2 = \frac{A_f}{A_m}(e - \gamma), \quad s_2 = -\frac{A}{A_m}(e_f - \beta). \quad (2)$$

In the above expressions,  $s_2$  is the complex resonant frequency of the FCN,  $e$  and  $e_f$  the flattenings of the Earth and the fluid outer core, respectively, and  $A$ ,  $A_m$  and  $A_f$  the equatorial moments of inertia of the whole Earth, of the mantle and of the fluid outer core, respectively. The complex parameter  $N_2$  represents the strength of the FCN resonance. The compliances  $\gamma$  and  $\beta$  characterize the deformability of the CMB under tidal forcing and the centrifugal forcing associated with the wobble of the fluid outer core relative to the mantle. One has  $\gamma = q_0 h^f / 2$  and  $\beta = q_0 \bar{h}_1^f / 2$ , where  $h^f \approx 1.14$  is the Love number expressing the deformation of the CMB induced by a volumic potential evaluated at the CMB, and  $\bar{h}_1^f \approx 0.35$  is the Love number expressing the deformation of the CMB under an inertial pressure (Dehant et al. 1993). The Love number  $\delta_2$  represents the static response of the Earth to the tidal potential of degree two, and  $\bar{\delta}_1$  is the Love number which characterizes the elastic response (effect of mass redistribution + deformation;  $\bar{\delta}_1 = \bar{h}_1 - \frac{3}{2}\bar{k}_1$ ) of the Earth to the inner pressure acting at the CMB. Because the mantle should possess some anelasticity (Hinderer et al. 1991) that would also contribute to the damping of the FCN, the gravimetric factor  $\bar{\delta}_1$  is complex.

An Earth made up of a mantle, a fluid core and a solid inner core admits three additional resonances. Two of them are in



**Fig. 1.** Sensitivity of the gravimetric transfer function  $T^{(g)}$  to the parameters  $T_{\text{FCN}}$ ,  $Q_{\text{FCN}}$ ,  $N_2$ , and  $\bar{\delta}_1$ .

the low-frequency band: the Chandler wobble (CW) and the inner core wobble (ICW); the remaining one, the free inner core nutation (FICN), lies in the quasi diurnal band. To the model proposed in Eq. (1), we could add these resonance effects (see for instance Legros et al. 1993; Mathews et al. 1995). However, their effects would be far smaller than the error of the gravity data, so we have decided not to include them.

Equation (1) allows one to compute how much the  $T^{(g)}$  is sensitive to departures of the various parameters from their “standard” values. We compute the sensitivity  $S(\sigma; p)$  to a parameter  $p$  incremented by  $\Delta p$  at the frequency  $\sigma$  as

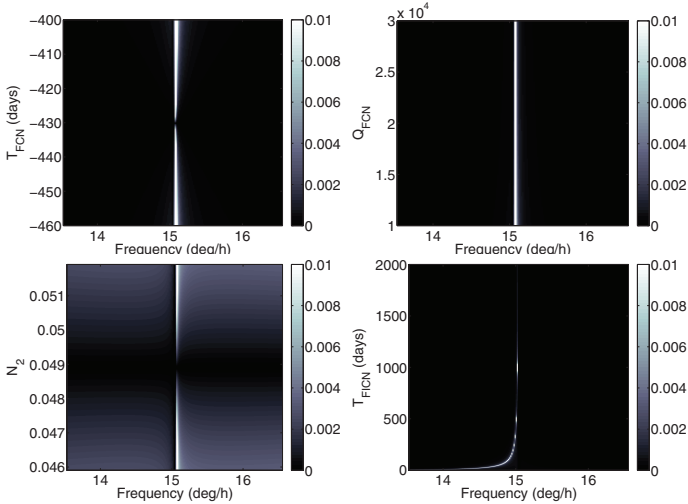
$$S(\sigma; \Delta p) = |T^{(g)}(\sigma; p + \Delta p) - T^{(g)}(\sigma; p)|. \quad (3)$$

The two-dimensional functions  $S$  are drawn in Fig. 1 for parameters  $T_{\text{FCN}}$ ,  $Q_{\text{FCN}}$ ,  $N_2$  (central values taken in the MHB paper), and  $\bar{\delta}_1$  (central value taken in Rosat et al. 2009). The white, vertical pattern showing up in the plots reflects the FCN resonance. Tidal waves away from the resonance are generally poorly (if at all) affected by departures of the parameters from their central values. Nevertheless, it appears that small effects of a few tenths of a percent are expected for  $\bar{\delta}_1$  and, to a lesser extent, for  $N_2$ . Small departures of the FCN parameters  $T_{\text{FCN}}$  and  $Q_{\text{FCN}}$  will mainly affect tidal waves that are very close to the resonance (i.e., within the white, vertical bands crossing the two upper plots). The function  $T^{(g)}$  is therefore primarily sensitive to the gravimetric factor  $\bar{\delta}_1$  and to  $N_2$  for tidal waves away from the FCN resonance, but mainly sensitive to the FCN parameters immediately around the resonance.

### 2.2. Nutation

The frequency domain response of the space motion of the Earth's figure axis to the tidal potential can be written with a transfer function that expresses the ratio between rigid and non-rigid nutation amplitudes (resp.  $\eta_R$  and  $\eta$ ; see, e.g., Mathews et al. 2002). One has  $\eta(\sigma) = T^{(n)}(\sigma)\eta_R(\sigma)$ , wherein, neglecting the ICW effects,

$$T^{(n)}(\sigma) = \frac{e - \sigma}{e + 1} \left[ 1 - \frac{\sigma' s_1 / e}{\sigma - s_1} + \frac{\sigma' N_2}{\sigma' - s_2} + \frac{\sigma' N_3}{\sigma' - s_3} \right], \quad (4)$$



**Fig. 2.** Sensitivity of the nutation transfer function  $T^{(n)}$  to the parameters  $T_{\text{FCN}}$ ,  $Q_{\text{FCN}}$ ,  $N_2$ , and  $T_{\text{FICN}}$ .

where the last three bracketed terms express the CW, FCN, and FICN resonance, respectively, with

$$s_1 = \frac{A}{A_m}(e - \kappa), \quad s_3 = \frac{A}{A_m}(\alpha_2 e_s + \nu). \quad (5)$$

The flattening  $e_s$  is relevant to the solid inner core. The compliance  $\kappa$  is expressed as  $ek/k_s$ , where  $k$  and  $k_s$  are the elastic and fluid Love number, respectively. It expresses the deformability at the surface under degree 2 tidal forcing. The full, complicated expression for the strength  $N_3$  can be found in, e.g., Dehant et al. (2005).

The sensitivity analysis of  $T^{(n)}$  to parameters  $N_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ , and  $s_3$  (Fig. 2) reveals that the nutations are primarily sensitive to the FCN frequency  $s_2$ , then to its amplitude  $N_2$ , and less sensitive to the Chandler frequency  $s_1$  (not shown in the figure) and to the FICN frequency  $s_3$ .

### 3. Determination of the FCN resonance parameters

#### 3.1. Tidal gravity

Since we are looking for Earth's global interior parameters, we take advantage of worldwide records in order to minimize local effects. Thus, we analyze 15 datasets from the SG located in Boulder (USA), Bad-Homburg (Germany), Cantley (Canada), Canberra (Australia), Esashi (Japan), Matsushiro (Japan), Moxa (Germany), Membach (Belgium), Medicina (Italy), Metsahovi (Finland), Potsdam (Germany), Strasbourg (France), Vienna (Austria), Wettzell (Germany) and Wuhan (China). For all, the record length is more than 5 years.

The SG time-varying gravity records have been corrected for any gaps, spikes, steps and other disturbance so that a tidal analysis with the ETERNA software package (Wenzel 1996) is possible. Before the tidal analysis is done, the minute data are resampled to 1 h (using a filter with a cut-off period of 3 h). ETERNA then performs a least-square fit to tides, local air pressure and instrumental drift to give complex gravimetric factors, residual gravity, an adjusted barometric admittance, and a polynomial drift function. The data to be inverted are the complex gravimetric factors corrected for the ocean tide loading effect according to the FES 2004 ocean model (Lyard et al. 2006). An example of tidal gravimetric factors obtained at Strasbourg and corrected for the ocean loading effect is superimposed on the

observed nutation amplitudes in Fig. 3. The errors on the imaginary parts of the tidal waves  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$ , which are the closest to the resonance, are very large, while the corresponding nutation amplitudes (annual and semi-annual retrograde) are well determined.

We use optimized linearized least-squares based on the Levenberg-Marquardt algorithm (Marquardt 1963; Defraigne et al. 1994, 1995). To force the quality factor to be positive, we introduce the variable  $x = \log_{10}(Q_{\text{FCN}})$ . The least-squares implicitly suppose that the parameters are Gaussian distributed, which is not the case for  $Q_{\text{FCN}}$  (Florsch & Hinderer 2000), but should be the case for  $x$  if the data had weak errors (Rosat et al. 2009). Rosat et al. (2009) have demonstrated that there is a good agreement between the linearized Levenberg-Marquardt results and the Bayesian statistic method.

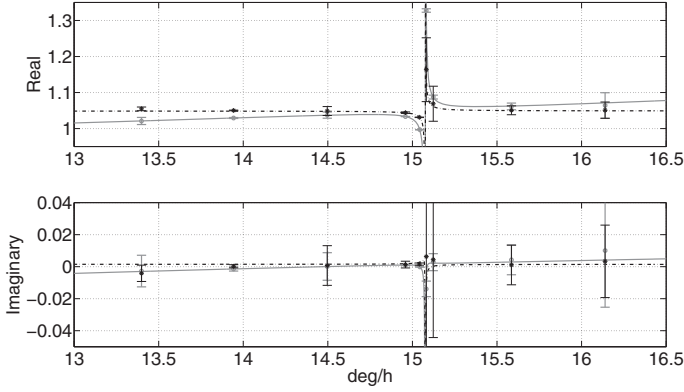
Because of the strong correlation of  $N_2$  with  $\bar{\delta}_1$  (99%), and the small number of tidal gravity data points (only 9 diurnal tidal waves), we will not invert this parameter from gravity tidal factors but rather fix it to the value obtained from the inversion of the nutation data. Indeed, the value of  $N_2$  has been well constrained in MHB or Koot et al. (2008). Thus, the inversion is carried out for  $x$ ,  $T_{\text{FCN}}$ ,  $\delta_1^R$  and  $\delta_1^I$ . Finally, we get  $\bar{\delta}_1 = (0.03407 - i0.0031) \pm 1.0 \times 10^{-4}$ . The period of the FCN is  $T_{\text{FCN}} = -426.9 \pm 1.2$  days and its quality factor is  $Q_{\text{FCN}} = 16\,630 \pm 3\,562$ . (The errors correspond to  $1\sigma$ .)

#### 3.2. Nutation

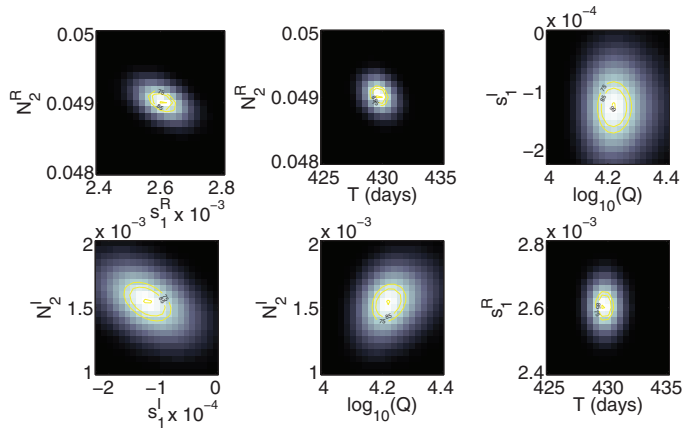
Nutation time series were obtained by a single inversion of ionosphere-free VLBI delays accumulated during  $\sim 3800$  24-h observing sessions of routine geodetic VLBI observations spanning 1984.0–2008.7<sup>1</sup>. Earth orientation parameters were estimated once per session, while station coordinates and velocities and most of radio source coordinates were estimated as global parameters over the 24 years. The celestial frame was maintained by a no net rotation constraint over the coordinates of 247 sources selected by Feissel-Vernier et al. (2006), ensuring a relative time stability of the frame axes. Doing so, one avoids contaminating the estimated nutation offsets by radio source instabilities. All the calculations used the Calc 10.0/Solve 2008.12.05 geodetic VLBI analysis software package developed and maintained at NASA/Goddard Space Flight Center, and were carried out at the Paris Observatory IVS Analysis Center (Gontier et al. 2008) as part of the International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (IVS, Schlüter & Behrend 2007).

Prograde and retrograde amplitudes of the terms listed in Table 1 of the MHB paper, jointly with a linear trend on each component, were obtained by a weighted least-squares fit to the time series. To get realistic errors on data, we inflated the variance of each data point by an additive variance of  $0.015 \text{ mas}^2$ , and a scale factor of 1.8 (see Herring et al. 1991, 2002; Lambert et al. 2008). The obtained nutation amplitudes were corrected for effects that are not, or are non linearly, linked to non rigidity, including the geodetic nutation, the S1 atmospheric tide, and the contribution of second order terms in the dynamical equations of the Earth's rotation. The relevant values were taken from Table 6 of the MHB paper for the former two effects, and in Lambert & Mathews (2006, 2008) for the latter. The ratio

<sup>1</sup> The data set and its description file are available via anonymous ftp at <ftp://ivsopar.obspm.fr/vlbi/ivsproducts/eops/opa2008d.eops.gz>, <ftp://ivsopar.obspm.fr/vlbi/ivsproducts/eops/opa2008d.eops.txt>.



**Fig. 3.** Observed transfer functions for nutation (dots) and gravity (stars) obtained from VLBI and SG measurements, respectively. The corresponding theoretical ones are plotted in solid line for nutation, and in dashed line for gravity.



**Fig. 4.** Joint probability density functions of  $x$ ,  $T_{\text{FCN}}$ ,  $s_1$  and  $N_2$  estimated from the nutation amplitudes.

of the observed (fitted) nutation amplitudes to the rigid ones taken in the REN 2000 theory (Souchay et al. 1999) are plotted in Fig. 3. Note the good agreement between the observations and the MHB transfer function using  $T_{\text{FCN}} = -430.21$  days and  $Q_{\text{FCN}} = 20\,000$ .

From the fitted set of nutation amplitudes, we estimate  $s_1$ ,  $N_2$ ,  $s_2$ , and  $s_3$ . These geophysical parameters are correlated and the highest correlation ( $\sim 0.9$ ) shows up between the FCN and the FICN frequencies  $s_2$  and  $s_3$ .

In order to check that the inverted parameters are Gaussian distributed, we compute their probability density functions (pdfs) using the full transfer function of the resonance as defined in Eq. (4). As our knowledge of the parameters is imperfect, we consider them as probabilistic rather than deterministic. The resulting joint pdfs are represented in Fig. 4 for the parameters  $x$ ,  $T_{\text{FCN}}$ ,  $s_1$  and  $N_2$ . The  $\chi^2$ -test shows that the distribution for  $x$  can be supposed Gaussian with an error of 5%. Note also the tilted shape of the pdfs between the real and imaginary parts of  $s_1$  and  $N_2$  that indicates a correlation between these parameters. The Levenberg-Marquardt least-square fit gives  $T_{\text{FCN}} = -429.6 \pm 0.6$  days,  $Q_{\text{FCN}} = 16\,683 \pm 884$ ,  $N_2 = (0.0490 + i0.0015) \pm 2 \times 10^{-4}$ ,  $s_1 = (0.00261 - i0.00126) \pm 3 \times 10^{-5}$ ,  $T_{\text{FICN}} = 1\,139 \pm 736$  days,  $Q_{\text{FICN}} = 550 \pm 171$ , with the error corresponding to  $1\sigma$ .

A joint inversion of VLBI nutation and SG gravity data has also been performed to determine  $x$  and  $T_{\text{FCN}}$ . However, the

**Table 1.** Values of the FCN resonance parameters obtained from nutation and gravity measurements.

	Nutation	Gravity
$T_{\text{FCN}}$	$-429.6 \pm 0.6$ days	$-426.9 \pm 1.2$ days
$Q_{\text{FCN}}$	$16\,683 \pm 884$	$16\,630 \pm 3\,562$

amplitudes of the tidal waves that best constrain the FCN frequency and damping (mainly  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$ ) are weak while the corresponding nutation amplitudes (mainly the annual and semi-annual retrograde) are substantial. The ocean loading effect is a main source of error on the gravity signal while the effect of the tidal ocean on the Earth's nutation is weak. Therefore  $x$  and  $T_{\text{FCN}}$  are better estimated using VLBI data than using surface gravity data, and a joint inversion does not improve the results obtained using VLBI data alone.

#### 4. Concluding remarks

Estimates of the FCN resonance parameters from nutation or gravity measurements are comparable within the error bars (Table 1). The FCN period is close to  $-430$  days using VLBI and slightly lower by a few days from gravity data. The FCN quality factor estimated either from nutation or from gravity data tends to be around 17 000 with error bars of  $\sim 1000$ . Tidal gravity observations bring additional constraints to the Earth's interior by leading to an estimate of the internal pressure Love number. Interpretation of these estimates in terms of dissipative torques at the core boundaries needs more assumptions and internal modeling to separate the respective parts of electromagnetism and viscosity. This problem will not be addressed here.

Our study has shown that surface gravity is as sensitive as nutation to the FCN resonance frequency and damping factor. The discrepancy between gravity and nutation is due to the large errors arising from the diurnal tidal wave determinations that are the closest to the FCN resonance.

As time elapses, improvements in both techniques are progressively removing systematic effects that produce discrepancies in estimates of the same geophysical quantities. Geophysical parameters estimated from VLBI will improve in accuracy in the next five or ten years, not only because of better quality data or reference frame realization, but also because the longer time span will permit one to decorrelate the 18.6-yr tidal term and the linear trend. For SG data, longer time-series will enable us to better determine  $\Psi_1$  and  $\Phi_1$  tidal waves but improvements are also necessary in the modeling of the ocean loading effects in the diurnal frequency band.

*Acknowledgements.* We would like to thank M. Llubes for her computation of the ocean loading corrections at the SG sites. We are also grateful to the GGP members for making the SG datasets available, and to the IVS for their constant effort in scheduling VLBI sessions and correlating them. S. Rosat particularly thanks N. Florsch for his useful explanations about the Bayesian method. We are finally grateful to the anonymous reviewer for comments on this manuscript.

#### References

- Crossley, D., Hinderer, J., Casula, G., et al. 1999, EOS, 80, 121
- Cummins, P., & Wahr, J. 1993, J. Geophys. Res., 98, 2091
- Defraigne, P., Dehant, V., & Hinderer, J. 1994, J. Geophys. Res., 99, 9203
- Defraigne, P., Dehant, V., & Hinderer, J. 1995, J. Geophys. Res., 100 (B2), 2041
- Dehant, V., Hinderer, J., Legros, H., & Leffitz, M. 1993, Phys. Earth Planet. Interiors, 76, 259
- Dehant, V., Feissel-Vernier, M., de Viron, O., et al. 2003, J. Geophys. Res., 108, 2275
- Dehant, V., de Viron, O., & Greff-Leffitz, M. 2005, A&A, 438, 1149

- Ducarme, B., Rosat, S., Vandercoilden, L., et al. 2009, in *Observing our Changing Earth*, ed. M. G. Sideris, Proc. 2007 IAG General Assembly, 523
- Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. 1981, *PEPI*, 25, 297
- Florsch, N., & Hinderer, J. 2000, *PEPI*, 117, 21
- Feissel-Vernier, M., Ma, C., Gontier, A.-M., & Barache, C. 2006, *A&A*, 452, 1107
- Gontier, A.-M., Lambert, S. B., & Barache, C. 2008, in *International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (IVS) 2007 Annual Report*, ed. D. Behrend, K. D. Baver, NASA/TP-2008-214162, 224
- Gwinn, C. R., Herring, T. A., & Shapiro, I. I. 1986, *J. Geophys. Res.*, 91, 4755
- Herring, T. A., Gwinn, C. R., & Shapiro, I. I. 1986, *J. Geophys. Res.*, 91, 4745
- Herring, T. A., Buffet, B. A., Mathews, P. M., & Shapiro, I. I. 1991, *J. Geophys. Res.*, 96 (B5), 8259
- Herring, T. A., Mathews, P. M., & Buffet, B. A. 2002, *J. Geophys. Res.*, 107 (B4), 10.1029/2001JB000165
- Hinderer, J., Zürn, W., & Legros, H. 1991, in *Proc. 11th Int. Symp. Earth Tides*, Schweitzerbart, ed. J. Kakkuri (Stuttgart: Verlag), 549
- Hinderer, J., Boy, J.-P., Gegout, P., et al. 2000, *Phys. Earth Planet. Interiors*, 117, 37
- Koot, L., Rivoldini, A., de Viron, O., & Dehant, V. 2008, *J. Geophys. Res.*, 113, (B08414), 10.1029/2007JB005409
- Lambert, S. B., & Dehant, V. 2007, *A&A*, 469, 777
- Lambert, S. B., & Mathews, P. M. 2006, *A&A*, 453, 363
- Lambert, S. B., & Mathews, P. M. 2008, *A&A*, 481, 883
- Lambert, S. B., Dehant, V., & Gontier, A.-M. 2008, *A&A*, 481, 535
- Legros, H., Hinderer, J., Leftz, M., & Dehant, V. 1993, *Phys. Earth Planet. Interiors*, 76, 283
- Lyard, F., Lefèvre, F., Letellier, T., & Francis, O. 2006, *Ocean Dynamics*, 56, 394
- Marquardt, D. 1963, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 431
- Mathews, P. M., Buffet, B. A., & Shapiro, I. I. 1995, *J. Geophys. Res.*, 100, 9935
- Mathews, P. M., Herring, T. A., & Buffet, B. A. 2002, *J. Geophys. Res.*, 107 (B4), 10.1029/2001JB000390
- Neuberg, J., Hinderer, J., & Zürn, W. 1987, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 91, 853
- Roosbeek, F., Defraigne, P., Feissel, M., & Dehant, V. 1999, *Geophys. Res. Lett.*, 26, 131
- Rosat, S., Florsch, N., Hinderer, J., & Llubes, M. 2009, *J. Geodyn.*, in press
- Sato, T., Tamura, Y., Higashi, T., et al. 1994, *J. Geomag. Geoelectr.*, 46, 571
- Sato, T., Tamura, Y., Matsumoto, K., et al. 2004, *J. Geodyn.*, 38, 375
- Schlüter, W., & Behrend, D. 2007, *J. Geod.*, 81, 479
- Souchay, J., Loysel, B., Kinoshita, H., & Folgueira, M. 1999, *A&A*, 135, 111
- Vondrák, J., & Ron, C. 2006, *Acta Geodyn. Geomater.*, 3, 53
- Vondrák, J., Ron, C., & Weber, R. 2005, *A&A*, 444, 297
- Wenzel, H. G. 1996, *Bull. Inf. Marées Terrestres*, 124, 9425

## 2.4 FREE INNER CORE NUTATION

### 2.4.1 MOTIVATION

L'existence de la FICN est liée à la présence d'une graine solide légèrement inclinée et aplatie dans le noyau externe fluide (Mathews et al., 1991a,b; de Vries & Wahr, 1991; Herring et al., 1991). En termes de mécanismes de force de rappel et d'effet sur les marées, ce mode de rotation est très semblable à la FCN. Les décalages de l'axe de rotation et de l'axe de figure de la graine avec l'axe de figure du manteau induisent des pressions fluides à l'ICB qui tendent à réaligner ces axes. Des forces gravitationnelles agissent aussi sur la graine et contribuent au couplage interne (Dumberry, 2009). La FICN correspond à un mouvement rétrograde quasi-diurne dans un système de référence terrestre et à un mouvement prograde dans l'espace, dont la période multi-annuelle reste largement indéterminée.

D'un point de vue théorique, la fonction de transfert de la Terre en réponse au forçage des marées décrit un phénomène de résonance lorsque la fréquence du forçage est proche de la fréquence du mode. Tandis que cet effet de résonance a été largement observé et analysé pour la FCN, aucune résonance associée à la FICN n'a encore été clairement observée. La raison la plus évidente est la faible amplification de la résonance (« resonance strength ») que la théorie prédit comme valant un centième de celle de la FCN (de Vries & Wahr, 1991). Une autre raison est la forte atténuation de ce mode avec un facteur de qualité certainement inférieur à 500 (Koot et al., 2010).

Des études passées ont prédit une amplitude en surface très faible, de quelques dizaines de micro-arcsecondes (où  $1 \mu\text{as}$  correspond à un déplacement équatorial en surface d'environ 0.03 mm) correspondant à une perturbation de la gravité de l'ordre de 0.1 nGal, c'est-à-dire bien en dessous de la précision des données gravimétriques et VLBI.

Pour un modèle de Terre élastique, une résonance apparaît à la fréquence de la FICN près de l'onde thermique  $S_1$  (e.g. Dehant et al., 1993; Legros et al., 1993).

Les valeurs des paramètres de la Terre profonde qui interviennent dans l'expression de la période de la FICN sont très mal contraintes. Ces paramètres sont l'aplatissement de la graine, les densités de la graine et du noyau externe à l'ICB, la déformation de l'ICB due à la pression dynamique fluide qui agit à cet interface (Dehant et al., 1997) et des coefficients de couplages visco-magnétiques aux interfaces du noyau fluide (Mathews et al., 2002). Le comportement rhéologique de la graine semble également jouer un rôle considérable dans sa rotation, en particulier sa viscosité et la friction à l'ICB (Greff-Lefftz et al., 2000), et donne un large éventail de périodes possibles (cf. Table 2.4.1).

Plus récemment, Rogister & Valette (2009) ont montré un fort couplage de la FICN avec les modes gravito-inertiels du noyau, ce qui implique aussi une nutation rigide du manteau. La nutation de la graine et celle du manteau deviennent couplées et la période de la FICN devient totalement non contrainte, avec des valeurs pouvant aller de 200 à 1000 jours.

A partir des observations des nutations par VLBI, Mathews et al. (2002) puis Koot et al. (2008, 2010) ont inversé un modèle semi-analytique de réponse de la Terre au forçage des marées et ont suggéré une période proche de 1000 jours pour la FICN. Cependant cette estimation résulte essentiellement du terme de nutation de période 18.6 ans puisqu'aucune résonance n'a été observée dans les nutations progrades (Greff-Lefftz et al., 2002). Lorsque l'on introduit un comportement anélastique dans le modèle de Terre, la résonance disparaît à

<b>Théorie</b>	$T_{ficn}$ in sidereal days	Modèles
Mathews et al. (1991b)	475.5 512.2	PREM 1066A
de Vries & Wahr (1991)	471.0	PREM
Dehant et al. (1993)	485.7	PREM
Mathews et al. (1995)	455.8	M-PREM
Greff-Lefftz et al. (2000)	75 485 plusieurs milliers	PREM + graine quasi-fluide PREM + graine quasi-élastique PREM + fort champ magnétique à l'ICB
Rogister (2001)	388.4 - 473.9	PREM
Mathews (2001)	939.0	PREM modifié
Rogister & Valette (2009)	432.7 513.6 200 - 1000	PREM 1066A couplage avec modes du noyau
<b>Observations</b>		
Mathews et al. (2002)	930 - 1140	ajustement nutations VLBI (MHB2000 - Conventions IERS)
Koot et al. (2008)	875 - 1100	nutations VLBI
Koot et al. (2010)	870 - 975	nutations VLBI

TABLE 2.4.1: Périodes de la FICN théoriquement prédites ou ajustées à partir des observations VLBI.

cause de l'amortissement du mode (voir Fig. 2.4.1). Cet amortissement dépend des processus de dissipation à l'ICB. Mathews et al. (2002) ont obtenu une valeur pour le facteur de qualité  $Q$  de 677 et Koot et al. (2010) une valeur entre 430 et 500.

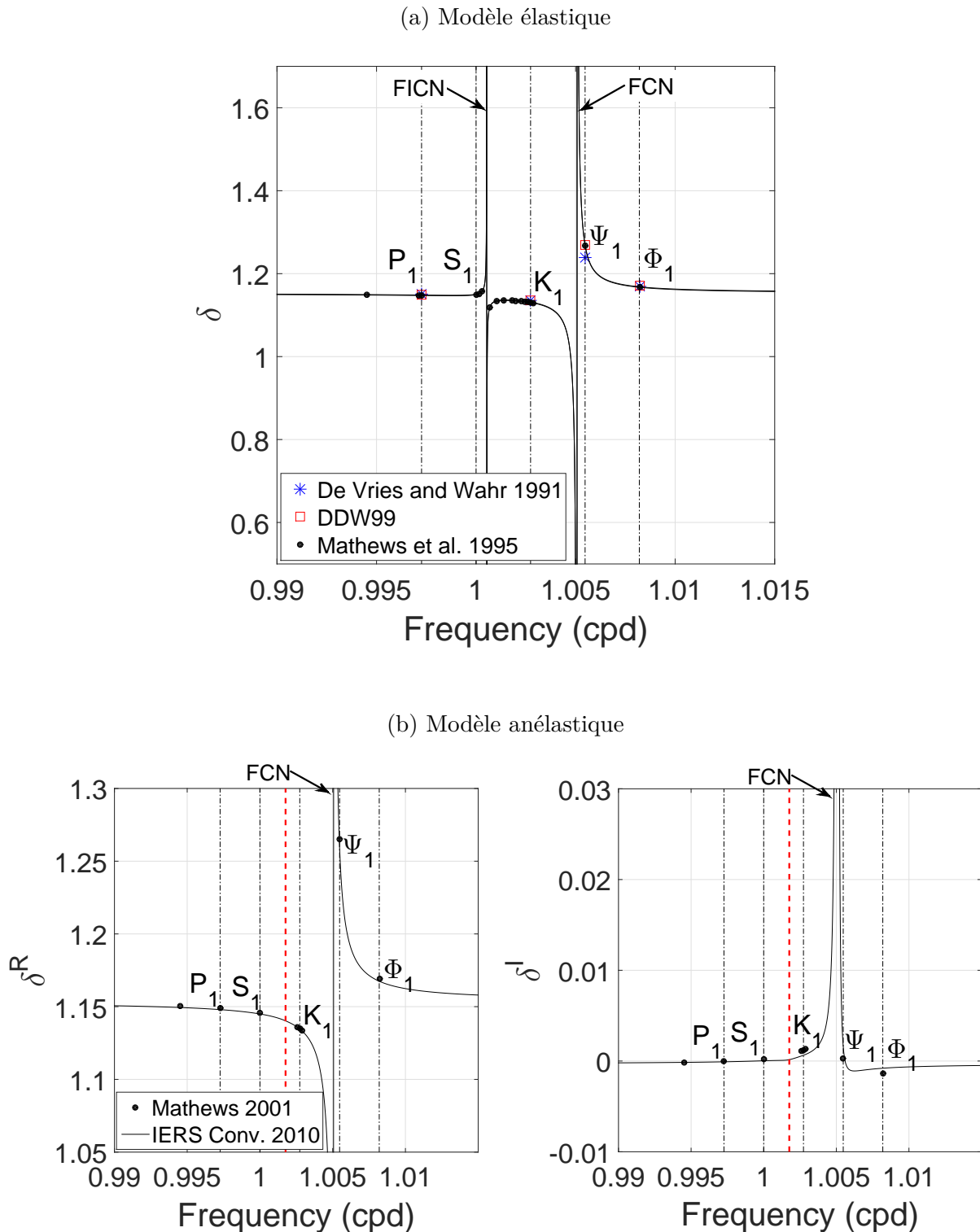


FIGURE 2.4.1: Facteurs gravimétriques prédits dans la bande diurne (a) pour un modèle de Terre élastique avec une période de 455 jours pour la FICN (1.0005 cpd); (b) pour un modèle de Terre anélastique avec une période de 1030 jours pour la FICN (1.0018 cpd). Les pointillés verticaux rouges indiquent où devrait se situer la résonance. Elle n'est plus visible dans le cas anélastique. DDW99 fait référence aux valeurs calculées par Dehant et al. (1999) et IERS Conv. 2010 sont les valeurs publiées dans les Conventions IERS 2010.

Dans les paragraphes qui suivent, nous montrons les résultats de notre balayage systématique de tout le spectre diurne entre les ondes  $P_1$  et  $K_1$  afin de détecter une éventuelle perturbation d'amplitude associée au mode propre de la graine. Cette recherche dans les données gravimétriques fait également partie du travail de fin de thèse de Marta Calvo (Calvo, 2015). Quant à la recherche de la FICN dans les données VLBI, elle a été effectuée en collaboration avec Sébastien Lambert du SYRTE, Observatoire de Paris. L'article correspondant est paru dans les proceedings de l'IUGG 2015 (Rosat et al., 2016a).

## 2.4.2 RECHERCHE DANS LES DONNÉES GRAVIMÉTRIQUES

Nous avons utilisé les données gravimétriques issues de la base GGP (<http://isdg.gfz-potsdam.de>) (Crossley et al., 1999) que nous avons prétraitées puis analysées à l'aide du logiciel ETERNA3.4 (Wenzel, 1996) appliqué avec le développement du potentiel de marées HW95 (Hartmann & Wenzel, 1995). Nous obtenons ainsi les facteurs gravimétriques qui caractérisent la réponse de la Terre réelle par rapport à une Terre rigide. Un exemple est donné en Fig. 2.4.2 pour les enregistrements gravimétriques collectés à Strasbourg et Moxa (Allemagne).

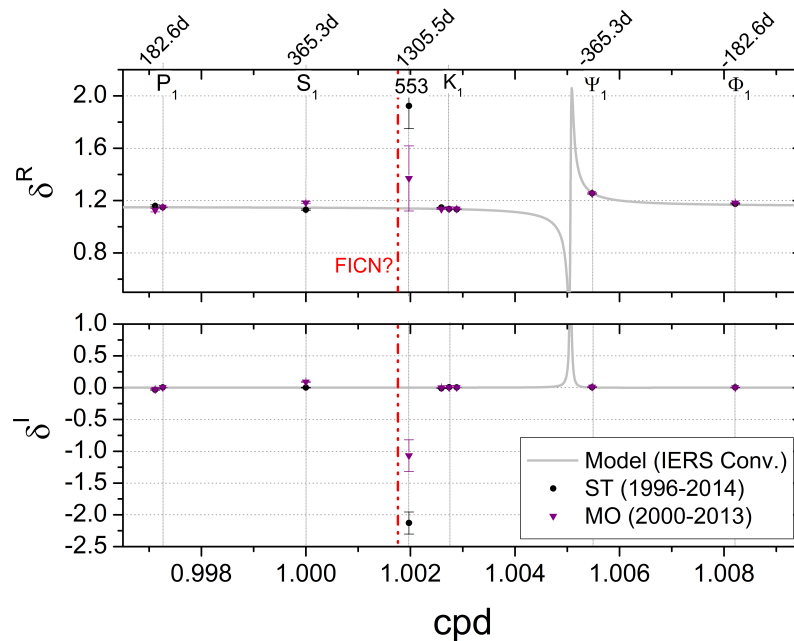


FIGURE 2.4.2: Parties réelles et imaginaires des facteurs gravimétriques obtenus par analyse ETERNA 3.4 des enregistrements gravimétriques de Strasbourg et Moxa. Les principales ondes entre  $P_1$  et  $\Phi_1$  sont représentées. La courbe de résonance associée aux Conventions IERS 2010 est superposée en gris. La période de la FICN proposée dans le modèle MHB est indiquée par la ligne pointillée rouge. En traits gris verticaux, nous avons indiqué les fréquences (en cycle par jour solaire moyen dans le système de référence terrestre) des ondes diurnes ainsi que les périodes (en jours solaires moyens dans le référentiel céleste) des nutations correspondantes.



### 2.4.3 RECHERCHE DANS LES DONNÉES DE NUTATION VLBI

Nous avons utilisé les écarts du pôle céleste au modèle MHB déterminés par VLBI de 1980 à 2015, soit 35 ans de données. Nous avons utilisé la série calculée par S. Lambert de l'Observatoire de Paris (opa2015a). Comme pour les marées gravimétriques, pour chaque groupe d'onde, nous calculons la fonction de transfert entre les nutations observées et les nutations modélisées pour un modèle de Terre rigide REN2000 (Souhay et al., 1999). Ces ratios sont représentés sur la Fig. 2.4.3.

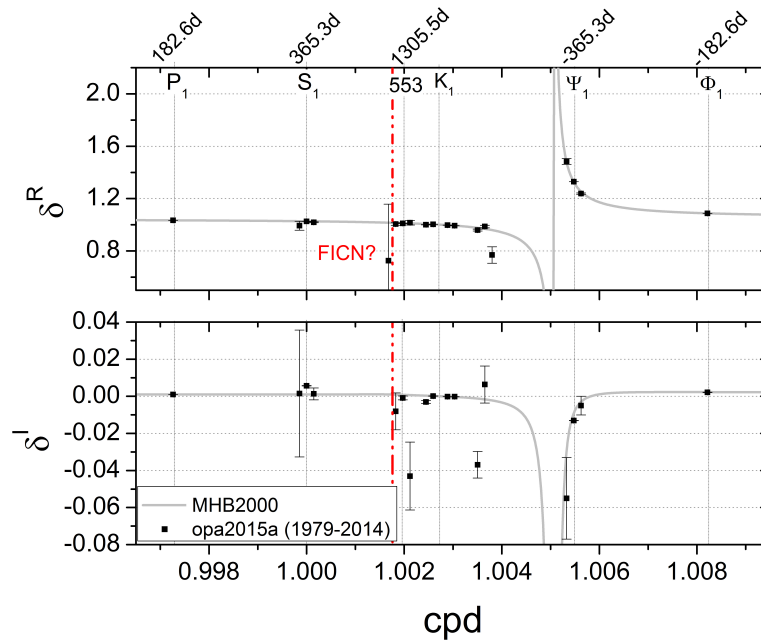


FIGURE 2.4.3: Parties réelles et imaginaires des rapports entre nutations observées et nutations rigides obtenus par ajustement moindres carrés des séries opa2015a d'écarts au pôle céleste. La courbe de résonance associée aux Conventions IERS 2010 est superposée en gris. La période de la FICN proposée dans le modèle MHB est indiquée par la ligne pointillée rouge. En traits gris verticaux, nous avons indiqué les fréquences (en cycle par jour solaire moyen dans le système de référence terrestre) des ondes diurnes ainsi que les périodes (en jours solaires moyens dans le référentiel céleste) des nutations correspondantes.

## 2.5 CHANDLER WOBBLE

Cor. 21. *For the same reason that redundant matter in the æquatorial regions of a globe causes the nodes to go backwards, and therefore by the increase of that matter that retrogradation is increased, by the diminution is diminished, and by the removal quite ceases; it follows, that if more than that redundant matter be taken away, that is, if the globe be either more depressed, or of a more rare consistence near the æquator than near the poles, there will arise a motion of the nodes in consequentia.*

Isaac NEWTON, 1686. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, PROPOSITION LXVI. THEOREM XXVI

Tout corps dont l'axe de rotation n'est pas confondu avec un axe principal d'inertie possède un mouvement libre du pôle (Euler, 1765). C'est le cas de la Terre à cause de son aplatissement. La Terre tourne de sorte que l'axe de rotation instantané bouge autour de l'axe d'inertie principal (voir Fig. 2.5.1) par rapport à la surface afin de conserver le moment cinétique total. L'axe de rotation décrit un cône autour de l'axe d'inertie. C'est ce que l'on appelle la « précession eulérienne ». Pour une Terre rigide, la période de cette pulsation d'Euler est de 304 jours solaires. La non-rigidité de la Terre et la fluidité des océans modifient la précession eulérienne (Newcomb, 1892), on parle alors d'oscillation de Chandler. La présence du noyau fluide va diminuer la période d'environ 50 jours. Finalement l'anélasticité du manteau rajoute encore 8 jours à la période de Chandler pour aboutir à une période d'environ 435 jours (voir Fig. 2.5.2).

En plus de cette composante périodique chandlérienne, le mouvement du pôle s'accompagne d'un terme annuel provenant de la redistribution saisonnière des masses atmosphériques et hydriques.

### 2.5.1 MOTIVATION

Sous l'effet des marées luni-solaires, la Terre se déforme et induit des variations de la gravité mesurée en surface. Cette réponse de la Terre au forçage des marées dépend en particulier de la rhéologie du manteau. De manière analogue, les variations de la rotation terrestre par rapport à un référentiel co-mobile induisent une déformation du manteau et des variations de la force centrifuge qui, à leur tour, génèrent des variations de la gravité en surface. Une composante périodique de la rotation terrestre est le mouvement de Chandler, qui est un mode de rotation libre de période proche de 435 jours. La réponse gravimétrique de la Terre à la fréquence de Chandler dépend de la rhéologie du manteau. Aux échelles de temps intermédiaires entre un comportement élastique (ou légèrement anélastique) et un comportement visco-élastique (cf. Fig. 2.5.3), c'est-à-dire à des périodes supérieures au jour et inférieures à 1000 ans, la rhéologie du manteau est très peu contrainte par l'observation. La détermination précise des facteurs gravimétriques à la fréquence de Chandler fournit ainsi des informations actuellement manquantes sur les propriétés anélastiques du manteau.

Une autre question posée par le mode de Chandler est sa multiplicité en fréquences restant inexplicée. Depuis sa découverte par Chandler (1891), de nombreuses études ont suggéré que ce mouvement pouvait en fait être constitué de plusieurs oscillations de fréquences voisines ou avoir une période variable dans le temps (Guo et al., 2005, par exemple). Une modulation de l'excitation de l'oscillation de Chandler par la marée luni-solaire de 18.6 ans ou une oscillation climatique en 20-22 ans a été proposée par Zotov & Bizouard (2012). La variabilité du mouvement de Chandler a également été expliquée par l'action de l'atmosphère et des océans depuis 1930. Sur une période plus longue, couvrant au moins 100 ans, cette action hydro-atmosphérique expliquerait la multiplicité des périodes. Une piste encourageante, émise par Smith (1977) puis développée par Rogister & Valette (2009), est que la dynamique du noyau liquide pourrait influencer le mouvement de Chandler et générer des modes de Chandler de périodes séparées de quelques jours. Cependant aucune des raisons citées ci-dessus n'explique complètement le spectre observé du mouvement du pôle. Une analyse spectrale des séries temporelles des coordonnées du pôle de 1900 à 2015 fournies par l'IERS montre en effet des pics d'amplitudes plus petites qui semblent émerger vers 0.81,

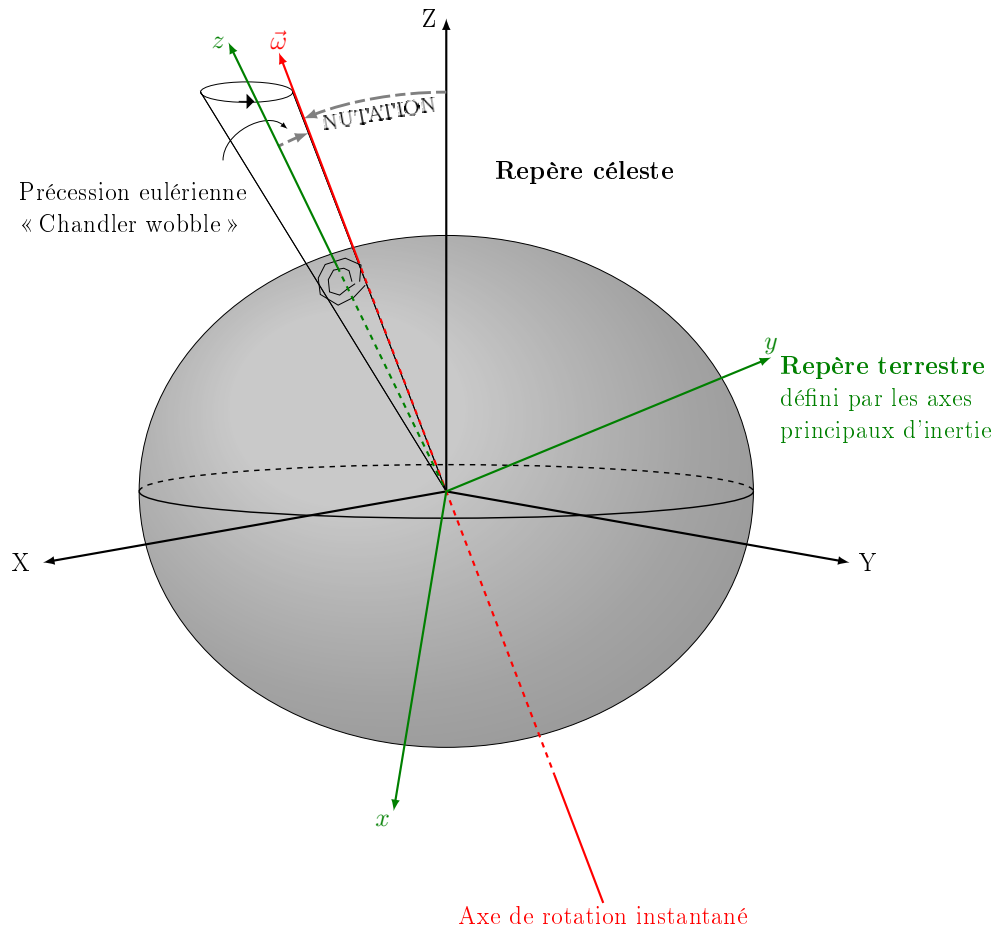


FIGURE 2.5.1: Illustration du mouvement du pôle qui existe pour tout corps dont l'axe de rotation n'est pas confondu avec un axe principal d'inertie. Pour un corps rigide, on parle de précession eulérienne et la fréquence est proportionnelle à l'aplatissement. Dans le cas d'une Terre déformable, la fréquence dépend seulement de la partie du bourrelet équatorial qui ne s'ajuste pas instantanément à l'axe de rotation instantané. L'axe de rotation décrit un cône autour de l'axe d'inertie.

0.87, 0.89 et 0.91 cycle par an (cf. Fig 2.5.4). Il n'est donc pas surprenant que l'amplitude de l'oscillation de Chandler varie dans le temps (cf. Fig. 2.5.5).

Afin de répondre de manière rigoureuse et physique à cette problématique de l'excitation de Chandler et de ses multiples périodes, il faudrait considérer un système Terre solide plus océans (avec leur propre dynamique) et calculer les modes propres d'un tel système. La difficulté est de modéliser correctement les couplages à l'interface croûte - océans. Un tel travail n'a encore jamais été effectué et fait partie des perspectives de recherche à plus long terme.

## 2.5.2 ESTIMATION DE LA MARÉE POLAIRE

Dans sa thèse, Yann Ziegler a analysé les variations temporelles de gravité enregistrées par des gravimètres supraconducteurs du réseau mondial GGP afin d'estimer le facteur

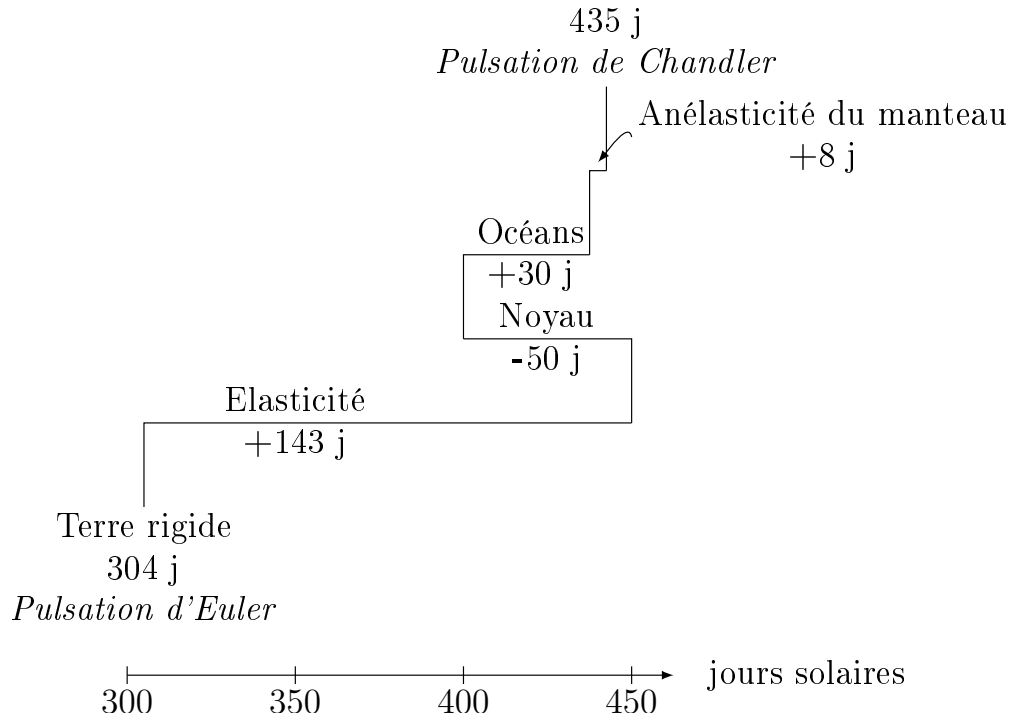


FIGURE 2.5.2: Périodes théoriques du mode de Chandler.

gravimétrique  $\tilde{\delta}$  (cf. Eq. 2.5.1) à la période de Chandler. Ses résultats ont été publiés dans *Geophys. J. Int.* (Ziegler et al., 2016) et sont comparés Fig. 2.5.6 avec les résultats de deux autres études (Ducarme et al., 2006; Xu et al., 2004). L'originalité du travail de Y. Ziegler par rapport à ces études passées est d'avoir considéré des incertitudes plus réalistes sur les données gravimétriques et d'avoir utilisé une méthode de sommation en harmoniques sphériques qui permet d'amplifier la composante chandlérienne qui correspond à un mode de degré 2 et d'ordre -1.

$$\Delta g(\theta, \phi) = \tilde{\delta} \Omega_0^2 r \left[ \sin 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) - 2m_3 \sin^2 \theta \right] \quad (2.5.1)$$

Cette équation représente la réponse gravimétrique de la Terre à la variation du potentiel centrifuge due au mouvement du pôle (Eq. 2.2.3). Dans l'inversion, le terme en  $m_3$ , lié à la rotation axiale, est négligé car cent fois plus petit que le mouvement équatorial du pôle ( $\tilde{m} = m_1 + im_2$ ).

## 2.6 COUPLAGES ET TERMES DU SECOND ORDRE SUR LA ROTATION

Au vu de la précision sans cesse croissante des observations du mouvement du pôle et plus généralement des paramètres de rotation de la Terre par les techniques spatiales de type laser-lune, laser-satellite, DORIS et VLBI, il devient nécessaire d'améliorer notre compréhension de la rotation de la Terre en s'intéressant à des termes souvent négligés dans les équations.

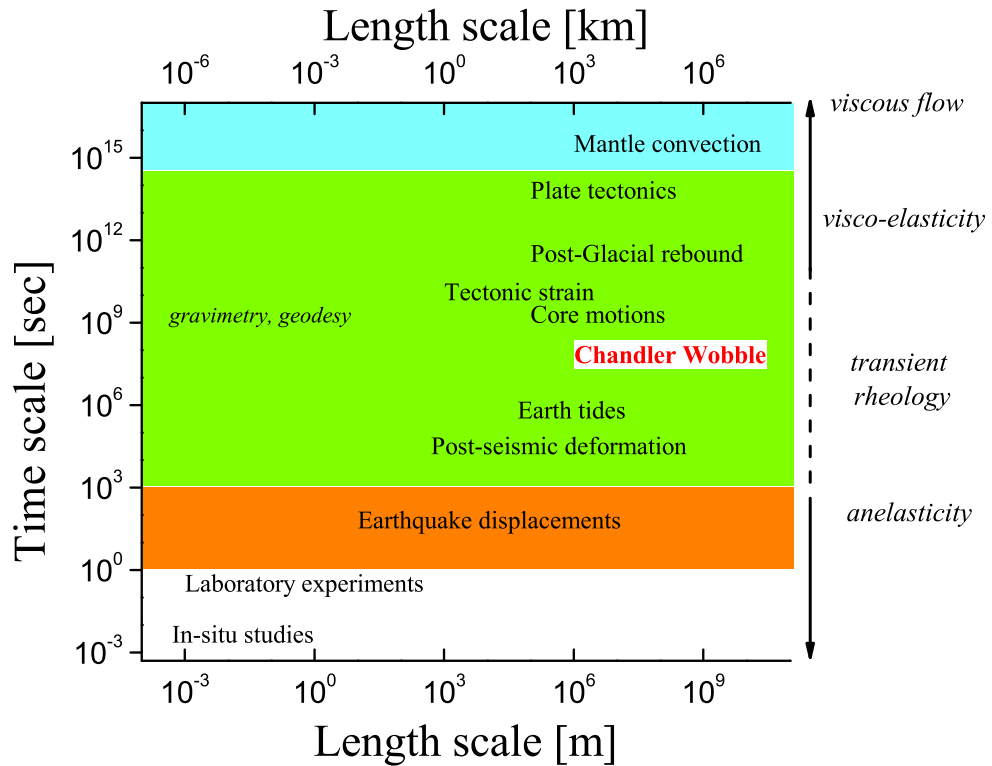


FIGURE 2.5.3: Spectre spatio-temporel des principaux phénomènes géophysiques qui déforment la Terre et rhéologie associée.

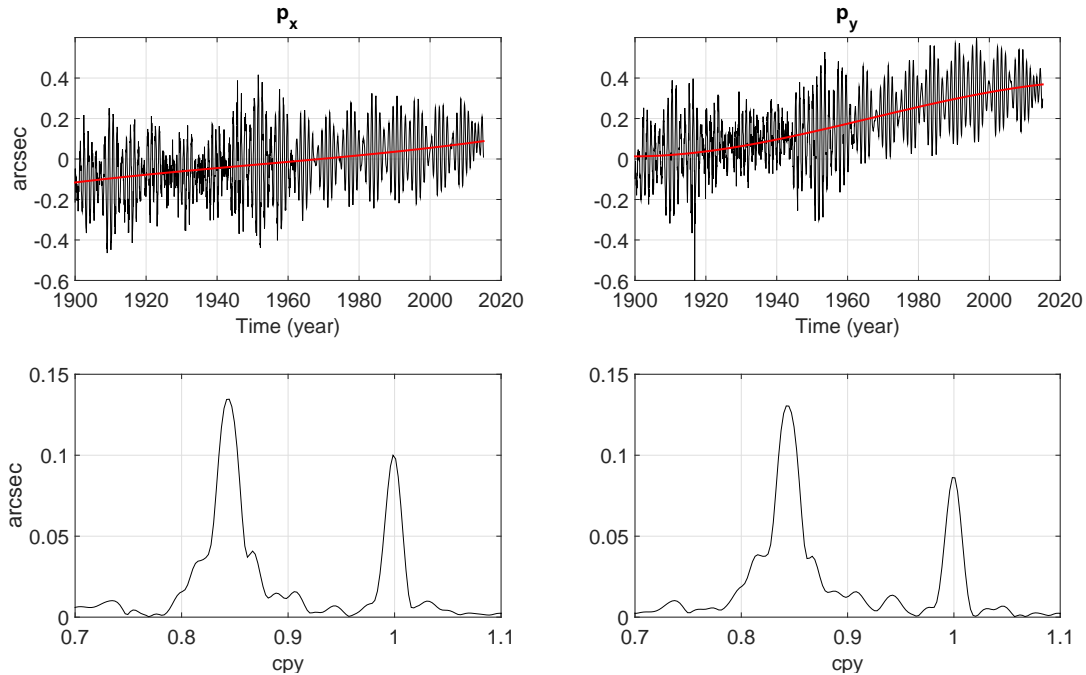


FIGURE 2.5.4: Séries temporelles et amplitudes spectrales du mouvement du pôle obtenues à partir des coordonnées du pôle fournies par l'IERS, de 1900 à 2015 (série C01). cpy : cycle par an.

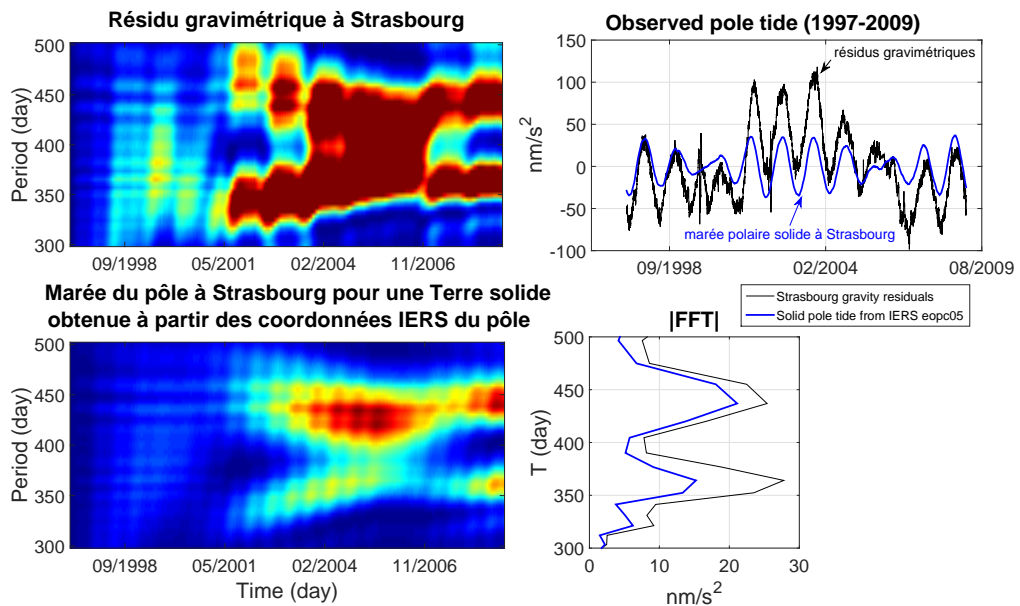


FIGURE 2.5.5: Transformée en ondelettes et séries temporelles de la marée polaire rigide obtenue à partir des coordonnées du pôle fournies par l'IERS et des résidus de gravité à Strasbourg après soustraction des marées luni-solaires solides et océaniques et de l'effet local des variations de pression atmosphérique. Les contributions hydrologiques, très fortes autour de la période annuelle, n'ont pas été enlevées des données gravimétriques.

