



HAL
open science

Identification décentralisée des systèmes de grande taille. Approches appliquées à la thermique des bâtiments

Safa Jedidi

► To cite this version:

Safa Jedidi. Identification décentralisée des systèmes de grande taille. Approches appliquées à la thermique des bâtiments. Sciences de l'ingénieur [physics]. université Rennes1, 2016. Français. NNT: . tel-01503241

HAL Id: tel-01503241

<https://hal.science/tel-01503241>

Submitted on 6 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Traitement du signal et télécommunications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Safa JEDIDI

préparée à l'unité de recherche (UMR CNRS 6164)
(L'institut d'électronique et de télécommunications de Rennes)
(ISTIC, UFR Informatique-Electronique)

**Identification
décentralisée des
systèmes de
grande taille.
Approches
appliquées
à la thermique
des bâtiments**

**Thèse soutenue à CentraleSupélec
le 15 Décembre 2016**

devant le jury composé de :

Rachid MALTI

Professeur (Université de Bordeaux) / Rapporteur

Alina VODA

Maître de conférences (Université de Grenoble
Alpes) / Rapporteur

Hervé GUÉGUEN

Professeur (CentraleSupélec) / Directeur de thèse

Romain BOURDAIS

Professeur adjoint (CentraleSupélec) / Co-encadrant

Marie-Anne LEFEBVRE

Professeur adjoint (CentraleSupélec) / Co-encadrant

Malek GHANES

Professeur (École Centrale de Nantes) / Examineur

Remerciement

Toute histoire a une fin. Celle de cette thèse ne déroge pas à la règle. Il est de coutume dans un mémoire de thèse de débiter par la fin : voici donc venu le temps des remerciements.

Je tiens à remercier avant tout, les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

J'exprime ma gratitude à **M. Rachid Malti**, Professeur à l'université de Bordeaux, pour avoir bien voulu être rapporteur et pour ses remarques constructives.

Je remercie **Mme. Alina Voda**, Maître des conférences à l'université de Grenoble Alpes, pour avoir accepté de rapporter sur ce manuscrit et d'avoir examiné minutieusement ce travail.

Merci aussi à **M. Malek Ghanes**, Professeur à l'école centrale de Nantes de me faire l'honneur d'être membres du jury de cette thèse et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier vivement **M. Hervé Guéguen** et **M. Jean Buisson** pour avoir accepté la direction de cette thèse, pour leurs disponibilités, leurs encouragements et surtout leurs soutiens permanents.

Mes remerciements vont également à **M. Romain Bourdais** et **Mme Marie-Anne Lefebvre**, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et surtout pour leurs conseils judicieux et nos discussions fructueuses.

Un immense merci à toute l'équipe ASH (Automatique des systèmes hybrides), que je côtoie depuis maintenant trois ans. L'ambiance conviviale du laboratoire m'a permis de vivre trois années agréables de thèse dans ces lieux.

Je souhaiterais aussi adresser mes remerciements à mes collègues de bureaux ou enseignants. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse.

A vous, **mes parents**, et mes sœurs (**Maroua**, **Nesrine** et **Yasmine**). Je tiens à

vous remercier du fond du cœur. Votre investissement, aussi bien affectif que matériel, votre écoute, votre confiance et votre compréhension sont d'une constance sans faille, rassurante et stabilisante. Vous m'avez chaque jour permis d'avancer et finalement d'accomplir ce travail que je vous dédie. Merci.

Abstract

Title : Decentralized identification of large scale-systems. Approaches used to thermal applications in buildings

With the increasing complexity of dynamical systems that appear in engineering and other fields of science, the study of large systems consisting of a set of interconnected subsystems has become an important subject of attention in various areas such as robotics, transport networks, large spacial structures (solar panels, antennas, telescopes, . . .), buildings, . . . and led to interesting problems of parametric identification analysis, distributed control and optimization.

The lack of a universal definition of systems called "large systems", "complex systems", "interconnected systems", . . . , demonstrates the confusion between these concepts and the difficulty of defining clear boundaries for such systems.

The analysis of the identifiability and identification of these systems requires processing digital models of large scale, the management of diverse dynamics within the same system and the consideration of structural constraints (interconnections, . . .) . This is very complicated and very difficult to handle. Thus, these analyzes are rarely taken into consideration globally. Simplifying the problem by decomposing the large system to sub-problems is often the only possible solution.

This thesis presents a decentralized approach for the identification of "large scale systems" composed of a set of interconnected subsystems. This approach is based on the structural properties (controllability, observability and identifiability) of the global system.

This methodological approach is implemented on thermal applications of buildings. The advantage of this approach is demonstrated through comparisons with a global approach.

Keywords

Structural Identifiability, Decentralized Identification, Large Scale Systems, Buildings.

Résumé

Titre : Identification distribuée des systèmes de grande taille. Approches appliquées à la thermique des bâtiments

Avec la complexité croissante des systèmes dynamiques qui apparaissent dans l'ingénierie et d'autres domaines de la science, l'étude des systèmes de grande taille composés d'un ensemble de sous-systèmes interconnectés est devenue un important sujet d'attention dans différents domaines, tels que la robotique, les réseaux de transports, les grandes structures spatiales (panneaux solaires, antennes, télescopes,...), les bâtiments,... et a conduit à des problèmes intéressants d'analyse d'identification paramétrique, de contrôle distribué et d'optimisation.

L'absence d'une définition universelle et reconnue des systèmes qu'on appelle "grands systèmes", "systèmes complexes", "systèmes interconnectés",..., témoigne de la confusion entre ces différents concepts et la difficulté de définir des limites précises pour tels systèmes.

L'analyse de l'identifiabilité et de l'identification de ces systèmes nécessite le traitement de modèles numériques de grande taille, la gestion de dynamiques diverses au sein du même système et la prise en compte de contraintes structurelles (des interconnexions,...). Ceci est très compliqué et très délicat à manipuler. Ainsi, ces analyses sont rarement prises en considération globalement. La simplification du problème par décomposition du grand système en sous-problèmes de complexité réduite est souvent la seule solution possible, conduisant l'automaticien à exploiter clairement la structure du système.

Cette thèse présente ainsi, une approche décentralisée d'identification des systèmes de grande taille "large scale systems" composés d'un ensemble de sous-systèmes interconnectés. Cette approche est basée sur les propriétés structurelles (commandabilité, observabilité et identifiabilité) du grand système.

Cette approche à caractère méthodologique est mise en oeuvre sur des applications

thermiques des bâtiments. L'intérêt de cette approche est montré à travers des comparaisons avec une approche globale.

Mots clés

Identifiabilité Structurale, Identification Décentralisée, Système de Grande Taille, Bâtiments.

Liste des notations et abréviations

Liste des notations

A	Matrice d'état
B	Matrice de commande
C	Matrice d'observation
K_{ij}	Matrice de couplage
x	Vecteur d'état
u	Vecteur des entrées
u_c	Vecteur des entrées communes
\hat{u}_{ij}	Vecteur des entrées virtuelles
y	Vecteur des sorties
p	Vecteur des paramètres
n_x	Dimension de vecteur d'état
n_u	Dimension de vecteur des entrées
n_y	Dimension de vecteur des sorties
n_p	Dimension de vecteur des paramètres
C_i, C_{mi}	Capacités thermiques [J/K]
R_{0i}, R_{ij}, R_i	Résistances thermiques [K/W]
T_i	Température de l'air de la pièce [$^{\circ}C$]
T_{mi}	Température du mur [$^{\circ}C$]
T_{out}	Température extérieure [$^{\circ}C$]
H_{fi}	Puissance de chauffage [W]
M	Nombre de pièces dans un bâtiment
T_e	Période d'échantillonnage
C_{om}	Matrice de commandabilité
O_{obs}	Matrice d'observabilité
O_M	Matrice nulle de dimension $M \times M$

Liste des notations

\mathcal{N}_i	l'ensemble des pièces voisines de la pièce i
<i>global/local</i>	Sous l'hypothèse d'un système constitué de sous-systèmes interconnectés, global caractérise tout ce qui correspond au système pris dans sa totalité, local tout ce qui concerne les sous-systèmes.
Σ	Système global
$\bar{\Sigma}$	Système global augmenté
$\hat{\Sigma}$	Système global augmenté virtuel
Σ_i	Sous-système d'indice i
$\hat{\Sigma}_i$	Sous-système virtuel d'indice i
$\bar{\Sigma}_i$	Sous-système augmenté
$\hat{\Sigma}_i$	Sous-système augmenté virtuel
Id_{n_x}	Matrice identité de dimension $n_x \times n_x$
\mathcal{P}	L'ensemble des paramètres admissibles
<i>temps</i>	Temps de calcul de l'identification

Abréviations

s.g.i.	Structurellement globalement identifiable
s.l.i.	Structurellement localement identifiable
s.n.i	Structurellement non identifiable
TRNSYS	Transient system simulation
AEm	Ajustement d'estimation minimal
aVm	Ajustement de validation minimal
LBT	Lower Block Triangular
D	Diagonale

Table des matières

Introduction générale	1
1 Identifiabilité structurelle et identification paramétrique	7
1.1 Présentation du chapitre	8
1.2 Processus, modèle et structure de modèle	10
1.2.1 Processus	10
1.2.2 Modèle /Structure	11
1.2.3 Modèle structuré	13
1.3 Propriétés structurelles	13
1.3.1 Observabilité structurelle	14
1.3.2 Commandabilité structurelle	15
1.3.3 Identifiabilité structurelle	16
1.4 Approches de vérification de l'identifiabilité structurelle	19
1.4.1 Utilisation de la transformée de Laplace	20
1.4.1.1 Exemple (Walter and Pronzato, 1994)	20
1.4.2 Méthode des paramètres de Markov	21
1.4.2.1 Exemple	22
1.4.3 Méthode des paramètres de la fonction de transfert	23
1.4.3.1 Exemple	23
1.4.4 Méthode des similarités	24
1.4.4.1 Exemple 1	25
1.4.4.2 Exemple 2	26
1.5 Identification paramétrique	27
1.5.1 Définition	27
1.5.2 Procédure d'identification	28
1.5.3 Identification paramétrique des modèles à temps continu	29

1.5.4	Approches d'estimation paramétrique de modèles à temps continu	31
1.5.4.1	La méthode des filtres de variables d'état (FVE)	31
1.5.4.2	La méthode de l'erreur de sortie (COE)	32
1.6	Conclusion	32
2	Systèmes de grande taille	35
2.1	Présentation du chapitre	35
2.2	Généralités	36
2.2.1	Définitions générales	37
2.2.2	Problèmes liés à la grande taille du système	38
2.2.3	Méthodes de simplification des systèmes de grande taille	38
2.2.3.1	La réduction de modèle	38
2.2.3.2	La décomposition du système ou du modèle	39
2.3	Les méthodes d'identification des systèmes de grande taille	40
2.4	Modèles interconnectés	42
2.4.1	Modèles interconnectés de type 1	44
2.4.2	Modèles interconnectés de type 2	45
2.4.3	Modèles interconnectés type 3	50
2.5	Conclusion	53
3	Vers une procédure d'identification	55
3.1	Présentation du chapitre	56
3.2	Hypothèses d'étude	57
3.3	Couplage par les entrées	57
3.3.1	Formalisation du problème étudié	58
3.3.2	Condition nécessaire et suffisante pour l'identifiabilité des sous-systèmes	58
3.3.3	Vers un théorème inverse	59
3.4	Couplage par les sorties	61
3.4.1	Formalisation du problème étudié	61
3.4.2	Condition suffisante pour l'identifiabilité structurelle des systèmes locaux	63
3.4.2.1	Observabilité structurelle des systèmes locaux virtuels	63
3.4.2.2	Commandabilité structurelle des systèmes locaux virtuels	66
3.4.2.3	Identifiabilité structurelle des systèmes locaux virtuels	67

3.4.3	Vers un théorème inverse	69
3.4.3.1	Cas où A est triangulaire supérieure	69
3.5	Couplage par un état intermédiaire et les sorties	71
3.5.1	Formalisation du système étudié	71
3.5.2	Propriétés structurelles de $\bar{\Sigma}$	73
3.5.2.1	Commandabilité et observabilité structurelle de $\bar{\Sigma}$	73
3.5.2.2	Identifiabilité structurelle du $\bar{\Sigma}$	74
3.5.3	Propriétés des sous-systèmes augmentés virtuels ($\hat{\Sigma}_i$)	77
3.5.3.1	Commandabilité des sous-systèmes $\hat{\Sigma}_i$	79
3.5.3.2	Observabilité des sous-systèmes $\hat{\Sigma}_i$	80
3.5.3.3	Identifiabilité des sous-systèmes $\hat{\Sigma}_i$	81
3.6	Synthèse des différents types de couplage	83
3.7	Procédure d'identification décentralisée	85
3.8	Conclusion	86
4	Mise en œuvre de la procédure d'identification décentralisée	87
4.1	Présentation du chapitre	88
4.2	Système et modèle thermique étudié	89
4.2.1	Modélisation thermique des Bâtiments Multi-Zone	89
4.2.2	Description du système étudié	89
4.2.3	Modèle électrique équivalent	90
4.3	Hypothèses d'étude et méthode d'identification utilisée	91
4.3.1	Hypothèses d'étude	91
4.3.2	Méthode d'identification utilisée	92
4.3.3	Indicateurs de comparaison	92
4.4	Simulation générique par Matlab	93
4.4.1	Conditions expérimentales	93
4.4.2	Identification : pem avec le choix algorithme idnlgrey	94
4.4.2.1	Cas idéal	94
4.4.2.2	Cas bruité (bruit sur les sorties)	96
4.4.2.3	Reconstruction du grand système (cas $M = 6$)	97
4.4.3	Identification : pem avec le choix l'algorithme idgrey (cas idéal)	98
4.5	Simulation des données par un simulateur thermique TRNSYS	99
4.5.1	Présentation de TRNSYS	100
4.5.2	Caractéristiques physiques du bâtiment	100

4.5.3	Modèle entrées/sorties	100
4.5.4	Exemple : un bâtiment composé de 3 pièces	101
4.5.5	Identification	102
4.5.6	Intérêt de la prise en compte du couplage entre les différentes pièces	106
4.6	Application réelle	106
4.6.1	Description du bâtiment et des équipements de mesures	107
4.6.2	Modèle	108
4.6.3	Conditions expérimentales	109
4.6.4	Étude de sensibilité des paramètres	110
4.6.5	Identification paramétrique	112
4.6.6	Validation du modèle	113
4.7	Conclusion	114
5	Conclusion générale et perspectives	117
	Conclusion générale et perspectives	117
	Annexe A La preuve de l'identifiabilité structurelle du grand système de taille M	121
	Annexe B Le calcul des fonctions de sensibilité	127
B.1	Calcul des fonctions de sensibilité S_{T_{sr},p_j}	127
B.2	Calcul des fonctions de sensibilité S_{T_m,p_j}	128
B.3	Obtention des fonctions de sensibilité en pratique	129
	Annexe C La preuve de l'identifiabilité structurelle locale du grand système dans le cas d'un couplage par les entrées	131
	Table des figures	135
	Liste des tableaux	139
	Bibliographie	141

Introduction Générale

*”Un livre captivant dès le début
et qui nous emmène dans un
monde totalement inconnu, il est
également riche en émotion.”*

Stephen King

La ligne verte

L'identification des systèmes de grande taille est un sujet de recherche d'actualité. La plupart des systèmes de grande taille modernes peuvent être vus comme un ensemble de systèmes qui interagissent (les drones/satellites, les systèmes de transport, les systèmes électriques, les réseaux routiers automatisés ...). Les interconnexions soulèvent des problèmes pour la conception et la maintenance de ces systèmes. Ceci est reconnu dans la recherche par le thème ”*large-scale interconnected systems*”. La thèse propose ainsi de développer une méthodologie d'identification paramétrique pour analyser de manière appropriée ces systèmes interconnectés afin de garantir des performances (temps de calcul, précision des paramètres, ...) à la fois au niveau local et au niveau global. Les méthodes développées trouvent des applications dans différents domaines et en particulier la thermique des bâtiments.

Pendant de nombreuses années, l'identification des paramètres des systèmes de grande taille a été considérée comme un problème difficile à résoudre pour plusieurs raisons :

- **la dimension** d'un grand système qui est définie par le nombre de ses paramètres, le nombre de ses entrées/sorties ou le nombre de ses variables d'états. Ce qui entraîne un encombrement de mémoire prohibitif et ainsi un problème dans la capacité du calcul.
- **le temps d'exécution** qui est défini par le nombre d'opérations élémentaires effectuées

par un algorithme pour avoir un résultat ; ce temps qui ne dépend pas du calculateur employé, croît très rapidement avec la dimension du système (F.Claveau, 2005).

Les facteurs pouvant influencer la qualité de l'identification paramétrique des systèmes de grande taille sont :

- **la complexité de la structure du modèle étudié** : quel est le modèle le moins compliqué qui est nécessaire pour prédire la réponse du système avec une bonne précision ?
- **le choix de l'estimateur** : comment estimer les paramètres du système à partir des données mesurées ? Quelle méthode utiliser ?
- **les conditions expérimentales** : quel est le type des entrées nécessaires pour obtenir une bonne précision des valeurs des paramètres estimés ? Où et quand l'expérience sera réalisée ? ...

Pour simplifier l'identification des systèmes de grande taille, de nombreux auteurs ont essayé d'exploiter leur structure. Les auteurs de l'article (Guinzy and Sage, 1973) profitent de la structuration hiérarchique du grand système pour développer une approche itérative d'identification. D'autres auteurs (Massioni and Verhaegen, 2008) s'intéressent aux systèmes circulants, classe particulière des systèmes dont les interconnexions sont périodiques, et où chaque sous-système a exactement 2 voisins (D'Andrea and Dullerud, 2003), et ils exploitent leurs propriétés pour réduire la complexité de leur identification. Il existe également des méthodes d'identification qui profitent des propriétés de découplage, par exemple, l'article (Van Den Hof et al., 2013) présente des méthodes d'identification en boucle fermée des grands systèmes composés d'un ensemble de sous-systèmes connectés.

Les travaux proposés dans cette thèse sont basés également sur l'étude des propriétés structurelles en général et plus précisément l'étude de l'identifiabilité paramétrique. Cette propriété consiste à vérifier, à partir d'un comportement entrée/ sortie, s'il est possible d'estimer les paramètres du système étudié (appartenant à un ensemble admissible) de façon unique. C'est ce qu'on appelle *l'identifiabilité globale*. Cette étude est nécessaire car elle permet à l'utilisateur (le modélisateur) de conserver ou de rejeter un modèle.

Le concept d'identifiabilité globale est important pour des applications de détection ou de modélisation, pour lesquelles, l'objectif de la recherche est de déterminer les valeurs des paramètres du système étudié. Il est donc important de faire une étude d'identifiabilité avant de passer à l'étape de l'identification.

La raison principale de l'intérêt de l'analyse de l'identifiabilité structurelle est qu'elle donne des résultats structurels valables pour presque toutes les valeurs des paramètres. Ces résultats correctement interprétés, peuvent être très utiles dans une analyse a priori de modèles qui sont candidats pour représenter le processus réel.

Objectif de la thèse

Cette thèse a pour objectif de :

- proposer un état de l'art sur l'identifiabilité structurelle et les méthodes proposées dans la littérature pour simplifier l'identification paramétrique des systèmes de grande taille,
- développer une technique d'identification décentralisée en se basant sur la structure des systèmes de grande taille et les propriétés structurelles (commandabilité, observabilité et identifiabilité),
- appliquer l'approche proposée sur différents cas, plus précisément thermiques des bâtiments.

Organisation de la thèse

La première partie du travail consiste en une analyse bibliographique sur l'identifiabilité, l'identification paramétrique et les résultats des études faites pour résoudre le problème d'identifiabilité et d'identification des systèmes de grande taille. Certains de ces résultats ou méthodes pour vérifier l'identifiabilité sont difficilement exploitables pour notre problème, d'autres peuvent se généraliser à notre problème. Ceci nous amène, dans une deuxième partie, à adapter certaines techniques pour simplifier l'étude de l'identifiabilité et l'identification de certaines structures de systèmes de grande taille. Au préalable, nous aurons construit un cadre théorique (propriétés structurelles, notions d'automatique) permettant de poser le problème d'identification pour les systèmes de grande taille.

La seconde partie sera consacrée aux travaux réalisés dans cette thèse : on présentera une méthode d'identification décentralisée permettant de réduire la complexité de l'identification globale en exploitant la structure du système étudié et ses propriétés structurelles.

La troisième partie est une mise en oeuvre de l'approche présentée dans la seconde partie au travers des applications thermiques sur les bâtiments.

Ainsi, la suite de cette thèse est structurée en quatre chapitres, résumés dans les paragraphes suivants.

Chapitre 1

Le premier chapitre offre un état de l'art sur l'identifiabilité et l'identification paramétrique. On présente ainsi des définitions de l'identifiabilité structurelle, des approches utilisées pour vérifier l'identifiabilité structurelle des systèmes linéaires. On se focalise par la suite sur l'identification paramétrique : définitions, procédure et méthodes.

Chapitre 2

Le deuxième chapitre présente dans une première partie, les définitions et les problèmes des systèmes de grande taille. Le but de la seconde partie est de préciser les différentes structures des modèles étudiés dans cette thèse. Ainsi ce chapitre peut être considéré comme une base des outils utilisés pour le développement des travaux de cette thèse.

Chapitre 3

Les contributions principales de cette thèse sont développées dans ce chapitre. On présente les conditions suffisantes et/ ou nécessaires pour l'identifiabilité structurelle des systèmes locaux ou/et du grand système dont les différentes structures de modèles ont été présentées dans le chapitre précédent : ces résultats ont été prouvés en utilisant des structurations basées sur la modélisation dans l'espace d'état qui nous ont permis de faire ressortir des structures plus simples, et les propriétés structurelles du système étudié. Dans la deuxième partie, on définit une procédure d'identification décentralisée en profitant des propriétés structurelles des systèmes étudiés.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, l'intérêt de la procédure d'identification décentralisée proposée dans le chapitre 3 est illustré par des applications de la thermique des bâtiments. Les simulations des bâtiments sont développées en premier lieu avec Matlab sur un modèle dont la structure et les vrais paramètres sont connus puis en second lieu avec un simulateur thermique TRNSYS et finalement par un cas d'étude pratique. Ces exemples montrent l'efficacité de l'approche décentralisée et son importance pour réduire la complexité de l'identification des systèmes de grande taille.

Conclusions et perspectives

Dans cette dernière partie on dresse le bilan des travaux présentés dans ce manuscrit

et on propose des perspectives dans la continuité des travaux effectués.

Publications

Nos travaux de thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

[Jedidi 2016] : Jedidi, S., Bourdais, R., Buisson, J., Lefebvre, M.-A., 2016. Parameter Identifiability and Decentralized Identification of Large-Scale Interconnected Systems. Application to Multi-Zone Building Models. Article de revue (soumis)

[Jedidi 2016] : Jedidi, S., Bourdais, R., Buisson, J., Lefebvre, M.-A 2016. Identifiabilité structurelle et identification de systèmes couplés par les sorties. Article de revue (Journal européen des systèmes automatisés)

[Jedidi 2015] : Jedidi, S., Bourdais, R., Buisson, J., Lefebvre, M.-A., 2015. Structural identifiability and identification of systems under output couplings. IFAC Papers On-Line 48 (28), 1415-1420, 17th IFAC Symposium on System. Identification SYSID 2015 Beijing, China, 19 a 21 October 2015.

[Jedidi 2015] : Jedidi, S., Bourdais, R., Buisson, J., Lefebvre, M.-A 2015. Identifiabilité structurelle et identification de systèmes couplés par les sorties. Communication dans un congrès JDMACS 2015, June 2015, Bourges, France

Chapitre 1

Identifiabilité structurelle et identification paramétrique

*Sans langage commun les
affaires ne peuvent être
conclues.
Confucius*

Sommaire

1.1	Présentation du chapitre	8
1.2	Processus, modèle et structure de modèle	10
1.2.1	Processus	10
1.2.2	Modèle /Structure	11
1.2.3	Modèle structuré	13
1.3	Propriétés structurelles	13
1.3.1	Observabilité structurelle	14
1.3.2	Commandabilité structurelle	15
1.3.3	Identifiabilité structurelle	16
1.4	Approches de vérification de l'identifiabilité structurelle	19
1.4.1	Utilisation de la transformée de Laplace	20
1.4.2	Méthode des paramètres de Markov	21
1.4.3	Méthode des paramètres de la fonction de transfert	23
1.4.4	Méthode des similarités	24

1.5	Identification paramétrique	27
1.5.1	Définition	27
1.5.2	Procédure d'identification	28
1.5.3	Identification paramétrique des modèles à temps continu	29
1.5.4	Approches d'estimation paramétrique de modèles à temps continu	31
1.6	Conclusion	32

1.1 Présentation du chapitre

L'identification paramétrique d'un système consiste en général à choisir une structure du modèle, estimer les paramètres (p) de ce modèle à partir de l'observation des mesures des entrées et des sorties et valider cette estimation par des critères choisis par l'identifieur.

Dans la suite, nous nous intéressons à des modèles d'état linéaires à temps continu (1.1.1).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)u(t) \\ y(t) &= C(p)x(t)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

$x \in R^{n_x}$ est le vecteur des états, $u \in R^{n_u}$ est le vecteur des entrées, $y \in R^{n_y}$ est le vecteur des sorties et $p \in \mathcal{P} \subset R^{n_p}$ est le vecteur des paramètres du modèle étudié (où \mathcal{P} est l'ensemble des paramètres admissibles).

L'identification se résume généralement en 2 grandes étapes principales :

- le choix d'une structure du modèle mathématique (appelée aussi l'étape de caractérisation) et l'étude de ses propriétés structurelles : cette étape est la plus délicate : elle consiste à déterminer une structure pertinente du modèle étudié en tenant compte des données expérimentales recueillies et d'étudier les propriétés de la structure choisie indépendamment des données de mesures et des valeurs des paramètres. L'analyse de ces propriétés structurelles comme l'observabilité, la commandabilité et l'identifiabilité (s'assurer qu'on puisse estimer les paramètres du modèle) est faite généralement avant l'estimation des paramètres afin de savoir si le modèle proposé est correct ou non (Walter (1987b)).

Cette étape répond ainsi aux interrogations suivantes :

- choix de la structure d'un modèle : quel objectif?

- possibilité d'estimation des paramètres : le modèle est-il identifiable? Peut-on déterminer les paramètres de façon unique à partir des données entrée/sortie?
- l'estimation des paramètres de la structure choisie : une fois, la structure du modèle choisie, on dispose d'un vecteur de paramètres p dont les valeurs sont inconnues. La détermination numérique de ces paramètres est appelée l'estimation paramétrique du modèle. Elle a fait l'objet de plusieurs publications et recherches, citons par exemple ces ouvrages (Goodwin G and Payne R (1987), Ollivier (1990), Walter and Pronzato (1994), ...). Elle traduit une identité de comportement entre le système (processus) et le modèle pour un même jeu de données entrées/sorties. Cette opération est réalisée par l'étude de la fonction erreur entre les réponses du processus et du modèle à un même type d'excitation.

Il existe deux types d'identification :

- identification non paramétrique : elle est la moins utilisée et elle est basée sur les réponses temporelles (indicielle, impulsionnelle) et les réponses en fréquence. Ce type d'identification est basé souvent sur une procédure hors ligne.
- identification paramétrique : elle est la plus utilisée. Elle consiste à ajuster, de manière itérative, les paramètres du modèle de sorte à ce que la sortie du modèle ressemble le plus possible à la sortie mesurée du process (figure 1.1). Ce type d'identification est basée sur les méthodes des moindres carrés classiques (Ljung, 1999), de la variable instrumentale (Garnier and Wang, 2008), de l'erreur de prédiction (Walter.E and Lecourtier.Y, 1982), ...

Dans la suite de cette thèse, nous nous intéresserons uniquement à l'identification paramétrique

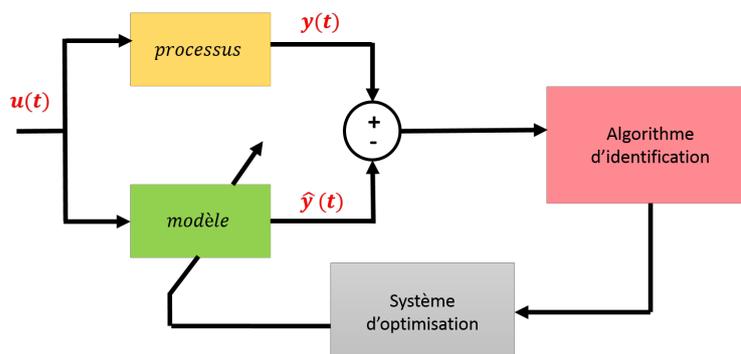


FIGURE 1.1 – Identification paramétrique

Dans ce chapitre, nous allons définir dans un premier temps les propriétés structu-

relles d'un système linéaire en se focalisant sur une propriété structurelle qui présente une importance particulière dans la modélisation "l'identifiabilité structurelle" et les différentes techniques pour la vérifier : nous étudierons de façon théorique et à travers des exemples certaines méthodes d'analyse d'identifiabilité des systèmes linéaires.

Nous rappellerons brièvement dans la deuxième partie du chapitre les grandes étapes de l'identification paramétrique et les algorithmes utilisés pour la réaliser.

1.2 Processus, modèle et structure de modèle

Il y a toujours une confusion entre les notions d'un système et d'un modèle. Nous proposons ainsi de préciser ces notions dans cette partie du manuscrit.

Rappelons d'abord que ces notions permettent de définir la notion de modélisation qui consiste à traduire des problèmes réels (physiques) en relations mathématiques. Cette étape dépend évidemment de ce que le modélisateur souhaite analyser et étudier en fonction des informations a priori disponibles.

1.2.1 Processus

Un processus réel est un système dynamique (qui évolue avec le temps) dans lequel interagissent différents signaux (entrées et perturbations) pour produire des signaux observables (les sorties) (figure 1.2) :

- les entrées ou les commandes de contrôle : notées généralement $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n_u})$. Ce sont des grandeurs connues.
- les perturbations : elles agissent sur le système.
- les sorties : notées généralement $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$. Ce sont des grandeurs mesurées et représentant l'action du processus sur l'environnement.

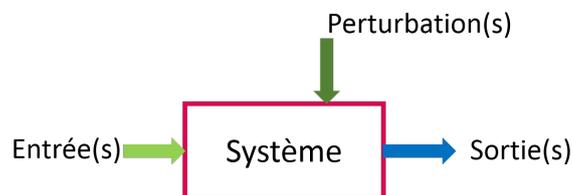


FIGURE 1.2 – Schéma d'un processus

Les processus peuvent être de toutes natures : physique, chimique, biologique, écologique, financier, sociologique,

Considérons l'exemple d'un système de chauffage électrique d'une maison : l'entrée u de commande est la puissance de chauffage, la sortie est la température de la maison et les perturbations sont les échanges thermiques avec le milieu extérieur à travers les portes, les fenêtres et les murs.

1.2.2 Modèle /Structure

Un modèle d'un système décrit les relations entre les différentes variables mathématiques représentant les signaux du système. Certains modèles font intervenir des grandeurs constantes et inconnues, appelées paramètres. Ces paramètres seront estimés à partir des observations effectuées sur le processus. Cette étape (la modélisation) permet de construire un modèle paramétrique $M(p)$.

$M(p)$ représente le modèle obtenu à partir de la structure de modèle $M(\cdot)$ dans laquelle p est le vecteur des paramètres. Le choix de $M(\cdot)$ est appelé caractérisation. En effet, on peut avoir plusieurs modèles d'un seul problème. Tous ces modèles ne sont pas nécessairement équivalents ce qui mène le modélisateur à faire une étude des propriétés structurelles des modèles. Ces notions seront présentées dans les paragraphes suivants.

Le modèle est utilisé pour les simulations, la prédiction des sorties, la synthèse des lois de commande, . . .

On distingue 3 types de modèles en fonction des informations mises en jeu pour leur conception :

- **Modèle boîte blanche ou modèle de connaissance** : les modèles de ce type sont développés à partir d'une analyse physique. On exploite les connaissances a priori sur le système et les lois de physique connues (mécanique, électromagnétisme, thermodynamique . . .) pour déduire des relations mathématiques traduisant le comportement du système. Pour ce type de modèle, les paramètres ont un sens physique ce qui permet de les analyser. Ce type de modèle est utilisé dans le cas où les essais expérimentaux ne sont pas aisés comme le domaine spatial par exemple. L'exemple de bicyclette illustre également ce type de modèle parce que les mécanismes de propulsion, de guidage, d'adhérence et de freinage sont visibles au premier coup d'œil.
- **Modèle boîte noire ou modèle de comportement** : Dans la pratique, il arrive fréquemment que le processus soit trop complexe, ou que les phénomènes qui le régissent soient trop mal connus, pour qu'il soit possible d'établir un modèle de connaissance suffisamment précis pour l'application considérée. On est alors amené à concevoir des

modèles purement empiriques, fondés exclusivement sur les résultats de mesures effectuées sur le processus : c'est le cas des modèles boîte noire. Pour ce type de modèle, on exploite seulement les mesures prélevées sur les entrées/sorties et éventuellement les expériences précédentes. (exemple : Système de climatisation d'un grand centre commercial). Pour ce type de modèle, les paramètres n'ont aucun sens physique et les connaissances a priori ne sont pas nécessaires (trop complexes ou indisponibles). Le tableau (1.1) présente une comparaison entre les modèles de connaissance et les modèles de comportement.

Table 1.1 – Comparaison entre les modèles de connaissance et de comportement 1

Modèle	Connaissance	Comportement
Précision	plus précis	moins précis
Interpétation physique	souvent possible	pas toujours possible
Exploitation	moins efficace (si le modèle est trop complexe)	plus efficace plus efficace

- **Modèle boîte grise ou modèle hybride** : c'est le modèle le plus courant, il combine les deux types de modèles précédents (Leconte et al., 2012). Ainsi cette modélisation prend en considération les connaissances physiques pour déterminer la structure du modèle et les lois de comportement obtenues expérimentalement pour estimer les valeurs des paramètres. (exemple : un modèle qui décrit les dynamiques thermiques d'un bâtiment (Bacher and Madsen, 2011)). C'est dans ce cadre que les modèles étudiés dans ce mémoire ont été développés.

Il existe également plusieurs classifications de modèles :

- Selon le nombre des entrées/sorties : modèle (SISO) possédant une entrée/une sortie ou (MIMO) possédant plusieurs entrées et plusieurs sorties.
- Selon la description mathématique : modèle linéaire ou non-linéaire.
- Selon le caractère des régimes de fonctionnement : modèle statique (si ses équations sont algébriques) et dynamique (si ses équations sont différentielles).
- à temps continu ou à temps discret :
 - modèles à temps continu (1.2.2) : les paramètres physiques interviennent généralement dans la description des modèles à temps continu. Ainsi, les paramètres estimés sont

liés aux paramètres réels du système étudié.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_p(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h_p(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

- modèles à temps discret (1.2.3) : les valeurs des paramètres dépendent de la période d'échantillonnage choisie, et peuvent ne plus donner lieu à une interprétation physique.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f_p(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h_p(x(k), u(k)) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

1.2.3 Modèle structuré

Dans le cas d'une modélisation par représentation d'état, un *modèle structuré* est représenté par ses matrices A, B, C, dont certains coefficients sont nuls strictement (l'emplacement des zéros est fixé). La structure du système est donc définie par la disposition des coefficients invariablement nuls dans les 3 matrices de la représentation d'état (Hovelaque et al., 1999).

