HAL open science

Convection et stratification induites par une paroi chauffante : mesures expérimentales et modélisations

Tobit Caudwell

▶ **To cite this version:**

Tobit Caudwell. Convection et stratification induites par une paroi chauffante : mesures expérimentales et modélisations. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble - Alpes, 2015. Français. NNT : . tel-01507012v1

HAL Id: tel-01507012

https://hal.science/tel-01507012v1

Submitted on 12 Apr 2017 (v1), last revised 14 Apr 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Terre, Univers, Environnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Tobit CAUDWELL

Thèse dirigée par **Jan-Bert FLÓR**
et coencadrée par **Maria-Eletta NEGRETTI**

préparée au sein du
Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (LEGI)
et de l'École Doctorale **Terre Univers Environnement (TUE)**

Convection et stratification induites par une paroi chauffante :
mesures expérimentales et modélisations

Thèse soutenue publiquement le **16 décembre 2015**,
devant le jury composé de :

Dr. Joël SOMMERIA
Directeur de Recherche, Université Grenoble Alpes, Président
Dr. Colm-cille CAULFIELD
Professeur, University of Cambridge, Rapporteur
Dr. Fabrice LEMOINE
Professeur, Université de Lorraine, Rapporteur
Dr. Olivier EIFF
Professeur, Karlsruhe Institute of Technology , Examinateur
Dr. Jan-Bert FLÓR
Directeur de Recherche, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse
Dr. Maria Eletta NEGRETTI
Chargée de Recherche, Université Grenoble Alpes, Co-Encadrante de thèse

À mon Grand-Papa,
qui m'a précédé en Sciences
un demi siècle plus tôt ;

Et à ceux qui, de par le monde,
supportent le coût de nos recherches
sans en goûter les bénéfices.

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement Jan-Bert Flór, mon directeur de thèse, pour la confiance sans faille qu'il m'a accordée, la disponibilité dont il a fait preuve, et la grande liberté qu'il m'a laissée durant ces trois années de travail. Je remercie aussi chaleureusement Maria Eletta Negretti, ma co-encadrante, pour son aide et sa collaboration qui, malgré plusieurs « heureux imprévus », m'ont été précieux. Je tiens à saluer Messieurs Colm-cille Caulfield et Fabrice Lemoine pour leurs contributions en tant que rapporteurs de cette thèse, ainsi que Messieurs Olivier Eiff et Joël Sommeria, qui ont accepté d'être membres du jury.

Je suis également reconnaissant pour les conseils avisés et la disponibilité de François Bonnel et de Joël Sommeria, dont le savoir-faire technique et scientifique m'ont aidé à réaliser des mesures de qualité. Celles-ci n'auraient pas été possibles sans l'appui de toute l'équipe technique du LEGI. Je tiens donc à remercier spécialement Stéphane Mercier, qui m'a été d'un précieux soutien aussi bien pour les parties mécaniques qu'électroniques, ainsi que Muriel Lagauzère pour la partie instrumentation. Je remercie également Samuel Viboud et Laure Vignal pour leur aide dans l'utilisation du laser, Jean-Marc Barnoud pour ses dépannages réguliers et efficaces, ainsi que Tristan Vandenberghe, Joseph Virone, Mile Kusulja et Vincent Govard, sans qui la conception et le montage de la nouvelle cuve d'expérimentation auraient été impossibles. Merci enfin à tous ceux qui une fois ou l'autre m'ont prêté la pièce ou l'outil qui me faisait défaut.

Un expérimentateur est aussi très dépendant de l'informatique, et je tiens à remercier notre remarquable trio Gabriel Moreau, Olivier de Marchi et Cyrille Bonamy, qui ont toujours su se rendre disponibles pour remédier aux petits ou grands soucis du quotidien.

Je voudrais également saluer les qualités humaines de chacune de ces personnes, qui m'ont permis d'évoluer dans une ambiance amicale et chaleureuse.

Enfin, une thèse ne se construit pas seulement entre le bureau et la salle de manip'. Merci aux services de direction et d'administration successifs du laboratoire. Je suis reconnaissant à toute l'équipe MEIGE pour son dynamisme et sa bonne ambiance. Merci aux « collègues du midi », thésards ou permanents, avec qui les échanges réguliers nous ont mutuellement enrichis, bien au delà du seul domaine de la science. Spécialement vous, Thibaud, Sébastien, Marianna, Jean-Christophe, Tim et Samuel, et vous Éric, Hervé, Philippe, Achim, Julien. Nos discussions du midi me manqueront !

Je voudrais exprimer ma gratitude à Éric Vieil et Maurice Rossi pour leur aide, leur expertise et leur amitié qui m'ont accompagné durant cette thèse. Je remercie mon ami Rémi, dont l'aide ponctuelle m'a été précieuse, et tous ceux

qui, de près ou de loin m'ont suivi et supporté, dans les deux sens du terme, au cours de ce travail. Merci à ma famille, à mes amis, et particulièrement aux docteurs et futurs docteurs avec qui il est souvent agréable et parfois utile d'échanger nos anecdotes. Merci aussi à Charlie et au groupe « Méristème », dont les perspectives m'ont donné du souffle. Un très grand merci enfin à Larissa, mon épouse, soutien et compagnon de route au quotidien sans qui cette aventure n'aurait pas été possible.

Table des matières

Remerciements **v**

Introduction générale **ix**

I Dispositif expérimental et techniques de mesure **1**

Introduction **3**

1 Dispositif expérimental **5**
1.1 Cuve 5
1.2 Dispositifs de chauffage et refroidissement 7
1.3 Configuration retenue et instrumentation 8
1.4 Commande et synchronisation 10

2 Mesures de température par LIF **13**
2.1 Principes et théorie 14
2.2 Exploitation 20
2.3 Application 28
2.4 Étude complémentaire : choix de la caméra 43
2.5 Étude complémentaire : T-LIF à deux couleurs et un colorant . . 47

3 Mesures de vitesse par PIV **51**
3.1 Introduction 51
3.2 Mise en œuvre expérimentale 53
3.3 Post-traitement des images 55

Conclusion de cette première partie **63**

II Paroi chauffante et stratification **65**

Introduction **67**

4 Développement d'un modèle « *filling box* » **69**
4.1 Le modèle turbulent, d'après la théorie de Morton *et al* (1956) . 70
4.2 Modélisation de la portion laminaire 78

5 Article on isothermal wall **91**
5.1 Introduction 92
5.2 Experimental measurements 94
5.3 Observations from T-LIF & PIV measurements 97
5.4 Theoretical modelling 104
5.5 Comparisons between experiment and models 110
5.6 Conclusions 114
5.A Heat transfer at the wall 115
5.B Details about the entrainment coefficient 117

6 Discussion et perspectives **119**

A Code source **123**
A.1 Script principal : `wall_plume_model.py` 123
A.2 Résolution de la partie turbulente : `ODE_MTT_solve.py` 129
A.3 Résolution de la partie laminaire : `worster_leitch_solve.py` 130

Bibliographie **133**

Introduction générale

La convection, qui vient du latin *convectio*, un dérivé de *conveho* signifiant « transporter », désigne les mouvements qui animent l'intérieur d'un fluide en impliquant le transport d'une propriété locale de ce fluide. Lorsqu'il s'agit de température, ce qui est le cas le plus fréquent, on parle de convection thermique. Avec la conduction et le rayonnement, il s'agit d'un des trois modes de transfert thermique. À la différence de la conduction pour laquelle le transfert se fait de proche en proche par contact, la convection implique le déplacement des particules chaudes ou froides elles-mêmes. Elle se manifeste alors selon deux schémas distincts. Dans un cas le fluide est mis en mouvement par un phénomène extérieur et la température est transportée passivement (elle n'est pas moteur de l'écoulement), on parle alors de convection *forcée*. Dans l'autre cas, c'est la répartition de température elle-même qui est génératrice de mouvement, par le mécanisme bien connu de la « Poussée d'Archimède » : puisque la densité du fluide est assujettie à sa température, des écarts de température se traduisent en disparités de densité qui, sous l'influence de la gravité vont tendre à se réorganiser de telle sorte que le fluide le plus léger (le moins dense) se trouve au-dessus du fluide le plus lourd (le plus dense). On parle alors de convection *naturelle*, ou *libre*, et c'est ce phénomène qui va nous occuper tout au long de ce manuscrit.

Depuis les mouvements du manteau terrestre jusqu'à ceux de l'océan ou de l'atmosphère, la convection naturelle est un phénomène d'une importance majeure dans la nature. Plus proche de nous, votre ballon d'eau chaude, la casserole sur le réchaud, vos radiateurs ou la ventilation de votre habitation sont autant d'applications domestiques dans lesquelles la convection naturelle joue également un rôle de premier plan. C'est évidemment le cas aussi d'un très grand nombre d'applications industrielles aussi diverses que le refroidissement de puces électroniques, les fours, les réservoirs ou divers échangeurs thermiques. D'un point de vue scientifique elle présente une certaine complexité au travers des couplages et des non-linéarités qui la caractérisent, ainsi que des différentes échelles qu'elle fait intervenir. C'est ainsi que l'expérience de Bénard, désormais populaire sous le nom de « Rayleigh-Bénard » (du nom de Rayleigh qui est à l'origine de la théorie) s'intéressant à un fluide que l'on chauffe par le bas et refroidi par le haut soulève encore de nombreuses questions à l'heure actuelle, après plus d'un siècle de travaux (voir par exemple les revues Bodenschatz *et al.*, 2000; Ahlers *et al.*, 2009; Chillà & Schumacher, 2012).

Les panaches sont une des manifestations courantes de la convection naturelle. Ils interviennent lorsqu'une source localisée introduit une différence de densité dans un milieu fluide. Il peut s'agir d'une source de chaleur qui échauffe localement le fluide, comme à l'extrémité d'une cigarette, ou d'une source de

fluide lui-même moins dense, comme la vapeur qui s'échappe de votre cuiseur vapeur favori lorsque vous retirez sa soupape. Ce même phénomène s'observe à plus grande échelle pour les fumées d'un volcan en éruption ou l'écoulement d'une source chaude dans l'océan par exemple. Il peut également s'agir de panache descendant, si la source introduit un excès de densité. Ces panaches ont tous en commun une tendance à l'expansion, car ils sont généralement turbulents et incorporent en leur sein une partie du fluide environnant à mesure qu'ils s'élèvent. Cela réduit d'autant leur densité, et freine graduellement leur progression jusqu'à la hauteur pour laquelle leur densité égale celle de l'environnement, hauteur à laquelle ils se dispersent. D'une forme généralement conique et localisée, un panache devient alors une nappe horizontale. Dans le cas d'un volcan ce phénomène peut rapidement prendre des proportions gigantesques : l'éruption du volcan islandais Eyjafjöll en 2010 a marqué les mémoires, pas seulement à cause du nom imprononçable de sa localité. En effet son panache de cendre s'est répandu sur une large partie de l'Europe à une altitude interférant avec le trafic aérien. Ce dernier a ainsi dû être interrompu, ce qui a eu des conséquences économiques se chiffrant en milliards d'euros.

Dans un article fondateur, Morton *et al.* (1956) ont décrit d'un point de vue théorique l'expansion d'un panache axisymétrique turbulent issu d'une source ponctuelle. Leur modèle simple car mono-dimensionnel a été très largement repris et servira également de base à une partie des développements de ce manuscrit. On se trouve alors dans le cadre de l'exemple que nous venons de citer, c'est-à-dire en milieu ouvert. Baines & Turner (1969) lui ont apporté une extension majeure en l'appliquant à une enceinte fermée. Cette modification change radicalement la physique de l'écoulement. En effet, le panache montant[1] se trouve alors limité dans sa course, et se répand contre la paroi haute en une couche horizontale. Cette couche, continûment nourrie par le panache s'épaissit et remplit ainsi l'enceinte peu à peu, qui se retrouve finalement stratifiée en densité. Dans ce type de configuration, on a alors une interaction forte entre le panache et son environnement, qu'il peut modifier profondément. Baines & Turner (1969) ont décrit l'état asymptotique final de cette stratification pour différents types de sources, notamment des sources linéiques. Ils ont désigné ce mécanisme sous le nom de *« filling box »*. Plus tard, Worster & Huppert (1983) ont proposé une résolution analytique du développement temporel de ce système. Pour valider leur solution, ils se sont appuyés sur un modèle numérique dont le principe original de résolution a été introduit quelques années plus tôt par Germeles (1975).

Les études précédentes, pour lesquelles la convection intervient dans des espaces clos, trouvent un champ d'application privilégié dans le domaine de la ventilation des bâtiments. Les enjeux y sont importants, tant en terme de thermique et donc de consommation d'énergie, qu'en terme de santé (dispersion de polluants) ou de confort (Linden, 1999). Ces perspectives amènent à considérer des configurations proches de celles que l'on peut rencontrer dans l'architecture. C'est ainsi que Cooper & Hunt (2010) ont appliqué les développements du paragraphe précédent au cas de l'écoulement induit par une paroi chauffante.[2] Celle-ci jouxte une cavité qui est fermée dans un premier temps, puis ventilée, c'est-à-dire percée de deux ouvertures permettant une circulation additionnelle.

[1] ou descendant, s'il est plus dense que le milieu

[2] En toute rigueur, il ne s'agit pas de chaleur mais de solution saline : un flux de salinité constant est imposé à la paroi

Dans une telle configuration, l'écoulement le long de la paroi s'apparente autant à une couche limite qu'à un panache, et le caractère turbulent est mis en défaut sur une certaine hauteur du fait des contraintes imposées par la paroi. Bien que ce cadre rende l'application de la théorie de Morton *et al.* (1956) moins rigoureuse, elle leur a permis d'obtenir une modélisation satisfaisante de ce système.

Restant dans le cadre d'une paroi chauffante, d'autres modèles ont été proposés. Ainsi Worster & Leitch (1985) ont étudié l'écoulement induit par une paroi chaude dans le cas strictement laminaire. Ce caractère permet de résoudre analytiquement la couche limite et de se passer de la théorie de Morton *et al.* (1956). Ils ont ainsi pu décrire l'établissement de la stratification dans des enceintes de différents rapports d'aspect. À la différence des études précédemment citées, leurs expériences ont été conduites en utilisant la température et non la salinité comme agent de densité, avec une valeur constante à la paroi (autrement dit, on substitue une condition aux limites de Dirichlet à une condition de Neumann). Beaucoup plus récemment, Wells & Worster (2008) ont développé une modélisation distincte, plus complexe (elle est notamment bidimensionnelle) mais bien plus complète de ce type d'écoulement. Elle différencie les caractères laminaire, transitionnel et turbulent successifs du panache, mais se situe en milieu ouvert, c'est à dire sans processus de stratification.

La présente étude se situe au carrefour de ces différentes explorations. Nous nous proposons en effet d'étudier l'écoulement de paroi chauffante en régime turbulent au sein d'une cavité fermée. En cela notre étude se rapproche fortement de celle de Cooper & Hunt (2010). À la différence de ceux-ci cependant, notre utiliserons la température et non la salinité comme agent de densité, ce qui a deux conséquences principales : la poussée d'Archimède est alors bien plus faible car les différences de densité induites par la température sont très inférieures à celles que l'ajout de sel peut provoquer, et la diffusivité moléculaire est plus importante : le nombre de Prandtl, qui est un paramètre clef dans ce type d'écoulement, se trouve de fait être 100 fois inférieur à son équivalent le nombre de Schmidt (Partridge & Linden, 2013). On peut donc s'attendre à des dynamiques différentes. Une seconde différence d'importance concerne la condition à la paroi : alors que Cooper & Hunt (2010) imposent un flux de flottance[3] constant, nous imposerons une température constante, situation qui se retrouve en pratique dès que la paroi d'un milieu clos est en contact avec un environnement dont la température est stable. Les applications sont nombreuses : c'est le cas par exemple d'un réservoir contenant un liquide chaud ou froid, ou d'une pièce de bâtiment peu isolée en contact avec l'extérieur. Cette nouvelle condition à la paroi a peu d'influence sur le début de l'expérience, mais modifie significativement le comportement à plus long terme, puisqu'au lieu d'atteindre un comportement stationnaire, nous voyons décroître l'intensité du panache à mesure que la cuve se réchauffe, jusqu'à ce que celle-ci atteigne la température de la paroi. Nous nous intéresserons ainsi à la naissance de la stratification, et à son évolution, ainsi qu'à la circulation grande échelle qui intervient dans l'ensemble du domaine. Ce comportement instationnaire permettra de mesurer plusieurs intensités de panache au cours d'une même expérience. Nous tenterons également

[3]Le français n'ayant pas d'équivalent au terme anglais *buoyancy*, nous utiliserons tout au long de ce manuscrit le terme de « flottance », qui désigne l'aptitude d'un fluide à flotter dans un environnement donné, soit l'écart relatif de densité entre le fluide considéré, et le fluide ambiant.

de comprendre les spécificités induites par le caractère turbulent, par rapport à l'écoulement laminaire rapporté par Worster & Leitch (1985). D'autre part, comme nous l'avons exposé plus haut, une telle convection de paroi ne revêt pas pleinement les attributs d'un panache selon les termes de la théorie de Morton *et al.* (1956). Nous allons donc investiguer en détail cet écoulement, afin de déterminer dans quelle mesure cette modélisation avantageusement simple reste valide. Nous allons en particulier déterminer les caractéristiques du panache en lui-même, là où les expériences précédentes n'obtiennent que l'évolution de la stratification. Nous nous attarderons par ailleurs sur la constante d'entraînement. Ce paramètre du modèle de Morton *et al.* (1956) quantifie l'assimilation de fluide ambiant au sein du panache. Il joue un rôle central en agissant notamment sur l'évasement du panache ou la vitesse de descente du front de stratification. Mais malgré son importance, il n'existe pas à ce jour de valeur ou de loi universelle pour le déterminer (Paillat & Kaminski, 2014). Nous montrerons que ce coefficient varie significativement au cours de notre expérience, et nous tenterons de comprendre pourquoi et dans quelle mesure. Dans cette perspective nous serons amenés à tenir compte de la partie laminaire du panache afin d'en déterminer l'influence sur la dynamique globale. Un modèle hybride, basé sur la théorie de Morton *et al.* (1956) mais incorporant les lois de similarités formalisées par Worster & Leitch (1985), a été développé dans ce but. Ces lois de similarités ont été étendues au cas d'un milieu partiellement stratifié, et validées expérimentalement.

La convection naturelle à haut nombre de Rayleigh reste un domaine qui tient en échec les simulations numériques, tant la diversité d'échelles en présence est importante. Nous avons donc concentré nos efforts sur un dispositif expérimental capable de fournir une information détaillée sur l'écoulement induit par la configuration que nous venons de décrire. Nous avons ainsi été amenés à exploiter une technique qui permet d'avoir accès simultanément aux champs de vitesse et de température dans l'ensemble du domaine, de manière quantitative et non intrusive. Il s'agit de la combinaison de deux méthodes optiques : la Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) et la Fluorescence Induite par Laser appliquée à la température (T-LIF), cette dernière ayant été introduite au laboratoire grâce aux travaux de de Socio (2010) et n'ayant jusqu'alors pas été appliqué à cette catégorie d'écoulements. L'association de telles techniques optiques permettant d'accéder à la fois à des données en vitesse et en température a été réalisée pour la première fois et de manière ponctuelle par Nakajima *et al.* (1991). La vitesse était alors déterminée par Vélocimétrie Laser Doppler (LDV). Puis, Hishida & Sakakibara (2000) ont étendu le principe à une mesure selon un plan, en utilisant cette fois la PIV pour la vitesse, principe qui a été plusieurs fois repris depuis. L'originalité de notre approche réside tout d'abord dans l'application de ces techniques à un écoulement convectif, où elles se révèlent particulièrement utiles du fait du couplage étroit entre la température et les mouvements du fluide. Elles donnent ainsi accès à des grandeurs telles que le nombre de Richardson local, qui aide à comprendre les instabilités qui entrent en compte en mettant en rapport l'énergie potentielle (stabilisante) et l'énergie cinétique (déstabilisante) de l'écoulement. La seconde originalité de notre approche réside dans les dimensions de notre domaine, qui sont significativement supérieures aux applications de T-LIF rapportées dans la littérature, comme nous le verrons plus loin. Cela nous a amené à pousser plus loin la méthode,

en choisissant finement nos paramètres. Nous pouvons ainsi apporter quelques éclairages analytiques intéressants et démontrer les limites de sa faisabilité pour des domaines de grande taille.

Ce manuscrit est divisé en deux parties. La première s'attache à exposer de manière détaillée le dispositif expérimental et les techniques de visualisation mises en œuvre. Un premier chapitre y décrit le dispositif expérimental et ses différents composants. Le second chapitre est ensuite consacré à la T-LIF, dont on expose la théorie et les principes, puis la manière dont ils ont été exploités dans le cadre de notre expérience. Nous discutons de la précision et des limites de cette technique. Un troisième chapitre est dédié à la PIV, en exposant les traitements qui ont été utilisés pour extraire les vitesses à partir des images acquises, notamment dans la zone pariétale.

La seconde partie présente les développements théoriques ainsi que les résultats expérimentaux concernant l'écoulement induit par une paroi chauffante dans une cavité fermée. Un premier chapitre expose en détail le développement du modèle turbulent que nous avons adapté, ainsi que l'introduction de la portion laminaire dans ce que nous avons appelé un modèle hybride. La chapitre suivant fait l'objet d'une retranscription d'un article soumis au *Journal of Fluid Mechanics* dans sa forme révisée. Il expose l'ensemble des résultats originaux que nous avons obtenus. Enfin le dernier chapitre résume et discute ces résultats.

Première partie

Dispositif expérimental et techniques de mesure

Introduction

Le domaine de la convection thermique se situe à l'interface entre deux grandes disciplines de la physique : la mécanique des fluides et la thermique. Les phénomènes mis en jeu impliquent donc un couplage très étroit entre elles. Les différences de température au sein du fluide induisent des différences de densité qui, sous l'action de la gravité, génèrent des déplacements. Il en résulte une nouvelle distribution de température, qui peut à nouveau avoir des conséquences sur le système. L'étude expérimentale de ces phénomènes nécessite donc de pouvoir obtenir des données quantitatives sur les déplacements du fluide comme sur sa température.

Obtenir les déplacements ne présente plus guère de difficulté de nos jours en laboratoire, d'autant que les vitesses en convection naturelle, de l'ordre de quelques centimètres par seconde, sont relativement faibles. Obtenir des informations précises sur la température est plus difficile. L'usage de sondes est intrusif et ne donne que des mesures discrètes. L'usage de caméras thermiques est impossible dès qu'il s'agit d'investiguer l'intérieur d'un milieu. Des techniques telles que l'ombroscopie (*shadowgraph*) exploitent les variations d'indices optiques du milieu et permettent d'approcher la structure du champ de manière continue, mais leur exploitation quantitative reste très délicate : outre qu'il est difficile de reconstituer le champ de température à partir des variations d'indice, les variations observées sont des grandeurs intégrées sur l'épaisseur du milieu d'étude.

Des techniques de visualisation à base de cristaux liquides existent également, avec de nombreux avantages par rapport aux techniques précédentes. Ces cristaux liquides sont thermo-sensibles : éclairés par une lumière blanche, la lumière qu'ils reflètent change de couleur en fonction de leur température. Ils sont encapsulés dans de petites particules qui servent de traceurs pour obtenir à la fois la vitesse et la température du fluide, et en utilisant un éclairage avec un balayage adéquat, il est possible de reconstituer des champs à deux ou trois dimensions avec une précision de l'ordre de 0.1°C (Fujisawa & Funatani, 2000). Cependant, le passage de la couleur à la température n'est pas immédiat et nécessite un temps de calcul conséquent. Et surtout, la plage de mesure est limitée à seulement 2 ou 3°C d'amplitude.

La Fluorescence Induite par Laser appliquée à la Température ne souffre pas ces limitations. Elle donne accès à une information locale et quantitative, de manière parfaitement non intrusive. Elle s'utilise elle aussi pour un point (Nakajima *et al.*, 1991), aussi bien qu'un plan (Sakakibara *et al.*, 1993) ou un volume (Sakakibara & Adrian, 1999). Son temps de réponse est de l'ordre de la nanoseconde, et sa précision est de l'ordre de 0.1°C sur une gamme de plusieurs dizaines de degrés. Enfin, comme la visualisation par cristaux liquides, elle se

couple très bien à la Vélocimétrie par Imagerie de Particules (PIV), qui peut être utilisée simultanément. L'ensemble de ces propriétés en fait donc un candidat de choix pour l'étude de la convection, et notamment de la convection naturelle, dont nous traiterons ici dans le cadre d'une paroi verticale chauffante.

L'originalité principale de l'étude que nous présentons réside dans le fait d'appliquer ces techniques dans un écoulement convectif, sur un dispositif de grande taille par rapport à ce qui s'est fait jusqu'à présent (voir le tableau 2.1 p.29). Le premier chapitre s'attache ainsi à décrire ce dernier, ainsi que les équipements et l'instrumentation qui le composent. Dans un second temps nous nous intéresserons à la technique de Fluorescence Induite par Laser appliquée à la température. Après quelques développements théoriques originaux, nous détaillerons son application dans le cadre de nos expériences en convection de paroi, et nous en exposerons les limites. Enfin, un troisième chapitre présentera succinctement la Vélocimétrie par Images de Particules et la manière dont nous l'avons employée pour obtenir les champs de vitesses pertinents pour notre étude, notamment en proche paroi.

Chapitre 1

Dispositif expérimental

Sommaire

1.1 Cuve 5
1.2 Dispositifs de chauffage et refroidissement 7
1.3 Configuration retenue et instrumentation 8
1.4 Commande et synchronisation 10

Ce chapitre présente l'ensemble du dispositif expérimental utilisé pour les études présentées dans ce manuscrit. Il détaille les composants de la cuve contenant l'écoulement, les dispositifs de chauffage, ainsi que le matériel d'acquisition employé.

1.1 Cuve

La cuve utilisée pour les expériences est prismatique, de section horizontale 600×300 mm et de 650 mm de hauteur[1]. Elle peut contenir ainsi environ 110 L d'eau. Les deux faces principales, de 20 mm d'épaisseur,(voir figure 1.1(*a*)) sont en Polyméthacrylate de méthyle, un polymère plus connu sous son abbréviation PMMA, ou son nom commercial *Plexiglas*. Ce matériau dispose de bonnes qualités optiques et est relativement isolant bien que sa tenue à la température ne soit plus garantie au delà de 70°C. Ces faces transparentes permettent donc l'observation selon une fenêtre verticale carrée d'environ 600 mm de côté. Les parois verticales latérales sont en aluminium pour permettre les transferts thermiques, et de couleur noire pour éviter autant que possible les réflexions de la lumière laser. Le fond est lui aussi conducteur thermique, constitué de deux plaques en aluminium qui viennent enserrer une lame de PMMA de 10 mm d'épaisseur servant de hublot pour laisser entrer la lumière laser.

La cuve est remplie avec de l'eau déminéralisée, dans laquelle on ajoute un colorant fluorescent (Rhodamine B, voir section 2.3.1) et des particules en polyamide, servant respectivement aux visualisations de température et de vitesse exposées plus loin. Le contenu de la cuve a régulièrement besoin d'être homogénéisé : lorsqu'on y introduit du colorant ou des particules par exemple, ou

[1] Ces cotes peuvent légèrement varier d'une expérience à une autre en fonction de l'isolation éventuelles de parois par l'intérieur, ou du niveau de remplissage.

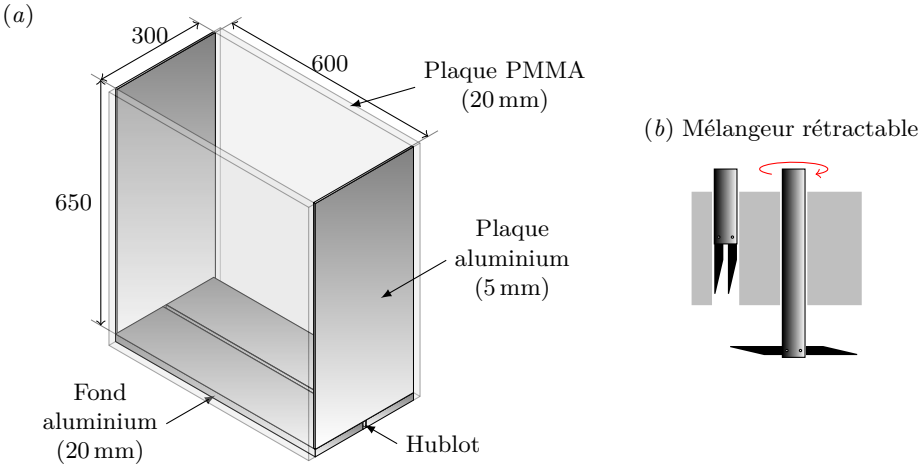


FIGURE 1.1 – (a) Schéma de la cuve utilisée pour les expériences. Le couvercle n'est pas représenté. (b) Schéma de principe du mélangeur rétractable, s'insérant dans un trou du couvercle : à gauche au repos, à droite en fonctionnement.

lorsqu'on désire une température homogène pour contrôler les conditions initiales ou calibrer les mesures. Pour cela un mélangeur rétractable a été conçu (figure 1.1(b)) pour être introduit dans le volume d'expérience. Animé par un moteur électrique muni d'un variateur, il est constitué d'une hélice d'axe vertical dont les pales, pendantes au repos, se déploient sous l'effet centrifuge. Ce système est peu intrusif puisqu'il ne nécessite qu'un trou de quelques millimètres de diamètre dans le couvercle.

Puisque le contenu de la cuve est amené à être chauffé, le volume d'eau est amené à augmenter par dilatation thermique. Le couvercle doit donc pouvoir laisser passer ce volume supplémentaire, et un trou d'évacuation du trop-plein a été ajouté à quelques millimètres du haut de la cuve pour éviter tout débordement.

Les expériences réalisées au cours des deux premières années de cette thèse ont permis de mettre à jour un certain nombre de défauts inhérents à la cuve initialement utilisée. Une seconde a donc pu être conçue. Ses dimensions sont identiques à la première, mais un certain nombre d'améliorations ont été apportées, notamment :

- L'assemblage a été mieux conçu, plus robuste, et intégralement réalisé par vissage et joints toriques au lieu de collage. Cela permet de limiter les fuites, faciliter le démontage ou les modifications, et l'ensemble bénéficie d'une plus grande souplesse face aux contraintes thermiques.

- Les surfaces conductrices en aluminium, au lieu d'être peintes comme c'était le cas, ont subi un traitement d'anodisation noir qui les protège de toute réaction avec l'eau et leur confère un bien meilleur état de surface.

- Le champ de vision a été élargi en repensant le placement des vis d'assemblage.

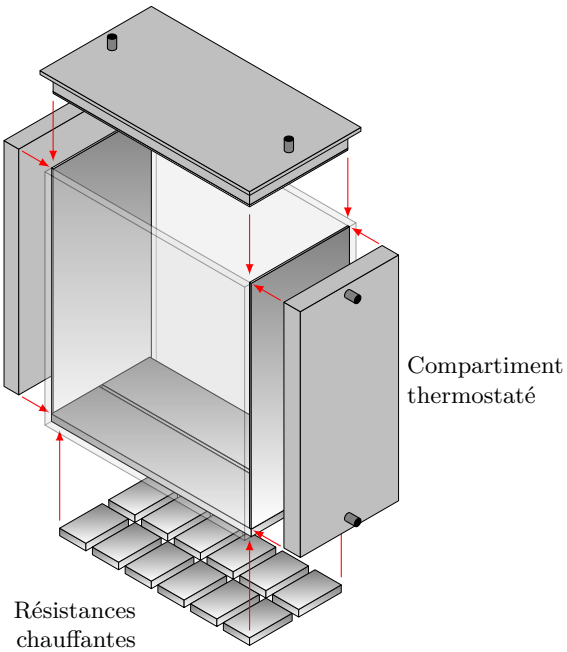


FIGURE 1.2 – Schéma présentant les dispositifs de chauffage sur les différentes faces de la cuve. Les compartiments latéraux ainsi que le couvercle sont creux, permettant la circulation d'un fluide thermostaté.

- Au lieu du PMMA utilisé jusqu'alors, un autre polymère, le Polyoxyméthylène (ou POM, ou Delrin, ou encore polyacétal) a été utilisé pour les compartiments latéraux. Il présente une meilleure tenue mécanique, et en particulier une meilleure tenue à la température.

- La présence de « casquettes » horizontales en haut des parois transparentes améliore leur tenue mécanique, et évite d'avoir des traînées d'eau sur les surfaces optiques lors de manipulations ou éventuels débordements.

1.2 Dispositifs de chauffage et refroidissement

La cuve a été conçue pour que ses quatre faces puissent être actives thermiquement. Le transfert thermique se fait à travers les parois en aluminium, les différents composants étant visibles sur le schéma de la figure 1.2. Des bains thermostatiques maintiennent un fluide à une température donnée, aussi bien chaude que froide, et le font circuler dans un des compartiments creux latéraux. Le couvercle peut lui aussi être alimenté en fluide thermostaté. Enfin, des résistances électriques sont fixées sous la cuve et permettent de chauffer le fond à une puissance donnée. L'épaisseur de ce dernier est conséquente (20 mm) afin d'homogénéiser la température en son sein. Ces résistances électriques sont prévues pour pouvoir être alimentées indépendamment les unes des autres, si l'on souhaite complexifier la condition de chauffage. Mais dans le cadre de nos expériences, ces résistances ne seront pas utilisées.

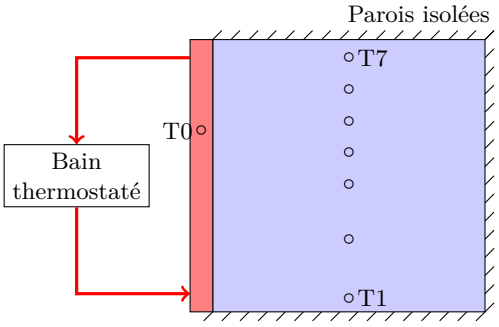


FIGURE 1.3 – Configuration fonctionnelle pour les expériences présentées dans ce manuscrit. Seule une paroi latérale est active, les autres étant isolées. Des sondes de températures Ti sont disposées dans la cuve (numérotée de bas en haut) ainsi que dans le compartiment chauffant.

1.3 Configuration retenue et instrumentation

Bien que ce dispositif offre de nombreuses possibilités, les travaux présentés ici se concentrent sur une configuration spécifique : le chauffage n'est induit que par une paroi latérale, tel que représenté sur la figure 1.3. Le fond, l'autre face latérale et le couvercle deviennent donc des surfaces passives et doivent être isolées thermiquement pour éviter qu'elles ne soient le siège de transferts conductifs. Une surcouche en PMMA a donc été ajoutée sur le fond et sur le côté afin que le fluide ne soit plus en contact avec l'aluminium, ce qui réduit légèrement les dimensions intérieures du volume d'étude. Le couvercle a quant à lui été remplacé par un panneau isolant de polystyrène extrudé, recouvert de papier vinyle adhésif noir. Ce couvercle flotte naturellement à la surface du fluide, il est maintenu à la hauteur désirée par deux cales. Le chauffage du compartiment se fait par un bain thermostatique Julabo, d'une puissance de 2000 W, renforcé par une résistance chauffante plongeante de quelques centaines de watts. Sa pompe fait circuler l'eau à un débit allant de 21 à 26 $\mathrm{L\,min^{-1}}$.

Un contrôle direct de la température dans la cuve et dans le compartiment chauffant est réalisé à l'aide d'une dizaine de sondes PT100. Une première sonde est plongée dans le compartiment chauffant, les autres sont distribuées selon la verticale au centre de la fenêtre d'observation (voir figure 1.3), le long de la paroi arrière afin de ne pas interférer avec la nappe laser. Le fait qu'elles ne soient pas situées dans le plan d'étude n'est pas problématique dans la mesure où l'écoulement est bidimensionnel. Chacune est reliée à un convertisseur qui retranscrit le signal de 0 à 100°C entre 0 et 10 V. Ces convertisseurs sont ensuite connectés à un ordinateur via un bornier National Instruments, l'acquisition des données étant gérée par une interface programmée sous Labview. Il faut noter que ces sondes et l'ensemble de leur chaîne de câblage, forme un ensemble fortement sujettes aux parasites, et que les performances des sondes se dégradent avec le temps (même si elles ne servent pas). En conséquence, des étalonnages ont été réalisés à plusieurs reprises afin de tenir compte d'une éventuelle dérivation. Malgré ces précautions, la précision de cette chaîne d'acquisition dépasse difficilement 0.5°C.

Un laser continu Spectra-Physics de type Millennia, de longueur d'onde

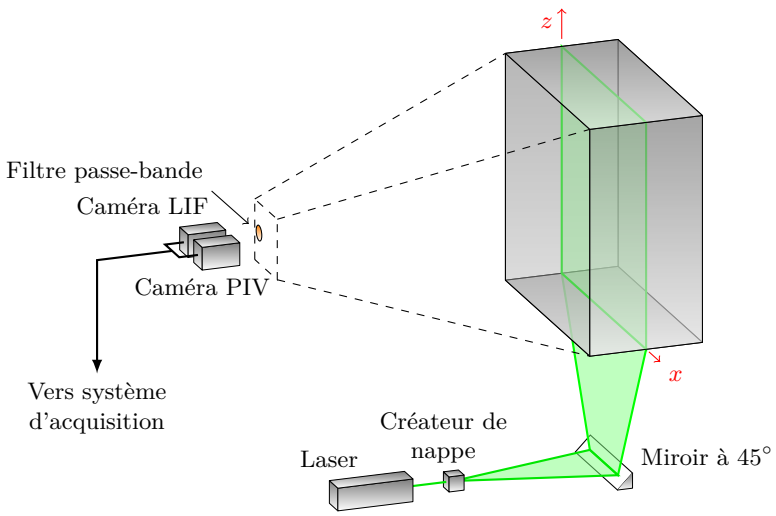


FIGURE 1.4 – Dispositif de mesure pour visualisations LIF et PIV. Le laser éclaire le plan médian, qui est capturé par deux caméras.

TABLE 1.1 – Principales caractéristiques des deux modèles de caméras employés (données constructeurs)

	Dalsa Pantera 1M60	**Andor Zyla 5.5**
Type de capteur	CCD	sCMOS
Résolution	1024 × 1024 pixels	2560 × 2160 pixels
Taille du capteur	12.3 × 12.3 mm	16.6 × 14.0 mm
Gamme dynamique	1 : 1000	1 : 25000
Encodage des données	12 bits	16 bits
Fréquence d'acquisition	60 Hz	40 Hz
Connectique	Camera Link	USB 3.0

532 nm et d'une puissance maximale de 5.2 W, crée une nappe verticale au milieu de la cuve, par l'intermédiaire d'un créateur de nappe (miroir oscillant ou lentille Powell, voir section 2.3.3) et d'un miroir à 45° qui renvoie verticalement la nappe créée horizontalement. Le dispositif est schématisé figure 1.4.

Deux caméras sont montées en regard de ce plan, l'une pour l'acquisition de la température par Fluorescence Induite par Laser (LIF, chapitre 2), l'autre pour l'acquisition du champ de vitesse par Vélocimétrie par Imagerie de Particules (PIV, chapitre 3). Deux types de caméras ont été employés : initialement, nous avons utilisé deux caméras CCD Dalsa de type Pantera 1M60, qui ont été remplacées par la suite par deux caméras sCMOS Andor, de type Zyla 5.5. Les caractéristiques de ces différentes caméras sont récapitulées dans le tableau 1.1, et les raisons de ce changement seront exposées plus loin, section 2.4.2. Elles sont situées à 2.7 m de l'expérience, ce qui permet un angle d'ouverture d'environ 12 degrés. Elles sont munies d'objectifs Nikkor 50 mm, permettant une très grande ouverture, jusqu'à $f/1.2$. La caméra dévolue à la LIF est munie d'un filtre interférentiel passe-bande de marque Edmund Optics (initialement) ou Semrock.

Plusieurs séries d'expériences ont été réalisées, et le matériel a évolué au

TABLE 1.2 – Récapitulatifs des principaux changements intervenus sur les composants entre les deux séries d'expériences réalisées. Les sections détaillant ces changements sont données entre parenthèses.

	Série 1	**Série 2**
Cuve (1.1)	n°1	n°2
Caméras (2.4.2)	Dalsa Pantera	Andor Zyla
Filtre LIF (2.3.2)	565-575 nm	567-585 nm
Concentration colorant (2.3.5)	35 µg L^{-1}	40 µg L^{-1}
Filtre PIV (3.2)	-	531-533 nm
Créateur de nappe (2.3.3)	Miroir oscillant	Lentille Powell (+ obturateur)
Nombre de sondes de température	8	12

fil du temps. On peut ramener l'ensemble des expériences à deux séries, dont les composants employés pour chacune d'elle sont résumés dans le tableau 1.2. On pourra utilement s'y référer par la suite. Les expériences des deux séries ne présentent pas de changement qualitatif au niveau des résultats, mais l'évolution du matériel a permis une amélioration sensible des conditions d'expérience, de la fiabilité et de la précision des mesures.

1.4 Commande et synchronisation

La synchronisation des différents composants de l'expérience (caméras, sondes, obturateur (*shutter*) du laser) est réalisé par un boîtier générateur de délai (*trigger*) *EG*, fourni par la société R&D Vision. C'est l'élément central du dispositif. Il dispose de 6 sorties TTL indépendantes générant des signaux compris entre 0 et 5 V. On dédie une sortie à chaque caméra, une sortie pour déclencher l'acquisition de la température, et une sortie pour le contrôle de l'éclairage, commandant le déclenchement du balayage du miroir oscillant[2] ou l'ouverture d'un obturateur selon le créateur de nappe utilisé. Le schéma de la figure 1.5 explicite les relations entre les différents éléments.

Le déclenchement des caméras est contrôlé par le front montant d'un signal créneau, et le temps d'exposition par la durée de celui-ci, ce qui permet une très grande souplesse d'utilisation. On peut ainsi définir des délais différents entre paires d'images, ce qui est utile pour la PIV (nous y reviendrons section 3.2.2). Le contrôle d'un obturateur permet quant à lui d'éviter d'exposer le colorant au laser entre deux séquences d'acquisition, afin de minimiser le photoblanchiment dans le cadre de la LIF. Les chronogrammes d'une séquence d'acquisition (*burst*) sont écrits par une routine Matlab, et envoyés par l'intérmédiaire d'un port COM au boîtier, qui se chargera de les exécuter autant de fois que demandé. La figure 1.6 présente un exemple de chronogrammes employés.

Comme on peut le voir sur le schéma 1.5, deux ordinateurs sont utilisés[3].

[2] La fonction de balayage en elle-même étant générée par un générateur de fonction ou un programme Labview.

[3] En pratique dans la plupart des travaux que nous avons réalisés, il aurait été possible de n'en utiliser qu'un seul. Mais afin de se réserver la possibilité d'utiliser les caméras à leur pleine cadence, il est préférable de ne pas charger l'ordinateur qui leur est dédié par d'autres processus en parallèle. Cela évite en outre des pertes de données totales en cas de problème sur un des systèmes au cours de l'expérience.

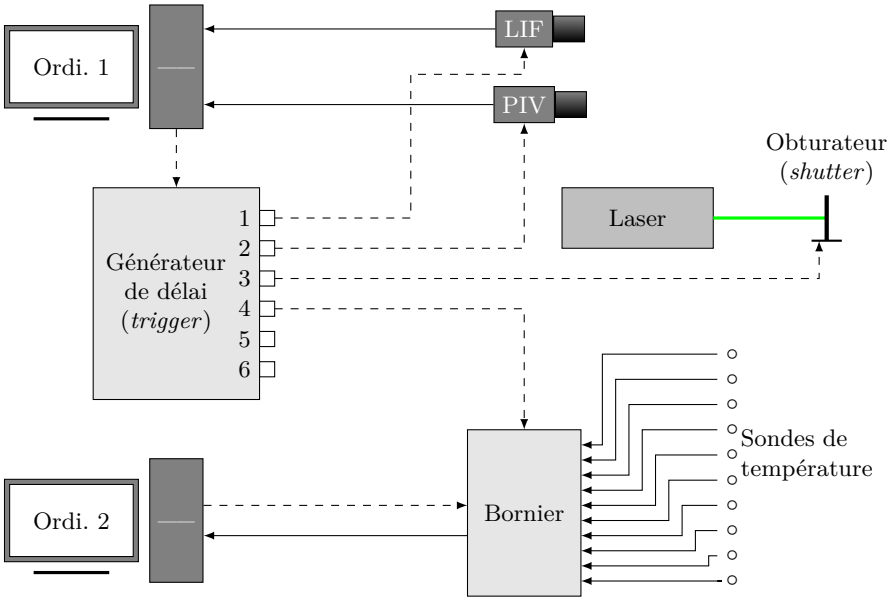


FIGURE 1.5 – Schéma des différents composants avec leurs câblage. Une flèche discontinue représente l'envoi d'une instruction, une flèche pleine représente un rapatriement de données.

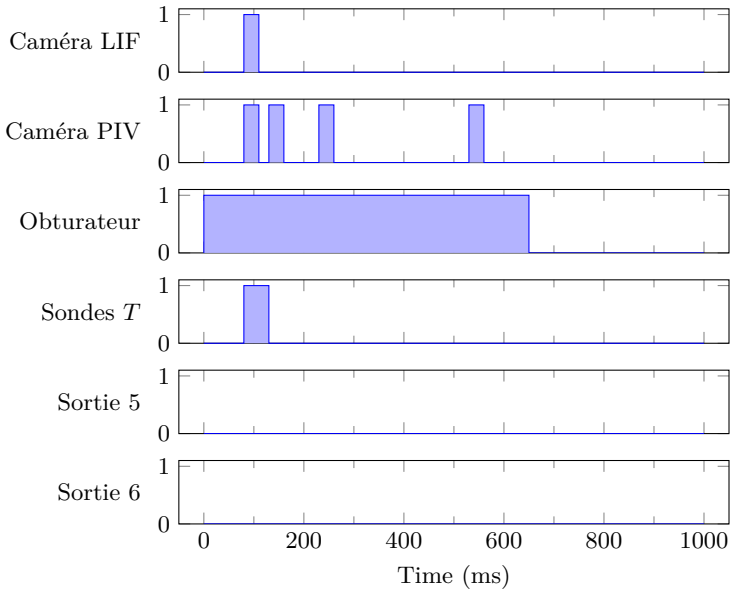


FIGURE 1.6 – Exemple des chronogrammes paramétrant le générateur de délai pour une expérience de la deuxième série (voir tableau 1.2).

Le premier est dédié au rapatriement des images des caméras, et le second aux données des sondes de température afin de répartir les opérations d'écriture.

Chapitre 2

Mesures de température par Fluorescence Induite par Laser

Sommaire

2.1 Principes et théorie 14
2.1.1 Le phénomène de fluorescence 14
2.1.2 La fluorescence induite par laser (LIF) 15
2.1.3 Modélisation théorique, du laser au capteur 16
2.2 Exploitation 20
2.2.1 Linéarisation 20
2.2.2 Principes de calibration 22
2.2.3 Détermination théorique de la concentration optimale 24
2.2.4 Problème des imperfections temporelles 26
2.3 Application 28
2.3.1 Choix du colorant 28
2.3.2 Filtre interférentiel 29
2.3.3 Nappe laser 29
2.3.4 Variabilité spatiale des paramètres 31
2.3.5 Concentration du colorant 33
2.3.6 Calibration géométrique et physique 35
2.3.7 Post-traitement final 38
2.3.8 Précision et limites 38
2.4 Étude complémentaire : choix de la caméra 43
2.4.1 Appareil reflex numérique 44
2.4.2 Caméra haute sensibilité sCMOS 47
2.5 Étude complémentaire : T-LIF à deux couleurs et un colorant 47

Ce chapitre présente la technique expérimentale qui a été mise en œuvre pour mesurer la température dans tout le champ d'observation. La première

section présente la Fluorescence Induite par Laser et son application à la température dans un cadre général. Elle permet d'aboutir à une équation qui lie l'intensité lumineuse enregistrée par la caméra à la température du fluide. La section suivante s'appuie sur cette équation pour donner des contours théoriques à l'utilisation de cette technique. Ces deux premières sections se veulent générales, et les développements qui y sont présentés peuvent en conséquence facilement être exportés pour d'autres applications. Nous y faisons le lien entre les différentes méthodes rencontrées dans la littérature, et présentons quelques développements analytiques originaux, permettant notamment de guider le choix des paramètres en fonction des dimensions du domaine observé. La section 2.3 s'attache quant à elle à l'application de cette théorie dans le cadre plus spécifique de nos expériences, et expose les différents choix pratiques qui ont été faits. Enfin, nous présentons deux études complémentaires n'ayant pas été exploitées dans notre cas, mais présentant des résultats pouvant intéresser la communauté. Elles concernent la faisabilité de l'utilisation d'appareils photos de type Reflex à la place de caméras scientifiques, et les difficultés de mise en œuvre de la LIF dite à deux couleurs dans notre configuration.

2.1 Principes et théorie

2.1.1 Le phénomène de fluorescence

Il convient tout d'abord de comprendre ce qu'est le phénomène de fluorescence. Une molécule présente différents états énergétiques. Lorsque les transitions d'un état à un autre s'accompagnent de l'absorption ou de l'émission d'un photon, on parle de transitions radiatives. Considérant une molécule M qui présente deux états E_1 et E_2 et que l'on excite par une onde électromagnétique, on peut distinguer les transitions suivantes :

l'absorption : passage de l'état fondamental 1 à l'état excité 2 par absorption d'un photon d'énergie $h\nu$: $M + h\nu \rightarrow M^*$

l'émission spontanée : la molécule va spontanément passer de son état excité à son état fondamental en émettant un photon : $M^* \rightarrow M + h\nu$

l'émission stimulée : un photon est cette fois nécessaire pour provoquer le retour à l'état fondamental de la molécule. Comme dans le cas précédent, cette transition s'accompagne de l'émission d'un photon, de mêmes caractéristiques que le photon incident. On obtient donc : $M^* + h\nu \rightarrow M + 2h\nu$

La fluorescence est le phénomène de désexcitation moléculaire correspondant à l'émission spontanée de photons. Le phénomène d'émission stimulée sera quant à lui négligé par la suite.