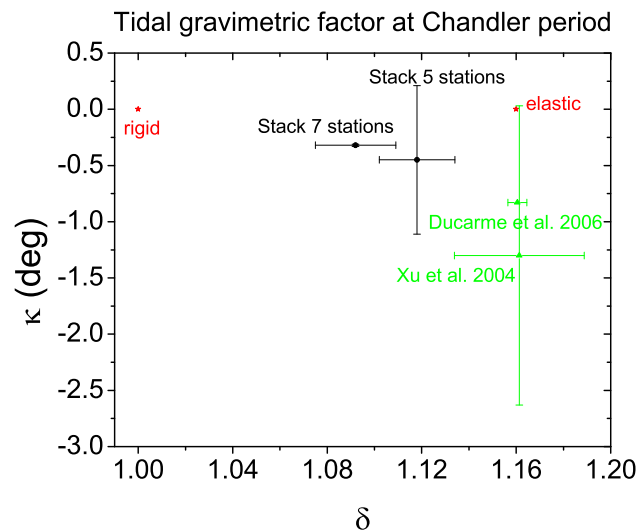


FIGURE 2.5.6: Facteurs gravimétriques à la période de Chandler estimés à l'aide des observations gravimétriques de surface par différents auteurs et valeurs théoriques pour une Terre rigide et une Terre purement élastique. Les valeurs obtenues par Ziegler et al. (2016) à l'aide d'une méthode de sommation, portant sur les données de 5 ou 7 jeux de SGs sont indiquées en noir.

### 2.6.1 EFFET DE LA DÉFORMATION DE MARÉE ZONALE

En modifiant le bulbe équatorial ou l'ellipticité dynamique, la déformation zonale de marées perturbe l'amplitude des nutations forcées (Lambert & Mathews, 2006). Il s'agira ici

de quantifier l'impact de cette déformation sur les modes propres de rotation (nutation libre du noyau et oscillation de Chandler). Dans le cas de l'oscillation de Chandler, nous devons résoudre une équation paramétrique du premier ordre en rotation qui fait apparaître des modulations en amplitude de l'oscillation de Chandler par les marées zonales. Cette étude a été initiée lors du projet de recherche de Master 1 de Y. Ziegler (2010/2011) et l'article en préparation est inséré en Annexe E.

### 2.6.2 STABILITÉ TEMPORELLE DES PARAMÈTRES DE LA FCN

La variabilité temporelle de la période de la FCN a été supposée dans plusieurs études passées (e.g. Roosbeek et al., 1999), pour expliquer un pic spectral résiduel dans les nutations à la période de la FCN, après soustraction du modèle de nutation empirique IERS96 (Herring, 1995; McCarthy, 1996). Roosbeek et al. (1999) ont conclu que le résidu observé venait d'une prédiction imparfaite du mode libre de la FCN puisque son amplitude, dépendant de son excitation, ne peut pas être prédite, car la source principale de son forçage est l'atmosphère (Gégout et al., 1998; Lambert, 2006). Il est cependant possible d'ajuster son amplitude a-posteriori sur les observations de nutation VLBI pour retirer cette oscillation du mode libre. C'est ce qui a été fait par Lambert (2006) comme l'illustre la Fig. 2.6.1.

En réalité, la FCN observée ne se réduit pas au mode libre, mais résulte de la combinaison des oscillations libre amortie et forcée (régime transitoire). Lorsque l'oscillation libre s'est amortie, il ne reste plus que la partie due au forçage et nous sommes alors en régime stationnaire ou permanent (voir Annexe A). Si le forçage est périodique, alors il ne reste plus que l'oscillation liée au forçage. Si, en plus, ce forçage périodique a une fréquence proche de la fréquence du mode propre, alors une résonance sera visible. Le facteur de qualité de la FCN est très élevé (proche de 20 000 d'après Mathews et al., 2002), donc il est peu probable que le régime permanent soit jamais atteint. De plus, sachant qu'une des sources principales de son excitation est l'atmosphère (Gégout et al., 1998), ce mode est continuellement excité et le régime permanent n'est pas atteint (voir Annexe A). L'idée que la surcharge atmosphérique (effet de déformation en pression + effet d'attraction Newtonienne des masses) puisse exciter la FCN a été proposée en premier par Sasao & Wahr (1981).

Dans l'étude citée plus haut, Roosbeek et al. (1999) ont montré que la variabilité éventuelle de la période de la FCN était inférieure à 3 jours (périodes entre 431 et 434 jours). Hinderer et al. (2000) ont ensuite démontré que la variabilité observée dans les données gravimétriques étaient principalement dues au bruit des données. Une corrélation entre variations temporelles des facteurs gravimétriques et du bruit a également été montrée par Calvo et al. (2014) dans le cadre de sa thèse (Calvo, 2015). Durant son séjour d'un an à l'EOST en 2011, sous ma supervision, Xiaoming Cui a reconsidéré la question. Il a analysé la résonance due au noyau liquide dans les données de nutation VLBI et dans les données gravimétriques des SGs. Un article a été publié sur ce sujet (Cui et al., 2014) mettant en évidence un comportement similaire dans les périodes de la FCN provenant d'une part des nutations VLBI et des données gravimétriques d'autre part.

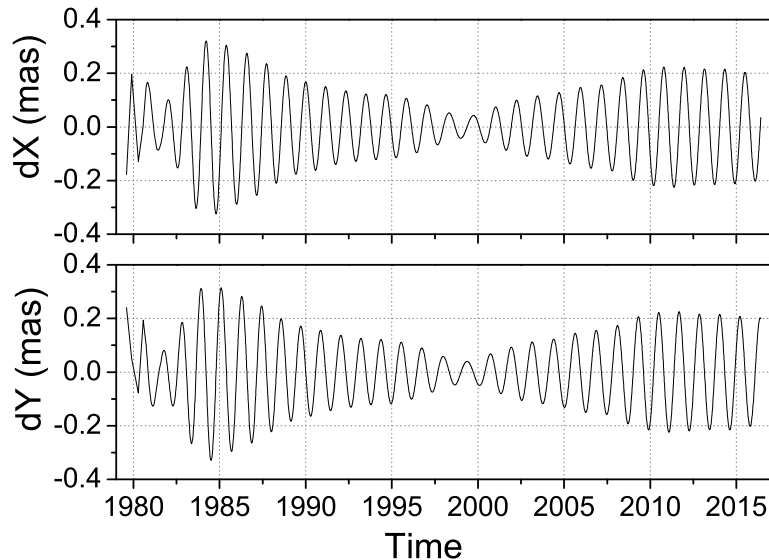


FIGURE 2.6.1: Oscillation de l’axe de figure de la Terre due à la présence du noyau liquide (FCN) estimée à partir des écarts au modèle de précession-nutation IAU 2006 (IERS Conventions, 2010) déterminés par l’analyse des données VLBI. Les séries temporelles correspondantes sont fournies par le centre d’analyse VLBI de l’Observatoire de Paris (<http://iv-sopar.obspm.fr>)

### 2.6.3 INFLUENCE DU CHAMP ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE ET TERMES NON-LINÉAIRES SUR LA ROTATION

L’expression théorique de la fréquence complexe de la FCN fait intervenir différents termes de couplages à la CMB (voir par exemple Mathews et al., 2002; Cui et al., 2014, et l’équation 2.6.1), en particulier un couplage électromagnétique. Une variabilité temporelle de la période de la FCN pourrait provenir d’une variation temporelle de l’un de ces couples. En effet, celle-ci est donnée par (Greff-Lefftz & Legros, 1999; Mathews et al., 2002; Cui et al., 2014)

$$\sigma_{\text{FCN}} = -\Omega \left[ 1 + \frac{A}{A_m} \left( e_f - \beta + K_{\text{CMB}} + K_{\text{ICB}} \frac{A_s}{A_f} + \beta f_2^0 + \frac{B_p + C_p}{2A_f \Omega^2} + i \frac{D_p - A_p}{2A_f \Omega^2} \right) \right], \quad (2.6.1)$$

où  $e_f$  est l’aplatissement dynamique du noyau fluide,  $A_s$ ,  $A_f$  et  $A_m$  sont respectivement les moments principaux d’inertie de la graine, du noyau fluide et du manteau,  $A$  étant celui de la Terre totale;  $K_{\text{CMB}}$  et  $K_{\text{ICB}}$  sont des paramètres complexes de couplage électromagnétique à la CMB et à l’ICB,  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  et  $D_p$  sont les coefficients du couple exercé par la pression géostrophique sur la topographie de la CMB;  $f_2^0$  est le rapport de la pression géostrophique à la CMB sur la pression hydrostatique associée à la rotation, exprimant le pourcentage de rigidification géostrophique du noyau par rapport à l’équilibre hydrostatique. Ce coefficient est très petit ( $f_2^0 \approx 10^{-6}$ ). La rigidification géostrophique d’un fluide apparaît lorsque sa rotation est rapide;  $\beta$  est un paramètre qui caractérise la déformabilité de la CMB sous l’action de la force centrifuge et dépend du nombre de Love de pression interne  $\bar{h}_1^f$  qui



**Encadré 2.3: EQUATIONS DE MAXWELL**

Les équations magnéto-hydrodynamiques, qui décrivent la dynamique du noyau fluide, reposent sur les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{j} \\ \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{cases}$$

où  $\vec{j}$  est la densité de courant. Le champ magnétique  $\vec{B}$ , induit par le champ de vitesse  $\vec{v}$  dans un milieu de conductivité électrique  $\sigma$  et de perméabilité  $\mu$ , obéit à l'équation de l'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} \wedge (\eta \vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (2.6.2)$$

où  $\eta = 1/\sigma\mu$  est la diffusivité magnétique. Cette équation de l'induction représente l'état concurrentiel entre la diffusion du champ magnétique (terme avec  $\eta$ ) et sa régénération par son interaction avec la vitesse du matériau. Le champ magnétique satisfait également à la condition d'incompressibilité (champ solénoïdal) :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

La force de Lorentz, ou force électromagnétique, est la force que subit une particule de charge électrique  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électromagnétique. Elle s'écrit :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Cette force de Lorentz crée un couple à l'interface du noyau

$$\vec{\Gamma} = - \int_{\text{CMB}} \vec{r} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) dv.$$

décrit la déformation de la CMB sous l'effet d'une pression inertielle (Dehant et al., 1993) :  $\beta = q_0 \bar{h}_1^f / 2$  avec  $q_0 = \frac{\Omega^2 r_0^3}{GM}$  le paramètre géodésique défini par le rapport entre l'accélération centrifuge et l'accélération de la pesanteur. L'inclinaison de la graine par rapport au noyau introduit également un couple à l'ICB (Dumberry & Bloxham, 2002) qui n'est pas mis dans l'expression de l'équation 2.6.1. Les effets de la friction à l'ICB et de la viscosité de la graine (Greff-Lefftz et al., 2000, 2002) sont également ignorés dans cette équation.

Il apparaît dans l'Eq. 2.6.1 que si les paramètres de couplage varient dans le temps, alors la fréquence complexe de la FCN varie aussi. Greff-Lefftz & Legros (1999) ont montré que la rigidification géostrophique affectait la période de la FCN d'environ 1.5 min seulement. Ils ont utilisé pour cela le modèle topographique de Forte et al. (1995) et les variations temporelles de la pression fluide à la CMB obtenues par Hulot et al. (1990) afin de calculer les variations temporelles des coefficients  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  et  $D_p$  et de la fréquence de la FCN. Greff-Lefftz & Legros (1999) ont en outre conclu que les mouvements magnétiques dans le noyau fluide ne perturbent pas significativement la période de la FCN (ni celle de l'oscillation de Chandler), ni par le couplage électromagnétique, ni par les déformations élastiques et ni par le couplage topographique associé. Koot & Dumberry (2013) ont étudié l'influence des

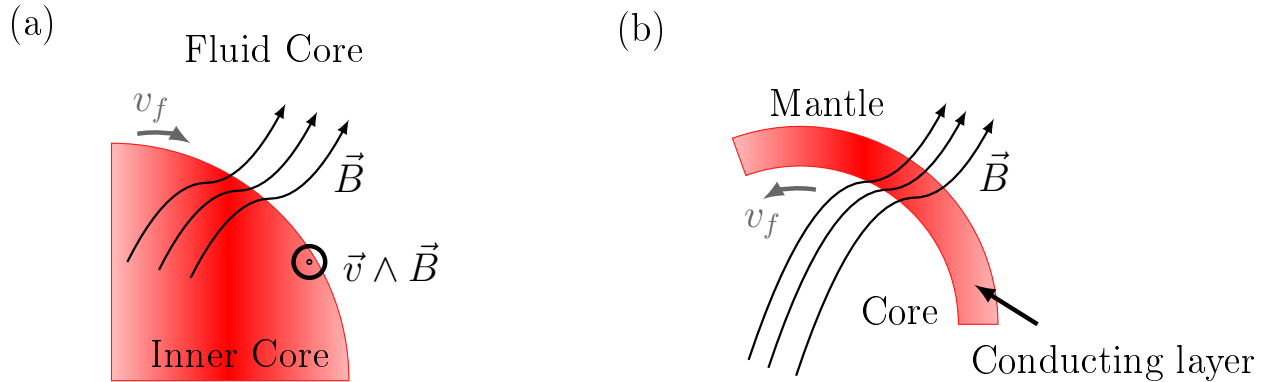


FIGURE 2.6.2: Couplage électromagnétique entre (a) la graine solide et le noyau fluide; (b) le noyau fluide et le manteau. Le mouvement différentiel du noyau et du manteau (resp. de la graine et du noyau) déforme les lignes de champ magnétique à la CMB ce qui créé un couple à l'interface.

autres composantes harmoniques du champ magnétique sur le couple électro-magnétique à l'ICB et à la CMB. Ils ont montré qu'il y a une surévaluation de la constante de couplage à la CMB de  $\sim 15 - 20 \%$  lorsqu'on considère un champ uniforme. La dissipation due à la rugosité de la CMB a également été évaluée par Le Mouél et al. (2006). Cette topographie à petite échelle est due à un équilibre dynamique entre dissolution et dépôt des cristaux du manteau, sur une couche fine (environ 1 m). Cette rugosité a la particularité d'être également variable dans le temps puisque les flux turbulents à la CMB varient.

Concentrons-nous sur le couplage électro-magnétique à la CMB en reprenant les équations de Mathews et al. (2002) et plus particulièrement de Buffett et al. (2002). Quand un fluide conducteur est en mouvement dans un champ magnétique, un champ électrique est induit et des courants électriques apparaissent sur une épaisseur précise appelée « épaisseur de peau » (voir Encadré 2.4). Le champ magnétique exerce des forces sur ces courants qui altèrent le flux, et la présence de ces courants modifie le champ magnétique. Cette interaction complexe entre effets électromagnétiques et dynamique des fluides est décrite par les équations de Maxwell (cf. encadré 2.3) et l'équation de Navier-Stokes (cf. encadré 2.5).

Dans le cas de la nutation du noyau fluide, l'interaction des mouvements de fluide conducteur de part et d'autre des interfaces du noyau avec le champ magnétique qui traverse ces frontières, induit un courant électrique qui va à son tour perturber le champ magnétique. L'augmentation associée de la force de Lorentz (voir Eq. 2.6.2 dans l'encadré 2.3) va s'opposer au mouvement relatif des fluides aux interfaces du noyau, et ainsi introduire un couplage supplémentaire entre la graine et le noyau fluide, ainsi qu'entre le noyau fluide et le manteau (cf. Fig. 2.6.2). Si l'on note  $\vec{b}$  la perturbation du champ magnétique induit par la nutation du noyau fluide et en supposant le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_0$  constant (ce qui est vrai aux échelles de temps considérées ici), l'équation de l'induction Eq. 2.6.2 peut également s'écrire :

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{s} \wedge \vec{B}_0) + \frac{i}{\sigma\mu\omega} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}), & \text{dans le manteau} \\ \vec{b} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{s} \wedge \vec{B}_0), & \text{dans le noyau.} \end{cases}$$

**Encadré 2.4: EFFET DE PEAU**

Lorsqu'un matériau subit un courant continu, les charges se répartissent dans tout le matériau. Par contre, lorsque le courant appliqué est alternatif, les charges seront concentrées en surface, sur une épaisseur dépendant de la fréquence du courant. Plus cette fréquence est élevée, moins les charges pénètrent au cœur du matériau. Dans le cas des courants induits par la perturbation de la rotation du noyau fluide, l'épaisseur de peau dans le manteau conducteur dépend de la diffusivité magnétique  $\eta$  du manteau et de la fréquence angulaire de forçage  $\omega$  via la relation  $d = \sqrt{\frac{2\eta}{|\omega|}}$  (Buffett, 1992), en supposant que l'épaisseur de peau est beaucoup plus petite que la longueur d'onde horizontale du champ magnétique induit.

Le couple électromagnétique qui agit sur la CMB de rayon  $r_b$  est donné par (e.g. Rochester, 1962)

$$\vec{\Gamma}_{\text{CMB}} = \frac{r_b^3}{\mu} \int_{\text{CMB}} (\vec{r} \wedge \vec{b}) B_r dS,$$

avec  $\vec{r}$  le rayon vecteur unitaire,  $\vec{b}$  le champ magnétique secondaire induit par la distorsion du champ magnétique radial  $B_r$ . Dans le cas de la nutation du noyau, ce sont les composantes équatoriales de ce couple qui interviennent dans la constante de couplage  $K_{\text{CMB}}$ , introduite dans l'expression de la fréquence complexe de la FCN (Eq. 2.6.1). Le couple exercé par le noyau fluide sur la graine à l'ICB s'écrit de manière analogue en remplaçant le rayon  $r_b$  par celui de la graine.

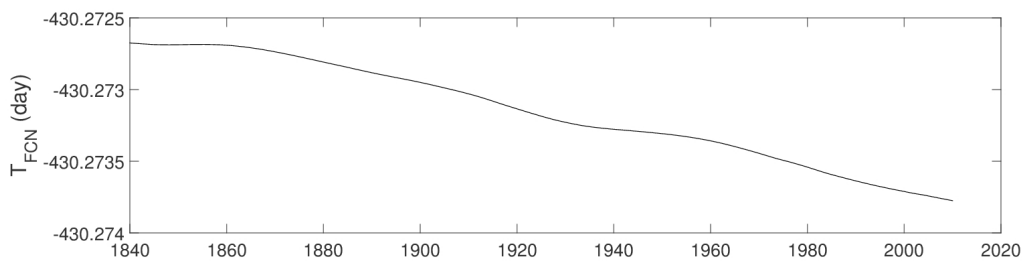


FIGURE 2.6.3: Variations de la période de la FCN dues aux variations temporelles du champ magnétique à la CMB (modèle de champ interne cov-obs de Gillet et al. (2013)).

Si l'on considère l'influence des variations temporelles du champ magnétique  $B_r$  à la CMB, celles-ci sont trop faibles pour influencer de manière notable la période de la FCN (voir Fig. 2.6.3) (moins de 3 minutes de variation sur 60 ans). Cependant les estimations du champ magnétique à la CMB ne contiennent pas toutes les variations possibles car celles-ci sont estompées par le manteau. De plus, des effets d'hétérogénéités latérales de la conductivité de la couche D'' sur le couple exercé à la CMB pourraient avoir une influence également (Koyama et al., 2002).

**Encadré 2.5: EQUATION DE NAVIER-STOKES**

L'équation de Navier-Stokes (ou équation de conservation de la quantité de mouvement) pour un fluide magnétique, de densité  $\rho$  et de vitesse  $\vec{v}$ , s'écrit :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \eta' \nabla^2 \vec{v}$$

avec  $P$  la pression et  $\eta' = \rho\nu$  la viscosité dynamique du fluide.  $\nu$  est alors la viscosité cinématique.

## 2.7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'incertitude sur les observations gravimétriques de la marée polaire sont trop grandes pour déterminer précisément la phase de la réponse à la fréquence de Chandler et donc pour apporter des contraintes sur le comportement rhéologique du manteau.

Certains aspects de l'oscillation de Chandler demeurent irrésolus, en particulier le doublement de sa fréquence. Des éléments de réponse seront apportés par la modélisation, car, Rogister & Valette (2009) ont déjà montré que la dynamique du noyau liquide démultipliait les périodes du mode de Chandler. Dans cette mesure la dynamique des océans peut avoir un rôle similaire et doit être inclus dans la modélisation.

---

## CHAPITRE 3

# LES MODES DE TRANSLATION DE LA GRAINE

### 3.1 ENJEUX

L'existence de la graine a été prouvée grâce à l'observation des ondes sismiques par Inge Lehmann en 1936 (Lehmann, 1936) mais il faut attendre 1971, avec les travaux de Dziewonski & Gilbert (1971) sur les modes propres sismiques, pour avoir la preuve observationnelle de la rigidité de la graine. Celle-ci avait déjà été suggérée par Birch (1940) qui proposa, sur la base d'arguments thermodynamiques, une composition de fer cristallisé à partir du fer liquide provenant du noyau externe. Cette idée a été reprise par Jacobs (1953). De nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont depuis confirmé ce concept largement accepté aujourd'hui d'une graine qui cristallise de manière continue en réponse au lent refroidissement de la Terre (voir Nimmo (2007) pour une revue). Dans ce contexte, la frontière qui sépare la graine solide du noyau liquide est donnée par l'intersection entre le profil de température de solidification (courbe de Clausius-Clapeyron) et l'adiabat (profil géothermique). Le saut de densité associé au changement de phase solide - liquide du fer est de l'ordre de  $200 \text{ kg/m}^3$  (Alfé et al., 2003). Cependant les observations sismologiques prédisent des valeurs largement plus grandes (par exemple  $600 \text{ kg/m}^3$  pour le modèle de référence PREM - Dziewonski & Anderson (1981)) que cette valeur due au seul changement d'état. La différence est attribuée à un changement de composition entre la graine et le noyau. En introduisant des éléments légers (soufre, silicium et oxygène) à la fois dans le noyau liquide et dans la graine solide, il est possible d'obtenir un saut de densité cohérent avec les observations sismologiques (Alfé et al., 2002). Le fractionnement en éléments légers est crucial pour évaluer le taux de convection compositionnelle dans le noyau liquide qui permet de maintenir efficacement la géodynamo (par exemple Loper, 1978; Gubbins et al., 1979) à l'origine du champ magnétique terrestre. Gubbins et al. (2013) ont montré que ce partitionnement est également crucial pour la dynamique de la graine. Nous faisons également référence aux deux articles de revue par Deguen (2012) et Alboussière & Deguen (2012) qui résument très bien notre connaissance de la structure et dynamique de la graine et de ses différents modes de convection.

Cependant, pour mieux déterminer la composition du noyau, il est nécessaire de bien connaître le saut de densité à l'ICB. En effet, un saut de densité plus grand, exigerait une concentration en oxygène dans le noyau liquide plus élevée (par exemple Gubbins et al.,

2013) ; la concentration des autres éléments légers (S, Si) serait alors réduite afin de conserver la masse totale du noyau. Un saut de densité élevé signifie aussi que la dynamo peut être maintenue avec des taux de croissance de la graine plus lents. L'âge de la graine est lui aussi mal connu, avec une valeur entre 200 millions et 1.5 milliards d'années (Nimmo, 2007). Or, la valeur du saut de densité à l'interface graine - noyau liquide est très mal contrainte avec des valeurs pouvant aller de  $520 \text{ kg/m}^3$  (Koper & Dombrovskaya, 2005) à  $800 \text{ kg/m}^3$  (Masters & Gubbins, 2003) (voir le chapitre de revue 3.2 ci-après). En introduisant une couche stratifiée de 200 km d'épaisseur à l'ICB, Gubbins et al. (2008) ont proposé un modèle qui réconcilie le saut de densité déduit des modes propres sismiques - ceux-ci ont une résolution de plusieurs centaines de kilomètres et sont donc sensibles à la différence de la densité moyenne à la base du noyau fluide et de la densité moyenne de la graine - de celui estimé par les ondes sismiques - ayant une résolution de quelques kilomètres et donc sensibles au saut de densité à l'ICB-même. Dans cette mesure, une observation des modes de translation de la graine apporterait de nouvelles contraintes fondamentales sur la structure et la dynamique de la graine et du noyau.

## 3.2 UNE REVUE

L'existence des modes de translation de la graine a soulevé de nombreuses controverses à la fois théoriques et observationnelles. D'un point de vue théorique, il semblerait désormais que sa période soit communément admise autour de 5.42 h (Rogister, 2003) pour un modèle de Terre de type PREM (Dziewonski & Anderson, 1981). La preuve observationnelle n'a pas encore été apportée malgré quelques études sujettes à caution rapportant sa détection dans les données de gravimètres supraconducteurs. De nombreux papiers ont été publiés, même encore très récemment, par exemple Ding & Shen (2013), afin de détecter la perturbation gravimétrique associée à ce mode propre de la Terre en utilisant des méthodes d'analyse des signaux plus ou moins sophistiquées. En 2011, j'ai rédigé un chapitre d'ouvrage intitulé "A Review of the Slichter Modes : an Observational Challenge" paru dans "The Earth's Core : Structure, Properties and Dynamics", Editeur : Jon M. Phillips, Nova Science Publishers, Inc., pp. 63-77. Ce chapitre propose un état de l'art concernant les modes de translation de la graine. Depuis sa parution, on peut citer quelques papiers qui ont proposé une nouvelle méthode appliquée à la recherche des modes de Slichter : par exemple, Ding & Shen (2013); Ding & Chao (2015).

**A review of the Slichter modes: an observational challenge**

Severine ROSAT

Institut de Physique du Globe de Strasbourg, IPGS - UMR 7516 ; CNRS et Université de Strasbourg (EOST); 5 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

**Abstract**

The free translational oscillations of the inner core, the so-called Slichter modes have been a subject of observational controversy. Its detection has never been undoubtedly validated. Also, it motivated additional theoretical studies. The search for the Slichter modes was invigorated by the development of worldwide data recorded by superconducting gravimeters (SGs) of the Global Geodynamics Project. Thanks to their long-time stability and low noise level, these relative gravimeters are the most suitable instruments to detect the small gravity signals that would be expected from the Slichter modes. The theory is now better understood and the most recent computation predicts eigenperiods between 4 h and 6 h for the seismological reference PREM Earth model. A more recent study states that the period could be much shorter because of the kinetics of phase transformations at the inner-core boundary (ICB). The observation of the Slichter modes is fundamental because, the restoring force being Archimedean, their periods are directly related to the density jump at the ICB. This parameter is still poorly known. The analysis from seismic PKiKP/PcP phases or from normal modes observation leads to discrepancies in ICB density contrast estimates. This parameter should satisfy both the constraints set by powering the geodynamo with a reasonable heat flux from the core, and PKP travel-times and normal mode frequencies.

This paper gives a review of the theoretical backgrounds as well as of the attempts to detect such free oscillations. Some possible excitation sources are also investigated to evaluate the expected amplitude of the Slichter modes. The seismic source has been previously studied to demonstrate that an earthquake of magnitude  $M_w = 9.8$  would be necessary to excite the Slichter mode to the nanogal level ( $\approx 10^{-12}$  g where g is the mean surface gravity) at the Earth's surface. Earthquakes are therefore not the most suitable source to excite the Slichter mode to a level sufficient for the SGs to detect the induced surface gravity effect. Surficial pressure flow acting in the core has also been considered as a possible excitation source. The later turns out to be the best way to excite the translational motion of the inner core. However we have little information about the fluid pressure amplitudes acting in the core at those frequencies. The observation of this Earth's normal mode is still an open challenge and the development of new generations of instruments with lower noise at such frequencies would be the only chance of detection.

**Introduction**

The observation in an earth-tide gravimeter record of the Earth's free oscillations after the large 1960 Chile earthquake revealed a spectral peak of period 86 min that Slichter (1961) interpreted as being the signature of the translational oscillation of the inner core. Since then, we call this free oscillation the Slichter modes. They have been a subject of observational controversy since the first detection by Smylie (1992) of a triplet of frequencies that he attributed to these free oscillations of the inner core. This detection has been supported by Courtier et al. (2000) and Pagiatakis et al. (2007) but has never been validated by other

authors (e.g. Hinderer et al., 1995; Jensen et al., 1995; Rosat et al. 2006; Guo et al. 2007). Also, it motivated additional theoretical studies (e.g. Crossley, 1992; Crossley et al., 1992; Rochester and Peng, 1993; Crossley and Rochester, 1996; Smylie and McMillan, 2000; Rieutord, 2002; Rogister, 2003). The search for the Slichter modes was indeed invigorated by the development of worldwide data recorded by superconducting gravimeters (SGs) of the Global Geodynamics Project (GGP; Hinderer and Crossley, 2000). Thanks to their long-time stability and low noise level (a few nGals at Slichter frequencies;  $1 \text{ nGal} = 10^{-2} \text{ nm/s}^2 \approx 10^{-12} \text{ g}$  where  $g$  is the mean surface gravity), these relative gravimeters are the most suitable instruments to detect the associated surface gravity perturbation (Hinderer et al., 1995; Rosat et al., 2003, 2004).

The observation of the Slichter modes is fundamental because, the restoring force being Archimedean, their periods are directly related to the density jump at the inner core boundary (ICB). This density jump is a key parameter for evaluating the gravitational energy released from the cooling and solidification of the core (Loper 1978; Masters 1979; Morse 1986). The crystallization of the Earth's fluid core is probably the most important source of energy to power the geodynamo (Verhoogen 1961; Gubbins 1977; Anderson and Young 1988). However the density at ICB is still poorly known: by analyzing seismic PKiKP/PcP phases, Koper and Pyle (2004) found that it should be smaller than  $450 \text{ kg/m}^3$ , later increased to  $520 \text{ kg/m}^3$  (Koper and Dombrovskaya, 2005), whereas Masters and Gubbins (2003) obtained  $820 \pm 180 \text{ kg/m}^3$  from normal modes observation. Tkalcic et al. (2009) have shown that the uncertainties associated with the seismic noise might partially explain such discrepancies in ICB density contrast estimates. Gubbins et al. (2008) have proposed a model with a large overall density jump between the inner and outer cores of  $800 \text{ kg/m}^3$  and a sharp density jump of  $600 \text{ kg/m}^3$  at the ICB itself. Such a model satisfies both the constraints set by powering the geodynamo with a reasonable heat flux from the core, and PKP travel-times and normal mode frequencies. The value of the density jump at ICB for the PREM model (Dziewonski and Anderson, 1981) is  $600 \text{ kg/m}^3$ .

Moreover a convincing detection of this normal mode could also constrain the viscosity at the ICB (e.g. Smylie and McMillan, 1998 and 2000; Rieutord, 2002). The estimates of the core viscosity are spanning several orders of magnitudes, ranging from  $10^2$  to  $10^{11} \text{ Pa.s}$ , according to the method used: laboratory experiments, theoretical developments or observations. More details are given on the estimated values of this parameter in the section related to the damping of the inner core motion.

### **Theoretical eigenperiod for the Slichter mode**

The first evidence of the existence of the translational oscillation of the inner core was proposed by Slichter in 1961. Alsop (1963) computed the elastic gravitational free oscillations of a spherically stratified non-rotating Earth and provided the first theoretical evidence of the existence of the Slichter mode. Then Smith (1976) computed the normal mode eigensolutions of the Slichter modes for a rotating, slightly elliptical Earth model.



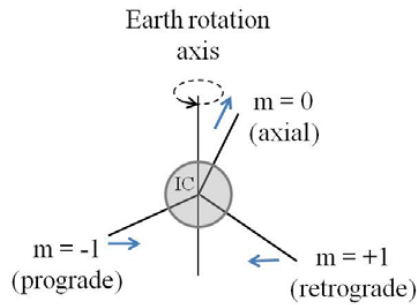


Fig. 1 Schematic view of the three translational oscillations of the inner core.

In a spheroidal harmonic development the Slichter mode corresponds to a degree one ( $l = 1$ ) harmonic. When we consider an elliptically rotating Earth, the Slichter mode is split into three modes with harmonic orders  $m = -1, 0$  and  $1$ , hence the so-called Slichter triplet. Smith (1976) also described the adjacent fluid particles motions associated with the motion of the solid inner core. In the equatorial plane, the fluid particles have an elliptical trajectory with a polarization opposite to the polarization of the inner core motion. The difference between the trajectories for  $m = -1$  and  $m = +1$  is principally due to the Coriolis forces. The center of mass of the inner core has a circular motion but the inner core does not rotate. A spear stuck into the inner core would remain parallel to its initial position (Smith, 1976). So the Slichter modes consist of three translational oscillations (Fig. 1): two translations in the equatorial plane corresponding to prograde ( $m = -1$ ) and retrograde ( $m = +1$ ) modes and one axial mode ( $m = 0$ ) along the axis of rotation. The terms retrograde and prograde refer to the sense of motion of the center of mass of the inner core with respect to the Earth's steady rotation. Smith (1976) obtained theoretical eigenperiods for the Slichter triplet between 4 h and 5 h (cf. Table 1).

Afterwards, many authors have proposed different values for the Slichter modes with periods ranging from 3 h to 7 h depending on the computation method and the Earth's model (cf. Table 1). An early calculation for an Earth model constrained by free oscillations observations by Dahlen and Sailor (1979), using second-order perturbation theory, but neglecting viscosity, gave periods in the 4 h to 5 h range. Crossley (1992) obtained values similar to those of Dahlen and Sailor (1979) for the CORE11 model (Widmer et al., 1988) while Smylie (1992), relying on his observational detection, obtained smaller eigenperiods for the 1066A Earth's model of Gilbert and Dziewonski (1975). Indeed Smylie (1992) and Smylie et al. (1993) proposed a theoretical computation of the Slichter modes, for the 1066A and CORE11 models, based on the sub-seismic approximation (Smylie and Rochester, 1981) that could explain their detected periods (cf. Table 1). However, Crossley et al. (1992) noted that Smylie's eigenperiods conflict significantly with all previously published periods, because of the inadequate use of static Love numbers instead of a dynamic theory. While Denis et al. (1997) argued that the main reason for the noted discrepancy may lie in the use of inadequate boundary conditions, combined with the fact that the computations rely on the sub-seismic approximation as well as on a variational approach.

Denis et al. (1997) have computed the eigenperiod for a non-rotating PREM model and obtained a value of 5.4202 h which confirms also the value obtained by Hinderer and Crossley (1993). Besides, they showed that because of the Earth's hydrostatic flattening, the density jump at the ICB should be less than PREM value and as a consequence, the Slichter period should be larger than 5.42 h.

Peng (1997) has studied the effect of a mushy zone at the ICB on the Slichter modes to show that the influence of the mushy boundary layer is substantial compared with some other effects, such as those from elasticity of the mantle, non-neutral stratification of the liquid outer core and ellipticity of the Earth and centrifugal potential. He finally set a lower bound on the central eigenperiod of the Slichter mode of about 5.3 h for a PREM model.

Later on, Smylie et al. (2009) proposed periods in agreement with Crossley's values for the CORE11, 1066A and PREM Earth's models. Other estimates for the DG579 (Gilbert and Dziewonski, 1974, *not published*), Cal8 (Bolt and Urhammer, 1975) and Busse (1974) Earth models are also given in Table 1.

Finally, according to the most recent computations, the Slichter periods should be between 4 h and 6 h with a central period for the seismological reference PREM Earth's model around 5.3 h when computed by Rogister (2003) using the normal mode theory, or around 5.2 h when computed by Smylie et al. (2009) using the Ekman boundary layer theory of a dynamic viscometer oscillating in the contained, rotating fluid outer core.

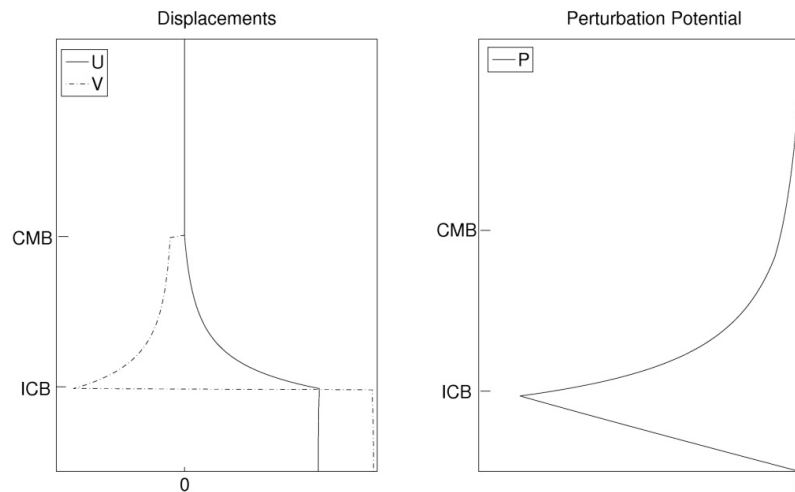


Fig. 2 Displacement and potential eigenfunctions of the Slichter mode. U and V are respectively the radial and tangential displacements, and P is the perturbation of the gravitational potential. ICB refers to the inner core boundary and CMB to core-mantle boundary.

	Periods for the Slichter triplet (hour)			Method
	m = -1	m = 0	m = 1	
<b><i>Earth's models</i></b>				
<b><i>DG579</i></b>				
Smith (1976)	4.055	4.441	4.916	Normal Mode Theory
<b><i>Cal8</i></b>				
Smylie et al. (2009)	3.5168	3.7926	4.1118	Ekman boundary layer theory + inviscid
Smylie et al. (2009)	3.5840	3.7731	4.0168	Ekman boundary layer theory + viscous
<b><i>CORE11</i></b>				
Dahlen and Sailor (1979)	5.1663	5.8044	6.598	perturbation theory
Smylie (1992)	3.3432	3.5056	3.7195	perturbation theory + SSA + static Love numbers
Crossley (1992)	5.1603	5.7993	6.6029	Normal Mode Theory
Crossley et al. (1992)	3.950	4.438	4.896	perturbation theory + SSA + dynamic Love numbers
Smylie et al. (2009)	5.1280	5.7412	6.5114	Ekman boundary layer theory + inviscid
<b><i>1066A</i></b>				
Dahlen and Sailor (1979)	4.1284	4.5338	5.014	perturbation theory
Crossley (1992)	4.127	4.5329	5.0161	Normal Mode Theory
Smylie (1992)	2.6035	2.7023	2.8247	perturbation theory + SSA + static Love numbers
Register (2003)	4.129	4.529	5.024	Normal Mode Theory
Smylie et al. (1993; 2009)	4.0491	4.4199	4.8603	Ekman boundary layer theory + inviscid
<b><i>no viscosity</i></b>				
Crossley (1992)	3.95	4.438	4.896	Normal Mode Theory
Rieutord (2002)	3.894	4.255	4.687	Spectral method
<b><i>PREM</i></b>				
Dahlen and Sailor (1979)	4.7704	5.3129	5.975	perturbation theory
Crossley (1992)	4.7667	5.3104	5.9792	Normal Mode Theory
Register (2003)	4.77	5.309	5.991	Normal Mode Theory
Smylie et al. (2009)	4.6776	5.1814	5.7991	Ekman boundary layer theory + inviscid
<b><i>Busse's model</i></b>				
Rieutord (2002)	3.83361	4.18965	4.61423	Spectral method
<b><i>Detected peaks</i></b>				
Smylie (1992)	3.5820	3.7677	4.0150	Product spectrum of 4 SG records
Courtier et al. (2000)	3.5855	3.7680	4.0125	Multistation experiment
Pagiatakis et al. (2007)	4.269	4.516	4.889	Least-squares self-coherency of one SG record

Table 1. Predicted and detected eigenperiods of the Slichter triplet. SSA stands for sub-seismic approximation.

However a more recent study by Grinfeld and Wisdom (2010) states that the period could be much shorter than 5 h because of the kinetics of phase transformations at the ICB. But their computation was based on very simple models and this effect still has to be studied more deeply.

### **Damping of the inner core motion**

Besides the large uncertainty on the period of the Slichter mode, we have poor constraints on its damping. The damping rate depends on the dissipation processes involved. Three sources of damping have been considered previously: the anelastic deformations of the inner core and mantle, the viscous dissipation and the magnetic dissipation in the core.

Crossley et al. (1991) have shown that the damping due to the seismic anelasticity of the inner core and mantle has a  $Q$  value of the order of 5000 with a corresponding damping time of 400 days.

The damping due to the outer core viscosity has been formulated by Smylie and McMillan (1998; 2000) and Rieutord (2002). The estimates of the dynamic viscosity of the fluid outer core range from  $1.6 \cdot 10^{-2}$  Pa.s using laboratory experiments (Rutter et al. 2002), giving a  $Q$  value of the order of  $10^7$ , to  $1.2 \cdot 10^{11}$  Pa.s (Smylie and McMillan, 2000) using the claimed Slichter modes by Courtier et al. (2000), giving a  $Q$  value less than 10 for a period of 5.5 hours. Smylie (1992) measured a quality factor of the resonance between 100 and 400, for a damping time of 6 days, and direct measurements on Fig. 5 of Courtier et al. (2000) shows even higher values, while Ekman numbers found by Smylie and McMillan (2000) imply quality factors less than 10 (Rieutord, 2002). Mathews and Guo (2005) have proposed an upper limit of  $1.7 \cdot 10^5$  Pa.s using nutation data corresponding to a  $Q$  value of 5000 (cf. also Guo et al. 2007).

The magnetic damping of the inner core oscillation has been studied by Buffett and Goertz (1995). They have shown that the  $Q$  value should be between  $5.8 \cdot 10^5$  and 2200 for a magnetic field ranging from 0.0005 to 0.001 Tesla corresponding to an e-folding time of the oscillation as long as 108 years or as short as 150 days for a nominal period of 5.2 hours.

Such studies reveal that it should be difficult for the damping factor of the Slichter mode to be less than 2000, corresponding to a damping time of 144 days. In such a case, the induced surface gravity perturbation should be more easily detectable.

### **Excitation of the Slichter mode**

The mechanism of excitation for the Slichter mode is not well-known. It could be excited by some turbulent flows in the core or by a large earthquake. When looking at the displacement and potential eigenfunctions of the Slichter mode for a PREM Earth's model (Fig. 2), we can see that the largest displacement of the Slichter mode occurs at the ICB. Then it is strongly attenuated as it goes through the liquid outer core. When the motion finally propagates to the surface of the Earth, it is very weak. So the induced surface signal is expected to be elusive.

The seismic excitation has been previously studied by Smith (1976), Crossley (1987; 1992) and Rosat (2007). The later authors have shown that the best natural focal mechanism to excite the Slichter mode is a vertical dip-slip source. Besides, the excitation amplitude is

directly related to the seismic magnitude of the event. The largest event in the past was the 1960 Chile earthquake with a magnitude  $M_w = 9.6$  for the main shock. A foreshock occurred with a magnitude of 9.5 (Kanamori and Cipar, 1974). The combination of both events leads to a seismic source of magnitude  $M_w = 9.8$  which would have excited the Slichter mode to the nanogal level ( $1 \text{ nGal} = 10^{-2} \text{ nm/s}^2$ ), with a maximum amplitude of 1.5 nGal (cf. Table 2). Rosat (2007) has shown that the magnitude  $M_w$  necessary to excite the Slichter mode so that the induced surface gravity effect reaches 1 nGal should be at least  $M_w = 9.68$  (Fig. 3). Till now only the 1960 Chile earthquake would have been capable of exciting the Slichter mode to such a level.

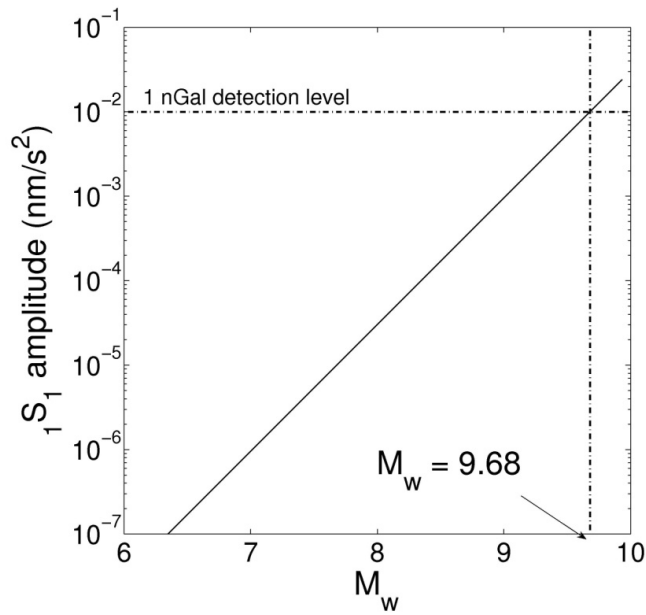


Fig. 3 Surface gravity effect associated to the excitation of the Slichter mode by a vertical dip-slip source earthquake (same focal mechanism as for the 1960 Chilean earthquake) as a function of the seismic magnitude.

Earthquakes are therefore not the most efficient way to excite the Slichter mode to a level sufficient for the SGs to detect the induced surface gravity effect.

Event	Chile 1	Chile 2	Chile 1+2	Alaska	Bolivia	Peru	Andaman-Sumatra
Date	1960	1960	1960	1964	1994	2001	2004
Moment (N.m)	$2.7 \cdot 10^{23}$	$3.5 \cdot 10^{23}$	$6.2 \cdot 10^{23}$	$7.5 \cdot 10^{22}$	$2.6 \cdot 10^{21}$	$4.7 \cdot 10^{21}$	$1.1 \cdot 10^{23}$
Magnitude $M_w$	9.5	9.6	9.8	9.2	8.2	8.4	9.3 <sup>1</sup>
Depth (km)	25	50	38	50	640	30	28
Reference	Kanamori and Cipar (1974)			Kanamori (1970)	Harvard CMT*		
	Surface gravity effect in nGal (= $10^{-2} \text{ nm/s}^2$ )						
Smith (1976)	0.94	1.2	-	0.58	-	-	-
Crossley (1992)	0.724	0.835	1.520	0.336	0.02 <sup>2</sup>	-	-
Rosat (2007)	0.656	0.853	1.509	0.193	0.007	0.010	0.286

<sup>1</sup> Stein and Okal (2005)

<sup>2</sup> personal communication

\* The Harvard Centroid Moment Tensor is available at: <http://www.globalcmt.org>

Table 2. Maximum excitation amplitude of the Slichter mode after the major past earthquakes.

Greff-Lefftz and Legros (2007) have considered a degree-one pressure flow acting at the outer core boundaries as a possible excitation mechanism. They computed the degree-one elasto-gravitational deformations for a simple Earth model (constituted of three homogeneous layers: a solid inner core, an incompressible fluid outer core and a rigid mantle) and estimated an excitation amplitude of 50 nGal at the Earth's surface for a pressure flow of about 150 Pa acting during a time close to the Slichter period (3 h for their Earth's model). More recently, Rosat and Rogister (2011) used the theory of the normal modes with the Green function formalism to compute also the excitation of the Slichter mode by a degree-one pressure acting at the outer core boundaries but for a more realistic PREM Earth's model. The computation leads to the surface gravity variations plotted in Fig. 4 as a function of the time-duration and the amplitude of the acting pressure. Their results show larger excitation amplitudes than the one obtained by Greff-Lefftz and Legros (2007). The differences must certainly come from the use of different Earth's model, as the compressibility and the stratification of the liquid outer core have a large influence on the Slichter mode (Rogister 2003). Besides they showed that the largest perturbation of the surface gravity field occurs when the time duration  $\tau$  of the acting pressure is smaller than half the Slichter period. In such a case, an 81 Pa pressure flow acting at the ICB is enough to induce a translation of the inner core of 50 mm corresponding to a 10 nGal surface gravity perturbation, which should be detectable by SGs (Rosat and Hinderer, 2011).

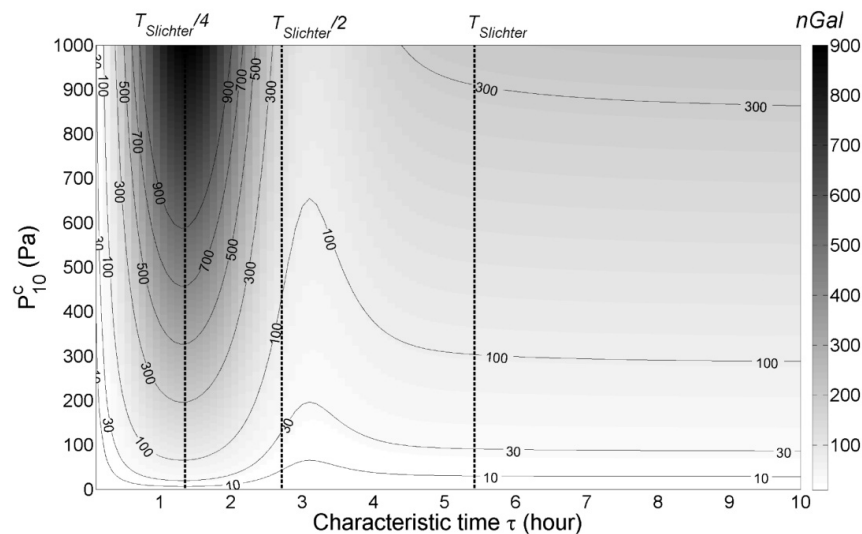


Fig. 4 Surface gravity perturbation in nGal induced by the Slichter mode excited by a zonal degree-one pressure flow acting at the CMB for different excitation time-scales and various pressure amplitudes. The vertical dotted lines respectively correspond to one quarter of the Slichter period, one half of the Slichter period and the Slichter period (after Rosat and Rogister, 2011).

Rosat and Rogister (2011) have also computed the excitation amplitude of the Slichter mode induced by a degree-one pressure load applied on the Earth's surface. When applying a surface pressure variation of 1000 Pa during  $2\tau = 3$  h, the induced surface gravity perturbation can reach an amplitude of 5 nGal corresponding to an inner-core translation of

15 mm. When the excitation time-scale is larger than the Slichter period, the excitation amplitude is smaller.

Note that previous computations were made with analytical expressions for the pressure flow as we have no information about the pressure flow in the core at such time-scales and surface atmospheric or oceanic data have a time resolution larger than the Slichter period.

Another efficient way to trigger a degree-one motion could be a sudden shock at the Earth's surface. Rosat and Rogister (2011) have also computed the amplitude of the Slichter mode excited by the impact of a meteoroid. The drag by the atmosphere was taken into account in their computation as well as the possible breakup of the extra-terrestrial object. They used a seismic efficiency parameter to convert the shock wave generated by the impact into an equivalent seismic energy. Then the problem turns out to be equivalent to the excitation by a seismic explosion at the Earth's surface. Their results have shown that even for the biggest meteoroid, the surface excitation amplitude of the Slichter mode is less than 1 nGal (cf. Table 3). However, they used a seismic efficiency of  $k_s = 10^{-4}$  and there is a large uncertainty on this parameter as its value can range from  $10^{-5}$  to  $10^{-3}$  (Schultz and Gault, 1975). With a seismic efficiency ten times larger, i.e.  $k_s = 10^{-3}$ , the meteoroid impact which created the Chicxulub crater in Mexico 64.98 million years ago, would have released a seismic energy equivalent to an  $M_w = 10$  explosive source. Such a mechanism would have excited the inner-core translational mode so that the associated surface gravity perturbation would have reached 19 nGal. This large gravity signature would have been detectable by SGs.

Location	Date (AD or My BP)	Diameter (m)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	M <sub>w</sub>	Δg (nm/s <sup>2</sup> )
Tunguska Fireball, Siberia	1908 AD	60	2700 (rock)	No impact	
Ries Crater, Germany	15.1 ± 0.1	1500	2700 (rock)	7.4	3 10 <sup>-6</sup>
Rochechouart, France	214 ± 8	1500	3350 (stony-iron)	7.5	3 10 <sup>-6</sup>
Chesapeake Bay, USA	35.5 ± 0.3	2300	2700 (rock)	7.8	10 <sup>-5</sup>
Chicxulub, Mexico	64.98 ± 0.05	17500	2700 (rock)	9.6	4 10 <sup>-3</sup>

Table 3. Some known meteoroid impacts on the Earth. The impact angle is supposed to be 45 degrees and the velocity of the extraterrestrial object when it enters the Earth's atmosphere is 20 km/s. The seismic efficiency has been fixed to  $k_s = 10^{-4}$ .

As a conclusion, seismic events, extra-terrestrial object impacts and surface pressure loads are not much efficient to excite the Slichter mode with an amplitude large enough to be detected at the surface by SGs. On the other hand, a degree-one pressure flow acting at the outer core boundaries is the best mechanism to excite the translational modes of the inner

core. However no computation has been done using actual values for the surface pressure variations.

### **Search for the Slichter triplet**

Although the Slichter mode is crucial in determining the density contrast across the ICB, its detection remains very challenging. As seen in the previous section, the difficulty mainly comes from its small predicted surface signal. The search for its surface signature began in fact with the venue of relative superconducting gravimeters. SGs are currently the most suitable instruments, in terms of stability, accuracy and precision, to detect the surface gravity effect induced by the translational oscillation of the inner core. However, as shown by Rosat et al. (2004) and Rosat and Hinderer (2011), their noise levels at Slichter frequencies are at the limit of the nanogal amplitude. As a consequence, only a combination of the best SG records could help detecting nanogal signals induced by the core.

The observational controversy started with the claim of an identification of the Slichter triplet in the product spectrum of four SG records by Smylie (1992). Then various authors combined SG records to try to confirm Smylie's first claim: for instance Jensen et al. (1995), using a product spectrum, and Hinderer et al. (1995), using a cross spectrum of SG data, could not validate Smylie's first detection. Later, Courtier et al. (2000) proposed a stacking method, called the multi-station experiment, which enhances the harmonic degree-one modes and suggested a candidate for the Slichter triplet very similar to the one detected by Smylie (1992).

Then, some more recent attempts by Rosat et al. (2003; 2006) and Guo et al. (2006, 2007) using sophisticated stacking and detection methods on less noisy SG data have not led to the confirmation of this potential candidate. Later, Rosat et al. (2007) have tried a wavelet-analysis method and Rosat et al. (2008) have used a non-linear harmonic analysis tool on various stacked SG datasets, in vain. On the other hand, Pagiatakis et al. (2007) have applied a least-squares self-coherency analysis on one SG record from Cantley (Canada) and detected a triplet of frequencies close to Smylie's triplet. However they performed the analysis on only one site while the Slichter mode signature would be global. Moreover, theoretical developments by Rieutord (2002) and Rogister (2003) concluded that Smylie's observed frequency was inconsistent with the predictions.

No unambiguously new detection of the Slichter modes has been proposed yet.

### **Conclusion**

We have reviewed the major past theoretical developments concerning the Slichter triplet as well as the main efforts performed for its detection in superconducting gravimetry data. Some possible mechanisms of excitation have also been investigated. From this review, we can conclude that the Slichter mode eigenperiod should be around 5 h with a lower bound



for the quality factor of 2000. Besides, it would be best excited by a degree-one pressure flow acting at the core boundaries at time-scales shorter than its period. As we do not know the pressure flow at the CMB at short time-scales, there is still some uncertainty on the expected surface excitation amplitude of the Slichter mode.

The detectability of the Slichter modes depends on the magnitude of the response of the inner core to the geodynamic excitation process and on its decay rate. As the Slichter modes have not yet been undoubtedly detected, we can suppose that their amplitudes are too small so that they are hidden by the noise. Consequently, only instruments with lower noise at sub-seismic frequencies would be able to detect its signature on the Earth's surface.

### **Bibliography**

Alsop, L.E. (1963). Free spheroidal vibrations of the earth at very long periods, 2, Effect of rigidity of the inner core, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 53, 503.

Anderson, O.L. and Young, D.A. (1988). Crystallization of the Earth's inner core, in *Structure and Dynamics of Earth's Deep Interior*, pp. 83-90, eds Smylie, D.E. and Hide, R., AGU.

Bolt, B. A., Urhammer R. (1975), Resolution techniques for density and heterogeneity in the Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 42, 419-435.

Buffett, B. and Goertz, D.E. (1995). Magnetic damping of the translational oscillations of the inner core, *Geophys. J. Int.*, 120, 103-110.

Busse, F.H. (1974). On the free oscillation of the Earth's inner core, *J. Geophys. Res.* 79, 753-757.

Courtier, N., Ducarme, B., Goodkind, J., Hinderer, J., Imanishi, Y., Seama, N., Sun, H., Merriam, J., Bengert, B., Smylie, D.E. (2000). Global superconducting gravimeter observations and the search for the translational modes of the inner core, *Phys. Earth Planet. Int.*, 117, 320.

Crossley, D. (1987). The excitation of core modes by Earthquakes, in *Structure and Dynamics of Earth's Deep Interior, Geophys. Monogr., 46/IUGG Ser.*, Vol. 1, pp. 41-50, eds D.E. Smylie and R. Hide, AGU, Washington, DC.

Crossley, D.J. (1992). Eigensolutions and seismic excitation of the Slichter mode triplet for a fully rotating Earth model, *EOS*, 73, 60.

Crossley, D.J., Hinderer, J. and Legros, H. (1991). On the excitation, detection and damping of core modes, *Phys. Earth Planet. Int.*, 68, 97-116.

Crossley, D.J., Rochester, M.G., Peng, Z.R. (1992). Slichter modes and love numbers. *Geophys. Res. Lett.* 19, 1679-1682.