Exemple On considère le système suivant représenté par son équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)u(t) \\ y(t) &= C(p)x(t) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-p_1^2}{p_2 p_3} & 1 \\ 0 & 0 & p_4 p_5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{p_1}{p_2 p_3 p_6} & 0 \\ 0 & p_4 p_5 p_6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & p_7 & 0 \\ 0 & \frac{p_7}{p_8} & -\frac{p_7}{p_8} \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

1.3 Propriétés structurelles

Les structures linéaires ont un intérêt particulier dans les études parce qu'il est toujours plus facile de tester par le calcul certaines de leurs propriétés.

Pour cette section on va considérer un système décrit par la représentation d'état 1.1.1.

Par souci de clarté, une matrice $A(p)$, paramétrée par p sera notée A , et cette même matrice $A(\tilde{p})$ paramétrée en \tilde{p} sera notée \tilde{A} .

Pour un système paramétré, une propriété est dite structurelle, si elle est vraie pour presque toutes les valeurs des paramètres du modèle étudié (appelées propriétés génériques).

1.3.1 Observabilité structurelle

L'observabilité concerne la possibilité de déterminer ou de reconstruire l'état du système à partir de la connaissance de ses sorties (voir le livre de (Borne et al., 1992) par exemple).

Définition 1 (Borne et al., 1992) *Un système est observable si quel que soit l'instant initial t_1 , l'état initial x_1 à t_1 et l'instant final t_2 différent de t_1 , la seule connaissance de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ sur l'intervalle $t_1 < t < t_2$ permet de connaître l'état initial x_1 .*

Théorème 1 *Le système (1.1.1) est structurellement observable si, pour presque tout $p \in \mathcal{P}$, le rang de la matrice d'observabilité est égal à l'ordre du système n_x (Willems, 1986) :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n_x$$

L'une des propriétés importantes de l'observabilité est celle de l'invariance par changement de base : en effet, toutes les représentations d'état issues (par changement de base) d'un modèle complètement observable sont observables et ont le même rang d'observabilité.

Pour bien comprendre cette notion, on propose deux exemples.

Exemple 1 Considérons le système paramétré suivant :

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3.6)$$

La matrice d'observabilité est :

$$O_{obs} = \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2 p_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

Cette matrice a un rang structurel égal à 2, même si pour certaines valeurs de p ($p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$ ou $p_3 = 0$) le rang de la matrice d'observabilité est inférieur à 2.

Ce système est alors structurellement observable.

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

La matrice d'observabilité est :

$$O_{obs} = \begin{pmatrix} p_4 & p_5 & p_6 \\ p_5 p_1 & p_5 p_2 & p_5 p_3 \\ p_1 p_2 p_5 & p_2^2 p_5 & p_2 p_3 p_5 \end{pmatrix} \quad (1.3.9)$$

Le rang structurel de cette matrice est de 2 : la troisième ligne étant colinéaire à la deuxième.

Ce système est alors non structurellement observable.

1.3.2 Commandabilité structurelle

La commandabilité est la possibilité de transférer l'état d'un système d'une valeur initiale à une valeur de consigne.

Définition 2 *Un système est commandable à l'instant t_1 s'il existe une commande u permettant d'amener en temps fini le vecteur d'état d'une valeur initiale $x(t_1)$ quelconque donnée à une valeur x_2 quelconque choisie (Borne et al., 1992).*

Théorème 2 *Le système linéaire (1.1.1) est structurellement commandable si, pour presque tout $p \in \mathcal{P}$, le rang de la matrice de commandabilité est égal à l'ordre du système n_x (Willems, 1986) :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n_x$$

L'une des propriétés importantes de la commandabilité est celle de l'invariance par changement de base : en effet, toutes les représentations d'état issues (par changement de base) d'un modèle complètement commandable sont commandables et ont le même rang de commandabilité.

Exemple Considérons l'exemple suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} u(t) \quad (1.3.10)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} p_3 & p_4 \end{pmatrix} x(t)$$

La matrice de commandabilité est donnée par :

$$Com = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5 & p_1 p_5 \\ p_6 & p_2 p_6 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité a un rang structurel égal à 2 d'où le système est structurellement commandable.

1.3.3 Identifiabilité structurelle

Quand le choix de la structure est fixé, il est important de s'assurer que le modèle est bien défini, c'est-à-dire qu'il est théoriquement possible d'estimer les paramètres d'un modèle de cette structure à partir des données entrée-sortie.

Tester l'identifiabilité structurelle d'un système est une étape incontournable car elle permet de conserver ou de rejeter un modèle qui, a priori, semble satisfaisant. Intuitivement, les paramètres d'un système sont identifiables s'il est théoriquement possible de les déterminer d'une façon unique à partir de l'observation des entrées et des sorties, en se plaçant dans un cadre idéal non bruité, où le modèle cherché correspond à celui du système étudié.

L'objectif de l'identifiabilité est de vérifier que deux vecteurs de paramètres différents n'entraînent pas le même comportement entrée/sortie (Walter and Pronzato, 1994). Cette définition se fait dans le cadre idéalisé (figure 1.3) suivant :

- Le processus et le modèle ont des structures identiques (pas d'erreur de caractérisation).
- Les données disponibles sont supposées non bruitées
- L'entrée appliquée et les instants de mesure peuvent être choisis librement (ils sont indépendants des paramètres).

Il existe dans la littérature plusieurs articles et ouvrages qui ont étudié les définitions de l'identifiabilité paramétrique : (Bellman and Astrom, 1970), (Glover.K and Willems.J, 1974), (Walter, 1982), (Nguyen, 1982), (Noiret, 2000), ... Ces ouvrages ont proposé plusieurs définitions de l'identifiabilité basées sur des notions d'analyse ou d'algèbre différentielle.

La définition formelle de l'identifiabilité structurelle donnée par Walter (1982), est rappelée comme suit :

Définition 3 *Identifiabilité structurelle globale (Walter, 1982)*

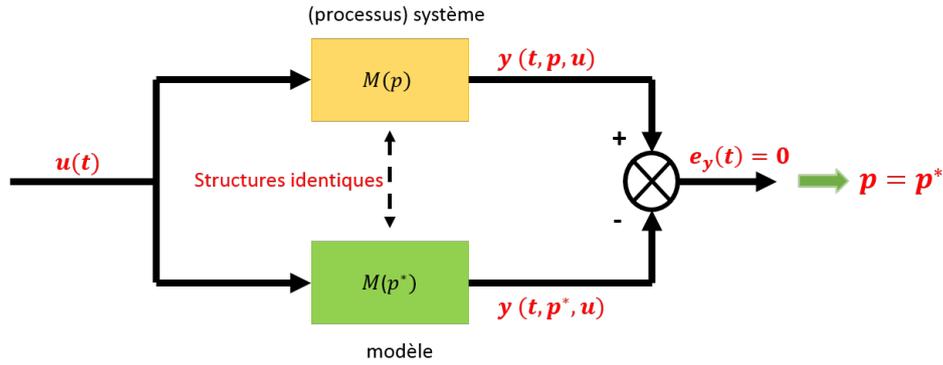


FIGURE 1.3 – Cadre idéalisé des études d'identifiabilité structurelle

Considérons un système linéaire paramétré en p , avec $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ (où \mathcal{P} est l'ensemble des paramètres admissibles), représenté sous la forme d'état 1.1.1 :

Le paramètre $p_i \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ est dit structurellement globalement identifiable (s.g.i.) si pour presque tout $\tilde{p} \in \mathcal{P}$ et pour une classe d'entrée \mathcal{U} :

$$y(\hat{p}, t) \equiv y(\tilde{p}, t), \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathcal{U}, \implies \hat{p}_i = \tilde{p}_i \quad (1.3.11)$$

Le système global (1.1.1) est s.g.i. si et seulement si, tous ses paramètres sont s.g.i.

Ainsi, tester l'identifiabilité structurelle revient à tester l'injectivité du comportement entrée-sortie de la structure (figure 1.4).

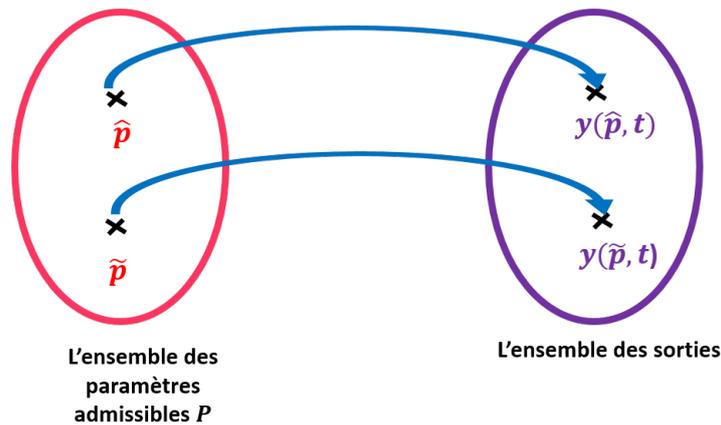


FIGURE 1.4 – Interprétation algébrique de la condition d'identifiabilité structurelle globale. Application injective : Structure globalement identifiable

Il n'est pas toujours facile de démontrer l'identifiabilité globale d'un système. Ainsi, il existe une définition d'identifiabilité locale qui est souvent plus facile à démontrer.

Définition 4 *Identifiabilité structurelle locale (Walter, 1982)*

Le paramètre p_i est structurellement localement identifiable (s.l.i.) si pour presque tout $\tilde{p} \in \mathcal{P}$ et pour une classe d'entrée \mathcal{U} , il existe un voisinage $V(\tilde{p})$ tel que :

$$\hat{p} \in V(\tilde{p}), y(\hat{p}, t) \equiv y(\tilde{p}, t), \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{p}_i = \tilde{p}_i \quad (1.3.12)$$

Le système global (1.1.1) est s.l.i. si et seulement si, tous ses paramètres sont s.l.i. (figure 1.5).

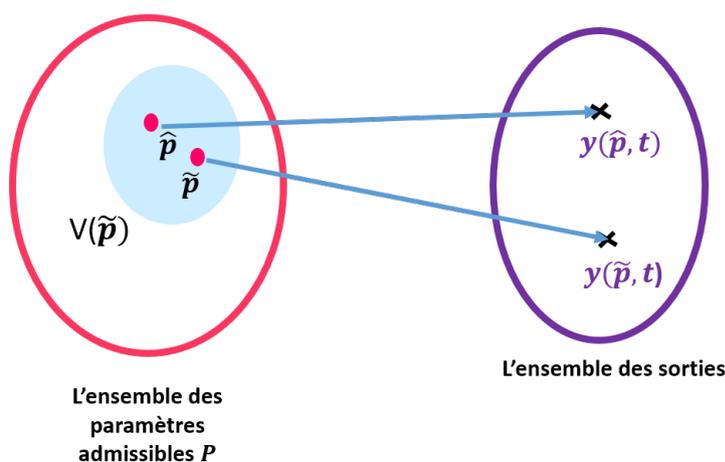


FIGURE 1.5 – Interprétation algébrique de la condition d'identifiabilité structurelle locale.

L'identifiabilité locale est évidemment une condition nécessaire pour l'identifiabilité globale.

Dans certains cas, le système peut n'être ni globalement identifiable, ni localement identifiable. Il est alors structurellement non identifiable (s.n.i.).

Définition 5 *Non identifiabilité structurelle (Walter, 1982)*

Le paramètre p_i est structurellement non identifiable (s.n.i.) si pour presque tout $\tilde{p} \in \mathcal{P}$, il existe une infinité non dénombrable de valeurs de \hat{p}_i telles que $y(\hat{p}, t) \equiv y(\tilde{p}, t)$.

Le système global (1.1.1) est s.n.i. s'il comporte au moins un paramètre s.n.i. (figure 1.6).

Définition 6 *Type de l'identifiabilité selon le nombre des solutions de $y(p, t) = y(\tilde{p}, t)$*

On peut différencier 3 types d'identifiabilité :

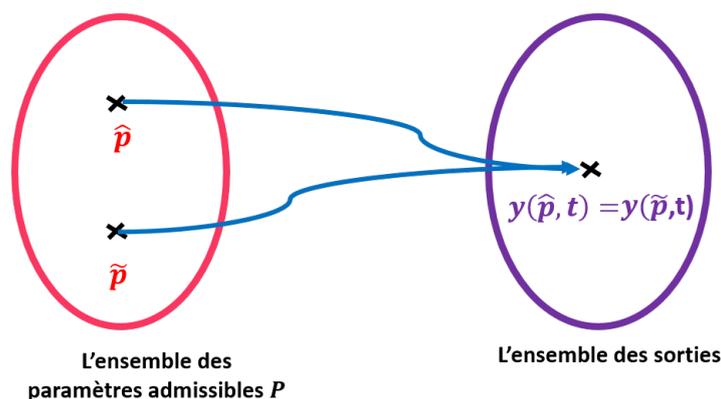


FIGURE 1.6 – Application non injective : Structure globalement non identifiable

- Si pour presque tout \tilde{p} , il existe une solution unique pour p , la structure est structurellement globalement identifiable.
- Si pour presque tout \tilde{p} , l'ensemble des solutions est dénombrable, la structure est structurellement localement identifiable.
- Si pour presque tout \tilde{p} , l'ensemble des solutions n'est pas dénombrable, la structure est structurellement non identifiable.

1.4 Approches de vérification de l'identifiabilité structurelle

Il existe plusieurs méthodes pour analyser l'identifiabilité structurelle d'un modèle linéaire ou non linéaire qui sont basées sur des approches analytiques ou algébriques. Certaines de ces méthodes sont décrites par exemple dans : (Walter.E and Lecourtier.Y, 1982), (Lecourtier.Y, 1985), (Walter, 1987a), (Jauberthie, 2002).

Pour les systèmes linéaires, l'identifiabilité structurelle est bien étudiée et il existe plusieurs tests simples à mettre en œuvre (la méthode des paramètres de Markov expliquée dans (Profos and Delgado, 1995), l'approche par transformation de Laplace, décrite dans (Perasso, 2009), ...). Par contre dans le cas non linéaire, le problème est plus complexe et seulement quelques méthodes permettent aujourd'hui de tester leur identifiabilité comme le développement de la sortie en série de Taylor étudié dans (Norton, 1982) par exemple. On va se limiter dans notre étude, au cas des méthodes associées aux modèles linéaires.

1.4.1 Utilisation de la transformée de Laplace

Pour cette méthode, on utilise la fonction de transfert temporelle du système, et on regarde le système image par la transformée de Laplace (Perasso, 2009).

La transformée de Laplace est une application linéaire qui vérifie pour toute fonction x (formule de dérivation) :

$$L(x')(s) = sL(x)(s) - x(0)$$

où s désigne la variable de Laplace. Ainsi, si on considère le système (1.1.1), son image par la transformée de Laplace est (on suppose que $x(0) = 0$) :

$$\begin{aligned} sL(x)(s) &= A(p)L(x)(s) + B(p)L(u)(s) \\ L(y)(s) &= C(p)L(x)(s) \end{aligned}$$

La fonction de transfert $H(p)$ du système (1.1.1) peut être calculée en utilisant cette formule :

$$H(s, p) = C(p)(sI - A(p))^{-1}B(p)$$

Pour étudier l'identifiabilité, la méthode consiste à comparer les transformées de Laplace des fonctions de transfert pour deux jeux différents de paramètres du modèle et à utiliser la définition (6) pour déduire le résultat. Ainsi les étapes de cette méthode sont (Walter, 1987b) :

- Calculer la matrice (ou la fonction) de transfert du modèle $H(s, p)$
- Ecrire $H(s, p)$ sous forme canonique $H_c(s, p)$
- Choisir deux jeux de paramètres p et \tilde{p}
- Résoudre l'équation $H_c(s, p) = H_c(s, \tilde{p})$
- Déduire l'identifiabilité du système étudié

1.4.1.1 Exemple (Walter and Pronzato, 1994)

On considère l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(p_1 + p_2)x_1 + p_3x_2 + u & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= p_1x_1 - p_3x_2 & x_2(0) &= 0 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

La transformée de Laplace de ce système est :

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2 + s)x_1(s) &= p_3x_2(s) + u(s) \\ (s + p_3)x_2(s) &= p_1x_1(s) \\ y(s) &= x_2(s)\end{aligned}\tag{1.4.14}$$

La fonction de Transfert sous sa forme canonique est :

$$H_c(s, p) = \frac{p_1}{s^2 + s(p_1 + p_2 + p_3) + p_2p_3}\tag{1.4.15}$$

La relation $H_c(s, p) = H_c(s, \tilde{p})$ se traduit alors par ces équations :

$$\begin{aligned}p_1 &= \tilde{p}_1 \\ p_2 + p_3 &= \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 \\ p_2p_3 &= \tilde{p}_2\tilde{p}_3\end{aligned}\tag{1.4.16}$$

Ainsi, on peut remarquer que le premier paramètre p_1 prend la même valeur dans les deux solutions donc il est (s.g.i). Par contre les deux autres paramètres peuvent chacun prendre deux valeurs différentes, donc ils sont seulement (s.l.i).

1.4.2 Méthode des paramètres de Markov

Avec cette méthode, on peut vérifier uniquement l'identifiabilité locale d'un système (Profos and Delgado, 1995).

Les paramètres de Markov d'un système décrit par la représentation d'état (1.1.1) sont regroupés dans la matrice G :

$$G^T(p) = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}\tag{1.4.17}$$

Les paramètres de Markov sont des scalaires pour les systèmes mono-entrée et mono-sortie, et sont des matrices pour les systèmes à n_u entrées et n_y sorties. Les étapes nécessaires pour étudier l'identifiabilité locale en un vecteur de paramètre p_0 sont :

- Calculer les paramètres de Markov
- Calculer $(J(G))$ la Jacobienne de G , qui est constituée des dérivées partielles de G par rapport aux paramètres, en p_0 .

$$J(G) = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_{p=p_0}\tag{1.4.18}$$

- Calculer le rang de la Jacobienne de G.

Théorème 3 Si le rang $(J(G)) = q$ avec q est le nombre de paramètres à identifier alors la structure est localement identifiable en p_0 .

1.4.2.1 Exemple

On considère un système (figure 1.7) qui présente une pièce chauffée par un radiateur et a un échange de température avec l'extérieur. Les entrées du système sont la température extérieure T_{ext} , le flux d'air Q_s reçu par la fenêtre et la puissance fournie à la pièce par le radiateur Q_{ch} .

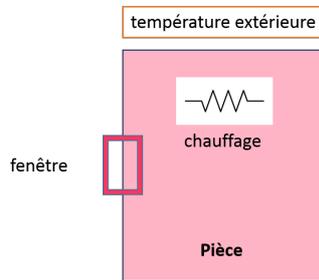


FIGURE 1.7 – Le système étudié

Le système peut être représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_{air} \\ \dot{T}_{mur} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_{air} \\ T_{mur} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} Q_{ch} \\ Q_s \\ T_{ext} \end{pmatrix} \quad (1.4.19)$$

$$T_{air} = C \begin{pmatrix} T_{air} \\ T_{mur} \end{pmatrix}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -(\frac{1}{p_2 p_1} + \frac{1}{p_2 p_3}) & \frac{1}{p_2 p_3} \\ \frac{1}{p_5 p_3} & -(\frac{1}{p_5 p_3} + \frac{1}{p_5 p_4}) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_2} & \frac{1}{p_2 p_1} & p_6 \\ 0 & \frac{1}{p_5 p_4} & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.20)$$

Les paramètres à identifier sont $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. Le nombre q de paramètres à identifier dans ce système est égal à 6.

Le rang de la jacobienne de G $(J(G))$ est égal à $4 \neq 6$ ce qui montre que ce modèle est non identifiable.

1.4.3 Méthode des paramètres de la fonction de transfert

Pour cette méthode (Decotte and Dauphin Tanguy, 2002), on considère la fonction de transfert suivante :

$$T_F(s) = \frac{b_1 s^{n_y-1} + \dots + b_{n_y-1} s + b_{n_y}}{s^{n_x} + a_1 s^{n_x-1} + \dots + a_{n_x-1} s + a_{n_x}} \quad (1.4.21)$$

Pour vérifier l'identifiabilité globale du modèle associé à cette fonction de transfert on considère le vecteur F construit à partir des coefficients de la fonction de transfert comme suit :

$$F(p) = \left[b_1 \quad \dots \quad b_{n_y-1} \quad b_{n_y} \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_x-1} \quad a_{n_x} \right] \quad (1.4.22)$$

On définit les deux variables suivantes :

- c_f : le nombre de coefficients de la fonction de transfert $T_F(s)$
- q : le nombre de paramètres à identifier

On distingue 2 cas :

- Si $c_f < q$ alors le système est non identifiable.
- Si $c_f \geq q$ alors on utilise la méthode des paramètres de Markov pour tester l'identifiabilité

1.4.3.1 Exemple

Reprenons l'exemple précédent (1.4.20). On calcule la matrice de transfert du modèle (M_T) par rapport aux 3 entrées :

$$M_T = \begin{pmatrix} T_{F1} & T_{F2} & T_{F3} \end{pmatrix} \quad (1.4.23)$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{F1} &= \frac{p_1 p_4}{\Delta} \\ T_{F2} &= \frac{(p_1 + p_3 + p_4) + (p_1 p_2 p_3) s}{\Delta} \\ T_{F3} &= \frac{p_1 p_2 p_4 p_6}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= f_1 + f_2 s + f_3 s^2 \\
 f_1 &= p_1 + p_3 + p_4 \\
 f_2 &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5 \\
 f_3 &= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5
 \end{aligned} \tag{1.4.25}$$

Rappelons que le nombre q de coefficients à identifier est égal à 6. A partir des fonctions de transfert calculées, on peut déterminer les vecteurs de leurs coefficients F_1 , F_2 et F_3 :

$$F_1 = \begin{bmatrix} (p_1 p_4) & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{f_1} = 4 < 6$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} (p_1 + p_3 + p_4) & (p_1 p_2 p_3) & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{f_2} = 5 < 6$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} (p_1 p_2 p_4 p_6) & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{f_3} = 4 < 6$$

donc on peut conclure que le système est non identifiable, ce qui confirme le résultat trouvé par la méthode des paramètres de Markov.

1.4.4 Méthode des similarités

Dans cette thèse, nous allons utiliser la méthode des similarités (similarity transformation approach) décrite dans (Vajda S, 1989) et (Van Den Hof, 1998) pour vérifier l'identifiabilité structurelle d'un modèle représenté par sa représentation d'état.

La méthode des similarités ou l'approche des réalisations minimales est basée sur le théorème des équivalences algébriques. Elle n'est utilisée que si le système est minimal, c'est-à-dire que si il est commandable et observable. Cette méthode consiste à trouver une transformation linéaire T , telle que $T(x) = \tilde{x}$. Le nombre des solutions en (T, p) , vérifiant le système (1.4.26) conduit à l'identifiabilité structurelle globale ou à leur non identifiabilité.

Théorème 4 (Van Den Hof, 1998) *Le système (1.1.1), structurellement commandable et observable, est structurellement globalement identifiable si et seulement si, pour toute paramétrisation p et \tilde{p} et une matrice non singulière $T \in R^{n_x \times n_x}$, telle que :*

$$\begin{cases}
 TA(p) = A(\tilde{p})T \\
 TB(p) = B(\tilde{p}) \\
 C(\tilde{p})T = C(p)
 \end{cases} \tag{1.4.26}$$

alors la seule solution à la résolution du système (1.4.26) est $T = \text{Id}$ et $p = \tilde{p}$.

1.4.4.1 Exemple 1

Reprenons toujours le même exemple (1.4.20). On définit la matrice $T \in R^{2 \times 2}$ (puisque $n_x = 2$) comme suit :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Commençons par la dernière équation qui est la plus simple à résoudre :

$$C(\tilde{p})T = C(p) \tag{1.4.27}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que $t_{21} = 0$ et $t_{22} = 1$.

Pour la deuxième équation on obtient ces égalités matricielles :

$$TB(p) = B(\tilde{p})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_2} & \frac{1}{p_2 p_1} & p_6 \\ 0 & \frac{1}{p_5 p_4} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{p}_2} & \frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_1} & \tilde{p}_6 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{p}_5 \tilde{p}_4} & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{t_{11}}{p_2} & \frac{t_{11}}{p_2 p_1} + \frac{t_{12}}{p_5 p_4} & t_{11} p_6 \\ 0 & \frac{1}{p_5 p_4} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{p}_2} & \frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_1} & \tilde{p}_6 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{p}_5 \tilde{p}_4} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

Avec ces égalités, on ne peut rien conclure sur les valeurs des variables de la matrice T . On remarque que $p_5 p_4 = \tilde{p}_5 \tilde{p}_4$

La première équation nous donne ces égalités :

$$TA(p) = A(\tilde{p})T$$

$$\begin{aligned} -t_{11} \left(\frac{1}{p_2 p_1} + \frac{1}{p_2 p_3} \right) + \frac{t_{12}}{p_5 p_3} &= -t_{11} \left(\frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_1} + \frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_3} \right) \\ \frac{t_{11}}{p_2 p_3} - t_{12} \left(\frac{1}{p_5 p_3} + \frac{1}{p_5 p_4} \right) &= -t_{12} \left(\frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_1} + \frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_3} \right) \\ \frac{1}{p_5 p_3} &= \frac{t_{11}}{\tilde{p}_5 \tilde{p}_3} \\ - \left(\frac{1}{p_5 p_3} + \frac{1}{p_5 p_4} \right) &= \frac{t_{12}}{\tilde{p}_5 \tilde{p}_3} - \left(\frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_1} + \frac{1}{\tilde{p}_2 \tilde{p}_3} \right) \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

On remarque que $p_5 p_3 = \tilde{p}_5 \tilde{p}_3$. On peut trouver plus qu'une solution à cette équation.

On peut également remarquer qu'on ne peut rien conclure sur les valeurs de t_{11} et t_{12} . Ainsi d'après le théorème 4 le système (1.4.20) n'est pas identifiable. D'où on retrouve le résultat des deux méthodes précédentes.

1.4.4.2 Exemple 2

Considérons l'exemple simple décrit par les matrices d'état suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.30)$$

Les paramètres à identifier sont regroupés dans le vecteur $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$.

La dernière équation du théorème 4 nous donne ces résultats :

$$C(\tilde{p})T = C(p) \quad (1.4.31)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que $t_{21} = 0$ et $t_{22} = 1$.

Passons maintenant à la deuxième équation :

$$TB(p) = B(\tilde{p}) \quad (1.4.32)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12}p_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{p}_1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que $p_1 = \tilde{p}_1$ et $t_{12} = 0$.

Grace à la première équation on a :

$$TA(p) = A(\tilde{p})T \quad (1.4.33)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_{11}p_1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ \tilde{p}_2 t_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

Cela nous permet de conclure que $t_{11} = 1$ et $p_2 = \tilde{p}_2$.

Donc finalement on obtient : $T = I_d$ et $p = \tilde{p}$. Ainsi, on peut déduire en utilisant le théorème 4 que le système (1.4.30) est structurellement globalement identifiable.

L'un des principaux objectifs de la vérification de l'identifiabilité structurelle est d'étudier le nombre de solutions (valeurs du vecteur des paramètres p) qui permettent de minimiser un critère d'optimalité compte tenu de la structure et des observations provenant du

système réel (processus). Cette démarche vise en particulier à écarter les structures non identifiables, c'est-à-dire qui admettent plusieurs solutions et qui posent le problème de choix de la solution du problème d'identification.

1.5 Identification paramétrique

1.5.1 Définition

L'identification consiste à déterminer un modèle à partir du comportement entrée/sortie du système (figure 1.8). Le modèle obtenu doit reproduire le comportement du système dans toutes les conditions utiles pour le fonctionnement du système.

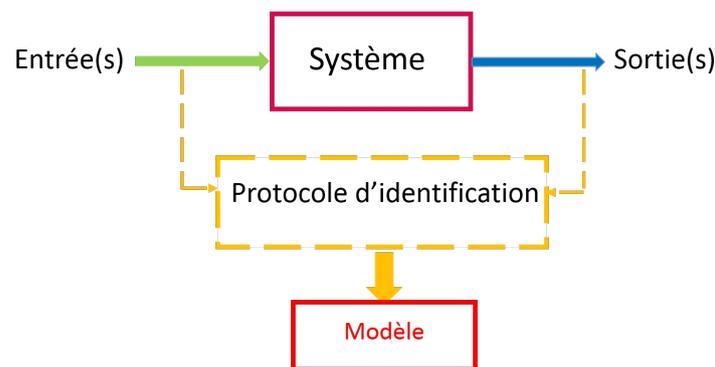


FIGURE 1.8 – Schéma explicatif de l'identification

L'obtention d'une solution unique au problème d'identification repose généralement sur la structure du modèle choisie et les données recueillies qui doivent être suffisamment riches pour déterminer de manière précise les paramètres de cette structure.

Généralement, les méthodes d'identification de systèmes sont employées pour construire des modèles permettant la synthèse de lois de commande. Cependant, ce domaine d'utilisation conventionnel n'est pas le seul. En effet, l'identification est utilisée pour :

- l'estimation de paramètres physiques qui ne sont pas directement mesurables
- le diagnostic des systèmes
- la simulation, utilisée à des fins de conception, de prévision ou de formation
- l'interprétation des essais.

1.5.2 Procédure d'identification

Pour avoir un modèle pertinent, il est important d'exciter le système (processus) avec toutes les fréquences de sa plage de fonctionnement. Le signal d'entrée appliqué doit donc posséder un large spectre (être riche en fréquences). En général, c'est un signal de type bruit blanc ou qui possède ses caractéristiques. En pratique, on peut appliquer un signal périodique pseudo-aléatoire (PRBS) ou autre.

Dans le cas MIMO (plusieurs entrées/plusieurs sorties), il est important d'appliquer des signaux décorrélés pour ne pas introduire de biais d'identification. Il est important de respecter une procédure rigoureuse pour identifier un procédé.

La procédure de l'identification comporte 9 étapes ([Landau, 1993](#)) (figure 1.9) :

- la détermination d'un protocole de test : définir les conditions expérimentales en faisant une étude sur les propriétés statistiques des signaux d'entrée pour balayer toutes les fréquences intéressantes, le nombre de points de mesures nécessaire pour le test, ...
- le choix de la structure du modèle : choisir le type de modèle étudié et définir les relations expliquant le fonctionnement du système.
- la collecte des données : collecter des mesures des grandeurs d'entrées et de sorties.
- le choix du critère d'estimation paramétrique : choisir un critère de performance (exemple : minimiser l'erreur de sortie : la différence entre la sortie du modèle et celle du système).
- le choix de l'algorithme d'optimisation : choisir un algorithme d'optimisation qui minimise le critère utilisé (moindres carrés, méthode de Gauss-Newton, ...).
- le choix des données d'estimation : fixer un intervalle de données pour l'estimation.
- le choix des données de validation : fixer un intervalle de données différent du précédent, pour la validation du modèle trouvé.
- l'estimation paramétrique : déterminer les valeurs des paramètres qui permettent de satisfaire le critère de performance choisi.
- la validation du modèle : tester la qualité de l'estimation du modèle en le simulant à partir de jeux de données d'entrées/sorties différents. Cette étape est importante et permet de consolider les choix faits pour l'identification ou d'invalider le modèle. Plusieurs aspects peuvent invalider le modèle comme par exemple avoir des valeurs inadmissibles pour des paramètres physiques (résistance négative,...), ou le caractère prédictif (une séquence d'entrée différente appliquée au modèle ne permet pas d'ap-

procher la sortie mesurée).

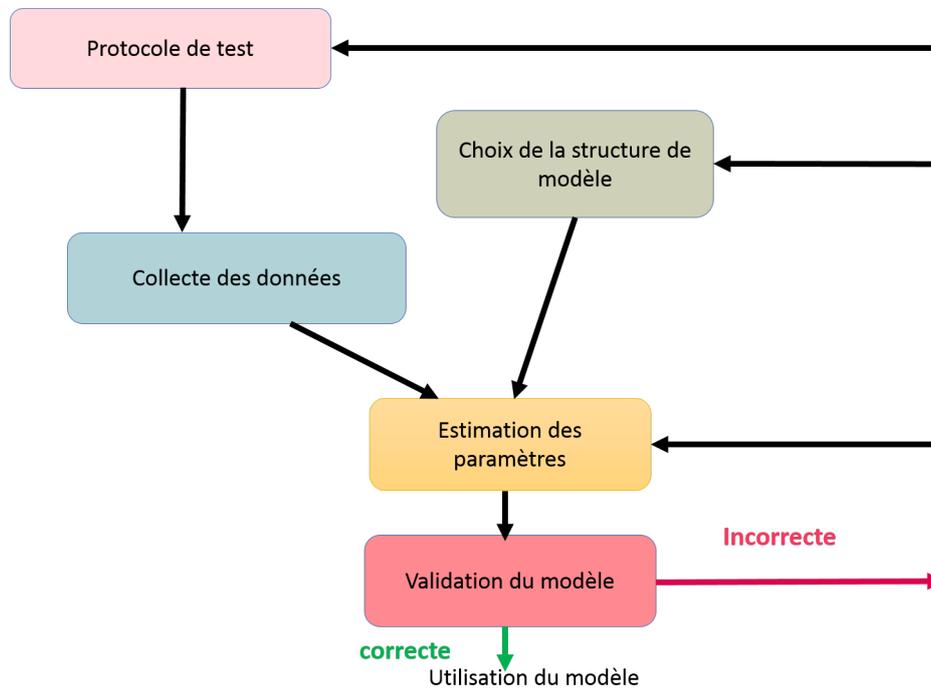


FIGURE 1.9 – Procédure générale de l'identification

1.5.3 Identification paramétrique des modèles à temps continu

Il existe plusieurs méthodes d'identification paramétrique. Ces méthodes diffèrent selon le modèle utilisé (à temps continu ou à temps discret). De nombreuses études se sont intéressées à l'identification des modèles à temps discret à cause du progrès technique dans l'informatique et du matériel de mesure numérique. Cependant, dans certains cas, comme par exemple la surveillance et le diagnostic, les méthodes d'identification à temps continu sont plus intéressantes, car elles permettent d'avoir des modèles dont les paramètres peuvent avoir une interprétation physique. En effet ces méthodes possèdent plusieurs avantages (Young, 1981) :

- une indépendance par rapport à la période d'échantillonnage,
- la possibilité de les utiliser dans le cas où la période d'échantillonnage n'est pas constante,
- les paramètres du modèle sont fortement liés aux propriétés physiques du système.

L'identification à temps continu peut être effectuée avec deux approches (H.Mensler, 1999) :

- approche directe : cette approche consiste à estimer les paramètres du modèle directement sous la forme du modèle à temps continu,
- approche indirecte : cette approche consiste à identifier un modèle discrétisé puis une opération de conversion est utilisée pour retrouver les paramètres physiques. Cette approche indirecte basée sur l'estimation initiale d'un modèle à temps discret utilise généralement des algorithmes d'optimisation itératifs très coûteux en termes de calculs sans garantie de convergence vers l'optimum global.

On trouve dans la littérature plusieurs publications et ouvrages qui ont étudié et présenté des approches d'identification de modèles à temps continu tels que (Vajda et al., 1987), (Garnier et al., 2003), (Mu et al., 2015) et (Garnier, 2015). Ces méthodes d'identification de modèles paramétriques linéaires à temps continu se basent essentiellement sur la minimisation d'un critère de performance fondé soit sur une erreur de sortie (output error) qui consiste à considérer qu'un bruit agit sur la sortie du système (processus), soit sur une erreur d'équation (equation error) qui consiste à considérer qu'un bruit agit sur l'état du système (processus).

La méthode à erreur d'équation : Le principe des méthodes à erreur d'équation est présenté dans la figure (1.10). L'entrée et la sortie sont mesurées afin de créer un modèle prédictif. Les sorties mesurées $y(t)$ et prédites $\hat{y}(t)$ sont comparées afin de minimiser la norme de l'erreur d'équation $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$.