La désactivation de la molécule peut toutefois s'effectuer également selon d'autres mécanismes, non radiatifs, qui entrent en compétition avec la fluorescence. Il s'agit de conversions internes, de désexcitation collisionnelle (*quenching* en anglais) ou de passage de l'état électronique singulet (S) vers l'état triplet (T), ce dernier menant notamment au phénomène de phosphorescence. Le diagramme de Perrin-Jablonski sur la figure 2.1 résume ces transitions possibles (Lemoine & Grisch, 2012). De manière schématique, la température, qui affecte l'agitation moléculaire, va tendre à favoriser un « itinéraire » de désexcitation

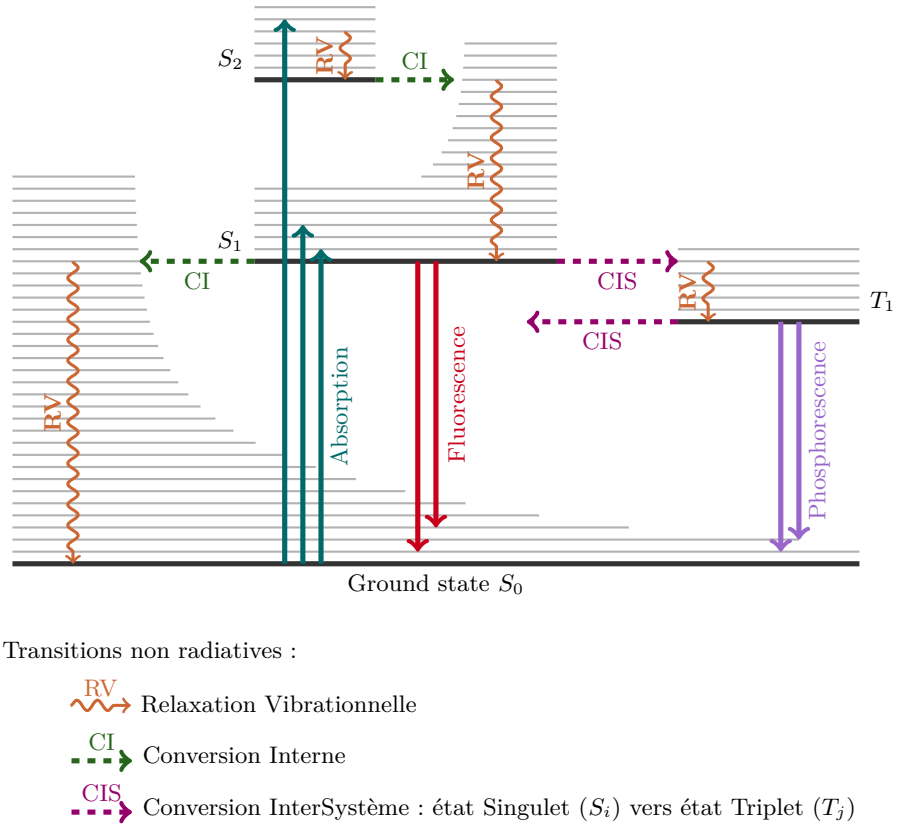


FIGURE 2.1 – Diagramme de Perrin-Jablonski présentant les différents états électroniques d'une molécule et les transitions possibles entre eux. (Valeur, 2004)

ou un autre, et modifier ainsi le niveau de fluorescence. C'est ce principe qui sera exploité par la suite. Comme le montre cette même figure, l'émission spontanée a généralement lieu à partir d'un niveau d'excitation plus faible que celui auquel l'absorption a porté la molécule (principe de Franck-Condon). Cela explique le fait que l'émission de fluorescence se manifeste à une longueur d'onde supérieure (donc moins énergétique). On observe donc un décalage entre les spectres d'absorption et d'émission qui peut être mis à profit pour isoler le signal de fluorescence du rayonnement excitateur (voir figure 2.2).

2.1.2 La fluorescence induite par laser (LIF)

La fluorescence induite par laser (LIF) est une technique qui exploite le principe de fluorescence d'un traceur pour mesurer, dans les fluides et de manière quantitative, des grandeurs telles que la concentration (Walker, 1987), la température (Nakajima *et al.*, 1991), ou la pression en phase gazeuse (Lemoine & Leporcq, 1995). Il existe également des applications en milieux réactifs ou diphasiques (Kohse-Höinghaus, 1994).

Les molécules fluorescentes sont portées à leur état excité par une source lumineuse, généralement un faisceau laser (figure 2.2). Celui-ci présente l'avan-

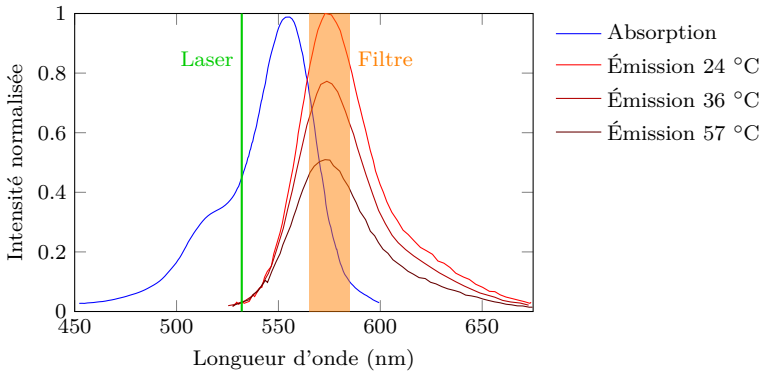


FIGURE 2.2 – Représentation des spectres d'absorption et d'émission normalisés de la Rhodamine B, d'après Lavieille *et al.* (2001). On remarque que le spectre d'émission est décalé vers les hautes longueurs d'ondes, et que celui-ci, décroît ici fortement avec la température. En l'excitant avec par exemple un laser à 532 nm, un filtre adapté permet donc d'isoler un signal fortement dépendant de la température.

tage d'émettre selon un spectre très restreint, et d'être très énergétique. Les molécules éclairées vont ensuite réémettre de la lumière par fluorescence à une longueur d'onde plus élevée. Ce signal peut ainsi être isolé, puis capté et enregistré par un dispositif de détection (caméra par exemple), afin d'en extraire de l'information (dans notre cas la température) sur le fluide dans lequel le colorant est dissout. Selon le type d'éclairage, on peut alors obtenir la grandeur que l'on mesure en un point (Nakajima *et al.*, 1991), dans un plan (Sakakibara *et al.*, 1993) ou même dans tout un volume par balayage (Sakakibara & Adrian, 1999).

2.1.3 Modélisation théorique, du laser au capteur

La figure 2.3 présente le schéma d'un dispositif expérimental semblable à celui qui sera utilisé dans la réalité. Un dispositif optique (miroir oscillant, lentille cylindrique, lentille Powell, etc) transforme le faisceau en une nappe perpendiculaire au plan du schéma (yz). Un miroir à 45° dévie cette nappe qui pénètre verticalement dans la cuve via un hublot. Elle excite alors le colorant, qui fluoresce. Le signal de fluorescence est isolé du signal excitateur par un filtre adéquat et enregistré par une caméra, pour être finalement analysé.

Nous allons nous attacher à décrire ici les différentes étapes de cette chaîne. Pour cela nous considérons un volume de collection V_c tel que décrit sur la figure 2.3, représentant un volume de liquide observé suffisamment petit pour que ses propriétés puissent être considérées comme constantes. Étudions dans un premier temps la réaction qui s'y opère.

Cette même figure nous permet d'introduire le repère selon lequel nous travaillerons durant tout ce manuscrit : le plan d'observation est régi en horizontal par l'axe x et en vertical par z, l'axe y correspondant à l'axe de la caméra.

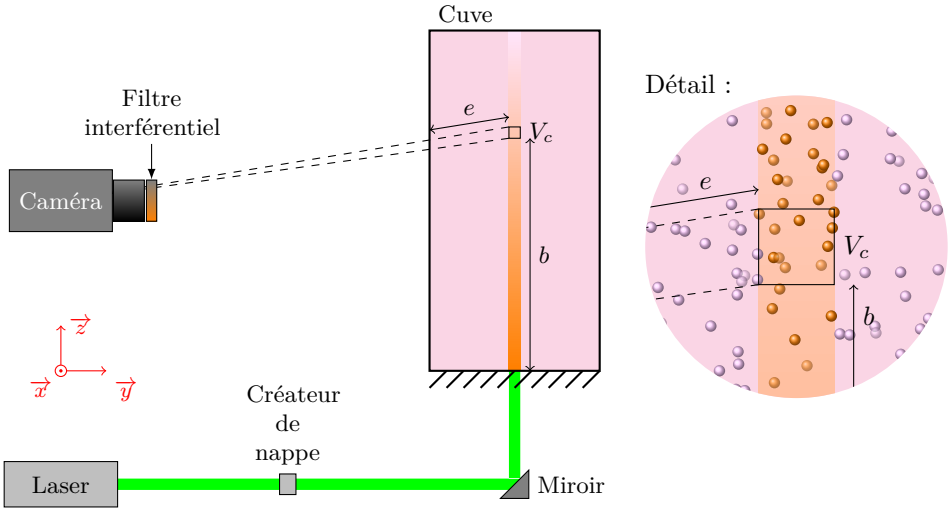


FIGURE 2.3 – Schéma de principe d'un dispositif de fluorescence induite par laser vu de côté. La largeur du faisceau laser est considérablement exagérée, V_c désigne un volume éclairé élémentaire. La vue de droite est un détail de cette zone, où les sphères représentent les molécules de colorant.

2.1.3a Expression du signal de fluorescence

Comme décrit par Walker (1987), la dépendance en température de la fluorescence d'un colorant est influencée par plusieurs paramètres dont le pH, sa concentration et surtout sa nature. Le volume de collection V_c contient n moles de colorant, le pH y est constant et l'éclairage des molécules uniforme d'intensité I_i. L'intensité de fluorescence émise I_e à la longueur d'onde λ peut donc s'écrire (Lemoine *et al.* (1996)) :

$$I_e(\lambda) = I_i n \varepsilon(\lambda_0) \eta(\lambda) \tag{2.1}$$

où

- n dépend du volume considéré V_c et de la concentration C du colorant selon la relation $n = CV_c$.
- $\varepsilon(\lambda_0)$ est le coefficient d'extinction molaire à la longueur d'onde excitatrice λ_0. Il est proportionnel à la fraction de Boltzmann qui traduit la répartition des molécules entre les sous-niveaux d'énergie de l'état fondamental. Cette fraction dépend de la température. D'après Lemoine & Grisch (2012), pour un système simplifié à deux niveaux d'énergie 1 et 2, la fraction de molécules dans l'état fondamental $f(T)$ peut s'écrire :

$$f(T) \propto e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \tag{2.2}$$

  où E_1 et E_2 sont les niveaux d'énergies des états 1 et 2, et k_B la constante de Boltzmann.
- $\eta(\lambda)$ est le rendement quantique de fluorescence, soit la fraction de molécules excitées dont le retour à l'état fondamental se fait par fluorescence

(cf diagramme figure 2.1). Il varie selon la longueur d'onde λ que l'on observe, et c'est dans ce terme que se concentre généralement l'essentiel de la dépendance à la température. Dans l'hypothèse où l'on néglige les transitions par passage à l'état triplet et par conversions internes, il peut s'exprimer comme suit (Lemoine *et al.*, 1999) :

$$\eta \propto e^{\frac{E_a}{k_B T}} \tag{2.3}$$

où E_a est l'énergie d'activation intervenant entre les molécules de colorant et celles du solvant. En effet, comme nous l'avons vu, la fluorescence est en concurrence avec des transitions non radiatives, notamment liées aux collisions entre molécules. Ces dernières sont d'autant plus fréquentes que la phase est condensée et que l'agitation des molécules (donc la température) augmente.

On définit alors $\beta(\lambda) = \frac{E_2 - E_1 + E_a}{k_B T}$ et d'après les équations (2.2) et (2.3) on peut écrire :

$$\varepsilon(\lambda_0)\eta(\lambda) = K_{\text{spec}}(\lambda_0, \lambda) e^{\beta(\lambda)/T} \tag{2.4}$$

où $K_{\text{spec}}(\lambda_0, \lambda)$ et $\beta(\lambda)$ sont deux constantes définies pour une longueur d'onde d'émission λ donnée. Elles regroupent un certain nombre de propriétés physiques et spectroscopiques du mélange fluorescent.

Finalement, l'équation (2.1) peut donc se réécrire :

$$I_e(\lambda) = I_i C V_c K_{\text{spec}}(\lambda_0, \lambda) e^{\beta(\lambda)/T}. \tag{2.5}$$

2.1.3b Intensité lumineuse incidente

Il convient désormais d'évaluer l'intensité lumineuse incidente I_i qui arrive sur les particules de colorant que contient le volume de collection. Dans l'hypothèse d'une nappe homogène (ce qui est faux dans le cas de l'utilisation d'une lentille cylindrique) et toutes choses égales par ailleurs, celle-ci dépend de la distance l'éloignant du créateur de nappe, qui correspond à la projection du trajet optique dans le plan (yz) (voir figure 2.4). Notant cette distance l_s, l'angle d'ouverture de la nappe θ_s, et la largeur du volume de contrôle l_{V_c}, la fraction de lumière qu'il reçoit I_s se relie à l'intensité émise au niveau du laser I_0 par la relation géométrique

$$I_s = \frac{I_0 l_{V_c}}{2 l_s \tan\left(\frac{\theta_s}{2}\right)}, \tag{2.6}$$

et décroît donc en $1/l_s$. On peut ainsi écrire l'intensité lumineuse à l'entrée de la cuve I_1 comme :

$$I_1 = I_0 K_{\text{opt1}} \qquad \text{avec } K_{\text{opt1}} = \frac{I_0 l_{V_c}}{2 l_{s0} \tan\left(\frac{\theta_s}{2}\right)}, \tag{2.7}$$

où l_{s0} correspond au chemin optique menant à l'entrée du domaine.

La nappe laser ayant pénétré dans le fluide, son intensité va ensuite continuer à décroître en fonction de la position verticale z selon la loi $\frac{1}{1+z/l_{s0}}$. Mais elle va dans le même temps être absorbée par le colorant le long de son trajet optique, noté b (figure 2.3). On modélise ce phénomène d'absorption par la loi de Beer-Lambert, qui admet une décroissance en $e^{-C\varepsilon(\lambda_0)b}$, pour laquelle C est

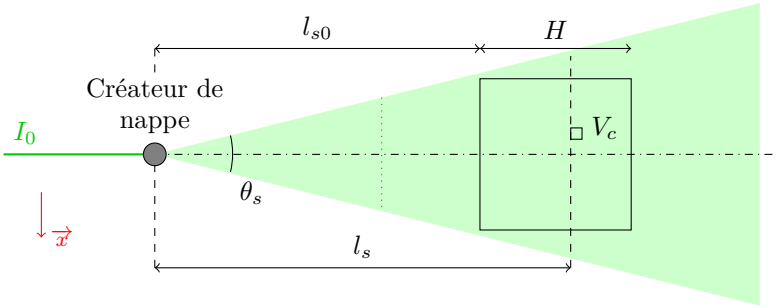


FIGURE 2.4 – Schéma de la nappe laser explicitant les notations utilisées pour le calcul de l'intensité reçue par le volume de contrôle V_c. La position du miroir à 45° est symbolisé par la ligne verticale pointillée, le chemin optique étant représenté « déplié ».

la concentration de molécules fluorescentes et $\varepsilon(\lambda_0)$ le coefficient d'extinction molaire à la longueur d'onde d'excitation λ_0, déjà rencontré plus haut. On peut alors, exprimer l'intensité reçue par le volume de contrôle I_i en fonction de l'intensité à l'entrée du domaine I_1 :

$$I_i = \frac{I_1}{1 + z/l_{s0}} e^{-C\varepsilon(\lambda_0)b}. \tag{2.8}$$

2.1.3c Altérations de l'intensité émise

L'intensité qu'émet le colorant n'est pas enregistrée directement comme telle par la caméra. Puisqu'il existe généralement une plage de recouvrement entre les spectres d'absorption et d'émission d'un colorant fluorescent (visible figure 2.2), une partie de la fluorescence va être réabsorbée par le colorant lui-même, atténuant d'autant le signal exploitable. Comme le phénomène d'absorption, cette *réabsorption* peut être modélisée par la loi de Beer-Lambert. On exprime ainsi l'intensité sortie du domaine I_{out} pour une longueur d'onde d'émission λ :

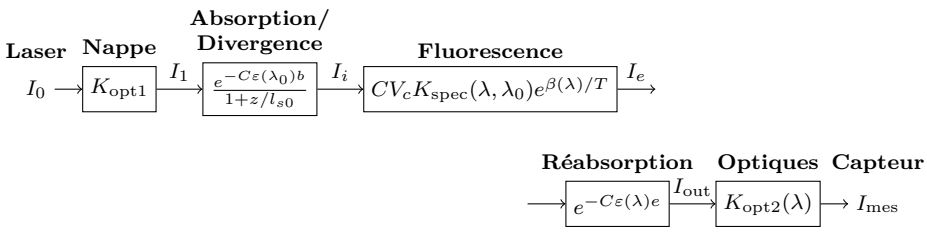
$$I_{\text{out}}(\lambda) = I_e e^{-C\varepsilon(\lambda)e} \tag{2.9}$$

où e exprime la distance de fluide traversé entre V_c et la caméra (figure 2.3).

Il reste enfin à tenir compte de l'influence des différents composants optiques intercalés entre le fluide et le photo-détecteur tels que filtres interférentiels ou objectifs. Leurs rendements et facteurs de forme seront donc regroupé au sein d'une constante $K_{\text{opt2}}(\lambda)$.

2.1.3d Équation complète

L'ensemble de cette modélisation peut se résumer par le diagramme suivant :



Par commodité nous réunirons les deux constantes optiques en une seule en posant $K_{\mathrm{opt}}(\lambda) = K_{\mathrm{opt1}}K_{\mathrm{opt2}}(\lambda)$. On peut désormais écrire l'équation complète, donnant l'intensité mesurée par le photo-détecteur I_{mes} pour le volume de collection considéré :

$$I_{\mathrm{mes}}(\lambda) = I_0 \frac{K_{\mathrm{opt}}(\lambda)K_{\mathrm{spec}}(\lambda,\lambda_0)CV_c}{1+z/l_{s0}} e^{-C(\varepsilon(\lambda_0)b+\varepsilon(\lambda)e)} e^{\beta(\lambda)/T}. \tag{2.10}$$

En pratique cependant, on est incapable d'isoler une unique longueur d'onde. Il convient donc d'intégrer l'intensité mesurée I_{mes} sur une plage de longueurs d'onde i allant de λ_1 à λ_2 :

$$I_{\mathrm{f},i} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{\mathrm{mes}}(\lambda)d\lambda. \tag{2.11}$$

D'après Lavieille *et al.* (2004) le résultat de cette intégrale peut se mettre sous la forme suivante, faisant apparaître dans l'exponentielle un polynôme du second ordre en $1/T$:

$$\boxed{I_{\mathrm{f},i} = I_0 \frac{K_{\mathrm{opt},i}K_{\mathrm{spec},i}(\lambda_0)CV_c}{1+z/l_{s0}} e^{-C\varepsilon(\lambda_0)b} e^{K_i(Ce)} e^{\frac{A_i(Ce)}{T^2}+\frac{B_i(Ce)}{T}}.} \tag{2.12}$$

Les indices i dénotent ici des grandeurs spécifiques à la bande spectrale considérée. Les coefficients A_i et B_i caractérisent la dépendance en température de cette bande spectrale, et sont en général des fonctions linéaires du produit Ce (concentration multipliée par le chemin optique de réabsorption). K_i exprime la réabsorption de la fluorescence sur cette même bande spectrale, et s'écrit comme une fonction quadratique de Ce (Lemoine & Grisch, 2012).

Notons que pour $Ce > 1.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{mol\,m\,L^{-1}}$, un polynôme en $1/T$ d'ordre supérieur doit être utilisé dans l'exponentielle (Lavieille *et al.*, 2004).

2.2 Exploitation

Au vu du nombre de paramètres qui interviennent dans l'équation (2.12), tout l'enjeu va consister à extraire du signal celui auquel on s'intéresse, ici la température, sans connaître nécessairement tous les autres.

2.2.1 Linéarisation

Cette étape n'est pas à proprement parler obligatoire pour parvenir à extraire le signal de température, mais elle va nous permettre de comprendre et d'expliciter l'utilisation de certaines formules empiriques, d'établir les limites de leur

domaine d'application, et d'amener quelques développements théoriques intéressants, notamment en ce qui concerne la concentration, comme nous le verrons plus loin.

La gamme de température à laquelle on s'intéresse est toujours limitée. Rappelons que la température T est, sauf mention contraire, exprimée en Kelvin. Ainsi, si on observe le signal autour d'une température donnée T_0 (par exemple 300 K), on peut définir T comme $T = T_0 + dT$, soit $T = T_0\left(1 + \frac{dT}{T_0}\right)$, avec $\frac{dT}{T_0} \ll 1$. On peut alors écrire :

$$e^{\frac{A_i}{T^2}+\frac{B_i}{T}} = e^{\frac{A_i/T_0^2}{\left(1+\frac{dT}{T_0}\right)^2}} e^{\frac{B_i/T_0}{1+\frac{dT}{T_0}}}. \tag{2.13}$$

Par développement limité de la fonction $e^{\frac{a}{1-x}}$ en 0 on obtient

$$\begin{aligned} e^{\frac{A_i}{T^2}+\frac{B_i}{T}} = e^{\frac{A_i}{T_0^2}+\frac{B_i}{T_0}} \Bigg[& 1 - \left(\frac{2A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0}\right)\frac{dT}{T_0} \\ & + \left(\frac{3A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{2A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0}\right)^2\right)\left(\frac{dT}{T_0}\right)^2 \\ & - \left(\frac{4A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0} + \left(\frac{2A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0}\right)\left(\frac{3A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0}\right)^3\right)\left(\frac{dT}{T_0}\right)^3 \\ & + o\left(\frac{dT}{T_0}\right)^3 \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

En conséquence de quoi, on peut réécrire (2.12) sous la forme polynomiale suivante :

$$I_{\mathrm{f},i} = I_0 \frac{K_{\mathrm{opt},i} K_{\mathrm{spec},i} C V_c}{1 + z/l_{s0}} e^{-C\varepsilon b} e^{K_i} e^{\frac{A_i}{T_0^2}+\frac{B_i}{T_0}} \left(1 + p_{i1} dT + p_{i2} dT^2 + p_{i3} dT^3\right) \tag{2.15}$$

avec

$$p_{i1} = \frac{-1}{T_0^2}\left[\frac{2A_i}{T_0} + B_i\right], \tag{2.16}$$

$$p_{i2} = \frac{1}{T_0^3}\left[\frac{3A_i}{T_0} + B_i + \frac{1}{2T_0}\left(\frac{2A_i}{T_0} + B_i\right)^2\right], \tag{2.17}$$

$$\text{et } p_{i3} = \frac{-1}{T_0^4}\left[\frac{4A_i}{T_0} + B_i + \frac{1}{T_0}\left(\frac{2A_i}{T_0} + B_i\right)\left(\frac{3A_i}{T_0} + B_i\right) + \frac{1}{6T_0^2}\left(\frac{2A_i}{T_0} + B_i\right)^3\right]. \tag{2.18}$$

Il est à noter que les termes $-A_i/T_0$ et B_i sont généralement du même ordre (voir Lavieille *et al.* (2004), et plus bas), compliquant de fait toute simplification des expressions des coefficients à ce stade.

Ce développement permet finalement de donner une justification théorique à certaines formules empiriques utilisées dans la littérature. Selon l'amplitude et la précision des mesures, ou la température de référence choisie, on pourra adapter l'ordre du polynôme. Par exemple : un premier ordre (Sakakibara *et al.*,

1993; Petracci *et al.*, 2006), un second ordre (Chunyan & Xiaoshu, 2009) ou un troisième ordre (Coolen *et al.*, 1999).

En complément, pour tenir compte de la proximité de valeurs entre $-A_i/T_0$ et B_i, on peut introduire un coefficient γ_i tel que

$$\gamma_i = -\frac{2}{T_0}\frac{A_i}{B_i}. \tag{2.19}$$

Cela nous permet de réécrire p_{i1}, p_{i2} et p_{i3} sous la forme :

$$p_{i1} = -\frac{1-\gamma_i}{T_0^2}B_i, \tag{2.20}$$

$$p_{i2} = \frac{1}{T_0^3}\left[\left(1-\frac{3}{2}\gamma_i\right)B_i + \frac{(1-\gamma_i)^2}{2T_0}B_i^2\right], \tag{2.21}$$

$$p_{i3} = \frac{-1}{T_0^4}\left[(1-2\gamma_i)B_i + \frac{(1-\gamma_i)(1-\frac{3}{2}\gamma_i)}{T_0}B_i^2 + \frac{(1-\gamma_i)^2}{6T_0^2}B_i^3\right]. \tag{2.22}$$

Ainsi lorsque γ_i est proche de 1 (voir le tableau 2.2 p.36) on peut simplifier les expressions (2.20)-(2.22) précédentes :

$$p'_{i1} = -\frac{1-\gamma_i}{T_0^2}B_i, \tag{2.23}$$

$$p'_{i2} = \frac{1-\frac{3}{2}\gamma_i}{T_0^3}B_i, \tag{2.24}$$

$$p'_{i3} = \frac{-1}{T_0^4}\left[(1-2\gamma_i)B_i + \frac{(1-\gamma_i)(1-\frac{3}{2}\gamma_i)}{T_0}B_i^2\right]. \tag{2.25}$$

Nous reviendrons sur ces expressions dans la section suivante.

2.2.2 Principes de calibration

Deux obstacles se posent à ce stade : d'une part la difficulté, voire l'impossibilité d'évaluer précisément l'ensemble des termes présents dans l'équation (2.15), et d'autre part la variation de ces nombreux paramètres dans le temps et dans l'espace.

Des précautions expérimentales peuvent être prises pour limiter ces variations autant que possible. Un colorant bien choisi (voir Walker (1987) pour l'influence de divers paramètres sur la fluorescence), une faible concentration et une exposition au laser aussi limitée que possible permettent de s'affranchir notamment du phénomène de photoblanchiment (*photobleaching*), dégradation des propriétés fluorescentes du colorant par surexposition (voir notamment Larsen & Crimaldi (2006)). L'utilisation d'un laser continu plutôt que pulsé garantit également une stabilité satisfaisante de l'éclairage I_0. Il devient alors raisonnable de postuler que ces différents paramètres restent constants au cours du temps, et on peut regrouper l'ensemble des pré-facteurs de (2.12) sous une même constante temporelle, soit :

$$K_{\mathrm{f}}(x,y) = I_0 K_{\mathrm{opt},i} K_{\mathrm{spec},i} C V_c e^{-C\varepsilon b} e^{K_i}. \tag{2.26}$$

Il n'en reste pas moins qu'une forte variabilité spatiale, induite notamment par la divergence de la nappe et les phénomènes d'absorption, doit être prise

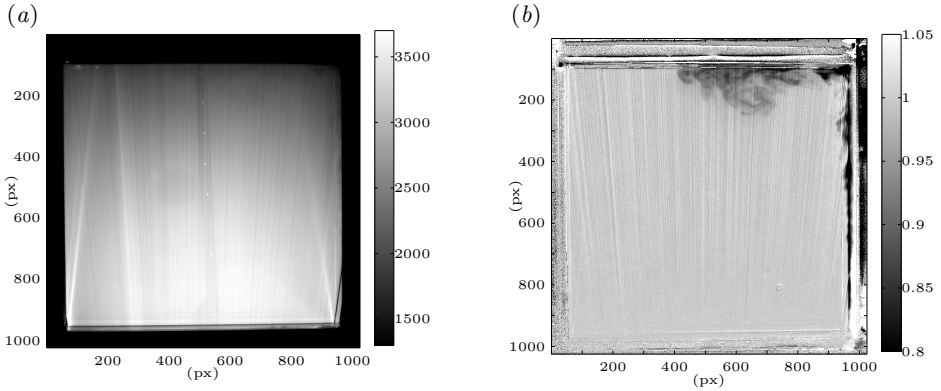


FIGURE 2.5 – (*a*) Exemple de champ capturé par la caméra. Les niveaux de gris correspondent à l'intensité mesurée par le capteur sur une échelle s'étalant de 0 à 4096 (12 bits). Aucun champ de température n'est perceptible, mais diverses irrégularités spatiales sont visibles : stries verticales, reflets, sondes de température. De plus un gradient de luminosité lié à l'absorption s'étale sur 2000 niveaux de gris. (*b*) L'intensité du même champ, normalisée par deux images de références, selon la formule (2.30). Les signaux parasites ont bien été éliminés, et hormis un bruit résiduel, les variations de luminosité représentent cette fois les variations de température.

en compte. La figure 2.5(*a*) donne un aperçu du champ qu'enregistre la caméra, faisant clairement apparaître le résultat de ces phénomènes, auxquels s'ajoutent diverses irrégularités d'éclairage qui créent les stries verticales.

Pour s'affranchir de l'influence de tous les paramètres contenus dans K_f, on normalise le champ $I_{\mathrm{f},i}(T,x,y)$ instantané, par un champ homogène en température enregistré à une température de référence T_ref. On obtient alors, en utilisant l'équation complète (2.12) :

$$\ln\left(I_{\mathrm{n1},i}(T)\right) = \ln\left(\frac{I_{\mathrm{f},i}(T,x,y)}{I_{\mathrm{f},i}(T_\mathrm{ref},x,y)}\right) = A_i\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{{T_\mathrm{ref}}^2}\right) + B_i\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_\mathrm{ref}}\right) \tag{2.27}$$

ou en utilisant la forme linéarisée (2.15) :

$$I_{\mathrm{n1},i}(dT) = \frac{I_{\mathrm{f},i}(dT,x,y)}{I_{\mathrm{f},i}(dT_\mathrm{ref},x,y)} = \frac{1 + p_{i1}dT + p_{i2}dT^2 + p_{i3}dT^3}{1 + p_{i1}dT_\mathrm{ref} + p_{i2}{dT_\mathrm{ref}}^2 + p_{i2}{dT_\mathrm{ref}}^3} \tag{2.28}$$

où p_{i1}, p_{i2}et p_{i3} sont des fonctions de A_i et B_i.

Rappelons que dans le cas général, A_i et B_i dépendent de Ce, produit de la concentration par le chemin optique. Dans l'hypothèse où ce produit est constant, ces coefficients seront donc les mêmes en tout point. On pourra alors aisément les déterminer par ajustement de courbe, moyennant de pouvoir relier intensité lumineuse et température en au moins un point du domaine (sonde de température par exemple). Cette normalisation est alors suffisante (voir par exemple Sakakibara *et al.* (1993)).

En revanche, dans le cas plus général où Ce varie, obtenir une loi valable en tout point exige de s'affranchir de A_i et B_i, en plus de K_f que cette première

normalisation a déjà éliminé. Théoriquement, il faudrait donc trois champs de référence.

En pratique, dans le cas courant où :

- la gamme de température est suffisamment faible pour permettre de négliger le terme en dT^3 dans la forme linéarisée,
- le terme γ_i introduit en (2.19) est suffisamment proche de 1 pour utiliser les formes simplifiées (2.23) et (2.24),

l'expression de l'intensité devient

$$I_{\mathrm{f},i} = K_{\mathrm{f}}(1 + p'_{i1}dT + p'_{i2}dT^2). \tag{2.29}$$

On peut alors utiliser deux températures de référence dT_{lo} et dT_{hi}, et normaliser l'intensité comme

$$I_{\mathrm{n2},i}(T) = \frac{I_{\mathrm{f},i}(dT, x, y) - I_{\mathrm{f},i}(dT_{\mathrm{hi}}, x, y)}{I_{\mathrm{f},i}(dT_{\mathrm{lo}}, x, y) - I_{\mathrm{f},i}(dT_{\mathrm{hi}}, x, y)} \tag{2.30}$$

soit

$$I_{\mathrm{n2},i}(T) = \frac{(\gamma_i - 1)(dT - dT_{\mathrm{hi}}) + \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{3}{2}\gamma_i\right)(dT^2 - {dT_{\mathrm{hi}}}^2)}{(\gamma_i - 1)(dT_{\mathrm{lo}} - dT_{\mathrm{hi}}) + \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{3}{2}\gamma_i\right)({dT_{\mathrm{lo}}}^2 - {dT_{\mathrm{hi}}}^2)}. \tag{2.31}$$

On obtient alors une formule qui ne dépend plus que du seul paramètre γ_i, qui dépend de A_i et B_i, et donc de Ce. S'affranchir de cette dépendance requiert l'égalité :

$$\gamma_i - 1 = 1 - \frac{3}{2}\gamma_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma_i = \frac{4}{5}. \tag{2.32}$$

En conclusion, **lorsque γ_i est proche de 4/5, nous pouvons obtenir une loi unique reliant l'intensité mesurée normalisée $I_{\mathbf{n2},i}$ à la température du champ T, qui ne dépend ni du temps ni de l'espace.** Le résultat est alors satisfaisant, comme l'illustre la figure 2.5(*b*)), pour laquelle les irrégularités résiduelles ne sont pas dues à la qualité de la calibration mais à des fluctuations temporelles de l'éclairage, sur lesquelles on reviendra plus loin. L'usage de deux références au lieu d'une seule permet en outre de mieux prendre en compte certaines variations continues induites par le changement de température, comme un léger déplacement des parois lié à la dilatation, ou l'influence de la réfraction lors de l'établissement d'un gradient thermique.

2.2.3 Détermination théorique de la concentration optimale

La concentration de colorant à utiliser n'est pas un problème trivial. En effet, si augmenter la concentration augmente le signal émis dans les mêmes proportions, cela a également des effets sur les phénomènes d'absorption et de réabsorption. De manière schématique, une solution très peu concentrée donnera un signal homogène sur le domaine mais de faible intensité, alors qu'une solution très concentrée permettra d'obtenir un signal fort dans les zones les plus proches de la source d'éclairage, mais très faible, voire inexistant (si toute l'intensité est absorbée) dans les zones les plus sombres. Il y a donc un arbitrage à faire, qu'on se propose ici d'étudier sur le plan théorique.

On cherche à maximiser la sensibilité du signal pour la gamme de température qui nous intéresse, soit autour de la température T_0. La sensibilité du signal à une variation de température s'écrit comme la dérivée $\frac{\partial I_{\mathrm{f},i}}{\partial T}$. L'expression de cette dérivée en T_0 s'obtient facilement d'après l'équation linéarisée (2.15) :

$$\left.\frac{\partial I_{\mathrm{f},i}}{\partial T}\right|_{T_0} = I_0 \frac{K_{\mathrm{opt},i} K_{\mathrm{spec},i}(\lambda_0) C V_c}{1 + z/l_{s0}} e^{-C\varepsilon b} e^{K_i} e^{\frac{A_i}{T_0^2} + \frac{B_i}{T_0}} p_{i1} \tag{2.33}$$

Maximiser cette sensibilité revient donc à maximiser cette expression, soit au regard de la seule concentration, à chercher les maxima de la fonction :

$$f_C(C) = -\left(\frac{2A_i(Ce)}{T_0} + B_i(Ce)\right) Ce^{-C\varepsilon(\lambda_0)b + K_i(Ce) + \frac{A_i(Ce)}{T_0^2} + \frac{B_i(Ce)}{T_0}}. \tag{2.34}$$

Or d'après Lemoine & Grisch (2012), les coefficients A_i, B_i et K_i peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_i = a_{i1} Ce + a_{i0} \tag{2.35}$$

$$B_i = b_{i1} Ce + b_{i0} \tag{2.36}$$

$$K_i = k_{i2} (Ce)^2 + k_{i1} Ce \tag{2.37}$$

où a_{i1}, a_{i0}, b_{i1}, b_{i0}, k_{i2} et k_{i1} sont des constantes inconnues propres à la bande spectrale d'observation i. On peut alors réécrire (2.34) comme :

$$\begin{aligned} f_C(C) = &-\left(\left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right) Ce + \frac{2a_{i0}}{T_0} + b_{i0}\right) C \\ &\cdot \exp\left[C^2 e^2 k_{i2} + C\left(e\left(\frac{a_{i1}}{T_0^2} + \frac{b_{i1}}{T_0} + k_{i1}\right) - \varepsilon(\lambda_0) b\right) + \frac{a_{i0}}{T_0^2} + \frac{b_{i0}}{T_0}\right] \end{aligned} \tag{2.38}$$

On introduit alors la constante $K_{\mathrm{c},i}$ telle que :

$$K_{\mathrm{c},i} = \frac{a_{i1}}{T_0^2} + \frac{b_{i1}}{T_0} + k_{i1}. \tag{2.39}$$

Dès lors, on peut déterminer les extrêma locaux par calcul de la dérivée de f_C

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_C}{\partial C} = &-\left\{\left[\left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right) Ce + \frac{2a_{i0}}{T_0} + b_{i0}\right]\left[C^2 e^2 k_{i2} + C\left(eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b\right) + 1\right]\right. \\ &\left. + \left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right) Ce\right\} \exp\left[C^2 e^2 k_{i2} + C\left(eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b\right) + \frac{a_{i0}}{T_0^2} + \frac{b_{i0}}{T_0}\right] \end{aligned} \tag{2.40}$$

qui s'annule, pour C réel, si

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right) Ce + \frac{2a_{i0}}{T_0} + b_{i0}\right]\left[C^2 e^2 k_{i2} + C\left(eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b\right) + 1\right] \\ &\qquad + \left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right) Ce = 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Sous réserve que

$$\frac{\frac{2a_{i0}}{T_0} + b_{i0}}{\left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right) Ce} \gg 1, \tag{2.42}$$

cette équation peut se ramener à

$$2e^2 k_{i2} C^2 + (eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b)\, C + 1 = 0. \tag{2.43}$$

Le maximum de f_C correspond alors à la première racine de cette équation : on tient donc une expression de la concentration optimale théorique. Ainsi, pour un dispositif de chemins optiques donnés b et e, la concentration pour laquelle la sensibilité en température sera la meilleure est donnée par :

$$\boxed{C_{\mathrm{optim},i} = \frac{b\varepsilon(\lambda_0) - eK_{\mathrm{c},i} - \sqrt{(eK_{\mathrm{c},i} - b\varepsilon(\lambda_0))^2 - 8e^2 k_{i2}}}{4e^2 k_{i2}}.} \tag{2.44}$$

Il reste alors à déterminer les constantes de cette expression. En pratique, il n'est pas possible d'obtenir exactement f_C. Mais, en mesurant l'intensité du champ pour différentes concentrations à une température T_0 fixée, on pourra avoir recours à une normalisation analogue à celle utilisée pour la température dans l'équation (2.27). Cela permet d'écrire, en fonction d'une intensité prise à une concentration de référence C_{ref} le rapport :

$$\frac{I_{\mathrm{f},i}(C)}{I_{\mathrm{f},i}(C_{\mathrm{ref}})} = \frac{C}{C_{\mathrm{ref}}} \exp\left[(C^2 - {C_{\mathrm{ref}}}^2) e^2 k_{i2} + (C - C_{\mathrm{ref}})\,(eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b)\right], \tag{2.45}$$

soit

$$\ln\left(\frac{C_{\mathrm{ref}}}{C}\frac{I_{\mathrm{f},i}(C)}{I_{\mathrm{f},i}(C_{\mathrm{ref}})}\right) = e^2 k_{i2} C^2 + (eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b)\, C - \left[e^2 k_{i2} {C_{\mathrm{ref}}}^2 + (eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b)\, C_{\mathrm{ref}}\right]. \tag{2.46}$$

Ainsi, par ajustement de courbe on pourra facilement déterminer les coefficients $e^2 k_{i2}$ et $eK_{\mathrm{c},i} - \varepsilon(\lambda_0) b$, dont on peut déduire les constantes k_{i2}, $K_{\mathrm{c},i}$ et $\varepsilon(\lambda_0)$ si les on connaît pour plusieurs valeurs de b et e.

2.2.4 Problème des imperfections temporelles

Le développement qui précède est basé sur l'hypothèse que les paramètres influençant l'intensité mesurée ne varient pas au cours du temps. Dans la réalité, un certain nombre de phénomènes peuvent malgré tout affecter ces divers paramètres. On peut citer notamment :

- variations d'éclairage, notamment sous l'influence de variations d'indice optique induites par les gradients de température parallèles au trajet optique (Coolen *et al.*, 1999), ou dans de la cas de l'utilisation d'un miroir oscillant (modification de K_{opt}, V_c et loi de répartition de la lumière sur la nappe)
- fluctuations de l'intensité du laser, présence d'impuretés ou de particules occultant localement le passage des rayons (modification de I_0),
- dégradation des propriétés fluorescentes du colorant (modification de K_{spec}),
- effets de masque : les zones que la lumière traverse, chauffées ou refroidies, voient leur absorption modifiée par la réaction locale du colorant (virtuellement, modification de b et e).

Au lieu de normaliser le champ par des images de référence prises à un instant quelconque comme décrit précédemment, s'affranchir de ces différents paramètres requiert ici de pouvoir normaliser le signal en temps réel. Le signal de température que contient l'image brute se retrouve en effet pollué par la signature de tous ces effets parasites instantanés. L'idée est donc de pouvoir obtenir au même instant une seconde image qui contiendra tous les signaux parasites de manière identique à l'image brute, mais dont le signal en température sera suffisamment différent pour pouvoir l'isoler. Cette technique, que nous allons détailler brièvement est connu sous le nom de LIF à deux couleurs. La figure 2.6 propose le schéma d'un montage classique pour la LIF à deux couleurs dans un plan : l'usage d'une lame séparatrice semi-transparente permet de ne pas induire de différence de trajets optiques, et de pouvoir en conséquence faire correspondre précisément les pixels d'une image sur l'autre.

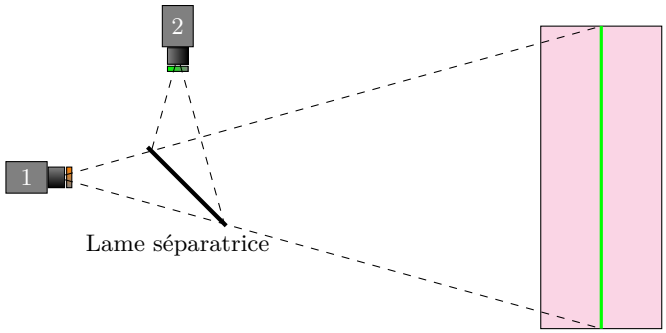


FIGURE 2.6 – Schéma d'un montage classique de LIF 2 couleurs : une lame séparatrice permet de couper le spectre lumineux entre les deux bandes spectrales que l'on veut observer, et d'envoyer la même image (à une symétrie près) sur deux organes d'acquisition, munis chacun du filtre adéquat.

Celle-ci se décline en deux variantes principales selon que l'on utilise un ou deux colorants.Une première possibilité consiste à dissoudre deux colorants, dont les sensibilités à la température sont suffisamment différentes (Coppeta & Rogers, 1998). Un des avantages de cette technique est qu'en choisissant des colorants dont les variations d'intensité en température sont opposées (l'un voit son intensité diminuer en chauffant, l'autre la voit augmenter), on peut accroître la sensibilité du signal combiné. Il faut être cependant vigilant aux recouvrements mutuels des spectres, afin de pouvoir dissocier les signaux lors de l'acquisition sans qu'ils n'interfèrent. Si leurs propriétés diffèrent trop (coefficients de diffusion, sensibilité au pH, ou affectation par le photoblanchiment différente comme dans le cas de la Rhodamine B combinée avec la Rhodamine 110 (Sakakibara & Adrian, 1999), etc), ils seront différemment affectés par les phénomènes listés plus haut, et la technique manquera alors complètement son objet.

Une seconde possibilité est de n'utiliser qu'un seul colorant, et d'exploiter le fait que toutes les longueurs d'onde du spectre d'émission n'ont pas la même sensibilité en température (Lavieille *et al.*, 2001; Bruchhausen *et al.*, 2005). On enregistrera ainsi par exemple la bande spectrale dont la sensibilité est la plus élevée, et celle dont elle est la plus faible. Si la réabsorption reste différente d'une bande spectrale à l'autre, l'utilisation d'un seul colorant garantit néanmoins une réponse similaire à l'ensemble des paramètres. Les principales limitations

de cette approche résident dans une perte de sensibilité du signal combiné, et dans le fait que la sélection des bandes spectrales peut conduire à exploiter des zones très peu lumineuses du spectre d'émission.

Notons enfin qu'il existe d'autres variantes, telles que la LIF trois couleurs/un colorant (Lavieille *et al.*, 2004) qui permet de palier ce problème de réabsorption variable d'une bande spectrale à l'autre, ou la LIF deux couleurs avec une seule caméra couleur (Funatani *et al.*, 2004), que nous ne détaillerons pas ici.

2.3 Application

2.3.1 Choix du colorant

D'après Guilbault (1973) rapporté par Nakajima *et al.* (1991), la Rhodamine B est un colorant particulièrement indiqué pour la Fluorescence Induite par Laser appliquée à la Température. On peut relever notamment que :

- Sa sensibilité à la température est très importante par rapport à la plupart des colorants fluorescents
- Son rendement quantique de fluorescence $\eta(\lambda)$ est important
- Elle se dissout bien dans l'eau
- Sa fluorescence est très peu dépendante du pH de la solution
- Elle est peu sensible au phénomène de photoblanchiment (Sakakibara & Adrian, 1999)
- Sa préparation est avantageuse car on la trouve en poudre
- Sa dangerosité pour la santé et l'environnement est faible
- Son pic d'absorption se situe aux environs de 520 nm, ce qui la rend compatible avec l'usage d'un laser vert 532 nm
- Depuis une vingtaine d'années, son usage courant pour de telles applications en fait désormais une substance bien documentée dans la littérature scientifique.

Notre choix se portera donc naturellement sur ce colorant.

Un paramètre important est ensuite la concentration à laquelle on va dissoudre celui-ci. De manière schématique et comme exposé plus haut, plus il est concentré, plus le signal d'émission sera important, mais plus l'absorption et la réabsorption augmentent elles aussi. Ces dernières sont directement liées à la longueur des chemins optiques, et donc aux dimensions du système. Le tableau 2.1 donne quelques exemples d'applications similaires à la nôtre, c'est-à-dire mesurant la température dans un plan à l'aide de Rhodamine B. Il fait apparaître une variation de plus de deux ordres de grandeur quant à la concentration utilisée. Dans notre cas, le domaine étudié fait approximativement $600 \times 600\,\mathrm{mm}^2$, ce qui est considérablement plus grand que les exemples présentés.

Il nous faut donc déterminer une valeur de concentration qui se prête à une telle expérience, et nous allons utiliser pour cela les développements théoriques

Table 2.1 – Quelques exemples d'expériences déjà réalisées pour des mesures de température dans un plan par méthode LIF à l'aide de Rhodamine B.

Référence	Domaine (mm^2)	Concentration ($g\,L^{-1}$)
Coolen *et al.* (1999)	50×25	4.8×10^{-5}
Sakakibara & Adrian (1999)	152×381	5×10^{-5}
Kim & Khim (2001)	1.5×1	6×10^{-3}
Bruchhausen *et al.* (2005)	30×50	4.8×10^{-4}
Petracci *et al.* (2006)	60×60	2.8×10^{-4}
Spaccapaniccia *et al.* (2012)	83×40	1.3×10^{-3}

exposés section 2.2.3. Pour la clarté de l'exercice, ce choix est exposé un peu plus loin, section 2.3.5, lorsque nous aurons détaillé d'autres paramètres importants du dispositif expérimental.

2.3.2 Filtre interférentiel

On utilise devant la caméra un filtre interférentiel dont le rôle est double : il coupe la longueur d'onde du laser excitateur (532 nm), ce qui permet d'obtenir une image sur laquelle les particules éventuelles ainsi que les reflets de paroi n'apparaîtront pas, et il isole les longueurs d'onde les plus sensibles à la température. Ainsi, d'après Bruchhausen *et al.* (2005), la sensibilité à la température de la Rhodamine B dissoute dans l'eau est maximale entre 560 et 580 nm, et le maximum d'émission se situe à 576 nm. Un filtre passe-bande couvrant la plage 565 à 575 nm a donc été utilisé initialement (série 1).

Il est important de rester vigilant à ce que la bande spectrale choisie exclue autant que possible le spectre d'émission, afin de minimiser la ré-absorption (voir section 2.1.3). L'angle des rayons incidents peut également être déterminant : les propriétés des filtres interférentiels changent généralement en fonction de celui-ci, et ne tolèrent généralement pas plus de quelques degrés. Afin de mieux prendre en compte ces aspects, on a utilisé dans un second temps, pour la seconde série d'expériences, un filtre de meilleure qualité tolérant mieux quelques degrés d'incidence. Il affiche en outre un meilleur facteur de transmission, et couvre une bande spectrale plus large, allant de 567 à 585 nm. Il est ainsi plus lumineux, et permet d'obtenir un signal plus fort (gain d'un facteur 3.3 pour une perte de sensibilité à la température de seulement 1%, d'après les données constructeurs et en se basant sur les spectres donnés par Bruchhausen *et al.* (2005)).

2.3.3 Nappe laser

Le laser utilisé ici est un laser continu (Spectra-Physics Millennia Pro S Series), avantageux pour sa stabilité en puissance par rapport à un laser pulsé. La nappe laser doit vérifier deux critères principaux :

Homogénéité : la nappe doit introduire le moins de disparités spatiales d'éclairage possible, afin de permettre une même exposition de tous les points du champ. Dans le cas inverse, on risque de sous-exposer les zones les plus sombres.

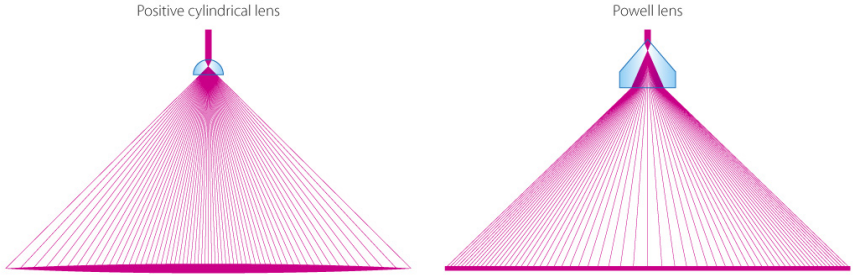


FIGURE 2.7 – Diagramme de comparaison d'une lentille cylindrique classique (gauche) avec une lentille *Powell* (droite). La première transmet le caractère gaussien du faisceau alors que la seconde crée un profil d'éclairage homogène. (source http://www.altechna.com)

Faible divergence : la divergence des rayons qui composent la nappe favorise les réflexions parasites (sur les parois verticales notamment). Selon leur angle d'incidence, ceux-ci peuvent même être réfléchis plusieurs fois. A l'inverse, si les rayons entrent pratiquement parallèles, la réflexion des rayons n'intervient que sur la paroi supérieure, et ils sont renvoyés directement à l'extérieur du domaine.[1]

Ces deux critères nous ont conduit à privilégier dans un premier temps l'utilisation d'un miroir oscillant plutôt qu'une lentille cylindrique. En effet, une lentille cylindrique conserve le profil gaussien du rayon laser dans la nappe résultante, et engendre ainsi une inhomogénéité importante. Un miroir oscillant n'a pas ce défaut puisqu'il renvoie le même faisceau dans toute la zone qu'il couvre. Par ailleurs, les faibles vitesses mises en jeu dans l'écoulement (de l'ordre de quelques centimètres par seconde) n'imposent pas une lourde contrainte sur la vitesse de balayage. La nécessité d'une faible divergence de nappe nécessitera des faibles amplitudes, critère qui lui est favorable également. Ce miroir, dont le profil de balayage est commandé par ordinateur et synchronisé avec le déclenchement des caméras, permet aussi de n'éclairer le champ seulement le temps nécessaire à l'acquisition, ce qui évite une exposition prolongée du colorant.

On s'apercevra cependant par la suite qu'il est difficile de garantir une parfaite régularité du balayage au cours du temps, et que cela donne lieu à des défauts dans les mesures (stries verticales notamment, visibles sur la figure 2.5(*b*) p.23). Une seconde solution (série 2) sera d'utiliser une lentille dite *Powell* qui permet, contrairement à une lentille cylindrique, d'obtenir une nappe homogène (voir figure 2.7). Dans ce cas, un obturateur sera ajouté entre la tête du laser et la lentille, afin de n'éclairer le colorant qu'au moment de l'acquisition des images.

[1] Dans le cas où on cherche à détailler la couche limite thermique le long d'une paroi latérale, ce qui sera notre cas, il est malgré tout intéressant de conserver un certain angle d'attaque afin que le trajet optique de la lumière ne traverse pas la couche chauffée sur toute sa longueur, et se prémunir ainsi contre d'effets de réfraction trop importants.

