



**HAL**  
open science

# Écoulements de surface et érosion

Olivier Devauchelle

► **To cite this version:**

Olivier Devauchelle. Écoulements de surface et érosion. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie, 2007. Français. NNT : . tel-01499527

**HAL Id: tel-01499527**

**<https://hal.science/tel-01499527>**

Submitted on 31 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

*Spécialité* : Mécanique des Fluides

*présentée par*

Olivier DEVAUCHELLE

*pour obtenir le grade de docteur de l'Université Pierre et Marie Curie*

## ÉCOULEMENTS DE SURFACE ET ÉROSION

★ ★ ★

*Soutenue le 10 décembre 2007 devant un jury composé de :*

M. Ghislain DE MARSILY	Président du jury
M. François CHARRU	Rapporteur
M. Philip HALL	Rapporteur
M. Philippe DAVY	Examineur
M. Éric LAJEUNESSE	Examineur
M. Stéphane ZALESKI	Directeur de thèse
M. Christophe JOSSERAND	Co-directeur de thèse
M. Pierre-Yves LAGRÉE	Co-directeur de thèse



## Résumé

L'écoulement laminaire d'un liquide sur un matériau granulaire conduit à la formation de divers motifs d'érosion, dont certains sont analogues aux bancs, méandres, tresses et rides rencontrés en Géomorphologie fluviale, où les écoulements sont pourtant turbulents. En se fondant sur des modèles simples pour l'écoulement et le transport sédimentaire (équations de Saint-Venant, transport par charriage), la présente étude aborde ces systèmes par des méthodes analytiques et numériques. Un modèle de conditions aux berges est établi pour des micro-rivières rectilignes dont les rives sont érodables, ce qui permet de prendre en compte la conservation du débit d'eau au cours du processus d'élargissement. La stabilité linéaire des mêmes micro-rivières éclaire différents mécanismes de morphogénèse, liés à l'instabilité de bancs, pour lesquels l'influence des conditions aux bords (à deux dimensions) ne doit pas être négligée. L'évolution non-linéaire de l'instabilité de banc conduit à l'apparition de fronts d'érosion en forme de chevrons, parfois rencontrés en milieu naturel, selon un mécanisme fondé sur la non-linéarité de l'équation de transport. Le développement des rides d'érosion est succinctement abordé dans le cas où l'influence de la surface libre de l'écoulement ne peut être négligée. Enfin, la théorie de la lubrification est mise en œuvre pour établir l'existence d'une ligne de contact mobile sur un solide poreux extrait d'un bain liquide, et sa disparition au profit d'un film de Landau-Levich-Derjagin, au-delà d'une vitesse critique.

## Summary

*When water flows over a granular substrate at low Reynolds number, erosion may generate various patterns (bars, braids, ripples or meanders), sometimes surprisingly similar to those naturally encountered in turbulent rivers. In a simple theoretical frame (shallow-water equations and bedload transport), this study aims to tackle this geomorphological problem using both analytical and numerical methods. A mass-conservative bank condition is established for micro-rivers, which allows one to model the widening of a small flume of constant outflow through erosion. The linear stability of the same micro-rivers is performed in two dimensions. It is shown that the influence of the erodible bank conditions can influence strongly the evolution of the bank instability. The effects of non-linearity on the bank instability are studied by means of a finite-elements numerical scheme. Under certain circumstances, diamond-shaped erosion fronts can develop. The stability of sand ripples when the free surface affects the flow is briefly studied. Finally, the lubrication theory is used to demonstrate that a moving contact line may stand on a porous plate, even for a vanishing contact angle, provided the de-wetting process is slow enough. Furthermore, above a critical withdrawal velocity, a Landau-Levich-Derjagin film forms.*



# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Stéphane Zaleski, Christophe Josserand et Pierre-Yves Lagrée, qui ont encadré mon travail. Au cours de ces trois années, ils m'ont non seulement formé et conseillé, mais également soutenu par leur amical enthousiasme. Je leur sais gré de m'avoir toujours fait confiance, tout en corrigeant mes erreurs. Je crois pouvoir affirmer que ma façon de travailler porte leur marque, et je m'en réjouis.

Je remercie vivement les rapporteurs de cette thèse, François Charru et Philip Hall pour leur lecture détaillée et critique de ce manuscrit, ainsi que l'ensemble des membres du jury, pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail.

Ghislain de Marsily et Pierre Ribstein ont suivi mes travaux depuis leur commencement. Leurs conseils m'ont été précieux alors que j'abordais un sujet de Géologie, éloigné de ma formation initiale.

J'ai également eu le grand plaisir de travailler avec François Métivier, Éric Lajeunesse et Luce Malverti : une partie importante de cette étude n'aurait pu être accomplie sans leur soutien. À l'heure où j'écris ces remerciements, j'entame d'ailleurs avec eux une collaboration dont je suis certain qu'elle sera fructueuse.

Il n'est de recherche scientifique sans échanges, et à ce titre, je tiens à remercier plus particulièrement Daniel Lhuillier, Philippe Davy, Joël Frelat, Éric Clément, Florent Maloggi, Philippe Claudin, Bruno Andreotti, Antoine Fourrière, Gary Parker, Peter Spelt et Jens Eggers pour les discussions fécondes que nous avons pu avoir.

Khanh-Dang Nguyen Thu-Lam a effectué son stage de master en collaboration avec Pierre-Yves Lagrée et moi-même : le chapitre de cette thèse traitant des rides d'érosion est le fruit de son talent et de sa bonne humeur.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des membres de l'Institut Jean Le Rond d'Alembert, où j'ai été fort bien accueilli et entouré. Je dois de très nombreux conseils aux autres doctorants de l'Institut : l'amicale solidarité qui a régné entre nous fut une aide inestimable.

Les réunions du Groupement de Recherche Milieux Divisés ont régulièrement ponctué cette thèse, me permettant ainsi de découvrir différents thèmes de recherche liés au mien, et de présenter mes travaux à une communauté critique et bienveillante. Je tiens à en remercier les organisateurs.

Enfin, je ne saurais suffisamment remercier ma famille et mes amis. Leurs encouragements m'ont été indispensables, tout comme leur relecture du présent manuscrit.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'érosion</b>	<b>15</b>
1.1	Interaction entre écoulement et sédiments . . . . .	15
1.1.1	Problème général . . . . .	15
1.1.2	Différentes approximations, différents phénomènes . . . . .	16
1.1.2.1	Réduction aux deux dimensions horizontales . . . . .	16
1.1.2.2	Systèmes uniformes dans la direction transverse . . . . .	31
1.1.2.3	La ligne de contact mobile . . . . .	34
1.2	Un modèle de transport sédimentaire . . . . .	37
1.2.1	Mécanisme du transport sédimentaire . . . . .	37
1.2.2	Lois de transport à une dimension en régime permanent . . . . .	38
1.2.3	Loi d'érosion à deux dimensions . . . . .	40
1.2.4	Avalanches de sédiments . . . . .	42
1.2.5	Évolution de la topographie . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Équations de l'écoulement et application aux rivières rectilignes</b>	<b>45</b>
2.1	Les Équations de Saint-Venant . . . . .	45
2.1.1	Intégration verticale des équations de Navier-Stokes . . . . .	45
2.1.2	Les hypothèses de Saint-Venant . . . . .	47
2.1.2.1	Cas classique turbulent . . . . .	48
2.1.2.2	Cas des écoulements laminaires . . . . .	48
2.1.3	Changement d'échelle et équations finales . . . . .	50
2.1.3.1	Cas laminaire . . . . .	50
2.1.3.2	Cas turbulent . . . . .	50
2.1.3.3	Cas général . . . . .	51
2.2	Section d'une rivière droite . . . . .	52
2.2.1	Équation générale . . . . .	52
2.2.2	Solution auto-semblable dans un cas simple . . . . .	53
2.2.3	Conservation du débit d'eau et conditions aux berges . . . . .	56
2.2.3.1	Si la fonction $h$ est continue en $b$ . . . . .	57
2.2.3.2	Si la fonction $h$ est discontinue en $b$ . . . . .	58
2.2.3.3	Résumé des diverses conditions aux berges . . . . .	63
2.2.4	Rivière à débit constant . . . . .	63
2.2.4.1	Établissement des équations . . . . .	63
2.2.4.2	Résolution numérique . . . . .	65



2.2.4.3	Un test pour les conditions aux berges . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Motifs d'érosion dans le plan horizontal</b>	<b>69</b>
3.1	Stabilité d'un film liquide . . . . .	69
3.1.1	Équation de dispersion dans le cas général . . . . .	69
3.1.1.1	État de base . . . . .	69
3.1.1.2	Perturbations . . . . .	70
3.1.1.3	Parité de la relation de dispersion . . . . .	71
3.1.2	Stabilité temporelle absolue . . . . .	72
3.1.2.1	Écoulement laminaire sur un plan incliné infini . . .	72
3.1.2.2	Détermination analytique du mode le plus instable .	72
3.2	Morphogénèse des micro-rivières . . . . .	77
3.2.1	Berges rigides et rectilignes . . . . .	77
3.2.1.1	Bancs alternés et autres modes instables . . . . .	77
3.2.1.2	Domaines de stabilité à pente constante . . . . .	78
3.2.1.3	Domaines de stabilité à largeur de canal constante .	81
3.2.2	Berges courbes ou érodables . . . . .	84
3.2.2.1	L'instabilité de courbure . . . . .	84
3.2.2.2	Généralisation des conditions aux berges . . . . .	92
3.2.2.3	Stabilité linéaire d'une micro-rivière . . . . .	96
3.3	Évolution non linéaire de l'instabilité de bancs . . . . .	110
3.3.1	Résolution numérique des équations . . . . .	110
3.3.1.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	110
3.3.1.2	Équations complètes . . . . .	112
3.3.1.3	Comparaison avec la stabilité linéaire . . . . .	116
3.3.2	Les motifs d'érosion en chevrons . . . . .	116
3.3.2.1	Un front d'érosion . . . . .	116
3.3.2.2	Évolution non-linéaire d'une onde plane sinusoïdale .	119
3.3.2.3	Prédictions de la théorie linéaire . . . . .	123
<b>4</b>	<b>Phénomènes invariants dans la direction transverse</b>	<b>127</b>
4.1	Rides formées par un écoulement laminaire . . . . .	127
4.1.1	Écoulement dans un plan vertical . . . . .	127
4.1.1.1	Équations de Navier-Stokes et choix des dimensions .	127
4.1.1.2	Équations linéarisées . . . . .	129
4.1.1.3	Comparaison avec le modèle de Saint-Venant . . . .	130
4.1.2	Couplage avec l'érosion . . . . .	132
4.1.2.1	Équation de dispersion . . . . .	132
4.1.2.2	Influence du terme de pente . . . . .	135
4.1.2.3	Diagramme de stabilité . . . . .	135
4.2	Ligne de contact mobile sur un matériau poreux . . . . .	138
4.2.1	<i>Introduction</i> . . . . .	138
4.2.2	<i>Principles</i> . . . . .	139
4.2.2.1	<i>Lubrication approximation</i> . . . . .	139

4.2.2.2	<i>The case of porous solid</i>	141
4.2.2.3	<i>Boundary conditions</i>	142
4.2.2.4	<i>Parameters</i>	143
4.2.2.5	<i>Hydrostatic solutions</i>	144
4.2.3	<i>Numerical results</i>	144
4.2.3.1	<i>Contact line solutions</i>	144
4.2.3.2	<i>Film solutions</i>	146
4.2.4	<i>Dynamical systems interpretation</i>	147
4.2.4.1	<i>Phase space</i>	147
4.2.5	<i>Asymptotic results</i>	151
4.2.5.1	<i>Overview</i>	152
4.2.5.2	<i>A two-zones matching</i>	154
4.2.6	<i>Discussion and conclusions</i>	155
4.2.7	<i>Appendixes</i>	158
4.2.7.1	<i>Derivation of the fundamental equation</i>	158
4.2.7.2	<i>Pressure divergence at the contact line</i>	159
4.2.7.3	<i>Flow in the porous plate</i>	160
4.2.7.4	<i>Existence of free-flux film solutions</i>	160



# Introduction

Mues par la convection thermique, les roches en fusion qui constituent le manteau de la Terre entraînent les plaques continentales, déforment et renouvellent la croûte terrestre, élèvent des chaînes de montagnes au-dessus du niveau moyen de l'écorce. La gravité joue alors son rôle, à travers les nombreux mécanismes de l'érosion, en emportant ces roches de leur élévation tectonique vers des niveaux d'énergie potentielle moindre, au fond des océans (Griffiths et Whitehead, 2001). Les premières étapes de ce transport, marquées par de fortes pentes, sont franchies par des écoulements très concentrés en roches : avalanches, coulées de boues, et autres laves torrentielles, qui alimentent les cours d'eau en sédiments (Seminara, 1998). L'eau circulant à la surface des continents ne représente que 0.62 % du volume total existant sur notre planète (Twidale, 2004) ; c'est pourtant le principal agent continental de transport sédimentaire, en concurrence avec le vent, les glaciers ou les coulées de lave. La topographie influence certes l'écoulement d'une rivière, mais en retour cet écoulement est capable de transporter les sédiments qui composent son lit, déformant ainsi le relief. Ce couplage est le sujet de la présente étude. Passé l'estuaire du fleuve qui les charrie, les sédiments sont emportés vers les plaines abyssales par les circulations océaniques et les courants de turbidité. Le mélange d'eau et de particules solides qui constitue ces derniers s'écoule sous l'effet de la seule gravité (Huppert, 2006), en formant parfois des méandres fort semblables à ceux des fleuves (Imran et coll., 1999).

L'érosion déplace des grains de sédiments de taille millimétrique, pour façonner des paysages qui s'étendent parfois sur des centaines de kilomètres ; plus large encore est la gamme des temps caractéristiques de son œuvre. Pour représenter son effet à l'échelle d'un massif montagneux, on doit recourir à des modèles très condensés, tels que les *précipitons* de Crave et Davy (2001), automates cellulaires dotés d'un comportement érosif simplifié et capables, lorsque leur action collective est évaluée numériquement, de reproduire la structure caractéristique des reliefs d'érosion. À l'échelle d'un cours d'eau, ce type d'automates peut former des méandres et des terrasses, structures typiques de la géomorphologie fluviale (de Marsily et coll., 1998). À cette échelle, les limites de ces modèles sont probablement atteintes : s'ils conservent bien, par construction, la masse des sédiments qu'ils érodent, les précipitons en revanche ignorent la quantité de mouvement<sup>1</sup>.

Imposer aux modèles d'érosion fluviale de conserver la quantité de mouvement,

---

<sup>1</sup>P. Davy, communication personnelle, 2004.

c'est faire entrer un objet de la Géomorphologie dans le champ de la Mécanique des Fluides. Cela, bien entendu, n'ira pas sans de lourdes simplifications, comme le soulignent Balmforth et Provenzale (2001) :

*In their full complexity, erosion and sedimentation result from the dynamical interaction between a turbulent fluid flow and the granular medium composing the bed. But we know only a little about turbulence, much less about granular media, and not much at all about their interaction.*

Ces modèles déterministes reposent donc sur des relations empiriques (notamment les lois de transport sédimentaire) et sur des approximations mathématiques issues des lois fondamentales de la Mécanique (par exemple la dérivation des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes). Ils sont souvent destinés à élaborer des prédictions quantitatives, aussi bien pour améliorer notre compréhension de certains phénomènes géologiques (détermination de la longueur d'onde des méandres, de la largeur d'équilibre d'un fleuve, *etc.*), que dans des domaines relevant de l'ingénierie, en évaluant le risque d'ensablement d'un barrage ou d'*affouillement*<sup>2</sup> au pied d'une pile d'ouvrage d'art (Chanson, 2004). On peut également recourir à ces modèles pour établir des lois statistiques de comportement des cours d'eau (Stølum, 1996) qui, à leur tour, doivent aider à comprendre la morphogénèse des plaines alluviales, lesquelles peuvent abriter des réservoirs aquifères ou pétrolifères. La reconstitution de la structure hétérogène de ces derniers permet d'évaluer les caractéristiques de roches souterraines difficilement accessibles, démarche indispensable pour déterminer la perméabilité globale du sous-sol vis-à-vis des fluides qu'il contient (de Marsily et coll., 2005).

Seminara (2006) intitule un chapitre de sa revue « *A basic yet academic question : why do meanders form ?* » ; ce faisant, il soulève une question fondamentale pour toute une branche de la géomorphologie fluviale, à laquelle n'échappe pas la présente étude. En effet, nous dit-il, personne n'a jamais observé le développement d'une instabilité de méandre à partir d'un fleuve initialement droit, ni l'élargissement de ce dernier jusqu'à sa taille d'équilibre. Que peuvent alors nous apprendre l'étude de la stabilité d'un cours d'eau rectiligne, ou un modèle d'élargissement de ces berges ? C'est entendu : ces théories simplifiées ne reproduisent pas l'hypothétique formation de structures géologiques généralement issues d'une évolution complexe, pour laquelle on serait bien en peine de déterminer un instant initial, et l'état de base associé. Pourtant, c'est grâce à une étude de stabilité linéaire qu'Ikeda et coll. (1981) ont approché analytiquement la longueur d'onde des méandres naturels. Cette méthode apporte donc un éclairage sur les mécanismes impliqués dans ce phénomène. D'autre part, de nombreuses contributions expérimentales portent sur des modèles réduits de systèmes géologiques liés au transport sédimentaire (Federici et Paola, 2003; Métivier et Meunier, 2003; Coleman et Eling, 2000; Lague et coll., 2003), pour lesquels l'état de base est clairement établi. Dans ce cadre, la comparaison des prédictions de l'analyse de stabilité linéaire d'un modèle avec l'apparition expérimentale d'une instabilité permet d'examiner les fondements de ce modèle. En tenant compte

<sup>2</sup>L'*affouillement* désigne le creusement du lit d'un cours d'eau par l'écoulement.

de l'évolution temporelle du système, on élargit le champs des critères de validation, par rapport à la seule comparaison des états d'équilibre théoriques, expérimentaux et naturels. Enfin, certains motifs géologiques de petites tailles, tels que les rides ou les chevrons d'érosion, sont reproduits en laboratoire à l'échelle naturelle : des modèles expérimentaux et théoriques peuvent alors représenter leur formation de manière réaliste.

Le travail que nous présentons se fonde sur l'idée qu'une profonde analogie relie non seulement les différentes structures d'érosion abordées entre elles (méandres, bancs alternés, rides et chevrons), mais également ces phénomènes naturels avec les expériences de taille réduite qui visent à les reproduire. En particulier, comme le signale Parker (1998) dans le cas des méandres, et Malverti et coll. (2006) pour de plus nombreux exemples, l'érosion exercée par des écoulements laminaires de petite taille permet souvent de reproduire des motifs associés à des écoulements turbulents. Ici l'analogie prend tout son sens, puisque les équations de Saint-Venant pour des rivières turbulentes et pour des *micro-rivières* laminaires ne diffèrent que par la valeur de certains coefficients constants. D'une manière générale, si ces différences empêchent d'étendre directement le comportement des micro-rivières aux rivières naturelles par une simple mise à l'échelle des paramètres, il n'en demeure pas moins que les mécanismes fondamentaux sont probablement communs aux deux cas. Dans cette étude, nous nous efforcerons d'établir, pour des écoulements laminaires, des résultats connus pour des écoulements turbulents. Autant que possible, nous ne conserverons dans les équations que les termes indispensables pour reproduire le phénomène qui nous occupe. L'emploi de modèles réduits laminaires, nécessitant une infrastructure infiniment moins lourde que les rivières expérimentales turbulentes, répond à cette volonté de simplification. Enfin, d'un point de vue plus académique, le système qui consiste en l'érosion d'un matériau granulaire par un film liquide laminaire produit également des effets qui lui sont propres (chevrons, ligne de contact mobile régularisée), dont la richesse phénoménologique (Daerr et coll., 2003) n'a pas été entièrement explorée à ce jour.

Les différentes parties de notre étude s'articulent de la manière suivante : Le chapitre 1 résume le contexte dans lequel s'inscrivent les chapitres suivants (§ 1.1), en s'appuyant sur quelques-unes des contributions les plus marquantes publiées dans le domaine qui nous concerne. Il introduit également succinctement la notion de transport sédimentaire (§ 1.2). Dans le chapitre 2 sont établies les équations de Saint-Venant à partir de celles de Navier-Stokes, en insistant sur leurs similitudes pour les écoulements turbulents et laminaires (§ 2.1). Le modèle général constitué par l'association des équations de Saint-Venant avec une loi de transport sédimentaire, est mis en œuvre dans diverses configurations par la suite. L'étude des rivières rectilignes, qui occupe le § 2.2, permet d'introduire de nouvelles conditions aux berges, qui lient l'érosion des rives à l'évolution du lit. Le chapitre 3 traite des effets de l'érosion fondamentalement liés à la direction transverse : l'instabilité de bancs (§ 3.1), l'influence des conditions aux berges sur cette instabilité (§ 3.2), et son évolution non-linéaire (§ 3.3). Enfin, le chapitre 4 regroupe deux problèmes distincts, mais

tous deux invariants dans la direction transverse : la formation des rides d'érosion (§ 4.1), et la ligne de contact mobile sur un matériau granulaire (§ 4.2).

# Chapitre 1

## L'érosion

### 1.1 Interaction entre écoulement et sédiments

#### 1.1.1 Problème général

Les phénomènes géologiques abordés dans la présente étude procèdent tous d'un même mécanisme, dont l'exposé tient en quelques mots. Un fluide s'écoule sur un substrat solide sous les effets conjoints de la gravité et des contraintes exercées par le relief. Si l'intensité de l'écoulement est suffisante pour arracher, transporter puis déposer une fraction du substrat, le relief est à son tour modelé par le fluide. C'est précisément cette interaction que notre étude s'attache à décrire, du moins dans quelques cas particuliers. L'eau est généralement le premier fluide auquel on pense en parlant d'érosion, et nous nous concentrerons sur celui-ci. Il pourrait cependant tout aussi bien s'agir d'air (formation de dunes et de rides éoliennes<sup>1</sup> (Bagnolds, 1988; Kroy et coll., 2002; Lagrée, 2003; Kouakou et Lagrée, 2006; Hersen et coll., 2004)), ou d'un matériau dont la rhéologie est plus complexe (boue, lave torrentielle, roche en fusion, glace). De même, les matériaux constituant le substrat peuvent varier, mais nous supposons ici qu'il s'agit de sédiments alluviaux, assimilables à un matériau granulaire.

Du point de vue déterministe de la Mécanique des milieux continus, le modèle d'érosion le plus général consiste à étudier l'écoulement d'un fluide multiphasique de concentration variable, en décrivant simultanément la dynamique du fluide réel (l'eau) et celle des grains de substrat transportés. Dans certains cas, tel que celui des laves torrentielles, ce modèle ne peut être simplifié. L'intensité des échanges de particules entre le substrat et le fluide est telle que l'évolution de la topographie du premier intervient directement dans la dynamique de l'écoulement. De même, lorsqu'elle atteint des niveaux suffisamment élevés, la concentration en particules solides peut influencer les caractéristiques rhéologiques du fluide.

Cependant, si l'on excepte ces événements violents, on peut généralement considérer l'érosion comme un phénomène *lent*, c'est-à-dire que son influence sur le relief ne se fait sentir que sur des échelles de temps très longues en comparaison des temps

---

<sup>1</sup>Quoique dans ce cas la contrainte motrice ne soit pas la gravité.



caractéristiques de l'écoulement. Mathématiquement, cette approximation signifie que le temps n'intervient pas explicitement dans les équations régissant l'écoulement. Ce dernier est alors représenté par une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes (point de départ du § 2.1) dans lesquelles on s'empressera de supprimer les termes non-linéaires d'advection.

L'écoulement stationnaire décrit précédemment entraîne un déplacement des particules sédimentaires, représenté par un flux moyen vectoriel. Il n'existe pas, dans la littérature concernée, de consensus clair sur une théorie complète du transport sédimentaire. Au § 1.2, nous présentons succinctement le cas du charriage, pour lequel diverses lois de transport empiriques ont pu être établies. Étant donnée une telle loi, un simple bilan de la quantité de sédiments transportés permet de déterminer l'évolution de la topographie du substrat. La résolution analytique des équations obtenues s'avère impossible dans le cas général. En revanche, l'étude de leur stabilité linéaire permet souvent d'identifier le mécanisme générateur d'un type particulier de formation géologique (Seminara, 1998).

Certains auteurs, notamment Langlois et Valance (2007) au sujet des rides sous-marines et Zolezzi et Seminara (2001) dans le cas d'un fleuve, ont directement utilisé le modèle à trois dimensions obtenu grâce aux approximations précédentes. Toutefois, dans la majorité des cas pratiques, on peut raisonnablement simplifier ce modèle en proposant des hypothèses supplémentaires sur la géométrie du système, ou sur la valeur de certains paramètres tels que le nombre de Reynolds ou le rapport d'aspect de l'écoulement. À chacun de ces modèles simplifiés (dont les principaux sont brièvement présentés ci-dessous) correspond un mécanisme d'instabilité caractéristique, à l'origine d'une formation géologique particulière (rides, dunes, méandres, bancs alternés, *etc.*). Tel que nous le comprenons, l'objectif de la Géomorphologie est d'attribuer à chaque structure géologique un mécanisme de formation, et le modèle mathématique quantitatif associé, le plus simple et universel possible. Autrement dit, il s'agit de lier la classification géologique issue de l'observation naturelle à des modèles déduits des lois de la Mécanique.

## 1.1.2 Différentes approximations, différents phénomènes

### 1.1.2.1 Réduction aux deux dimensions horizontales

**1.1.2.1.1 Principe et limites de l'approximation de Saint-Venant** *Stricto sensu*, les équations établies à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par Barré de Saint-Venant pour décrire l'écoulement de l'eau dans un canal ouvert ne prennent en compte que la dimension longitudinale (Barré de Saint-Venant, 1871). Cependant, par extension, les hydrauliciens ont désigné du nom de Saint-Venant<sup>2</sup> les équations à deux dimensions d'espace, dérivées des équations de Navier-Stokes par une intégration verticale. Cette méthode est décrite en détail dans le § 2.1. Elle requiert une hypothèse sur la relation entre le débit de l'écoulement et la contrainte qu'il exerce sur son support, qui peut être déduite de la forme supposée du profil vertical de vitesse de l'écoulement.

<sup>2</sup>Souvent remplacé par l'expression *shallow water equations* en Anglais.

Cette hypothèse demeure valable tant que ce profil présente une certaine régularité, qui permet de le déterminer à partir de grandeurs intégrales (vitesse débitante et profondeur de l'écoulement). Ceci n'est possible que si l'écoulement est *peu profond*, c'est-à-dire si l'échelle caractéristique horizontale est beaucoup plus grande que la profondeur de l'écoulement. Les équations de Saint-Venant reviennent alors à *négliger l'influence de la dynamique dans le plan vertical*, c'est pourquoi ce modèle ne permet pas de décrire la formation des dunes et rides (voir § 1.1.2.2 et 4.1).

Associées à un modèle de transport de sédiments, lui-même intégré selon la direction verticale (voir § 1.2), les équations de Saint-Venant ont été largement utilisées en Géomorphologie fluviale depuis les premiers travaux de Callander (1969). En effet, la valeur du rapport d'aspect  $R$  (rapport de la largeur sur la profondeur du fleuve) de la plupart des rivières naturelles est suffisamment élevée pour justifier les hypothèses de Saint-Venant. L'étude récente de Federici et Seminara (2003) atteste de la capacité de ce modèle à prédire la formation et le comportement des bancs alternés (voir § 1.1.2.1.3). Cependant, par construction, les équations de Saint-Venant ne peuvent pas représenter les courants secondaires, généralement associés dans la littérature à la formation des méandres (Seminara, 2006).

**1.1.2.1.2 La recirculation** Dans un premier article publié en Allemand, Einstein (1926)<sup>3</sup> expose une interprétation de la formation des méandres fondée sur le phénomène de recirculation (voir Einstein (1954) pour la traduction anglaise de cet article). Les effets conjugués de la viscosité et de la force de Coriolis entraînent l'apparition d'un courant secondaire, inscrit dans le plan transverse d'un fleuve s'écoulant dans un lit sinueux (voir figure 1.1). Ces courants induisent un flux de sédiments depuis l'extérieur du méandre vers l'intérieur de la courbe, accroissant ainsi la sinuosité initiale. En réalité, comme le souligne Bowker (1988), ce mécanisme fut proposé à l'origine par Thomson (1876), mais la contribution d'Einstein (1926), plus complète, explique également la migration des méandres vers l'aval (Martínez-Frías et coll., 2006).

Depuis les contributions précitées, la plus grande partie de la littérature concernée associe la formation des méandres à la recirculation. Dans un article fondateur, Ikeda et coll. (1981) proposent un modèle curviligne de rivière, issu des équations de Saint-Venant à deux dimensions, qui représente le déplacement du *thalweg* (la ligne médiane du cours d'eau). L'interaction de l'écoulement avec le fond de la rivière est décrite par une loi empirique, selon laquelle l'inclinaison transverse du fond est proportionnelle à la courbure du méandre. Les auteurs présentent cette relation comme un modèle des effets de la recirculation sur le transport sédimentaire. Quatre ans plus tard, Blondeaux et Seminara (1985) affinent ce modèle en écrivant non seulement les équations de Saint-Venant pour décrire l'écoulement, mais également des équations de transport de sédiments à deux dimensions, très similaires à celles employées par

---

<sup>3</sup>Il s'agit bien ici d'Albert Einstein, et non de son fils Hans Albert Einstein, professeur d'hydrologie à Berkeley, connu notamment pour la loi de transport sédimentaire qui porte son nom (Einstein, 1950).

Callander (1969) pour décrire la formation des bancs alternés (voir § 1.1.2.1.3 et 1.2). Là encore, les auteurs introduisent dans leur modèle les effets de la recirculation par l'intermédiaire d'un terme empirique ajouté dans les équations de transport de sédiments. Leur étude met en lumière l'existence de *l'instabilité de courbure* (dénommée *bend instability* dans Blondeaux et Seminara (1985), voir § 1.1.2.1.4), qui entraîne la formation des méandres. Le modèle proposé par Johannesson et Parker (1989b), inspiré de Blondeaux et Seminara (1985), est devenu un « *modèle standard* »<sup>4</sup>, fondement de nombreux développements successifs (Edwards et Smith, 2001; Sun et coll., 1996; Stølum, 1996).

Depuis ces contributions, la plupart des auteurs associent l'instabilité de courbure (et plus généralement la formation des méandres) au phénomène de recirculation (voir par exemple l'article de revue Camporeale et coll. (2007), ou le livre destiné au grand public Guyon et coll. (2005)). La présente étude souligne la fragilité de cette association : le § 3.2.2.1 démontre l'existence de l'instabilité de courbure dans un cadre inspiré de Blondeaux et Seminara (1985), mais où l'on ne tient pas compte de la recirculation. L'influence de ces courants secondaires sur le transport sédimentaire dans les lits de rivière courbés ne saurait toutefois être négligée dans le cas général (voir les études expérimentales et numériques de Blanckaert et de Vriend (2004) et de Shams et coll. (2002), ainsi que le modèle de Zolezzi et Seminara (2001)). Le raisonnement suivant permet d'estimer l'intensité caractéristique des courants de recirculation :

Soit un lit de rivière de largeur caractéristique  $\mathcal{W}$  et de profondeur  $\mathcal{H}$ , présentant une courbure dans le plan horizontal de rayon  $r_c$  (voir figure 1.1). Il est parcouru par un écoulement dont la vitesse longitudinale typique est désignée par  $\mathcal{U}$ . La courbure du lit instaure un courant secondaire de recirculation dont l'intensité  $v_r$  est telle que le frottement turbulent équilibre la force motrice imposée par la variation verticale de la force centrifuge, ce qui conduit à l'égalité d'échelle suivante :

$$\rho C_f \mathcal{U} v_r \sim \mathcal{H} \rho \frac{\mathcal{U}^2}{r_c}, \quad (1.1)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique de l'eau, et  $C_f$  un coefficient de frottement turbulent. L'intensité de la recirculation est donc de l'ordre de

$$\frac{v_r}{\mathcal{U}} \sim \frac{\mathcal{H}}{r_c} \quad (1.2)$$

si le coefficient de frottement est d'ordre un. Dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire (telle que celles présentées au § 3.1.1), l'amplitude  $v_{sv}$  de la perturbation de vitesse<sup>5</sup> est d'ordre  $\epsilon U$ , où  $\epsilon$  désigne le petit paramètre sans dimension qui caractérise l'amplitude des perturbations. De même, l'ordre de grandeur de la courbure s'écrit

$$\frac{1}{r_c} \sim \frac{\epsilon \mathcal{W}}{\lambda^2}, \quad (1.3)$$

<sup>4</sup>Nous empruntons cette expression à Zolezzi et Seminara (2001).

<sup>5</sup>Il s'agit ici de la perturbation de vitesse *débitante* (voir le § 2.1), par opposition à la vitesse de recirculation, dont l'intégrale verticale est nulle.

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la perturbation, et où la largeur  $\mathcal{W}$  de la rivière donne l'échelle de longueur horizontale. Or, la longueur d'onde typique des méandres correspond à quelques largeurs de fleuve (la théorie de l'instabilité de courbure reproduit fort bien cette caractéristique naturelle des méandres, voir la figure 8 de Blondeaux et Seminara (1985)). Ainsi, les relations (1.2) et (1.3) permettent d'écrire

$$\frac{v_r}{v_{sv}} \sim \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{W}} = \frac{1}{R}. \quad (1.4)$$

Le résultat précédent ne fait que traduire la contrainte de validité des équations de Saint-Venant, qui n'approchent l'écoulement réel que lorsque le rapport d'aspect  $R$  de la section du fleuve tend vers l'infini. Notons que les contributions de Blanckaert et de Vriend (2004) et de Shams et coll. (2002), qui portent entièrement sur l'influence des courants secondaires, concernent des rivières dont les rapports d'aspect sont proches de 3, valeur suffisamment faible pour le développement d'une recirculation. Dans son introduction, Yalin (1992) souligne que le rapport d'aspect de la majorité des rivières formant des méandres atteint des valeurs élevées<sup>6</sup>.

Finalement, si l'on restreint notre étude aux écoulements dont le rapport d'aspect est élevé, le terme de recirculation devrait rester une correction aux équations de Saint-Venant. Cette correction peut certes influencer quantitativement les résultats, et donc acquérir une importance cruciale si l'on souhaite proposer un modèle prédictif pour des rivières naturelles. Cependant, elle n'intervient probablement pas directement dans le mécanisme d'instabilité des écoulements en eau peu profonde. La contribution de la recirculation sera négligée dans toute la suite de cette étude, sans que cette approximation ne réduise la portée de l'analogie entre les écoulements de surface laminaires et turbulents, puisqu'une recirculation peut aussi bien apparaître au sein des premiers.

### 1.1.2.1.3 Instabilité de bancs, chevrons et bancs alternés

**Instabilité de banc dans les systèmes infinis** Les équations de Saint-Venant, qui ne prennent pas en compte l'inertie verticale du fluide, sont incapables de décrire la formation de rides sous-marines (voir § 1.1.2.2 et § 4.1). Ce résultat classique peut être établi de la façon suivante (Kouakou et Lagrée, 2006; Lagrée, 2003) :

Considérons un écoulement unidimensionnel, dans la direction  $x$ , décrit par les équations de Saint-Venant, et capable d'éroder son substrat. La théorie linéaire du § 3.1.1, dont nous employons les notations, conduit aux relations

$$(S + \frac{6}{5}ik_x F^2)u_* + ik_x h_* + (ik_x - 2S)d_* = 0, \quad (1.5)$$

$$d_* + u_* = 0, \quad (1.6)$$

---

<sup>6</sup>Notons que la théorie purement hydrodynamique de Yalin pour expliquer le développement de motifs d'érosion dans les rivières est très contestée.

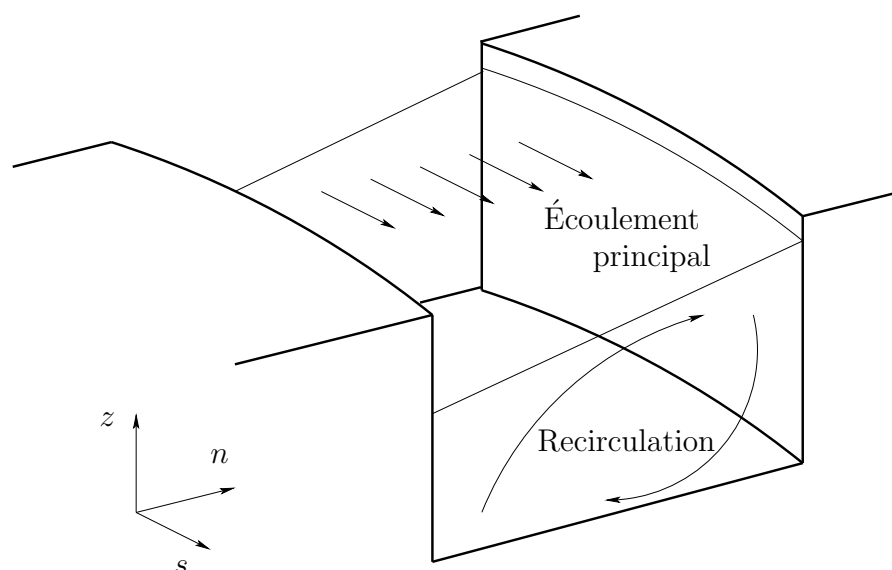


FIG. 1.1 – Illustration du phénomène de la recirculation. Lorsqu'un fleuve s'écoule dans un lit sinueux, les lignes de courant sont hélicoïdales. Le lecteur trouvera dans l'article original d'Einstein un exposé limpide de ce phénomène (il s'agit de la célèbre expérience de la tasse de thé, voir Einstein (1954)).