Cette méthode est basée sur les algorithmes des moindres carrés classiques (Young, 1981). L'un des avantages de ce type de méthode est la facilité de mise en œuvre mais elle exige la linéarité du modèle vis-à-vis des paramètres. Son inconvénient principal est l'introduction de biais sur l'estimation (Ljung, 1999).

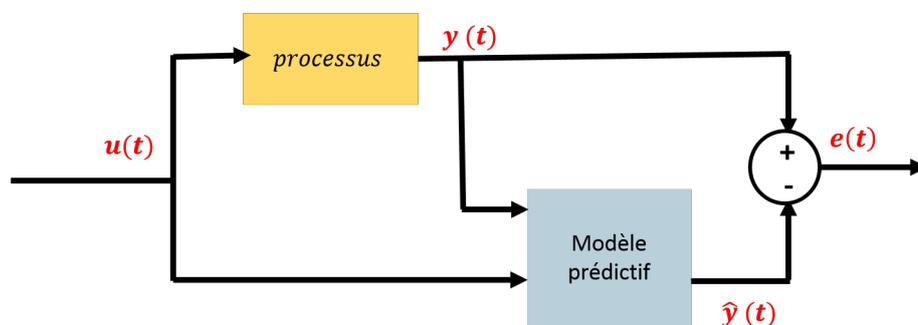


FIGURE 1.10 – Erreur d'équation

La méthode à erreur de sortie : Cette méthode est basée sur la comparaison de la sortie d'un processus et celle d'un modèle dont on cherche à estimer les valeurs de ses paramètres (figure 1.11). Les approches basées sur l'erreur de sortie utilisent les notions de programmation non linéaire (Verhaegen and Dewilde, 1992).

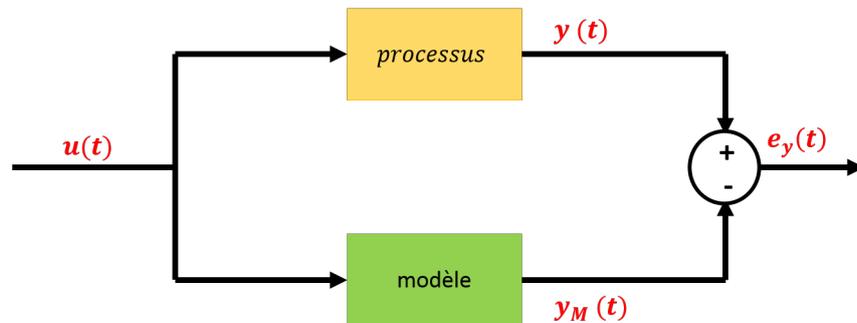


FIGURE 1.11 – Erreur de sortie

Nous proposons de présenter dans le paragraphe suivant deux approches d'identification paramétrique de modèles à temps continu basées sur les méthodes d'erreur d'équation et d'erreur de sortie.

1.5.4 Approches d'estimation paramétrique de modèles à temps continu

Dans ce paragraphe, nous ne présentons brièvement que deux approches très utilisées pour l'identification directe de modèles paramétriques à temps continu :

- la méthode des filtres de variables d'état (FVE) (Unbehauen.H and Rao.G.P, 1990)
- la méthode de l'erreur de sortie pour les modèles à temps continu (COE) (Sinha.N.K and Rao.G.P, 1991)

1.5.4.1 La méthode des filtres de variables d'état (FVE)

La méthode des filtres de variables d'état se décompose en deux étapes (Garnier et al., 2016) :

- la première étape consiste à appliquer un filtrage linéaire aux données échantillonnées afin de reconstruire les dérivées successives des signaux d'entrée/sortie. Cette étape est spécifique aux approches d'identification de modèles à temps continu de type erreur d'équation.
- la seconde étape est dédiée à l'estimation paramétrique à l'aide de techniques d'estimation de type moindres carrés.

1.5.4.2 La méthode de l'erreur de sortie (COE)

Cette méthode repose sur la minimisation de l'erreur de sortie COE (Continuous-time Output Error method). Cette méthode se distingue de celle fondée sur une erreur d'équation par sa signification physique et sa sensibilité plus importante aux erreurs de structure de modèles et aux valeurs des paramètres (Garnier et al., 2016). La mise en œuvre de cette méthode est plus délicate à cause de la non-linéarité de l'erreur de sortie par rapport aux paramètres.

La méthode de l'erreur de sortie (COE) consiste à exploiter les propriétés locales du critère au voisinage d'un point courant dans l'espace des paramètres pour en déduire un point suivant meilleur au sens du critère à minimiser. Les algorithmes de Gauss-Newton, de Levenberg-Marquardt sont les plus utilisés. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut consulter les références (Walter and Pronzato, 1997) et (Soderstrom.T, 1983).

1.6 Conclusion

Ce chapitre a été principalement dédié aux notions structurelles d'un modèle : en effet, le choix d'un modèle ou d'une structure est une étape nécessaire pour étudier et analyser le comportement d'un système. Ce choix nous permet de caractériser notre système sans passer par les mesures. Cette caractérisation est faite grâce aux propriétés structurelles qui permettent de détecter certains défauts des structures envisagées avant d'avoir recours aux données mesurées.

Nous avons focalisé sur une propriété structurelle importante qui est l'identifiabilité : cette propriété consiste à étudier l'unicité d'une solution à l'estimation des paramètres d'une structure de modèle dans un cadre idéal indépendamment des données (les signaux entrée-sortie sont non-bruités, les entrées et les instants de mesure peuvent être choisis librement). Nous avons présenté quelques approches de vérification de l'identifiabilité structurelle pour les modèles linéaires, chaque méthode a été illustrée par un exemple simple.

Une fois que, nous avons montré l'identifiabilité du système étudié, on peut passer à l'étape de l'identification paramétrique qui a pour objet l'estimation des paramètres des modèles obtenus dans les étapes précédentes : dans cette partie du chapitre, nous avons présenté tout d'abord la procédure d'identification en général puis nous nous sommes

intéressés aux approches d'identification directe des modèles à temps continu. Ces méthodes permettent de fournir un modèle directement interprétable physiquement, de faciliter la mise en œuvre de la procédure de l'identification des systèmes et de pouvoir traiter le cas de données échantillonnées à pas variable.

L'étude de propriétés structurelles et de l'identification paramétrique s'avère plus compliquée lorsque la taille du système augmente (le nombre des paramètres, le nombre des variables d'état, le nombre des entrées-sorties...). Ainsi, nous proposons d'étudier au chapitre suivant, quelques structures des systèmes de grande taille présentées dans d'autres travaux et de nous intéresser aux problèmes d'identifiabilité et d'identification. Nous présenterons par la suite les structures envisagées dans cette thèse.

Chapitre 2

Systemes de grande taille

*La taille ne fait pas tout. La
baleine est en voie d'extinction
alors que la fourmi se porte bien
De Bill Vaughan*

Sommaire

2.1	Présentation du chapitre	35
2.2	Généralités	36
2.2.1	Définitions générales	37
2.2.2	Problèmes liés à la grande taille du système	38
2.2.3	Méthodes de simplification des systèmes de grande taille	38
2.3	Les méthodes d'identification des systèmes de grande taille	40
2.4	Modèles interconnectés	42
2.4.1	Modèles interconnectés de type 1	44
2.4.2	Modèles interconnectés de type 2	45
2.4.3	Modèles interconnectés type 3	50
2.5	Conclusion	53

2.1 Présentation du chapitre

Les systèmes de grande taille apparaissent dans des domaines diversifiés tel que les systèmes de production d'énergie (raffineries, centrales thermiques et nucléaires), les

réseaux de transport (aérien, routier, maritime), les grandes structures spatiales (panneaux solaires, antennes, télescopes,...), les bâtiments

Nous trouvons dans la littérature plusieurs définitions possibles des systèmes de grande taille. La variété des définitions repose sur la variété de ces systèmes et les objectifs envisagés de leur étude (la commande, les caractéristiques intrinsèques du système, ...).

L'analyse de ce type de systèmes est très difficile et nécessite un raisonnement particulier. En effet les méthodes classiques se montrent insuffisantes pour des raisons numériques (encombrement de mémoire prohibitif, temps de calcul énorme,...).

Le problème de la taille des systèmes se pose également pour l'identification paramétrique. En effet l'identification des systèmes dynamiques peut devenir très difficile à résoudre si la taille augmente, en raison de leur complexité. L'étude de leurs propriétés structurelles et l'estimation de leurs paramètres est plus compliquée par exemple .

Pour résoudre ce problème et ces difficultés d'analyse des systèmes de grande taille, deux grandes techniques sont possibles qui sont la réduction des modèles associés à ces systèmes ou la décomposition du grand système en un ensemble de sous-systèmes simples (Mesarovic et al. (1970)). Les premiers travaux dans ce domaine, sont surtout ceux présentés dans (J.Bernussou and A.Titli, 1982) et (Siljak, 1991).

Nous proposons dans la première partie de ce chapitre, de présenter des généralités qu'on peut trouver dans la littérature sur les systèmes de grande taille et les difficultés rencontrées dans leur étude.

Nous présentons dans la deuxième partie les techniques utilisées pour simplifier l'étude des systèmes de grande taille et quelques approches d'analyse de leur identification paramétrique soulignées par des articles.

La troisième partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation des différentes structures étudiées dans cette thèse.

2.2 Généralités

Nous allons d'abord extraire de la littérature quelques définitions des systèmes de grande taille. Nous proposons, par la suite, de les classer dans 3 groupes.

2.2.1 Définitions générales

Ces définitions sont extraites principalement des ouvrages de (J.Bernussou and A.Titli, 1982), (Siljak, 1991) et (F.Claveau, 2005)

Définition 7 *Grand système*

Un "grand système" est un système nécessitant pour des raisons conceptuelles ou numériques une décomposition en un nombre fini de sous-systèmes interconnectés (Siljak, 1991).

Définition 8 *Grand système*

Un "grand système" est un système dont la dimension (vecteurs d'état, d'entrée, de sortie) est trop grande pour être prise en compte par les approches classiques de modélisation, analyse et commande qui échouent à donner des résultats cohérents en un temps raisonnable (F.Claveau, 2005).

Définition 9 *Grand système*

Un système que l'on choisit de voir comme un ensemble de sous-systèmes interagissant pour des raisons de fiabilité, flexibilité robustesse, coût, ... (Mansouri et al., 2013).

Définition 10 *Grand système*

Un système qui présente les trois caractéristiques suivantes, rendant sa manipulation délicate (en analyse et en commande) : grande dimension (nombre d'entrées /sorties / états), présence d'incertitudes, et contraintes sur la structure des flux d'information (Siljak, 1991).

On peut remarquer l'existence de plusieurs définitions des systèmes de grande taille. La variété des définitions repose sur la variété de ces systèmes et les objectifs envisagés de leur étude (la commande, l'identification paramétrique ...). Dans cette thèse nous nous intéresserons aux systèmes de grande taille et qui peuvent être décomposés en un ensemble de sous-systèmes interconnectés.

La complexité de l'étude des systèmes de grande taille est liée principalement à la dimension du système (nombre des états, des variables d'entrée/sortie, des paramètres). L'ampleur de cette taille évoque plusieurs problèmes.

2.2.2 Problèmes liés à la grande taille du système

Les problèmes fondamentaux des systèmes de grande taille sont :

- **Un encombrement de mémoire prohibitif** : ce problème est dû au nombre élevé de paramètres, ce qui complique par exemple l'identification paramétrique et/ou le nombre de données entrées/sorties. La grande quantité de ces informations entraîne un problème de mémorisation de données et ainsi un problème de la capacité du calculateur.
- **Le temps de calcul ou d'exécution** : qui croît très rapidement avec la dimension du système et peut être ennuyeux dans certaines applications (F.Claveau, 2005). Ce temps est très important malgré l'évolution très rapide de la puissance des ordinateurs.
- **La présence de contraintes de décentralisation** : ce problème est rencontré dans les systèmes distribués géographiquement.
- **Les interconnexions entre les sous-systèmes** : il est difficile de modéliser les systèmes complexes de grande taille en présence d'interconnexions entre les sous-systèmes.
- **La présence de dynamiques très différentes** qui entraîne des problèmes numériques importants.

Pour résoudre ces problèmes, les solutions proposées dans la littérature se basent généralement sur 2 techniques : la réduction de modèle et la décomposition du système ou du modèle. Ces 2 méthodes seront expliquées dans le paragraphe suivant.

2.2.3 Méthodes de simplification des systèmes de grande taille

Les méthodes de **réduction** et de **décomposition** du système ou du modèle consistent en général à considérer en première étape un système ou un modèle compliqué et à en déduire en deuxième étape des sous-systèmes ou des sous-modèles simplifiés qui puissent néanmoins décrire convenablement le comportement du système étudié.

2.2.3.1 La réduction de modèle

Pour des raisons souvent plus numériques que théoriques, il est difficile de travailler avec un modèle d'ordre élevé (la synthèse d'un correcteur par exemple). Ainsi, il est important d'obtenir un modèle d'ordre peu élevé. C'est ce que l'on appelle une réduction de modèle.

Cette méthode consiste à remplacer le modèle initial par un modèle de dimension plus petite, qui conserve certaines des caractéristiques les plus importantes, afin d'utiliser des méthodes connues. Elle se justifie par exemple pour réaliser des simulations en temps réel sur des petits ordinateurs (simulateurs industriels d'entraînement, commande prédictive).

Il existe plusieurs méthodes de réduction telles que :

- la réduction par technique modale : elle consiste à déduire une réalisation d'ordre réduit à partir de la réalisation initiale en procédant à une diagonalisation du modèle en ne gardant que les modes les plus significatifs.
- la réduction par transformation équilibrante : c'est la méthode la plus utilisée. le principe est de supprimer certains états ou, au moins, de négliger leur dynamique, de manière à rester le plus fidèle possible au comportement entrée/sortie du modèle initial.

Pour plus de détails sur les méthodes de réduction, le lecteur peut consulter l'ouvrage (D.Mehdi, 1993) et l'article (B.Moore, 1981).

Dans nos travaux, nous n'allons pas utiliser la méthode de réduction mais la méthode de décomposition.

2.2.3.2 La décomposition du système ou du modèle

Cette méthode consiste à mettre en évidence des sous-systèmes plus petits qui sont couplés entre eux.

La décomposition d'un grand système est faite généralement selon des considérations physiques, géographiques ou fonctionnelles.

La décomposition d'un modèle présentant un système de grande taille peut être faite selon des considérations mathématiques.

- **décomposition physique** : dans ce cas, le système est décomposé en des parties géographiquement distinctes, chaque partie ou groupe de parties est considéré comme un sous-système, ou en un ensemble de petits blocs selon leurs rôles fonctionnels (zone de ventilation, zone de météo, zone de l'enveloppe de bâtiment...) (Y. Lin and Baroah, 2012). La figure (2.1) présente un exemple de cette décomposition.
- **décomposition mathématique** : dans ce cas, on n'a pas une idée sur les différents composants physiques du système, ainsi on découpe le modèle associé uniquement dans le but d'avoir un partitionnement permettant de simplifier (numériquement)

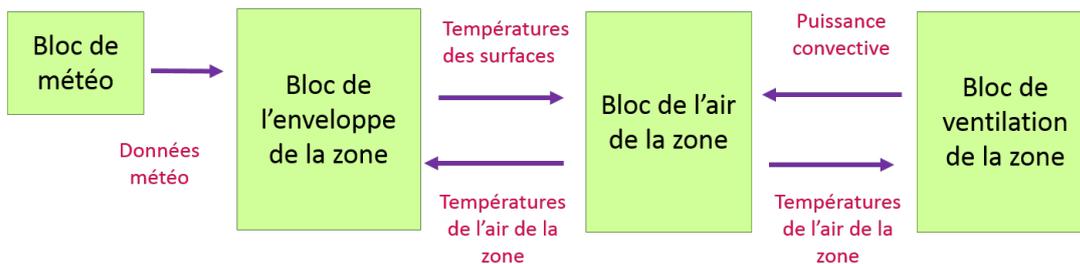


FIGURE 2.1 – Exemple de décomposition fonctionnelle

l'analyse du système (commande, identification,...). C'est ce qu'on appelle "La structuration du modèle".

2.3 Les méthodes d'identification des systèmes de grande taille

Le problème de la taille des systèmes se pose également pour l'identification paramétrique.

Plusieurs articles ont proposé différentes approches pour résoudre le problème de l'identification paramétrique des systèmes de grande taille. Ces approches diffèrent selon le système étudié.

L'article (Hiskens and Koeman, 1999) propose une méthode qui consiste dans une première étape à déterminer l'ensemble de paramètres des sous-systèmes qui donnent un meilleur ajustement entre les mesures et la réponse du modèle (de chaque sous-système) et à construire dans une deuxième étape un modèle du grand système en négligeant les interactions entre les sous-systèmes.

L'article (Dehghani and Abir, 2008) traite l'identification des paramètres d'un système d'alimentation électrique et suggère une méthode hiérarchique pour l'identification des paramètres du modèle. En effet, la structuration hiérarchique (figure 2.2) offre une approche efficace pour l'identification des systèmes de grande taille. En général, l'identification sera partagée entre deux niveaux (une unité supérieure et des unités inférieures) : par un choix approprié des variables de coordination, le grand système est découpé en plus petits sous-systèmes (unités inférieures). Chaque unité inférieure exécute son identification indépendamment et retourne à l'unité supérieure les informations nécessaires pour mettre à jour les variables de coordination.

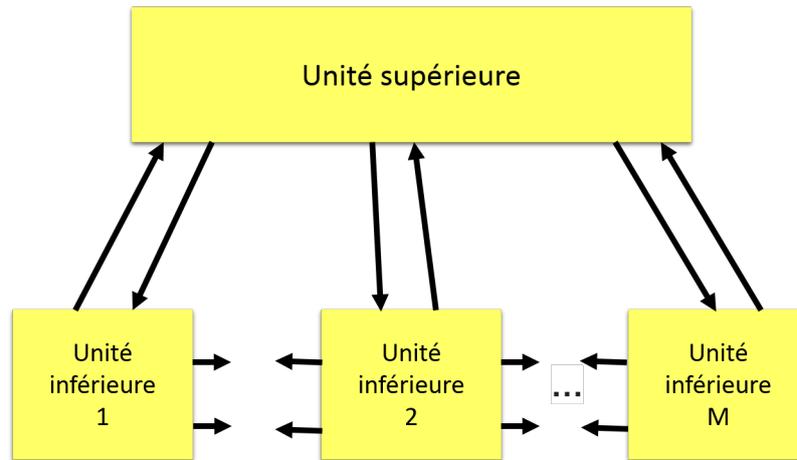


FIGURE 2.2 – Une structure hiérarchique à deux niveaux

Les auteurs de l'article ([Haber and Verhaegen, 2014](#)) proposent un algorithme d'identification décentralisée (decentralized subspace algorithm) des systèmes interconnectés décrits par des modèles d'état à temps discret (sparse (multi) banded system matrices). Ils prouvent que l'état d'un sous-système local peut être approché par une combinaison linéaire des entrées et sorties des sous-systèmes qui sont dans son voisinage et développent un algorithme d'identification qui identifie les sous-systèmes locaux à partir des données locales entrées/sorties. Il y a d'autres articles qui se sont intéressés à l'étude de l'identification des structures particulières des systèmes de grande taille comme les systèmes circulaires (circulant systems). En effet, l'article ([Massioni and Verhaegen, 2008](#)) réduit la complexité de cette étude en profitant d'une propriété importante de ce type de systèmes qui est la possibilité de les décomposer en un ensemble de sous-systèmes plus simples à travers une transformation d'état.

L'article ([Samar et al., 2007](#)), présente une approche d'estimation distribuée en utilisant des algorithmes d'optimisation convexe. Cette méthode est basée sur une décomposition duale (dual decomposition).

Toutefois, ces méthodes nécessitent un grand nombre d'opérations et peuvent diverger si la dimension des sous-systèmes est très grande. De ce fait, on a cherché dans cette thèse à développer une procédure d'identification décentralisée en profitant de **la structure** des modèles étudiés et en se basant sur des **études d'identifiabilité**. Cette procédure satisfait les performances globales à moindre coût (précision des paramètres, temps d'exécution,...).

Les structures des modèles étudiés seront présentées dans le paragraphe suivant.

2.4 Modèles interconnectés

La modélisation des processus physiques repose souvent sur la décomposition des systèmes étudiés en sous systèmes élémentaires interconnectés (exemple : un train avec un grand nombre de véhicules interconnectés (figure 2.3)). Le processus de chaque sous-système est alors modélisé. Le modèle global du système est ainsi un ensemble de modèles interconnectés (Scorletti, 1997).



FIGURE 2.3 – Une chaîne composée d’un ensemble de véhicules identiques se déplaçant sur une ligne droite

On s’intéresse principalement dans notre étude à la modélisation linéaire dans l’espace d’état des systèmes interconnectés. Nous nous limiterons ainsi dans tout le manuscrit au contexte des systèmes linéaires interconnectés, invariants dans le temps.

On considère ainsi un grand système Σ composé de M sous-systèmes Σ_i et décrit par la représentation d’état (2.4.1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Avec :

x est le vecteur d’état du grand système, u et y sont respectivement le vecteur des entrées et des sorties du Σ et A , B et C sont respectivement la matrice de la dynamique, la matrice de commande et la matrice d’observation.

On peut distinguer 3 types de modèles interconnectés (selon la répartition des variables d’état)

- **modèles interconnectés de type 1** : modèles qui se composent d’un ensemble de sous-modèles Σ_i parfaitement partitionnés selon les variables d’état (x_i). Ces sous modèles peuvent être connectés par les entrées, les sorties et/ou les états. Un exemple de ces modèles est représenté par la figure 2.4.

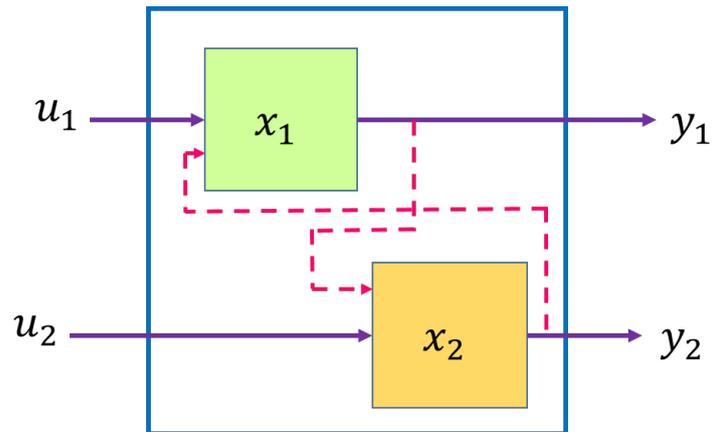


FIGURE 2.4 – Exemple d'un modèle interconnecté de type 1 (couplage par les sorties)

- **modèles interconnectés de type 2** : modèles qui se composent d'un ensemble de sous-modèles Σ_i non parfaitement partitionnés, c'est-à-dire, il existe des états x_c non naturellement affectés aux sous-systèmes. Un exemple de ces modèles est représenté par la figure 2.5.

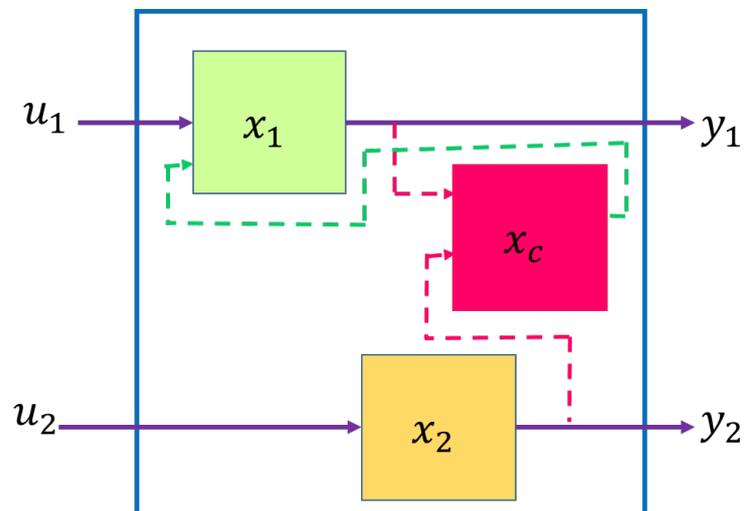


FIGURE 2.5 – Exemple d'un modèle interconnecté de type 2

- **modèles interconnectés de type 3** : modèles interconnectés de type 1 ou de type 2 avec un grand nombre de variables d'état mais un faible nombre d'entrées/sorties (exemple : aérospatial).

2.4.1 Modèles interconnectés de type 1

Dans ce cas de modèle, les vecteurs des variables d'état, des entrées et des sorties du grand système sont réparties comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

Ces sous-modèles peuvent être interconnectés soit par un couplage par les sorties et/ou un couplage par les entrées et/ou un couplage par les états. Chacun des sous-modèles est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{ii}x_i(t) + B_{ii}u_i(t) + \sum_{j \neq i} (A_{ij}x_j(t) + B_{ij}u_j(t)) \\ y_i(t) &= C_{ii}x_i(t) + \sum_{j \neq i} (C_{ij}x_j(t)) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

où : les matrices A_{ij}, B_{ij} et C_{ii} représentent l'influence du sous-système Σ_j sur le sous-système Σ_i .

Couplage par les entrées

Pour ce couplage, on annule dans le modèle les matrices A_{ij} et C_{ij} . Ainsi chaque sous-système est décrit par l'équation suivante :

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_{ii}u_i + \sum_{j \neq i} B_{ij}u_j \\ y_i = C_{ii}x_i \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Couplage par les sorties

Pour ce couplage, on annule cette fois les matrices B_{ij} et C_{ij} . Dans ce cas, la matrice $A_{ij} = K_{ij}C_j$. Ainsi chaque sous-système est décrit par l'équation suivante :

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_{ii}u_i + B_{ic}u_c + \sum_{j \neq i} K_{ij}C_jx_j \\ y_i = C_{ii}x_i \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Pour la décomposition de ces modèles, on utilise généralement des outils de structuration basés sur une approche entrée/sortie. Cette méthode consiste à partitionner les vecteurs d'entrées u et de sorties y du système global en M sous-vecteurs (équation (2.4.2)). Ensuite, on peut composer toutes les paires (u_i, y_i) ($i = 1 \dots M$) des sous-systèmes, ce qui nous permet d'extraire le modèle décentralisé.

2.4.2 Modèles interconnectés de type 2

Considérons l'exemple suivant des modèles interconnectés de type 2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_c \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_c \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \\ x_3 \end{bmatrix}$$

On peut classiquement discerner $N = 3$ sous-systèmes. Une autre possibilité consiste à distinguer deux sous-systèmes qui possèdent un recouvrement : ils partagent un ensemble d'états (x_c), et/ou d'entrées et/ou de sorties, (u_c et y_c). Cette voie est justifiée physiquement, si l'on considère l'exemple des réseaux électriques, certains processus industriels comme les systèmes d'entraînement de bande (D. Knittel, 2002), les télescopes (K. Li, 1999), ou bien encore les trains de véhicules (Ikeda and Siljak, 1986).

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un cas particulier de ce type de modèles : le grand modèle est composé d'un ensemble de sous-modèles qui partagent un ensemble des états intermédiaires x_c . Chaque sous modèle est décrit par l'équation (2.4.7) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{ii}x_i(t) + B_{ii}u_i(t) + (A_{ic}x_c(t)) + \sum_{j \neq i} (A_{ij}x_j(t)) \\ \dot{x}_c(t) &= A_{ci}x_i(t) + A_{cc}x_c(t) + A_{cj}x_j(t) \\ y_i(t) &= C_{ii}x_i(t) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Ce type de modèle nécessite l'utilisation des outils de structuration pour le simplifier, comme par exemple la méthode de recherche d'un recouvrement (Iftar, 2016).

Cet outil de structuration est basé sur la modélisation dans l'espace d'état. Dans ce contexte, la stratégie de structuration consiste à faire une analyse directe des coefficients des matrices (A , B et C) constituant la représentation d'état, en appliquant un changement de base, qui mène à la nouvelle structure envisagée.

Décomposition par recouvrement (overlapping)

L'approche de décomposition par recouvrement (overlapping) a été introduite par Ikeda et Siljak en (1980) pour obtenir des décompositions utiles pour les systèmes de grande

taille.

La méthode de recherche de "recouvrements" ("overlapping") entre sous-systèmes permet de définir un modèle équivalent (système augmenté) en utilisant une transformation (sur le système initial interconnecté) qui introduit des redondances (des duplications) (figure 2.6) : l'idée est que chaque paire de sous-systèmes (S_1 et S_2) partage quelques entrées et/ou sorties et/ou états (avec S_c (système commun)) (J.Bernussou and A.Titli, 1982). Dans ce paragraphe on va s'intéresser uniquement à la redondance par les états (duplication des états).

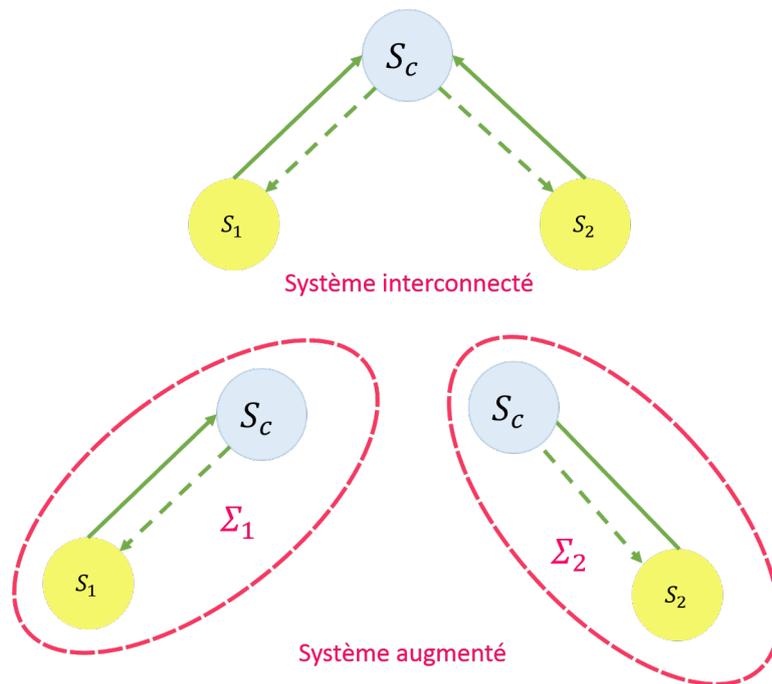


FIGURE 2.6 – Principe de la méthode de recouvrement (overlapping)

Bien que ces systèmes soient, en général, composés de plusieurs sous-systèmes dont certaines dynamiques se chevauchent de nombreuses façons différentes (Iftar, 1993), dans cette section, on se limitera à un grand système composé de deux sous-systèmes qui partagent des états intermédiaires x_c .

On considère le système (Σ) représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \\ x_2 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.9)$$

où $x_i \in R^{n_i}$, $u_i \in R^{m_i}$ et $y_i \in R^{q_i}$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du sous-système (Σ_i) pour $i = 1, 2$. $x_c \in R^{n_c}$ est le vecteur d'état de la partie de recouvrement (overlapping) (on va dupliquer ce vecteur).

Les matrices A , B et C ont la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1c} & A_{12} \\ A_{c1} & A_{cc} & A_{c2} \\ A_{21} & A_{2c} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{c1} & B_{c2} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{1c} & C_{12} \\ C_{21} & C_{2c} & C_{22} \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

Un élargissement (an expansion) $\bar{\Sigma}$, de Σ peut être obtenu par le changement de base suivant :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Sx \\ \bar{y} &= y \\ \bar{A} &= SAV + R \\ \bar{B} &= SB \\ \bar{C} &= CV \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

avec :

$$S = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{1c} & -\frac{1}{2}A_{1c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{cc} & -\frac{1}{2}A_{cc} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{cc} & \frac{1}{2}A_{cc} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{2c} & \frac{1}{2}A_{2c} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

$$V = (S^T S)^{-1} S^T = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_c} & \frac{1}{2}I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

Cette transformation permet d'étendre les états et fait apparaître des sous-systèmes dont les interconnexions apparaissent uniquement dans les blocs non nuls extra diagonaux (2.4.14). Par exemple, à partir du système (2.4.10), on construit le système global

augmenté $\bar{\Sigma}$ suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{1c} & 0 & A_{12} \\ A_{c1} & A_{cc} & 0 & A_{c2} \\ \hline A_{c1} & 0 & A_{cc} & A_{c2} \\ A_{21} & 0 & A_{2c} & A_{22} \end{array} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \\ x_c \\ x_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{c1} & B_{c2} \\ \hline B_{c1} & B_{c2} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|cc} C_{11} & \frac{1}{2}C_{1c} & \frac{1}{2}C_{1c} & C_{12} \\ \hline C_{21} & \frac{1}{2}C_{2c} & \frac{1}{2}C_{2c} & C_{22} \end{array} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \\ x_c \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Le principe dit "d'inclusion" permet de garder les fortes interconnexions dans la matrice d'état et d'écarter les faibles par le biais de blocs de faibles dimensions en dehors de la diagonale de la matrice d'état. Ainsi les deux sous-systèmes obtenus sont alors respectivement $(\bar{\Sigma}_1)$ et $(\bar{\Sigma}_2)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1c} \\ A_{c1} & A_{cc} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{c1} \end{pmatrix} u_1 \\ y_1 &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{1c} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{cc} & A_{c2} \\ A_{2c} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{c2} \\ B_{22} \end{pmatrix} u_2 \\ y_2 &= \begin{pmatrix} C_{2c} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

La question qui se pose maintenant est la suivante : est ce que la méthode d'overlapping permet de conserver les propriétés du système initial ?

L'article (Iftar, 2016) montre à travers les théorèmes 5, 6 et 7 que Σ est une restriction de $\bar{\Sigma}$ et qu'ils ont le même comportement entrées/sorties.

Théorème 5 (Iftar, 2016) *Deux systèmes ayant le même nombre d'entrées et de sorties, ont le même comportement entrée-sortie si, pour une entrée u , ils produisent la même sortie y lorsque leurs conditions initiales sont nulles.*

Théorème 6 (Iftar, 2016) *Σ est une restriction de $\bar{\Sigma}$ si et seulement si $RS = 0$ et $VS = I_n$*

Théorème 7 (*Iftar, 2016*) Si Σ est une restriction de $\bar{\Sigma}$ alors ils ont le même comportement entrées/sorties

Si on s'intéresse maintenant aux propriétés de commandabilité et d'observabilité : pour vérifier la conservation de ces propriétés pour le système augmenté, nous proposons d'étudier deux exemples :

Exemple1

Le système Σ est décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -0.66 & 0.66 & 0 \\ 1 & -1.62 & 0.62 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Σ est bien commandable et observable.

Le système augmenté $\bar{\Sigma}$ est décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} -0.66 & 0.66 & 0 & 0 \\ 1 & -1.62 & 0 & 0.62 \\ 1 & 0 & -1.62 & 0.62 \\ 0 & 0 & 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

$\bar{\Sigma}$ est observable et commandable.

Exemple2

Le système Σ est décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -0.66 & 0.66 & 0 \\ 1 & -1.62 & 0.62 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.33 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Σ est bien commandable et observable.

Le système augmenté $\bar{\Sigma}$ est décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} -0.66 & 0.66 & 0 & 0 \\ 1 & -1.62 & 0 & 0.62 \\ 1 & 0 & -1.62 & 0.62 \\ 0 & 0 & 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.20 \end{pmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$\bar{\Sigma}$ est observable mais non commandable.