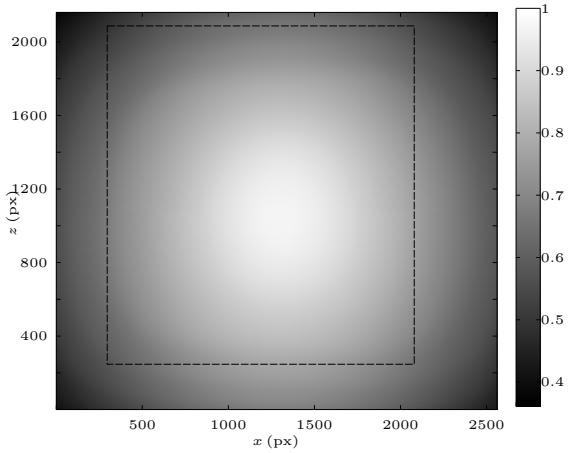


FIGURE 2.8 – Image d'un fond blanc uniforme acquis par la caméra Andor Zyla équipée comme lors d'une expérience de la série 2 : objectif Nikkor 50 mm, ouverture $f/1.2$ avec filtre passe bande 575 nm. On remarque un important vignettage, pris en compte dans la constante $K_{\text{opt,}}(x, z)$. Le rectangle pointillé représente la zone d'intérêt, qu'occupe effectivement la zone d'étude.

2.3.4 Variabilité spatiale des paramètres

S'il est difficile de déterminer avec précision la valeur des différents paramètres de l'équation générale (2.12), il est utile de connaître leur gamme de variation d'un point à un autre, afin d'être en mesure de détecter d'éventuelles anomalies. Les paramètres susceptibles de connaître une variabilité spatiale sont les suivants : $K_{\text{opt,}}$, V_c, b et e. Ils sont donc tous fonction de x et de z.

$K_{\text{opt,}}(x, z)$ est un paramètre propre au système d'acquisition d'image. On peut donc le quantifier facilement en prenant une image d'un fond blanc uniforme et en normalisant l'image obtenue par la valeur de la zone la plus lumineuse. Du fait de la grande ouverture de notre objectif et des propriétés des filtres, on obtient généralement du vignettage, soit un gradient circulaire. La figure 2.8 en donne un aperçu dans le cadre des expériences de la série 2. Dans les zones les plus sombres (les coins), une baisse de luminosité allant jusqu'à 60% est enregistrée. Cet effet pourra cependant être limité en choisissant la zone d'intérêt en conséquence (en pointillés sur la figure 2.8), réduisant quelque peu la résolution.

$V_c(x, z)$ représente le volume de collection, soit le volume de fluide éclairé au pixel considéré. Il est donc le volume défini par la surface que « voit » un pixel et l'épaisseur de la nappe laser à cet endroit. Il est difficile d'avoir accès précisément à sa valeur, mais on peut l'approcher par le raisonnement suivant. Dans la mesure ou l'axe de la caméra est bien horizontal, on peut admettre que tous les pixels couvrent une même surface de nappe. Dès lors, la variation de V_c est donnée par la divergence du faisceau laser. Celle-ci est nativement très faible : inférieure à 0.5×10^{-3} rad (données constructeur), soit un épaississement de 0.3 mm sur la hauteur de la cuve, sous réserve que les autres composants optiques (miroirs, lentille et hublot) n'induisent pas de divergence supplémentaire. Partant d'un faisceau de 2.3 mm de diamètre, sa largeur serait donc d'environ 2.43 mm à l'entrée de la cuve. L'épaississement relatif, et donc la variation du

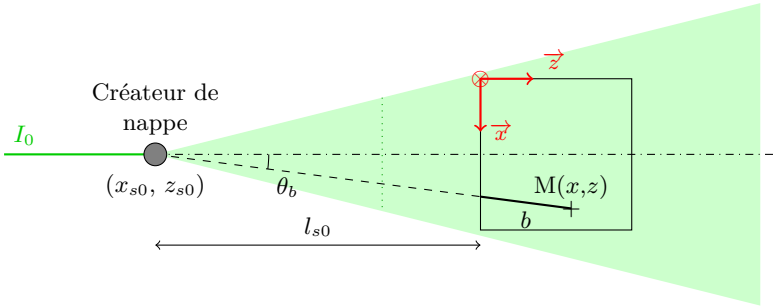


FIGURE 2.9 – Schéma géométrique résumant les différentes variables utiles à l'expression du chemin optique b. L'origine du repère, conforme à la convention de ce manuscrit, est au coin inférieur gauche de la cuve. La nappe laser est présentée « dépliée », la ligne verticale pointillée représentant l'emplacement du miroir à 45°

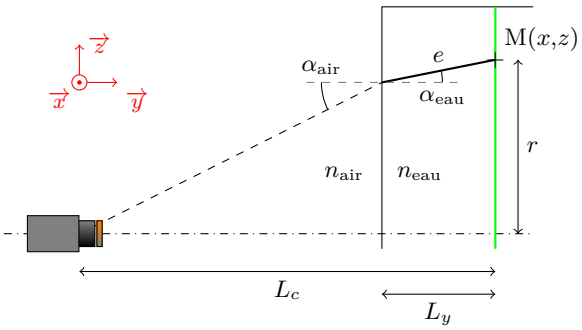


FIGURE 2.10 – Schéma géométrique permettant de calculer le chemin optique e. La cuve est ici vue selon une coupe latérale (plan yz).

volume de collection sur la hauteur du domaine d'étude, serait donc de l'ordre de 12%.

$b(x, z)$ est le chemin optique parcouru au sein de la cuve pour arriver au point M(x, z) considéré (se référer au schéma de la figure 2.9). C'est donc une fonction géométrique, que l'on peut écrire en fonction de la position de l'origine de la nappe $(x_{s0}, -l_{s0})$:

$$b(x, z) = z\sqrt{\left(\frac{x - x_{s0}}{z + l_{s0}}\right)^2 + 1}. \tag{2.47}$$

$e(x, z)$ est quant à lui le chemin optique parcouru au sein de la cuve pour repartir du point M(x, z) considéré. Celui-ci est dépendant de la distance L_y à laquelle se situe le plan d'étude de la paroi, de la distance L_c à laquelle se situe la caméra, et de la différence d'indice optique entre l'air (noté n_{air}) et l'eau[2] (noté n_{eau}). Ces différentes longueurs sont représentées sur la figure 2.10. Dès lors, deux angles interviennent : α_{air} et α_{eau} qui sont les angles d'incidence du

[2] L'indice de réfraction du plexiglas étant très proche de celui de l'eau, on les considérera égaux.

rayon lumineux émis par la particule de colorant, de part et d'autre du dioptre formé par la surface extérieure de la paroi transparente de la cuve (voir schéma). Ces deux angles sont reliés par la loi de Snell-Descartes selon laquelle :

$$n_{\text{air}} \sin \alpha_{\text{air}} = n_{\text{eau}} \sin \alpha_{\text{eau}}. \tag{2.48}$$

D'autre part on peut écrire

$$(L_c - L_y) \tan \alpha_{\text{air}} + L_y \tan \alpha_{\text{eau}} = r, \tag{2.49}$$

r étant la distance du point M à l'axe de la caméra. En faisant l'hypothèse que $\tan \alpha_i \approx \sin \alpha_i$, il résulte de la combinaison des deux équations précédentes :

$$e(x,z) = \frac{L_y}{\sqrt{1 - \frac{r(x,z)^2}{\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}(L_c - L_y) + L_y\right)^2}}}. \tag{2.50}$$

En pratique, on adopte les paramètres suivants : $n_{\text{air}} \approx 1$, $n_{\text{eau}} \approx 1.33$, $L_c = 270\,\text{cm}$ et $L_y = 17\,\text{cm}$. Ainsi, pour le point central, situé sur l'axe de la caméra, $r = 0\,\text{cm}$ et $e = 17\,\text{cm}$. Le maximum de r est atteint dans un coin de la cuve, où il égale $30\sqrt{2} = 42.4\,\text{cm}$: e vaut alors $17.37\,\text{cm}$. Son amplitude de variation donc de seulement 2.2%, ce qui permettra considérer les termes $A_i(Ce)$, $B_i(Ce)$ et $K_i(Ce)$ constants.

2.3.5 Concentration du colorant

Revenons à présent sur le choix de la concentration de colorant. Conformément au développement analytique exposé section 2.2.3, plusieurs images ont été prises à des concentrations différentes, allant de 1 à $9 \times 10^{-5}\,\text{g}\,\text{L}^{-1}$. Elles ont été obtenues avec le montage expérimental de la série 2 (Caméra Andor Zyla, filtre 565-575 nm et lentille Powell).

On se propose tout d'abord de vérifier l'équation (2.46) sur la zone centrale. Le tracé de $\ln\left(\frac{C_{\text{ref}}}{C}\frac{I_{\text{f},i}(C)}{I_{\text{f},i}(C_{\text{ref}})}\right)$ en fonction de C moyenné sur cette région de l'image donne pratiquement une droite (nous avons pris $C_{\text{ref}} = 8.8 \times 10^{-5}\,\text{g}\,\text{L}^{-1}$), visible figure 2.11($a$). Les coefficients du polynôme obtenu sont attendus correspondre respectivement à

$$e^2 k_{i2}, \quad (eK_{\text{c},i} - \varepsilon(\lambda_0)b)\,, \quad \text{et} \quad -\left[e^2 k_{i2} {C_{\text{ref}}}^2 + (eK_{\text{c},i} - \varepsilon(\lambda_0)b)\, C_{\text{ref}}\right]. \tag{2.51}$$

Ce dernier pouvant se calculer grâce aux deux premiers et à la valeur de C_{ref}, on peut vérifier que la valeur obtenue correspond : en effet, l'estimation de 0.920 est très proche de la valeur calculée, soit 0.916.

Tenons compte à présent des variations spatiales : au lieu de réaliser un ajustement de courbe sur une zone moyennée, nous calculons les coefficients du polynôme pour différents points répartis sur toute la zone visible. On trace alors le second coefficient en fonction de la distance b caractérisant chaque point (figure 2.11(b)) : la pente, très nette, donne la valeur de $\varepsilon(\lambda_0)$. On peut alors retrancher $\varepsilon(\lambda_0)b$ de ce second coefficient : ce résultat, tracé en fonction de e donne $K_{\text{c},i}$ (figure 2.12(a)). Enfin, le premier coefficient tracé en fonction de e^2 donne k_{i2} (figure 2.12(b)). Remarquons que la faible plage de variation de e et la difficulté à évaluer précisément ce chemin optique (erreurs de parallaxe entre la

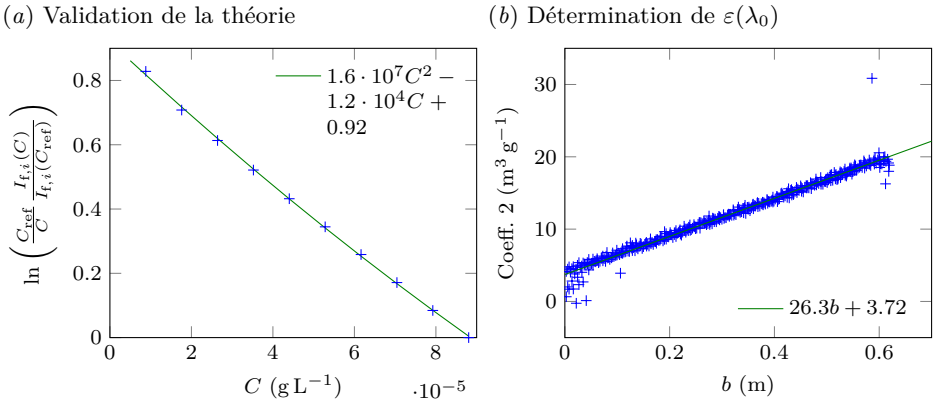


FIGURE 2.11 – (*a*) Tracé de $\ln\left(\frac{C_{\mathrm{ref}}}{C}\frac{I_{\mathrm{f},i}(C)}{I_{\mathrm{f},i}(C_{\mathrm{ref}})}\right)$, en moyenne sur la zone centrale des images ($20 \times 20\,\mathrm{cm}^2$) avec $C_{\mathrm{ref}} = 8.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{g\,L^{-1}}$. (*b*) Valeurs des seconds coefficients d'ajustement (expression (2.51)b) de courbe en différents points, tracés en fonction du chemin optique correspondant b. La pente de cette droite permet d'obtenir le coefficient d'absorption $\varepsilon(\lambda_0)$.

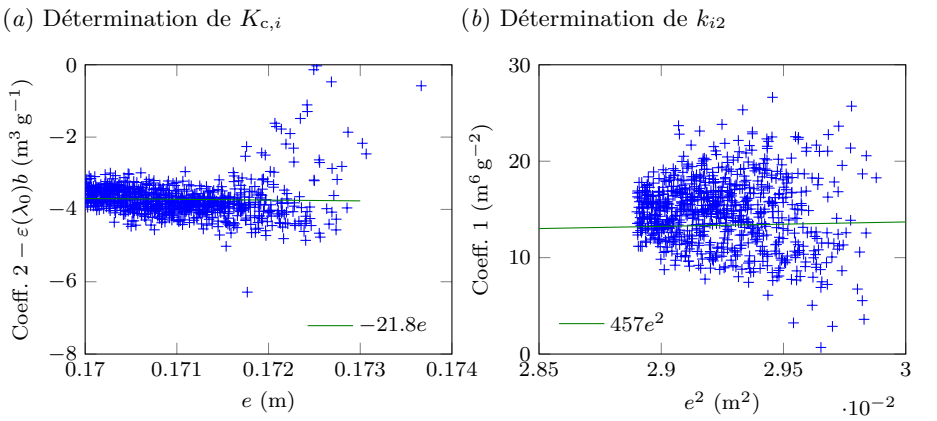


FIGURE 2.12 – (*a*) Valeurs des seconds coefficients d'ajustement (expression (2.51)b) auxquels on a retranché les valeurs de $\varepsilon(\lambda_0)b$ en différents points, tracés en fonction de e^2. La pente de la droite (qui doit passer par zéro) correspond théoriquement à $K_{\mathrm{c},i}$. (*b*) Valeurs des premiers coefficients d'ajustement de courbe (expression (2.51)a) en différents points, tracés en fonction de e. La pente de cette droite (qui doit elle aussi passer par zéro) permet d'obtenir le coefficient k_{i2}. La qualité de ces deux droites est entachée de l'erreur d'évaluation de e, et de la faible gamme de variation qui caractérise ce chemin optique.

cuve et l'axe de la caméra notamment) rendent ces deux derniers tracés moins évidents. Pour pallier ces imprécisions, l'origine de la droite a été forcée à zéro conformément à la théorie.

Pour une longueur d'onde d'excitation $\lambda_0 = 532\,\mathrm{nm}$ et une une plage de longueur d'ondes observées $i = [565, 575]\,\mathrm{nm}$ (série 2), on obtient finalement les valeurs de constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda_0) &= 26.34\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{g}^{-1}, \\ K_{\mathrm{c},i} &= -21.76\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{g}^{-1}, \\ k_{i2} &= 456.6\,\mathrm{m}^4\,\mathrm{g}^{-2}. \end{aligned}$$

Nous voilà donc en mesure de déterminer la concentration optimale. Mais il nous faut vérifier auparavant l'hypothèse (2.42) : une rapide estimation des constantes a_{i1}, a_{i0}, b_{i1} et b_{i0} obtenue à partir de deux couples de valeurs A_i et B_i, donne un ratio $\left(\frac{2a_{i0}}{T_0} + b_{i0}\right)\left(\left(\frac{2a_{i1}}{T_0} + b_{i1}\right)Ce\right)$ d'environ 1800, ce qui la justifie pleinement. Dès lors, compte tenu des dimensions de notre expérience, à savoir $b_{\max} = 0.70\,\mathrm{m}$ et $e \approx 0.17\,\mathrm{m}$, la concentration théorique optimale est de

$$C_{\mathrm{optim},i} = 4.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{g\,L}^{-1}.$$

Cependant, si cette concentration théorique est optimale du point de vue de la sensibilité à la température, celle-ci ne tient pas compte des éventuelles restrictions sur la luminosité que peuvent rencontrer les caméras utilisées pour l'acquisition. Parmi ces restrictions figure le niveau de bruit, qui augmente à mesure que l'image s'assombrit, et qui est amplifié par la normalisation effectuée lors de la calibration. Il convient donc de ne pas trop atténuer le signal, en particulier dans les zones périphériques où il souffre déjà d'autres atténuations par ailleurs (voir section 2.3.4) alors qu'il est crucial pour notre étude. Connaissant désormais la valeur de la constante d'absorption $\varepsilon(\lambda_0)$, on peut quantifier précisément ce phénomène. Ainsi la figure 2.13 montre qu'à la valeur optimale de concentration, l'intensité a décru de 60% sur les plus longs trajets optiques. On préférera donc une concentration un peu plus faible, soit 3.5×10^{-5} ou $4.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{g\,L}^{-1}$, afin de ne pas absorber plus de 50% de l'intensité d'éclairage.

2.3.6 Calibration géométrique et physique

Jusqu'ici la position des points n'est donné que par leur emplacement en pixels sur l'image. Il est nécessaire de pouvoir l'exprimer en coordonnées physiques, tout en corrigeant les défauts d'alignement de la caméra avec le champ observé, ou les déformations optiques qu'induisent inévitablement l'optique de la caméra et la réfraction. Cette calibration géométrique est réalisée à l'aide d'une mire que l'on insère dans l'eau à l'emplacement de la nappe laser et dont on connaît précisément la position des points. Un utilitaire Matlab issu de la boîte à outils `Uvmat`[3] permet la transformation de l'image de son repère en pixels au champ réel en coordonnées physiques.

Conformément aux principes de calibration exposés plus haut (section 2.2.2), pour pouvoir interpréter les niveaux de gris enregistrés par la caméra en terme de température, on normalise ici les images obtenues par une ou plusieurs images de

[3] voir chapitre 3

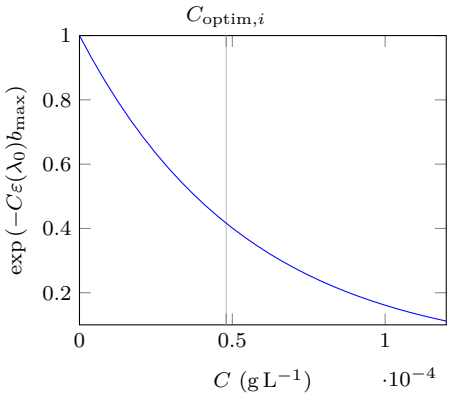


FIGURE 2.13 – Terme d'absorption maximale $e^{-C\varepsilon(\lambda_0)b_{\max}}$ tracé en fonction de la concentration. On constate qu'à la concentration optimale théorique $C_{\text{optim},i}$, il ne reste que 40% de l'intensité initiale.

TABLE 2.2 – Valeurs du paramètre $\gamma_i = -\frac{2}{T_0}\frac{A_i}{B_i}$ pour quelques configurations rencontrées, avec $T_0 = 273.15\,\text{K}$ et $e \approx 17\,\text{cm}$. Les trois derniers cas correspondent à de réelles expériences. On voit que pour les dernières valeurs on a $\gamma_i \approx 4/5$ (filtre utilisé dans la série 2).

Bande spectrale i	Concentration	γ_i
590-610 nm	50 µg L^{-1}	**0.689**
565-575 nm	35 µg L^{-1}	**0.507**
565-575 nm	35 µg L^{-1}	**0.914**
567-585 nm	35 µg L^{-1}	**0.827**
567-585 nm	40 µg L^{-1}	**0.832**

référence à température homogène. Un mélangeur rétractable est introduit avant chaque capture pour assurer cette homogénéité, en évitant les éventuels courants convectifs résiduels. Afin de justifier l'emploi de la formule de normalisation linéarisée à deux références (2.30), quelques valeurs de γ_i obtenues au gré des diverses configurations que nous avons été amenés à tester sont données dans le tableau 2.2. Les dernières valeurs, très proches de 4/5 laissent espérer une bonne homogénéité spatiale du comportement en température.

Plusieurs sondes de température permettent une mesure directe de la température, que l'on peut mettre en relation avec l'intensité normalisée au même point. La figure 2.14 montre les courbes d'intensité fonction de la température pour ces différents points avec en (a) les profils avant normalisation, en (b) après normalisation à une seule référence, et en 2.14(c)) avec 2 références. Dans ce dernier cas, $I_{\text{f}}(T_{\text{lo}})$ est prise à la température initiale, avant le démarrage du chauffage, et $I_{\text{f}}(T_{\text{hi}})$ est prise en fin d'expérience. On constate l'efficacité de ces normalisations et l'intérêt d'utiliser deux références plutôt qu'une pour une superposition optimale des courbes. Cette opération permet donc l'utilisation d'une unique loi $I_{\text{f}} = f(T)$, indépendante du point considéré.

En pratique la superposition n'est pas toujours parfaite : il faut tenir compte

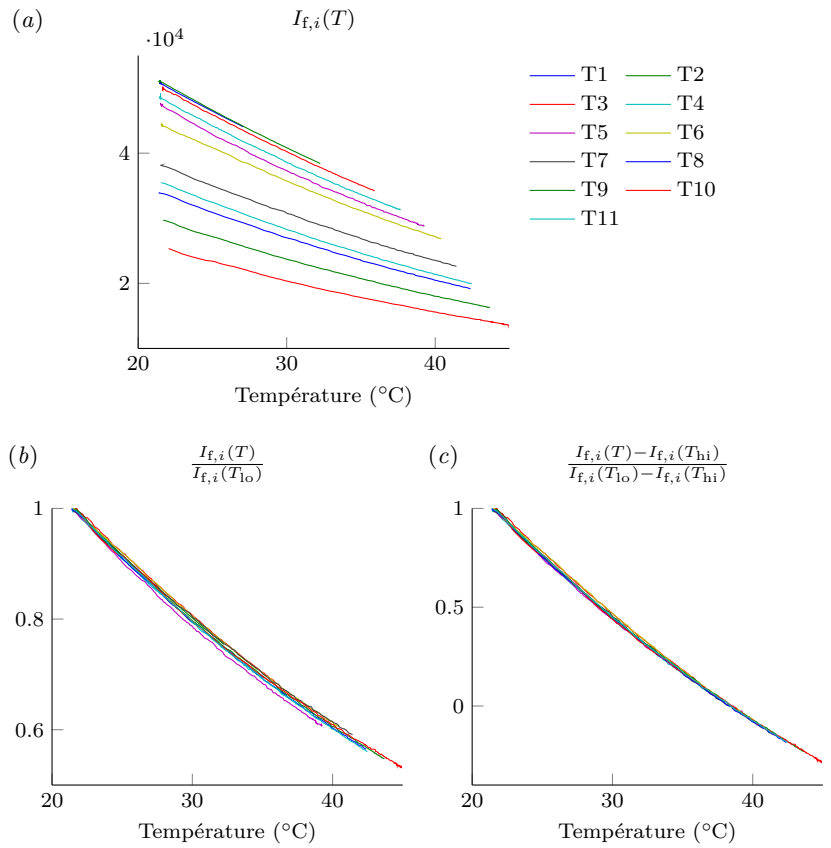


FIGURE 2.14 – Intensité (unités arbitraires) tracée en fonction de la température mesurée par les sondes. L'intensité est prise sur l'image aux emplacements des différentes sondes et est donnée respectivement : (*a*) d'après l'image brute, après normalisation en utilisant (*b*) une image de référence ou (*b*) deux images de référence. Une fois normalisées, les courbes se confondent. On observe une légère amélioration dans le cas d'une normalisation à deux références. Les sondes de température sont réparties selon la verticale, conformément au schéma 1.3.

de l'imprécision des mesures de températures, inhérente à l'imprécision des sondes elles-mêmes et au fait qu'elles ne mesurent pas dans le même plan, ainsi que du fait qu'il réside toujours une incertitude quant à leur position verticale exacte. Ces imprécisions justifient l'emploi de plusieurs profils pour déterminer la fonction de transfert f.

2.3.7 Post-traitement final

Malgré les précautions expérimentales, il reste des disparités d'éclairage variables au cours du temps (reflets, effets de masques liés à la présence de particules, irrégularités du miroir oscillant...) qui créent des stries bien visibles. Ces stries n'ont bien entendu rien à voir avec le champ de température, et doivent être atténuées autant que possible. Pour cela on tire avantage de leur caractère optique, et donc géométrique. On emploie alors la procédure suivante, qui présente aussi l'avantage d'atténuer le bruit induit par la caméra :

1. On détermine les coordonnées du point source S de la nappe laser en calculant le point d'intersection des stries (figure 2.15(a)).

2. On peut alors exprimer les coordonnées du champ dans un repère de coordonnées cylindrique (S, θ, ρ) ayant ce point comme origine.

3. On interpole ensuite l'image dans un nouveau repère cartésien ayant θ comme abscisse et ρ comme ordonnée : on obtient ainsi un champ déformé dans lequel les stries sont des lignes verticales (figure 2.15(b)).

4. On applique alors une transformation de Fourier bidimensionnelle, dont on atténue les fréquences verticales (élimination des stries) et les hautes fréquences (réduction du bruit) selon un filtre tel que représenté figure 2.15(c).

5. On applique enfin la série de transformation inverse pour reconstituer le champ filtré (figure 2.15(d)).

2.3.8 Précision et limites

La précision finale des mesures peut être estimée par deux moyens : d'une part l'écart mesuré par rapport aux sondes de température, d'autre part les inhomogénéités observées n'étant manifestement pas d'origine thermique.

La comparaison des mesures T-LIF avec les sondes de températures se heurte à plusieurs difficultés. Tout d'abord, il faut garder à l'esprit que la précision des sondes associées à l'ensemble de leur chaîne de câblage est relativement limitée, et diminue sur le long terme, par simple vieillissement. Ainsi malgré une calibration régulière, leur précision absolue est difficilement meilleure que 0.5°C. En revanche, elles présentent une très bonne précision relative. Pour tenir compte de ces aspects, on veillera à les tarer toutes sur la même valeur en début d'expérience, lorsque la température est homogène. Ainsi, si une erreur est faite, il s'agit d'une erreur absolue, concernant l'ensemble des mesures, et sans incidence pour nos observations (il nous importe avant tout de connaître les variations de densité relatives). La T-LIF étant calibrée sur ces mêmes valeurs, si erreur absolue il y a, celle-ci sera répercutée sur les valeurs T-LIF, sans possibilité de la détecter.

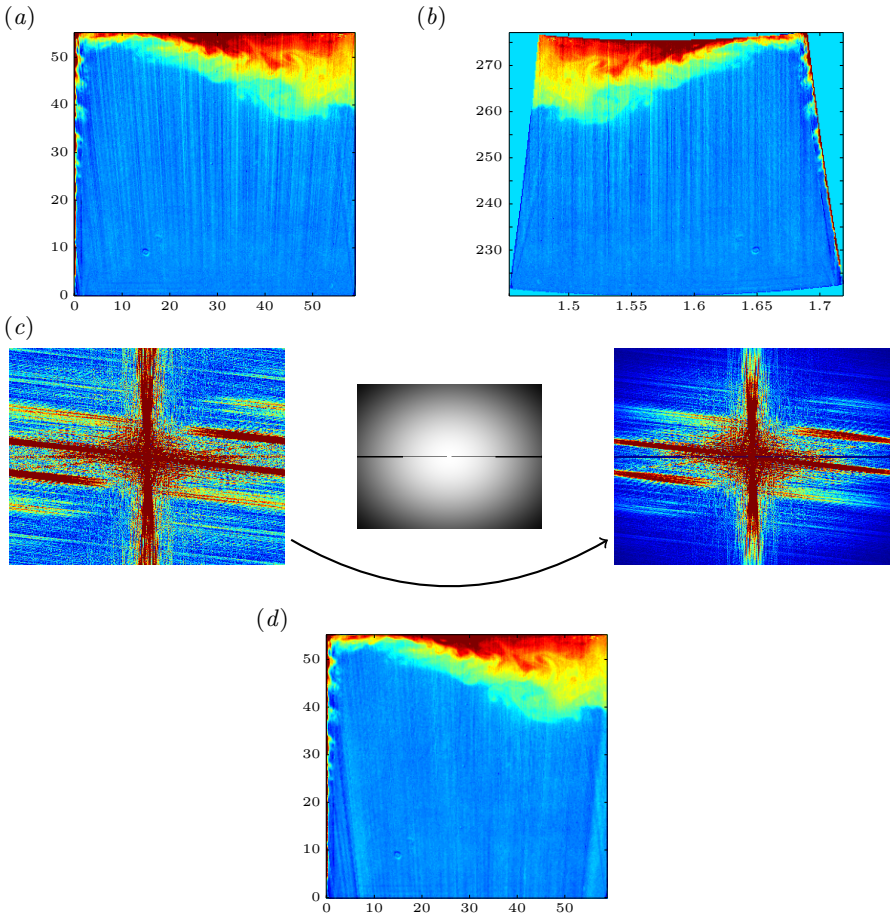


FIGURE 2.15 – Exemple de post-traitement des images par séries de Fourier : (a) image initiale, (b) image dans le repère cylindrique ayant pour centre l'origine des rayons lumineux, (c) affichage dans l'espace de Fourier, et application du filtre : on multiplie le champ par l'image centrale en noir et blanc, les noir représentant des 0, les blancs des 1, (d) image finale après transformation inverse. Le filtre annule la majeure partie des fréquences verticales (stries) ainsi que les hautes fréquences (bruit).

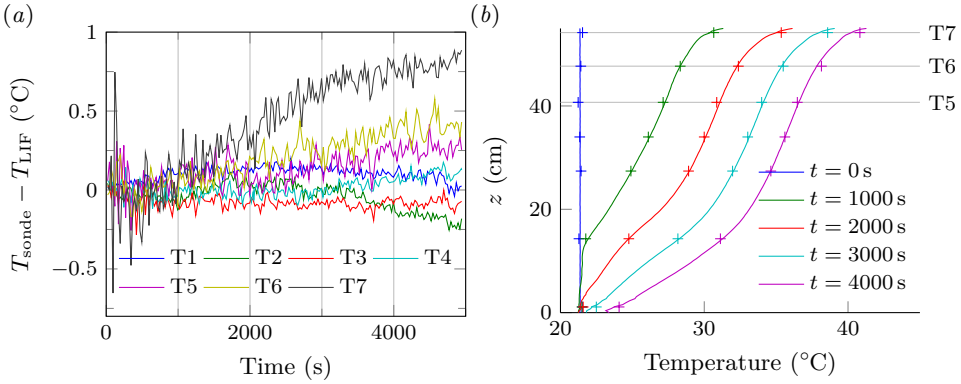


FIGURE 2.16 – Tentative de quantification des erreurs de mesure. (*a*) donne l'écart mesuré entre la température enregistrée par les sondes et la température obtenue par T-LIF en un même point (T1 correspond à la sonde la plus basse, T7 à la plus haute, conformément au schéma 1.3 p.8). (*b*) donne les profils complets de température en fonction de la verticale, à différents instants. Les croix représentent les mesures des sondes, les lignes continues la T-LIF.

Une seconde difficulté concerne l'incertitude de positionnement des sondes de température. En effet, celles-ci n'étant pas dans le plan du laser, leur emplacement apparent sur les images est à corriger à cause de la perspective. De plus leur support étant amovible elles ne sont pas fixées de manière suffisamment rigide pour pouvoir mesurer leur position une fois pour toute. Cette incertitude de positionnement vertical peut ainsi engendrer une différence avec la mesure T-LIF, particulièrement dans les zones où le gradient de température vertical est important (à erreur de positionnement donnée, l'erreur sur la température est proportionnelle au gradient de température).

La figure 2.16(*a*) montre l'écart de mesure entre la température indiquée par les sondes et celle obtenue par la T-LIF. On constate des écarts croissants pour les sondes T5 à T7. Cette hiérarchie d'écarts est bien corrélée avec l'éloignement de ces sondes au centre, et en regard avec les profils complets, figure 2.16(*b*), ces mêmes écarts apparaissent d'autant plus forts que les gradients thermiques sont importants, comme attendu. Mais une erreur de positionnement seule ne suffit pas à expliquer les écarts observés puiqu'une optimisation par itérations successives ne parvient pas à éliminer ces écarts.

Une autre source d'erreur est l'influence de la réfraction que nous appellerons *horizontale*, liée au changement d'indice optique de l'eau chauffée dans la zone comprise entre la face avant de la cuve et le plan d'étude (trajet optique e). Celle-ci apparaît lorsque l'angle entre la direction d'observation et la direction du gradient thermique est non nul (voir schéma 2.17(*a*)). Son effet est donc directement lié à l'angle selon lequel on observe le champ. Il provoque une déviation de certains rayons lumineux, faussant la position du signal de fluorescence observé. La conséquence est similaire à l'erreur de positionnement précédente, à savoir un décalage croissant avec l'augmentation du gradient de température et l'éloignement au centre. Cet effet peut-être facilement repéré en comparant la position d'éléments fixes sur deux images séparées dans le temps. C'est ce qui est fait à titre d'exemple sur la figure 2.18 : par une soustraction entre deux

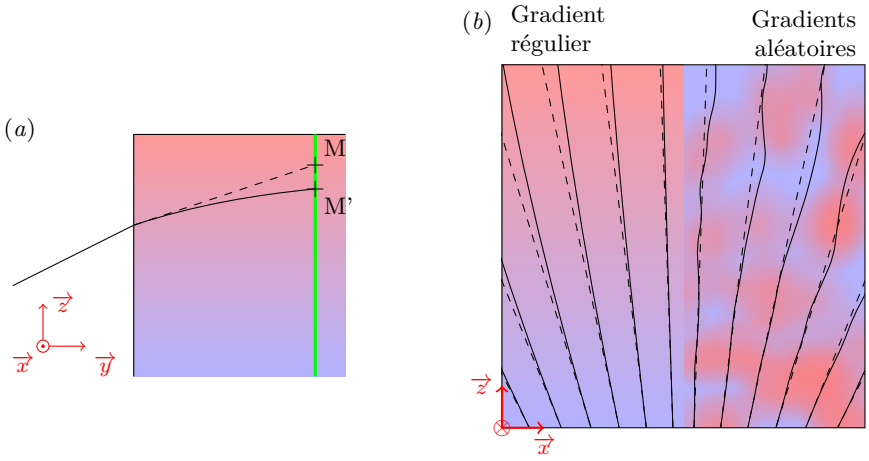


FIGURE 2.17 – Schémas des deux types de réfraction qui sont sources d'erreur pour les mesures. Les traits pointillés représentent les trajets optiques en l'absence de réfraction, les traits pleins les trajets réels. (*a*) schématise la réfraction horizontale (la cuve est vue de côté) : celle-ci dépend de l'angle d'observation, son effet est visible figure 2.18. (*b*) schématise la réfraction verticale (la cuve est vue de face) dans deux situations. Sur la moitié gauche, le gradient de température est vertical et régulier : la déviation des rayons laser est alors régulière et proportionnelle à l'angle avec lequel ils pénètrent dans la cuve. Sur la moitié droite, le champ de température est irrégulier : les rayons sont alors déviés de manière erratique.

images espacées de 5000 s, on constate des déplacements de l'ordre de plus de 3 mm dans les zones périphériques, sièges d'intenses gradients. C'est donc bien cette réfraction qui est majoritairement responsable de l'écart mesuré entre les sondes et les mesures T-LIF.

Cette réfraction horizontale a donc un effet déformant sur le champ mesuré. Elle n'est pas réellement problématique dans la mesure où cette déformation reste relativement faible et qu'elle est quantifiable, comme c'est le cas dans la zone stratifiée. Celle-ci sera en outre répercutée de la même manière sur les images de particules, n'introduisant pas d'erreur significative lorsque l'on voudra mettre en relation champ de vitesse et champ de température. Enfin, notons que dans la zone du panache, où les gradients multidirectionnels brouilleraient le champ, l'angle d'observation est utilisé à notre avantage puisqu'il évite de traverser une trop grande épaisseur de fluide chauffé.

Beaucoup plus problématique dans le cas général, est la réfraction *verticale* (appelée parfois *shadowgraph effect*, voir Coolen *et al.* (1999)). Celle-ci ne dépend pas de l'angle d'observation mais de l'angle entre le rayon d'éclairage incident et la direction du gradient de température local (voir schéma 2.17(*b*)). Cet effet est négligeable dans la partie stratifiée puisque le gradient thermique est vertical, et l'angle d'éclairage (trajet optique *b*) reste faible. Mais cela n'est déjà plus le cas pour certaines réflexions qui peuvent apparaître, ni pour les zones où l'écoulement chauffé est turbulent, comme dans le panache. La réfraction modifie donc ici l'éclairage incident en fonction des gradients thermiques instantanés.

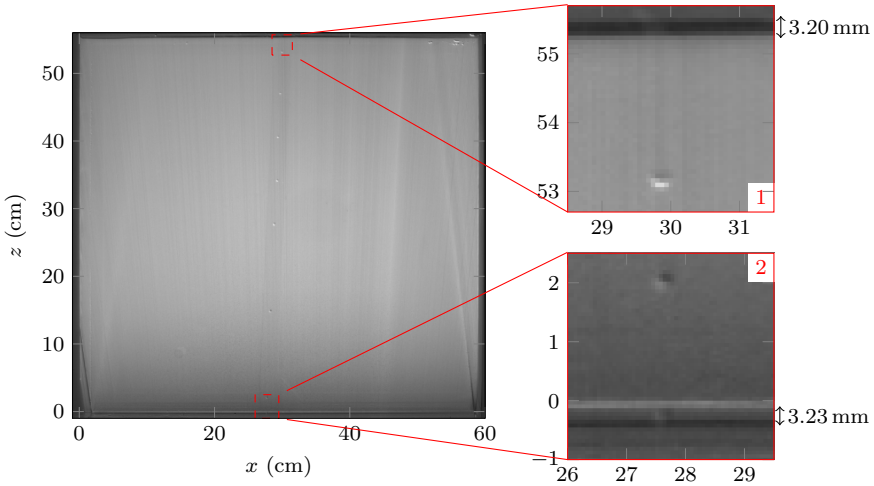


FIGURE 2.18 – L'image principale est le résultat d'une soustraction entre deux images prises à environ 5000 s d'intervalle : l'une au début à température homogène, l'autre à la fin alors que la cuve est stratifiée. Sur les deux vues détaillées à droite, la bande noire épaisse sur la vue 1, et les deux bandes noire et blanche sur la vue 2, sont la matérialisation du fait que ces deux images se superposent imparfaitement, du fait de la réfraction.

Cet effet reste mineur dans le cadre de notre expérience grâce à une orientation relative des gradients vis-à-vis de l'éclairage qui reste globalement favorable. **Cela risque cependant d'être problématique dans un certain nombre d'autres configurations, notamment si la température est modifiée à l'endroit où entre la nappe laser.** C'est-à-dire par exemple dans notre cas, si on génère un panache descendant, ou si on chauffe par le fond (type Rayleigh-Bénard) comme cela a pu être testé de manière anecdotique. Pour de telles configurations, la T-LIF à deux couleurs (voir section 2.2.4) devient nécessaire. Nous verrons cependant section 2.5 que sa mise en œuvre en utilisant un seul colorant (Bruchhausen *et al.*, 2005) est impossible dans notre cas avec les technologies de caméra actuelles, au vu des dimensions de l'expérience (et des faibles luminosités induites).

Une autre manière de mesurer les imprécisions consiste à détecter les irrégularités sur les images. Afin de les quantifier, on analyse une série d'images prises à température constante (utilisation d'un mélangeur). On évite ainsi l'influence de la réfraction, et on ne conserve que les erreurs dues à l'approximation de la fonction de calibration et aux variations d'éclairage (irrégularités du miroir oscillant ou obstruction du faisceau par dépôt d'impuretés sur le hublot essentiellement). La figure 2.19 montre l'erreur relative en température pour 2500 points à trois températures différentes, calculée comme

$$\Delta E_T(x,z) = \frac{\langle dT \rangle - dT(x,z)}{\langle dT \rangle}, \tag{2.52}$$

où $\langle dT \rangle$ représente la température moyenne sur l'ensemble du champ. Sans grande surprise, l'erreur diminue à mesure que l'on s'approche d'une des températures de calibration, et augmente entre les deux, signature des approximations

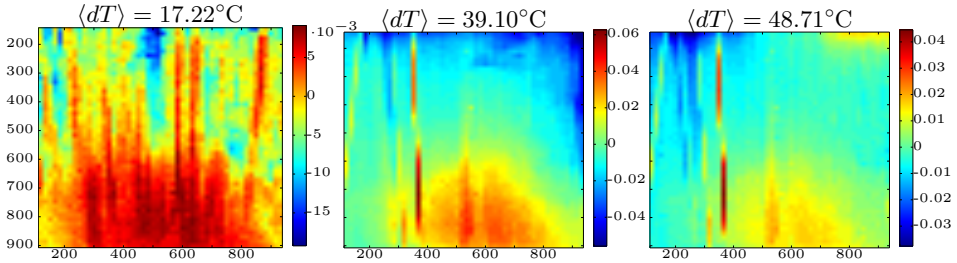


FIGURE 2.19 – Erreur relative en température pour des champs homogènes, obtenus avec mélangeur, pour trois températures moyennes : 17.2, 39.1 et 48.7°C. Les températures de calibration sont $dT_{\mathrm{lo}} = 16.8$°C et $dT_{\mathrm{hi}} = 59.8$°C. Sur le premier champ, dont la température est proche d'une de ces températures de calibration, l'erreur est très faible (de l'ordre de 10^{-3}°C), et les irrégularités sont essentiellement dues à de petites variations d'éclairage (stries verticales). Sur les secondes en revanche, l'erreur est un peu plus importante (de l'ordre de 10^{-2}°C), et essentiellement due à une erreur de calibration : les zones qui apparaissent sont la signature de variations spatiales de la fonction de calibration, qui n'ont pas été prise en compte. Les coordonnées des axes sont en pixels, et les points représentés couvrent l'ensemble de la région d'intérêt.

de la fonction de calibration. L'erreur reste cependant très faible dans tous les cas (moins de 5%).

Enfin, il faut considérer l'erreur introduite par le bruit de la caméra. Cette erreur a lieu à l'échelle du pixel, et dépend notamment du niveau d'exposition de la zone considérée. La figure 2.20 donne un aperçu de l'amplitude de ces perturbations sur le signal de température avant et après filtrage par série de Fourier (section 2.3.2). La définition de l'erreur est similaire à celle qui est donnée par l'équation (2.52), à ceci près que la moyenne est cette fois-ci locale, sur une zone couvrant un centimètre carré (soit environ 15×15 pixels). L'ordre de grandeur de l'erreur reste inférieur à 1%, que le champ soit filtré ou non.

2.4 Étude complémentaire : choix de la caméra

Nos expériences de T-LIF se distinguent des études précédentes par la grande dimension du champ étudié (cf tableau 2.1). Si l'on veut une résolution inférieure au millimètre, cette particularité nécessite donc une caméra avec une résolution élevée. Cette même particularité nous a contraints à utiliser une faible concentration en colorant, ainsi qu'une distance de plusieurs mètres entre la cuve et la caméra. Le signal de fluorescence enregistré est donc plus faible que bon nombre d'autres applications. Il est donc souhaitable d'avoir une caméra ayant une résolution et une sensibilité adaptées. Par ailleurs, on peut tirer parti du fait que les vitesses de notre écoulement sont faibles (de l'ordre de quelques centimètres par seconde) et n'exigent pas une importante fréquence d'acquisition. Si la caméra utilisée initialement (série 1) donne des premiers résultats satisfaisants, sa résolution et sa sensibilité restent faibles, et la qualité des mesures pourraient être améliorée en choisissant une caméra plus adaptée. Cette recherche a été notamment motivée par l'éventualité d'utiliser la T-LIF à deux couleurs.

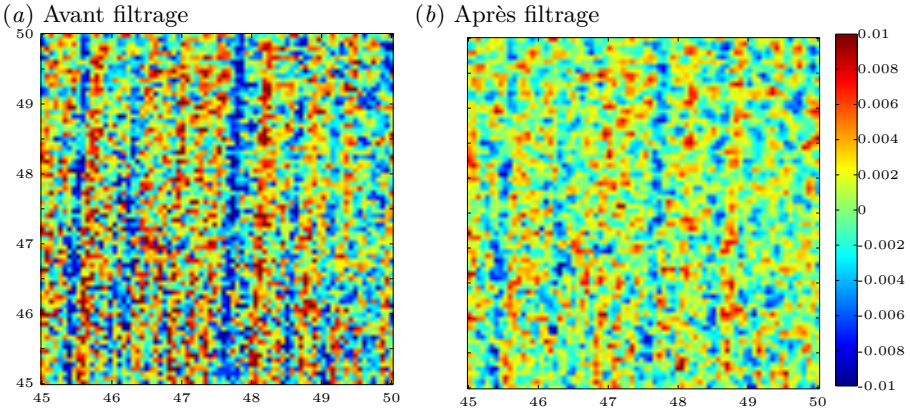


FIGURE 2.20 – Aperçus de l'erreur en température due au bruit de la caméra (ici dans le cas le plus défavorable : Dalsa Pantera 1M60, série 1). Chaque valeur de pixel est comparée à sa moyenne sur une zone de 1 cm^2. (*a*) montre le champ avant filtrage par série de Fourier, et (*b*) après filtrage : l'amplitude de l'erreur n'est pas significativement modifiée, mais le résultat est plus homogène. Les graduations sont en centimètres, la barre de couleur en degrés Celsius.

TABLE 2.3 – Comparatif des principales caractéristiques de la caméra *Dalsa* utilisée avec l'appareil *Nikon* proposé (données constructeurs)

	Dalsa Pantera 1M60	**Nikon D3S**
Type de capteur	CCD	CMOS
Résolution	1024×1024 pixels	4256×2832 pixels
Taille du capteur	12.3×12.3 mm	36×24 mm
Gamme dynamique	1 : 1000	1 : 60 à 1 : 4000 (selon ISO)
Encodage des données	12 bits	14 bits
Fréquence d'acquisition	60 Hz	≈ 0.5 Hz (format *RAW*)

2.4.1 Appareil reflex numérique

Une possibilité qui conjugue toutes les caractéristiques requises tout en étant relativement bon marché, est de se tourner vers un appareil photo numérique de type reflex. Ainsi, nous présentons ici quelques conclusions d'essais réalisés avec un appareil Nikon de type D3S. Ces essais sont mis en relation avec la caméra utilisée initialement : Dalsa de type Pantera 1M60. Le tableau 2.3 donne un comparatif de quelques spécifications. À l'exception de la fréquence d'acquisition, la plupart des caractéristiques données sont à l'avantage de l'appareil photo. Son utilisation comporte cependant des difficultés de mise en œuvre que nous allons détailler dans les paragraphes suivants.

2.4.1a Dispositif de commande

Les réglages de l'appareil peuvent être réalisés en quasi-totalité par câble USB via une interface logicielle (Camera Control Pro de Nikon par exemple), et les données peuvent être écrites directement sur l'ordinateur par le même biais. Pour un déclenchement précis, un câble Nikon de type MC-22 a été utilisé. Il permet de déclencher la prise de vue en connectant deux de ses trois broches.

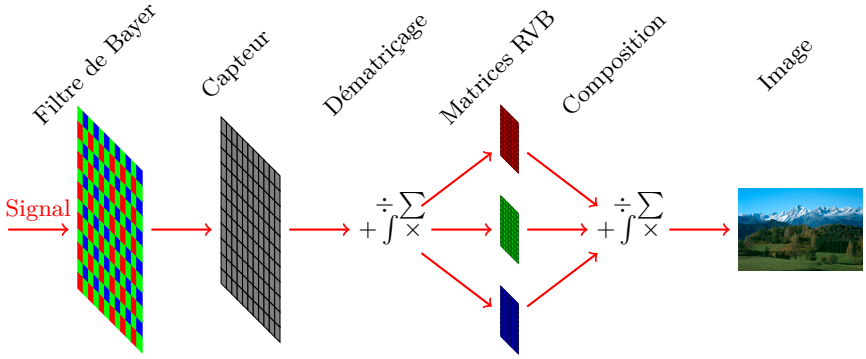


FIGURE 2.21 – Etapes schématiques courantes permettant l'obtention d'une image couleur à l'aide d'un appareil photo numérique.

Un petit circuit intégré est intercalé entre le générateur de délai et ce câble afin de permettre un déclenchement sur front montant. Des essais ont révélés une précision supérieure au centième de seconde, ce qui est satisfaisant pour notre application.

2.4.1b Format de fichier et capteur couleur

Pour une utilisation quantitative des données, il est important de travailler au format d'image brut, dit fichier *RAW*. Ainsi, l'appareil n'applique aucun traitement à l'image et stocke simplement dans un fichier le nombre de photons que chaque photo-site a reçu. Ce format est généralement propriétaire, ce qui peut compliquer la lecture de ces fichiers, car tous les programmes ne le prennent pas en charge. L'exploitation de ces données n'est ensuite pas immédiat : en effet, l'appareil étant prévu pour produire des images en couleur, son capteur est muni d'un filtre (ou matrice) dit « de Bayer », qui va filtrer pour chaque pixel le rouge, le vert, ou le bleu. Ainsi, un carré de 4 pixels comportera un pixel rouge, un pixel bleu et 2 pixels verts (l'œil humain étant plus sensible à la lumière verte). Pour chacun des trois canaux de couleur, l'appareil utilise ces informations partielles pour créer par interpolation une image pour chacun d'entre eux (étape de dématriçage). Ces canaux sont ensuite composés pour créer l'image couleur finale. La figure 2.21 résume ces différentes étapes.

Dans notre cas il conviendra d'extraire uniquement les données des pixels dont la couleur nous intéresse, comme l'illustre la figure 2.22. On reconstituera ensuite par interpolation une image monochrome retranscrivant l'intensité lumineuse des différents pixels. Cette interpolation peut s'effectuer facilement par un produit de convolution utilisant les masques suivants pour le vert d'une part, et le rouge et le bleu d'autre part (Phelippeau, 2009) :

$$M_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathrm{RB}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour avoir le nombre de pixels effectifs du Nikon, il faut donc pondérer les chiffres indiqués dans le tableau 2.3 par la fraction de pixels réellement utile.

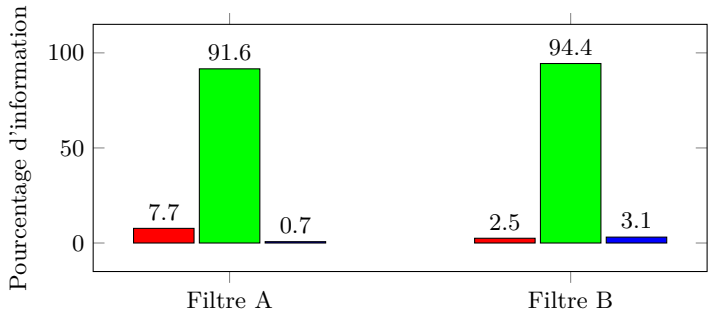


FIGURE 2.22 – Exemple de répartition de l'information selon les canaux de couleur (rouge, vert, bleu) selon les filtres utilisés. Pour ces deux exemples, il apparaît approprié de ne conserver que le canal vert.