- Crossley, D.J., Rochester, M.G. (1996). The subseismic approximation in core dynamics. II. Love numbers and surface gravity. *Geophys. J. Int.* 125, 839–840.
- Dahlen, F.A. and Sailor, R.V. (1979). Rotational and elliptical splitting of the free oscillations of the Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 58, 609-623. Dziewonski, A.M., Anderson, D.L. (1981). Preliminary reference Earth model (PREM), *Phys. Earth Planet. Int.*, 25, 297-356.
- Denis, C., Rogister, Y., Amalvict, M., Delire, C., Ibrahim Denis A., Munhoven, G. (1997). Hydrostatic flattening, core structure, and translational mode of the inner core, *Phys. Earth Planet. Int.*, 99, 195-206.
- Dziewonski, A.M., Anderson, D.L. (1981). Preliminary reference Earth model (PREM), *Phys. Earth Planet. Int.*, 25, 297-356.
- Gilbert, F. and Dziewonski, A. (1975). An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A278, 187–269.
- Greff-Lefftz, M. and Legros, H. (2007). Fluid core dynamics and degree-one deformations: Slichter mode and geocenter motions, *Phys. Earth Planet. Int.*, 161, 150-160.
- Grinfeld, P. and Wisdom, J. (2010). The effect of phase transformations at the inner core boundary on the Slichter modes, *Phys. Earth Planet. Int.*, 178, 3-4, 183-188.
- Gubbins, D. (1977). Energetics of the earth's core, *J. Geophys.*, 43, 453-464.
- Gubbins, D., Masters, G. and Nimmo, F. (2008). A thermochemical boundary layer at the base of Earth's outer core and independent estimate of core heat flux, *Geophys. J. Int.*, 174, 1007-1018.
- Guo, J.Y., Dierks, O., Neumeier, J. and Shum, C.K. (2006). Weighting algorithms to stack superconducting gravimeter data for the potential detection of the Slichter modes, *J. Geodyn.*, 41, 326–333.
- Guo, J.Y., Dierks, O., Neumeier, J. and Shum, C.K. (2007). A search for the Slichter modes in superconducting gravimeter records using a new method, *Geophys. J. Int.*, 168, 507-517.
- Hinderer, J. and Crossley, D. (1993). Core dynamics and surface gravity change. In: J.-L. LeMouél, D.E. Smylie and T. Herring (Editors), *Dynamics of the Earth's Deep Interior and Earth Rotation*, AGU Geophysical Monograph 72, IUGG, vol. 12, 1-16.
- Hinderer, J., Crossley, D. and Jensen, O. (1995). A search for the Slichter triplet in superconducting gravimeter data, *Phys. Earth Planet. Int.*, 90, 183-195.
- Hinderer, J. and Crossley, D. (2000). Time variations in gravity and inferences on the Earth's structure and dynamics, *Surv. Geophys.*, 21, 1-45.
- Jensen, O.G., Hinderer, J. and Crossley, D.J. (1995). Noise limitations in the core-mode band of superconducting gravimeter data, *Phys. Earth Planet. Int.*, 90, 169-181.

- Kanamori, H. (1970). The Alaska earthquake of 1964: Radiation of long-period surface waves and source mechanism. *J. Geophys. Res.*, 75, pp. 5029-5040.
- Kanamori, H. and Cipar, J.J. (1974). Focal process of the great Chilean earthquake May 22, 1960, *Phys. Earth Planet. Int.*, 9, 128-136.
- Koper, K.D. and Dombrovskaya, M. (2005). Seismic properties of the inner core boundary from PKiKP/PcP amplitude ratios, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 237, 680-694.
- Koper, K.D. and Pyle, M.L. (2004). Observations of PKiKP/PcP amplitude ratios and implications for Earth structure at the boundaries of the liquid core, *J. Geophys. Res.*, 109, B03301.
- Loper, D.E. (1978). The gravitationally powered dynamo, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 54, 389-404.
- Masters, G. (1979). Observational constraints on the chemical and thermal structure of the Earth's deep interior, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 57, 507-534.
- Masters, G. and Gubbins, D. (2003). On the resolution of the density within the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, 159-167.
- Mathews, P.M. and Guo, J.Y. (2005). Visco-electromagnetic coupling in precession-nutation theory, *J. Geophys. Res.*, 110(B2), B02402. doi:10.1029/2003JB002915.
- Morse, S.A. (1986). Adcumulus growth of the inner core, *Geophys. Res. Lett.*, 13, 1557-1560.
- Pagiatakis, S. D., Yin, H. and Abd El-Gelil, M. (2007). Least-squares self-coherency analysis of superconducting gravimeter records in search for the Slichter triplet, *Phys. Earth Planet. Int.*, 160, 108-123.
- Peng, Z.R. (1997). Effects of a mushy transition zone at the inner core boundary on the Slichter modes, *Geophys. J. Int.*, 131, 607-617.
- Rieutord, M. (2002). Slichter modes of the Earth revisited, *Phys. Earth Planet. Int.*, 131, 269-278.
- Rochester, M.G. and Peng Z.R. (1993): The Slichter modes of the rotating Earth: a test of the subseismic approximation, *Geophys. J. Int.*, 111, 575-585.
- Rogister, Y. (2003). Splitting of seismic free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, 169-182.
- Rosat, S. (2007). Optimal Seismic Source Mechanisms to Excite the Slichter Mode, *Int. Assoc. of Geod. Symposia*, Dynamic Planet, Cairns (Australia), vol. 130, 571-577, Springer Berlin Heidelberg New York.
- Rosat, S. and J. Hinderer (2011). Noise levels of superconducting gravimeters: updated comparison and time-stability, *Bull. Seism. Soc. Am.*, *in press*.

- Rosat, S. and Rogister, Y. (2011). Excitation of the Slichter mode by collision with a meteoroid or pressure variations at the surface and core boundaries, *submitted to Phys. Earth Planet. Int.*
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D.J., Rivera, L. (2003). The search for the Slichter mode: comparison of noise levels of superconducting gravimeters and investigation of a stacking method, *Phys. Earth Planet. Int.*, 140 (13), 183-202.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D.J., Boy, J.P. (2004). Performance of superconducting gravimeters from long-period seismology to tides, *J. of Geodyn.*, 38, 461-476.
- Rosat, S., Rogister, Y., Crossley, D. and Hinderer, J. (2006). A search for the Slichter Triplet with Superconducting Gravimeters: Impact of the Density Jump at the Inner Core Boundary, *J. of Geodyn.*, 41, 296-306.
- Rosat, S., Sailhac, P. and Gegout, P. (2007). A wavelet-based detection and characterization of damped transient waves occurring in geophysical time-series: theory and application to the search for the translational oscillations of the inner core, *Geophys. J. Int.*, 171, 55-70.
- Rosat, S., Fukushima, T., Sato, T. and Tamura, Y. (2008). Application of a Non-Linear Damped Harmonic Analysis method to the normal modes of the Earth, *J. of Geodyn.*, 45 (1), 63-71.
- Rutter, M.D., Secco, R.A., Uchida, T., Liu, H., Wang, Y., Rivers, M.L. and Sutton, S.R. (2002). Towards evaluating the viscosity of the Earth's outer core: an experimental high pressure study of liquid Fe-S (8.5 wt.% S), *Geophys. Res. Lett.*, 29(8), 1217. doi: 10.1029/2001GL014392.
- Schultz, P.H. and Gault, D.E. (1975). Seismic effects from major basin formation on the moon and Mercury, *The Moon*, 12, 159-177.
- Slichter, L.B. (1961). The fundamental free mode of the Earth's inner core, *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, 47, 186-190.
- Smith, M.L. (1976). Translational inner core oscillations of a rotating, slightly elliptical Earth, *J. Geophys. Res.*, 81 (17), 3055-3065.
- Smylie, D.E. (1992). The inner core translational triplet and the density near Earth's center, *Science*, 255, 1678-1682.
- Smylie, D.E. and Rochester, M.G. (1981). Compressibility, core dynamics and the subseismic wave equation, *Phys. Earth Planet. Int.*, 24, 308-319.
- Smylie, D.E., Hinderer, J., Richter, B. and Ducarme, B. (1993). The product spectra of gravity and barometric pressure in Europe, *Phys. Earth Planet. Int.*, 80, 135-157.
- Smylie, D.E., McMillan, D.G. (1998). Viscous and rotational splitting of the translational oscillations of Earth's solid inner core, *Phys. Earth Planet. Int.* 106, 1-18.

Smylie, D.E., McMillan, D.G. (2000). The inner core as a dynamic viscometer, *Phys. Earth Planet. Int.*, 117, 71-79.

Smylie, D.E., Brazhkin, V.V. and Palmer, A. (2009). Direct observations of the viscosity of Earth's outer core and extrapolation of measurements of the viscosity of liquid iron, *Phys.-Usp.*, 52 (1), 79-92.

Stein S. and E. Okal (2005). Speed and size of the Sumatra earthquake. *Nature*, 434, p. 581.

Tkalcic, H., Kennett, B. L. N. and Cormier, V. F. (2009). On the inner-outer core density contrast from PKiKP/PcP amplitude ratios and uncertainties caused by seismic noise, *Geophys. J. Int.*, 179, 425-443.

Verhoogen, J. (1961). Heat balance of the Earth's core, *Geophys. J.*, 4, 276-281.

Widmer, R., G. Masters, F. Gilbert (1988), *paper presented at the 17th International Conference on Mathematical Geophysics*, Blanes, Spain, June 1988.

### 3.3 MODÉLISATION DE LEUR EXCITATION

Contrairement à la recherche de la signature gravimétrique des modes de Slichter, très peu d'études ont été publiées sur les possibles causes d'excitation de ces modes. Les premières estimations de leur amplitude ont été proposées par Smith (1976) et Crossley (1992) sur la base d'une excitation sismique. Puis, plus récemment, Greff-Lefftz and Legros (2007) ont considéré une excitation par des pressions fluides dans le noyau agissant sur les interfaces. Dans un premier paragraphe, je présente un papier qui quantifie l'amplitude des modes de Slichter excités par des séismes et montre quelles sources sismiques seraient nécessaires pour détecter en surface l'effet gravimétrique associé. Puis, nous envisageons l'impact d'une météorite et les pressions fluides aux interfaces comme sources d'excitation. Enfin, une quantification de l'amplitude des modes de Slichter forcés par la pression atmosphérique sur la croûte donnée par les modèles globaux de circulation de l'ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) et de NCEP/CFSR (National Centers for Environmental Prediction/Climate Forecast System Reanalysis) est proposée. Un résumé de l'amplitude du mode de Slichter pour ces différentes sources est représenté Fig. 3.3.1. La source la plus efficace pour exciter le mode de Slichter à un niveau détectable en surface est l'action des pressions fluides de degré un dans le noyau. Bien que nous ne connaissions pas les amplitudes de ces pressions fluides à ces échelles de temps, étant donné que l'effet gravimétrique induit par l'oscillation de Slichter n'a jamais été détecté, on peut donner une borne supérieure aux pressions fluides de degré un dans le noyau.

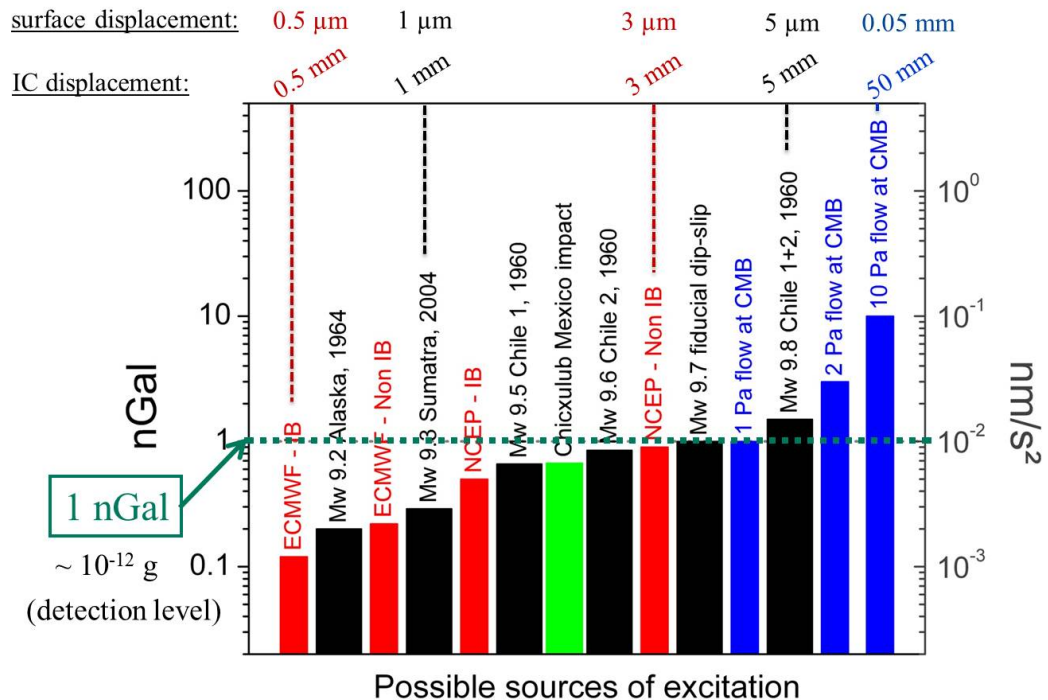


FIGURE 3.3.1: Résumé de l'amplitude des modes de Slichter pour différentes sources excitatrices. Les valeurs du déplacement de la graine dans le noyau fluide, du déplacement en surface de degré un et de l'effet gravimétrique associés sont indiquées.

### 3.3.1 EXCITATION SISMIQUE - *Article : Rosat (2007)*

**Abstract.** The recent  $M_w = 9.3$  Sumatra-Andaman earthquake on December 26<sup>th</sup> 2004 has strongly excited the low-frequency seismic modes of the Earth. In particular the large amplitude of the fundamental radial mode  ${}_0S_0$ , which consists of a roughly uniform compression and dilatation of the whole Earth, and of the seismic core modes, like  ${}_3S_2$ , means that much energy was radiated toward the core. Also the degree one mode  ${}_2S_1$ , which corresponds to a translation of the core in the mantle, was clearly observed for the first time without any stacking process on seismometers and on gravimeters.  ${}_2S_1$  is the first harmonic of the degree one mode  ${}_1S_1$ , the so-called Slichter triplet. In fact, the Slichter mode is not an elastic spheroidal mode like  ${}_2S_1$  since its main feedback force is the Archimedean force. The Slichter mode corresponds to a translation of the solid inner core inside the fluid outer core. The theory concerning this mode is still poorly constrained and no convincing detection has been suggested yet. This paper presents theoretical predictions of the amplitude of the Slichter mode after the 2004 Sumatra-Andaman earthquake as well as after some largest events in the past decades. The computation is based on the usual normal mode theory for a spherically symmetric non-rotating Earth model. The source parameters are finally investigated to find the optimal seismic mechanism to excite the translational motion of the inner core.

**Keywords.** Normal modes, superconducting gravimeter, Slichter modes

## 1 Introduction

The development of a global Superconducting Gravimeters network under the framework of the Global Geodynamics Project (Crossley et al., 1999)

has given new opportunities of studies. These instruments are very stable and the recent generations are less noisy than the spring gravimeters and even less noisy than the long-period seismometers for frequencies below 1 mHz (Van Camp, 1999; Widmer-Schmidrig, 2003; Rosat et al., 2003-2004). The large Sumatra-Andaman earthquake that occurred on December 26, 2004 with a moment magnitude larger than 9 ( $M_w = 9.3$  by Stein and Okal, 2005;  $M_w = 9.15$  by Park et al., 2005), has strongly excited the low-frequency seismic modes; in particular the fundamental radial mode  ${}_0S_0$ , associated with changes in the Earth's circumference, has been largely excited. Although the source was shallow, the earthquake was strong enough to excite the core sensitive seismic modes. Therefore much energy was radiated toward the core. The harmonic degree one seismic mode  ${}_2S_1$  that can be seen as a translational oscillation of the core has been observed for the first time directly on individual records of seismometers and gravimeters (e.g. Rosat et al., 2005a). In the normal mode theory, the seismic mode  ${}_2S_1$  is the first harmonic of the sub-seismic mode  ${}_1S_1$ , the so-called Slichter mode (Slichter, 1961). The Slichter mode corresponds to a translation of the solid inner core inside the fluid outer core. The predicted period of this mode is 5.42 h for the seismological reference Earth's model PREM (Dziewonski and Anderson, 1981). The latest theoretical developments predict that the period of the Slichter mode is between 4 h (Rieutord, 2002) and 6 h (Rogister, 2003). Since the first claim by Smylie (1992) of a possible detection of the Slichter mode, many unfruitful attempts have been performed to detect this mode in superconducting gravimeter records (Hinderer et al., 1995; Jensen et al., 1995; Rosat et al., 2003; 2005b).

The observation of this free oscillation of the inner core is fundamental: since the main restoring

forces are the Archimedean forces, the period of the Slichter mode is directly linked to the density jump at the inner core boundary (ICB). The PREM model predicts a density jump at the ICB of  $600 \text{ kg/m}^3$ . However two recent papers have reached diverging conclusions whether the actual density jump is larger or smaller than for PREM model. The first paper, by Masters and Gubbins (2003), is based on the analysis of the free oscillations of the Earth and proposes that the density jump at the inner core boundary could be as large as  $800 \text{ kg/m}^3$ . While the second paper by Koper and Pyle (2004) suggests, from the analysis of amplitude ratios of PKiKP/PcP reflected waves that the density jump at the ICB could be as small as  $300 \text{ kg/m}^3$ . It is in fact difficult to constrain the density jump from these two techniques as, in the case of the seismic modes, the resolution is weak and in the case of the seismic waves, the phases used have very low signal-to-noise ratios. Rosat et al. (2005b) have developed a detection tool based on the splitting, by rotation and ellipticity of the Earth, of the Slichter mode into a triplet of frequencies in their search of the surface gravity effect of the Slichter mode in superconducting gravimeter (SG) data. They computed the splitting for different PREM-like Earth's models having density jumps at the ICB ranging from 300 to  $900 \text{ kg/m}^3$ . However no convincing evidence for a probable Slichter triplet has been found.

The objective of this paper is to investigate a possible excitation of the Slichter mode by the 2004 Sumatra earthquake and by the past largest events like the 1960 Chile and to estimate the best seismic source mechanism to excite  ${}_1S_1$ . In the next section we present the formulations to compute synthetic seismograms in a spherically symmetric non-rotating Earth. In section 3, a comparison of our results to previous computations is presented and then, in a last part, we discuss the seismic source mechanism to excite the Slichter mode.

## 2 Amplitude excitation computation in a spherically symmetric Earth

### 2.1 Moment tensor response

In the following, we use the notation  $U$ ,  $V$  and  $P$  for the radial eigenfunctions which respectively correspond to the radial displacement, tangential displacement and the Eulerian potential perturbation. The response of the Earth to a moment

tensor source has been explained in details by Dahlen and Tromp (1998). We only recall here the main equations we have used to compute the amplitude excitation of the harmonic degree one Slichter mode to a moment tensor source  $M$  situated at  $x_s = (r_s, \theta_s, \phi_s)$  in the spherical coordinate convention used here. The receiver is located at  $x = (r, \theta, \phi)$ . The angular epicentral distance  $\Theta$  between the source and the receiver is given by  $\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta_s + \sin \theta \sin \theta_s \cos(\phi - \phi_s)$  and we note  $\Phi$  the azimuth to the receiver measured counter clockwise from due south at the source.

The excitation amplitude  $A_x$  at the receiver  $x$  is expressed by:

$$A_x(x) = \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) D(r, \Theta, \Phi) A(\Theta, \Phi), \quad (1)$$

where  $D$  is the displacement operator that in the case of the response of a gravimeter in a non-rotating Earth reduces to the radial displacement eigenfunction  $U$  at the receiver position  $x$ . The real scalar function  $A$  is defined for degree harmonic  $l=1$  modes by:

$$A(\Theta, \Phi) = A_0 \cos \Theta + A_1 \sin \Theta \cos \Phi + B_1 \sin \Theta \sin \Phi \quad (2)$$

where  $A_0$ ,  $A_1$  and  $B_1$  have the following expressions:

$$A_0 = M_{rr} \dot{U}_s + (M_{\theta\theta} + M_{\phi\phi}) r_s^{-1} \left( U_s - \frac{1}{2} k V_s \right),$$

$$A_1 = k^{-1} M_{r\theta} \left( \dot{V}_s - r_s^{-1} V_s + k r_s^{-1} U_s \right), \quad (3)$$

$$B_1 = k^{-1} M_{r\phi} \left( \dot{V}_s - r_s^{-1} V_s + k r_s^{-1} U_s \right).$$

The equations (3) result from the contraction of the moment tensor with the deformation tensor. The components  $M_{ij}$  are the elements of the moment tensor  $M$  given as:

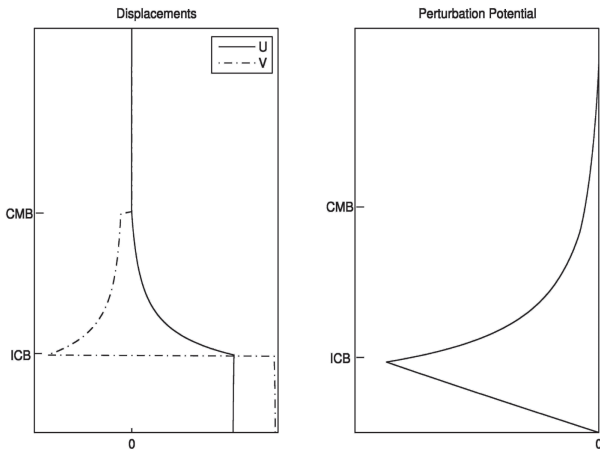
$$M = \begin{pmatrix} M_{rr} & M_{r\theta} & M_{r\phi} \\ M_{r\theta} & M_{\theta\theta} & M_{\theta\phi} \\ M_{r\phi} & M_{\theta\phi} & M_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

The dot on the radial eigenfunctions  $U$  and  $V$  denotes the derivative with respect to the radius vector  $r$  and the subscript  $s$  means that it is evaluated at the source  $x_s$ .  $k = (l(l+1))^{1/2} = \bullet 2$ .

The radial eigenfunctions  $U$ ,  $V$  and  $P$  have been computed as in Crossley (1975) and are plotted in Figure 1. These radial functions are close to zero near the Earth's surface, yet they contribute directly (and to the square) to the excitation amplitude through the displacement operator  $D = U$  in



equation (1) and through the deformation tensor (derivative of the radial functions) implicitly present in equations (3). Therefore, near the Earth's surface, the excitation amplitude is the square of a very small quantity.



**Fig. 1** Displacement and potential eigenfunctions of the Slichter mode.  $U$  and  $V$  are respectively the radial displacement and tangential displacement and  $P$  (right hand side plot) is the perturbation of the gravitational potential. ICB refers to the inner core boundary and CMB to the core-mantle boundary.

From equation (2), the excitation amplitude of the Slichter mode can be estimated. This computation takes into account the self-gravitation but not the gravitational effects on the instrument itself, in addition to the gravitational effect on the housing (Dahlen and Tromp, 1998, pp.143-144), that are quite significant for some of the low-frequency spheroidal oscillations, like  ${}_1S_1$ .

## 2.2 Instrumental gravitational effect

A gravimeter as well as a seismometer on the Earth's surface responds to changes in the Earth's gravitational field in addition to the acceleration of the instrument housing. In order to account for the free-air change in gravity due to the radial displacement of the instrument  $U_{\text{free}}$  and for the perturbation  $P$  in the gravitational potential due to the redistribution of the Earth's mass  $U_{\text{pot}}$ , the radial displacement eigenfunction  $U$  must be replaced by  $U^* = U + U_{\text{free}} + U_{\text{pot}}$ . The free-air effect  $U_{\text{free}}$  dominates the vertical response of the Slichter mode  ${}_1S_1$  so we must incorporate these self-gravitational corrections in the excitation amplitude  $A_x$ .  $U_{\text{free}}$  and  $U_{\text{pot}}$  are defined by:

$$U_{\text{free}} = 2 \omega^2 g a^{-1} U \text{ and } U_{\text{pot}} = (l+1) \omega^2 a^{-1} P,$$

where  $a$  is the mean Earth's radius,  $\omega$  the pulsation of the angular order  $l$  mode (in our case  $l=1$ ) and  $g$  is the acceleration of gravity. The relative magnitudes of the inertial, free-air and potential-perturbation for  ${}_1S_1$  are compared in Table 1 with the values obtained by Dahlen and Tromp (1998). The values differ only in the case of the potential-perturbation contribution because of differences in the radial eigenfunction  $P$ .

We can now compute the excitation amplitude of the Slichter mode after some major earthquakes.

**Table 1.** Relative magnitudes of the inertial, free-air and potential-perturbation contributions to the accelerometer response for the Slichter mode  ${}_1S_1$ . The tabulated values are for the PREM model.

	$U/U^*$	$U_{\text{free}}/U^*$	$U_{\text{pot}}/U^*$
Dahlen and Tromp (1998)	0.032	0.960	0.008
This paper	0.032	0.967	2.2e-5

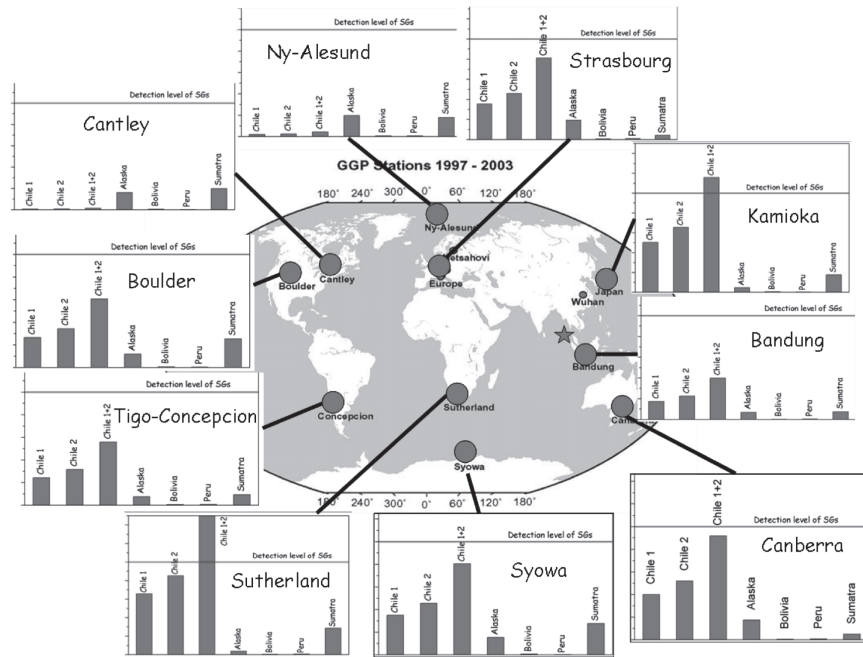
## 3 Computation results after past major earthquakes

We consider the 1960 Chilean, the 1964 Alaska, the 1994 Bolivian, the 2001 Peruvian and the 2004 Sumatra earthquakes. The source mechanisms used and the predicted excitation amplitudes of  ${}_1S_1$  for the spherically symmetric PREM model at 10 SG sites well-distributed on the globe (see figure 2) are summarized in Table 2. The last row shows the results on the whole Earth's surface by Crossley (1992) based on the method described in Crossley (1988). To estimate his results at each SG site, the value in Table 2 must be multiplied by the degree one spherical harmonic function at the station coordinates, namely by the sine of the latitude in a spherical model. His results predict an amplitude excitation of the Slichter mode of the same order than our computation.

SGs are presently the most sensitive instruments in the Slichter mode frequency range. However their detection threshold is of the order of 1 nGal ( $10^{-12}$  g) and the noise level of the best sites is a few nGal in the sub-seismic frequency band (Rosat et al., 2004). So in order to be able to detect the Slichter mode in SG records, its amplitude should reach at least 1 nGal at the Earth's surface. From

Table 2, only the 1960 Chilean earthquake could have sufficiently excited  ${}_1S_1$  for it to be detected by SG on the Earth's surface, if we consider the two

Chilean events (foreshock and main shock, Kanamori and Cipar, 1974) in one main seismic source.



**Fig. 2** Excitation amplitude of the Slichter mode at 10 SG sites for the seven seismic events considered in Table 2. From left to right, at each site, the events considered are the 1960 Chile 1, Chile 2, Chile 1+2, 1964 Alaska, 1994 Bolivia, 2001 Peru and 2004 Sumatra earthquakes. The horizontal line corresponds to the 1 nanoGal detection threshold.

**Table 2.** Excitation amplitude of the Slichter mode at various SG sites after the major past earthquakes for PREM model.






Event	Chile 1	Chile 2	Chile 1+2	Alaska	Bolivia	Peru	Sumatra
Date	1960	1960	1960	1964	1994	2001	2004
Moment (N.m)	$2.7 \cdot 10^{23}$	$3.5 \cdot 10^{23}$	$6.2 \cdot 10^{23}$	$7.5 \cdot 10^{22}$	$2.6 \cdot 10^{21}$	$4.7 \cdot 10^{21}$	$1.1 \cdot 10^{23}$
$M_w$	9.5	9.6	9.8	9.2	8.2	8.4	9.3 <sup>1</sup>
Depth (km)	25	50	38	50	640	30	28
Dip (°)	10	10	10	20	10	18	8
Strike (°)	170	170	170	114	302	310	329
Slip (°)	80	80	80	270	-60	63	110
Reference	Kanamori and Cipar (1974)			Kanamori (1970)	Harvard CMT*		
Site (latitude in degrees N)	Surface gravity effect in nGal (= $10^{-2} \text{ nm/s}^2$ ) for PREM model						
Boulder (40.13)	0.263	0.342	0.605	0.117	0.005	0.004	0.253
Canberra (-35.32)	0.399	0.519	0.918	0.175	0.004	0.006	0.049
Cantley (45.58)	0.006	0.008	0.014	0.160	0.005	0.0007	0.198
Kamioka (36.43)	0.503	0.654	1.157	0.047	0.005	0.002	0.177
Ny-Alesund (78.93)	0.019	0.024	0.043	0.196	0.007	0.007	0.179
Strasbourg (48.62)	0.353	0.459	0.811	0.193	0.006	0.010	0.042
Sutherland (-32.38)	0.656	0.853	1.509	0.037	0.004	0.006	0.286
Syowa (-69.01)	0.350	0.455	0.804	0.153	0.007	0.001	0.277
Tigo-Concepcion (-36.84)	0.243	0.315	0.558	0.074	0.005	0.007	0.093
Bandung (-6.90)	0.173	0.225	0.398	0.068	0.0005	0.004	0.072
Crossley (1992) (whole surface)	0.724	0.835	1.52	0.336	0.02 <sup>2</sup>	-	-

<sup>1</sup> Stein and Okal (2005)

<sup>2</sup> personal communication

\* The Harvard Centroid Moment Tensor is available at: <http://www.seismology.harvard.edu/CMTsearch.html>

**Table 3.** Moment magnitude needed to excite the Slichter mode at the nanoGal level in surface gravity effect for different ideal source mechanisms. The source is situated at a depth of 500 km on the equator at the longitude 90° and the receiver is located at the longitude 40°E also on the equator.

Type	Moment Tensor	Focal mechanism	$M_w$
Explosion	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		9.6
Vertical dip-slip	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		9.7
45°-dip thrust	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		9.8
Pure compensated linear vector dipole	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		9.8
“eyeball” or “fried-egg”	$-\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		9.6

Crossley (1988) came to the conclusion that even under very favourable conditions (i.e. an  $M_w = 9.3$  earthquake), it is not possible to exceed a 1 nGal signal at the Earth’s surface. We have confirmed it by our computation after the  $M_w = 9.3$  Sumatra earthquake. The maximum excitation amplitude expected is 0.3 nGal at the ideal receiver position from the source, which is 47° N and 210° E.

#### 4 Discussion

Intuitively we can think that to excite the free oscillation of the inner core, we need a very deep source with a fault mechanism that enables to radiate as much energy as possible toward the core. This type of focal mechanism would be a vertical dip-slip source. We have computed the moment magnitude required to excite the Slichter mode at the nanoGal level in surface gravity effect, for different focal mechanisms. The results are summarized in table 3.

A vertical strike-slip mechanism should not happen and can not excite the Slichter mode. So it is not considered here. The best natural focal mechanism to excite  ${}_1S_1$  is therefore a vertical dip-

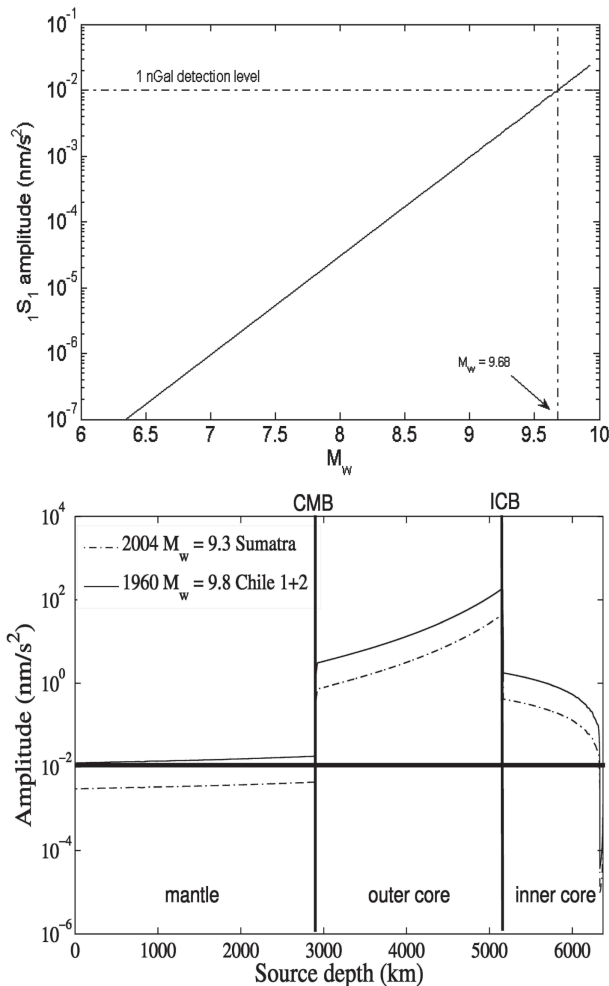
slip source as we need a smaller energetic earthquake than other mechanisms to excite  ${}_1S_1$  at the nanoGal level. However compared to a 45°-dip thrust for instance, the difference in magnitude is only of the order of one tenth of a magnitude unit. A pure compensated linear vector dipole, indicative of simultaneous vertical extension and horizontal compression, is not a usual focal mechanism. It has been observed in shallow earthquakes of moderate size ( $M > 5$ ) beneath volcanoes (Nettles and Ekström, 1998). An “eyeball” mechanism would give the largest amplitude excitation of  ${}_1S_1$ . However such non-double-couple source mechanisms are unusual and usually associated with shallow earthquakes induced by volcanism or geothermic, so they can unlikely induce an  $M_w = 9.6$  earthquake.

Both 1960 Chile and 2004 Sumatra earthquakes were dip-slip sources. If we consider their focal mechanisms represented in figure 3, we can notice that the Chile fault plane was closer to a pure vertical dip-slip focal mechanism than the Sumatra earthquake. If we consider the 1960 Chile source parameters with different moment magnitudes, we obtain the upper graph of figure 4. It represents the estimated excitation amplitude of  ${}_1S_1$  as a function of the magnitude  $M_w$ . With a mechanism similar to the one of 1960 Chile event, the nanoGal level is reached with a moment magnitude of about 9.7. The combination of Chile 1 and 2 events had a moment magnitude of 9.8.



**Fig. 3** Focal mechanisms of the 1960 Chilean earthquake (left) and of the 2004 Sumatra event (right).

Now, if we consider the source parameters of the Chile event but we modify the source depth, we obtain the lower graph of figure 4. We have also computed the excitation amplitude of  ${}_1S_1$  as a function of the source depth with the source parameters of the 2004 Sumatra event (dot-dashed line of lower graph in figure 4). With source parameters similar to the Chile 1+2 event and with a moment magnitude of 9.8, the nanoGal level in surface gravity is reached even for shallow sources. In the case of the Sumatra earthquake, even with a source in the lower mantle, the excitation amplitude of the Slichter mode does not reach the nanoGal signal amplitude at the surface. Some “core-quakes” would be needed, which is impossible.



**Fig. 4** Influence on the Slichter mode's surface excitation amplitude of (upper plot) the magnitude of an earthquake with focal mechanism similar to the one of the 1960 Chilean (Chile 1+2) event and of (lower plot) the source depth of an earthquake with focal mechanism respectively similar to the 2004 Sumatra event (dot-dashed line) and to the 1960 Chilean (Chile 1+2) event (solid line).

From figure 4 we can clearly see that the excitation amplitude depends much more on the magnitude of the earthquake than of its source depth. The effect of the source depth is represented by  $1/r_s$  in equations (3), while the seismic moment directly scales the excitation amplitude. The weak influence of the source depth is mainly due to the radial eigenfunctions, which are almost constant with radius in the mantle. In fact they are even close to zero (figure 1).

## 5 Conclusion

The excitation of the translational motion of the inner core by a seismic source is difficult to detect via its surface gravity effect even with the superconducting gravimeters, which are presently the most appropriate instruments. A 1960 Chile-like earthquake with a vertical dip-slip mechanism and huge energy release ( $M_w \geq 9.7$ ) is the only way to excite the Slichter mode with amplitude that can reach and even overpass the nanoGal level in surface gravity effect, if we consider the usual normal mode theory in a spherically symmetric PREM Earth's model. The introduction of a more realistic Earth's model that accounts for the rotation, ellipticity and lateral heterogeneities will be necessary to complete this study; however we can a priori think that it will not increase the amplitude excitation of the Slichter mode. Smith (1976) has demonstrated that the surface gravity effect of the Slichter triplet is strongly dependent on the stability or not of the density stratification of the fluid outer core. This point will also have to be further studied.

A seismic excitation of the Slichter mode is not the best way to have it detectable at the Earth's surface. Therefore we must consider other possible sources of excitation, like turbulent flows in the liquid outer core at the core-mantle boundary or an atmospheric and oceanic (individually or coupled) excitation. No studies have been done yet about a possible excitation of the Slichter mode by one of these phenomena, so the debate is still open.

## Acknowledgements

The author is grateful to David Crossley for his code to compute the eigenfunctions of the Slichter mode and to Luis Rivera and Jacques Hinderer for their useful comments on this paper. This study is granted by the Japan Society for the Promotion of Science.

---

## References

- Crossley, D.J. (1975). The free-oscillation equations at the centre of the Earth. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 41, pp. 153-163.
- Crossley, D.J. (1988). The excitation of core modes by earthquakes. In: D.E. Smylie and R. Hide (Editors), *Structure and Dynamics of Earth's Deep Interior. Geophys. Monogr. Am. Geophys. Union*, 46(1), pp. 41-50.
- Crossley, D.J. (1992). Eigensolutions and seismic excitation of the Slichter mode triplet for a fully rotating Earth model, *EOS*, 73, p. 60.
- Crossley, D., Hinderer, J., Casula, G., Francis, O., Hsu, H.T., Imanishi, Y., Jentzsch, G., Käätäinen, J., Merriam, J., Meurers, B., Neumeyer, J., Richter, B., Shibuya, K., Sato, T. and T. Van Dam. (1999). Network of superconducting gravimeters benefits a number of disciplines, *EOS*, 80, 11, pp. 121/125-126.
- Dahlen, F.A. and J. Tromp (1998). *Theoretical Global Seismology*, Princeton: *Princeton Univ. Press.*, Princeton, NJ, 1025 pp.
- Dziewonski, A. M. and D. L. Anderson (1981). Preliminary reference Earth model (PREM), *Phys. Earth Planet. Int.*, 25, pp. 297-356.
- Hinderer, J., Crossley, D. and O. Jensen. (1995). A search for the Slichter triplet in superconducting gravimeter data, *Phys. Earth Planet. Int.*, 90, pp. 183-195.
- Jensen, O.G., Hinderer, J. and D.J. Crossley. (1995). Noise limitations in the core-mode band of superconducting gravimeter data, *Phys. Earth Planet. Int.*, 90, pp. 169-181.
- Kanamori, H. (1970). The Alaska earthquake of 1964: Radiation of long-period surface waves and source mechanism. *J. Geophys. Res.*, 75, pp. 5029-5040.
- Kanamori, H. and J. J. Cipar (1974). Focal process of the great Chilean earthquake May 22, 1960. *Phys. Earth Planet. Int.*, 9, pp. 128-136.
- Koper, Keith D. and L. Moira Pyle (2004). Observations of PKiKP/PcP amplitude ratios and implications for Earth structure at the boundaries of the liquid core. *J. Geophys. Res.*, 109(B3), B03301 10.1029/2003JB002750.
- Masters, G. and D. Gubbins (2003). On the resolution of the density within the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, pp. 159-167.
- Nettles, M. and G. Ekström (1998). Faulting mechanism of anomalous earthquakes near Bárðarbunga Volcano, Iceland, *J. Geophys. Res.*, 103 (B8), pp. 17,973-17,984.
- Park, J., Song, T-R A., Tromp, J., Okal, E., Stein, S., Roullet, G., Clevede, E., Laske, G., Kanamori, H., Davis, P., Berger, J., Braitenberg, C., Van Camp, M., Lei, X., Sun, H. and S. Rosat (2005). Earth's Free Oscillations Excited by the 26 December 2004 Sumatra-Andaman Earthquake. *Science*, 308, pp. 1139-1144.
- Rieutord, M. (2002). Slichter modes of the Earth revisited. *Phys. Earth Planet. Int.*, 131, pp. 269-278.
- Rogister Y. (2003). Splitting of seismic free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal Earth. *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, pp. 169-182.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D. and L. Rivera (2003). The search for the Slichter mode: Comparison of noise levels of superconducting gravimeters and investigation of a stacking method. *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, pp. 183-202.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D. and J.-P. Boy (2004). Performance of superconducting gravimeters from long-period seismology to tides. *J. of Geodynamics*, 38, 3-5, pp. 461-476.
- Rosat, S., Sato, T., Imanishi, Y., Hinderer, J., Tamura, Y., McQueen, H. and M. Ohashi (2005a). High resolution analysis of the gravest seismic normal modes after the 2004  $M_w=9$  Sumatra earthquake using superconducting gravimeter data, *Geophys. Res. Lett.*, 32, L13304, doi:10.1029/2005GL023128.
- Rosat, S., Rogister, Y., Crossley, D. and J. Hinderer, J. (2005b). A search for the Slichter Triplet with Superconducting Gravimeters: Impact of the Density Jump at the Inner Core Boundary. *J. of Geodynamics*, accepted August 30, 2005.
- Slichter, L. B. (1961). The fundamental free mode of the Earth's inner core. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 47 (2), pp. 186-190.
- Smith, M.L. (1976). Translational Inner Core Oscillations of a Rotating, Slightly Elliptical Earth. *J. Geophys. Res.*, 81 (17), pp. 3055-3065.
- Smylie, D.E. (1992). The Inner Core Translational Triplet and the Density Near Earth's Center, *Science*, 255, pp. 1678-1682.
- Stein S. and E. Okal (2005). Speed and size of the Sumatra earthquake. *Nature*, 434, p. 581.
- Van Camp, M. (1999). Measuring seismic normal modes with the GWR C021 superconducting gravimeter. *Phys. Earth Planet. Int.*, 116, pp. 81-92.
- Widmer-Schmidrig, R. (2003). What can superconducting gravimeters contribute to normal mode seismology?. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 93 (3), pp. 1370-1380.

### 3.3.2 EXCITATION PAR DES PRESSIONS FLUIDES AUX INTERFACES, PAR L'IMPACT D'UNE MÉTÉORITE - Article : Rosat & Rogister (2012)

#### ARTICLE INFO

##### Article history:

Received 28 February 2011  
 Received in revised form 5 October 2011  
 Accepted 26 October 2011  
 Available online 3 November 2011  
 Edited by George Helffrich

##### Keywords:

Slichter mode  
 Outer and inner core  
 Extraterrestrial object impact

#### ABSTRACT

We use a normal-mode formalism to compute the response of a spherical, self-gravitating anelastic PREM-like Earth model to various excitation sources at the Slichter mode period. The formalism makes use of the theory of the Earth's free oscillations based upon an eigenfunction expansion methodology. We determine the complete response in the form of Green's function obtained from a generalization of Betti's reciprocity theorem. Surficial (surface load, fluid core pressure), internal (earthquakes, explosions) and external (object impact) sources of excitation are investigated to show that the translational motion of the inner-core would be best excited by a pressure acting at the core boundaries at time-scales shorter than the Slichter eigenperiods.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

#### 1. Introduction

The three free translational oscillations of the inner core, the so-called Slichter modes (Slichter, 1961), have been a subject of observational controversy since the first detection by Smylie (1992) of a triplet of frequencies that he attributed to the Slichter modes. This detection has been supported by Courtier et al. (2000) and Pagiatakis et al. (2007) but has not been confirmed by other authors (Hinderer et al., 1995; Jensen et al., 1995; Rosat et al., 2006; Guo et al., 2007). Also, it motivated additional theoretical studies (Crossley, 1992; Rochester and Peng, 1993; Rieutord, 2002; Rogister, 2003). The search for the Slichter modes was invigorated by the development of worldwide data recorded by superconducting gravimeters (SGs) of the Global Geodynamics Project (Hinderer and Crossley, 2000). Thanks to their long-time stability and low noise level, these relative gravimeters are the most suitable instruments to detect the small signals that would be expected from the Slichter modes (Hinderer et al., 1995; Rosat et al., 2003, 2004).

The theory is now better understood and computation predicts eigenperiods between 4 and 6 h (Rogister, 2003) for the seismological reference PREM (Dziewonski and Anderson, 1981) Earth model. A more recent study by Grinfeld and Wisdom (2010) states that the period could be much shorter because of the kinetics of phase transformations at the inner-core boundary (ICB).

The observation of the Slichter modes is fundamental because, the restoring force being Archimedean, their periods are directly

related to the density jump at the ICB. This parameter is still poorly known: by analyzing seismic PKiKP/PcP phases, Koper and Pyle (2004) found that it should be smaller than  $450 \text{ kg/m}^3$ , later increased to  $520 \text{ kg/m}^3$  (Koper and Dombrovskaya, 2005), whereas Masters and Gubbins (2003) obtained  $820 \pm 180 \text{ kg/m}^3$  from normal modes observation. Tkalčić et al. (2009) have shown that the uncertainties associated with the seismic noise might partially explain such discrepancies for the estimates of the ICB density contrast. Gubbins et al. (2008) have proposed a model with a large overall density jump between the inner and outer cores of  $800 \text{ kg/m}^3$  and a sharp density jump of  $600 \text{ kg/m}^3$  at the ICB itself. Such a model satisfies both the constraints set by powering the geodynamo with a reasonable heat flux from the core, and PKP traveltimes and normal mode frequencies. The value of the density jump at ICB for the PREM model is  $600 \text{ kg/m}^3$ .

This paper aims at evaluating the possible amplitude of the Slichter modes for various types of excitation sources.

The seismic excitation has been previously studied by Smith (1976), Crossley (1992) and Rosat (2007). They have shown that the best natural focal mechanism to excite the Slichter mode is a vertical dip-slip source. The largest magnitude event in the past was the 1960 Chile earthquake with a magnitude  $M_w = 9.6$  for the main shock. A foreshock occurred with a magnitude of 9.5 (Kanamori and Cipar, 1974). The combination of both events leads to a seismic source of magnitude  $M_w = 9.8$  which would be enough to excite the Slichter modes to the nanoGal level. However, at such frequencies, the noise levels of SGs are of several nGal, even for the quietest sites (Rosat and Hinderer, 2011). Earthquakes are therefore not the most suitable source to excite the Slichter modes to a level sufficient for the SGs to detect the induced surface gravity effect.

\* Corresponding author.

E-mail address: Severine.Rosat@eost.u-strasbg.fr (S. Rosat).

Surficial pressure flow acting in the core has been considered by Greff-Lefftz and Legros (2007) as a possible excitation source. In this work, we reconsider the pressure flow acting in the core using a Green function formalism for a non-rotating anelastic PREM Earth model. Then, we investigate the surface load and meteoroid impact as possible sources of excitation of the Slichter modes.

## 2. Green function formalism

We consider a spherical non-rotating anelastic Earth model. The displacement  $\mathbf{u}$  at a point  $\mathbf{r}$  and time  $t$  produced by any body force density  $\mathbf{f}$  acting in volume  $V$  and surface force density  $\mathbf{t}$  acting upon surface  $S$  can be written as a convolution of the impulse response  $G$  with the entire past history of the forces  $\mathbf{f}$  and  $\mathbf{t}$  (Dahlen and Tromp, 1998):

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \mathbf{f}(\mathbf{r}', t') dV' dt' + \int_{-\infty}^t \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \mathbf{t}(\mathbf{r}', t') d\Sigma' dt', \quad (1)$$

where  $\mathbf{r}'$  is the integrated position vector. This relation is inferred from Betti's reciprocity relation in seismology (Aki and Richards, 1980). Seismic Green's tensor  $G$  of a non-rotating anelastic Earth is given in terms of the normal-mode complex frequencies  $\nu_k = \omega_k \left(1 + \frac{i}{2Q_k}\right)$  and eigenfunctions  $\mathbf{s}_k$  by

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \Re \sum_k (i\nu_k)^{-1} \mathbf{s}_k(\mathbf{r}) \mathbf{s}_k(\mathbf{r}') e^{i\nu_k t} H(t), \quad (2)$$

where  $\Re$  denotes the real part of the complex expression and  $H(t)$  is the Heaviside function.

Tromp and Mitrovica (1999) have generalized Betti's reciprocity relation to a representation theorem suited for surface-load problems, so that the displacement  $\mathbf{u}$  due to a surface load  $\sigma$  located at  $\mathbf{r}'$  is given by

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_S \sigma(\mathbf{r}', t') \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') d\Sigma' dt', \quad (3)$$

where  $\Gamma$  is the surface-load Green's vector defined by

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = -[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \cdot \nabla' \Phi(\mathbf{r}') + \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)], \quad (4)$$

$\nabla'$  is the gradient with respect to  $\mathbf{r}'$ ,  $\Phi$  is the unperturbed gravitational potential, and  $\mathbf{g}$  is

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \Re \sum_k (i\nu_k)^{-1} \phi_k(\mathbf{r}) \mathbf{s}_k(\mathbf{r}') e^{i\nu_k t} H(t), \quad (5)$$

$\phi_k$  denoting the perturbation of the gravitational potential associated with the normal mode  $\{\mathbf{s}_k, \phi_k\}$ . Green's tensor  $\{G, \mathbf{g}\}$  represents the complete point-source response.

A spheroidal mode of harmonic degree  $l$  and order  $m$  and radial overtone number  $n$  can be decomposed into three components in spherical coordinates:

$${}_n \mathbf{s}_l^m(\mathbf{r}) = {}_n U_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{r}} + k^{-1} {}_n V_l^m(r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + k^{-1} {}_n V_l^m(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (6)$$

where  $Y_l^m(\theta, \phi)$  are the real spherical harmonics of degree  $l$  and order  $m$  (Dahlen and Tromp, 1998),  $k = \sqrt{l(l+1)}$  and  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  and  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  are the usual unit vectors of the spherical coordinates. The associated perturbation of the gravitational potential has the form

$${}_n \phi_l^m(\mathbf{r}) = {}_n P_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (7)$$

The eigenfunctions  ${}_n U_l^m(r)$ ,  ${}_n V_l^m(r)$  and  ${}_n P_l^m(r)$  are functions of the radius only. Because the model is non-rotating and spherically symmetric, the  $2l+1$  eigenfrequencies for each fixed  $l$  and  $n$  are degenerate into a single eigenfrequency that we can therefore

denote by  ${}_n \nu_l$ . The summation over  $k$  in Eqs. (2) and (5) is actually a triple summation over  $l$ ,  $m$  and  $n$ . Since the eigenfrequencies do not depend on  $m$ , the summation over  $m$  can be performed using the addition theorem for surface spherical harmonics, with the result (Dahlen and Tromp (1998, Eqs. 10.28 and 10.34)):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \Re \sum_n \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{e^{i\nu_l t}}{i\nu_l} \left\{ {}_n U_l(r) {}_n U_l(r') \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}' P_{10} + k^{-1} [{}_n U_l(r) {}_n V_l(r') \hat{\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\theta}}' - {}_n V_l(r) {}_n U_l(r') \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\mathbf{r}}'] P_{11} + \frac{1}{2} k^{-2} [{}_n V_l(r) {}_n V_l(r') \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}}'] (k^2 P_{10} - P_{12}) + k^{-2} [{}_n V_l(r) {}_n V_l(r') \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\phi}}'] (\sin \Theta)^{-1} P_{11} \right\}, \quad (8)$$

where  $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$  and  $\Theta$  is the angular distance between the receiver at  $\hat{\mathbf{r}}$  and the point source at  $\hat{\mathbf{r}}'$ :

$$\cos \Theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (9)$$

The Slichter mode is the spheroidal mode of harmonic degree 1 and radial overtone number one. For a non-rotating spherical model, the three Slichter frequencies are degenerate into a single eigenfrequency. As

$$P_{10}(\cos \Theta) = \cos \Theta \quad (10)$$

and

$$P_{11}(\cos \Theta) = \sin \Theta, \quad (11)$$

the term for which  $l=1$  and  $n=1$  in Eq. (8) writes:

$${}_1 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \frac{3}{4\pi} \Re \left\{ \frac{e^{i\nu} \left[ U(r) U(r') \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}' \cos \Theta + \frac{1}{\sqrt{2}} (U(r) V(r') \hat{\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\theta}}' - (r) U(r') \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\mathbf{r}}') \sin \Theta + \frac{1}{2} V(r) V(r') \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}}' \cos \Theta + \frac{1}{2} V(r) V(r') \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\phi}}' \right] \right\} \quad (12)$$

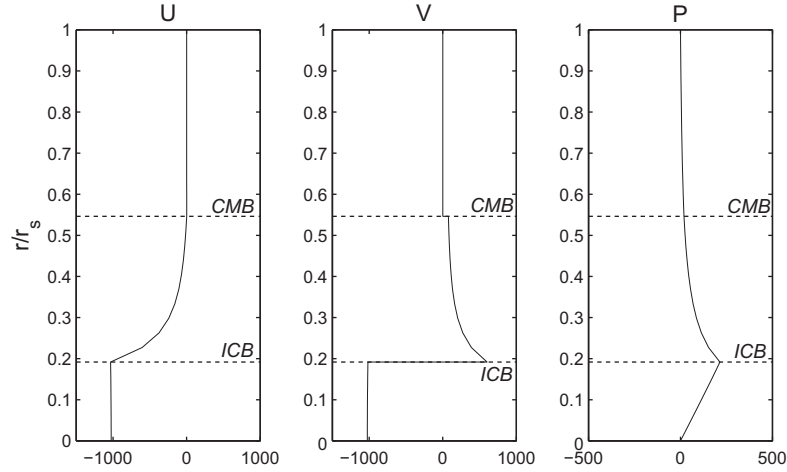
being understood that  $\nu=1 \nu_1$ ,  $U=1 U_1$ ,  $V=1 V_1$  and  $P=1 P_1$ . For PREM, the Slichter eigenperiod is 5.42 h (Rogister, 2003) and the eigenfunctions  $U$ ,  $V$  and  $P$  are plotted in Fig. 1.

The damping rate depends on the dissipation processes involved. A summary of plausible dissipation processes is given by Greff-Lefftz and Legros (2007), Guo et al. (2007), and Rosat et al. (2007). The role of the outer core viscosity has been studied by Smylie and McMillan (2000) and Rieutord (2002), the effect of a mushy zone at the ICB, by Peng (1997), the influence of the magnetic field, by Buffett and Goertz (1995) and the anelastic dissipation for the core modes, by Crossley et al. (1992). Such studies have revealed that it is unlikely that the damping factor of the Slichter mode be less than 2000, corresponding to a damping time of 144 days. In this case, the induced surface gravity perturbation should be more easily detectable by SGs. We assume, in the following, a quality factor of 2000.

Using the Green function formalism, we can compute the excitation of the Slichter mode by any body or surface forces.

## 3. Excitation by fluid core pressure

Observational evidence for motions in the core comes from core-sensitive seismic modes, which have periods smaller than one hour, the free core nutation, which is a rotational mode of nearly-diurnal period, and variations of the magnetic field that can be related to motions in the core with timescales larger than one year. Therefore, the dynamics of the fluid core at the Slichter frequencies lacks observational evidence. Theoretical results suggest that, at timescales smaller than one day and outside the



**Fig. 1.** Eigenfunctions of the Slichter mode  ${}_1S_1$  for the PREM model. The vertical axis is the radius normalized by the Earth's surface radius  $r_s$ .  $U$  and  $V$  are the radial dependence of the displacement given by Eq. (6).  $P$  is the perturbation of the gravitational potential. The normalization of the eigenfunctions is such that  $U(r_s) = 1$  m.

seismic band, plausible motions are to be searched for in the turbulent convection or in the spectrum of the core.

An account of small-scale turbulence driven by convection is given by Loper (2007). The timescale may be less than one day but, because of the small characteristic length-scales, turbulence is unlikely to excite the translation of the whole inner core.

Valette (1989a,b) has shown that the inertia-gravity spectrum of an inviscid liquid core is continuous and set bounds on it. The bounds depend on both the speed of rotation and squared Brunt–Väisälä frequency. Rogister and Valette (2009) and Rogister (2010) have suggested that the rotational modes might be influenced by the continuous spectrum in which they are embedded. In particular, the nearly-diurnal free inner core nutation and long-period inner core wobble might be double or even multiple and have energy in the liquid core. Pending on the value of the squared Brunt–Väisälä frequency in the outer core, the Slichter modes could also be embedded in the continuous spectrum. Similarly to what has been found for the two rotational modes of the inner core, significant motion and pressure variation in the liquid core could accompany the Slichter modes. Although a Slichter mode with its associated motion in the liquid core should then be considered as a single normal mode, we can for simplicity assume that the pressure variations in the liquid core excite the translational motions of the inner core. This is somewhat the opposite of what Buffett (2010) did to investigate the attenuation of the free inner core nutation: he assumed that the tilt of the inner core generates shear layers in the outer core where Ohmic and viscous dissipation occur.