D'après ces deux exemples on peut remarquer que dans certains cas la méthode de recouvrement peut conserver la commandabilité et l'observabilité du système initial alors que dans d'autres cas ces propriétés ne sont pas conservées.

2.4.3 Modèles interconnectés type 3

Il existe également des modèles interconnectés de type 1 ou de type 2 qui possèdent par exemple un faible nombre d'entrées/sorties mais un grand nombre de variables d'état. Ces modèles nécessitent d'autres types de structuration qui mènent à des structures simples et connues, comme la technique de la structuration par détermination de la réalisation.

Structuration par détermination de la réalisation

Cette méthode de structuration est basée sur la détermination de deux réalisations pour le modèle du système : la réalisation d'origine, et la réalisation (la structure) désirée (Borne et al., 1992). Dans cette approche, on cherche à obtenir pour la matrice A du système Σ (2.4.2), des structures par bloc triangulaires inférieurs (LBT : **L**ower **B**lock **T**riangular) et des structures par bloc diagonale (D).

Ces structures sont plus simples parce qu'elles ont des propriétés particulières qui simplifient leur étude. Nous proposons de présenter la méthode développée dans (Borne et al., 1992) pour un système Σ dont le vecteur d'état est partitionné en deux parties. Nous allons chercher à obtenir les structures (LBT) et (D) de la matrice A de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Etape 1 : recherche de la structure LBT Appliquons sur (2.4.21) le changement de base suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \text{ avec } G = \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.4.22)$$

On obtient ainsi la réalisation suivante de Σ :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Avec :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{R}_1(L) \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 & \bar{C}_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.24)$$

Où :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} - LA_{21} \\ \bar{A}_{22} &= A_{22} + A_{21}L \\ \bar{B}_1 &= B_1 - LB_2 \\ \bar{C}_2 &= C_2 + C_1L \\ \bar{R}_1(L) &= A_{12} + A_{11}L - LA_{22} - LA_{21}L \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

La condition de triangularisation inférieure est définie par l'équation de Riccati comme suit :

$$\bar{R}_1(L) = A_{12} + A_{11}L - LA_{22} - LA_{21}L = 0 \quad (2.4.26)$$

S'il existe une solution L à l'équation (2.4.26), alors il existe une réalisation $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ de Σ pour laquelle la matrice \bar{A} est de structure LBT.

Cette méthode peut se généraliser facilement, par récurrence, dans le cas d'un vecteur d'état composé de N sous-vecteurs.

Etape 2 : recherche de la structure D Appliquons à cette étape le nouveau changement de base suivant sur (2.4.23) :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \tilde{G} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \tilde{G} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M & I \end{bmatrix} \quad (2.4.27)$$

On obtient ainsi la nouvelle réalisation suivante de Σ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Avec :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{R}_1(L) \\ \tilde{R}_2(M) & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.29)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \bar{A}_{11} + \bar{R}_1(L)M = A_{11} - LA_{21} + \bar{R}_1(L)M \\ \tilde{A}_{22} &= \bar{A}_{11} - M\bar{R}_1(L) = A_{22} + A_{21}L - M\bar{R}_1(L) \\ \tilde{B}_1 &= \bar{B}_1 = B_1 - LB_2 \\ \tilde{B}_2 &= B_2 - M\bar{B}_1 = B_2 - M(B_1 - LB_2) \\ \tilde{C}_1 &= C_1 + \bar{C}_2M = C_1 + (C_2 + C_1L)M \\ \tilde{C}_2 &= \bar{C}_2 = C_2 + C_1L \\ \tilde{R}_2(M) &= A_{21} + (A_{22} + A_{21}L)M - M(A_{11} - LA_{21}) - M\bar{R}_1(L)M \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

La condition de diagonalisation est définie par l'équation de Riccati comme suit :

$$\bar{R}_1(L) = A_{12} + A_{11}L - LA_{22} - LA_{21}L = 0 \quad (2.4.31)$$

et

$$\tilde{R}_2(M) = A_{21} + (A_{22} + A_{21}L)M - M(A_{11} - LA_{21}) - M\bar{R}_1(L)M = 0 \quad (2.4.32)$$

S'il existe une solution L à l'équation (2.4.31), et une solution M à l'équation (2.4.32), alors il existe une réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ de Σ pour laquelle la matrice \tilde{A} est de structure D.

Nous avons présenté dans les deux paragraphes précédents deux outils utiles pour la structuration de modèle. Leur principe est de chercher une "transformation" (changement de base ou "expansion" dans le cas de la recherche de recouvrement) pour atteindre de façon exacte ou approchée une structure cible (LBT, D, ...).

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé dans une première partie une synthèse regroupant les définitions théoriques des systèmes de grande taille. L'absence d'une définition universelle et reconnue des systèmes qu'on appelle "grands systèmes", "systèmes complexes", "systèmes interconnectés", ..., témoigne de la confusion possible entre ces différents concepts et la difficulté de définir des limites précises pour tels systèmes.

Ces systèmes ont la particularité d'avoir des modèles complexes, caractérisés souvent par un grand nombre de paramètres, une forte et complexe interaction entre les différents sous-systèmes qui le composent, un grand nombre de variables d'entrées/sorties. L'analyse de ce type de systèmes est ainsi très difficile et nécessite un raisonnement particulier. En effet les méthodes classiques se montrent insuffisantes pour des raisons numériques.

La seconde partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation des problèmes liés à l'identification de ce type de systèmes et quelques méthodes soulignées par quelques articles pour résoudre ce problème.

Dans la troisième partie, nous avons présenté les systèmes interconnectés étudiés dans cette thèse et des outils de structuration qui diffèrent selon les structures ciblées et permettent de chercher une transformation du système initial tout en restant fidèle à ses propriétés. Certains de ces outils de simplification structurelle exploitent la modélisation dans l'espace d'état.

Nous présenterons dans le chapitre suivant, notre contribution sur l'étude de l'identifiabilité des différents systèmes interconnectés décrits dans ce chapitre.

Chapitre 3

Vers une procédure d'identification

*Ce que l'on conçoit bien
s'énonce clairement, et les mots
pour le dire arrivent aisément..
Nicolas Boileau*

Sommaire

3.1	Présentation du chapitre	56
3.2	Hypothèses d'étude	57
3.3	Couplage par les entrées	57
3.3.1	Formalisation du problème étudié	58
3.3.2	Condition nécessaire et suffisante pour l'identifiabilité des sous-systèmes	58
3.3.3	Vers un théorème inverse	59
3.4	Couplage par les sorties	61
3.4.1	Formalisation du problème étudié	61
3.4.2	Condition suffisante pour l'identifiabilité structurelle des systèmes locaux	63
3.4.3	Vers un théorème inverse	69
3.5	Couplage par un état intermédiaire et les sorties	71
3.5.1	Formalisation du système étudié	71
3.5.2	Propriétés structurelles de $\bar{\Sigma}$	73
3.5.3	Propriétés des sous-systèmes augmentés virtuels ($\hat{\Sigma}_i$)	77

3.6 Synthèse des différents types de couplage	83
3.7 Procédure d'identification décentralisée	85
3.8 Conclusion	86

3.1 Présentation du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'identifiabilité de 3 structures différentes (de type 1 et de type 2) en changeant à chaque fois la nature du couplage en le rendant plus compliqué (figure 3.1) :

- couplage par les entrées
- couplage par les sorties
- couplage par un état intermédiaire

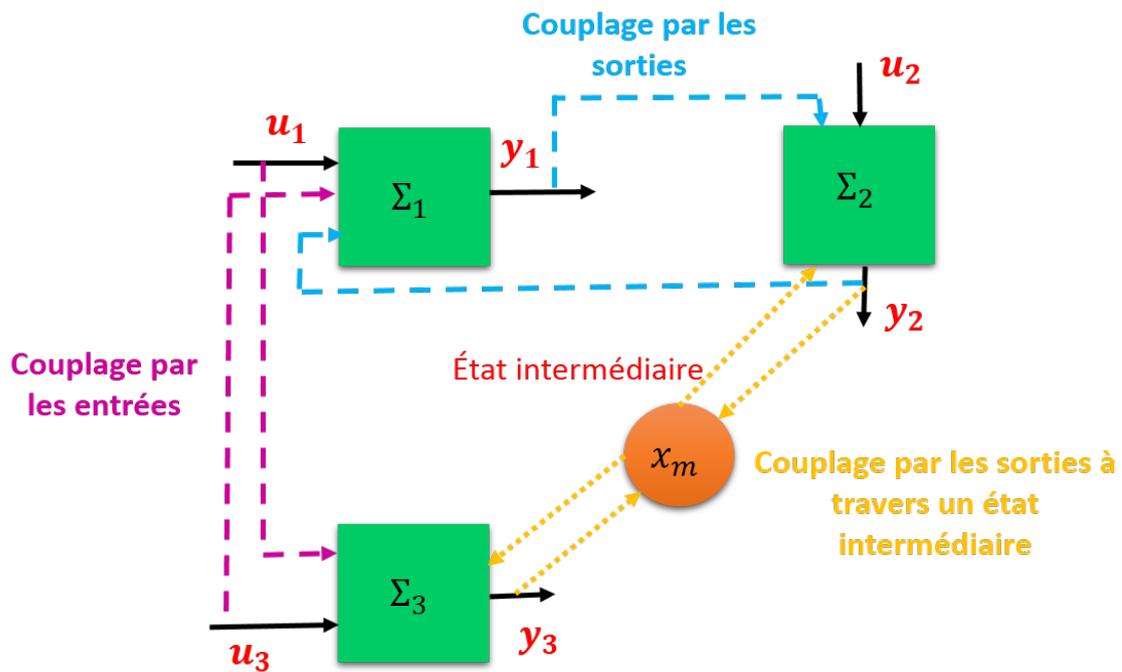


FIGURE 3.1 – Exemple d'un système interconnecté

Les contributions de cette thèse sont développées dans ce chapitre. On présente des descriptions des systèmes étudiés et des conditions suffisantes pour l'identifiabilité structurelle des systèmes locaux. Dans la deuxième partie, on définit une procédure d'identification décentralisée qui profite des propriétés structurelles du grand système pour réduire la complexité de son identification.

3.2 Hypothèses d'étude

Pour la suite de ce manuscrit et pour tous les théorèmes développés, on suppose les hypothèses d'étude suivantes :

Hypothèse 1

- Chaque structure représente un grand système Σ composé de M sous systèmes Σ_i , ($i = 1 \dots M$)
- Le grand système Σ est s.g.i..
- Le vecteur p des paramètres du Σ est la concaténation des paramètres locaux p_i (les paramètres des Σ_i), ($i = 1 \dots M$)

$$p = \left(p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_M \right)^T \quad (3.2.1)$$

- Il n'existe pas de paramètres communs entre les sous-systèmes Σ_i
- Les paramètres de couplage sont dupliqués
- On suppose que le grand système avec les paramètres dupliqués est s.g.i..

3.3 Couplage par les entrées

Dans cette partie, nous allons considérer un grand système composé d'une collection de M sous-systèmes dynamiques couplés par les entrées. Un exemple est représenté sur la figure (3.2), on peut trouver ce type de couplage dans le domaine de thermique des bâtiments (Mur chauffant entre 2 pièces) (Morosan et al., 2010).

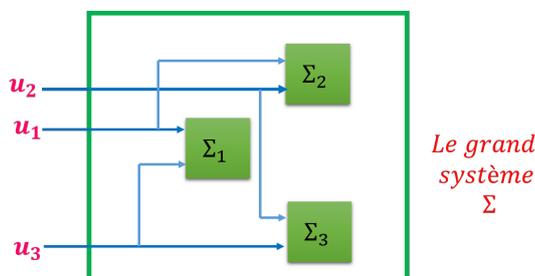


FIGURE 3.2 – Exemple des sous-systèmes couplés par leurs entrées

3.3.1 Formalisation du problème étudié

Considérons un grand système linéaire paramétré en p et composé d'un ensemble de sous-systèmes couplés par les entrées.

Chaque sous-système est décrit par la représentation d'état suivante :

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i &= A_i(p_i)x_i + B_i(p_i)u_i + \sum_{j \neq i} B_{ij}(p_i)u_j \\ y_i &= C_i(p_i)x_i \end{cases} \quad (3.3.2)$$

dans laquelle les matrices A_i , B_i , C_i et B_{ij} sont paramétrées par le vecteur $p_i \in \mathbb{R}^{n_{p_i}}$ ($i = 1 \dots M$).

A partir de cette description locale, le système global peut être déduit comme suit :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (3.3.3)$$

avec :

$$A(p) = \text{diag}(A_i)_{i=1,M}, \quad C(p) = \text{diag}(C_i)_{i=1,M}$$

$$B(p) = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & B_2 & \dots & B_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M1} & B_{M2} & \dots & B_M \end{pmatrix}$$

On suppose que le système global est structurellement commandable et observable. Dans ce cas on peut montrer que les sous-systèmes sont également structurellement commandables et observables.

3.3.2 Condition nécessaire et suffisante pour l'identifiabilité des sous-systèmes

L'idée pour montrer cette propriété est de considérer chaque sous-système comme indépendant des autres mais possédant en plus de ses entrées propres, certaines ou la totalité des entrées de ses voisins.

Théorème 8 *Si le système global (Σ) , structurellement commandable et observable, est structurellement globalement identifiable, alors tous les sous systèmes (Σ_i) couplés par les entrées sont aussi structurellement globalement identifiabiles.*

Preuve 1 *Pour tout $i = 1, \dots, M$, on suppose qu'on a deux paramétrisations p_i et \tilde{p}_i et une matrice T_i telles que :*

$$T_i A_i = \tilde{A}_i T_i \quad (3.3.4)$$

$$T_i B_i = \tilde{B}_i \quad (3.3.5)$$

$$\forall j \neq i, \quad T_i B_{ij} = \tilde{B}_{ij} \quad (3.3.6)$$

$$\tilde{C}_i T_i = C_i \quad (3.3.7)$$

En introduisant $T = \text{diag}(T_i)_{i=1,M}$ on a alors :

$$\begin{aligned} TB &= \begin{pmatrix} T_1 B_1 & T_1 B_{12} & \dots & T_1 B_{1M} \\ T_2 B_{21} & T_2 B_2 & \dots & T_2 B_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_M B_{M1} & T_M B_{M2} & \dots & T_M B_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_{12} & \dots & \tilde{B}_{1M} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_2 & \dots & \tilde{B}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{B}_{M1} & \tilde{B}_{M2} & \dots & \tilde{B}_M \end{pmatrix} \\ &= \tilde{B} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Comme A , C et T sont des matrices diagonales par bloc, $TA = \tilde{A}T$ et $\tilde{C}T = C$. Et puisque le système global est par hypothèse globalement identifiable, alors en utilisant le théorème des similarités, on peut déduire que $T = \text{Id}$ et $p = \tilde{p}$. Par conséquent, pour tout $i = 1, \dots, M$ on a $T_i = \text{Id}$ et $p_i = \tilde{p}_i$. D'où, par le théorème des similarités, on déduit que tous les sous-systèmes (Σ_i) sont structurellement identifiabiles. Ceci conclut la preuve.

3.3.3 Vers un théorème inverse

Il est évidemment plus simple de vérifier l'identifiabilité des sous-systèmes. Ainsi on a cherché à montrer le sens réciproque du théorème 8.

Théorème 9 *Si les sous-systèmes (Σ_i) , structurellement commandables et observables, couplés par les entrées, sont structurellement globalement identifiables, alors le grand système (Σ) est aussi structurellement globalement identifiable.*

Preuve 2 *La preuve est développée pour le cas $M = 2$. La généralisation se base sur les mêmes principes.*

On suppose qu'on a deux paramétrisations p_i et \tilde{p}_i et une matrice T telles que :

$$TA = \tilde{A}T \quad (3.3.9)$$

$$TB = \tilde{B} \quad (3.3.10)$$

$$\tilde{C}T = C \quad (3.3.11)$$

En introduisant :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

On a alors :

$$TA = \begin{bmatrix} T_1A_1 & T_{12}A_2 \\ T_{21}A_1 & T_2A_2 \end{bmatrix} = \tilde{A}T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1T_1 & \tilde{A}_1T_{12} \\ \tilde{A}_2T_{21} & \tilde{A}_2T_2 \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

D'où on obtient : $T_1A_1 = \tilde{A}_1T_1$ et $T_2A_2 = \tilde{A}_2T_2$.

On a aussi :

$$\tilde{C}T = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1T_1 & \tilde{C}_1T_{12} \\ \tilde{C}_2T_{21} & \tilde{C}_2T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

Ce qui implique que : $\tilde{C}_1T_1 = C_1$ et $\tilde{C}_2T_2 = C_2$.

De l'équation (3.3.9), on peut déduire que :

$$\tilde{C}\tilde{A}T = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1\tilde{A}_1T_1 & \tilde{C}_1\tilde{A}_1T_{12} \\ \tilde{C}_2\tilde{A}_2T_{21} & \tilde{C}_2\tilde{A}_2T_2 \end{pmatrix} = \tilde{C}TA = CA = \begin{pmatrix} C_1A_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.15)$$

Ceci implique que : $\tilde{C}_1\tilde{A}_1T_{12} = 0$. Avec un raisonnement par récurrence, on peut montrer :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \\ \vdots \\ C_1A_1^r \end{pmatrix} T_{12} = 0 \quad (3.3.16)$$

Et comme le sous-système 1 est observable, d'où sa matrice d'observabilité est de rang plein, alors on peut déduire que $T_{12} = 0$.

On fait le même raisonnement pour T_{21} , en utilisant comme hypothèse, l'observabilité du sous-système 2, D'où, $T_{21} = 0$.

On a aussi :

$$TB = \begin{pmatrix} T_1 B_1 + T_{12} B_{21} & T_1 B_{12} + T_{12} B_2 \\ T_{21} B_1 + T_2 B_{21} & T_{21} B_{12} + T_2 B_2 \end{pmatrix} = \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.17)$$

Et comme T_{12} et T_{21} sont nulles, on peut déduire que $T_1 B_1 = \tilde{B}_1$, $T_2 B_2 = \tilde{B}_2$ et que $T_1 B_{12} = \tilde{B}_{12}$ et $T_2 B_{21} = \tilde{B}_{21}$.

Comme par hypothèse, les sous-systèmes sont structurellement globalement identifiables, on peut déduire que $T_1 = T_2 = 0$, d'où $T = Id$, ce qui implique que le grand système est structurellement globalement identifiable. Ceci conclut la preuve.

Remarque

Cette preuve se base sur la méthode des similarités. On aurait pu également utiliser la méthode des paramètres de Markov, mais qui ne garantit que l'identifiabilité structurelle locale. Pour le lecteur intéressé, voir annexe C.

L'étude de l'identifiabilité des systèmes composés d'un ensemble de sous-systèmes couplés par les entrées était simple vu la forme particulière des matrices A et C (diagonale), ce qui facilite le raisonnement.

Nous proposons maintenant d'étudier le cas d'un couplage par les sorties.

3.4 Couplage par les sorties

Dans cette partie, nous allons considérer un système global structuré en une collection de M sous-systèmes dynamiques couplés par les sorties et ayant un ensemble d'entrées communes. Un exemple est représenté sur la figure (3.3).

3.4.1 Formalisation du problème étudié

Chaque sous-système est décrit par la représentation d'état linéaire à temps continu suivante :

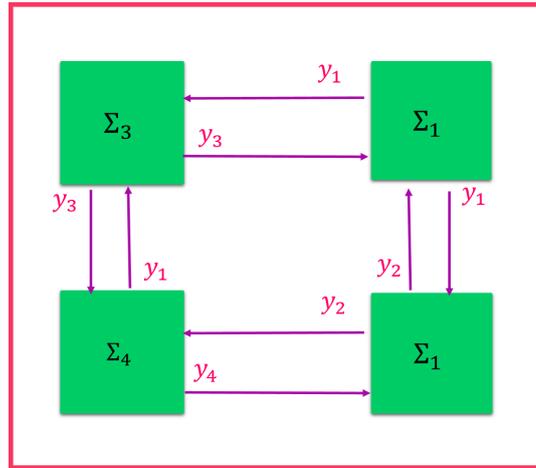


FIGURE 3.3 – Exemple des sous systèmes couplés par leurs sorties

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + B_{ic} u_c + \sum_{j \neq i} K_{ij} y_j \\ y_i = C_i x_i \end{cases} \quad (3.4.18)$$

dans laquelle les matrices A_i , B_i , B_{ic} , C_i et K_{ij} sont paramétrées par le vecteur des paramètres $p_i \in \mathbb{R}^{n_{p_i}}$ ($i = 1 \dots M$), u_i représente le vecteur des entrées propres à chaque sous-système et u_c celui des entrées communes à tous les sous-systèmes.

A partir de cette description locale, une réalisation possible du système global est la suivante :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.4.19)$$

avec :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ u_c \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{pmatrix}$$

Le vecteur p des paramètres du grand système résulte de la concaténation des paramètres locaux p_i (les paramètres des sous-systèmes). Pour cette étude, on ne considère pas le cas de l'existence de paramètres communs.

Les matrices A , B et C dépendent du vecteur p .

$$A(p) = \begin{pmatrix} A_1(p_1) & K_{12}(p_1)C_2(p_2) & \dots & K_{1M}(p_1)C_M(p_M) \\ K_{21}(p_2)C_1(p_1) & A_2(p_2) & \dots & K_{2M}(p_2)C_M(p_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1}(p_M)C_1(p_1) & K_{M2}(p_M)C_2(p_2) & \dots & A_M(p_M) \end{pmatrix}$$

$$B(p) = \begin{pmatrix} B_1(p_1) & 0 & \dots & \dots & B_{1c}(p_1) \\ 0 & B_2(p_2) & \dots & \dots & B_{2c}(p_2) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_M(p_M) & B_{Mc}(p_M) \end{pmatrix}$$

$$C(p) = \text{diag}(C_i)_{i=1,M}$$

On suppose que le système global est structurellement commandable et observable. Dans ce cas on peut montrer que les sous-systèmes sont également structurellement commandables et observables. Les preuves de ces propriétés sont développées dans la section suivante.

3.4.2 Condition suffisante pour l'identifiabilité structurelle des systèmes locaux

Pour décomposer ce grand système, l'idée est de considérer chaque sous-système comme indépendant des autres mais possédant comme entrées virtuelles (\hat{u}_j) certaines des sorties (y_j) de sous-systèmes en couplage avec lui. On définit ainsi le sous-système virtuel suivant :

$$\left(\hat{\Sigma}_i \right) : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + B_{ic} u_c + \sum_{j \neq i} K_{ij} \hat{u}_j \\ y_i = C_i x_i \end{cases} \quad (3.4.20)$$

3.4.2.1 Observabilité structurelle des systèmes locaux virtuels

L'observabilité est une condition nécessaire pour appliquer la méthode des similarités. On peut prouver en développant les matrices d'observabilité le lemme suivant :

Lemme 1 *Le système (Σ) est structurellement observable si et seulement si tous les sous-systèmes virtuels $(\widehat{\Sigma}_i)$ sont structurellement observables.*

La preuve est donnée ci-dessous.

Preuve 3 *On suppose que le grand système est structurellement observable. On se propose de montrer que tous les sous-systèmes virtuels sont structurellement observables, par un raisonnement par l'absurde. La preuve sera faite sur un exemple de grand système composé de 2 sous-systèmes. La généralisation est basée sur les mêmes principes.*

On suppose que le sous-système 1 n'est pas structurellement observable. La matrice canonique d'observabilité de ce sous-système est :

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,no} & A_{1,12} \\ \hline 0 & A_{1,o} \end{array} \right), \quad C_1 = \left(0 \mid C_{1,o} \right)$$

où, 'no' représente la partie non observable et 'o' représente la partie observable.

On considère le second sous-système représenté par les matrices A_2 et C_2 . Puisque les deux sous-systèmes sont couplés par leurs sorties, alors la matrice d'interaction $K_{21}C_1$ du sous-système 1 sur le sous-système 2 a la structure suivante :

$$K_{21}C_1 = \left(0 \mid K_{21}C_{1,o} \right)$$

Alors le système global possède les matrices A et C suivantes :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,no} & A_{1,12} & \star \\ \hline 0 & A_{1,o} & \star \\ \hline 0 & K_{21}C_{1,o} & A_2 \end{array} \right), \quad C = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & C_{1,o} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_2 \end{array} \right)$$

Ainsi, la matrice d'observabilité du système global ne peut pas être de rang plein, ce qui entraîne une contradiction avec l'hypothèse d'observabilité du grand système. D'où tous les sous-systèmes doivent être structurellement observables.

Pour prouver que cette condition est aussi suffisante, on considère comme précédemment le cas de 2 sous-systèmes. La généralisation est basée sur les mêmes principes. On suppose que les couples (A_1, C_1) et (A_2, C_2) sont des systèmes observables. Les premières lignes de la matrice d'observabilité du grand système sont :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1A_1 & C_1K_{12}C_2 \\ C_2K_{21}C_1 & C_2A_2 \\ C_1A_1^2 + C_1K_{12}C_2K_{21}C_1 & C_1A_1K_{12}C_2 + C_1K_{12}C_2A_2 \\ C_2K_{21}C_1A_1 + C_2A_2K_{21}C_1 & C_2K_{21}C_1K_{12}C_2 + C_2A_2^2 \\ \vdots & \vdots \end{array} \right) \\
 &= \Gamma \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1A_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2 \\ C_1A_1^2 & 0 \\ 0 & C_2A_2^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{3.4.21}
 \end{aligned}$$

où Γ est une matrice triangulaire avec l'identité I_d sur sa diagonale.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} I_d & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I_d & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & C_1K_{12} & I_d & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_2K_{21} & 0 & 0 & I_d & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_1K_{12}C_2K_{21} & C_1A_1K_{12} & 0 & C_1K_{12} & I_d & 0 & \dots & 0 \\ C_2A_2K_{21} & C_2K_{21}C_1K_{12} & C_2K_{21} & 0 & 0 & I_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & I_d \end{pmatrix} \tag{3.4.22}$$

Alors, on obtient :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1A_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2 \\ C_1A_1^2 & 0 \\ 0 & C_2A_2^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Et comme par hypothèse, la matrice d'observabilité pour chaque sous système est de rang plein, alors la matrice d'observabilité du système global est aussi de rang plein.

3.4.2.2 Commandabilité structurelle des systèmes locaux virtuels

Contrairement à l'observabilité, la condition de commandabilité n'est pas équivalente. On peut prouver le lemme suivant :

Lemme 2 *Si le système (Σ) est structurellement commandable alors tous les sous-systèmes virtuels $(\widehat{\Sigma}_i)$ sont structurellement commandables.*

La preuve est donnée ci-dessous.

Preuve 4 *Comme pour l'observabilité, on fait un raisonnement par l'absurde et on considère le cas de 2 sous-systèmes.*

On suppose que le grand système est structurellement commandable, et que le premier sous-système virtuel $(\widehat{\Sigma}_1)$ n'est pas structurellement commandable.

La matrice canonique de commandabilité de ce sous-système est :

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,nc} & 0 \\ \hline A_{1,12} & A_{1,c} \end{array} \right), \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{1,c} \end{pmatrix}, \quad B_{1c} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{1c,c} \end{pmatrix} \quad K_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_{12,c} \end{pmatrix}$$

où, 'nc' représente la partie non commandable et 'c' représente la partie commandable.

L'interaction de $(\widehat{\Sigma}_2)$ sur $(\widehat{\Sigma}_1)$ est représentée par :

$$K_{12}C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ K_{12,c}C_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système global a les matrices A et B suivantes :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,nc} & 0 & 0 \\ \hline A_{1,12} & A_{1,c} & K_{12,c}C_2 \\ \hline \star & \star & A_2 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline B_{1,c} & 0 & B_{1c,c} \\ \hline 0 & B_2 & \star \end{array} \right)$$

Ces deux matrices montrent que l'état non commandable du $(\widehat{\Sigma}_1)$ reste non commandable dans le grand système. Ainsi, la matrice de commandabilité du système global

ne peut pas être une matrice de rang plein, cela conduit à une contradiction avec l'hypothèse de commandabilité du grand système. Donc, tous les sous-systèmes virtuels doivent être structurellement commandables.

3.4.2.3 Identifiabilité structurelle des systèmes locaux virtuels

Le théorème présenté dans cette partie est l'une des contributions principales de ce chapitre.

Théorème 10 *Si le système global (Σ) , structurellement commandable et observable, est structurellement globalement identifiable, alors tous les sous-systèmes $(\widehat{\Sigma}_i)$ sont aussi structurellement globalement identifiables.*

La preuve de ce théorème est la suivante :

Preuve 5 *Pour tout $i = 1, \dots, M$, on suppose qu'on a deux paramétrisations p_i et \tilde{p}_i et une matrice T_i telles que :*

$$T_i A_i = \tilde{A}_i T_i \quad (3.4.23)$$

$$T_i B_i = \tilde{B}_i \quad (3.4.24)$$

$$T_i B_{ic} = \tilde{B}_{ic} \quad (3.4.25)$$

$$\forall j \neq i, \quad T_i K_{ij} = \tilde{K}_{ij} \quad (3.4.26)$$

$$\tilde{C}_i T_i = C_i \quad (3.4.27)$$

En introduisant $T = \text{diag}(T_i)_{i=1,M}$ on a alors :

$$\begin{aligned}
 TA &= \begin{pmatrix} T_1 A_1 & T_1 K_{12} C_2 & \dots & T_1 K_{1M} C_M \\ T_2 K_{21} C_1 & T_2 A_2 & \dots & T_2 K_{2M} C_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_M K_{M1} C_1 & T_M K_{M2} C_2 & \dots & T_M A_M \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 T_1 & \tilde{K}_{12} C_2 & \dots & \tilde{K}_{1M} C_M \\ \tilde{K}_{21} C_1 & \tilde{A}_2 T_2 & \dots & \tilde{K}_{2M} C_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{K}_{M1} C_1 & \tilde{K}_{M2} C_2 & \dots & \tilde{A}_M T_M \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 T_1 & \tilde{K}_{12} \tilde{C}_2 T_2 & \dots & \tilde{K}_{1M} \tilde{C}_M T_M \\ \tilde{K}_{21} \tilde{C}_1 T_1 & \tilde{A}_2 T_2 & \dots & \tilde{K}_{2M} \tilde{C}_M T_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{K}_{M1} \tilde{C}_1 T_1 & \tilde{K}_{M2} \tilde{C}_2 T_2 & \dots & \tilde{A}_M T_M \end{pmatrix} \\
 &= \tilde{A} T \tag{3.4.28}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 TB &= \begin{pmatrix} T_1 B_1 & 0 & \dots & \dots & T_1 B_{1c} \\ 0 & T_2 B_2 & \dots & \dots & T_2 B_{2c} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_M B_M & T_M B_{Mc} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & 0 & \dots & \dots & \tilde{B}_{1c} \\ 0 & \tilde{B}_2 & \dots & \dots & \tilde{B}_{2c} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{B}_M & \tilde{B}_{Mc} \end{pmatrix} \\
 &= \tilde{B} \tag{3.4.29}
 \end{aligned}$$

Comme C et T sont des matrices diagonales par bloc alors $\tilde{C}T = C$. Et puisque le système global est par hypothèse globalement identifiable, alors en utilisant le théorème 4, on peut déduire que $T = \text{Id}$ et $p = \tilde{p}$. Par conséquent, pour tout $i = 1, \dots, M$ on

à $T_i = \text{Id}$ et $p_i = \tilde{p}_i$. D'où, par le théorème des similarités, on déduit que tous les sous-systèmes virtuels $(\widehat{\Sigma}_i)$ sont structurellement identifiables. Ceci conclut la preuve.

3.4.3 Vers un théorème inverse

Maintenant, on veut montrer le sens inverse du théorème 10 : l'identifiabilité structurelle de tous les systèmes (Σ_i) implique celle du système global (Σ) . Nous avons étudié un cas particulier où le couplage est nul si $i > j$. Le résultat pour le cas général n'est pas évident. C'est bien dommage, car vérifier l'identifiabilité structurelle du grand système est un vrai problème.

3.4.3.1 Cas où A est triangulaire supérieure

Dans cette partie, on suppose que pour $i > j$, $K_{ij} = 0$.

Théorème 11 *Si tous les sous-systèmes (Σ_i) sont globalement identifiables (A_i, B_i, C_i) , et pour tout $i > j$, $K_{ij} = 0$, alors le système (Σ) est globalement identifiable.*

Preuve 6 *La preuve est donnée pour $M = 2$. La généralisation est basée sur les mêmes principes.*

Le grand système est décrit par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & K_{12}C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad (3.4.30)$$

On considère $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$. On suppose que T satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} TA = \tilde{A}T \\ TB = \tilde{B} \\ \tilde{C}T = C \end{cases} \quad (3.4.31)$$

En utilisant $TB = \tilde{B}$, on obtient :

$$T_{11}B_1 = \tilde{B}_1 \quad (3.4.32)$$

$$T_{22}B_2 = \tilde{B}_2 \quad (3.4.33)$$

$$T_{21}B_1 = 0 \quad (3.4.34)$$

$$T_{12}B_2 = 0 \quad (3.4.35)$$

En utilisant $\tilde{C}T = C$, on obtient :

$$\tilde{C}_1 T_{11} = C_1 \quad (3.4.36)$$

$$\tilde{C}_2 T_{22} = C_2 \quad (3.4.37)$$

$$\tilde{C}_1 T_{12} = 0 \quad (3.4.38)$$

$$\tilde{C}_2 T_{21} = 0 \quad (3.4.39)$$

En utilisant $TA = \tilde{A}T$, on obtient :

$$T_{11}A_1 = \tilde{A}_1 T_{11} + \tilde{K}_{12} \tilde{C}_2 T_{21} \quad (3.4.40)$$

$$T_{21}A_1 = \tilde{A}_2 T_{21} \quad (3.4.41)$$

$$T_{11}K_{12}C_2 + T_{12}A_2 = \tilde{A}_1 T_{12} + \tilde{K}_{12} \tilde{C}_2 T_{22} \quad (3.4.42)$$

$$T_{21}K_{12}C_2 + T_{22}A_2 = \tilde{A}_2 T_{22} \quad (3.4.43)$$

Il peut facilement être remarqué grâce aux deux équations (3.4.39 et 3.4.41) que T_{21} satisfait :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \tilde{C}_2 \tilde{A}_2^r T_{21} = 0$$

En effet si on multiplie 3.4.41 par \tilde{C}_2 et on utilisant l'équation $\tilde{C}_2 T_{21} = 0$, on obtient :

$$\tilde{C}_2 T_{21} A_1 = \tilde{C}_2 \tilde{A}_2 T_{21} \quad (3.4.44)$$

D'où :

$$\tilde{C}_2 \tilde{A}_2 T_{21} = 0 \quad (3.4.45)$$

On multiplie maintenant l'équation 3.4.41 par \tilde{A}_2 puis par \tilde{C}_2 , ce qui donne :

$$\tilde{C}_2 \tilde{A}_2 T_{21} A_1 = \tilde{C}_2 \tilde{A}_2^2 T_{21} = 0 \quad (3.4.46)$$

On refait les mêmes opérations jusqu'à l'ordre (r), ce qui donne à la fin

$$\tilde{C}_2 \tilde{A}_2^r T_{21} = 0$$

Comme le sous-système 2 est par hypothèse observable, alors $T_{21} = 0$. Alors, de (3.4.43) on peut déduire que :

$$T_{22}A_2 = \tilde{A}_2 T_{22} \quad (3.4.47)$$

Alors, en utilisant (3.4.33), (3.4.37) et (3.4.47), et comme le sous-système (Σ_2) est structurellement identifiable, on a : $T_{22} = \text{Id}$ et $p_2 = \tilde{p}_2$.