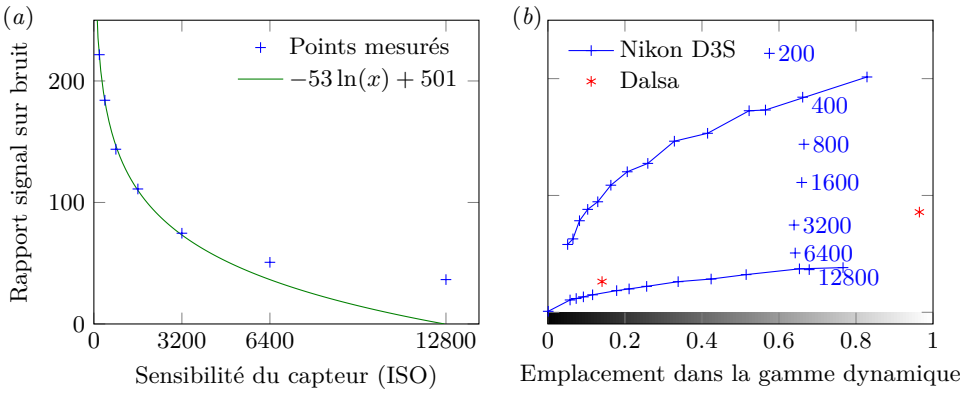


FIGURE 2.23 – Rapport signal sur bruit mesuré pour le Nikon D3S. (*a*) donne cette valeur en fonction du réglage ISO utilisé. Sur la figure (*b*), on regarde également la variation de ce ratio en fonction de l'emplacement dans la plage dynamique du capteur (zone sombre ou zone claire). Deux points de mesure sont donnés à titre de comparaison pour la caméra Dalsa.

2.4.1c Tests de bruit

Le capteur du Nikon D3S a la possibilité de monter en sensibilité jusqu'à 12800 ISO. Comme on peut s'y attendre, l'augmentation de la sensibilité se fait au détriment du rapport signal sur bruit, selon une loi quasi-logarithmique (voir figure 2.23(*a*)). Pour un réglage donné, on remarque également sur la figure 2.23(*b*) que le rapport signal sur bruit varie considérablement aussi selon que l'on exploite la bas (image sombre), ou le haut (image claire) de la plage dynamique du capteur. À des fins de comparaison, on a ajouté deux points sur cette figure, donnant ce même rapport signal sur bruit pour la caméra Dalsa. On constate que le Nikon semble plus favorable dès qu'on l'utilise en dessous de 3200 ISO.

Table 2.4 – Principales caractéristiques de la caméra Andor Zyla 5.5 (données constructeur)

Résolution	2560 × 2160 pixels
Taille du capteur	16.6 × 14.0 mm
Type de capteur	sCMOS
Gamme dynamique	1 : 25000
Encodage des données	16 bits
Fréquence d'acquisition	40 Hz
Prix indicatif	≈ 8500 euros en 2014

2.4.2 Caméra haute sensibilité sCMOS

Parmi le panel de caméras scientifiques que l'on peut trouver sur le marché, la technologie de capteur dite « sCMOS » est bien adaptée pour des applications faiblement lumineuses. Leur haute sensibilité permet d'acquérir des images sombres avec un très faible niveau de bruit comparativement aux autres types de caméra. Nous avons réalisés quelques tests afin d'évaluer leur potentiel, notamment dans l'idée initiale de faire de la T-LIF à deux couleurs. Deux caméras ont été testées : le modèle Orca-Flash 4.0 du constructeur Hamamatsu, et le modèle Zyla 5.5 du constructeur Andor. Leurs performances générales ainsi que leurs niveaux de bruit étant très similaires, seules les caractéristiques de la seconde sont rapportées (tableau 2.4).

Ces mesures ont fait apparaître de manière surprenante des niveaux de bruits comparables pour une image bien exposée, c'est-à-dire des niveaux de gris situés dans la partie supérieure de leurs gammes dynamiques respectives. En revanche, pour de faibles niveaux de gris, le niveau de bruit est comparativement bien meilleur pour la caméra sCMOS. Ainsi, pour des images faiblement lumineuses, ou à forte dynamique (comportant à la fois des zones très lumineuses et très sombres, ce qui est le cas pour la LIF lorsque l'absorption est importante), ces caméras sont à privilégier.

2.5 Étude complémentaire : T-LIF à deux couleurs et un colorant

Afin d'améliorer la fiabilité et la qualité de nos mesures, nous avons envisagé l'utilisation de la T-LIF dite "deux couleurs, un colorant", telles que présentée par Bruchhausen *et al.* (2005). Cette technique exploite deux bandes spectrales d'un même colorant, dont la sensibilité à la température est très différente. Cela nécessite d'utiliser deux caméras ayant chacune le filtre adéquat, dans un montage optique permettant d'obtenir deux images superposables. Pour cela, une lame séparatrice est classiquement utilisée, comme présenté sur la figure 2.6 : elle permet de créer deux images à partir d'une seule, en coupant le spectre lumineux à une longueur d'onde donnée. On utilise sensiblement les mêmes longueurs d'onde que Bruchhausen *et al.* (2005) : une bande autour de 570 nm très sensible à la température que nous appellerons *test* (déjà exploitée auparavant), et une bande autour de 542 nm très peu sensible, que nous appellerons *témoin*.

Toute la difficulté réside dans l'acquisition d'une image témoin exploitable. En effet, conformément à ce que l'on observe figure 2.24 :

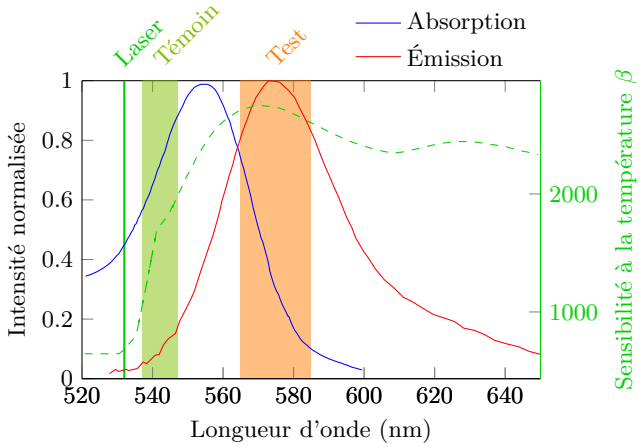


FIGURE 2.24 – Spectres d'absorption et d'émission (lignes continues, axe de gauche) et sensibilité à la température (pointillés, axe de droite) de la Rhodamine B (d'après Bruchhausen *et al.* (2005)). Les bandes verticales représentent respectivement la longueur d'onde du laser, la bande spectrale témoin et la bande spectrale test.

- la bande spectrale correspondante est nécessairement étroite, contrainte à gauche par la longueur d'onde d'excitation (532 nm) et à droite par une sensibilité en température rapidement élevée ;
- cette portion du spectre d'émission est très peu lumineuse ;
- la réabsorption y joue un grand rôle.

Dans ces conditions, il est difficile d'obtenir une image suffisamment exposée, et le niveau de bruit va être déterminant dans la qualité des mesures finales.

Niveau de bruit pour l'image témoin

Les performances en terme de bruit ont été mesurées en utilisant le filtre adapté pour la capture de l'image témoin, soit un filtre passe-bande 537 à 547 nm. Des images ont été prises dans les mêmes conditions avec l'appareil Nikon D3S testé auparavant et la caméra Andor Zyla 5.5. Il en résulte les courbes de la figure 2.25. Pour ce niveau de luminosité, il est intéressant de constater que les rapports signal sur bruit sont comparables. Cependant, l'information pertinente réside dans le fait que dans tous les cas, il n'est pas possible d'obtenir un signal satisfaisant pour un temps d'exposition de quelques dizaines de millisecondes, nécessaire pour figer l'écoulement.

Les moyens à disposition rendant impossible l'obtention d'une image témoin exploitable, la T-LIF à deux couleurs n'a pas pu être mise en pratique dans notre configuration. Notons que cette limitation peut être facilement contournée dans le cas d'expériences de plus petites dimensions, permettant une concentration de colorant plus élevée (cas de Bruchhausen *et al.* (2005), voir tableau 2.1).

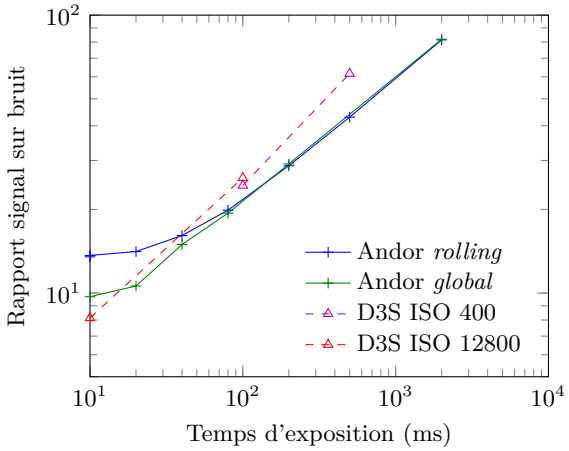


FIGURE 2.25 – Rapport signal bruit comparé entre la caméra Andor Zyla 5.5 et le Nikon D3S. Les traits pleins représentent les mesures de la première (en mode *rolling shutter* ou *global shutter*), tandis que les traits pointillés correspondent aux valeurs mesurées pour le Nikon D3S à 400 et 12800 ISO. Pour le Nikon, seuls les pixels verts ont été considérés, le nombre de pixels utiles est d'environ 1900 dans tous les cas.

Chapitre 3

Mesures de vitesse par Vélocimétrie par Images de Particules

Sommaire

3.1 Introduction **51**
3.2 Mise en œuvre expérimentale **53**
3.2.1 Traceurs 53
3.2.2 Temps d'exposition et fréquence d'acquisition 54
3.3 Post-traitement des images **55**
3.3.1 Traitement général préalable 56
3.3.2 Traitement du champ complet 57
3.3.3 Traitement avancé du panache 58

Ce chapitre expose la méthode employée pour obtenir les champs de vitesses, de l'acquisition des images à leur post-traitement. Bien qu'appliquée à notre configuration, la démarche présentée n'est pas spécifique au logiciel de traitement employé, et peut donc être aisément adaptée à une autre application.

3.1 Introduction

La vélocimétrie par images de particules (*Particle Image Velocimetry*, PIV) est une technique de mesure qui, comme son nom l'indique, permet de déterminer la vitesse dans un écoulement par mesure optique. Elle est très largement utilisée en mécanique des fluides depuis plus de 30 ans, portée notamment par le développement des caméras numériques et des sources lumineuses de forte intensité telles que les lasers. Comme il s'agit d'une mesure optique, cette méthode présente le grand avantage d'être non-intrusive. Elle se décline sous de nombreuses formes : depuis des mesures dans un plan de vitesses bidimensionnelles, jusqu'à la détermination des trois composantes de la vitesse dans un volume.

La PIV se base sur l'utilisation de traceurs qui ensemencent l'écoulement, et dont les positions successives vont être enregistrées à l'aide d'une ou plusieurs

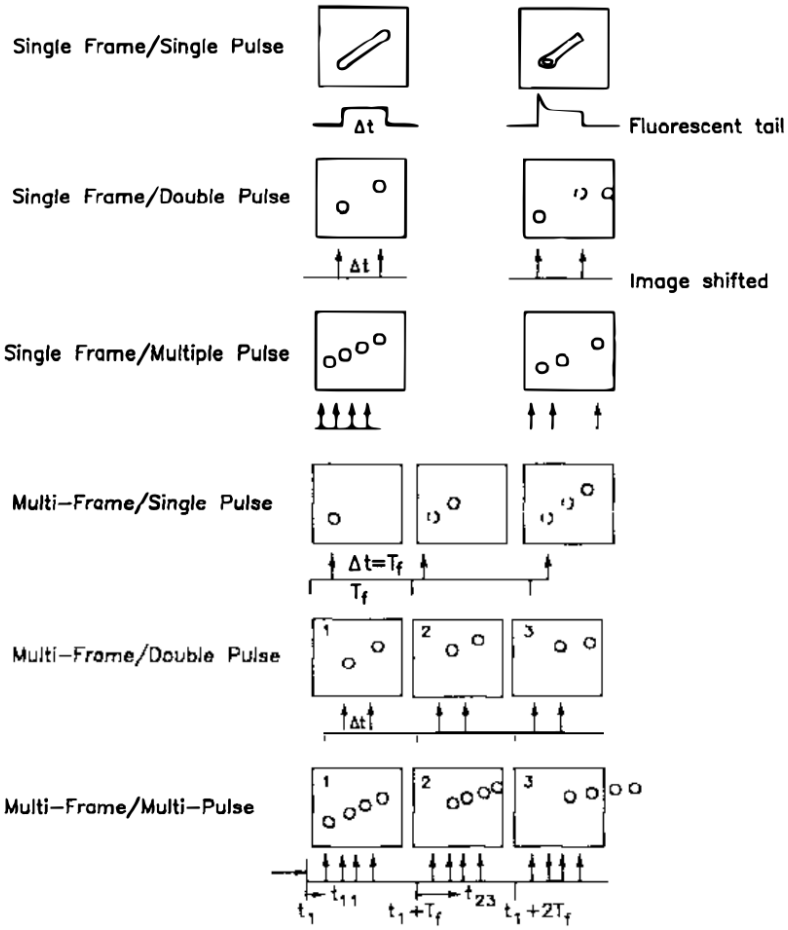


FIGURE 3.1 – Différentes manières de combiner l'éclairage et l'acquisition d'images de particules. (Adrian, 1991)

images. Plusieurs configurations sont possibles, selon la manière dont on combine l'éclairage et l'enregistrement des images, comme le montre la figure 3.1. Il est ainsi possible d'avoir une trajectoire ou différentes positions successives sur une même image, ou encore d'enregistrer une image par position. Il convient de distinguer en pratique les techniques se basant sur l'analyse de particules individuelles, des techniques utilisant le motif granuleux (*speckle* en anglais), sorte de mouchetis produit par un amas de particules. Adrian (1991) a ainsi défini des critères basés notamment sur la densité de particules, permettant de séparer les techniques où l'on peut suivre des portions de trajectoire ou des particules individuelles (respectivement *Particle Streak Velocimetry* et *Particle Tracking Velocimetry*), des techniques optiques ou statistiques tirant parti d'une forte concentration de particules. Le développement des technologies numériques a considérablement facilité ces dernières, et c'est à l'une d'entre elles que nous nous intéresserons ici, dans le but d'obtenir deux composantes de vitesses d'un écoulement bidimensionnel.

On ensemence alors l'écoulement d'une forte concentration de particules de petite taille. Une nappe laser les éclaire dans le plan d'étude, et une caméra capture des doublets d'images suffisamment proches dans le temps pour que les motifs formés par les amas de particules soient reconnaissables malgré leurs déplacements et déformations. Un algorithme traitera ensuite ses doublets d'images en découpant la première en petites fenêtres, qu'il cherchera à faire correspondre à son homologue sur la seconde image. Il obtiendra alors autant de déplacement en pixels que de fenêtres, que l'on pourra ramener à des vitesses en connaissant l'intervalle de temps qui sépare ces images.

3.2 Mise en œuvre expérimentale

Comme décrit au chapitre 1, le plan d'observation est un carré d'une soixantaine de centimètres de côté, éclairé par une nappe laser d'une épaisseur de 2 à 3 mm. L'enregistrement est effectué avec une caméra Dalsa Pantera durant les premières expériences (série 1), puis par une caméra Andor Zyla dans un second temps (série 2).

L'objectif monté sur la caméra est choisi identique à celui qui est utilisé pour la LIF, soit un objectif Nikkor 50 mm. Disposer de la même optique n'est pas indispensable, compte tenu du fait que les caméras ne voient de toutes façons pas exactement le même champ par effet de perspective, mais cela rend les traitements plus confortables. L'ouverture est réglée à son maximum, soit $f/1.2$, afin de collecter un maximum de lumière et pouvoir aisément figer l'écoulement.

Afin de ne pas parasiter les images avec le signal de fluorescence produit par la Rhodamine utilisée pour la LIF, il peut être judicieux d'utiliser un filtre passe bande à 532 nm. C'est le choix qui a été fait pour la série 2. Nous verrons cependant que ce n'est pas indispensable, le fond fluorescent pouvant efficacement être retiré par post-traitement, comme cela a été fait sur les expériences de la série 1, et détaillé plus loin.

Comme pour les mesures LIF, une mire est introduite dans la cuve avant chaque expérience à des fins de calibration. Les images de cette mire permettront d'effectuer la calibration géométrique des images, qui est nécessaire pour convertir les longueurs en pixels sur l'image en coordonnées physiques réelles.

3.2.1 Traceurs

Les particules sont choisies de petite taille et de densité la plus proche possible de l'eau, afin qu'elles suivent l'écoulement le plus passivement possible. Notons que s'il reste toujours délicat d'obtenir exactement la même densité que celle du liquide de travail, cela est par définition impossible dans notre cas à cause du chauffage qui modifie la masse volumique de l'eau. Nous avons donc utilisé des particules en polyamide, de type Orgasol de 30 µm de diamètre, qui se sont avérées produire des images de bonne qualité[1]. Ces particules ayant tendance

[1] Cela reste surprenant : compte tenu de l'ensemble des paramètres, la théorie (Westerweel, 1993) prévoit un diamètre limite de diffraction de 1.6 um et un diamètre image du même ordre, soit 1.7 um. Or la taille de pixel des caméras est de 6.5 µm (caméra Andor) ou 12 µm (caméra Dalsa). Il apparaît alors difficile d'expliquer le bon résultat obtenu, incluant des taches de plusieurs pixels. Ce pourrait être lié à une importante défocalisation des particules induite par la très faible profondeur de champ employée, mais nous n'avons pas de certitudes à ce sujet.

naturellement à s'agglomérer les unes aux autres, quelques gouttes de liquide surfactant leur sont ajoutées au préalable pour favoriser leur dissémination. Leur densité est donnée à 1.016, ce qui les rend légèrement plus lourdes que l'eau. Elles auront donc une tendance à sédimenter sur le long terme. Cela sera sans incidence sur les résultats, mais nécessite des précautions expérimentales particulières. Cela contraint en effet à les introduire dans la cuve le plus tard possible, et à agiter celle-ci aussi longtemps que durent les préparatifs de l'expérience. Ensuite l'expérience terminée, elles sédimenteront et auront tendance à s'agglomérer. Il est alors généralement souhaitable de ne les utiliser qu'une seule fois et donc de filtrer ou renouveler l'eau entre deux expériences.

La concentration en particules se fait de manière empirique : on les ajoute petit à petit dans la cuve et on contrôle en direct le résultat obtenu par la caméra, le principe directeur étant d'en avoir suffisamment pour qu'il n'y ait pas d'espaces vides (zones noires sur les images), mais sans que leur nombre ne fasse écran à la lumière du laser.

3.2.2 Temps d'exposition et fréquence d'acquisition

Les images doivent retranscrire la position exacte des particules. Il est donc nécessaire de pouvoir figer l'écoulement, ce qui revient à dire que le déplacement d'une particule durant le temps d'exposition doit être inférieur au pixel. Soient t_{expo} le temps d'exposition, $V_{\max}$ la vitesse maximale de l'écoulement et l_{px} la taille d'un pixel, cette condition s'écrit

$$t_{\text{expo}} < \frac{l_{\text{px}}}{MV_{\max}}, \tag{3.1}$$

où M est le facteur de grandissement qui caractérise le rapport entre la taille d'un objet sur l'image et sa taille réelle. Dans le cas qui nous occupe, pour une vitesse $V_{\max}$ de l'ordre de $3\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$ et un facteur de grandissement de l'ordre de 0.02, on obtient un temps d'exposition maximal théorique d'environ 20 ms dans le cas de la caméra Dalsa, et 10 ms dans le cas de la caméra Andor. On a pris en réalité respectivement 50 et 30 ms, afin de garantir dans chaque cas un éclairage suffisant. Un flou de bougé d'un peu plus d'un pixel est donc attendu dans les zones les plus rapides.

L'intervalle de temps Δt entre deux images est un autre paramètre important, puisqu'il gouverne à la fois, et de manière antagoniste, la qualité de la corrélation et la précision des mesures. En effet, plus cet intervalle est court, moins l'image se trouvera déformée, et donc plus il sera facile de corréler les fenêtres d'interrogation entre elles. Cependant, on admet généralement que l'erreur d'évaluation du déplacement, noté d_{px}, est de l'ordre de 0.2 pixel, soit une erreur relative valant $0.2/d_{\text{px}}$. La précision relative du déplacement sera donc d'autant meilleure que celui-ci est grand, il y a donc un optimum à trouver. Un déplacement de l'ordre de 4 pixels, donne une erreur relative de 5% et paraît généralement raisonnable. On écrit alors, en écrivant V la vitesse de l'écoulement, et de manière analogue à l'inégalité précédente :

$$\Delta t = 4\frac{l_{\text{px}}}{MV}. \tag{3.2}$$

On constate sans surprise que cet intervalle de temps dépend directement des vitesses que l'on souhaite mesurer. C'est là une des difficultés de notre expérience,

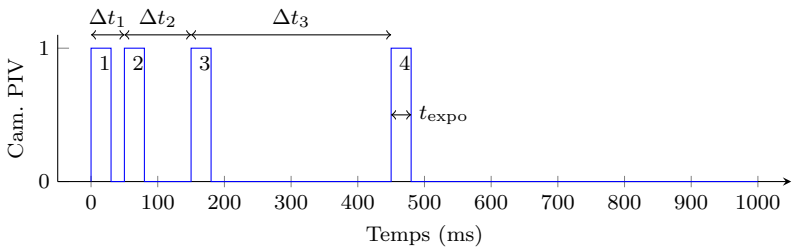


FIGURE 3.2 – Exemple de chronogramme contrôlant l'acquisition des images PIV : chaque créneau représente une image, dont la largeur donne le temps d'exposition (ici 30 ms). On utilise trois intervalles de temps différents : $\Delta t_1 = 50$ ms, $\Delta t_2 = 100$ ms et $\Delta t_3 = 300$ ms. La séquence totale est répétée et dure 1000 ms

pour laquelle les vitesses sont très différentes selon que l'on s'intéresse au panache (quelques centimètres par seconde) ou au milieu stratifié (environ cent fois plus lent). Afin de palier ces inconvénients (difficulté de définir un intervalle optimum *a priori*, vitesses très différentes), nous utiliserons dans nos expériences plusieurs intervalles de temps, permettant, par combinaison, de garantir une certaine souplesse. L'exemple illustré figure 3.2 permet ainsi les combinaisons suivantes :

- doublet 1-2 : 50 ms,
- doublet 2-3 : 100 ms,
- doublet 1-3 : 150 ms,
- doublet 3-4 : 300 ms,
- doublet 2-4 : 400 ms,
- doublet 1-4 : 450 ms,

auxquelles s'ajoutent éventuellement les combinaisons entre paires d'images de différentes séquences, ici espacées d'une seconde.

3.3 Post-traitement des images

Cette section décrit comment les champs de vitesse sont extraits des images. Le traitement est effectué à partir de la boîte à outils Matlab `Uvmat`, développée sous licence libre au sein du laboratoire par Joël SOMMERIA[2]. On distinguera le traitement qui vise à obtenir des champs de vitesse sur l'ensemble du domaine du traitement plus spécifique de la zone pariétale décrivant le panache thermique.

La procédure standard implémentée dans `Uvmat` se déroule comme suit :

1. Premier calcul de corrélation (`CIV1`) : en chaque point d'une grille donnée, l'algorithme va chercher à faire correspondre un groupe de pixels (cellule) de l'image A à un autre groupe de l'image B dans une zone de recherche

[2]Voir http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/soft-uvmat

(fenêtre d'interrogation) définie. L'emplacement de la cellule sur l'image B qui donne la meilleure corrélation avec la cellule initiale, ramené à la position sur l'image A, donne le déplacement. À ce stade le résultat est déjà un champ de vitesses, mais il est généralement souhaitable d'affiner le calcul.

2. Une opération de filtrage (`FIX1`) vise à identifier certains vecteurs potentiellement faux : pics de corrélations trop proches de la bordure de la fenêtre d'interrogation, corrélation trop faible, etc.

3. Une fonction d'interpolation bidimensionnelle de type plaque mince est appliquée (`PATCH1`), permettant d'éliminer des valeurs aberrantes. Cette fonction permet également d'évaluer les valeurs de dérivées spatiales, utiles à l'option `deformation` décrite plus loin.

4. Un second calcul de corrélation (`CIV2`) est alors effectué, en utilisant le résultat de `CIV1` comme premier estimateur. On peut alors utiliser des cellules et fenêtres d'interrogation de plus petites dimensions, ainsi qu'un intervalle de temps plus long pour gagner en précision.

5. Un nouveau filtrage (`FIX2`) est appliqué, similaire à `FIX1`.

6. Une nouvelle interpolation (`PATCH2`), similaire à `PATCH1` est effectuée.

A l'instar du pas de temps, le choix des dimensions de la cellule est régi par deux critères antagonistes. Une grande cellule sera en effet un avantage du point de vue de la qualité de corrélation (Keane & Adrian, 1992), mais cela nuira du même coup à la précision, puisque le vecteur résultant correspondra au déplacement moyen de l'ensemble des particules contenues dans la cellule. Pour cette raison, des cellules de corrélation rectangulaires ont été adoptées : on réduit la dimension horizontale pour conserver une résolution suffisante selon x (épaisseur de la couche limite), mais on augmente la dimension verticale pour améliorer la corrélation.

3.3.1 Traitement général préalable

Outre la calibration géométrique, une étape préalable au traitement proprement dit consiste à éliminer sur les images le signal d'arrière plan. Cela revient à effacer tout signal fixe, et ainsi faire ressortir le signal donné par les particules. La recherche des corrélations s'en trouve facilitée, et cela réduit le risque de produire des vecteurs de déplacement nuls à l'emplacement d'éventuels points fixes. Dans le cadre de nos mesures conjointes LIF/PIV, cette opération s'avère tout particulièrement nécessaire lorsqu'aucun filtre optique n'a été employé durant l'acquisition des images de particules : ce traitement élimine alors le fond homogène produit par le colorant fluorescent.

Cette opération est réalisée en utilisant la fonction `sub_background` (`Uvmat`) qui, sur un échantillon glissant de n images, retranche à chaque pixel son premier quantile (dans notre cas, un décile sur 21 images). La figure 3.3 donne un aperçu de cette opération.

Une dernière opération consiste à créer des masques délimitant la zone sur laquelle les calculs s'effectueront. Il nous faut être particulièrement vigilant à la précision des contours de ces masques dans notre cas, puisque nous voulons

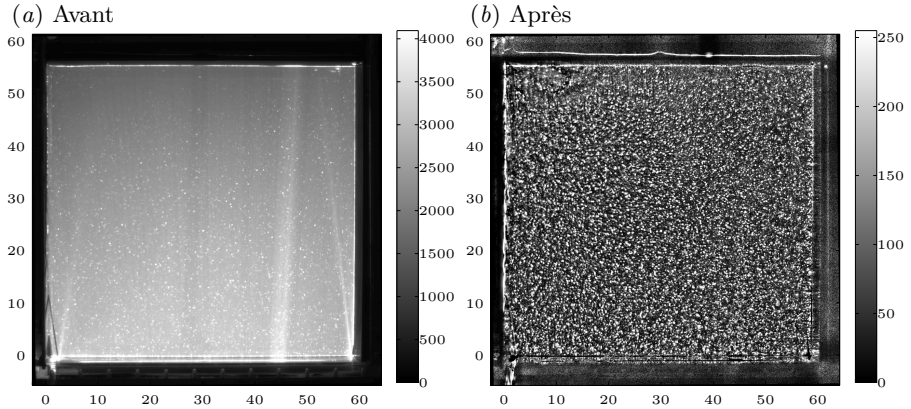


FIGURE 3.3 – Exemple de soustraction d'arrière plan dans le cadre d'une acquisition sans filtre optique (série 1). (*a*) Avant traitement, on voit clairement la nappe, matérialisée par la fluorescence, et peu de particules. (*b*) Après traitement, seules les particules ressortent, créant un mouchetis continu qui pourra être exploité pour le calcul.

décrire l'écoulement dans la couche limite contre la paroi, donc en bordure de masque.

3.3.2 Traitement du champ complet

Comme nous l'avons déjà évoqué, la difficulté du calcul du champ complet réside dans le fait que les vitesses sont très différentes dans la zone stratifiée et dans le panache. Il faut donc différencier le traitement dans ces deux zones, en utilisant deux pas de temps distincts. Une première tentative fut d'utiliser deux masques, séparant géométriquement les deux zones principales et calculant ainsi les vitesses sur chacune d'elle avec les paramètres appropriés.

Cette technique s'est avérée insuffisante du fait de la difficulté de situer précisément les zones à « hautes vitesses ». En effet d'une part le panache fluctue en intensité, et d'autre part, des zones de fortes vitesses en haut de la cuve existent transitoirement au début de l'expérience.

Nous avons alors fait le choix de calculer l'ensemble du domaine deux fois, avec deux pas de temps différents, en appliquant un critère de filtrage sur la vitesse : le traitement « hautes vitesses » (pas de temps court) éliminera les vitesses inférieures à un seuil donné v_1, tandis que le traitement « basses vitesses » (pas de temps long) éliminera les vitesses supérieures à un seuil v_2. On veille à choisir $v_1 > v_2$ de telle sorte qu'il y ait un recouvrement des deux domaines (vitesses intermédiaires résolues par les deux calculs). Le champ final est alors reconstruit par interpolation des deux champs filtrés. La colonne *Champ complet* du tableau 3.1 donne les paramètres de corrélation utilisés. On notera l'utilisation de cellules rectangulaires pour les hautes vitesses, qui concernent majoritairement la paroi, et l'utilisation de cellules carrées pour les basses vitesses, le champ ambiant n'ayant pas de direction privilégiée.

TABLE 3.1 – Paramètres de corrélation utilisés dans le cas du calcul du champ complet et du calcul détaillé du panache pour une expérience de la série 2

Traitements	**Champ complet**		**Panache seul**
`CIV1`	Rapide	Lent	
Intervalle de temps	50 ms	150 ms	50 ms
Cellule de corrélation	15×25 px	21×21 px	7×21 px
Fenêtre d'interrogation	55×55 px	55×55 px	31×55 px
Grille	5×10 px	10×10 px	manuelle
`CIV2`			
Intervalle de temps	50 ms	450 ms	100 ms
Cellule de corrélation	11×21 px	11×11 px	5×15 px
Fenêtre d'interrogation	27×27 px	25×25 px	11×21 px
Grille	5×10 px	10×10 px	manuelle
`CIV3` (le cas échéant)			
Intervalle de temps	-		100 ms
Cellule de corrélation	-		5×15 px
Fenêtre d'interrogation	-		11×21 px
Grille	-		manuelle

3.3.3 Traitement avancé du panache

La zone du panache est d'une grande importance pour les études et analyses menées plus loin, mais se trouve être aussi la zone la plus délicate à décrire. On se heurte ici à deux obstacles majeurs : la faible dimension de la zone d'étude, et la présence d'une paroi. Ces enjeux justifient les précautions particulières appliquées au traitement qui suit. Dans cette section, le détail du traitement est donné pour les expériences les plus abouties, à savoir celles de la série 2.

3.3.3a Grille et cellules de corrélation

Il convient tout d'abord d'effectuer finement la calibration géométrique afin que le zéro horizontal (axe x) coïncide bien avec la position de la paroi. Puis, pour avoir un nombre de points suffisants, il est nécessaire d'utiliser une grille et des cellules de corrélation très fines. Au lieu d'utiliser une grille automatique, qui s'alignera sur les pixels (et donc pas forcément sur la paroi réelle, qui est rarement parfaitement verticale sur l'image), on a donc défini manuellement les points de grille en coordonnées physiques réelles, de telle sorte qu'ils suivent précisément la paroi. Le premier point de grille se situe ainsi à 0.7 mm (environ 2.5 px) de la paroi, les suivants étant espacés ensuite de 0.75 mm (environ 3 px). La dimension verticale ne nécessitant pas une telle résolution, l'espacement sera pris plus large. Ces paramètres sont explicités sur le schéma de la figure 3.4. Afin de tirer parti du caractère essentiellement vertical des vitesses, on choisira cette fois encore des cellules de corrélation rectangulaires. Il est important ici qu'elles soient les plus étroites possibles, pour retranscrire au mieux le fort cisaillement qui caractérise notre écoulement de couche limite. Ces cellules ont donc été choisies de seulement 7 pixels de large pour la première passe (`CIV1`), puis réduite encore jusqu'à 5 pixels de large pour la seconde passe (`CIV2`). D'après les paramètres de grille choisis, le recouvrement des cellules de corrélation sera alors

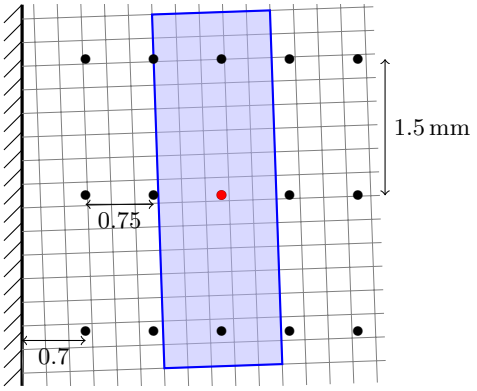


FIGURE 3.4 – Schéma de la grille utilisée pour le calcul des vecteurs (points) le long de la paroi (distances en millimètres). Le quadrillage en fond symbolise l'emplacement des pixels, pas nécessairement alignés avec la paroi, et le rectangle bleu montre la cellule de corrélation (`CIV2`) correspondante au point rouge. Les cellules se recouvreront donc d'environ 50% en horizontal. Le recouvrement vertical est plus important : on aurait pu espacer plus largement les points de grille selon la verticale sans perte d'information.

d'environ 50% selon l'axe horizontal, ce qui est optimal. Enfin, pour bien prendre en compte l'important cisaillement qui caractérise notre écoulement, on activera l'option `deformation` présente dans les paramètres de `CIV2` : celle-ci permet, comme son nom l'indique, de déformer la cellule de corrélation pour améliorer la convergence. Elle a cependant le défaut d'alourdir considérablement l'opération de calcul.

3.3.3b Choix des pas de temps

Ces paramètres étant déterminés, il reste à choisir les pas de temps optimaux. Afin d'évaluer facilement la qualité d'un traitement, nous proposons un indicateur qui conjugue à la fois le nombre de vecteurs justes et la qualité des corrélations. Cet indicateur s'écrit

$$Q_{\text{calc}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\text{ok},i} C_{\text{corr},i} \tag{3.3}$$

où N est le nombre de points de grille (nombre total de vecteurs) et $C_{\text{corr},i}$ est la valeur du coefficient de corrélation du vecteur i, comprise entre 0 et 1. $\delta_{\text{ok},i}$ est le symbole de Kronecker, défini comme valant 1 si le vecteur i est correct au regard des opérations `FIX2` et `PATCH2`, et 0 sinon. Notons que cet indicateur est partiel : il n'informe en rien de la précision des résultats par exemple, qui elle, est reliée à l'amplitude des déplacements (et donc au pas de temps), comme nous l'avons vu plus haut. Pour une expérience donnée, on pourra ainsi calculer quelques champs tests selon divers paramètres, et les comparer entre eux pour choisir la combinaison la plus adaptée.

3.3.3c Exemple de traitement

Afin d'illustrer cette procédure, nous donnons ici les résultats des comparaisons de traitements réalisés pour dans le cadre d'une expérience de la série 2, réalisée avec une faible différence de température (10°C), et donc pour laquelle le panache est très faible, soit laminaire pour l'essentiel.

Cherchons tout d'abord s'il est intéressant ou non de soustraire l'arrière plan[3]. Afin d'assurer l'indépendance du résultat vis-à-vis du pas de temps, plusieurs combinaisons d'intervalles sont testées. Ces résultats sont l'objet de la figure 3.5(*a*) : quelle que soit la combinaison (50 ms/50 ms ; 50 ms/150 ms ou 100 ms/150 ms), le résultat est sans appel : l'indicateur de qualité augmente significativement lorsque l'arrière plan est soustrait. On appliquera donc ce traitement par la suite.

Quelle est maintenant la combinaison de pas de temps qui donne le résultat le plus intéressant ? La figure 3.5(*b*) montre les indicateurs de qualité obtenus pour un ensemble de combinaisons utilisant des pas de temps allant de 50 à 150 ms. Pour toutes les images testées, c'est la combinaison la plus courte (50 ms/50 ms) qui donne le meilleur résultat. Cela n'est guère surprenant puisqu'on mesure ici la convergence du calcul. Pour obtenir un champ qui soit réellement de bonne qualité, il faut tenir compte également de la précision : on a donc peut-être intérêt à allonger le pas de temps. Les vitesses maximales de notre écoulement sont attendues autour de $3\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, et la moyenne se situe plutôt aux alentours de $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Selon l'équation (3.2), l'intervalle théorique idéal serait donc de 100 ms. Or on constate sur les histogrammes que la combinaison 100 ms/100 ms n'entraîne pas une perte en qualité de calcul significative par rapport à la combinaison 50 ms/50 ms. C'est donc cette combinaison que l'on utilisera pas la suite.

Enfin, une dernière piste d'amélioration possible, est de tenter une troisième passe de calcul, appelée `CIV3`. De même que `CIV2` utilise `CIV1` comme première approximation qu'elle affine ensuite, `CIV3` affinera les résultats issus de `CIV2`. Le succès de cette troisième passe dépend de la qualité de la convergence de `CIV2`. Nous référant à la figure 3.5(*c*) qui applique cette troisième passe aux deux dernières combinaisons précédentes, on constate que cette opération au mieux ne change rien, au pire nuit significativement à la qualité du calcul. On s'abstiendra donc d'appliquer ce traitement à ce jeu de données.

Finalement, on appliquera les traitements suivants pour cette expérience :

- Soustraction d'arrière plan préalable,
- `CIV1` puis `CIV2` basés sur le même pas de temps : 100 ms.

[3] Un filtre PIV ayant été utilisé pour cette expérience, la nappe fluorescente n'est d'ores et déjà plus visible

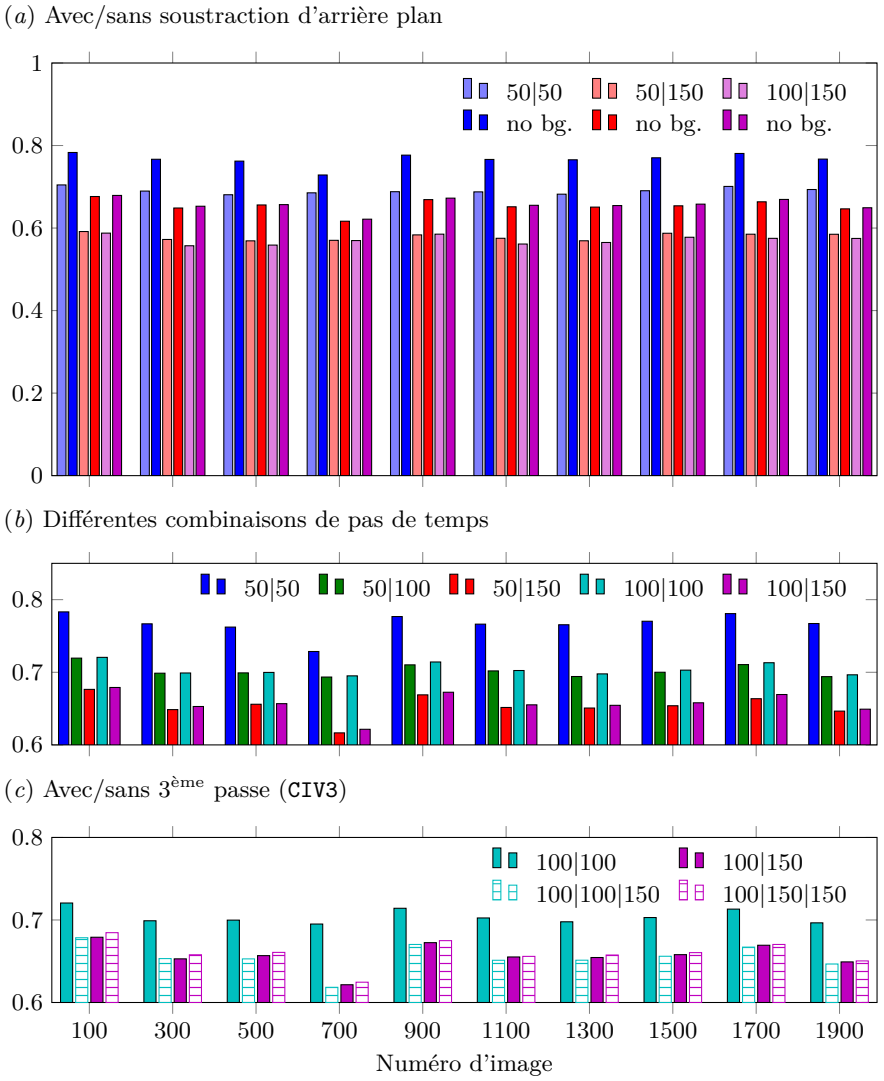


FIGURE 3.5 – Comparaison de l'indicateur de qualité Q_{calc} sur un échantillon de 10 images dans le cas de différents traitements. Les deux nombres $\Delta t_1|\Delta t_2$ donnent les intervalles de temps utilisés respectivement pour `CIV1` et `CIV2`. (*a*) montre l'influence de la soustraction d'arrière plan préalable, pour 3 combinaisons de pas de temps. Dans tous les cas, le fait de soustraire l'arrière plan améliore significativement la qualité du calcul. (*b*) donne la qualité des traitements obtenue pour différentes combinaisons de pas de temps. (*c*) montre l'influence d'une troisième passe de calcul pour les deux combinaisons de pas de temps les plus larges.

Conclusion de cette première partie

Cette partie a permis d'exposer le dispositif expérimental utilisé. Son organe principal est une cuve prismatique de grandes dimensions dont les quatre faces latérales peuvent être actives thermiquement. Son plan central est soumis à un éclairage laser, qui permet d'effectuer des mesures de température et de vitesses selon deux techniques optiques. Ainsi deux caméras enregistrent des images de ce plan, et des sondes physiques permettent de contrôler la température tout en assurant la calibration de la T-LIF.

Les contours théoriques de cette dernière, sont désormais bien décrits, et elle s'avère être une méthode qui permet de décrire efficacement et quantitativement l'ensemble du champ de température. Si les grandes dimensions de notre expérience posent quelques difficultés pratiques, il n'en reste pas moins que la méthode reste parfaitement applicable, avec une précision tout à fait satisfaisante. Mais notre étude montre pointe aussi ses limites, puisqu'elle se trouve rapidement mise en difficulté lorsque d'importants changements d'indice de réfraction apparaissent. La configuration étudiée s'en affranchit aisément grâce à un éclairage et un champ de température compatibles, mais de nombreuses configurations peuvent souffrir de ces limitations, notamment en cas de turbulence généralisée, ou en cas de modification de la température dans la zone d'entrée de la nappe d'éclairage. Si dans beaucoup de cas ces difficultés peuvent être contournées en grande partie par un dispositif amélioré (LIF 2 couleurs), la faiblesse du signal de fluorescence inhérente aux dimensions de notre expérience s'avère être un facteur limitant pour une telle mise en œuvre.

L'acquisition simultanée des vitesses par PIV est relativement classique, mais nécessite ici une vigilance particulière pour résoudre correctement les vitesses sur l'ensemble de leur domaine. À cette fin, plusieurs pas de temps sont utilisés pour échantillonner les images. Le traitement requiert ensuite une attention particulière pour obtenir le détail de la couche limite que l'on souhaite étudier, du fait de sa faible largeur et de la présence de la paroi. L'usage de cellules de corrélation rectangulaires et d'une grille définie précisément ont permis d'atteindre un niveau de résolution et une précision suffisants. Afin d'optimiser efficacement le traitement, un indicateur de qualité se basant sur la qualité de la corrélation et le nombre de vecteurs corrects a été introduit.

Deuxième partie

Paroi chauffante et stratification

Introduction

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, la convection naturelle est un phénomène multi-physique, à la fois très présent dans la nature et dans notre quotidien, très utile à l'industrie et complexe d'un point de vue scientifique. Les enjeux sont donc importants, tant pour la compréhension de notre monde que pour les activités humaines de toutes natures. Les questions ouvertes restent nombreuses. Nous allons ici nous focaliser plus particulièrement sur les panaches, qui sont une de ses manifestations, et ce dans un milieu clos, comme c'est le cas dans les bâtiments notamment. Cela amène à considérer leur interaction avec le fluide environnant, interaction qui donne naissance à une stratification. Cette dernière sera ainsi le second ingrédient clef de l'étude qui va suivre.

La configuration retenue est une enceinte prismatique de 60 cm de hauteur, initialement remplie d'eau à température homogène, dont on impose la température d'un des flancs verticaux. Hormis cette paroi active, toutes les faces sont supposées adiabatiques, et l'écoulement sera considéré bidimensionnel dans le plan d'étude, soit le plan médian. L'expérience se déroule comme suit : alors que le fluide est au repos, on impose brutalement une température plus élevée (typiquement d'une trentaine de degrés) le long d'une paroi latérale. Par conduction, le fluide qui la jouxte s'échauffe, et voit mécaniquement sa densité baisser. Dans une durée de l'ordre de la seconde, celle-ci devient suffisamment faible par rapport au fluide environnant, et la poussée d'Archimède résultant de cet écart peut vaincre la viscosité du fluide et lui permettre de s'élever : alors que la conduction dominait, la convection apparaît (nombre de Nusselt supérieur à 1). Cela génère ainsi un écoulement dit « de couche limite » le long de la paroi. Laminaire sur les premiers centimètres, le chauffage continu l'accélère jusqu'à ce qu'il se déstabilise et devienne turbulent (critère basé sur le nombre de Reynolds, ou plus spécifiquement ici, le nombre de Grashof). L'entraînement de fluide ambiant, qui se faisait jusqu'à présent par frottements visqueux, va alors s'opérer par le biais de tourbillons qui facilitent le mélange et l'élargissement du panache. En quelques secondes il arrive en haut de l'enceinte, où il se trouve dévié par la paroi horizontale. Il dissipe alors son énergie cinétique dans un mouvement de mélange avec le fluide ambiant, tout en restant cantonné dans le haut de la cuve du fait de sa faible densité. Cela crée la première couche de stratification. Elle viendra s'épaissir à mesure que le panache continuera à alimenter sa partie supérieure en fluide de plus en plus chaud, jusqu'à occuper toute la hauteur de l'enceinte une quarantaine de minutes plus tard. Ce réchauffement de l'enceinte affaiblit le panache, puisque la différence relative de température avec la paroi diminue. L'état final est atteint lorsque toute l'enceinte se trouve à la même température que la paroi. La stratification et le panache ont alors disparus, et on obtient alors des conditions homogènes stables comme au début

de l'expérience.

L'objet de cette partie est donc d'investiguer en détail cet écoulement et de déterminer dans quelle mesure une modélisation simple, telle que basée sur la théorie de Morton *et al.* (1956) peut appréhender ses mécanismes. Pour cela nous nous appuierons sur les résultats expérimentaux qui nous donnent une vue quantitative et détaillée de cet écoulement. Nous allons donc tenter de répondre à plusieurs interrogations. Tout d'abord se pose la question de la validité de la théorie de Morton *et al.* (1956) dans un tel contexte. En effet, la présence de la paroi met en défaut le caractère pleinement turbulent de l'écoulement, et risque d'interférer avec les conditions de similarité des profils en tout point de la hauteur. Ces deux points sont pourtant fondamentaux pour la théorie concernée. En conséquence, nous nous intéresserons particulièrement à la partie laminaire, dont nous mesurerons l'influence sur la dynamique globale. Pour cela nous développerons un modèle capable de décrire ce comportement laminaire grâce aux travaux de Worster & Leitch (1985), pour lequel un travail conséquent sera mené afin de tenir compte de l'établissement graduel de la stratification. La modélisation de Morton *et al.* (1956) fait appel à un coefficient d'entraînement qui soulève lui aussi des questions : les valeurs empiriques dont il est fait état dans la littérature diffèrent beaucoup d'une configuration à une autre, et aucune loi générale n'existe à l'heure actuelle pour conjecturer sa valeur *a priori* (voir par exemple Ellison & Turner, 1959; Fernando, 1991). Nous nous attacherons donc à décrire les valeurs qu'il peut prendre grâce à nos mesures expérimentales, en étudiant notamment l'influence de la stratification sur celui-ci. Enfin, comme nous l'avons dit, cette stratification est le fruit d'une interaction entre le panache et son environnement : nous regarderons donc plus particulièrement comment ce profil de densité se modifie en fonction de la dynamique du panache.

L'ensemble de ces résultats a fait l'objet d'un article soumis au *Journal of Fluid Mechanics*, que nous avons retranscrit intégralement dans ce manuscrit dans sa version révisée au chapitre 5. Il est véritablement le cœur de cette seconde partie. Afin d'éviter les redondances, nous évitons autant que possible de reprendre dans le détail les éléments qu'il contient, y compris son introduction qui contient un certain nombre de références non retranscrites ici. Les autres chapitres contiennent donc des développements complémentaires.

Ainsi, l'organisation de cette partie est la suivante : tout d'abord le chapitre 4 expose formellement les modélisation employées. Il donne en premier lieu les équations du modèle turbulent issue basé sur la théorie de Morton *et al.* (1956), son adaptation au cas d'une paroi à température imposée grâce aux travaux de Cooper & Hunt (2010), et son implémentation numérique. Nous y détaillons ensuite la manière dont nous avons modélisé la partie laminaire du panache, et son interaction avec un milieu partiellement stratifié. L'article vient ensuite au chapitre 5 avant d'aborder les discussions et perspectives de cette étude au dernier chapitre.

Chapitre 4

Développement d'un modèle « *filling box* »

Sommaire

4.1 Le modèle turbulent, d'après la théorie de Morton *et al* (1956) 70

4.1.1 Introduction du modèle « *filling box* » 70

4.1.2 Equations finales du modèle turbulent 72

4.1.3 Résolution numérique 74

4.2 Modélisation de la portion laminaire 78

4.2.1 Démarche 78

4.2.2 Extraction des variables compatibles 79

4.2.3 Adimensionalisation et lien avec le modèle turbulent 81

4.2.4 Comportement en milieu partiellement stratifié . . . 83

4.2.5 Validation expérimentale 86

4.2.6 Implémentation numérique 88

Nous développons dans ce chapitre les modélisations employées, tant pour la partie turbulente que la partie laminaire.

Quelques mots sur la terminologie employée. Nous désignons par « fluide ambiant » le fluide remplissant la majorité de l'espace, dans lequel le panache évolue. Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction, nous utiliserons le terme de « flottance » comme équivalent au terme anglais *buoyancy* pour désigner l'aptitude d'un fluide à flotter dans un environnement donné. Ce que nous appelons communément la « source », se réfère à l'organe par lequel une différence de densité est localement induite. Il peut s'agir d'injection de chaleur ou de sel, qui modifient la densité du fluide en contact par diffusion (source de flottance), ou d'injection de fluide extérieur au système, ayant une densité différente du fluide ambiant (source de flottance, de volume et, le cas échéant, de quantité de mouvement).

Note : certaines sections (notamment 4.1.1 et 4.1.2) seront reprises dans la section 5.4 de l'article, au chapitre suivant.

Le code du modèle est donné en annexe A et disponible librement pour téléchargement à l'adresse `http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/`

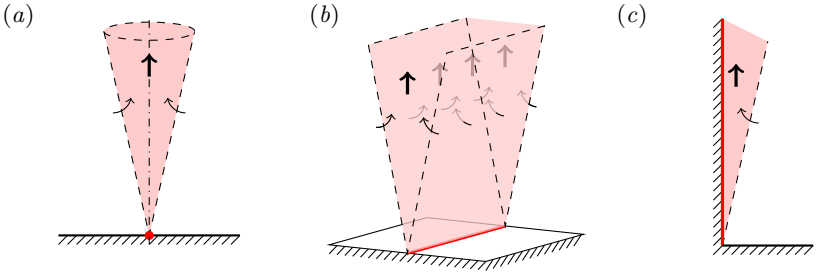


FIGURE 4.1 – Exemples de sources pour lesquelles le modèle de Morton *et al.* (1956) a été appliqué : (*a*) source ponctuelle (Morton *et al.*, 1956; Baines & Turner, 1969), (*b*) source linéique (Baines & Turner, 1969; Patterson & Imberger, 1980) et (*c*) source pariétale surfacique (Worster & Leitch, 1985; Cooper & Hunt, 2010).