As Greff-Lefftz and Legros (2007), we will assume that the pressure at the CMB takes the following analytical form:

$$P^c(\theta, \phi, t) = P_0^c(\theta, \phi) e^{-\left(\frac{t-T_0}{\tau}\right)^2}, \quad (13)$$

where  $T_0$  is the starting time of application of the pressure,  $\tau$  is the time duration of the pressure source and  $P_0^c(\theta, \phi)$  includes three terms of harmonic degree 1:

$$P_0^c(\theta, \phi) = P_{10}^c \cos \theta + \left( P_{11}^c \cos \phi + \tilde{P}_{11}^c \sin \phi \right) \sin \theta. \quad (14)$$

According to Okubo and Endo (1986) and Greff-Lefftz and Legros (2007), the total force exerted at the core boundaries must vanish for the centre of mass to be kept fixed. This translates into

the so-called consistency relation (Farrell, 1972) and imposes a relation between the pressures  $P^c$  and  $P^{ic}$  at the CMB and ICB, respectively:

$$p^{ic} = \frac{r_c^2}{r_{ic}^2} P^c. \quad (15)$$

Greff-Lefftz and Legros (2007) analytically solved the equations of the elasto-gravitational deformation (Alterman et al., 1959) for a simple Earth model made up of three homogeneous incompressible layers and investigated the excitation of the Slichter mode by a pressure acting at the outer core boundaries. In this section, we consider the same simple excitation sources to test the Green function approach for PREM, which is a more realistic Earth model. We compute the displacement  $\mathbf{u}$  by means of Eqs. (1) and (12). As we are mainly interested in the surface gravity effect, we only need the radial component of the displacement:

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = \frac{3}{4\pi} \Re \left\{ \frac{U(r)}{iv} \int_{-\infty}^t e^{iv(t-t')} e^{-\left[\frac{t'-T_0}{\tau}\right]^2} dt' \right. \\ \times \left[ U(r_c) \int_{\text{CMB}} \cos \Theta (P_{10}^c \cos \theta' \right. \\ \left. + (P_{11}^c \cos \phi' + \tilde{P}_{11}^c \sin \phi') \sin \theta') d\Sigma' \right. \\ \left. - U(r_{ic}) \int_{\text{ICB}} \cos \Theta (P_{10}^{ic} \cos \theta' \right. \\ \left. + (P_{11}^{ic} \cos \phi' + \tilde{P}_{11}^{ic} \sin \phi') \sin \theta') d\Sigma' \right] \Big\} \quad (16)$$

At the CMB,  $d\Sigma' = r_c^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$  and, at the ICB,  $d\Sigma' = r_{ic}^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ . Taking Eqs. (9) and (15) into account, the integration over  $\theta'$  and  $\phi'$  gives:

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = \Re \left\{ \frac{r_c^2 U(r)}{iv} [U(r_c) - U(r_{ic})] \int_{-\infty}^t e^{iv(t-t')} e^{-\left[\frac{t'-T_0}{\tau}\right]^2} dt' \right. \\ \left. \times (P_{10}^c \cos \theta + P_{11}^c \sin \theta \cos \phi + \tilde{P}_{11}^c \sin \theta \sin \phi) \right\} \quad (17)$$

The integral

$$I(t) = \int_{-\infty}^t e^{iv(t-t')} e^{-\left[\frac{t'-T_0}{\tau}\right]^2} dt' \quad (18)$$

is calculated in the Appendix. It gives

$$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau e^{iv(t-T_0)} e^{-v^2 \tau^2 / 4} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{t-T_0}{\tau} + i \frac{v\tau}{2} \right) \right], \quad (19)$$



where erf denotes the error function. The radial displacement then becomes:

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = -\frac{r_c^2 U(r)}{\omega \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)} [U(r_c) - U(r_{ic})] \left[ \frac{\Re\{I(t)\}}{2Q} - \Im\{I(t)\} \right] \times \left( P_{10}^c \cos \theta + P_{11}^c \sin \theta \cos \phi + \tilde{P}_{11}^c \sin \theta \sin \phi \right), \quad (20)$$

where  $\Re\{\}$  and  $\Im\{\}$ , respectively denote the real and imaginary parts of the expression between brackets.

The degree- $l$  gravity variation measured by a gravimeter at the surface of the Earth  $r_s$  is the sum of three terms: the free-air gravity variation owing to the displacement of the ground in the surrounding unperturbed gravity field  $g_0$

$$g_{\text{free}} = \left( -4\pi G \bar{\rho} + \frac{2}{r_s} g_0 \right) U(r_s), \quad (21)$$

the inertial acceleration of the ground

$$g_{\text{in}} = -\omega_l^2 U(r_s) \quad (22)$$

and the perturbation of the gravitational attraction

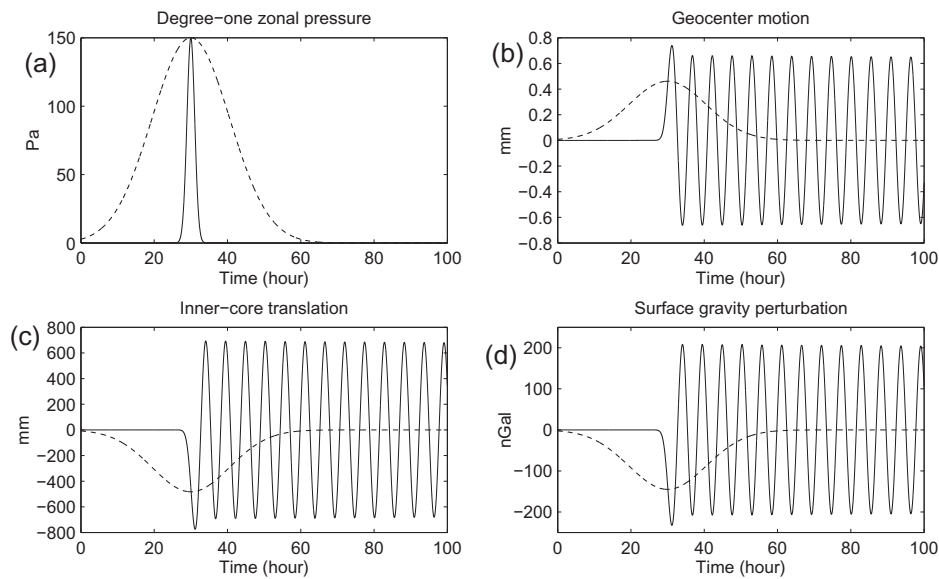
$$g_{\text{pot}} = 4\pi G \bar{\rho} U(r_s) + \frac{2}{r_s} P(r_s). \quad (23)$$

In these expressions,  $\bar{\rho}$  is the mean density of the Earth.

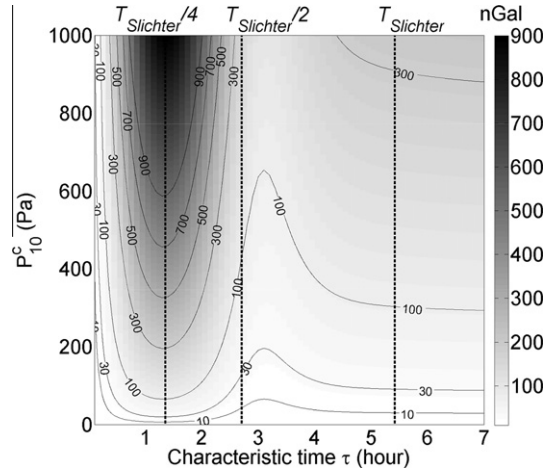
The degree-1 gravity variation measured by a gravimeter is therefore

$$\Delta g(\theta, \phi, t) = \frac{r_c^2}{\omega \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)} [U(r_c) - U(r_{ic})] \left[ P_{10}^c \cos \theta + P_{11}^c \sin \theta \cos \phi + \tilde{P}_{11}^c \sin \theta \sin \phi \right] \left[ \frac{\Re\{I(t)\}}{2Q} - \Im\{I(t)\} \right] \times \left[ -\omega^2 U(r_s) + \frac{2}{r_s} g_0 U(r_s) + \frac{2}{r_s} P(r_s) \right] \quad (24)$$

We consider a zonal pressure  $P_{10}^c = 150$  Pa and compute the induced geocentre motion, inner-core translation and surface gravity perturbation for both  $\tau = 1.5$  h and 15 h (Fig. 2). As the centre of



**Fig. 2.** Effects of the excitation of the Slichter mode by a fluid pressure acting at the CMB for two different excitation time-scales:  $\tau = 1.5$  h (solid line) and  $\tau = 15$  h (dashed line). This figure is similar to Fig. 3 of Greff-Lefftz and Legros (2007) but we have applied a Green tensor formalism to the PREM model. (a) Degree-1 zonal pressure; (b) geocentre motion; (c) inner-core translation; (d) surface gravity perturbation.



**Fig. 3.** Surface gravity perturbation induced by the Slichter mode excited by a fluid pressure acting at the CMB for different excitation time-scales and various zonal pressure amplitudes. The vertical dotted lines correspond to one fourth of the Slichter period, one half of the Slichter period and the Slichter period.

mass is fixed, the geocentre motion, which is the displacement of the figure centre with respect to the centre of mass, corresponds to the surface displacement (Greff-Lefftz and Legros, 1997).

For  $P_{10}^c$  varying from 0 to 1000 Pa and  $\tau$  ranging from 0.1 and 10 h, we compute a 2D-map (Fig. 3) of the surface gravity perturbation when the exciting pressure has vanished (i.e.  $t > T_0 + \tau$ ).

Our results for the PREM model show excitation amplitudes larger by 70% than the amplitudes computed by Greff-Lefftz and Legros (2007), who used a very simple model made up of three incompressible homogeneous layers with a solid inner core, a liquid outer core and a rigid mantle. If we consider such a 3-layer model with the average densities of the PREM inner core, outer core and mantle, we obtain a period of 3.09 h for the Slichter mode and excitation amplitudes in close agreement with the values of Greff-Lefftz and Legros (2007). They do not provide numerical details for the structure of their model but mention that its Slichter period is 3.08 h, which is almost equal to the Slichter period of our 3-layer model. Therefore, the Green function formalism we have adopted gives the same result as the analytical solution for

the degree-1 deformation of a simple 3-layer model obtained by Greff-Lefftz and Legros (2007).

The difference between the excitation amplitudes we obtain for PREM and the amplitudes computed by Greff-Lefftz and Legros (2007) comes from the different Earth models. The elasticity of the mantle and inner core, the compressibility of the outer core and the density jump at the ICB all come into play. Greff-Lefftz and Legros (2007) mention that the elasticity of the mantle perturbs the solutions by 30%, without any further specifications. We have checked that, by making the outer core of our simple 3-layer model compressible, with a  $P$ -wave velocity of 11083 m/s, the excitation amplitude of the Slichter mode is decreased by 40% with respect to the incompressible model. The influence of the compressibility and stratification of the core on the Slichter mode was also investigated by Rogister (2003).

The perturbation of the surface gravity field is the largest when  $\tau$  is smaller than half the Slichter eigenperiod. When  $\tau$  is one fourth of the Slichter period, a 10 Pa pressure acting at the CMB, which by Eq. (15) imposes a 81 Pa pressure at the ICB, is enough to induce a 10 nGal (0.1 nm/s<sup>2</sup>) surface gravity perturbation, which should be detectable by SGs.

#### 4. Excitation by a surface load

A degree- $l$  surficial mass distribution  $\sigma^s$  at the surface  $r_s$  exerts forces over the Earth in two ways. First, at the interface between the Earth and the load  $\sigma^s$ , the static contact forces give rise to a degree- $l$  pressure

$$P^s = g_0 \sigma^s. \quad (25)$$

Second, the gravitational attraction of the load  $\sigma^s$  over the entire Earth is described by a degree- $l$  potential

$$\phi = \frac{4\pi G}{2l+1} \sigma^s r_s \begin{cases} \left(\frac{r}{r_s}\right)^l & \text{if } r \leq r_s \\ \left(\frac{r_s}{r}\right)^l & \text{if } r > r_s \end{cases} \quad (26)$$

Atmospheric pressure models are sampled at 3 h at best. So instead of using actual data, we write the surface density load in the analytical form:

$$\sigma^s(\theta, \phi, t) = \sigma_0^s(\theta, \phi) e^{-\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]^2}, \quad (27)$$

which is the same as the expression used for the fluid core pressure in Section 3. The degree-1 load  $\sigma_0^s$ , like  $P_0^c$ , contains three terms:

$$\sigma_0^s(\theta, \phi) = \sigma_{10} \cos \theta + (\sigma_{11} \cos \phi + \tilde{\sigma}_{11} \sin \phi) \sin \theta. \quad (28)$$

After integration of Eq. (3) over the whole surface, the radial displacement is given by:

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = \frac{r_s^2 U(r)}{\omega \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)} [U(r_s)g_0 + P(r_s)] \left[ \frac{\Re\{I(t)\}}{2Q} - \Im\{I(t)\} \right] \\ \times [\sigma_{10} \cos \theta + \sigma_{11} \sin \theta \cos \phi + \tilde{\sigma}_{11} \sin \theta \sin \phi], \quad (29)$$

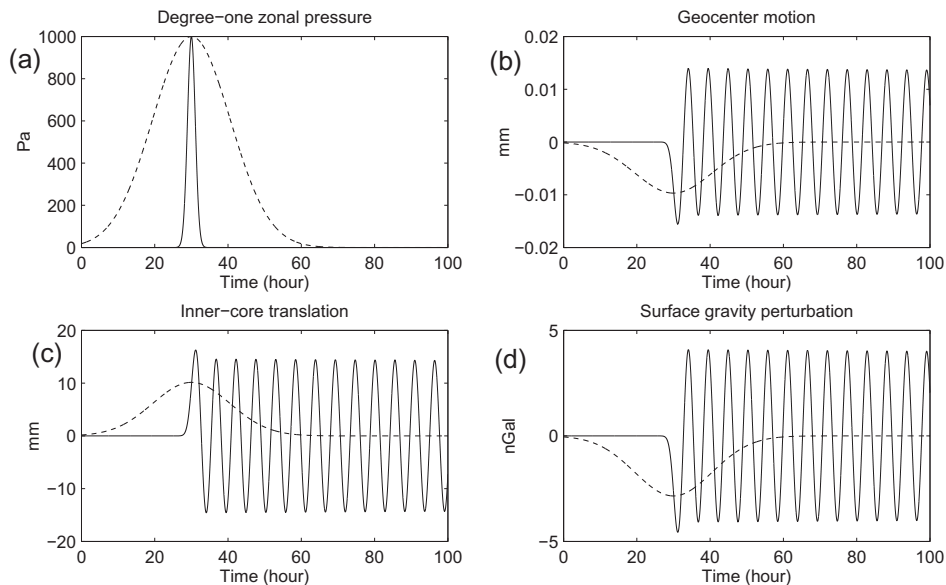
and the perturbation of the surface gravity is

$$\Delta g(t) = \frac{r_s^2}{\omega \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)} [U(r_s)g_0 + P(r_s)] \left[ \frac{\Re\{I(t)\}}{2Q} - \Im\{I(t)\} \right] \\ \times [\sigma_{10} \cos \theta + \sigma_{11} \sin \theta \cos \phi + \tilde{\sigma}_{11} \sin \theta \sin \phi] \\ \times \left[ -\omega^2 U(r_s) + \frac{2}{r_s} g_0 U(r_s) + \frac{2}{r_s} P(r_s) \right] \quad (30)$$

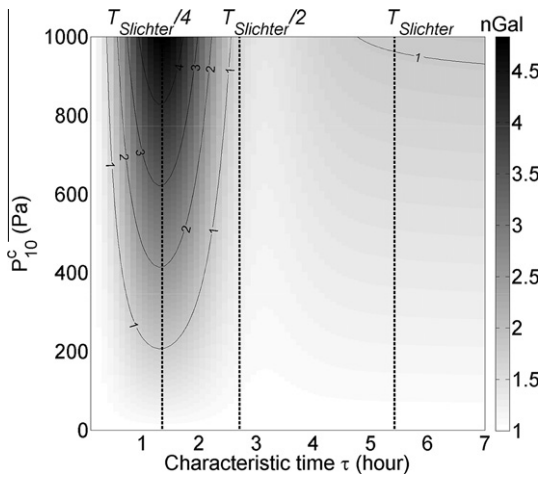
We use a zonal surface load pressure of 1000 Pa (the surface mass density is then  $\sigma_{10} = P_{10}/g_0$ ) and we compute the induced geocentre motion, the inner-core translation and the surface gravity perturbation for two excitation time-scales (1.5 h and 15 h) (Fig. 4). When applying a surface load of 1000 Pa during  $2\tau = 3$  h, the induced surface gravity perturbation has an amplitude of 5 nGal (0.05 nm/s<sup>2</sup>) corresponding to an inner-core translation of 15 mm and a geocentre motion in the opposite direction with an amplitude of 0.015 mm. When the excitation time-scale (15 h) is larger than the Slichter period, the excitation amplitude is smaller.

We also plot the surface gravity perturbation associated to the Slichter mode excited by a surface load for different excitation time-scales and various zonal pressure amplitudes in Fig. 5. The conclusion is similar to the one for an internal pressure flow, except that the surface gravity variations are about 300 times smaller.

In this section, we have estimated the effect of a surface load on the Slichter mode. Another source that, intuitively, could make the



**Fig. 4.** Resulting effects of the excitation of the Slichter mode by a zonal surface load  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]^2}$  for two different excitation time-scales:  $\tau = 1.5$  h (solid line) and  $\tau = 15$  h (dashed line). (a) Degree-1 zonal pressure effect; (b) geocentre motion; (c) inner-core translation; (d) surface gravity perturbation.



**Fig. 5.** Surface gravity perturbation induced by the Slichter mode excited by a surface load for different excitation time-scales and various zonal pressure amplitudes.

inner core oscillate is a shock at the surface. Hence, in the next section, we study the excitation by an object impact on the Earth's surface.

## 5. Excitation by an object impact

Stellar objects, such as asteroids or comets, are dragged by the Earth's atmosphere and reach the Earth's surface at relatively modest velocities, typically a few tens of km/s. The released energy is comparable to nuclear explosions (according to Table 6 of Collins et al. (2005), from  $3.2$  to  $3.9 \times 10^8$  megatons of TNT, where  $1 \text{ Mt} = 4.2 \times 10^{15} \text{ J}$ ). The collisions between the Earth and the largest meteoroids, with diameters from hundreds of meters to several kilometers, blast out the impacting objects, create wide craters, generally twenty times larger than the diameter of the meteoroids, and melt terrestrial rocks. Fortunately, such collisions are rare events: statistically, a 100–200 m meteoroid hits the Earth every 1000 years, a 500–800 m meteoroid every 30,000 years, and a 5 km meteoroid every 40 millions years.

We believe it is reasonable to assume that both the mass and linear momentum of the impacting object are negligible with respect to the Earth's mass and linear momentum, so the orbit of the Earth is not disturbed. Besides, the rotation period and tilt of the rotation axis of the Earth could be changed by the impact if the angular momentum of the object is large enough. We, however, consider impactors for which the angular momentum is at least one hundred times smaller than the Earth's; the change of the Earth's angular momentum is therefore negligible. The major known meteoroid impacts had such characteristics (Table 1).

Consequently, we reduce the extraterrestrial impact issue to the computation of the equivalent seismic magnitude corresponding to the released energy. The computation proposed here is based on the equations and drastic simplifications used by Collins et al. (2005), which are summarized below.

When an object enters the Earth's atmosphere, it loses its kinetic energy through deceleration and ablation. The rate of change of the velocity  $v$  is given by the drag equation (Collins et al., 2005; Melosh, 1989):

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3\rho z C_D}{4\rho_i L_0} v^2, \quad (31)$$

where  $z$  is the altitude,  $C_D$  is the drag coefficient, taken equal to 2, and  $\rho_i$  and  $L_0$  are, respectively, the impactor density and diameter. By assuming an exponential atmosphere,

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H}, \quad (32)$$

where  $H = 8 \text{ km}$  is the scale height and  $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ , the velocity of the impactor as a function of altitude is given by:

$$v(z) = v_0 \exp\left(-\frac{3\rho(z)C_D H}{4\rho_i L_0 \sin \alpha}\right), \quad (33)$$

where  $\alpha$  is the entry angle and  $v_0$ , the velocity at the top of the atmosphere. On its trajectory down to the ground, the impactor goes through the increasing atmospheric pressure and, possibly, breaks up. Collins et al. (2005) have established an empirical strength-density relation to estimate the yield strength  $Y_i$  (in Pa)

$$\log_{10} Y_i = 2.107 + 0.0624 \sqrt{\rho_i} \quad (34)$$

and give an approximate expression for the altitude of breakup  $z^*$ :

$$z^* \approx -H \left[ \ln \left( \frac{Y_i}{\rho_0 v_i^2} \right) + 1.308 - 0.314 I_f - 1.303 \sqrt{1 - I_f} \right], \quad (35)$$

where

$$I_f = 4.07 \frac{C_D H Y_i}{\rho_i L_0 v_i^2 \sin \alpha}, \quad (36)$$

and  $v_i$  is the impactor velocity at the surface.

Eq. (35) holds provided that  $I_f < 1$ . Otherwise, and more rarely, the object does not break up and the velocity at the impact is given by Eq. (33).

Following Collins et al. (2005), we use the approximative pancake model (Chyba et al., 1993; Melosh, 1981) to describe the disintegration of the meteoroid. Let us denote by  $z_b$  the airburst altitude, which is the altitude of complete dispersion of the fragments. According to the simplifying assumptions of the pancake model,  $z_b$  is given by

$$z_b = z^* - 2H \ln \left( 1 + \frac{\ell}{2H} \sqrt{f_p^2 - 1} \right), \quad (37)$$

where  $\ell$  is the dispersion length scale:

$$\ell = L_0 \sin \alpha \sqrt{\frac{\rho_i}{C_D \rho(z^*)}} \quad (38)$$

and the pancake factor  $f_p$  is between 2 and 10. We shall adopt Collins et al. (2005)'s value of 7. If  $z_b > 0$ , the airburst occurs in the atmosphere, there is neither impact nor associated seismic event. If  $z_b \leq 0$ , the fragments are not dispersed when they collide with the ground and the impact velocity is:

**Table 1**

Some meteoroid impacts on the Earth continental crust and oceanic crust. The impact angle is supposed to be 45 degrees and the impact velocity is 20 km/s.

Location	Date (AD or My BP)	Diameter (m)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	$M_w$	$\Delta g$ (nm/s <sup>2</sup> )
Tunguska Fireball, Siberia	1908 AD	60	2700 (rock)	No impact	
Ries Crater, Germany	15.1 ± 0.1	1500	2700 (rock)	7.4	$3.9 \times 10^{-6}$
Rochechouart, France	214 ± 8	1500	3350 (stony-iron)	7.5	$4.9 \times 10^{-6}$
Chesapeake Bay, USA	35.5 ± 0.3	2300	2700 (rock)	7.8	$1.4 \times 10^{-5}$
Chicxulub, Mexico	64.98 ± 0.05	17500	2700 (rock)	9.6	$6.7 \times 10^{-3}$

$$v_{zr} = v(z^*) \exp \left\{ \left( -\frac{3}{4} \frac{C_D \rho(z^*)}{\rho_i L_0^3 \sin \alpha} \frac{H^3 L_0^2}{3 \ell^2} \left( 32 + \left( \frac{\ell}{H} \right)^2 e^{z^*/H} + 6e^{2z^*/H} - 16e^{3z^*/2H} - 3 \left( \frac{\ell}{H} \right)^2 \right) \right) \right\} \quad (39)$$

The remaining kinetic energy at the moment of impact is

$$E_{cr} = \frac{\pi}{12} \rho_i L_0^3 v_{zr}^2 \quad (40)$$

After the impact, a fraction  $k_s$  of  $E_{cr}$  is radiated as seismic waves. Experimental data (Schultz and Gault, 1975) provide  $k_s \in [10^{-5}, 10^{-3}]$ . We will take  $k_s = 10^{-4}$ . The seismic moment being given by

$$M_0 = 2 \frac{\mu}{\Delta \sigma_s} k_s E_{cr}, \quad (41)$$

where the stress release  $\Delta \sigma_s \approx 3$  MPa and the rigidity  $\mu = 30$  GPa, the seismic magnitude is then:

$$M_w = \frac{2}{3} \log_{10}(M_0) - 10.73 \quad (42)$$

with  $M_0$  in dyn cm ( $1 \text{ dyn cm} = 10^{-7} \text{ N/m}$ ).

We compute the magnitude  $M_w$  for the different meteoroid impacts of Table 1 and, in the same table, report the surface gravity perturbation associated with the translational excitation of the inner core. Note that the source is represented in terms of moment tensor by three orthogonal force couples (spherically symmetric explosion) and not as a vertical force. Indeed, the shock pressure would reach hundreds of gigapascals and the impact energy would vaporize the rocks and cause a spherically symmetric explosion, as observed from the spherical shape of known craters.

For the biggest meteoroid, the surface excitation amplitude of the Slichter mode is  $0.0067 \text{ nm/s}^2$ , which is less than the detection threshold of  $1 \text{ nGal}$  ( $=0.01 \text{ nm/s}^2$ ). To determine what kind of impact would be necessary to excite sufficiently the Slichter mode so that it is detectable in surface gravity data, we compute the magnitude  $M_w$  and gravity perturbation  $\Delta g$  for various ranges of density  $\rho_i$ , velocity  $v_0$ , diameter  $L_0$  of the object and for seismic efficiency  $k_s$  varying between  $10^{-5}$  and  $10^{-2}$ . The resulting maps are plotted in Fig. 6. The shaded areas correspond to  $M_w$  larger than

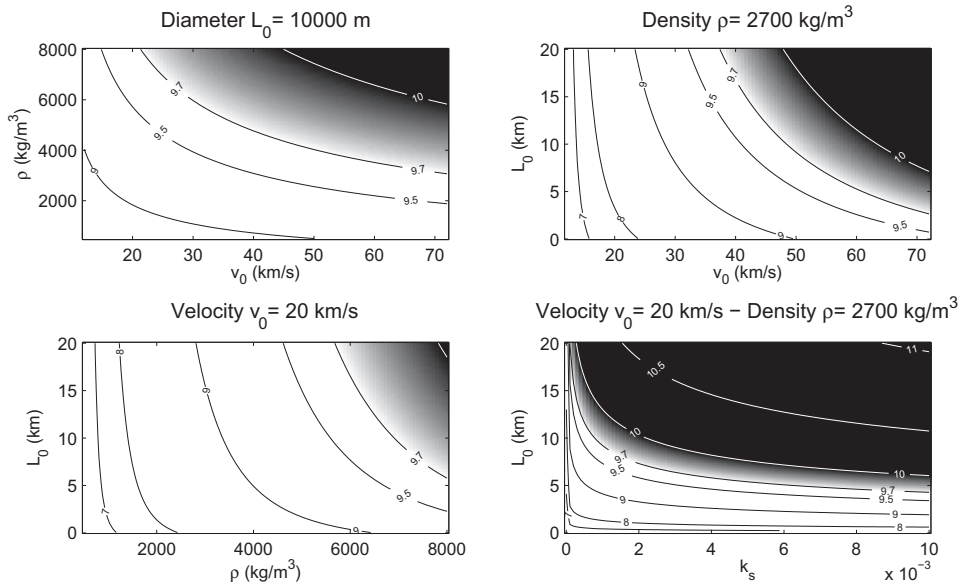


Fig. 6. Seismic magnitude as a function of the impactor parameters and seismic efficiency  $k_s$ . The shaded area corresponds to moment magnitudes larger than 9.7, i.e. to induced surface gravity perturbation larger than 1 nGal.

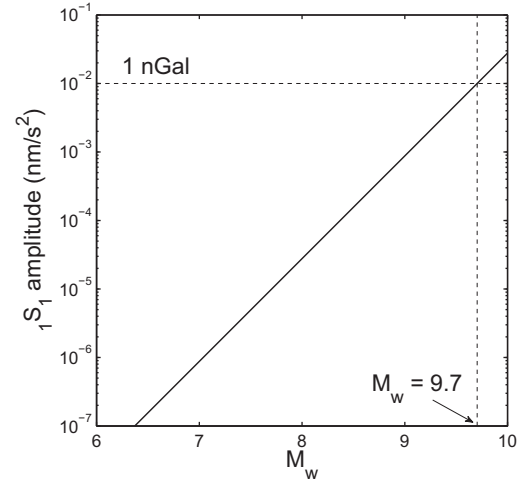


Fig. 7. Surface gravity perturbation induced by the Slichter mode as a function of the moment magnitude of a superficial energy release (explosion or object impact).

9.7, which is the magnitude required for the surface gravity effect to reach the nGal detection threshold for a surficial explosive moment source (Fig. 7).

We see from Fig. 6 that to produce a seismic event of magnitude larger than 9.7, the size, density or velocity of the impacting object should have unrealistic huge values. However, the value of the seismic efficiency  $k_s$  has a direct impact on the equivalent seismic magnitude. For instance, with a seismic efficiency of  $10^{-3}$  instead of  $10^{-4}$ , a meteoroid similar to the one which produced the Chicxulub crater in Mexico would be able to induce a seismic event of such a magnitude. Of course, the consequences would have been devastating.

We conclude that the surficial seismic events, including extra-terrestrial object impacts and explosions, are not efficient to make the inner-core oscillate at the Slichter frequency with an amplitude large enough to be observed at the surface. The reason is the same as for earthquakes, i.e. the excitation amplitude is directly linked to the seismic magnitude and the radial eigenfunctions of the Slichter

mode are constant and close to zero in the mantle (Crossley, 1992; Rogister, 2003; Rosat, 2007).

## 6. Conclusions and perspectives

We have investigated the excitation of the translational free motion of the inner core by a pressure due to a flow in the outer core and acting at both the ICB and CMB, by a surface load, which can be associated to atmospheric or oceanic loading for instance, and by the collision between the Earth and a stellar object. Our conclusion is that the Slichter mode would be best excited by a pressure acting at the core boundaries at time-scales shorter than half the Slichter eigenperiod.

For the pressure source at the ICB and CMB and the loading source at the surface, we have considered Gaussian functions of time. More complicated sources should be considered, in particular stochastic forces produced by some turbulent flow in the core or at the surface. The stochastic excitation, be it oceanic and atmospheric, of normal modes has been studied for instance by Tanimoto and Um (1999), Tanimoto (1999, 2007) and Webb (2007, 2008). However, the time scale for the Slichter mode is larger than for the other seismic normal modes, whose eigenperiod is shorter than 1 h, so we should consider a theory different from the Kolmogorov theory of turbulence.

We have considered an analytic expression for the surface pressure as a source for the excitation of the Slichter mode. A more realistic approach should be based on actual atmospheric data from space correlation of worldwide barometers or from weather institutes (ECMWF, NCEP...), provided the data are available at a time resolution higher than the Slichter period.

## Appendix A. Evaluation of the time integral $I(t)$ (Eq. (18))

We evaluate the following integral:

$$I(t) = \int_{-\infty}^t e^{iv(t-t')} e^{-\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]^2} dt'$$

We put  $b = \frac{t-t_0}{\tau}$  and introduce the variable  $x = \frac{t'-t_0}{\tau}$ .  $I(t)$  becomes:

$$I(t) = \tau \int_{-\infty}^b e^{iv\tau(b-x)} e^{-x^2} dx = \tau \int_{-\infty}^b e^{iv\tau b} e^{-x(x+iv\tau)} dx$$

We perform the change of variable  $y = x + i\frac{v\tau}{2}$ :

$$I(t) = \tau e^{iv\tau b} \int_{-\infty}^{b+i\frac{v\tau}{2}} e^{-(y-\frac{v\tau}{2})(y+i\frac{v\tau}{2})} dy = \tau e^{iv\tau b} e^{-\frac{v^2\tau^2}{4}} \int_{-\infty}^{b+i\frac{v\tau}{2}} e^{-y^2} dy$$

The integral  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-y^2} dy$  is the complementary error function  $\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z)$ , where

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy. \quad (\text{A.1})$$

So the time integral  $I(t)$  is given by:

$$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau e^{iv(t-T_0)} e^{-v^2\tau^2/4} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{t-T_0}{\tau} + i\frac{v\tau}{2}\right) \right]$$

## References

- Aki, K., Richards, P.G., 1980. *Quantitative Seismology*. Freeman, New York.
- Alterman, Z., Jarosch, H., Pekeris, L., 1959. Oscillations of the Earth. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A* 252, 80–95.
- Buffett, B.A., 2010. Tidal dissipation and the strength of the Earth's internal magnetic field. *Nature* 468, 952–954. doi:10.1038/nature09643.
- Buffett, B., Goertz, D.E., 1995. Magnetic damping of the translational oscillations of the inner core. *Geophys. J. Int.* 120, 103–110.
- Chyba, C.F., Thomas, P.J., Zahnle, K.J., 1993. The 1908 Tunguska explosion: atmospheric disruption of a stony asteroid. *Nature* 361, 40–44.
- Collins, G.S., Melosh, H.J., Marcus, R.A., 2005. Earth impact effects program: a web-based computer program for calculating the regional environmental consequences of a meteoroid impact on earth. *Meteorit. Planet. Sci.* 40 (6), 817–840.
- Courtier, N., Ducarme, B., Goodkind, J., Hinderer, J., Imanishi, Y., Seama, N., Sun, H., Merriam, J., Bengert, B., Smylie, D.E., 2000. Global superconducting gravimeter observations and the search for the translational modes of the inner core. *Phys. Earth Planet. Int.* 117, 320.
- Crossley, D.J., 1992. Eigensolutions and seismic excitation of the Slichter mode triplet for a fully rotating Earth model. *EOS* 73, 60.
- Crossley, D.J., Hinderer, J., Legros, H., 1992. On the excitation, detection and damping of core modes. *Phys. Earth Planet. Int.* 68, 97–116.
- Dahlen, F.A., Tromp, J., 1998. *Theoretical Global Seismology*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, p. 1025.
- Dziewonski, A.M., Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference Earth model (PREM). *Phys. Earth Planet. Int.* 25, 297–356.
- Farrell, W.E., 1972. Deformation of the Earth by surface loads. *Rev. Geophys. Space Phys.* 10 (3), 761–797.
- Greff-Lefftz, M., Legros, H., 1997. Some remarks about the degree-one deformation of the Earth. *Geophys. J. Int.* 131, 699–723.
- Greff-Lefftz, M., Legros, H., 2007. Fluid core dynamics and degree-one deformations: Slichter mode and geocentre motions. *Phys. Earth Planet. Int.* 161, 150–160.
- Grinfeld, P., Wisdom, J., 2010. The effect of phase transformations at the inner core boundary on the Slichter modes. *Phys. Earth Planet. Int.* 178 (3–4), 183–188.
- Gubbins, D., Masters, G., Nimmo, F., 2008. A thermochemical boundary layer at the base of Earth's outer core and independent estimate of core heat flux. *Geophys. J. Int.* 174, 1007–1018.
- Guo, J.Y., Dierks, O., Neumeier, J., Shum, C.K., 2007. A search for the Slichter modes in superconducting gravimeter records using a new method. *Geophys. J. Int.* 168, 507–517.
- Hinderer, J., Crossley, D., Jensen, O., 1995. A search for the Slichter triplet in superconducting gravimeter data. *Phys. Earth Planet. Int.* 90, 183–195.
- Hinderer, J., Crossley, D., 2000. Time variations in gravity and inferences on the Earth's structure and dynamics. *Surv. Geophys.* 21, 1–45.
- Jensen, O.G., Hinderer, J., Crossley, D.J., 1995. Noise limitations in the core-mode band of superconducting gravimeter data. *Phys. Earth Planet. Int.* 90, 169–181.
- Kanamori, H., Cipar, J.J., 1974. Focal process of the great Chilean earthquake May 22, 1960. *Phys. Earth Planet. Int.* 9, 128–136.
- Koper, K.D., Dombrovskaya, M., 2005. Seismic properties of the inner core boundary from PKiKP/PcP amplitude ratios. *Earth Planet. Sci. Lett.* 237, 680–694.
- Koper, K.D., Pyle, M.L., 2004. Observations of PKiKP/PcP amplitude ratios and implications for Earth structure at the boundaries of the liquid core. *J. Geophys. Res.* 109, B03301.
- Loper, D.E., 2007. Turbulence and small-scale dynamics in the core. In: Olson, P., Schubert, G. (Eds.), *Core Dynamics*, vol. 2 *Treatise on Geophysics*, Elsevier, Amsterdam, pp. 187–206.
- Masters, G., Gubbins, D., 2003. On the resolution of the density within the Earth. *Phys. Earth Planet. Int.* 140, 159–167.
- Melosh, H.J., 1981. Atmospheric breakup of terrestrial impactors. In: Schultz, P.H., Merrill, R.B. (Eds.), *Multi-ring Basins*, Pergamon Press, New York, pp. 29–35.
- Melosh, H.J., 1989. *Impact Cratering: A Geologic Process*. Oxford University Press, New York, p. 245.
- Okubo, S., Endo, T., 1986. Static spheroidal deformation of degree 1. Consistency relation, stress solution and partials. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 86, 91–102.
- Pagiatakis, S.D., Yin, H., Abd El-Gelil, M., 2007. Least-squares self-coherency analysis of superconducting gravimeter records in search for the Slichter triplet. *Phys. Earth Planet. Int.* 160, 108–123.
- Peng, Z.R., 1997. Effects of a mushy transition zone at the inner core boundary on the Slichter modes. *Geophys. J. Int.* 131, 607–617.
- Rieutord, M., 2002. Slichter modes of the Earth revisited. *Phys. Earth Planet. Int.* 131, 269–278.
- Rochester, M.G., Peng, Z.R., 1993. The Slichter modes of the rotating Earth: a test of the subseismic approximation. *Geophys. J. Int.* 111, 575–585.
- Rogister, Y., 2003. Splitting of seismic free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal earth. *Phys. Earth Planet. Int.* 140, 169–182.
- Rogister, Y., 2010. Multiple inner core wobbles in a simple Earth model with inviscid core. *Phys. Earth Planet. Int.* 178, 8–15. doi:10.1016/j.pepi.2009.08.012.
- Rogister, Y., Valette, B., 2009. Influence of liquid core dynamics on rotational modes. *Geophys. J. Int.* 176, 368–388. doi:10.1111/j.1365-246X.2008.03996.x.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D.J., Rivera, L., 2003. The search for the Slichter mode: comparison of noise levels of superconducting gravimeters and investigation of a stacking method. *Phys. Earth Planet. Int.* 140 (13), 183–202.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D.J., Boy, J.P., 2004. Performance of superconducting gravimeters from long-period seismology to tides. *J. Geodyn.* 38, 461–476.
- Rosat, S., Rogister, Y., Crossley, D., Hinderer, J., 2006. A search for the Slichter triplet with superconducting gravimeters: impact of the density jump at the inner core boundary. *J. Geodyn.* 41, 296–306.
- Rosat, S., 2007. Optimal Seismic Source Mechanisms to Excite the Slichter Mode. *Int. Assoc. of Geod. Symposia, Dynamic Planet*, Cairns, Australia, vol. 130, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 571–577.
- Rosat, S., Hinderer, J., 2011. Noise levels of superconducting gravimeters: updated comparison and time stability. *Bull. Seism. Soc. Am.* 101 (3). doi:10.1785/1020100217.
- Rosat, S., Sailhac, P., Gegout, P., 2007. A wavelet-based detection and characterization of damped transient waves occurring in geophysical time-

- series: theory and application to the search for the translational oscillations of the inner core. *Geophys. J. Int.* 171, 55–70.
- Schultz, P.H., Gault, D.E., 1975. Seismic effects from major basin formation on the moon and Mercury. *The Moon* 12, 159–177.
- Slichter, L.B., 1961. The fundamental free mode of the Earth's inner core. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 47, 186–190.
- Smith, M.L., 1976. Translational inner core oscillations of a rotating, slightly elliptical Earth. *J. Geophys. Res.* 81 (17), 3055–3065.
- Smylie, D.E., 1992. The inner core translational triplet and the density near Earth's centre. *Science* 255, 1678–1682.
- Smylie, D.E., McMillan, D.G., 2000. The inner core as a dynamic viscometer. *Phys. Earth Planet. Int.* 117, 71–79.
- Tanimoto, T., 1999. Excitation of normal modes by atmospheric turbulence: source of long-period seismic noise. *Geophys. J. Int.* 136, 395–402.
- Tanimoto, T., 2007. Excitation of normal modes by non-linear interaction of ocean waves. *Geophys. J. Int.* 168 (2), 571–582. doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03240.x.
- Tanimoto, T., Um, J., 1999. Cause of continuous oscillations of the Earth. *J. Geophys. Res.* 104, 28723–28739.
- Tkalčić, H., Kennett, B.L.N., Cormier, V.F., 2009. On the inner–outer core density contrast from PKiKP/PcP amplitude ratios and uncertainties caused by seismic noise. *Geophys. J. Int.* 179, 425–443.
- Tromp, J., Mitrovica, J.X., 1999. Surface loading of a viscoelastic earth-I. General theory. *Geophys. J. Int.* 137, 847–855.
- Valette, B., 1989a. Spectre des vibrations propres d'un corps élastique, auto-gravitant, en rotation uniforme et contenant une partie fluide, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 309, Sér. I, pp. 419–422.
- Valette, B., 1989b. Etude d'une classe de problèmes spectraux, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 309, Sér. I, pp. 785–788.
- Webb, S.C., 2007. The Earth's hum is driven by ocean waves over the continental shelves. *Nature* 445, 754–756. doi:10.1038/nature05536.
- Webb, S.C., 2008. The Earth's hum: the excitation of Earth normal modes by ocean waves. *Geophys. J. Int.* 174, 542–566.

## 3.3.3 EXCITATION PAR L'ATMOSPHERE - Article : Rosat et al. (2014)

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 8 October 2013  
 Received in revised form 19 December 2013  
 Accepted 20 December 2013  
 Available online 4 January 2014  
 Edited by Vernon F. Cormier

## Keywords:

Slichter mode  
 ECMWF atmospheric model  
 NCEP/CFSR atmospheric model  
 Superconducting gravimeters  
 Surface gravity  
 Normal mode

## ABSTRACT

Using hourly atmospheric surface pressure field from ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) and from NCEP (National Centers for Environmental Prediction) Climate Forecast System Reanalysis (CFSR) models, we show that atmospheric pressure fluctuations excite the translational oscillation of the inner core, the so-called Slichter mode, to the sub-nanogal level at the Earth surface. The computation is performed using a normal-mode formalism for a spherical, self-gravitating anelastic PREM-like Earth model. We determine the statistical response in the form of power spectral densities of the degree-one spherical harmonic components of the observed pressure field. Both hypotheses of inverted and non-inverted barometer for the ocean response to pressure forcing are considered. Based on previously computed noise levels, we show that the surface excitation amplitude is below the limit of detection of the superconducting gravimeters, making the Slichter mode detection a challenging instrumental task for the near future.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

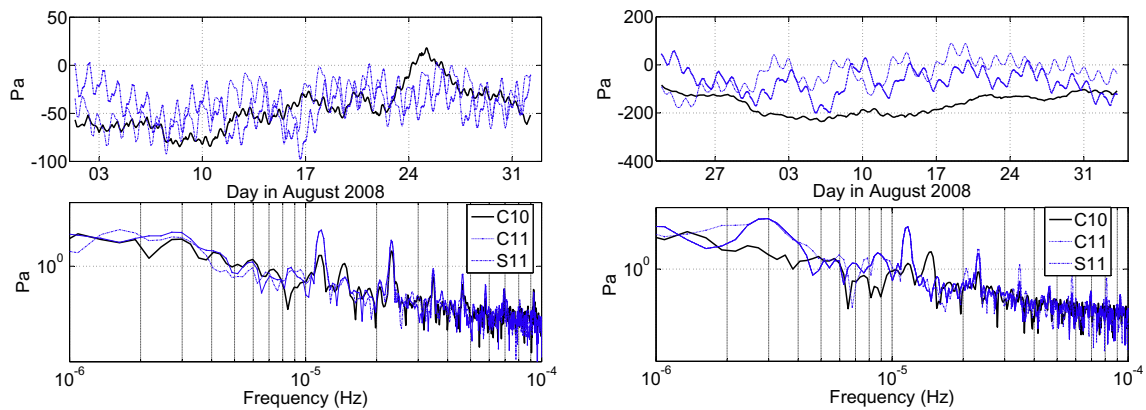
The search for the surface gravity effect of the free translational oscillations of the inner core, the so-called Slichter modes (Slichter, 1961), has been a subject of observational challenge, particularly since the development of worldwide data from superconducting gravimeters (SGs) of the Global Geodynamics Project (Hinderer and Crossley, 2000). Indeed these relative gravimeters are the most suitable instruments to detect the small signals that would be expected from the Slichter modes (Hinderer et al., 1995; Rosat et al., 2003, 2004).

A first claim by Smylie (1992) of a triplet of frequencies that he attributed to the Slichter modes led to a controversy (e.g. Rieutord, 2002). This detection has been supported by Courtier et al. (2000) and Pagiatakis et al. (2007) but has not been confirmed by other authors (Hinderer et al., 1995; Jensen et al., 1995; Rosat et al., 2006; Guo et al., 2007; Rosat et al., 2007). Crossley et al. (1992) and Crossley et al. (1993) have shown it is necessary to consider dynamic Love numbers to calculate the Slichter mode eigenperiods. Latest theoretical computation predicts a degenerate (without rotation or ellipticity) eigenperiod of 5.42 h (Rogister, 2003) for the seismological reference PREM (Dziewonski and Anderson, 1981) Earth model. A more recent study by Grünfeld and Wisdom (2010) states that the period could be shorter because of the kinetics of phase transformations at the inner-core boundary (ICB).

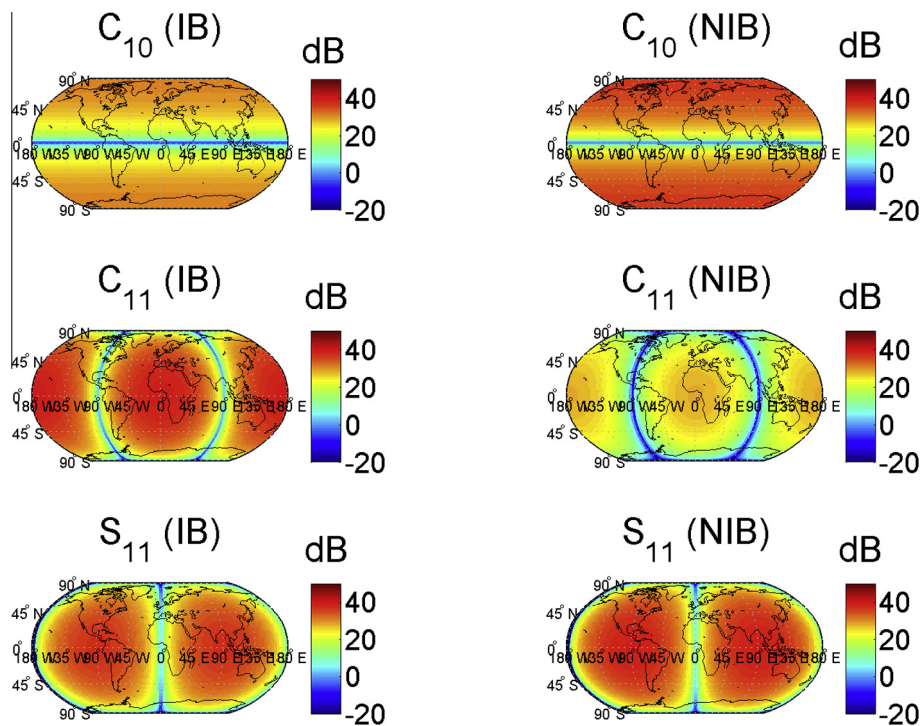
The interest raised by the Slichter modes resides in its opportunity to constrain the density jump and the viscosity in the fluid outer core at the ICB. The density jump at the ICB is a parameter that constrains the kinetic energy required to power the geodynamo by compositional convection. Some discrepancies have been obtained for the value of this parameter. On the one hand, by analyzing seismic PKiKP/PcP phases, Koper and Pyle (2004) found that it should be smaller than  $450 \text{ kg/m}^3$ , later increased to  $520 \text{ kg/m}^3$  (Koper and Dombrovskaya, 2005). On the other hand, using normal modes observation, Masters and Gubbins (2003) obtained  $820 \pm 180 \text{ kg/m}^3$ . Such differences in the estimate of the ICB density jump have been partially attributed to the uncertainties associated with the seismic noise (Tkalčić et al., 2009). A model that satisfies both the constraints set by powering the geodynamo with a reasonable heat flux from the core, and PKP traveltimes and normal mode frequencies has been proposed by Gubbins et al. (2008) with a large overall density jump between the inner and outer cores of  $800 \text{ kg/m}^3$  and a sharp density jump of  $600 \text{ kg/m}^3$  at the ICB itself. In the following we will adopt the PREM value of  $600 \text{ kg/m}^3$ .

The non-detection of the Slichter modes raises the question of their expected amplitude, their damping and the possible mechanisms to excite them. A certain number of papers have considered the damping of the inner core oscillation through anelasticity of the inner core and mantle (Crossley et al., 1991), through viscous dissipation in the outer core (Mathews and Guo, 2005) or through magnetic dissipation (Buffett and Goertz, 1995). Guo et al. (2007) and Rosat et al. (2007) have summarized the theoretical Q values

\* Corresponding author. Tel.: +33 368850116.  
 E-mail address: srosat@unistra.fr (S. Rosat).



**Fig. 1.** Time-variations (upper) and amplitude spectra (lower) of the harmonic degree-one coefficients of the ECMWF atmospheric pressure field during August 2008 for an inverted (left) and a non-inverted (right) barometer response of the oceans.



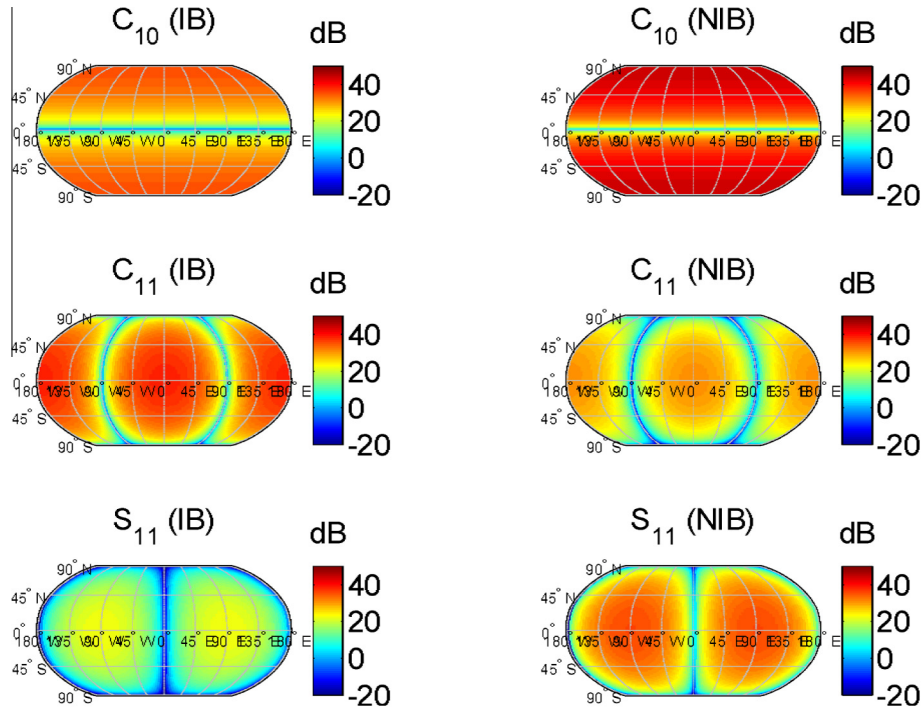
**Fig. 2.** Power spectral densities of the harmonic degree-one coefficients of the ECMWF atmospheric pressure field during August 2008 for an inverted and a non-inverted barometer response of the oceans. Unit is decibel relatively to  $\text{Pa}^2/\text{Hz}$ .

expected for the Slichter mode. Greff-Lefftz and Legros (2007) have concluded that it should most probably be equal to or larger than 2000. Various sources of excitation have been previously considered. The seismic excitation has been studied by Smith, 1976; Crossley, 1992 and Rosat, 2007. They have shown that earthquakes cannot excite the Slichter modes to a level sufficient for the SGs to detect the induced surface gravity effect. For instance, even for the 1960  $M_w = 9.6$  Chilean event the induced surface gravity effect does not reach the nanogal level ( $1 \text{ nGal} = 10^{-2} \text{ nm/s}^2$ ). Surficial pressure flow acting at the ICB and generated within the fluid outer core has been considered by Greff-Lefftz and Legros (2007) and Rosat and Rogister (2012) as a possible excitation mechanism. However, the flow in the core at a timescale of a few hours is too poorly constrained to provide reliable predictions of the amplitude of the Slichter modes. Rosat and Rogister (2012) have investigated the excitation of the Slichter modes by the impact of a meteoroid,

which they treated as a surficial seismic source. For the biggest known past collision associated to the Chicxulub crater in Mexico with a corresponding moment-magnitude  $M_w = 9.6$ , the surface excitation amplitude of the Slichter mode was barely  $0.0067 \text{ nm/s}^2 = 0.67 \text{ nGal}$ . Nowadays, a similar collision would therefore not excite the Slichter modes to a detectable level. The degree-one surface load has also been investigated by Rosat and Rogister (2012). They showed that a Gaussian-type zonal degree-one pressure flow of  $4.5 \text{ hPa}$  applied during  $1.5 \text{ h}$  would excite the Slichter mode and induce a surface gravity perturbation of  $2 \text{ nGal}$  which should be detectable by SGs (Rosat and Hinderer, 2011). This determination was based on a purely analytical model of surface pressure.

In this paper we will use hourly surface pressure data provided by two different meteorological centers and show that the surface atmospheric pressure fluctuations can only excite the Slichter modes to an amplitude below the limit of detection of current SGs.





**Fig. 3.** Power spectral densities of the harmonic degree-one coefficients of the NCEP/CFSR atmospheric pressure field during August 2008 for an inverted and a non-inverted barometer response of the oceans. Unit is decibel relatively to  $\text{Pa}^2/\text{Hz}$ .

## 2. Excitation by a continuous surface load

In this Section, we consider a spherical Earth model, for which the frequencies of the three Slichter modes degenerate into a single frequency, and establish a formula for the spectral energy of the amplitude of the mode when it is excited by a surface load.

Developed in a surface spherical harmonics expansion, a degree-one load  $\sigma_0$  contains three terms:

$$\sigma_0(t; \theta, \phi) = \sigma_{10}(t) \cos \theta + (\sigma_{11}^c(t) \cos \phi + \sigma_{11}^s(t) \sin \phi) \sin \theta, \quad (1)$$

where  $\theta$  and  $\phi$  are the colatitude and longitude, respectively. The Green function formalism suited for surface-load problems (Farrell, 1972) has been generalized to the visco-elastic case by Tromp and Mitrovica (1999) and has been established for the degree-one Slichter mode by Rosat and Rogister (2012).

The degree-one radial displacement due to load (1) is given by

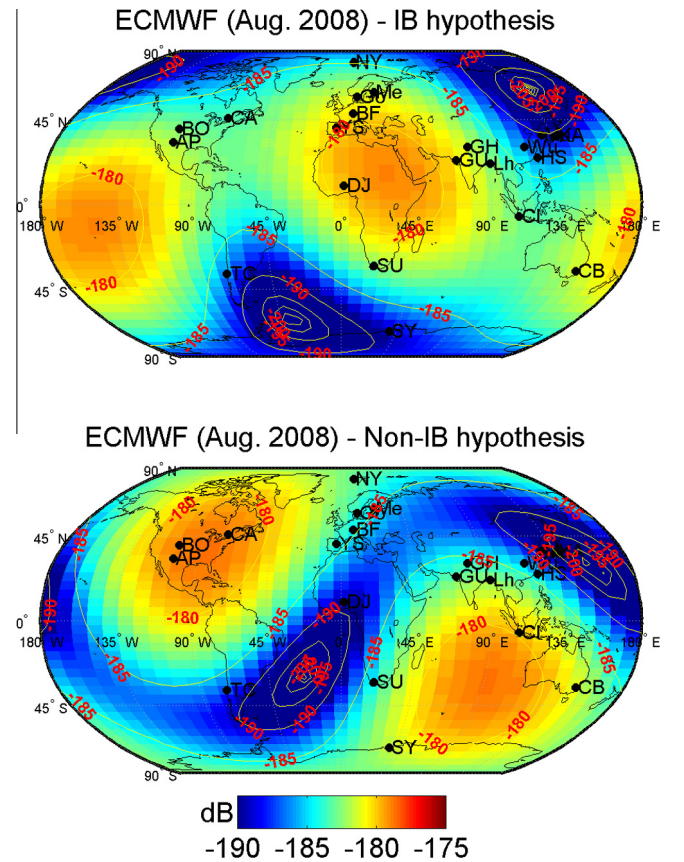
$$u_r(r, \theta, \phi; t) = \frac{r_s^2 U(r)}{iv} [U(r_s) g_0 + P(r_s)] \left[ \int_{-\infty}^t e^{ivt'} (\sigma_{10}(t') \cos \theta + \sigma_{11}^c(t') \sin \theta \cos \phi + \sigma_{11}^s(t') \sin \theta \sin \phi) dt' \right], \quad (2)$$

and the perturbation of the surface gravity is

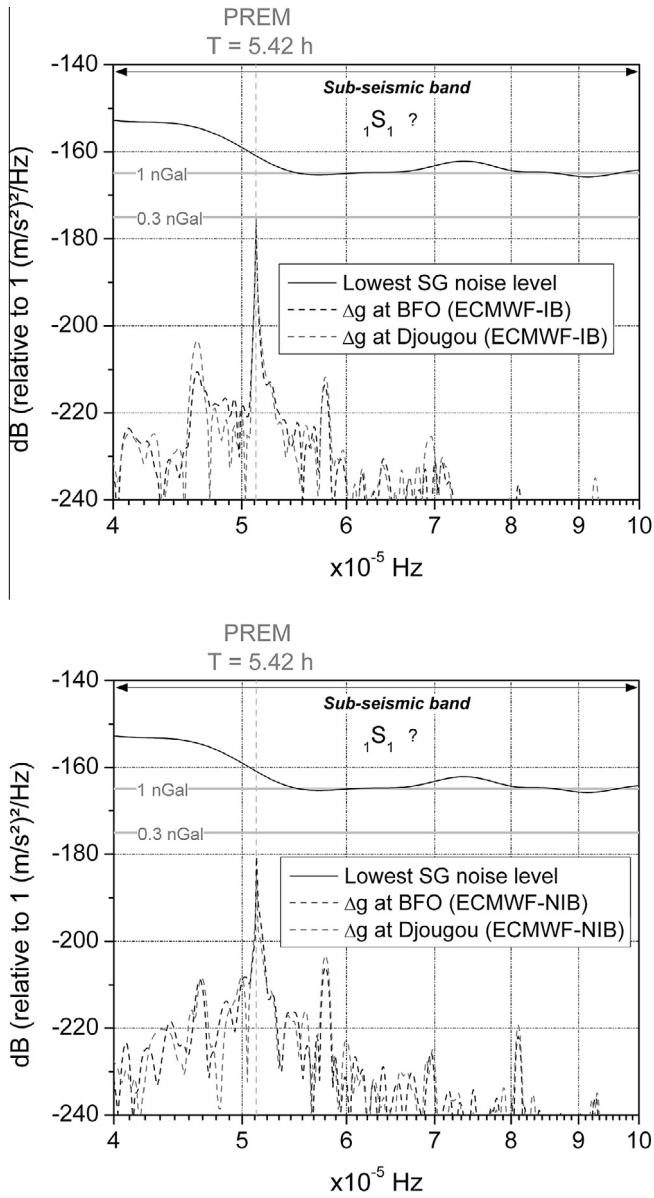
$$\Delta g(r, \theta, \phi; t) = \frac{r_s^2 U(r)}{iv} [U(r_s) g_0 + P(r_s)] \left[ \int_{-\infty}^t e^{ivt'} (\sigma_{10}(t') \cos \theta + \sigma_{11}^c(t') \sin \theta \cos \phi + \sigma_{11}^s(t') \sin \theta \sin \phi) dt' \right] \left[ -\omega^2 U(r_s) + \frac{2}{r_s} g_0 U(r_s) + \frac{2}{r_s} P(r_s) \right]. \quad (3)$$

In the last two equations,  $U$  and  $P$  are, respectively, the radial displacement and perturbation of the gravity potential associated to the Slichter mode,  $r_s$  is the Earth radius, and  $v = \omega_0(1 + i/2Q)$  is the complex frequency. As in Rosat and Rogister (2012), we adopt a quality factor  $Q = 2000$  and a period  $T = 2\pi/\omega_0 = 5.42$  h for a PREM-like Earth's model.