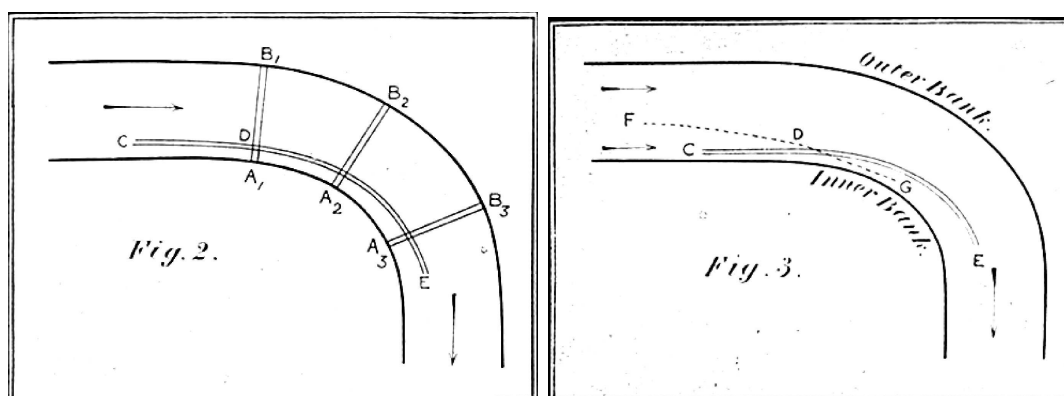


FIG. 1.2 – Planches extraites de Thomson (1876). Il s'agit, à notre connaissance, du premier article expliquant la formation des méandres par la recirculation. L'auteur décrit l'apparition des courants secondaires en ces termes : « [...] *the water-pressure must be increasing from A to B, on account of the centrifugal force of the particles composing that line [...]. But the layer of water along the bottom, being by friction much retarded, has much less centrifugal force [...]; and consequently it will flow sidewise along the bottom toward the inner bank* ». (Figures reproduites avec l'aimable autorisation de la *Royal Society of London*.)

$$\tau_{x,*} = (u_* - d_*), \quad (1.7)$$

où  $u_*$ ,  $d_*$ ,  $h_*$  et  $\tau_{x,*}$  désignent les amplitudes complexes respectivement des perturbations de vitesse, de profondeur de l'écoulement, de hauteur du fond et de contrainte exercée par l'écoulement sur le fond. La pente moyenne du fond est notée  $S$ , et  $F$  désigne le nombre de Froude. En première approximation, la contrainte  $\tau_x$  détermine le transport des sédiments. En fonction de celle du fond, l'amplitude de sa perturbation s'écrit

$$\tau_{x,*} = \frac{2k_x h_*}{k(1 - 6F^2/5) + 3ik_x}. \quad (1.8)$$

L'argument du membre de droite de cette équation donne le déphasage entre la perturbation de contrainte et celle du fond, qui est compris entre 0 et  $\pi$ . Cette restriction interdit à une perturbation sinusoïdale de croître, car la contrainte exercée par l'écoulement perturbé accumule les sédiments dans les creux de la topographie du fond (voir figure 1.3).

La validité du raisonnement précédent repose entièrement sur l'hypothèse selon laquelle le fluide ne peut s'écouler que dans la direction  $x$ . Si, au contraire, nous prenons en compte la dimension transverse  $y$ , la relation (1.6) issue de l'équation de conservation de la masse d'eau n'est plus vérifiée. En effet, la vitesse transverse de l'écoulement intervient dans cette relation, qui n'impose plus l'opposition de phase entre  $u_*$  et  $d_*$ . Le déphasage entre la perturbation de contrainte et celle du fond peut cette fois explorer l'intervalle  $[-\pi, 0]$ , ce qui autorise les situations instables (voir le § 3.1.1).

Un mode élémentaire de cette *instabilité de bancs* correspond à une onde sinusoïdale plane, dont le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  n'est pas aligné avec la direction de l'écoulement de base (c'est-à-dire celle de la plus grande pente). Le mécanisme contrôlant cette instabilité n'est pas lié à l'inertie du fluide, puisque des modes instables peuvent apparaître au sein d'un écoulement parfaitement visqueux, pour un nombre de Froude nul (voir à nouveau le § 3.1.1).

**Chevrons d'érosions** Lorsqu'un film liquide mince s'écoule sur un matériau granulaire susceptible d'être érodé (par exemple lorsqu'une vague se retire d'une plage), on peut voir se développer à la surface des sédiments une succession de losanges en relief (voir le § 3.3.2.1 et les figures 1.4 et 3.26). À notre connaissance, aucune étude quantitative de ces chevrons n'a été menée à ce jour (leur existence a été signalée par Daerr et coll. (2003)). Il semble cependant que l'instabilité de banc, décrite ci-dessus, puisse être à l'origine de la formation de tels motifs dans les écoulements à faible nombre de Reynolds (voir le § 3.3). L'article récent de Hall (2007) fait également état de bancs se propageant obliquement dans des rivières de très grand rapport d'aspect, sans toutefois donner de référence précise. Enfin, les simulations numériques de Defina (2003), ainsi que le modèle analytique de Hall (2006), qui prédisent tous deux l'évolution non-linéaire de bancs alternés soumis

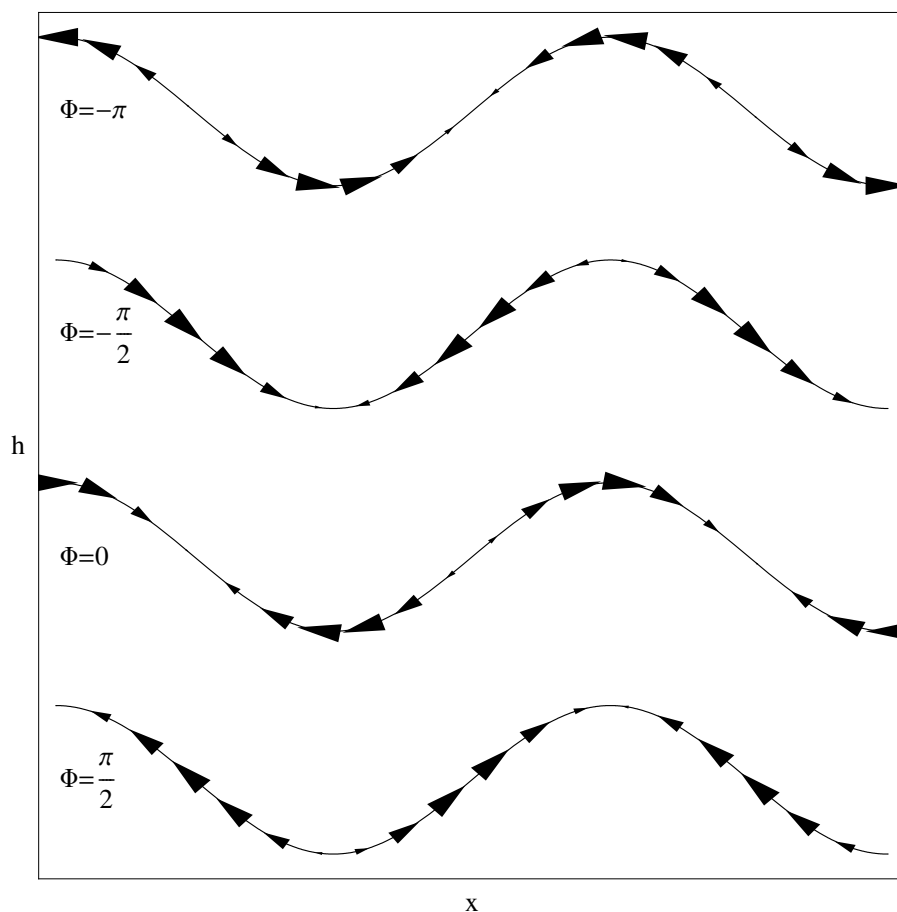


FIG. 1.3 – Influence du déphasage  $\Phi$  entre la perturbation de contrainte et celle du fond sur la stabilité de rides sinusoïdales. Les courbes représentent la perturbation de la topographie du fond. Les flèches symbolisent le cisaillement exercé par le fluide (la taille de la flèche est proportionnelle à l'intensité de cette contrainte). Les échelles sont arbitraires. Le flux de sédiments étant une fonction croissante du cisaillement, la convergence des flèches indique une accumulation de sédiments, tandis que des sédiments sont emportés lorsque les flèches divergent. Dans le premier cas ( $\Phi = -\pi$ ), les sédiments arrachés aux zones de pente négative sont déposés sur les zones de pente positive. Les rides avancent donc à contre-courant, sans que leur taille soit affectée. De même, les rides décroissent sans se mouvoir pour  $\Phi = -\pi/2$ , avancent dans le sens du courant sans que leur taille soit affectée pour  $\Phi = 0$  et croissent sans se mouvoir pour  $\Phi = \pi/2$ .

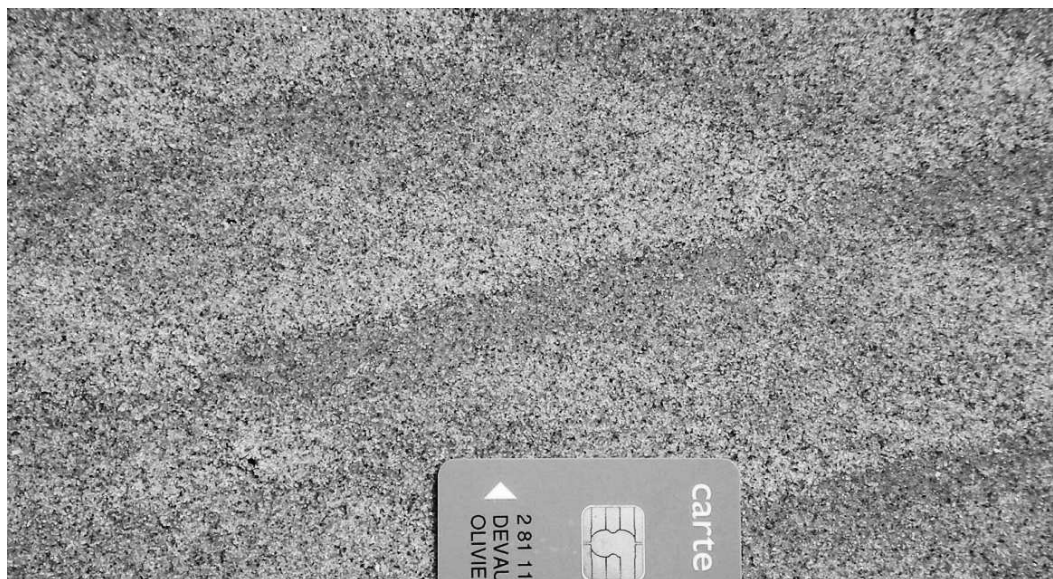


FIG. 1.4 – Motifs naturels d'érosion en chevrons sur du sable, photographiés sur la plage de Goleta, Californie, USA. La hauteur de la carte (5.4 cm) donne l'échelle. Les motifs sont ici mis en évidence par la ségrégation des divers constituants du sable, de couleurs différentes. (Photographie : C. Josserand et l'auteur.)

à un écoulement turbulent, conduisent à la formation de motifs semblables à des chevrons.

**Bancs alternés** Dans les cours d'eau dont le fond est constitué de sédiments soumis au charriage, on observe souvent des bancs dont l'étendue transverse avoisine la moitié de la largeur du lit, et dont la longueur n'excède pas quelques largeurs de lit (voir la figure 1 de Ramez (2005)). Du côté opposé au banc, l'écoulement a formé un bassin de la taille du banc lui-même. Ce motif s'inverse régulièrement dans la direction de l'écoulement, selon une longueur d'onde relativement homogène. On observe ces bancs alternés<sup>7</sup> dans des rivières de toutes tailles, de l'Ornain (voir la figure 3.6) jusqu'au Rhin (Jaeggi, 1984).

Les bancs alternés sont des structures mobiles, qui migrent généralement vers l'aval du cours d'eau (Ramez, 2005; Newbury, 1995). Les expériences de Lanzoni (2000) reproduisent ce comportement en laboratoire. Nous emploierons le terme *bancs alternés* exclusivement dans les cas où la berge de la rivière est rigide, ou bien dans la limite équivalente, c'est-à-dire lorsque la vitesse typique de déplacement de la berge est négligeable face à celle de migration des bancs. La dénomination *free bars* employée notamment par Seminara (2006) pour désigner les bancs alternés souligne qu'ils trouvent leur origine dans l'instabilité du fond de la rivière, par opposition au développement de structures forcées par une courbure de la berge (voir le § 1.1.2.1.4), ou une variation de la largeur du lit.

<sup>7</sup> *Alternate bars* dans la littérature anglo-saxonne.



Prendre en compte les berges de la rivière, en tant que conditions aux bords imposant des flux nuls de fluide et de sédiments, interdit l'existence d'un mode sinusoïdal unique de l'instabilité de banc. Ces conditions ne peuvent en effet être satisfaites que si deux modes coexistent, avec la même pulsation  $\omega$ , le même nombre d'onde longitudinal  $k_x$  et la même amplitude, mais des nombres d'onde transverses  $k_y$  opposés (voir § 3.2.1.1). Ce couple d'ondes planes sinusoïdales constitue un mode de l'instabilité de banc dans un canal. Le nombre d'onde  $k_y$  prend exclusivement des valeurs discrètes :  $k_y = p\pi/R$ , où  $p$  désigne un entier. En particulier le mode  $p = 1$ , représenté sur la figure 3.5, est le précurseur (linéaire) des bancs alternés, dont il présente les deux caractéristiques fondamentales : forme et migration vers l'aval. Précisons que le nombre d'onde longitudinal, lui, n'est pas discret dans ce cas ; on suppose généralement que le système réel développera le mode le plus instable. Comme l'ont signalé Engelund et Skovgaard (1973) et Parker (1976) les modes d'ordre supérieurs (c'est à dire pour  $p > 1$ ) permettent d'interpréter l'existence de rivières *en tresse*, telle que celle de la figure 1.5, lorsque le rapport d'aspect de la section du lit est élevé. L'évolution non-linéaire de ces bancs d'ordre élevé, et notamment l'apparition de bifurcations du lit caractéristiques des rivières en tresse, demeure cependant imparfaitement comprise (Federici et Paola, 2003).

La théorie linéaire des bancs alternés, formulée initialement par Callander (1969), permet donc d'expliquer le développement initial de ces structures (Lanzoni (2000) compare avec succès les résultats de la stabilité linéaire avec ses données expérimentales). Dans la nature, l'amplitude des bancs alternés peut atteindre 80% de la hauteur d'eau ; à ce stade, la théorie linéaire n'a plus de sens. Les théories non-linéaires (Schielen et coll., 1993; Hall, 2006) permettent de prédire l'évolution de l'amplitude d'un train de bancs alternés d'amplitude finie, et peuvent conduire à des formes stationnaires de bancs (Colombini et coll., 1987). Enfin, la résolution numérique des équations de Saint-Venant couplées au transport des sédiments devient indispensable dans le cas général (voir Defina (2003) et, pour un écoulement laminaire, le § 3.3 de la présente étude).

Si, après une période de débit élevé ayant entraîné la formation de bancs alternés, le niveau d'eau d'une rivière décroît, la déformation du fond impose à l'écoulement un parcours sinueux, dont l'allure rappelle celle des méandres. La figure 1 de Ramez (2005) présente un exemple naturel de ce phénomène. Les rivières expérimentales de Federici et Paola (2003) ou Parker (1976) illustrent également ce comportement. Cette similitude de forme a conduit de nombreux auteurs à présenter les bancs alternés comme des précurseurs directs des méandres, avant que les travaux d'Ikeda et coll. (1981) et Blondeaux et Seminara (1985) ne clarifient ce point<sup>8</sup>.

#### 1.1.2.1.4 Méandres, modèles curvilignes et instabilité de courbure

<sup>8</sup>La légende de la figure 2 de Parker (1976) est sans ambiguïté à cet égard : « *Photographs of progressive meander formation in an initially straight channel* ». L'auteur, qui a participé directement à l'élaboration de la théorie de l'instabilité de courbure (voir le § 1.1.2.1.4), nous a déclaré lui-même en 2006 que cette légende lui semblait désormais incorrecte.



FIG. 1.5 – Rivière en tresse en Islande. L’instabilité de banc entraîne la division du lit en de multiples chenaux. (Photographie : P.-Y. Lagrée.)

**Modèles purement hydrodynamiques** Les propriétés dynamiques des écoulements gravitaires à surface libre pourraient suffire pour expliquer qualitativement la formation de méandres (voir la figure 1.6), en se fondant uniquement sur le mouvement du fluide. On peut par exemple invoquer les courants de recirculation (voir § 1.1.2.1.2), qui accroissent la vitesse longitudinale de l’eau sur la berge extérieure d’une courbe, l’érodant ainsi davantage que la berge opposée. La théorie proposée par Yalin (1992) s’appuie exclusivement sur la taille typique des *bouffées turbulentes*<sup>9</sup> pour déterminer la longueur d’onde des méandres et des bancs alternés. Même les seules équations de Saint-Venant permettent le développement d’une *instabilité inertielle de courbure* : si le nombre de Froude de l’écoulement est suffisamment élevé, le niveau de l’eau augmente vers l’extérieur de la courbe, condition de l’établissement d’un gradient de pression capable de s’opposer à l’inertie du fluide. Cette augmentation du niveau de l’eau permet à la gravité d’imposer au fluide une vitesse longitudinale plus élevée. Cette fois encore, la berge extérieure recule, et la sinuosité croît. Le point commun de ces trois mécanismes est de négliger le couplage entre l’érosion du fond de la rivière et l’écoulement de l’eau. Pourtant, dans les rivières alluviales naturelles, les sédiments qui constituent le fond du lit sont généralement moins cohésifs que le matériau des rives, et donc plus aisément transportés par l’écoulement. Ainsi, la formation d’un *banc de méandre*<sup>10</sup> est toujours associée à la boucle d’un méandre : la profondeur du lit décroît vers l’intérieur de la courbe. Cette relation entre les bancs de sédiments formés par l’écoulement et la déformation des berges apparaît dans la littérature dès la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle (voir la fi-

<sup>9</sup> *Turbulence bursts* dans le texte.

<sup>10</sup> *Point bar* en anglais.



FIG. 1.6 – Méandres de sinuosité modérée, formés par une rivière islandaise. Des exemples de rivières plus sinueuses figurent dans Seminara (2006). (Photographie : P.-Y. Lagrée.)

gure 1.7). Pourtant, il faut attendre près d'un siècle avant que les premiers modèles quantitatifs de cette interaction ne soient élaborés.

**Modèles complets** Ikeda et coll. (1981), en s'inspirant des premiers travaux portant sur l'instabilité d'un écoulement sur fond érodable (Callander, 1969; Hansen, 1967; Parker, 1976), ont développé un modèle heuristique qui attribue la formation des méandres à une instabilité impliquant l'écoulement, l'érosion du fond et celle de la berge. Ce modèle repose essentiellement sur les trois hypothèses suivantes :

- $H_1$  : l'écoulement peut être décrit par les équations de Saint-Venant à deux dimensions ;
- $H_2$  : le transport des sédiments du fond, sous l'effet de la recirculation, impose une pente transverse proportionnelle à la courbure du méandre ;
- $H_3$  : l'érosion de la berge est proportionnelle à la perturbation de vitesse à la berge.

Les auteurs déduisent de ces approximations une relation entre la courbure horizontale du thalweg et sa vitesse normale de translation. Sous cette forme extrêmement simplifiée (c'est l'hypothèse  $H_2$ ), l'équation de transport des sédiments est incapable de prédire la formation de bancs alternés, et leur interaction avec la courbure des berges. Cette formulation revient à imposer *a priori* un banc de méandre. Cette contribution de référence a cependant posé des fondements essentiels : l'apparition des méandres et certaines de leurs caractéristiques (dont leur longueur d'onde) peuvent être expliquées par une théorie de stabilité linéaire, pour peu qu'elle prenne en compte le couplage complet entre l'écoulement, l'érosion du fond et celle des berges.

En ajoutant au modèle de Ikeda et coll. (1981) des équations complètes pour le transport des sédiments, Blondeaux et Seminara (1985) ont franchi une étape significative, qui éclaire le lien entre bancs alternés et méandres. Les hypothèses  $H_1$  et  $H_3$  sont conservées, mais l'équation complète de conservation de la masse de sédiments (voir § 1.2) est substituée à l'hypothèse  $H_2$ . Les auteurs considèrent le transport des sédiments du fond comme un phénomène rapide au regard des temps d'évolution de la berge, ce qui leur permet d'établir un système d'équations quasi-statiques où le temps n'intervient qu'à travers le déplacement des berges. Enfin, l'effet des courants de recirculation est introduit par l'intermédiaire d'un terme empirique ajouté au flux transverse de sédiments. Les auteurs interprètent ce terme comme un forçage, proportionnel à la courbure et agissant sur le reste du système. La longueur d'onde des méandres correspond alors à la résonance des bancs alternés, forcés par la courbure (Blondeaux et Seminara, 1985). Les auteurs introduisent ainsi la notion d'instabilité de courbure, directement liée à la formation d'un banc de méandre stationnaire, et distincte de l'instabilité de bancs alternés. Ces derniers peuvent d'ailleurs se superposer à l'instabilité de courbure : ce résultat, naturel dans le cadre d'une étude théorique linéaire, a été mis en évidence expérimentalement par Zolezzi et coll. (2005).

Dans la lignée de Blondeaux et Seminara (1985), Johannesson et Parker (1989b) proposent une version plus complète du même modèle. L'écoulement secondaire influence cette fois l'écoulement principal, en induisant un échange transverse de quantité de mouvement. D'autre part, cet écoulement secondaire est calculé explicitement d'après les résultats de Johannesson et Parker (1989a), ce qui introduit un déphasage entre la courbure du lit et les courants secondaires. Ces corrections permettent aux auteurs de reproduire le *surcreusement*<sup>11</sup> décrit par Struiksmas et coll. (1985) : l'inertie du fluide entraîne dans certains cas la formation d'un banc de méandre particulièrement marqué.

Si le rapport de la largeur du lit et du rayon de courbure du méandre reste suffisamment petit, les modèles à deux dimensions, tels que celui de Johannesson et Parker (1989b), permettent d'établir une loi d'évolution pour les modèles curvilignes de méandres (Edwards et Smith, 2001, 2002; Edwards et Liverpool, 1995; Stølum, 1996). D'une façon générale, une telle loi relie la vitesse de migration transverse du lit à la courbure du méandre. Ces modèles curvilignes, s'ils ne permettent pas d'expliquer la formation d'un méandre à l'échelle de l'écoulement, sont en revanche particulièrement adaptés à l'étude des propriétés statistiques des méandres à l'échelle d'une plaine alluviale, qui requiert la prise en compte de phénomènes non-linéaires complexes tels que l'intersection de méandres et la formation de bras morts<sup>12</sup>.

**Position de l'étude** À la suite des trois articles fondateurs Ikeda et coll. (1981), Blondeaux et Seminara (1985) et Johannesson et Parker (1989b), de nombreux raffinements ont été proposés, dont le lecteur trouvera des exemples dans les

---

<sup>11</sup> *Overdeepening* en Anglais.

<sup>12</sup> *Oxbow lakes* en Anglais.

Fig. 1. *Types de raccordements*

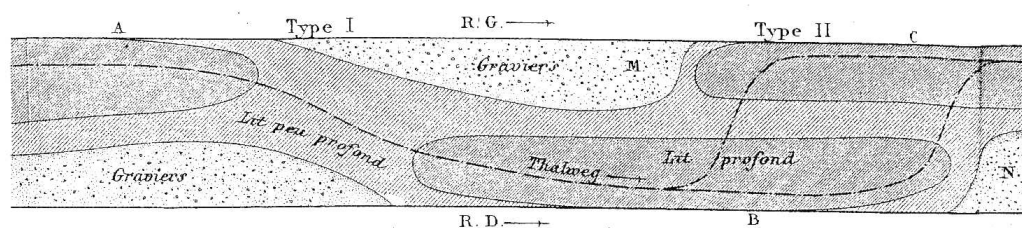


Fig. 11.

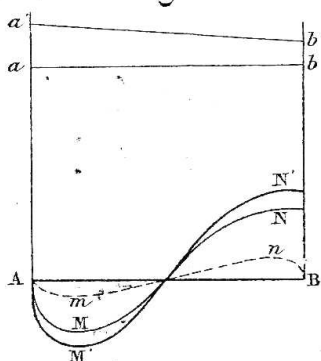


Fig. 12.

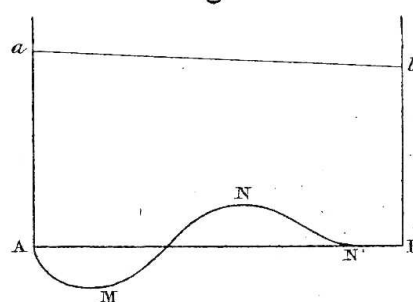


Fig. 14.

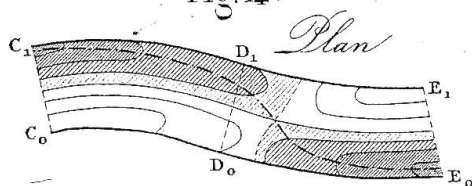


Fig. 15.

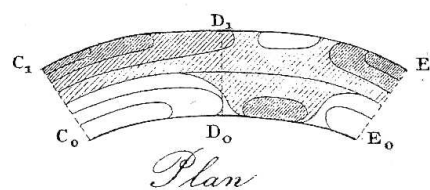


FIG. 1.7 – Bancs alternés et méandres, décrits par Du Boys (1879). Le lien entre ces deux phénomènes fut éclairci par Ikeda et coll. (1981), puis par Blondeaux et Seminara (1985).

revues de Seminara (2006) et Camporeale et coll. (2007). La présente étude s'inscrit dans le cadre général établi par ces articles, en prenant toutefois certaines libertés. Le choix d'un repère cartésien, alors que les auteurs précédemment cités travaillent dans le repère curviligne associé au thalweg de la rivière, est une première différence formelle. Notre choix simplifie l'écriture des équations, et surtout les émancipe de la définition du thalweg<sup>13</sup>. En revanche, l'introduction d'un terme de recirculation empirique, comme fonction de la courbure du lit, pose problème dans un repère cartésien, alors qu'elle est naturelle dans le repère curviligne où la courbure apparaît explicitement. Notre choix repose donc sur l'hypothèse suivante : nous supposons, dans toute cette étude, que le rapport d'aspect de l'écoulement est suffisamment élevé pour négliger l'effet des courants secondaires (voir le § 1.1.2.1.2). De ce point de vue, nous étudierons donc une version simplifiée du modèle de Johannesson et Parker (1989b), strictement restreinte au cas des eaux peu profondes. Nous nous attacherons par ailleurs à conserver les équations sous une forme indépendante du type d'écoulement considéré (turbulent ou laminaire), afin de souligner l'analogie fondamentale reliant les micro-rivières de laboratoire aux cours d'eau naturels. Ce modèle, valable pour des écoulements laminaires et ignorant les effets de la recirculation, prédit la formation de bancs alternés, de tresses (§ 3.2.1.1), de bancs de méandres, et enfin d'une d'instabilité de courbure (§ 3.2.2.1). Il permet également d'interpréter le *vieillessement* des rivières de laboratoire (voir Devauchelle et coll. (2007a) et le § 3.2.1.2), observé aussi bien dans le cas des écoulements turbulents de Federici et Paola (2003), que pour les micro-rivières laminaires de Métivier et Meunier (2003).

**1.1.2.1.5 Conditions aux berges** À l'exception notable des travaux de Smith (1998), aucune publication ne fait état d'un protocole expérimental capable de reproduire des méandres de sinuosité élevée à l'échelle d'un laboratoire. Pour expliquer ce constat, on pourrait invoquer l'impossibilité d'obtenir une turbulence développée dans des chenaux de taille raisonnable ; mais précisément les expériences de Smith (1998) démontrent que des écoulements dont le nombre de Reynolds est relativement faible<sup>14</sup> peuvent former de véritables méandres. La plus grande majorité des expériences de géomorphologie fluviale destinées à l'étude de l'évolution d'un lit de rivière impliquent un substrat granulaire peu cohésif (Federici et Paola, 2003; Métivier et Meunier, 2003; Parker, 1976). Dans ce cas, la largeur moyenne du lit s'accroît sous l'effet de l'érosion, et l'augmentation induite du rapport d'aspect de la section du lit favorise les modes instables élevés de type tresse (voir Devauchelle et coll. (2007a), ainsi que le § 3.2.1.2). En conséquence, la possibilité de reproduire des méandres à une échelle accessible expérimentalement nous semble plus étroitement liée à la nature du matériau utilisé comme substrat, qu'à la turbulence de l'écoulement. Les

<sup>13</sup>Le choix d'un repère curviligne est aisé si l'on suppose *a priori* que la largeur de la rivière demeure constante. Comme le souligne la revue de Camporeale et coll. (2007), cette hypothèse est fort courante.

<sup>14</sup>La valeur du nombre de Reynolds varie autour de 1000 dans les expériences de Smith (1998), ce qui est insuffisant pour obtenir une turbulence développée.

matériaux utilisés par Smith (1998)<sup>15</sup> sont d'ailleurs particulièrement cohésifs, ce qui permet de limiter l'élargissement du lit.

Le modèle simplifié d'érosion de berge employé par Ikeda et coll. (1981), Blondeaux et Seminara (1985) ou Johannesson et Parker (1989b) (voir le § 1.1.2.1.4) suppose que la largeur initiale du lit est à l'équilibre. D'autre part, tant que l'on se restreint à l'étude de la stabilité linéaire d'un modèle de rivière, il a pour conséquence directe de maintenir la largeur à sa valeur d'équilibre<sup>16</sup>. Dans ces travaux, la question de l'élargissement du lit et des conditions aux berges est très largement simplifiée : l'échange de sédiments entre la berge et le lit est négligé. Il faut attendre les travaux de Osman et Thorne (1988) (pour des berges cohésives) et Pizzuto (1990) (pour des berges non cohésives) pour que les relations empiriques d'érosion de berges soient remplacées par des modèles dérivés des équations de conservation de la masse des sédiments, dans le cas de rivières rectilignes. Les contributions plus récentes, telles que celles de Duan et Julien (2005), parviennent à coupler un modèle conservatif de déplacement des berges avec un modèle d'évolution du lit similaire aux modèles à deux dimensions employés par Blondeaux et Seminara (1985) ou Johannesson et Parker (1989b). Les conditions aux berges établies par Duan et Julien (2005) pour des berges cohésives distinguent l'érosion directe du pied de la berge de l'effondrement de cette dernière<sup>17</sup>, ainsi que le transport de sédiments par charriage et le transport en suspension. Le § 2.2.3 présente la dérivation des conditions aux berges adaptées au cas d'une micro-rivière s'écoulant sur un substrat granulaire non cohésif, où domine le transport par charriage. Ce modèle tient compte de la cohésion induite par la capillarité dans les parties émergées des berges. Comme le soulignent Duan et Julien (2005), les conditions aux berges conservatives ne peuvent pas être réduites aux conditions empiriques proposées par Ikeda et coll. (1981), car les premières lient l'écoulement, les flux de sédiments et les hauteurs (immergées et émergées) de la berge, tandis que les secondes ne font évoluer la berge qu'en fonction des seules<sup>18</sup> grandeurs de l'écoulement. L'introduction de ces conditions réalistes, pour lesquelles le comportement d'une berge qui avance est radicalement différent de celui d'une berge érodée (voir § 3.2.2.2), complique considérablement les études de stabilité linéaire.

Une méthode naturelle pour valider les conditions aux berges consiste à étudier l'évolution du lit d'une rivière rectiligne, s'écoulant dans la direction  $x$ . L'homogénéité du système dans la direction  $x$  permet de réduire l'étude à deux dimensions (transverse et verticale), voire à une seule dimension si l'écoulement peut être approché par les équations de Saint-Venant (voir § 2.2). De même que l'on observe essentiellement dans la nature des méandres déjà développés, et très rarement leur apparition, la section des cours d'eau observés par le géologue est généralement à l'équilibre. En conséquence, la grande majorité des travaux dans ce domaine s'attachent à établir une équation d'équilibre liant la largeur d'une rivière à divers pa-

<sup>15</sup>Divers mélanges à base de farine de maïs et d'argile.

<sup>16</sup>Du moins tant que seuls les modes impairs de perturbation du fond sont concernés.

<sup>17</sup>Respectivement *basal erosion* et *bank failure* en Anglais.

<sup>18</sup>Et généralement une seule, la vitesse ou le cisaillement.

ramètres géophysiques (voir, parmi de nombreux exemples, Millar (2005)). Il existe relativement peu d'études théoriques portant sur le mécanisme d'élargissement lui-même, parmi lesquelles celles de Pizzuto (1990), Parker (1978a), Kovacs et Parker (1994), ou encore Darby (1998). À notre connaissance, aucune ne s'intéresse aux rivières laminaires ; c'est l'objet du § 2.2.

**1.1.2.1.6 Stabilité complète, pour des berges érodables** Lorsque les berges d'une micro-rivière sont érodables, la diffusion des sédiments sous l'effet de la pente du lit entraîne l'élargissement continu du chenal, tant que l'intensité de l'écoulement suffit à entraîner des sédiments (voir le § 2.2 et Devauchelle et coll. (2007a)). L'analyse de stabilité du § 3.2.1, quoiqu'en toute rigueur limitée au cas des chenaux à berge rigide, apporte une explication qualitative au *vieillissement* des micro-rivières, phénomène très général décrit en ces termes par Seminara (2006) :

[...] *an initially straight incision through a flat layer of cohesionless material undergoes a sequence of processes [voir Federici et Paola (2003)] associated with a continuous widening of the channel, driven by the erosion of cohesionless banks. Though, at an intermediate stage, an apparent meandering channel forms [voir figure 4 de Federici et Paola (2003)], it continues to evolve through further widening, the occurrence of chute cut-offs and the emergence of bars until a braided pattern, i.e. an interconnected network of channels, eventually develops [voir figure 4 de Federici et Paola (2003)].*

En effet, le lent élargissement de la micro-rivière modifie le rapport d'aspect de sa section ainsi que son nombre de Froude ; elle parcourt ainsi le diagramme de stabilité de la figure 3.8, accroissant progressivement l'ordre du mode le plus instable.

Cette explication du mécanisme de vieillissement souffre d'une contradiction fondamentale : l'élargissement repose sur l'érosion des berges, tandis que l'analyse de stabilité linéaire ne prend pas en compte cette érosion. L'étude complète de ce phénomène passe donc par l'analyse de la stabilité linéaire d'une rivière à berges érodables, conduite au § 3.2.2.3. La loi d'érosion des berges établie au § 2.2.3 impose au lit la pente d'avalanche au voisinage de la berge<sup>19</sup>. L'état de base de la rivière, qui doit satisfaire cette condition, présente donc un fond convexe. Cette caractéristique empêche la détermination analytique des modes propres de l'instabilité : le § 3.2.2.3 présente la méthode numérique que nous avons employée pour approcher ces modes.

### 1.1.2.2 Systèmes uniformes dans la direction transverse

**1.1.2.2.1 Brève revue, définition des rides** Les expériences préliminaires présentées au § 3.3.2.1 conduisent alternativement à la formation de chevrons, tels que ceux décrits au § 1.1.2.1.3, ou à la formation de rides (voir figure 1.8). Nous l'avons vu, les mécanismes régissant le développement des méandres et des bancs

<sup>19</sup>Du moins au cours de l'élargissement de l'état de base.



alternés sont indissociables de la direction transverse de l'écoulement. Ceci les distingue des *rides*<sup>20</sup>, pour lesquelles aucune définition consensuelle n'émerge de la littérature, mais dont on admet généralement qu'elles sont invariantes dans la direction transverse, au moins durant les premiers stades de leur formation (voir Langlois et Valance (2005) et la figure 1.8). Nous emploierons désormais le mot *ride* pour désigner le motif formé par l'instabilité de l'interface entre un substrat érodable et un écoulement fluide, selon un mécanisme réductible aux seules dimensions  $x$  (direction de l'écoulement) et  $z$  (verticale)<sup>21</sup>. Au fil de leur croissance, les rides subissent des transformations non-linéaires capables de modifier leur longueur d'onde (coalescence) ou leur invariance initiale dans la direction  $y$ , pour éventuellement devenir des *dunes* (Langlois, 2005; Charru, 2006).

Si l'on ne s'intéresse qu'aux premiers instants suivant l'apparition des rides, une analyse de stabilité linéaire semble toute indiquée, d'autant plus que les résultats expérimentaux de Betat et coll. (1999) révèlent la croissance initialement exponentielle des rides. Les travaux d'Engelund (1970) démontrent l'importance cruciale du déphasage entre le cisaillement exercé par le fluide sur le substrat, et la topographie de ce substrat (voir également le § 1.1.2.1.3). Divers modèles ont été proposés pour l'écoulement, conduisant à un déphasage susceptible de conduire à la formation de rides; nous nous limiterons dans cette étude au cas des écoulements laminaires. Charru et Hinch (2000) étudient analytiquement la stabilité linéaire des équations complètes de Navier-Stokes dans une cellule de Couette<sup>22</sup>, où l'écoulement de base présente un profil linéaire. Les modèles de double couche (Kouakou et Lagrée, 2005, 2006) ou de triple couche (Lagrée, 2003) permettent, lorsque l'amplitude de la déformation du fond reste très inférieure à l'épaisseur de la couche limite, d'approcher analytiquement l'écoulement au-dessus d'un champ de rides dans différents cas (profondeur infinie, surface libre au-dessus de la couche limite).

Le déphasage du cisaillement étant établi, il s'agit de trouver le mécanisme principal de stabilisation des petites longueurs d'ondes, qui impose un maximum au taux de croissance linéaire, lequel correspondra généralement à la longueur d'onde sélectionnée par les expériences. Deux mécanismes stabilisants ont été proposés lorsque les sédiments sont transportés par charriage. Le premier, introduit par Fredsøe (1974), consiste à prendre en compte l'effet de la gravité sur le charriage lorsque le lit est incliné; cela revient à introduire un terme de pente dans la loi de transport (voir le § 1.2.3). Les modèles incluant ce mécanisme (dont le modèle présenté au § 4.1) sous-estiment généralement la longueur d'onde des rides (Charru et Mouilleron-Arnould, 2002; Sumer et Bakioglu, 1984). Un second type de mécanisme stabilisant repose sur l'introduction d'un retard entre le flux de sédiments et la contrainte qui l'engendre.

<sup>20</sup> *Ripples* dans la littérature anglo-saxonne.

<sup>21</sup> Certains auteurs ont proposé des définitions fondées sur le rapport de l'amplitude des rides et de la hauteur de l'écoulement, de la couche limite ou encore de la taille des grains sédimentaires. Coleman et Melville (1996) emploient le terme *ondelettes* (*wavelets* en anglais) pour désigner ce que nous appelons ici rides.

<sup>22</sup> C'est à dire un écoulement où la position et la vitesse de la surface supérieure du fluide sont imposées.

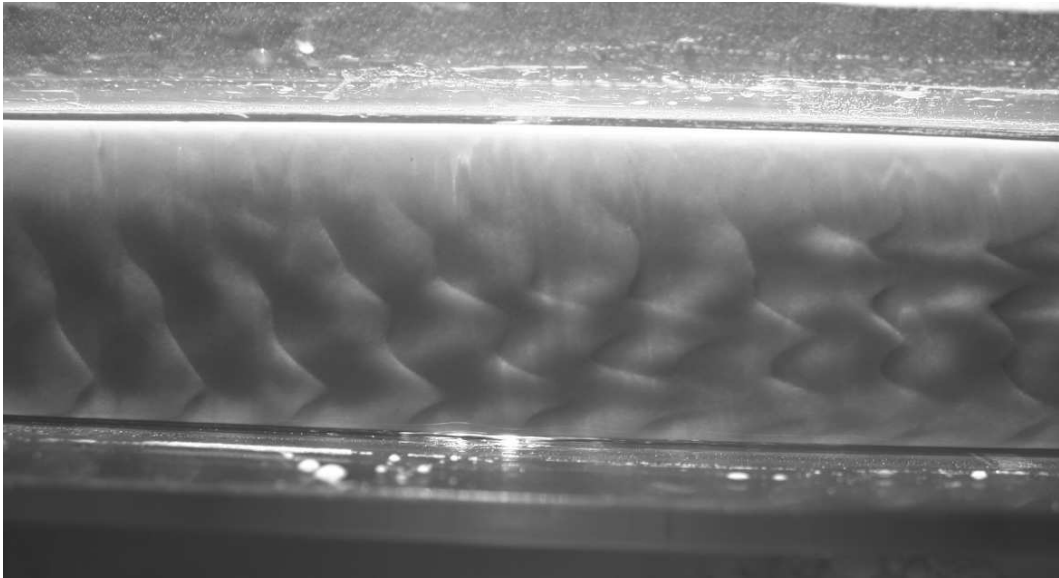


FIG. 1.8 – Rides formées par l’action d’un écoulement laminaire d’eau sur un lit de poudre de silice, dans un canal rectiligne de 5 cm de large. La longueur d’onde des rides est de l’ordre du centimètre, pour une hauteur d’eau de quelques millimètres. L’eau s’écoule de la gauche vers la droite. Ces rides, initialement invariantes dans la direction transverse, évoluent rapidement vers des formes plus complexes. Voir le § 3.3.2.1 pour une description plus détaillée de l’expérience. (Photographie : É. Lajeunesse, L. Malverti et l’auteur.)