`soft-wpsm` (langage Python 2.7).

4.1 Le modèle turbulent, d'après la théorie de Morton *et al* (1956)

4.1.1 Introduction du modèle « *filling box* »

Morton *et al.* (1956) ont proposé un modèle simple pour décrire l'expansion d'un panache turbulent, et qu'il évolue dans un milieu qui peut être homogène ou stratifié. Trois hypothèses sous-tendent cette théorie :

Similarité des profils : les profils de vitesse verticale et de densité doivent être de forme similaire quelque soit la hauteur considérée ;

Entraînement proportionnel à une vitesse caractéristique : quelque soit la hauteur considérée, le panache incorpore une quantité de fluide ambiant proportionnelle à la vitesse caractéristique à cette hauteur ;

Approximation de Boussinesq : le fluide est supposé incompressible, et les variations de densité sont faibles par rapport à une densité de référence.

Ce modèle est basé sur trois équations différentielles, traduisant respectivement la conservation du volume, de la quantité de mouvement et de la flottance dans toute la hauteur du panache. Initialement établies pour un panache axisymétrique (source ponctuelle), elles peuvent aisément être adaptées à différentes géométries de sources, comme l'illustre la figure 4.1.

Ce modèle est unidirectionnel, ce qui signifie qu'il ne tient pas compte des variations des différentes variables selon l'horizontale (axe x). Ainsi, les profils de vitesse ou de température sont ramenés à leurs valeurs caractéristiques, respectivement notées w et T. Il est courant d'utiliser la notation b pour la largeur du panache, et dans un souci de généralité, d'utiliser la flottance Δ plutôt que la température grâce à la relation $\Delta = g\beta(T - T_\mathrm{e})$, où T_e est la température du milieu ambiant. La dynamique du panache pourra donc s'exprimer avec ce jeu de trois variables (b, w, Δ) – largeur, vitesse, flottance. De manière alternative,

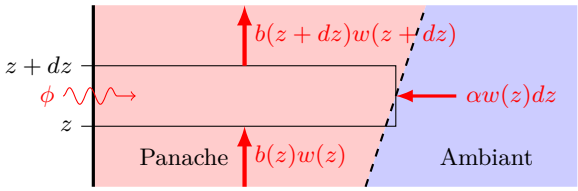


FIGURE 4.2 – Schéma de principe de l'établissement des équations du modèle dans le cas d'une paroi verticale chauffante. Le panache est schématiquement découpé en tranches horizontales d'épaisseur infinitésimale dz, sur lesquelles ont établi les bilans de volume, quantité de mouvement et flottance. Notons ici la présence d'un flux de flottance ϕ en provenance de la paroi, terme source utilisé dans les équations.

l'ensemble du problème peut se réécrire en utilisant un autre jeu de variable, plus facilement compatible avec les équations de conservation, à savoir (Q, M, F) – débit volumique (flux de volume), flux de quantité de mouvement et flux de flottance. On passe d'un système à un autre par les relations : $Q = bw$, $M = bw^2$ et $F = bw\Delta$. Nous donnons les trois équations du modèle pour le cas qui nous intéressera ici, à savoir le cas d'une paroi chauffante, telles que rapportées par Cooper & Hunt (2010). La figure 4.2 illustre cette mise en équation. Les équations de conservation du volume, de quantité de mouvement, et de flottance s'écrivent donc respectivement

$$\frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z} = \alpha w, \qquad \frac{\mathrm{d}(bw^2)}{\mathrm{d}z} = b\Delta \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}(bw\Delta)}{\mathrm{d}z} = bw\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial z} + \phi, \tag{4.1}$$

dans le système (b, w, Δ), ou

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z} = \alpha\frac{M}{Q}, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{QF}{M} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = Q\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial z} + \phi, \tag{4.2}$$

dans le système (Q, M, F) que nous privilégierons désormais. Δ_e correspond dans les deux cas la flottance du milieu ambiant, et s'exprime par rapport à une température de référence T_1 selon la relation $\Delta = g\beta(T_1 - T_\mathrm{e})$[1]. Quelque soit la configuration, ce système d'équations reste très similaire. La principale spécificité de la configuration choisie (paroi verticale chauffante) réside dans la présence du terme source ϕ, correspondant au flux de flottance apporté par la paroi à toute hauteur. Notons que dans l'étude de Cooper & Hunt (2010), ce terme est constant alors que dans nos expériences, où nous imposons la température de la paroi, il sera variable et redéfini en conséquence (voir article, chapitre 5).

Remarquons que ces équations sont étroitement couplées, et reposent sur un ingrédient clef, le coefficient d'entraînement, noté α. Il quantifie l'absorption de fluide ambiant au sein du panache, et contrôle par là toute sa dynamique, puisque son volume, sa densité et sa quantité de mouvement se trouvent modifiées. On l'écrit comme le rapport entre la vitesse verticale caractéristique du panache, et la vitesse horizontale d'entrée du fluide ambiant à une hauteur

[1] Bien qu'*a priori* quelconque, il est généralement bienvenu de prendre la valeur de T_1 égale à la température initiale du fluide ambiant.

donnée. Sa valeur est empirique et sujette à de nombreuses discussions (voir par exemple Ellison & Turner, 1959; Fernando, 1991). Tant que le panache est turbulent, sa valeur est attendue constante dans le temps et dans l'espace. Il apparaît cependant que sa valeur ne soit pas universelle, dépendant fortement de la configuration étudiée (géométrie de l'écoulement, type de source ou conditions ambiantes). Dès lors, il peut-être judicieux de faire varier ce coefficient (Matulka *et al.*, 2014). Nous y reviendrons.

En environnement stratifié, le panache monte jusqu'à ce que sa propre densité corresponde à celle du milieu ambiant (flottance nulle) : il s'étend alors horizontalement. Ce phénomène est s'observe par exemple pour les fumées volcaniques dans l'atmosphère. Ce comportement, qui n'est possible qu'en milieu ouvert (c'est-à-dire non borné), peut être modélisé par les équations du modèle de Morton *et al.* (1956). Pour un milieu clos tel qu'une enceinte, l'injection de fluide de densité différente modifie l'environnement, ce qui permet par exemple de créer une stratification dans une enceinte initialement homogène. En effet, si l'on injecte du fluide moins dense que le fluide ambiant[2], celui-ci ira se stocker en haut de l'enceinte, créant ainsi une couche horizontale, qui va s'épaissir si le panache continue à l'alimenter. Baines & Turner (1969) ont ainsi introduit deux nouvelles équations permettant d'appréhender ce cas de figure. La première traduit la conservation de volume dans l'enceinte : quelque soit la hauteur considérée, le volume de fluide montant dans le panache doit être compensé par un égal volume de fluide ambiant descendant. La seconde équation exprime le changement du profil de densité ambiant consécutif à ce mouvement descendant. Il s'agit simplement de l'équation de la chaleur dont on n'a conservé que le terme d'advection, négligeant ainsi toute diffusion ou mélange. Dans le cas présent, nous préférons conserver le terme de diffusion pour la généralité du propos. Ces équations s'écrivent alors dans la configuration qui nous occupe :

$$Q = -U\frac{A}{L} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial t} = -U\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial z} + \kappa\frac{\partial^2 \Delta_\mathrm{e}}{\partial z^2}. \tag{4.3}$$

On a noté U la vitesse du milieu ambiant, A la section horizontale de l'enceinte et L sa profondeur (selon y), en supposant que le panache reste de faible largeur devant la largeur de la boîte (soit $b \ll A/L$). κ désigne la diffusivité thermique. Alors que les trois équations initiales étaient stationnaires, l'introduction d'une frontière au domaine et de ces deux nouvelles équations fait désormais intervenir le temps, et donc une évolution du système. Baines & Turner (1969) ont ainsi pu quantifier la descente du front de stratification en fonction de la nature de la source et de la géométrie de l'enceinte, dans un système désormais connu sous le nom de « *filling box* ».

4.1.2 Equations finales du modèle turbulent

4.1.2a Redéfinition du terme source

Comme nous l'avons vu plus haut, le fait d'imposer la température de la paroi et non un flux de flottance comme c'est le cas dans l'étude de Cooper & Hunt (2010), nous oblige à redéfinir le terme source ϕ qui apparaît dans les équations (4.1)c et (4.2)c. Une modélisation simple consiste à considérer qu'à une hauteur

[2] L'ensemble du raisonnement reste valable dans le cas où le fluide injecté est plus dense que le milieu par une simple inversion de l'axe vertical.

donnée, le flux de chaleur φ dépend de la température de la paroi T_w et de la température du milieu ambiant à cette même hauteur, moyennant un coefficient d'échange semi-empirique h_w :

$$\varphi = h_\mathrm{w}(T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e}). \tag{4.4}$$

D'après Tsuji & Nagano (1988), h_w s'exprime lui-même à partir de la différence $T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e}$, selon la relation

$$h_\mathrm{w} = K_\mathrm{w} k \left(\frac{g\beta(T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e})}{\nu\kappa} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.5}$$

où K_w est une constante valant 0.120 et k est la conductivité thermique du fluide.

On peut alors facilement relier flux de chaleur et flux de flottance grâce aux propriétés du fluide :

$$\phi = \frac{g\beta}{\rho_1 C_p}\varphi, \tag{4.6}$$

ρ_1 étant une densité de référence et C_p la capacité thermique massique à pression constante. De même que nous avons introduit une température de paroi, on peut définir une « flottance de paroi » $\Delta_\mathrm{w} = g\beta(T_\mathrm{w} - T_1)$, et ainsi écrire

$$\phi = {A_\mathrm{w}}^{\frac{1}{3}}(\Delta_\mathrm{e} + \Delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{3}}, \tag{4.7}$$

où $A_\mathrm{w} = {K_\mathrm{w}}^3 \frac{\kappa^2}{\nu}$ est une constante de diffusion relative à la paroi.

4.1.2b Adimensionalisation

Dès lors, nous pouvons simplifier le jeu d'équation complet par une adimensionalisation adéquate. Le couplage entre les équations contraint fortement cette opération et nous fait aboutir à l'ensemble des variables suivantes :

$$\zeta = H^{-1}z, \qquad \tau = LA^{-1}H^{-1}A_\mathrm{w}t, \qquad \delta_\mathrm{e} = H^3{A_\mathrm{w}}^{-2}\Delta_\mathrm{e}, \tag{4.8}$$

$$f = H^{-3}{A_\mathrm{w}}^{-3}F, \qquad q = {A_\mathrm{w}}^{-1}Q, \qquad m = H{A_\mathrm{w}}^{-2}M \tag{4.9}$$

où contrairement à Cooper & Hunt (2010), nous n'y faisons pas intervenir le coefficient d'entraînement α afin de pouvoir le prendre variable le cas échéant. Les équations adimensionnelles du modèle décrivant le panache s'écrivent finalement

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\zeta} = \alpha\frac{m}{q}, \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{qf}{m}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} = q\frac{\partial\delta_\mathrm{e}}{\partial\zeta} + (\delta_\mathrm{e} + \delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{3}}, \tag{4.10}$$

dans lesquelles le terme δ_w est constant et s'exprime en fonction des nombres sans dimension qui définissent l'expérience :

$$\delta_\mathrm{w} = {K_\mathrm{w}}^{-6}\mathrm{Pr}^3\mathrm{Ra}_H. \tag{4.11}$$

Ceux-ci, respectivement les nombres de Rayleigh et de Prandtl sont définis comme

$$\mathrm{Ra}_H = \frac{g\beta(T_\mathrm{w} - T_1)H^3}{\nu\kappa}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}.$$

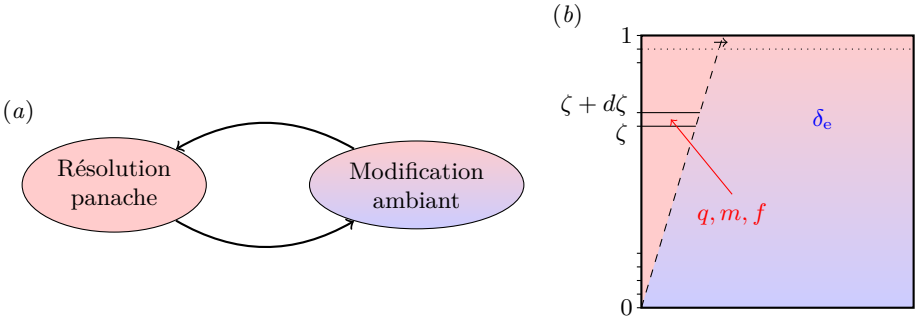


FIGURE 4.3 – Principes de résolution selon le schéma proposé par Germeles (1975). Le diagramme (*a*) montre les deux étapes de résolution caractérisant un pas de temps, et leur interactions réciproques. (*b*) montre les zones concernées par la résolution : à gauche le panache, avec les trois variables q, m et f, à droite le milieu ambiant avec la seule variable δ_e. La discrétisation employée pour la résolution du panache est esquissée sur la gauche, et la flèche en haut de l'enceinte matérialise le transfert de matière qui s'opère dans la dernière couche du domaine.

Les deux dernières équations, relatives à l'évolution du milieu ambiant, se combinent pour donner

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial \tau} = q\frac{\partial \delta_e}{\partial \zeta} + \frac{\mathrm{Pr}}{{K_w}^3}\frac{A}{HL}\frac{\partial^2 \delta_e}{\partial \zeta^2}. \tag{4.12}$$

dans laquelle on reconnaîtra le quotient $\frac{A}{HL}$, le rapport d'aspect de la cuve qui est lui aussi un nombre sans dimension caractéristique de l'expérience.

4.1.3 Résolution numérique

Les équations différentielles couplées (4.1) ou (4.2) qui régissent le panache ont une solution analytique dans le cas où celui-ci évolue dans un milieu homogène (Worster & Huppert, 1983). Dans le cas d'un milieu fermé (*filling box*), la portée de ces solutions se limite donc à l'instant initial, avant que le milieu ambiant ne reçoive le premier volume de fluide du panache. Connaître les solutions aux instants d'après nécessite de recourir à un schéma numérique tel que celui proposé par Germeles (1975).

4.1.3a Démarche

La cuve est discrétisée selon la direction verticale, et la résolution se fait en deux étapes à chaque pas de temps : on résout d'abord le panache dans toute sa hauteur en fonction d'un profil de stratification ambiant connu, puis on modifie ce profil de stratification en fonction de ce résultat. Ce nouveau profil de stratification est alors utilisé comme base pour résoudre une nouvelle fois le panache, initiant ainsi un second pas de temps (voir diagramme 4.3(*a*)). Conformément à la physique de l'écoulement, tous les flux sont nuls en bas de l'enceinte ($\zeta = 0$),

là où le panache prend naissance :

$$q(0) = m(0) = f(0) = 0. \tag{4.13}$$

En revanche, tout en haut de la cuve les choses sont moins évidentes. Si le flux de flottabilité y est effectivement nul, on ne peut rien dire *a priori* concernant le débit volumique ou le flux de quantité de mouvement. En effet, la présence de la paroi supérieure limite le mouvement vertical, mais ne stoppe pas l'écoulement pour autant, qui sera naturellement dévié le long de celle-ci. Ce mouvement de déviation horizontal, qui correspond en réalité à une décharge du panache dans le milieu ambiant, ne peut pas être décrit en détail par notre modèle, qui reste unidirectionnel. L'astuce employée par Germeles (1975) consiste alors à considérer qu'en haut de l'enceinte s'opère un transfert instantané de fluide à chaque pas de temps. Les deux cellules de fluides en haut de la cuve doivent donc avoir la même densité, et leur débits seront égaux au signe près, comme c'est le cas à chaque hauteur (voir équation (4.3)a). Finalement, on peut écrire les conditions suivantes :

$$f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta(1) = \delta_{\mathrm{e}}(1) \Leftrightarrow \frac{f(1)}{q(1)} = \delta_{\mathrm{e}}(1). \tag{4.14}$$

Nous emploierons l'indice $i \in [0; I]$ pour dénoter la discrétisation spatiale, et l'exposant $n \in [0; N]$ pour la discrétisation temporelle.

4.1.3b Résolution du panache

À chaque pas de temps, on suppose le profil de densité ambiant connu, et constant par morceau sur chaque tranche de discrétisation. Ce qui donne formellement :

$$\delta_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\mathrm{e}i} \left[S(\zeta - \zeta_{i-1}) - S(\zeta - \zeta_i) \right] \qquad \text{avec } S(\zeta - \zeta_i) = \begin{cases} 0 \text{ for } \zeta < \zeta_i \\ 1 \text{ for } \zeta \geqslant \zeta_i \end{cases} \tag{4.15}$$

On calcule alors pour chaque intervalle $d\zeta$ les valeurs de q_i, m_i et f_i. Pour cela, on obtient d'abord f_i directement grâce à l'équation (4.10)c :

$$f_i = f_{i-1} + q_{i-1}(\delta_{\mathrm{e}i} - \delta_{\mathrm{e}i-1}) + (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \left(\delta_{\mathrm{e}i-1} + \delta_{\mathrm{w}} \right)^{\frac{4}{3}}. \tag{4.16}$$

f hérite alors du caractère continu par morceau de δ_{e}. On peut à présent évaluer q_i, et m_i entre ζ_{i-1} et ζ_i par intégration de type Runge-Kutta par exemple. Sur l'intervalle suivant, ces valeurs pourrons alors être réinjectées dans l'équation (4.16) afin de déterminer f_{i+1}, puis q_{i+1} et m_{i+1}, et ainsi de suite, jusqu'en haut du domaine. Cette boucle itérative correspond à la boucle interne du diagramme récapitulatif, figure 4.4.

4.1.3c Traitement du milieu ambiant et avance d'un pas de temps

L'évolution temporelle du modèle se traduit par une modification du milieu ambiant (stratification) entre chaque pas de temps. Celui-ci est régi par l'équation (4.12), que nous prendrons tout d'abord dans sa forme simplifiée (pas de

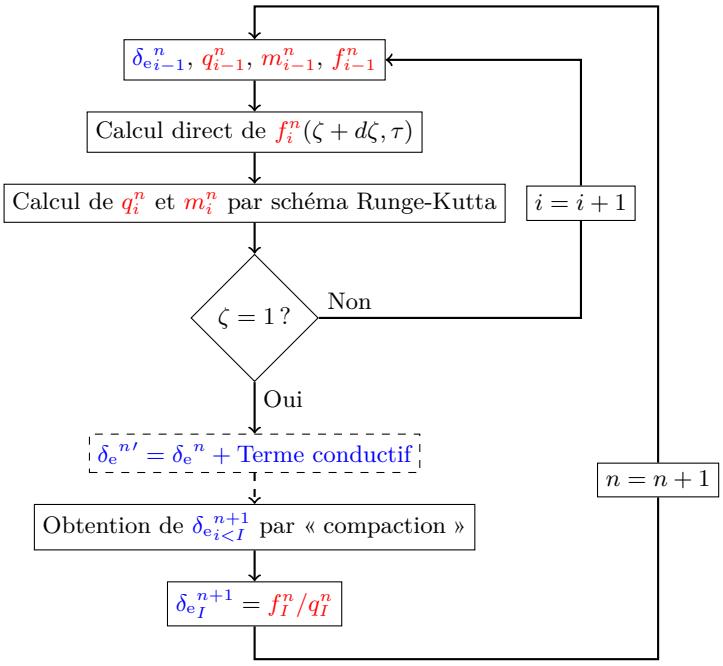


FIGURE 4.4 – Diagramme résumant les différentes étapes du schéma de résolution employé. La boucle intérieure, correspond aux itérations sur la discrétisation spatiale, alors que la boucle extérieure correspond aux itérations temporelles. L'étape optionnelle correspondant à la prise en compte de la conduction est tracée de manière discontinue.

conduction, $\mathrm{Nu}_w \gg 1$). Dans le cas d'advection pure, comme l'a montré Germeles (1975), les différentes interfaces ζ_i^n du profil continu par morceau de δ_e se déplacent verticalement, de telle sorte que

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + u_i^n \Delta\tau. \tag{4.17}$$

u représente alors la vitesse locale du milieu ambiant, obtenue par conservation du débit à chaque hauteur, et en conséquence égale à $-q$ après adimensionalisation. On obtient alors le nouveau profil ${\delta_\mathrm{e}}^{n+1}$ en déplaçant simplement les points ${\delta_\mathrm{e}}_i^n$ d'une valeur $-q_i^n \Delta\tau$, comme si le profil était « comprimé ». Comme q_0 est nul, le dernier point du profil restera immobile. En revanche, il faut recalculer la valeur en $\zeta = 1$. Pour cela on utilise la condition limite (4.14)b :

$${\delta_\mathrm{e}}_I^{n+1} = {\delta_\mathrm{e}}_I^n + \frac{f_I^n}{q_I^n} \tag{4.18}$$

où f_I^n correspond donc à la valeur de la dernière marche de f (qui a un profil en escalier), q_I^n correspond à la valeur de q en $\zeta = 1$.

Traitement de la conduction Dans le cas général où le nombre de Nusselt se trouverait plus faible, il peut être intéressant de prendre en compte les phénomènes conductifs sur le profil de stratification. Ceux-ci auront un effet déformant, tendant à lisser les gradients de densité. Pour cela, on s'appuie sur l'équation (4.12), qui discrétise comme suit :

$$\frac{{\delta_\mathrm{e}}_i^{n+1} - {\delta_\mathrm{e}}_i^n}{\Delta\tau} = q\frac{{\delta_\mathrm{e}}_{i+1}^n - {\delta_\mathrm{e}}_i^n}{\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n} + \frac{\mathrm{Pr}}{{K_\mathrm{w}}^3}\frac{{\delta_\mathrm{e}}_{i+1}^n - 2{\delta_\mathrm{e}}_i^n + {\delta_\mathrm{e}}_{i-1}^n}{(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n)(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n)} \tag{4.19}$$

soit

$${\delta_\mathrm{e}}_i^{n+1} = \underbrace{q\Delta\tau\frac{{\delta_\mathrm{e}}_{i+1}^n - {\delta_\mathrm{e}}_i^n}{\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n} + {\delta_\mathrm{e}}_i^n}_{\text{Partie advective}} + \underbrace{\Delta\tau\frac{\mathrm{Pr}}{{K_\mathrm{w}}^3}\frac{{\delta_\mathrm{e}}_{i+1}^n - 2{\delta_\mathrm{e}}_i^n + {\delta_\mathrm{e}}_{i-1}^n}{(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n)(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n)}}_{\text{Partie conductive}} \tag{4.20}$$

Ces phénomènes d'advection et de conduction unidirectionnels peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre. Schématiquement : l'un agit sur les *valeurs* de flottance (conduction), l'autre sur la *position* de celles-ci (advection). On peut prendre en compte la conduction par une simple transformation du profil de δ_e préalable à son advection que nous venons de traiter :

$${\delta_\mathrm{e}}^n \xrightarrow{\text{Conduction}} {\delta_\mathrm{e}}^{n\prime} \xrightarrow{\text{Advection}} {\delta_\mathrm{e}}^{n+1}$$

On écrit alors

$${\delta_\mathrm{e}}_i^{n\prime} = {\delta_\mathrm{e}}_i^n + \Delta\tau\frac{\mathrm{Pr}}{{K_\mathrm{w}}^3}\frac{{\delta_\mathrm{e}}_{i+1}^n - 2{\delta_\mathrm{e}}_i^n + {\delta_\mathrm{e}}_{i-1}^n}{(\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n)(\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n)}, \tag{4.21}$$

qui se calcule explicitement[3]. On peut alors procéder à la « compression » du profil comme décrit précédemment.

[3]Remarquons qu'une difficulté numérique peut se poser : du fait de la discrétisation, il arrive que la dérivée seconde atteigne des valeurs singulières très grandes. Pour éviter cette erreur numérique qui risque alors de ne plus donner un profil de stratification strictement monotone, il peut être nécessaire de réaliser ce calcul par itération successives, en subdivisant le pas de temps.

4.2 Modélisation de la portion laminaire

Nous verrons lors de l'étude de nos résultats expérimentaux que le premier tiers du panache n'est en réalité pas turbulent, mais laminaire. Le modèle précédent étant basé sur l'hypothèse d'un panache pleinement turbulent, il est légitime de s'interroger sur sa pertinence. Afin d'étudier l'influence de ce long épisode laminaire, nous avons choisi de le modéliser spécifiquement. L'approche est alors assez différente. En effet, contrairement au régime turbulent, le régime laminaire pour l'écoulement de paroi qui nous intéresse, se réduit à un écoulement de couche limite qui peut être déterminé analytiquement par des solutions de similarité. Worster & Leitch (1985) ont développé un modèle *filling box* dans une configuration très proche de la nôtre – une enceinte close dont on impose la température d'une paroi latérale – dans un cadre strictement laminaire grâce à un fluide de travail très visqueux ($\mathrm{Pr} = 16$). Nous nous appuierons donc sur leur approche pour le calcul des variables dont avons besoin.

Tout au long de ce développement, les variables spécifiques à la méthode de Worster & Leitch (1985) seront identifiées par un chapeau « $\widehat{\cdot}$ ».

4.2.1 Démarche

Les développements de cette section sont repris de l'article de Worster & Leitch (1985). Les équations de couche limite décrivant l'écoulement de convection stationnaire bidimensionnel le long d'une paroi verticale s'écrivent

$$u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + g\beta(T - T_\mathrm{e}), \tag{4.22}$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{4.23}$$

Pour les résoudre, on introduit la fonction de courant ψ telle que

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4.24}$$

On fait alors l'hypothèse que la différence de température entre la paroi et le milieu ambiant est proportionnelle à un nombre de Rayleigh local, élevé à la puissance $-\hat{m}$:

$$T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e} = \widehat{\Delta T}\,\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{-\hat{m}}, \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\mathrm{Ra}}_z = \frac{g\beta\widehat{\Delta T} z^3}{\nu\kappa}. \tag{4.25}$$

Cette relation et ce nombre de Rayleigh sont basés sur $\widehat{\Delta T}$, une échelle de température caractéristique. Il est important de noter que le choix de cette échelle *n'est pas* libre, mais découle comme $\hat{m}$ du profil de densité[4]. Cette puissance $\hat{m}$ caractérise alors la stratification : l'environnement est stablement stratifié lorsqu'elle est positive, et l'écoulement entraîne du fluide ambiant lorsqu'il est inférieur à 1.

[4] Formellement, on peut écrire $\widehat{\Delta T} = \left[\left(\frac{g\beta}{\nu\kappa}\right)^{\hat{m}} z^{3\hat{m}} (T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e})\right]^{\frac{1}{1-\hat{m}}}$, mais nous reviendrons sur la manière pratique de définir ces constantes section 4.2.3.

On introduit alors le paramètre de similarité

$$\hat{\xi} = \widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{4}} \frac{x}{z} \tag{4.26}$$

et deux fonctions adimensionnelles $\widehat{F}$ et $\widehat{G}$ que l'on lie à la fonction de courant et la fluctuation en température par

$$\psi = \kappa \widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{4}} \widehat{F}(\hat{\xi}), \tag{4.27}$$

$$\text{et} \qquad T - T_\mathrm{e} = \widehat{\Delta T} \widehat{\mathrm{Ra}}_z^{-\hat{m}} \widehat{G}(\hat{\xi}) \tag{4.28}$$

D'après (4.22)-(4.23), ces fonctions vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\widehat{F}''' + \frac{1}{\mathrm{Pr}} \left[\frac{3}{4}(1-\hat{m})\widehat{F}\widehat{F}'' - \frac{1}{2}(1-3\hat{m})\widehat{F}'^2 \right] + \widehat{G} = 0 \tag{4.29}$$

$$\widehat{G}'' + \frac{3}{4}(1-\hat{m})\widehat{F}\widehat{G}' - 3\hat{m}(1-\widehat{G})\widehat{F}' = 0 \tag{4.30}$$

avec les conditions aux limites

$$\widehat{F} = \widehat{F}' = 0, \qquad \widehat{G} = 1 \qquad \text{pour } \hat{\xi} = 0, \tag{4.31}$$

$$\widehat{F}' \to 0, \qquad \widehat{G} \to 0 \qquad \text{pour } \hat{\xi} \to \infty, \tag{4.32}$$

traduisant le fait que la vitesse s'annule alors que la température vaut T_w à la paroi, et que la vitesse et la perturbation de température tendent vers 0 dans le milieu ambiant. La résolution de ce système pour un $\hat{m}$ donné permet donc d'obtenir les fonctions $\widehat{F}$ et $\widehat{G}$, et par elles les variables ψ et $T - T_\mathrm{e}$ dans tout le domaine. La figure 4.5 donne les tracés de $\widehat{F}'$ (image de la vitesse verticale) et $\widehat{G}$ (image de la perturbation de température), issus de la résolution des équations différentielles pour $\mathrm{Pr} = 5$, et respectivement $\hat{m} = 0$ et $\hat{m} = 0.3$. On peut remarquer sur les seconds une petite partie à flottance négative (autour de $\hat{\xi} = 3$), qui traduit l'entraînement de fluide issu de couches inférieures, et donc plus dense que le milieu à la hauteur considérée. D'après Worster & Leitch (1985), ce fluide sera relargué dans le milieu ambiant, où il regagnera sa position d'équilibre.

4.2.2 Extraction des variables compatibles

Nous n'avons pas besoin d'une description exhaustive des variables, puisque le modèle dans lequel ces travaux s'insèreront est unidirectionnel. Il nous faut alors extraire de ces solutions de similarité les variables intégrées décrivant le panache, introduites dans la section précédente. L'indice « l » matérialise leur déclinaison pour la portion laminaire.

Débit volumique

$$Q_l(z) = \psi(z, x \to \infty) \tag{4.33}$$

$$= \kappa \widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{4}} \widehat{F}(\infty) \tag{4.34}$$

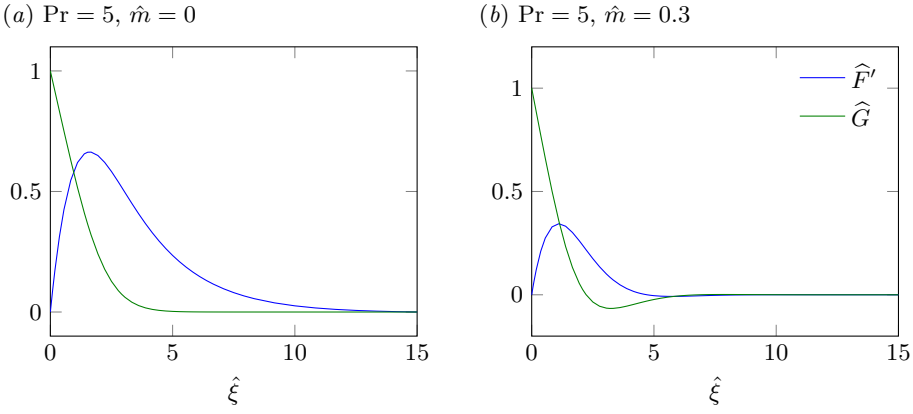


FIGURE 4.5 – Exemples de tracés des profils de $\widehat{F}'$ et $\widehat{G}$, images respectives de la vitesse verticale et de la perturbation de température, issus de la résolution des équations (4.29)-(4.30) pour Pr = 5. (*a*) vaut pour un milieu ambiant homogène ($\hat{m} = 0$), alors que (*b*) vaut pour un milieu ambiant stratifié avec paramètre $\hat{m} = 0.3$.

Flux de quantité de mouvement Il s'exprime de manière générale comme

$$M(z) = \int_0^{+\infty} u_z(x,z)^2 dx. \tag{4.35}$$

Il nécessite donc de connaître la vitesse verticale qui s'écrit en fonction de la fonction de courant :

$$u_z(x,z) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.36}$$

$$= \frac{\kappa}{z}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{2}} \widehat{F}'(\hat{\xi}(x,z)) \tag{4.37}$$

d'où

$$M_l(z) = \frac{\kappa^2}{z^2}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{1-\hat{m}} \int_0^{+\infty} \widehat{F}'\left(\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{4}} \frac{x}{z}\right)^2 dx, \tag{4.38}$$

soit, par le changement de variable $\hat{\xi} = \widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{4}} \frac{x}{z}$, $dx = z\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{\hat{m}-1}{4}} d\hat{\xi}$ on obtient

$$M_l(z) = \frac{\kappa^2}{z}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})} \int_0^{+\infty} \widehat{F}'(\hat{\xi})^2 d\hat{\xi} \tag{4.39}$$

Flux de flottance De la même manière, celui-ci s'exprime de manière générale

$$F(z) = \int_0^{+\infty} u_z(x,z) g\beta(T(x,z) - T_\mathrm{e}) dx, \tag{4.40}$$

la différence $T(x,z) - T_\mathrm{e}$ s'écrivant d'après (4.28)

$$T(x,z) - T_\mathrm{e} = \widehat{\Delta T}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{-\hat{m}} \widehat{G}(\hat{\xi}). \tag{4.41}$$

Par le même raisonnement que précédemment, on obtient alors :

$$F_l(z) = \frac{\kappa^3}{z^3}\mathrm{Pr}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{5}{4}(1-\hat{m})}\int_0^{+\infty}\widehat{F}'(\hat{\xi})\widehat{G}(\hat{\xi})d\hat{\xi}. \tag{4.42}$$

Pour simplifier les notations, nous noterons désormais les derniers termes (constants à $\hat{m}$ donné) de ces expressions respectivement

$$\widehat{K_Q} = \widehat{F}(\infty), \quad \widehat{K_M} = \int_0^{+\infty}\widehat{F}'(\hat{\xi})^2 d\hat{\xi} \quad \text{et} \quad \widehat{K_F} = \int_0^{+\infty}\widehat{F}'(\hat{\xi})\widehat{G}(\hat{\xi})d\hat{\xi}. \tag{4.43}$$

Les variables b_l, w_l et Δ_l s'écrivent par combinaison des expressions de Q_l, M_l et F_l :

$$b_l(z) = Q_l(z)^2/M_l(z) \tag{4.44}$$

$$= z\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{\hat{m}-1}{4}}\frac{\widehat{K_Q}^2}{\widehat{K_M}}, \tag{4.45}$$

$$w_l(z) = M_l(z)/Q_l(z) \tag{4.46}$$

$$= \frac{\kappa}{z}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{\frac{1-\hat{m}}{2}}\frac{\widehat{K_M}}{\widehat{K_Q}}, \tag{4.47}$$

et

$$\Delta_l(z) = F_l(z)/Q_l(z) \tag{4.48}$$

$$= \frac{\kappa^2}{z^3}\mathrm{Pr}\widehat{\mathrm{Ra}}_z^{1-\hat{m}}\frac{\widehat{K_F}}{\widehat{K_Q}}, \tag{4.49}$$

Finalement, des solutions des équations différentielles (4.29) et (4.30), nous calculerons les constantes $\widehat{K_Q}$, $\widehat{K_M}$ et $\widehat{K_F}$, qui suffiront à définir l'ensemble de nos variables pour la portion laminaire pour une stratification donnée.

4.2.3 Adimensionalisation et lien avec le modèle turbulent

L'adimensionalisation des variables laminaires se fait de la même manière que l'adimensionalisation des variables turbulentes donnée en (4.9), soit :

$$\zeta = H^{-1}z, \qquad f_l = H^3 {A_\mathrm{w}}^{-3}F_l, \qquad q_l = {A_\mathrm{w}}^{-1}Q_l, \qquad m_l = H{A_\mathrm{w}}^{-2}M_l.$$

Ainsi, en rappelant que $A_\mathrm{w} = {K_\mathrm{w}}^3\frac{\kappa}{\mathrm{Pr}}$ il vient :

$$\begin{cases} q_l = {K_\mathrm{w}}^{-3}\mathrm{Pr}\widehat{\mathrm{Ra}}_H^{\frac{1}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_Q}\cdot\zeta^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})} \\ m_l = {K_\mathrm{w}}^{-6}\mathrm{Pr}^2\widehat{\mathrm{Ra}}_H^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_M}\cdot\zeta^{\frac{1}{4}(5-9\hat{m})} \\ f_l = {K_\mathrm{w}}^{-9}\mathrm{Pr}^4\widehat{\mathrm{Ra}}_H^{\frac{5}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_F}\cdot\zeta^{\frac{3}{4}(1-5\hat{m})} \end{cases} \tag{4.50}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, la valeur de $\widehat{\Delta T}$ intervenant dans la loi de similarité est imposée par le profil de stratification courant. Afin de la relier à une échelle de température fixe, en l'occurence celle du modèle turbulent, nous introduisons une constante λ_T telle que

$$\widehat{\Delta T} = \lambda_T (T_\mathrm{w} - T_1). \tag{4.51}$$

Celle-ci nous permet de réécrire le jeu d'équations précédent en cohérence avec l'ensemble du modèle, soit finalement :

$$\boxed{\begin{cases} q_l = {K_\mathrm{w}}^{-3}\mathrm{Pr}(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{1}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_Q} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})} \\ m_l = {K_\mathrm{w}}^{-6}\mathrm{Pr}^2(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_M} \cdot \zeta^{\frac{1}{4}(5-9\hat{m})} \\ f_l = {K_\mathrm{w}}^{-9}\mathrm{Pr}^4(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{5}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_F} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}(1-5\hat{m})} \end{cases}} \tag{4.52}$$

Ces variables laminaires reposent donc sur les constantes $\hat{m}$ et λ_T, qu'il convient de déterminer d'après le profil de stratification. Pour cela on peut réécrire (4.28) sous la forme

$$\frac{T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{w} - T_1} = \lambda_T^{1-\hat{m}} \mathrm{Ra}_z^{-\hat{m}}, \tag{4.53}$$

soit, de manière adimensionnée

$$1 + \frac{\delta_\mathrm{e}}{\delta_\mathrm{w}} = \lambda_T^{1-\hat{m}} (\mathrm{Ra}_H \zeta)^{-\hat{m}}. \tag{4.54}$$

Le tracé de $\ln\left(1 + \frac{\delta_\mathrm{e}}{\delta_\mathrm{w}}\right)$ en fonction de $\ln(\mathrm{Ra}_H \zeta)$ nous permet ensuite d'obtenir deux coefficients $\widehat{p}_1$ et $\widehat{p}_2$ par une régression linéaire, qui nous donnent finalement accès aux constantes recherchées :

$$\hat{m} = -\widehat{p}_1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_T = \exp\left(\frac{\widehat{p}_2}{1-\hat{m}}\right). \tag{4.55}$$

On peut voir l'introduction de ce coefficient λ_T comme un changement de repère : on passe du système de variables général (basé sur $T_\mathrm{w} - T_1$) au système de variables de similarité (basé sur $\widehat{\Delta T}$) par une translation de vecteur $(-\ln(\lambda_T), \ln(\lambda_T))$ du repère logarithmique. Ces changements sont illustrés sur la figure 4.6, dans les cas d'un milieu homogène et d'un milieu stratifié. Afin de pouvoir utiliser les lois de similarité, il est nécessaire d'annuler l'ordonnée à l'origine de la droite support du profil de densité dans le repère de travail.

En complément, il est également possible de calculer l'équivalent du coefficient d'entraînement défini dans le modèle turbulent de Morton *et al.* (1956). Celui-ci étant défini comme $\frac{1}{w}\frac{dQ}{dz}$, il devient ici :

$$\alpha_l(z) = \frac{3}{4}(1-\hat{m})(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{\hat{m}-1}{4}} \frac{\widehat{K_Q}^2}{\widehat{K_M}} \zeta^{\frac{3}{4}(\hat{m}-1)}, \tag{4.56}$$

$$\text{soit} \qquad \alpha_l(z) = \frac{3}{4}(1-\hat{m})\frac{b_l(z)}{z}. \tag{4.57}$$

Contrairement au régime turbulent pour lequel ce coefficient est supposé être le même partout, on remarque qu'ici il est attendu varier significativement avec la hauteur.

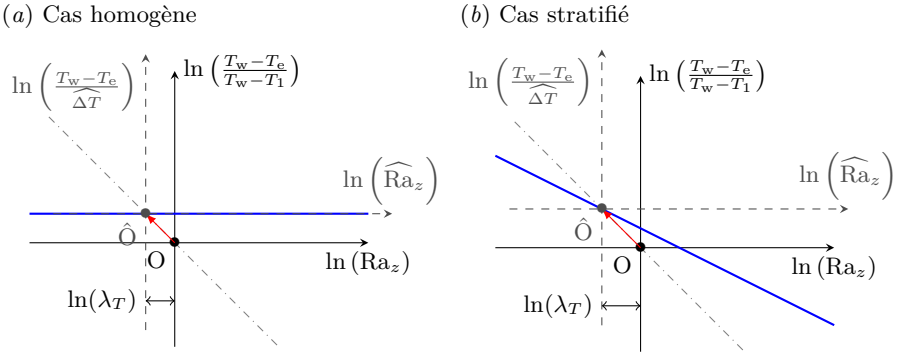


FIGURE 4.6 – Illustrations des changements de repère que représente l'introduction du coefficient λ_T, (*a*) dans le cas d'un milieu homogène, (*b*) dans le cas d'un milieu stratifié. La droite bleue représente la droite support du profil de densité, la droite d'équation $\ln\left(\frac{T_w-T_e}{T_w-T_1}\right) = -\ln(\mathrm{Ra}_z)$ est tracée en traits mixtes. L'origine du repère de travail doit se situer à leur intersection pour vérifier les lois de similarité.

4.2.4 Comportement en milieu partiellement stratifié

L'histoire pourrait s'arrêter là. Mais le système d'équations (4.52) que nous venons de décrire n'est en réalité valable que dans deux configurations : lorsque le milieu est homogène ($\hat{m} = 0$) d'une part, ou lorsque celui-ci est entièrement stratifié selon un profil de densité proportionnel à $z^{-3\hat{m}}$ d'autre part. Le cas où cette relation de proportionnalité n'est pas vérifiée ne fait pas l'objet de ce manuscrit. En revanche, la situation où la stratification n'affecte qu'une partie de l'enceinte est un cas de figure que l'on rencontre systématiquement dans nos expériences, et doit être modélisée[5].

Un profil dit « bi-couche », c'est-à-dire stratifié en sa partie haute, homogène en sa partie basse, est représenté schématiquement sur la figure 4.7, en repère logarithmique basé sur $\widehat{\Delta T}$. Le front de stratification est matérialisé par des pointillés verticaux. Nous allons distinguer ici les variables propres au milieu homogène, et celles qui sont propres au milieu stratifié, que nous marquerons respectivement de la lettre « h » ou « s ». On fait donc l'hypothèse que la présence d'une couche homogène n'invalide pas le principe de similarité dans la couche stratifiée.

La modélisation de la partie homogène (sous le front, à gauche sur la figure) ne pose pas de difficulté : on détermine λ_T^{h} comme on le ferait pour un milieu entièrement homogène, ce qui nous permet de vérifier (4.25) sans problème, avec $\hat{m}_{\mathrm{h}} = 0$ comme précédemment. On va ensuite procéder de même pour la partie stratifiée. Celle-ci n'ayant *a priori* aucune raison d'avoir la même échelle caractéristique de température $\widehat{\Delta T}_{\mathrm{s}}$ que la partie homogène, il nous faut déterminer un second facteur, noté λ_T^{s} ainsi que le paramètre $\hat{m}_{\mathrm{s}}$ caractérisant cette zone. On résout alors les équations différentielles (4.29) et (4.30) dans les deux cas, pour $\hat{m} = 0$ et $\hat{m} = \hat{m}_{\mathrm{s}}$, ce qui nous donne les fonctions $(\widehat{F}_{\mathrm{h}}(\hat{\xi}_{\mathrm{h}}), \widehat{G}_{\mathrm{h}}(\hat{\xi}_{\mathrm{h}}))$ d'une

[5]Dans leur article, Worster & Leitch (1985) ont abordé cette situation dans le seul but d'obtenir la position du front de stratification, ce qui ne requiert pas de décrire explicitement les profils de la couche limite au dessus de ce front comme nous nous proposons de le faire ici.

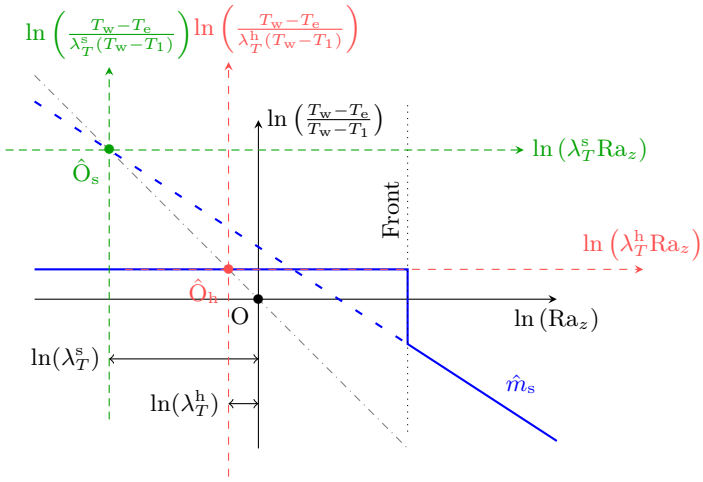


FIGURE 4.7 – Représentation d'un profil partiellement stratifié (en bleu) en échelle logarithmique dans le repère général. Le front de stratification est marqué par la ligne pointillée verticale, la zone homogène étant à gauche, la zone stratifiée à droite. Les repères de similarité pour chacune de ces zones sont en traits discontinus respectivement rouges et verts de centres $\hat{\mathrm{O}}_\mathrm{h}$ et $\hat{\mathrm{O}}_\mathrm{s}$.

part et $(\widehat{F}_\mathrm{s}(\hat{\xi}_\mathrm{s}), \widehat{G}_\mathrm{s}(\hat{\xi}_\mathrm{s}))$ d'autre part.

Jusqu'ici le fait que la stratification n'est que partielle n'a pas été pris en compte. Il faut donc à ce stade modifier le second jeu de variables, en accord avec cette particularité. Pour cela on va leur appliquer des coefficients correctifs λ_ξ, λ_F et λ_G, que l'on déterminera grâce aux conditions de continuité au passage du front. Nous noterons désormais « b » les variables du milieu stratifié partiel et « fr » celles qui se réfèrent au front. Dans la zone stratifiée le jeu de variable sera donc $(\hat{\xi}_\mathrm{b}, \widehat{F}_\mathrm{b}(\hat{\xi}_\mathrm{b}), \widehat{G}_\mathrm{b}(\hat{\xi}_\mathrm{b}))$, que l'on relie aux variables stratifiées par les relations :

$$\hat{\xi}_\mathrm{b} = \lambda_\xi \hat{\xi}_\mathrm{s}, \qquad \widehat{F}_\mathrm{b} = \lambda_F \widehat{F}_\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \widehat{G}_\mathrm{b} = \lambda_G \widehat{G}_\mathrm{s}. \tag{4.58}$$

En conséquence on obtient pour les constantes intégrées :

$$\widehat{K_Q^\mathrm{b}} = \lambda_F \widehat{K_Q^\mathrm{s}}, \qquad \widehat{K_M^\mathrm{b}} = \frac{\lambda_F^2}{\lambda_\xi} \widehat{K_M^\mathrm{s}} \qquad \text{et} \qquad \widehat{K_F^\mathrm{b}} = \lambda_F \lambda_G \widehat{K_F^\mathrm{s}}. \tag{4.59}$$

La continuité de l'échelle horizontale x de part et d'autre du front impose que :

$$z_\mathrm{fr}(\lambda_T^\mathrm{s}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{\frac{\hat{m}_\mathrm{s}-1}{4}} \lambda_\xi \hat{\xi} = z_\mathrm{fr}(\lambda_T^\mathrm{h}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{-\frac{1}{4}} \hat{\xi} \tag{4.60}$$

soit

$$\lambda_\xi = \left[\frac{\lambda_T^\mathrm{h}}{\lambda_T^\mathrm{s}} (\lambda_T^\mathrm{s}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{\hat{m}_\mathrm{s}}\right]^{-\frac{1}{4}}. \tag{4.61}$$

Il est intéressant de remarquer que la constante entre crochets contient à elle seule tous les paramètres permettant de reconstruire le profil de densité complet. On la notera C_δ à l'avenir. De même, par continuité de la vitesse caractéristique w_l on écrit :

$$\frac{\kappa}{z_\mathrm{fr}} (\lambda_T^\mathrm{s}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{\frac{1-\hat{m}_\mathrm{s}}{2}} \frac{\widehat{K_M^\mathrm{b}}}{\widehat{K_Q^\mathrm{b}}} = \frac{\kappa}{z_\mathrm{fr}} (\lambda_T^\mathrm{h}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{\frac{1}{2}} \frac{\widehat{K_M^\mathrm{h}}}{\widehat{K_Q^\mathrm{h}}} \tag{4.62}$$

soit

$$\frac{\lambda_F}{\lambda_\xi} = C_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{\widehat{K_M^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} \frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_M^{\mathrm{s}}}}, \tag{4.63}$$

et donc

$$\lambda_F = C_\delta^{\frac{1}{4}} \frac{\widehat{K_M^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} \frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_M^{\mathrm{s}}}}. \tag{4.64}$$

Pour le coefficient λ_G, il faut tenir compte du saut de densité qui caractérise le front. En notant Δ_{e}^0 la valeur de la flottance initiale (valeur dans la zone homogène) et $\Delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}}$ la valeur au front on utilise la continuité de la température caractéristique au sein du panache :

$$\frac{\kappa^2}{z_{\mathrm{fr}}^3}\mathrm{Pr}(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{1-\hat{m}_{\mathrm{s}}} \frac{\widehat{K_F^{\mathrm{b}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{b}}}} - \Delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}} = \frac{\kappa^2}{z_{\mathrm{fr}}^3}\mathrm{Pr}\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}} \frac{\widehat{K_F^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} - \Delta_{\mathrm{e}}^0 \tag{4.65}$$

soit

$$\frac{\lambda_F\lambda_G}{\lambda_F} = (\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\hat{m}_{\mathrm{s}}-1} \frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_F^{\mathrm{s}}}} \left[(\Delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}} - \Delta_{\mathrm{e}}^0) \frac{z_{\mathrm{fr}}^3}{\kappa^2} \frac{1}{\mathrm{Pr}} + \lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}} \frac{\widehat{K_F^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} \right] \tag{4.66}$$

$$\lambda_G = C_\delta \frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_F^{\mathrm{s}}}} \left[\frac{\Delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}} - \Delta_{\mathrm{e}}^0}{\lambda_T^{\mathrm{h}}\Delta_{\mathrm{w}}} + \frac{\widehat{K_F^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} \right]. \tag{4.67}$$

Le passage du front va donc nécessairement impliquer des discontinuités dans les variables Q_l, M_l et F_l. Pour le débit par exemple, cette discontinuité vaudra :

$$Q_l^{\mathrm{h}}(z_{\mathrm{fr}}) - Q_l^{\mathrm{s}}(z_{\mathrm{fr}}) = \kappa(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\frac{1}{4}}\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}} - \kappa(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\frac{1-\hat{m}_{\mathrm{s}}}{4}}\lambda_F\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}} \tag{4.68}$$

$$= \kappa(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\frac{1}{4}} \left[\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}} - \frac{\widehat{K_M^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} \frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_M^{\mathrm{s}}}} \widehat{K_Q^{\mathrm{s}}} \right]. \tag{4.69}$$

Cette perte de débit est liée à une décharge de fluide en dessous du front. En effet, comme on peut le constater sur les profils de vitesse et de température 4.5(*a*), la couche limite en milieu homogène est constituée dans une large part ($4 < \hat{\xi} < 12$) de fluide de flottance nulle (de même température que l'environnement). Ce fluide, entraîné par effets visqueux, est trop dense pour être entraîné au delà du front, et reste en conséquence en dessous de celui-ci (Worster & Leitch, 1985).