The sources of excitation we consider are continuous pressure variations at the surface. A similar problem was treated by Tanimoto and Um (1999) and Fukao et al. (2002) for the



**Fig. 4.** Power spectral density of the surface gravity effect induced by the Slichter mode excited by the degree-one coefficients of the ECMWF pressure field during August 2008 for an inverted (top) and a non-inverted (bottom) barometer response of the oceans. Unit is decibel relatively to  $(\text{m/s}^2)^2/\text{Hz}$ . Some superconducting gravimeter sites are indicated.



**Fig. 5.** Power spectral densities of the surface gravity effect at Djougou and BFO induced by the Slichter mode excited by the degree-one coefficients of the ECMWF atmosphere during August 2008 for an inverted (*top*) and non-inverted (*bottom*) barometer response of the oceans. Unit is decibel relatively to  $(\text{m/s}^2)^2/\text{Hz}$ . The best SG noise level and the levels corresponding to the 1 nGal and 0.3 nGal signals are indicated.

atmospheric excitation of normal modes where the sources were considered as stochastic quantities in space and time. As we use a harmonic spherical decomposition of the pressure field, the correlation in space depends on the harmonic degree, here the degree-one component of wavelength  $2\pi r_s$ . The correlation in time is performed in the spectral domain.

As a consequence we introduce the energy spectrum of the degree-one pressure fluctuations

$$S_p(\theta, \phi; \omega) = \hat{\sigma}_0(\omega; \theta, \phi) \hat{\sigma}_0^*(\omega; \theta, \phi), \quad (4)$$

and the energy spectrum of the radial displacement

$$S(r, \theta, \phi; \omega) = \hat{u}_r(r, \theta, \phi; \omega) \hat{u}_r^*(r, \theta, \phi; \omega),$$

where  $\hat{u}_r(r, \theta, \phi; \omega)$  is the Fourier transform of  $u_r(r, \theta, \phi; t)$ ,  $\hat{\sigma}_0(\omega; \theta, \phi)$  is the Fourier transform of  $\sigma_0(t; \theta, \phi)$  and \* denotes the complex conjugate. The Fourier transform of Eq. (2) is

$$\begin{aligned} \hat{u}_r(r, \theta, \phi; \omega) &= \frac{r_s^2 U(r)}{iV} [U(r_s)g_0 + P(r_s)] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^t e^{i\nu_k t'} (\sigma_{10}(t') \cos \theta + \sigma_{11}^c(t') \sin \theta \cos \phi + \sigma_{11}^s(t') \sin \theta \sin \phi) dt' \right] dt \\ &= \frac{r_s^2 U(r)}{\omega_0(1 + \frac{1}{4Q^2})} [U(r_s)g_0 + P(r_s)] \frac{\omega_0(1 - \frac{1}{4Q^2}) - \omega + \frac{i}{2Q}(\omega - 2\omega_0)}{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} + (\omega_0 - \omega)^2} \\ &(\hat{\sigma}_{10}(\omega) \cos \theta + \hat{\sigma}_{11}^c(\omega) \sin \theta \cos \phi + \hat{\sigma}_{11}^s(\omega) \sin \theta \sin \phi), \end{aligned}$$

and, therefore, we have

$$\begin{aligned} S(r, \theta, \phi; \omega) &= \frac{r_s^4 U^2(r)}{\omega_0^2(1 + \frac{1}{4Q^2})^2} [U(r_s)g_0 + P(r_s)]^2 \\ &\frac{\left[ \omega_0(1 - \frac{1}{4Q^2}) - \omega \right]^2 + \frac{(\omega - 2\omega_0)^2}{4Q^2}}{\left[ \frac{\omega_0^2}{4Q^2} + (\omega_0 - \omega)^2 \right]^2} S_p(\theta, \phi; \omega). \end{aligned} \quad (5)$$

From Eq. (5) and (3), we obtain the spectral energy of gravity  $S_g$  for the excitation of the Slichter mode by a surface fluid layer

$$\begin{aligned} S_g(r, \theta, \phi; \omega) &= \frac{r_s^4 (-\omega^2 U(r) + \frac{2}{g_0} U(r) + \frac{2}{P(r)})^2}{\omega_0^2(1 + \frac{1}{4Q^2})^2} [U(r_s)g_0 + P(r_s)]^2 \\ &\frac{\left[ \omega_0(1 - \frac{1}{4Q^2}) - \omega \right]^2 + \frac{(\omega - 2\omega_0)^2}{4Q^2}}{\left[ \frac{\omega_0^2}{4Q^2} + (\omega_0 - \omega)^2 \right]^2} S_p(\theta, \phi; \omega). \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. Atmospheric pressure variations

The operational model of the European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF) is usually available at 3-hourly temporal resolution, the spatial resolution varying from about 35 km in 2002 to 12 km since 2009. This is clearly not sufficient to investigate the Slichter mode excitation. However, during the period of CONT08 measurements campaign (August 12–26, 2008), atmospheric analysis data were provided by the ECMWF also on an hourly basis. CONT08 provided 2 weeks of continuous Very Long Baseline Interferometry (VLBI) observations for the study, among other goals, of daily and sub-daily variations in Earth rotation (Schindelegger et al., 2011). We take advantage of this higher-than-usual temporal resolution to compute the excitation of the Slichter mode by the surface pressure fluctuations. To do so, we first extract the degree-one coefficients of the surface pressure during this period, considering both an inverted and a non-inverted barometer response of the oceans to air pressure variations (Wunsch and Stammer, 1997). Both hypotheses have the advantage to give simple responses of the oceans to atmospheric forcing, even if at such high frequencies, static responses are known to be inadequate. The use of a dynamic response of the ocean (Boy and Lyard, 2008) would lead to more accurate results but we would need a forcing (pressure and winds) of the oceans at hourly time scales which is not available.

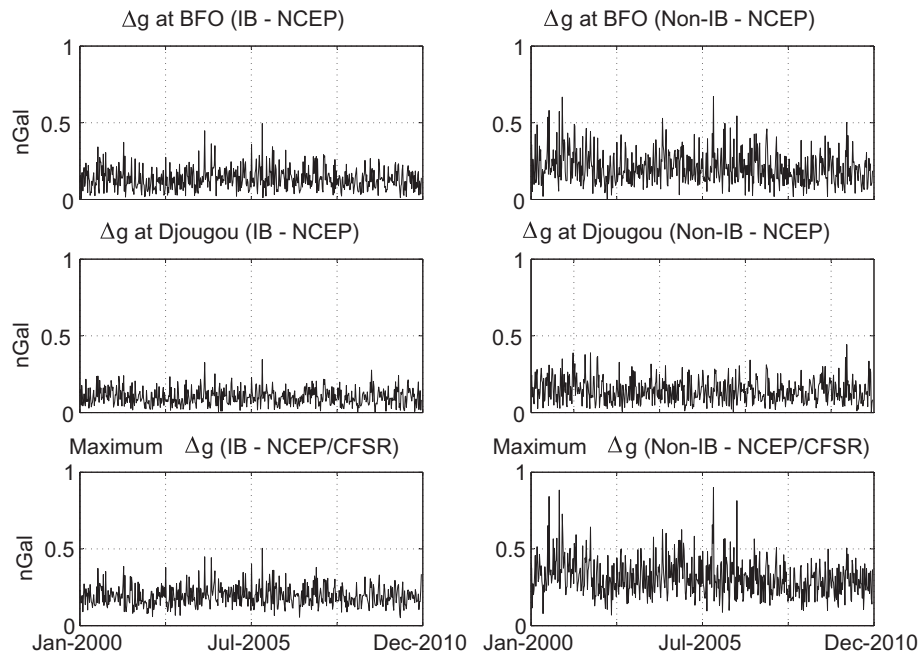
The degree-1 surface pressure changes contain three terms:

$$P_0 = C_{10}(t) \cos \theta + (C_{11}(t) \cos \phi + S_{11}(t) \sin \phi) \sin \theta.$$

From it, we can estimate the surface mass density by  $\sigma_0 = P_0/g_0$  where  $g_0$  is the mean surface gravity and compute the energy spectrum  $S_p$  as defined in Eq. (4).

The time-variations and Fourier amplitude spectra of the harmonic degree-one coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{11}$  and  $S_{11}$  are plotted in Fig. 1 for the IB and non-IB hypotheses. The power spectral densities (PSDs) computed over the whole period considered here (August 2008) are represented in Fig. 2 for both oceanic responses.

We also consider the NCEP (National Centers for Environmental Prediction) Climate Forecast System Reanalysis (CFRS) model (Saha, 2010), for which hourly surface pressure is available with a spatial resolution of about  $0.3^\circ$  before 2010, and  $0.2^\circ$  after.



**Fig. 6.** Time-varying surface gravity effects induced by the Slichter mode excited by the degree-one coefficients of the NCEP/CFSR atmospheric model from 2000 until 2011 for an inverted and a non-inverted barometer response of the oceans at BFO (top), at Djougou (middle) and maximum excitation amplitudes (bottom).

NCEP/CFSR and ECMWF models used different assimilation schemes, e.g. 4D variational analysis for ECMWF, and a 3D variational analysis for NCEP/CFSR every 6 h. The temporal continuity of pressure is therefore enforced in the ECMWF model, whereas 6-hourly assimilation steps can sometimes be seen in the NCEP/CFSR pressure series, for certain areas and time. The power spectral densities of the degree-one NCEP/CFSR surface pressure field computed over August 2008 are represented in Fig. 3 for both oceanic responses.

#### 4. Excitation amplitude of the Slichter mode

Using Eqs. (3) and (6) we can compute the surface gravity perturbation induced by the Slichter mode excited by the degree-one ECMWF and NCEP/CFSR surface atmospheric pressure variations during August 2008. The computation is performed with the eigenfunctions obtained for a spherical, self-gravitating anelastic PREM-like Earth model as in Rogister (2003). We remove the 3 km-thick global ocean from the PREM model because the ocean response is already included in the degree-one atmospheric coefficients.

The power spectral densities of the surface gravity effect induced by the Slichter mode excited by the ECMWF atmospheric data are plotted in Fig. 4 for an inverted and a non-inverted barometer response of the oceans. The PSD is given in decibels to enable an easy comparison with previous SG noise level studies (e.g. Rosat and Hinderer, 2011). NCEP/CFSR weather solutions give a similar surface excitation amplitude less than  $-175$  dB.

We also consider the PSDs of the excitation amplitude at the SG sites Djougou (Benin) and BFO (Black Forest Observatory, Germany) for both oceanic responses in Fig. 5. According to Fig. 4 the Djougou site turns out to be located at a maximum of excitation amplitude in the case of an inverted barometer response of the oceans. BFO is the SG site with the lowest noise level at sub-seismic frequencies (Rosat and Hinderer, 2011). The later noise level is also plotted in Fig. 5. In that figure, we can see that the excitation amplitude at Djougou reaches  $-175$  dB. For an undamped harmonic signal of amplitude  $A$  the PSD is defined by  $A^2NT_0/4$

where  $N$  is the number of samples and  $T_0$  the sampling interval. Consequently, assuming a 15-day time duration with a sampling rate of 1 min, a PSD amplitude of  $-175$  dB corresponds to a harmonic signal of  $0.3$  nGal, which is clearly below the  $1$  nGal detection threshold and below the best SG noise level. A decrease of noise by a factor 3 would be necessary to be able to detect such a sub-nanogal effect. Stacking  $n$  worldwide SGs of low noise levels would improve the signal-to-noise ratio by a factor  $\sqrt{n}$ . Supposing that we had a large number of SG sites with equal noise levels (same as BFO SG noise level), then we would need to stack 10 datasets to improve the SNR by 10 dB, so as to reach the nanogal level.

Both ECMWF and NCEP atmospheric pressure data lead to a similar, presently undetectable, excitation amplitude for the Slichter mode during August 2008. However, as we have at our disposal 11 years of hourly NCEP/CFSR surface pressure field, we can look at the time-variations of the excitation amplitude of the Slichter mode over the full period. NCEP atmospheric pressure data are assimilated every 6 h introducing an artificial periodic signal. In order to avoid the contamination by this 6 h-oscillation in spectral domain on the Slichter mode period of 5.42 h, we need a data length of 2.5 days at least. We consider time-windows of 15 days shifted by 7 days and compute the surface excitation amplitude of the Slichter mode at the BFO and Djougou superconducting gravimeter sites and at location on Earth for which the excitation amplitude is maximum (Fig. 6). Note that this location of maximum amplitude is also varying in time. We can see that the excitation amplitude is larger than  $0.4$  nGal at BFO for instance between January and March 2004 and in November 2005 for both oceanic responses. There is also a peak of excitation at Djougou in November 2005 and between January and March 2004 but only for an IB-hypothesis. However, during these 11 years between 2000 and 2011, the maximum surface excitation amplitude stays below  $0.7$  nGal.

As a consequence we can conclude that the degree-one surface pressure variations are a possible source of excitation for the Slichter mode but the induced surface gravity effect is too weak to be detected by current SGs.

## 5. Conclusion

Using a normal mode formalism, we have computed the surface gravity perturbations induced by a continuous excitation of the Slichter mode by atmospheric degree-one pressure variations provided by two meteorological centers: ECMWF and NCEP/CFSR. Both inverted and non-inverted barometer responses of the oceans to the atmospheric load have been employed. We have shown that the induced surface gravity signal does not reach the nanogal level, which is considered as being the level of detection of present SGs.

The surficial degree-one pressure variations are a probable source of excitation of the Slichter mode but the weak induced surface amplitude is one additional reason why this translational mode core has never been detected. An instrumental challenge for the future gravimeters would be to further decrease their noise levels.

Another source of possible excitation that has not been investigated yet is the dynamic response of the oceans. The oceans are known to be a source of continuous excitation of the fundamental seismic modes (Webb, 2007; Tanimoto, 2007; Webb, 2008). So a further study would require to improve the response of the oceans.

## Acknowledgments

We would like to thank two anonymous reviewers for their comments on this work. We acknowledge the use of meteorological data of the ECMWF and NCEP.

## References

- Boy, J.-P., Lyard, F., 2008. High-frequency non-tidal ocean loading effects on surface gravity measurements. *Geophys. J. Int.* 175, 35–45.
- Buffett, B.A., Goertz, D.E., 1995. Magnetic damping of the translational oscillations of the inner core. *Geophys. J. Int.* 120, 1031–1040.
- Courtier, N., Ducarme, B., Goodkind, J., Hinderer, J., Imanishi, Y., Seama, N., Sun, H., Merriam, J., Bengert, B., Smylie, D.E., 2000. Global superconducting gravimeter observations and the search for the translational modes of the inner core. *Phys. Earth Planet. Int.* 117, 320.
- Crossley, D.J., 1992. Eigensolutions and seismic excitation of the Slichter mode triplet for a fully rotating Earth model. *EOS* 73, 60.
- Crossley, D., Hinderer, J., Legros, H., 1991. On the excitation, detection and damping of core modes. *Phys. Earth Planet. Int.* 68, 971–1000.
- Crossley, D.J., Rochester, M.G., Peng, Z.R., 1992. Slichter modes and Love numbers. *Geophys. Res. Lett.* 19, 1679–1682.
- Crossley, D.J., Rochester, M.G., Peng, Z.R., 1993. Correction to: Slichter modes and Love numbers. *Geophys. Res. Lett.* 20, 333.
- Dziewonski, A.M., Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference Earth model (PREM). *Phys. Earth Planet. Int.* 25, 297–356.
- Farrell, W.E., 1972. Deformation of the Earth by surface loads. *Rev. Geophys.* 10 (3), 761–797.
- Fukao, Y., Nishida, K., Suda, K., Kobayashi, N., 2002. A theory of the Earth's background free oscillations. *J. Geophys. Res.* 107 (B9), 2206.
- Greff-Lefftz, M., Legros, H., 2007. Fluid core dynamics and degree-one deformations: Slichter mode and geocentre motions. *Phys. Earth Planet. Int.* 161, 150–160.
- Grinfeld, P., Wisdom, J., 2010. The effect of phase transformations at the inner core boundary on the Slichter modes. *Phys. Earth Planet. Int.* 178 (3–4), 183–188.
- Gubbins, D., Masters, G., Nimmo, F., 2008. A thermochemical boundary layer at the base of Earth's outer core and independent estimate of core heat flux. *Geophys. J. Int.* 174, 1007–1018.
- Guo, J.Y., Dierks, O., Neumeyer, J., Shum, C.K., 2007. A search for the Slichter modes in superconducting gravimeter records using a new method. *Geophys. J. Int.* 168, 507–517.
- Hinderer, J., Crossley, D., Jensen, O., 1995. A search for the Slichter triplet in superconducting gravimeter data. *Phys. Earth Planet. Int.* 90, 183–195.
- Hinderer, J., Crossley, D., 2000. Time variations in gravity and inferences on the Earth's structure and dynamics. *Surv. Geophys.* 21, 1–45.
- Jensen, O.G., Hinderer, J., Crossley, D.J., 1995. Noise limitations in the core-mode band of superconducting gravimeter data. *Phys. Earth Planet. Int.* 90, 169–181.
- Koper, K.D., Dombrovskaya, M., 2005. Seismic properties of the inner core boundary from PKiKP/PcP amplitude ratios. *Earth Planet. Sci. Lett.* 237, 680–694.
- Koper, K.D., Pyle, M.L., 2004. Observations of PKiKP/PcP amplitude ratios and implications for Earth structure at the boundaries of the liquid core. *J. Geophys. Res.* 109, B03301.
- Masters, G., Gubbins, D., 2003. On the resolution of the density within the Earth. *Phys. Earth Planet. Int.* 140, 159–167.
- Mathews, P.M., Guo, J.Y., 2005. Visco-electromagnetic coupling in precession-nutation theory. *J. Geophys. Res.* 110 (B2), B02402. <http://dx.doi.org/10.1029/2003JB002915>.
- Pagiatakis, S.D., Yin, H., Abd El-Gelil, M., 2007. Least-squares self-coherency analysis of superconducting gravimeter records in search for the Slichter triplet. *Phys. Earth Planet. Int.* 160, 108–123.
- Rieutord, M., 2002. Slichter modes of the Earth revisited. *Phys. Earth Planet. Int.* 131, 269–278.
- Rogister, Y., 2003. Splitting of seismic free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal earth. *Phys. Earth Planet. Int.* 140, 169–182.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D.J., Rivera, L., 2003. The search for the Slichter mode: comparison of noise levels of superconducting gravimeters and investigation of a stacking method. *Phys. Earth Planet. Int.* 140 (13), 183–202.
- Rosat, S., Hinderer, J., Crossley, D.J., Boy, J.P., 2004. Performance of superconducting gravimeters from long-period seismology to tides. *J. of Geodyn.* 38, 461–476.
- Rosat, S., Rogister, Y., Crossley, D., Hinderer, J., 2006. A search for the Slichter Triplet with Superconducting Gravimeters: Impact of the Density Jump at the Inner Core Boundary. *J. Geodyn.* 41, 296–306.
- Rosat, S., 2007. Optimal seismic source mechanisms to excite the Slichter mode. *Int. Assoc. Geod. Symposia, Dynamic Planet, Cairns (Australia)*, vol. 130. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp. 571–577.
- Rosat, S., Sailhac, P., Gegout, P., 2007. A wavelet-based detection and characterization of damped transient waves occurring in geophysical time-series: theory and application to the search for the translational oscillations of the inner core. *Geophys. J. Int.* 171, 55–70.
- Rosat, S., Hinderer, J., 2011. Noise levels of superconducting gravimeters: updated comparison and time stability. *Bull. Seism. Soc. Am.* 101 (3). <http://dx.doi.org/10.1785/0120100217>.
- Rosat, S., Rogister, Y., 2012. Excitation of the Slichter mode by collision with a meteoroid or pressure variations at the surface and core boundaries. *Phys. Earth Planet. Int.* 190–191, 25–33.
- Saha, S. et al., 2010. The NCEP climate forecast system reanalysis. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 91, 10151057. <http://dx.doi.org/10.1175/2010BAMS3001.1>.
- Schindelegger, M., Bhm, J., Salstein, D., Schuh, H., 2011. High-resolution atmospheric angular momentum functions related to Earth rotation parameters during CONT08. *J. Geodyn.* 85, 425433.
- Slichter, L.B., 1961. The fundamental free mode of the Earth's inner core. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 47, 186–190.
- Smith, M.L., 1976. Translational inner core oscillations of a rotating, slightly elliptical Earth. *J. Geophys. Res.* 81 (17), 3055–3065.
- Smylie, D.E., 1992. The inner core translational triplet and the density near Earth's centre. *Science* 255, 1678–1682.
- Tanimoto, T., 2007. Excitation of normal modes by non-linear interaction of ocean waves. *Geophys. J. Int.* 168 (2), 571–582. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03240.x>.
- Tanimoto, T., Um, J., 1999. Cause of continuous oscillations of the Earth. *J. Geophys. Res.* 104, 28723–28739.
- Tkalčić, H., Kennett, B.L.N., Cormier, V.F., 2009. On the inner–outer core density contrast from PKiKP/PcP amplitude ratios and uncertainties caused by seismic noise. *Geophys. J. Int.* 179, 425–443.
- Tromp, J., Mitrovica, J.X., 1999. Surface loading of a viscoelastic earth-I. General theory. *Geophys. J. Int.* 137, 847–855.
- Webb, S.C., 2007. The Earth's hum is driven by ocean waves over the continental shelves. *Nature* 445, 754–756. <http://dx.doi.org/10.1038/nature05536>.
- Webb, S.C., 2008. The Earth's hum: the excitation of Earth normal modes by ocean waves. *Geophys. J. Int.* 174, 542–566.
- Wunsch, C., Stammer, D., 1997. Atmospheric loading and the inverted barometer effect. *Rev. Geophys.* 35, 79107.

## 3.4 EFFET DES CHANGEMENTS DE PHASE

### 3.4.1 MOTIVATION

L'idée que des changements de phase à l'interface graine - noyau liquide (ICB) pourraient modifier voire entraver l'oscillation de la graine a déjà été suggérée par Wu & Rochester (1994). Lorsque la graine vibre, son déplacement l'emmène dans des conditions de température et pression différentes de son état initial. Ainsi, une partie va être déplacée vers une zone de pression plus faible, laissant la place au matériau liquide pour se solidifier, tandis que la partie opposée de la graine se retrouvera à des conditions de pression plus élevées et il pourrait y avoir fusion (voir Fig. 3.4.1). Ainsi, pendant une période d'oscillation complète de la graine, fusion et cristallisation vont pouvoir se succéder et la période du mode sera modifiée. Le cas extrême serait que ces changements de phase empêchent même toute oscillation de la graine.

L'étude de Grinfeld & Wisdom (2010), reprise dans le cas de Mercure par Coyette et al. (2012) et des satellites de glaces par Coyette & Van Hoolst (2014), a montré que la période des modes de translation de la graine pouvait être fortement diminuée par l'introduction des transformations de phase à l'ICB. Ces auteurs ont considéré des changements de phase instantanés et ont montré que la période du mode de Slichter serait fortement diminuée, de l'ordre de quelques dizaines de minutes au lieu de 5.42 h pour le modèle de Terre PREM.

Nous nous intéressons ici à quantifier la cinématique des changements de phase par rapport à la vitesse d'oscillation de la graine. Une première estimation peut être aisément obtenue dans le cas d'un modèle de croissance dendritique à l'interface graine - noyau liquide (Wu & Rochester, 1994).

### 3.4.2 CROISSANCE DENDRITIQUE

Suivant Wu & Rochester (1994), nous supposons que l'ICB constitue une transition de phase et donc à l'ICB la température  $T_0$  est égale à la température critique du changement de phase entre noyau liquide et fer solide. Notons  $T_0^c$  cette température. Lorsque la graine se déplace, une particule située à l'ICB mais du côté fluide, va subir une variation lagrangienne de pression  $\Delta p$  (cf. Fig. 3.4.2). En supposant que ce déplacement se fait de manière adiabatique, le changement de température associé est donné par :

$$\Delta T = \frac{\alpha_p T_0}{\rho_c C_p} \Delta p$$

où  $\alpha_p$  est le coefficient d'expansion volumique,  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante et  $\rho_c$  la densité du noyau fluide.

Or nous avons supposé que l'ICB était à la température critique du changement de phase solide - liquide. L'équation de Clausius-Clapeyron prédit alors que la perturbation de température nécessaire pour atteindre le point de fusion lorsque la pression varie de  $\Delta p$  est :

$$\Delta T^c = \frac{v_1 T_0^c}{L} \Delta p$$

avec  $L$  la chaleur latente du changement de phase et  $v_1$  la variation lagrangienne de volume associée à la fusion.

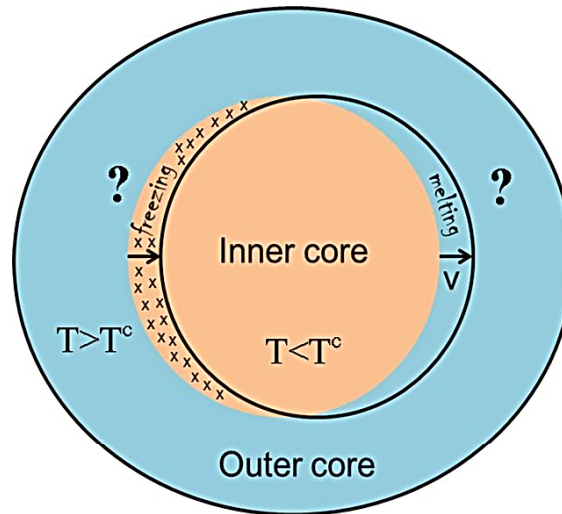


FIGURE 3.4.1: Schéma illustrant le déplacement de la graine dans le noyau fluide.  $T^c$  correspond à la température critique du changement de phase entre fer liquide et fer solide à l'ICB.

### Encadré 3.1: LES DENDRITES

Le terme « dendrite » dérive du mot grec *dendron*, signifiant « arbre » ( $\delta\epsilon\nu\delta\rho\nu\nu$ ). En minéralogie, les dendrites sont des cristaux ramifiés dont les branches s'alignent préférentiellement dans la direction du flux de chaleur (Bergman, 2003; Glicksman, 2011). Ces branches sont liées par des relations angulaires spéciales et montrent des symétries propres à la structure cristalline du matériau. Les dendrites représentent l'état final d'un front de solidification plan instable entre une phase liquide et une phase solide. Elles peuvent se former spontanément par nucléation ou de manière provoquée par contact avec un germe de cristal. Le processus de croissance des dendrites a un aspect commercial important puisque leurs caractéristiques de solidification sont largement utilisées en métallurgie.

Comme dans la graine solide, nous avons  $\frac{\Delta T^c}{\Delta p} \geq \frac{\Delta T}{\Delta p}$  (Fearn et al., 1981; Loper & Roberts, 1981; Wu & Rochester, 1994), lorsque la graine se déplace, la partie qui s'éloigne du centre de la Terre est refroidie à une température inférieure à la température critique  $T_0^c$  du changement de phase, mais elle ne se solidifie pas car nous sommes au-dessus de la courbe de fusion (courbe de Clapeyron). Il s'agit d'un procédé de surfusion (« supercooling » en anglais). Ce processus de « supercooling » est un procédé qui permet donc de refroidir un liquide à une température inférieure à sa température de cristallisation mais sans qu'il se solidifie. La couche ainsi obtenue dans un état de surfusion est instable. Cet état instable ne persiste pas et l'équilibre thermodynamique va être rétabli par la formation d'une région bi-phasique, où la phase solide existerait soit sous forme de structures cristallines (appelées « dendrites », voir Encadré 3.1) formant une couche dendritique ou « mushy layer » (voir Encadré 3.2), soit sous forme de cristaux isolés en suspension formant une couche appelée « slurry layer » (Loper & Roberts, 1981). Le régime de croissance dendritique de la graine est relativement bien admis dans la communauté des géodynamiciens du noyau privilégiant

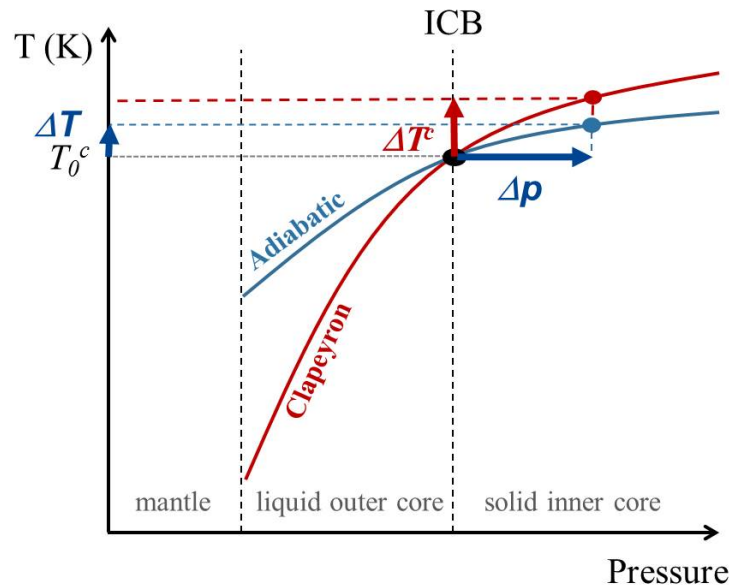


FIGURE 3.4.2: Courbe de température (gradient adiabatique) et courbe de Clapeyron (changement de phase) dans le noyau terrestre.

### Encadré 3.2: « MUSHY » OR « SLURRY » LAYER ?

On appelle « mushy layer » (traduction littérale : couche pâteuse) une couche qui se situerait au dessus de l'interface graine - noyau liquide, dans laquelle des dendrites coexisteraient avec un liquide enrichi en solutés. Ces solutés sont des éléments légers issus du refroidissement du noyau liquide qui se cristallise entraînant la croissance de la graine. Ce rejet d'éléments légers et de chaleur latente à l'ICB lors du refroidissement du noyau participe à maintenir la convection et la dynamo terrestre. L'existence de cette couche dendritique est clairement démontrée d'un point de vue thermodynamique mais son épaisseur est encore discutée. Fearn et al. (1981) ont noté que cette zone devait être très épaisse et pourrait même s'étendre jusqu'au centre de la Terre. Cependant Deguen et al. (2007) ont démontré que les incertitudes sur le diagramme de phase ne permettaient pas d'estimer précisément l'épaisseur thermodynamique de cette couche et qu'elle pourrait n'être que de quelques kilomètres, voire même quelques dizaines de mètres (Alexandrov & Malygin, 2011).

On appelle « slurry layer » (traduction littérale : couche de solutés) une couche qui se situerait au dessus de l'interface graine - noyau liquide dans laquelle il y aurait accumulation des cristaux de fer par gravité. La croissance de la graine serait alors une conséquence de cette accumulation de cristaux, contrairement au mode de cristallisation en « mushy layer » pour lequel la croissance de la graine se fait sous forme de dendrites qui se forment à l'ICB. Les études les plus récentes (e.g. Shimizu et al., 2005; Alboussière & Deguen, 2012) favorisent un régime dendritique avec une « mushy layer » car il semble peu probable que le refroidissement du liquide à l'ICB produise suffisamment de grains solides pour expliquer le taux de croissance de la graine.

ainsi l'existence d'une couche dendritique (« mushy layer ») au dessus de l'ICB (Shimizu et al., 2005; Deguen, 2012). La croissance des dendrites résulte d'une instabilité morphologique du front de solidification et est le régime de solidification le plus communément rencontré en métallurgie. La vitesse de croissance des dendrites dépend de la quantité de surfusion (écart à la courbe de fusion) et peut s'écrire simplement (Flemings, 1974) :

$$v_d = \xi(\Delta T^c - \Delta T)^\eta,$$

où  $v_d$  est en  $\text{cm s}^{-1}$ .  $\xi$  et  $\eta$  sont des constantes déterminées expérimentalement. Prenons les valeurs données dans Flemings (1974) :  $\xi = 0.222$  et  $\eta = 1.84$ . Si l'on calcule cette vitesse pour les différentes sources excitatrices du mode de Slichter considérées dans Rosat (2007); Rosat & Rogister (2012); Rosat et al. (2014), on obtient les résultats du Tableau 3.4.1.

Sources	$\Delta u_{max}$ (mm)	$\Delta T^c - \Delta T$ (K)	$\Delta P_{ICB}$ (hPa)	$v$ (m/s)	$v_d$ (m/s)
Pressions fluides dans le noyau (CMB : 150 Pa, ICB : 1217 Pa)	775	$5.4 \cdot 10^{-5}$	415	$4 \cdot 10^{-5}$ $\approx 4 \text{ m/jour}$	$3 \cdot 10^{-11}$ $\approx 1 \text{ mm/an}$
Pressions fluides dans le noyau (CMB : 10 Pa, ICB : 81 Pa)	52	$3.6 \cdot 10^{-6}$	28	$2.6 \cdot 10^{-6}$ $\approx 22 \text{ cm/jour}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$ $\approx 7 \text{ } \mu\text{m/an}$
ECMWF - baromètre inversé (Août 2008)	0.5	$3.3 \cdot 10^{-8}$	0.25	$2.4 \cdot 10^{-8}$ $\approx 2 \text{ mm/jour}$	$3.7 \cdot 10^{-17}$ $\approx 1 \text{ nm/an}$
NCEP - baromètre non inversé (2000-2010)	3.2	$2.2 \cdot 10^{-7}$	1.7	$1.6 \cdot 10^{-7}$ $\approx 14 \text{ mm/jour}$	$1.3 \cdot 10^{-15}$ $\approx 40 \text{ nm/an}$

TABLE 3.4.1: Déplacements maximums de la graine  $\Delta u_{max}$ , quantités de surfusion  $\Delta T^c - \Delta T$ , variations de pression  $\Delta P_{ICB}$  à l'ICB et vitesses de la graine  $v$  et de croissance des dendrites  $v_d$  associés au mode de Slichter excité par différentes sources.

Il est clair que la vitesse de croissance des dendrites est au moins un millionième de fois plus petite que la vitesse de déplacement de la graine associée au mode de Slichter. Durant le cycle d'oscillation de la graine, la croissance des dendrites n'a donc pas le temps de se faire, et donc la cristallisation ne peut pas avoir lieu. Dans le cadre de ce modèle simple de croissance dendritique, les changements de phase n'influencent pas la fréquence du mode de Slichter.

### 3.5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons considéré un modèle de croissance dendritique à l'interface graine - noyau liquide. Cependant d'autres modes de changements de phase peuvent avoir lieu, en particulier une cristallisation massique (« bulk cristallization »). En outre la cinétique de la transition inverse, c'est-à-dire solide vers liquide, doit également être envisagée.

De manière plus générale, il serait intéressant de considérer le couplage éventuel des modes de Slichter avec les modes gravito-inertiels du noyau. En effet, ce couplage pourrait exister pour certaines valeurs de la fréquence de Brunt-Väisälä (Rogister & Valette, 2009).



---

# CHAPITRE 4

## EFFETS RELATIVISTES SUR LES MODES PROPRES DE LA TERRE

### 4.1 INTRODUCTION

Sur Terre, dans le cadre de la mécanique newtonienne, la gravitation se manifeste par un champ, qui varie dans le temps sous l'action de nombreux phénomènes géophysiques (séismes, marées, surcharges océaniques, atmosphériques, hydrologiques ou glaciaires, déformations de surface, etc.). Etant donné les défauts de la mécanique newtonienne, il est souhaitable d'élargir l'analyse géodynamique traditionnelle en y intégrant les effets prédits par la relativité générale (cf. Encadré 4.1). Dans cette perspective, j'ai considéré deux aspects novateurs :

- Le premier consistera à modéliser les interactions des ondes gravitationnelles, dont l'existence a été récemment confirmée par des observations (Abbott et al., 2016), avec les modes propres de la Terre, en particulier les modes sismiques et les marées terrestres ;
- Le second aspect consistera à analyser les données de variations temporelles de la gravité enregistrées avec des gravimètres relatifs supraconducteurs afin de mettre en évidence les déformations dues aux ondes gravitationnelles mais aussi des effets relativistes qui n'ont jamais été observés, tels que l'anisotropie spatiale de la constante de la gravitation universelle  $G$  dans le cadre de l'approximation post-newtonienne.

Afin de mener à bien cette recherche, nous disposons de données gravimétriques continues d'un réseau mondial d'environ 25 stations. Trois sites d'étude, équipés avec la dernière génération de gravimètres relatifs, seront plus particulièrement considérés : l'observatoire gravimétrique de Strasbourg (J9), l'observatoire de la Forêt Noire (BFO, Allemagne) et le laboratoire souterrain à bas bruit de Rustrel (LSBB).

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible de certaines grandeurs physiques dans le milieu de propagation (pression, position, vitesse,...). Elle transporte de l'énergie sans transfert de matière. Les ondes mécaniques requièrent un milieu matériel de propagation tandis que les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le « vide ». Les propriétés du vide ne sont pas encore bien comprises. Le vide est considéré comme un milieu présentant des fluctuations quantiques, c'est-à-dire avec créations et destructions permanentes de particules.

**Encadré 4.1: QUELQUES RAPPELS SUR LA RELATIVITÉ****RELATIVITÉ RESTREINTE (1905) :**

Une personne qui voyage à une vitesse proche de celle de la lumière (vitesse  $c$ ) voit son temps s'allonger, tandis que son espace se rétrécit, par rapport au temps et à l'espace d'une personne restée immobile. A cette époque, Einstein a généralisé l'équivalence de la matière et de l'énergie, le fameux  $E = mc^2$ . En réalité c'est Poincaré, dans un cours donné à la Sorbonne en 1898, qui a démontré pour la première fois que lorsqu'une masse émet de la lumière, elle perd la masse  $\Delta m = \frac{E}{c^2}$  si  $E$  est l'énergie de l'impulsion lumineuse (Poincaré, 1900; Ives, 1952). Poincaré (1904) a également défini le principe de relativité selon lequel les lois physiques sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens (inertiels). L'univers de la relativité restreinte est structuré par des repères de Minkowski qui sont des référentiels d'espace et de temps en translation uniforme. Le passage d'un repère de Minkowski à un autre se fait à l'aide d'une transformation de Lorentz. L'espace-temps de la relativité restreinte est dit plat. Dans le cadre de la relativité restreinte, aucun corps, aucune information, aucune influence ne peut cheminer plus vite que la lumière. Surgit alors un conflit entre le concept de force Newtonienne instantanée et le problème de la vitesse de la lumière qui ne peut être dépassée. Ce conflit sera dépassé dix ans plus tard lorsqu'Einstein présente sa théorie de la relativité générale.

**RELATIVITÉ GÉNÉRALE (1915) :**

Dans le cadre de la relativité générale, l'espace et le temps peuvent désormais se courber et se tordre en présence de matière ou d'énergie (Fig. 4.1.1). Ainsi, **la gravité est la manifestation de la courbure de l'espace-temps**. Par exemple, aux abords d'un trou noir, un champ de gravité intense règne. Ce champ intense dilate le temps et courbe l'espace. Contrairement à la théorie de la gravitation de Newton pour laquelle la force gravitationnelle se transmet instantanément, dans le cadre de la relativité générale, la gravitation se manifeste à la vitesse de la lumière par les distorsions de la structure de l'espace-temps. Cet espace-temps est modélisé par une hypersurface caractérisée par une métrique (ou tenseur métrique) que l'on note couramment  $g_{\mu\nu}$ , où  $\mu$  et  $\nu$  sont de dimension 4 (3 coordonnées spatiales + 1 coordonnée temporelle). Cette métrique caractérise le champ gravifique. Ainsi, toutes les lois de la physique non gravitationnelles s'écrivent de façon équivalente dans tous les repères de référence spatio-temporels localement inertiels (et sous forme tensorielle pour maintenir la covariance des égalités). La métrique  $g_{\mu\nu}$  varie d'un point à un autre et n'est uniforme que localement : l'espace-temps est courbé.

Un corps massif en accélération génère des ondes gravitationnelles. Deux objets binaires, c'est-à-dire deux objets en orbite l'un autour de l'autre, génèrent aussi des ondes gravitationnelles. Par exemple, un trou noir binaire est l'une des plus grandes sources d'ondes gravitationnelles de l'univers observable, comme nous le verrons au paragraphe 4.5.1. Ces ondes prennent l'énergie du système qui va donc voir sa période orbitale diminuer. Le mouvement orbital prend alors la forme d'une spirale de plus en plus rapide et de rayon de plus en plus petit jusqu'à la coalescence des deux objets. Les ondes gravitationnelles générées vont voir leur période diminuer et leur amplitude augmenter. Ces ondes vont se propager dans l'Univers. Lorsqu'elles vont atteindre la Terre, celle-ci va se déformer dans son ensemble. Loin

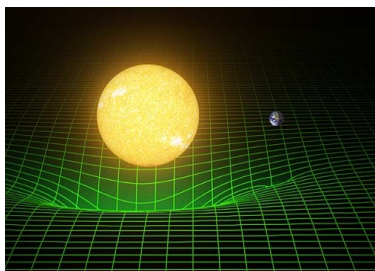


FIGURE 4.1.1: Les corps massifs déforment l'espace-temps. La grille verte représente comment le Soleil et la Terre déforment l'espace et le temps (l'espace-temps). Comme Albert Einstein l'a démontré dans sa théorie de la relativité générale, la masse et le moment cinétique des corps massifs déforment la structure de l'espace-temps et un corps quelconque a une trajectoire déterminée par cette géométrie. Sa théorie prédit également l'existence d'ondes gravitationnelles qui sont des ondulations de l'espace-temps. Ces ondes, qui se déplacent à la vitesse de la lumière, sont créées lorsque des corps massifs subissent des accélérations dans l'espace-temps. Crédit image ©T. Pyle/Caltech/MIT/LIGO Lab

#### **Encadré 4.2:** DE L'INFINIMENT PETIT, À L'INFINIMENT GRAND, VERS UNE THÉORIE UNIFIÉE ?

Les deux grandes théories qui constituent les piliers de la physique moderne sont la mécanique quantique et la relativité, toutes les deux nées au début du XX<sup>ème</sup> siècle. La mécanique quantique est la théorie de l'infiniment petit (Heisenberg, Schrödinger,...) (molécules, atomes, particules élémentaires de la matière (quarks, électrons)), alors que la relativité est la théorie de l'infiniment grand (Einstein) (étoiles, galaxies, univers). Einstein a cherché une théorie dite « unifiée » qui décrirait toutes les forces de la nature dans un cadre unique, cohérent et tout-puissant. Aujourd'hui, bien après Einstein, les physiciens pensent avoir enfin trouvé une telle théorie, appelée la « théorie des supercordes » (Greene, 1999).

#### THÉORIE DES CORDES :

La théorie des cordes (ou « théorie des supercordes ») est une théorie unifiée qui postule que les ingrédients fondamentaux de l'Univers ne sont pas des particules ponctuelles sans dimension mais des filaments microscopiques unidimensionnels appelés « cordes ». Les lois de la mécanique quantique pour décrire le petit et de la relativité pour décrire le grand sont compatibles. Dans cette théorie, la masse d'une particule élémentaire est spécifiée par l'énergie du mode de vibration de la corde qui la compose. De même, la réponse des particules à l'interaction gravitationnelle est caractérisée par les modes de vibration des cordes qui les composent. Les autres interactions (électromagnétiques, nucléaires faibles, fortes...) peuvent également être représentées par ces cordes et même les particules fondamentales qui sont les médiateurs des forces (bosons, photons, gravitons, gluons) (Greene, 1999). Une autre théorie unificatrice appelée « gravitation quantique à boucles » a également le vent en poupe. Cependant ces théories nécessitent une violation du principe d'équivalence (cf. Encadré 4.4).

des sources et dans le cadre de l'approximation post-Newtonienne de la relativité générale, ces ondes ont une forme quadrupolaire, comme nous le verrons également au paragraphe 4.5.1.

Notre étude sur le couplage des ondes gravitationnelles avec la Terre s'inscrit dans le projet MIGA (Antenne gravitationnelle basée sur l'interférométrie atomique - <https://sites.google.com/site/migaproject/>) qui a pour but d'étudier le tenseur des déformations de l'espace-temps et de la gravitation, et mènera peut-être, à son tour, à la détection des ondes gravitationnelles.

## 4.2 LE PROJET MIGA

Le projet MIGA (Matter wave - laser based Interferometer Gravitation Antenna) consiste en la construction au LSBB (Laboratoire Souterrain à Bas Bruit de Rustrel) d'un complexe instrumental consacré à l'étude des déformations de l'espace - temps et de la gravitation dans le cadre de la relativité générale (Geiger et al., 2015). Cet appareillage permettra de mieux comprendre les variations temporelles de la pesanteur terrestre sur une large gamme de fréquences (de moins d'un Hertz jusqu'à plusieurs centaines de Hertz). En combinant la géophysique et la physique fondamentale, MIGA a pour objectif d'être avant tout un démonstrateur qui mènera peut-être à de nouveaux détecteurs d'ondes gravitationnelles.

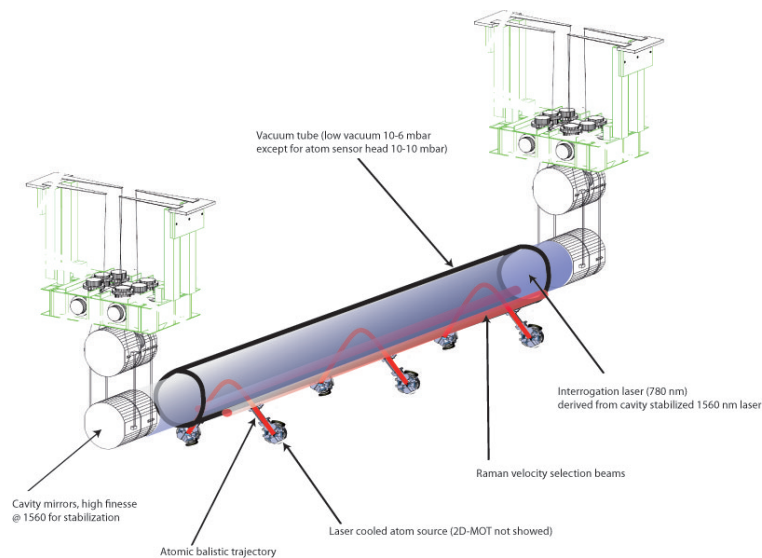


FIGURE 4.2.1: Source : <https://sites.google.com/site/migaproject/project-definition>

L'instrument principal de MIGA consiste en trois interféromètres atomiques alignés le long d'un faisceau laser (cf. Fig. 4.2.1). En complément, un gravimètre relatif à supraconductivité de dernière génération (appelé iOSG-24) a été installé en juillet 2015 au LSBB afin de servir de contrôle qualité et de référence à « l'antenne » MIGA. Ce gravimètre cryogénique bénéficie d'un bruit instrumental réduit par rapport aux autres gravimètres supraconducteurs (Rosat et al., 2016b) dans la gamme des fréquences sismiques (au dessus de 1 mHz). Cette diminution de bruit instrumental, associée à un environnement calme (LSBB), est fondamentale pour la détection de signaux de petites amplitudes qui n'ont pas encore été

observés tels que les modes de translation de la graine, certaines ondes de marées luni-solaires ou l'effet du couplage des ondes gravitationnelles avec les modes propres de la Terre.

## 4.3 THÉORIE DE LA GRAVITATION

### 4.3.1 GRAVITATION DE NEWTON

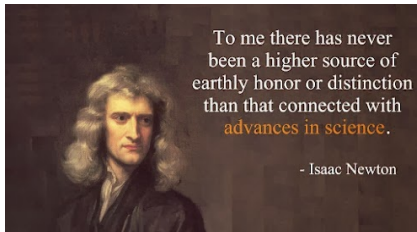
Repartons de l'expression générale du potentiel gravitationnel exercé par une distribution de masse de densité  $\rho_0$  dans un volume  $V^0$ , telle que représentée Fig. 4.3.2, sur une particule située en  $\vec{r}$  (voir aussi Annexe D) :

$$\phi^0(\vec{r}) = -G \int_{V^0} \frac{\rho^0}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'^0. \quad (4.3.1)$$

Si  $\vec{r}$  est très éloigné du corps, il est possible de développer  $1/(\vec{r} - \vec{r}')$  en série de Taylor (cf. Encadré 4.3) au voisinage de zéro en  $\vec{r}'$ , où l'on introduit les coordonnées cartésiennes  $(x^1, x^2, x^3)$  de  $\vec{r}$  et  $(x'^1, x'^2, x'^3)$  de  $\vec{r}'$ . L'intégrale 4.3.1 peut alors s'écrire :

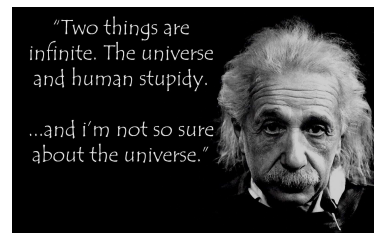
$$\phi^0(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3} \vec{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'^0}_{\vec{D}} - \frac{G}{2} \sum_{kl} \underbrace{\int (3x'^k x'^l - r'^2 \delta_k^l) \rho(r') dV'^0}_{Q^{kl}} \frac{x^k x^l}{r^5} + \dots, \quad (4.3.2)$$

où nous avons introduit le moment de masse dipolaire  $\vec{D}$ , nul si le système de coordonnées a pour origine le centre de masse du corps. La quantité  $Q^{kl}$  est le tenseur de masse quadrupolaire qui interviendra par la suite dans les équations linéarisées décrivant les ondes gravitationnelles. Ce moment quadrupolaire est nul pour un corps à symétrie sphérique.



(a) Isaac Newton

Source : <https://jpcmanon.wordpress.com>



(b) Albert Einstein

Source : <http://www.humanites-et-entreprise.net>

### 4.3.2 GRAVITATION GÉNÉRALE

Dans le cadre de la relativité générale l'interaction gravitationnelle est une manifestation de la courbure de l'espace-temps. Une théorie relativiste de la gravité doit respecter le principe d'équivalence (cf. Encadré 4.4). Le potentiel gravitationnel est alors remplacé par le tenseur métrique. Lorsque le champ gravitationnel est faible et que les sources se déplacent très lentement par rapport à la vitesse de la lumière, la relativité générale se réduit à la gravitation de Newton et le tenseur métrique peut se développer en fonction du potentiel gravitationnel. Le tenseur métrique représente la géométrie et la structure causale de

**Encadré 4.3: THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG**

Une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approximée par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Supposons que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  soit de classe  $C^n$  sur  $I$ ,  $n$  fois dérivable en zéro telle que  $f^{(n)}$  est continue en zéro. Pour tout  $h = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $f$  se développe à l'ordre 2 au voisinage de zéro sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f(0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 z^2 \right] \\ & + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0 xz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0 yz + o(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

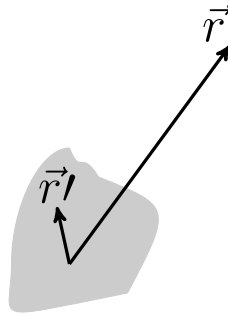


FIGURE 4.3.2: Calcul du potentiel gravifique exercé par une distribution continue de particules de vecteur position  $\vec{r}'$  en un point de vecteur position  $\vec{r}$ .

l'espace-temps. Il est utilisé pour définir les notions de temps, distance, volume, courbure, angle et pour séparer le futur du passé.

Dans le cadre de la mécanique newtonienne le temps s'écoule de la même façon dans tous les systèmes de référence spatiaux et les propriétés physiques mesurées sont indépendantes du référentiel. Les mesures peuvent être définies par leurs coordonnées spatiales en utilisant les propriétés géométriques de l'espace euclidien. Dans le cadre de la relativité restreinte une même longueur, une même durée vont être perçues différemment par des observateurs en mouvement relatif et cette différence dépend de leur vitesse relative. Cela se traduit par une transformation linéaire entre deux systèmes de référence en mouvement relatif uniforme : **la transformation de Lorentz** (cf. Encadré 4.5).

Les propriétés métriques d'une surface ou d'une hypersurface sont caractérisées par un tenseur métrique de coefficients  $g_{\mu\nu}$  (Poisson & Will, 2014). Tout intervalle entre deux points de cet hypersurface est alors donné par

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

où la répétition d'indice signifie une sommation. Dans le cas d'un espace plat de Minkowski,

**Encadré 4.4: L'INERTIE ET LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE**

Le principe d'inertie, ou, depuis Newton, la première loi de Newton, est l'équivalence entre les deux propriétés :

1. la vitesse  $\vec{v}$  du corps ponctuel par rapport au repère galiléen est constante et
2. la somme des forces  $\vec{F}$  s'exerçant sur le corps est nulle.

Ce qui se traduit par :  $\vec{v} = \text{cste} \Leftrightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$ .

Ainsi, dans le vide, tous les corps tombent à la même vitesse, quelque soit leur masse ou leur composition. Ce principe d'équivalence est le pilier de la relativité générale qui prédit qu'il n'est pas possible de distinguer un mouvement accéléré d'une accélération due à un champ gravitationnel. Ce principe d'équivalence a été vérifié expérimentalement à  $10^{13}$  près. Un des objectifs du CNES sera de vérifier ce principe d'équivalence avec une précision de 15 chiffres après la virgule grâce au microsatellite Microscope (Micro-satellite à traînée compensée pour l'observation du principe d'équivalence) récemment mis en orbite. L'intérêt fondamental de vérifier ce principe d'équivalence est que la théorie des cordes (voir Encadré 4.2) prédit une violation de ce principe, par exemple dans le cas des trous noirs. En effet, la théorie des cordes introduit une différence, même infinitésimale, entre masse gravitationnelle et masse inertielle.

**Encadré 4.5: TRANSFORMATION DE LORENTZ**

Soient deux systèmes de référence définis respectivement par les coordonnées spatiales  $(x^1, x^2, x^3)$  et  $(x'^1, x'^2, x'^3)$ , et de coordonnées temporelles  $ct$  et  $ct'$ . Notons  $x^0 = ct$  et  $x'^0 = ct'$ . Dans le cas où les deux repères ont des axes parallèles, coïncidant à  $t = t' = 0$  et se déplacent le long du troisième axe à la vitesse relative  $v$ , alors la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix},$$

avec  $\beta = \frac{v}{c}$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , et où  $c$  est la vitesse de la lumière.

cet élément de longueur s'écrit

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Les trajectoires spatio-temporelles sont conditionnées par la courbure ou les coefficients métriques  $g_{\mu\nu}$ . En vertu du principe de moindre action, les corps suivent des géodésiques d'équation

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (4.3.3)$$

où  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  sont les symboles de Christoffel de seconde espèce définis par

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad \text{avec} \quad g_{\beta\nu,\alpha} = \frac{dg_{\beta\nu}}{dx^\alpha}. \quad (4.3.4)$$

## 4.4 RELATIVITÉ GÉNÉRALE LINÉARISÉE

Pour relier la courbure quadri-dimensionnelle (structure géométrique de l'espace-temps) à la distribution énergétique de la matière et du champ électro-magnétique, Einstein introduit le tenseur  $T_{\mu\nu}$ , dit tenseur impulsion-énergie (terme source). Les équations d'Einstein de la relativité générale constituent un système de 10 équations aux dérivées partielles du second ordre pour les composantes  $g_{\mu\nu}$  du tenseur métrique. Celles-ci sont non linéaires mais peuvent être linéarisées sous la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + 2\Lambda) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.4.1)$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci (forme contractée du tenseur de Riemann ou tenseur de courbure,  $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\nu\alpha}^{\alpha}$ ) décrivant la courbure de l'espace-temps,  $R$  est le scalaire de courbure (contracté du tenseur de Ricci,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu}$ ),  $g_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique,  $\kappa$  est une constante de couplage entre la matière et la gravitation (que l'on détermine en passant à la limite newtonienne,  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ ) et  $\Lambda$  est une constante cosmologique, considérée nulle dans la solution d'Einstein. Le tenseur de Riemann se décompose en un tenseur de Weyl (tenseur de Riemann moins sa trace) mesurant l'effet de marées et en un tenseur de Ricci (trace du tenseur de Riemann) mesurant la densité d'énergie. Les équations de champ unifié d'Einstein permettent donc d'égaliser l'espace-temps et la matière.