Autrement dit, les lois habituelles liant le flux de sédiments au cisaillement exercé par le fluide ne donnent que le flux saturé de sédiments, vers lequel tend le flux effectif lorsque les échelles de variation de l’écoulement et de la topographie sont très grandes par rapport à la longueur de saturation  $l_s$ . Dans le cas du transport éolien, où le nombre de Reynolds particulaire est élevé, c’est l’inertie des grains qui cause ce retard du flux de sédiments par rapport à l’écoulement (Andreotti et coll., 2002). Kroy et coll. (2002) puis Kouakou et Lagrée (2005) ont introduit cette théorie inertielle dans l’étude de la formation des rides. Plus récemment, Charru (2006) a présenté un mécanisme similaire adapté aux écoulements visqueux à l’échelle du grain, où le retard du flux de sédiments est cette fois causé par la lenteur de la sédimentation<sup>23</sup>. Cette dernière théorie est comparée aux résultats de Coleman et Eling (2000) : l’ordre de grandeur de la longueur d’onde la plus instable correspond bien aux premières rides observées expérimentalement.

**1.1.2.2 Surface libre en eau peu profonde** L’analyse de stabilité linéaire de Charru et Hinch (2000) porte sur un écoulement de Couette, ainsi que l’ensemble des contributions successives de ces auteurs (dont Charru (2006)<sup>24</sup>). Le modèle de

<sup>23</sup>La longueur de saturation  $l_s$  devient dans ce cas une longueur de sédimentation.

<sup>24</sup>Notons que les expériences de Coleman et Eling (2000), auxquelles Charru (2006) compare son modèle, impliquent un écoulement à surface libre. La valeur élevée du nombre de Reynolds de cet

Lagrée (2003) permet de prendre en compte une surface libre par l'intermédiaire du champ de pression tant que l'épaisseur de la couche limite demeure faible par rapport à la hauteur totale de l'écoulement. L'étude de stabilité linéaire présentée au § 4.1 est adaptée aux écoulements à surface libre très visqueux : tout comme dans le modèle de Charru et Hinch (2000), les équations complètes de Navier-Stokes sont linéarisées, mais pour un écoulement à surface libre. En contrepartie, il n'est plus possible de trouver analytiquement les modes propres de l'écoulement, qui sont donc approchés par intégration numérique. L'établissement d'un diagramme de stabilité dans l'espace des paramètres (nombre de Reynolds, pente) s'en trouve considérablement compliqué. L'utilisation de méthodes asymptotiques pour résoudre le système linéarisé nous semble être une voie prometteuse dans ce domaine.

### 1.1.2.3 La ligne de contact mobile

**1.1.2.3.1 Ligne de contact et film de Landau-Levich-Derjaguin** Pour la première fois à notre connaissance, Daerr et coll. (2003) signalent la formation de chevrons d'érosion lorsqu'une plaque recouverte d'un matériau granulaire est extraite d'un bain statique d'eau, à inclinaison et vitesse constantes (voir le schéma de la figure 4.4). Les descriptions et photographies de ces auteurs nous semblent tout-à-fait en accord avec les résultats de la théorie introduite au § 1.1.2.1.3. Pourtant, la remarquable rectitude des fronts qui constituent la trame de ce motif (voir la figure 2 de Daerr et coll. (2003), et la figure 1.4 de la présente étude) évoque les lignes caractéristiques d'une onde transverse de gravité dans un écoulement uniforme. En particulier, on pourrait interpréter les chevrons d'érosion comme la marque d'une instabilité transverse de la *ligne de contact mobile*.

L'intersection entre la surface d'un liquide et celle d'un solide à demi immergé dans ce liquide est appelée *ligne de contact*. Lorsque ce solide se meut suffisamment lentement, cette intersection atteint une position stationnaire (dans le référentiel du liquide) : c'est la *ligne de contact mobile* (voir les expériences de Blake et Ruschak (1979)). Ce phénomène met en défaut la formulation classique des équations de Navier-Stokes, dont les conditions aux bords classiques stipulent que la vitesse du fluide vaut celle du solide immergé à la surface de ce dernier, ce qui contredit la définition de la ligne de contact mobile (Huh et Scriven, 1971). Au delà d'une vitesse critique finie, le solide entraîne dans son émergence un mince film de liquide. Ce film porte les noms de Landau, Levich et Derjaguin (ci-après LLD), qui furent les premiers à l'étudier pour affiner la technique de déposition des pellicules photosensibles (Landau et Levich, 1942; Derjaguin, 1943).

L'étude de la disparition de la ligne de contact au profit d'un film LLD nécessite l'introduction d'un mécanisme microscopique capable de régulariser les équations de l'écoulement à la ligne de contact. La méthode la plus courante consiste à autoriser un glissement du fluide sur la surface solide, proportionnel à la contrainte normale :

---

écoulement (de l'ordre de 1000) permet de penser que les conditions de surface libre affectent peu la couche limite au sein de laquelle naissent les rides.

il s'agit de la loi de glissement de Navier (Eggers, 2004a), qui s'écrit

$$u - U = \lambda_N \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (1.9)$$

où  $u$  et  $U$  désignent respectivement les vitesses tangentielles du liquide et du solide ;  $\lambda_N$  est la longueur de glissement et  $n$  la coordonnée normale à l'interface. Eggers (2004a) démontre analytiquement que les équations ainsi posées n'admettent de solution avec ligne de contact mobile que pour des vitesses de retrait inférieures à une valeur critique. Notons que cette régularisation des équations n'est que partielle, car le champ de pression correspondant à cette théorie diverge au voisinage de la ligne de contact (voir l'appendice 4.2.7.2).

### 1.1.2.3.2 Régularisation par la porosité et comportement des solutions

Dans sa revue, de Gennes (1985) évoque, sans l'étudier plus avant, le problème de la ligne de contact mobile sur un solide poreux comme une situation naturellement régulière. En effet, le fluide pouvant s'écouler dans les pores du solide, la vitesse moyenne de l'écoulement n'a plus de raison de s'annuler à l'interface. Mieux, comme cela est établi au § 4.2.2, ces nouvelles conditions d'interface régularisent totalement les équations de l'écoulement. La longueur caractéristique de glissement est alors proche de la taille des pores. Dans une certaine mesure, ces conditions s'appliquent aux expériences de Daerr et coll. (2003) : si l'on néglige le mouvement des grains, on peut assimiler la couche granulaire à un matériau poreux rigide. Ainsi régularisée, l'équation différentielle ordinaire d'ordre trois (4.58), qui régit l'écoulement à proximité de la ligne de contact, peut être résolue numériquement (voir le § 4.2.3).

La valeur de l'angle de contact, formé entre la surface du liquide et celle du solide, peut varier selon les caractéristiques des matériaux impliqués, et selon la vitesse de la ligne de contact — comme l'indique la loi de Tanner (de Gennes, 1985; Eggers et Stone, 2004). Eggers (2004a) a démontré, en utilisant une loi de glissement de Navier classique, qu'il n'existe plus de ligne de contact si l'angle de contact est nul. Au contraire, une ligne de contact peut exister sur un solide poreux pour un angle de contact nul, tant que la vitesse reste suffisamment faible (voir à nouveau le § 4.2.3). Au-delà d'une vitesse critique, la ligne de contact disparaît. Le comportement des solutions de l'équation (4.58) dans l'espace des phases traduit topologiquement ce comportement : lorsque la vitesse de la ligne de contact dépasse sa valeur critique, l'axe associé aux conditions aux limites ne traverse plus la variété stable contenant ces solutions (voir le § 4.2.4). Le raccordement asymptotique présenté au § 4.2.5 permet d'approcher le comportement de la vitesse critique en fonction de l'inclinaison de la plaque poreuse.

Lorsqu'un film LLD recouvre le solide, il entraîne *a priori* du fluide hors du bain. Dans la théorie classique de Landau et Levich (1942) et de Derjaguin (1943), les paramètres de l'expérience fixent la valeur de ce flux en régime permanent. L'analyse de la dimension des variétés contenant les solutions de l'équation (4.58) au voisinage de la ligne de contact, et loin du solide, établit l'existence d'un autre type de solutions, dont le flux n'est pas fixé en régime permanent. Ces solutions à flux libre,

qui existent indépendamment de la condition de glissement, n'ont pas été observées expérimentalement à notre connaissance.

Les résultats du § 4.2.5, appliqués à l'expérience de Daerr et coll. (2003) (voir le diagramme de la figure 4.13), indiquent qu'un film LLD est toujours entraîné par la couche granulaire dans les conditions de formation de chevrons d'érosion. La ligne de contact mobile ne semble donc pas être à l'origine des chevrons d'érosion, quoique sa disparition puisse éventuellement expliquer une transition entre les différents types de motifs d'érosion signalés par Daerr et coll. (2003).

## 1.2 Un modèle de transport sédimentaire

La contrainte exercée par un écoulement d'eau sur un substrat granulaire, si elle est suffisamment intense, peut détacher les grains superficiels de ce substrat. Ces grains sont ensuite transportés par l'écoulement pour être déposés en aval. Ce déplacement, qui modifie la topographie du substrat, est un phénomène essentiel en Géomorphologie : certains paysages sont entièrement modelés par l'érosion due au ruissellement. L'étude du transport sédimentaire implique à la fois la connaissance du substrat (granulométrie, cohésion, géométrie) et celle de l'écoulement, généralement intermittent et turbulent, du fluide diphasique qui l'érode (l'eau chargée de particules sédimentaires). Il n'existe pas actuellement de modèle reliant les flux moyens de sédiments aux grandeurs moyennes de l'écoulement pour l'ensemble des régimes de transport. L'objectif du présent chapitre est d'introduire un modèle de transport simple, parmi les plus courants dans la littérature concernée.

### 1.2.1 Mécanisme du transport sédimentaire

On distingue généralement deux types de transport :

- le transport en suspension, lorsque les sédiments occupent l'ensemble du volume de fluide. Leur champ de concentration évolue alors sous l'effet de l'advection et de la diffusion ;
- le transport par charriage, lorsque les grains ne se déplacent que dans une mince couche mobile, à la surface du lit. Dans ce cas, l'écoulement des grains est dense et les interactions entre grains sont considérables.

Pour déterminer le mode de transport dominant, Chanson (2004) propose de comparer la vitesse de sédimentation d'un grain  $V_s$  (c'est-à-dire la vitesse finale atteinte par un grain isolé chutant dans le fluide au repos) avec la vitesse typique de l'écoulement  $U$ . Si

$$\frac{V_s}{U} > \varrho \quad (1.10)$$

le charriage sera dominant (avec  $\varrho$  variant de 0,2 à 2,5 selon les auteurs). Dans le cadre de cette étude, nous nous limiterons au transport par charriage, prédominant dans les rivières dont le lit est constitué de sable grossier ou de gravier. C'est également le mode de transport dominant dans la plupart des modèles expérimentaux de rivière (Federici et Paola, 2003; Nakagawa, 1983).

Considérons le cas simplifié suivant : les grains sont assimilés à des sphères identiques de diamètre  $d_s$  (voir figure 1.9). En l'absence de cohésion (c'est-à-dire de force attractive entre les grains), et sur un fond horizontal, le bilan des forces exercées sur un grain est le suivant :

- le poids du grain  $\mathbf{P}$  ;
- la force exercée par l'écoulement  $\mathbf{F}$  ;
- la résultante des forces de réaction des grains voisins  $\mathbf{R}$ .

En considérant que la vitesse de l'écoulement est négligeable dans le milieu poreux constitué par l'ensemble des grains immobiles, nous pouvons attribuer les ordres de

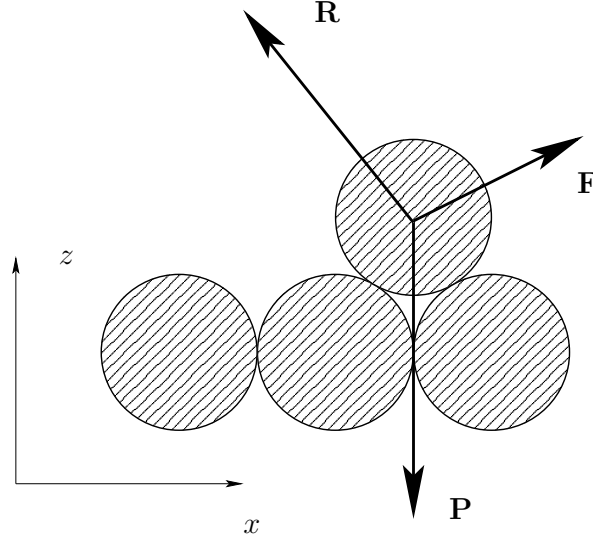


FIG. 1.9 – Représentation simplifiée des forces agissant sur un grain de sédiment

grandeur suivants aux forces exercées sur un grain :

$$\mathbf{F} \approx \tau^* d_s^2 \mathbf{e}_x + \rho d_s^3 g \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{P} \approx -\rho_s d_s^3 g \mathbf{e}_z, \quad (1.11)$$

où  $\tau^* = \tau_{x,z}|_{z=h}$  est le cisaillement exercé par le fluide sur la surface du lit, et  $\rho_s$  est la masse volumique du grain. Si l'on considère que le débit linéique de grains  $q_e^*$  (c'est-à-dire le nombre de grains traversant un segment de l'axe  $y$  de longueur unité par unité de temps) est une fonction des forces précédentes, l'analyse dimensionnelle indique la forme générale de cette fonction :

$$\frac{d_s^2}{V_s} q_e^* = \phi \left( \theta, \frac{\rho_s}{\rho}, \mathcal{A} \right), \quad (1.12)$$

où

$$V_s = \frac{g d_s^2 (\rho_s - \rho)}{18\nu \rho}, \quad \mathcal{A} = \frac{g d_s^3 (\rho_s - \rho)}{\rho \nu^2}, \quad \theta = \frac{\tau^*}{g d_s \rho_s - \rho}. \quad (1.13)$$

La vitesse de sédimentation  $V_s$  est calculée pour une sphère, à partir de la formule de Stokes. Elle est valable tant que  $V_s d_s / \nu < 100$ , ce qui correspond à une taille maximale d'environ 2 mm pour du sable dans l'eau.  $\theta$  est le nombre de Shields, qui compare la force horizontale exercée par l'écoulement sur un grain à la résultante des forces verticales. Enfin,  $\mathcal{A}$  est le nombre d'Archimède.

### 1.2.2 Lois de transport à une dimension en régime permanent

Depuis les travaux de Du Boys (1879), de nombreuses expressions ont été proposées pour la fonction  $\phi$ , fondées sur des modèles simples ou sur des mesures expérimentales (Shields, 1936; Einstein, 1950; Meyer-Peter, 1951). Le schéma représenté

sur la figure 1.9, qui apparaît couramment dans la littérature, justifie l'emploi de lois à seuil du type :

$$\phi(\theta) = \phi^*(\theta)H(\theta - \theta_c) \quad (1.14)$$

où  $\theta_c$  est un nombre de Shields critique, et  $H$  la fonction de Heaviside.  $\theta_c$  est un seuil géométrique déterminé par la disposition des sphères, indépendamment de toute force de cohésion ou de frottement entre les grains.

Si l'existence de ce seuil peut être démontrée à l'échelle d'un grain (Chanson, 2004), il n'existe pas à ce jour de démonstration claire justifiant son maintien dans les lois macroscopiques de transport. Sur le plan théorique, l'opération de moyennage qui permet de passer à l'échelle macroscopique ne conserve pas nécessairement le seuil microscopique. En effet, la valeur microscopique du seuil critique suit une loi de distribution qui n'a pas de raison de s'annuler pour une valeur critique. Autrement dit, pour une répartition géométrique aléatoire de grains, il existe des grains susceptibles d'être déplacés par des sollicitations infinitésimales. Or, il ne peut exister de seuil macroscopique que si tous les seuils microscopiques sont supérieurs à une valeur critique commune. Au cours d'une expérience, il est très difficile de distinguer un flux de grains très faible d'un flux nul. Plus précisément, considérons l'étude expérimentale récente de Charru et coll. (2004). Un lit de billes d'acrylique est soumis à l'écoulement laminaire d'une couche de fluide dans une cellule de Couette plane. Une caméra, dont le champ d'observation est limité à un rectangle de surface  $A_{obs} \approx 1 \text{ cm}^2$ , permet de déterminer le nombre de grains transportés. Une fenêtre spatiale ( $A_{obs}$ ) et temporelle ( $T_{obs}$ , la durée de l'expérience) limite les observations du mouvement des grains. Lorsque la probabilité d'occurrence d'un déplacement de grain devient inférieure à  $1/(A_{obs}T_{obs})$ , plus aucun transport n'est observé, ce qui peut être interprété comme un seuil d'érosion<sup>25</sup>.

La figure 1.10 présente la comparaison entre les résultats expérimentaux de Charru et coll. (2004), la loi d'érosion à seuil proposée par les mêmes auteurs, et la loi de puissance *ad hoc* suivante :

$$\phi(\theta) = 5,13 \theta^{3,75}. \quad (1.15)$$

Au regard de ces données, une loi de puissance semble équivalente à une loi à seuil. Cette propriété a été implicitement utilisée par de nombreux auteurs lorsque l'utilisation d'une loi  $\phi$  dérivable simplifiait leur étude (Engelund et Skovgaard, 1973; Blondeaux et Seminara, 1985; Schielen et coll., 1993). En réalité, la question du seuil d'érosion ne peut être abordée dans le cadre d'une loi fonctionnelle liant directement le flux de sédiments au cisaillement. En effet, le flux de sédiments n'atteint pas instantanément une valeur stationnaire; or la loi à seuil proposée par Charru et coll. (2004) ne vaut qu'en régime permanent. Pour les micro-rivières qui nous intéressent, le temps caractéristique de pavage, de l'ordre de l'heure (Charru et coll., 2004) est probablement beaucoup plus grand que le temps typique d'érosion.

Finalement, soulignons l'équivalence, dans de nombreux cas, des lois d'érosion avec ou sans seuil. En effet, si l'on résout numériquement les équations de transport

<sup>25</sup>Ce raisonnement est dû à D. Lhuillier.



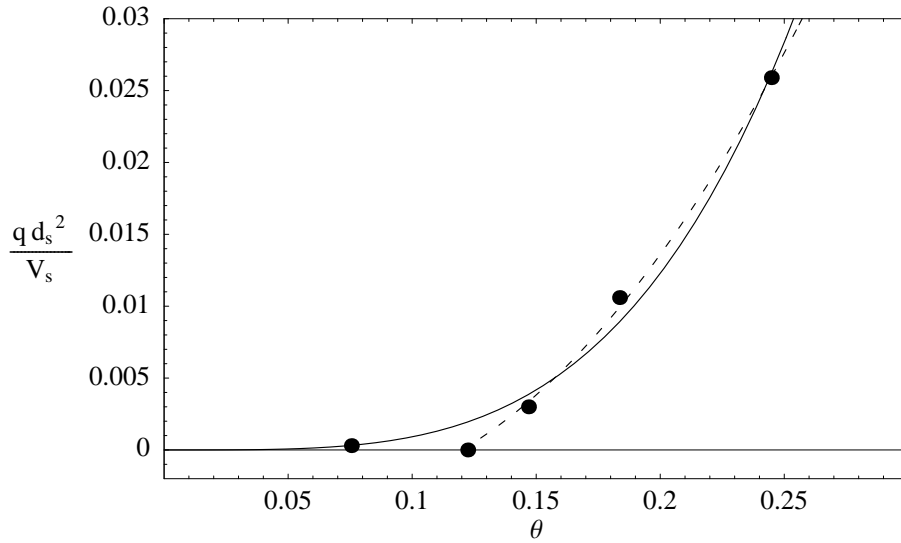


FIG. 1.10 – Comparaison de deux lois de transport de sédiments avec les résultats expérimentaux de Charru et coll. (2004). Pointillés : loi à seuil proposée par Charru et coll. (2004)  $\phi(\theta) = 0,85 \theta(\theta - 0,12)H(\theta - 0,12)$ . Trait plein : loi de puissance ajustée aux points expérimentaux  $\phi(\theta) = 5,13 \theta^{3,75}$ . • : points expérimentaux.

de sédiments, l'une ou l'autre forme peut être indifféremment utilisée, et leur similarité conduira à des résultats proches (voir le chapitre 3.3). De même, lors d'une étude de stabilité, la forme du développement de la fonction  $\phi$  autour du flux de base ne dépendra pas du choix de cette fonction dans le cas général (voir le chapitre 3.1). Notons toutefois que certains phénomènes dépendent de manière cruciale de l'existence d'un seuil. C'est le cas notamment de l'étude de la forme d'équilibre d'une section de rivière droite : cet équilibre n'est atteint que si l'on introduit un seuil dans la loi d'érosion (voir le chapitre 2.2). L'étude de la stabilité d'un fond de rivière autour du seuil d'érosion repose sur la même hypothèse, par définition. Cette dernière configuration, radicalement non-linéaire, n'a pas été étudiée à notre connaissance (voir cependant les travaux de Hall (2006), dans lesquels l'instabilité de banc est étudiée au voisinage du seuil).

### 1.2.3 Loi d'érosion à deux dimensions

Jusqu'ici nous avons considéré un écoulement invariant par translation horizontale, sur un fond parfaitement plat, cas pour lequel des résultats expérimentaux précis sont disponibles. L'étude de la stabilité des lits de rivière requiert une loi de transport à deux dimensions, qui tienne compte des variations de la topographie  $h$ . Ce cas est nettement moins accessible expérimentalement. Kovacs et Parker (1994) proposent une loi de transport valable à deux dimensions pour des pentes arbitrairement grandes, issue d'un modèle très simplifié d'écoulement pour la couche superficielle de sédiments. La complexité de cette loi rend son utilisation délicate

dans le cadre d'un modèle analytique. Par ailleurs, les équations de Saint-Venant reposent sur l'hypothèse de petite pente ( $\partial h/\partial x_i = \mathcal{O}(1/R) \gg 1$ ), ce qui nous autorise à utiliser une loi plus simple valable uniquement pour les petites pentes.

On désigne par  $\tau_i^*$  les composantes de la contrainte horizontale  $\boldsymbol{\tau}^*$  exercée par le fluide sur le fond de la rivière ( $\tau_i^* = \tau_{i,k}|_{z=h} n_k$  pour  $i = 1$  ou  $2$ ,  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal au fond). On admet que le flux horizontal de sédiments est une fonction de la pente et de la contrainte exercée par l'écoulement :

$$q_{e,i}^* = q_{e,i}^*(\tau_1^*, \tau_2^*, \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}). \quad (1.16)$$

Cette fonction peut être approchée aux pentes faibles par

$$q_{e,i}^* \approx q_{e,i}^*(\tau_1^*, \tau_2^*, 0, 0) + G_{l,i}(\tau_1^*, \tau_2^*, 0, 0) \frac{\partial h}{\partial x_l}, \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{G}$  est le bloc du jacobien de  $q_i$  correspondant aux deux composantes de la pente. Le cas unidimensionnel horizontal nous donne l'ordre zéro de ce développement en  $\partial h/\partial x_i$  :

$$\frac{d_s^2}{V_s} q_{e,i}^* \approx \phi(\theta) \left( \frac{\tau_i^*}{\|\boldsymbol{\tau}^*\|} + \frac{d_s^2}{V_s \phi(\theta)} G_{l,i}(\tau_1^*, \tau_2^*, 0, 0) \frac{\partial h}{\partial x_l} \right). \quad (1.18)$$

Si la loi d'érosion  $\phi$  présente un seuil en dessous duquel le flux de sédiments est nul, le tenseur  $\mathbf{G}$  s'annule également en dessous de ce seuil (tant que la pente est inférieure à la pente critique d'avalanche). On écrit généralement ce développement sous la forme

$$\frac{d_s^2}{V_s} q_{e,i}^* \approx \phi(\theta) \left( \frac{\tau_i^*}{\|\boldsymbol{\tau}^*\|} - \gamma_{l,i}(\tau_1^*, \tau_2^*, 0, 0) \frac{\partial h}{\partial x_l} \right), \quad (1.19)$$

où  $\gamma$  est un tenseur sans dimension d'ordre deux (Seminara, 2001). Des arguments théoriques (Sekine et Kikkawa, 1992) et expérimentaux (Talmon et coll., 1995) tendent à prouver que  $\gamma$  est diagonal dans un repère dont un vecteur de base est colinéaire à  $\boldsymbol{\tau}^*$ . Autrement dit, on considère que la pente orthogonale au cisaillement n'a pas d'influence sur le charriage dans le sens du cisaillement, et que la pente colinéaire au cisaillement n'a pas d'influence sur le charriage orthogonal au cisaillement. L'évaluation des coefficients de  $\gamma$  à deux dimensions demeure hors de portée actuellement, aussi bien du point de vue expérimental que théorique. À une dimension, au contraire, nous pouvons signaler les avancées récentes de Josserand et coll. (2004), du GDR MiDi (2004), de Doppler (2005), ou encore de Lagrée et Lhuillier (2006). Toutefois, dans le cadre de la présente thèse, nous n'étudierons pas l'impact des diverses formes possibles de  $\gamma$ . En effet, bien que ce terme diffusif soit indispensable pour limiter l'instabilité des perturbations du fond aux courtes longueurs d'onde (voir le chapitre 3.1), il n'affecte pas le mécanisme fondamental des instabilités de banc. Par la suite, et sauf indication contraire, nous considérerons que  $\gamma$  est proportionnel à la matrice identité. Cette hypothèse est classique en Géomorphologie fluviale (Schielen et coll., 1993).

### 1.2.4 Avalanches de sédiments

Un matériau granulaire peut s'écouler en l'absence de toute sollicitation par un fluide, pour peu qu'il soit soumis à une contrainte de cisaillement suffisante, exercée par exemple par la gravité. Nous désignerons ce phénomène par le terme *avalanche*, et le flux de grains qui lui est associé par  $\mathbf{q}_a^*$ . La définition précédente suppose implicitement que les flux associés au charriage et aux avalanches peuvent être distingués, ce qui est loin d'être évident. Le principal argument en faveur de cette hypothèse se fonde sur la séparation des échelles de temps associées aux deux phénomènes, l'avalanche étant quasiment instantanée en comparaison du temps d'érosion par charriage. Nous écrirons donc

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_e^* + \mathbf{q}_a^*, \quad (1.20)$$

où  $\mathbf{q}^*$  est le flux de grains total.

Une caractéristique fondamentale des avalanches est de ne pas se produire en deçà d'un certain niveau de contrainte (appelé contrainte seuil). Pour un empilement de grains soumis à la gravité, cette contrainte seuil est associée à une pente critique de l'empilement, notée  $\alpha_c$ <sup>26</sup>. Au-delà de cette pente critique, un écoulement granulaire se produit. Il n'existe pas encore de consensus quant aux lois rhéologiques contrôlant la dynamique de cet écoulement, aussi bien pour un milieu granulaire sec que pour des grains entourés de fluide (voir Josserand et coll. (2004) et GDR MiDi (2004) parmi de nombreuses autres contributions). Bouchaud et coll. (1994) et Boutreux et coll. (1998) ont cependant élaboré des modèles unidimensionnels décrivant l'évolution d'avalanches au voisinage de la pente critique. L'échelle de temps caractéristique de ces modèles est naturellement celle de la dynamique de l'avalanche. Les expériences menées par Doppler (2005), montrent que les avalanches gravitaires d'un milieu granulaire plongé dans l'eau atteignent rapidement un régime permanent. Dans ce régime, le débit de grains transportés par l'avalanche est une fonction croissante de la pente  $\partial h / \partial x$  de la surface du matériau granulaire. Cette fonction s'annule en dessous d'une pente critique de l'ordre de 0.6. En négligeant la dynamique des avalanches, nous pouvons donc proposer la loi suivante pour représenter le flux des grains emportés par une avalanche :

$$\frac{d_s^2}{V_s} \mathbf{q}_{a,i}^* = \frac{1}{\epsilon} H(\|\nabla h\| - \alpha_c) f_a \left( \|\nabla h\| - \alpha_c, \frac{\rho_s}{\rho}, A \right) \frac{\partial h / \partial x_i}{\|\nabla h\|}, \quad (1.21)$$

où nous avons appliqué l'analyse dimensionnelle du chapitre 1.2.1. En l'absence de cohésion,  $\alpha_c$  est essentiellement lié à l'organisation géométrique des grains, et ne dépend donc pratiquement pas de  $\rho_s / \rho$  ni de  $\mathcal{A}$ . Le petit paramètre sans dimension  $\epsilon$  souligne la séparation d'échelle de temps entre les avalanches et l'érosion. Dans la limite où  $\epsilon$  tend vers zéro, une avalanche réduit instantanément l'excès de pente  $\|\nabla h\| - \alpha_c$  éventuellement causé par l'érosion. Ainsi, on peut se contenter de

<sup>26</sup>La validité de cette identification entre contrainte seuil et angle critique suppose que seule la gravité exerce la contrainte capable de déclencher une avalanche.

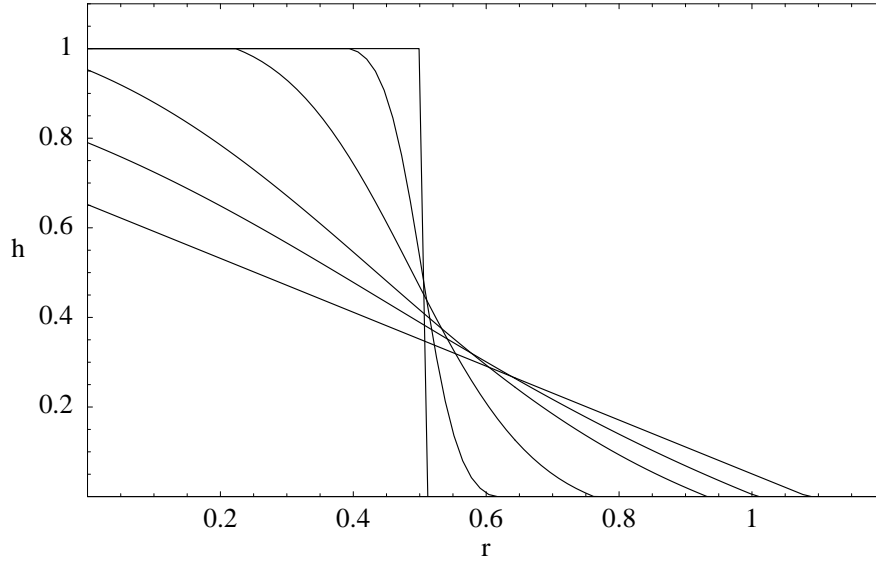


FIG. 1.11 – Effondrement d’un cylindre de matériau granulaire sous l’effet des avalanches. La loi (1.22) donne le flux sédimentaire qui leur est associé. Dans ce cas axisymétrique, l’équation d’évolution est  $\partial h/\partial t = (1/r)\partial(rq_{a,r})/\partial r$ , où  $r$  est la coordonnée radiale et  $q_{a,r} = H(\|\nabla h\| - \alpha_c)(\|\nabla h\| - \alpha_c) \operatorname{sgn}(\partial h/\partial r)$ . Les courbes correspondent aux instants  $t = 0$  (tas cylindrique),  $t = 0,001$ ,  $t = 0,01$ ,  $t = 0,05$ ,  $t = 0,1$  et  $t = 0,5$  (tas conique). Ce modèle simple permet de prendre en compte l’effet des avalanches sur l’érosion des berges.

connaître le comportement de  $f_a$  au voisinage de  $\alpha_c$  pour modéliser l’effet des avalanches. Les données expérimentales de Doppler (2005) suggèrent que  $f_a$  s’annule et admet une dérivée finie au seuil. Nous pouvons donc supposer

$$f_a(\|\nabla h\| - \alpha_c) \approx \|\nabla h\| - \alpha_c, \quad (1.22)$$

en incluant la constante de proportionnalité dans la définition de  $\epsilon$ . Hersen et coll. (2004) utilisent une forme tout-à-fait similaire :  $f_a = \|\nabla h\|^2 - \alpha_c^2$ , dont le développement au voisinage du seuil prend la forme (1.22). Ces auteurs présentent ce flux d’avalanche comme un artifice numérique destiné à imposer la pente d’avalanche comme pente maximale. Cette hypothèse leur permet néanmoins de reproduire très correctement la face d’avalanche des dunes. De même, comme l’illustre la figure 1.11, ce modèle simplifié à l’extrême permet de reproduire la forme conique d’un empilement granulaire après effondrement, tant que l’inertie des grains peut être négligée.

### 1.2.5 Évolution de la topographie

La conservation de la quantité de matière sédimentaire permet de déduire la déformation du fond de la rivière associée aux flux de sédiments. Soit  $\chi_s d_s^3$  le volume moyen occupé par un grain dans la couche sédimentaire, dans ce cas

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\chi_s d_s^3 \frac{\partial}{\partial x_l} (q_{e,l}^* + q_{a,l}^*) \quad (1.23)$$

où les grandeurs de cette équation sont dimensionnelles. Après adimensionnement, cette équation devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_l} (q_{e,l} + q_{a,l}), \quad (1.24)$$

avec

$$q_{e,i} = \phi(\theta) \left( \frac{\tau_i^*}{\|\boldsymbol{\tau}^*\|} - \frac{1}{R} \gamma_{l,i}(\tau_1^*, \tau_2^*, 0, 0) \frac{\partial h}{\partial x_l} \right), \quad (1.25)$$

$$q_{a,i} = \frac{1}{\epsilon} H \left( \frac{1}{R} \|\nabla h\| - \alpha_c \right) f_a \left( \frac{1}{R} \|\nabla h\| - \alpha_c, \frac{\rho_s}{\rho}, A \right) \frac{\partial h / \partial x_i}{\|\nabla h\|}. \quad (1.26)$$

L'adimensionnement des équations précédentes conduit au choix suivant pour le temps caractéristique d'érosion<sup>27</sup> :

$$\mathcal{T}_e = \frac{\mathcal{H}\mathcal{W}}{\chi_s d_s V_s}. \quad (1.27)$$

L'expression du temps caractéristique d'érosion nous permet de quantifier l'approximation de quasi-stationnarité de l'écoulement de l'eau. En effet, cette hypothèse n'est réaliste que si  $\mathcal{T}/\mathcal{T}_e \ll 1$ , c'est-à-dire, en utilisant les équations (2.30) et (1.13), valables pour un écoulement laminaire,

$$\frac{(\rho_s - \rho)}{6\rho} \left( \frac{d_s}{\mathcal{H}} \right)^3 \ll 1. \quad (1.28)$$

Pour un écoulement laminaire de 1 mm de profondeur, sur un lit constitué de grains de silice dont la taille moyenne est de 100  $\mu\text{m}$ , ce rapport vaut  $0.25 \times 10^{-3}$ .

Dans le cas où le repère n'est plus horizontal, mais incliné dans la direction  $x$  d'un angle dont la tangente est  $\mathcal{S}$ , les équations de transport (1.25) et (1.26) deviennent respectivement

$$q_{e,i} = \phi(\theta) \left( \frac{\tau_i^*}{\|\boldsymbol{\tau}^*\|} - \gamma_{l,i}(\tau_1^*, \tau_2^*, 0, 0) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial x_l} - \mathcal{S} \delta_{l,1} \right) \right), \quad (1.29)$$

$$q_{a,i} = \frac{1}{\epsilon} H (\mathcal{S} - \alpha_c) f_a \left( \mathcal{S} - \alpha_c, \frac{\rho_s}{\rho}, A \right) \frac{\partial h / \partial x_i - \mathcal{S} \delta_{i,1}}{\mathcal{S}}. \quad (1.30)$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker, et  $\mathcal{S}$  désigne la norme de la pente locale :

$$\mathcal{S} = \left\| \frac{1}{R} \nabla h - S \mathbf{e}_x \right\|. \quad (1.31)$$

Cette loi de transport de sédiments, à laquelle nous ferons appel tout au long de notre étude, constitue le modèle le plus simple qui permette de reproduire les instabilités d'érosion qui nous intéressent.

---

<sup>27</sup>Pour alléger les écritures, cette expression pourra être modifiée ultérieurement, afin que le flux de sédiments dans l'état de base soit égal à 1, ce qui impose :  $\mathcal{T}_e = \mathcal{H}\mathcal{W}/(\chi_s d_s V_s \phi(\theta_0))$ , où  $\theta_0$  est le nombre de Shields de l'état de base.

# Chapitre 2

## Équations de l'écoulement et application aux rivières rectilignes

### 2.1 Les Équations de Saint-Venant

L'approximation de Saint-Venant permet de réduire à deux dimensions l'étude de l'écoulement d'un fluide, *a priori* tridimensionnel. Cette simplification des équations de Navier-Stokes est très couramment employée en Géomorphologie.