Pour un milieu partiellement stratifié, on aura donc finalement deux sets d'équations distincts :

$$\zeta < \zeta_{\mathrm{fr}} \qquad \begin{cases} q_l^{\mathrm{h}} = K_{\mathrm{w}}{}^{-3}\mathrm{Pr}(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_H)^{\frac{1}{4}}\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}} \\ m_l^{\mathrm{h}} = K_{\mathrm{w}}{}^{-6}\mathrm{Pr}^2(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_H)^{\frac{3}{4}}\widehat{K_M^{\mathrm{h}}} \cdot \zeta^{\frac{5}{4}} \\ f_l^{\mathrm{h}} = K_{\mathrm{w}}{}^{-9}\mathrm{Pr}^4(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_H)^{\frac{5}{4}}\widehat{K_F^{\mathrm{h}}} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}} \end{cases} \tag{4.70}$$

$$\zeta \geq \zeta_{\mathrm{fr}} \qquad \begin{cases} q_l^{\mathrm{b}} = K_{\mathrm{w}}{}^{-3}\mathrm{Pr}(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_H)^{\frac{1}{4}(1-\hat{m}_{\mathrm{s}})}\lambda_F\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}(1-\hat{m}_{\mathrm{s}})} \\ m_l^{\mathrm{b}} = K_{\mathrm{w}}{}^{-6}\mathrm{Pr}^2(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_H)^{\frac{3}{4}(1-\hat{m}_{\mathrm{s}})}\frac{\lambda_F^2}{\lambda_\xi}\widehat{K_M^{\mathrm{s}}} \cdot \zeta^{\frac{1}{4}(5-9\hat{m}_{\mathrm{s}})} \\ f_l^{\mathrm{b}} = K_{\mathrm{w}}{}^{-9}\mathrm{Pr}^4(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_H)^{\frac{5}{4}(1-\hat{m}_{\mathrm{s}})}\lambda_F\lambda_G\widehat{K_F^{\mathrm{s}}} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}(1-5\hat{m}_{\mathrm{s}})} \end{cases} \tag{4.71}$$

4.2.5 Validation expérimentale

Afin de vérifier les hypothèses du développement qui précède, nous avons confronté cette théorie aux données expérimentales. On impose un écart de température entre la paroi et le fluide initial de 10°C. Ceci confère à l'écoulement un nombre de Rayleigh relativement faible ($\mathrm{Ra}_H = 4.3 \times 10^{10}$)[6], et ainsi une portion laminaire importante. Le nombre de Prandtl vaut ici 6.2.

La figure 4.8(a) donne un diagramme spatio-temporel de cette expérience. La ligne continue sépare la zone homogène de la zone stratifiée. Trois profils de densités pris à différents instants sont tracés sur les graphes du dessous, respectivement 4.8(c), (e) et (g) en échelle logarithmique, dans le repère de similarité homogène ($\widehat{\Delta T} = \lambda_T^{\mathrm{h}}(T_{\mathrm{w}} - T_1)$). Comme on peut le constater, ces profils de densité sont continus, et la zone linéaire pour laquelle la relation de similarité est valide reste limitée. La position du front, marquée en pointillés, est donc choisie entre ces deux zones, c'est-à-dire entre la zone « complètement homogène » et la zone « significativement stratifiée ». Chaque point du diagramme 4.8(a) correspond à un profil de vitesse, qui a été adimensionné en fonction de la variable de similarité qui lui correspond. Pour le milieu homogène on a donc tracé (graphe 4.8(b))

$$\widehat{F}'_{\mathrm{h}} = u_z(x,z)\frac{z}{\kappa}(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_z)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{en fonction de} \qquad \hat{\xi}_{\mathrm{h}} = (\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_z)^{\frac{1}{4}}\frac{x}{z},$$

et pour la partie stratifiée (graphes 4.8(d),(f) et (h)) :

$$\frac{\lambda_F}{\lambda_\xi}\widehat{F}'_{\mathrm{s}} = u_z(x,z)\frac{z}{\kappa}(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_z)^{\frac{\hat{m}_{\mathrm{s}}-1}{2}} \quad \text{en fonction de} \quad \lambda_\xi\hat{\xi}_{\mathrm{s}} = (\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_z)^{\frac{1-\hat{m}_{\mathrm{s}}}{4}}\frac{x}{z}.$$

Les profils théoriques sont tracés quant à eux en traits pleins.

On constate un excellent accord sur les profils de vitesse en milieu homogène (graphe 4.8(b)). Ce résultat n'est en soi pas surprenant, puisque la théorie qui le sous-tend est déjà largement éprouvée, mais il permet de fait de valider les mesures réalisées, et en particulier le traitement PIV. L'accord entre notre théorie et les expériences (graphes 4.8(d),(f) et (h)) est moins bon, mais néanmoins satisfaisant. On remarque notamment que le modèle est capable de reproduire qualitativement l'inflexion négative que l'on observe pour $\lambda_\xi\hat{\xi}_{\mathrm{s}} \approx 7$. Celle-ci est liée au fait que la couche limite entraîne avec elle du fluide issu de couches plus denses qui tend à redescendre à sa hauteur d'équilibre. Sur les deux derniers graphes (4.8(f) et (h)), le profil marqué par des carrés est en moins bon accord que les autres. Ceci s'explique par le fait qu'il se trouve déjà dans la zone d'influence de la portion turbulente, comme on peut le constater sur les graphes 4.8(e) et (g), où celle-ci est en grisé.

Ces résultats confirment l'hypothèse selon laquelle les lois de similarités pour la zone stratifiée restent valables malgré la présence d'une sous-couche homogène. On gardera cependant à l'esprit qu'une partie significative de l'écoulement traverse une couche pour laquelle la stratification n'est pas proportionnelle à $z^{-\hat{m}}$, et n'est par conséquent pas modélisable selon les principes exposés.

[6] L'évaluation de ce nombre de Rayleigh, tout comme celle de la température T_{w} chaque fois qu'il y est fait référence dans cette section, tient compte du coefficient d'échange qui existe entre l'eau du compartiment chauffé et la paroi elle-même. (plus de détails seront donnés en annexe de l'article, section 5.A)

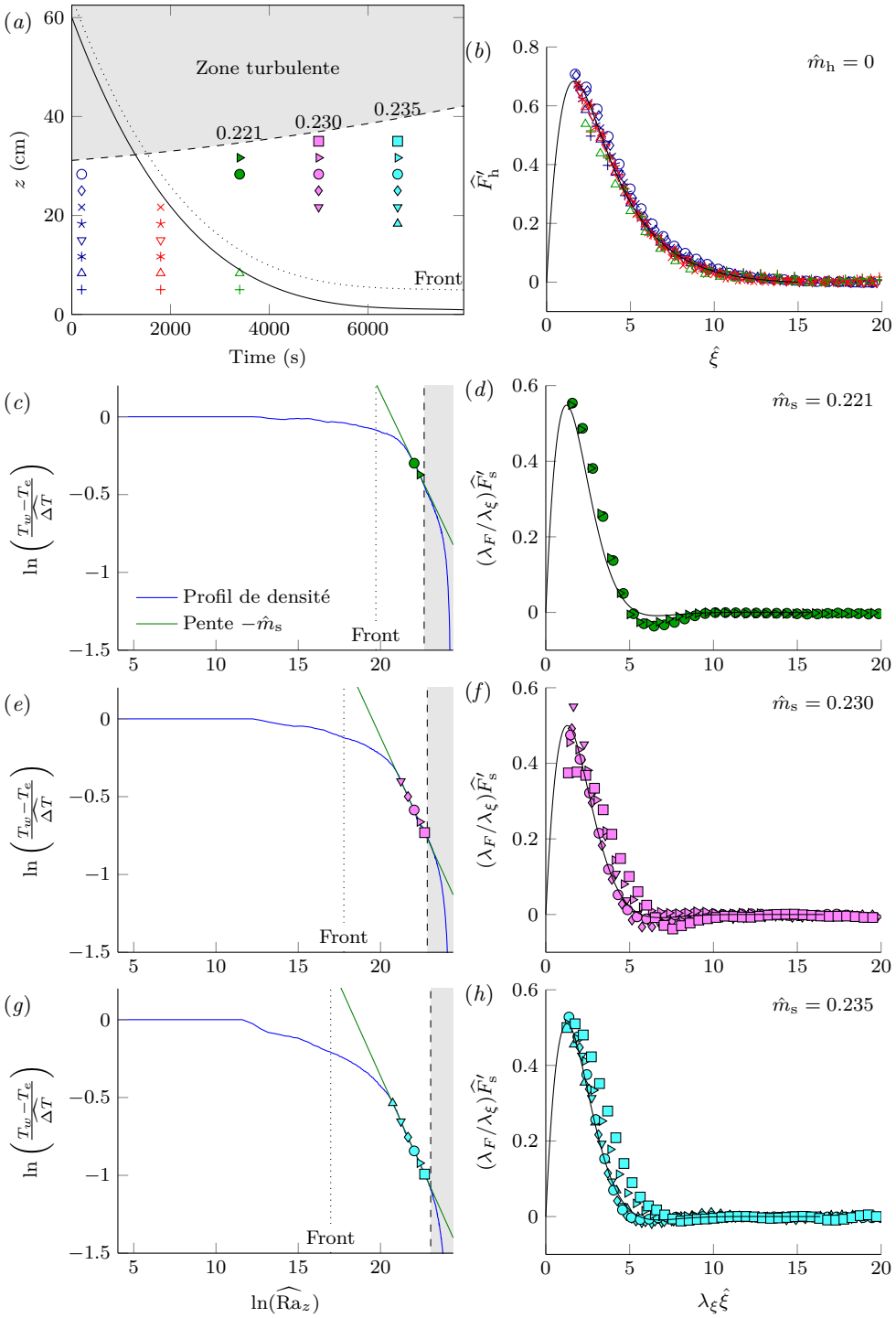


FIGURE 4.8 – Validation expérimentale des lois de similarité pour une stratification bicouche. (*a*) donne un diagramme spatio-temporel de l'expérience sur lequel la ligne noire continue délimite la zone pour laquelle l'environnement est homogène. Les points donnent l'emplacement des différents profils de vitesse tracés sur les graphes de droite en fonction des lois de similarités. Les graphes (*c*), (*e*) et (*g*) donnent les profils de stratification en échelle logarithmique des profils placés en regard. Se référer au texte pour plus de détails.

4.2.6 Implémentation numérique

L'incorporation des nouvelles équations (4.70) et (4.71) dans le modèle ne pose pas de réelle difficulté technique. Il s'agit essentiellement de substituer aux conditions limites du modèle turbulent des conditions calculées par le modèle laminaire. Le domaine va donc être divisé en deux parties : la zone laminaire et la zone turbulente, dans lesquelles on applique pour chacune la modélisation correspondante. Le critère choisi pour distinguer ces deux zones est le nombre de Grashof : l'écoulement est laminaire lorsque celui-ci est inférieur à 10^9, turbulent sinon. Ce critère s'est révélé pertinent vis-à-vis des résultats expérimentaux (voir section 4.2.5). On le définit sous sa forme locale et instantanée comme

$$\mathrm{Gr}_z = \frac{g\beta(T_\mathrm{w} - \langle T_\mathrm{e}\rangle)H^3}{\nu^2}, \tag{4.72}$$

où $\langle T_\mathrm{e}\rangle$ représente la moyenne spatiale de T_e à l'instant considéré. Celle-ci est calculée à chaque pas de temps et permet de tenir compte de l'évolution de la stratification, actualisant ainsi la hauteur de transition ζ_crit à chaque itération. Ce nombre de Grashof local instantané peut se réécrire en fonction du nombre de Grashof global Gr_H :

$$\mathrm{Gr}_z = \mathrm{Gr}_H\left(1 + \frac{\langle\delta_\mathrm{e}\rangle}{\delta_\mathrm{w}}\right)\zeta^3 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Gr}_H = \frac{\mathrm{Ra}_H}{\mathrm{Pr}}. \tag{4.73}$$

Cela nous permet finalement de donner la hauteur de transition (dite critique) comme

$$\zeta_\mathrm{crit} = 10^3\left[\mathrm{Gr}_H\left(1 + \frac{\langle\delta_\mathrm{e}\rangle}{\delta_\mathrm{w}}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}. \tag{4.74}$$

La zone laminaire est ensuite à son tour divisée en deux : la portion où l'environnement est homogène, et celle où il est stratifié. La position du front séparant ces deux zones est connue, il n'y a donc qu'à résoudre les deux groupes d'équations (4.70) et (4.71).

Pour chacun d'eux, il faut déterminer les coefficients $\widehat{p}_1$ et $\widehat{p}_2$ par correspondance de courbe sur la portion du profil de densité concernée. On peut alors en déduire les coefficients $\hat{m}_\mathrm{s}$, λ_T^h[7] et λ_T^s. Les fonctions $\widehat{F}$ et $\widehat{G}$ sont ensuite nécessaires pour obtenir les constantes $\widehat{K_Q^\mathrm{h}}$, $\widehat{K_M^\mathrm{h}}$, $\widehat{K_F^\mathrm{h}}$ et $\widehat{K_Q^\mathrm{s}}$, $\widehat{K_M^\mathrm{s}}$, $\widehat{K_F^\mathrm{s}}$ intervenant dans les équations. Afin d'éviter de résoudre les équations différentielles (4.29)-(4.30) pour chaque valeur de $\hat{m}_\mathrm{s}$ rencontrée, soit à chaque pas de temps, une boucle les calcule initialement pour une certaine gamme de valeurs, ce qui permet ensuite de les obtenir par une simple interpolation. La figure 4.9 montre la variation des constantes $\widehat{K_Q^\mathrm{s}}$, $\widehat{K_M^\mathrm{s}}$ et $\widehat{K_F^\mathrm{s}}$ en fonction du paramètre $\hat{m}_\mathrm{s}$.

[7] λ_T^h sera égal à 1 si la densité de référence δ_1 correspond à la densité initiale du milieu.

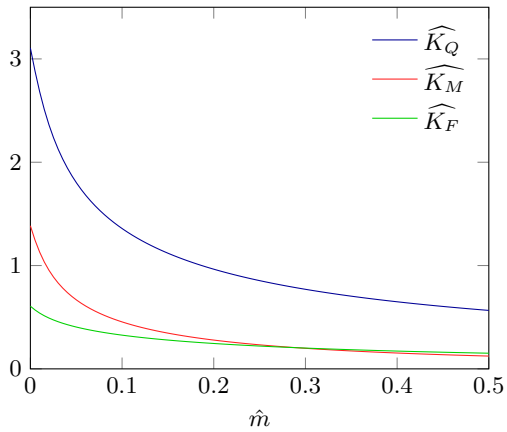


FIGURE 4.9 – Tracé des constantes $\widehat{K_Q}$, $\widehat{K_M}$ et $\widehat{K_F}$ en fonction du paramètre $\hat{m}$ dans le cas où $\mathrm{Pr} = 6$. Ces trois constantes sont toutes monotones décroissantes, permettant une interpolation aisée une fois quelques points déterminés.

Chapitre 5

Convection at an isothermal wall in an enclosure and establishment of stratification

Sommaire

5.1 Introduction **92**
5.2 Experimental measurements **94**
5.2.1 The experimental setup 94
5.2.2 Details of the T-LIF technique 96
5.3 Observations from T-LIF & PIV measurements . **97**
5.3.1 Plume and stratification evolution 97
5.3.2 Ambient flow characteristics 100
5.3.3 Wall plume details for the modelling 102
5.3.4 The entrainment coefficient 102
5.4 Theoretical modelling **104**
5.4.1 The turbulent conservation equations 104
5.4.2 Hybrid model including the laminar part 106
5.4.3 Temperature at the wall 108
5.4.4 Numerical procedure 109
5.5 Comparisons between experiment and models . . **110**
5.5.1 The ambient stratification 111
5.5.2 The plume 111
5.6 Conclusions **114**
5.A Heat transfer at the wall **115**
5.A.1 Free convection in the tank 116
5.B Details about the entrainment coefficient **117**

Ce chapitre reprend dans son intégralité un article soumis au *Journal of Fluid Mechanics* dans sa version finale révisée.

Convection at an isothermal wall in an enclosure and establishment of stratification

T. Caudwell, J.-B. Flòr† and M. E. Negretti

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, LEGI, 38000 Grenoble, France

(Received 6 February 2015; revised 25 March 2016; accepted 26 May 2016)

In this experimental-theoretical investigation we consider a turbulent plume generated by an isothermal wall in a closed cavity and the formation of heat stratification in the interior. The buoyancy of the plume near the wall and the temperature stratification are measured across a vertical plane with the temperature laser induced fluorescence method, which is shown to be accurate and efficient (precision of 0.2°C) for experimental studies on convection. The simultaneous measurement of the velocity field with particle image velocimetry allows for the calculation of the flow characteristics such as the Richardson number and Reynolds stress. This enables us to give a refined description of the wall plume, as well as the circulation and evolution of the stratification in the interior. The wall plume is found to have an inner layer close to the heated boundary with a laminar transport of hardly mixed fluid which causes a relatively warm top layer and an outer layer with a transition from laminar to turbulent at a considerable height. The measured entrainment coefficient is found to be dramatically influenced by the increase in stratification of the ambient fluid.

To model the flow, the entrainment model of Morton *et al.* (1956) has first been adapted to the case of an isothermal wall. Differences due to their boundary condition of a constant buoyancy flux, modelled with salt by Cooper & Hunt (2010), turn out to be small. Next, to include the laminar-turbulent transition of the boundary layer, a hybrid model is constructed which is based on the similarity solutions reported by Worster & Leitch (1985) for the laminar part and the entrainment model for the turbulent part. Finally, the observed variation of the global entrainment coefficient, which is due to the increased presence of an upper stratified layer with a relatively low entrainment coefficient, is incorporated into both models. All models show reasonable agreement with experimental measurements for the volume, momentum and buoyancy fluxes as well as for the evolution of the stratification in the interior. In particular the introduction of the variable entrainment coefficient improves all models significantly.

Key words: Convection in cavities, Plumes/thermals, Stratified turbulence

---

5.1 Introduction

When a vertical wall is heated above the temperature of the ambient fluid, a boundary layer of hot fluid adjacent to it grows in thickness until it becomes unstable and evolves into a plume-like motion (see e.g. Schlichting & Gersten, 2000). When this situation is met in a room, container or reservoir, entrainment and mixing with ambient fluid in

† Email address for correspondence: jan-bert.flor@legi.cnrs.fr

the closed cavity establishes a stable density stratification (see Baines & Turner, 1969). This stratification limits the vertical circulation and thus plays an important role in heat transfer as well as for the dispersion of tracers. The evolution is therefore of interest to respectively energy saving applications, the quality of water in reservoirs and air circulation in buildings (Linden, 1999).

Here, we consider a heated wall that generates a turbulent boundary layer, hereinafter called the wall plume. This wall plume differs from the classic plume as generated by a point source: since heat is forced over the entire depth, the wall imposes zero velocity and the wall blocks the typical meandering plume motion. The entrainment model of Morton *et al.* (1956) (MTT) has proven very successful for the modelling of plumes and ambient stratification generated by point sources (see Linden, 1999; Kaye, 2008; Woods, 2010; Hunt & van den Bremer, 2011; Sandbach & Lane-Serff, 2011, and references therein) or distributed sources along a vertical wall such as those modelled with a constant flux of saline water by Cooper & Hunt (2010). Cooper & Hunt (2010) investigated a wall plume at a vertical boundary generated by injecting a saline solution through a porous sidewall of a square tank, thus providing a constant flux of buoyancy over the entire depth. The evolution of the stratification and the motion of the density front between the heated fluid and the homogeneous ambient in the box showed an overall good agreement of the experimental data with the entrainment model of Morton *et al.* (1956) that was adapted to a vertically distributed source along the wall.

For an isothermal wall the heat flux varies with height, since the rising fluid will be subject to a gradually smaller temperature difference with the sidewall. For the laminar case Worster & Leitch (1985) showed that there is no density front as was observed by Baines & Turner (1969) for a turbulent plume between the homogeneous environment and stratified fluid. Since the laminar boundary layer remains unmixed, it enhances a different stratification than a turbulent wall plume that engulfs and mixes ambient fluid of lower temperatures.

In the present study, we consider a heated wall that gives rise to a wall plume that is laminar near the base and turbulent above a certain height. A hybrid entrainment model, based on the model by Worster & Leitch (1985) for the laminar part, and on Cooper & Hunt (2010) for the turbulent part, is presented, where we consider a constant temperature wall instead of a constant buoyancy flux. With this modelling, we implicitly also respond to questions about the differences in Prandtl number, which is 5.5 for heat flux compared to a Schmidt number of 700 for salt flux experiments. Note that this modelling is one-dimensional as per the MTT model. Although two-dimensional models for laminar-turbulent wall plumes are available (see Wells & Worster, 2008), we will continue the simpler one-dimensional approach.

The MTT model assumes there is a constant entrainment coefficient in the buoyant plume that is proportional to the mean local vertical velocity and that the buoyant plume fluid is ejected into the non-turbulent ambient (see e.g. Wells *et al.*, 1999, for an overview of the MTT model). The laminar model of Worster & Leitch (1985) is based on similarity solutions for a heated boundary layer. The transport of a plume generally causes a stratified top layer that increases in depth with time so that the ambient is partially stratified and partially homogeneous. Since the entrainment coefficient in shear layers is higher in a homogeneous fluid than in a stratified fluid (see Fernando, 1991), one may expect that for a plume with constant buoyancy and velocity, the increase of the stratified layer-depth also causes the entrainment coefficient to decrease with time. Usually, a constant entrainment value that does not take into account this variation is considered (see Cooper & Hunt, 2010). This provides an additional aspect in the modelling. Therefore, measurement results for the plume and the ambient stratification are confronted

with the MTT and hybrid plume model, both for a constant and subsequently variable entrainment coefficient.

Although turbulent wall plumes in closed cavities have been investigated numerically, most experimental studies are concerned with local point measurements with probes (see e.g. Tsuji & Nagano, 1988). Detailed quantitative information from experiments about the entire temperature and velocity field in the plume and the ambient stratification is not available at present. To test the modelling, a novel experimental measurement technique is used which allows the simultaneous measurement of temperature and velocity in an entire field and reveals both the details of the plume and the interior stratification. The instantaneous temperature fields are obtained using laser induced fluorescence (LIF) and by taking advantage of the variation in the emission spectrum of certain fluorescent dyes at particular temperatures (Walker, 1987). This temperature-LIF method (hereinafter called T-LIF) was first tested by Nakajima *et al.* (1991) for a local measurement and by Sakakibara *et al.* (1993) for a planar field. As far as we know, this method has not been exploited for convective flows, where quantitative information is still limited to point measurements with thermistors or hot wires. For Rhodamine B that is used here, one can expect a fluorescent emission decay of 3.2%/K under favourable conditions, which allows for a precision of 0.2°C which is close to the precision of a thermistor measurement in a point. Velocity fields are obtained using Particle Image Velocimetry (PIV).

The experimental method is described in detail in section §5.2. The observations of the plume motion and the interior stratification are discussed in section §5.3. The entrainment model theory for an isothermal wall is presented with the corresponding numerical models in section §5.4, and the variation in the entrainment coefficient is discussed. The comparison between experimental results and theoretical models is made in §5.5. Results are further discussed in the conclusions in section §5.6.

5.2 Experimental measurements

5.2.1 The experimental setup

Experiments were conducted in a 551 mm-high tank of horizontal section $588 \times 300\,\mathrm{mm}^2$, filled with demineralized water at room temperature (see figure 5.1). The front and back sides of the tank were made of 20 mm-thick transparent plastic (polymethyl methacrylate, or PMMA), whereas 5 mm-thick aluminium plates at the sidewalls conducted the heat from the water in the adjacent compartments to the test section. In the present experiments, one lateral sidewall (volume $300 \times 20 \times 551\,\mathrm{mm}^3$) was filled with hot water which was kept at a constant temperature by means of a thermostatic bath with a maximal power of 2.2 kW and a precision of 0.1°C. This water was circulating at a rate of $0.43\,\mathrm{L\,s^{-1}}$. For insulation the other side as well as the bottom were covered respectively with PMMA and PVC, respectively, whereas the top boundary was covered with extruded polystyrene foam (see figure 5.1(*a*)). Since the aluminium wall was in contact with two liquid baths at different temperatures, its own temperature was situated in between and changed gradually as the tank warmed up. Although this slowed down the total heating time of the test section, and therewith the different phases of the flow evolution, this change was too slow to modify the flow dynamics. Before starting the experiment it was verified that the fluid in the test section was at rest. At the start of the experiment, hot fluid from the thermostatic bath was injected into the (empty) side compartment. To compensate for the initial transient effects of heating the system, the fluid injected at the start of the experiment was preheated to a few degrees above the desired temperature (T_c).

Experiments were conducted at the initial temperatures of $T_0 = 21.4$°C in the test

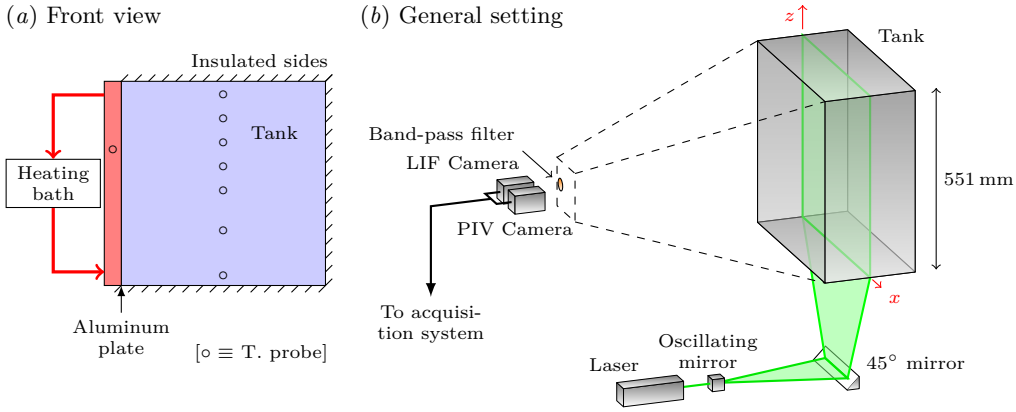


Figure 5.1 – Sketch of the experimental setup with (*a*) the heating system and (*b*) the PIV/LIF image acquisition system.

section and at $T_c = 53.6°C$ in the lateral compartment, the latter being controlled by a probe. This was the maximum temperature difference supported by the experimental device, which was sufficient to get a significantly turbulent plume. The resulting wall temperature was approximately 39°C (see appendix 5.A for details on the calculation). Therefore the Rayleigh number and the Prandtl number for our experiments are respectively,

$$\mathrm{Ra}_H = \frac{g\beta(T_c - T_0)H^3}{\nu\kappa} \approx 5.4 \times 10^{10} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \approx 5.5, \tag{5.1}$$

where β, ν and κ are the fluid thermal expansion, kinematic viscosity and thermal diffusivity, respectively (taken at 30°C), g is the gravitational acceleration and H the height of the cavity. The compartment temperature was kept constant in the present paper, and a dozen tests were conducted for this same temperature difference, with very similar results obtained in all cases.

To monitor the temperature and calibrate the T-LIF images in the test section, the temperature was measured near the rear wall in the middle of the tank with 7 to 11 platinum temperature probes (see figure 5.1(*a*)) with a precision between 0.2 and 0.5°C. To visualize the particles and the fluorescent dye, the flow was illuminated by a vertical laser sheet shining through a transparent slit at the bottom. A solid continuous laser (Spectra-Physics) of 532 nm operating at 4.5 W was used and generated a beam of 2.3 mm thickness which was transformed into a light sheet by means of an oscillating mirror. Considering the relatively slow velocities in the convection plumes, an oscillating mirror is preferable to a cylindrical lens since it generally provides a more uniform sheet. To ensure identical lighting on every image and minimal exposition of the dye to the laser light, the mirror oscillations were triggered in phase with the image acquisition so that the laser beam passed an integer number of times over the entire view during each exposure time. For temperature measurements with LIF, Rhodamine B was used as fluorescent dye. Details are discussed below (§5.2.2). For PIV measurements, the water was seeded with polyamide tracer particles with a mean diameter of 30 µm and a density of 1016 kg m^{-3}.

The flow was recorded simultaneously by two 12-bit 1024 × 1024 pixel Dalsa CCD cameras at a frame rate of 1 Hz. One camera only recorded the particle positions for PIV measurements by taking bursts of three successive images, and the other camera was

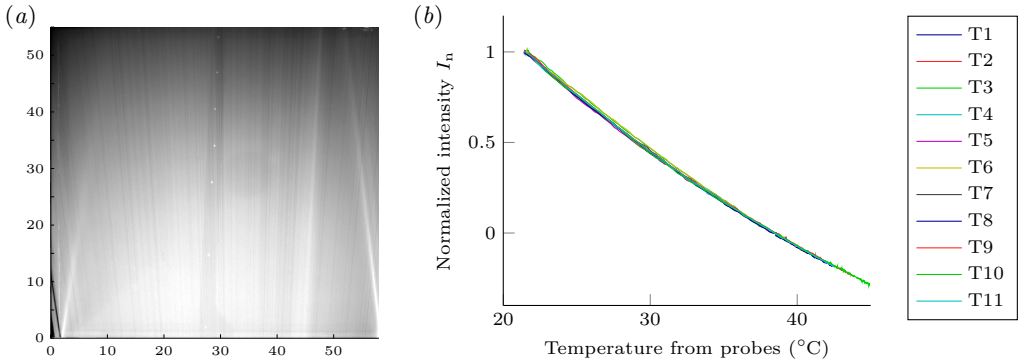


Figure 5.2 – T-LIF calibration with (*a*) raw image (axes in cm) taken at constant temperature and showing fluorescence intensity variations due to absorption along beam paths and optical reflections. These defaults are corrected by normalization (see text). (*b*) Normalized intensity I_n at the position of the vertically distributed temperature probes plotted against their measured temperature. The 11 resulting curves are all fitted by the same 2nd order polynomial (in this case: $I_n = 6.91 \times 10^{-4}T^2 - 1.01 \times 10^{-1}T + 2.86$).

equipped with a band filter with wavelengths passing between 565 to 585 nm and recorded the fluorescent dye for the T-LIF measurements. To compute the velocity fields for each burst, two pairs of images representing respectively a short and a long time interval, were processed using the PIV cross-correlation algorithm Uvmat(Matlab toolbox `http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/soft-uvmat`). Thus, we obtained a field containing 17 vectors per square centimetre with an average error estimated at 6% in the plume region.

All the variables employed in this paper will be described within a Cartesian coordinate system (x,z) with z being the upward vertical direction (see figure 5.1(*b*)).

5.2.2 Details of the T-LIF technique

Rhodamine B is a temperature sensitive dye in which the emission sensitivity to temperature changes with wavelength. Dissolved in water, the emission peak is around 575 nm, and the sensitivity to temperature is at its maximum around 570 nm (see Bruchhausen *et al.*, 2005). An optimal choice for the bandpass filter is found at 565 to 585 nm. To minimize absorption of incident light along the laser path, the Rhodamine B concentration was chosen to be as low as possible. Since the dimensions of the experiment are significantly bigger than the dimensions used in previous T-LIF applications (Coolen *et al.*, 1999; Bruchhausen *et al.*, 2005; Petracci *et al.*, 2006), we used a relatively lower concentration here, i.e. $3.5 \times 10^{-5}\mathrm{gL}^{-1}$.

In order to avoid permanent local intensity variations due to light absorption or optical aberrations (see figure 5.2(*a*)), the images were normalized with two reference fields taken for two homogeneous temperatures T_{lo} and T_{hi} (see Coolen *et al.*, 1999):

$$I_{\mathrm{n}}(x,z) = \frac{I(x,z) - I_{\mathrm{hi}}(x,z)}{I_{\mathrm{lo}}(x,z) - I_{\mathrm{hi}}(x,z)}. \tag{5.2}$$

This equation allows us to find a unique polynomial relation between light intensity and temperature. To obtain this relation, each experiment has been calibrated in advance, using the temperature data from the probes in the tank. An example of this procedure is given in figure 5.2(*b*). The final result (see figures 5.3(*a*) and (*b*)) has a precision of approximately ±0.2°C (figure 5.3(*c*)) on a field of 3200 cm^2 corresponding

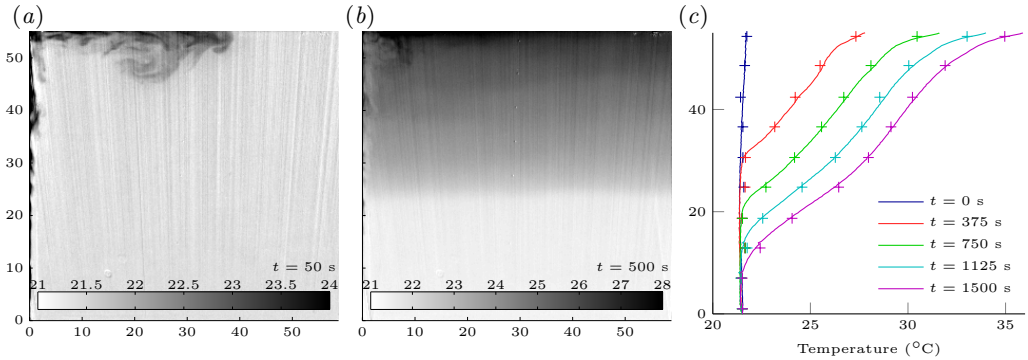


Figure 5.3 – Examples of T-LIF results. Gray levels represent temperature in Celsius degrees, axes are in centimetres. (*a*) Temperature field at the beginning of the experiment ($t = 50$ s). (*b*) Temperature field when stratification is established ($t = 500$ s). Remaining striations due to temporal variations in laser light did not affect the results. (*c*) Stratification profiles taken at different times, averaged over 10 s with probe measurements (+) and T-LIF measurements (solid lines).

to 1024×1024 pixels (see figure 5.3), which is relatively high compared with previous T-LIF experiments reported in the literature.

Note that other methods referred to as 'two-colour', based on two dyes (e.g. Coppeta & Rogers, 1998) or two spectral bands of the same dye (e.g. Bruchhausen *et al.*, 2005), may be used to correct for variations in the illumination. However the dimensions of our experiment make them very difficult to apply here because of light absorption and re-absorption phenomenon, and, given achieved accuracy of the simpler one-colour method, the expected gain should not be significant.

5.3 Observations from T-LIF & PIV measurements

5.3.1 Plume and stratification evolution

At the start of the experiment the heated wall causes a thin hot plume which rises along the boundary and hits the top of the tank (figures 5.4(*a*)). A vortex motion forms in the top left-hand corner and, while moving to the right along the top boundary, entrains ambient cold fluid at rest (figure 5.3(*a*) and 5.4(*b*)). When it hits the right wall, it moves vertically downwards against buoyancy, transferring its energy from inertia into mixing. A gravity-current-like motion results and returns the mixed fluid until it hits the left wall, whereafter the newly formed warm upper layer makes a slumping wave-like motion (figures 5.4(*c*),(*d*),(*e*)). This overturning and slumping motion has also been observed for plumes at the centre of a cylindrical tank, with the flow evolution scenario depending on the tank aspect ratio (Kaye & Hunt, 2007).

In the next stage of the flow evolution, the wall plume continues to supply hot fluid to this warm upper layer. This layer is now of a slightly lower temperature than that in the plume. In the next stage, instead of a vortex the plume motion gives rise to a jet-like motion along the top boundary. With the thickening of the upper layer the local buoyancy decreases and this jet also decreases in intensity as can be inferred from the vectors in figures 5.4(*g*)-(*i*). The continuous supply of hot fluid above formerly injected fluid causes the descent of the interface. Eventually, after approximately 40 min of heating, the warm

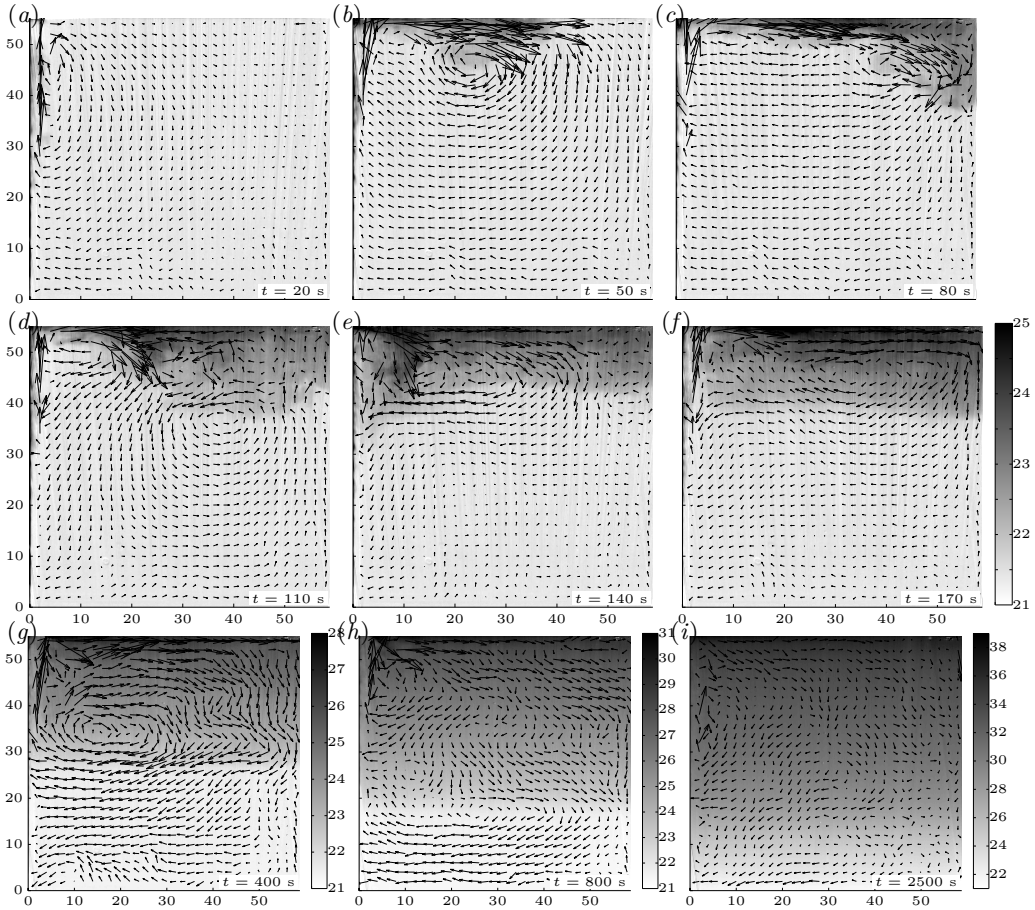


Figure 5.4 – Sequence of images showing the onset of the turbulent plume and the establishment of the stratification. Gray levels indicate the temperature and arrows the velocity field. Axes are in centimetres, and temperature is in degrees Celsius. (*a*)-(*f*) show fields at the beginning of the experiment (velocity scale $1\,\mathrm{cm} : 0.1\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$). (*g*)-(*i*) show fields at later times (velocity scale $1\,\mathrm{cm} : 0.05\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$).

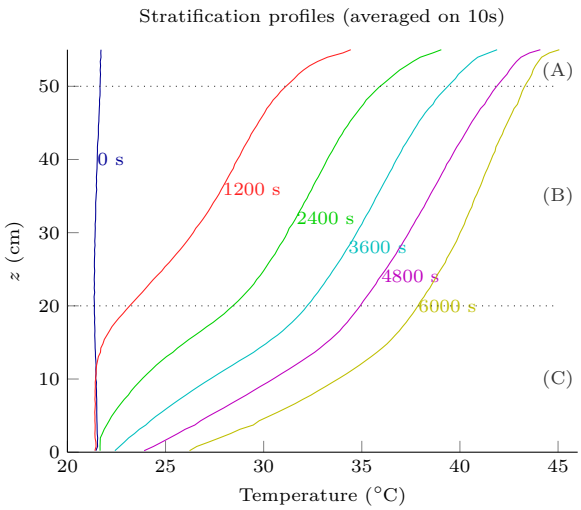


Figure 5.5 – Ambient temperature profiles at different times showing the evolution of stratification.

upper layer reaches the bottom, and the interior is entirely stratified in temperature (figure 5.4(*g*)-(*i*)).

In the subsequent final stage, the plume entrains fluid from the stratified ambient and gradually decreases the interior temperature gradient. The temperature profiles shown in figures 5.3(*c*) and 5.5 reveal the details of the evolution of the stratification and the gradual heating of the interior. These temperature profiles remain very similar in shape up to approximately 2000 s, i.e. before the warm layer has reached the lower boundary. The temperature profile near the bottom is subsequently distorted because of the laminar character of the plume in this region.

From the above evolution we can distinguish three dynamically different zones: (A), (B) and (C) (see figure 5.5). Zone (A) at the top ($z > 50$ cm) is characterized by a strong stratification in a thin top layer that is continuously supplied by hot and hardly mixed plume fluid. This warm top layer (A) forms at the very beginning and was also present in the experiments with salt plumes of Cooper & Hunt (2010). Closer inspection of the plume motion below shows that this is due to the thin laminar flow adjacent to the vertical wall. This flow has been modelled in detail by Wells & Worster (2008). The middle zone (B) ($20 < z < 50$ cm) is stratified, and exchanges fluid with the wall plume. In the lower layer, zone (C), the plume is thin and laminar. As a consequence, the exchange of fluid and the mixing of the layers is weak. Since the heated layers are pushed downwards by continuity, the temperature gradient in this region increases in time. Eventually, zones (A), (B) and asymptotically also (C) will become homogeneous and obtain the temperature of the heated sidewall.

To study the turbulent properties of the plume, we consider the Reynolds decomposition $u_i = \overline{u_i} + u_i'$, with the bar denoting a time average over 200 s and the prime representing fluctuations. The Reynolds tensor is defined as $\overline{u_x' u_z'}$ and is displayed in figures 5.6(*a*)-(*c*) at three different instants in time (i.e. respectively at $t = 80$, 400 and 1600 s), with the highest values at the edge of the plume, indicating turbulent mixing. A clear transition is visible at a height in the range of 22 to 25 cm. This transition corresponds to a change in flow regime from laminar to turbulent, as can be evaluated using

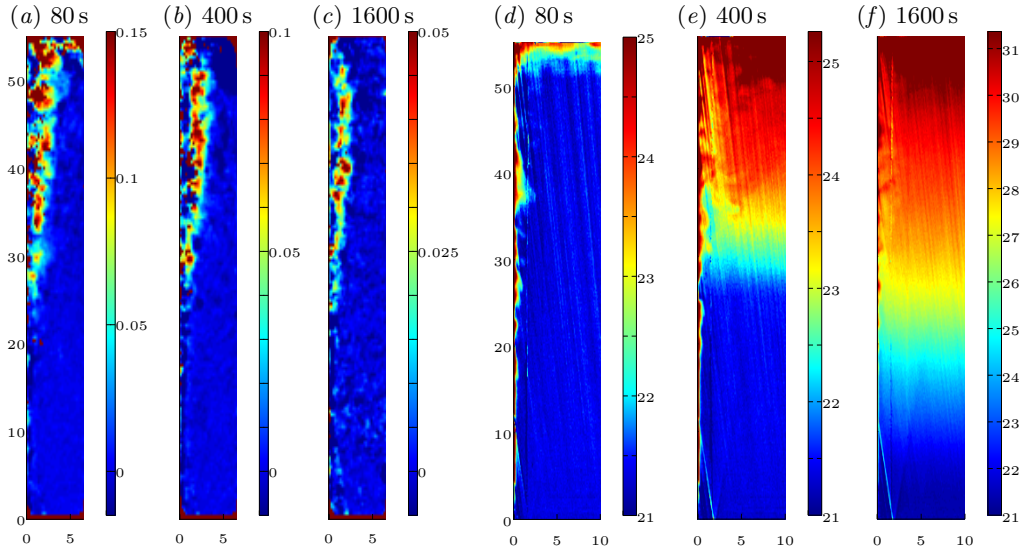


Figure 5.6 – (*a*)-(*c*) Reynolds tensor $\overline{u'_x u'_z}$ ($\mathrm{cm}^2\,\mathrm{s}^{-2}$) and (*d*)-(*f*) temperature (°C) in the plume region at respectively $t = 80$, 400 and 1600 s after the start of the forcing. Axes are in centimetres.

the local Grashof number defined as

$$\mathrm{Gr}_z = \frac{g\beta\Delta T z^3}{\nu^2}, \tag{5.3}$$

where ΔT is the temperature difference between the temperature imposed at the wall, and the temperature outside the plume. For $\Delta T \approx 15$°C, the typical transition value of 10^9 is actually reached at $z_{\mathrm{crit}} \approx 24$ cm (Bejan & Lage, 1990). Indeed a clear turbulent activity can be noticed in figures 5.6(*a*)-(*c*) above this height. This transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer is noticeable in all measurements.

The turbulence and consequently the mixing starts in zone (B). During the flow evolution it also continues to mix when the warm layer has increased in thickness (see figures 5.6(*a*)-(*c*) in relation to 5.6(*d*)-(*f*)). In contrast, close to the wall the plume is laminar and heated fluid is transported upward without much mixing and causes the high temperature gradient near the top in zone (A). The large temperature gradient perpendicular to the wall is clearly noticeable in figures 5.6(*d*)-(*f*).

5.3.2 Ambient flow characteristics

More detailed information about the flow can be obtained from the local Richardson number, defined as

$$\mathrm{Ri} = -\frac{g}{\rho(x,z)}\frac{\partial\rho(x,z)}{\partial z} \Bigg/ \left(\frac{\partial U(x,z)}{\partial z}\right)^2, \tag{5.4}$$

where $\rho(x,z)$ and $U(x,z)$ are the local density and velocity, respectively. In general, the Richardson number reveals gravitational instabilities ($\partial\rho(x,z)/\partial z > 0$) and shear or Kelvin-Helmholtz instabilities ($0 < \mathrm{Ri} < \frac{1}{4}$). Gravitational instabilities are very localized to instantaneous and intermittent flow reversals during the initial flow stage (see figure 5.4(*b*)). Therefore, here we focus on shear instabilities that are displayed for visual-

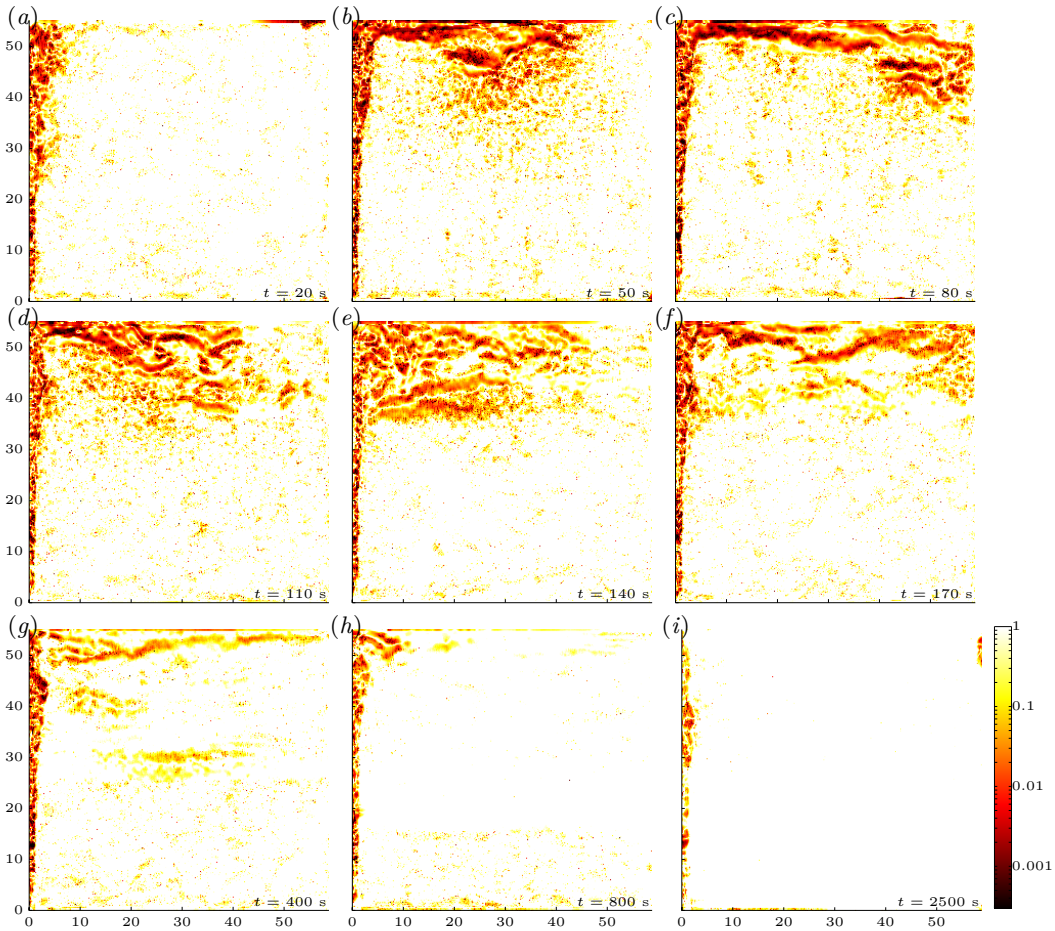


Figure 5.7 – Absolute value of Richardson number $\mathrm{Ri} = \left| -\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} \Big/ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right|$ at different times corresponding to figure 5.4 using a logarithmic scale ($\mathrm{Ri} > 1$ in white zones). Black spots in the unstratified zone (C) ($\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} \approx 0$) are due to noise. Axes are in centimetres.

ization purposes on a logarithmic scale of the absolute Richardson number in figure 5.7). The details of the mixing are highlighted by the low (dark) values of the Richardson number. In particular the mixing due to the continued plume motion along the top boundary is important during the upper layer formation and its growth in time (see figures 5.7(*a*)-(*f*)). After the upper layer formation in the initial flow stage, the mixing occurs principally between the rising plume and the interior, whereas the mixing between the upper and lower layer is negligible (see figure 5.7(*e*)-(*g*)).

The streamlines and stratification in figure 5.8 show the averaged flow evolution of the circulation during the warm layer deepening. As in the case of a laminar plume (see Worster & Leitch, 1985, figure 7), the hot fluid injection along the top boundary causes the entire stratification to move downwards. The difference with laminar flow is apparent from the turbulent exchange of the warm layer with the plume motion (top-left quarter), and becomes more pronounced with time from the circulation pattern in figures 5.8(*b*) and (*c*). This exchange and consecutive mixing in the plume is responsible for the presence of the front between the upper and lower layer. This front is indeed absent in the case of a laminar plume. In the lower layer, by continuity, the descending interface forces the

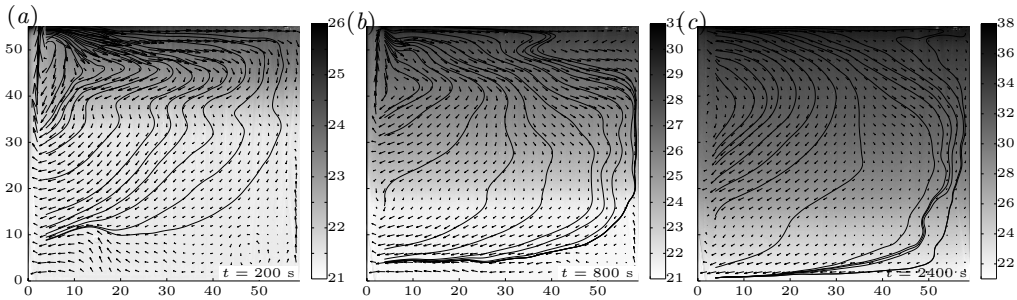


Figure 5.8 – Velocity (arrows) and temperature (gray levels) fields averaged over 200 s, with streamlines patterns. Axes are in centimetres, temperature is in Celsius degrees. Time averages cover the spans (*a*) $t = 100 - 300$ s, (*b*) $t = 700 - 900$ s and (*c*) $t = 2300 - 2500$ s.

fluid in the lower layer into the plume. This effect becomes more pronounced once the lower layer is thinner and the motion remains horizontal (figure 5.8(*c*)).