En utilisant (3.4.39) dans (3.4.40), on a :

$$T_{11}A_1 = \tilde{A}_1T_{11} \quad (3.4.48)$$

Alors en utilisant (3.4.32), (3.4.36) and (3.4.48), et comme le système (Σ_1) est structurallement identifiable, on a : $T_{11} = \text{Id}$ et $p_1 = \tilde{p}_1$. ceci implique que $K_{12} = \tilde{K}_{12}$.

L'équation (3.4.42) sera :

$$T_{12}A_2 = \tilde{A}_1T_{12} \quad (3.4.49)$$

en multipliant (3.4.49) par $\tilde{A}_1^r\tilde{C}_1$, il peut être prouvé récursivement que $\tilde{C}_1\tilde{A}_1^rT_{12} = 0$. En utilisant la propriété d'observabilité de la paire (A_1, C_1) alors $T_{12} = 0$.

Alors, $T = \text{Id}$ et $p = \tilde{p}$, d'où, en utilisant le théorème 4, (Σ) est structurellement identifiable. Ceci conclut la preuve.

3.5 Couplage par un état intermédiaire et les sorties

Dans cette partie, on s'intéressera à un autre type de couplage qui est le couplage par un état intermédiaire et les sorties.

Comme indiqué dans le chapitre précédent, l'étude d'un système structuré de cette manière peut s'effectuer par la méthode de découplage de l'état décrite dans (Iftar, 2016) qui s'appuie sur la technique de recouvrement.

Cette méthode peut être utile pour l'étude de l'identifiabilité d'un grand système dont les sous-systèmes sont couplés par les sorties au travers d'un état intermédiaire non mesuré. Un exemple est présenté dans la figure (3.4).

3.5.1 Formalisation du système étudié

On considère un grand système interconnecté de type 2 composé de M sous-systèmes dynamiques. Les états intermédiaires sont notés x_c . On précise qu'il existe un seul état intermédiaire entre chaque paire de sous-systèmes.

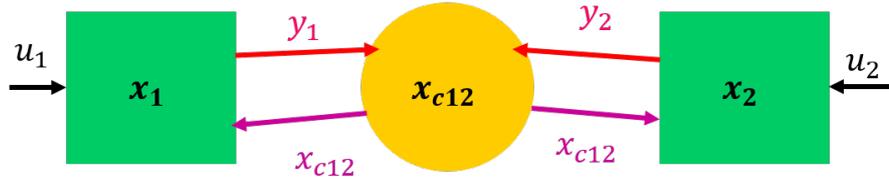


FIGURE 3.4 – Exemple des sous systèmes couplés par un état intermédiaire et les sorties

Chaque sous-système Σ_i est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + A_{ic} x_c + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j \\ y_i = C_i x_i \\ \dot{x}_c = A_c x_c + A_{ci} x_i + A_{cj} x_j \end{cases} \quad (3.5.50)$$

Ainsi, on peut remarquer l'existence des états intermédiaires non naturellement affectés aux sous-systèmes. Pour résoudre ce problème, on a utilisé le théorème de recouvrement présenté dans le chapitre précédent. Ainsi, on va construire des sous-systèmes augmentés en leur affectant ces états intermédiaires.

Pour la suite de section et pour que le raisonnement soit clair, on indique les notations suivantes :

- Σ, Σ_i : le système global (original) ou le sous-système (i) original
- $\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}_i$: le système global augmenté ou le sous-système augmenté
- $\hat{\Sigma}, \hat{\Sigma}_i$: le système global augmenté virtuel ou le sous-système augmenté virtuel

On propose maintenant d'étudier les propriétés structurelles des sous-systèmes augmentés.

L'idée consiste en première étape, à construire, à partir du système original (Σ), un système augmenté ($\bar{\Sigma}$) composé des sous-systèmes augmentés ($\bar{\Sigma}_i$), en leur affectant les états intermédiaires (x_c). En deuxième étape, on définit les sous-systèmes augmentés virtuels ($\hat{\Sigma}_i$) : chaque sous-système augmenté sera couplé par des entrées virtuelles qui sont les sorties des sous-systèmes qui sont en couplage avec lui.

On rappelle que les moyens nécessaires pour générer des expansions de Σ en utilisant la méthode de recouvrement et le principe d'inclusion sont exprimés comme suit :

- la paire (S,V) est spécifique, imposée et vérifie $VS = I_n$:

$$S = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{nc} & 0 \\ 0 & I_{nc} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n2} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{nc} & \frac{1}{2}I_{nc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n2} \end{bmatrix} \quad (3.5.51)$$

- la matrice R est une matrice complémentaire de dimension appropriée. Cette matrice doit vérifier l'équation $RS = 0$.

3.5.2 Propriétés structurelles de $\bar{\Sigma}$

Le système original Σ décrit par les matrices $A(p_1, p_m, p_2)$, $B(p_1, p_2)$ et $C(p_1, p_2)$ est représenté par :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \\ x_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.5.52)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{1c} & 0 \\ K_{21}C_1 & A_c & K_{12}C_2 \\ 0 & A_{2c} & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad (3.5.53)$$

avec :

- p_1 représente les paramètres du sous-système 1.
- p_m représente les paramètres communs entre les deux sous-systèmes.
- p_2 représente les paramètres du sous-système 2.

On propose d'étudier dans ce paragraphe, les propriétés structurelles (commandabilité, observabilité et identifiabilité) du système augmenté ($\bar{\Sigma}$).

3.5.2.1 Commandabilité et observabilité structurelle de $\bar{\Sigma}$

Comme nous avons remarqué dans le chapitre précédent (paragraphe 2.4.2) que la technique de recouvrement ne conserve pas dans tous les cas la commandabilité et l'observabilité du système initial (Σ), notre étude sera limitée uniquement aux systèmes tels que leur overlapping (système augmenté) est commandable et observable. Ainsi, le système augmenté ($\bar{\Sigma}$) est par hypothèse structurellement commandable et observable.

Hypothèse 2 *Le système augmenté $(\bar{\Sigma})$ est structurellement commandable et observable.*

3.5.2.2 Identifiabilité structurelle du $\bar{\Sigma}$

On suppose que le système original Σ décrit par les matrices $A(p_1, p_m, p_2)$, $B(p_1, p_2)$ et $C(p_1, p_2)$ est commandable, observable et s.g.i.

Sachant que la technique de recouvrement par doublement d'état conserve le nombre de paramètres à identifier, on va essayer de prouver, en utilisant la méthode des similarités, que si le système original Σ est s.g.i, alors le système augmenté $\bar{\Sigma}$ décrit par les matrices $\bar{A}(p_1, p_m, p_2)$, $\bar{B}(p_1, p_2)$ et $\bar{C}(p_1, p_2)$ est aussi s.g.i.

Conjecture 1 *Soient (Σ) et $(\bar{\Sigma})$ tels que :*

$$\begin{aligned} RS &= 0 \\ VS &= I_n \\ VR &= 0 \end{aligned} \tag{3.5.54}$$

Si le système original est structurellement observable, commandable et globalement identifiable, alors le système augmenté structurellement observable et commandable est aussi structurellement globalement identifiable.

Preuve 7 *La preuve est faite pour $M = 2$, la généralisation se base sur les mêmes principes.*

On rappelle que le système augmenté $(\bar{\Sigma})$ décrit par les matrices $(\bar{A}, \bar{B}$, et $\bar{C})$ est commandable, observable et il est obtenu en utilisant les équations suivantes (la technique de recouvrement) :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= SAV + R \\ \bar{B} &= SB \\ \bar{C} &= CV \end{aligned} \tag{3.5.55}$$

où R est une matrice paramétrée composée des paramètres de la matrice A , et les matrices V et S sont non paramétrées.

avec :

$$\begin{aligned} RS &= 0 \\ VS &= I_n \\ VR &= 0 \end{aligned} \tag{3.5.56}$$

$$\text{Soit : } T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}$$

tel que :

$$\begin{aligned} T\bar{A} &= \tilde{A}T \\ T\bar{B} &= \tilde{B} \\ \tilde{C}T &= \bar{C} \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

D'où , on aura :

$$\begin{aligned} TSAV + TR &= S\tilde{A}VT + \tilde{R}T \\ TSB &= S\tilde{B} \\ \tilde{C}VT &= CV \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

En utilisant l'équation $TSAV + TR = S\tilde{A}VT + \tilde{R}T$, on obtient :

$$\begin{aligned} TSA\mathbf{V}S + T\mathbf{R}S &= S\tilde{A}VTS + \tilde{R}TS \\ TSA &= S\tilde{A}VTS + \tilde{R}TS \\ \mathbf{V}TSA &= \tilde{A}VTS + \mathbf{V}\tilde{R}TS \\ \mathbf{V}TSA &= \tilde{A}VTS \end{aligned} \quad (3.5.59)$$

En utilisant l'équation $TSB = S\tilde{B}$, on obtient :

$$\begin{aligned} VTSB &= \mathbf{V}S\tilde{B} \\ VTSB &= \tilde{B} \end{aligned} \quad (3.5.60)$$

En utilisant l'équation $\tilde{C}T = \bar{C}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{C}VTS &= \tilde{C}\mathbf{V}S \\ \tilde{C}VTS &= \tilde{C} \end{aligned} \quad (3.5.61)$$

Par les équations (3.5.59), (3.5.60) et (3.5.61) et comme le système original est par hypothèse s.g.i., on peut déduire, en utilisant le théorème des similarités, que $VTS = I$ (I est la matrice identité).

3.5. Couplage par un état intermédiaire et les sorties

L'équation $VTS = I$ n'a pas une solution unique, ($T = Id$, $T = SV$, ...). Le nombre de solution peut être nombrable ou dénombrable. Ainsi on ne peut pas conclure dans le cas général (identifiabilité globale). La conjecture n'est pas alors vérifiée.

On propose alors d'étudier l'identifiabilité locale en changeant d'outil : la méthode des paramètres de Markov.

Théorème 12 Soient (Σ) et $(\bar{\Sigma})$ tels que :

$$\begin{aligned} RS &= 0 \\ VS &= I_n \\ VR &= 0 \end{aligned} \tag{3.5.62}$$

Si le système original Σ décrit par les matrices $A(p_1, p_m, p_2)$, $B(p_1, p_2)$ et $C(p_1, p_2)$ est structurellement observable, commandable et localement identifiable, alors le système augmenté $\bar{\Sigma}$ décrit par les matrices $\bar{A}(p_1, p_m, p_2)$, $\bar{B}(p_1, p_2)$, et $\bar{C}(p_1, p_2)$ structurellement observable et commandable est aussi structurellement localement identifiable.

Preuve 8 On va calculer les paramètres de Markov du système augmenté pour vérifier son identifiabilité locale. On suppose que le système initial est s.l.i. Les paramètres de Markov de Σ sont :

$$G^T(p) = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n_x-1}B \end{bmatrix} \tag{3.5.63}$$

Soit q le nombre des paramètres de Σ .

Ainsi en utilisant le théorème (3), on peut déduire que :

$$\text{rang}(J(G)) = \text{rang}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{p=p_0}\right) = q \tag{3.5.64}$$

Les paramètres de Markov de $\bar{\Sigma}$ sont :

$$\bar{G}^T(p) = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & \bar{C}\bar{A}\bar{B} & \bar{C}\bar{A}^2\bar{B} & \dots & \bar{C}\bar{A}^{n_x-1+n_{xc}}\bar{B} \end{bmatrix} \tag{3.5.65}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \bar{G} &= \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{A}^2\bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n_x-1+n_{xc}}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CVSB \\ CV(SAV+R)SB \\ CV(SAV+R)^2SB \\ \vdots \\ CV(SAV+R)^{n_x-1+n_{xc}}SB \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} CB \\ CVSAVSB + CVRSB \\ CV((SAV)^2 + R^2 + 2SAVR)SB \\ \vdots \\ CA^{n_x-1+n_{xc}}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ \vdots \\ CA^{n_x-1}B \\ \vdots \\ CA^{n_x-1+n_{xc}}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \vdots \\ CA^{n_x-1+n_{xc}}B \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5.66}$$

Et comme le système augmenté et le système initial ont le même nombre de paramètres et que Σ est s.l.i., on peut déduire que les deux matrices G et \bar{G} ont le même nombre de colonnes, d'où elles ont le même rang :

$$rang(J(\bar{G})) = rang(J(G)) = q \tag{3.5.67}$$

Ainsi, on peut déduire, en utilisant le théorème 3, que le système augmenté ($\bar{\Sigma}$) est s.l.i..

Nous allons étudier maintenant les propriétés structurelles des sous-systèmes augmentés virtuels ($\hat{\Sigma}_i$).

3.5.3 Propriétés des sous-systèmes augmentés virtuels ($\hat{\Sigma}_i$)

Par souci de clarté, on va considérer un grand système composé de 2 sous-systèmes uniquement. La généralisation est basée sur le même principe.

Pour retrouver dans le cas d'un couplage par les sorties, on propose la matrice complémentaire R suivante :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_c & \frac{-1}{2}A_c & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2}A_c & \frac{1}{2}A_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5.68}$$

Cette matrice vérifie bien $RS = 0$ et $VR = 0$.

On considère le système (Σ) décrit par l'équation (3.5.53).

Le système augmenté $(\bar{\Sigma})$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= SAV + R \\ \bar{B} &= SB \\ \bar{C} &= CV\end{aligned}\tag{3.5.69}$$

avec :

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & \frac{1}{2}A_{1c} & \frac{1}{2}A_{1c} & 0 \\ K_{21}C_1 & A_c & 0 & K_{12}C_2 \\ \hline K_{21}C_1 & 0 & A_c & K_{12}C_2 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{2c} & \frac{1}{2}A_{2c} & A_2 \end{array} \right), \quad \bar{B} = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array} \right), \quad \bar{C} = \left(\begin{array}{cc|cc} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right)\tag{3.5.70}$$

et :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_c & x_c & x_2 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T$$

Le concept de la méthode de recherche de recouvrement consiste à doubler les états communs, ainsi on peut écrire le système augmenté de cette façon aussi :

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_{1c} & 0 & 0 \\ K_{21}C_1 & A_c & 0 & K_{12}C_2 \\ \hline K_{21}C_1 & 0 & A_c & K_{12}C_2 \\ 0 & 0 & A_{2c} & A_2 \end{array} \right), \quad \bar{B} = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array} \right), \quad \bar{C} = \left(\begin{array}{cc|cc} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right)\tag{3.5.71}$$

Les deux systèmes (3.5.70) et (3.5.71) ont le même comportement entrée/sortie.

Hypothèse 3 *On suppose qu'il n'existe pas de paramètres communs entre les sous-systèmes : on considère que p_{m1} et p_{m2} indépendamment l'un de l'autre.*

Ainsi on obtient :

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_{1c} & 0 & 0 \\ K_{21}C_1 & A_{c1} & 0 & K_{12}C_2 \\ \hline K_{21}C_1 & 0 & A_{c2} & K_{12}C_2 \\ 0 & 0 & A_{2c} & A_2 \end{array} \right), \quad \bar{B} = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array} \right), \quad \bar{C} = \left(\begin{array}{cc|cc} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right) \quad (3.5.72)$$

Hypothèse 4 Le système augmenté $\bar{\Sigma}$, donné par l'équation (3.5.72), caractérisé par les matrices $\bar{A}(p_1, p_{m1}, p_2, p_{m2})$, $\bar{B}(p_1, p_2)$ et $\bar{C}(p_1, p_2)$ est s.l.i..

Comme on a indiqué précédemment, on va considérer les sorties des sous-systèmes comme des entrées virtuelles. On construit alors le nouveau système augmenté $\hat{\Sigma}$ s.l.i, caractérisé par les matrices \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} :

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_{1c} & 0 & 0 \\ K_{21}C_1 & A_{c1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{c2} & K_{12}C_2 \\ 0 & 0 & A_{2c} & A_2 \end{array} \right), \quad \hat{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & K_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{array} \right) \quad (3.5.73)$$

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{cc|cc} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right)$$

D'où

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{s1} & 0 \\ 0 & A_{s2} \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} B_{s1} & 0 \\ 0 & B_{s2} \end{pmatrix} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} C_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2} \end{pmatrix} \quad (3.5.74)$$

avec : $\hat{A} \in R^{n_g \times n_g}$ et $n_g = n_{s1} + n_{s2}$

3.5.3.1 Commandabilité des sous-systèmes $\hat{\Sigma}_i$

Lemme 3 Si le système augmenté virtuel est commandable alors les sous-systèmes augmentés virtuels sont aussi commandables.

Preuve 9 Par hypothèse $\hat{\Sigma}$ est commandable donc : le rang de C_{om} (la matrice de commandabilité du $\hat{\Sigma}$) est égal à n_g .

Les matrices de commandabilité de $\hat{\Sigma}_1$ et $\hat{\Sigma}_2$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} C_{om1} &= \begin{bmatrix} B_{s1} & A_{s1}B_{s1} & A_{s1}^2B_{s1} & \dots & A_{s1}^{n_{s1}-1}B_{s1} \end{bmatrix} \\ C_{om2} &= \begin{bmatrix} B_{s2} & A_{s2}B_{s2} & A_{s2}^2B_{s2} & \dots & A_{s2}^{n_{s2}-1}B_{s2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.75)$$

Avec : $n_g = n_{s1} + n_{s2}$

La matrice de commandabilité C_{om} de $\hat{\Sigma}$ s'écrit comme suit :

$$C_{om} = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{A}^{n_g-1}\hat{B} \end{bmatrix} \quad (3.5.76)$$

$$C_{om} = \begin{bmatrix} B_{s1} & 0 & A_{s1}B_{s1} & 0 & \dots & \dots & A_{s1}^{n_{s1}-1}B_{s1} & 0 \\ 0 & B_{s2} & 0 & A_{s2}B_{s2} & \dots & \dots & 0 & A_{s2}^{n_{s2}-1}B_{s2} \end{bmatrix} \quad (3.5.77)$$

En permutant les colonnes, on obtient la matrice suivante de même rang que C_{om} :

$$\left[\begin{array}{c|c} C_{om1} & 0 \\ \hline 0 & C_{om2} \end{array} \right] \quad (3.5.78)$$

Alors : $\text{rang}(C_{om}) = \text{rang}(C_{om1}) + \text{rang}(C_{om2}) = n_{s1} + n_{s2}$.

D'où le rang de C_{om1} est égal à n_{s1} et le rang de C_{om2} est égal à n_{s2} .

Ainsi, on peut conclure que les sous-systèmes augmentés virtuels sont commandables.

3.5.3.2 Observabilité des sous-systèmes $\hat{\Sigma}_i$

Lemme 4 Si le système augmenté virtuel est observable alors les sous-systèmes augmentés virtuels sont aussi observables.

Preuve 10 Par hypothèse $\hat{\Sigma}$ est observable donc : le rang de O_{obs} (la matrice d'observabilité du $\hat{\Sigma}$) est égal à n_g .

Les matrices d'observabilité de $\hat{\Sigma}_1$ et $\hat{\Sigma}_2$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} O_{obs1} &= \begin{bmatrix} C_{s1} & C_{s1}A_{s1} & C_{s1}A_{s1}^2 & \dots & C_{s1}A_{s1}^{n_{s1}-1} \end{bmatrix}^T \\ O_{obs2} &= \begin{bmatrix} C_{s2} & C_{s2}A_{s2} & C_{s2}A_{s2}^2 & \dots & C_{s2}A_{s2}^{n_{s2}-1} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.5.79)$$

La matrice d'observabilité O_{obs} de $\hat{\Sigma}$ s'écrit comme suit :

$$O_{obs} = \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n_g-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2} \\ C_{s1}A_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2}A_{s2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_{s1}A_{s1}^{n_{s1}-1} & 0 \\ 0 & C_{s2}A_{s2}^{n_{s2}-1} \end{pmatrix} \quad (3.5.80)$$

En permutant les lignes, on obtient la matrice suivante de même rang que O_{obs} :

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{obs1} & 0 \\ \hline 0 & O_{obs2} \end{array} \right] \quad (3.5.81)$$

Alors :

$$\text{rang}(O_{obs}) = \text{rang}(O_{obs1}) + \text{rang}(O_{obs2}) = n_{s1} + n_{s2}.$$

D'où le rang de O_{obs1} est égal à n_{s1} et le rang de O_{obs2} est égal à n_{s2} .

Ainsi, on peut conclure que les sous-systèmes augmentés virtuels sont observables.

3.5.3.3 Identifiabilité des sous-systèmes $\hat{\Sigma}_i$

Théorème 13 Si le système global augmenté virtuel, structurellement commandable et observable, est structurellement localement identifiable, alors tous les sous-systèmes ($\hat{\Sigma}_i$) sont aussi structurellement localement identifiables.

Ce théorème peut être facilement démontré par la méthode des paramètres de Markov. (en partant du grand système augmenté virtuel qui a une structure diagonale composée des sous-systèmes ($\hat{\Sigma}_i$)).

Preuve 11 La démonstration sera donnée pour 2 sous-systèmes. La généralisation se base sur les mêmes principes.

Les paramètres de Markov de chaque sous-système ($\hat{\Sigma}_i$) ($i = 1, 2$) sont :

$$\hat{G}_i^T = \left[C_{si}B_{si} \quad C_{si}A_{si}B_{si} \quad C_{si}A_{si}^2B_{si} \quad \dots \quad C_{si}A_{si}^{n_{si}}B_{si} \right] \quad (3.5.82)$$

3.5. Couplage par un état intermédiaire et les sorties

Soit q_i avec ($i = 1, 2$), le nombre de paramètres de chaque sous-système.

Soit $q = q_1 + q_2$ le nombre de paramètres du grand système.

Les paramètres de Markov du système global augmenté virtuel ($\hat{\Sigma}$) sont :

$$\hat{G}_g = \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{B} \\ \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\ \hat{C}\hat{A}^2\hat{B} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n_g}\hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{s1}B_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2}B_{s2} \\ C_{s1}A_{s1}B_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2}A_{s2}B_{s2} \\ C_{s1}A_{s1}^2B_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2}A_{s2}^2B_{s2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_{s1}A_{s1}^{n_{s1}}B_{s1} & 0 \\ 0 & C_{s2}A_{s2}^{n_{s2}}B_{s2} \end{bmatrix} \quad (3.5.83)$$

avec :

$$A_1 \in R^{n_{s1} \times n_{s1}}, A_2 \in R^{n_{s2} \times n_{s2}}, A \in R^{n_g \times n_g}$$

$$n_g = n_{s1} + n_{s2}$$

En permutant les lignes on obtient la matrice suivante de même rang que \hat{G}_g :

$$\left[\begin{array}{c|c} C_{s1}B_{s1} & 0 \\ C_{s1}A_{s1}B_{s1} & 0 \\ C_{s1}A_{s1}^2B_{s1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_{s1}A_{s1}^{n_{s1}}B_{s1} & 0 \\ \hline 0 & C_{s2}B_{s2} \\ 0 & C_{s2}A_{s2}B_{s2} \\ 0 & C_{s2}A_{s2}^2B_{s2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C_{s2}A_{s2}^{n_{s2}}B_{s2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{G}_1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{G}_2 \end{array} \right] \quad (3.5.84)$$

Ainsi :

$$J(\hat{G}_g) = \left(\frac{\partial \hat{G}_g}{\partial p} \right)_{p_0} = \left[\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \hat{G}_1}{\partial p} \right)_{p_0} & 0 \\ \hline 0 & \left(\frac{\partial \hat{G}_2}{\partial p} \right)_{p_0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} J(\hat{G}_1) & 0 \\ \hline 0 & J(\hat{G}_2) \end{array} \right] \quad (3.5.85)$$

Le grand système (Σ_i) est par hypothèse structurellement localement identifiable (s.l.i.) en p_0 , donc d'après la méthode des paramètres de Markov le rang $J(\hat{G}_g) = q$, alors le rang $J(\hat{G}_1) = q_1$ et le rang $J(\hat{G}_2) = q_2$. Ainsi on peut déduire que $(\hat{\Sigma}_i)$ sont s.l.i. en p_0 .

3.6 Synthèse des différents types de couplage

Dans cette section, nous proposons de faire un résumé de tous les types de couplage étudiés dans ce chapitre en présentant les relations de commandabilité, observabilité et identifiabilité structurelle entre le système global et les sous-systèmes (tableaux (3.1), (3.2) et (3.3)).

Table 3.1 – Synthèse des différents types de couplage

Type de couplage	Grand système		Sous-système
Couplage par les entrées	commandable	\leftrightarrow	commandable
	observable	\leftrightarrow	observable
	s.g.i.	\leftrightarrow	s.g.i.
Couplage par les sorties	commandable	\rightarrow	commandable
	observable	\leftrightarrow	observable
	s.g.i.	\rightarrow	s.g.i.

Table 3.2 – Propriétés des système initial et augmenté

	Système initial		Système augmenté
Couplage par les états	commandable	\rightarrow	commandable
	observable	\rightarrow	observable
	s.g.i.	\rightarrow	s.l.i.

La transmission des propriétés structurelles entre le grand système et les sous-systèmes qui le composent est évidente dans les deux sens dans le cas d'un couplage par les entrées, à cause de la structure diagonale des matrices d'état, d'observation et de commande.

Table 3.3 – Propriétés des système augmenté et sous-systèmes augmentés

	Systeme augmenté		Sous-systèmes
Couplage par les états	commandable	→	commandable
	observable	→	observable
	s.l.i.	→	s.l.i.

Dans le cas d'un couplage par les sorties, il a été nécessaire d'introduire des entrées virtuelles. Nous avons montré que les propriétés structurelles de commandabilité, observabilité et identifiabilité se transmettent aux sous-systèmes. Nous avons montré également, pour un cas particulier de ce type de couplage, que si les sous-systèmes sont globalement identifiables, alors le grand système l'est aussi. Ce résultat n'était pas évident dans le cas général. Il est clair que la vérification de l'identifiabilité structurelle du grand système est plus compliquée que celle des sous-systèmes (à cause du nombre de paramètres élevé) mais, l'ajout des entrées virtuelles entraîne une perte de commandabilité du grand système, ce qui complique la vérification de son identifiabilité structurelle (réalisation non minimale, d'où l'impossibilité d'utiliser le théorème de similarité).

Pour le cas de couplage par les états intermédiaires, nous avons utilisé la transformation dite d'expansion proposée dans le cadre du principe de l'inclusion pour structurer le système étudié (en le rendant plus simple). Cette transformation qui consiste à faire un changement de base, permet d'atteindre un "modèle fictif" structuré (le modèle augmenté). La transmission des propriétés structurelles du système original au système augmenté (tableau 3.2) est possible sous quelques conditions sur la matrice complémentaire R . Avec ces conditions ($VR = 0$), on se retrouve dans le cas d'un couplage par les sorties. Avec ce choix de la matrice R , nous avons montré que les propriétés structurelles du système augmenté se transmettent aux sous-systèmes augmentés (tableau 3.3).

L'intérêt de ces études de propriétés structurelles en général, et de l'identifiabilité structurelle globale en particulier est de réduire la complexité de l'identification du grand système en adoptant une **approche d'identification décentralisée**.

3.7 Procédure d'identification décentralisée

L'utilité du théorème (10) est de simplifier l'identification du système global en estimant les paramètres de chaque sous-système. On vérifie d'abord que le grand système est structurellement globalement identifiable. Dans ce cas, en utilisant le théorème (10), on peut déduire que les sous-systèmes sont aussi structurellement globalement identifiables. On va donc, sous-système par sous-système, identifier les paramètres associés. Pour ce faire, nous allons récupérer le jeu d'entrée/sortie du sous-système considéré, ainsi que les données des sorties des sous-systèmes qui sont en couplage avec lui. Les paramètres globaux sont alors la réunion de tous les paramètres ainsi identifiés.

Le résumé de cette procédure est présenté par ces étapes :

Initialisation :

1. Choisir les modèles locaux, et développer le modèle global :
2. Etudier l'identifiabilité du modèle global
3. Récupérer les mesures (entrées/sorties) à partir du grand système

en parallèle, $\forall i \in 1 \dots M$

- 4a. Sélectionner les entrées locales u_i , les sorties locales y_i , les sorties y_j qui influencent le sous système (i), et les entrées communes u_c (figure 3.5) .

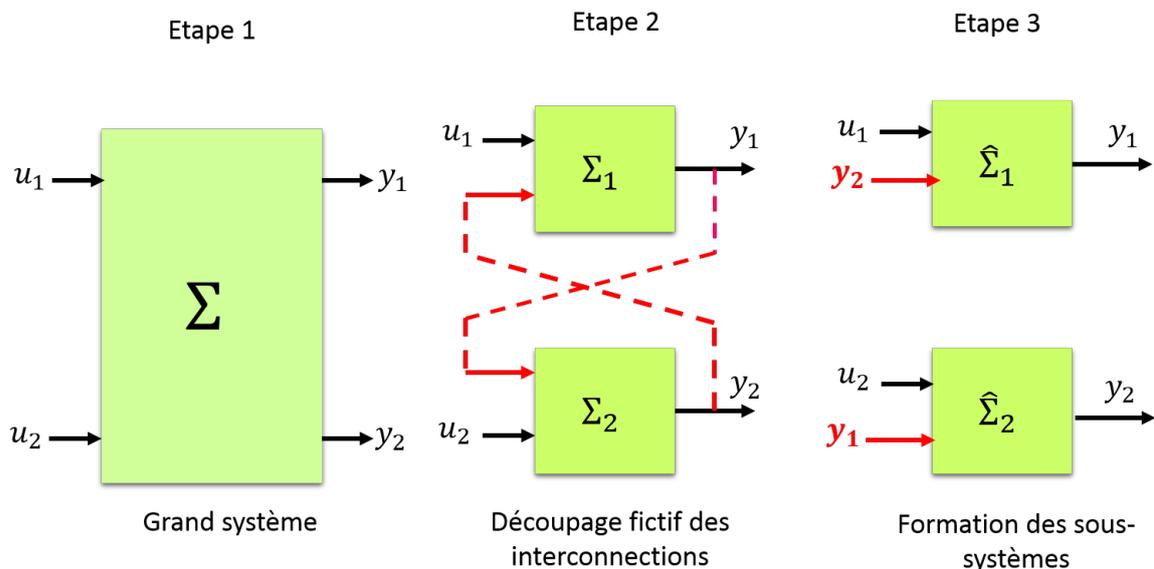


FIGURE 3.5 – Les étapes de décomposition d'un modèle interconnecté (couplage par les sorties)

4b. Identification locale : détermination des paramètres locaux (p_i)

Déduire les paramètres du système global :

5. Déduction des paramètres du système global : $p = (p_1, p_2, \dots, p_M)$

L'intérêt de cette approche décentralisée sera illustré à travers 3 applications dans le chapitre suivant.

3.8 Conclusion

Les systèmes de grande taille, caractérisés par un nombre élevé de variables d'états ou de variables d'entrées/sorties, ne peuvent être étudiés de manière efficace que s'ils sont décomposés en sous-systèmes interconnectés de dimensions plus faibles. Ceci mène à une structure décentralisée beaucoup plus simple à manipuler pour l'étude de l'identification.

Ainsi, dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés structurelles (commandabilité, observabilité et identifiabilité) de 3 types de structures de modèles différentes. Nous avons présenté une synthèse sur la transmission de ces propriétés entre le grand système et les sous-systèmes qui le composent. L'étude de ces propriétés nécessite dans certains cas la structuration globale du modèle du système (recouvrement par les états).

Nous avons également proposé une procédure décentralisée d'identification qui se base sur les propriétés structurelles du grand système. Cette procédure permet de réduire la complexité de l'étude de l'identification du grand système.

Dans le chapitre suivant, on va montrer l'intérêt des théorèmes développés dans ce chapitre pour la simplification de l'étude de l'identification de structures présentées dont le couplage est par les sorties à travers des exemples inspirés de la thermique des bâtiments.

Chapitre 4

Mise en œuvre de la procédure d'identification décentralisée

*Parfois, j'ai l'impression que
ma vie est un grand bâtiment,
fait d'une succession de pièces
en enfilades. Je visite. J'avance
et je ne peux jamais revenir en
arrière. Chaque fois que j'ouvre
une porte, je tombe sur un
nouveau décor.*

Marie-Sabine Roger

Sommaire

4.1	Présentation du chapitre	88
4.2	Système et modèle thermique étudié	89
4.2.1	Modélisation thermique des Bâtiments Multi-Zone	89
4.2.2	Description du système étudié	89
4.2.3	Modèle électrique équivalent	90
4.3	Hypothèses d'étude et méthode d'identification utilisée	91
4.3.1	Hypothèses d'étude	91
4.3.2	Méthode d'identification utilisée	92
4.3.3	Indicateurs de comparaison	92
4.4	Simulation générique par Matlab	93

4.4.1	Conditions expérimentales	93
4.4.2	Identification : pem avec le choix algorithme idnlgrey	94
4.4.3	Identification : pem avec le choix l’algorithme idgrey (cas idéal)	98
4.5	Simulation des données par un simulateur thermique TRN-	
	SYS	99
4.5.1	Présentation de TRNSYS	100
4.5.2	Caractéristiques physiques du bâtiment	100
4.5.3	Modèle entrées/sorties	100
4.5.4	Exemple : un bâtiment composé de 3 pièces	101
4.5.5	Identification	102
4.5.6	Intérêt de la prise en compte du couplage entre les différentes pièces	106
4.6	Application réelle	106
4.6.1	Description du bâtiment et des équipements de mesures	107
4.6.2	Modèle	108
4.6.3	Conditions expérimentales	109
4.6.4	Étude de sensibilité des paramètres	110
4.6.5	Identification paramétrique	112
4.6.6	Validation du modèle	113
4.7	Conclusion	114

4.1 Présentation du chapitre

Jusqu’à présent, nous nous sommes focalisés sur l’analyse d’identifiabilité structurelle des modèles proposés. Il est temps de passer à l’étape suivante : l’identification d’un système de grande taille. La question qui se pose maintenant est : comment allons-nous procéder pour estimer les valeurs des paramètres de ce système ? Ainsi ce chapitre est consacré à illustrer l’intérêt de la procédure d’identification décentralisée présentée dans le chapitre précédent à travers 3 exemples de la thermique des bâtiments avec **des modèles interconnectés de type1 (couplage par les sorties)** :

- Simulation générique par Matlab
 - Simulation des données par un simulateur thermique TRNSYS
 - Application réelle : identification des paramètres d’une salle à Centrale Supélec
- Cet intérêt est montré en faisant une comparaison entre l’approche décentralisée proposée et une approche globale (centralisée).

4.2 Système et modèle thermique étudié

Nous allons présenter dans cette section, le modèle principal utilisé pour les 3 exemples étudiés dans ce chapitre. Quelques changements peuvent avoir lieu d'une application à une autre (ajout des entrées).

4.2.1 Modélisation thermique des Bâtiments Multi-Zone

Un bâtiment est généralement considéré comme un ensemble de volumes (de forme généralement parallélépipédique) limités par des parois planes horizontales ou verticales. Chaque volume représente une pièce (zone). L'état thermique de chaque zone est représenté par une seule température (température de l'air de la pièce). Les faces externes du bâtiment sont le siège d'un flux convectif avec l'air extérieur. Les ouvertures (fenêtres, portes, . . .) permettent à l'air de circuler entre les zones, et entre ces zones et l'extérieur. Les parois transparentes (vitrages) qui se trouvent généralement sur les façades extérieures, permettent au rayonnement solaire de pénétrer à l'intérieur du bâtiment.

La modélisation d'un bâtiment ou d'un système est basée essentiellement sur un nombre plus ou moins important d'hypothèses simplificatrices et a comme objectif la caractérisation de l'état thermique des zones.