#### 2.1.1 Intégration verticale des équations de Navier-Stokes

Dans le cas d'un écoulement incompressible soumis au champ de pesanteur  $\mathbf{g}$ , les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{i,k}}{\partial x_k}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.2)$$

où les indices  $i$  et  $k$  correspondent aux trois dimensions d'espace (voir figure 2.1) :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z). \quad (2.3)$$

Le vecteur  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  représente la vitesse du fluide,  $\rho$  sa masse volumique,  $p$  sa pression et  $\boldsymbol{\tau}$  la partie déviatorique du tenseur des contraintes.  $\boldsymbol{\tau}$  représente les contraintes visqueuses dans le cas d'un écoulement laminaire, et devient le tenseur de Reynolds si l'écoulement est turbulent. Nous utilisons la convention d'Einstein avec l'indice  $k$  ( $v_k v_k$  doit être lu comme  $\sum_{k=1}^3 v_k v_k$ ). Les conditions aux limites correspondant à une nappe fluide dont la surface  $\eta(x, y, t)$  est libre et qui s'écoule sur une topographie  $h(x, y)$  donnée s'écrivent

$$v_i = 0 \quad \text{en} \quad z = h, \quad (2.4)$$

$$v_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_l \frac{\partial \eta}{\partial x_l} \quad \text{en} \quad z = \eta, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{i,k}n_k = 0 \quad \text{en } z = \eta, \quad (2.6)$$

où la convention d'Einstein, utilisée avec l'indice  $l$ , ne s'applique qu'aux composantes horizontales ( $v_l v_l$  doit être lu comme  $\sum_{k=1}^2 v_k v_k$ ). Le symbole  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes complet :

$$\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \tau_{i,j}. \quad (2.7)$$

Si l'on ne s'intéresse qu'aux variations horizontales des grandeurs de l'écoulement, la dépendance en  $z$  des équations de Navier-Stokes peut être supprimée au moyen d'une intégration verticale. L'équation de conservation de la masse (2.2) devient (pour  $i = 1$  ou  $2$ )

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int_h^\eta v_l \, dz - \frac{\partial \eta}{\partial x_l} v_l|_{z=\eta} + \frac{\partial h}{\partial x_l} v_l|_{z=h} + v_3|_{z=\eta} - v_3|_{z=h} = 0. \quad (2.8)$$

Les conditions aux limites (2.4) et (2.5) permettent de simplifier l'équation précédente :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int_h^\eta v_l \, dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (2.9)$$

La même procédure peut être appliquée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.1), en remarquant que  $v_k \partial v_i / \partial x_k = \partial(v_k v_i) / \partial x_k$  pour un fluide incompressible. La condition (2.6) conduit à

$$\tau_{i,3} + p \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \tau_{i,l} \frac{\partial \eta}{\partial x_l} = 0 \quad (2.10)$$

pour  $i = 1$  ou  $2$  et  $z = \eta$ . Cette propriété, associée à la condition cinématique de surface (2.5), permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_h^\eta v_i \, dz \quad + \quad \frac{\partial}{\partial x_l} \int_h^\eta v_l v_i \, dz \quad = \\ & \text{Accélération locale} \quad \text{Accélération convective} \\ & g_i d \quad + \quad \frac{1}{\rho} \left( \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_h^\eta p \, dz \\ \text{Pression} \end{array} \quad - \quad \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x_i} p|_{z=h} \\ \text{Réaction normale du fond} \end{array} \right. \\ & + \quad \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_h^\eta \tau_{i,l} \, dz \\ \text{Transfert horizontal de quantité de mouvement} \end{array} \quad - \quad \begin{array}{l} \tau_{i,3}|_{z=h} \\ \text{Frottement au fond} \end{array} \\ & \left. + \quad \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x_l} \tau_{i,l}|_{z=h} \\ \text{Réaction tangentielle du fond} \end{array} \right). \quad (2.11) \end{aligned}$$

Soulignons que cette étape d'intégration ne requiert aucune approximation.

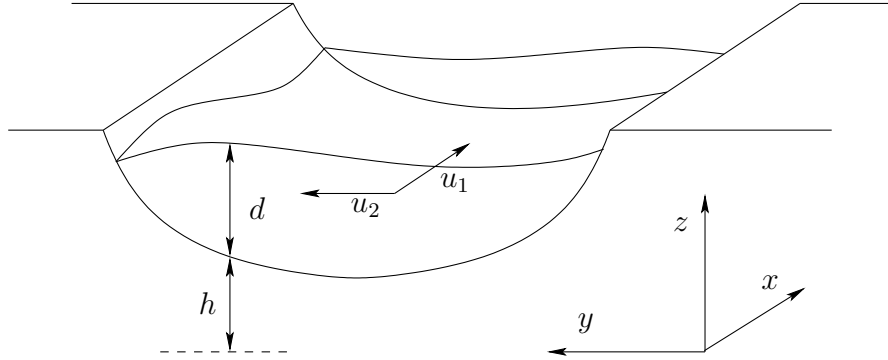


FIG. 2.1 – Vue schématique d’une rivière s’écoulant dans la direction  $x$ . Les élévations du fond de la rivière et de sa surface sont respectivement représentées par  $h$  et  $\eta = h + d$ . La gravité  $\mathbf{g}$  n’est pas nécessairement alignée avec la direction  $z$ , car la direction  $x$  suit la pente moyenne.

### 2.1.2 Les hypothèses de Saint-Venant

Les équations intégrales obtenues ci-dessus ne forment pas un système fermé. Leur résolution n’est possible qu’en leur associant des relations supplémentaires entre les intégrales des vitesses, de la pression et du tenseur de contraintes. Ces relations sont obtenues au prix de diverses approximations, qui reposent essentiellement sur l’hypothèse selon laquelle l’écoulement est pratiquement horizontal (si  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{H}$  sont des longueurs caractéristiques pour les directions respectivement horizontale et verticale,  $R = \mathcal{W}/\mathcal{H} \gg 1$ ).

Considérons le cas d’un écoulement parfaitement horizontal, stationnaire et uniforme, dans la direction  $x$ . Les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites associées deviennent :

$$g_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{x,z}}{\partial z} = 0, \quad (2.12)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{z,z}}{\partial z} = 0, \quad (2.13)$$

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad z = h, \quad (2.14)$$

$$\tau_{x,z} = \tau_{z,z} - p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta. \quad (2.15)$$

Si l’on admet que  $\tau_{z,z}$  est nul pour cet écoulement (ce qui est évident dans le cas laminaire, et pour des modèles simples de turbulence), (2.13) conduit à un champ de pression hydrostatique :

$$p = \rho g_z (\eta - z). \quad (2.16)$$

De même, le profil vertical de la vitesse  $v_1$  découle de (2.12) associée à l’expression du tenseur de contrainte. L’approche de Saint-Venant consiste à supposer que le champ



de pression et le profil de vitesse dans le cas général peuvent être approchés par ceux d'un écoulement parfaitement horizontal. Cette démarche permet de proposer des expressions explicites pour les intégrales de (2.11) et (2.9).

### 2.1.2.1 Cas classique turbulent

La variante des équations de Saint-Venant la plus utilisée en géomorphologie des rivières consiste à représenter le profil vertical de vitesse par une constante  $u_i(x, y, t)$  (Balmforth et Provenzale, 2001). La contrainte exercée par le fond de la rivière est souvent approchée par la formule de Chézy

$$\tau_{i,3}|_{z=h} = \rho C_f u_i \sqrt{u_l u_l}, \quad (2.17)$$

où le coefficient de frottement  $C_f$  est constant. En première approximation, on peut négliger les quatrième et sixième termes du membre de droite de (2.11), qui traduisent la diffusion horizontale de quantité de mouvement. Leur ordre de grandeur est en effet proportionnel à  $1/R$ . L'ensemble de ces hypothèses permet de déduire de (2.11) et de (2.9) les équations suivantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = g_i - g_z \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - C_f \frac{\sqrt{u_l u_l}}{d} u_i, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (d u_l) = 0, \quad (2.19)$$

où  $d = \eta - h$  est la hauteur d'eau de la rivière. Depuis Callander (1969), un nombre considérable d'études ont utilisé ces équations, parmi lesquelles Engelund et Skovgaard (1973), Parker (1976), Ikeda et coll. (1981), Blondeaux et Seminara (1985) ou plus récemment Schielen et coll. (1993).

### 2.1.2.2 Cas des écoulements laminaires

Dans le cas laminaire, et pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, l'expression du tenseur des contraintes de cisaillement est

$$\tau_{i,j} = \rho \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.20)$$

Le cas parfaitement horizontal admet pour solution exacte le profil d'écoulement parabolique de Nußelt. Ce profil résulte de l'équilibre entre le poids et la contrainte visqueuse, et prend la forme

$$\mathbf{v} = \frac{d^2}{\nu} \xi (2 - \xi) (g_x, g_y, 0), \quad (2.21)$$

où  $\xi = (z - h)/d$ . On approche le profil de vitesse d'un écoulement presque horizontal par ce profil parabolique en posant

$$\mathbf{v} = \frac{3}{2} \xi (2 - \xi) (u_x, u_y, 0), \quad (2.22)$$

où  $u_i(x, y, t)$  est la vitesse moyenne de l'écoulement (également appelée vitesse débitante). La contrainte exercée par l'écoulement sur le fond de la rivière devient dans ce cas

$$\tau_{i,3}|_{z=h} = \frac{3\nu\rho}{d}u_i. \quad (2.23)$$

Les termes d'accélération lagrangienne et de pression donnent

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_h^\eta u_i \, dz + \frac{\partial}{\partial x_l} \int_h^\eta u_l u_i \, dz = \frac{\partial}{\partial t} (du_i) + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x_l} (du_i u_l), \quad (2.24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \int_h^\eta p \, dz - \frac{\partial h}{\partial x_i} p|_{z=h} = -\rho g_z d \frac{\partial \eta}{\partial x_i}. \quad (2.25)$$

Enfin, les termes de diffusion horizontale de quantité de mouvement deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_h^\eta \tau_{i,l} \, dz + \frac{\partial h}{\partial x_l} \tau_{i,l}|_{z=h} = \\ \rho \nu \left( -3 \frac{\partial h}{\partial x_l} \left( u_i \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{h}{d} \right) + u_l \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h}{d} \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( d \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + d \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( u_i d \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{h}{d} \right) + u_l d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h}{d} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Finalement, on obtient les expressions suivantes pour les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (du_l) + \frac{\partial d}{\partial t} = 0. \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (du_i) + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x_l} (du_i u_l) = d \left( g_i - g_z \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) - \frac{3\nu u_i}{d} \\ + \nu \left( -3 \frac{\partial h}{\partial x_l} \left( u_i \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{h}{d} \right) + u_l \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h}{d} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( d \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + d \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( u_i d \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{h}{d} \right) + u_l d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h}{d} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

La méthode utilisée ici pour obtenir (2.28) ne donne pas d'indications sur la qualité de l'approximation. Ruyer-Quil et Manneville (2000) proposent, pour un écoulement confiné dans le plan  $(x, z)$ , une méthode plus rigoureuse qui consiste à projeter le champ de vitesse non plus seulement sur la solution de Nußelt, mais sur toute une base de polynômes (il s'agit de la méthode de Galerkin). Le polynôme de plus bas degré de cette base correspond à la solution de Nußelt, et le coefficient concerné obéit à une équation de film mince classique, dont les coefficients numériques sont légèrement modifiés.

### 2.1.3 Changement d'échelle et équations finales

#### 2.1.3.1 Cas laminaire

Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$  les longueurs caractéristiques de l'écoulement pour les dimensions respectivement verticale et horizontale. Dans le cas d'une rivière,  $\mathcal{H}$  peut être sa profondeur moyenne, et  $\mathcal{W}$  sa largeur moyenne. Si l'on se place dans le repère associé à la pente moyenne du substrat,  $\mathbf{g}$  prend la forme

$$\mathbf{g} = (g \sin \vartheta, 0, g \cos \vartheta). \quad (2.29)$$

Le cas d'un écoulement uniforme et permanent donne un ordre de grandeur pour la vitesse  $\mathcal{U}$  caractéristique de l'écoulement

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{H}^2 g \sin \vartheta}{3\nu}. \quad (2.30)$$

Le choix d'un temps caractéristique  $\mathcal{T}$  découle de la définition de la vitesse caractéristique  $\mathcal{T} = \mathcal{W}/\mathcal{U}$ . Dans ce nouveau système de dimensions, (2.28) et (2.27) deviennent

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(du_l) + \frac{\partial d}{\partial t} = 0. \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{F^2}{R} \left( \frac{\partial}{\partial t}(du_i) + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x_l}(du_l u_i) \right) &= d \left( \tan \vartheta \delta_{i,1} - \frac{1}{R} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) - \tan \vartheta \frac{u_i}{d} \\ &+ \tan \vartheta \frac{1}{R^2} \left( - \frac{\partial h}{\partial x_l} \left( u_i \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{h}{d} \right) + u_l \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h}{d} \right) \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( d \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + d \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( u_i d \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{h}{d} \right) + u_l d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h}{d} \right) \right) \right). \quad (2.32) \end{aligned}$$

Dans les équations précédentes,  $F = \mathcal{U}/(g \cos \vartheta \mathcal{H})^{1/2}$  est le nombre de Froude, et  $R = \mathcal{W}/\mathcal{H}$  est le rapport d'aspect de l'écoulement.  $\mathbf{u}$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $\eta$ ,  $t$  et  $\mathbf{x}$  sont à présent des grandeurs sans dimension. Les termes de diffusion horizontale de quantité de mouvement de (2.32) sont d'ordre  $1/R^2$ . Nous négligerons ces termes, sur l'expression desquels il n'existe pas de consensus dans la littérature (Ruyer-Quil et Manneville, 2000; Fourrière et coll., 2007).

#### 2.1.3.2 Cas turbulent

Dans le cas turbulent, l'expression de la vitesse caractéristique prend la forme

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{\mathcal{H} g \sin \vartheta}{C_f}}. \quad (2.33)$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors

$$\frac{F^2}{R} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) = \tan \vartheta \delta_{i,1} - \frac{1}{R} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \tan \vartheta \frac{\|\mathbf{u}_l\|}{d} u_i, \quad (2.34)$$

tandis que l'équation de conservation de la masse n'est pas modifiée.

### 2.1.3.3 Cas général

On considère habituellement en Géomorphologie que le temps caractéristique de l'écoulement  $\mathcal{T}$  est négligeable face à celui des phénomènes d'érosion  $\mathcal{T}_e$  (Parker, 1976). L'écoulement est dans ce cas presque stationnaire, ce qui permet de négliger les dérivées temporelles dans les équations de Saint-Venant. La forme générale de ces dernières est donc, si l'on néglige les termes de diffusion horizontale de quantité de mouvement :

$$\alpha \frac{F^2}{R} u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = S \delta_{i,1} - \frac{1}{R} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - S f(\|\mathbf{u}\|, d) u_i, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (d u_l) = 0, \quad (2.36)$$

où  $f$  et  $\alpha$  dépendent du cas considéré. En régime turbulent,

$$f(\|\mathbf{u}\|, d) = \frac{\|\mathbf{u}\|}{d}, \quad \alpha = 1. \quad (2.37)$$

Pour un film en écoulement laminaire,

$$f(\|\mathbf{u}\|, d) = \frac{1}{d^2}, \quad \alpha = \frac{6}{5}. \quad (2.38)$$

La similarité des équations de Saint-Venant dans les cas laminaire et turbulent conduit à des comportements géomorphologiques comparables. Autrement dit, les rivières miniatures réalisées en laboratoire (telles que celles d'Armstrong (2003)) peuvent, dans une certaine mesure, approcher le comportement des rivières naturelles, comme le suggère Parker (1998). Les équations de Saint-Venant suffisent pour décrire toute une gamme d'instabilités d'érosion, et nous ne reviendrons aux équations de Navier-Stokes qu'à partir du chapitre 4.

## 2.2 Section d'une rivière droite

Si l'on ne s'intéresse pas, dans un premier temps, aux diverses instabilités pouvant déformer un lit de rivière dans le sens de l'écoulement, on peut réduire le problème aux dimensions transverse et verticale ( $y$  et  $z$ ). Cela revient à considérer que le lit de la rivière est invariant par translation selon l'axe des  $x$ . Le transport de sédiments dans la direction  $x$  étant également invariant, le lit de la rivière n'évolue plus que sous l'effet du flux transverse. Les premiers modèles de ce type (Glover et Florey, 1951; Lane et coll., 1959) étaient destinés à prédire la forme d'équilibre du lit, en supposant que pour un tel profil la contrainte exercée par l'eau sur le lit atteint en tout point le seuil d'érosion. Ce type de modèle conduit au paradoxe suivant : si l'ensemble du lit est soumis à la contrainte seuil, la rivière ne transporte pas de sédiments dans la direction  $x$ . Si, au contraire, une rivière transporte des sédiments, elle ne peut être à l'équilibre car la concavité transverse induirait un flux de sédiments dans la direction  $y$ . Or, il semble que les rivières naturelles contredisent ce résultat, en transportant des sédiments malgré un profil stable. Parker (1978b) résoud ce paradoxe en introduisant une diffusion transverse de quantité de mouvement dans les équations décrivant l'écoulement de l'eau. Ainsi, la contrainte exercée par l'écoulement peut varier en l'absence de pente transverse, et donc dépasser localement le seuil d'entraînement sans induire de flux de sédiments transverse. De nombreux modèles numériques ont par la suite été proposés dans ce domaine, à différents degrés de simplification, dont Ikeda et coll. (1988), Pizzuto (1990) et Kovacs et Parker (1994). Ces auteurs supposent l'existence d'un seuil dans la loi d'érosion, ce qui autorise l'existence d'un état d'équilibre.

La plupart des travaux expérimentaux portant sur le profil d'une rivière droite (Ikeda, 1981; Macky, 1999) impliquent des écoulements turbulents. Armstrong (2003) a étudié l'évolution du profil de micro-rivières de quelques centimètres de large, parcourues par un écoulement dont le nombre de Reynolds atteint au plus quelques centaines. Ces valeurs sont insuffisantes pour permettre l'établissement d'une turbulence pleinement développée. Pourtant, les résultats d'Armstrong (2003) sont qualitativement comparables à ceux d'Ikeda (1981).

Les équations établies au chapitre 2.1 forment un cadre valable pour des écoulements aussi bien turbulents que laminaires. L'évolution d'un lit de rivière est alors régie par des équations différentielles réduites à la seule dimension  $y$ , qui permettent d'étudier simplement l'effet des avalanches ou d'un seuil d'érosion.

### 2.2.1 Équation générale

Pour une rivière invariante par translation, (2.35) et (1.24) deviennent respectivement :

$$f(u, d)u = 1, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(q_e + q_a). \quad (2.40)$$

Pour un écoulement laminaire, la première relation conduit à

$$u = d^2, \quad (2.41)$$

ce qui implique que la contrainte sans dimension exercée par l'écoulement sur le fond est proportionnelle à  $d$ . Les flux de sédiments sont donnés par

$$q_e = -\phi(\theta) \frac{\gamma_n}{R} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.42)$$

$$q_a = -\frac{1}{\epsilon} H \left( \frac{1}{R} \left\| \frac{\partial h}{\partial y} \right\| - \alpha_c \right) f_a \left( \frac{1}{R} \left\| \frac{\partial h}{\partial y} \right\| - \alpha_c \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (2.43)$$

Notons que nous avons omis l'indice  $y$  associé aux flux de sédiments dans la direction  $y$ ; cette notation sera conservée tout au long de ce chapitre, sans risque de confusion puisque pour une rivière droite, seuls comptent les flux transverses de sédiments. La composante normale au cisaillement  $\gamma_n$  du tenseur diagonal  $\gamma$  (voir paragraphe 1.2.3) sera par la suite considérée comme constante.

Pour une rivière droite laminaire, et si l'on néglige la diffusion de quantité de mouvement dans la direction  $y$ , (2.11) donne l'expression dimensionnée de la contrainte exercée par l'écoulement sur le fond :

$$\tau_{x,z}|_{z=h} = -\rho g \sin \varphi \mathcal{H} d, \quad (2.44)$$

où  $\tau$  est le cisaillement dimensionnel tandis que  $d$  est sans dimension. Soulignons que cette expression du cisaillement ne dépend pas du profil de vitesse de l'écoulement (turbulent ou laminaire). Ainsi, en posant  $\theta_* = \rho g \sin \varphi \mathcal{H} / ((\rho_s - \rho) d_s)$ , l'évolution de la rivière n'est plus régie que par

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & \frac{\gamma_n}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi(\theta_* d) \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( H \left( \frac{1}{R} \left\| \frac{\partial h}{\partial y} \right\| - \alpha_c \right) f_a \left( \frac{1}{R} \left\| \frac{\partial h}{\partial y} \right\| - \alpha_c \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

### 2.2.2 Solution auto-semblable dans un cas simple

Considérons le cas d'une rivière dont la surface  $\eta$  est constante (le cas d'une rivière à débit constant sera abordé au paragraphe 2.2.4). Nous négligerons ici l'effet des avalanches, et supposerons que l'écoulement remplit entièrement le lit de la rivière. En choisissant judicieusement l'origine du repère, nous pouvons écrire

$$\eta = 0, \quad d = -h, \quad h \leq 0. \quad (2.46)$$

Si en outre la loi d'érosion  $\phi$  est une fonction puissance :  $\phi(\theta) = \phi_0 \theta^\beta$ , (2.45) devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( (-h)^\beta \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (2.47)$$

où l'unité de temps est multipliée par  $\gamma_n \phi_0 \theta_*^\beta / R$ . Cette équation admet une solution auto-semblable de la forme

$$h(y, t) = \frac{1}{t^{1/(\beta+2)}} h_a(\chi), \quad \chi = \frac{y}{t^{1/(\beta+2)}}. \quad (2.48)$$

En utilisant ce changement de variables, (2.47) devient

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left( h_a^\beta \frac{\partial h_a}{\partial \chi} + \frac{\chi h_a}{\beta + 2} \right) = 0. \quad (2.49)$$

Si l'on considère une rivière symétrique selon l'axe ( $Ox$ ), la fonction  $h_a$  est paire. Nous pouvons alors intégrer l'équation précédente :

$$h_a(\chi) = \left( A - \frac{\beta}{2(\beta + 2)} \chi^2 \right)^{1/\beta}. \quad (2.50)$$

Dans le système habituel de coordonnées, cette solution prend la forme d'un lit convexe (parabolique si  $\beta = 1$ ) dont la largeur croît et la profondeur décroît avec le temps :

$$h(y, t) = \frac{1}{t^{1/(\beta+2)}} \left( A - \frac{\beta}{2(\beta + 2)} \frac{y^2}{t^{2/(\beta+2)}} \right)^{1/\beta}, \quad (2.51)$$

où  $A$  est une constante déterminée par la forme initiale du lit. Le comportement de ces solutions (un exemple est présenté sur la figure 2.2) est en accord qualitatif avec l'élargissement du lit observé pour des rivières expérimentales turbulentes (Ikeda, 1981; Macky, 1999) ou les micro-rivières d'Armstrong (2003). Il a été clairement établi expérimentalement (voir paragraphe 1.2.2) que  $\beta$  est une constante strictement supérieure à 1. En conséquence, les solutions auto-semblables de type (2.51) admettent une pente infinie aux berges. Bien entendu, ce comportement indique que l'on ne peut plus négliger les avalanches d'une part, et d'autre part que les hypothèses de Saint-Venant ne sont plus vérifiées au voisinage des berges.

On peut résoudre le premier de ces problèmes en recherchant numériquement les solutions de l'équation (2.45), qui tient compte des flux d'avalanche. L'algorithme utilisé pour ce faire est l'analogue de celui du § 2.2.4.2.1. Les solutions obtenues par cette méthode sont représentées sur la figure 2.2 : en dehors du voisinage des berges, la forme générale du lit reste proche de la forme analytique, solution du modèle sans avalanche. À proximité des berges, le lit semble se maintenir à la pente d'avalanche dans un domaine fini<sup>1</sup>. Si la stricte validité de l'approximation de Saint-Venant ne peut être garantie dans cette zone où la pente du lit atteint une valeur d'ordre un, la prise en compte des termes négligés dans l'approximation de Saint-Venant ne devrait pas modifier qualitativement la prédiction de l'écoulement.

Dans le cas simple de ce paragraphe, l'équation d'évolution du fond est valable en tout point de l'axe ( $Oy$ ), puisqu'elle se résume à l'équation triviale  $\partial h / \partial t = 0$  là où  $d = 0$ . Il n'est donc pas nécessaire de préciser les conditions aux berges, il suffit d'inclure les berges dans le domaine de résolution. La question des conditions aux bords sera abordée au § 2.2.4 dans le cas unidimensionnel, et au § 3.2.2.2 dans le cas général.

<sup>1</sup>Ce comportement est étudié plus en détail au § 2.2.4, où il est exploité comme simplification.

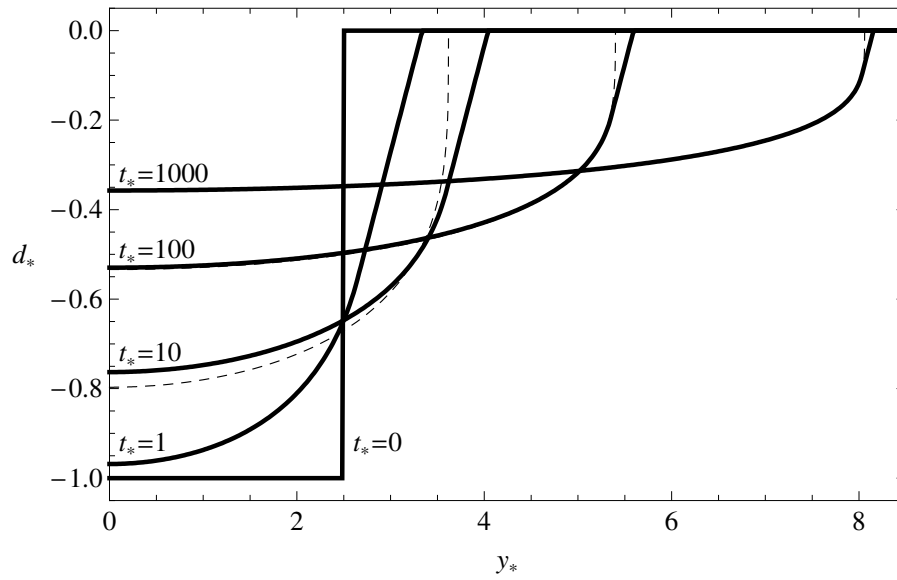


FIG. 2.2 – Évolution d'un lit de rivière initialement rectangulaire soumis à l'érosion, dans le cas simplifié où le niveau d'eau  $\eta$  est constant. En trait plein : résultat numérique, les avalanches sont prises en compte par le modèle simple présenté au § 1.2.4. L'équation (2.45) est résolue avec les paramètres suivants :  $\gamma_n = R = 1$ ,  $\epsilon_a = 0.1$  et  $\alpha_c = 0.8$ . En trait pointillé : solution auto-semblable (2.51) aux temps  $t = 10$ ,  $t = 100$  et  $t = 1000$ .



### 2.2.3 Conservation du débit d'eau et conditions aux berges

Si l'on se donne une topographie  $h(y)$  invariante dans la direction  $x$ , le niveau d'eau  $\eta$  de la rivière détermine le débit sans dimension  $Q_w$ , avec

$$Q_w = \int_{-\infty}^{\infty} u(y) d(y) dy, \quad (2.52)$$

où nous avons choisi pour échelle de débit  $\mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{W}$ . La relation (2.39) donne alors

$$Q_w = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - h(y))^\delta dy, \quad (2.53)$$

avec  $\delta = 3$  dans le cas laminaire et  $\delta = 3/2$  dans le cas turbulent. Afin de maintenir un débit constant au fil de l'érosion du lit, la hauteur d'eau  $\eta$  doit varier au fur et à mesure de cette érosion. Contrairement au cas précédent, cela impose que le lit ne soit pas entièrement rempli par l'écoulement. L'évolution de la berge n'est plus régie par (2.45), et doit être modélisée différemment. Ce que nous appellerons dans la suite une *condition aux berges* n'est rien d'autre que le principe de la conservation de la masse de sédiments intégré sur l'épaisseur d'une berge, associé à différentes hypothèses sur les flux de sédiments qui s'y développent. Kovacs et Parker (1994) furent les premiers, à notre connaissance, à employer cette méthode pour trouver la condition au bord associée à une avalanche.

Toute la suite de ce chapitre est consacrée au cas d'une rivière rectiligne dont l'écoulement est limité à l'intervalle  $[-b(t), b(t)]$ , dans la direction transverse. Supposons de plus que cette rivière est symétrique selon l'axe  $(O, x)$ . Grâce à cette propriété de symétrie, nous pouvons restreindre l'étude à  $[0, b(t)]$ . La conservation de la masse de sédiments au bord de la rivière impose (cette égalité sera démontrée au § 2.2.3.2.1)

$$q_-(b(t), t) = -\dot{b}(h_+(b(t), t) - h_-(b(t), t)), \quad (2.54)$$

où  $\dot{b}$  désigne la vitesse de déplacement du bord, et les indices  $-$  et  $+$  signifient respectivement les limites à gauche et à droite en  $b(t)$  (voir figure 2.3). Rappelons que  $q$  est constitué *a priori* de la somme des flux dus à l'érosion ( $q_e$ ) et aux avalanches ( $q_a$ ). Or, la hauteur d'eau étant nulle par définition en  $y = b(t)$ , l'écoulement ne saurait exercer de contrainte sur le lit au bord, ce qui impose au flux d'érosion d'être nul au bord ( $q_{e,-} = 0$ ). Seules les avalanches peuvent induire un flux fini au bord  $q_-$ , qui est dirigé dans le sens de la pente :  $q_- \leq 0$ . La hauteur de la berge  $h_+ - h_-$ , en revanche, doit être positive (voir § 2.2.3.2.1). La relation (2.54) permet donc de distinguer les cas suivants :

- si  $h_+ = h_-$ , le flux de sédiments au bord est nul quelle que soit la vitesse de ce dernier :  $q_- = 0$ . Il n'existe pas nécessairement de zone d'avalanche dans ce cas ;
- si  $h_+ > h_-$ , la berge recule :  $\dot{b} \geq 0$ . Si  $\dot{b} > 0$ , une zone d'avalanche apparaît au voisinage du bord.

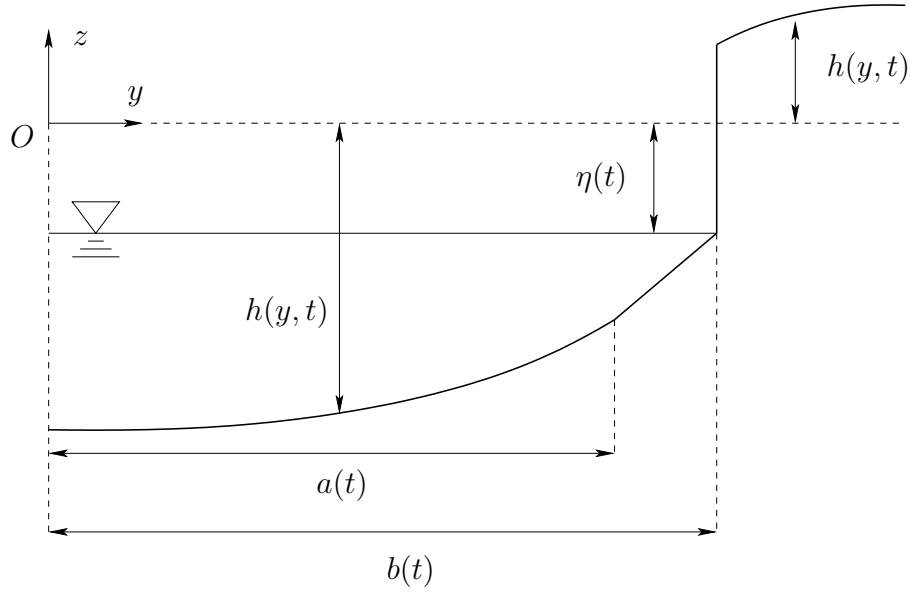


FIG. 2.3 – Modèle de section de rivière dont les rives sont cohésives. La hauteur  $\eta(t)$  varie au fil de l'évolution du lit, en fonction du débit d'eau de la rivière  $Q_w$ . La largeur de la rivière  $b(t)$  détermine à chaque instant le domaine de résolution de (2.45). Le segment  $[a(t), b(t)]$  correspond à la zone d'avalanche.

### 2.2.3.1 Si la fonction $h$ est continue en $b$

Dans ce cas, il n'y a pas *a priori* de restriction sur le déplacement de la berge. La continuité de  $h$  s'écrit

$$h_-(b(t), t) = h_+(b(t), t). \quad (2.55)$$

Cette relation peut être dérivée par rapport au temps, pour conduire à l'égalité

$$\dot{b} \frac{\partial h_-}{\partial y} \Big|_{y=b(t)} = \dot{b} \frac{\partial h_+}{\partial y} \Big|_{y=b(t)} + \frac{\partial q_-}{\partial y} \Big|_{y=b(t)}, \quad (2.56)$$

où nous avons supposé que le flux sédimentaire est nul dans la zone émergée. Notons que cette équation détermine le signe du saut de pente de  $h$  en  $b$ . En effet, puisque le flux de sédiments est nul en  $b$  et négatif au voisinage de  $b$ , sa dérivée selon  $y$  doit vérifier

$$\frac{\partial q_-}{\partial y} \Big|_{y=b(t)} > 0. \quad (2.57)$$

En conséquence, lorsque la berge avance ( $\dot{b} < 0$ ), la pente est plus élevée dans le voisinage émergé de  $b$  que dans son voisinage immergé :

$$\frac{\partial h_+}{\partial y} \Big|_{y=b(t)} > \frac{\partial h_-}{\partial y} \Big|_{y=b(t)}. \quad (2.58)$$

Bien entendu, cette relation s'inverse si la berge recule.

La définition de  $b$  nous donne comme seconde condition à la berge

$$\eta = h_+(b(t), t), \quad (2.59)$$

qui, dérivée par rapport au temps, devient

$$\dot{\eta} = \dot{b} \left. \frac{\partial h_+}{\partial y} \right|_{y=b(t)}. \quad (2.60)$$

Ici, nous devons à nouveau distinguer deux cas, pour lesquels les conditions aux berges sont différentes : avec et sans avalanche au bord.

**2.2.3.1.1 Sans avalanche** Tant que la pente formée par le lit au bord est inférieure à la pente critique d'avalanche, c'est-à-dire tant que

$$\left. \frac{\partial h_-}{\partial y} \right|_{y=b(t)} \leq \alpha_c, \quad (2.61)$$

seule l'érosion entraîne un flux de sédiments au voisinage de la berge, et l'équation de conservation de la masse doit être résolue jusqu'au bord (autrement dit sur  $[0, b(t)]$ ). Les conditions présentées au § 2.2.3.1 suffisent alors.

**2.2.3.1.2 Avec avalanche** Si la pente au bord dépasse la pente d'avalanche, une avalanche se développe sur le segment  $[a(t), b(t)]$ . Cette fois, l'équation de conservation de la masse peut être résolue sur le seul segment  $[0, a(t)]$ , en appliquant les conditions adéquates en  $a(t)$ . Ces conditions seront déterminées au § 2.2.3.2.2 pour une berge discontinue ; nous pouvons également les appliquer ici. L'ensemble des conditions aux berges s'écrit alors

$$\left. \frac{\partial h_-}{\partial y} \right|_{y=a(t)} = \alpha_c, \quad \alpha_c q_-(a(t), t) = \left. \frac{\partial h_-}{\partial t} \right|_{y=a(t)} (\eta(t) - h(a(t), t)). \quad (2.62)$$

La première de ces conditions découle de l'expression locale de la conservation de la masse, qui impose la continuité du flux de sédiments en tout point du lit<sup>2</sup>. La seconde condition traduit la conservation de la masse, intégrée sur tout le domaine  $[a, b]$  ; elle découle directement de l'équation (2.81), démontrée au § 2.2.3.2.2.

Ces conditions aux berges peuvent être employées tant que perdure l'avalanche, ce qui se traduit par

$$b(t) > a(t). \quad (2.63)$$

### 2.2.3.2 Si la fonction $h$ est discontinue en $b$

Si le sable sur lequel s'écoule notre rivière est suffisamment fin, la capillarité le rend cohésif lorsqu'il est humide mais non saturé. La pente d'avalanche dans la zone émergée est alors proche de la verticale (voir la figure 2.4). Les berges de nombreuses

<sup>2</sup>Sans cette continuité, l'altitude du lit varierait à une vitesse infinie au point de discontinuité.



FIG. 2.4 – Micro-rivière naturelle sur la plage de Goleta, Californie, USA. L'eau s'écoule du haut de la photographie vers le bas ; la largeur de la rivière est de l'ordre du mètre. La cohésion du sable humide permet la formation d'une berge verticale, lorsque cette dernière recule (à droite). Le même phénomène semble s'être produit à gauche, avant que la berge n'avance sans former de discontinuité sous l'effet du dépôt sédimentaire dû à l'écoulement. (Photographie : C. Josserand et l'auteur.)

rivières naturelles sont beaucoup plus cohésives que leur lit, dont les particules les plus fines ont été emportées par l'écoulement. La présence de végétation sur les berges peut également accroître leur cohésion (l'influence de la *ripisylve*<sup>3</sup> sur la forme des rivières a été démontrée notamment par Millar (2000) sur une rivière réelle, et expérimentalement par Gran et Paola (2001)). Une façon simple de représenter une berge cohésive consiste à supposer que la berge demeure verticale au cours de son érosion (voir la figure 2.3). Comme nous l'avons démontré au § 2.2.3, cette configuration implique que la berge recule, c'est-à-dire  $\dot{b} > 0$ .

**2.2.3.2.1 Conservation de la masse de sédiments pour une berge verticale** Soit  $\delta V(t)$  le volume occupé par les sédiments entre  $b(t) - \delta y$  et  $b(t) + \delta y$ . Par

<sup>3</sup>C'est-à-dire la végétation croissant sur les berges.

définition,

$$\begin{aligned}\delta V(t) &= \int_{b(t)-\delta y}^{b(t)+\delta y} h(y, t) dy \\ &= \delta y(h_- + h_+) + \mathcal{O}(\delta y^2),\end{aligned}\tag{2.64}$$

où les indices  $-$  et  $+$  représentent respectivement la limite à gauche de  $b(t)$  ( $y \rightarrow b(t)$ , avec  $y < b(t)$ ), et la limite à droite de  $b(t)$  ( $y \rightarrow b(t)$ , avec  $y > b(t)$ ). Sous forme intégrale, la conservation de la masse de sédiments s'écrit

$$\begin{aligned}\delta \dot{V} &= \dot{b}(h(b(t) + \delta y, t) - h(b(t) - \delta y, t)) \\ &\quad + q(h(b(t) - \delta y, t) - q(h(b(t) + \delta y, t)) \\ &= \dot{b}(h_+ - h_-) + q_- - q_+ + \delta y \left( \dot{b} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_+ + \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_- \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_+ + \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_- \right) \right) + \mathcal{O}(\delta y^2).\end{aligned}\tag{2.65}$$

La dérivée temporelle de (2.64) (soulignons que  $h_-$  et  $h_+$  sont des fonctions du temps seulement) associée à (2.65) donne

$$q_+ - q_- = \dot{b}(h_+ - h_-),\tag{2.66}$$

$$\dot{h}_+ + \dot{h}_- = \dot{b} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_+ + \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_- \right) - \left( \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_+ + \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_- \right).\tag{2.67}$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire de poursuivre les développements (2.64) et (2.65) à l'ordre  $\delta y^2$ , car les ordres supérieurs à  $\delta y$  ne sont que les dérivations successives de l'équation locale de conservation de la masse. Dans le cas particulier qui nous intéresse, le flux de sédiments est nul à droite de la berge<sup>4</sup>. La continuité de  $h$  selon  $y$  (en dehors de  $y = b(t)$ , bien entendu) donne :

$$\dot{h}_- = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_- + \dot{b} \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_-, \quad \dot{h}_+ = \dot{b} \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_+.\tag{2.68}$$

Ainsi, (2.66) et (2.67) deviennent respectivement

$$q_- = -\dot{b}(h_+ - h_-), \quad \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_- = -\frac{\partial q}{\partial y} \Big|_-.\tag{2.69}$$

Seule la première équation constitue une condition aux berges, la seconde n'est que la limite de l'équation de continuité au voisinage de la berge. La condition aux limites de flux (2.69) doit être associée à la définition de  $b(t)$  :

$$h_-(b(t), t) = \eta(t).\tag{2.70}$$

<sup>4</sup>Ceci n'est plus vrai si l'on considère que des avalanches peuvent se produire pour  $y > b(t)$ .