En injectant l'expression 4.4.4 dans l'Eq. 4.4.1 et en ne gardant que les termes du premier ordre en  $h_{\mu\nu}$ , on obtient l'équation :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\rho} \bar{h}_{\mu}^{\rho} - \partial_{\mu} \partial_{\rho} \bar{h}_{\nu}^{\rho} = -\kappa T_{\mu\nu},$$

où nous avons introduit l'opérateur d'alembertien  $\square = \nabla_{\mu} \nabla^{\mu}$  :

$$\square \Leftrightarrow \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \text{ et } \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \text{ la perturbation métrique à trace renversée.}$$

$h$  est la trace de  $h_{\mu\nu}$ . Cette équation peut se simplifier en introduisant une condition de jauge, c'est-à-dire en se plaçant dans un système de coordonnées particulier. Par exemple, on peut imposer des conditions de jauge de sorte que  $\partial_{\mu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  (jauge de Lorenz). Les équations de champ se réduisent alors à :

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}. \quad (4.4.2)$$

Loin de toute matière-énergie, c'est-à-dire dans le vide,  $T_{\mu\nu} = 0$ , et on obtient les équations de propagation :

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.4.3)$$

Ainsi, dès 1916, Einstein met en évidence que ses équations écrites dans le vide et dans l'approximation de champs faibles contiennent une solution ondulatoire. A une fréquence donnée cette solution représente physiquement une oscillation de la métrique se propageant à la vitesse  $c$  dans un espace quasiment plat et vide, c'est à dire sans sources proches de champ gravitationnel. Les solutions de l'Eq. 4.4.3 définissent **les ondes gravitationnelles**.



## 4.4.1 LIMITE NEWTONIENNE

A partir de l'équation 4.3.3 de la géodésique, il est possible de retrouver les équations de Newton. Plaçons nous à la limite dite « newtonienne », c'est-à-dire dans la situation où les trois conditions suivantes sont respectées :

- les particules se déplacent lentement par rapport à la vitesse de la lumière, ce qui se traduit par  $g_{\mu\nu,0} \ll g_{\mu\nu,i}$ , 0 désignant la coordonnée temporelle et  $i$  les coordonnées spatiales, autrement dit  $\frac{dx^i}{dt} \ll \frac{dx^0}{dt}$  ;
- le corps considéré se situe dans un champ gravitationnel extérieur statique. En d'autres termes, toute dérivée temporelle de la métrique est nulle, c'est-à-dire  $\eta_{\mu\nu,0} = 0$  ;
- le champ gravitationnel est faible. Dans les conditions dites de champs faibles (loin des trous noirs et des étoiles à neutrons), où la courbure est proche de celle d'un espace plat de Minkowski, on peut toujours trouver un système de coordonnées cartésiennes  $x^\alpha = (ct, x^1, x^2, x^3)$  tel que la métrique s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.4.4)$$

où  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  est la métrique d'un espace plat et  $h_{\mu\nu}$  sa perturbation ( $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ).

Sous la première condition et en se rappelant que  $x^0 = ct$ , l'équation 4.3.3 devient

$$\ddot{x}^i = -\Gamma_{00}^i c^2.$$

En utilisant les deux autres conditions de l'approximation newtonienne, l'expression 4.3.4 du symbole de Christoffel de deuxième espèce se simplifie en

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}g^{ij}g_{00,j} \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}h_{00,i},$$

et l'équation des géodésiques devient

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}c^2\eta^{ij}h_{00,i}.$$

La partie spatiale de la métrique  $\eta^{ij}$  étant la matrice identité, nous avons

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}c^2h_{00,i}.$$

Comme par ailleurs les équations newtoniennes s'écrivent

$$\ddot{x}^i = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = \Phi_i$$

où  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel newtonien, en égalant les deux équations précédentes, nous avons donc  $h_{00}^i = -\frac{\Phi_i}{c^2}$ . Les coefficients métriques newtoniens sont donc  $g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ . Nous avons ainsi le lien entre géométrie courbe de l'espace-temps et la gravitation.

En champ gravitationnel faible, il est donc toujours possible de trouver un système de coordonnées  $x^\alpha = (ct, x, y, z)$  pour lequel les composantes de la métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} = - \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.4.5)$$

$\Phi$  désigne le potentiel gravitationnel newtonien qui doit vérifier  $|\Phi| \ll c^2$ . Au premier ordre en  $\Phi/c^2$ , l'équation 4.4.5 peut s'écrire

$$g_{\alpha\beta} = - \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

En calculant les symboles de Christoffel puis le tenseur de Ricci au premier ordre en  $\Phi/c^2$  à partir de ces composantes de la métrique, on constate que les dix composantes de l'équation d'Einstein avec comme source un fluide parfait non relativiste ( $p \ll \rho c^2$ ) se réduisent à la seule équation :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho,$$

qui est l'équation de Poisson de la gravitation newtonienne.

#### 4.4.2 EXEMPLE : SOLUTIONS STATIQUES À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

Les solutions de l'équation d'Einstein avec  $\Lambda = 0$  dans le cas d'un corps à symétrie sphérique dans le vide s'écrivent sous la forme

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

lorsque le tenseur énergie-impulsion est nul dans tout l'espace (solution correspondant à une masse ponctuelle dans le vide). Cette solution est la métrique de Schwarzschild, avec  $R = \frac{2GM}{c^2}$ , le rayon de Schwarzschild. Une solution à symétrie sphérique aux équations d'Einstein dans le vide est statique et est donnée par la métrique de Schwarzschild.

Lorsque le tenseur énergie-impulsion est celui d'un fluide parfait dans une région limitée de l'espace (cas d'une étoile fluide), les solutions sont obtenues à partir des équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff qui s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \\ \frac{d\Phi}{dr} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + 4\pi Gr \frac{p(r)}{c^2}\right) \\ \frac{dp}{dr} = - \left(\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2}\right) \frac{d\Phi}{dr}, \end{array} \right.$$

avec  $\Phi$  un paramètre qui, à la limite non relativiste, redonne le potentiel gravitationnel newtonien,  $p$  la pression,  $\rho$  la densité et  $m(r)$  une inconnue, qui s'écrit  $\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ . Dans le

cas de Schwarzschild, on aurait  $\rho = 0$  (vide) et donc  $m(r) = M$ , une masse constante. A ces équations, il faut rajouter une équation d'état qui relie  $p$  et  $\rho$ . Ce système d'équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff détermine alors complètement la structure d'une étoile relativiste statique et à symétrie sphérique (par exemple, les naines blanches, les étoiles à neutrons...).

A la limite newtonienne ( $\frac{Gm(r)}{c^2 r} \ll 1$ ) et pour un fluide non relativiste  $p/c^2 \ll \rho$ , le système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff se réduit aux équations classiques de l'hydrostatique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \\ \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \\ \frac{dp}{dr} = -\rho(r) \frac{d\Phi}{dr} \end{array} \right.$$

## 4.5 LES ONDES GRAVITATIONNELLES

Il est toujours possible de choisir un système de coordonnées tel qu'une masse est en chute libre. Dans ce système, la masse ne verrait aucun effet de l'onde gravitationnelle puisque celle-ci suivrait simplement une géodésique et cela ne nous informerait que sur les valeurs des coordonnées le long de sa ligne d'univers. Par contre, si l'on considère le mouvement relatif de plusieurs particules voisines, on peut avoir une vue complète de l'effet des ondes gravitationnelles sur la matière qui se traduit par une variation relative de la distance entre les particules.

### 4.5.1 ÉMISSION DES ONDES GRAVITATIONNELLES

Pour étudier l'émission des ondes gravitationnelles par des distributions de masse en mouvement, il nous faut considérer les équations d'Einstein avec le terme source, c'est-à-dire avec un second membre contenant le tenseur énergie-impulsion (Eq. 4.4.2) :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}.$$

En introduisant les fonctions de Green, une solution est obtenue sous la forme

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_{\text{source}} d^3\vec{x}' \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Si l'on considère une source isolée, compacte (de dimension caractéristique  $R$ ), distante de l'observateur de sorte que  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg R$  et se déplaçant lentement (plus exactement, si ses constituants ont une vitesse relative des uns par rapport aux autres  $\ll c$ , alors l'onde produite peut s'écrire

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{\kappa}{8\pi R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij}(t - R),$$

où nous avons introduit le tenseur moment quadrupolaire  $I_{ij}$  défini par

$$I_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{\text{source}} x_i x_j T_{00}(t, \vec{x}) d^3 \vec{x},$$

avec  $T_{00}$  la densité d'énergie de la source, qui peut être approximée par la densité de la matière au repos  $\rho$  dans le cas non-relativiste. En ôtant la trace de  $I_{ij}$ , on fait ainsi apparaître le moment quadrupolaire de masse de la source, qui est la même quantité qui apparaît dans le développement multipolaire du potentiel gravitationnel newtonien défini dans l'équation 4.3.2, c'est-à-dire la quantité

$$Q_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{\text{source}} \rho(t, \vec{x}) \left( 3x'_i x'_j - \vec{x}' \cdot \vec{x}' \delta_i^j \right) d^3 \vec{x}'.$$

Notons  $r'^2 = \vec{x}' \cdot \vec{x}'$ . Le champ gravitationnel devient

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{\kappa}{8\pi R} \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{ij} + \delta_i^j \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho d^3 \vec{x}' \right]_{t-R}. \quad (4.5.1)$$

A une distance  $R$  suffisamment grande,  $\bar{h}^{ij}$  peut être regardée comme une onde plane au voisinage de  $\vec{x}$ . Le second terme dans l'Eq. 4.5.1 n'émet pas d'énergie et peut être négligé. L'équation d'onde s'écrit finalement

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{\kappa}{8\pi R} \frac{1}{3} \ddot{Q}_{ij}(t - R). \quad (4.5.2)$$

Le facteur  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  étant de l'ordre de  $10^{-44} s^2 m^{-1} kg^{-1}$ , les seules ondes gravitationnelles détectables doivent donc provenir de sources gigantesques. Les amplitudes caractéristiques d'ondes gravitationnelles émises par diverses sources astrophysiques sont illustrées sur la Fig. 4.5.1. Les limites de détectabilité pour la dernière génération du détecteur LIGO (The LIGO Scientific Collaboration & The Virgo Collaboration, 2009) et pour le futur détecteur spatial eLISA (Amaro-Seoane et al., 2012) sont également représentées. La première détection par l'expérience LIGO notée GW150914 (Abbott et al., 2016) est également indiquée.

Considérons les ondes émises par une distribution de matière de masse  $M$  confinée dans un volume de rayon  $r_c$  et dont la distribution de matière varie sur un temps  $t_c$ . La vitesse caractéristique d'une telle source est  $v_c \approx r_c/t_c$ . Cette vitesse correspond à la partie du mouvement qui s'écarte de la symétrie sphérique, sinon on aurait  $\ddot{Q}_{ij} = 0$  et il n'y aurait pas d'émission d'ondes gravitationnelles. On obtient alors les ordres de grandeur pour  $\bar{h}_{ij} = h_0 \approx \frac{GM}{Rc^2} (v_c/c)^2$ . On voit bien alors que pour générer de grandes ondes, il faut des sources très massives qui rentrent en jeu avec des processus très rapides (de vitesse proche de celle de la lumière), donc uniquement des événements violents de taille astronomique (comme les objets astrophysiques et cosmologiques) généreront des ondes gravitationnelles d'amplitude significative.

## 4.5.2 COUPLAGE DES ONDES GRAVITATIONNELLES AVEC LA TERRE

Nous avons vu plus haut qu'une solution à l'Eq. 4.4.3 est une onde sinusoïdale d'amplitude  $A_{\mu\nu}$ , se propageant le long du vecteur d'onde  $k_\alpha$  :

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}.$$

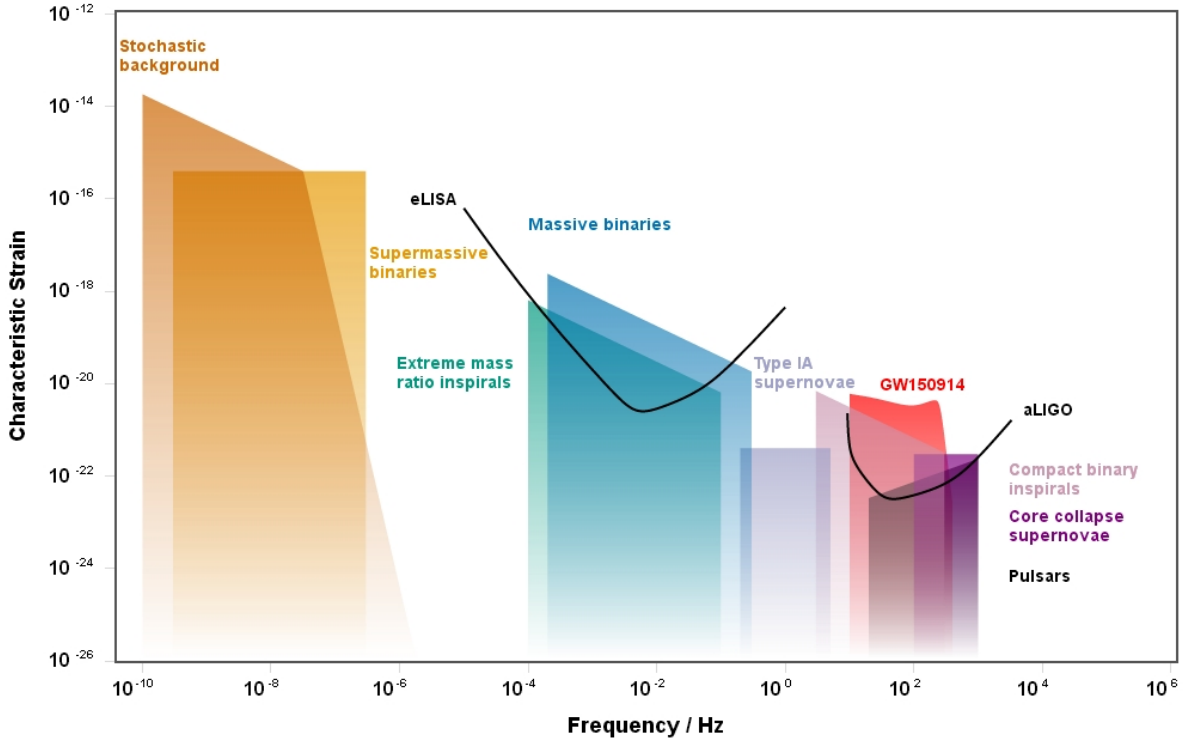


FIGURE 4.5.1: Sources, amplitudes et sensibilités des détecteurs d'ondes gravitationnelles. Figure réalisée à l'aide de l'outil : <http://rhcole.com/apps/GWplotter/> (Moore et al., 2015).

À l'aide de conditions de jauge simplifiant la métrique (par ex. une jauge transverse et à trace nulle ou « transverse-traceless gauge »), une onde gravitationnelle se propageant le long de l'axe  $z$  peut être décrite par

$$h(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega(t - z) + \phi_0),$$

où  $\phi_0$  est une phase initiale arbitraire de l'onde. Il existe donc deux types de polarisation naturelle des ondes gravitationnelles, un mode de polarisation plus d'amplitude  $h_+$  et un mode de polarisation transverse d'amplitude  $h_\times$ . Ces deux modes de polarisation des ondes gravitationnelles sont illustrés sur la Fig. 4.5.2. Ils entraînent un étirement puis un écrasement du globe au passage de l'onde.

L'amplitude d'une onde gravitationnelle est généralement représentée par la déformation induite, quantité sans dimension définie par  $h = 2 \int \int g' dt^2$ , où  $g'$  est le gradient de gravité. Dans le cas de la polarisation plus, nous avons ainsi

$$h_+ = 2 \frac{\Delta d}{d}, \quad (4.5.3)$$

où  $d$  est la distance originale entre les deux masses test. Le gradient de gravité entre ces deux masses est défini par  $g' = \frac{\Delta g}{d}$ .

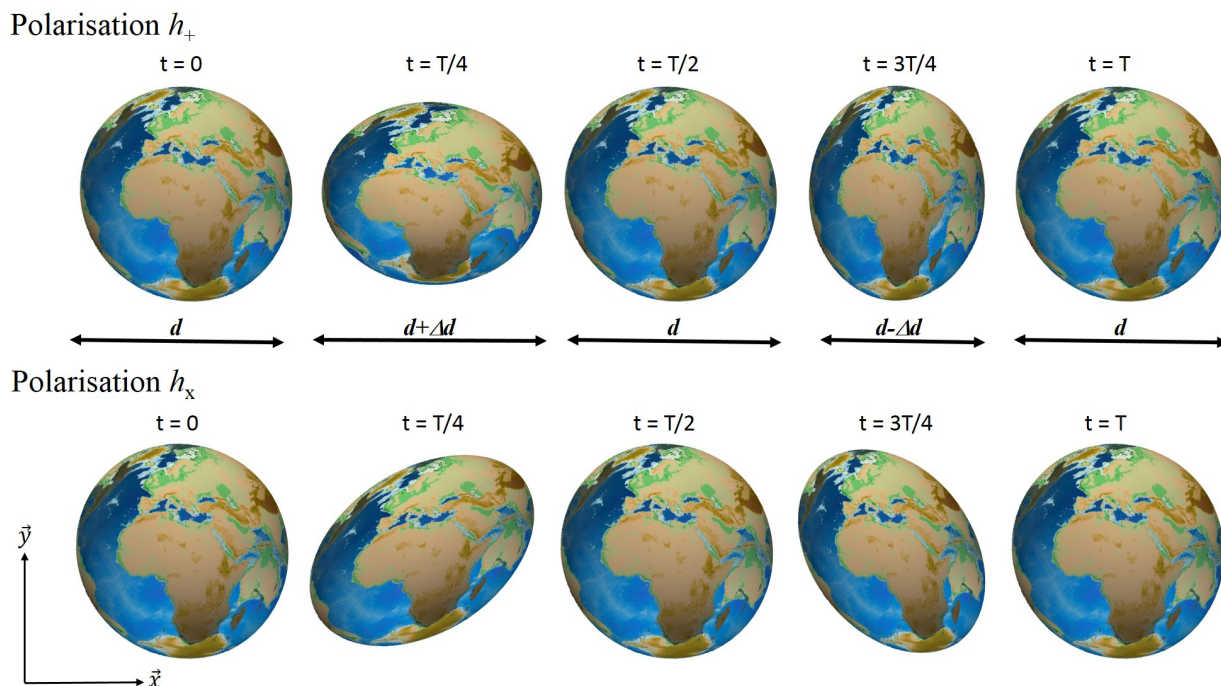


FIGURE 4.5.2: Déformation de la Terre lors du passage d'une onde gravitationnelle plane monochromatique de période  $T$  se propageant dans la direction perpendiculaire au plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  de la figure. En haut : mode de polarisation  $h_+$  ; en bas : mode de polarisation  $h_x$ . L'amplitude de la déformation illustrée ici est largement exagérée : l'amplitude maximale de l'onde gravitationnelle détectée pour la première fois le 14 septembre 2015 à 09h50m45s UTC grâce à l'expérience LIGO (Abbott et al., 2016) est de  $10^{-21}$  (en « strain »), ce qui correspond à une variation de longueur de l'ordre de  $\Delta d = 10^{-18}$  m (cf. Eq. 4.5.3), puisque la longueur du bras interférométrique qui l'a détecté est de 4 km. Cette onde gravitationnelle a été générée par la coalescence de deux trous noirs, il y a 1.3 milliards d'années lumière.

Étant donnée la forme quadrupolaire des ondes gravitationnelles (cf. Eq. 4.5.2), un détecteur de type quadrupolaire sera idéal pour les mettre en évidence. La Terre possède un nombre infini de modes propres (ou oscillations libres). Parmi ces oscillations libres, un certain nombre pourront être excités par une force quadrupolaire : ce sont les modes propres de degré deux dans un développement en harmoniques sphériques. Ben-Menahem (1983) a montré que les sources astrophysiques de force quadrupolaire de l'ordre  $h = 10^{-20}$  peuvent exciter les modes sismiques  ${}_nS_2$  jusqu'à une amplitude de l'ordre de  $10^{-7}$  cm correspondant à une accélération de  $10^{-5}$  nm/s<sup>2</sup> (ou  $10^{-3}$  nGal). A ces fréquences sismiques (entre 1 heure et 1 seconde), les sources d'ondes gravitationnelles sont par exemple (voir Fig. 4.5.1) des trous noirs compacts capturés par un trou noir galactique ou des binaires compactes (Misner et al., 1973; Poisson & Will, 2014).

### 4.5.3 EFFET DES ONDES GRAVITATIONNELLES SUR LE SYSTÈME TERRE-LUNE

Considérons une onde gravitationnelle de fréquence beaucoup plus grande que la fréquence du mouvement orbital de la Lune autour de la Terre ( $\approx 1$  cycle par mois). La Terre et la Lune peuvent alors être regardées comme des particules libres. Une source astrophysique de radiation gravitationnelle possible à ces fréquences peut être la chute d'une étoile à neutron dans un trou noir ou encore les pulsars associés aux explosions d'une étoile à neutron. L'amplitude de l'onde gravitationnelle émise pourra au maximum atteindre  $h = 10^{-17}$ , ce qui correspond à une variation de la distance Terre-Lune ( $d \approx 384400$  km) de l'ordre de  $10^{-7}$  cm. Les mesures actuelles de distance Terre-Lune sont effectuées par des techniques laser (LLR) qui ont une précision centimétrique. Il est donc actuellement impossible de détecter l'effet des ondes gravitationnelles par cette méthode.

## 4.6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le développement des premiers gravimètres supraconducteurs, en particulier dans le cadre du réseau GGP, a suscité des quêtes ambitieuses, comme la recherche d'effets relativistes dans la gravité terrestre (Warburton & Goodkind, 1976; Goodkind, 1999; Shiomi, 2008a) et plus récemment la recherche d'ondes gravitationnelles (Shiomi, 2008b; Coughlin & Harms, 2014). Une thèse sur le couplage des ondes gravitationnelles avec les modes propres de la Terre et leur possible détection va débiter en octobre 2016 avec Josipa Majstorovic. Les détecteurs utilisés sur Terre sont en général sensibles à des fréquences entre 10 et 1000 Hz (cf. Fig. 4.5.1). Utiliser la Terre globale comme détecteur d'ondes gravitationnelles par l'excitation des modes sismiques permet de s'intéresser à des fréquences plus basses, c'est-à-dire à d'autres types de sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles. La recherche d'ondes gravitationnelles par leur effet sur les modes sismiques de la Terre a déjà été proposée par Tuman (1973); Jensen (1979); Ben-Menahem (1983) et plus récemment par Coughlin & Harms (2014). Cette thèse consistera d'abord à développer la théorie relativiste de l'excitation des modes sismiques par les ondes gravitationnelles en considérant dans un premier temps l'équation quadrupolaire vue précédemment. Puis, le cas plus général d'une théorie appelée tenseur-scalaire permettant l'excitation des modes radiaux (Weiss & Block, 1965) sera considérée. Enfin une ré-évaluation des niveaux de détectabilité sera effectuée à l'aide des données de la dernière génération de gravimètres supraconducteurs - de type iOSG, avec une sphère plus lourde, réduisant le bruit thermique brownien - récemment installés à l'observatoire gravimétrique de J9 (Strasbourg) et à l'observatoire inter-disciplinaire du LSBB (Rustrel).





---

## CHAPITRE 5

# QUELQUES AUTRES TRAVAUX DÉBUTÉS DANS LE CADRE DE STAGES D'ÉTUDIANT

Nous avons déjà mentionné au paragraphe 2.6.1 l'étude sur la modulation du mode de Chandler par les marées longues-périodes. Ce sujet avait été en partie traité par Yann Ziegler dans le cadre de son projet de recherche de 2ème année à l'EOST intitulé « Étude de la résonance paramétrique dans la nutation de la Terre » et sous la supervision de Yves Rogister, Hilaire Legros et moi-même. Parmi les autres sujets de recherche ou de stages d'étudiants qui méritent d'être mentionnés, nous pouvons citer une analyse des mesures de hauteurs d'eau en puits, un travail sur des données gravimétriques et barométriques de fond de mer ainsi qu'un stage de Master 2 sur la détermination des fréquences complexes des modes propres sismiques à l'aide d'une méthode d'analyse auto-régressive.

### 5.1 MESURES DE HAUTEURS D'EAU DANS UN PUIITS

Cette étude a été réalisée dans le cadre du projet de recherche de 2ème année à l'EOST de Arthur Nardy intitulé : « Analysis of Borehole water level from 2001 to 2012 at the Enhanced Geothermal System test site Soultz-Sous-Forêts », année universitaire 2014-2015, sous la supervision de Jacques Hinderer et moi-même.

Des données de variations de hauteurs d'eau et de pression barométrique ont été acquises entre 1994 et 1996, puis entre 2001 et 2012 dans deux puits (nommés GPK-1 et 4550) sur le site géothermal de Soultz-Sous-Forêt, dans le cadre du projet EGS (Enhanced Geothermal System). Le but de ce projet est d'exploiter la chaleur naturelle du sous-sol afin de produire de l'électricité pour la ville de Soultz. Le site de Soultz-Sous-Forêt se situe dans le nord de l'Alsace, à environ 50 km de Strasbourg, dans le fossé rhénan, et est connu pour son fort gradient thermique dans le sous-sol. La première série de données entre 1994 et 1996 a été étudiée par Zaské et al. (2000). Ils ont mis en évidence la résonance du noyau liquide et ont estimé une période de 380 jours pour la FCN, ce qui est bien inférieur à la période attendue de 430 jours. Dans le cadre de son projet, Arthur Nardy devait analyser la deuxième série de données enregistrées dans le puits 4550 (illustré sur la Fig. 5.1.1) afin de mettre en évidence également la résonance de la FCN. De plus, ces mesures en puits permettent d'apporter des contraintes sur les propriétés poro-élastiques du réservoir géothermal. En effet, les fluctuations de hauteurs d'eau dans un puits dues aux marées vont apporter des informations

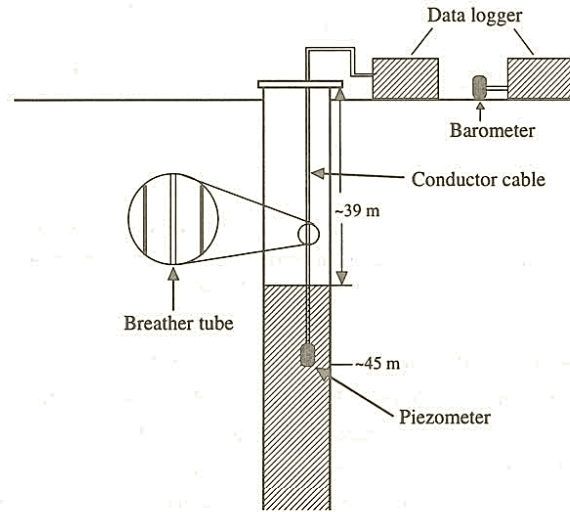


FIGURE 5.1.1: Vue schématique de l'instrumentation du puits 4550 à Soultz-Sous-Forêt. Le puits est fermé contre les précipitations mais ouvert aux variations de pression atmosphériques grâce à un tuyau d'échappement.

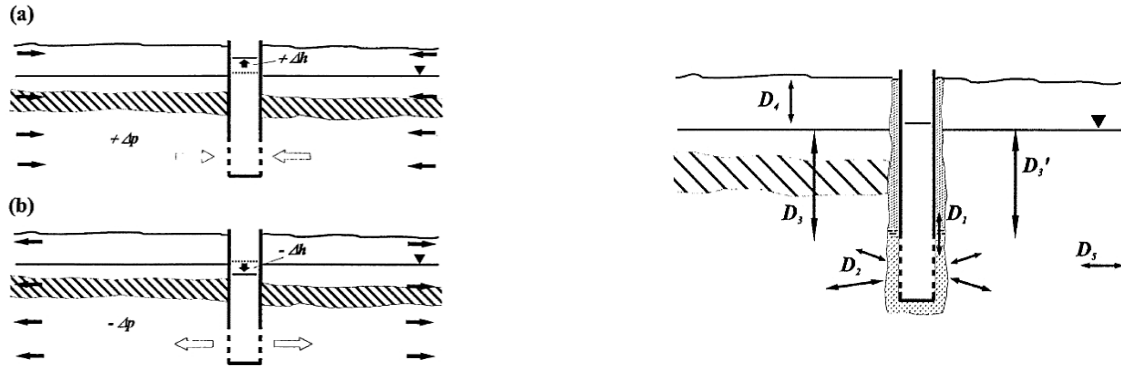
intéressantes sur la distribution de la porosité et des contraintes dans la roche connectée à la colonne d'eau. En effet, d'après le principe de Terzaghi (Hall, 2000), quand une roche est soumise à une contrainte, la pression fluide des pores va s'opposer à cette contrainte. En l'absence de contrainte extérieure, la pression hydrostatique dans le puits est alors égale à la pression de pore. En dehors de toute activité humaine, les variations de hauteurs d'eau dans un puits peuvent avoir pour origine (Kümpel, 1997) :

1. les surcharges dues à la pression atmosphérique ;
2. les surcharges dues aux marées océaniques ;
3. les surcharges dues aux précipitations ;
4. les déformations dues aux marées terrestres ;
5. les déformations tectoniques régionales.

La fonction de transfert entre les déformations de marées et les variations du niveau d'eau dans le puits (cf. Fig. 5.1.2) permet de contraindre *in-situ* des paramètres pétro-hydrauliques de l'aquifère et donc des paramètres poro-élastiques de la roche (Hsieh et al., 1987; Zaské et al., 2000). Cette fonction de transfert s'exprime en déformations de surface (« areal strain ») et fait intervenir la combinaison des nombres de Love et de Shida  $h-3l$  (Kuo, 1969; Agnew, 2007). En effet, pour un potentiel de marée  $V_n$  de degré  $n$ , les déplacements à la surface de la Terre ( $r = a$ ) sont donnés, en coordonnées sphériques, par définition des nombres de Love  $h_n$  et de Shida  $l_n$  :

$$u_r = h_n \frac{V_n}{g}, u_\theta = \frac{l_n}{g} \frac{\partial V_n}{\partial \theta}, u_\phi = \frac{l_n}{g \sin \theta} \frac{\partial V_n}{\partial \phi} \quad (5.1.1)$$

Les composantes du tenseur des déformations de surface  $\epsilon$  sont obtenues en prenant les



Effet des marées sur des aquifères confinés. (a) L'augmentation  $\Delta P$  de la pression de pore durant la phase de compression élève le fluide dans le puits de  $\Delta h$ . (b) Pendant la phase de dilatation, c'est le processus inverse, la hauteur d'eau dans le puits va diminuer. Suivant la diffusivité  $D_2$  du réservoir, des déphasages entre la variation de hauteur d'eau dans le puits et le forçage des marées peuvent avoir lieu (réponse transitoire).

Types de diffusivités hydrauliques qui contrôlent les flux au voisinage du puits.  $D_2$  est la diffusivité latérale de l'aquifère et  $D_5$  celle vers d'autres puits ou rivière ou autre zone de drainage.  $D_3$  est la diffusivité hydraulique verticale de la nappe phréatique pour un aquifère confiné et  $D_3'$  pour un aquifère non confiné.  $D_4$  est la diffusivité des couches supérieures non saturées.

FIGURE 5.1.2: Déformations de marées et diffusivités autour d'un puits. Crédit images : Kümpel (1997)

dérivées de l'Eq. 5.1.1 :

$$\begin{aligned}\epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{ga} \left( h_n V_n + l_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2 \theta} \right) \\ \epsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{ga} \left( h_n V_n + l_n \cot \theta \frac{\partial V_n}{\partial \theta} + \frac{l_n}{\sin \theta} \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2 \phi} \right) \\ \epsilon_{\theta\phi} &= \frac{l_n}{ga \sin \theta} \left( \frac{\partial^2 V_n}{\partial \theta \partial \phi} - \cot \theta \frac{\partial V_n}{\partial \phi} \right)\end{aligned}$$

La déformation surfacique, définie par  $\frac{1}{2}(\epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi})$ , est donc égale à  $(h_2 - 3l_2) \frac{V_2}{ga}$  pour  $n = 2$ .

Hsieh et al. (1987) ont montré que dans le cas d'un aquifère composé principalement de roches élastiques isotropiques, la déformation de volume  $\epsilon_v$  est proportionnelle à la déformation surfacique  $\epsilon_a = \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi}$  via le coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\epsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} (\epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi})$$

Ainsi, la déformation surfacique reflète la dilatation de l'aquifère et son déphasage, le temps de réponse de la dilatation.

La réponse en baromètre inversé aux variations de pression atmosphérique du niveau d'eau dans un puits couvert est négligeable (Zeumann et al., 2009). Cependant, dans le cas du puits 4550 de Soultz-Sous-Forêt, les variations directes de pression atmosphérique sont

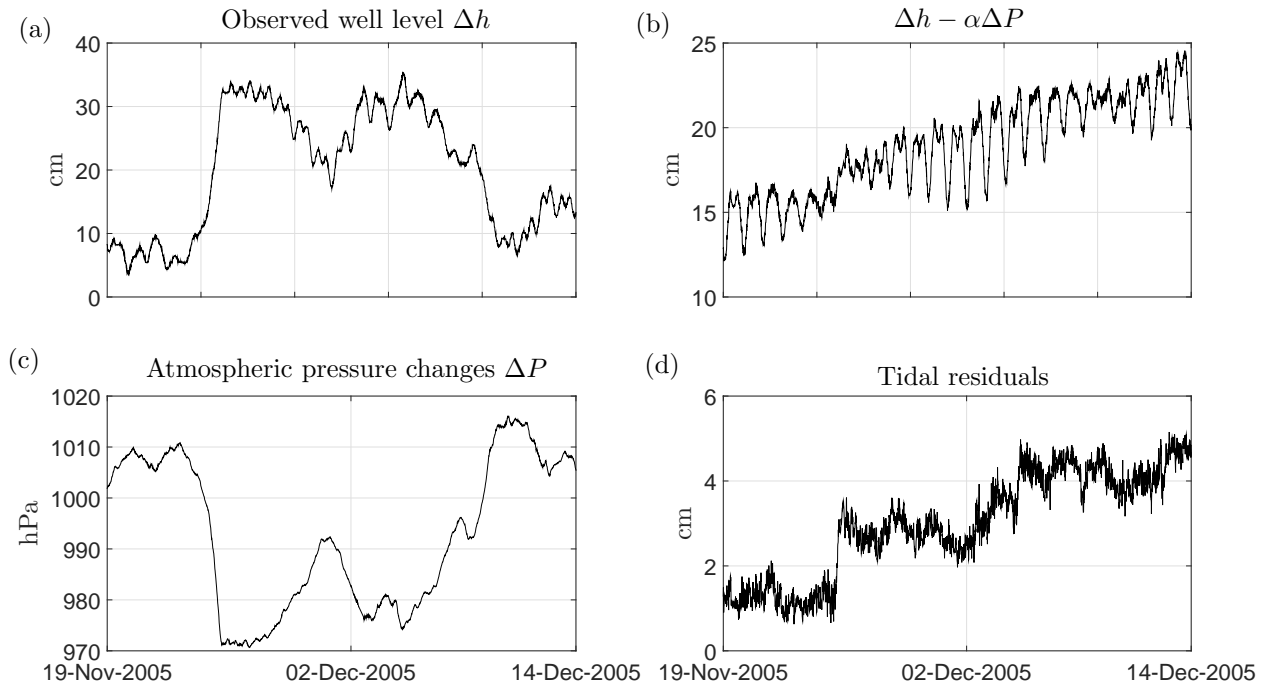


FIGURE 5.1.3: Exemple de variations temporelles de hauteurs d'eau (par rapport à la profondeur de 39.75 m) dans le puits 4550 de Soultz-Sous-Forêt avant et après soustraction de la pression de pore et des marées. (a) Données brutes ; (b) Niveau d'eau corrigé de l'effet de la pression atmosphérique via une admittance barométrique de  $-0.65$  cm/hPa ; (c) Variations de pression atmosphériques enregistrées à J9 ; (d) Résidus de variations de hauteur d'eau après analyse de marées.

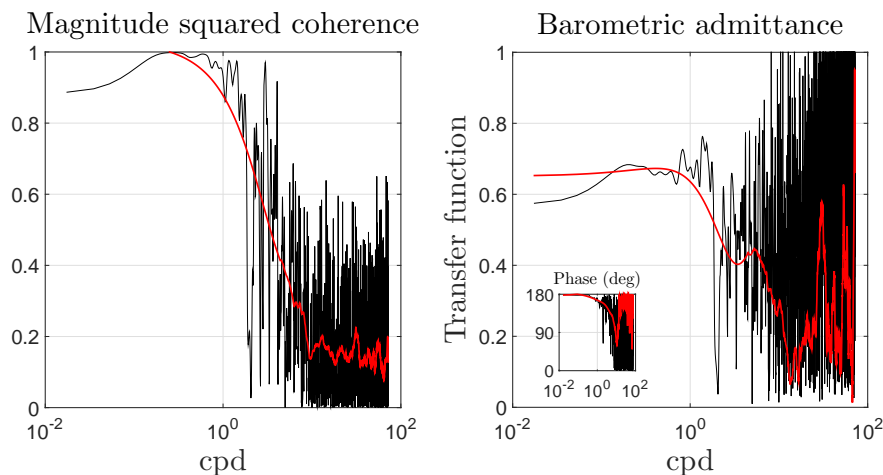


FIGURE 5.1.4: Cohérence et fonction de transfert entre variations de hauteur d'eau dans le puits et variations de pression atmosphérique à J9. Les courbes en rouge correspondent à une version lissée des graphes. L'admittance tend vers  $0.65$  cm/hPa en valeur absolue avec une phase de  $180$  degrés (donc vers  $-0.65$  cm/hPa) pour des périodes supérieures à un jour.

transmises par un tube d'échappement (Zaske et al., 2000). En comparant le niveau d'eau dans le puits 4550 aux variations de pression atmosphérique enregistrées à l'observatoire de

J9 (baromètre le plus proche en fonctionnement), on constate une forte anti-corrélation (cf. Fig. 5.1.3). En calculant la fonction de transfert entre variations de hauteur d'eau dans le puits et variations de pression atmosphérique, on obtient un facteur d'admittance d'environ  $-0.65$  cm/hPa (cf. Fig. 5.1.4) aux longues périodes (supérieures à un jour). La valeur obtenue après analyse de marées ETERNA (Wenzel, 1996) des données de niveau d'eau dans le puits 4550 est très similaire puisque égale à  $-0.64$  cm/hPa.

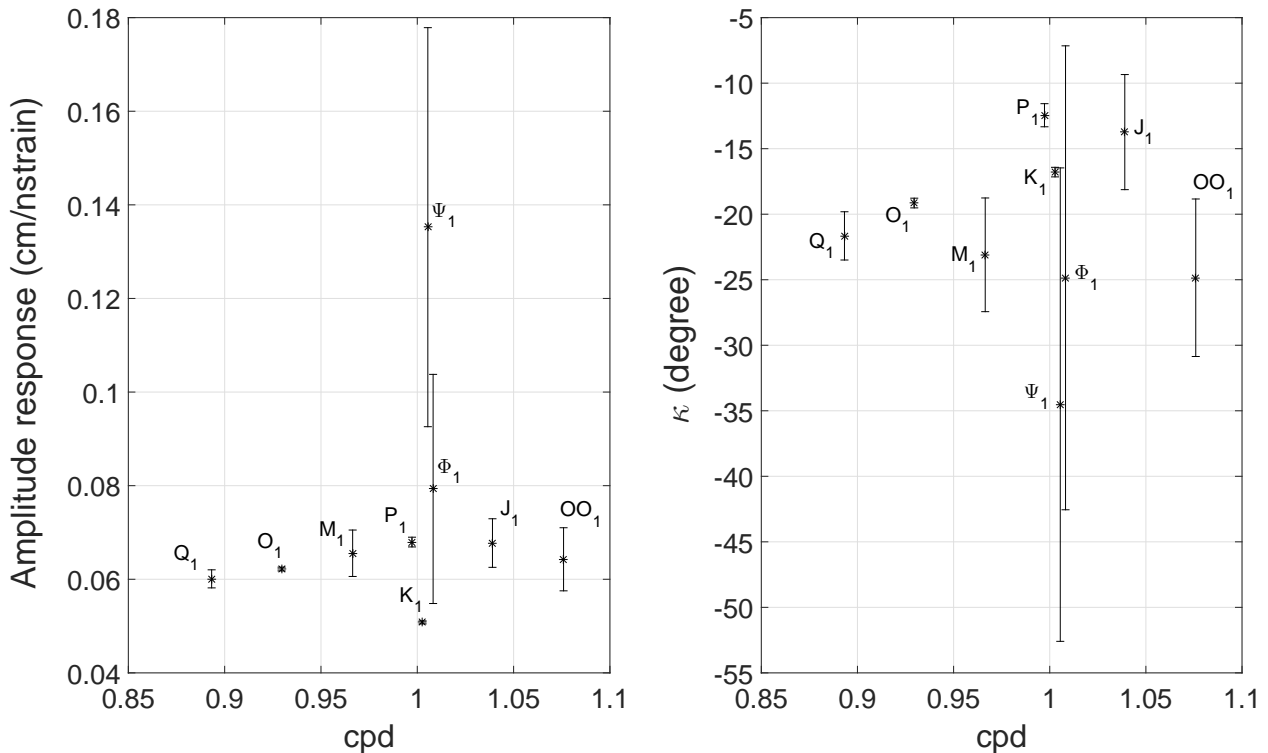


FIGURE 5.1.5: Réponses en amplitude et en phase pour les ondes diurnes observées dans les variations de hauteurs d'eau dans le puits 4550 de Soultz-Sous-Forêt. La résonance due à la FCN est nettement visible dans l'amplification de l'onde  $\Psi_1$  et la diminution d'amplitude de l'onde  $K_1$ , ainsi que dans leurs déphasages respectifs. Le nanostrain est défini comme  $10^{-9}$  fois la variation relative de distance.

La réponse des variations de hauteurs d'eau dans le puits aux variations de pression atmosphérique dépend du rayon du puits, de la diffusivité hydraulique latérale de l'aquifère, de l'épaisseur et de la diffusivité verticale de la zone non saturée, et de l'épaisseur et de la diffusivité hydraulique verticale de la zone saturée au-dessus de l'aquifère (Rojstaczer, 1988). Parmi ces paramètres, certains domineront la réponse plutôt aux basses fréquences et d'autres aux hautes fréquences. La poursuite de ce travail consistera donc à estimer les valeurs de ces paramètres qui caractérisent les propriétés poro-élastiques de l'aquifère.

Après correction de l'effet de la pression atmosphérique, les marées deviennent visibles (voir Fig. 5.1.3). L'analyse de marées permet en outre d'évaluer les réponses en amplitude et en phase de la colonne d'eau au forçage de marées via des facteurs représentés sur la Fig. 5.1.5 pour les ondes diurnes. La résonance due à la présence du noyau fluide est clairement visible. Cependant les barres d'erreur sur les phases sont beaucoup trop grandes pour permettre

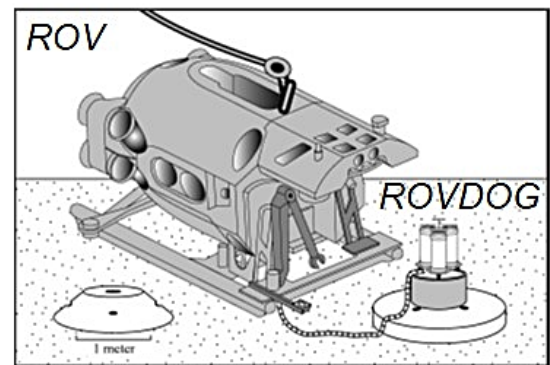
une bonne inversion de la période et du facteur de qualité de la FCN. Nous suspectons un problème de dérive d'horloge qui rendrait notre analyse de marées moins bonne que celle de Zaske et al. (2000) bien que nous disposions de presque 10 ans de données supplémentaires.

## 5.2 ANALYSES GRAVIMÉTRIQUES ET BAROMÉTRIQUES DE FOND DE MER

Ce travail a été initié lors du projet de recherche de 2ème année à l'EOST de Benjamin Escot puis poursuivi pendant son stage entre janvier et mai 2016. La compagnie Statoil a installé des plateformes en mer du Nord afin d'exploiter un réservoir de gaz au large de la Norvège. Un gravimètre de type Scintrex CG-3M, reconditionné afin de pouvoir mesurer en mer, a été installé près de la plateforme appelée Troll A, afin d'effectuer un suivi temporel de la gravité. En plus du gravimètre relatif, un baromètre de type Paroscientific enregistrait en parallèle. Les instruments sont déployés à 303 m sous l'eau à l'aide d'un ROG (Remotely Operated Vehicle) qui dépose sur le fond le gravimètre (« ROVDOG », Fig. 5.2.1). 446 jours de données ont ainsi été acquises entre août 2005 et novembre 2006, avec une interruption pour maintenance entre août 2005 et mars 2006 (Sasagawa et al., 2008). Les enregistrements obtenus sont représentés Fig. 5.2.2.



(a) Carte de localisation de la plateforme Troll A.



(b) Remotely Operated Vehicle-deployed Deep-Ocean Gravimeter.  
Image modifiée de Sasagawa et al. (2003)

FIGURE 5.2.1: Site d'étude et schéma du gravimètre fond-de-mer.

Un des objectifs principaux de cette étude était de comparer *in-situ* la réponse des océans au forçage atmosphérique à sa modélisation dynamique par MOG2D (2-dimension Gravity Waves model; Carrère & Lyard, 2003) incorporant un forçage par la pression et les vents fournis par l'ECMWF (European Centre for Medium-range Weather Forecasts). Les données barométriques de pression en fond de mer sont alors converties en hauteurs d'eau en supposant un équilibre hydrostatique ( $h(t) = P_b(t)/\rho_w g$ ) puis analysées à l'aide

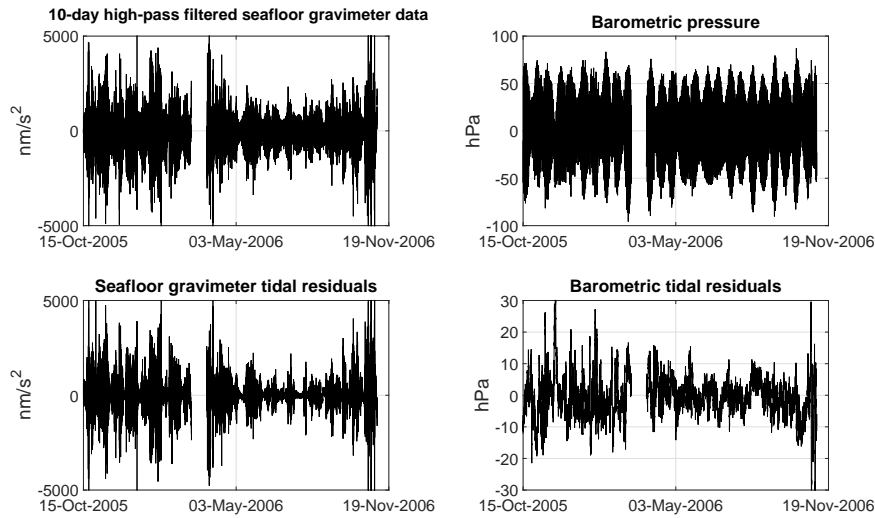


FIGURE 5.2.2: Enregistrements gravimétriques (à gauche) et barométriques (à droite) de fond de mer avant (haut) et après (bas) soustraction des marées. Les données gravimétriques brutes ont été préalablement filtrées avec un filtre passe-haut de période de coupure de 10 jours afin d'éliminer la très forte dérive instrumentale.

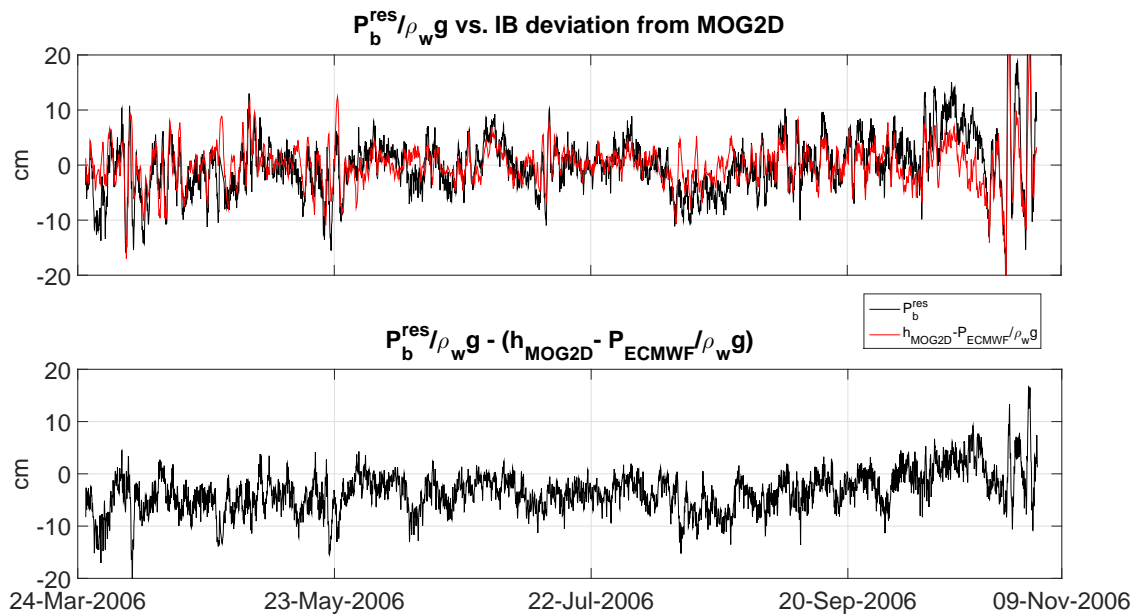


FIGURE 5.2.3: Comparaison des résidus après analyse de marées des variations de hauteurs d'eau ( $P_b^{res}/\rho_w g$  en noir) avec l'écart au baromètre inversé modélisé par MOG2D incorporant l'effet des vents de l'ECMWF (en rouge). Le dessin du bas représente la différence des deux, c'est-à-dire l'écart à MOG2D.

du logiciel ETERNA (Wenzel, 1996). Sur la Fig. 5.2.3 les hauteurs d'eau résiduelles ainsi obtenues sont comparées à la réponse dynamique des océans après soustraction de la partie IB (voir encadré 5.1). Il y a un accord entre l'observation et le modèle à 4 cm près.

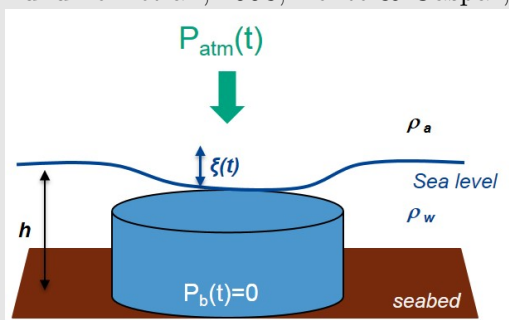
### Encadré 5.1: RÉPONSE DES OCÉANS AU FORÇAGE PAR L'ATMOSPHÈRE

Sous l'effet des masses atmosphériques et du vent, les océans présentent différentes réponses possibles. Lorsque l'on ignore l'action des vents sur les océans et que l'on considère une réponse statique des océans aux variations de pression atmosphérique, deux types de réponse sont alors possibles :

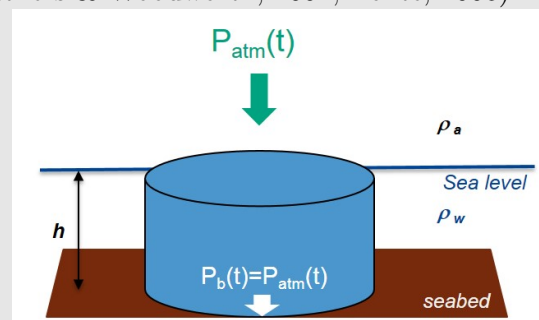
1. en baromètre inversé (noté IB) (Fig. (a)) ;
2. en baromètre non-inversé (noté NIB) (Fig. (b)) ;

Le baromètre inversé correspond à un ajustement de l'océan pour compenser, par une variation de hauteur d'eau  $\zeta$ , la variation de pression atmosphérique  $P_{atm}$  qui s'exerce sur l'océan. Cette réponse n'est donc pas instantanée puisqu'il faut laisser le temps aux océans de s'ajuster. Ainsi, la réponse en baromètre inversé s'avère être assez bien vérifiée pour les phénomènes au delà de 10 jours. L'admittance de la réponse en baromètre inversé est de -1 cm/hPa. Dans l'hypothèse du baromètre non inversé, les océans transmettent intégralement les variations de pression atmosphérique, comme la Terre solide. Mais cette réponse en baromètre non-inversé est purement théorique et n'est pas observée.

Il est bien connu qu'en réalité l'océan répond de manière dynamique aux changements de pression atmosphérique ayant des périodes inférieures à 3 jours et aux hautes latitudes. De plus les effets du vent dominant autour d'une période de 10 jours (Wunsch & Stammer, 1997; Fukumori et al., 1998; Ponte & Gaspar, 1999; Mathers & Woodworth, 2004; Ponte, 2006).



(a) Réponse en baromètre inversé.



(b) Réponse en baromètre non-inversé.



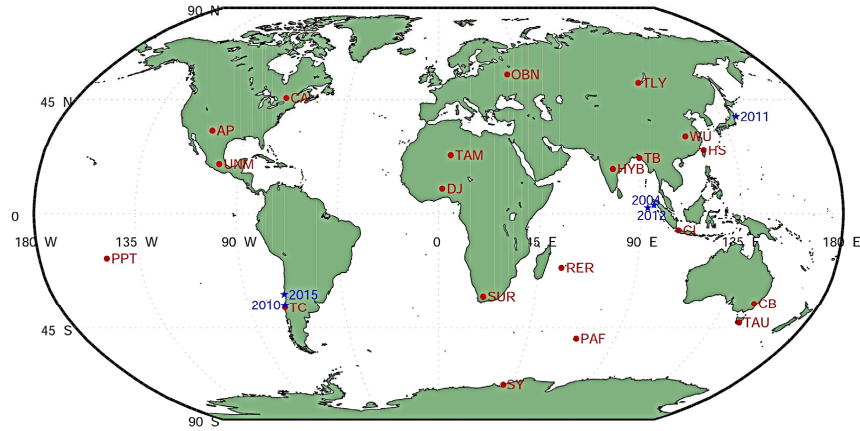
### 5.3 DÉTERMINATION AUTO-RÉGRESSIVE DES FRÉQUENCES COMPLEXES DES MODES SISMIQUES

De juillet 2015 à janvier 2016, Josipa Majstorovic a effectué son stage de Master 2 de l'université de Zagreb sous ma supervision. Elle a développé une méthode d'analyse auto-régressive afin d'estimer les fréquences complexes (fréquences et amortissements) des modes propres sismiques. Elle a utilisé des données gravimétriques du réseau GGP de gravimètres supraconducteurs ainsi que des données d'accélération verticale de sismomètres longue-période de type STS-2 et STS-1 du réseau japonais F-net (<http://www.fnet.bosai.go.jp>) et des données sismologiques extraites de la base de données IRIS-DMC (IRIS Data Management Center - <http://ds.iris.edu/SeismiQuery>). Les sites utilisés sont représentés sur les cartes de la Fig. 5.3.1. Les données analysées sont celles enregistrées après les séismes de Sumatra du 26 décembre 2004 ( $M_w = 9.1$ ), du Chili du 27 février 2010 ( $M_w = 8.8$ ), de Tohoku (Japon) du 11 mars 2011 ( $M_w = 9.0$ ), d'Aceh (Indonésie) du 11 avril 2012 ( $M_w = 8.6$ ) et d'Illapel (Chili) du 16 septembre 2015 ( $M_w = 8.3$ ). Les fréquences et facteurs de qualité des modes sismiques les plus basse-fréquences ( ${}_0S_2$ ,  ${}_2S_1$ ,  ${}_0S_3$ ,  ${}_0S_4$  et  ${}_0S_0$ ) ont été estimés. Les valeurs obtenues pour les cinq fréquences du multiplet  ${}_0S_2$  sont comparées Fig. 5.3.2 avec les résultats de Häfner & Widmer-Schmidrig (2013) et les valeurs théoriques de Dahlen & Sailor (1979). Les barres d'erreur obtenues sont plus grandes que celles de Häfner & Widmer-Schmidrig (2013) car nous avons considéré beaucoup plus de stations et de séismes avec des rapports signal-sur-bruit plus faibles. Les erreurs ont été calculées à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo (méthode dite de « bootstrap »).

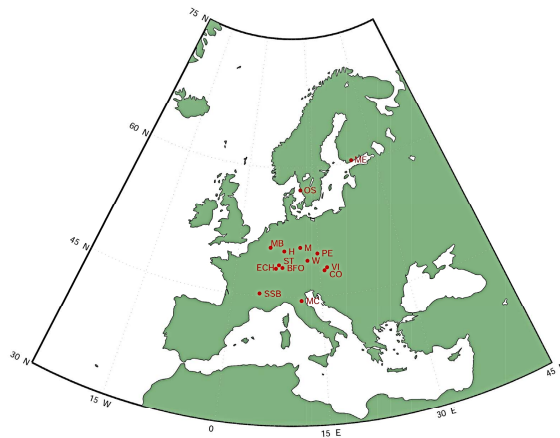
A partir des fréquences estimées pour les différents singlets des différents modes, il est possible d'estimer les coefficients de structure qui caractérisent les variations latérales de densité dans le manteau. Dans le cadre de son Master 2, J. Majstorovic a estimé le coefficient de structure symétrique de degré 2 à partir du mode  ${}_0S_2$  et a obtenu  $c_{20} = -0.78 \mu\text{Hz}$ . La valeur prédite pour le modèle tomographique S40RTS (Ritsema et al., 2011) est  $-0.59 \mu\text{Hz}$  et la valeur estimée par Deuss et al. (2011) était de  $-0.66 \pm 0.32 \mu\text{Hz}$ .