5.3.3 Wall plume details for the modelling

Figure 5.9(*a*) shows the velocity and temperature profiles in the plume. To reduce the scatter, the data (recorded with a frequency of 1 Hz) are averaged over a period of 30 s. These velocity and temperature profiles conserve their general shape at all heights. To determine the characteristic quantities of the plume which are used in the model, i.e. the plume width $b(z)$, the characteristic plume velocity $w(z)$ and the characteristic plume temperature $T(z)$, we have used conservation of volume, momentum and energy (buoyancy) fluxes. They can be written for all z as

$$b(z)w(z) = \int_0^\infty u_z(x,z)dx, \quad b(z)w(z)^2 = \int_0^\infty u_z(x,z)^2 dx \tag{5.5}$$

$$\text{and} \quad b(z)w(z)\left(T(z) - T_\mathrm{e}(z)\right) = \int_0^\infty u_z(x,z)\left(T_{xz}(x,z) - T_\mathrm{e}(z)\right)dx, \tag{5.6}$$

where $u_z(x,z)$ and $T_{xz}(x,z)$ are respectively the local vertical velocity and temperature, respectively, and $T_\mathrm{e}(z)$ is the ambient temperature. To simplify notation, $b(z)$, $w(z)$ and $T(z)$ will be written as b, w and T, respectively, in the following.

The profiles of b and w (in figures 5.9(*b*) and (*c*), respectively) clearly show the laminar-turbulent transition in the wall plume at $z \approx 24$ cm in accordance with figures 5.6(*a*)-(*c*). For $2 < z \lesssim 24$ cm the plume width remains almost constant while velocity increases linearly, and it expands in the zone for $24 < z < 45$ cm (see also figures 5.6(*a*)-(*c*)). The increase in plume width is not balanced by an equivalent gain in volume flux, so that the velocity w decreases. At the upper boundary the vertical volume flux goes to zero, and the plume is deviated horizontally. Since the vertical velocity also changes to zero, the evaluation of b becomes meaningless, as is apparent at $z > 45$ cm (figure 5.9(*b*)).

5.3.4 The entrainment coefficient

The entrainment coefficient is the key parameter for the modelling described below and will be determined empirically. It is evaluated with the equation of volume conservation (5.8) introduced in next section:

$$\alpha = \frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}. \tag{5.7}$$

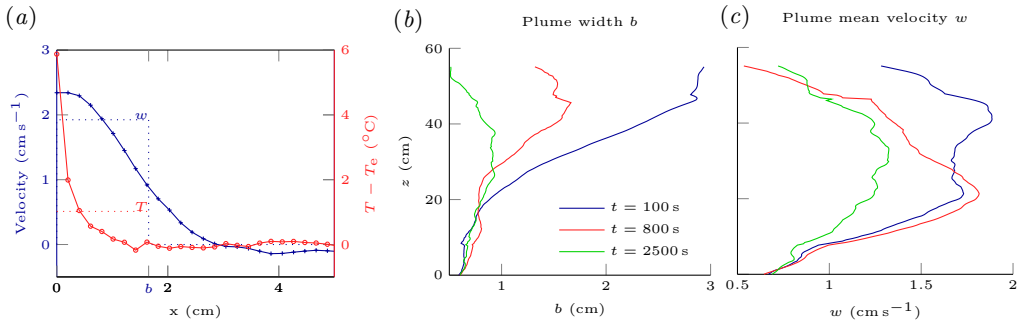


Figure 5.9 – Averaged quantities in the plume. (*a*) Typical vertical velocity and temperature profiles (at $z \approx 40\,\mathrm{cm}$ and $t = 150\,\mathrm{s}$). The dotted lines show the top-hat profile used in the model (§5.4). (*b*) Plume width b as a function of z at different times. (*c*) Plume characteristic velocity w as a function of z at the same times.

The experimental values for bw and w are accurately obtained from PIV measurements. Using a linear regression between $\frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}$ and w, a unique value for α is calculated at each time step for the entire wall plume and therefore includes the contributions of both the homogeneous and the stratified zones of the turbulent plume (see appendix 5.B for details). The values are plotted in figure 5.10(*a*) against time. It starts around 0.08 when the environment is still homogeneous, a value which is close to that of a buoyant jet (e.g. Ellison & Turner, 1959; Kaminski *et al.*, 2005) or a fountain (e.g. Baines, 2002). The time-averaged value $\alpha = 0.019$ is in good agreement with the entrainment value obtained by Cooper & Hunt (2010), which was obtained from the position of the density front. Although their value is close to the present one for $t > 1000$ s, there is a non-negligible decrease of a factor close to 10 during the establishment of the stratification over the depth of the tank.

The consequent raise in temperature of the interior also decreases the buoyancy flux of the plume. The mean Reynolds stress term therewith decreases in time by approximately a factor four, but the height of the transition between laminar and turbulent regimes characterized by the Grashof number hardly moves (see figure 5.6). This indicates that the turbulence activity of the plume decreases in time, but that it remains nevertheless turbulent. As mentioned above, in shear flows the entrainment coefficient in a stratified fluid is relatively small compared with that in a homogeneous fluid (see Fernando, 1991). Since variations in time of buoyancy and velocity in the plume remain limited, it is the increase in stratified layer-depth in the ambient which decreases the entrainment coefficient.

Figure 5.10(*b*) differentiates the evolution of α in the turbulent (B) and laminar zones (A). (Note that the mechanism of entrainment in the laminar case is essentially different, but the definition (5.7) can still be used in this zone.) The initial rapid decrease of α in the turbulent zone is due to the increasing stratified layer-depth, with the minimal value reached when eventually the interior is entirely stratified (see figure 5.7(*i*)). In the laminar zone, α remains constant at the beginning as the density of the ambient does not change, and then it decreases after approximately 600 s, when the front reaches the laminar part of the plume.

The sampling of the present data is not sufficient to calculate the local entrainment coefficient. However, figure 5.5 shows that the global temperature gradient in the turbulent zone (B) remains approximately constant (see figure 5.10(*b*) after 1200 s). The

(*a*) Global evaluation of α (*b*) Evaluation of α per zone

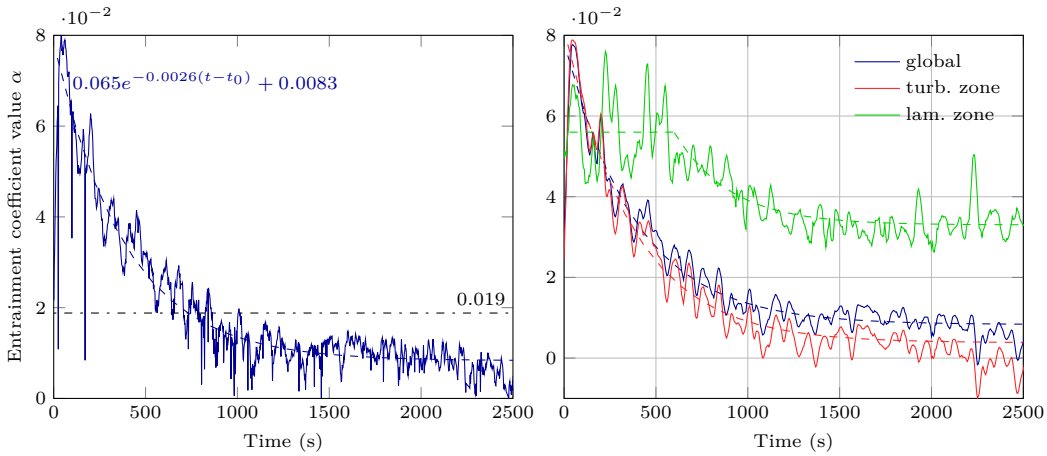


Figure 5.10 – (*a*) Experimental entrainment coefficient α calculated with (5.7) for the entire plume against time, with the average value (dash-dotted line) and exponential fit (dashed line) with t_0 taken at 30 s for the onset time of the plume. (*b*) Entrainment coefficient, α, for the turbulent part of the plume (red), the laminar part (green) and total plume (blue) with the respective exponential fits. The data has been averaged over 20 s.

entrainment coefficient within this stratified zone is also found approximately constant. The two constant values for α, for the homogeneous and the stratified regions, allow the decrease of α observed in the turbulent zone to be accurately reproduced. The details of this calculation are shown in appendix 5.B.

5.4 Theoretical modelling

In order to model the heated boundary, we consider a vertical distributed source of buoyancy and herein closely follow the approach of Cooper & Hunt (2010) based on the plume theory that is originally developed by Morton *et al.* (1956). The main differences in the present approach are that the temperature rather than heat flux is imposed and that the heated wall is placed in a closed cavity without openings.

5.4.1 The turbulent conservation equations

We consider an adiabatic prismatic box of height H, width L (along y) and horizontal cross-sectional area A. At one sidewall, a distributed buoyancy source emits a buoyancy flux per unit area ϕ. The plume is considered to be fully turbulent and, in accordance with Morton *et al.* (1956) theory, we assume the Boussinesq approximation, and the similarity of the velocity and buoyancy profiles with height. Furthermore, the velocity profile is assumed to be top-hat and the rate of entrainment proportional to the velocity at that height. All water properties except density are assumed to be constant with temperature.

The width of the plume, its vertical velocity and relative buoyancy are respectively denoted as b, w and Δ. Δ can be expressed as $\Delta = g(\rho_\mathrm{e} - \rho)/\rho_1 = g\beta(T - T_\mathrm{e})$. Subscripts ‘e‘ and ‘1‘ refer to ambient and reference fluid, respectively, whereas variables with no subscript refer to the plume. The reference variables may conveniently correspond to the characteristics of the fluid at $t = 0$. Let us also introduce the ambient buoyancy

$\Delta_\mathrm{e} = g(\rho_\mathrm{e} - \rho_1)/\rho_1 = g\beta(T_1 - T_\mathrm{e})$. The conservation equations for volume, momentum and buoyancy deficiency in the plume are written as

$$\frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z} = \alpha w, \qquad \frac{\mathrm{d}(bw^2)}{\mathrm{d}z} = b\Delta - \varepsilon \qquad \text{and} \qquad \frac{\mathrm{d}(bw\Delta)}{\mathrm{d}z} = bw\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial z} + \phi \tag{5.8}$$

where ε accounts for dissipation due to wall shear stress that we will neglect in the following.

Unlike in Cooper & Hunt (2010), the buoyancy flux, ϕ, is variable due to the heat flux, φ, across the wall. Their relation per unit area across the wall is given by

$$\phi = \frac{g\beta}{\rho_1 C_p}\varphi \tag{5.9}$$

where C_p is the specific heat capacity of water at constant pressure. The heat flux, φ, has to be defined here as a function of the temperature imposed at the wall T_w and the temperature of the ambient fluid T_e. Then we write

$$\varphi = h_\mathrm{w}(T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e}), \tag{5.10}$$

where h_w is the heat transfer coefficient which can be expressed according to Tsuji & Nagano (1988) as

$$h_\mathrm{w} = K_\mathrm{w} k \left(\frac{g\beta(T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e})}{\nu\kappa}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{5.11}$$

where the constant $K_\mathrm{w} = 0.120$ and k is the thermal conductivity of the fluid. Since the buoyancy term for the ambient was written as $\Delta_\mathrm{e} = g\beta(T_1 - T_\mathrm{e})$ where T_1 is the reference temperature, one can introduce a wall buoyancy, Δ_w, defined as $\Delta_\mathrm{w} = g\beta(T_\mathrm{w} - T_1)$, so that (5.9) becomes

$$\phi = {A_\mathrm{w}}^{\frac{1}{3}}(\Delta_\mathrm{e} + \Delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{3}}, \tag{5.12}$$

where $A_\mathrm{w} = {K_\mathrm{w}}^3 \frac{\kappa^2}{\nu}$ is the effective diffusion constant quantifying the buoyancy flux from the wall. Re-writing the conservation equations in terms of volume flux $Q = bw$, momentum flux $M = bw^2$ and buoyancy flux $F = bw\Delta$, the equations (5.8) reduce to:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z} = \alpha\frac{M}{Q}, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{QF}{M} \qquad \text{and} \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = Q\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial z} + {A_\mathrm{w}}^{\frac{1}{3}}(\Delta_\mathrm{e} + \Delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{3}}. \tag{5.13}$$

In "filling-box" models the characteristic time scales of the ambient are assumed to be much larger than those in the plume. The heat equation in the ambient fluid is then written as

$$\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial t} = -U\frac{\partial \Delta_\mathrm{e}}{\partial z} + \kappa\frac{\partial^2 \Delta_\mathrm{e}}{\partial z^2}, \tag{5.14}$$

where U is the vertical velocity of the ambient. Following Baines & Turner (1969)'s assumption for which the plume width is negligible compared with the horizontal cross-section of the box (i.e. $b \ll A/L$), U can be expressed as $U = -QL/A$.

We non-dimensionalize equations (5.13) and (5.14) with the scalings

$$\begin{aligned} &\zeta = H^{-1}z, && \tau = LA^{-1}H^{-1}A_\mathrm{w}t, && \delta_\mathrm{e} = H^3{A_\mathrm{w}}^{-2}\Delta_\mathrm{e}, \\ &f = H^3{A_\mathrm{w}}^{-3}F, && q = {A_\mathrm{w}}^{-4}Q, && m = H{A_\mathrm{w}}^{-2}M \end{aligned} \tag{5.15}$$

and obtain for the conservation equations

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\zeta} &= \alpha\frac{m}{q},\\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\zeta} &= \frac{qf}{m},\\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} &= q\frac{\partial\delta_\mathrm{e}}{\partial\zeta} + (\delta_\mathrm{e}+\delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{3}}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Here the wall buoyancy term, δ_w is

$$\delta_\mathrm{w} = {K_\mathrm{w}}^{-6}\mathrm{Pr}^3\mathrm{Ra}_H, \tag{5.17}$$

and the Rayleigh and Prandtl numbers introduced are defined as

$$\mathrm{Ra}_H = \frac{g\beta(T_\mathrm{w}-T_1)H^3}{\nu\kappa} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}. \tag{5.18}$$

For the heat equation (5.14) we obtain in non-dimensional form

$$\frac{\partial\delta_\mathrm{e}}{\partial\tau} = q\frac{\partial\delta_\mathrm{e}}{\partial\zeta} + \frac{\mathrm{Pr}}{{K_\mathrm{w}}^3}\frac{A}{HL}\frac{\partial^2\delta_\mathrm{e}}{\partial\zeta^2} \tag{5.19}$$

where HL/A is the box aspect ratio. The second term on the right-hand side expressing molecular diffusion in the ambient is neglected in the following.

With equations (5.16) and (5.19) we can now determine the position of the first disturbed zone in the ambient, corresponding to the lower limit of the interface between the upper and lower layer (see Worster & Huppert, 1983). For an initially uniform ambient, i.e. $\partial\delta_\mathrm{e}/\partial\zeta = 0$, for the vertical position of the front, denoted ζ_fr, one obtains

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_\mathrm{fr}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}}(\delta_\mathrm{e}^\mathrm{fr}+\delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{9}}\zeta_\mathrm{fr}^{\frac{4}{3}}, \tag{5.20}$$

where $\delta_\mathrm{e}^\mathrm{fr}$ is the initial ambient buoyancy. This can be integrated using the condition $\zeta_\mathrm{fr}(\tau=0)=1$ to give

$$\zeta_\mathrm{fr} = \left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha(\delta_\mathrm{e}^\mathrm{fr}+\delta_\mathrm{w})^{\frac{4}{9}}\tau\right]^{-3}. \tag{5.21}$$

Note that the front position in time depends directly on the entrainment coefficient α.

5.4.2 Hybrid model including the laminar part

As we have seen in the experimental results, the wall plume is laminar over approximately one-third of its height. This requires a particular treatment, especially for configurations with a lower Grashof number than the present one. Below, the variables with a hat are used for the modelling of the laminar zone. In order to measure its influence, similarity solutions are used for the stream function ψ and the temperature perturbation $T-T_\mathrm{e}$, given a stratification profile proportional to some power of z (see Worster & Leitch, 1985). Defining ψ such that $u_x = -\partial\psi/\partial z$ and $u_z = \partial\psi/\partial x$, these similarity solutions are written in terms of non-dimensional functions $\widehat{F}(\hat{\xi})$ and $\widehat{G}(\hat{\xi})$ as

$$\psi = \kappa(\lambda_T\mathrm{Ra}_z)^{\frac{1-\hat{m}}{4}}\widehat{F}(\hat{\xi}), \qquad \text{and} \qquad T-T_\mathrm{e} = \lambda_T(T_\mathrm{w}-T_1)(\lambda_T\mathrm{Ra}_z)^{-\hat{m}}\widehat{G}(\hat{\xi}). \tag{5.22}$$

The constants λ_T and $\hat{m}$ characterize the density profile and satisfy the relation

$$\frac{T_\mathrm{w} - T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{w} - T_1} = \lambda_T^{1-\hat{m}} \mathrm{Ra}_z^{-\hat{m}}. \tag{5.23}$$

(For the Rayleigh number Worster & Leitch (1985) use a characteristic temperature scale denoted ΔT, which is obtained from the instant density profile. To keep the Rayleigh number fixed, here ΔT is replaced by $\lambda_T(T_\mathrm{w} - T_1)$, where the density variation is represented by the coefficient λ_T.) The ambient is homogeneous when $\hat{m} = 0$, and stably stratified for $\hat{m} > 0$. The two functions $\widehat{F}$ and $\widehat{G}$ are based on the similarity variable

$$\hat{\xi} = (\lambda_T \mathrm{Ra}_z)^{\frac{1-\hat{m}}{4}} \frac{x}{z}. \tag{5.24}$$

They satisfy the following two differential equations derived from the boundary-layer equations for steady convection along a plate:

$$\widehat{F}''' + \frac{1}{\mathrm{Pr}} \left[\frac{3}{4}(1-\hat{m})\widehat{F}\widehat{F}'' - \frac{1}{2}(1-3\hat{m})\widehat{F}'^2 \right] + \widehat{G} = 0 \tag{5.25}$$

$$\widehat{G}'' + \frac{3}{4}(1-\hat{m})\widehat{F}\widehat{G}' - 3\hat{m}(1-\widehat{G})\widehat{F}' = 0, \tag{5.26}$$

which are subject to the boundary equations

$$\widehat{F} = \widehat{F}' = 0, \qquad \widehat{G} = 1 \qquad \text{for } \hat{\xi} = 0, \tag{5.27}$$

$$\widehat{F}' \to 0, \qquad \widehat{G} \to 0 \qquad \text{for } \hat{\xi} \to \infty. \tag{5.28}$$

Using the non-dimensional variables (5.15), one can deduce the integral variables q, m and f for the laminar part ($\zeta < \zeta_\mathrm{crit}$):

$$\begin{cases} q = K_\mathrm{w}{}^{-3}\mathrm{Pr}(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{1}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_Q} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})} \\ m = K_\mathrm{w}{}^{-6}\mathrm{Pr}^2(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{3}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_M} \cdot \zeta^{\frac{1}{4}(5-9\hat{m})} \\ f = K_\mathrm{w}{}^{-9}\mathrm{Pr}^4(\lambda_T \mathrm{Ra}_H)^{\frac{5}{4}(1-\hat{m})}\widehat{K_F} \cdot \zeta^{\frac{3}{4}(1-5\hat{m})} \end{cases} \tag{5.29}$$

where $\widehat{K_Q}$, $\widehat{K_M}$ and $\widehat{K_F}$ are integrals calculated from the non-dimensionalized functions $\widehat{F}$ and $\widehat{G}$ as, respectively,

$$\widehat{K_Q} = \widehat{F}(\infty), \qquad \widehat{K_M} = \int_0^{+\infty} \widehat{F}'(\hat{\xi})^2 d\hat{\xi} \qquad \text{and} \qquad \widehat{K_F} = \int_0^{+\infty} \widehat{F}'(\hat{\xi})\widehat{G}(\hat{\xi}) d\hat{\xi}. \tag{5.30}$$

These values rely on the constant $\hat{m}$ which characterizes the stratification. Deducing the expression of the characteristic width and velocity, we obtain $b \propto \zeta^{(1-3\hat{m})/4}$ and $w \propto \zeta^{(1-3\hat{m})/2}$. Both agree well with observations shown respectively in figures 5.9(*b*) and (*c*). In the case of an ambient stratification composed of a lower homogeneous layer and an upper stratified layer, a similarity solution in the upper layer is still assumed unlike the influence of the lower layer. The set of equations (5.29) is then used two times, but with different values for $\hat{m}$ and λ_T: the values for $\hat{m}$ are zero in the homogeneous layer and positive above, and the values for λ_T are noted λ_T^h and λ_T^s, respectively. The similarity solutions obtained in the upper layer have to be corrected, since the fluxes from the unstratified lower layer are different from those that the stratified solution predicts. Thus the similarity variables $\hat{\xi}$, $\widehat{F}$ and $\widehat{G}$ are adjusted in the upper layer by applying the coefficients λ_ξ, λ_F and λ_G, respectively, which are determined with the continuity conditions of the front. The continuity of the x-scale is written from (5.24) as

$$z_\mathrm{fr}(\lambda_T^\mathrm{s}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{\frac{\hat{m}-1}{4}} \lambda_\xi \hat{\xi} = z_\mathrm{fr}(\lambda_T^\mathrm{h}\mathrm{Ra}_\mathrm{fr})^{-\frac{1}{4}} \hat{\xi}, \tag{5.31}$$

giving

$$\lambda_\xi = C_\delta^{-\frac{1}{4}} \qquad \text{with} \qquad C_\delta = \frac{\lambda_T^{\mathrm{h}}}{\lambda_T^{\mathrm{s}}}(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\hat{m}}. \tag{5.32}$$

Note that the constant C_δ embeds all the parameters necessary to describe the entire density profile. By a similar reasoning, the continuity of the characteristic velocity w, written as

$$\frac{\kappa}{z_{\mathrm{fr}}}(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\frac{1-\hat{m}}{2}}\frac{{\lambda_F}^2\widehat{K_M^{\mathrm{s}}}}{\lambda_\xi\lambda_F\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}} = \frac{\kappa}{z_{\mathrm{fr}}}(\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{\frac{1}{2}}\frac{\widehat{K_M^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}}, \tag{5.33}$$

gives

$$\lambda_F = C_\delta^{\frac{1}{4}}\frac{\widehat{K_M^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}}\frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_M^{\mathrm{s}}}}. \tag{5.34}$$

A third equality is derived from the continuity of the characteristic temperature inside the plume, which is proportional to the quantity $\delta - \delta_{\mathrm{e}}$. Taking into account the density jump in the ambient, equal to $\delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}} - \delta_{\mathrm{e}}^0$, we write

$$\frac{\kappa^2}{z_{\mathrm{fr}}^3}\mathrm{Pr}(\lambda_T^{\mathrm{s}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}})^{1-\hat{m}}\frac{\lambda_F\lambda_G\widehat{K_F^{\mathrm{s}}}}{\lambda_F\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}} - \Delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}} = \frac{\kappa^2}{z_{\mathrm{fr}}^3}\mathrm{Pr}\lambda_T^{\mathrm{h}}\mathrm{Ra}_{\mathrm{fr}}\frac{\widehat{K_F^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}} - \Delta_{\mathrm{e}}^0 \tag{5.35}$$

and obtain

$$\lambda_G = C_\delta\frac{\widehat{K_Q^{\mathrm{s}}}}{\widehat{K_F^{\mathrm{s}}}}\left[\frac{\delta_{\mathrm{e}}^{\mathrm{fr}} - \delta_{\mathrm{e}}^0}{\lambda_T^{\mathrm{h}}\delta_{\mathrm{w}}} + \frac{\widehat{K_F^{\mathrm{h}}}}{\widehat{K_Q^{\mathrm{h}}}}\right]. \tag{5.36}$$

This development and the assumption of similarity for a partially stratified ambient have been successfully validated against experimental velocity fields (Caudwell, 2015). This theory also allows the expression of the local value of α in the laminar zone:

$$\alpha(\zeta) = \frac{3}{4}(1-\hat{m})(\lambda_T\mathrm{Ra}_H)^{\frac{\hat{m}-1}{4}}\frac{\widehat{K_Q}^2}{\widehat{K_M}}\zeta^{\frac{3}{4}(\hat{m}-1)}. \tag{5.37}$$

The overall value can then be computed from this expression and appears to compare well with the curve of figure 5.10(*b*) (not shown).

5.4.3 Temperature at the wall

In some cases the temperature T_{w} is known from measurements. Since it was not measured independently in the present experiments, we determine it from the temperature T_{c} in the side compartment and a global heat transfer coefficient h_{g}. This coefficient accounts for the transfer of heat across the aluminium wall from the thermostatic fluid to the working fluid. Because the heat flux is conserved throughout the vertical section, one may write

$$\varphi = h_{\mathrm{w}}(T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{e}}) = h_{\mathrm{g}}(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{e}}), \tag{5.38}$$

providing an expression for the temperature at the wall as a function of T_{c}, T_{e} and the global heat transfer coefficient h_{g}. The resulting function can reasonably be reduced to a simple linear relation, given a limited range of variation for T_{e} (from 21 to 41°C). Details are given in appendix 5.A. The averaged value of h_{g} has empirically been found to be equal to $305\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$. Since the thermal diffusivity of aluminium is 1000 times higher than that of water, we assume that δ_{w} is uniform within the plate, so that we obtain the

Table 5.1 – Summary of the different models presented with their respective parameters

Model	Entrainment coefficient α	Laminar model
`Turb`	0.019	No
`Hybrid`	0.014	**Yes**
`Turb`α	$0.065\exp(-1.55\times10^7\tau)+0.0083$	No
`Hybrid`α	$0.072\exp(-2.05\times10^7\tau)+0.0038$	**Yes**

relation

$$\delta_\mathrm{w} = -0.567\langle\delta_\mathrm{e}\rangle + 0.544\delta_\mathrm{c}, \tag{5.39}$$

where $\langle\delta_\mathrm{e}\rangle$ is the averaged value of the ambient buoyancy over the entire height. It is important to note that the variations of $\langle T_\mathrm{e}\rangle$ are very slow compared with the dynamics of the flow, so that the variations of δ_w have no significance for the flow description.

5.4.4 Numerical procedure

Four models summarized in table 5.1 have been run to investigate the influence of both the laminar-turbulent modelling and the variation of α in time (source code available at `http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/soft-wpsm`). A first model, `Turb`, solves the equations (5.16) for a constant entrainment coefficient, using the average value of the plot represented in figure 5.10(*a*). A second model, `Hybrid`, takes into account the laminar part based on the similarity solution, and uses a constant α (mean value) for the turbulent zone. The third model, `Turb`α, uses a variable α following the exponential fit shown in figure 5.10(*a*). The fourth model, `Hybrid`α, includes both the laminar and the turbulent layer as in `Hybrid`, but has a variable entrainment coefficient for the turbulent layer based on the fit shown in figure 5.10(*b*).

To solve the system of equations (5.16) together with (5.19) we employ a numerical method similar to the one presented by Germeles (1975). Under the condition that the velocities within the plume are much larger than in the ambient, the numerical model solves the plume equations (5.16) at each time step. The slow movement of the stratification in the ambient follows (5.19), i.e. each layer moves downward by a small amount. In the model, the plume equations are discretized along ζ and solved by a Runge-Kutta method of fourth and fifth order, assuming that the δ_e and f profiles follow 'staircase' functions, i.e. they are constant on each step in space.

At each time step, δ_w is adjusted following (5.39). When the laminar zone is modelled, the value of ζ_crit is based on the instantaneous Grashof number. Once the stratification affects the laminar zone, the constants $\hat{m}$, $\widehat{K_Q}$, $\widehat{K_M}$ and $\widehat{K_F}$ are redefined at each iteration. Following (5.23), $\hat{m}$ is determined by the plot of $\ln\left(1+\frac{\delta_\mathrm{e}}{\delta_\mathrm{w}}\right)$ against $\ln(\mathrm{Ra}_H\zeta^3)$ which has to be a straight line over the concerned zone for the similarity laws to be valid. It is verified that this is indeed the case.

The ambient is homogeneous at $t=0$. For the fully turbulent model, the volume, momentum and buoyancy fluxes, q, m and f, respectively, are assumed to be equal to zero at the bottom boundary of the box. When the laminar zone is modelled, the equations (5.29) for $0\le\zeta\le\zeta_\mathrm{crit}$ are used to determine these quantities, and the calculation of the turbulent zone starts with these values at each iteration. Water properties such as thermal expansion β, kinematic viscosity ν, thermal diffusivity κ and thermal conductivity k are kept constant and evaluated at 30°C.

Figure 5.11 presents profiles for the ambient temperature, plume volume flux Q, and plume buoyancy flux F. Results are close to those of Cooper & Hunt (2010), except for

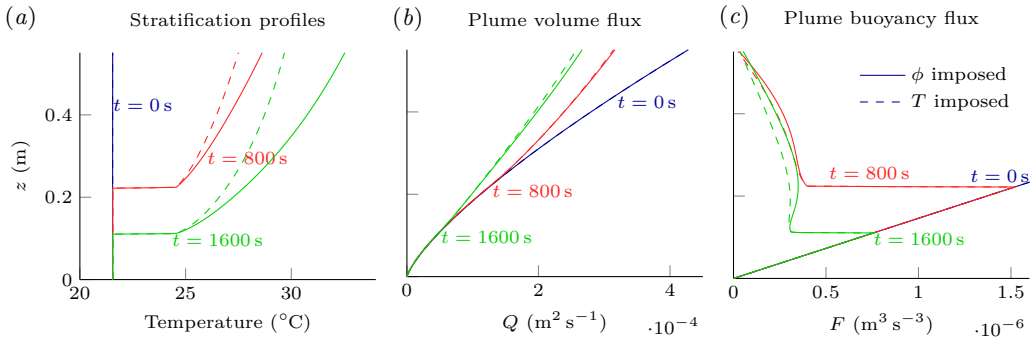


Figure 5.11 – Comparison between the model with buoyancy flux ϕ imposed (solid lines) (Cooper & Hunt, 2010) and constant wall temperature imposed (`Turb`, dashed lines). Variables are: (*a*) ambient temperature T_e, (*b*) plume volume flux Q and (*c*) plume buoyancy flux F. Both started with the same buoyancy flux $\phi = A_w^{\frac{1}{3}} \Delta_w^{\frac{4}{3}}$, with Δ_w defined in accordance with parameters of §5.3.4

the ambient temperature evolution which is reduced in our case as expected owing to the different boundary conditions. The volume and buoyancy fluxes are very similar, demonstrating that imposing a constant heat flux or a constant temperature is equivalent for a certain period of time, with the exception of the final temperature which is established within the cavity.

5.5 Comparisons between experiment and models

The four numerical models discussed in §5.4.4 have been run for the set of parameters presented in table 5.1 under conditions that are identical to the experiments. The experimental results (solid lines) are compared with the theoretical model (dashed lines) in figures 5.12 and 5.13. Before confronting the different models with the measurements, we recall that all models are one-dimensional. The horizontal redirection of the plume near the upper boundary is thus not incorporated. This has an influence on the density in the ambient that is not taken into account. The transition from laminar to turbulent regimes in the hybrid models is abrupt, and this causes a small discontinuity in the density profile that is more or less visible (see e.g. figures 5.12(*d*) and 5.12(*h*) at $z \approx 30$ cm and $t = 2000$ s). This appears when the stratification enters the laminar zone and causes subsequent changes in the laminar model ($\hat{m} \neq 0$).

Figures 5.12 shows the evolution of the temperature stratification in the ambient for each model. The vertical position of the isotherms is plotted against time in the left column, the lowest curve (22°C) representing the first front. The temperature profiles for different instants of time are represented on the right-hand side. The characteristic plume variables, i.e. buoyancy flux F, volume flux Q and momentum flux M, are displayed in the three columns of figure 5.13.

Note that in the experiment the origin of time has been delayed by approximately 30 seconds, so that $t = 0$ s corresponds to the time at which the turbulent plume is fully established, in coherence with the model assumptions. Below we discuss the evolution of the ambient stratification, as well as the characteristics of the plume.

5.5.1 The ambient stratification

All models predict the ambient stratification reasonably well. This confirms former experimental studies reported in the literature which successfully validate the MTT theory against the measured evolution of the stratification. Major discrepancies occur for the sharpness of the density front in models `Turb` and `Hybrid` for constant α. Small differences in the modelling also appear on all graphs near the top boundary due to the presence of a horizontal laminar layer in the experiment as shown in figures 5.12-right (explained at the end of §5.3.3).

As expected, the `Hybrid` model improves the agreement with the density profiles for small z. In particular figures 5.12(d) and 5.12(h) shows that the front attains the bottom of the cavity asymptotically, whereas it never does for the MTT modelling. This is an essential difference between the laminar and turbulent models (see Worster & Leitch, 1985).

When including the variation of α with time, the difference between the `Hybrid` and the `Turb` models becomes more pronounced especially at the front. A high value for α at $t = 0$ indeed reduces the density step. The variation of α also improves the overall agreement between the experimental and theoretical density profiles.

5.5.2 The plume

The simultaneous information about the density and the velocity in a field allows for the measurement of volume flux Q, momentum flux M and buoyancy flux F in the plume (see figure 5.13). These are not accessible from classical experiments. Generally, above $z = 42\,\mathrm{cm}$ the deviation of the plume results in large differences with the models for Q and M (first and second columns), especially at early times. In particular the initial horizontal motion near the top after the onset of the plume and the consequent entrainment biases the comparison with the models (see figure 5.4(d)) so that the best comparison with theoretical models is obtained for $t > 100\,\mathrm{s}$. This artefact is absent for F (third column) since the buoyancy flux is set to zero at the top boundary. The introduction of a zero vertical velocity is not possible in the one-dimensional model because of the conservation of momentum. Furthermore, we notice that the volume and momentum fluxes, shown in the first and second columns of figure 5.13, respectively, have the same order of magnitude as found in the experiments.

The hybrid model, `Hybrid`, introduces an important change in the slopes of the momentum and volume fluxes in particular (see figures 5.13(e),(j) and (k) at $z \approx 24\,\mathrm{cm}$) corresponding to the laminar-turbulent transition. It shows much better agreement with the experiments for small z and improves the modelling of the turbulent region as well.

Although the variation of α alone (model `Turb`α) is of benefit to the modelling of Q (figure 5.13(g)), it does not significantly change M (figure 5.13(h)) and makes F even worse (figure 5.13(i)). `Hybrid`α models the volume flux Q (figure 5.13(j)) much better, and also shows a reasonable agreement for M (figure 5.13(k)). Therefore, the best results are obtained when both the laminar zone and the variable entrainment coefficient are included.

Strong discrepancies remain nevertheless for M and F in all cases. The former are most likely due to the shear stress along the wall, which is neglected in all cases. The poor agreement found for the buoyancy flux can be explained by the technical difficulty to evaluate it precisely in the experiment: because of the shape of the temperature profile within the boundary layer (see figure 5.9(a)), local lack of resolution or inaccurate positioning of the x-origin may result in significant underestimations of the buoyancy. In addition all fluid parameters except density are kept constant with the temperature, even

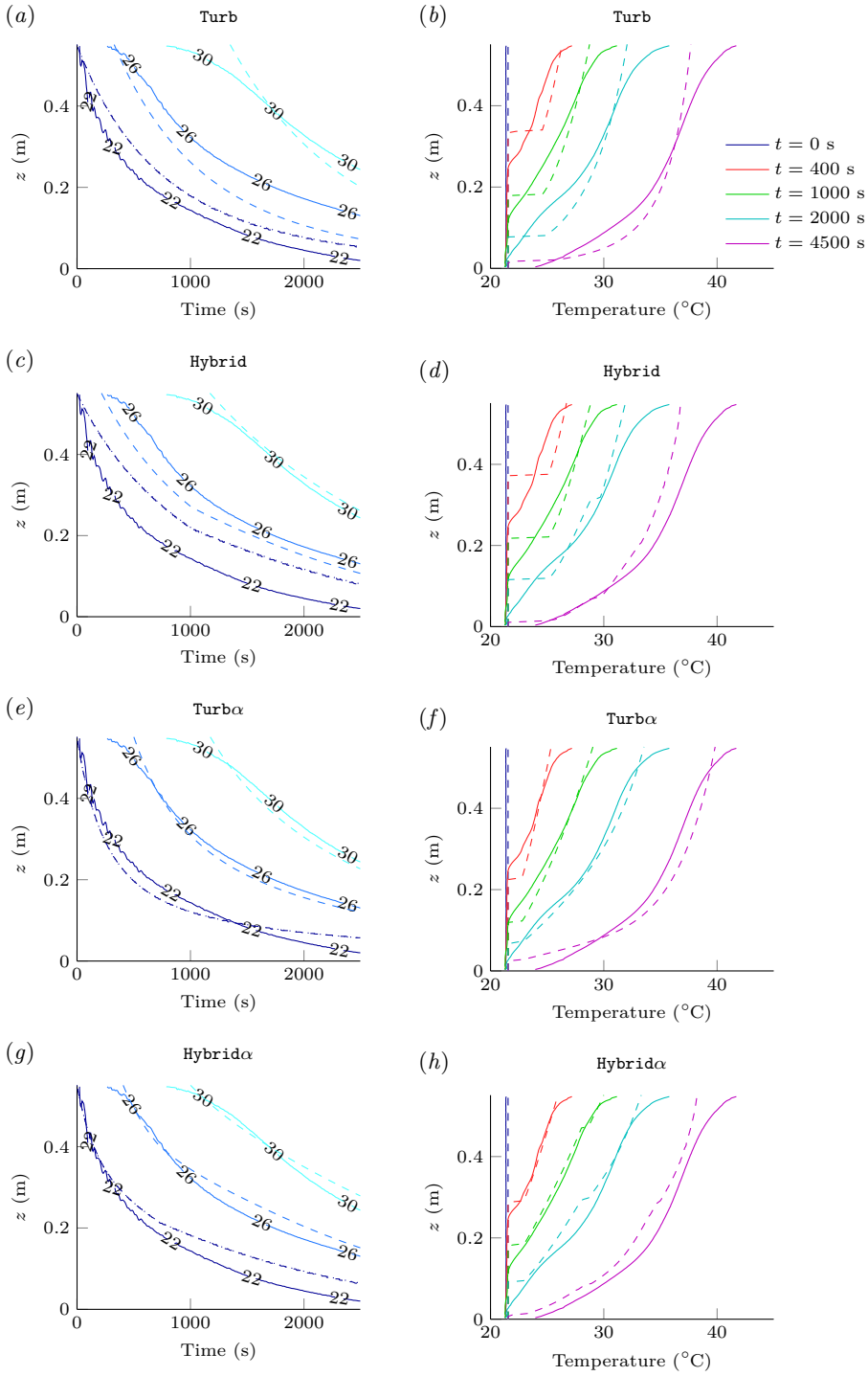


Figure 5.12 – Evolution of the stratification in the ambient for experiments (continuous lines) and models `Turb`, `Hybrid`, `Turb`α and `Hybrid`α (dashed lines). On the left: the position of isotherms as a function of time. On the right: the stratification profiles at the centre of the tank.

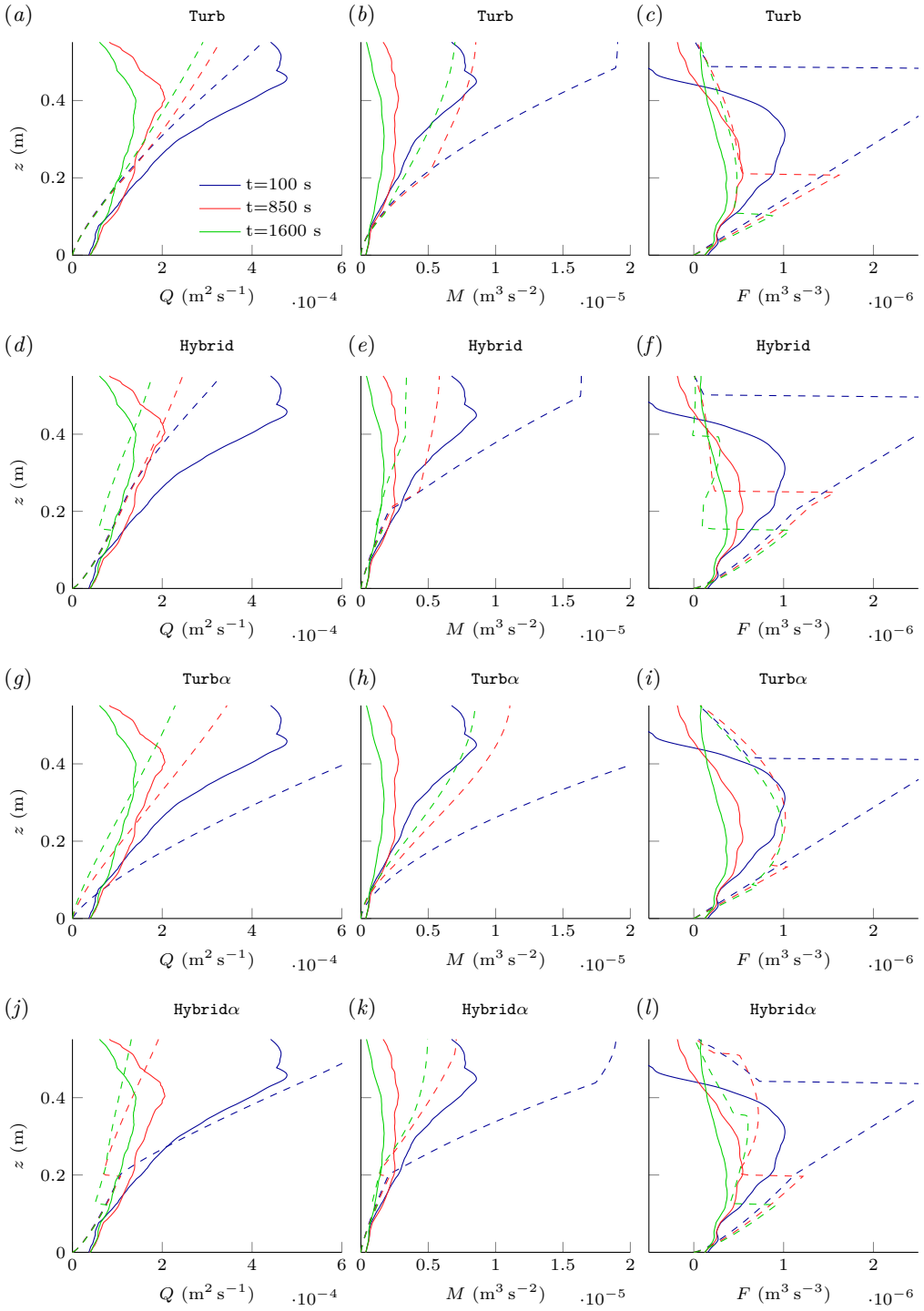


Figure 5.13 – Buoyancy flux F, volume flux Q and momentum flux M in the plume, with experimental results (continuous lines) and models predictions (dashed lines).

though the mean temperature evolves in time. In particular F shows a strong dependency on the Prandtl number in the laminar regime (see equation (5.29)).

In conclusion, the introduction of the laminar zone mainly benefits the modelling of the plume and the lower part of the eventually established stratification. On the other hand the introduction of a variable α is important to properly model the overall density profile.

5.6 Conclusions

We have investigated a turbulent wall plume in a cavity induced by a hot isothermal wall and, using the novel T-LIF/PIV measurement method, we have obtained a detailed description of the wall-plume evolution, ambient stratification and internal circulation. We firstly summarize the most important experimental results. Observations reveal the relevance of a laminar zone near the base of the heated wall. The fact that the main mixing with the interior only takes place in the turbulent region, has an important influence on the shape of the stratification profile. The increasing stratification in the ambient fluid reduces the entrainment coefficient to the extent that the entrainment coefficient of the plume is found to reduce by a factor of 10. Furthermore we observe the presence of a laminar flow adjacent to the heated wall which causes a transport of heat to the top that is almost without mixing. This results in the formation of a hot layer near the top boundary, which hardly mixes and persists throughout the flow evolution. As a consequence, the ambient stratification has typically top, middle and bottom regions referred to as (A), (B) and (C), respectively, with each having a different evolution in the temperature profile as shown in figure 5.5. These observations, as well as the detailed comparison with a simple theoretical MTT model, have motivated us to improve the modelling.

To predict the plume characteristics and the ambient stratification, the initial modelling (`Turb`) is based on the original Morton *et al.* (1956) entrainment model, here adapted to a wall with constant temperature. This model has been enriched both by a variable entrainment coefficient α and by differentiating a laminar and a turbulent zone. The treatment of the laminar zone has been tackled using the framework proposed by Worster & Leitch (1985). At the critical height of the transition between the laminar and the turbulent region, the values calculated from this laminar model are implemented as lower boundary conditions into the turbulent model. This leads to a new hybrid model in which we consider successively an average value (`Hybrid`) and an exponential fit of the experimentally measured values in time (`Turb`α) for the entrainment coefficient (α). Thus four different model results are obtained.

For the present experiments in the range of $\mathrm{Ra}_H = 5.4 \times 10^{10}$ and $\mathrm{Pr} = 5.5$, detailed comparison with the experimental results show that the `Turb` model describes to leading order the evolution of the wall plume and interior stratification, unlike the transitional character of the wall plume. This model, as well as the experimental measurement results, is very close to the results reported by Cooper & Hunt (2010) for a constant buoyancy flux modelled with saline water across the wall. In view of both the Schmidt number being 100 times larger than the present Prandtl number and the difference in forcing, this result was not evident in advance.

Better model results are achieved when taking into account the laminar onset of the plume with the `Hybrid` model, and a significant improvement is found when the variation of α is implemented (`Turb`α model). Indeed, our results have brought experimental support for an entrainment coefficient which varies by an order of magnitude due to the gradual stratification in the environment. The decrease of α in time is determined

empirically from the measurements and corresponds well with the modelling detailed in appendix 5.B that is based on the global entrainment coefficient of both the homogeneous and the stratified layers. For further modelling it is possible to use the expression for α (5.11) for two given entrainment coefficients α^{h} and α^{s} and to employ the model values of w and z_{fr}. The drawback is that the value of w is not very accurately predicted (figure 5.13(e) and (k)) as mentioned above, presumably due to the absence of the shear stress in the modelling. Furthermore, care should be taken with the entrainment value α^{s} which depends on stratification and plume strength, and may therefore vary from one experiment to another.

Since the laminar-turbulent flow transition depends on the critical Grashof number, proportional to H^3, the relative part of the laminar boundary layer changes strongly with a small increase in height. For smaller heights than used here, it is clear that the `Hybrid` model should be used instead of the `Turb` model. Of course in the limit of a very high reservoir with a configuration analogous to the present one, the laminar layer would represent a fraction of the total height and we would then expect the influence of using the `Hybrid` model to be limited. However, in this case a better modelling may nevertheless be achieved because of the qualitative changes it implies on the boundary condition for small z. Because of its variation with background stratification, the use of a variable entrainment coefficient remains important for a precise modelling in all cases.

The T-LIF technique has been shown to be an accurate and efficient method to measure the temperature in a plane, with a precision of 0.2°C. It allows density fields to be acquired non-intrusively next to the velocity field. This is of particular interest for convection experiments where both are strongly related. The high resolution allows details of small structures as well as large-scale circulation to be obtained. Here, we have applied this method to a plume along a sidewall and have been able to get instant views of the plume establishment and to obtain precise temperature profiles to describe stratification. This experimental technique is ready to produce benchmark data to numerical simulations, and further experiments need to be conducted to exploit the method at its full potential.

The authors thank the anonymous referees for their critical reading and helpful comments on the manuscript. We are grateful to R. De Socio for a first set of experiments employing the T-LIF method on a simplified case at the Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, J. Sommeria for his help with PIV processing (UVmat), and F. Bonnel for useful information on image acquisition. J.B.F. thanks G.R. Hunt for his advice on the dimensions of the tank at the start of this study. Special thanks go to S. Viboud, S. Mercier and M. Lagauzère for their technical support. Financial support was provided by the Grenoble Institute of Technology (Contrat AGIR #GAIN920043) and the LabEx Osug2020 (Investissements d'avenir - ANR10LABX56) and we took benefit from the computational facility of the LEGI and the help of G. Moreau and O. de Marchi.

5.A Heat transfer at the wall

Equation (5.10) expresses the heat flux at the wall per unit surface, φ, as a function of the temperature at the wall, T_{w}, and the temperature in the ambient, T_{e}. Based on the conservation of the heat flux φ through the wall, §5.4.3 explains how the buoyancy at the wall is modelled as a function of the temperature in the side compartment. Here it is shown how equation (5.39) is obtained.

Suppose $\overline{U_c}$ is the averaged fluid velocity in the heated compartment, e_{c} the width of this compartment and e the width of the aluminium plate which separates the compartment from the experimental tank (figure 5.14(a)). Three types of heat transfers coexist,

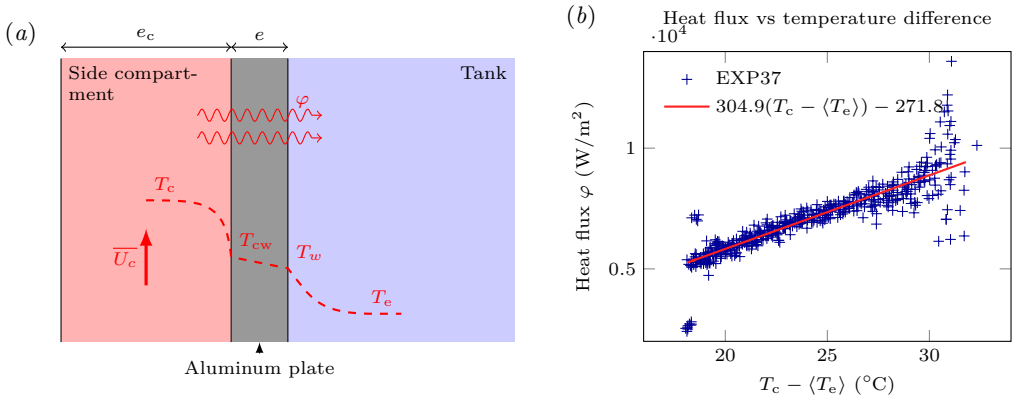


Figure 5.14 – (*a*) Schematic view of the heat transfer between the heated compartment and the experimental tank. T_c is the temperature in the compartment (imposed), T_e is the temperature in the tank at a distance from the wall, and T_{cw} and T_w are intermediate wall temperatures. The dashed line sketches a temperature profile along a horizontal line. (*b*) Experimental determination of coefficient h_g averaged over the height. The instant thermal flux is plotted as a function of the temperature difference between the side compartment and the averaged ambient fluid. The global averaged heat transfer coefficient for the wall $\langle h_g \rangle$ is then given by the coefficient of the linear regression.

i.e. the forced convection within the compartment, the conduction inside the aluminium plate, and the natural convection in the tank. As the heat flux is conserved one can write

$$\varphi = \frac{T_c - T_{cw}}{1/h_c} = \frac{T_{cw} - T_w}{e/\lambda_a} = \frac{T_w - T_e}{1/h_w}, \tag{5.1}$$

where λ_a is the thermal conductivity of aluminium and h_c is the heat transfer coefficient characterising exchanges between the heated fluid in the side compartment and the adjacent surface of the aluminium plate. Rewriting φ in terms of known temperatures this yields

$$\varphi = \frac{T_c - T_e}{\frac{1}{h_c} + \frac{e}{\lambda_a} + \frac{1}{h_w}}. \tag{5.2}$$

Thus, the global heat transfer coefficient which has been introduced in §5.4.3 can be written as $h_g = 1 \Big/ \left(\frac{1}{h_c} + \frac{e}{\lambda_a} + \frac{1}{h_w} \right)$.