**2.2.3.2.2 Conditions à la berge** Par définition, la profondeur d'eau est nulle à la berge. Dans le cadre des équations de Saint-Venant, cette définition implique que le cisaillement au fond soit également nul en  $y = b(t)$ . Le flux de sédiments entraînés par l'écoulement  $\mathbf{q}_e$  s'annule donc à la berge<sup>5</sup>. Ainsi, seules les avalanches peuvent assurer un flux de sédiments fini à la berge.

Si la berge avance ( $\dot{b} \leq 0$ ), l'équation (2.69) indique que le flux total de sédiments  $q_-$ , qui ne saurait être positif<sup>6</sup>, est nul. Le flux d'avalanche est donc nul également, ce qui impose  $\partial h / \partial y \leq \alpha_c$ . Autrement dit, il n'y a pas d'avalanche en  $y = b(t)$  lorsque la berge avance.

Au contraire, lorsque la berge recule, la relation (2.69) impose un flux de sédiments non nul en général. Si  $\dot{b} > 0$  et  $h_+(b(t), t) > h_-(b(t), t)$ , le flux de sédiments à la berge est strictement négatif, ce qui nécessite une avalanche. Appelons  $[a(t), b(t)]$  (voir figure 2.3) le segment sur lequel cette avalanche s'étend. Ce domaine est défini mathématiquement par :

$$\frac{\partial h}{\partial y} \leq \alpha_c \quad \text{si } y \in [0, a(t)], \quad \frac{\partial h}{\partial y} \geq \alpha_c \quad \text{si } y \in [a(t), b(t)]. \quad (2.71)$$

Comme nous l'avons signalé au chapitre 1.2.4, les avalanches sont suffisamment rapides pour que l'on puisse ne considérer que leurs effets (maintien de la pente proche de la valeur seuil, flux) indépendamment de leur dynamique. Mathématiquement, cela revient à n'étudier que les premiers termes d'un développement en  $\epsilon$  des grandeurs du problème ( $\epsilon$  apparaît dans (1.21)) sur le segment  $[a(t), b(t)]$ . Si les équations d'évolution d'une section de rivière doivent être résolues numériquement, le traitement analytique des avalanches permet un gain de temps considérable, puisque l'échelle de temps est alors fixée uniquement par l'érosion. Le pas de temps admissible pour le schéma de résolution sera alors accru d'un facteur  $1/\epsilon$ .

Par la suite, nous notons  $h_-$  et  $q_-$  les valeurs limites des grandeurs  $h$  et  $q$  en  $a(t)$  à gauche. De même,  $h_+$  est la valeur limite de  $h$  en  $b(t)$  à droite. Sur le segment  $[a(t), b(t)]$ , les développements de  $h$  et  $q$  en  $\epsilon$  s'écrivent

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \epsilon h_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ q &= \frac{1}{\epsilon} q_{a,-1} + q_{a,0} + q_{e,0} + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.72)$$

où les indices  $a$  et  $e$  désignent l'origine des flux (avalanche ou érosion). L'expression du flux d'avalanche (2.45) donne

$$\begin{aligned} q_{a,-1} &= -f_a \left( \frac{\partial h_0}{\partial y} - \alpha_c \right), \\ q_{a,0} &= -f'_a \left( \frac{\partial h_0}{\partial y} - \alpha_c \right) \frac{\partial h_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

<sup>5</sup>Ce raisonnement reste vrai dans le cas de rivière à deux dimensions, non invariante par translation dans la direction  $x$ .

<sup>6</sup>En effet, la pente de  $h$  en  $b$  est nécessairement positive, ce qui impose le sens du flux de sédiments dans la direction transverse.

La définition (2.71) du segment  $[a(t), b(t)]$  appliquée ordre par ordre conduit aux inégalités suivantes :

$$\frac{\partial h_0}{\partial y} \geq \alpha_c, \quad h_1 \geq 0. \quad (2.74)$$

L'absence de cohésion des sédiments immergés interdit toute discontinuité de  $h$ , de même que la conservation de la masse de sédiments impose la continuité de  $q$ . Les conditions aux limites de notre problème en  $a(t)$  sont donc  $h(a(t), t) = h_-$  et  $q(a(t), t) = q_-$ . Ainsi pour  $y = a(t)$ ,

$$h_0 = h_-, \quad h_1 = 0, \quad q_{a,-1} = 0, \quad q_{a,0} + q_{e,0} = q_-. \quad (2.75)$$

Au contraire, en  $y = b(t)$ ,  $h$  est discontinu en général. Le raisonnement présenté au chapitre 2.2.3.2.1 permet d'écrire :

$$h_0 = \eta, \quad h_1 = 0, \quad q_{a,-1} = 0, \quad q_{a,0} + q_{e,0} = -\dot{b}(h_+ - h_0). \quad (2.76)$$

Le développement de (2.45) à l'ordre zéro dans la zone d'avalanche s'écrit

$$\frac{\partial h_{-,0}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial q_{a,-1}}{\partial y} - \frac{\partial q_{a,0}}{\partial y} - \frac{\partial q_{a,0}}{\partial y}. \quad (2.77)$$

L'ordre  $\epsilon^{-1}$  de l'équation ci-dessus indique que  $q_{a,-1}$  est une constante sur  $[a(t), b(t)]$ . Cette constante doit être nulle pour satisfaire les conditions aux limites (2.75) et (2.76). (2.73) impose alors  $\partial h_0 / \partial y = \alpha_c$ . La topographie de la zone d'avalanche à l'ordre zéro est donc :

$$h_0 = \alpha_c(y - a) + h_-. \quad (2.78)$$

La condition (2.76) devant être respectée,  $a$  et  $b$  sont liés par

$$\alpha_c(b - a) = \eta - h_-. \quad (2.79)$$

L'intégrale de (2.77) sur  $[a(t), b(t)]$ , associée à (2.75) et (2.76), s'écrit

$$\int_a^b \frac{\partial h_0}{\partial t} = \dot{b}(h_+ - h_0) + q_-. \quad (2.80)$$

En utilisant (2.78) et (2.79), nous pouvons exprimer l'intégrale ci-dessus sous la forme

$$q_- = \frac{1}{\alpha} \left( \left( \dot{h}_- - \alpha_c \dot{a} \right) (h_+ - h_-) - \dot{\eta} (h_+ - \eta) \right). \quad (2.81)$$

En plus de la condition de flux ci-dessus, le modèle de berge présenté dans ce chapitre impose une condition d'angle en  $y = a(t)$ . En effet, si l'on admet que le flux d'érosion est une fonction de la hauteur d'eau et de la pente seulement, (2.75) impose

$$q_{a,0} + q_{e,0}(\eta - h_-, \alpha_c) = q_-(\eta - h_-, \frac{\partial h_-}{\partial y}). \quad (2.82)$$

Or le flux d'avalanche est dirigé dans le sens de la pente (ici  $q_{a,0} < 0$ ), et le flux d'érosion est une fonction décroissante de la pente. Nous pouvons donc déduire de l'inégalité  $\partial h_- / \partial y \leq \alpha_c$  et de l'équation ci-dessus que la topographie atteint la pente d'avalanche en  $y = a(t)$  :

$$\frac{\partial h_-}{\partial y} = \alpha_c. \quad (2.83)$$

### 2.2.3.3 Résumé des diverses conditions aux berges

L'ensemble des situations présentées ci-dessus ne peut sans doute pas être résumé en une formule condensée et *continue* de conditions aux berges. Les transitions entre ces diverses situations, imposées par l'évolution du lit de la rivière ou la variation du débit d'eau, interviennent brutalement lorsque les quantités  $h_+(b(t), t) - h_-(b(t), t)$ ,  $b(t) - a(t)$  ou encore  $\partial q_- / \partial y(b(t), t) - \alpha_c$  s'annulent. Le lecteur trouvera dans le tableau 2.1 une synthèse des différents cas envisagés.

## 2.2.4 Rivière à débit constant

### 2.2.4.1 Établissement des équations

À notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de contribution expérimentale relatant l'élargissement d'un canal érodable, à hauteur d'eau contrôlée : il est en effet infiniment plus simple de contrôler le débit de la rivière. Dans le présent chapitre, nous nous proposons d'adapter les modèles de cette étude au cas d'un écoulement à débit fixé, seul cas pour lequel une comparaison avec l'expérience est envisageable. Dans une certaine mesure, cette remarque s'applique également au cas des rivières naturelles, dont le niveau d'eau est libre, tandis que la quantité d'eau qui les traverse est contrainte par les caractéristiques du bassin versant concerné.

Afin de simplifier l'étude, le débit d'eau sans dimension  $Q_w$  sera considéré comme constant au cours de l'élargissement de la rivière. De même, nous supposerons que la rivière est symétrique par rapport à l'axe des  $x$ , restreignant ainsi l'étude au segment  $[0, a(t)]^7$ . L'unité de longueur est la profondeur maximale de la section initiale de la rivière, dans la direction  $y$  comme dans la direction  $z$  ; nous avons donc  $R = 0$ . Enfin, nous supposerons que la topographie au-delà des berges est uniforme, et fixerons l'origine du repère à cette altitude (en d'autres termes,  $h_+ = 0$ ). Le système d'équations régissant l'élargissement d'une rivière à débit constant s'écrit donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \quad q = -\gamma_n \phi(\theta_*(\eta - h)) \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{pour } y \in [0, a(t)], \quad (2.84)$$

$$\int_0^{a(t)} (\eta - h)^\delta dy = Q_w, \quad (2.85)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=a(t)} = \alpha_c, \quad (2.86)$$

$$\alpha_c q|_{y=a(t)} = \eta \dot{\eta} - \left( h \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_{y=a(t)}. \quad (2.87)$$

Le domaine de résolution peut être rapporté à un domaine constant par la transformation  $(y, t) \rightarrow (\xi \equiv y/a(t), t)$ . Dans ces nouvelles coordonnées, notre problème

<sup>7</sup>Le segment  $[a(t), b(t)]$  sera traité par l'intermédiaire des conditions aux berges résumées dans le tableau 2.1.



	$h_+(b, t) = h_-(b, t)$		
Avalanche	Oui	Non	$h_+(b, t) > h_-(b, t)$
Critère	$b > a$	$\left. \frac{\partial h_-}{\partial y} \right _{y=b} < \alpha_c$	$h_+(b, t) > \eta$
Conditions aux berges	$\left. \frac{\partial h_-}{\partial y} \right _{y=a} = \alpha_c$ $\alpha_c q_-(a, t) =$ $-\left. \frac{\partial q_-}{\partial y} \right _{y=a} (\eta - h_-(a, t))$	$h_-(b, t) = \eta$ $i \left. \frac{\partial h_-}{\partial y} \right _{y=b} = \dot{\eta} + \left. \frac{\partial q_-}{\partial y} \right _{y=b}$	$\left. \frac{\partial h_-}{\partial y} \right _{y=a} = \alpha_c$ $\alpha_c q_-(a, t) =$ $-\left. \frac{\partial q_-}{\partial y} \right _{y=a} (h_+(b, t) - h_-(a, t))$ $-\dot{\eta}(h_+(b, t) - \eta)$
Position du bord $b$	$(b - a)\alpha_c =$ $\eta - h_-(a, t)$	$b = a$	$(b - a)\alpha_c =$ $\eta - h_-(a, t)$

TAB. 2.1 – Résumé des diverses conditions aux berges, dans le cas d'une rivière rectiligne.

s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \xi \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{1}{a} \frac{\partial q}{\partial \xi}, \quad q = -\frac{\gamma_n}{a} \phi(\theta_*(\eta - h)) \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad \text{pour } \xi \in [0, 1], \quad (2.88)$$

$$\int_0^1 (\eta - h)^\delta d\xi = \frac{Q_w}{a}, \quad (2.89)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = a\alpha_c, \quad (2.90)$$

$$\alpha_c q \big|_{\xi=1} = \eta \dot{\eta} + \frac{h \big|_{\xi=1}}{a} \left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}. \quad (2.91)$$

### 2.2.4.2 Résolution numérique

**2.2.4.2.1 Algorithme** Le système d'ordre deux en  $\xi$  constitué par les équations (2.88), (2.89), (2.90) et (2.91) peut être résolu numériquement par une méthode classique de différences finies d'ordre un (centrées en espace, explicites en temps).

Le segment  $[0, 1]$  est séparé en  $N - 1$  segments notés  $[\xi_n, \xi_{n+1}]$  (de longueur variable) pour  $n = 1, 2, \dots, N$ . La valeur discrète de  $h$  en  $\xi_n$  est notée  $h_n$ , tandis que les flux discrets  $q_{n+1/2}$  pour  $n = 1, 2, \dots, N - 1$  sont évalués au milieu de chaque segment. L'équation de conservation de la masse de sédiments (2.88) prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_n}{\partial t} &= \xi_n \frac{\dot{a}}{a} \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{\xi_{n+1} - \xi_{n-1}} - \frac{2}{a} \frac{q_{n+1/2} - q_{n-1/2}}{\xi_{n+1} + \xi_{n-1}}, \\ q_{n+1/2} &= -\frac{\gamma}{a} \phi \left( \theta_* \left( \eta - \frac{h_n + h_{n+1}}{2} \right) \right) \frac{h_{n+1} - h_n}{\xi_{n+1} - \xi_n}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

pour  $n = 2, \dots, N - 1$ . Les cas  $n = 1$  et  $n = N$  impliquent les conditions aux limites. La condition de symétrie en  $\xi = 0$  est assurée en définissant  $q_{1-1/2} = -q_{1+1/2}$ ,  $\xi_{-1} = -\xi_1$  et  $h_{-1} = h_1$ , afin que (2.92) reste applicable pour  $n = 1$ . De même, en  $\xi = 1$ , la condition (2.90) permet de définir

$$q_{N+1/2} = 2q_N - q_{N-1/2}, \quad q_N = -\frac{\gamma}{a} \phi(\theta_*(\eta - h_N)) a\alpha_c. \quad (2.93)$$

Pour déterminer  $\dot{\eta}$ , il nous faut utiliser la relation (2.91) :

$$\dot{\eta} = \frac{1}{\eta} \left( \alpha_c q_N - \frac{h_N}{a} \frac{q_{N+1/2} - q_{N-1/2}}{\xi_N - \xi_{N-1}} \right). \quad (2.94)$$

La division par  $\eta$  dans l'équation ci-dessus est liée au choix de l'origine du repère. Dans le cas présent, lorsque  $\eta = 0$ , la rivière déborde et les conditions aux berges ne sont plus valables. Enfin, la dérivée temporelle de la relation intégrale de conservation du débit d'eau (2.89), associée à l'équation de conservation de la masse de sédiments (2.88) permet de calculer la vitesse  $\dot{a}$  d'élargissement de la rivière :

$$\dot{a} = \delta \frac{\dot{\eta} I_1 + (I_2 + q_N (\eta - h_N)^{\delta-1})/a}{Q_w/a^2 + \delta I_3/a},$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (\eta - h)^{\delta-1} d\xi, & I_2 &= \int_0^1 q \frac{\partial h}{\partial \xi} (\eta - h)^{\delta-2} d\xi, \\
I_3 &= \int_0^1 \xi \frac{\partial h}{\partial \xi} (\eta - h)^{\delta-1} d\xi.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Les intégrales  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  peuvent être aisément approchées à l'aide des valeurs discrètes  $q_n$ ,  $h_n$  et  $\xi_n$ , ce qui clôt le système discret destiné à être résolu numériquement.

**2.2.4.2.2 Élargissement et débordement** À titre illustratif, considérons le cas d'une micro-rivière laminaire ( $\delta = 3$ ) de section initiale trapézoïdale. Selon le modèle de berges avec avalanches proposé au § 2.2.3.2.2, la topographie initiale est définie par :

$$h = \begin{cases} h_0 & \text{pour } y \in [0, a_0] \\ \alpha_c(y - a_0) + h_0 & \text{pour } y \in [a_0, b_0] \\ 0 & \text{pour } y \in [b_0, +\infty], \end{cases} \tag{2.96}$$

avec  $b = a + (\eta - h_0)/\alpha_c$ . Les résultats de la résolution numérique du problème ainsi posé à l'aide de l'algorithme présenté au § 2.2.4.2.1 sont représentés sur la figure 2.5. De même que pour le cas du § 2.2.2 (pour lequel le débit d'eau n'était pas conservé), la rivière s'élargit continûment sous l'effet de l'érosion. En revanche, dans le cas présent, cet élargissement entraîne une augmentation du niveau de l'eau, qui finit par dépasser la hauteur de la berge (autrement dit,  $\eta$  devient positif). Ce débordement rend caduques les hypothèses du modèle de berge utilisé ici.

Une analyse d'échelle permet de rendre compte grossièrement de ce phénomène. On désigne respectivement les ordres de grandeur de la topographie et de la hauteur d'eau par  $\tilde{h}$  et  $\tilde{\eta}$ . Les expressions suivantes permettent d'approcher la *masse*  $V_s$  des sédiments (c'est-à-dire l'intégrale selon la direction  $y$  de la topographie  $h$ , qui est négative selon les présentes conventions) et le débit d'eau  $Q_w$  :

$$V_s \approx a\tilde{h}, \quad Q_w \approx a(\tilde{\eta} - \tilde{h})^\delta. \tag{2.97}$$

La conservation de ces deux quantités impose donc

$$\tilde{\eta} \approx \frac{V_s}{a} + \left( \frac{Q_w}{a} \right)^{1/\delta} \tag{2.98}$$

où  $Q_w$  et  $V_s$  sont deux constantes respectivement positive et négative. Selon cette formule,  $\tilde{\eta}$  coupe nécessairement l'axe des abscisses pour un temps suffisamment long : la rivière déborde. Ce débordement est illustré par la figure 2.6. Pour la micro-rivière décrite ci-dessus, le comportement prédit par la formule précédente correspond bien au comportement réel issu de la résolution numérique.

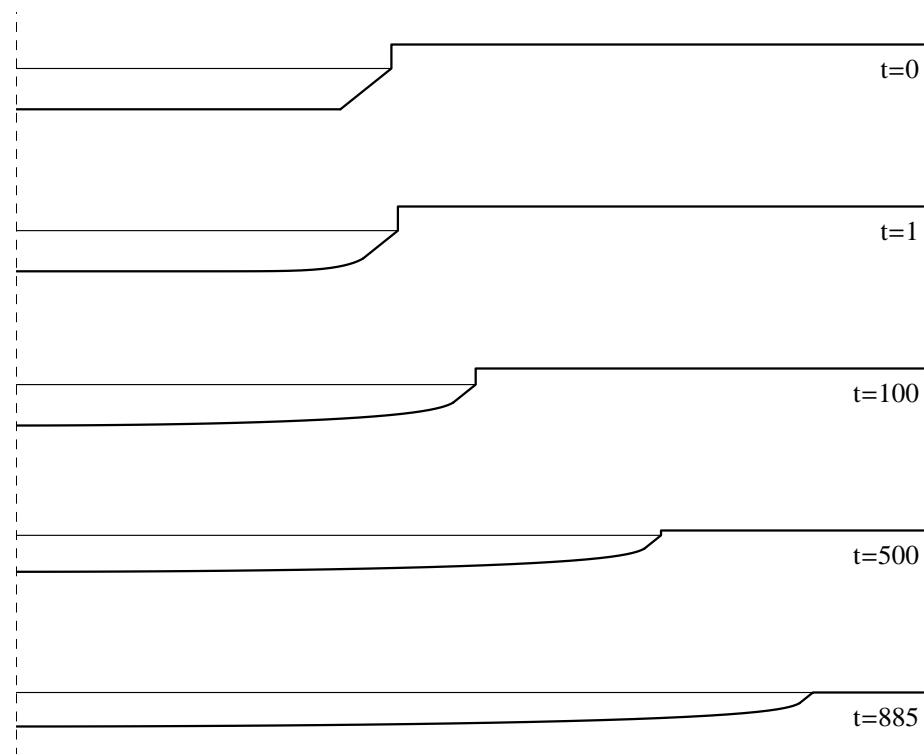


FIG. 2.5 – Évolution de la section d'une micro-rivière laminaire lorsque le débit d'eau est constant (résultats numériques). Le trait en gras représente la topographie, le trait fin la hauteur d'eau. L'échelle, arbitraire, est la même pour les directions  $y$  et  $z$ . La loi d'érosion utilisée est une fonction puissance d'exposant  $\beta = 3.75$ . La section initiale est un trapèze défini par  $h_0 = -1$  et  $\eta_0 = -0.37$  sur  $[0, a_0]$  avec  $a_0 = 5$ . La zone d'avalanche et la berge correspondent à la description proposée au § 2.2.3.2.2.

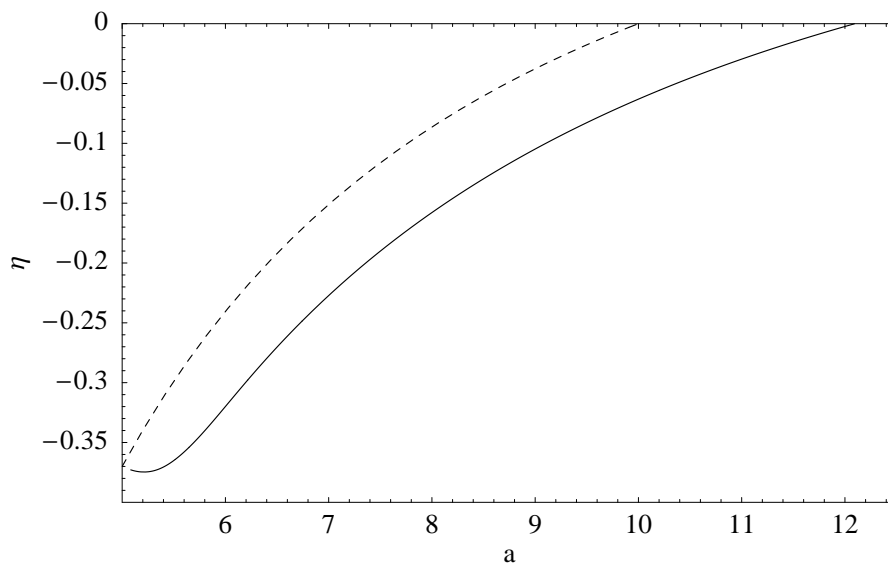


FIG. 2.6 – Variation de la hauteur d'eau  $\eta$  en fonction de la largeur  $a$  de la micro-rivière de la figure 2.5, jusqu'au débordement (trait plein). La courbe en pointillés correspond à l'analyse d'ordre de grandeur présentée au § 2.2.4.2.2.

### 2.2.4.3 Un test pour les conditions aux berges

La méthode employée dans ce chapitre pour représenter l'élargissement des micro-rivières droites à débit constant n'est pas *a priori* restreinte aux écoulements laminaires sur un lit homogène. Au contraire, elle nous semble tout à fait adaptée à des systèmes naturels, pour lesquels le comportement des berges vis-à-vis de l'érosion diffère de celui du lit, et doit donc être traité distinctement. En particulier, les caractéristiques liées aux sédiments qui constituent la berge (généralement plus cohésifs que ceux du lit), ou encore la croissance de la végétation riveraine, peuvent être inclus dans les conditions aux berges.

En l'état, ce modèle d'élargissement permet de confronter les conditions aux berges sur lesquelles il se fonde à des expériences d'élargissement de micro-rivières telles que celles d'Armstrong (2003), pour peu que les effets de la capillarité puissent être négligés (Devauchelle et coll., 2007a). En ce sens, les expériences portant sur la dynamique de rivières rectilignes quittent le champ des problèmes purement académiques, pour devenir un outil d'évaluation des conditions de berges, indispensables aux modèles de rivières naturelles.

# Chapitre 3

## Motifs d'érosion dans le plan horizontal

### 3.1 Stabilité d'un film liquide érodant une couche granulaire

Le système d'équations décrivant l'écoulement et le transport des sédiments auquel nous avons eu recours pour étudier l'élargissement d'une rivière rectiligne, est ici appliqué à l'étude de la stabilité temporelle d'un système dépendant de la coordonnée  $x$ .

#### 3.1.1 Équation de dispersion dans le cas général

Dans le cas d'un film mince, infini à la fois dans la direction  $x$  et dans la direction  $y$ , il n'existe pas d'autre longueur caractéristique que l'épaisseur  $\mathcal{H}$  du film liquide. Dans ce cas, le rapport d'aspect  $R$  vaut 1 dans les équations de l'écoulement (2.35) et (2.36), ainsi que dans les équations de transport de sédiments (1.24), (1.29) et (1.30). Le vecteur  $\varphi(x, y, t)$  désigne l'état du système :

$$\varphi(x, y, t) = (u, v, h, d, q_x, q_y). \quad (3.1)$$

##### 3.1.1.1 État de base

Considérons l'état  $\varphi_0$  suivant : un film liquide uniforme s'écoule dans la direction  $x$ , au-dessus d'une couche de matériau granulaire elle-même uniforme. Si le cisaillement exercé par l'écoulement est suffisamment intense, ou si la loi d'érosion associée au matériau granulaire ne présente pas de seuil, un flux de sédiments uniforme est associé à cet état de base :

$$\varphi_0 = (u_0, 0, -d_0, d_0, q_0, 0). \quad (3.2)$$

Nous choisissons naturellement  $u_0$  pour vitesse caractéristique ( $\mathcal{U} = u_0$ ) et  $d_0$  pour longueur caractéristique ( $\mathcal{H} = d_0$ ). De même, le flux de sédiments de l'état de

base  $\phi(\theta_0)(1 + \gamma S)d_0 u_0$  est le débit sédimentaire caractéristique, ce qui impose  $d_0/(\phi(\theta_0)(1 + \gamma S)u_0)$  comme temps caractéristique. Le nombre de Shields de l'écoulement de base s'écrit

$$\theta_0 = \rho g \sin(\varphi) d_0 / ((\rho_s - \rho) d_s), \quad (3.3)$$

aussi bien dans le cas laminaire que dans le cas turbulent (voir § 2.2.1). Ainsi, l'état de base sans dimension

$$\varphi_0 = (1, 0, -1, 1, 1, 0) \quad (3.4)$$

est solution des équations (2.35), (2.36), (1.24), (1.29) et (1.30). Deux nombres sans dimension caractérisent cet écoulement de base dans le cadre de Saint-Venant : la pente du support  $S$  et le nombre de Froude  $F = u_0/\sqrt{gd_0}$ . Dans le cas laminaire, (2.30) relie le nombre de Reynolds à  $F$  et  $S$  :

$$\text{Re} = \frac{3F^2}{S}. \quad (3.5)$$

### 3.1.1.2 Perturbations

Toute perturbation peut être décomposée en une somme d'ondes de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ . Tant que cette perturbation est suffisamment petite pour que la linéarisation des équations autour de l'état de base  $\varphi_0$  reste valable, l'évolution du système peut être entièrement décrite dans l'espace de Fourier. Nous étudierons donc l'évolution d'une perturbation de la forme

$$\varphi - \varphi_0 = \epsilon \varphi_* \exp(ik_l x_l - i\omega t). \quad (3.6)$$

Les équations régissant l'écoulement (2.35) et (2.36), développées à l'ordre un pour  $\epsilon$  tendant vers zéro conduisent aux relations

$$(S(1 + \alpha_2) + ik_x F^2 \alpha_1) u_* + ik_x h_* + (ik_x - S\alpha_3) d_* = 0, \quad (3.7)$$

$$(S + ik_x F^2 \alpha_1) v_* + ik_y (d_* + h_*) = 0, \quad (3.8)$$

$$k_x (d_* + u_*) + k_y v_* = 0, \quad (3.9)$$

où les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont déterminés par le type d'écoulement étudié :  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  vaut  $(6/5, 0, 2)$  dans le cas laminaire, et  $(1, 1, 1)$  dans le cas turbulent (voir § 2.1). De même, les équations de transport et de conservation des sédiments (1.29) et (1.24) deviennent :

$$q_{x,*}(1 + S\gamma) + ik_x \gamma h_* + (d_*(\alpha_3 - 1) - u_*(1 + \alpha_2))(1 + S\gamma) \frac{\theta_0 \phi'(\theta_0)}{\phi(\theta_0)} = 0, \quad (3.10)$$

$$q_{y,*}(1 + S\gamma) + ik_y \gamma h_* - v_* = 0, \quad (3.11)$$

$$ik_x q_{x,*} + ik_y q_{y,*} - i\omega h_* = 0. \quad (3.12)$$

L'annulation du déterminant du système constitué par les six équations précédentes, nécessaire pour obtenir des solutions non triviales, conduit à l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned} \omega = & (F^2 k_x^5 \alpha_1 (1 - F^2 \alpha_1) \gamma - ik_y^4 S(1 + \alpha_2) \gamma + k_x k_y^2 (\gamma F^2 k_y^2 \alpha_1 \\ & + S(1 + \alpha_2 + \alpha_3 - (1 + \alpha_2) \beta) + S^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3 - (1 + \alpha_2) \beta) \gamma) + \\ & k_x^3 (S(\alpha_2 + \alpha_3) \beta + F^2 k_y^2 \alpha_1 (2 - F^2 \alpha_1) \gamma \\ & + S^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3 + (\alpha_2 + \alpha_3) \beta) \gamma) + ik_x^2 k_y^2 (-S(2 + \alpha_2) \gamma \\ & + F^2 \alpha_1 (1 + S(2 + \alpha_2 + \alpha_3) \gamma + (-1 + \alpha_3) \beta (1 + S \gamma))) + \\ & ik_x^4 (-S \gamma + F^2 \alpha_1 (2S \gamma + (\alpha_2 + \alpha_3) (\beta + S(1 + \beta) \gamma))) / \\ & ((-iF^2 k_x^3 \alpha_1 (-1 + F^2 \alpha_1) + k_y^2 S(1 + \alpha_2) + ik_x (F^2 k_y^2 \alpha_1 \\ & + S^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)) - k_x^2 S(-1 + F^2 \alpha_1 (2 + \alpha_2 + \alpha_3))) (1 + S \gamma)), \quad (3.13) \end{aligned}$$

où l'on a défini

$$\beta = \frac{\theta_0 \phi'(\theta_0)}{\phi(\theta_0)}. \quad (3.14)$$

Ce coefficient peut parfaitement être utilisé avec une loi d'érosion à seuil, tant que le nombre de Shields de l'état de base,  $\theta_0$ , demeure plus élevé que la valeur seuil. D'une certaine façon,  $\beta$  représente la non-linéarité de la loi d'érosion. En effet, si ce coefficient vaut 1, la loi est linéaire. D'autre part, pour une loi à seuil, et lorsque  $\theta_0$  s'approche de la valeur seuil,  $\phi'$  demeure finie, tandis que  $\phi$  tend vers 0, causant la divergence de  $\beta$ . C'est sur cette propriété que se fonde l'article de Hall (2006), qui s'attache à décrire l'évolution fortement non-linéaire des bancs alternés au voisinage du seuil d'érosion. Enfin, si la loi d'érosion est une loi de puissance,  $\beta$  donne la valeur de cette puissance.

### 3.1.1.3 Parité de la relation de dispersion

L'état de base, les équations de Saint-Venant et les équations de transport de sédiments sont invariantes par symétrie selon l'axe des  $x$ . Cette propriété se traduit par la parité en  $y$  de la relation de dispersion (3.13) :

$$\omega(k_x, -k_y) = \omega(k_x, k_y). \quad (3.15)$$

De même, la transformation ( $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, \omega \rightarrow -\omega$ ) correspond simplement à un déphasage de  $\pi$  de l'onde considérée. Les propriétés physiques de l'onde que sont sa célérité et son taux de croissance doivent donc être conservées par cette transformation. Cette propriété est vérifiée par l'équation de dispersion, qui satisfait

$$\omega(-k_x, -k_y) = \bar{\omega}(k_x, k_y), \quad (3.16)$$

où  $\bar{\omega}$  désigne le conjugué de  $\omega$ .



### 3.1.2 Stabilité temporelle absolue

#### 3.1.2.1 Écoulement laminaire sur un plan incliné infini

**3.1.2.1.1 Définition de l'instabilité de bancs** Dans le cas d'un écoulement laminaire, les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , et  $\alpha_3$  valent respectivement  $6/5$ ,  $0$ , et  $2$ . Si la loi d'érosion  $\phi$  est une loi de puissance (voir § 1.2.2),  $\beta$  est constant. Nous utiliserons la valeur  $\beta = 3.75$  pour les applications numériques. Pour des valeurs standard des paramètres restant ( $F = 1$  et  $\gamma = 1$ ), nous pouvons exprimer le taux de croissance  $\sigma$  en fonction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  (figure 3.1). Il existe dans ce cas un domaine de vecteurs d'onde instables, qui n'est pas traversé par l'axe des  $k_x$ . La perturbation la plus instable de ce système correspond au vecteur d'onde  $\mathbf{k}_m$  pour lequel le taux de croissance atteint sa valeur maximale  $\sigma_m$ . Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_m$  forme un angle non nul avec l'axe des  $k_x$ ; l'instabilité de bancs ne peut donc se développer que dans un espace à deux dimensions horizontales. À notre connaissance, aucun auteur n'a considéré l'instabilité de bancs sous la forme d'une simple onde plane progressive avant Hall (2007), car l'influence des berges sur cette instabilité conduit à la formation de bancs alternés, qui sont la somme de deux ondes planes (voir le § 3.2.1.1).

**3.1.2.1.2 Nombre de Froude nul** Dans le cas où le nombre de Froude de l'écoulement tend vers zéro, les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.35) deviennent négligeables. Ainsi, l'écoulement considéré ici est parfaitement visqueux. L'existence de modes instables sous ces conditions (voir figure 3.2) démontre que ni l'inertie de l'écoulement, ni l'existence de courants secondaires, ne sont indispensables au développement de l'instabilité de banc.

#### 3.1.2.2 Détermination analytique du mode le plus instable à faible pente et nombre de Froude nul

Pour un écoulement à nombre de Froude nul, la relation de dispersion (3.13) s'écrit

$$\omega(k, \psi) = \frac{\left( k^2 \left( (\alpha_2 + \alpha_3)\beta + S(1 + \alpha_2 + \alpha_3 + (\alpha_2 + \alpha_3)\beta)\gamma \right) \cos^3 \psi - ik\gamma \cos^4 \psi + (1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta - \alpha_2\beta)(1 + S\gamma) \cos \psi \sin^2 \psi - ik(2 + \alpha_2)\gamma \cos^2 \psi \sin^2 \psi - ik(1 + \alpha_2)\gamma \sin^4 \psi \right)}{(1 + S\gamma)} \left( iS(1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cos \psi + k \cos^2 \psi + k(1 + \alpha_2) \sin^2 \psi \right), \quad (3.17)$$

où  $k$  est la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , et  $\psi$  l'angle formé par ce même vecteur d'onde avec l'axe des abscisses. Déterminer le vecteur d'onde le plus instable  $(k_m, \psi_m)$  consiste à rechercher le maximum du taux de croissance  $\sigma(k, \phi)$ . Afin de trouver une valeur non triviale de  $k$  qui annule  $\partial\sigma/\partial k$ , il est nécessaire de développer cette

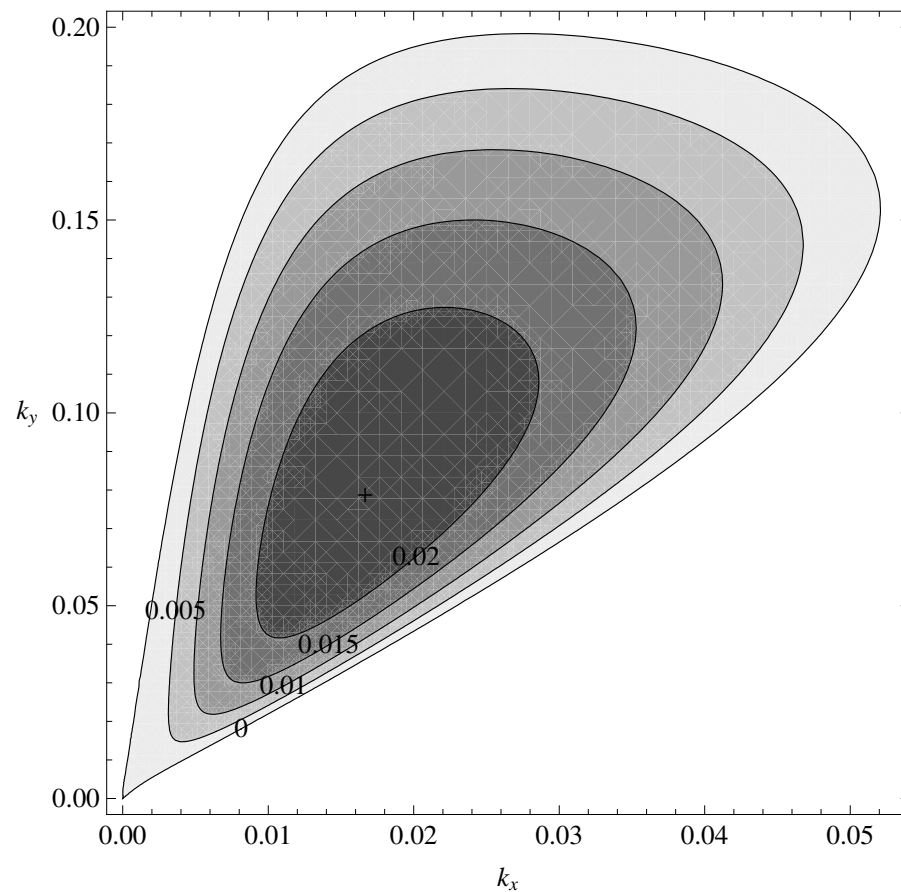


FIG. 3.1 – Taux de croissance de l'instabilité de bancs, dans le cas d'un écoulement de base laminaire. Hall (2007) a récemment présenté des résultats similaires, pour un écoulement turbulent. L'introduction de berges rigides a pour effet d'imposer des valeurs discrètes au nombre d'onde transverse (voir le § 3.2.1.1) : les relations de dispersion représentées sur la figure 3.7 sont des sections du présent graphique à  $k_y$  fixé.  $F = 1$ ,  $S = 0.0875$ ,  $\gamma = 1$  et  $\beta = 5$ .