### 5.4 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

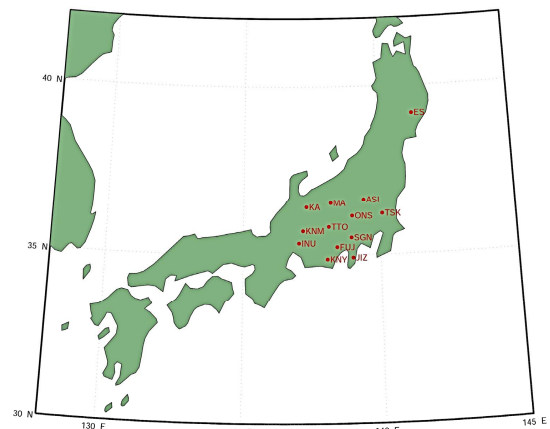
Cette étude sur les données en fond de mer d'un intérêt fondamental pour valider les modèles de circulation océanique a été soumise pour publication. Le travail de Master 2 de J. Majstorovic sera poursuivi au début de sa thèse qui va débiter le 1<sup>er</sup> octobre 2016 sous la direction de Yves Rogister et moi-même. Son sujet de thèse consistera à modéliser l'interaction des ondes gravitationnelles avec la Terre qui a été présentée au Chapitre 4.5.2.



(a) Carte des stations utilisées pour l'analyse des modes sismiques. Les années indiquent les séismes étudiés.



(b) Carte des stations en Europe.



(c) Carte des stations au Japon.

FIGURE 5.3.1: Carte des stations gravimétriques et sismologiques utilisées. Crédit images : Majstorovic (2016)

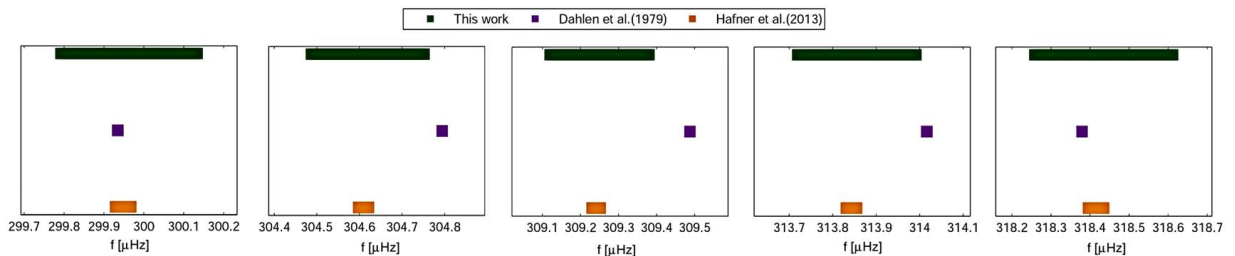


FIGURE 5.3.2: Comparaison des fréquences obtenues pour les cinq singlets du mode  $0S_2$  avec la valeur théorique de Dahlen & Sailor (1979) et avec l'estimation de Häfner & Widmer-Schmidrig (2013). Figure extraite de Majstorovic (2016).

# Annexes



# ANNEXE A

## RAPPELS SUR LES OSCILLATIONS LIBRES ET FORCÉES

### A.1 ANALOGIE À UNE DIMENSION

Une analogie classique en mécanique pour expliquer les modes propres est de considérer le déplacement d'une masse attachée à un ressort. Le ressort caractérise l'élasticité en rhéologie. Pour introduire de l'amortissement (dû à de la dissipation), on ajoute communément un piston à ce système, puisque le piston symbolise l'effet de la viscosité en rhéologie. Nous rappelons donc ci-après les caractéristiques du système dynamique constitué d'une masse  $m$  attachée à un ressort de raideur  $k$  et à un piston de coefficient de frottement fluide  $b$  (Fig. A.1.1).

Le facteur d'amortissement de ce système est donné par  $\epsilon = \frac{b}{2\omega_0 m}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la pulsation propre de l'oscillateur harmonique. L'amortissement de ce système oscillant mécanique peut également être décrit par le facteur de qualité  $Q = \frac{\sqrt{km}}{b}$ .

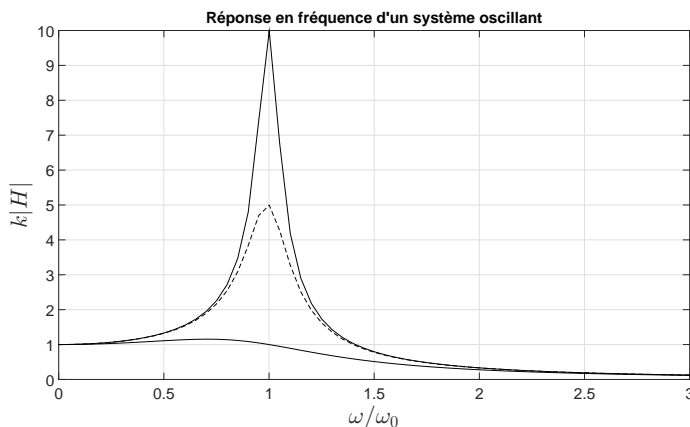
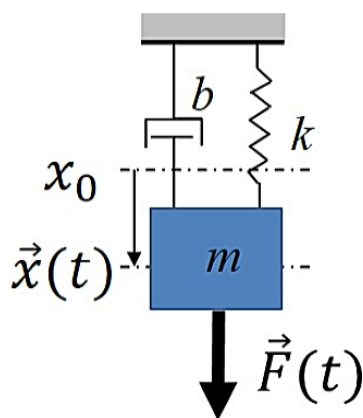


FIGURE A.1.1: Schéma d'un système dynamique à une dimension constitué d'une masse  $m$  attachée à un ressort de raideur  $k$  (élasticité) et à un piston de coefficient de frottement fluide  $b$  (viscosité).

L'équation du mouvement de ce système est donnée par la seconde loi de Newton :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\epsilon\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \vec{F}(t). \quad (\text{A.1.1})$$

Si l'on note  $x_0$  la position de la masse à l'instant initial  $t = 0$ , la solution du problème homogène ( $\vec{F}(t) = 0$ ) s'écrit :

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega_0 t} \left[ x_0 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t) + \frac{\dot{x}_0 + \epsilon\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t) \right].$$

Le mouvement de la masse pourra donc être apériodique ( $\epsilon \geq 1$ ) ou sinusoïdal amorti ( $\epsilon < 1$ ).

Supposons un forçage périodique de la forme  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  selon la verticale. La solution de l'équation A.1.1 est la somme de la solution du problème homogène et d'une solution particulière au problème forcé (régime **transitoire**). Lorsque l'oscillation libre correspondant au problème homogène s'est suffisamment amortie et devient négligeable par rapport à la solution particulière du système forcé, le système a atteint le régime **permanent** ou **stationnaire**.

La solution au problème forcé s'écrit

$$x(t) = F_0 \frac{\cos(\omega t + \phi)}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

avec  $\tan \phi = \frac{\omega b}{k - m\omega^2}$ . La fonction de transfert entre l'excitation  $F(t)$  et la position  $x(t)$  s'écrit alors

$$H(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \quad (\text{A.1.2})$$

La fréquence propre de ce système est égale à  $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ . Il est clair d'après l'équation A.1.2, que lorsque la fréquence angulaire  $\omega$  du forçage est proche de  $\omega_0$ , un phénomène de résonance, illustrée sur la Fig. A.1.1, sera visible.

## A.2 LIEN AVEC LE MODE DE NUTATION DU NOYAU FLUIDE

Dans le cas du mode propre de la FCN, il semblerait que l'on soit dans le cas d'un régime transitoire, puisque le mode libre est régulièrement excité par l'atmosphère et son amortissement est très faible. A cela s'ajoute le forçage par les marées diurnes qui fait apparaître un phénomène de résonance. Le mode libre n'est visible que dans les données VLBI avec une amplitude de l'ordre de 200  $\mu\text{as}$  dans la nutation ; la variation de pesanteur correspondante en surface est d'environ 1.2 nGal et est donc à la limite de détection des gravimètres supraconducteurs.

# ANNEXE B

## CONTRIBUTIONS À LA VALEUR DE LA PESANTEUR EN SURFACE

### B.1 CONTRIBUTIONS STATIQUES À LA VALEUR DE LA PESANTEUR

La valeur de la pesanteur en surface vaut en moyenne  $\bar{g} = 9.8142621 \text{ m/s}^2$ . Cependant la valeur de  $g$  dépend du lieu où l'on se trouve, d'abord à cause de l'ellipticité de la Terre. L'effet de l'ellipticité produit une dépendance en latitude donnée par la formule internationale de la gravité (voir Equation D.5.3) :

$$g = g_0(1 + 0.0053024 \sin^2\phi - 0.0000059 \sin^2(2\phi)) \text{ m/s}^2$$

où  $g_0 = 9.780327 \text{ m/s}^2$  est la valeur à l'équateur. Ainsi la valeur au pôle est  $9.832186 \text{ m/s}^2$ .

CAUSE	AMPLITUDE RELATIVE
Ellipticité	$10^{-2}g$
Topographie	$10^{-4}g$
Masses internes (zones de subduction, isostasie)	$10^{-4}g$

### B.2 CONTRIBUTIONS DYNAMIQUES À LA VALEUR DE LA PESANTEUR

Dans le tableau ci-dessous nous résumons les causes principales de variations temporelles de la pesanteur sur Terre, leurs amplitudes et périodes, sachant que la précision des gravimètres supraconducteurs est :

- dans le domaine temporel  $\approx 0.1 \mu\text{Gal}$
- dans le domaine spectral  $< 100 (\text{nm/s}^2)^2/\text{Hz}$  (périodes  $< 6 \text{ h}$ )

Les effets gravimétriques induits par les couches fluides superficielles (atmosphère, hydrologie continentale) ainsi que les déplacements verticaux peuvent être corrigés localement via des admittances définies par :

- pression atmosphérique  $\frac{\Delta g}{\Delta p} = -0.3 \mu\text{Gal}/\text{hPa}$
- hydrologie  $\frac{\Delta g}{\Delta h} = 0.4 \mu\text{Gal}/\text{cm}$  d'eau (effet de Bouguer)
- subsidence, soulèvement  $\frac{\Delta g}{\Delta h} = 3 \mu\text{Gal}/\text{cm}$  (gradient à l'air libre)

CAUSE	AMPLITUDE	PÉRIODES SUR TERRE
Marées solides	1 nGal - 300 $\mu\text{Gal}$ (< 10 m)	6, 8, 12, 24 h,... 18.6 ans
Marées océaniques	< 10 $\mu\text{Gal}$ (< 10 cm)	<i>idem</i>
Mouvement du pôle (annuel, Chandler)	1-10 $\mu\text{Gal}$ (< 2.5 cm)	1 an, 14 mois
Modes sismiques	1-100 nGal	qqs sec - 54 min
Modes de Slichter	< 1 nGal	4 - 6 h
Modes du noyau fluide	< 1 nGal	12 h - ?
Nutation libre du noyau	< 1 nGal	diurne
Nutation libre de la graine	< 0.1 nGal	diurne
Séismes, ondes de surface	> 1 mGal	10 - 100 s
Pression atmosphérique	< 5 $\mu\text{Gal}$ (< 2.5 cm)	toutes les fréquences
Surcharge océanique (autre que marée)	$\approx 1 \mu\text{Gal}$	toutes les fréquences
Ondes océaniques (micro-séismes)	< 10 $\mu\text{Gal}$	1 - 10 s
Hydrologie	< 20 $\mu\text{Gal}$ (qqc cm)	toutes les fréquences
Tectonique	$\approx 1 \mu\text{Gal}$	> 1 an



# ANNEXE C

## REPÈRES ET ROTATIONS

### C.1 LES RELATIONS CINÉMATIQUES D'EULER

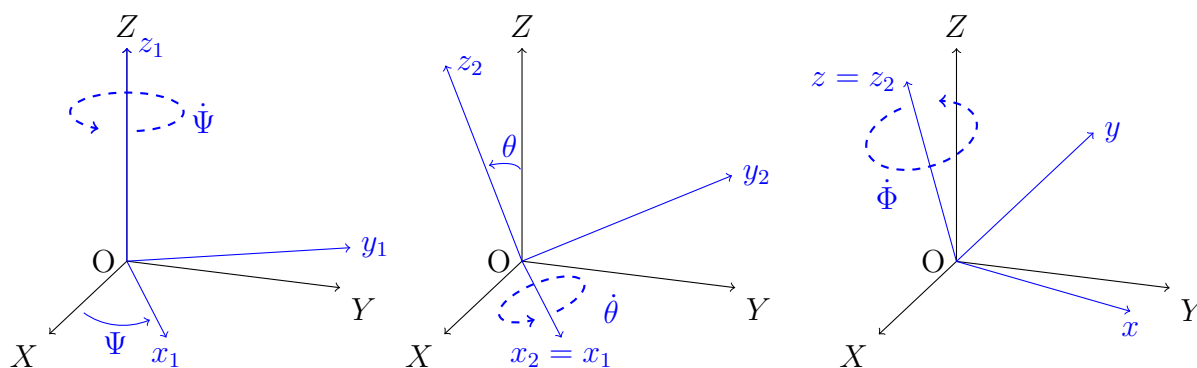


FIGURE C.1.1: Angles d'Euler.

(OXYZ) représente le repère inertiel. Le plan (X, Y) est le plan de l'écliptique à J2000.  $z = z_2$  correspond à l'axe de figure et le plan  $(x, y)$  correspond alors à l'équateur terrestre.

Les angles d'Euler permettent de décrire l'orientation de la Terre à un instant donné par rapport à un repère inertiel. Le repère inertiel est défini à l'aide d'une origine O, prise au centre de masse de la Terre, et de trois axes X, Y, Z définis de telle sorte qu'ils forment un trièdre direct. Les axes X et Y définissent un plan fondamental, que l'on choisit comme étant le plan de l'écliptique moyen à une époque de référence. Habituellement, l'époque de référence est choisie comme étant J2000, c'est-à-dire le 01 janvier 2000 à 12 h UT1. Le premier angle d'Euler  $\Psi$  est l'angle entre l'origine des longitudes dans le repère inertiel sur l'écliptique moyen et le nœud ascendant de l'équateur terrestre sur l'écliptique (voir Fig. C.1.1). Le deuxième angle  $\theta$  donne l'inclinaison de l'équateur terrestre par rapport à l'écliptique, correspondant également à l'angle entre l'axe Z du repère inertiel et l'axe de figure  $z_2$ . Le troisième angle  $\Phi$  donne la longitude sur l'équateur de l'origine du repère terrestre  $(x, y, z)$ .

Les relations cinématiques d'Euler s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\theta} + i\dot{\Psi}\sin\theta = \Omega\tilde{m}e^{i\Phi} \\ \dot{\Phi} - i\dot{\Psi}\cos\theta = \Omega(1 + m_3), \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

où  $\vec{\omega} = \Omega(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + (1 + m_3)\vec{x}_3)$  représente le vecteur rotation instantané du repère terrestre dans le repère céleste et  $\Omega$  est la vitesse de rotation de référence de la Terre. On a introduit la variable complexe  $\tilde{m} = m_1 + im_2$ .

## C.2 REPÈRES FIXES ET REPÈRE INSTANTANÉ

Dans la littérature de nombreuses confusions existent entre les différents axes et repères qui interviennent pour décrire les diverses composantes de la rotation terrestre. Par souci de clarification, nous précisons les définitions des axes et repères utilisés dans ce mémoire :

**AXE DE FIGURE :** axe de symétrie de l'ellipsoïde de révolution s'approchant le plus possible de la figure réelle de la Terre.

**AXE GÉOGRAPHIQUE :** axe passant par les pôles géographiques c'est-à-dire troisième axe du repère cartésien terrestre de référence.

**AXE DE ROTATION :** axe de rotation de la Terre qui n'est pas confondu ni avec l'axe de figure ni avec l'axe géographique. Le passage de l'axe de figure à l'axe de rotation se fait à l'aide des termes d'Oppolzer. Ces termes d'Oppolzer sont liés au choix du système de référence et représentent l'expression dans le repère inertiel des mouvements diurnes et quasi-diurnes dans le repère terrestre entre un axe spécifique (axe de rotation instantané, axe de figure, etc...) et l'axe  $z$  du système de référence terrestre.

**REPÈRE INTERMÉDIAIRE DU CIP :** repère instantané conventionnel intermédiaire entre le repère céleste et le repère terrestre. L'axe du repère intermédiaire se rapproche le plus possible de l'axe de figure de la Terre : sa position céleste est définie par celle de l'axe de figure restreint à ses mouvements de précession-nutations de périodes supérieures à 2 jours. Sa position est donnée par le modèle de précession-nutation conventionnel de l'IAU à l'heure actuelle fondé sur MHB (Mathews et al., 2002). La transformation entre le repère intermédiaire et le repère terrestre comprend alors les matrices de mouvement du pôle et les nutations spatiales de périodes inférieures à 2 jours.

**REPÈRE CÉLESTE :** repère spatial quasi-inertiel dont le pôle nord céleste est défini par le pôle nord de l'équateur moyen à J2000 (actuellement vers Polaris, il y a 13 000 ans, vers Véga) et géocentré. Ce repère a les mêmes axes que le repère inertiel barycentrique (centré sur le barycentre du système solaire), mais d'un point de vue dynamique il tourne par rapport à ce dernier à cause du couplage relativiste spin-orbite, donnant lieu à la précession - nutation géodésique ( $\approx 20$  mas/an autour du pôle de l'écliptique pour le terme principal, alias la précession géodésique). Le passage du système de référence barycentrique au système

de référence géocentrique non-tournant (cette condition de non-rotation de l'Univers - des quasars - est définie soit d'un point de vue cinématique pour l'astrométrie, soit d'un point de vue dynamique pour la mécanique céleste) se fait par une transformation relativiste (d'ordre  $c^{-2}$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière) faisant intervenir le tenseur métrique.

**REPÈRE GALILÉEN OU INERTIEL** : repère dans lequel le principe d'inertie (voir Encadré 4.4) est vérifié. Tout référentiel en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel inertiel est lui-même inertiel. Le passage d'un repère inertiel à un autre laisse inchangée la forme des lois de Newton. En relativité, on parle de repères de Minkowski pour lesquels le temps est également uniforme (voir Encadré 4.1).

---

# ANNEXE D

## SUR LA FORME DE LA TERRE

*[...] I indeavour'd to shew that the form of the Earth was probably somewhat flatter towards the Poles than towards the Equinoctial.*

Robert HOOKE, *A Discourse of Earthquakes*, ouvrage posthume paru en 1705

La force centrifuge joue un rôle significatif sur la valeur et la direction de la pesanteur mais également sur la figure de la Terre. Dès 1666, Cassini observa que Jupiter avait une forme aplatie. Picard, en 1671, suggéra que la Terre n'était pas parfaitement sphérique et Hooke supposa même vers 1675 qu'elle était un ellipsoïde aplati. Il réaffirma clairement en 1686-1687, que les mers avaient une figure ellipsoïdale du fait de la rotation terrestre et il proposa même de le prouver par des mesures pendulaires et géodésiques à différentes latitudes. Cette idée a également été soutenue par Newton dans ses *Principia* en 1687. Il estima un aplatissement de 1/230 pour une Terre homogène en se basant sur sa théorie de l'attraction générale. En 1690, Huygens proposa un nouveau modèle d'aplatissement avec une valeur de 1/578. Il a fallu attendre Clairaut en 1743 pour réconcilier les principes d'équilibre de Newton et de Huygens.

### D.1 EQUILIBRE HYDROSTATIQUE

Considérons l'état initial d'une Terre à symétrie sphérique en équilibre hydrostatique. Dans un milieu fluide en équilibre, les tenseurs des contraintes sont isotropes et s'écrivent en fonction de la pression  $p^0$

$$\mathbf{T}^0 = -p^0 \mathbf{I}.$$

La Terre dans sa configuration de référence est auto-gravitante et tourne à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_0$ . L'équation locale de conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans le référentiel tournant

$$-\vec{\nabla}_{\vec{r}} p^0 + \rho^0 \vec{g}^0 - \rho^0 [\vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r})] = 0, \quad (\text{D.1.1})$$

avec  $\rho^0$  la densité dans la configuration de référence. Le champ de gravité est donné par

$$\vec{g}^0(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}, 0) = -G \int_{V^0} \frac{\rho^0(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'^0$$

et le potentiel gravifique associé s'écrit

$$\phi^0(\vec{r}) = -G \int_{V^0} \frac{\rho^0}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'^0. \quad (\text{D.1.2})$$

Le potentiel centrifuge est donné par

$$\phi_c^0(\vec{r}) = -\frac{1}{2} |\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}|^2. \quad (\text{D.1.3})$$

En introduisant le potentiel de pesanteur  $\tilde{\phi}^0 = \phi^0 + \phi_c^0$ , l'équation D.1.1 devient

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} p^0 + \rho^0 \vec{\nabla}_{\vec{r}} \tilde{\phi}^0 = \vec{0}.$$

En prenant le rotationnel de cette équation et en la multipliant par  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} p^0$ , on peut montrer que les surfaces d'égale pression, les surfaces d'égale densité et les équipotentielles coïncident. La figure de la Terre, qui coïncide avec une surface isobare moyenne, est donc aussi une équipotentielle.

## D.2 EXPRESSION DU POTENTIEL GRAVITATIONNEL

Le potentiel gravitationnel en un point  $\mathbf{r}$ , situé à une distance  $r$ , de colatitute  $\theta$  et de longitude  $\lambda$ , se développe en harmoniques sphériques selon

$$\phi^0(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{r} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{r}\right)^l (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) P_l^m(\cos\theta) \right\}, \quad (\text{D.2.1})$$

où  $a$  est le rayon équatorial moyen de la Terre,  $G$  la constante gravitationnelle,  $M$  la masse de la Terre et les  $P_l^m$  sont les fonctions de Legendre associées.  $C_l^m$  et  $S_l^m$  sont les coefficients de Stokes. Le degré 0 correspond à l'état de référence avec  $C_0^0 = 1$ . De plus, si l'origine du système de référence est pris au centre de masse  $O$  de la Terre, alors nous avons  $C_1^0 = C_1^1 = S_1^1 = 0$  et le potentiel gravitationnel s'écrit

$$\phi^0(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{r}\right)^l (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) P_l^m(\cos\theta) \right\},$$

Lorsque  $m = 0$ ,  $S_l^0 = 0$ , les coefficients de Stokes  $C_l^0$  sont zonaux et nous notons  $C_l^0 = -J_l$ . A l'extérieur ( $r \gg a$ ), les termes de degré  $l = 2$  sont largement dominants.

### D.3 LIEN AVEC LES MOMENTS D'INERTIE

Considérons le repère terrestre défini par les coordonnées  $(x, y, z)$  et dont les axes coïncident avec les axes principaux d'inertie, dont les moments sont notés  $A, B$  et  $C$ . Les moments d'inertie s'écrivent alors

$$\begin{aligned} A &= \int_V \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dV \\ B &= \int_V \rho(x, y, z)(x^2 + z^2)dV \\ C &= \int_V \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)dV \end{aligned}$$

Notons  $\Psi$  l'angle au centre entre un point P extérieur à la Terre de coordonnées  $(x, y, z)$  et un élément de masse  $dm$  situé dans la Terre à  $(x', y', z')$ . Le produit scalaire des deux vecteurs position est donné par

$$rr' \cos \Psi = xx' + yy' + zz'$$

En développant le terme  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$  intervenant dans l'expression D.1.2 en fonction des polynômes de Legendre, nous avons

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} \right)^l P_l(\cos \Psi)$$

En ne considérant que le terme de degré 2, on obtient la **formule de MacCullagh**

$$\phi_2^0 = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I),$$

où  $I$  est le moment d'inertie autour de l'axe OP, avec O le centre de masse de la Terre.

Afin de généraliser aux autres degrés, on suppose que la Terre est un ellipsoïde de rotation avec  $A = B$ , le potentiel évalué en  $r$  devient alors

$$\phi^0 = -\frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^l J_l P_l(\cos \theta) \right),$$

avec  $J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$ , appelé facteur de forme dynamique.

### D.4 ELLIPSOÏDE DE CLAIRAUT

L'hypothèse fondamentale introduite par Clairaut (1743) est que la Terre est en équilibre hydrostatique, donc que sa surface est une équipotentielle et que la Terre a une rotation uniforme autour de l'axe polaire. Le potentiel centrifuge donné en D.1.3 s'écrit alors  $-\frac{1}{2}\Omega_0^2 r^2 \sin^2 \theta$  et le potentiel total de pesanteur devient

$$\tilde{\phi}^0 = \phi^0 - \frac{1}{2}\Omega_0^2 r^2 \sin^2 \theta.$$

En se limitant au degré 2, nous avons

$$\tilde{\phi}_2^0(r) = -\frac{GM}{r} \left( 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) - \frac{1}{2} \Omega_0^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{D.4.1})$$

Comme le surface de la Terre doit être une équipotentielle, il faut que la valeur du potentiel défini par l'expression D.4.1 soit constante en tout point de la surface. A l'équateur, nous avons

$$\tilde{\phi}_2(r = a, \theta = \pi/2) = -\frac{GM}{a} \left( 1 + \frac{J_2}{2} \right) - \frac{\Omega_0^2 a^2}{2}, \quad (\text{D.4.2})$$

et au pôle

$$\tilde{\phi}_2(r = c, \theta = 0) = -\frac{GM}{c} \left( 1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 J_2 \right).$$

Ces deux expressions doivent être égales, impliquant

$$\frac{GM}{a} \left( 1 + \frac{J_2}{2} \right) + \frac{\Omega_0^2 a^2}{2} = \frac{GM}{c} \left( 1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 J_2 \right).$$

Introduisons l'aplatissement de la Terre, défini par  $\epsilon = \frac{a-c}{a} \approx (1/298.25)$  ou de manière équivalente  $c = a(1-\epsilon)$ . A partir de l'équation précédente, on peut alors écrire l'aplatissement du géoïde

$$\epsilon = 1 - \frac{c}{a} = J_2 \left( \frac{c}{2a} + \frac{a^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{a^2 c \Omega_0^2}{GM}. \quad (\text{D.4.3})$$

Il s'agit d'une théorie au premier ordre de l'aplatissement du géoïde qui ignore les contributions du  $J_4$  et des degrés supérieurs. Le dernier terme de droite, noté  $q$ , correspond au rapport de la force centrifuge sur la pesanteur totale à l'équateur d'une sphère de rayon  $c = a$ . Il a été déterminé pour la première fois par Huygens en 1669 ( $q \approx 1/289$ ).

Au premier ordre en  $\epsilon$  et en  $J_2$ , la différence entre  $a$  et  $c$  peut être ignorée et l'équation D.4.3 peut être écrite

$$\boxed{\epsilon = \frac{3}{2} J_2 + \frac{q}{2}}. \quad (\text{D.4.4})$$

Celle relation constitue le théorème de Clairaut (dite première équation de Clairaut). Elle associe la quantité géométrique  $\epsilon$ , la quantité cinétique  $J_2$  et la quantité dynamique  $q$ . Dans le cas d'une Terre homogène,  $J_2 \approx \frac{2}{5} \epsilon$  et on obtient  $\epsilon = \epsilon_H = \frac{5}{4} q \approx \frac{1}{230}$ . C'est ce qu'avait supposé Newton. Huygens quant à lui, a considéré un modèle de Terre dans lequel toute la masse est concentrée au centre ( $J_2 = 0$ ). Dans ce cas,  $\epsilon = \frac{q}{2} = \frac{1}{578}$ .

Afin de trouver l'expression générale de la forme de la surface équipotentielle, nous reprenons l'équation D.4.1. Le potentiel  $\tilde{\phi}_2^0(r)$  en un point quelconque de la surface doit avoir la même valeur qu'à l'équateur. En égalant les équations D.4.1 et D.4.2, en regroupant



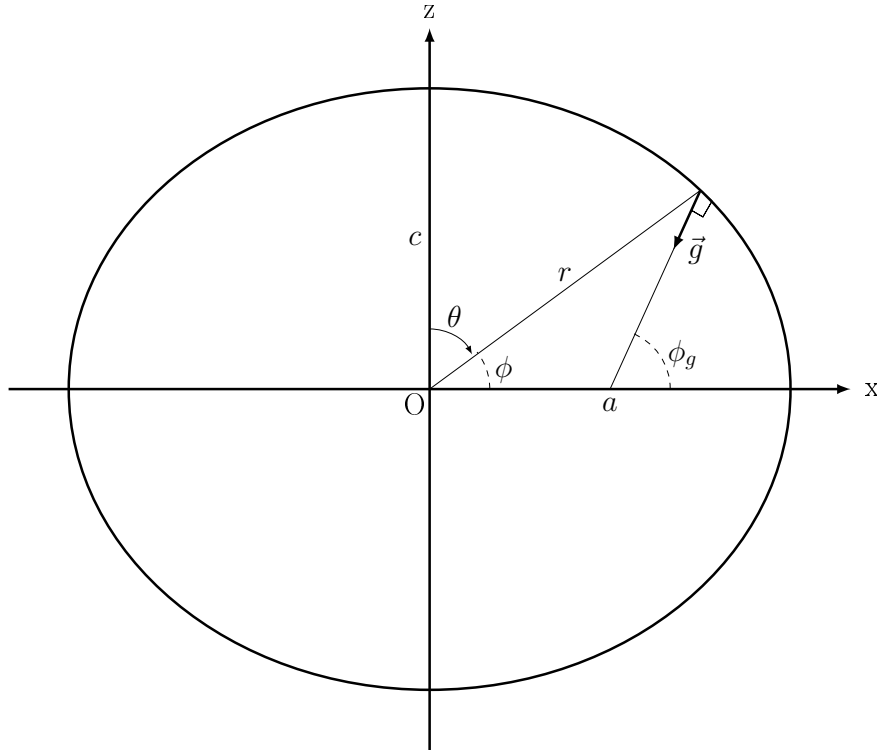


FIGURE D.4.1: Sphéroïde de révolution représentant la forme de la Terre. La relation géométrique entre latitude géographique  $\phi_g$  et latitude géocentrique  $\phi$  est représentée. Les colatitudes associées sont respectivement  $\theta_g$  et  $\theta$ .

les termes en  $r$  et en négligeant les termes du second-ordre contenant  $J_2^2$ ,  $q^2$  et  $qJ_2$ , nous obtenons

$$r = a \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} J_2 + \frac{q}{2} \right) \cos^2 \theta \right], \quad (\text{D.4.5})$$

et en introduisant l'aplatissement  $\epsilon$  :

$$r = a (1 - \epsilon \cos^2 \theta).$$

Nous aboutissons ainsi à l'ellipsoïde de Clairaut qui est une approximation au premier ordre du géoïde.

## D.5 PESANTEUR SUR L'ELLIPSOÏDE DE CLAIRAUT

La pesanteur  $g$  est obtenue en prenant le gradient du potentiel le long de la normale à l'ellipsoïde

$$\begin{aligned} g &= -|\nabla \tilde{\phi}_2^0| \\ &= - \left[ \left( \frac{\partial \phi_2^0}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2^0}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Comme la déviation de la verticale par rapport à la direction radiale (vers le centre de la Terre) est de l'ordre de  $\epsilon$ , on peut faire l'approximation

$$g \approx -\frac{\partial \tilde{\phi}_2^0}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{r} \right)^2 J_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} - q \left( \frac{r}{a} \right)^3 \sin^2 \theta \right].$$

En remplaçant  $r$  par son expression D.4.5, en supposant en première approximation que les ratio  $\left(\frac{a}{r}\right)^2$  ou  $\left(\frac{r}{a}\right)^3$  valent un ( $r = a$ ) et en développant au premier ordre en  $J_2$  et  $q$ , on obtient

$$g = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - q + \cos^2 \theta (2q - \frac{3}{2} J_2) \right). \quad (\text{D.5.1})$$

A l'équateur ( $\theta = 90^\circ$ ), nous avons

$$g_E = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - q \right),$$

et au pôle ( $\theta = 0^\circ$ ), nous avons

$$g_P = \frac{GM}{c^2} \left( 1 - 3 \frac{a^2}{c^2} J_2 \right) \approx \frac{GM}{a^2} (1 - 3J_2 + 2\epsilon),$$

puisque au premier ordre en  $\epsilon$ ,  $\frac{1}{b} \approx \frac{1+\epsilon}{a}$  et  $\frac{1}{b^2} \approx \frac{1+2\epsilon}{a^2}$ . En remplaçant dans l'expression D.5.1, on peut écrire

$$g = g_E \left[ 1 + \left( 2q - \frac{3}{2} J_2 \right) \cos^2 \theta \right],$$

ou

$$g = g_E \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} q - \epsilon \right) \cos^2 \theta \right],$$

ou encore en introduisant la pesanteur au pôle et à l'équateur

$$g = g_E \left[ 1 + \left( \frac{g_P}{g_E} - 1 \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (\text{D.5.2})$$

L'équation D.5.2 donne une expression succincte pour la pesanteur dans la théorie de Clairaut. Le terme  $\epsilon_g = \left(\frac{g_P}{g_E} - 1\right)$  est appelé « aplatissement gravimétrique » (Levallois, 1970). Il en découle immédiatement la relation

$$\boxed{\epsilon_g = 2\epsilon - \frac{9}{2} J_2 + q},$$

dite deuxième équation de Clairaut. En insérant l'équation D.4.4, on obtient la *formule de Clairaut*

$$\boxed{\epsilon_g + \epsilon = \frac{5}{2} q},$$

**Encadré D.1: EXPRESSIONS FONDAMENTALES**

Soit un ellipsoïde de révolution homogène d'axes  $a$ ,  $c$ , d'aplatissement  $\epsilon$  et de densité  $\rho$ . La masse  $M$  et les moments d'inertie  $C$ ,  $A$  sont donnés par

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 c$$

$$C = \frac{8}{15} \pi \rho a^4 c = 0.4 M a^2$$

$$A = \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c (a^2 + c^2) = 0.2 M (a^2 + c^2)$$

En utilisant l'équation D.4.3, on montre que

$$\epsilon \approx \frac{15 \Omega_0^2}{16 \pi G \rho}.$$

Dans le cas d'un ellipsoïde hétérogène, l'ellipticité dynamique  $\alpha$  est donnée par

$$\alpha = \frac{C - A}{C} = \frac{\int_0^1 \rho \, d(\epsilon r'^5)}{\int_0^1 \rho \, d(r'^5)}$$

qui relie l'aplatissement géométrique à l'aplatissement de pesanteur. La formule de Clairaut montre que l'aplatissement  $\epsilon$  est déterminé par des mesures de pesanteur, supposant  $\Omega_0$  et  $a$  connus. Pour obtenir  $\epsilon$ , il n'est donc pas nécessaire de connaître la constitution interne du globe. La comparaison avec des mesures géodésiques permet alors de tester si la Terre est à l'équilibre hydrostatique.

Si maintenant on garde les termes du second ordre dans la théorie, et en remplaçant la co-latitude géocentrique en fonction de la co-latitude géographique (cf. Fig. D.4.1), nous aboutissons à la formule internationale de la pesanteur

$$g = g_E \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} q - \epsilon - \frac{17}{4} q \epsilon \right) \cos^2 \theta_g + \left( \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{5}{8} q \epsilon \right) \cos^2 2\theta_g \right],$$

qui est, avec les valeurs numériques :

$$g = 9.780327 \left( 1 + 0.0053024 \cos^2 \theta_g - 0.0000059 \cos^2 2\theta_g \right) \text{ m.s}^{-2}. \quad (\text{D.5.3})$$

**D.6 CONDITION GÉNÉRALE D'ÉQUILIBRE**

Nous avons survolé dans les sections précédentes la théorie de Clairaut qui est une théorie du premier ordre. On voit à partir de l'équation D.4.4 que la figure d'équilibre hydrostatique de la Terre dépend de sa densité. Par exemple, l'aplatissement dû à la rotation d'un corps de densité uniforme  $\rho$  est proportionnel à  $\rho^{-1}$  (voir encadré D.1). Ainsi, bien que les surfaces d'égale densité sont des surfaces équipotentielles, leur ellipticité diminue avec la profondeur, à mesure que la densité augmente. Ainsi l'ellipticité des équipotentielles est

affectée par la composition dans la couche entourant la surface équipotentielle, rendant le calcul de leur ellipticité plus compliqué.

Considérons l'ellipsoïde de densité constante passant par le point P et caractérisée par la valeur  $p$ , rayon de la sphère moyenne équivalente (voir Fig. D.6.1). Le potentiel externe d'une coque ellipsoïdale définie par les rayons  $p$  et  $R$  de la Fig. D.6.1 est la différence de potentiels des deux ellipsoïdes homogènes  $E_p$  and  $E$  de rayons respectifs  $p$  et  $R$ . Sachant que le point P est extérieur à la région définie par l'ellipsoïde  $E_p$  mais intérieure à la coque entre  $E$  et  $E_p$ , le potentiel gravitationnel en P s'obtient en intégrant les contributions de coques infinitésimales

$$\begin{aligned} V_i = & \frac{4\pi G}{r} \int_0^p \rho(p') p'^2 dp' - \frac{8\pi G}{15} \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} \int_0^p \rho d(\epsilon p'^5) \\ & + 4\pi G \int_p^R \rho(p') p' dp' - \frac{8\pi G}{15} r^2 P_2(\cos\theta) \int_p^R \rho \frac{d\epsilon}{dp'} dp'. \end{aligned} \quad (\text{D.6.1})$$

Afin d'obtenir le potentiel de pesanteur, il faut ajouter au potentiel de l'Eq. D.6.1 ci-dessus le potentiel centrifuge  $\phi_c$  donné par

$$\phi_c = \frac{1}{3} \Omega_0^2 r^2 [1 - P_2(\cos\theta)] = \frac{1}{3} \Omega_0^2 p^2 [1 - P_2(\cos\theta)] + O(\epsilon^2).$$

En négligeant  $O(\epsilon^2)$ , nous remplaçons  $r$  dans l'Eq. D.6.1 par son expression

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left[ 1 + \frac{2}{3} \epsilon P_2(\cos\theta) \right],$$

ce qui nous amène au potentiel de pesanteur

$$\begin{aligned} \phi = V_i + \phi_c = & 4\pi G \left[ \frac{1}{p} \int_0^p \rho p'^2 dp' + \int_p^R \rho p' dp' + \frac{\Omega_0^2 p'^2}{12\pi G} \right] \\ & + 4\pi G P_2(\cos\theta) \left[ \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{p} \int_0^p \rho p'^2 dp' - \frac{2}{15 p^3} \int_0^p \rho d(\epsilon p'^5) \right. \\ & \left. - \frac{2}{15} p^2 \int_p^R \rho \frac{d\epsilon}{dp'} dp' - \frac{\Omega_0^2 p^2}{12\pi G} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.6.2})$$

Nous avons vu au début de ce paragraphe qu'en équilibre hydrostatique les surfaces d'égale densité sont des surfaces équipotentielles. Les surfaces ellipsoïdales définies par  $p$  sont par définition de densité constante  $\rho = \rho(p) = \text{constante}$ . Par conséquent, pour que le potentiel de pesanteur  $\phi$  défini par l'Eq. D.6.2 soit constant, il doit être indépendant de  $\theta$ . Le facteur devant  $P_2(\cos\theta)$  doit donc être nul, ce qui nous amène, après quelques calculs algébriques à l'équation

$$\boxed{\frac{d^2\epsilon}{dp^2} + \frac{6\rho}{p\bar{\rho}} \frac{d\epsilon}{dp} + \frac{6\epsilon}{p^2} \left( \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 \right) = 0}, \quad (\text{D.6.3})$$

avec  $\bar{\rho}$  la densité moyenne de la sphère de rayon  $p$

$$\bar{\rho} = \frac{3}{p^3} \int_0^p \rho(p') p'^2 dp'.$$

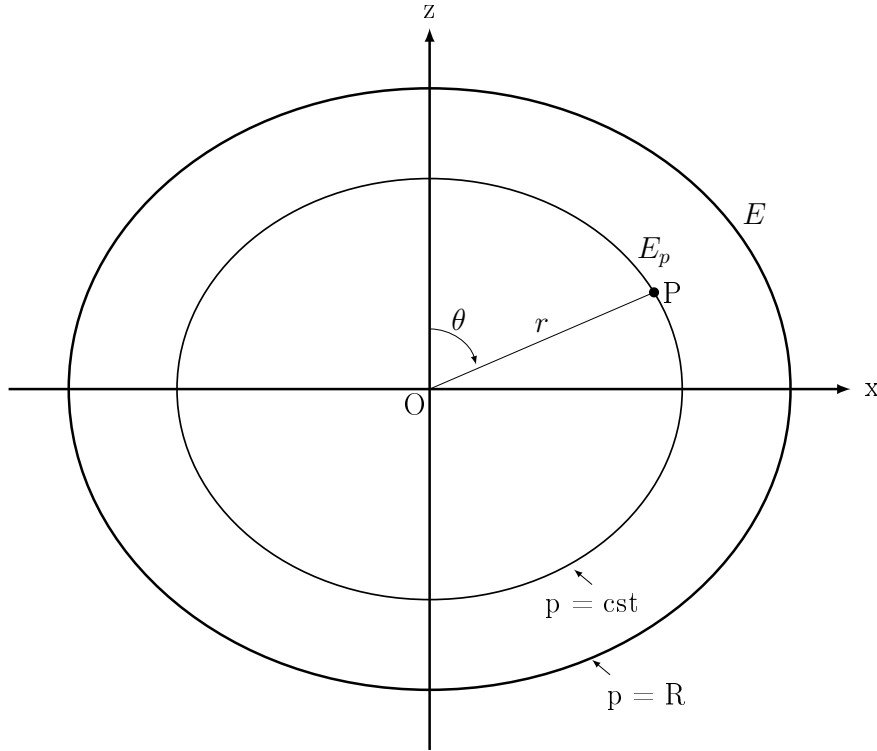


FIGURE D.6.1: Schéma illustrant le point P à l'intérieur de l'ellipsoïde auquel le potentiel est calculé.

Il s'agit de l'équation différentielle de Clairaut. L'intégration numérique de l'équation D.6.3 permet de déterminer la forme des surfaces équipotentielles à l'intérieur d'un corps en équilibre en fonction de la répartition interne des densités.

Radau (1885) a introduit un changement de variable astucieux en posant

$$\eta = \frac{d\epsilon p}{dp \epsilon},$$

où  $\eta$  est appelée *variable de Radau*. Cette transformation de Radau appliquée au premier ordre en  $\eta$  permet d'obtenir l'expression (e.g. Jeffreys, 1959)

$$\epsilon = \frac{(5/2)p}{1 + [(5/2)(1 - (3/2)C/Ma^2)]^2},$$

ou encore en introduisant l'ellipticité dynamique  $\alpha = \frac{C-A}{C}$ , très bien contrainte par les observations de la précession

$$\epsilon - \frac{p}{2} = \alpha \left( 1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5p}{2\epsilon} - 1} \right),$$

sachant qu'à la surface  $\eta = \frac{5p}{2\epsilon} - 2$ . Une théorie complète sur la figure de la Terre et ses différentes formulations et approches est donnée par Moritz (1990).

L'effet centrifuge séculaire sur le géopotential est  $k_s$  fois le potentiel centrifuge constant de degré 2 où  $k_s = \frac{3G(C-A)}{\Omega_0^2 a^5} \approx 0.938$  est appelé nombre de Love séculaire et correspond à l'état d'équilibre hydrostatique de la Terre fluide.

---

# ANNEXE E

## EFFET DE LA DÉFORMATION DE MARÉE ZONALE SUR L'OSCILLATION DE CHANDLER

*Il s'agit d'un article en préparation.*

### ON THE TIDAL MODULATION OF CHANDLER WOBBLE

Under the influence of the gravitational torques exerted by the Sun, Moon and in a much less extent other planets, the Earth's rotation axis undergoes periodic movements that are called nutation and precession. The position of the Earth's rotation axis is continuously monitored using space technique like Very long baseline radio interferometry (VLBI). The incessantly improving precision of these observations requires more accurate theoretical development in terms of geophysical processes perturbing the rotation but also in terms of approximation in the equations. The introduction of second-order effects in the theory describing the Earth's dynamics has become more and more relevant. Among the second-order effects, we can quote the action of the degree-2 potential on an Earth already deformed by the tidal and centrifugal potential or the coupling between the axial and the equatorial components of the Earth's rotation. Such effects on the nutation amplitudes have been fully treated by Lambert & Mathews (2006) but they have never been published in the case of the rotational modes. We show here their influence on the Chandler wobble (CW).

The CW is a rotational mode of the Earth with a period close to 433 days that exists because the Earth is ellipsoidal. This mode has been widely studied for many years since its damping would put some constraint on the rheology of the Earth's mantle at frequencies where we have poor information. However the CW seems to be regularly excited (Gross (2007)) by surface layers (atmosphere, oceans and hydrology) making the damping analysis difficult. The amplitude and phase of the CW are also variable (e.g. Gibert et al. (1998)). Besides, a large number of studies proposed that this wobble is constituted of several oscillations of close frequencies (e.g. Guo et al. (2005)). Rogister & Valette (2009) have proposed a mechanism associated with the dynamics of the fluid outer core to explain multiple frequencies but their values do not agree with the observed ones.

The present work proposes an explanation based only on theory for a possible amplitude modulation of the Chandler wobble that could also give rise to multiple frequencies.

### DYNAMICAL EQUATIONS OF THE EARTH'S ROTATION

The varying Earth's rotation is governed by the angular momentum conservation law. In a frame attached to the rotating Earth, the angular momentum  $\mathbf{H}$  and the instantaneous angular velocity vector  $\omega$  of the Earth are related by

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \omega \times \mathbf{H} = \mathbf{\Gamma}, \quad (\text{E.0.1})$$

where  $\mathbf{\Gamma}$  is the external torque. By definition, the angular momentum  $\mathbf{H}$  is also linked to the deformations of the Earth through the elements of the inertia tensor  $\mathbf{I}$  by  $\mathbf{H} = \mathbf{I}\omega$ . In a Tisserand frame where the axes are oriented along the Earth's mean axes of inertia, the inertia tensor can be written

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

where the  $c_{ij}$  represent the perturbation terms of the inertia tensor and mean equatorial moment of inertia are taken as equal. These perturbations correspond to the deformations of the Earth induced e.g. by the tidal forces and centrifugal forces due to Earth rotation variations. Following a similar perturbation formalism, the angular velocity vector is

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 + \Omega \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix},$$

where  $\Omega$  is the mean rotation rate of the Earth,  $\tilde{m} = m_1 + im_2$  represents the wobble of the mantle and  $m_3$  is related to the change of the Earth's axial rotation rate.

Following Sasao et al. (1980) and Mathews et al. (1991a), the Eq. (E.0.1) leads to a non linear form of the so-called Euler-Liouville

$$\begin{cases} \dot{\tilde{m}} - i\sigma_r \tilde{m} + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} - i\sigma_r \tilde{m} m_3 - i\frac{\Omega}{A} c m_3 + i\frac{\Omega}{A} c_{33} \tilde{m} = 0 \\ \dot{m}_3 + \frac{c_{33}}{C} = 0 \end{cases}, \quad (\text{E.0.2})$$

where  $\sigma_r = \Omega \frac{C-A}{A} = \Omega\alpha$  is the Euler frequency, and  $c = c_{13} + ic_{23}$  is the perturbation of the off-diagonal inertia tensor of the whole Earth.

According to McCullagh's theorem, the tesseral perturbation  $c$  of the inertia tensor is the sum of the direct effect of the tidal potential  $\phi_{21}$  and the centrifugal effect arising from the variations of the Earth's rotation, so that  $c = -A\kappa_{21}(\phi_{21} - \tilde{m})$  (Lambert & Mathews (2006)). In a similar way, the zonal perturbation of the Earth's inertia  $c_{33}$  can be written  $c_{33} = -A\kappa_{20}(\phi_{20} - m_3)$ .  $\kappa_{20}$  and  $\kappa_{21}$  are defined by

$$\kappa_{20} = k_{20} \frac{a^2 \Omega^2}{3GA} \quad \text{and} \quad \kappa_{21} = k_{21} \frac{a^2 \Omega^2}{3GA},$$



where  $k_{20}$  and  $k_{21}$  are the Love numbers expressing the mass redistribution potential at the surface of the Earth respectively induced by a zonal and a tesseral potential change of the whole Earth.

We now inject the zonal deformation of the Earth  $c_{33}$  and the tesseral deformation  $c$  into the first equation of the angular momentum (Eq. E.0.2) :

$$(1 + \kappa_{21})\dot{\tilde{m}} + i\tilde{m}[-\sigma_r(1 + m_3) + \Omega\kappa_{21}(1 - m_3) + \Omega\kappa_{20}(m_3 - \phi_{20})] = \kappa_{21}\dot{\phi}_{21} + i\Omega\kappa_{21}\phi_{21}(1 - m_3) \quad (\text{E.0.3})$$

The last term of the above expression,  $i\Omega\kappa_{21}\phi_{21}m_3$ , involves a second-order torque acting on the zonal deformation of the Earth and affecting the amplitudes of nutations (Lambert & Mathews (2006)). The term containing  $\dot{\phi}_{21}$  involves tidal Poisson terms affecting also the nutation amplitudes (Folgueira et al. (2007)). The term involving the product of  $m$  by  $m_3$  expresses the coupling of the motion of the axis of rotation with the Earth's rotation rate (Lambert & Capitaine (2004)).

Since we are interested in the Earth's normal modes (Chandler wobble), we cancel the right-hand terms involving tidal torques in Eq. E.0.3, so that the homogeneous equation can be written :

$$(1 + \kappa_{21})\dot{\tilde{m}} + i\tilde{m}[-\sigma_r(1 + m_3) + \Omega\kappa_{21}(1 - m_3) + \Omega\kappa_{20}(m_3 - \phi_{20})] = 0$$

or by introducing  $\alpha = \frac{C-A}{A}$ ,

$$\dot{\tilde{m}} - i\tilde{m}\Omega \frac{\alpha - \kappa_{21}}{1 + \kappa_{21}} \left( 1 + \frac{\alpha + \kappa_{21} - \kappa_{20}}{\alpha - \kappa_{21}} m_3 + \frac{\kappa_{20}}{\alpha - \kappa_{21}} \phi_{20} \right) = 0 \quad (\text{E.0.4})$$

The degree-2 zonal potential  $\phi_{20}$  is defined by

$$\phi_{20} = \frac{3GM}{d^3\Omega^2} \frac{3\sin^2\beta - 1}{2},$$

where  $\beta$  stands for the latitude of position of the perturbing celestial body of mass  $M$  and at the geocentric distance  $d$  in a terrestrial reference frame attached to the principal axes of inertia. Let's write

$$\omega_0 = \Omega \frac{\alpha - \kappa_{21}}{1 + \kappa_{21}}, h = \frac{\kappa_{20}}{\alpha - \kappa_{21}} A_{20} \text{ and } \tilde{h} = \frac{\alpha + \kappa_{21} - \kappa_{20}}{\alpha - \kappa_{21}} \frac{\kappa_{20}}{\kappa_{20} + \alpha + 1} A_{20}$$

where  $A_{20}$  is the undimensionalized amplitude of the degree-2 zonal potential at the angular frequency  $\sigma$

$$A_{20} = 3V_{20}/(\Omega a)^2,$$

with  $a$  the Earth's radius and the potential can be expressed as  $\phi_{20} = A_{20}\cos 2\sigma t$ . Then, Eq. E.0.4 can be written :

$$\dot{\tilde{m}} - i\omega_0(1 + \tilde{h}m_3 + h\cos(2\sigma t))\tilde{m} = 0$$

A solution of this first-order differential equation with parametric coefficient can be written :

$$\begin{aligned} \tilde{m}(t) &= m_0 e^{i \int \omega_0(1 + \tilde{h}m_3 + h\cos(2\sigma t)) dt} \\ &= m_0 e^{i\omega_0 t} e^{i\tilde{h}\omega_0 \int m_3(t) dt} e^{ih \frac{\omega_0}{2\sigma} \sin(2\sigma t)} \end{aligned} \quad (\text{E.0.5})$$

The second equation of the Euler-Liouville equations (Eq. E.0.2) enables to solve for  $m_3$  assuming that the variation is due to zonal tide deformation only

$$\dot{m}_3 = -\frac{c_{33}}{C},$$

then

$$m_3 = \frac{\kappa_{20}}{\kappa_{20} + \alpha + 1} \phi_{20}$$

and

$$\int m_3(t) dt = \frac{\kappa_{20}}{\kappa_{20} + \alpha + 1} \frac{A_{20}}{2\sigma} \sin 2\sigma t.$$

Since  $h$  and  $\hbar$  are expected to be very small (see section E), we can approximate the exponential around zero and ignore the term  $h\hbar$  in Eq. E.0.5, resulting in the final solution

$$\tilde{m}(t) \approx m_0 e^{i\omega_0 t} \left( 1 + i \frac{\omega_0}{2\sigma} (h + \hbar) \sin 2\sigma t \right)$$

We obtain the Chandler wobble, plus an amplitude modulation by  $2\sigma$  with amplitude  $\frac{\omega_0}{2\sigma} (h + \hbar) m_0$  where  $m_0$  is the initial amplitude of the CW.

If  $\int m_3(t) dt = 0$ , then we find the Chandler wobble plus its amplitude modulation by  $2\sigma$  with a relative amplitude  $\frac{\omega_0}{2\sigma} h$  with respect to  $m_0$ . So the presence of the coupling with the axial component  $m_3$  introduces an additional perturbation to the wobble.

**NUMERICAL APPLICATIONS** Using the potential catalogue of Hartmann & Wenzel (1995), we can compute the apparent periods resulting of the modulation of the CW frequency. They are summarized in Table E.0.1 for the tidal constituents of amplitude larger than  $10^{-9} m^2/s^2$ . Let us consider the 18.6-year zonal tide. The amplitude of this tidal constituent is about  $0.077 m^2/s^2$  so  $A_{20} \approx 1.1 \cdot 10^{-6}$ .  $\kappa_{20} = 0.001028$ ,  $\kappa_{21} = 0.001026$  and  $\alpha = 0.0032845$  (Mathews et al. (2002)). Then  $h \approx 4.9 \cdot 10^{-7}$  and  $\hbar \approx 1.6 \cdot 10^{-9}$ . The amplitude at periods  $T_1 = 2\pi/(\omega_0 - 2\sigma)$  and  $T_2 = 2\pi/(\omega_0 + 2\sigma)$  would be  $7.7 \cdot 10^{-6} m_0$ . Assuming an initial amplitude for the CW of 200 milliarcseconds (*mas*), then the two apparent peaks would have an amplitude of about 2  $\mu as$  (microarcsecond). The VLBI technique used to estimate polar motion has reached a precision at the sub milliarcsecond level (accuracy running from a hundred  $\mu as$  at long periods to a few tens of  $\mu as$  at shorter periods) and the non-rigid Earth nutation theories are at the microarcsecond level (Souchay et al. (2007)). As a consequence, this effect is too small to be detected.

**INCLUDING THE OCEAN TIDAL EFFECTS** The ocean tides affect not only the inertia tensor of the Earth through the loading but they also contribute to the angular momentum of the Earth. When considering the contribution of the deformation caused by the ocean tidal loading, the perturbation of the inertia tensor  $\tilde{c}$  becomes  $\tilde{c} = -A\kappa_{21}(\phi_{21} - \tilde{m}) + \tilde{c}^{OT}$  (Lambert & Mathews (2006)), where  $\tilde{c}^{OT}$  is the ocean tidal contribution. Mathews et al. (2002) have shown that we can include the ocean effects by writing  $\tilde{c} = -A(\kappa_{21} + \Delta\kappa)(\phi_{21} - \tilde{m})$  where  $\Delta\kappa$  is an increment to the compliance  $\kappa_{21}$  to take into account the ocean and currents effects.

TABLE E.0.1: Apparent periods and relative amplitudes of the Chandler wobble (with an initial period of 432.8 days and initial amplitude  $m_0$ ) modulated by zonal tidal constituents of period  $\pi/\sigma$ . OT means ocean tide.

Tidal Period (year)	$T_1$ (days)	$T_2$ (days)	$(h + \hbar) \frac{\omega_0}{2\sigma}$	
			without OT	with OT
18.6	406.9	462.2	$7.7 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$
9.3	383.9	495.9	$3.8 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-8}$
3.6	325.0	647.4	$2.0 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-9}$
3.0	310.2	715.5	$6.5 \cdot 10^{-10}$	$7.1 \cdot 10^{-10}$

Mathews et al. (2002) has computed the value of  $\Delta\kappa$  for both the anelasticity and a consistent equilibrium pole tide, and obtained  $\Delta\kappa = (19.481 - 1.205i) \times 10^{-5}$  at the Chandler frequency. If we simply replace  $\kappa_{21}$  by  $\kappa_{21} + \Delta\kappa$  in our equations (ignoring the imaginary part), the values obtained for the amplitudes of the modulations are slightly increased as shown in the last column of Table E.0.1.