5.A.1 Free convection in the tank

Using the expression of h_w given in (5.11), one can rewrite the heat flux as

$$\varphi = K_w k \left(\frac{g\beta}{\nu\kappa} \right)^{\frac{1}{3}} (T_w - T_e)^{\frac{4}{3}} = h_g (T_c - T_e), \tag{5.3}$$

which gives more conveniently

$$C_1 \, (y + x)^{\frac{4}{3}} = h_g \, (1 + x) \tag{5.4}$$

with

$$x = \frac{T_1 - T_e}{T_c - T_1}, \qquad y = \frac{T_w - T_1}{T_c - T_1}, \qquad C_1 = K_w k \left(\frac{g\beta}{\nu\kappa} \right)^{\frac{1}{3}} (T_c - T_1)^{\frac{1}{3}}. \tag{5.5}$$

Then, using Taylor series for x close to a value x_0, to be determined yields

$$y = \left[\frac{3}{4}\left(\frac{h_\mathrm{g}}{C_1}\right)^{\frac{3}{4}}(1+x_0)^{-\frac{1}{4}} - 1\right]x + \left(\frac{h_\mathrm{g}}{C_1}\right)^{\frac{3}{4}}\left[(1+x_0)^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}\frac{x_0}{(1+x_0)^{\frac{1}{4}}}\right] + o\left((x-x_0)^2\right). \tag{5.6}$$

The average temperature of the ambient over the entire duration of the experiment is $\langle\overline{T_\mathrm{e}}\rangle = 29°\mathrm{C}$. This temperature is then substituted in the expression of x to obtain a convenient value for x_0. We will assume that the variations of h_g with height are negligible. Then, we can write $\langle h_\mathrm{g}\rangle = h_\mathrm{g}$, and estimate this value empirically from the instant power injected into the tank, as obtained from the average temperature difference between that in the compartment T_c, and that in the tank T_e. Figure 5.14(b) shows we obtain $\langle h_\mathrm{g}\rangle \approx 300\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$.

Furthermore, we assume that the temperature inside the plate (T_w) is homogeneous because T_c is uniform and the thermal diffusion within the aluminium is 1000 times higher than in water. With $T_\mathrm{c} = 53.6°\mathrm{C}$ and T_1 taken as the initial temperature (21.55°C), one obtains

$$y = -0.567x + 0.544, \tag{5.7}$$

so that this reads for the buoyancy

$$\delta_\mathrm{w} = -0.567\langle\delta_\mathrm{e}\rangle + 0.544\delta_\mathrm{c}, \tag{5.8}$$

where the averaged value of δ_e is used since δ_c and δ_w are assumed to be uniform with z.

5.B Details about the entrainment coefficient

In order to calculate α from the data, we use a linear regression based on the least squares method between $\frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}$ and w. Given a set of N experimental points for which we know the characteristic velocity w_i and the spatial derivative of the volume flux, $\frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}_i$, corresponding to a horizontal plume slice of height Δz_i, we evaluate the entrainment coefficient as

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i w_i \frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}_i}{\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i {w_i}^2}. \tag{5.9}$$

For convergence, at least 40 experimental points are needed.

The turbulent domain is split into two slices, a 'homogeneous' zone denoted 'h' corresponding to $z_\mathrm{crit} \le z < z_\mathrm{fr}$ and a 'stratified' zone denoted 's' where $z_\mathrm{fr} \le z < H$ (see figure 5.15(a)). We denote the entrainment coefficient of these two zones as α^h and α^s. In the homogeneous zone α^h is constant. In the stratified zone, the entrainment rate α^s remains approximately constant (see figure 5.10(b) for $t > 1200\,\mathrm{s}$) which is coherent with the almost constant temperature gradient (see figure 5.5) and the weak variation in the plume intensity (less than a factor two). Based on equation (5.9) α^h and α^s can be expressed as

$$\alpha^\mathrm{h} = \frac{\sum_{i=i_\mathrm{crit}}^{i_\mathrm{fr}}\Delta z_i w_i \frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}_i}{\sum_{i=i_\mathrm{crit}}^{i_\mathrm{fr}}\Delta z_i {w_i}^2} \quad \text{and} \quad \alpha^\mathrm{s} = \frac{\sum_{i=i_\mathrm{fr}+1}^{i_H}\Delta z_i w_i \frac{\mathrm{d}(bw)}{\mathrm{d}z}_i}{\sum_{i=i_\mathrm{fr}+1}^{i_H}\Delta z_i {w_i}^2}, \tag{5.10}$$

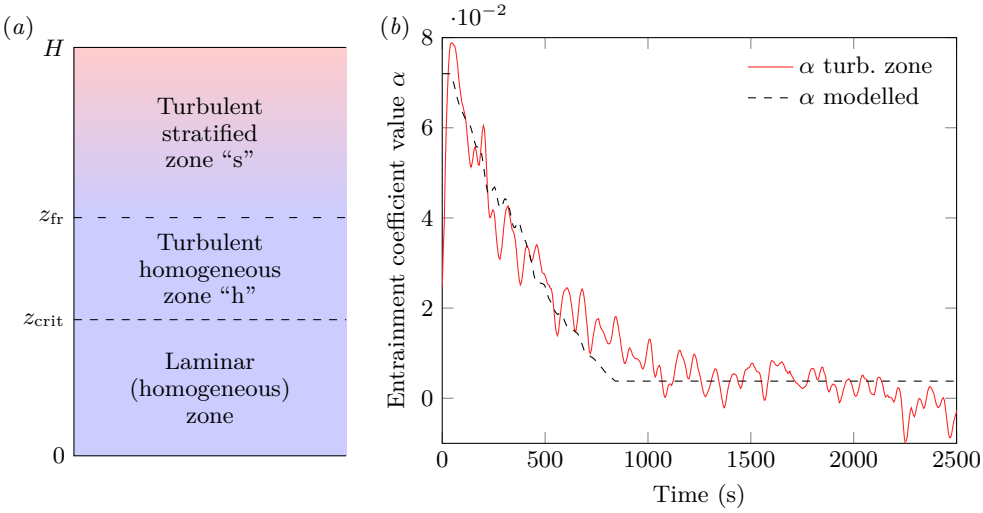


Figure 5.15 – (*a*) Scheme of the computation zones and the associated variables. (*b*) Comparison between α computed over the entire turbulent zone (red) and α modelled using equation (5.11) (dashed black).

where i_{crit}, i_{fr} and i_H are the indices of z_{crit}, z_{fr} and H, respectively. Then one can express the global entrainment coefficient on the turbulent zone as

$$\alpha = \frac{\alpha^{\text{h}}(z_{\text{fr}} - z_{\text{crit}})\langle {w_i}^2\rangle^{\text{h}} + \alpha^{\text{s}}(H - z_{\text{fr}})\langle {w_i}^2\rangle^{\text{s}}}{(H - z_{\text{crit}})\langle {w_i}^2\rangle^{\text{h+s}}}, \tag{5.11}$$

where $\langle\cdot\rangle^{\text{x}}$ denotes an average over the "x" region.

In accordance with the turbulent curve plotted in figure 5.10(*b*), the entrainment values $\alpha^{\text{h}} = 0.072$ and $\alpha^{\text{s}} = 0.0038$ are introduced. Using experimental values for $w(z)$ and the front position z_{fr}, the variation in the turbulent entrainment coefficient is calculated (see figure 5.15(*b*)).

Chapitre 6

Discussion et perspectives

Les conclusions concernant nos mesures expérimentales ont été exposées à la fin de la première partie, page 63, et l'essentiel des leçons de notre étude est exposé dans la fin de l'article retranscrit au chapitre précédent (section 5.6, page 114). Nous reprenons donc ici sommairement les points importants, et y ajoutons quelques compléments utiles.

Sur le plan théorique tout d'abord, nous avons apporté plusieurs innovations au modèle développé par Cooper & Hunt (2010). Après l'avoir adapté à une condition de paroi structurellement différente, imposant la température et non le flux de chaleur, nous avons introduit la modélisation de la portion laminaire qui initie l'écoulement. Cette portion a l'avantage de pouvoir être appréhendée analytiquement, mais la prise en compte de la stratification induit une restriction puisqu'il faut que les solutions de similarité restent valident. Cela contraint à s'assurer que le profil de densité conserve à tout instant une forme compatible avec les hypothèses présentées. Si tel n'est jamais parfaitement le cas dans la réalité, nous avons pu montrer que les principes exposés permettent malgré tout de modéliser correctement les profils de vitesse d'une couche limite expérimentale sur une large part. Il serait sans doute possible également d'étendre ces principes à un profil de stratification plus exotique, en utilisant une approche « par morceaux ».

Sur le plan expérimental, notre étude à permis de décrire qualitativement et quantitativement l'écoulement induit par une paroi isotherme dans des conditions définies par un rapport d'aspect proche de 1, un nombre de Rayleigh de l'ordre de 5.4×10^{10} et un nombre de Prandtl de 5.5. Il se crée un écoulement de couche limite le long de la paroi, ayant un caractère transitionnel : laminaire sur son premier tiers, turbulent ensuite. Les mesures détaillées obtenues à l'aide de la technique expérimentale T-LIF/PIV développée en première partie de ce manuscrit ont permis un accès non-intrusif et résolu en temps aux grandeurs concernant à la fois le milieu ambiant et le panache. Cette nouveauté a rendu possible une confrontation détaillée des modèles avec les observations. Le tracé du tenseur de Reynolds montre avec netteté l'emplacement du changement de régime, et l'emplacement du mélange au sein du panache. Il a ainsi été montré que ce dernier s'effectue à une certaine distance de la paroi, permettant la survivance d'une couche très chaude le long de celle-ci, finalement responsable d'une singularité en haut des profils de stratification. Nous avons également pu montrer le caractère stabilisant de la stratification sur la dynamique du pa-

nache. Cet effet est bien sûr attendu, mais il a une influence considérable sur le coefficient d'entraînement global habituellement employé dans les modèles issus de la théorie de Morton *et al.* (1956) (MTT). Plus particulièrement ici, une décroissance exponentielle a été mesurée. Tenant compte du fait que le coefficient d'entraînement local est beaucoup plus faible dès lors que le milieu est stratifié, cette décroissance du coefficient global s'explique par la descente du front de stratification.

Le fait d'employer ces modèles MTT, originellement conçus pour des panaches issus de sources ponctuelles, pour une couche limite le long d'une paroi est discutable, bien que Cooper & Hunt (2010) soient parvenus à un bon accord qualitatif avec leurs expériences utilisant un flux de flottance (à travers la salinité) constant. Rappelons en effet que l'écoulement s'apparente d'avantage à une couche limite qu'à un véritable panache : la présence d'une paroi atténue le caractère fluctuant qui caractérise généralement un panache, et nourrit sa flottance tout au long de sa hauteur. Cette même paroi contraint fortement le profil de vitesse, qui n'est alors plus axisymétrique, et qui se trouve freiné par adhérence à celle-ci. Ceci met rapidement en défaut le caractère pleinement turbulent nécessaire à la théorie initiale comme nous l'avons constaté expérimentalement. Malgré ces restrictions, le modèle MTT modifié que nous avons présenté apparaît relativement robuste puisqu'une fois adapté au cas d'une paroi isotherme, il prédit finalement les différentes tendances de manière assez juste, tant au niveau de la stratification que des grandeurs caractéristiques du panache lui-même.

Néanmoins ce modèle simple n'est pas suffisant pour une description quantitative de ces différentes grandeurs. Tout en conservant son caractère monodimensionnel, nous l'avons donc fait évoluer afin de prendre en compte le caractère transitionnel de l'écoulement. En effet, même si la part de la zone laminaire sur la hauteur totale peut être fortement réduite dans des applications à fort nombre de Grashof, celle-ci a une influence décisive sur les valeurs avec lesquelles le calcul de la zone turbulente est initié. L'introduction de cette zone laminaire permet en particulier au profil de stratification de descendre jusqu'à la paroi inférieure de la cuve et d'ainsi mieux reproduire ce que l'on observe en pratique.

Un second apport important concerne le coefficient d'entraînement précédemment évoqué. Utiliser une constante, donc une moyenne, conduit entre autres à sous-estimer considérablement sa valeur dans les premières phases de l'écoulement, qui sont critiques pour l'établissement de la stratification. Nous avons ainsi pu montrer qu'adapter la valeur de ce coefficient au fil de l'expérience est nécessaire pour retranscrire fidèlement la dynamique d'ensemble.

Ces différentes améliorations conduisent ainsi à une meilleure compréhension de l'écoulement et élargissent le champ des applications couvertes par le modèle unidirectionnel simple introduit par Morton *et al.* (1956). On aura noté cependant des limites auxquelles on se heurte assez rapidement. Ainsi en est-il notamment du flux de quantité de mouvement, que les différentes modélisations proposées échouent à retranscrire fidèlement. Cette grandeur est directement dépendante de la vitesse, qui est elle-même affectée par la dissipation visqueuse dans la réalité. S'il est raisonnable de négliger ce phénomène dans le cadre d'un panache libre axisymmétrique, son influence est sans nul doute plus importante ici, puisque la paroi induit un forçage permanent. Dans l'hypothèse où cette dissipation serait prise en compte, il faudrait s'attendre à ce qu'elle soit bien

plus importante dans la partie turbulente que la partie laminaire, ce qui contribuerait à réduire les écarts observés par rapport aux valeurs expérimentales. Pour aller plus loin dans la modélisation, il serait donc intéressant de quantifier cette dissipation.

L'ensemble des modélisations présentées s'appuie par ailleurs des paramètres du fluide qui sont tous constants avec la température, à l'exception de la masse volumique. Il s'agit d'une limitation importante au regard des températures envisagées, puisque le nombre de Prandtl peut par exemple à lui seul varier communément de 50% dans le cas de l'eau. Au cours de l'élaboration du modèle nous avons ainsi pu constater que le choix de la température de référence à laquelle ces paramètres sont évalués avait une influence significative sur les résultats. Ainsi donc, et de manière générale, s'il parait difficile de prendre en compte la variation de tous les paramètres du fluide, la valeur de référence doit à tout le moins être fixée avec le plus grand soin.

Nous avons montré que la valeur du coefficient d'entraînement décroissait considérablement au cours de nos expériences, et nous avons été en mesure de prouver que cela est lié à l'évolution de la stratification ambiante. Il n'en reste pas moins qu'il nous est difficile de proposer ici une loi permettant de relier l'un à l'autre, et en particulier de déduire ce coefficient de la stratification, sans faire appel à des valeurs empiriques. Le mécanisme général peut se concevoir comme suit : l'entraînement turbulent est lié à la présence de tourbillons qui incorporent du fluide ambiant au panache. Ces tourbillons, qui ne subissent pas de contrainte dans un milieu homogène, se trouvent rapidement limités en taille dès qu'une stratification apparaît. En effet, il leur est alors nécessaire de s'opposer à l'énergie potentielle qui tend à maintenir les couches d'iso-densité les unes au dessus des autres. Ainsi la stratification inhibe très rapidement tout mélange turbulent comme nous l'avons vu à travers le nombre de Richardson. Un travail reste donc à faire pour quantifier ce phénomène et pouvoir définir ce coefficient sur la seule base des variables du modèle, comme potentiellement la fréquence de Brunt-Väisälä. Pour cela, il pourrait être d'un grand secours de parvenir expérimentalement à la quantifier localement de manière fiable, afin de la relier au gradient de température local, et non à une valeur d'ensemble comme cela a été fait ici à chaque fois par une moyenne sur toute une zone. Une telle mesure nécessite d'obtenir une convergence statistique localement, et exige donc une meilleure résolution en vitesse ainsi qu'un taux d'échantillonnage plus important.

Sur le plan expérimental, la technique employée pour appliquer une condition isotherme à la paroi peut-être améliorée. Comme nous l'avons vu, la température de la paroi n'est pas la même que celle du bain chauffant, et varie en conséquence au cours de l'expérience. Comme nous l'avons exposé cela ne perturbe pas la dynamique de l'écoulement et procure l'avantage d'allonger le temps d'observation. Cependant il est nécessaire d'introduire des hypothèses pour parvenir à une comparaison correcte avec les modèles, et le contrôle de la température pariétal manque de précision. Il serait donc souhaitable pour de futures expériences de reconcevoir le système de chauffage, de telle sorte que le liquide thermostaté passe à l'intérieur même de la paroi en contact avec la cuve. De cette façon il deviendrait raisonnable de considérer la température de la paroi égale à celle de consigne du bain, ce qui lèverait une inconnue dans le système global.

La méthode de mesure T-LIF sera utile pour ces nouvelles études, et per-

mettrait bien entendu d'explorer efficacement d'autres configurations, faisant intervenir par exemple plusieurs panaches, des conditions aux limites modifiées ou des géométries différentes. Dans un cadre plus large, cette méthode ouvre des perspectives d'exploration inédites en convection naturelle, même si la limite liée aux indices de réfraction peut nécessiter des compromis expérimentaux sur les dimensions, la complexité de la mise en œuvre ou la précision recherchées.

En l'état actuel, le modèle hybride dont nous avons démontré la validité, offre l'avantage de couvrir une très large gamme de régimes, puisqu'il n'est plus cantonné au cadre strictement turbulent. Sa polyvalence le rend à même de prédire efficacement le profil de densité que l'on peut obtenir dans des réservoirs contenant des fluides relativement visqueux comme l'eau ou certains composés industriels, mais aussi dans des volumes plus larges avec des gaz, comme c'est classiquement le cas dans les bâtiments. La condition isotherme introduite ici élargit également les perspectives d'application, puisque c'est une situation très fréquemment rencontrée en pratique.

Annexe A

Code source du modèle utilisé

Sommaire

A.1 Script principal : wall_plume_model.py 123
A.2 Résolution de la partie turbulente : ODE_MTT_solve.py 129
A.3 Résolution de la partie laminaire : worster_leitch_solve.py 130

Cette annexe présente le code source du modèle présenté au chapitre 4. Il est également téléchargeable à partir de l'adresse suivante : http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/soft-wpsm. Ce code est distribué sous licence CeCILL version 2.1 ou ultérieure (compatible GPL).

A.1 Script principal : wall_plume_model.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
WALL PLUME & STRATIFICATION MODEL - main file

Parameters have to be defined at the end of the file.

This program computes plume and ambient stratification variables for the flow
produced by a heated wall at a constant temperature in a closed cavity.
See "Convection at an isothermal wall in an enclosure and establishment of
stratification", by Caudwell et al, 2016, J. Fluid Mech. for details.

"""
from __future__ import division

__author__ = "Tobit Caudwell"
__copyright__ = "Copyright 2016"
__license__ = "CeCILL v.1.2 (GPL compatible)"
__version__ = "1.0.0"
__maintainer__ = "Tobit Caudwell"
__email__ = "tobit <dot> caudwell <at> legi <dot> cnrs <dot> fr"
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Separate files
from worster_leitch_solve import worster_leitch_solve
from ODE_MTT_solve import ODE_MTT_solve


#%% Value of entrainment coefficient depending on the chosen law
def def_alpha(tau,is_hybrid,is_alpha_var):
    if is_hybrid:   # Hybrid model
        if is_alpha_var:
            alpha = 0.071*np.exp(-2.05*10**7*tau)+0.0039 # variable alpha, hybrid model
        else:
            alpha = 0.014
    else:           # Fully turbulent model
        if is_alpha_var:
            alpha = 0.065*np.exp(-1.55*10**7*tau)+0.0083 # variable alpha, fully turb.
        else:
            alpha = 0.019
    return alpha


#%% Computation of differential equations for plume variables
def compute_QMFi(i, zeta, q, m, f, deltaW, phi, deltaE, alpha):
    phi[i] = (deltaE[i-1] +deltaW)**(4/3) # Buoyancy flux at the wall
    f[i] = f[i-1] + q[i-1]*(deltaE[i] -deltaE[i-1]) + (zeta[i] -zeta[i-1])*phi[i]
    ff = f[i]

    # Computing of q(i) and m(i) by Runge Kutta method
    x = ODE_MTT_solve(zeta[i-1], zeta[i], q[i-1], m[i-1], ff, alpha)
    q[i] = x[-1, 0]
    m[i] = x[-1, 1]


#%% Computation of KQ0, KM0, KF0, KQ, KM, KF as functions of density exponent by
# solving laminar boundary layer differential equations (Worster&Leitch 1985).
# These variables are needed in the laminar calculation of hybrid model.
def prelim_laminar(Pr):
    #%% Solving differential equations to get profiles for m=0 (homogeneous ambient)
    mm0=0
    xi_end = 20
    sol = worster_leitch_solve(xi_end, Pr, mm0)
    xi = np.linspace(0, xi_end, 300) # refined xi
    Sol = sol(xi) # refined solution (interpolation on xi)

    KQ0 =  Sol[0, -1]
    KM0 = np.trapz(Sol[1, :]**2,  xi)
    KF0 = np.trapz(Sol[1, :]*Sol[3, :], xi)

    #%% Variation of F(infty), max(F') and int(G) with m
    mm0=np.linspace(0, 0.5, 100)
    mm0 = np.extract(mm0!=1, mm0) # remove 1 value (if exists)

    KQ = np.zeros(mm0.shape, float)
    KM = np.zeros(mm0.shape, float)
    KF = np.zeros(mm0.shape, float)
    for i, mmi in enumerate(mm0):
        sol = worster_leitch_solve(xi_end, Pr, mmi)
        Sol = sol(xi) # refined solution (interpolation on xi)

        KQ[i] = Sol[0, -1]
```

```
        KM[i] = np.trapz(Sol[1, :]**2, xi)
        KF[i] = np.trapz(Sol[1, :]*Sol[3, :], xi)
#    plt.figure()
#    plt.plot(mm0, KQ, label='KQ')
#    plt.plot(mm0, KM, label='KM')
#    plt.plot(mm0, KF, label='KF')
#    plt.xlabel('m')
#    plt.legend()
    return mm0, KQ0, KM0, KF0, KQ, KM, KF



#%% Main computation of the model with iterations over space and time
def main_computation(N, nbZeta, threshold, deltaC, GrH, Pr, is_hybrid, is_alpha_var):

    #% Variables assignment and initialization
    ZETA = []        # Vertical axis
    DELTAe = []      # Ambient buoyancy (outside the plume)
    Q = []           # Plume volume flux
    M = []           # Plume momentum flux
    F = []           # Plume buoyancy flux
    Phi = []         # Buoyancy flux across the wall
    Tau = np.zeros(N+1, float) # Time array


    # Variables used at each time iteration
    zeta = np.linspace(0, 1, nbZeta)    # Current vertical axis
    q = 0*zeta                          # Current plume volume flux
    m = 0*zeta                          # Current plume momentum flux
    f = 0*zeta                          # Current plume buoyancy flux
    deltaE = 0*zeta                     # Current ambient buoyancy
    phi = 0*zeta                        # Current buoyancy flux across the wall
    dtau = dtau0                        # Current time step

    if is_hybrid:
        mm0, KQ0, KM0, KF0, KQ, KM, KF = prelim_laminar(Pr)

    # Variables needed for the hybrid model
    zeta_crit = 0 # Current position of lam/turb transition
    ZetaCrit = np.zeros(N, float)   # Array of zeta_crit
    mm = 0                         # Characteristic exponent of density profile (Worster&Leitch1985)
    MM = np.zeros(N, float)         # Array of mm
    p_correl = np.zeros(N, float)   # Array of correlation coefs for mm
    stepQ = 0                       # Q step at lam/turb transition


    #%% %%%%%%%%%%% MAIN LOOP %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    for n in range(N): # loop on time
        # Initializatoin of instant variables
        q = 0*zeta
        m = 0*zeta
        f = 0*zeta
        phi = 0*zeta
        zeta[0] = 0

        alpha = def_alpha(Tau[n],is_hybrid,is_alpha_var) # Updating alpha value

        deltaE_mean = np.trapz(deltaE, zeta) # Averaged ambient density
        # "Wall buoyancy" (adjusted to take into account the slow change of
        # temperature change in the aluminium wall)
        deltaW = 0.544*deltaC - 0.567*deltaE_mean
```

```
#%% FULLY TURBULENT case
if not is_hybrid:
    lam = []
    # First zeta step
    q[0] = 10**-12 # Avoids zero value
    m[0] = 10**-16 # m0/q0 has to be very small

    for ii in range(3): # Iterative computation of first steps for better convergence
        compute_QMFi(1, zeta, q, m, f, deltaW, phi, deltaE, alpha) # 1=i+1
        # Correction of f after calculation of q
        f[1] = ((deltaE[1] + deltaW)**(4/3)*(zeta[1] - zeta[0]) + f[0]) \
        /(1+ (zeta[1] - zeta[0])/q[1])

    # Following zeta steps
    for i in range(sum(lam)+2, zeta.shape[0]):
        compute_QMFi(i, zeta, q, m, f, deltaW, phi, deltaE, alpha)

#%% HYBRID case
else:
    RaH = Kw**6/Pr**3 *deltaW # Update Rayleigh number

    # Variable Transition position
    GrH_transit = GrH*(1+deltaE_mean/deltaW)
    zeta_crit = (10**9/GrH_transit)**(1/3)

    lambdaT0 = 1

    # Defining the different treatment zones
    lam = zeta<=zeta_crit   # Laminar zone
    lamHomog = lam * (zeta <= zeta[nbZeta-1]) # Laminar homogeneous zone
    lamStrat = lam * (zeta > zeta[nbZeta-1])    # Laminar stratified zone

    #%% Laminar zone treatment %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

      # ~~~~~~ Homogeneous region ~~~~~~~
    q[lamHomog] = Kw**-3 *Pr    *(lambdaT0*RaH)**(1/4) *KQ0 *zeta[lamHomog]**(3/4)
    m[lamHomog] = Kw**-6 *Pr**2 *(lambdaT0*RaH)**(3/4) *KM0 *zeta[lamHomog]**(5/4)
    f[lamHomog] = Kw**-9 *Pr**4 *(lambdaT0*RaH)**(5/4) *KF0 *zeta[lamHomog]**(3/4)

      # ~~~~~~ Stratified region ~~~~~~~
    if sum(lam)>nbZeta:

        # Calculation of density characteristic exponent
        RaFront = RaH*zeta[nbZeta-1]**3 # Rayleigh number at the front
        rk = (lam==False).nonzero() # get indices of non laminar values
        lamStrat2 = lamStrat
        lamStrat2[rk[0]] = True # to include first non-laminar value in the following
        p = np.polyfit(np.log(RaH*zeta[lamStrat2]**3), np.log(1+deltaE[lamStrat2]/deltaW), 1)
        correl = np.corrcoef(np.log(1+deltaE[lamStrat2]/deltaW), \
        np.polyval(p, np.log(RaH*zeta[lamStrat2]**3))) # correlation coefficient
        p_correl[n] = correl[0, 1]
        mm = -p[0]
        lambdaTm = np.exp(p[1]/(1-mm))

        KQm = np.interp(mm, mm0, KQ)
        KMm = np.interp(mm, mm0, KM)
        KFm = np.interp(mm, mm0, KF)

        if nbZeta!=1: # double layer
            Cdelta = lambdaT0*lambdaTm**(mm-1) *RaFront**mm
            lambdaXi = Cdelta**(-1/4)
            lambdaF = Cdelta**(1/4)*KM0/KQ0*KQm/KMm
```

```
                lambdaG = Cdelta*KQm/KFm*((deltaE[nbZeta] - 0)/(lambdaT0*deltaW) + KF0/KQ0)
                stepQ = Kw**-3*Pr*(lambdaT0*RaFront)**(1/4)*\
                    (KQ0 - Cdelta**(-1/4)*lambdaF*KQm) # Volume flux deficiency at front
            else: # entirely stratified
                lambdaXi = 1
                lambdaF = 1
                lambdaG = 1

            q[lamStrat] = Kw**-3 *Pr    *(lambdaTm*RaH)**(1/4*(1-mm)) \
                *lambdaF            *KQm *zeta[lamStrat]**(3/4*(1-mm))
            m[lamStrat] = Kw**-6 *Pr**2 *(lambdaTm*RaH)**(3/4*(1-mm)) \
                *lambdaF**2/lambdaXi*KMm *zeta[lamStrat]**(1/4*(5-9*mm))
            f[lamStrat] = Kw**-9 *Pr**4 *(lambdaTm*RaH)**(5/4*(1-mm)) \
                *lambdaF*lambdaG    *KFm *zeta[lamStrat]**(3/4*(1-5*mm))

        phi[lam] = deltaE[lam]+deltaW
        MM[n] = mm

        #%% Turbulent zone treatment %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        for i in range(sum(lam), zeta.shape[0]):
            compute_QMFi(i, zeta, q, m, f, deltaW, phi, deltaE, alpha)

    #%% Velocity in the ambient
    u = -q
    u[nbZeta-1] = u[nbZeta-1]+stepQ

    #%% Storing current variables in global lists
    ZETA.append(zeta)
    DELTAe.append(deltaE)
    F.append(f)
    Q.append(q)
    M.append(m)
    Phi.append(phi)

    ZetaCrit[n] = zeta_crit

    #%% Next time step variables

    # deltaE at the very top of the tank
    deltaE_bound = deltaE[-1] - f[-1]/q[-1]

    # Advection in the ambient
    zeta = np.append(zeta + u*dtau, 1)
    deltaE = np.append(deltaE, deltaE_bound)

    # Time step (increasing as front velocity decreases)
    dtau = min(-3/4*(4/5)**(1/3)*alpha**(2/3)*deltaW**(4/9) / u[nbZeta-1]  * dtau0, 50*dtau0)
    Tau[n+1] = Tau[n] + dtau

    #%% Special corrections for code stability

    # Avoiding zeta negative values
    while zeta[1]<0:
        zeta = np.append(zeta[0], zeta[2:])
        deltaE = np.append(deltaE[0], deltaE[2:])
        nbZeta = max(nbZeta-1,3)
        print('== Removing negative zeta value == ')

    # Managing the fact that front reaches the bottom (hybrid case)
    if zeta[nbZeta-1]<threshold:    # front below threshold
        zeta = np.append(zeta[0], zeta[nbZeta-2:])
        deltaE = np.append(deltaE[0], deltaE[nbZeta-2:])
```

```
            nbZeta = 3
            threshold = 0           # avoids executing these lines a second time
            print('=== Simplification of zeta below the front === ')

        #%% Console output
        print('n=%d\t alpha = %g \t dtau = %g \t zeta_crit = %1.3g \t mm = %g \t'\
            % (n, alpha, dtau, zeta_crit, mm))



    return n, ZETA, Q, M, F, DELTAe, Phi, Tau, ZetaCrit


#%% Function to display variables
def display_curves(n, ZETA, Q, M, F, DELTAe, Tau, nbcurv, first):
    fig = {}    # dictionary containing figure names
    legLoc = {} # dictionary containing legend locations

    plt.close('all')
    fig['deltaE'] = plt.figure()    # Ambient buoyancy
    fig['f'] = plt.figure()         # Plume buoyancy flux
    fig['q'] = plt.figure()         # Plume volume flux
    fig['m'] = plt.figure()         # Plume momentum flux
    fig['w'] = plt.figure()         # Plume characteristic velocity
    fig['b'] = plt.figure()         # Plume characteristic width


    num = np.round(np.linspace(first, n-1, nbcurv)).astype(int)

    for k in num:
        leglabel = '$\\tau={0}$'.format(Tau[k])

        plt.figure(fig['deltaE'].number)
        plt.plot(DELTAe[k], ZETA[k], label=leglabel)
        plt.xlabel('$\delta_e$')
        legLoc['deltaE'] = 'lower left'

        plt.figure(fig['f'].number)
        plt.plot(F[k], ZETA[k], label=leglabel)
        plt.xlabel('$f$')
        legLoc['f'] = 'lower right'

        plt.figure(fig['q'].number)
        plt.plot(Q[k], ZETA[k], label=leglabel)
        plt.xlabel('$q$')
        legLoc['q'] = 'lower right'

        plt.figure(fig['m'].number)
        plt.plot(M[k], ZETA[k], label=leglabel)
        plt.xlabel('$m$')
        legLoc['m'] = 'lower right'

        plt.figure(fig['w'].number)
        plt.plot(M[k]/Q[k], ZETA[k], label=leglabel) # Plume velocity
        plt.xlabel('$w$')
        legLoc['w'] = 'lower right'

        plt.figure(fig['b'].number)
        plt.plot(Q[k]**2/M[k], ZETA[k], label=leglabel) # Plume width
        plt.xlabel('$b$')
        legLoc['b'] = 'lower right'
```

```
    for i in fig:
        plt.figure(fig[i].number)
        plt.ylabel('$\zeta$')
        plt.legend(loc=legLoc[i], frameon=False)

    plt.show()


#%%
if __name__ == '__main__':

    #%% Parameters %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    # Model type parameters
    is_hybrid = True        # False for Fully turbulent model, True for Hybrid model
    is_alpha_var = True     # Constant or variable entrainment coefficient

    # Computation parameters
    N=600                   # Number of time steps
    nbZeta = 100            # Number of elements for zeta at the beginning
    dtau0 = 2*10**-10       # Initial time step
    threshold = 0.01        # Threshold to be reached by the front before simplification of zeta

    # Parameters specific to the experiment
    hg = 300                # (W.m-2.K-1) Heat transfer coefficient (global)
    hc = 500                # (W.m-2.K-1) Heat transfer coefficient (compartment)
    H = 0.551               # (m) Height of the tank
    RaHc = 1.35*10**11      # Global Rayleigh number based on lateral compartment temperature
    Pr = 5.5                # Prandtl number

    # Display parameters
    nbcurv = 5              # Number of curves to plot
    firstcurv = 0           # Time index of the first curve to plot


    #%% Variables needed by the model %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    RaH0 = (1-hg/hc)*RaHc       # Global Rayleigh number based on initial wall temperature
    GrH = RaH0/Pr               # Global Grashof number based on initial wall temperature
    Kw = 0.120                  # Heat transfer constant (from Tsuji&Nagano 1988)
    deltaC = Kw**-6*RaHc*Pr**3  # 'Wall buoyancy' based on lateral compartment temperature

    #%% Computation
    n, ZETA, Q, M, F, DELTAe, Phi, Tau, ZetaCrit = \
    main_computation(N, nbZeta, threshold, deltaC, GrH, Pr, is_hybrid, is_alpha_var)

    #%% Graphs output
    display_curves(n, ZETA, Q, M, F, DELTAe, Tau, nbcurv, firstcurv)
```

A.2 Résolution de la partie turbulente : ODE_MTT_solve.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
WALL PLUME & STRATIFICATION MODEL

Solving Ordinary Differential Equations for plume variables q and m at a given
zeta step (MTT model)
"""
from __future__ import division
```

```
__author__ = "Tobit Caudwell"
__copyright__ = "Copyright 2016"
__license__ = "CeCILL v.1.2 (GPL compatible)"
__version__ = "1.0.0"
__maintainer__ = "Tobit Caudwell"
__email__ = "tobit <dot> caudwell <at> legi <dot> cnrs <dot> fr"


import numpy as np
from scipy import integrate


#zeta_1 = 0
#zeta_2 = 0.01
#dissip = 0
#ff = 6.57826116148351e+22
#q_init = 1e-12
#m_init = 1e-16
#alpha = 0.019

def ODE_MTT_solve(zeta_1, zeta_2, q_init, m_init, ff, alpha, dissip=0, nbPts=5000):

    def deriv(Y,zzeta): # return derivatives of the array X
        q = Y[0];
        m = Y[1];

        dqdz = alpha *m/q;
        dmdz = q*ff/m - dissip*m/q;
        return np.array([ dqdz, dmdz ])

    zeta = np.linspace(zeta_1,zeta_2, nbPts)
    Yinit = np.array([q_init,m_init]) # initial values
    Y = integrate.odeint(deriv,Yinit,zeta)

    return Y
```

A.3 Résolution de la partie laminaire : worster_leitch_solve.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
WALL PLUME & STRATIFICATION MODEL

Solving boundary layer equations given in "Laminar free convection in confined
regions" by Worster & Leitch, 1985, J. Fluid Mech.

"""
from __future__ import division

__author__ = "Tobit Caudwell"
__copyright__ = "Copyright 2016"
__license__ = "CeCILL v.1.2 (GPL compatible)"
__version__ = "1.0.0"
__maintainer__ = "Tobit Caudwell"
__email__ = "tobit <dot> caudwell <at> legi <dot> cnrs <dot> fr"
```

```
import scikits.bvp_solver
import numpy as np

def worster_leitch_solve( xi_end=20, Pr=5, m=0):

    # Main function
    def function(xi, X):
        F = X[0]
        dFdz = X[1]
        dFdz2 = X[2]
        G = X[3]
        dGdz = X[4];

        dFdz3 = -( 1/Pr*(3/4*(1-m)*F*dFdz2 - 1/2*(1-3*m)*dFdz**2) + G ) # equation 1
        dGdz2 = -( 3/4*(1-m)*F*dGdz - 3*m*(1-G)*dFdz )                  # equation 2
        return np.array([dFdz,
                         dFdz2,
                         dFdz3,
                         dGdz,
                         dGdz2])

    # Estimation of the final function
    def guess(X):

        return np.array([-2*np.exp(-X)+np.exp(-2*X),        # F
                         2*np.exp(-X)-2*np.exp(-2*X),       # F'
                         -2*np.exp(-X)+4*np.exp(-2*X),      #F''
                         np.exp(-2*X),                      # G
                         -2*np.exp(-2*X)])                  # G'


    # Definition of boundary equations (L for left, R for right)
    def boundary_conditions(xiL,xiR):

        return (np.array([xiL[0] - 0,           # F(0) = 0
                          xiL[1] - 0,           # F'(0) = 0
                          xiL[3] - 1]),         # G(0) = 1
                np.array([xiR[1] - 0,           # F'(end) = 0
                          xiR[3] - 0]))         # G(end) = 0


    # Problem definition
    problem = scikits.bvp_solver.ProblemDefinition(num_ODE = 5,
                                        num_parameters = 0,
                                        num_left_boundary_conditions = 3,
                                        boundary_points = (0, xi_end),
                                        function = function,
                                        boundary_conditions = boundary_conditions)

    solution = scikits.bvp_solver.solve(problem,
                                solution_guess = guess)

    return solution

#%% In the case the script is executed alone
if __name__ == "__main__" :
    xi_end=20
    Pr=5
    m=0
    sol = worster_leitch_solve(xi_end, Pr, m)

    xi = np.linspace(0,xi_end, 100)
```

```
Sol = sol(xi) # evaluation of the solution on xi points

# Plotting solution for F' and G
import pylab
pylab.plot(xi, Sol[1,:],'-')
pylab.plot(xi, Sol[3,:],'-')
pylab.show()
```

Bibliographie

Adrian, R. J. 1991 Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1), 261–304.

Ahlers, G., Grossmann, S. & Lohse, D. 2009 Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 503–537.

Baines, P. G. 2002 Two-dimensional plumes in stratified environments. *J. Fluid Mech.* **471**, 315–337.

Baines, W. D. & Turner, J. S. 1969 Turbulent buoyant convection from a source in a confined region. *J. Fluid Mech.* **37** (Part 1), 51–80.

Bejan, A. & Lage, J. L. 1990 The Prandtl number effect on the transition in natural convection along a vertical surface. *J. Heat Trans.-T. ASME* **112**, 787–790.

Bodenschatz, E., Pesch, W. & Ahlers, G. 2000 Recent developments in rayleigh-bénard convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32** (1), 709–778.

Bruchhausen, M., Guillard, F. & Lemoine, F. 2005 Instantaneous measurement of two-dimensional temperature distributions by means of two-color planar laser induced fluorescence (PLIF). *Exp. Fluids* **38** (1), 123–131.

Caudwell, T. 2015 Convection et stratification induites par une paroi chauffante : mesures expérimentales et modélisations. PhD thesis, Université Grenoble Alpes.

Chillà, F. & Schumacher, J. 2012 New perspectives in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Eur. Phys. J. E* **35** (7).

Chunyan, X. & Xiaoshu, C. 2009 Measuring the Water Temperature via Two-Band Planer Laser Induced Fluorescence. In *Photonics and Optoelectronics, 2009. SOPO 2009. Symposium on*, pp. 1–4.

Coolen, M., Kieft, R., Rindt, C. & van Steenhoven, A. 1999 Application of 2-D LIF temperature measurements in water using a nd : Yag laser. *Exp. Fluids* **27** (5), 420–426.

Cooper, P. & Hunt, G. R. 2010 The ventilated filling box containing a vertically distributed source of buoyancy. *J. Fluid Mech.* **646**, 39–58.

Coppeta, J. & Rogers, C. 1998 Dual emission laser induced fluorescence for direct planar scalar behavior measurements. *Exp. Fluids* **25** (1), 1–15.

Ellison, T. H. & Turner, J. S. 1959 Turbulent entrainment in stratified flows. *J. Fluid Mech.* **6**, 423–448.

Fernando, H. J. S. 1991 Turbulent mixing in stratified fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1), 455–493.

Fujisawa, N. & Funatani, S. 2000 Simultaneous measurement of temperature and velocity in a turbulent thermal convection by the extended range scanning liquid crystal visualization technique. *Exp. Fluids* **29** (1), S158–S165.

Funatani, S., Fujisawa, N. & Ikeda, H. 2004 Simultaneous measurement of temperature and velocity using two-colour LIF combined with PIV with a colour CCD camera and its application to the turbulent buoyant plume. *Meas. Sci. Technol.* **15** (5), 983.

Germeles, A. E. 1975 Forced plumes and mixing of liquids in tanks. *J. Fluid Mech.* **71** (OCT14), 601–623.

Guilbault, G. G. 1973 *Practical fluorescence ; theory, methods, and techniques*. M. Dekker.

Hishida, K. & Sakakibara, J. 2000 Combined planar laser-induced fluorescence–particle image velocimetry technique for velocity and temperature fields. *Exp. Fluids* **29** (1), S129–S140.

Hunt, G. R. & van den Bremer, T. S. 2011 Classical plume theory : 1937–2010 and beyond. *IMA J. Appl. Math.* **76** (3), 424–448.

Kaminski, E., Tait, S. & Carazzo, G. 2005 Turbulent entrainment in jets with arbitrary buoyancy. *J. Fluid Mech.* **526**, 361–376.

Kaye, N. B. 2008 Turbulent plumes in stratified environments : A review of recent work. *Atmos. Ocean* **46** (4), 433–441.

Kaye, N. B. & Hunt, G. R. 2007 Overturning in a filling box. *J. Fluid Mech.* **576**, 297–323.

Keane, R. D. & Adrian, R. J. 1992 Theory of cross-correlation analysis of piv images. *Appl. Sci. Res.* **49** (3), 191–215.

Kim, H. J. & Khim, K. D. 2001 Application of a two-color laser induced fluorescence (LIF) technique for temperature mapping. In *Proc. of 2001 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. ASME, New York.

Kohse-Höinghaus, K. 1994 Laser techniques for the quantitative detection of reactive intermediates in combustion systems. *Prog. Energ. Combust.* **20** (3), 203–279.

Larsen, L. & Crimaldi, J. 2006 The effect of photobleaching on plif. *Exp. Fluids* **41** (5), 803–812.

Lavieille, P., Delconte, A., Blondel, D., Lebouche, M. & Lemoine, F. 2004 Non-intrusive temperature measurements using three-color laser-induced fluorescence. *Exp. Fluids* **36** (5), 706–716.

Lavieille, P., Lemoine, F., Lavergne, G. & Lebouche, M. 2001 Evaporating and combusting droplet temperature measurements using two-color laser-induced fluorescence. *Exp. Fluids* **31** (1), 45–55.

Lemoine, F., Antoine, Y., Wolff, M. & Lebouche, M. 1999 Simultaneous temperature and 2d velocity measurements in a turbulent heated jet using combined laser-induced fluorescence and lda. *Exp. Fluids* **26** (4), 315–323.

Lemoine, F. & Grisch, F. 2012 *Métrologie laser pour la mécanique des fluides : Granulométrie et techniques spectroscopiques*, chap. 7 - Fluorescence induite par laser. *Mécanique et ingénierie des matériaux, Géomécanique* . Hermes Science Publications.

Lemoine, F. & Leporcq, B. 1995 An efficient optical pressure measurement in compressible flows - laser-induced iodine fluorescence. *Exp. Fluids* **19** (3), 150–158.

Lemoine, F., Wolff, M. & Lebouche, M. 1996 Simultaneous concentration and velocity measurements using combined laser-induced fluorescence and laser doppler velocimetry : Application to turbulent transport. *Exp. Fluids* **20** (5), 319–327.

Linden, P. F. 1999 The fluid mechanics of natural ventilation. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** (1), 201–238.

Matulka, A., López, P., Redondo, J. M. & Tarquis, A. 2014 On the entrainment coefficient in a forced plume : quantitative effects of source parameters. *Nonlinear Proc. Geoph.* **21** (1), 269–278.

Morton, B. R., Taylor, G. & Turner, J. S. 1956 Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* **234** (1196), 1–23.

Nakajima, T., Utsunomiya, M. & Ikeda, Y. 1991 Simultaneous measurement of velocity and temperature of water using LDV and fluorescence technique. In *Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, pp. 34–53. Springer Berlin Heidelberg.

Paillat, S. & Kaminski, E. 2014 Entrainment in plane turbulent pure plumes. *J. Fluid Mech.* **755**.

Partridge, J. & Linden, P. 2013 Validity of thermally-driven small-scale ventilated filling box models. *Exp. Fluids* **54** (11).

Patterson, J. & Imberger, J. 1980 Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *J. Fluid Mech.* **100**, 65–86.

Petracci, A., Delfos, R. & Westerweel, J. 2006 Combined PIV/LIF measurements in a Rayleigh-Bénard convection cell. In *13th Int. Symp. on Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics*.

Phelippeau, H. 2009 Méthodes et algorithmes de dématriçage et de filtrage du bruit pour la photographie numérique. PhD thesis, ESIEE Paris, thèse de doctorat dirigée par M. Akil et H. Talbot, Informatique Paris Est 2009.

Riethmuller, M., David, L. & Lecordier, B. 2012 *Vélocimétrie laser pour la mécanique des fluides*, chap. 6 - Vélocimétrie par images de particules PIV. *Mécanique et ingénierie des matériaux, Géomécanique* . Hermes Science Publications.

Sakakibara, J. & Adrian, R. J. 1999 Whole field measurement of temperature in water using two-color laser induced fluorescence. *Exp. Fluids* **26** (1-2), 7–15.

Sakakibara, J., Hishida, K. & Maeda, M. 1993 Measurements of thermally stratified pipe-flow using image-processing techniques. *Exp. Fluids* **16** (2), 82–96.

Sandbach, S. D. & Lane-Serff, G. F. 2011 Transient buoyancy-driven ventilation : Part 1. modelling advection. *Build. Environ.* **46** (8), 1578 – 1588.

Schlichting, H. & Gersten, K. 2000 *Boundary-Layer Theory*, 8th edn. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

de Socio, R. 2010 Lagrangian investigation of the temperature of a fluid with a LIF technique. Master's thesis, Università Degli Studi di Padova, Facoltà di Ingegneria.

Spaccapaniccia, C., Planquart, P., Vetrano, M. R. & Buchlin, J. M. 2012 Mesure simultanée de la température et de la vitesse par les techniques LIF et PIV dans une cavité rectangulaire. In *Actes 13e Congrès Francophone de Techniques Laser*. AFVL, Rouen.

Tsuji, T. & Nagano, Y. 1988 Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate. *Int. J. Heat Mass Tran.* **31** (8), 1723 – 1734.

Valeur, B. 2004 *Invitation à la fluorescence moléculaire*. Bruxelles : De Boeck.

Walker, D. A. 1987 A fluorescence technique for measurement of concentration in mixing liquids. *J. Phys. E Sci. Instrum.* **20** (2), 217–224.

Wells, A. J. & Worster, M. G. 2008 A geophysical-scale model of vertical natural convection boundary layers. *J. Fluid Mech.* **609**, 111–137.

Wells, M. G., Griffiths, R. W. & Turner, J. S. 1999 Competition between distributed and localized buoyancy fluxes in a confined volume. *J. Fluid Mech.* **391**, 319–336.

Westerweel, J. 1993 Digital particle image velocimetry : Theory and application. PhD thesis, Mechanical Maritime and Materials Engineering.

Woods, A. W. 2010 Turbulent plumes in nature. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42** (1), 391–412.

Worster, M. G. & Huppert, H. E. 1983 Time-dependent density profiles in a filling box. *J. Fluid Mech.* **132** (JUL), 457–466.

Worster, M. G. & Leitch, A. M. 1985 Laminar free-convection in confined regions. *J. Fluid Mech.* **156** (JUL), 301–319.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'écoulement convectif induit par une paroi chauffante isotherme. La couche limite turbulente qui s'établit le long de celle-ci s'apparente à un panache, bien que les conditions de paroi en modifient significativement certaines caractéristiques typiques. Dans l'étude présentée, l'environnement est un milieu clos. Puisque le fluide de moindre densité s'accumule dans la partie haute de l'enceinte, une stratification en température s'établit. Afin de mieux comprendre les mécanismes qui entrent en jeu dans ce type de panache et son interaction avec le fluide ambiant, nous déployons une approche à la fois expérimentale et théorique. Sur le plan expérimental, une technique combinant Velocimétrie par Images de Particules (PIV) et Fluorescence Induite par Laser (LIF) est mise au point, et permet d'acquérir simultanément la vitesse et la température du fluide dans un plan de mesure qui couvre l'ensemble de l'écoulement. Sur le plan théorique, un modèle numérique mono-dimensionnel est développé. Il est basé sur la théorie d'entraînement de Morton *et al.* (1956) pour la partie turbulente du panache, et tient compte de son caractère laminaire initial grâce à des solutions de similarité. Les comparaisons détaillées entre ce modèle et les résultats expérimentaux montrent les limites des modèles classiques et la pertinence des améliorations introduites. Nous évaluons notamment la contribution de la portion laminaire, et mettons en évidence le fait que le coefficient d'entraînement varie en fonction de la stratification ambiante.

Abstract

This thesis focuses on the convective flow induced by a heated isotherm wall. A turbulent boundary layer develops along this wall, and resembles to a plume unlike its typical characterics are significantly modified by the boundary condition at the wall. In this study the environment is a closed box in which the lighter fluid continuously accumulates in the upper part, thus producing a temperature stratification in the interior. In order to better understand the dynamics of such a plume as well as its interaction with the ambient fluid, we deploy an approach that is both experimental and theoretical. Concerning the experiments, we developed a technique which combines Particle Image Velocimetry (PIV) with Laser Induced Fluorescence (LIF). This technique allows to simultaneously acquire the velocity and the temperature of the fluid in a plane which covers the entire flow. As concerning the theory, a one-dimensional numerical model is developed. It is based on the entrainment theory by Morton *et al.* (1956) as for the turbulent part of the plume, and it takes into account the initial laminar character of the plume thanks to similarity solutions. The detailed comparisons between this model and the experimental results show the limits of the classical models and the relevance of the introduced improvements. In particular we evaluate the contribution of the laminar part and we highlight that the entrainment coefficient varies as a function of the ambient stratification.