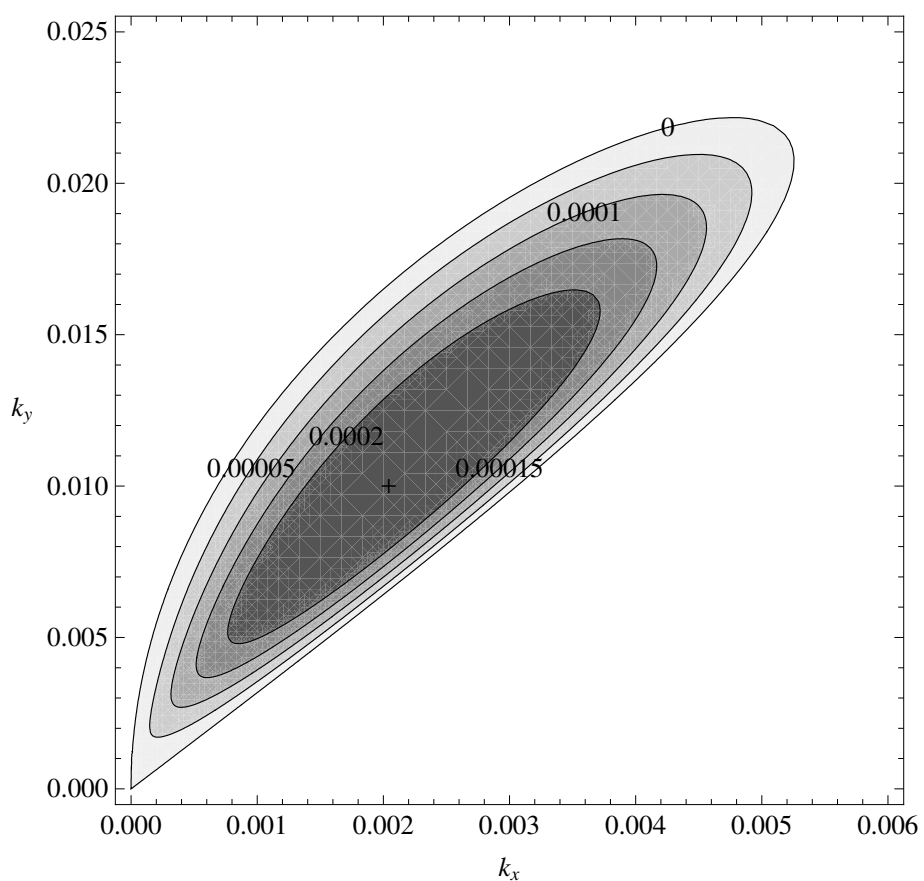


FIG. 3.2 – Taux de croissance de l'instabilité de bancs en fonction du vecteur d'onde, dans le cas d'un écoulement de base laminaire et d'un nombre de Froude nul ( $F = 0$ ). Ici, l'écoulement est parfaitement visqueux : l'inertie du fluide est entièrement négligée. Sous ces conditions, la position et la valeur du taux de croissance maximal peuvent être approchées analytiquement (voir le § 3.1.2.2).  $S = 0.0875$ ,  $\gamma = 1$  et  $\beta = 5$ .

dérivée jusqu'au troisième ordre en  $S$  (pour  $S$  suffisamment petit) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial k} \sim & -2(k\gamma) + 2k\gamma^2 S - 2(k\gamma^3) S^2 + \\ & (4(2k^4\gamma^4 \cos^4 \psi (2 + \alpha_2 - \alpha_2 \cos(2\psi))^2 + 2k^4(1 + \alpha_2)^2 \\ & \gamma^4(2 + \alpha_2 - \alpha_2 \cos(2\psi))^2 \sin^4 \psi - \cos^2 \psi ((1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 (1 \\ & + \alpha_2 + \alpha_3 + (-1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3)\beta) - 2k^4(1 + \alpha_2)(2 + \alpha_2)^2 \gamma^4 + \\ & (1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 ((1 + \alpha_3)(-1 + \beta) + \alpha_2(-1 + 2\beta)) \cos(4\psi) - 4k^4\alpha_2^2 \\ & (1 + \alpha_2)\gamma^4 \cos(2\psi)^2 \sin^2 \psi + 2 \cos(2\psi) (2(\alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 \beta + \\ & k^4(1 + \alpha_2)(2 + \alpha_2)^2 \gamma^4 + 4k^4\alpha_2(1 + \alpha_2)(2 + \alpha_2)\gamma^4 \sin^2 \psi)) \\ & S^3) / (k^3(2 + \alpha_2 - \alpha_2 \cos(2\psi))^4) + \mathcal{O}(S^4). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Au premier ordre en  $S$ , la valeur réelle positive de  $k$  annulant  $\partial\sigma/\partial k$  s'écrit

$$\begin{aligned} k_*(\psi) \sim & 2^{3/4} \left( -((1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 \cos^4 \psi (1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta + \alpha_3\beta + \right. \\ & \left. ((1 + \alpha_3)(-1 + \beta) + \alpha_2(-1 + 2\beta)) \cos(2\psi))) / \right. \\ & \left. (\gamma(2 + \alpha_2 - \alpha_2 \cos(2\psi))^4) \right)^{1/4} S^{3/4} + \mathcal{O}(S^{7/4}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Toujours au premier ordre en  $S$ , le taux de croissance maximum pour un angle  $\psi$  donné est approché par

$$\begin{aligned} \sigma(k_*(\psi), \psi) \sim & S \cos^2 \psi (1 + \alpha_2 + \alpha_3) ((-1 + \cos^2 \psi)(1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\ & (-1 - \alpha_2 + \cos^2 \psi (1 + 2\alpha_2 + \alpha_3))\beta) / \\ & (-1 + (-1 + \cos^2 \psi)\alpha_2)^2 + \mathcal{O}(S^{3/2}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'expression ci-dessus atteint sa valeur maximale pour un angle  $\psi_m$  défini par

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi_m = & (1 + \alpha_2)(-1 - \alpha_3 + \alpha_2(-1 + \beta) + \beta) / (2(1 + \alpha_3)(-1 + \beta) \\ & + \alpha_2^2(-1 + 3\beta) + \alpha_2(-3 + 5\beta + \alpha_3(-1 + 2\beta))). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ainsi, pour une pente et un nombre de Froude suffisamment petits, l'angle formé par l'onde d'érosion la plus instable avec la direction de l'écoulement ne dépend que du type de ce dernier (laminaire ou turbulent), et de la valeur du coefficient  $\beta$  de la loi d'érosion. Le nombre d'onde  $k_m$ , le taux de croissance  $\sigma_m$  et la partie réelle de la pulsation  $\omega_{r,m}$ , associés à cette instabilité peuvent être approchés par

$$\begin{aligned} k_m = k_*(\psi_m) = & \frac{1}{2} S^{3/4} \left( ((-1 - \alpha_3 + \alpha_2(-1 + \beta) + \beta)^3 \right. \\ & \left. (2(1 + \alpha_3)(-1 + \beta) + \alpha_2^2(-1 + 3\beta) + \right. \\ & \left. \alpha_2(-3 + 5\beta + \alpha_3(-1 + 2\beta)))) / \right. \\ & \left. ((1 + \alpha_2)^2(-1 + \beta + \alpha_2\beta)^3 \gamma) \right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\sigma_m = \frac{S(1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta - \alpha_2\beta)^2}{4(1 + \alpha_2)(-1 + \beta + \alpha_2\beta)}, \quad (3.23)$$

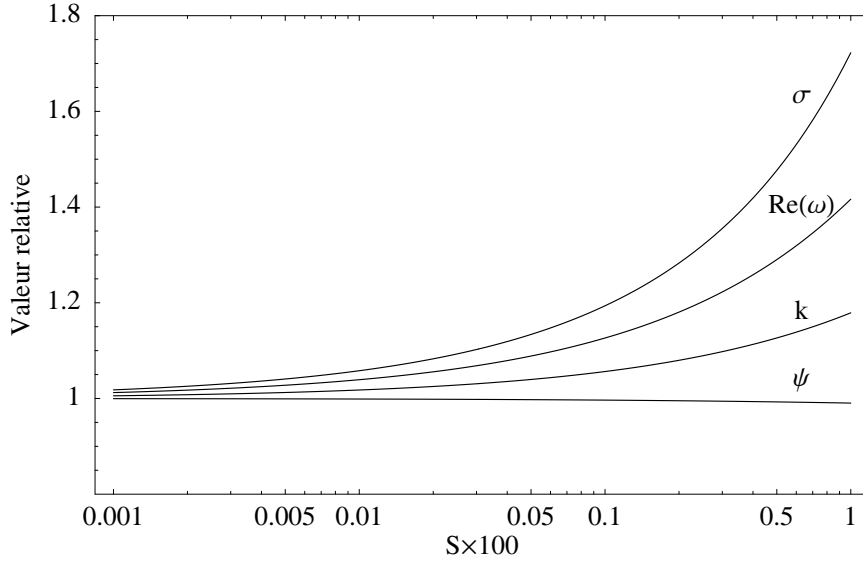


FIG. 3.3 – Valeur relative approchée des caractéristiques de l'instabilité de bancs, pour le mode le plus instable. L'écoulement est laminaire, et le nombre de Froude nul.  $\beta$  et  $\gamma$  valent respectivement 3.75 et 1. Pour différentes valeurs de la pente  $S$ , les valeurs issues des expressions approchées (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24) sont divisées par les valeurs correspondantes obtenues par minimisation numérique de l'expression exacte du taux de croissance (3.13).

$$\omega_{r,m} = \Re(\omega(k_m, \psi_m)) = \frac{1}{4(1 + \alpha_2)} \left( S^{3/4} (1 + \alpha_2 + \alpha_3 - (1 + \alpha_2)\beta) \right. \\ \left. \sqrt{ \left( (-1 - \alpha_2)(1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (1 + \alpha_2)^2 \beta \right) / \right. \\ \left. \left( (-2 - \alpha_2)(1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (1 + \alpha_2)(2 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3)\beta \right) \right. \\ \left. \left( \left( (-1 - \alpha_3 + \alpha_2(-1 + \beta) + \beta)^3 (-2 - \alpha_2)(1 + \alpha_2 + \alpha_3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (1 + \alpha_2)(2 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3)\beta \right) / \left( (1 + \alpha_2)^2 (-1 + \beta + \alpha_2\beta)^3 \gamma \right) \right)^{1/4} \right). \quad (3.24)$$

Un grand nombre de rivières, parmi celles qui forment des méandres, sont parcourues par un écoulement dont le nombre de Froude est peu élevé. L'hypothèse de petite pente est plus répandue encore, le champ de validité des résultats approchés ci-dessus est donc probablement assez vaste.

Les modes de l'instabilité de banc, étudiés ici sous la forme simple d'une onde propagative infinie, subissent l'influence des conditions aux berges : c'est l'objet du chapitre suivant. Nous reviendrons ultérieurement à la configuration infinie, pour simplifier l'étude de l'évolution non-linéaire de l'instabilité de bancs (§ 3.3.2.2).

## 3.2 Morphogénèse des micro-rivières

### 3.2.1 Berges rigides et rectilignes

Le présent chapitre se donne pour objectif d'introduire l'effet de diverses conditions aux berges sur l'instabilité de banc. Comme nous le verrons, les principaux types d'instabilité signalés dans les rivières naturelles existent également dans les micro-rivières. L'influence considérable des conditions aux berges sur les modes linéaires d'érosion démontre l'importance du modèle d'évolution de berge que l'on se donne.

#### 3.2.1.1 Bacs alternés et autres modes instables

Considérons un canal constitué de deux berges verticales rigides et imperméables, situées en  $y = \pm R/2$ , et d'un fond érodable (voir la figure 3.4). La position des berges est donnée ici dans une unité de longueur dimensionnée par la hauteur d'eau s'écoulant dans le canal,  $R$  est par conséquent le rapport d'aspect de la rivière. L'imperméabilité des berges impose  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la berge. De même, leur rigidité annule le flux normal de sédiments au bord :  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Les solutions de l'analyse de stabilité linéaire du § 3.1.1 doivent donc vérifier :

$$v\left(x, \pm \frac{R}{2}, t\right) = \frac{\partial h}{\partial y}\left(x, \pm \frac{R}{2}, t\right) = 0. \quad (3.25)$$

Les symétries de l'équation de dispersion (voir § 3.1.1.3) permettent de simplifier l'intégrale de Fourier de la vitesse transverse :

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \int_{k_x=0}^{\infty} \int_{k_y=-\infty}^{\infty} v_*(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y - \omega(k_x, k_y)t)} dk_x dk_y \\ &= \int_{k_x=0}^{\infty} \int_{k_y=0}^{\infty} \left( v_*(k_x, k_y) e^{ik_y y} + \right. \\ &\quad \left. v_*(k_x, -k_y) e^{-ik_y y} \right) e^{i(k_x x - \omega(k_x, k_y)t)} dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La condition aux bords de vitesse nulle étant valable pour tout  $x$  et pour tout  $t$ , elle impose :

$$\begin{aligned} v_*(k_x, k_y) e^{ik_y R/2} + v_*(k_x, -k_y) e^{-ik_y R/2} &= 0, \\ v_*(k_x, k_y) e^{-ik_y R/2} + v_*(k_x, -k_y) e^{ik_y R/2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ce système n'admet de solution non triviale  $(v_*(k_x, k_y), v_*(k_x, -k_y))$  que si son déterminant est nul, c'est-à-dire si

$$e^{2ik_y R} = 1, \quad (3.28)$$

ce qui conduit à  $k_y = p\pi/R$ , où  $p$  désigne un entier quelconque. La présence de berges rigides a ainsi pour effet d'imposer une valeur discrète à la longueur d'onde

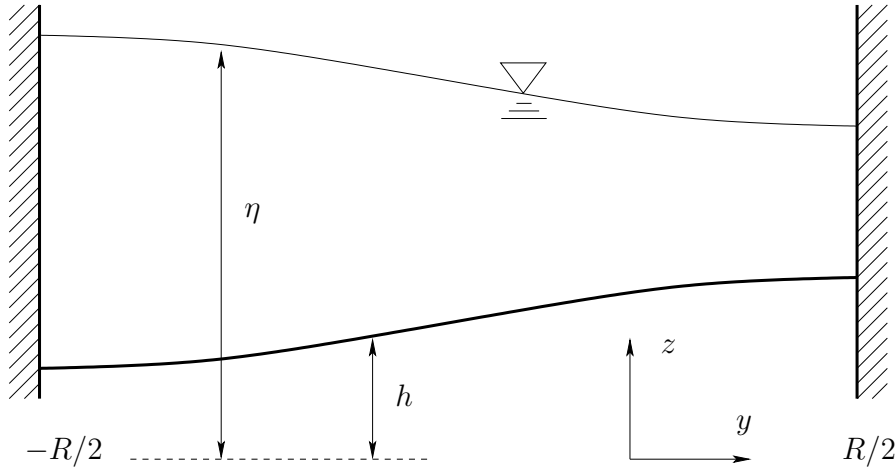


FIG. 3.4 – Schéma d'un canal à fond érodable et berges rigides, dont le § 3.2.1 présente l'analyse de stabilité.

transverse des perturbations. Si  $p$  est impair ( $p = 2p_* + 1$ ),  $v_*(k_x, p) = v_*(k_x, -p)$  et la perturbation de vitesse est symétrique par rapport à l'axe des  $x$  ; au contraire, si  $p$  est pair ( $p = 2p_*$ ),  $v_*(k_x, p) = -v_*(k_x, -p)$  et la perturbation de vitesse est antisymétrique. La perturbation de vitesse transverse peut donc être décomposée en une somme discrète de modes alternativement pairs et impairs :

$$\begin{aligned}
 v(x, y, t) = & \sum_{p_*=0}^{\infty} \int_{k_x=0}^{\infty} v_*(k_x, 2p_* + 1) \cosh(ip_*\pi y/R) e^{i(k_x x - \omega(k_x, 2p_* + 1)t)} dk_x \\
 & + \sum_{p_*=0}^{\infty} \int_{k_x=0}^{\infty} v_*(k_x, 2p_*) \sinh(ip_*\pi y/R) e^{i(k_x x - \omega(k_x, 2p_*)t)} dk_x .
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Le même raisonnement appliqué à la perturbation de hauteur du fond  $h$  conduit également à des nombres d'onde transverses discrets. En revanche, la perturbation de hauteur du fond est antisymétrique lorsque  $p$  est impair, et *vice versa*. Deux exemples de ces modes sont représentés sur la figure 3.5.

### 3.2.1.2 Domaines de stabilité à pente constante : une interprétation du vieillissement

À chacun des modes discrets introduits au § 3.2.1.1, correspond une relation de dispersion  $\omega(k_x, p) \equiv \omega(k_x, p\pi/R)$ . Le taux de croissance associé  $\sigma(k_x, p)$  vérifie

$$\sigma(k_x, p) \underset{k_x \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\gamma k_x^2}{1 + S\gamma}. \tag{3.30}$$

Le taux de croissance de chaque mode admet donc un maximum global, noté  $\sigma_m(p)$ . Le mode le plus instable  $p_m$  est tel que

$$\sigma_m(p_m) = \max_{p \in \mathbb{N}} (\sigma_m(p)). \tag{3.31}$$

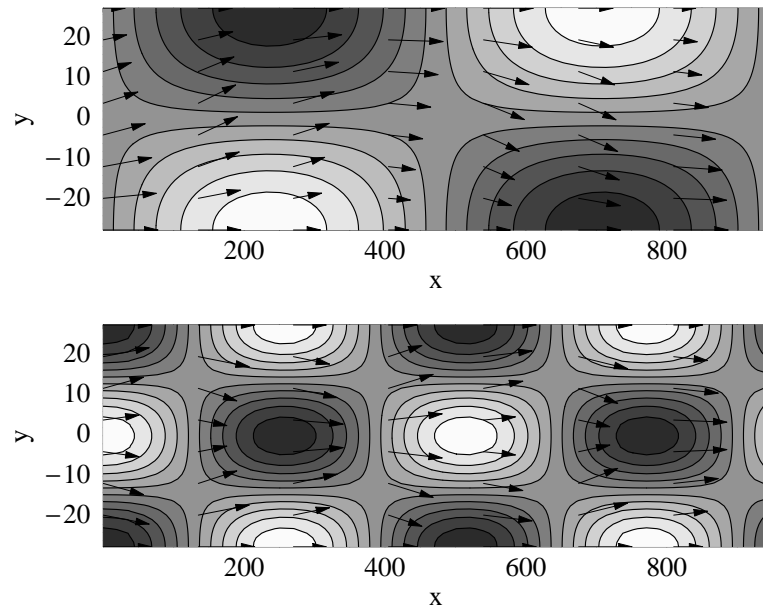


FIG. 3.5 – Exemples de modes de l’instabilité de bancs, pour  $p = 1$  (au-dessus) et  $p = 2$  (au-dessous), dans le cas d’un écoulement laminaire. Les valeurs des paramètres sont  $R = 55.0$ ,  $F = 2.71$ ,  $S = 0.0875$ ,  $\gamma = 1$  et  $\beta = 3.75$ . Les flèches représentent le champ de vitesse pour une perturbation d’amplitude  $\epsilon = 0.3$  et les niveaux de gris la topographie du fond  $h$ . Les échelles sont arbitraires. Les modes représentés sont les deux plus instables pour le jeu de paramètres ci-dessus. Leurs nombres d’onde longitudinaux et pulsations sont  $k_x = 0.00665$ ,  $\omega = 0.0133 + 0.00846i$  pour  $p = 1$  et  $k_x = 0.0122$ ,  $\omega = 0.0406 + 0.0141i$  pour  $p = 2$ .





FIG. 3.6 – Bancs alternés dans l'Orne, à Bar-le-Duc, France. Le lit est composé de gravier grossier, et les berges ne sont pas érodables. La largeur totale de la rivière est d'environ 30 m. (Photographie : S. Jozan.)

L'existence de  $p_m$  est garantie par le terme de diffusion de l'équation de transport de sédiments (1.29), proportionnel à  $\gamma$  :

$$\sigma(k, \psi) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\gamma k^2}{1 + S\gamma}, \quad (3.32)$$

où  $\psi$  désigne l'angle que forme le vecteur d'onde avec la direction  $x$ , et  $k$  est la norme du même vecteur d'onde. Si les hypothèses de linéarité demeurent valides suffisamment longtemps au cours du développement d'une instabilité, le mode  $p_m$  finira par dominer tous les autres. Déterminer  $p_m$  donne donc une indication sur la forme de la première instabilité susceptible d'être observée au cours d'une expérience. Si l'on considère un écoulement à pente fixée, la valeur de  $p_m$  dépend du nombre de Froude et du rapport d'aspect de l'expérience (voir figure 3.7). À titre illustratif, considérons uniquement les modes  $p = 1$  et  $p = 2$ . En déterminant numériquement la valeur des maxima  $\sigma_m(1)$  et  $\sigma_m(2)$ , il est possible de tracer le diagramme de stabilité de la figure 3.8, où sont représentés les domaines de prédominance de ces deux modes.

Le diagramme de la figure 3.8 permet de proposer une explication qualitative du vieillissement des micro-rivières. Comme nous l'avons vu dans le § 2.2, une micro-rivière parcourue par un écoulement capable d'éroder ses berges s'élargit au cours du temps, jusqu'à atteindre sa largeur d'équilibre éventuelle, ou jusqu'à déborder. Dans le cas d'un écoulement laminaire, la conservation du débit d'eau  $Q_w$  impose, en ordre de grandeur :

$$Q_w \approx \mathcal{U}HW. \quad (3.33)$$

Associée à la définition du nombre de Froude (voir le § 2.1.3.1), l'équation ci-dessus

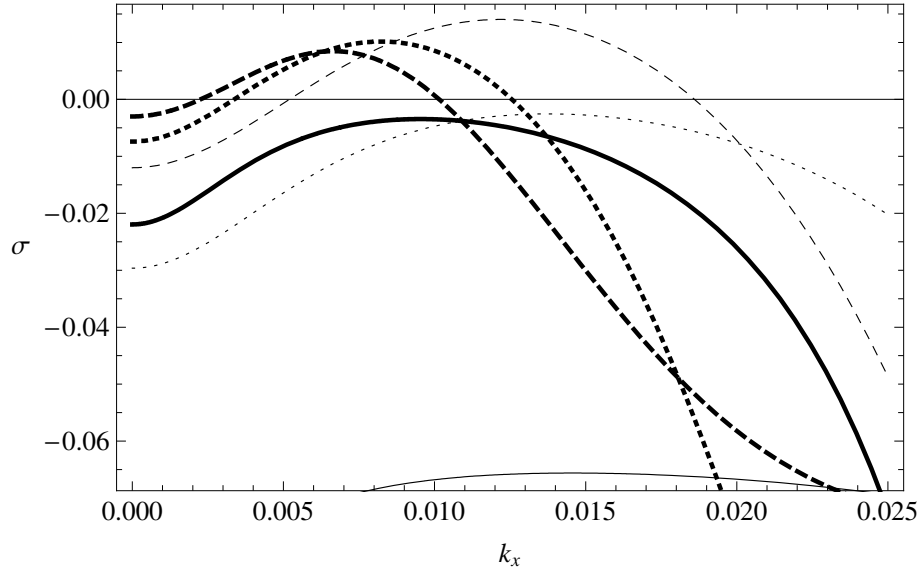


FIG. 3.7 – Taux de croissance  $\sigma$  de divers modes de l’instabilité de banc, en fonction du nombre d’onde  $k_x$ . Les valeurs des paramètres fixes sont  $\beta = 3.75$ ,  $\gamma = 1$ ,  $S = 0.0875$ . Courbe en trait plein :  $R = 20.3$  et  $F = 3.94$ . Pointillés courts :  $R = 35.0$  et  $F = 3.21$ . Pointillés longs :  $R = 55.0$  et  $F = 2.71$ . Ces trois couples de valeurs pour  $(F, R)$  appartiennent à la courbe représentant l’élargissement d’une rivière dans le diagramme de la figure 3.8. Pour chaque couple  $(R, F)$ , la courbe en trait gras correspond au mode  $p = 1$ , tandis que la courbe en trait fin correspond au mode  $p = 2$ . Dans le premier cas, aucun des deux premiers modes n’est instable. Dans le second cas, seul le premier mode est instable. Enfin, dans le dernier cas, les deux modes sont instables, mais le mode  $p = 2$ , dont le taux de croissance est supérieur, correspond à l’instabilité dominante.

conduit à la relation suivante :

$$F = F_0(R/R_0)^{-3/8}. \quad (3.34)$$

La courbe correspondante, tracée dans le diagramme de stabilité pour des valeurs typiques issues des expériences de Métivier et Meunier (2003), traverse successivement les trois domaines : stable,  $p = 1$  et  $p = 2$ . Ceci correspond qualitativement aux étapes successives du vieillissement d’une micro-rivière, qui voit dans un premier temps son lit s’élargir sans briser l’invariance en  $x$ , puis le développement d’une instabilité sinueuse de type méandre, lui-même suivi par l’émergence de motifs en tresses.

### 3.2.1.3 Domaines de stabilité à largeur de canal constante

Considérons le cas d’un canal de largeur  $\mathcal{W}$  dont les berges sont rigides et imperméables, mais dont le fond est érodable. Deux paramètres sont aisément modifiés

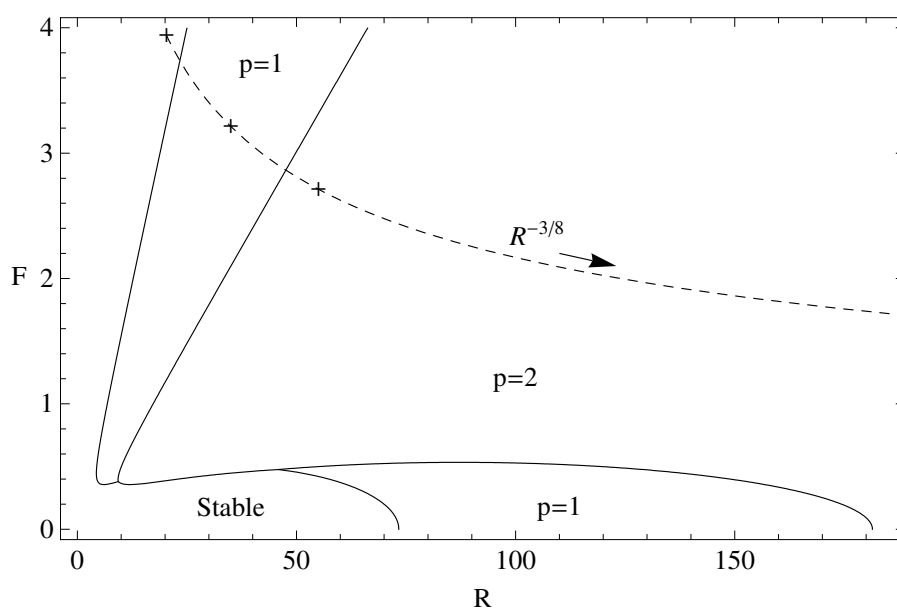


FIG. 3.8 – Diagramme de stabilité linéaire pour un canal parcouru par un écoulement laminaire. Les différents domaines, séparés par des lignes continues, sont nommés d'après le mode le plus instable (seuls les modes  $p = 1$  et  $p = 2$  sont considérés ici). Les valeurs des paramètres fixes sont  $\beta = 3.75$ ,  $\gamma = 1$  et  $S = 0.0875$ . La courbe en trait pointillé représente l'élargissement d'une rivière droite parcourue par un écoulement laminaire, et dont les berges sont érodables ( $F = F_0(R/R_0)^{-3/8}$ ). Les trois croix correspondent aux cas de la figure 3.7.

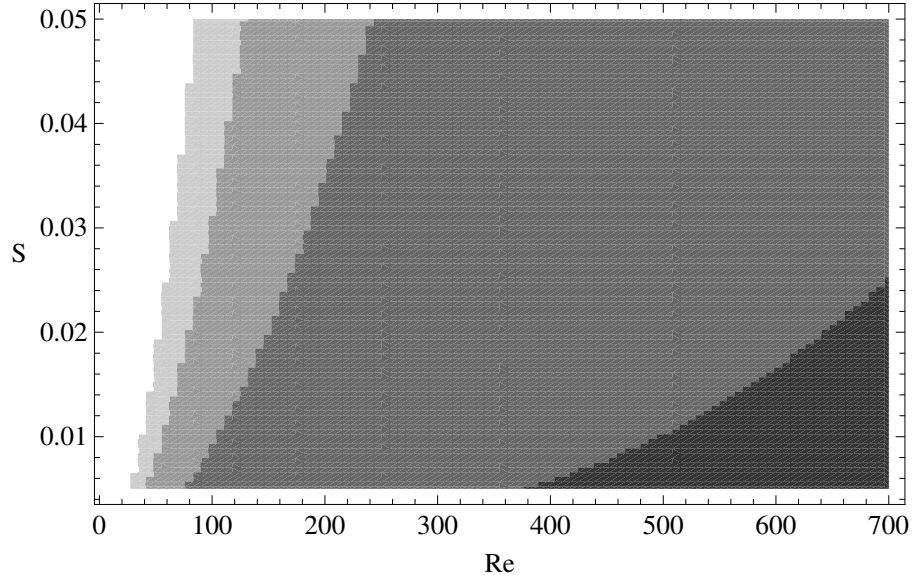


FIG. 3.9 – Diagramme de stabilité linéaire pour un canal de largeur fixe parcouru par un écoulement laminaire. Les cinq niveaux de gris représentent les domaines où dominent les quatre premiers modes. Depuis le plus foncé jusqu’au blanc : il n’existe pas de mode instable, le mode instable dominant est  $p = 1$ , puis 2, 3 et 4. Nous n’avons pas tenu compte des modes d’ordre supérieur à 4. Les valeurs des paramètres fixes sont  $\beta = 3.75$ ,  $\gamma = 1$  et  $W = 742$ .

expérimentalement : la pente  $S$  du canal, et le débit d’eau  $Q_w$ . Dans ce cas, les nombres sans dimension  $F$  et  $R$  ne peuvent pas être modifiés indépendamment au cours de l’expérience. Le nombre de Reynolds  $Re$  et la largeur sans dimension du canal  $W$  remplacent alors avantageusement  $F$  et  $R$  dans l’analyse. En effet, le nombre de Reynolds est directement proportionnel au débit d’eau :

$$Re = \frac{Q_w}{\nu W}, \quad (3.35)$$

tandis que  $W$  est une constante de l’installation :

$$W = \mathcal{W} \frac{g}{3\nu^2}. \quad (3.36)$$

Ainsi, l’analyse de stabilité linéaire peut être menée dans le plan  $(Re, S)$  selon le même principe qu’au § 3.2.1.2, en utilisant (3.5) et

$$R = W \left( \frac{S}{Re} \right)^{1/3}. \quad (3.37)$$

La figure 3.9 représente le diagramme de stabilité d’un écoulement laminaire dans un canal à berge rigide, dans le plan  $(Re, S)$ . Le domaine d’existence de l’instabilité de banc est comparé à des résultats expérimentaux sur la figure 4.3.

## 3.2.2 Berges courbes ou érodables

### 3.2.2.1 L'instabilité de courbure

**3.2.2.1.1 Un banc de méandre sans recirculation** Si l'on remplace les berges rectilignes du § 3.2.1 par des berges sinueuses, mais toujours rigides, l'état de base classique (fond plat, surface plate) n'est plus une solution des équations de Saint-Venant stationnaires. Cette remarque nous permet de proposer une définition mathématique du *banc de méandre*<sup>1</sup>, valable dans le cadre de notre étude, et qui nous semble en accord avec Blondeaux et Seminara (1985) : ce terme désigne la déformation du fond induite par la sinuosité des berges, par l'intermédiaire de l'écoulement. Cette définition ne fait pas intervenir la notion de recirculation, qui peut être, ou non, à l'origine du banc de méandre. Le strict modèle de Saint-Venant qui nous occupe prédit la formation d'un banc de méandre sans faire intervenir les courants secondaires (voir figure 3.11).

Soient des berges rigides et imperméables de sinuosité faible, dont la position est définie par les relations

$$a_+(x, t) = \frac{R}{2} + \epsilon a_* e^{ik_x x}, \quad a_-(x, t) = -\frac{R}{2} + \epsilon a_* e^{ik_x x}. \quad (3.38)$$

Comme à l'accoutumée, le paramètre  $\epsilon$  souligne la faible amplitude de la perturbation de position des berges. Nous supposons que les diverses grandeurs du système peuvent être décomposées en séries au voisinage de l'état de base rectiligne, défini par  $\epsilon = 0$ . Dans ce cas, et au premier ordre, nous pouvons rechercher une perturbation du fond de la rivière de nombre d'onde longitudinal  $k_x$ . Nous ferons de plus l'hypothèse qu'une telle solution existe en régime stationnaire. L'imperméabilité et la rigidité de la berge imposent, au premier ordre en  $\epsilon$ , les conditions au bord suivantes :

$$ik_x a_* e^{ik_y R/2} - (1 + e^{ik_y R}) v_* = 0, \quad ik_x a_* e^{ik_y R/2} - (1 + e^{ik_y R}) q_{y,*} = 0. \quad (3.39)$$

À l'exception des cas où  $k_y = p\pi/R$  ( $p$  est un nombre entier), qui nous ramène aux bancs alternés entre deux berges rectilignes, nous pouvons exprimer l'amplitude de la perturbation de vitesse transverse  $v_*$  et de flux transverse de sédiments  $q_{y,*}$  en fonction de l'amplitude de la déformation des berges. En régime stationnaire, et pour un écoulement laminaire<sup>2</sup> le système d'équations (3.7) à (3.12) s'écrit donc, en fonction de  $a_*$ ,

$$k_x \left( d_* + \frac{ia_* e^{ik_y R/2} k_y}{1 + e^{ik_y R}} + u_* \right) = 0, \quad (3.40)$$

$$id_* k_x + ih_* k_x + \left( \frac{6}{5} iF^2 k_x + S \right) u_* = 2d_* S, \quad (3.41)$$

$$5(1 + e^{ik_y R}) (d_* + h_*) k_y + a_* e^{ik_y R/2} k_x (6iF^2 k_x + 5S) = 0, \quad (3.42)$$

<sup>1</sup>Cette définition a été introduite au § 1.1.2.1.4.

<sup>2</sup>Avec  $\alpha_1 = 6/5$ ,  $\alpha_2 = 0$  et  $\alpha_3 = 2$ .

$$ik_x q_{x,*} = \frac{a_* e^{ik_y R/2} k_x k_y}{1 + e^{ik_y R}}, \quad q_{x,*} + d_* \beta = u \beta, \quad (3.43)$$

où nous avons négligé la diffusion des sédiments sous l'effet de la pente du fond ( $\gamma = 0$ ). L'équation (3.11), qui définit le flux transverse de sédiments, est systématiquement vérifiée si l'on impose les conditions au bord (3.38). Remarquons que ceci n'est vrai que parce que l'on néglige cette diffusion, en imposant  $\gamma = 0$ . Dans le cas contraire, cette équation supplémentaire impose elle aussi une condition liant  $k_x$  et  $k_y$  (voir § 3.2.2.1.5). Le système *inhomogène*<sup>3</sup> obtenu, à cinq équations pour les quatre inconnues  $u_*$ ,  $d_*$ ,  $h_*$  et  $q_{x,*}$ , peut être résolu à l'aide des quatre premières équations. La dernière équation, dans laquelle on remplace  $u_*$ ,  $d_*$ ,  $h_*$  et  $q_{x,*}$  par leurs expressions respectives en fonction de  $a_*$ , impose :

$$k_y = \pm \frac{\sqrt{2k_x} \sqrt{-6F^2 k_x \beta + 5iS\beta}}{\sqrt{5iS(-3 + \beta) + 6F^2 k_x(1 + \beta)}}. \quad (3.44)$$

Notons que cette relation est identique à l'équation de dispersion générale (3.13) établie au § 3.1.1, pour  $\gamma = 0$  et  $\omega = 0$ . Finalement, l'expression de l'amplitude de la perturbation du fond est :

$$h_* = - \frac{ia_* (6F^2 k_x - 5iS) (5iS(-3 + \beta) + k_x (5(-1 + \beta) + 6F^2(1 + \beta)))}{10\sqrt{2} \sqrt{-6F^2 k_x \beta + 5iS\beta} \sqrt{5iS(-3 + \beta) + 6F^2 k_x(1 + \beta)}} \left( \cos \left( \frac{k_x R \sqrt{-3F^2 k_x \beta + 5iS\beta/2}}{\sqrt{5iS(-3 + \beta) + 6F^2 k_x(1 + \beta)}} \right) \right)^{-1}. \quad (3.45)$$

La figure 3.10 représente la variation de l'amplitude de la perturbation de topographie  $h_*$  en fonction du nombre d'onde longitudinal. Pour toute longueur d'onde, la perturbation de l'écoulement imposée par la sinuosité des berges entraîne la formation d'un banc de méandre. L'existence d'une longueur d'onde pour laquelle l'amplitude est maximale présage de la résonance observée lorsque les berges sont mobiles (voir § 3.2.2.1.4). L'amplitude non nulle de la perturbation de topographie pour une longueur d'onde infinie,

$$h_*|_{k_x=0} = - \frac{aS}{2} \sqrt{\frac{(-3 + \beta)}{2\beta}}, \quad (3.46)$$

peut sembler surprenante. En réalité, ce comportement reflète l'insensibilité du système étudié face à une variation uniforme du niveau de sédiments; en effet, si le nombre d'onde longitudinal  $k_x$  est nul, le nombre d'onde transverse  $k_y$  s'annule également. La perturbation est alors uniforme.

L'allure d'un banc de méandre est représentée, dans un cas particulier, sur la figure 3.11. La forme courbée des lignes de hauteur nulle de la topographie, à comparer avec les bancs alternés de la figure 3.5, résulte de la partie imaginaire non nulle

<sup>3</sup>Puisque  $a_*$  est une donnée du problème.

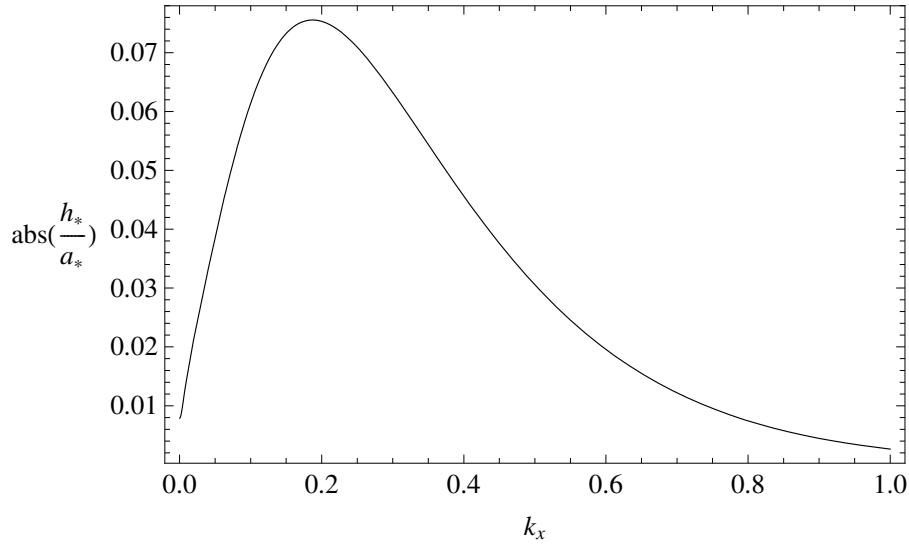


FIG. 3.10 – Valeur absolue de l'amplitude  $h^*$  d'un banc de méandre, calculée pour une faible courbure des berges. Les équations de Saint-Venant sont capables de conduire à la formation de telles structures sans intervention des courants de recirculation. Les valeurs des paramètres sont :  $F = 1$ ,  $S = 0.05$ ,  $\beta = 3.75$  et  $R = 10$ .

de  $k_y$ , qui induit une composante non périodique de la perturbation dans la direction transverse. Autrement dit, la perturbation ne se résume pas ici à un produit de fonctions sinusoidales selon les directions  $x$  et  $y$ . Ce cas extrêmement simplifié démontre que l'interaction entre la courbure des berges et la déformation du fond par l'intermédiaire de l'écoulement existe indépendamment des courants de recirculation.