Le comportement de chaque zone d'un bâtiment peut être décrit par un ensemble d'équations algébriques, différentielles et/ou matricielles.

La modélisation thermique est généralement obtenue avec des modèles RC, qui illustrent des équivalences entre la théorie des circuits et de la thermodynamique pour décrire la chaleur et les flux ([Andersen et al. \(2000\)](#), [Gouda et al. \(2002\)](#)). En utilisant cette approche, des schémas de circuits sont utilisés pour décrire la dynamique thermique d'un bâtiment où la tension représente la température, le courant représente le flux de chaleur (chauffage), les résistances représentent la résistance des matériaux au flux de chaleur, et les condensateurs représentent le stockage de la chaleur dans les matériaux.

4.2.2 Description du système étudié

On considère un grand système représentant un bâtiment (ou une maison) composé de M pièces juxtaposées. Le modèle de couplage choisi est un couplage par les sorties

4.2. Système et modèle thermique étudié

entre les pièces voisines, de sorte que chaque sous-système (pièce) est couplé avec au plus deux sous-systèmes (voisins) seulement (figure 4.1) (si on considère 1 bâtiment à un seul étage).

Toutes les pièces ont deux voisins (donc deux couplages) sauf les pièces 1 et M qui possèdent un seul voisin (donc un seul couplage).

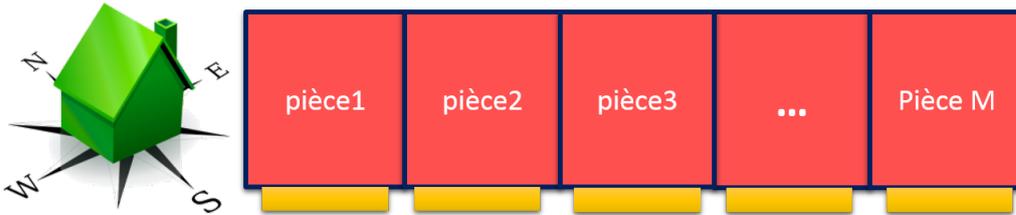


FIGURE 4.1 – Les pièces mises en cascade

4.2.3 Modèle électrique équivalent

Chaque sous-système correspond à une pièce dont les entrées sont les flux de chauffage P_i , la température extérieure T_{ext} qui est commune à tous les sous-systèmes, et la (les) température(s) de l'air de la (des) pièce(s) voisine(s). La sortie est la température de l'air de la pièce T_i . La température du mur d'une pièce est notée par T_{mi} . Le couplage représente l'influence thermique entre les pièces voisines, il se traduit par les résistances de couplage $R_{i,i-1}$ et $R_{i,i+1}$ sur le modèle électrique équivalent donné en figure (4.2).

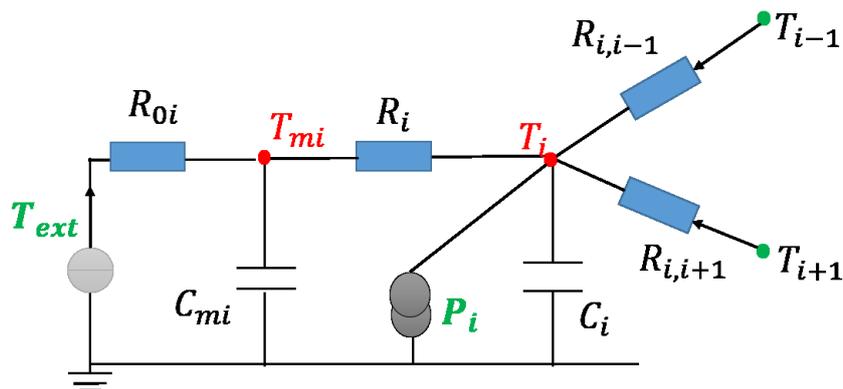


FIGURE 4.2 – Schéma électrique équivalent du sous-système (i)

Les paramètres inconnus (à estimer) sont les résistances et les capacités pour chaque sous-système : C_{mi} , C_i , R_i , R_{0i} et R_{ij} avec ($j = i - 1$ ou $j = i + 1$).

Chaque sous-système est décrit par la représentation d'état (3.4.18) avec :

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_{mi}} \left(\frac{1}{R_{0i}} + \frac{1}{R_i} \right) & \frac{1}{C_{mi}R_i} \\ \frac{1}{C_i R_i} & \frac{-1}{C_i} \left(\frac{1}{R_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{R_{ij}} \right) \end{pmatrix}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_{mi}R_{0i}} & 0 \\ \frac{1}{C_i} & 0 & \frac{1}{C_i R_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \begin{pmatrix} T_{mi} \\ T_i \end{pmatrix} \quad U_i = \begin{pmatrix} P_i \\ T_{ext} \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}$$

Avec :

- \mathcal{N}_i est l'ensemble des pièces voisines à la pièce i
- T_{i+1} et T_{i-1} sont les températures de l'air des pièces voisines de la pièce i (en couplage avec la pièce i).
- \hat{u}_i représente les entrées virtuelles qui sont les sorties des pièces voisines (T_{i+1} et T_{i-1})

Nous avons choisi ce modèle car il est **structurellement identifiable** quelle que soit sa taille M . On peut prouver cette propriété en utilisant la méthode des similarités. On peut prouver également que les sous-systèmes sont globalement identifiables (Voir Annexe A).

4.3 Hypothèses d'étude et méthode d'identification utilisée

Nous rappelons dans cette section les hypothèses d'étude et nous présentons la méthode d'identification utilisée pour les trois exemples étudiés.

4.3.1 Hypothèses d'étude

On rappelle les hypothèses d'étude suivantes :

Hypothèse 5

- Chaque structure représente un grand système Σ composé de M sous systèmes Σ_i , ($i = 1 \dots M$)
- Le vecteur p des paramètres du Σ est la concaténation des paramètres locaux p_i (les paramètres des Σ_i), ($i = 1 \dots M$)

$$p = \left(p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_M \right)^T \quad (4.3.1)$$

- Il n'existe pas de paramètres communs entre les sous-systèmes Σ_i
- Les paramètres de couplage sont dupliqués
- On suppose que le grand système avec les paramètres dupliqués est s.g.i..

4.3.2 Méthode d'identification utilisée

On précise qu'on souhaite estimer toutes les résistances et les capacités thermiques du modèle électrique équivalent, ainsi tous les zéros dans les matrices d'état, de commande et d'observation seront fixés.

Pour estimer les paramètres, on va utiliser la fonction pem (prediction error method), sur Matlab, pour les modèles de type boîte grise à temps continu sous forme d'équation d'état. Cette fonction utilise l'algorithme de minimisation des erreurs de prédiction pour mettre à jour les paramètres du modèle initial. On relance plusieurs fois cette minimisation afin d'affiner les paramètres du modèle et obtenir des bons fits d'estimation.

Nous avons également utilisé deux types d'algorithmes sur des modèles de type boîte grise linéaires : l'un spécifié par **idgrey** et l'autre spécifié par **idnlgrey**. Nous avons utilisé ces deux algorithmes pour étudier la sensibilité des résultats d'identification obtenus dans le cas global et décentralisé par rapport à l'algorithme utilisé.

4.3.3 Indicateurs de comparaison

On étudiera 3 indicateurs pour comparer les résultats d'identification de l'approche globale et l'approche décentralisée :

- **l'erreur paramétrique maximale (EPM)** de l'approche utilisée (globale ou décentralisée) correspond au maximum des erreurs relatives calculées sur chacun des paramètres.

Chaque erreur est définie par la formule suivante :

$$(EP)_i = 100 \left| \frac{\text{valeur estimée } (p_i) - \text{valeur réelle } (p_i)}{\text{valeur réelle } (p_i)} \right|$$

où p_i est un paramètre du système étudié.

- **l'ajustement (ou le fit) minimal (Am)** correspond au minimum des ajustements calculés sur les différentes sorties. Ces ajustements indiquent la ressemblance entre les sorties réelles et les sorties mesurées.

$$Am = 100 \left(1 - \frac{\|\hat{y}(t) - y(t)\|}{\|y(t) - moy(y(t))\|} \right) \quad (4.3.2)$$

où $\hat{y}(t)$ est la sortie simulée du modèle pour les entrées données. Un ajustement de 100 % signifie donc que la sortie du modèle de coïncide avec la sortie mesurée.

- **le temps d'identification** calculé comme la somme des temps d'identification de tous les sous-systèmes qui composent le grand système (calcul non parallélisé).

Les deux premiers indicateurs concernent la qualité du résultat de l'identification. Le troisième indicateur est intéressant pour analyser le gain éventuel en temps de calcul.

Le premier indicateur sera calculé uniquement dans le premier exemple où les vraies valeurs des paramètres sont connues.

4.4 Simulation générique par Matlab

Nous proposons dans cette partie, de tester la procédure d'identification développée dans le chapitre précédent sur un exemple académique (figure 4.2), dont les paramètres sont connus et dont les conditions expérimentales sont idéales (entrées riches en fréquence).

Les valeurs de ces paramètres ont été choisies différentes d'une pièce à l'autre mais restent proches des valeurs données dans le tableau (4.1).

Table 4.1 – Valeurs moyennes des paramètres

p_i	C_{mi}	C_i	R_i	R_{0i}	R_{ij}
valeur réelle	10	8	4	3.5	2.5

4.4.1 Conditions expérimentales

Pour procéder à l'identification, nous avons choisi des conditions idéales : nous avons utilisé le même modèle pour la génération des données (simulation) et pour l'identification et nous avons choisi des signaux d'entrée riches en fréquence de type PRBS (Pseudo Random binary sequence), RGS (Random Gaussian Signal) et RBS (Random

Binary Signal). On a étudié deux cas : dans le premier cas les sorties sont non bruitées et dans le deuxième cas, les sorties sont bruitées. Nous avons initialisé les paramètres à $\pm 20\%$ des vraies valeurs.

4.4.2 Identification : pem avec le choix algorithme idnlgrey

Pour analyser les résultats de l'identification, on a traité deux cas : le premier cas est l'identification dans un cadre idéal non bruité et pour le deuxième cas, on a ajouté des bruits sur les sorties.

4.4.2.1 Cas idéal

Les résultats des calculs des indicateurs pour un système global composé de M sous-systèmes sont les suivants : le tableau (4.2) donne les ajustements minimaux (A_m) et le tableau (4.3) fournit les résultats d'erreur paramétrique maximale, dans les cas d'identification globale (IG) et décentralisée (ID).

Table 4.2 – Influence de M sur l'ajustement

M	$A_m(\text{IG})(\%)$	$A_m(\text{ID})(\%)$
$M=2$	100	100
$M=3$	100	100
$M=4$	100	100
$M=5$	99.76	100
$M=6$	99.54	100
$M=7$	98.94	100
$M=10$	N/A	100

A partir de ces résultats, on peut remarquer que plus le nombre des sous-systèmes est grand, et plus l'identification du grand système devient compliquée : par exemple pour $M = 10$ (on a 20 états et 49 paramètres) la procédure d'identification échoue à donner un résultat. On note aussi, dans le cas global, que le pourcentage des erreurs paramétriques augmente si la taille du système augmente, et la valeur minimale des fits des sorties diminue progressivement, ce qui montre la dégradation de la qualité de l'identification. Par contre, en utilisant l'approche décentralisée (identification de chaque sous-système) on obtient des bons résultats d'identification avec un ajustement

de 100% et une erreur paramétrique nulle.

Table 4.3 – Influence de M sur l'EPM

M	EPM (IG)(%)	EPM (ID)(%)
$M=2$	0	0
$M=3$	0	0
$M=4$	0	0
$M=5$	0.64	0
$M=6$	0.98	0
$M=7$	1.2	0
$M=10$	N/A	0

On a fait aussi une comparaison du temps d'identification entre les deux approches. Le tableau (4.4) compare le temps d'identification pour le système global (IG) et le temps d'identification décentralisée (ID).

Table 4.4 – Influence de M sur le temps d'identification

M	temps (IG) (min)	temps (ID) (min)
$M=2$	2.65	1.75
$M=3$	5.77	2.57
$M=4$	7.10	4.20
$M=5$	9.15	5.14
$M=6$	14.20	6.28
$M=7$	19.30	7.16
$M=10$	N/A	11.25

Les résultats montrent un autre intérêt du théorème (10) qui est la réduction du temps d'identification dans l'approche décentralisée par rapport à celui de l'approche globale. Cet exemple académique simple met en avant l'intérêt du théorème (10) et de la procédure d'identification qui en découle.

4.4.2.2 Cas bruité (bruit sur les sorties)

Dans le cadre d'une validation de l'approche utilisée, il est intéressant de regarder comment les résultats d'identification sont sensibles aux bruits. Pour étudier ce point, on a ajouté des bruits gaussiens sur toutes les sorties pour un système global composé de 6 sous-systèmes. On a augmenté progressivement le rapport signal sur bruit (SNR) et on a calculé la moyenne des fits minimaux pour 20 tirages de Monte Carlo, pour l'approche globale et l'approche décentralisée comme le montre la figure (4.3). On a remarqué aussi qu'avec l'approche décentralisée on a une réduction de 60% sur la moyenne du temps de calcul d'identification par rapport à l'approche globale.

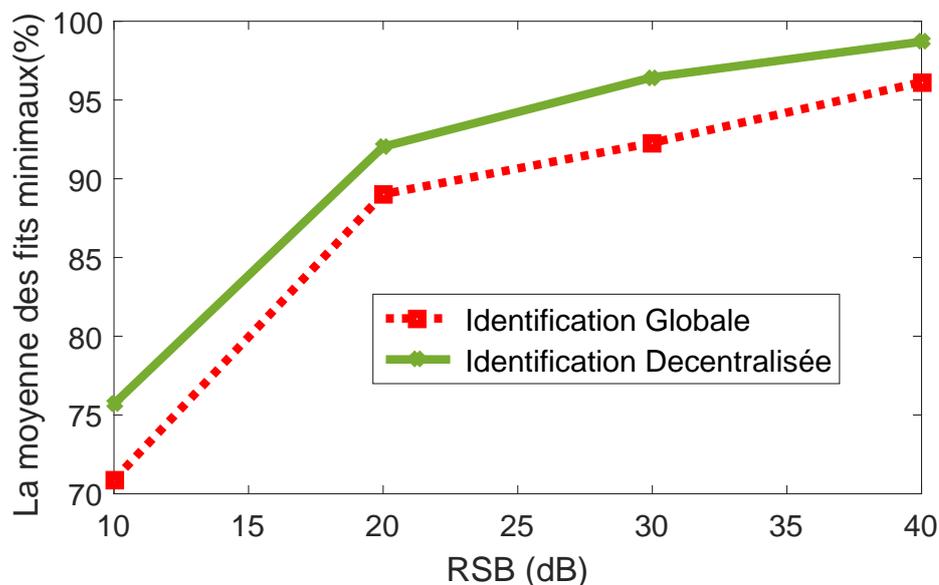


FIGURE 4.3 – Comparaison des ajustements minimaux ($M=6$)

Cette expérience semble montrer que la démarche proposée est moins sensible aux bruits de mesure.

Dans le tableau (4.5), on présente les moyennes et les variances des paramètres estimés du sous-système 1 dans le cas d'un SNR de 40 dB et pour 20 tirages de Monte Carlo. Les bonnes valeurs de variances et de moyennes des paramètres qui sont proches des vraies valeurs montrent bien la bonne qualité de l'identification.

Table 4.5 – Paramètres du sous-système 1

Paramètre	C_1	R_{01}	R_{12}	Cm_1	R_1
Valeur réelle	8	3.5	2.5	10	4
Moyenne estimée	7.94	3.51	2.51	9.92	3.98
Variance	$3.86 \cdot 10^{-4}$	$4.56 \cdot 10^{-4}$	$4.35 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$5.68 \cdot 10^{-4}$

4.4.2.3 Reconstruction du grand système (cas $M = 6$)

Pour valider l'approche décentralisée proposée, on a reconstruit le grand système à partir des valeurs des paramètres estimés des sous-systèmes. La figure 4.4 présente une comparaison entre la sortie du sous-système 1 simulée (réelle) et celle reconstruite. Cette figure indique ainsi une reproduction satisfaisante du comportement dynamique de la sortie avec un fit de 99 %.

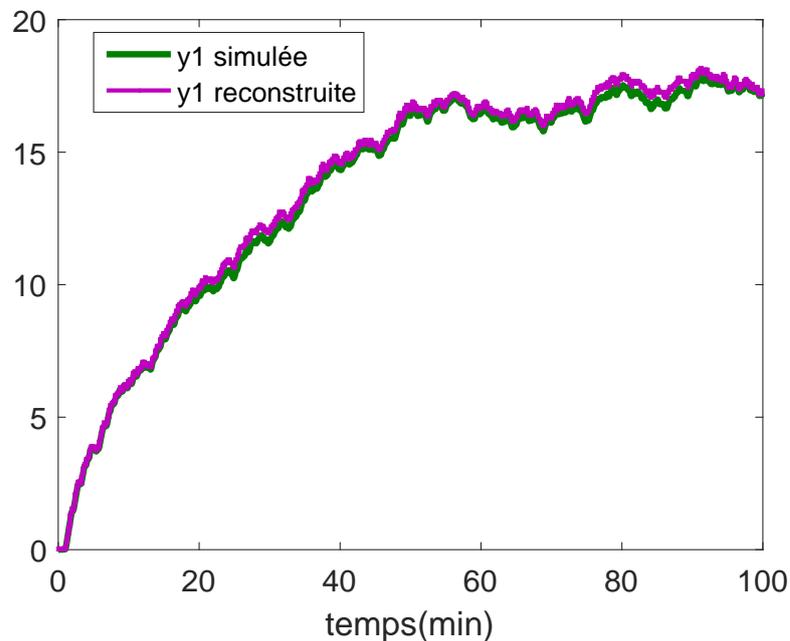


FIGURE 4.4 – Comparaison entre la sortie du sous-système 1 simulée (réelle) et celle reconstruite

4.4.3 Identification : pem avec le choix l’algorithme idgrey (cas idéal)

Les expériences précédentes pour le cas $M = 10$, ne permettent pas de déterminer les valeurs des paramètres malgré le nombre de paramètres (49) pas trop grand, ce qui nous a amené à poser la question sur le type de l’algorithme utilisé. Nous avons ainsi utilisé la méthode pem avec le choix l’algorithme idgrey et nous avons augmenté la taille du système. La figure (4.5) présente une comparaison au niveau du temps nécessaire pour estimer les paramètres, entre l’approche décentralisée et l’approche globale.

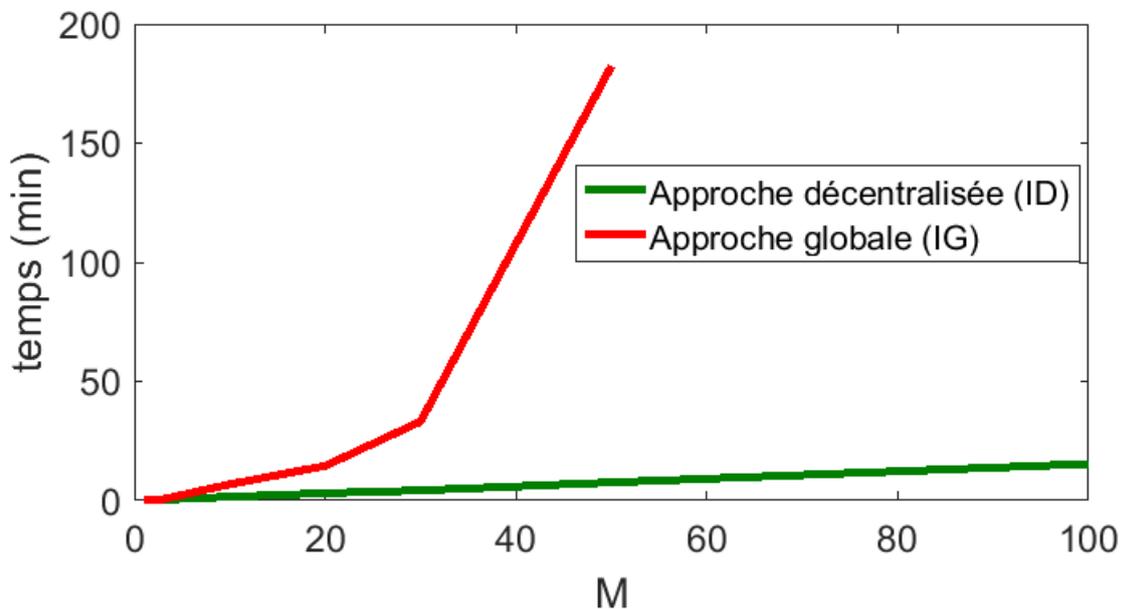


FIGURE 4.5 – l’influence de la taille M sur le temps d’identification (comparaison entre l’approche ID et l’approche IG)

On peut remarquer le changement d’algorithme ne remet pas en cause les résultats trouvés précédemment et la qualité de l’approche décentralisée proposée : en effet, pour le cas $M = 10$, on arrive à déterminer les paramètres mais à partir de $M = 30$ sous-systèmes (178 paramètres), on remarque que le temps augmente (presque 8 fois le temps de calcul de l’approche décentralisée), même remarque pour le cas $M = 50$, avec un nombre de paramètres de 298, le temps pour l’approche globale est plus que 3 heures alors que celui de l’approche décentralisée ne dépasse pas 8 minutes. Alors que pour 100 sous-systèmes (598 paramètres), le solveur échoue à donner un résultat avec l’approche globale.

Nous avons également comparé les fits d'estimation (AmE) et de validation (AmV) (pour un autre jeu de données) minimaux de l'approche globale et l'approche décentralisée. Les résultats sont présentés sur le tableau (4.6).

Table 4.6 – Influence de M sur l'ajustement (comparaison entre l'approche ID et l'approche IG)

M	AmE(IG)(%)	AmE(ID)(%)	AmV(IG)(%)	AmV(ID)(%)
$M=1$	100	100	100	100
$M=3$	100	100	99.94	100
$M=10$	98.86	100	98.82	99.93
$M=20$	98.82	100	98.54	99.86
$M=30$	96.27	100	89.41	99.89
$M=50$	94.75	100	86.7	98.86
$M=100$	N/A	100	N/A	98.84
$M=150$	N/A	100	N/A	98.80

On remarque que le fit d'estimation pour le cas de l'approche décentralisée est toujours de 100% alors que dans l'approche globale la ressemblance entre les signaux mesurés et les signaux estimés diminue avec l'augmentation de la taille (la complexité du système). Ainsi, on peut conclure que l'efficacité de l'approche décentralisée est indépendante du choix de solveur alors que l'approche globale est liée à ce choix, et à partir d'un certain nombre de paramètres, cette méthode ne donne plus de résultats.

Il est intéressant maintenant de tester l'approche décentralisée proposée sur un exemple où les vraies valeurs des paramètres sont inconnues.

4.5 Simulation des données par un simulateur thermique TRNSYS

Dans cette partie, nous allons utiliser un simulateur thermique (TRNSYS) pour générer les données entrées/sorties.

4.5.1 Présentation de TRNSYS

TRNSYS (TRANsient Simulation program) (**TRN**) est un outil de référence mondiale de simulation dynamique de bâtiments et de systèmes. Il offre une interface graphique performante et moderne. Ce logiciel permet le développement de différents modèles numériques et l'exécution d'études de simulations dynamiques. Les modèles numériques obtenus des travaux de recherche sont ainsi facilement simulés.

Avec TRNSYS, on peut simuler en fonction de l'emplacement, des matériaux de construction utilisés, l'orientation, ... le comportement énergétique d'un bâtiment et de ses équipements (chauffage, climatisation). Les composants disponibles dans la bibliothèque de TRNSYS permettent de simuler, en régime transitoire, les bâtiments monozones ou multizones, les systèmes de climatisation et de chauffage, les plus simples comme les plus complexes. On peut également donner un aspect plus réel aux simulations en utilisant des conditions météorologiques et différentes formes d'énergie fournies par le logiciel.

4.5.2 Caractéristiques physiques du bâtiment

Pour avoir un couplage par les sorties dans les systèmes simulés par TRNSYS, nous avons utilisé des cloisons avec des matériaux légers entre les pièces.

Le cahier des charges pour l'ensemble des éléments de construction, des matériaux, des zones, et les valeurs associées d'une pièce est donné dans les tableaux (4.7), (4.8) et (4.9).

Table 4.7 – Les Caractéristiques d'une pièce

longueur (m)	largeur (m)	hauteur (m)	surface (m^2)	volume (m^3)
5	5	5	25	125

4.5.3 Modèle entrées/sorties

Nous allons garder le même modèle que celui présenté au début du chapitre mais nous allons considérer des entrées qui sont proches de la réalité physique : en effet, nous allons simuler les températures intérieures dans chaque zone du bâtiment, en utilisant les caractéristiques et les données météorologiques du bâtiment. Les entrées réelles du

Table 4.8 – Les éléments de construction des murs

Description	Type de matériau	Épaisseur totale (m)
mur extérieur	M1, M2, M3	0.187
mur intérieur	M4, M5, M6	0.12
sol	M7, M8	0.025
plafond	M9	0.141

Table 4.9 – Spécifications des matériaux de construction des murs

ID	Description
M1	isolant minéral StoTherm
M2	plâtre externe
M3	plâtre interne
M4	bois léger
M5	laine de V
M6	lame d'air
M7	béton armé
M8	sol linoléum
M9	matériau de toit-terrasse (roofdeck)

modèle sont donc la température extérieure et les flux de chauffage pour chaque pièce. Les sorties sont les températures intérieures de chaque zone. Un schéma de synthèse de la génération des données en vue de l'identification est présenté par la figure (4.6).

4.5.4 Exemple : un bâtiment composé de 3 pièces

Nous proposons de présenter le comportement du système dans le cas de $M = 3$ (figure 4.7). Le flux de chauffage P_i de chaque pièce et la température extérieure T_{ext} sont représentées par la figure (4.8). Les températures intérieures T_i de chaque pièce sont représentées par la figure (4.9).

Les simulations sont faites durant un mois (720 heures) et les données météo sont de Stockholm (Janvier). Toutes les données sont enregistrées avec un temps d'échantillonnage de 15 minutes, ce qui donne des signaux de 2880 points.

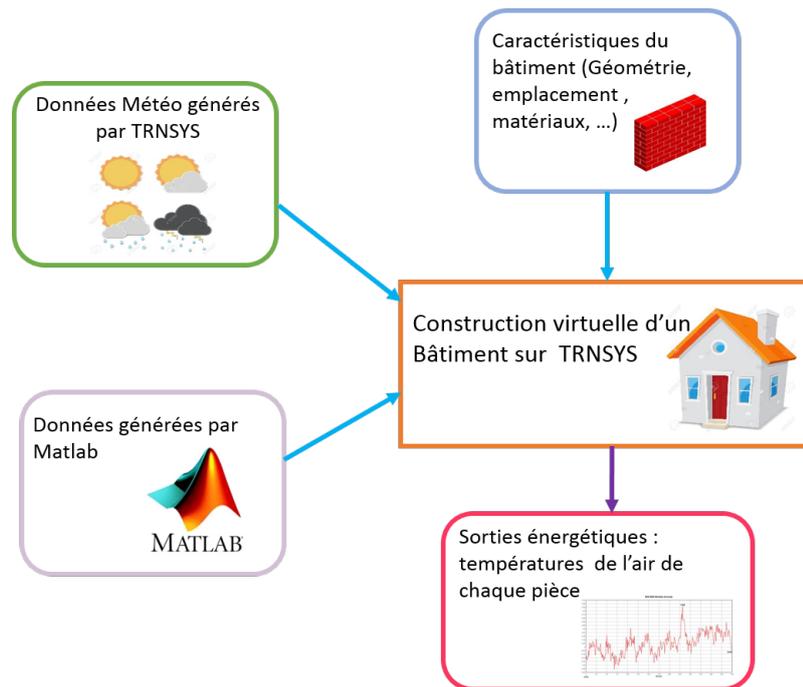


FIGURE 4.6 – Synthèse de la génération des données en vue de l'identification

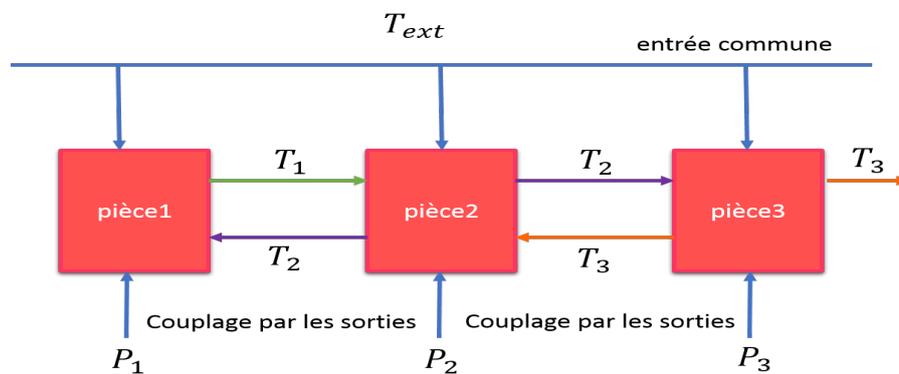


FIGURE 4.7 – Exemple d'un bâtiment composé de 3 pièces

4.5.5 Identification

Pour procéder à l'identification, nous allons utiliser une partie des données générées par TRNSYS (1440 points), l'autre partie est utilisée pour la validation (1440 points). L'objectif principal de cette étude est d'analyser l'impact du nombre M de pièces sur l'identification.

Une comparaison entre les résultats fournis par notre identification décentralisée (ID) et ceux obtenus par une identification globale (IG) est présentée. Pour donner une

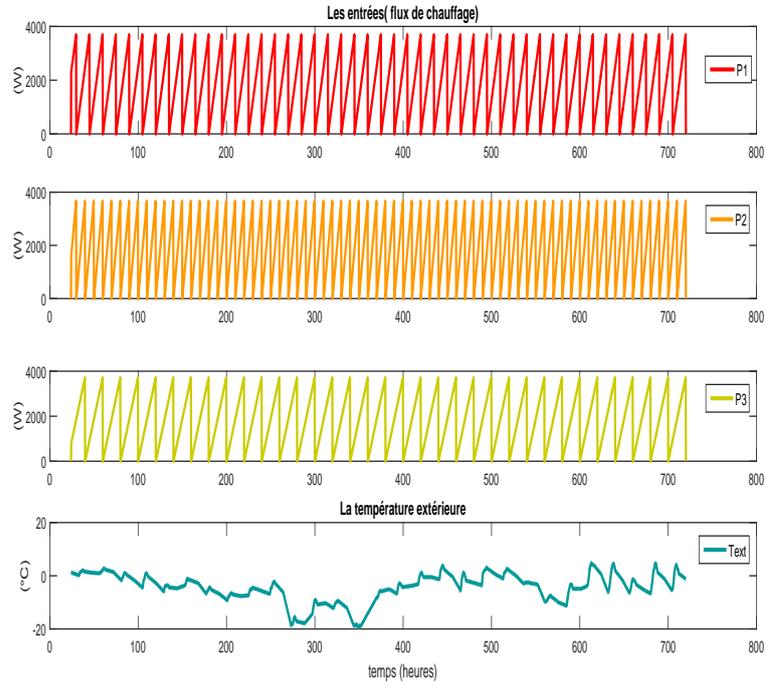


FIGURE 4.8 – Les flux de chauffage et la température extérieure

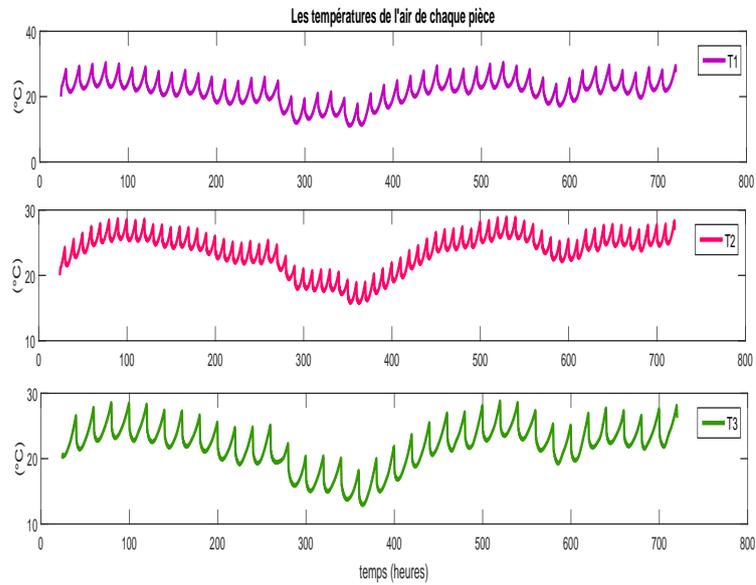


FIGURE 4.9 – La température intérieure de chaque pièce

comparaison plus quantitative, nous allons calculer les indicateurs de temps et de fit. Nous proposons d'ajouter un autre indicateur :

- l'erreur relative maximale (mE) qui présente la différence entre les valeurs des paramètres estimés par la méthode globale et celles par la méthode décentralisée. Cet indicateur est calculé pour montrer la cohérence entre les valeurs des paramètres estimés dans les deux cas (identification globale et décentralisée). Cet indicateur est calculé comme suit :

$$(mE)_i = \left| \frac{\text{valeur estimée (IG)} (p_i) - \text{valeur estimée (ID)} (p_i)}{\text{valeur estimée (ID)}(p_i)} \right|$$

où p_i est un paramètre du système étudié.

Les valeurs estimées des paramètres

Nous allons considérer le cas de $M = 3$. Le tableau (4.10) présente les valeurs estimées des paramètres dans le cas d'une identification globale et d'une identification décentralisée. Nous remarquons bien que les valeurs sont très proches ce qui montre la cohérence des résultats obtenus. On précise également que les variances sur les paramètres sont faibles ($= 10^{-5}$) ce qui prouve la bonne qualité de l'identification.

Table 4.10 – Comparaison des valeurs estimées des paramètres avec l'approche globale et l'approche décentralisée (M=3)

Paramètre	Identification globale	Identification décentralisée
C_1	714.28	713.92
C_2	434.7	435.2
C_3	714.28	714.43
C_{m1}	1340,78	1341,2
C_{m2}	1300,51	1300,78
C_{m3}	1256,76	1255,89
R_1	29.10^{-5}	$29,06.10^{-5}$
R_2	18.10^{-5}	$17,98.10^{-5}$
R_3	19.10^{-5}	$19,12.10^{-5}$
R_{12}	11.10^{-3}	$11,02.10^{-3}$
R_{23}	11.10^{-3}	$10,92.10^{-3}$
R_{01}	5.10^{-3}	$5,03.10^{-3}$
R_{02}	8.10^{-3}	$8,02.10^{-3}$
R_{03}	6.10^{-3}	$6,05.10^{-3}$

Comparaison entre l'approche décentralisée et l'approche globale

Les résultats de l'identification sont présentés dans les tableaux (4.11), (4.12) et (4.13).