**INCLUDING THE FLUID CORE** When considering an Earth's model with a fluid core, we have to introduce  $\tilde{m}_f = m_{1,f} + im_{2,f}$  to represent the differential wobble of the fluid core with respect to the mantle and  $m_{3,f}$  to represent the perturbation of the axial rotation rate of the fluid core relative to the mantle. The equations E.0.2 become :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{m}} - i\sigma_r \tilde{m} + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} + \frac{A_f}{A} (\dot{m}_f + i\Omega m_f) - i\sigma_r \tilde{m} m_3 \\ -i\frac{\Omega}{A} (A_f m_f m_3 - C_f m_{f,3} \tilde{m}) - i\frac{\Omega}{A} c m_3 + i\frac{\Omega}{A} c_{33} \tilde{m} = 0, \\ \dot{\tilde{m}} + \dot{m}_f - i\sigma_f m_f + i\Omega m_f + \frac{\dot{c}_f}{A_f} = 0 \end{cases}$$

Replacing the perturbations of the inertia tensors  $c$  and  $c_f$  by their expressions (Lambert & Mathews (2006))  $c = -A[\kappa_{21}(\phi_{21} - \tilde{m}) - \zeta \tilde{m}_f]$  and  $c_f = -A[\gamma(\phi_{21} - \tilde{m}) - \beta \tilde{m}_f]$  in the previous equations and regrouping the terms in  $m$ ,  $\dot{m}$ ,  $m_f$  and  $\dot{m}_f$ , we obtain the system :

$$\begin{cases} (1 + \kappa_{21})\dot{m} + (\zeta + \frac{A_f}{A})\dot{m}_f & = (\sigma_r(1 + m_3) + \Omega\kappa_{20}(\phi_{20} - m_3 + \Omega\frac{C_f}{A}m_3)im \\ & - \Omega\frac{A_f}{A}im_f(1 - m_3) + \kappa_{21}\dot{\phi}_{21} \\ (1 + \frac{A}{A_f}\gamma)\dot{m} + (1 + \frac{A}{A_f}\beta)\dot{m}_f & = -(\Omega - \sigma_f)im_f + \frac{A}{A_f}\gamma\dot{\phi}_{21} \end{cases},$$

We solve this coupled first-order differential system by numerical integration. An example with initial amplitude  $m_0 = 0.1(1 + i)$  was integrated over 50 years is given in Fig. E.0.1. The modulus of the total perturbation  $m$  is plotted as well as the effect due to the inclusion of the zonal deformation  $\phi_{20}$  alone. The largest peak corresponds to the Chandler Wobble, and the much smaller dual peaks are the tidal modulations by the zonal tides. We can see that the relative amplitude is less than  $10^{-5}$ , similarly as for the analytical cases without a fluid core (cf Table E.0.1).

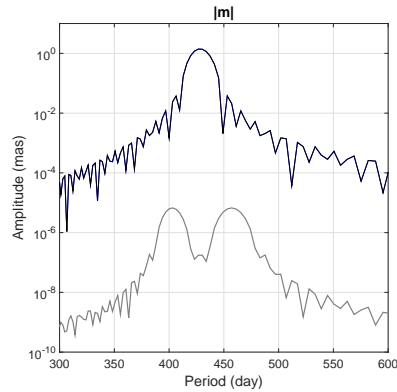


FIGURE E.0.1: Amplitude of the Earth’s wobble for an Earth model with a fluid core including the tidal modulation effect (in black). In gray, we have plotted only the effect due to the tidal modulation by all the major zonal tides.

#### DISCUSSION AND CONCLUSION

We have investigated the effect of the zonal deformation on the rotational Chandler mode for a simple Earth model. We have shown that the action of the tesseral potential on the zonal deformation induces an apparent amplitude modulation of the Chandler wobble with amplitudes  $10^{-5}$  times the initial amplitude of the Chandler wobble. The inclusion of the ocean tide effects only slightly increases this effect and the inclusion of the fluid core does not significantly increase the amplitudes. As a conclusion we can say that this effect exists but is quite too small to be observed and it does not explain the multiple peaks observed at the Chandler frequency in the spectrum of the polar motion data.

## ANNEXE F

# QUELQUES DATES CLÉS SUR L'HISTOIRE DE LA GÉODÉSIE DYNAMIQUE : ROTATION, FIGURE DE LA TERRE

- 
- 1543 ...• Copernic : la Terre est en rotation sur elle-même et en révolution autour du Soleil.
  - 1609 ...• Kepler : 2 premières lois.
  - 1619 ...• Kepler : troisième loi.
  - 1632-1638 ...• Galilée : chute des corps, principe d'inertie.
  - 1644 ...• Descartes : 1<sup>ère</sup> description de l'intérieur de la Terre.
  - 1659 ...• Huygens : expression force centrifuge + 1<sup>ère</sup> valeur précise de la pesanteur (pendule :  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ).
  - 1665-1666 ...• Newton : concept de force, attraction planétaire en  $1/r^2$ .
  - 1666 ...• Cassini : aplatissement de Jupiter.
  - 1687 ...• Newton : Gravitation universelle (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*).
  - 1743 ...• Clairaut : Théorie de la figure de la Terre.
  - 1748 ...• Bradley : découverte de la nutation de l'axe de rotation de la Terre.
  - 1749 ...• D'Alembert : théorie de la précession-nutation pour un corps rigide.
  - 1749 ...• Euler : précession, modèle de Terre rigide à 2 couches.
  - 1749 ...• Bouguer : figure de la Terre.
  - 1758 ...• Euler : mouvement libre du pôle de 304 jours (Euler, 1765).
  - 1825 ...• Laplace : aplatissement terrestre de 1/308 par mesures géodésiques et de 1/310 avec un pendule.
  - 1876-1882 ...• Kelvin : rôle d'une partie fluide interne sur précession et nutations - diminution période eulérienne.
  - 1885 ...• Radau, Poincaré : valeurs théoriques de l'aplatissement terrestre en équilibre hydrostatique.
  - 1888 ...• Küstner : variation périodique des latitudes de 427 jours.
  - 1891 ...• Chandler : évocation du rôle de l'élasticité pour le mode d'Euler - terme de Chandler à la période de 432 jours.

- 1892 .. ● Newcomb : rôle de l'élasticité pour le mode d'Euler + présence noyau liquide et océans.
  - 1892 .. ● Rebeur-Paschwitz : déformations élastiques de la Terre sous l'influence des marées à l'aide de pendules horizontaux.
  - 1895 .. ● Hough, Sloudsky : Elasticité et noyau fluide - diminution période de Chandler - existence de la nutation libre du noyau.
  - 1910 .. ● Poincaré : Elasticité et noyau fluide - modèle complet, rotation du noyau, précession corps fluide.
  - 1914 .. ● Schweydar : 1<sup>ères</sup> mesures des déformations élastiques de la Terre sous l'influence des marées à l'aide d'un gravimètre relatif (Schweydar, 1917).
  - 1915-1916 .. ● Larmor, Jeffreys : influence des océans sur la période de Chandler.
  - 1926-1927 .. ● Allongement séculaire de la vitesse de rotation (friction de marées), variations décennales (couplage noyau-manteau).
  - 1937 .. ● variations saisonnières de la vitesse de rotation (marées+atmosphère+océans).
  - 1940- ? .. ● variations mensuelles et semi-mensuelles (marées luni-solaires) de la vitesse de rotation.
  - 1949 .. ● Jeffreys : effets dynamiques d'un noyau fluide - existence d'une résonance dans les marées diurnes.
  - 1950- .. ● Dérive séculaire du mouvement du pôle.
  - 1957 .. ● Jeffreys et Vicente : présence noyau fluide implique  $\delta(K_1) < \delta(O_1)$  - premières amplitudes théoriques de la réponse de la Terre aux marées diurnes.
  - 1959 .. ● Lecolazet : première observation de l'effet de résonance du noyau fluide ( $\delta(K_1) < \delta(O_1)$ ).
  - 1960- .. ● Terme de Markowitz (30 ans) du mouvement du pôle.
  - 1960- .. ● Termes inter-annuels (de 500 jours à 10 ans) du mouvement du pôle (excitation hydro-atmosphérique).
  - 1961 .. ● Molodensky : théorie générale nutations et marées diurnes pour un modèle de Terre non-homogène constitué d'un noyau fluide - amplitudes théoriques de la réponse de la Terre aux marées diurnes.
  - 1970-1980 .. ● Ecart nutation observée par VLBI et nutation rigide.
  - 1985 .. ● Fluctuations rapides (< 100 jours) du mouvement du pôle (excitation hydro-atmosphérique).
  - 1990 .. ● Termes diurnes et semi-diurnes du mouvement du pôle (marées océaniques).
  - 1994 .. ● Variations diurnes et semi-diurnes de la vitesse de rotation (marées océaniques).
-

# ANNEXE G

## ACTIVITÉS D'ENCADREMENT

### ENCADREMENT DE THÈSES DE DOCTORAT

- 2013 - 2016 : Yann Ziegler (co-encadrement à 30%) - « Modélisation de la rotation de la Terre et analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie », sous la direction de Y. Rogister et J. Hinderer ; soutenue le 21 juin 2016 ;
- 2009 - 2015 : Marta Calvo Garcia-Maroto (co-encadrement à 50%) - « Analysis of long-term gravity records in Europe; consequences for the retrieval of small amplitude and low frequency signals including the Earth's core resonance effects » ; thèse en co-tutelle Universidad complutense de Madrid et Université de Strasbourg, sous la direction de J. Hinderer (IPGS-EOST) et J. Arnos Sampedro (Instituto de Geociencias - CSIC-UCM, Madrid) ; soutenue le 24 avril 2015 ;
- 2011 - 2014 : Basile Hector (co-encadrement à 10%) - « Caractérisation hydrogéophysique multi-échelles et dynamique des stocks d'eau souterrains d'un bassin versant en zone soudanienne de socle : apport de la gravimétrie », sous la direction de J. Hinderer et Luc Seguis (HydroSciences Montpellier-IRD) ; soutenue le 8 juillet 2014 ;
- 2011 : Xiaoming Cui (State Key Laboratory of Geodesy and Earth's Dynamics, Institute of Geodesy and Geophysics, Wuhan, China) durant son séjour d'un an à l'IPGS - « Analysis of the Free Core Nutation » ;

### ENCADREMENT DE STAGE DE MASTER 2

- 2015/2016 : Josipa Majstorovic (stage de 6 mois financé par l'IdEx mobilité entrante de l'Université de Strasbourg et programme de mobilité ERASMUS+ avec l'Université de Zagreb) - « Analysis of seismic free oscillations of the Earth » ;

### ENCADREMENT DE PROJETS DE RECHERCHE (2ÈME ANNÉE D'ÉCOLE D'INGÉNIEUR EOST OU MASTER 1)

- 2009/2010 : Angélique Geneteix « Analyse en ondelette de modes de résonance de la magnétosphère » (co-encadrement à 33%) ;
- 2010/2011 : Yann Ziegler « Étude de la résonance paramétrique dans la nutation de la Terre » (co-encadrement à 33%) ;

- 2011/2012 : Hugo Larnier « Analyse en ondelettes des modes de résonance de la magnétosphère » (co-encadrement à 33%);
- 2013 : Pascal Marck « Analyse spectrale des modes propres sismiques à partir de données gravimétriques et sismométriques du séisme du 11 Mars 2011 de Tohoku » ;
- 2014/2015 : Arthur Nardy « Analyse d'une très longue série (1994-2013) de mesures de hauteur d'eau au fond d'un puits d'observation à grande profondeur sur le site géothermique de Soultz-sous-Forêts » (co-encadrement à 50%);
- 2014/2015 : Benjamin Escot « Analyse du signal provenant d'un enregistrement continu d'un an d'un gravimètre fond de mer situé en Mer du Nord (300 m de profondeur) » (co-encadrement à 50%);
- 2014/2015 : Haifa Tebib « Etude du mouvement du pôle de rotation de la Terre » ;
- 2014/2015 : Simon Lemonnier « Calcul des effets sur Terre de l'impact d'une météorite (effets sismiques et en rotation) ».



# ANNEXE H

## PARTICIPATION À DES PROJETS FINANÇÉS

- 2011 (1 an) « Modélisation et recherche observationnelle des oscillations libres de rotation de la graine », Action Spécifique GRAM (Gravitation, Références, Astronomie, Métrologie) de l'INSU-CNRS  
Rôle : Participation à 50%
- 2011 (8 ans) RESIF-CORE (Réseau sismologique et géodésique français : l'équipement fondamental), Equipements d'EXcellence - Investissements d'avenir de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR)  
Rôle : Participation à 10%
- 2011 (8 ans) MIGA (Antenne gravitationnelle basée sur l'interférométrie atomique), Equipements d'EXcellence - Investissements d'avenir de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR)  
Rôle : Participation à 15%
- 2012 (1 an) « Etude de la multiplicité du mouvement chandlérien à partir des données de rotation et de gravité », Programme National de Planétologie [PNP] de l'INSU-CNRS  
Rôle : Participation à 50%
- 2013 - 2014 « Influence of thermo-chemical structure in lower mantle on rotational modes of core and translational modes of inner core », Programme EGIDE/ORCHID France - Taïwan  
Rôle : Participation à 40%
- 2014 (1 an) « Analyse détaillée des nutations et des marées terrestres », Appel d'offre multi-équipe du Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale  
Rôle : Porteur
- 2014 (1 an) « Apport de la gravimétrie terrestre à la détermination du mouvement du géocentre », Programme National de Planétologie [PNP] de l'INSU-CNRS  
Rôle : Participation à 20%
- 2015 - 2016 « Determination of frequency-dependent Love numbers from cross-correlation of satellite and gravimetric data on co-located SG-GNSS sites », Projet international financé par le centre scientifique national de la Pologne  
Rôle : co-investigateur

- 2015 (1 an) « Inversion des paramètres géophysiques à partir de la gravimétrie et des nutations », Programme National de Planétologie [PNP] de l'INSU-CNRS  
Rôle : Porteur
- 2016 (1 an) « Sonder l'intérieur de la Terre par VLBI et gravimétrie », Action Spécifique GRAM (Gravitation, Références, Astronomie, Métrologie) de l'INSU-CNRS  
Rôle : Participation à 30%
- 2016 (1 an) « Interactions Terre et ondes gravitationnelles : limites de détectabilité », Action Spécifique GRAM (Gravitation, Références, Astronomie, Métrologie) de l'INSU-CNRS  
Rôle : Porteur

---

# BIBLIOGRAPHIE

- Abbott, B. P. et al. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Phys. Rev. Lett.*, 116, 061102.
- Agnew, D. (2007). Earth Tides. In : Gerald Schubert (editor-in-chief) *Treatise on Geophysics*, Vol 3. Oxford : Elsevier, p. 163-195.
- Alboussière, T. & R. Deguen (2012). Asymmetric dynamics of the inner core and impact on the outer core, *J. Geodyn.*, 61, 172-182.
- Alexandrov, D. V. and A.P. Malygin (2011). Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 189, 134-141.
- Alfé, D., G. D. Price, and M. J. Gillan (2002). Ab initio chemical potentials of solid and liquid alloys and the chemistry of the Earth's core, *J. Chem. Phys.*, 116, 7127-7136.
- Alfé, D., Gillan, M. J. & G. D. Price (2003). Thermodynamics from first principles : temperature and composition of the Earth's core, *Mineralogical Magazine*, 67(1), 113-123.
- Allman, G.J (1853). On the Attraction of Ellipsoids, with a New Demonstration of Clairaut's Theorem, Being an Account of the Late Professor Mac Cullagh's Lectures on Those Subjects, *Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. 22, 379-395.
- Amaro-Seoane, P. et al. (2012). Low-frequency gravitational-wave science with eLISA/NGO, *Class. Quantum Grav.*, 29, 124016.
- Amoruso, A., Botta, V. and L. Crescentini (2012). Free Core Resonance parameters from strain data : sensitivity analysis and results from the Gran Sasso (Italy) extensometers, *Geophys. J. Int.*, 189, 923-936.
- Ardhuin, F., L. Gualtieri, and E. Stutzmann (2015). How ocean waves rock the Earth : Two mechanisms explain microseisms with periods 3 to 300 s, *Geophys. Res. Lett.*, 42, 765-772.
- Ben-Menahem, A. (1983). Excitation of the Earth's eigenvibrations by gravitational radiation from astrophysical sources, *Il Nuovo Cimento*, C6, 49-71.
- Bergman, M. I. (2003). Solidification of the Earth's Core, in *Earth's Core : Dynamics, Structure, Rotation* (eds V. Dehant, K. C. Creager, S.-I. Karato and S. Zatman), American Geophysical Union, Washington, D. C., doi : 10.1029/GD031p0105

- Bessel, F. W. (1844). Letter to A. v. Humboldt. In : Felber, H.-J. (ed.), *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Friedrich Wilhelm Bessel*. Akademie-Verlag, Berlin 1994 (Beiträge zur Alexander-von-Humboldt-Forschung, 10).
- Birch, A. F. (1940). The alpha-gamma transformation of iron at high pressures, and the problem of the Earth's magnetism, *Am. J. Sci.*, 238, 192-211.
- Bizouard, C. (2014). *Le mouvement du pôle de l'heure au siècle : Modélisation géophysique*, Eds. Presses Académiques Francophones, 284 pages.
- Bizouard, C., Remus, F., Lambert, S.B., Seoane, L. & D. Gambis (2011). The Earth's variable Chandler wobble, *Astron. Astr.*, 526, A106.
- Blum, P. A., Hatzfeld, D. & Wittlinger, G. (1973). Résultats expérimentaux sur la fréquence de résonance due à l'effet dynamique du noyau liquide, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 277, Ser. B, 241-244.
- Bouguer, P. (1749). *La Figure de la Terre*, Paris, Charles-Antoine Jombert.
- Brosche, P. (2000). Küstner's Observations of 1884-85 : the Turning Point in the Empirical Establishment of Polar Motion, *Polar Motion : Historical and Scientific Problems*, ASP Conference Series, 208, 101-108.
- Brzeziński A. & Capitaine N. (1993). The use of the precise observations of the Celestial Ephemeris Pole in the analysis of geophysical excitation of Earth Rotation, *J. Geophys. Res.*, 98 (B4), 6667-6675.
- Buffett, B. (1992). Constraints on magnetic energy and mantle conductivity from the forced nutations of the Earth, *J. Geophys. Res.*, 97 (B13), 19581-19597.
- Buffett, B. A., Mathews, P. M. & Herring, T. A. (2002). Modeling of nutation and precession : Effects of electromagnetic coupling, *J. Geophys. Res.*, 107, B4, 2070.
- Calvo, M., Hinderer, J., Rosat, S., Legros, H., Boy, J.-P., Ducarme, B., Zürn, W. (2014). Time stability of spring and superconducting gravimeters through the analysis of very long gravity records, *J. Geodyn.*, 80, 20-33.
- Calvo García-Maroto, M. (2015). *Analysis of long-term gravity records in Europe ; consequences for the retrieval of small amplitude and low frequency signals including the Earth's core resonance effects*, Thèse de doctorat, Univ. Complutense de Madrid et Univ. de Strasbourg, 275 p.
- Capitaine, N. (2002). Comparison of "Old" and "New" Concepts : The Celestial Intermediate Pole and Earth Orientation Parameters, *IERS Technical Note*, 29, 35-44.
- Carrère, C. & F. Lyard (2003). Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing - comparisons with observations, *Geophys. Res. Lett.*, 30(6), 1275.

- Cavendish, H. (1798). Experiments to determine the density of Earth, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 88,469-479.
- Chandler, S. C. (1891). On the variation of Latitude II, *Astron. J.*, 11(249), 65-70.
- Clairaut, A.C. (1743). *Théorie de la Figure de la Terre, Tirée de l'Hydrostatique*. Chez David Fils, Paris ; deuxième édition parue en 1808 chez Courcier, Paris.
- Coughlin, M. & J. Harms (2014). Constraining the gravitational wave energy density of the Universe using Earth's ring, *Phys. Rev. D*, 90, 042005-1.
- Coyette, A., Van Hoolst, T. & Dehant, V. (2012). Period of the Slichter mode of Mercury and its possible observation, *A&A*, 543, A40.
- Coyette, A. & Van Hoolst, T. (2014). Slichter modes of large icy satellites, *Icarus*, 231, 287-299.
- Crossley, D.J. (1992). Eigensolutions and seismic excitation of the Slichter mode triplet for a fully rotating Earth model, *EOS*, 73, 60.
- Crossley, D., Hinderer, J., Casula, G., Francis, O., Hsu, H.-T., Imanishi, Y., Meurers, B., Neumeyer, J., Richter, B., Shibuya, K., Sato, T., van Dam, T. (1999). Network of superconducting gravimeters benefits a number of disciplines. *Eos Trans. AGU80* (11), 121-126.
- Cui, X., Sun, H., Rosat, S., Xu, J., Zhou, J., Ducarme, B. (2014). Investigation of the time variability of diurnal tides and resonant FCN period, *J. Geodyn.*, 79, 30-38.
- D'Alembert, Jean Le Rond, *Précession & Nutation (1749-1752)*, *Oeuvres Complètes*, Vol. I.7, Dir. Michelle Chapront-Touzé & Jean Souchay, CNRS Editions.
- Dahlen, F.A. & Smith, M.L. (1975). The influence of rotation on the free oscillations of the Earth, *Phil. Trans. R. Soc. Lon. A*, 279, 583-624.
- Dahlen, F. A., Sailor, R. V. (1979). Rotational and elliptical splitting of the free oscillation of the Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 58, 609-623.
- Dahlen, F.A. & Tromp, J. (1998). *Theoretical Global Seismology*, Princeton : Princeton Univ. Press., Princeton, NJ, 1025 pp.
- Defraigne, P., Dehant, V., Hinderer, J. (1994). Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble, *J. Geophys. Res.*, 99 (B5), 9203-9213.
- Defraigne, P., Dehant, V., Hinderer, J. (1995). Correction to 'Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble', *J. Geophys. Res.*, 100 (B2), 2041-2042.
- Deguen, R., Alboussière, T. and D. Brito (2007). On the existence and structure of a mush at the inner core boundary of the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 164, 36-49.

- Deguen, R. (2012). Structure and dynamics of Earth's inner core, *Earth and Planet. Sc. Lett.*, 333-334, 211-225.
- Dehant, V., Hinderer, J., Legros, H., Lefftz, M. (1993). Analytical approach to the computation of the earth, the outer core and the inner core rotational motions. *Phys. Earth Planet. Int.*, 76, 259-282.
- Dehant, V., & Capitaine, N. (1997). On the precession constant : values and constraints on the dynamical ellipticity ; link with Oppolzer terms and tilt-over mode, *Celestial Mechanics and Dyn. Astron.*, 65, 439-458.
- Dehant, V., Feissel, M., Defraigne, P., Roosbeek, F., Souchay, J. (1997). Could the energy near the FCN and the FICN be explained by luni-solar or atmospheric forcing ? *Geophys. J. Int.*, 130, 535-546.
- Dehant, V., Defraigne, P. & Wahr J.M. (1999). Tides for a convective Earth, *J. Geophys. Res.*, 104, B1, 1035-1058.
- Deuss, A., Ritsema, J. Heijst, H. (2011). Splitting function measurements for Earth's longest period normal modes using recent large earthquakes, *Geophys. Res. Lett.*, 38, L04303.
- de Vries D. & Wahr J. M. (1991). The effects of the solid inner core and nonhydrostatic structure on the Earth's forced nutations and Earth tides, *J. Geophys. Res.*, B96, 8275-8293.
- Ding, H. & Chao, B. F. (2015). The Slichter mode of the Earth : Revisit with optimal stacking and autoregressive methods on full superconducting gravimeter data set, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 120, 7261-7272.
- Ding, H. and Shen, W.-B. (2013). Search for the Slichter modes based on a new method : Optimal sequence estimation, *J. Geophys. Res : Solid Earth*, 118, 1-12.
- Ducarme, B., Venedikov, A.P., Arnos, J., Chen, X.D., Sun, H. & Vieira, R. (2006). Global analysis of the GGP superconducting gravimeters network for the estimation of the pole tide gravimetric amplitude factor, *J. Geodyn.*, 41(1-3), 334-344.
- Ducarme, B., Sun, H.-P., Xu, J.-Q. (2007). Determination of the free core nutation period from tidal gravity observations of the GGP superconducting gravimeter network, *J. Geod.*, 81, 179-187.
- Dumberry, M. (2009). Influence of elastic deformations on the inner core wobble, *Geophys. J. Int.*, 178, 57-64.
- Dumberry, M., Bloxham, J. (2002). Inner core tilt and polar motion, *Geophys. J. Int.*, 151, 377-392.
- Dziewonski, A.M. and Anderson, D.L. (1981). Preliminary reference Earth model (PREM), *Phys. Earth Planet. Int.*, 25, 297-356.

- Dziewonski, A. M. & F. Gilbert (1971). Solidity of the inner core of the Earth inferred from normal mode observations, *Nature*, 234, 465-466.
- Eckart, C. (1960). *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*, Pergamon, New York, 52-63.
- Euler, L. (1749). Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre, *Histoire de l'Académie de Berlin*, année 1749, p.239-325.
- Euler, L. (1765). Du Mouvement de Rotation des Corps Solides autour d'un Axe Variable. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 14, 154-193.
- Fearn, D., Loper, D., Roberts, P. (1981). Structure of the Earth's inner core, *Nature*, 292, 232-233.
- Flemings, M.C. (1974). *Solidification Processing*, McGraw-Hill, New-York.
- Folgueira, M., Dehant, V., Lambert, S.B., and N. Rambaux (2007). Impact of tidal Poisson terms on nonrigid Earth rotation, *Astron. Astrophys.*, 469, 1197-1202.
- Forte, A.M., Mitrovica, J.X., Woodward, R.L. (1995). Seismic-geodynamic determination of the origin of excess ellipticity of the core-mantle boundary, *Geophys. Res. Lett.*, 22, 1013-1016.
- Fukumori, I., R. Raghunath, and L.-L. Fu, Nature of global large-scale sea level variability in relation to atmospheric forcing : A modeling study, *J. Geophys. Res.*, 103, 5493-5512.
- Gattano, C., Lambert, S., & Bizouard, C. (2015). Comparison of VLBI nutation series, to be published in Proc. 22th European VLBI Group for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting.
- Gégout P., Hinderer J., Legros, H., Greff, M. and Dehant V. (1998). Influence of atmospheric pressure on the FCN, precession and some forced nutational motions of the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 106, 337-351.
- Geiger, R., L. Amand, A. Bertoldi, B. Canuel, W. Chaibi, C. Danquigny, I. Dutta, B. Fang, S. Gaffet, J. Gillot, D. Holleville, A. Landragin, M. Merzougui, I. Riou, D. Savoie & P. Bouyer (2015). Matter-wave laser Interferometric Gravitation Antenna (MIGA) : New perspectives for fundamental physics and geosciences, E3S Web of Conferences, Volume 4, 01004 (2014) i-DUST 2014 - Inter-Disciplinary Underground Science & Technology.
- Gibney, E. (2015). Leap-second decision delayed, *Nature*, 527, 421-422.
- Gibert, D., Holschneider, M., and J.-L. Le Mouél (1998). Wavelet analysis of the Chandler wobble, *J. Geophys. Res.*, 103, No. B11, pp. 27,069-27,089.
- Gillet, N., Jault, D., Finlay, C. C. & N. Olsen (2013). Stochastic modeling of the Earth's magnetic field : Inversion for covariances over the observatory era, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 14, 4, 766-786.

- Glicksman, M.E. (2011). Principles of Solidification, doi :10.1007/978-1-4419-7344-3\_13, Springer Science+Business Media, LLC 2011.
- Goodkind J. M. (1999). The superconducting gravimeter, Rev. Sci. Instrum. 70 (11), 4131-4152.
- Greene, B. (1999). L'univers élégant, Eds. W. W. Norton & Company.
- Greff-Lefftz, M., Legros, H. (1999). Magnetic field and rotational eigenfrequencies, Phys. Earth Planet. Int., 112, 21-41.
- Greff-Lefftz M., Legros H., Dehant V. (2000). Influence of the inner core viscosity on the rotational eigenmodes of the Earth, Phys. Earth Planet. Int., 122, 187-204.
- Greff-Lefftz M., Dehant V., Legros H. (2002). Effects of inner core viscosity on gravity changes and spatial nutations induced by luni-solar tides, Phys. Earth Planet. Int., 129, 31-41.
- Greff-Lefftz, M. & Legros, H. (2007). Fluid core dynamics and degree-one deformations : Slichter mode and geocentre motions, Phys. Earth Planet. Int., 161, 150-160.
- Grinfeld, P., & Wisdom, J. (2005). Motion of the mantle in the translational modes of the Earth and Mercury, Phys. Earth Planet. Int., 151, 77-87.
- Grinfeld, P., & Wisdom, J. (2010). The effect of phase transformations at the inner core boundary on the Slichter modes, Phys. Earth Planet. Int., 178, 3-4, 183-188.
- Gross R. S. (2007). Earth rotation variations - long period, in Physical Geodesy, edited by T. A. Herring, in press, Treatise on Geophysics vol. 11, Elsevier, Amsterdam.
- Gubbins, D., Masters, T.G. and Jacobs., J.A. (1979). Thermal evolution of the Earth's core, Geophys. J. R. Astron. Soc., 59, 57-99.
- Gubbins, D., Masters, G., Nimmo, F. (2008). A thermochemical boundary layer at the base of Earth's outer core and independent estimate of core heat flux, Geophys. J. Int., 174, 1007-1018.
- Gubbins, D., Alfé, D. & C. J. Davies (2013). Compositional instability of Earth's solid inner core, Geophys. Res. Lett., 40, 1084-1088.
- Guo, J.Y., Greiner-Mai, H., Ballani, L., Jochmann, H., Shum, C.K. (2005). On the double-peak spectrum of the Chandler wobble, J. Geod., 78, 654-659.
- Gutenberg, B. (1913). Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen, Phys. Zeitschr. 14, 1217-1218.
- Häfner, R., Widmer-Schmidrig, R. (2013). Signature of 3D density structure in superconducting gravimeter spectra of the 0S2 multiplet, Geophys. J. Int., 192, 285-294.
- Hall C. W. (2000). Laws and models : science, engineering, and technology, pp. 444.



- Hartmann, T. & Wenzel, H.-G. (1995). The HW95 tidal potential, *Geophys. Res. Let.*, Vol. 22, No. 24, 3553-3556.
- Herring, T. A., Buffett, B. A., Mathews, P. M. & Shapiro, I. I. (1991). Forced Nutations of the Earth : Influence of Inner Core Dynamics, 3. Very Long Interferometry Analysis, *J. Geophys. Res.*, 91, 4755-4765.
- Herring T.A. (1995). A priori model for the reduction of the nutation observations, in : *Proc. XXIIInd GA of IAU 1994, The Hague, The Netherlands*, ed. I. Appenzeller, Kluwer Academic Publ., *Highlights of Astronomy*, Vol. 10, 222-227.
- Hinderer, J., Boy, J.P., Gegout, P., Defraigne, P., Roosbeek, F. & V. Dehant (2000). Are the free core nutation parameters variable in time ?, *Phys. Earth Planet. Int.*, 117, 37-49.
- Hinderer J., Crossley D. and Warburton R.J (2007). Superconducting Gravimetry. In : Gerald Schubert (editor-in-chief) *Treatise on Geophysics*, 2nd edition, Vol 3. Oxford : Elsevier ; 2015. p. 59-115.
- Hough, S. S. (1895). The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell Containing Fluid, *Phil. Trans. A*, 186, 469-506.
- Hsieh, P., Bredehoeft, J., & Farr, J. (1987). Determination of aquifer transmissivity from earth tide analysis, *Water Resources Res.*, 23 (10), 1824-1832.
- Hulot, G., Le Mouel, J.L., Jault, D. (1990). The flow at the core-mantle boundary : symmetry properties, *J. Geomag. Geoelectr.*, 42, 857-874.
- IERS Conventions (2010). In : Petit G, Luzum B (eds) (IERS Technical 308 Note 36). Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, p 179.
- Ives, H. E. (1952). Derivation of the Mass-Energy Relation, *J. Opt. Soc. Am.*, 42 (8), 540-543.
- Jacobs, J. A. (1953). The Earth's Inner Core, *Nature*, 172, 297-298.
- Jeffreys, H. (1926). The Rigidity of the Earth's Central Core, *Monthly Notices Royal Astr. Soc. Geophys. Suppl.*, 1, 371-383.
- Jeffreys, H. (1959). *The Earth, its Origin, History and Physical Constitution*, 4ème edn. Cambridge, Cambridge Univ. Press.
- Jeffreys H. (1949). Dynamic effects of a liquid core. *Monthly Notices Royal Astr. Soc.*, Vol. 109, No. 6, p.670.
- Jeffreys, H. & Vicente R.O. (1957). The theory of Nutation and the Variation of Latitude. The roche model core. *Monthly Notices Royal Astr. Soc.*, Vol. 117, p.162-173.
- Jensen O.G. (1979). Seismic Detection of Gravitational Radiation, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 17 (8), 2057.

- Koot, L., Rivoldini, A., de Viron, O., Dehant, V. (2008). Estimation of Earth interior parameters from a Bayesian inversion of very long baseline interferometry nutation time series, *J. Geophys. Res.*, 113, B08414, doi :10.1029/2007JB005409.
- Koot, L., Dumberry, M., Rivoldini, A., de Viron, O., Dehant, V. (2010). Constraints on the coupling at the core-mantle and inner core boundaries inferred from nutation observations, *Geophys. J. Int.*, 182, 1279-1294.
- Koot, L. & Dumberry, M. (2013). The role of the magnetic field morphology on the electromagnetic coupling for nutations, *Geophys. J. Int.*, 195, 200-210.
- Koper, K.D. & Dombrovskaya, M. (2005). Seismic properties of the inner core boundary from PKiKP/PcP amplitude ratios, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 237, 680-694.
- Koyama, T., Shimizu, H. & H. Utada (2002). Possible effects of lateral heterogeneity in the D'' layer on electromagnetic variations of core origin, *Phys. Earth Planet. Int.*, 129, 99-116.
- Kümpel, H.-J. (1997). Tides in water saturated rock, in : *Tidal Phenomena, Lecture Notes in Earth Sciences*, ed. H. Wilhem, W. Zürn, and H.-G. Wenzel, Springer Berlin Heidelberg, vol. 66, 277-291.
- Kuo, J. T. (1969). Areal strain of solid Earth tides observed in Ogdensburg, New Jersey, *J. Geophys. Res.*, 74, 6, 1635-1644.
- Küstner, F. (1888). *Neue Methode zur Bestimmung der Aberrations-Constante nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe*, Berlin, Schade.
- Lagrange, J. L. (1788). *Mécanique Analytique*, Paris.
- Lambert, S. (2003). *Analyse et modélisation de haute précision pour l'orientation de la Terre*, thèse de doctorat de l'Observatoire de Paris.
- Lambert, S. (2006). Atmospheric excitation of the Earth's free core nutation, *Astron. Astrophys.*, 457, 717.
- Lambert, S. (2014). Comparison of VLBI radio source catalogs, *Astron. Astrophys.*, 570, 108.
- Lambert, S. B., & Capitaine, N. (2004). Effects of zonal deformations and the Earth's rotation rate variations on precession-nutation, *Astron. Astrophys.*, 428, 255-260.
- Lambert, S.B. and Dehant, V. (2007). The Earth's core parameters as seen by the VLBI, *Astron. Astrophys.*, 469, 777-781.
- Lambert, S. B. & Mathews, P. M. (2006). Second-order torque on the tidal redistribution and the Earth's rotation, *A&A*, 453, 363-369.
- Larmor, J. (1909). The relation of the Earth's precessional nutation to its resistance against tidal deformation, *Proc. Royal Soc., London*, 82, 89-96.

- Le Mouél, J. L., Narteau, C., Greff-Lefftz, M. & M. Holschneider (2006). Dissipation at the core-mantle boundary on a small-scale topography, *J. Geophys. Res.*, 111, B04413.
- Lecolazet, R., Steinmetz L. (1974). Sur les ondes diurnes de la marée gravimétrique observée à Strasbourg, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 278, p. 295-297.
- Legros, H. (1987). Sur quelques problèmes de dynamique planétaire, Thèse d'Etat, Université de Strasbourg, 229 pp.
- Legros, H., Hinderer, J., Lefftz, M., Dehant, V. (1993). The influence of the solid inner core on gravity changes and spatial nutations induced by luni-solar tides and surface loading, *Phys. Earth Planet. Int.*, 76, 283-315.
- Lehmann, I. (1936). « P », Publications du Bureau Central Séismologique International, A14 (3), 87-115.
- Levallois, J. J. (1970). Géodésie générale (Tome 3 : le champ de la pesanteur). Éd. Eyrolles, Paris, 1970.
- Liouville, J. (1858). Développements sur un chapitre de la Mécanique de Poisson (1858), *J. Mathématiques Pures et Appliquées*, Deuxième série, Tome 3, 1-25.
- Loper, D.E. (1978). Some thermal consequences of a gravitationally powered dynamo, *J. Geophys. Res.*, 83, 5961-5970.
- Loper, D. E. and P. H. Roberts (1981). A study of conditions at the inner core boundary of the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 24, 302-307.
- Love, A. E. H. (1909). The yielding of the Earth to disturbing forces, *Proc. Royal Soc.*, London, 82, 73-88.
- McCarthy D. (1996). IERS Conventions, IERS Tech. Note, 21.
- Majstorovic, J. (2016). Autoregressive determination of the complex frequencies of the Earth's normal modes, diplôme de Master 2.
- Masters, G. & Gubbins, D. (2003). On the resolution of the density within the Earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, 159-167.
- Mathers, E. L. & P. L. Woodworth (2004). A study of departures from the inverse-barometer response of sea level to air-pressure forcing at a period of 5 days, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 130, 725-738.
- Mathews, P. M., Buffett, B. A., Herring, T. A., and I. I., Shapiro (1991a). Forced Nutations of the Earth : Influence of Inner Core Dynamics 1. Theory, *J. Geophys. Res.*, 96, B5, 8219-8242.
- Mathews, P. M., Buffett, B. A., Herring, T. A. and Shapiro, I. I. (1991b). Forced nutations of the Earth : Influence of inner core dynamics : 2. Numerical results and comparisons, *J. Geophys. Res.*, 96, 8243-8257.

- Mathews, P. M. (2001). Love numbers and gravimetric factor for diurnal tides, Proc. 14th Int. Symp. Earth Tides. J. Geod. Soc. Jpn., 47(1), 231-236.
- Mathews, P.M., Buffet, B.A. and I.I. Shapiro (1995). Love numbers for diurnal tides : Relation to wobble admittances and resonance expansions, J. Geophys. Res., 100 (B7), 9935-9948.
- Mathews, P. M., Herring, T. A., & Buffet, B. A. (2002). Modeling of nutation and precession : New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior, J. Geophys. Res., 107(B4), 10.1029/2001JB000390.
- Melchior, P. (2000). Theories of Polar Motion from Tisserand to Poincaré (1890-1910), Polar Motion : Historical and Scientific Problems, ASP Conference Series, 208, 41-66.
- Misner C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. (1973). Gravitation, W. H. Freeman and Company, 1279 p.
- Molodensky, M.S. (1961). The theory of nutations and diurnal Earth tides. IVe Symp. Int. sur les Marées Terrestres, Comm Obs. Roy. Belgique, 188 (Geoph., 58), 25-56.
- Moore, C. J., R. H. Cole, C. P. L. Berry (2015). Gravitational-wave sensitivity curves, Class. Quantum Grav., 32 (1), 015014.
- Moritz, H. (1990). The Figure of the Earth : Theoretical Geodesy and the Earth's Interior, Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1990.
- Munk, W. H. & MacDonald, G.J.F. (1960). The rotation of the Earth : A geophysical discussion, Cambridge : Cambridge University Press.
- Neuberg, J. & Zürn, W. (1986). Investigation of the nearly diurnal resonance using gravity, tilt and strain data simultaneously, in Proc. 10th Int. Symp. Earth Tides, pp. 305-311, ed. Vieira, R., Cons. Sup. Inv. Cient., Madrid.
- Newcomb, S. (1892). On the dynamics of the Earth's rotation with respect to the periodic variations of latitude, Monthly Notices Roy. Astr. Soc., 52, 336-341.
- Nimmo, F. (2007). Energetics of the core, in Treatise on Geophysics, vol.8, edited by G. Schubert, chap. 2, pp. 31-66, Elsevier B. V, Elsevier Science, London.
- Oldham, R. D. (1906). The constitution of the interior of the Earth as revealed by Earthquakes, G.T. Geological Society of London, 62, 459-486.
- von Oppolzer, T. (1882). Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Vol. 1, (2nd Ed.), Leipzig, pp. 152-155.
- Peters, C. A. F. (1844). Resultate aus Beobachtungen des Polarsterns am Ertelschen Verticalkreise der Pulkowaer Sternwarte, Astron. Nachr., 22, Nr.509-512. Altona.
- Poincaré H. (1900). The Theory of Lorentz and the Principle of Reaction, Arch. néerland. sci. 2, 5, 232.

- Poincaré H. (1904). L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique, Congress of Arts and Sciences, St. Louis, Sept. 24, 1904.
- Poincaré H. (1910). Sur la précession des corps déformables, *Bull. Astron.*, 27, 321-356.
- Poinsot, L. (1834). Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps, Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie des Sciences de l'Institut, le 19 mai 1834, 56 pages, Paris.
- Poinsot, L. (1851). Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1<sup>ère</sup> série*, 16, 9-129.
- Poinsot, L. (1853). Théorie des cônes circulaires roulants, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1<sup>ère</sup> série*, 18, 41-70.
- Poisson, E. & Will, C. M. (2014). *Gravity : Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*, Cambridge University Press, 800 pages.
- Ponte, R. M. & Gaspar, P. (1999). Regional analysis of the inverted barometer effect over the global ocean using TOPEX/POSEIDON data and model results, *J. Geophys. Res.*, 104 (C7), 15 587-15 601.
- Ponte, R. M. (2006). Low-Frequency Sea Level Variability and the Inverted Barometer Effect, *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 23, 619-629.
- Radau, R. (1885). Remarques sur la théorie de la figure de la Terre, *Bull. Astr.*, 2, 157-161.
- Rhie, J., and B. Romanowicz (2004). Excitation of Earth's continuous free oscillations by atmosphere-ocean-seafloor coupling, *Nature*, 431, 552-556, doi :10.1038/nature02942.
- Ritsema, J., Deuss, A., Van Heijst, H. J., Woodhouse, J. H. (2011). S40RTS : a degree-40 shear-velocity model for the mantle from new Rayleigh wave dispersion, teleseismic traveltimes and normal-mode splitting function measurements, *Geophys. J. Int.*, 184, 1223-1236.
- Rochester, M. G. (1962). Geomagnetic core-mantle coupling, *J. Geophys. Res.*, 67, 4833-4836.
- Rogister Y. (2001). On the diurnal and nearly diurnal free modes of the Earth. *Geophys J Int.*, 144, 459-470.
- Rogister, Y. (2003). Splitting of seismic free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, 140, 169-182.
- Rogister Y. & Valette B. (2009). Influence of liquid core dynamics on rotational modes, *Geophys. J. Int.*, 176, 368-388.
- Rojstaczer, S. (1988). Determination of fluid properties from the response of water levels in wells to atmospheric loading, *Water Resour. Res.*, 24, 11, 1927-1938.
- Roosbeek, F., Defraigne, P., Feissel, M. & Dehant, V. (1999). The free core nutation period stays between 431 and 434 sidereal days, *Geophys. Res. Lett.*, 26, 1, 131-134.

- Rosat, S. (2007). Optimal Seismic Source Mechanisms to Excite the Slichter Mode, Int. Assoc. of Geod. Symposia, Dynamic Planet, Cairns (Australia), vol. 130, 571-577, Springer Berlin Heidelberg New York.
- Rosat, S. & Hinderer, J. (2011). Noise Levels of Superconducting Gravimeters : Updated Comparison and Time Stability, Bull. Seism. Soc. Am., vol. 101, no. 3, 1233-1241.
- Rosat, S. & Lambert, S.B. (2009). Free core nutation resonance parameters from VLBI and superconducting gravimeter data, Astron. Astrophys., 503, 287-291.
- Rosat, S., Sato, T., Imanishi, Y., Hinderer, J., Tamura, Y., McQueen, H., Ohashi, M. (2005). High resolution analysis of the gravest seismic normal modes after the 2004  $M_w = 9$  Sumatra earthquake using superconducting gravimeter data, Geophys. Res. Lett., 32, L13304.
- Rosat, S., Florsch, N., Hinderer, J. & Llubes, M. (2009). Estimation of the Free Core Nutation parameters from SG data : sensitivity study and comparative analysis using linearized Least-Squares and Bayesian methods, J. of Geodyn., 48, 331-339.
- Rosat S. & Y. Rogister (2012). Excitation of the Slichter mode by collision with a meteoroid or pressure variations at the surface and core boundaries, Phys. Earth Planet. Int., vol. 190-191, 25-33.
- Rosat S., J.-P. Boy, Y. Rogister (2014). Surface atmospheric pressure excitation of the translational mode of the inner core, Phys. Earth Planet. Int., 227, 55-60.
- Rosat, S., Calvo, M., Lambert, S. (2016a). Detailed analysis of diurnal tides and associated space nutation in the search for the Free Inner Core Nutation resonance, Int. Assoc. of Geod. Symposia, Prague (Czech Rep.), Springer Berlin Heidelberg, doi :10.1007/1345\_2016\_224
- Rosat, S., Hinderer, J., Boy, J.-P., Littel, F., Boyer, D., Bernard, J.-D., Rogister, Y., Mémin, A. & S. Gaffet (2016b). First analyses of the iOSG-type superconducting gravimeter at the low noise underground laboratory (LSBB URL) of Rustrel, France, E3S Web of Conf., 12, 06003, DOI : 10.1051/e3sconf/20161206003.
- Rosat, S., Lambert, S., Gattano, G. & Calvo, M. (2017). Earth's core and inner core resonances from analysis of VLBI nutation and superconducting gravimeter data, Geophys. J. Int., 208, 211-220.
- Sasagawa, G. S., W. Crawford, O. Eiken, S. Nooner, T. Stenvold, and M. A. Zumberge (2003). A new seafloor gravimeter, Geophysics, 68, 544-553.
- Sasagawa, G., Zumberge, M. and O. Eiken (2008). Long-term seafloor tidal gravity and pressure observations in the North Sea : Testing and validation of a theoretical tidal model, Geophysics, 73, 6, 143-148.
- Sasao, T., Okubo, S., and M. Saito (1980). A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth, Proc. IAU Symp. 78, ed. E. P. Federov, M. L. Smith & P. L. Bender, Nutation and the Earth's Rotation, 165-183.

- Sasao, T., Wahr, J. (1981). An excitation mechanism for the free core nutation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 64, 729-746.
- Schweydar, W.V. (1917). Die Bewegung der Drehachse der Elastischen Erde im Erdkörper und im Raum, *Astron. Nachr.*, Vol 203, pp. 103-114.
- Shimizu, H., Poirier, J.-P., Le Mouél (2005). On crystallization at the inner core boundary, *Phys. Earth Planet. Int.*, 151, 37-51.
- Shiomi S. (2008a). Testing Gravitational Physics with Superconducting Gravimeters, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 172, 61-70.
- Shiomi S. (2008b). Proposal for a geophysical search for dilatonic waves, *Phys. Rev. D*, 78, 042001.
- Slichter, L. B. (1961). The fundamental free mode of the Earth's inner core, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 47 (2), 186-190.
- Sloudsky, Th. (1895). De la rotation de la Terre supposée fluide à son intérieur, *Bull. Soc. Imp. Nat.*, Moscou, 9(2), 285-318.
- Smith, M.L. (1974). The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 37, 491.
- Smith, M.L. (1976). Translational inner core oscillations of a rotating, slightly elliptical Earth, *J. Geophys. Res.*, 81 (17), 3055-3065.
- Smith M. L. (1977). Wobble and nutation of the Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 50, 103-140.
- Smith, M. L. & F. A. Dahlen (1981). The period and Q of the Chandler wobble, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64, 223-281.
- Souchay, J., Loysel, B., Kinoshita, H. and Folgueira, M. (1999). Corrections and new developments in rigid earth nutation theory : III. Final tables « REN-2000 » including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects, *Astron. Astr.*, Suppl. Ser., 135, 111-131.
- Souchay, J., Lambert, S. B. & C. Le Poncin-Lafitte (2007). A comparative study of rigid Earth, non-rigid Earth nutation theories, and observational data, *Astron. Astrophys.*, 472, 681-689.
- Tanimoto, T. (2006). Excitation of normal modes by non-linear interaction of ocean waves, *Geophys. J. Int.*, 168, 571-582.
- The LIGO Scientific Collaboration & The Virgo Collaboration (2009). An upper limit on the stochastic gravitational-wave background of cosmological origin, *Nature*, 460, 990-994.
- Thomson, W. (1876). Opening Address to Section A of the British Association for the Advancement of Science. Report of the British Association for the Advancement of Science.
- Tisserand, F. (1890). *Traité de Mécanique Céleste, Tome II. Théorie de la Figure des Corps Célestes et de leur Mouvement de Rotation.* Gauthier-Villars, Paris, 549 pages.

- Tuman, V.S. (1973). A search for gravity waves by means of the Earth eigen vibrations, GRG, vol. 4, No. 4, 279-287.
- Verdun, A. & G. Beutler (2000). Early Observational Evidence of Polar Motion, Polar Motion : Historical and Scientific Problems, ASP Conference Series, 208, 67-82.
- Warburton R. and J. M. Goodkind (1976). Search for evidence of a preferred reference frame, Astrophys. J., 208, 881-886.
- Webb, S. C. (2008). The Earth's « hum » : The excitation of Earth normal modes by ocean waves, Geophys. J. Int., 174, 542-566.
- Weiss, R. & B. Block (1965). A gravimeter to monitor the  ${}_0S_0$  dilational mode of the Earth, J. Geophys. Res., 70, 22, 5615-5627.
- Wenzel, H.-G. (1996). The nanogal software : Earth tide data processing package ETERNA 3.30, Bull. Inf. Mar. Terr., 124, 9425-9439.
- Widmer-Schmidrig, R. (2003). What can superconducting gravimeters contribute to normal-mode seismology ? Bull. Seismol. Soc. Am. 93, no. 3, 1370-1380.
- Wiechert, E. (1897). Über die Massenverteilung im Inneren der Erde, Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen, Math-K.L., 221-243.
- Wu, W.-J. & Rochester, M. G. (1994). Gravity and Slichter modes of the rotating Earth, Phys. Earth Planet. Int., 87, 137-154.
- Wunsch, C. and Stammer, D. (1997). Atmospheric loading and the oceanic « inverse barometer » effect, Rev. Geophys., 35(1), 79-107.
- Xu, J.Q., Sun, H. & Yang, X.F. (2004). A study of gravity variations caused by polar motion using superconducting gravimeter data from the GGP network, J. Geod., 78, 201-209.
- Zaske, J., Zürn, W. & H. Wilhelm (2000). NDFW analysis of Borehole Water Level Data from the Hot-Dry-Rock Test Site Soultz-Sous-Forêts, Bull. Inf. Marées Terr., 132, 10,241-10,270.
- Zeumann, S., Weise, A. & Jahr, T. (2009). Tidal and non-tidal signals in groundwater boreholes in the KTB area, Germany, J. of Geodyn., 48, 115-119.
- Ziegler, Y., Hinderer, J., Rogister, Y. & S. Rosat (2016). Estimation of the gravimetric pole tide by stacking long time-series of GGP superconducting gravimeters, Geophys. J. Int., 205, 77-88.
- Zotov, L., & Bizouard, C. (2012). On modulations of the Chandler wobble excitation, J. Geodyn., 62, 30-34.



# INDEX

## A

Adams-Williamson (équation de).....6

## B

Baromètre  
    inversé ..... 106, 125, 128–130  
    non-inversé ..... 106, 128, 130  
BEP (Basic Earth Parameters).....23, 24  
Brunt-Väisälä (fréquence de).....6, 106

## C

Chandler (Oscillation de) . 6, 8, 10, 11, 17,  
    22, 23, 51–56, 59, 62, 153–158  
CIP (Celestial Intermediate Pole)..17, 18,  
    20, 51, 140  
Clairaut (équation de)..143, 145–149, 151  
Clausius-Clapeyron (courbe de) .. 63, 103,  
    104  
Cordes (théorie des) ..... 109, 113

## D

D’alembertien (opérateur) ..... 114  
Dégénérescence ..... 10  
Dendrite ..... 103, 104, 106

## E

ECMWF (European Centre for

Medium-range Weather Forecasts)  
128, 129

EOP (Earth Orientation Parameter) .. 20,  
21, 55, 56

ERP (Earth Rotation Parameter) .. 16, 18

ETERNA (logiciel d’analyse de marées)  
50, 127, 129

Euler

    équations d’Euler ..... 22, 30, 140

    angles d’Euler ..... 16, 18–20, 139

    mouvement d’Euler ..... 6

    précession eulérienne 22, 27, 29, 52, 53

    pulsation d’Euler ..... 52, 154

## F

FCN (Free Core Nutation) .. 8, 10, 17, 23,  
25, 29, 31, 41, 47, 57–61, 123, 127,  
128, 136

FICN (Free Inner Core Nutation)...8, 10,  
23, 25, 47–51

## G

Géostrophique

    flux ..... 6

    mode ..... 5, 6

    pression ..... 58

    rigidification ..... 58, 59

GGP (Global Geodynamics Project) .. 14,  
50, 53, 121, 131

- H**
- Hum.....8
- I**
- IAU (Modèle de précession-nutation) ..17,  
23, 51, 57, 58, 140  
ICRF (International Celestial Reference  
Frame) ..... 21  
ITRF (International Terrestrial Reference  
Frame) ..... 17, 19, 21, 30  
IVS (International VLBI Service for  
Geodesy & Astrometry).....16
- J**
- Jauge  
de Lorenz ..... 114  
transverse et à trace nulle (TT)...119
- L**
- Liouville (équations de) ..... 30, 154–157  
LOD (Length Of Day) ..... 9, 20  
Lorentz  
force de ..... 6, 59, 60  
transformation de.....108, 112  
Love..... *voir* Nombre de Love
- M**
- MacCullagh (formule de).....27, 145, 154  
Marée polaire .....28, 53  
Maxwell (équations de) ..... 59, 60  
Minkowski (repère de) ..... 108, 112, 141  
MOG2D (2-dimension Gravity Waves  
model).....128, 129
- N**
- Navier-Stokes (équation de) ..... 60, 61
- Nombre de Love ..... 28, 124, 155  
de pression ..... 58  
séculaire ..... 29, 151  
Nombre de Shida ..... 124
- O**
- Ondes gravitationnelles ..... 107–111, 114,  
117–121  
Oppolzer (termes de) ..... 27, 140
- P**
- Poisson (équation de).....116  
Polhodie.....9, 17, 28, 55  
Précession ..... 9, 17, 22, 25, 29  
géodésique.....140  
PREM ..... 10, 15, 24, 63, 64  
Pression  
atmosphérique..... 80, 125–128, 138  
de pore ..... 125, 126  
fluide.....23, 47, 59, 80  
Principe d'équivalence ..... 109, 111, 113
- Q**
- Quadrupolaire (moment, tenseur) .... 110,  
111, 118, 120, 121
- R**
- Radau (variable de) ..... 151  
Repère  
céleste ..... 16, 18, 19, 140  
de Minkowski ..... *voir* Minkowski  
de Tisserand..... *voir* Tisserand  
inertiel ..... 5, 25, 108, 113, 139–141  
terrestre .. 16, 18, 19, 21, 25, 139, 140,  
145  
Rhéologie ..... 25, 47, 52, 55, 62

**S**

Schwarzschild (trou noir, rayon, métrique)  
116, 117  
 SG (Superconducting Gravimeter) . 13, 15,  
24, 31, 41, 47, 50, 53, 56, 57, 64,  
110, 121, 131, 136, 137  
 Slichter (mode de) . 6, 8, 10, 14, 64, 80, 82,  
88, 89, 97, 98, 103, 106, 111  
 Splitting . . . . . 10  
 Supercooling . . . . . 104, 106  
 Sway . . . . . 11

**T**

Tenseur

de Ricci . . . . . 114, 116  
 de Riemann . . . . . 114  
 de Weyl . . . . . 114  
 impulsion-énergie . . . . . 114, 116, 117  
 métrique . . . . . 108, 111, 112, 114, 141  
 Tisserand (axes de, repère de) . . . . . 27, 30  
 TOM (Tilt-Over Mode) . . . . . 5, 11, 27  
 TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF  
 (équations de) . . . . . 116, 117  
 Triviaux . . . . . 5

**V**

VLBI (données, technique) . 11, 16, 23–25,  
31, 41, 43, 47, 48, 50, 51, 54, 57,  
58, 136

---

## RÉSUMÉ

L'observation et l'analyse des modes propres de la Terre apportent des contraintes fondamentales sur la structure et sur la dynamique interne de notre planète. On peut ainsi citer les modes de rotation et les modes sismiques. Dans le cadre de la recherche de petits signaux venant de la Terre profonde et induits par les modes oscillatoires de la graine (les « modes de Slichter ») qui n'ont jamais été détectés, nous avons modélisé leur excitation par plusieurs sources possibles : les masses atmosphériques, les séismes et des variations de pressions fluides dans le noyau liquide. Nous avons également abordé le problème de la cinématique des changements de phase des cristaux de fer qui existent à ces conditions élevées de température et de pression. Ce problème de transition de phase durant un déplacement de l'interface noyau liquide - graine solide pourrait rendre ces modes d'oscillation de la graine inexistants. Une première estimation reposant sur un modèle simple de croissance dendritique à l'ICB a montré que les changements de phase ne perturbent pas les modes de Slichter. En outre, nous avons réconcilié les observables gravimétriques et géodésiques VLBI des marées luni-solaires et leurs effets en termes de réponse de la Terre en déformation (marées gravimétriques) et en rotation (nutations astronomiques), en inversant les paramètres de la résonance associée à la nutation propre du noyau. La nutation propre de la graine n'a cependant pas encore été détectée, ni dans les données de nutation VLBI, ni dans les données gravimétriques de surface. Finalement, nous nous intéressons à l'interaction des ondes gravitationnelles avec la Terre, en particulier via leur couplage avec les modes propres sismiques.

Mots clés : gravimétrie, géodésie, modes propres, rotation, ondes gravitationnelles

## ABSTRACT

The observation and analysis of Earth's normal modes bring some information on the deep Earth's interior and dynamics. We can cite the Earth's rotational and seismic modes. In the search of the signature of some elusive signals associated with the Earth's inner core oscillations (the « Slichter modes ») that have never been detected, we have theoretically computed their expected amplitudes for various geophysical processes : the surface atmospheric masses, the earthquakes and the pressure flows in the fluid outer core. We have also briefly looked at the possible effect of the kinetics of phase changes on the Slichter mode. For that, we have used a simple model of dendritic growth at the ICB and shown that the phase changes do not disturb the Slichter motion. Besides, we have reconciled the gravimetric and geodetic VLBI nutation observations of the Earth's response to the luni-solar tides by inverting the resonance parameters associated with the free core nutation. The free inner-core nutation has not yet been detected, either in VLBI nutation data, or in surface gravimetric records. Finally, we consider the interactions of gravitational waves with the Earth through their coupling with seismic modes.

Keywords : gravimetry, geodesy, normal modes, Earth's rotation, gravitational waves