**3.2.2.1.2 Une loi empirique pour décrire l'érosion des berges** La notion d'instabilité de courbure, introduite par Blondeaux et Seminara (1985) pour décrire la formation des méandres, lie indissociablement l'écoulement de l'eau à l'érosion de la berge. Comme nous le verrons au § 3.2.2.2, la description d'une micro-rivière s'écoulant sur un lit granulaire homogène requiert une loi d'érosion des berges relativement complexe, fonction non seulement de l'écoulement de l'eau mais également des flux de sédiments au bord du lit. Au contraire, pour décrire l'érosion des berges d'un fleuve naturel, Blondeaux et Seminara (1985) emploient une loi d'érosion empirique fort simple fondée sur les hypothèses suivantes :

- le cisaillement exercé par l'écoulement sur la rive est le facteur dominant d'érosion ;
- ce cisaillement peut être approché par la valeur du cisaillement exercé sur le fond du lit, c'est-à-dire la valeur donnée par les équations de Saint-Venant ;
- le déplacement (moyen) de la rive est une fonction continue et dérivable du cisaillement ;
- le fleuve conserve sa largeur au cours de l'évolution du méandre ;

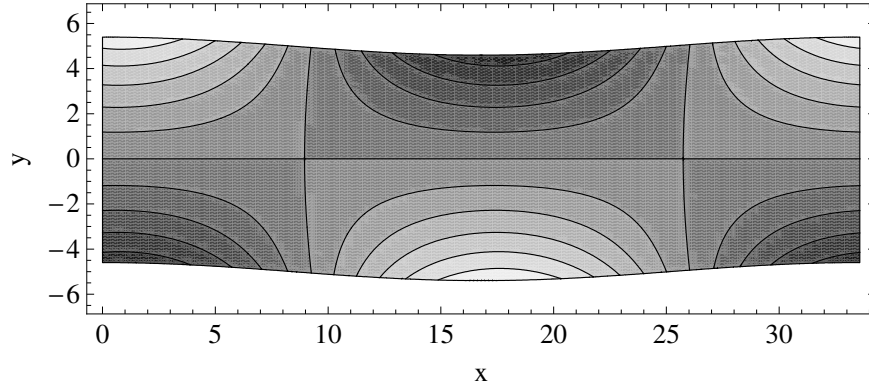


FIG. 3.11 – Exemple de banc de méandre, dont l’amplitude est déterminée par une théorie linéaire, pour des berges courbes, mais rigides. Les valeurs des paramètres sont celles de la figure 3.10. Le nombre d’onde longitudinal correspond au maximum de l’amplitude des bancs :  $k_x \approx 0.187$ .

- le matériau constituant la berge diffère de celui du fond, et il peut être négligé dans les équations de transport de sédiments.

Les deux premières hypothèses permettent d’écrire la loi d’érosion des berges sous la forme suivante :

$$n_y \frac{\partial a}{\partial t} = \mathcal{E}(\|\boldsymbol{\tau}\|), \quad (3.47)$$

où le cisaillement  $\boldsymbol{\tau}$  doit être évalué au bord du fleuve. La fonction  $\mathcal{E}$  est *a priori* croissante. Le membre de gauche de cette expression correspond au déplacement normal de la rive. La quatrième hypothèse se traduit par l’égalité

$$\mathcal{E}(\|\boldsymbol{\tau}_0\|) = 0, \quad (3.48)$$

où  $\boldsymbol{\tau}_0$  représente le cisaillement au bord dans l’état de base. Enfin, la dernière hypothèse implique que le flux normal de sédiments s’annule au bord (il s’agit ici des sédiments qui constituent le fond de la rivière) :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{y=a} = 0. \quad (3.49)$$

**3.2.2.1.3 Fond rigide et berges érodables** Si l’on néglige tout transport de sédiments au fond, l’évolution de la rivière n’est plus régie que par les équations de Saint-Venant pour le fluide, auxquelles il nous faut associer la condition aux berges (3.47) et la condition d’imperméabilité

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{y=a} = 0. \quad (3.50)$$

La relation  $y = a(x, t)$  définit la position de la berge. Dans les § 3.2.2.1.3 et 3.2.2.1.4, nous nous restreindrons au cas d’une rivière sinueuse, dont les perturbations de la berge sont en phase :

$$a_+(x, t) = \frac{R}{2} + a_* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad a_-(x, t) = -\frac{R}{2} + a_* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (3.51)$$



De plus, la symétrie des équations de Saint-Venant nous autorise à ne chercher que les solutions pour lesquelles  $v_*$  est impaire en  $y$ , tandis que  $u_*$  et  $d_*$  sont paires. Conformément à l'esprit de la présente étude, nous nous limiterons, par souci de clarté, au cas d'un écoulement laminaire ( $\alpha_1 = 6/5$ ,  $\alpha_2 = 0$  et  $\alpha_3 = 2$ ). Le cas d'un écoulement turbulent peut être traité exactement de la même manière : il conduit alors à des résultats qualitativement similaires.

Les équations de Saint-Venant linéarisées (voir § 3.1.1) s'écrivent

$$\left(S + i\frac{6}{5}k_x F^2\right) u_* + ik_x h_* + (ik_x - 2S)d_* = 0, \quad (3.52)$$

$$\left(S + i\frac{6}{5}k_x F^2\right) v_* + ik_y(d_* + h_*) = 0, \quad (3.53)$$

$$k_x(d_* + u_*) + k_y v_* = 0. \quad (3.54)$$

De même, les conditions aux berges conduisent à

$$3e^{-ik_y R/2} (1 - e^{ik_y R}) (d_* - u_*) + i\frac{\omega}{\zeta} a_*, \quad (3.55)$$

$$-ik_x a_* + e^{-ik_y R/2} (1 + e^{ik_y R}) v_*, \quad (3.56)$$

où le paramètre  $\zeta$  est défini par

$$\zeta = \mathcal{E}'(\|\boldsymbol{\tau}_0\|)\rho\nu\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{H}}. \quad (3.57)$$

Les équations (3.52) à (3.54) imposent la relation suivante entre  $k_x$  et  $k_y$  :

$$\left(\frac{6}{5}F^2 - 1\right) k_x^2 - k_y^2 - 3iSk_x = 0. \quad (3.58)$$

Les conditions aux bords (3.55) et (3.56), associées aux équations (3.52) à (3.54), donnent la relation de dispersion suivante :

$$\omega(k_x, k_y) = \zeta 3 \left(S - i\left(\frac{6}{5}F^2 + 1\right)\right) \frac{k_x}{k_y} \tan\left(\frac{k_y R}{2}\right). \quad (3.59)$$

Enfin, ces deux dernières équations permettent d'écrire une relation de dispersion en fonction de  $k_x$  uniquement :

$$\omega(k_x, k_y) = 3\zeta\sqrt{k_x} \frac{S - i(6F^2/5 + 1)}{\sqrt{S - i(6F^2/5 - 1)}} \tan\left(\frac{R}{2}\sqrt{k_x(S - i\left(\frac{6}{5}F^2 - 1\right))}\right). \quad (3.60)$$

Le taux de croissance  $\sigma$ , partie imaginaire de la pulsation, a été tracé en fonction de  $k_x$  sur la figure 3.12, pour différentes valeurs du nombre de Froude. Si le nombre de Froude est nul, aucune longueur d'onde n'est instable. Au contraire, pour un nombre de Froude égal à 2, par exemple, le taux de croissance  $\sigma$  admet des maxima

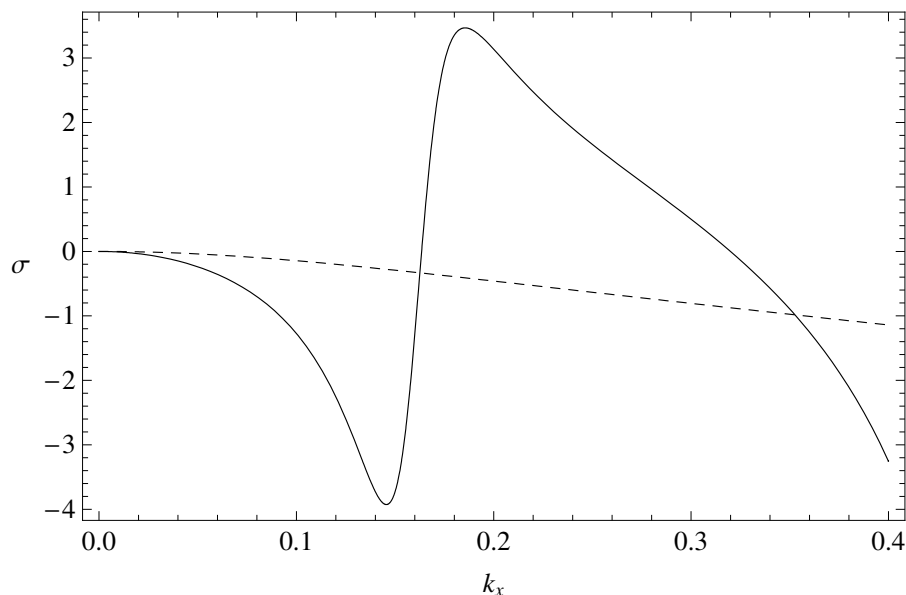


FIG. 3.12 – Taux de croissance  $\sigma$  de l’instabilité de courbure en fonction du nombre d’onde  $k_x$ , lorsqu’une rivière à fond rigide est traversée par un écoulement laminaire. Les valeurs suivantes sont attribuées aux paramètres de la relation de dispersion (3.60) :  $\zeta = 1$ ,  $S = 0.05$ ,  $R = 10$  et  $F = 0$  (trait pointillé) ou  $F = 2$  (trait plein). Cette instabilité trouve son origine dans l’interaction entre l’inertie de l’écoulement et l’érosion des berges.

locaux positifs. Ce modèle simplifié illustre le mécanisme d’*instabilité inertielle de courbure* : au sens où nous l’entendons ici, il s’agit de l’instabilité de l’interface délimitant la rive et l’écoulement, sans relation *a priori* avec le phénomène de recirculation (voir § 1.1.2). La stabilité de ce système pour un nombre de Froude nul souligne l’importance du rôle de l’inertie horizontale dans le mécanisme d’apparition de l’instabilité.

Le système mécanique dont nous venons d’analyser la stabilité ne prétend représenter aucun système naturel : nous n’avons pas connaissance de rivières pour lesquelles l’érosion du fond soit négligeable face à l’érosion des berges, qu’il s’agisse de fleuves réels ou de micro-rivières expérimentales. L’objet de cet exemple est de définir l’instabilité inertielle de courbure, étroitement mêlée à la formation de bancs alternés dans les cas plus réalistes, tel que celui qu’étudient Blondeaux et Seminara (1985).

**3.2.2.1.4 Couplage de la courbure avec l’instabilité de bancs** Afin de prendre en compte l’érosion du fond de la rivière, nous devons associer les équations de transport de sédiments aux équations de Saint-Venant. Une fois linéarisé, ce système conduit à l’équation de dispersion (3.13) établie au § 3.1.1. Les conditions au bord d’impermeabilité et d’érosion de la berge conduisent à nouveau aux équations

(3.55) et (3.56). La condition (3.49), quant à elle, prend la forme

$$-ik_x a_* + e^{-ik_y R/2} (1 + e^{ik_y R}) q_{y,*}. \quad (3.61)$$

En éliminant l'amplitude de la déformation de la berge  $a_*$  des équations (3.55), (3.56) et (3.49), nous obtenons deux nouvelles relations liant  $\omega$ ,  $k_x$  et  $k_y$  :

$$\begin{aligned} & -3(-1 + e^{ik_y R}) k_x (12F^2 k_x^3 + 6F^2 k_x k_y^2 - 10ik_x^2 S) \\ & \quad - 3k_x (-5ik_y^2 S + 5ie^{ik_y R} k_y^2 S) \\ & = 3k_x (2(1 + e^{ik_y R}) F^2 k_x k_y - 5ik_y S - 5ie^{ik_y R} k_y S) \frac{\omega}{\zeta}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + S\gamma} (1 + e^{ik_y R}) k_y (15k_x (2F^2 k_x - 5iS) \\ & \quad + (6iF^2 k_x + 5S) ((-5 + 6F^2) k_x^2 - 5k_y^2 - 15ik_x S) \gamma) \\ & = -15(-1 + e^{ik_y R}) k_x (6F^2 k_x (2k_x^2 + k_y^2) - 5i(2k_x^2 - k_y^2) S) \frac{\zeta}{\omega}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

À ce stade, afin d'obtenir une expression analytique pour l'équation de dispersion, nous supposons que le temps caractéristique d'érosion des berges est très supérieur à celui de l'érosion du fond (c'est-à-dire  $\zeta \ll 1$ ). Cela revient à admettre que la topographie du fond, à chaque instant, est une solution quasi-stationnaire des équations de Saint-Venant et du transport sédimentaire. Ainsi, nous pouvons négliger  $\omega$  dans la relation (3.13). Blondeaux et Seminara (1985) ont également utilisé cette hypothèse, fort réaliste dans le cas de rivières réelles. De plus, nous négligerons le terme de pente dans l'équation de transport de sédiments (en supposant que  $\gamma = 0$ ). La diffusion non-linéaire associée à ce terme ne participe probablement pas activement au mécanisme de l'instabilité. Enfin, nous considérerons le cas d'un écoulement purement visqueux, dont le nombre de Froude tend vers zéro. Cette dernière hypothèse interdit toute instabilité inertielle de courbure, telle que nous l'avons définie au § 3.2.2.1.3. Les relations (3.62) et (3.63) équivalent alors toutes deux à

$$\omega = i \frac{\zeta}{k_y} (k_y^2 - 2k_x^2) \tan\left(\frac{k_y R}{2}\right), \quad (3.64)$$

tandis que l'équation (3.13) devient

$$k_y^2 = \frac{2k_x^2 \beta}{-3 + \beta}. \quad (3.65)$$

Finalement, l'équation de dispersion liant  $\omega$  et  $k_x$  s'écrit

$$\frac{3i\zeta\sqrt{2-6/\beta}}{\beta-3} k_x \tan\left(\frac{k_x R}{\sqrt{2-6/\beta}}\right). \quad (3.66)$$

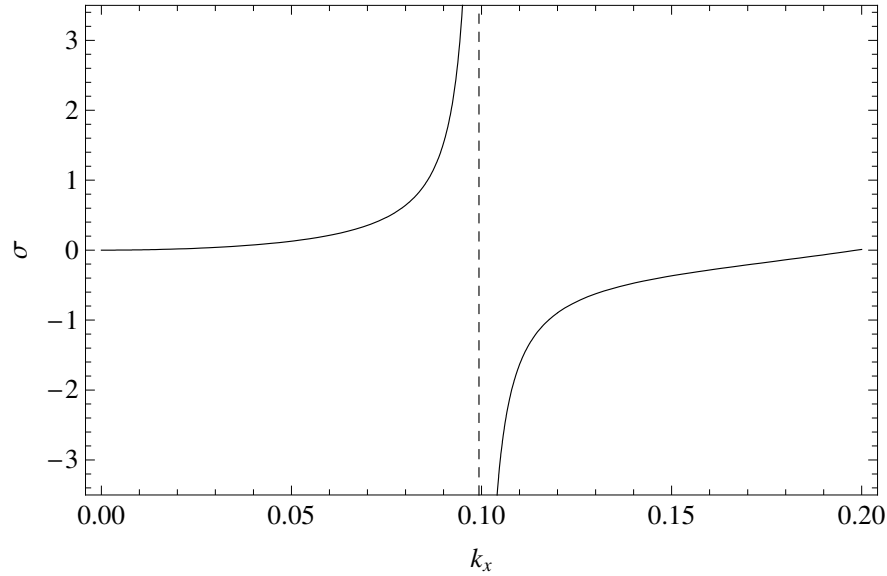


FIG. 3.13 – Taux de croissance  $\sigma$  de l’instabilité de courbure en fonction du nombre d’onde  $k_x$ , lorsqu’une rivière à fond érodable est traversée par un écoulement laminaire. Les valeurs suivantes sont attribuées aux paramètres de la relation de dispersion (3.66) :  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 3.75$ ,  $R = 10$  et  $F = 0$ . Ce modèle ne prend pas en compte l’effet de la pente sur le transport sédimentaire ; l’absence de ce terme de diffusion explique la divergence du taux de croissance.

Le taux de croissance  $\sigma$  correspondant à la relation (3.66) est représenté sur la figure 3.13. L’absence de diffusion de sédiments ( $\gamma = 0$ ) dans ce modèle conduit à la divergence de  $\sigma$  à la résonance, c’est-à-dire pour

$$k_x = \frac{\pi}{2R} \sqrt{2 - \frac{6}{\beta}}. \quad (3.67)$$

Le modèle proposé par Blondeaux et Seminara (1985) ne prend pas en compte, lui non plus, la diffusion de sédiments. Il semble donc que le terme de recirculation introduit par ces auteurs permette d’atténuer l’instabilité autour de la résonance, puisque le taux de croissance qu’ils proposent ne diverge pas.

Le présent modèle illustre l’interaction entre l’érosion du fond, et celle des berges, dans le cas d’un nombre de Froude nul, ce qui empêche l’apparition d’une instabilité inertielle de courbure au sens du § 3.2.2.1.3, quoique la déformation de la berge joue un rôle crucial dans le mécanisme d’instabilité. Nous parlerons dans ce cas d’*instabilité de banc de méandre*, en référence à la traduction française du terme anglais *point bar*, qui désigne le banc stationnaire formé le long de la rive intérieure dans un méandre. Qualitativement, ce banc correspond à la solution stationnaire des équations de Saint-Venant associées aux équations de transport de sédiments pour des rives courbées, qui apparaît dans le présent modèle.

**3.2.2.1.5 Remarque sur la continuité du nombre d'onde longitudinal** À l'exception du modèle de rivière à fond rigide présenté au § 3.2.2.1.3, chacun des cas de stabilité linéaire présentés dans cette étude imposent deux conditions aux limites, l'une qui stipule que la berge est imperméable, l'autre fixant le flux de sédiments. Dans le cas où la berge est mobile, l'apparition d'une nouvelle variable ( $a$ , la position de la berge) est compensée par une nouvelle équation décrivant l'érosion de la berge. Lorsque l'on étudie la stabilité linéaire de ces systèmes, une première relation de dispersion liant la pulsation  $\omega$  et les deux composantes  $k_x$  et  $k_y$  du vecteur d'onde est imposée par les équations de Saint-Venant et de transport de sédiments. Les deux conditions aux limites imposent *génériquement* deux nouvelles restrictions sur  $\omega$ ,  $k_x$  et  $k_y$ . *A priori*, ces trois équations ne sont vérifiées que pour un ensemble discret de valeurs de  $\omega$ ,  $k_x$  et  $k_y$ . Cependant, dans l'ensemble des cas ci-dessus, les approximations proposées réduisent les deux conditions aux berges à une seule et même équation, et  $k_y$  demeure un paramètre libre et continu, fixé seulement par la maximisation du taux de croissance de l'instabilité. Ce comportement doit pourtant être considéré comme un cas particulier, auquel toutes les contributions portées à notre connaissance sont restreintes. L'exemple présenté au § 3.2.2.3 illustre le cas général, où *les deux coordonnées* du nombre d'onde sont cantonnées à des valeurs discrètes. De même, au § 3.2.2.1.4, on n'obtient l'équivalence des équations (3.62) et (3.63) que si l'on néglige le terme de diffusion de sédiments en fixant  $\gamma = 0$ .

### 3.2.2.2 Généralisation à deux dimensions des conditions aux berges pour une micro-rivière

Au § 2.2.3, dans le cas d'une rivière rectiligne, les conditions aux limites du flux de sédiments n'étaient rien d'autre que le premier ordre d'un développement en  $\epsilon_a$  de l'équation de conservation de la masse de sédiments. Cette dérivation repose sur l'expression explicite du cisaillement exercé par l'écoulement sur le fond de la rivière en fonction de la hauteur d'eau. Toutefois, si l'on suppose que la courbure de la berge est beaucoup plus grande que l'épaisseur de la zone d'avalanche, l'écoulement peut être approché au bord de la rivière (voir le § 3.2.2.2.1). Cette approximation nous permet de résoudre l'écoulement d'eau uniquement hors de la zone d'avalanche, en fixant  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  à la limite de la zone d'avalanche. On peut alors obtenir les conditions aux berges pour le flux de sédiments par un raisonnement géométrique.

Les dérivations ci-dessous seront menées dans le repère  $(O, s, n)$ , où  $s$  et  $n$  sont les coordonnées respectivement tangente et normale à la berge (voir figure 3.14). Comme au § 2.2.3,  $a(s, t)$  et  $b(s, t)$  désignent respectivement la limite entre la zone d'érosion pure et la zone d'avalanche, et la limite entre les zones émergées et immergées de la topographie. Nous choisissons par ailleurs la même échelle de longueur pour les dimensions verticale et horizontale (ce choix revient à fixer  $R = 1$ ).

**3.2.2.2.1 Écoulement à proximité du bord** Dans une couche d'épaisseur  $e$  suffisamment petite par rapport à la courbure de la berge, la solution des équations de Saint-Venant (2.35) et (2.36) peut être approchée par un écoulement parallèle

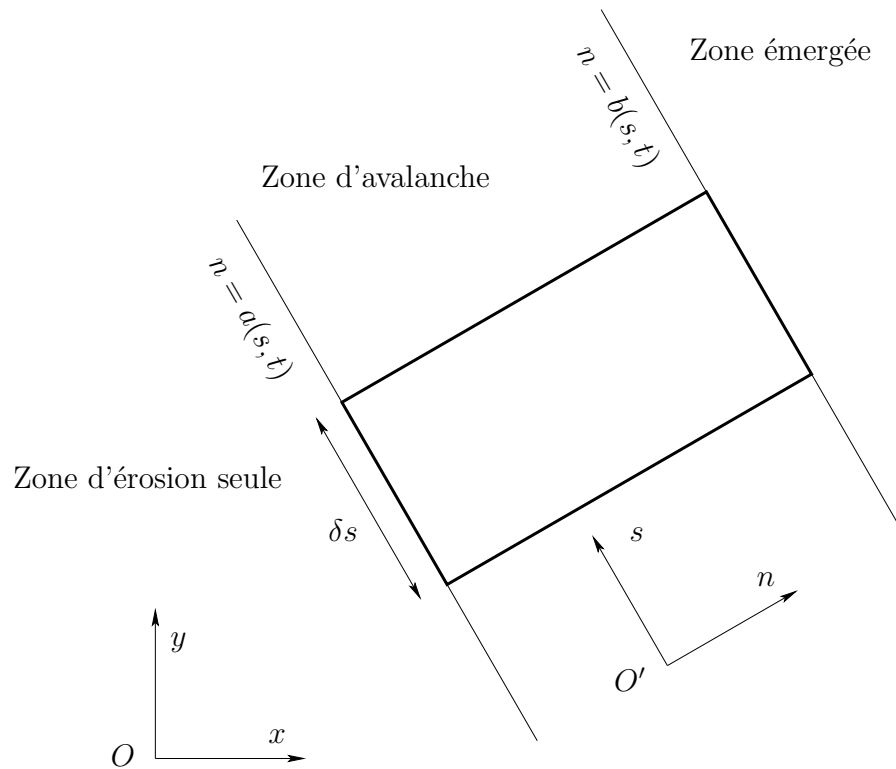


FIG. 3.14 – Représentation simplifiée d'une berge de micro-rivière, vue de dessus. La courbe  $n = b(s, t)$  (le bord de la rivière) peut être une ligne de discontinuité de la topographie  $h$ . Le changement de repère de  $(O, x, y)$  vers  $(O', s, n)$  est réduit à une rotation et une translation si la courbure de la berge est suffisamment faible. Les lignes en gras entourent le domaine auquel est appliquée la conservation de la masse de sédiments au cours de l'érosion de la berge (voir § 3.2.2.2.2).

à la berge. En effet, en effectuant le changement d'échelle  $s \rightarrow s_*/e$  ces équations deviennent

$$\alpha F^2 \left( u_n \frac{\partial u_n}{\partial n} + e u_s \frac{\partial u_n}{\partial s_*} \right) = S \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x - \frac{\partial \eta}{\partial n} - Sf(\|\mathbf{u}\|, d) u_n, \quad (3.68)$$

$$\alpha F^2 \left( u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} + e u_s \frac{\partial u_s}{\partial s_*} \right) = S \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_x - e \frac{\partial \eta}{\partial s_*} - Sf(\|\mathbf{u}\|, d) u_s, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(du_n) + e \frac{\partial}{\partial s_*}(du_s) = 0, \quad (3.70)$$

À l'ordre zéro en  $e$ , la relation (3.70) impose  $u_n = 0$  sur le segment  $[b - e, b]$ , puisque  $u_n(s, b(s, t), t)$  s'annule. Ainsi, (3.68) devient, à l'ordre zéro,

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = S \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x. \quad (3.71)$$

La résolution de (3.69) à l'ordre zéro est plus délicate, car  $e$  n'est pas nécessairement négligeable devant  $S$ .

**3.2.2.2 Si la berge est verticale au bord** Comme nous l'avons démontré au § 2.2.3 dans le cas d'une rivière rectiligne, l'existence d'une berge verticale au bord suppose que cette berge recule ( $\dot{b} > 0$ ). Le débit de sédiments est alors fini en  $b$ , et des avalanches se produisent au voisinage du bord. Si le temps caractéristique de ces avalanches est beaucoup plus court que le temps caractéristique d'érosion (c'est-à-dire si  $\epsilon_a \ll 1$ ), on peut considérer que la pente de la zone d'avalanche est pratiquement égale à l'angle critique d'avalanche :  $\|\nabla h\| \approx \alpha_c$  pour  $n \in [a, b]$ . L'hypothèse de petite courbure de la berge permet de supposer que l'altitude  $h$  de la surface des sédiments ne varie pas beaucoup le long des limites  $n = a(s, t)$  et  $n = b(s, t)$ , qui sont donc quasiment orthogonales à  $\nabla h$ . La continuité du flux de sédiments normal à la limite de la zone d'avalanche impose

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \alpha_c \quad (3.72)$$

en  $n = a(s, t)$  (voir le § 2.2.3.2.2). Nous pouvons alors exprimer simplement le volume de sédiments composant la berge entre  $s$  et  $s + \delta s$  :

$$\begin{aligned} \delta V_s &\equiv \int_s^{s+\delta s} \int_{a(s,t)}^{b(s,t)} h \, dn \, ds \\ &\approx \frac{\delta s}{2\alpha_c} (\eta(s, b(s, t), t)^2 - h(s, a(s, t), t)^2), \end{aligned} \quad (3.73)$$

où nous avons utilisé les relations géométriques suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow b(s,t), n < b(s,t)} = \eta(s, b(s, t), t), \quad (3.74)$$

$$\eta(s, b(s, t), t) - h(s, a(s, t), t) = \alpha_c(b(s, t) - a(s, t)). \quad (3.75)$$

Par définition, le domaine considéré se déplace avec la berge lorsque celle-ci est érodée, et la conservation de la masse de sédiments impose

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = \delta s \left( q_n(s, a(s, t), t) + h_+(s, b(s, t)) \frac{\partial b}{\partial t} - h(s, a(s, t), t) \frac{\partial a}{\partial t} \right) \\ + \int_{a(s, t)}^{b(s, t)} q_s(s, n, t) \, dn - \int_{a(s+\delta s, t)}^{b(s+\delta s, t)} q_s(s+\delta s, n, t) \, dn. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ainsi, pour une courbure de la berge suffisamment petite, la condition de bord pour le flux de sédiments s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left( \eta(s, b(s, t), t) \frac{d}{dt} \eta(s, b(s, t), t) - h(s, a(s, t), t) \frac{d}{dt} h(s, a(s, t), t) \right) = \\ q_n(s, a(s, t), t) + h_+(s, b(s, t)) \frac{\partial b}{\partial t} - h(s, a(s, t), t) \frac{\partial a}{\partial t} \\ - \frac{\partial}{\partial s} \int_{a(s, t)}^{b(s, t)} q_s(s, n, t) \, dn. \end{aligned} \quad (3.77)$$

L'approximation de l'écoulement dans la zone d'avalanche présentée au § 3.2.2.2.1 permet d'exprimer la hauteur d'eau au bord, au moyen de 3.71 :

$$\eta(s, b(s, t), t) = \eta(s, a(s, t), t) + S \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x (b(s, t) - a(s, t)). \quad (3.78)$$

Si la pente moyenne  $S$  est suffisamment faible, la hauteur d'eau au bord peut donc être approchée par la hauteur d'eau à la limite de la pente d'avalanche. Cette approximation, associée aux relations (3.72) et (3.75), permet de simplifier la condition de bord pour le flux de sédiments :

$$\begin{aligned} \alpha_c q_n(s, a(s, t), t) = \\ - \left( h_+ \left( s, \frac{\eta(s, a(s, t), t) - h(s, a(s, t), t)}{\alpha_c} \right) - \eta(s, a(s, t), t) \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{n=a(s, t)} \\ + \left( h_+ \left( s, \frac{\eta(s, a(s, t), t) - h(s, a(s, t), t)}{\alpha_c} \right) - \right. \\ \left. h(s, a(s, t), t) \right) \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{n=a(s, t)}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

**3.2.2.2.3 Si la berge est continue au bord** Comme dans le cas d'une rivière rectiligne (présenté au § 2.2.3), lorsque la berge ne subit pas de discontinuité en  $b$ , deux cas doivent être distingués, selon qu'il existe ou non une zone d'avalanche au voisinage du bord. Dans le premier cas, les conditions à la berge sont similaires au cas



du § 3.2.2.2.2, en fixant bien entendu  $h_-(s, b(s, t), t) = h_-(s, b(s, t), t)$ . S'il n'existe pas d'avalanche, les conditions à la berge présentées au § 2.2.3.1.1 pour une rivière rectiligne sont directement transposables au cas 2D. L'ensemble des cas est résumé dans le tableau 3.1, analogue du tableau 2.1 établi pour des rivières rectilignes.

### 3.2.2.3 Stabilité linéaire d'une micro-rivière en cours d'élargissement

**3.2.2.3.1 Principe de la méthode** L'abandon des conditions de berges rigides (voir § 3.2.1.1) impose de considérer un état de base non uniforme selon la direction  $y$ . En effet, les conditions aux berges proposées au § 3.2.2.2 conduisent à un élargissement continu de la rivière (voir § 2.2). Ce retrait des berges suppose que la pente transverse du lit vaut  $\alpha_c$  au bord : l'état de base consistant en une rivière de profondeur uniforme, qui a permis les calculs analytiques du § 3.2.1.1, n'en est plus un. Les modes propres de l'instabilité de bancs devront donc être cherchés numériquement. D'autre part, l'élargissement continu de la solution de base devra être suffisamment lent par rapport au taux de croissance de l'instabilité pour que l'analyse linéaire ait un sens. Enfin, et il s'agit sans doute là de la contrainte la plus lourde qui pèse sur l'analyse linéaire, les conditions aux berges du § 3.2.2.2 ne peuvent être linéarisées que si la berge avance ou recule sur *l'ensemble* de la rivière. Ces conditions prennent les différentes formes exposées dans le tableau 3.1, et la transition d'une forme à l'autre survient au changement de signe de l'un des critères de ce tableau. Ces transitions brutales étant radicalement non-linéaires, l'analyse ci-dessous ne sera envisagée que dans le cas restreint où la berge recule partout, sous l'effet d'un élargissement moyen.

Formellement, dans le cadre du modèle utilisé tout au long de la présente étude, l'évolution d'une micro-rivière peut être décrite par la résolution d'un système de la forme

$$\mathcal{F}(\psi(x, y, t)) = 0,$$

$$\mathcal{C}(\psi(x, a(x, t), t)) = 0, \quad (3.80)$$

où  $\mathcal{F}$  représente le système constitué par les équations de Saint-Venant qui régissent l'écoulement, la loi d'érosion, et l'équation de conservation de la masse de sédiments.  $\psi$  est un vecteur de dimension quatre<sup>4</sup> :

$$\psi = (h, \eta, v, q_y). \quad (3.81)$$

L'opérateur  $\mathcal{C}$  représente les conditions aux berges. Ces équations peuvent être linéarisées autour d'un état de base  $\psi_0(y, t)$ , dont nous supposons qu'il dépend faiblement du temps (c'est-à-dire  $\|\partial\psi_0/\partial t\| \ll 1/\omega$  où  $\omega$  est la pulsation de la perturbation). Dans ce cas la perturbation peut être approchée par une série de Fourier, dont les coefficients sont également des fonctions lentes du temps :

$$\psi(x, y, t) \approx \psi_0(y, t) + \epsilon\psi_*(y, t)e^{i(\omega t - k_x x)}. \quad (3.82)$$

<sup>4</sup>Nous avons montré au § 3.1 que le système (3.80) est effectivement d'ordre quatre.

		$h_+(s, b, t) > h_-(s, b, t)$	
	$h_+(s, b, t) = h_-(s, b, t)$		
Avalanche	Oui	Non	Oui
Critère	$b > a$	$\left. \frac{\partial h_-}{\partial n} \right _{n=b} < \alpha_c$	$h_+(s, b, t) > \eta(s, b, t)$
Conditions aux berges	$\left. \frac{\partial h_-}{\partial n} \right _{n=a} = \alpha_c$ $\alpha_c q_{n,-}(s, a, t) =$ $-\left. \frac{\partial q_{n,-}}{\partial n} \right _{n=a} (\eta(s, b, t) - h_-(s, a, t))$	$h_-(s, b, t) = \eta(s, b, t)$ $\frac{\partial b}{\partial t} \left. \frac{\partial h_-}{\partial n} \right _{n=b} + \left. \frac{\partial q_{n,-}}{\partial n} \right _{n=b} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial n} \right _{n=b}$	$\left. \frac{\partial h_-}{\partial n} \right _{n=a} = \alpha_c$ $\alpha_c q_{n,-}(s, a, t) =$ $-\left. \frac{\partial q_{n,-}}{\partial n} \right _{n=a} (h_+(s, b, t) - h_-(s, a, t))$ $-\left. \frac{\partial \eta}{\partial n} \right _{n=b} (h_+(s, b, t) - \eta(s, b, t))$
Position du bord $b$	$(b - a)\alpha_c = \eta(s, a, t) - h_-(s, a, t)$	$b = a$	$(b - a)\alpha_c = \eta(s, a, t) - h_-(s, a, t)$

TAB. 3.1 – Résumé des diverses conditions aux berges, dans le cas d’une rivière à deux dimensions. Nous avons ici supposé que la courbure de la berge (l’échelle de longueur est la hauteur d’eau) et la pente moyenne  $S$  de la topographie sont faibles.

Le système (3.80) devient

$$\mathcal{F}(\psi_0(y, t)) + \epsilon \mathcal{L}\psi_*(y, t)e^{i(\omega t - k_x x)} = 0,$$

$$\mathcal{C}(\psi_0(a_0(t), t)) + \epsilon \mathcal{M}\psi_*(a_0(t), t)e^{i(\omega t - k_x x)} = 0, \quad (3.83)$$

où  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  sont des opérateurs linéaires dépendant de  $y$ ,  $t$ ,  $k_x$  et  $\omega$ . Nous négligerons par la suite la dépendance des opérateurs vis-à-vis du temps. Le premier ordre de ce système admet pour solutions l'ensemble discret des vecteurs propres  $\psi_{*,n}(y, t)$  associés aux équations de dispersion  $\omega_n(k_x)$ . Pour trouver ces équations de dispersion, nous pouvons tirer profit de la linéarité du système, en utilisant la méthode du tir linéaire.

Si l'on choisit un état de base symétrique, l'opérateur  $\mathcal{F}$  est également symétrique, ce qui nous permet de rechercher indépendamment les solutions propres symétriques et antisymétriques. Toute solution symétrique doit vérifier les conditions  $v_*(0, t) = q_{y,*}(0, t) = 0$ . Pour  $\omega$  et  $k_x$  fixés, l'espace des solutions symétriques est de dimension deux, et admet pour base les vecteurs  $\psi_{*,1}$  et  $\psi_{*,2}$  tels que

$$\psi_{*,1}(0, t) = (1, 0, 0, 0), \quad \psi_{*,2}(0, t) = (0, 1, 0, 0). \quad (3.84)$$

$\psi_*$  est donc une combinaison linéaire de ces deux vecteurs, et la condition aux berges linéarisée prend la forme d'un système de deux équations linéaires liant les inconnues  $\mu_1$  et  $\mu_2$  :

$$\mu_1 \mathcal{M}\psi_{*,1}(a_0(t), t) + \mu_2 \mathcal{M}\psi_{*,2}(a_0(t), t) = 0, \quad (3.85)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des constantes inconnues. Ce problème admet des solutions non triviales si, et seulement si, le déterminant de  $\mu_1 \mathcal{M}\psi_{*,1}(a_0(t), t) + \mu_2 \mathcal{M}\psi_{*,2}(a_0(t), t)$  est nul. Il s'agit donc, pour trouver les équations de dispersion, de trouver les racines  $\omega_n$  de ce déterminant pour différentes valeurs de  $k_x$ .

### 3.2.2.3.2 Système linéaire pour un état de base quelconque

**Équations pour le lit de la rivière** Les notations employées dans ce chapitre sont analogues à celles du § 3.1.1, à ceci près que dans le cas présent l'état de base est une fonction de  $y$  et de  $t$  :

$$\varphi_0(y, t) = (u_0(y, t), 0, h_0(y, t), \eta_0(t), q_{x,0}(y, t), q_{y,0}(y, t)). \quad (3.86)$$

Les équations régissant l'écoulement (2.35) et (2.36), associées aux équations de transport et de conservation des sédiments (1.29) et (1.24), imposent à l'état de base de respecter les relations

$$u_0 = (\eta_0 - h_0)^2, \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = -\frac{\partial q_{y,0}}{\partial y} \quad (3.88)$$

$$q_{x,0} = \phi(\theta_0(\eta_0 - h_0)), \quad (3.89)$$

$$q_{y,0} = -\gamma q_{x,0} \frac{\partial h_0}{\partial y}. \quad (3.90)$$

La conservation du débit d'eau  $Q_w$  s'écrit, dans le cas général

$$Q_w = \int_{b_-(x,t)}^{b_+(x,t)} (\eta(x, y, t) - h(x, y, t)) dy, \quad (3.91)$$

où  $b_+$  et  $b_-$  désignent les positions respectives des rives gauche et droite de notre rivière. L'état de base doit donc satisfaire à la relation

$$Q_w = 2 \int_0^{b_0} (\eta - h(y))^\delta dy. \quad (3.92)$$

Bien entendu, nous retrouvons pour l'état de base les équations qui régissent l'évolution d'une rivière rectiligne (voir § 2.2.4). Les solutions numériques issues du § 2.2.4 se présentent donc comme des candidats naturels pour l'état de base.