Table 4.11 – Influence de M sur le fit d'estimation (mFE) et de validation (mFV)

M	n_p	mFE(%)	mFE(%)	mFV(%)	mFV(%)
		(GI)	(DI)	(GI)	(DI)
M=2	9	91.32	92.89	90.17	91.54
M=4	19	89.24	91.76	87.53	90.75
M=6	29	86.83	90.86	85.96	90.56
M=8	39	85.87	90.73	84.63	89.76
M=10	49	84.16	89.57	82.74	88.87

Table 4.12 – Influence de M sur l'erreur relative

M	2	3	6	8	10
l'erreur relative maximale	0.19	0.22	0.31	0.39	0.42

Table 4.13 – Influence de M sur le temps de calcul de l'identification

M	T(min)	T(min)
	(GI)	(DI)
M=2	1.78	0.98
M=3	3.23	1.51
M=6	10.12	3.08
M=8	14.86	4.28
M=10	17.53	5.66

Comme on aurait pu s'y attendre, dans le cas de l'approche globale la ressemblance entre les sorties estimées et les sorties simulées diminue lorsque la dimension M augmente. Au contraire, l'identification décentralisée fournit un très bon résultat : le fit est presque constant (à environ 89 %) sur toutes les expériences, quelle que soit la taille M . Pour les valeurs estimées des paramètres, on ne remarque pas de différence

significative entre les deux méthodes (tableau 4.12), ce qui montre la cohérence des résultats obtenus.

Une dernière amélioration est le temps nécessaire pour l'identification des paramètres, on remarque qu'il est nettement plus court dans le cas de l'approche décentralisée (tableau 4.13). Par exemple, la réduction du temps est d'environ 70% pour $M = 6$. Cette réduction du temps peut être très importante et intéressante pour la construction de modèles plus grands.

4.5.6 Intérêt de la prise en compte du couplage entre les différentes pièces

Il est intéressant de montrer l'importance de prendre en compte explicitement les couplages thermiques dans le modèle d'identification. Ainsi, une autre expérience a été réalisée sur un bâtiment de 3 pièces, dans lequel une comparaison des résultats obtenus avec et sans couplages dans le modèle est présentée. Les résultats sont présentés dans le tableau (4.14), qui illustre la détérioration de la qualité d'identification quand aucun couplage n'est considéré, pour les deux méthodes d'identification (ID et IG).

Table 4.14 – Influence du couplage sur l'identification

pièce	Fit E(%) (ID) sans couplage	Fit E(%) (ID) avec couplage	Fit E(%) (IG)
pièce 1	59.94	92.87	90.17
pièce 2	64.03	92.88	90.32
pièce 3	52.77	92.76	90.26

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la réalisation expérimentale d'une étude d'identification paramétrique.

4.6 Application réelle

La méthode décentralisée proposée dans le chapitre précédent est appliquée à un exemple réel pour identifier les paramètres d'un bâtiment. C'est une salle à Centrale Supélec Rennes. Cette pièce est bien adaptée pour de telles expériences, car elle est en couplage avec d'autres pièces voisines (figure 4.10) et équipée de capteurs de mesures

de températures et de flux solaire.

Nous avons à notre disposition un système expérimental constitué d'une pièce équipée par des capteurs de mesures de différentes variables entrée/sorties, qui, bien que n'étant pas à proprement parler un système de grande taille, présente une base de travail intéressante pour mettre en œuvre la structure étudiée (couplage par les sorties) à travers le couplage avec les pièces voisines de la pièce principale.

La démarche classique pour identifier un système consiste à formaliser les connaissances disponibles a priori, à recueillir des données expérimentales, puis à estimer la structure, les paramètres et les incertitudes d'un modèle, enfin à valider (ou invalider) celui-ci (Ljung, 1999).

Ainsi, cette section commence par une description de la pièce étudiée et des équipements de mesure utilisés, puis le modèle électrique/thermique est présenté suivi de la présentation des données mesurées et finalement les résultats de l'identification et de l'évaluation du modèle sont donnés.

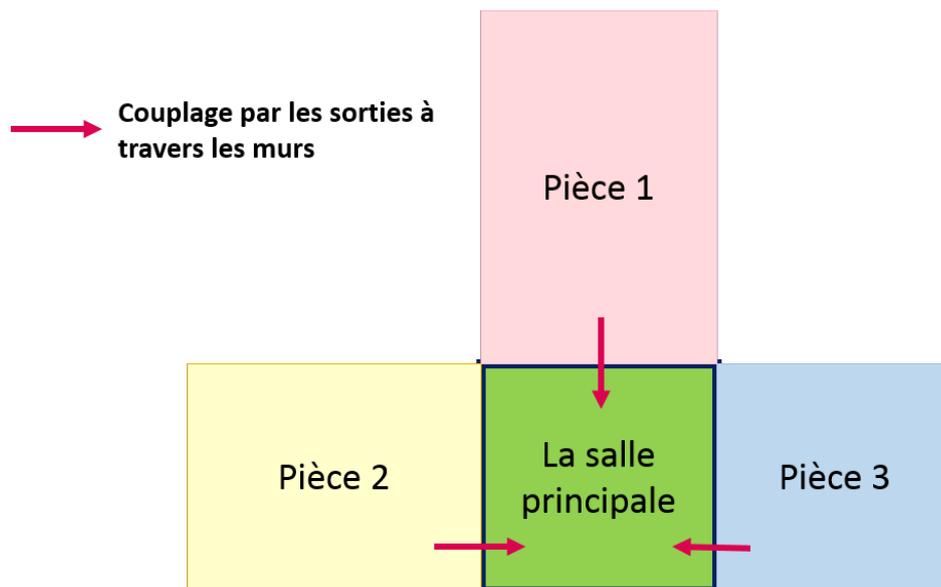


FIGURE 4.10 – Le schéma explicatif du modèle étudié

4.6.1 Description du bâtiment et des équipements de mesures

La pièce étudiée a une orientation Nord-Est (un bon ensoleillement le matin et une fraîcheur en fin de la journée). La surface de la pièce est de $24.5m^2$. Pour mesurer les températures de l'air (intérieures) de la pièce principale et celles des pièces voisines,

nous avons placé dans les 4 pièces des capteurs de mesure de température et de flux solaire fournis par les entreprises Delta Dore (une société de services énergétiques des bâtiments) et Oregon (un bureau d'études en structures qui propose une conception détaillée et complète pour les particuliers, les professionnels du secteur de la construction ainsi que pour les bâtiments publics).

L'étape suivante consiste à sélectionner une structure de modèle.

4.6.2 Modèle

Nous avons gardé le même modèle que celui utilisé dans les deux exemples précédents et on a ajouté le flux solaire.

Le modèle électrique étudié est donné ainsi par la figure (4.11).

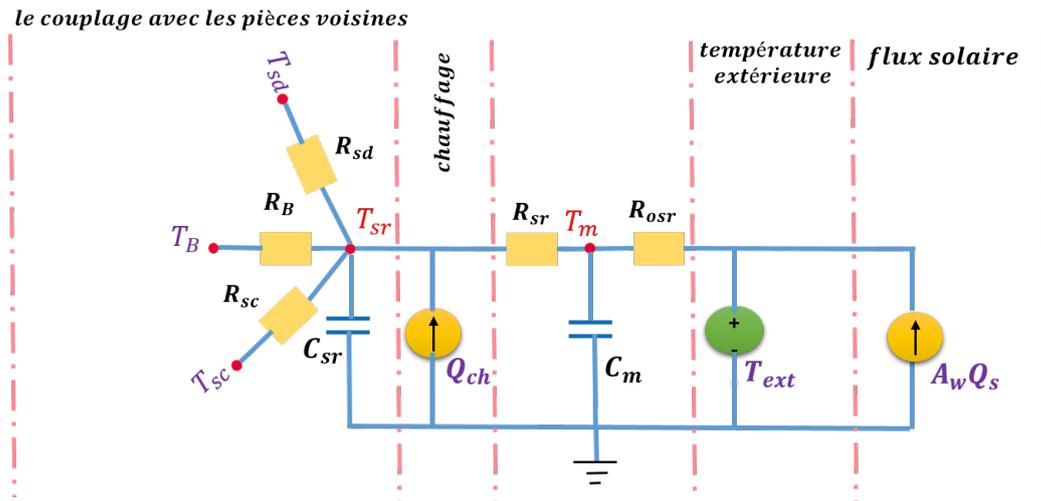


FIGURE 4.11 – Le modèle électrique de la salle étudiée

Le modèle contient deux variables d'état : T_{sr} qui représente la température intérieure de la pièce (la température de l'air de la pièce) et T_m qui représente la température des murs de la pièce (cette température n'est pas mesurée).

Les entrées du modèle sont :

- Q_s : le flux solaire à travers la fenêtre de la pièce
- Q_{ch} : le chauffage dans la pièce
- T_{ext} : la température extérieure
- T_B : la température de la pièce 2 voisine à la salle de réunion
- T_{sc} : la température de la pièce 3 voisine à la salle de réunion

- T_{sd} : la température de la pièce 1 voisine à la salle de réunion

La sortie de la pièce est la température T_{sr} .

Les paramètres du modèle (figure 4.11) représentent les différentes propriétés thermiques de la pièce (les résistances et les capacités thermiques) :

- R_{sr} : la résistance thermique entre les murs et l'intérieur de la pièce
- R_{osr} : la résistance thermique entre les murs et l'extérieur de la pièce
- R_B , R_{sd} et R_{sc} : les résistances thermiques de couplage avec les pièces voisines
- C_r : la capacité thermique de l'intérieur de la pièce
- C_m : la capacité thermique des murs de la pièce
- A_w : la surface effective de la fenêtre de la pièce (ce paramètre est mesuré directement ainsi il ne sera pas identifié)

La représentation d'état du modèle est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{T}_{sr} \\ \dot{T}_m \end{bmatrix} &= A_{sar} \begin{bmatrix} T_{sr} \\ T_m \end{bmatrix} + B_{sar} \begin{bmatrix} Q_{ch} \\ Q_s \\ T_{ext} \\ T_{sc} \\ T_{sd} \\ T_B \end{bmatrix} \\ y &= C_{sar} \begin{bmatrix} T_{sr} \\ T_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{sar} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_r} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{sc}} + \frac{1}{R_{sd}} + \frac{1}{R_B} \right) & \frac{1}{C_r R_{sr}} \\ -\frac{1}{C_m R_{sr}} & -\frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{osr}} \right) \end{pmatrix}, \\ B_{sar} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{C_r} & 0 & 0 & \frac{1}{C_r R_{sc}} & \frac{1}{C_r R_{sd}} & \frac{1}{C_r R_B} \\ 0 & \frac{1}{C_m} A_w & \frac{1}{C_m R_{osr}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C_{sar} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

4.6.3 Conditions expérimentales

On se propose de récupérer les données d'entrée qui proviennent des enregistrements météo (température extérieure T_{ext} et flux solaire Q_s) effectués au niveau du bâtiment

étudié et la commande de chauffage Q_{ch} . Les données sont échantillonnées au pas de 1 minute et la durée de l'expérience est 4 jours (le nombre de point est de 5754). Ces données sont présentées par la figure (4.12) .

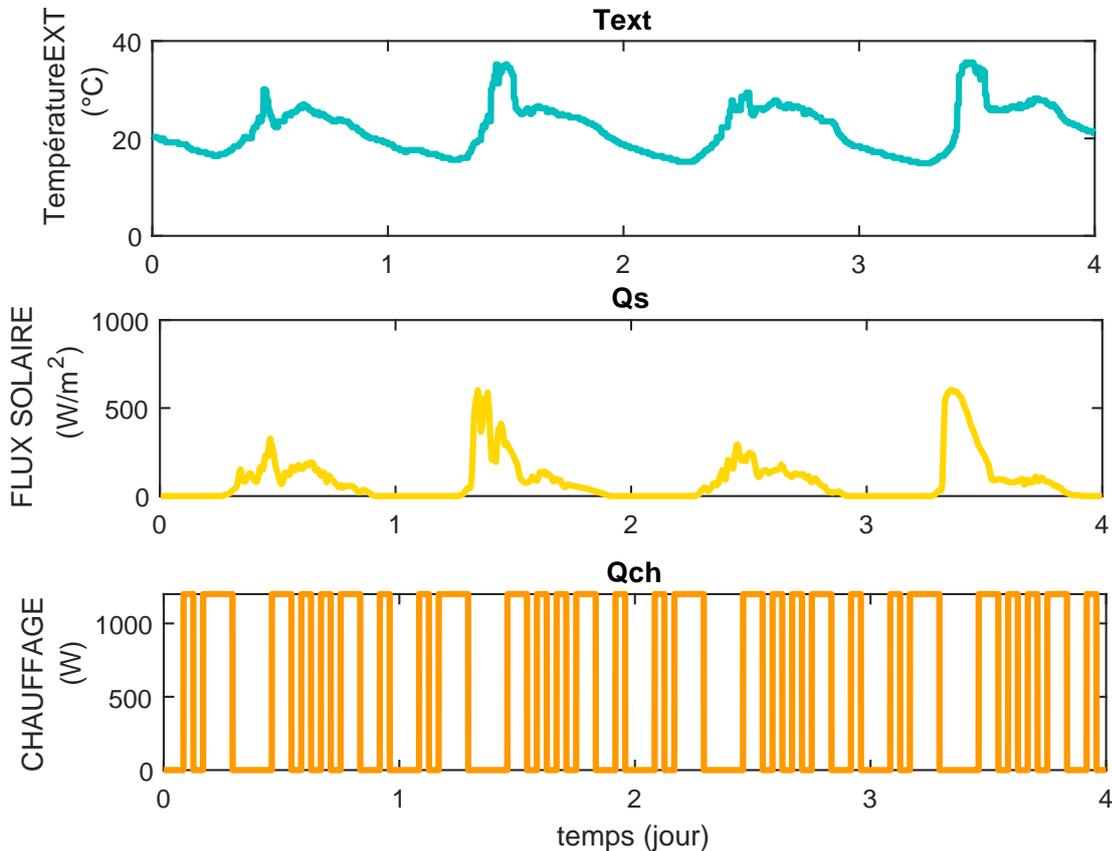


FIGURE 4.12 – Les données météo de Rennes (T_{ext}), le flux solaire Q_s et la commande chauffage Q_{ch}

Les températures intérieures de de la salle étudiée T_{sr} et des salles voisines (T_{sc} , T_{sd} et T_B) sont présentées dans la figure (4.13)

4.6.4 Étude de sensibilité des paramètres

Pour avoir une idée sur les paramètres les plus sensibilisants nous avons tracé les fonctions de sensibilité en fonction du temps par rapport à chacun des paramètres (les figures (4.14) et (4.15)) (Voir l'annexe B pour les détails de calcul de ces fonctions de sensibilité).

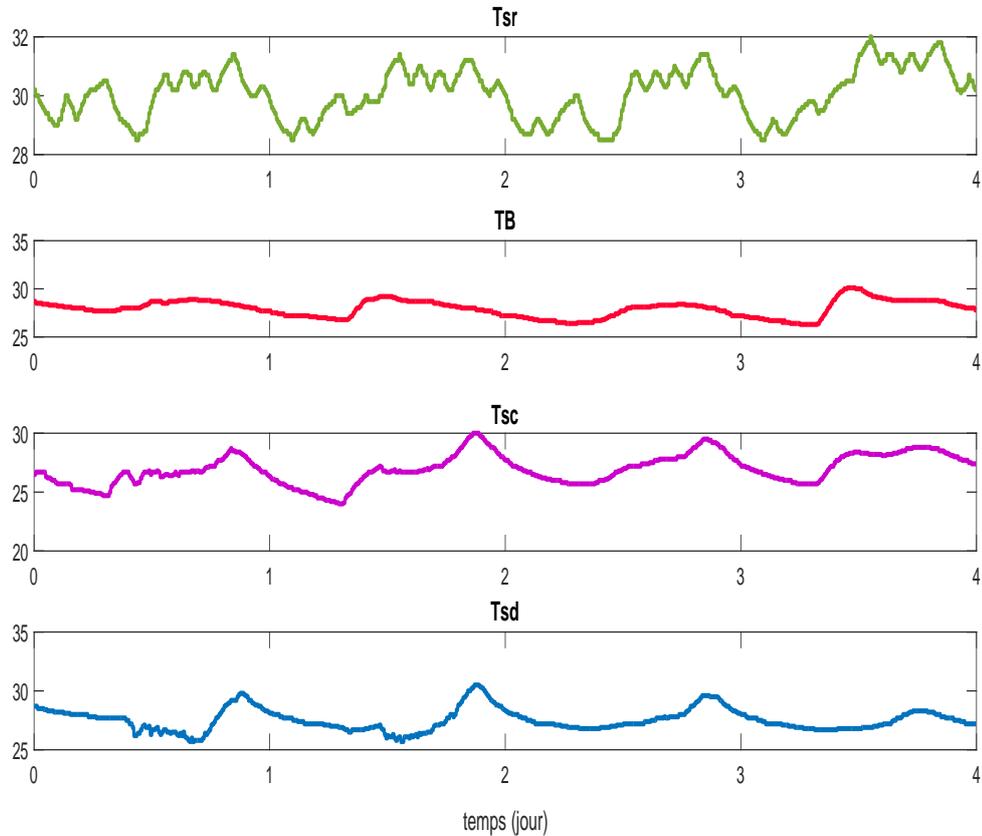


FIGURE 4.13 – Les températures intérieures de la salle de réunion et des pièces voisines

On remarque que le paramètre C_{sr} est très sensibilisant, si on le compare avec les autres paramètres, c'est-à-dire ceux dont les fonctions de sensibilité sont les plus élevées. Cela est évident parce que la commande de chauffage possède une grande influence sur le comportement du système.

On remarque aussi que les résistances de couplage R_B , R_{sc} et R_{sd} ont aussi une bonne sensibilité, ceci peut être expliqué par l'effet du couplage des pièces voisines avec la salle étudiée.

La résistance R_{0sr} est la moins sensibilisante.

Une fois, le recueil des données entrées/sorties, le choix de modèle, l'étude de ses propriétés structurelles faits, l'étape suivante consiste à estimer le vecteur des paramètres du modèle à partir de 5754 échantillons de mesure des signaux d'entrée/sortie.

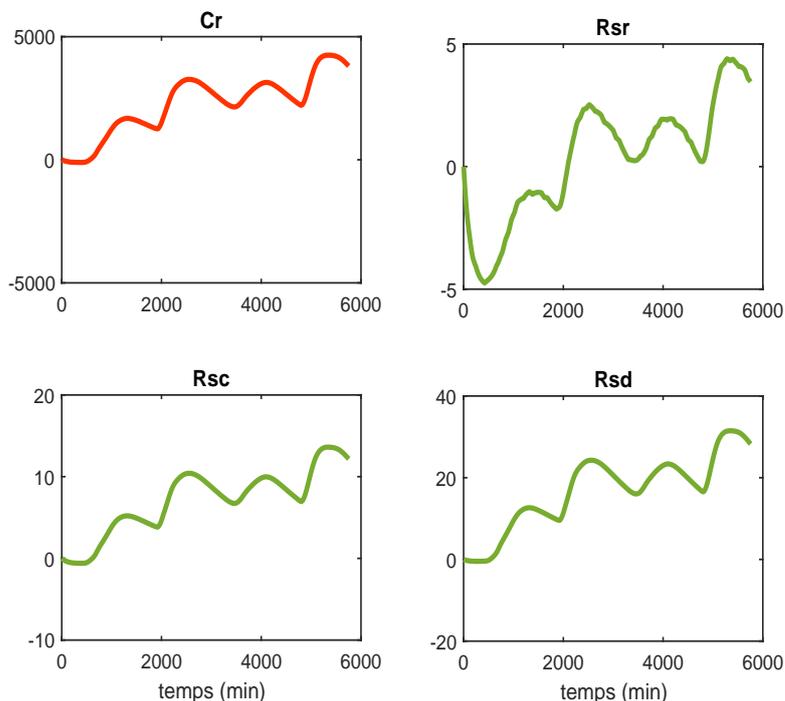


FIGURE 4.14 – Les fonctions de sensibilité de la sortie T_{sr} par rapport aux 4 premiers paramètres p_i

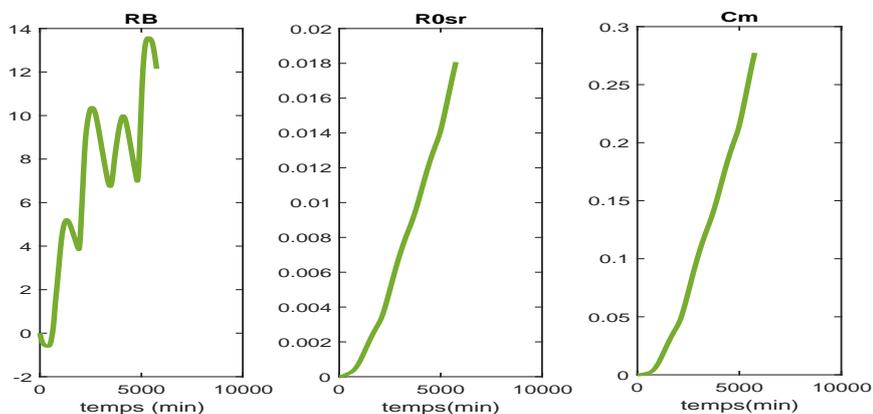


FIGURE 4.15 – Les fonctions de sensibilité de la sortie T_{sr} par rapport aux 3 derniers paramètres p_i

4.6.5 Identification paramétrique

Nous avons utilisé la moitié des données (les deux premiers jours de l'expérience (2877 points)) pour l'estimation des paramètres et la deuxième moitié (2877 points) pour la

validation.

La figure (4.16) présente les évolutions des températures T_{sr} mesurée et estimée et indique une reproduction assez bonne du comportement dynamique de la température.

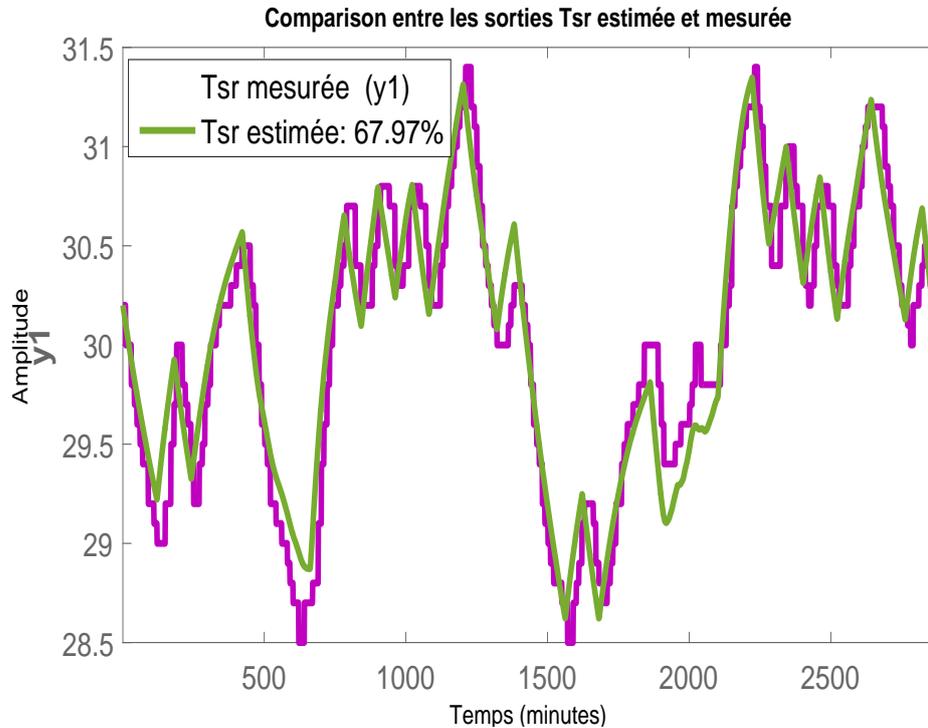


FIGURE 4.16 – Les évolutions de la température mesurée et estimée (estimation)

Les valeurs des paramètres estimés de la salle étudiée sont présentées dans le tableau (4.15).

Table 4.15 – Les valeurs des paramètres estimés de la salle de réunion

paramètre	R_{sr}	R_B	R_{sc}	R_{sd}	C_{sr}	C_m
valeur	435.5	6.811	27.69	13.59	0.021	795.7

Les incertitudes sur les paramètres étudiées sont relativement fiables

4.6.6 Validation du modèle

Le modèle ainsi obtenu est alors identifié. Un test important consiste à évaluer la capacité du modèle à reproduire la sortie du système pour un jeu de données d'entrée

qui n'a pas servi à l'estimation des paramètres.

La figure 4.17 montre que le modèle estimé peut reproduire la dynamique du système pour des données qui n'ont pas été utilisées pour l'estimation des paramètres .

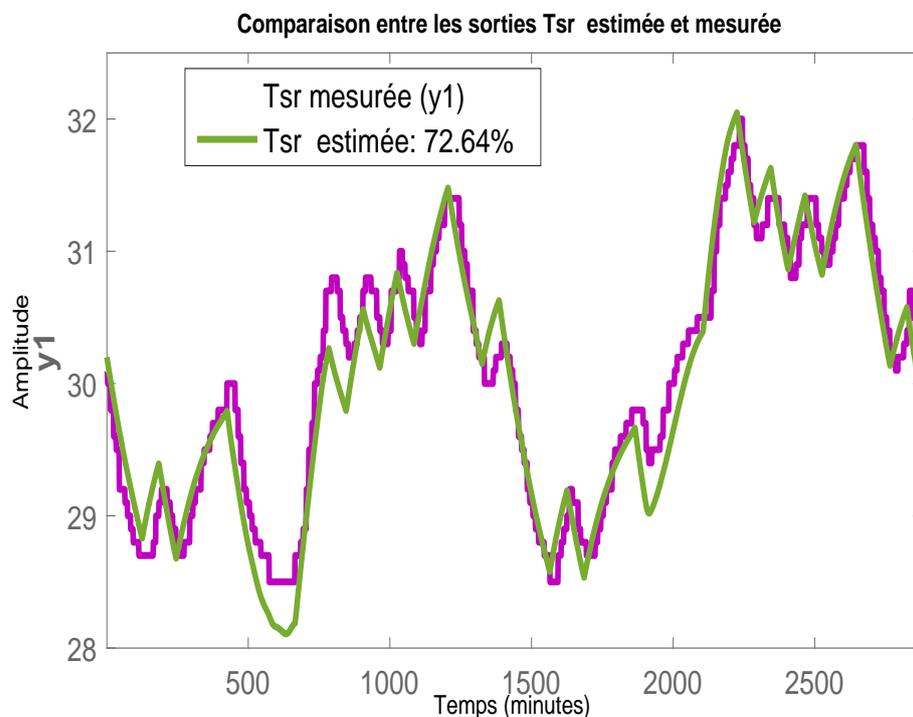


FIGURE 4.17 – Les évolutions de la température mesurée et estimée (validation)

Un autre test de validation est la vérification de la non corrélation du résidu (l'écart entre la sortie du système et du modèle).

L'ensemble des figures (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) présentent les intercorrélations entre les entrées et le résidu d'estimation à une zone de confiance de (99 %). On observe bien, que dans presque tous les cas, les entrées et le résidu sont décorrélés.

4.7 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est d'apporter un regard objectif sur l'applicabilité et l'intérêt de méthode d'identification décentralisée proposée dans les chapitres précédents.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la procédure d'identification en mettant le trait sur les étapes préliminaires de choix de la séquence des données et de la structure du modèle à identifier. Les paramètres de ce modèle (structurellement commandable,

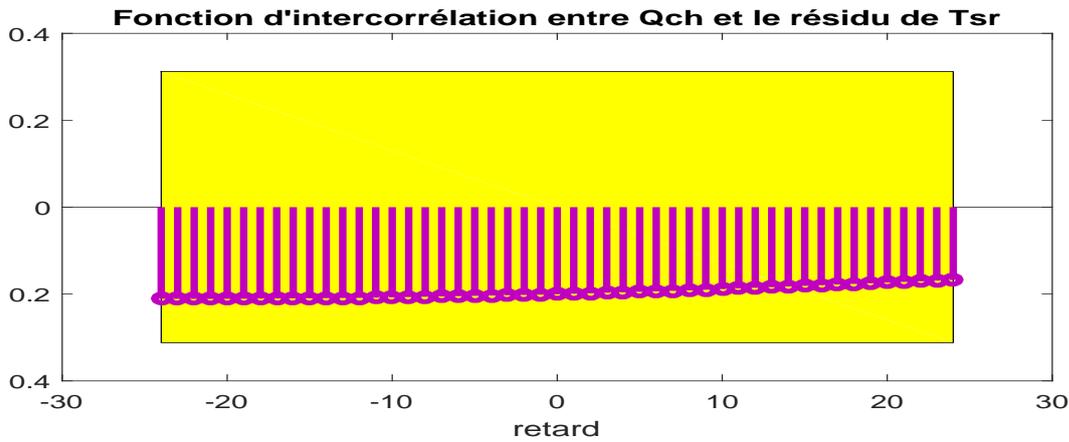


FIGURE 4.18 – Fonction d'intercorrélation entre Qch et le résidu de Tsr

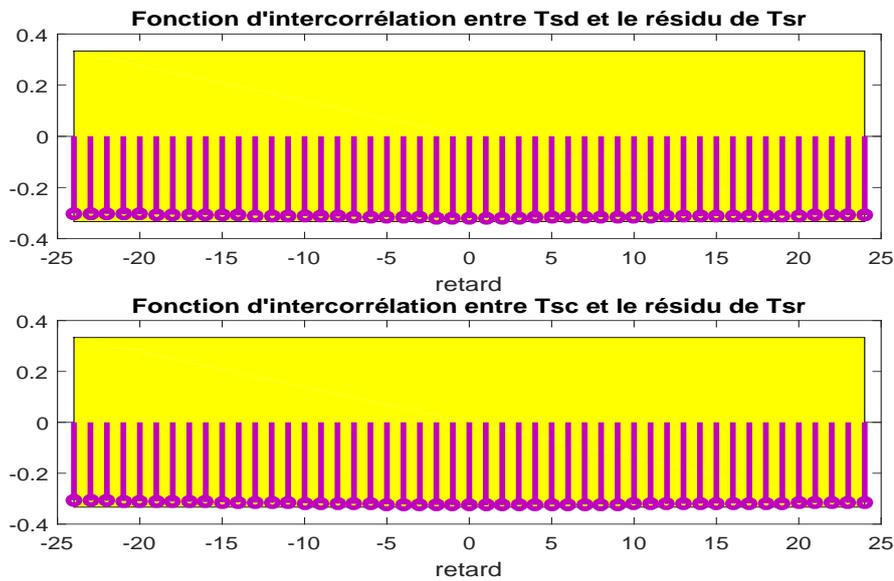


FIGURE 4.19 – Fonctions d'intercorrélation entre Tsd, Tsc et le résidu de Tsr

observable et identifiable), sont estimés par rapport à la capacité de celui-ci à prédire le comportement du système réel.

Nous avons montré également que la prise en compte de la structure d'un modèle (couplage des sous-systèmes par les sorties) peut simplifier et réduire la complexité de l'identification des systèmes de grande taille : en effet, la complexité du problème de l'identification est augmentée quand la taille du système augmente, ce qui engendre des limites dans la mise en évidence d'une approche d'identification globale, alors que l'approche décentralisée donne toujours des résultats satisfaisants.

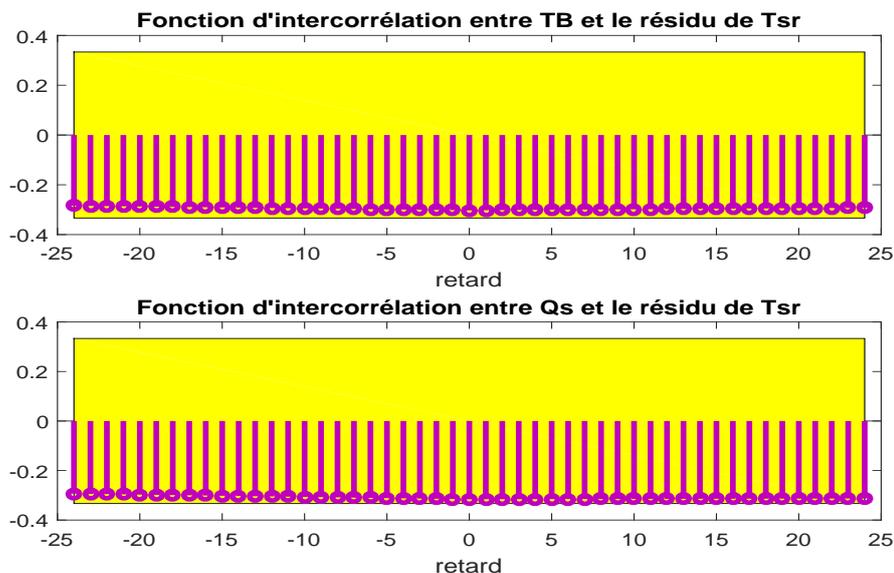


FIGURE 4.20 – Fonctions d'intercorrélacion entre TB, Qs et le résidu de Tsr

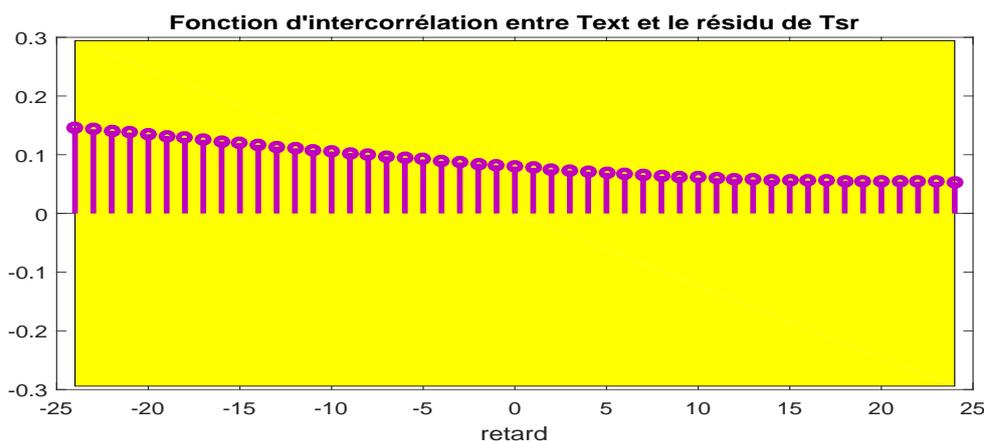


FIGURE 4.21 – Fonctions d'intercorrélacion entre Text et le résidu de Tsr

Nous avons présenté dans la deuxième partie de ce chapitre une étude complète de l'identification des paramètres (modélisation, planification de l'expérience ...) d'une salle dans un bâtiment à CentraleSupélec. Cet exemple expérimental met en évidence l'importance du couplage (par les sorties) pour améliorer la qualité des résultats de l'identification.

Bien que nous ayons choisi d'illustrer cette technique sur des applications thermiques dans les bâtiments, les résultats théoriques présentés se veulent génériques pour des systèmes couplés par les sorties, indépendamment du domaine d'application.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

*Toutes les histoires ont une fin,
mais chaque fin est le début de
quelque chose de nouveau*

L'ensemble de cette thèse est dévolu à l'étude de l'identifiabilité et l'identification des systèmes de grande taille. Trois aspects particuliers ont été développés dans les chapitres présentés, à savoir l'aspect structurel des systèmes étudiés (commandabilité, observabilité et identifiabilité structurelle), l'aspect pratique en identifiant les paramètres de ces systèmes (simulation modèle TRNSYS, . . .) et finalement l'aspect expérimental à travers un exemple thermique réel. Dans chaque chapitre, ces problèmes sont définis et analysés, ainsi les différentes contributions que nous apportons sont mises en évidence. Il s'agit ici d'exposer les points forts de cette étude et, en particulier, de dégager les futures pistes de recherches envisagées.

Synthèse

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la question de l'identifiabilité structurelle et de l'identification paramétrique de modèles décrits par des équations d'état. Nous avons abordé cette étude en présentant des notions et des formulations théoriques de l'identifiabilité structurelle. Nous avons présenté également les approches permettant d'analyser cette propriété structurelle qui ont été illustrées par des exemples provenant majoritairement du contexte de la modélisation thermique des bâtiments.

La problématique initiale de la thèse était de faire une analyse d'identifiabilité et d'iden-

tification d'un système de grande taille. Dans ce but, nous avons tout naturellement commencé par parcourir la littérature traitant de la question de l'identifiabilité de ce type de systèmes : on a présenté dans une première partie les systèmes de grande taille, leurs définitions, les différents problèmes rencontrés qui sont généralement dus à la taille du système. On a présenté par la suite les différentes solutions proposées par certains travaux.

L'analyse bibliographique qui a été effectuée dans le cadre de cette thèse constitue l'objet de la première partie. Rapidement, nous nous sommes rendu compte, à travers nos recherches que l'identifiabilité et l'identification des systèmes de grande taille restent des problèmes majeurs. Ainsi, on a établi une structure théorique permettant de poser rigoureusement le problème : décomposer le système de grande taille en sous-systèmes couplés par les entrées, les sorties ou les états afin de simplifier leur étude d'identification.

Ce travail achevé, l'objectif suivant a été de déterminer, parmi les méthodes de vérification de l'identifiabilité, celles qui peuvent s'appliquer, ou du moins s'adapter, au cas des modèles des systèmes de grande taille considérés dans cette thèse et nous avons pu prouver sous des conditions particulières que l'identifiabilité du grand système implique l'identifiabilité des petits systèmes (les sous-systèmes) qui le composent. Le théorème développé à cette étape nous a permis de simplifier l'identification du grand système en adoptant une approche décentralisée. Nous avons montré que cette approche est plus efficace au niveau du temps de calcul et de précision des valeurs des paramètres estimés. En conséquence, nous avons finalement répondu à la problématique initiale.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons cherché à effectuer une étude d'identification d'un modèle TRNSYS thermique des bâtiments et nous avons étudié l'impact de la taille sur la qualité de l'identification en faisant une comparaison entre une approche globale et une approche décentralisée. Cette comparaison a bien montré l'efficacité de l'approche décentralisée.

Dans la troisième partie de cette thèse, nous avons réalisé une étude d'identification sur un cas réel : cette application montre également l'intérêt de l'approche décentralisée proposée.

Bien que les approches proposées dans cette thèse aient été illustrées par des exemples inspirés de la thermique des bâtiments, les méthodes utilisées peuvent être appliquées pour d'autres processus de grande taille. Des exemples de ce type de systèmes sont

les processus industriels composés de plusieurs réacteurs, les systèmes de stockage, les systèmes compartimentaux (systèmes de transport).

Perspectives

A l'issue de ce mémoire, plusieurs problèmes demeurent toutefois en suspens. Nous présentons ici ce qui nous semble des perspectives envisageables de ce travail.

Nous pouvons classer ces perspectives selon trois aspects :

- **Aspect structurel** : dans cette thèse, nous avons montré que l'identifiabilité structurelle du grand système implique celle des sous-systèmes. Nous avons montré dans des cas particuliers le sens réciproque de ce théorème. Une des perspectives de travail est de montrer, dans un cas plus général, que l'identifiabilité des sous-systèmes implique celle du grand système (pour le couplage par les sorties par exemple). Il serait bien aussi de pouvoir relâcher l'hypothèse de l'absence des paramètres communs entre les sous-systèmes.

Nous avons également montré que le principe d'inclusion/restriction garantit l'identifiabilité du système en expansion sous quelques conditions. Une des pistes de travail est de chercher d'autres conditions qui donnent moins de contraintes sur le système initial.

Enfin, l'introduction d'autres types de couplage ou le mélange de deux types de couplage dans le même modèle s'avère une piste intéressante pour compléter l'analyse des modèles de grande taille.

- **Aspect pratique** : il est important également de s'intéresser à l'identifiabilité pratique : en effet, nous sommes bien conscients du fait que l'analyse de l'identifiabilité est seulement une étape préliminaire et doit être suivie par la précision de l'estimation dans un cadre expérimental. C'est l'**identifiabilité pratique**. En effet, une fois l'identifiabilité structurelle a priori démontrée, il est important de vérifier que l'unicité de la solution est également garantie dans un cadre expérimental dans lequel, les signaux appliqués aux entrées et les instants de mesure sont imposés. D'où, on peut reprendre l'étude faite dans cette thèse sur l'identifiabilité structurelle et essayer de la vérifier dans le cas de l'identifiabilité pratique.
- **Aspect expérimental** : dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons présenté un cas d'étude réel, on aurait aimé avoir les moyens pour illustrer l'intérêt de la procédure d'identification décentralisée proposée dans cette thèse sur l'ensemble du

bâtiment. Ainsi une des perspectives possibles est d'appliquer cette procédure sur un système plus grand.

Annexe A

La preuve de l'identifiabilité structurelle du grand système de taille M

On considère un grand système représentant un bâtiment ou une maison composée de M pièces mises en cascade dont le modèle de couplage choisi est un couplage par les sorties entre les pièces voisines, ainsi chaque sous-système (pièce) est couplé avec deux sous-systèmes (voisins) seulement (figure A.1). Les pièces 1 et M ont chacune un seul voisin.

On peut prouver en utilisant la méthode des similarités que le grand système est globalement identifiable quelque soit sa taille M .

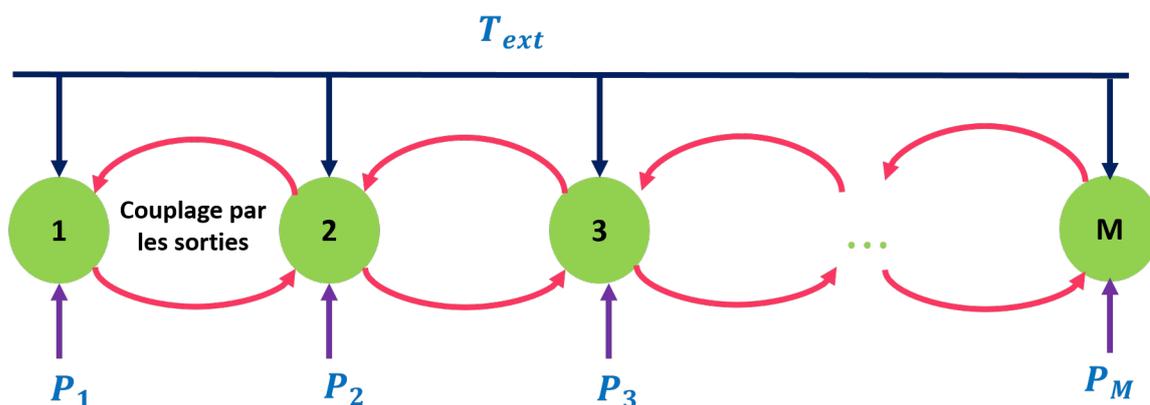


FIGURE A.1 – Couplage par les sorties entre les voisins (sous-systèmes) les plus proches seulement

Preuve 12 *Le grand système est décrit par l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(p)x + B(p)u \\ y = C(p)x \end{cases}, \quad x(0) = x_0(p) \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (\text{A.0.1})$$

où :

$$x = \left(T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ \dots \ T_M \ T_{m1} \ T_{m2} \ T_{m3} \ T_{m4} \ \dots \ T_{mM} \right)'$$

$$u = \left(P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ \dots \ P_M \ T_{ext} \right)'$$

$$y = \left(T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ \dots \ T_M \right)'$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{12}} \right) & \frac{1}{C_1 R_{12}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_{12}} & \frac{-1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) & \frac{1}{C_2 R_{23}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_{23}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{C_M R_{M-1M}} & \frac{-1}{C_M} \left(\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_{M-1M}} \right) \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{C_M R_M} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_{m1} R_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{m2} R_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{C_{mM} R_M} \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_{m1}} \left(\frac{1}{R_{01}} + \frac{1}{R_1} \right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_{m2}} \left(\frac{1}{R_{02}} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{C_{mM}} \left(\frac{1}{R_{0M}} + \frac{1}{R_M} \right) \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{C_M} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{m_1 R_{01}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{m_2 R_{02}}} \\ \vdots & & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \frac{1}{C_{m_M R_{0M}}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & O_{M,1} \\ \hline O_M & B_{22} \end{array} \right)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & & 0 \end{array} \right) = \left(C_{11} \mid C_{12} \right) = \left(I_4 \mid O_4 \right)$$

I_M est la matrice identité de dimension M .

O_M est la matrice nulle de dimension M .

Le théorème des similarités est utilisé pour étudier l'identifiabilité du grand système.

On défini la matrice T :

$$T = \left(\begin{array}{cccc|cccc} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & \dots & t_{1,M} & t_{1,M+1} & \dots & \dots & t_{1,2M} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & \dots & t_{2,M} & t_{2,M+1} & \dots & \dots & t_{2,2M} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ t_{M,1} & t_{M,2} & \dots & \dots & t_{M,M} & t_{M,M+1} & \dots & \dots & t_{M,2M} \\ \hline t_{M+1,1} & t_{M+1,2} & \dots & \dots & t_{M+1,M} & t_{M+1,M+1} & \dots & \dots & t_{M+1,2M} \\ t_{M+2,1} & t_{M+2,2} & \dots & \dots & t_{M+2,M} & t_{2,M+1} & \dots & \dots & t_{M+2,2M} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ t_{2M,1} & t_{2M,2} & \dots & \dots & t_{2M,M} & t_{2M,M+1} & \dots & \dots & t_{2M,2M} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline T_{21} & T_{22} \end{array} \right)$$

T_{11} , T_{12} , T_{21} and T_{22} , sont des matrices de dimension M .

On suppose qu'on a deux paramétrisations p et \tilde{p} tel que :

$$TA = \tilde{A}T \quad (\text{A.0.2})$$

$$TB = \tilde{B} \quad (\text{A.0.3})$$

$$\tilde{C}T = C \quad (\text{A.0.4})$$

Ainsi, on obtient :

$$\tilde{C}T = \left(T_{11} \mid T_{12} \right) = C = \left(I_M \mid O_M \right)$$

Alors, $T_{11} = I_M$ et $T_{12} = O_M$.

D'où, la matrice T devient comme suit :

$$T = \left(\begin{array}{c|c} I_M & O_M \\ \hline T_{21} & T_{22} \end{array} \right)$$

$$TB = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & O_{M,1} \\ \hline T_{21}B_{11} & T_{22}B_{22} \end{array} \right) = \tilde{B} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{B}_{11} & O_{M,1} \\ \hline O_M & \tilde{B}_{22} \end{array} \right)$$

Alors, $B_{11} = \tilde{B}_{11}$ ce qui implique que pour $i = 1 \dots M$, on a :

$$\frac{1}{C_i} = \frac{1}{\tilde{C}_i} \quad (\text{A.0.5})$$

Or comme $T_{21}B_{11} = O_M$ et B_{11} est une matrice diagonale et que tout les C_i sont non nuls alors $T_{21} = O_M$.

Ainsi, la matrice T devient :

$$T = \left(\begin{array}{c|c} I_M & O_M \\ \hline O_M & T_{22} \end{array} \right)$$

$$TA = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline T_{22}A_{21} & T_{22}A_{22} \end{array} \right) = \tilde{A}T = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}T_{22} \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}T_{22} \end{array} \right)$$

Donc, $A_{11} = \tilde{A}_{11}$ ce qui implique que pour $i = (1 \dots M)$ et $j = (1 \dots M)$ ($i \neq j$), on a : $R_i = \tilde{R}_i$ et $R_{ij} = \tilde{R}_{ij}$ et comme $\frac{1}{C_i} = \frac{1}{\tilde{C}_i}$, alors on peut déduire que $A_{12} = \tilde{A}_{12}$.

A partir de cette équation $TA = \tilde{A}T$ on peut aussi déduire que :

$$A_{12} = \tilde{A}_{12}T_{22} \quad (\text{A.0.6})$$

$$T_{22}A_{21} = \tilde{A}_{21} \quad (\text{A.0.7})$$

$$T_{22}A_{22} = \tilde{A}_{22}T_{22} \quad (\text{A.0.8})$$

Comme, $A_{12} = \tilde{A}_{12}$, on peut conclure que $T_{22} = I_M$, ce qui implique que $A_{21} = \tilde{A}_{21}$ et $A_{22} = \tilde{A}_{22}$, alors, $C_{mi} = \tilde{C}_{mi}$ et $R_{0i} = \tilde{R}_{0i}$.

D'où

$$T = \left(\begin{array}{c|c} I_M & O_M \\ \hline O_M & I_M \end{array} \right)$$

et $p_i = \tilde{p}_i$.

Ainsi en utilisant le théorème des similarités, on peut déduire que le grand système est structurellement identifiable.

Annexe B

Le calcul des fonctions de sensibilité

Le modèle est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{T}_{sr} &= -\frac{1}{C_{sr}}\left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{sc}} + \frac{1}{R_{sd}} + \frac{1}{R_B}\right)T_{sr} + \frac{1}{C_{sr}R_B}T_m + \frac{1}{C_{sr}}Q_{ch} + \frac{1}{C_{sr}R_{sc}}T_{sc} + \frac{1}{C_{sr}R_{sd}}T_{sd} + \frac{1}{C_{sr}R_B}T_B \\ \dot{T}_m &= \frac{1}{C_m R_{sr}}T_{sr} - \frac{1}{C_m}\left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}}\right)T_m + \frac{1}{C_m}A_w Q_{ch} + \frac{1}{C_m R_{0sr}}T_{ext} \\ y &= T_{sr}\end{aligned}\tag{B.0.1}$$

avec $x^T = [T_{sr} T_m]^T$ désigne le vecteur d'état et y la variable de sortie.

Les paramètres du modèle sont recueillis dans p :

$$p^T = \left[C_{sr} \quad R_{sr} \quad R_{sc} \quad R_{sd} \quad R_B \quad R_{0sr} \quad A_w \quad C_m \right]\tag{B.0.2}$$

Puisque on a 2 variables d'état et 8 paramètres alors nous avons 16 fonctions de sensibilité à calculer. S_{x_i, p_j} désigne la sensibilité de x_i par rapport au paramètre p_j avec $i = 1, 2$ et $j = 1 \dots 8$.

B.1 Calcul des fonctions de sensibilité S_{T_{sr}, p_j}

Les fonctions de sensibilité de T_{sr} par rapport aux paramètres p_j sont décrites par les équations suivantes :

B.2. Calcul des fonctions de sensibilité S_{T_m, p_j}

$$\begin{aligned}
\dot{S}_{T_{sr}, C_{sr}} &= \frac{1}{C_{sr}^2} R T_{sr} - \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, C_{sr}} - \frac{1}{C_{sr}^2 R_{sr}} T_m + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, C_{sr}} \\
&\quad - \frac{1}{C_{sr}^2} Q_{ch} - \frac{1}{C_{sr}^2 R_{sc}} T_{sc} - \frac{1}{C_{sr}^2 R_{sd}} T_{sd} - \frac{1}{C_{sr}^2 R_B} T_B \\
\dot{S}_{T_{sr}, R_{sr}} &= \frac{1}{C_{sr} R_{sr}^2} T_{sr} - \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, R_{sr}} - \frac{1}{C_{sr} R_{sr}^2} T_m + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, R_{sr}} \\
\dot{S}_{T_{sr}, R_{sc}} &= \frac{1}{C_{sr} R_{sc}^2} T_{sr} - \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, R_{sc}} + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, R_{sc}} - \frac{1}{C_{sr} R_{sc}^2} T_{sc} \\
\dot{S}_{T_{sr}, R_{sd}} &= \frac{1}{C_{sr} R_{sd}^2} T_{sr} - \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, R_{sd}} + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, R_{sd}} - \frac{1}{C_{sr} R_{sd}^2} T_{sd} \\
\dot{S}_{T_{sr}, R_B} &= \frac{1}{C_{sr} R_B^2} T_{sr} - \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, R_B} + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, R_B} - \frac{1}{C_{sr} R_B^2} T_B \\
\dot{S}_{T_{sr}, R_{0sr}} &= -\frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, R_{0sr}} + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, R_{0sr}} \\
\dot{S}_{T_{sr}, A_w} &= \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, A_w} + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, A_w} \\
\dot{S}_{T_{sr}, C_m} &= \frac{1}{C_{sr}} R S_{T_{sr}, C_m} + \frac{1}{C_{sr} R_{sr}} S_{T_m, C_m}
\end{aligned} \tag{B.1.3}$$

avec : $R = \frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{sc}} + \frac{1}{R_{sd}} + \frac{1}{R_B}$

B.2 Calcul des fonctions de sensibilité S_{T_m, p_j}

Les fonctions de sensibilité de T_m par rapport aux paramètres p_j sont décrites par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_{T_m, C_{sr}} &= \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, C_{sr}} - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, C_{sr}} \\
 \dot{S}_{T_m, R_{sr}} &= \frac{1}{C_m R_{sr}^2} T_{sr} + \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, R_{sr}} + \frac{1}{C_m R_{sr}^2} T_m - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, R_{sr}} \\
 \dot{S}_{T_m, R_{sc}} &= \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, R_{sc}} - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, R_{sc}} \\
 \dot{S}_{T_m, R_{sd}} &= \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, R_{sd}} - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, R_{sd}} \\
 \dot{S}_{T_m, R_B} &= \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, R_B} - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, R_B} \\
 \dot{S}_{T_m, R_{0sr}} &= \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, R_{0sr}} + \frac{1}{C_m R_{0sr}^2} T_m - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, R_{0sr}} - \frac{1}{C_m R_{0sr}^2} T_{ext} \\
 \dot{S}_{T_m, A_w} &= \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, A_w} - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, A_w} + \frac{1}{C_m} Q_s \\
 \dot{S}_{T_m, C_m} &= -\frac{1}{C_m^2 R_{sr}} T_{sr} + \frac{1}{C_m R_{sr}} S_{T_{sr}, C_m} + \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) T_m - \frac{1}{C_m} \left(\frac{1}{R_{sr}} + \frac{1}{R_{0sr}} \right) S_{T_m, C_m} \\
 &\quad - \frac{1}{C_m^2} A_w Q_s - \frac{1}{C_m^2 R_{0sr}} T_{ext}
 \end{aligned} \tag{B.2.4}$$

B.3 Obtention des fonctions de sensibilité en pratique

Calculer les matrices de sensibilité exprimées dans les deux paragraphes précédents revient à résoudre la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_{x,p} &= F_S(t, p^0, u) S_{x,p} \\
 S_y(p^0, u) &= H(t, p^0, u) S_{x,p}
 \end{aligned} \tag{B.3.5}$$

avec : $S_{x,p}$ est le vecteur des états (16 états) , $S_y(p^0, u)$ est la matrice de sensibilité de la sortie T_{sr} par rapport à tous les paramètres (elle regroupe toutes les fonctions de sensibilité qu'on cherche à déterminer), cette matrice est de dimension $(t_N \times 8)$.

La matrice F est de dimension (16×16) et la matrice H est de dimension (8×16) .

Les entrées u sont toutes les données mesurées pendant l'expérience (identification des paramètres de la salle de réunion).

B.3. Obtention des fonctions de sensibilité en pratique

Nous avons simulé ce système sur Matlab et nous avons obtenu ainsi toutes les fonctions de sensibilité.

Annexe C

La preuve de l'identifiabilité structurelle locale du grand système dans le cas d'un couplage par les entrées

C.0.1 Vers un théorème inverse : condition suffisante d'identifiabilité du système global

Théorème 14 *Si tous les sous-systèmes (Σ_i) couplés par les entrées à travers des états intermédiaires sont structurellement localement identifiables en p_0 alors le système global (Σ) est structurellement localement identifiable en p_0 .*

Preuve 13 *La démonstration sera donnée pour 2 sous-systèmes. La généralisation se base sur les mêmes principes.*

Pour montrer ce théorème, nous allons utiliser le théorème des paramètres de Markov expliquée dans le premier chapitre.

Les paramètres de Markov du sous-système (Σ_i) ($i = 1, 2$) sont :

$$G_i^T = \begin{bmatrix} C_i B_i & C_i A_i B_i & C_i A_i^2 B_i & \dots & C_i A_i^{n_i} B_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.1})$$

Les (Σ_i) sont par hypothèse structurellement localement identifiables (s.l.i.) en p_0 , donc

d'après la méthode des paramètres de Markov on a :

$$\text{rang}(J(G_i)) = \text{rang}\left(\left(\frac{\partial G_i}{\partial p}\right)_{p=p_0}\right) = n_{pi} \quad (\text{C.0.2})$$

avec : n_{pi} est le nombre des paramètres de chaque sous-système (Σ_i).

Le nombre des paramètres de système global est $n_{pg} = \sum_{i=1}^M n_{pi}$, pour cette preuve $M = 2$.
(On précise qu'il n'existe pas des paramètres communs entre les sous-systèmes).

Les paramètres de Markov du système global Σ sont :

$$G_g = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ \vdots \\ CA^{n_g}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1B_1 & 0 \\ 0 & C_2B_2 \\ C_1A_1B_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2B_2 \\ C_1A_1^2B_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2^2B_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_1A_1^{n_1}B_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2^{n_2}B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.3})$$

avec :

$$A_1 \in R^{n_1}, A_2 \in R^{n_2}, A \in R^{n_g}$$

$$n_g = n_1 + n_2$$

En permutant les lignes on obtient :

$$G_g = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} C_1B_1 \\ C_1A_1B_1 \\ C_1A_1^2B_1 \\ \vdots \\ C_1A_1^{n_1}B_1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} C_2B_2 \\ C_2A_2B_2 \\ C_2A_2^2B_2 \\ \vdots \\ C_2A_2^{n_2}B_2 \end{matrix} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right] \quad (\text{C.0.4})$$

Ainsi :

$$J(G_g) = \left(\frac{\partial G_g}{\partial p} \right)_{p_0} = \left[\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial G_1}{\partial p} \right)_{p_0} & 0 \\ \hline 0 & \left(\frac{\partial G_2}{\partial p} \right)_{p_0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} J(G_1) & 0 \\ \hline 0 & J(G_2) \end{array} \right] \quad (\text{C.0.5})$$

Et comme les sous-systèmes (Σ_i) sont s.l.i. en p_0 alors le rang $(J(G_1)) = n_{p1}$ et le rang $(J(G_2)) = n_{p2}$, d'où le rang $(J(G_g)) = n_{pg}$. Ainsi on peut déduire que Σ est s.l.i. en p_0 .

Table des figures

1.1	Identification paramétrique	9
1.2	Schéma d'un processus	10
1.3	Cadre idéalisé des études d'identifiabilité structurelle	17
1.4	Interprétation algébrique de la condition d'identifiabilité structurelle globale. Application injective : Structure globalement identifiable	17
1.5	Interprétation algébrique de la condition d'identifiabilité structurelle locale.	18
1.6	Application non injective : Structure globalement non identifiable	19
1.7	Le système étudié	22
1.8	Schéma explicatif de l'identification	27
1.9	Procédure générale de l'identification	29
1.10	Erreur d'équation	30
1.11	Erreur de sortie	31
2.1	Exemple de décomposition fonctionnelle	40
2.2	Une structure hiérarchique à deux niveaux	41
2.3	Une chaîne composée d'un ensemble de véhicules identiques se déplaçant sur une ligne droite	42
2.4	Exemple d'un modèle interconnecté de type 1 (couplage par les sorties)	43
2.5	Exemple d'un modèle interconnecté de type 2	43
2.6	Principe de la méthode de recouvrement (overlapping)	46
3.1	Exemple d'un système interconnecté	56

3.2	Exemple des sous-systèmes couplés par leurs entrées	57
3.3	Exemple des sous systèmes couplés par leurs sorties	62
3.4	Exemple des sous systèmes couplés par un état intermédiaire et les sorties	72
3.5	Les étapes de décomposition d'un modèle interconnecté (couplage par les sorties)	85
4.1	Les pièces mises en cascade	90
4.2	Schéma électrique équivalent du sous-système (i)	90
4.3	Comparaison des ajustements minimaux (M=6)	96
4.4	Comparaison entre la sortie du sous-système 1 simulée (réelle) et celle reconstruite	97
4.5	l'influence de la taille M sur le temps d'identification (comparaison entre l'approche ID et l'approche IG)	98
4.6	Synthèse de la génération des données en vue de l'identification	102
4.7	Exemple d'un bâtiment composé de 3 pièces	102
4.8	Les flux de chauffage et la température extérieure	103
4.9	La température intérieure de chaque pièce	103
4.10	Le schéma explicatif du modèle étudié	107
4.11	Le modèle électrique de la salle étudiée	108
4.12	Les données météo de Rennes (T_{ext}), le flux solaire Q_s et la commande chauffage Q_{ch}	110
4.13	Les températures intérieures de la salle de réunion et des pièces voisines	111
4.14	Les fonctions de sensibilité de la sortie T_{sr} par rapport aux 4 premiers paramètres p_i	112
4.15	Les fonctions de sensibilité de la sortie T_{sr} par rapport aux 3 derniers paramètres p_i	112
4.16	Les évolutions de la température mesurée et estimée (estimation)	113
4.17	Les évolutions de la température mesurée et estimée (validation)	114
4.18	Fonction d'intercorrélation entre Q_{ch} et le résidu de T_{sr}	115
4.19	Fonctions d'intercorrélation entre T_{sd} , T_{sc} et le résidu de T_{sr}	115

4.20	Fonctions d'intercorrélation entre TB, Qs et le résidu de Tsr	116
4.21	Fonctions d'intercorrélation entre Text et le résidu de Tsr	116
A.1	Couplage par les sorties entre les voisins (sous-systèmes) les plus proches seulement	121

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les modèles de connaissance et de comportement 1	12
3.1	Synthèse des différents types de couplage	83
3.2	Propriétés des système initial et augmenté	83
3.3	Propriétés des système augmenté et sous-systèmes augmentés	84
4.1	Valeurs moyennes des paramètres	93
4.2	Influence de M sur l'ajustement	94
4.3	Influence de M sur l'EPM	95
4.4	Influence de M sur le temps d'identification	95
4.5	Paramètres du sous-système 1	97
4.6	Influence de M sur l'ajustement (comparaison entre l'approche ID et l'approche IG)	99
4.7	Les Caractéristiques d'une pièce	100
4.8	Les éléments de construction des murs	101
4.9	Spécifications des matériaux de construction des murs	101
4.10	Comparaison des valeurs estimées des paramètres avec l'approche globale et l'approche décentralisée (M=3)	104
4.11	Influence de M sur le fit d'estimation (mFE) et de validation (mFV)	105
4.12	Influence de M sur l'erreur relative	105
4.13	Influence de M sur le temps de calcul de l'identification	105
4.14	Influence du couplage sur l' identification	106

4.15 Les valeurs des paramètres estimés de la salle de réunion 113

Bibliographie

- A Transient Simulation Program*. TRNSYS17 Documentation, Solar Energy Laboratory, University of Wisconsin, Madison.
- Andersen, K., Madsen, H., and Hansen, L. (2000). Modeling the heat dynamics of a building using stochastic differential equations. *Energy and Buildings*, 31 :13–24.
- Bacher, P. and Madsen, H. (2011). Identifying suitable models for the heat dynamics of buildings. *Energy and Buildings*, 43 :1511–1522.
- Bellman, R. and Astrom, K. (1970). On structural identifiability. *Mathematical Biosciences*, 7(34) :329 – 339.
- B.Moore (1981). Principal component analysis in linear systems : controllability, observability and model reduction. *IEEE Transactions on automatic control*, 26 :17–31.
- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J., Rotella, F., and Zambettakis, I. (1992). *Modélisation et identification des processus tome1*.
- D. Knittel, D. Gigan, e. E. L. (2002). Robust decentralized overlapping control of large scale winding systems. *Proc. American Control Conference*.
- D’Andrea, R. and Dullerud, G. (2003). Distributed control design for spatially interconnected systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 48 :1478–1495.
- Decotte, B. and Dauphin Tanguy, G. (2002). Structural identifiability of bond graph models. Technical report, Ecole centrale de Lille.
- Dehghani, M. and Abir, A. (2008). State-space model parameter identification in large-scale power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 23(3) :1449 – 1457.
- D.Mehdi, R. A. (1993). *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires*. ScientifikA.
- F.Claveau (2005). *Contribution à l’analyse et la commande des grands systèmes*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes.
- Garnier, H. (2015). Direct continuous-time approaches to system identification. overview and benefits for practical applications. *European Journal of Control*, 24 :50 – 62.

- Garnier, H., GILSON, M., BASTOGNE, T., and RICHARD, A. (2016). Identification de modèles paramétriques à temps continu. *Techniques de l'ingénieur Modélisation et analyse de systèmes asservis*, base documentaire : TIB391DUO.(ref. article : s7140). fre.
- Garnier, H., Mensler.M, and Richard.A (2003). Continuous-time model identification from sampled data. implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13) :1337–1357.
- Garnier, H. and Wang, L. (2008). *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer.
- Glover.K and Willems.J (1974). Parameterizations of linear dynamical systems : Canonical forms and identifiability. *IEEE Transactions on Automatic Control Engineering Practice*, 19 :640–646.
- Goodwin G, C. and Payne R, L. (1987). Dynamic system identification, experiment design and data analysis. *Mathematics in science and engineering*, 136.
- Gouda, M., Danaher, S., and Underwood, C. (2002). Building thermal model reduction using nonlinear constrained optimization. *Building and Environment*, 37 :1255–1265.
- Guinzy, N. and Sage, A. (1973). System identification in large scale systems with hierarchical structures. *Computers and Electrical Engineering*, 1(1) :23 – 42.
- Haber, A. and Verhaegen, M. (2014). Subspace identification of large-scale interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59 :2754 – 2759.
- Hiskens, I. A. and Koeman, A. (1999). Power system parameter estimation. *J. Elect. Electron. Eng. Australia*, 19(1) :1–8.
- H.Mensler (1999). *Analyse et étude comparative de méthode d'identification de systèmes à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy.
- Hovelaque, V., Commault, C., and Dion, J. (1999). Zeros of structured linear systems. *Automatica*, 35 :1683–1688.
- Iftar, A. (1993). Overlapping decentralized dynamic optimal control. *International Journal of Control*, 58 :187–209.

-
- Iftar, A. (2016). Inclusion, restriction and overlapping decomposition of neutral systems with distributed time delay. *IFAC-Papers OnLine*, 49 :73–78.
- Ikeda, M. and Siljak, D. (1986). Overlapping decentralized control with input, state, and output inclusion. *Control Theory and Advanced Technology*, 2 :155–172.
- Jauberthie, C. (2002). *Méthodologie de planification d'expériences pour systèmes dynamiques souples*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne.
- J.Bernussou and A.Titli (1982). Interconnected dynamical systems : Stability,decomposition and decentralization. *North-Holland, New York*.
- K. Li, E.B. Kosmatopoulos, P. I. e. H. R.-B. (1999). Centralized, decentralized and overlapping control designs for a segmented telescope. *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control / Intelligent Systems and Semiotics, Cambridge, England, September*.
- Landau, I. (1993). *Identification et commande des systèmes*. Traite. Hermès.
- Leconte, A., Achard, G., and Papillon, P. (2012). Global approach test improvement using a neural network model identification to characterise solar combinaison system performances. *Solar Energy*, 86(7) :2001 – 2016.
- Lecourtier.Y (1985). *Propriétés structurelles de modèles : études théoriques, test formel, applications à la catalyse hétérogène*. PhD thesis, Université de Paris-Sud.
- Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the user*. Prentice Hall.
- Mansouri, M., Baddas, L. B., Darouach, M., and Messaoud, H. (2013). Decentralized observers for a class of large scale singular systems via lmi. *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics*, 6(2) :158–181.
- Massioni, P. and Verhaegen, M. (2008). Subspace identification of circulant systems. *Automatica*, 44(11) :2825 – 2833.
- Mesarovic, M., Macko, D., and Takahara, Y. (1970). Theory of hierarchical multi-level systems. *Academic Press*.
- Morosan, P., Bourdais, R., Dumur, D., and Buisson, J. (2010). Building temperature regulation using a distributed model predictive control. *Energy and Buildings*, 42(9) :1445 – 1452.

- Mu, B., Guo, J., Wang, L. Y., Yin, G., Xu, L., and Zheng, W. X. (2015). Identifiability and parameter estimation of linear continuous-time systems under irregular and random sampling. *IFAC-Papers OnLine*, 48(28) :332 – 337. 17th IFAC Symposium on System Identification SYSID 2015 Beijing, China, 19-21 October 2015.
- Nguyen, V. V. e. E. F. W. (1982). Review and unification of linear identifiability concepts. *SIAM Review*, 24 :34–51.
- Noiret, C. (2000). *Utilisation du calcul formel pour l'identifiabilité de modèles paramétriques et nouveaux algorithmes en estimation de paramètre*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne.
- Norton, J. (1982). An investigation of the sources of nonuniqueness in deterministic identifiability. *Math Biosciences*, 60 :89–108.
- Ollivier, F. (1990). *Le problème d'identifiabilité structurelle globale : approche théorique, méthode effectives et bornes de complexité*. PhD thesis, Ecole Polytechnique.
- Perasso, A. (2009). *Identifiabilité de paramètres pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles : Application à la dynamique des populations*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI.
- Profos, G. and Delgado, M. (1995). Identifiability of linear systems represented by bond graphs. In *Proceedings of Bond graph modeling and simulation*.
- Samar, S., Boyd, S., and Gorinevsky, D. (2007). Distributed estimation via dual decomposition. In *European Control Conference*, pages 1511–1516.
- Scorletti, G. (1997). *Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI*. PhD thesis, Université Paris XI.
- Siljak, D. (1991). *Decentralized control of complex system*, volume 184. Georgia Institute of Technology.
- Sinha.N.K and Rao.G.P (1991). *Identification of continuous-time systems. Methodology and computer implementation*. Kluwer Academic Publishers.
- Soderstrom.T, S. (1983). *Instrumental variable methods for system identification*. Springer Verlag.

- Unbehauen.H and Rao.G.P (1990). Continuous-time approaches to system identification. *Automatica*, 26(1) :23–35.
- Vajda, S., Valkó, P., and Godfrey, K. (1987). Direct and indirect least squares methods in continuous-time parameter estimation. *Automatica*, 23(6) :707 – 718.
- Vajda S, Godfrey KR, R. H. (1989). Similarity transformation approach to identifiability analysis of nonlinear compartmental models. *Mathematical Biosciences*, 93 :217–248.
- Van Den Hof, J. M. (1998). Structural identifiability of linear compartmental systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(6) :800–818.
- Van Den Hof, P. M., Dankers, A., Heuberger, P. S., and Bombois, X. (2013). Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods. *Automatica*, 49(10) :2994 – 3006.
- Verhaegen, M. and Dewilde, P. (1992). Subspace model identification part 1 : The output-error state space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*, 56(5) :1187–1210.
- Walter, E. (1982). *Identification of State Space Models*. Springer Verlag.
- Walter, E. (1987a). *Identifiability of parametric models*. Pergamon Press,Oxford.
- Walter, E. (1987b). *Identifiability of State Space Models*. Springer Verlag.
- Walter, E. and Pronzato, L. (1994). *Identification des modèles paramétriques à partir des données expérimentales*. Dunod.
- Walter, E. and Pronzato, L. (1997). *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer.
- Walter.E and Lecourtier.Y (1982). Global approaches to identifiability testing for linear and non linear state space models. *Mathematics and Computers in Simulation*, pages 472–482.
- Willems, J. L. (1986). Structural controllability and observability. *System and Control Letters*, 8(1) :5–12.

Bibliographie

- Y. Lin, T. M. and Barooah, P. (2012). Issues in identification of control-oriented thermal models of zones in multi-zone buildings. *IEEE Conference on Decision and Control*.
- Young, P, C. (1981). Parameter estimation for continuous time models. *Automatica*, 17 :23–39.