Le système linéaire correspondant à la perturbation, après remplacement de  $u_0$ ,  $q_{x,0}$  et  $q_{y,0}$  par leur expression en fonction de  $h_0$  et  $\eta_0$ , prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} -ik_x(\eta_0 - h_0)^2 h_* + ik_x \eta_0 u_* + \\ ik_x(\eta_0 - h_0)^2 \eta_* - v_* h'_0 + h_0(-ik_x u_* - v'_*) + \eta_0 v'_* = 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{S u_*}{(\eta_0 - h_0)^2} + (\eta_0 - h_0)^2 \left( \frac{6}{5} i F^2 k_x u_* + \frac{2S(h_* - \eta_*)}{(\eta_0 - h_0)^3} \right) \\ + ik_x \eta_* + \frac{12}{5} F^2 (-\eta_0 + h_0) v_* h'_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$(5S + 6iF^2 k_x (\eta_0 - h_0)^4) v_* + 5(\eta_0 - h_0)^2 \eta'_* = 0, \quad (3.95)$$

$$-i\omega h_* + ik_x q_{x,*} + q'_{y,*} = 0, \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} (\eta_0 - h_0) \left( -(\eta_0 - h_0)(q_{x,*} + ik_x \gamma h_* \phi(\theta_0(\eta_0 - h_0))) + \right. \\ \left. \theta_0(u_* + (\eta_0 - h_0)(h_* - \eta_*)) \phi'(\theta_0(\eta_0 - h_0)) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} -q_{y,*} + \frac{1}{(\eta_0 - h_0)^2} \left( \phi(\theta_0(\eta_0 - h_0)) (v_* - \gamma(\eta_0 - h_0)^2 h'_*) \right. \\ \left. - \gamma \theta_0(\eta_0 - h_0)(u_* + (\eta_0 - h_0)(h_* - \eta_*)) h'_0 \phi'(\theta_0(\eta_0 - h_0)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Notons que la condition de conservation du débit d'eau (3.91) n'impose pas de condition particulière à la perturbation. En effet, à l'ordre un, cette conservation s'écrit

$$b_{+,*}u_0(b_{+,0})(\eta_0 - h_0(b_{+,0})) - b_{-,*}u_0(b_{-,0})(\eta_0 - h_0(b_{-,0})) + \int_{b_{-,0}}^{b_{+,0}} (u_*(\eta_0 - h_0) + u_0(\eta_* - h_*))dy = 0. \quad (3.99)$$

Or, d'après la définition des bords,

$$b_{+,*}u_0(b_{+,0})(\eta_0 - h_0(b_{+,0})) = b_{-,*}u_0(b_{-,0})(\eta_0 - h_0(b_{-,0})) = 0. \quad (3.100)$$

De plus, la conservation de la masse d'eau (3.93) peut également s'écrire sous la forme

$$ik_x(u_*(\eta_0 - h_0) + u_0(\eta_* - h_*)) = \frac{\partial}{\partial y}(v_*(\eta_0 - h_0)). \quad (3.101)$$

Une nouvelle application de la définition des bords prouve alors que la condition (3.99) est systématiquement vérifiée.

**Conditions aux berges** Conformément au § 3.2.2.3.1, nous supposons dans ce qui suit que l'état de base est en cours d'élargissement, et donc que les conditions aux berges que nous devons linéariser sont celles du § 3.2.2.2. Si la rivière creuse son lit dans une plaine d'altitude uniforme, nous pouvons arbitrairement fixer l'origine du repère à cette altitude (ainsi,  $h_+ = 0$ ). Les conditions aux berges deviennent alors, pour  $n = a(s, t)$ ,

$$\alpha_c q_n = \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} - h \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \alpha_c. \quad (3.103)$$

À ces conditions imposées au flux de sédiments, il faut ajouter la contrainte d'imperméabilité de la berge,

$$un_x + vn_y = 0. \quad (3.104)$$

L'ordre zéro du développement perturbatif des deux premières conditions s'écrit

$$h'_0 = \alpha_c, \quad \alpha q_{y,0} - \eta_0 \dot{\eta}_0 - h_0 q'_{y,0} = 0. \quad (3.105)$$

La condition d'imperméabilité des berges est systématiquement vérifiée par l'état de base, dont l'écoulement est limité à la direction  $x$ . À l'ordre un, ces mêmes équations conduisent aux trois relations, valables pour  $y = a(s, t)$ ,

$$h'_* + a_* h''_0 = 0, \quad v_* = ik_x u_0 a_*, \quad (3.106)$$

$$- ik_x \alpha q_{x,0} h'_* + h''_0 (-i\omega h_0 h_* + \alpha q_{y,*} + \eta_* (i\omega \eta_0 - \dot{\eta}_0) - h_* q'_{y,0}) - h_0 h'_* q''_{y,0} = 0. \quad (3.107)$$

**Réduction du système** Le système linéaire d'équations établi au § 3.2.2.3.2 porte sur les six fonctions de  $y$  que sont  $u_*$ ,  $v_*$ ,  $\eta_*$ ,  $h_*$ ,  $q_{x,*}$  et  $q_{y,*}$ . Seules les fonctions  $u_*$  et  $q_{x,*}$  ne sont pas dérivées. Le système complet peut donc être réduit aux quatre fonctions  $v_*$ ,  $\eta_*$ ,  $h_*$  et  $q_{y,*}$ , après extraction de  $u_*$  et  $q_{x,*}$  des équations (3.94) et (3.97). On obtient alors les relations

$$(5S + 6iF^2k_x(\eta_0 - h_0)^4) v_* + 5(\eta_0 - h_0)^2 \eta_*' = 0, \quad (3.108)$$

$$\frac{ik_x(\eta_0 - h_0) \left( -ik_x \eta_* + \frac{2S(-h_* + \eta_*)}{\eta_0 - h_0} + \frac{12}{5} F^2(\eta_0 - h_0) v_* h_0' \right)}{\frac{S}{(\eta_0 - h_0)^2} + \frac{6}{5} iF^2 k_x (\eta_0 - h_0)^2} - ik_x(\eta_0 - h_0)^2 h_* + ik_x(\eta_0 - h_0)^2 \eta_* - v_* h_0' + \eta_0 v_*' - h_0 v_*' = 0, \quad (3.109)$$

$$ik_x \left( -ik_x \gamma h_* \phi(\theta_0(\eta_0 - h_0)) + \frac{1}{\eta_0 - h_0} \theta_0 \left( (\eta_0 - h_0)(h_* - \eta_*) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{-ik_x \eta_* + \frac{2S(-h_* + \eta_*)}{\eta_0 - h_0} + \frac{12}{5} F^2(\eta_0 - h_0) v_* h_0'}{\frac{S}{(\eta_0 - h_0)^2} + \frac{6}{5} iF^2 k_x (\eta_0 - h_0)^2} \right) \phi'(\theta_0(\eta_0 - h_0)) \right) - i\omega h_* + q_{y,*}' = 0, \quad (3.110)$$

$$-q_{y,*} + \frac{1}{(\eta_0 - h_0)^2} \left( \phi(\theta_0(\eta_0 - h_0)) (v_* - \gamma(\eta_0 - h_0)^2 h_*') \right. \\ \left. - \gamma \theta_0(\eta_0 - h_0) h_0' \left( (\eta_0 - h_0)(h_* - \eta_*) + \frac{-ik_x \eta_* + \frac{2S(-h_* + \eta_*)}{\eta_0 - h_0} + \frac{12}{5} F^2(\eta_0 - h_0) v_* h_0'}{\frac{S}{(\eta_0 - h_0)^2} + \frac{6}{5} iF^2 k_x (\eta_0 - h_0)^2} \right) \phi'(\theta_0(\eta_0 - h_0)) \right) = 0. \quad (3.111)$$

En reprenant les notations du § 3.2.2.3.1, ce système peut être écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_1(y; \omega, k_x) \psi_*'(y) + \mathcal{L}_2(y; \omega, k_x) \psi_*(y) = 0, \quad (3.112)$$

où  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont deux matrices carrées de dimension quatre. De même, les trois conditions aux berges établies au § 3.2.2.3.2 peuvent être traduites sous la forme

$$\mathcal{M}_1(\omega, k_x) \psi_*'(a_0) + \mathcal{M}_2(\omega, k_x) \psi_*(a_0) = 0, \quad (3.113)$$

où  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont deux matrices de dimension  $(2, 4)$  (la première des trois conditions aux berges donne la perturbation de la position de la berge  $a_*$ ). Nous pouvons à

présent appliquer la méthode proposée au § 3.2.2.3.1. Le déterminant à annuler pour trouver la relation de dispersion s'écrit

$$\mathcal{D} = \det (\mathcal{M}_1 \psi'_{*,1}(a_0) + \mathcal{M}_2 \psi_{*,1}(a_0), \mathcal{M}_1 \psi'_{*,2}(a_0) + \mathcal{M}_2 \psi_{*,2}(a_0)), \quad (3.114)$$

où  $\psi_{*,1}$  et  $\psi_{*,2}$  constituent une base de l'espace des modes pairs, avec

$$\psi_{*,1}(0) = (1, 0, 0, 0), \quad \psi_{*,2}(0) = (0, 1, 0, 0). \quad (3.115)$$

ou de celui des modes impairs, avec

$$\psi_{*,1}(0) = (0, 0, 1, 0), \quad \psi_{*,2}(0) = (0, 0, 0, 1). \quad (3.116)$$

**3.2.2.3.3 Résolution dans un cas particulier** La stabilité linéaire d'un lit de forme quelconque dont nous présentons ici l'étude ne saurait prétendre à l'exhaustivité; il ne s'agit que d'un calcul préliminaire destiné à illustrer l'influence des conditions aux berges développées dans la présente thèse. Le choix de la forme initiale du lit d'une part, et celui des domaines de nombre d'onde  $k$  et de pulsation  $\omega$  explorés d'autre part, limitent la généralité des résultats ci-après. Cependant, même si ces résultats ne sont pas exposés ici, nous avons pu étudier différentes configurations, sans que le comportement change qualitativement.

**Choix d'un état de base** Dans le cas d'une micro-rivière creusant son lit sur une plaine uniforme (et dont l'altitude sert de référence à notre repère), le choix de la forme de base du lit dans le cadre de notre modèle s'opère sur les éléments suivants :

- la hauteur d'eau  $\eta$ , qui fixe la hauteur des berges verticales émergées ;
- la largeur  $a$  de la zone du lit sans avalanche, qui occupe la majeure partie de la rivière ;
- la largeur  $b - a$  de la zone d'avalanche, ou de manière équivalente l'altitude  $h(a)$  du lit en  $y = a$  ;
- une fonction  $h$  définissant l'altitude du lit dans la zone sans avalanche, c'est-à-dire pour  $y \in [0, a]$ , et qui satisfait les conditions aux limites  $h' = 0$  en  $y = 0$ ,  $h' = \alpha_c$  en  $y = a$  et  $h = \eta - \alpha_c(b - a)$  en  $y = a$ .

Afin de produire des configurations initiales réalistes, nous pouvons soumettre une section de rivière initiale rectangulaire à un élargissement par l'érosion uniforme dans la direction  $x$ , au moyen du modèle présenté au § 2.2.4. Les valeurs des divers paramètres géométriques du lit étudiés ont été choisies en accord avec les ordres de grandeur des expériences présentées par Métivier et Meunier (2003). La forme de ce lit est présentée sur la figure 3.15.

**Stabilisation des modes classiques** La recherche des modes propres linéaires d'érosion de la rivière de la figure 3.15 consiste à chercher les racines du déterminant  $\mathcal{D}$  défini par l'équation (3.114), sur le domaine à trois dimensions des

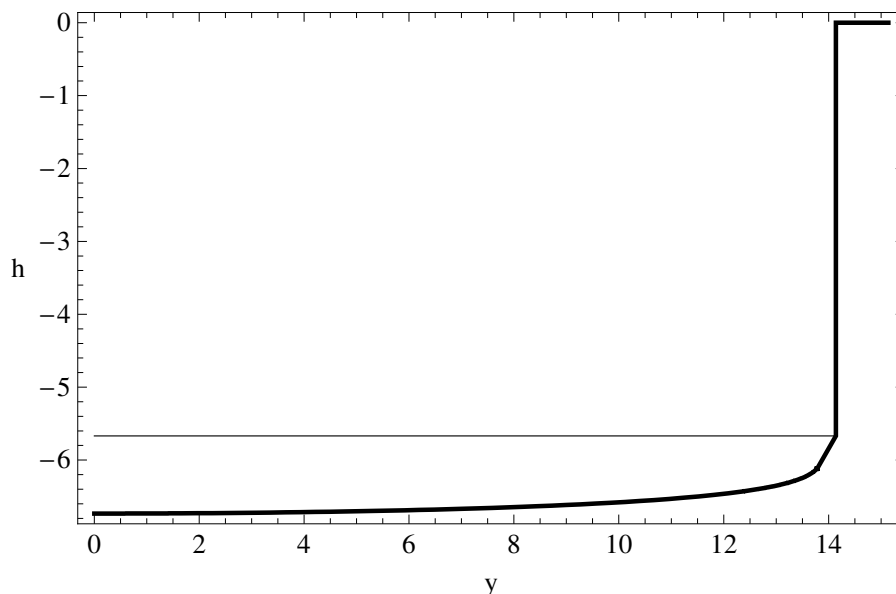


FIG. 3.15 – Section transverse de l'état de base dont la stabilité est étudiée au § 3.2.2.3.3. Ce lit est le fruit de l'évolution d'un lit rectangulaire de demi largeur  $a = 12.5$  et de profondeur  $h = -6$ , soumis à l'érosion engendrée par un écoulement initial de hauteur  $\eta = -5$ , pour un débit d'eau constant. Cet état est obtenu à l'instant  $t = 10$ , en utilisant le modèle présenté au § 2.2.4.

nombres d'onde  $k$  et des pulsations complexes  $\omega$ . Si l'on suppose que la théorie analytique de stabilité des rivières à berges rigides (voir § 3.2.1) reste une approximation correcte lorsque l'érosion des berges est prise en compte, il est naturel de chercher les racines du déterminant  $\mathcal{D}$  à proximité des racines obtenues analytiquement. Pour une rivière de section rectangulaire, de rapport d'aspect  $R = 2a$  (où  $a$  désigne la demi largeur de la rivière de la figure 3.15) et dont les berges sont rigides, le taux de croissance maximum  $\sigma = 0.0071$  du mode 1 est atteint pour  $k = 0.010$ . Tracée pour  $k = 0,01$  et pour des perturbations antisymétriques, la figure 3.16 permet de situer les modes impairs instables de la théorie analytique. L'allure des premiers modes peut être comparée aux modes analytiques associés (voir les figures 3.18 et 3.19) : leur ressemblance conforte l'hypothèse de leur correspondance.

La figure 3.16 met en évidence le principal résultat de la présente étude préliminaire : le taux de croissance des modes linéaires correspondant à ceux de la théorie analytique sont négatifs (ces résultats sont consignés dans le tableau 3.2). En d'autres termes, la prise en compte de l'érosion des berges selon le modèle du § 3.2.2.2 semble stabiliser les modes d'érosion. La figure 3.17 permet de comparer les équations de dispersion obtenues pour une rivière dont les berges sont rigides et le fond initialement plat avec celles obtenues pour le modèle de micro-rivière plus réaliste présenté ci-dessus. Comme le suggère l'allure des modes (représentés sur les figures 3.18 et 3.19), le comportement qualitatif des deux modèles de rivière demeure



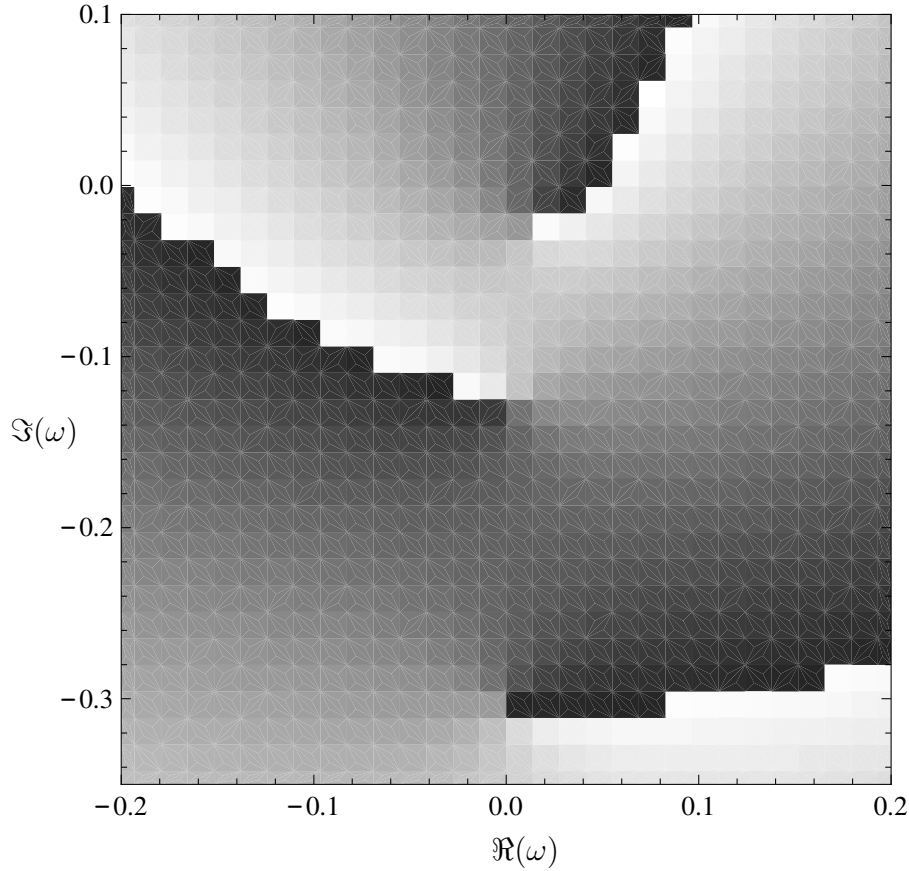


FIG. 3.16 – Argument du déterminant  $\mathcal{D}$  en fonction de la pulsation complexe  $\omega$  des modes linéaires impairs associés à la condition initiale de la figure 3.15, pour un nombre d'onde  $k = 0,01$ . L'origine de chacune des coupures de la fonction  $\arg(\mathcal{D})$  signale une racine du déterminant, c'est-à-dire la pulsation d'un mode linéaire. Les trois modes visibles sur cette figure présentent un taux de croissance négatif : la prise en compte de l'érosion des berges semble stabiliser les modes d'érosion. Les valeurs des paramètres sont  $\gamma = 1$ ,  $\alpha_c = 0.8$ ,  $\beta = 3.75$ ,  $F = 3.21$  et  $S = 0.0875$ .

sensiblement le même, à la stabilisation des modes près. Ceci conforte la validité du modèle simple à berges rigides, et rend d'autant plus surprenant cet effet stabilisant. Encore une fois, nous nous garderons de généraliser ce résultat, qui demeure à ce jour circonscrit aux quelques cas particuliers que nous avons pu étudier.

**Existence d'un mode instable** Si, comme nous l'avons vu, l'introduction de conditions aux berges tenant compte de l'érosion peut stabiliser des modes pourtant instables dans le cas de berges rigides, il semble que ces nouvelles conditions puissent également exercer une influence opposée sur d'autres modes. L'état de base représenté sur la figure 3.20 illustre cet effet. Comme dans le cas précédent, les modes correspondant aux modes instables pour des berges rigides deviennent stables. En revanche, pour des longueurs d'onde plus courtes ( $k = 0, 1$ ), il existe au moins un mode

Mode	$\omega$ berges rigides	$\omega$ berges mobiles
0	$-0.00104 - 0.00251i$	$-0.000919 - 0.00245i$
1	$0.0371 + 0.00713i$	$0.0102 - 0.0241i$
2	$0.0312 - 0.0272i$	$0.0130 - 0.0559i$
3	$0.0301 - 0.0915i$	$0.00400 - 0.128i$

TAB. 3.2 – Comparaison des pulsations complexes associées au nombre d’onde  $k = 0.01$ , calculées analytiquement pour une rivière dont les berges sont rigides, et numériquement lorsque l’érosion des berges est prise en compte. Dans le dernier cas, l’état de base est celui de la figure 3.15. Les valeurs des paramètres sont indiquées dans la légende de la figure 3.16.

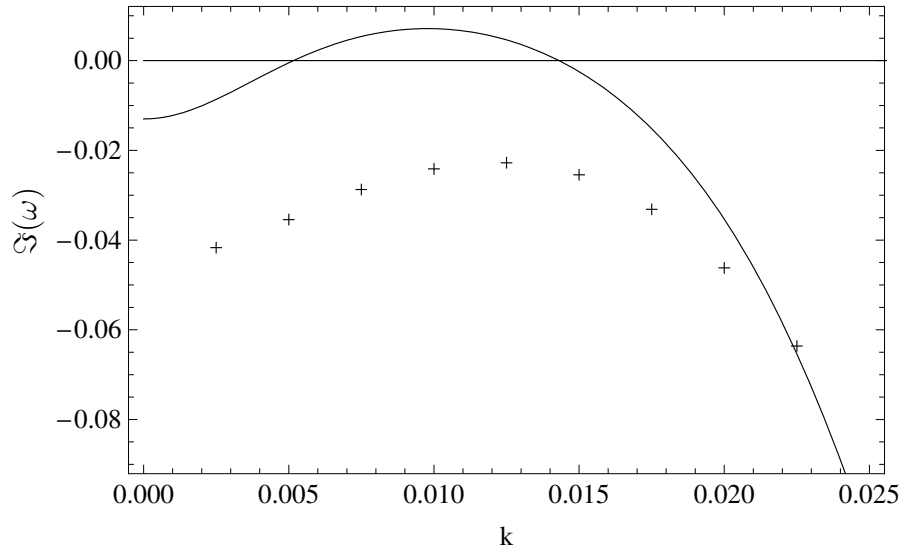


FIG. 3.17 – Comparaison des taux de croissance du premier mode de l’instabilité de banc, pour une rivière à berge rigide (trait plein), et pour l’état de base représenté sur la figure 3.15 (croix). L’introduction des conditions aux berges développées au § 3.2.2.2 et d’un lit initialement convexe stabilise ce mode. Les valeurs des paramètres sont indiquées dans la légende de la figure 3.16. La courbe en trait plein correspond à l’équation (3.13) écrite pour un écoulement laminaire, avec  $k_y = \pi/R$  et  $R = 2a_0/(\eta_0 - h_0) = 27.56$ . Chaque croix est obtenue par une approximation numérique du minimum de la valeur absolue du déterminant  $\mathcal{D}$  (voir la figure 3.16).

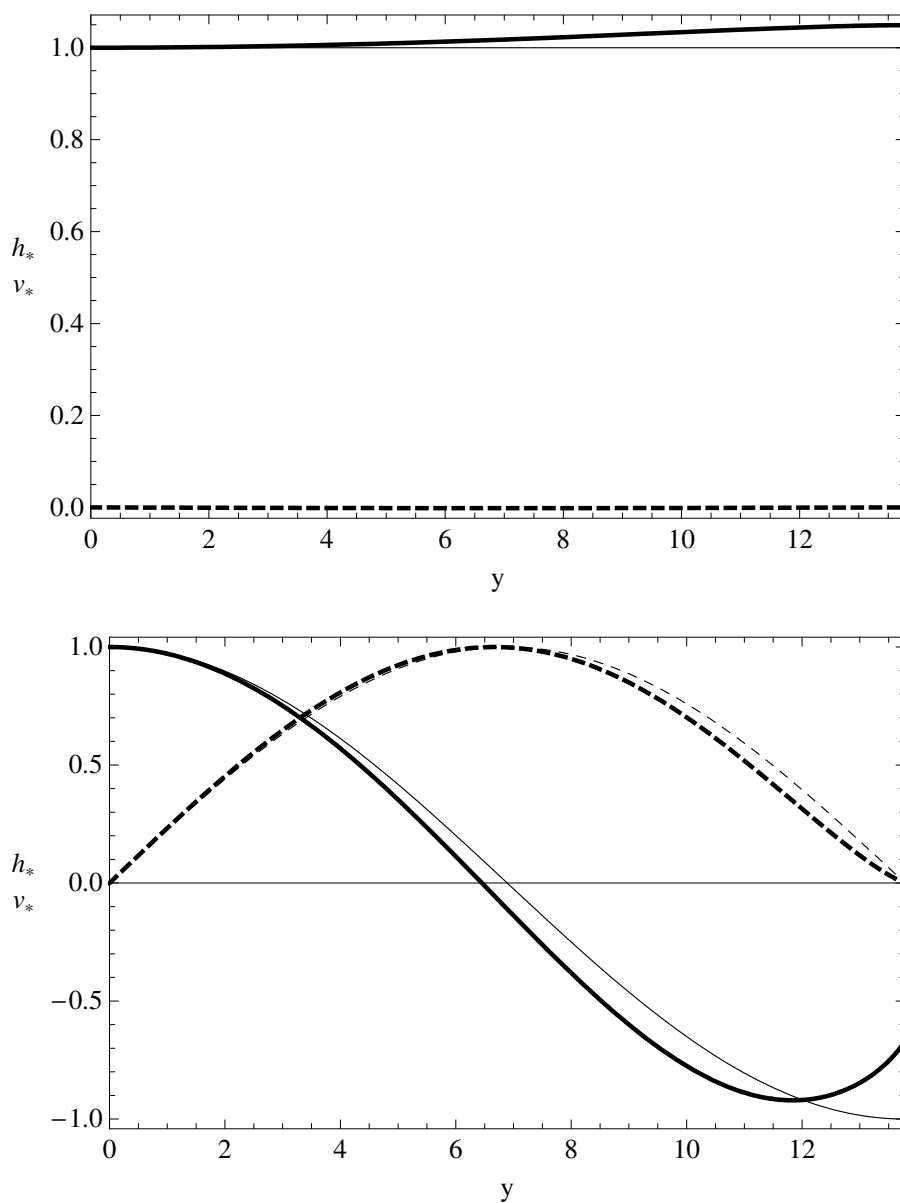


FIG. 3.18 – Allure des premiers modes linéaires pairs associés à la condition initiale de la figure 3.15, pour un nombre d'onde  $k = 0,01$  (en trait gras). Les courbes en trait plein et pointillé correspondent respectivement à la perturbation de hauteur  $h_*$  et à la perturbation de vitesse transverse  $v_*$ . À titre de comparaison, les courbes en trait fin représentent les modes analytiques associés, calculés pour une rivière à fond plat et berges rigides. La figure du dessus correspond au mode 0, celle du dessous au mode 2.

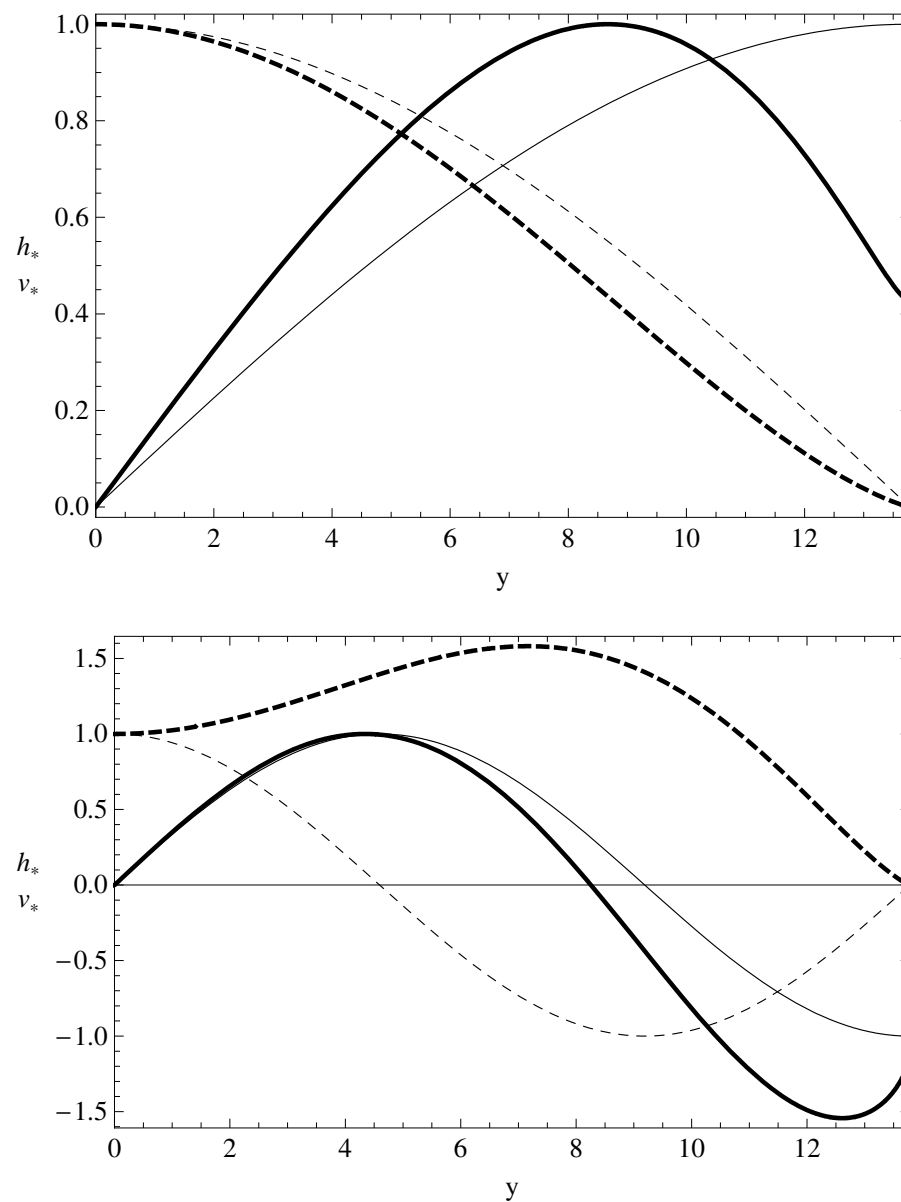


FIG. 3.19 – Allure des premiers modes linéaires impairs associés à la condition initiale de la figure 3.15. La légende est celle de la figure 3.18. La figure du dessus correspond au mode 1, celle du dessous au mode 3.

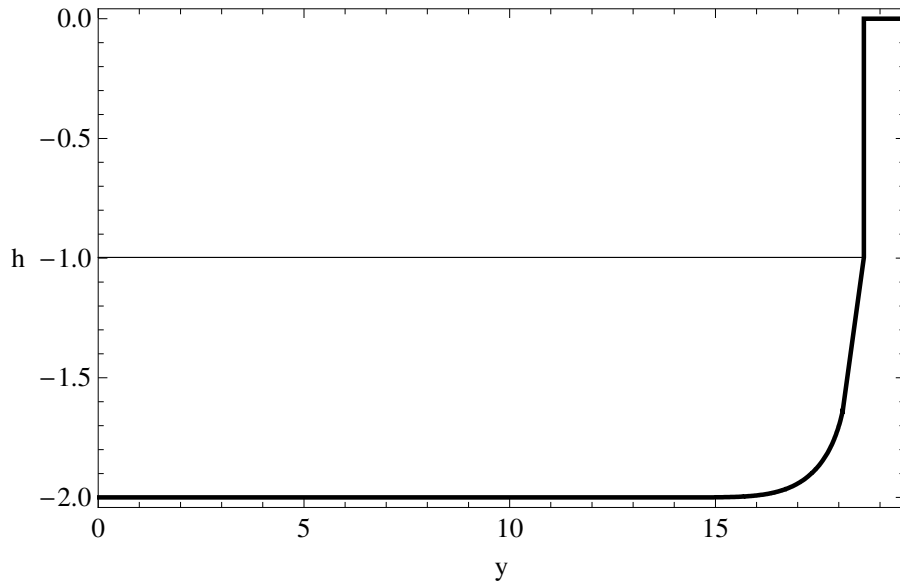


FIG. 3.20 – Section transverse de l'état de base dont la stabilité est étudiée au § 3.2.2.3.3. Ce lit est le fruit de l'évolution d'un lit rectangulaire de demi largeur  $a = 17.5$  et de profondeur  $h = -2$ , soumis à l'érosion engendrée par un écoulement initial de hauteur  $\eta = -1$ , pour un débit d'eau constant. Cet état de base est obtenu à l'instant  $t = 0.5$ , en utilisant le modèle présenté au § 2.2.4. Un mode instable lui est associé lorsque l'on tient compte de l'érosion des berges.

instable, représenté sur la figure 3.21, et dont la pulsation vaut  $\omega_s = -0.0349 + 0.137i$ . Les modes analytiques de la rivière à fond plat et berges rigides sont tous stables pour ce nombre d'onde.

Les résultats surprenants de la stabilité linéaire d'une micro-rivière dont le fond est convexe, en opposition avec les résultats obtenus pour un fond uniforme, soulignent l'importance fondamentale du comportement des berges. L'intervention de dérivées de la topographie d'ordre élevé dans notre modèle de conditions aux berges peut expliquer la sensibilité du système vis-à-vis de ces conditions. La stabilisation des modes classiques d'instabilité va à l'encontre de l'explication du vieillissement des micro-rivières proposé au § 3.2.1.2, qui se fonde sur ces modes. Une étude plus approfondie de l'influence des divers paramètres impliqués dans le modèle de berge devrait permettre de lever ce paradoxe.

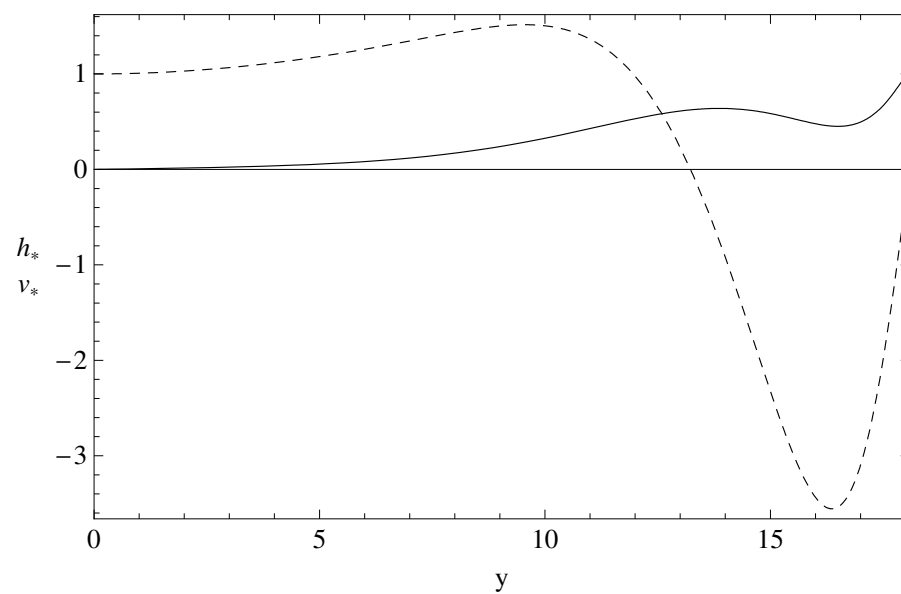


FIG. 3.21 – Allure d'un mode linéaire impair associé à la condition initiale de la figure 3.20, pour  $k = 0, 1$ . Les courbes en trait plein et pointillé correspondent respectivement à la perturbation de hauteur  $h_*$  et à la perturbation de vitesse transverse  $v_*$ . Les valeurs des paramètres sont indiquées dans la légende de la figure 3.16.

### 3.3 Évolution non linéaire de l'instabilité de bancs

#### 3.3.1 Résolution numérique des équations

Lorsque l'amplitude de la déformation du fond ne peut plus être considérée comme négligeable face à la profondeur moyenne de l'écoulement, le caractère non-linéaire des équations doit être pleinement pris en compte. Une première méthode consiste à écrire une équation d'amplitude pour la perturbation, ce qui permet de traiter le cas faiblement non-linéaire (Colombini et coll., 1987; Schielen et coll., 1993). D'autres approximations analytiques sont envisageables, en supposant par exemple que la non-linéarité est très marquée (Hall, 2006). Recourir au calcul numérique est une autre façon d'approcher l'évolution non-linéaire de l'instabilité de bancs ; c'est l'objet de ce chapitre.

##### 3.3.1.1 Présentation de l'algorithme

Pour un nombre de Froude nul et un écoulement laminaire, les équations de Saint-Venant (2.35) et (2.36) s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left( d^3 \frac{\partial \eta}{\partial x_l} \right) = 3RSd^2 \frac{\partial d}{\partial x}, \quad (3.117)$$

où  $d$  est la profondeur de la rivière :  $d = \eta - h$ . Le membre de gauche de cette équation peut être interprété comme un laplacien non linéaire pour le champ de pression (c'est-à-dire la hauteur d'eau  $\eta$ ). Le terme de droite est alors une source de quantité de mouvement imposée par la pente moyenne  $S$  de la topographie. L'imperméabilité des berges de la rivière se traduit mathématiquement par la condition en  $y = \pm R/2$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (3.118)$$

Nous supposerons la rivière périodique de longueur d'onde  $\lambda$ . Cette périodicité remplace les conditions au bord en  $x = \pm \lambda/2$  par une condition intégrale fixant le débit de l'écoulement, ou la hauteur d'eau moyenne. Par souci de simplicité, la seconde condition sera retenue dans toute cette partie :

$$\int_{-R/2}^{R/2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \eta \, dx \, dy = 0. \quad (3.119)$$

Tant que la pente de la topographie  $h$  demeure inférieure à l'angle critique d'avalanche (ce que nous supposerons dans toute la suite), le flux de sédiments  $\mathbf{q}$  est entièrement dû à l'érosion. Dans ce cadre, l'évolution de la topographie est régie par l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \phi(\theta_0 \| \boldsymbol{\tau} \|) \left( \frac{\tau_l}{\| \boldsymbol{\tau} \|} - \gamma \left( \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial x_l} - S \delta_{1,l} \right) \right) \right), \quad (3.120)$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  désigne le cisaillement exercé par le fluide sur le fond de la rivière :

$$\tau_i = d \delta_{1,i} - \frac{d}{RS} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}. \quad (3.121)$$

Dans le cas d'une rivière droite, la rigidité de la berge (flux de sédiments nul au bord) impose la condition

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.122)$$

en  $y = \pm R/2$ .

Le temps n'intervenant pas explicitement dans l'équation (3.117), elle peut *a priori* être résolue indépendamment de l'équation d'évolution du fond (3.120). Nous pouvons ainsi envisager la résolution de notre système selon l'organigramme de la figure 3.22. La séparation du problème en deux sous-problèmes permet de simplifier l'algorithme de résolution, mais impose une méthode explicite en temps. Si  $p$  désigne le pas temporel de l'équation discrète, le passage de la topographie  $h_p$  à la topographie  $h_{p+1}$  est obtenu à l'aide d'un opérateur  $\mathcal{F}$  appliquée à  $h_p$  :

$$h_{p+1} = h_p + \mathcal{F}[h_p]\delta t, \quad (3.123)$$

où  $\delta t$  désigne l'amplitude du pas de temps. L'opérateur  $\mathcal{F}$  représente le système d'équations à résoudre. La simplicité des algorithmes explicites est contrebalancée par la condition de stabilité de Courant et coll. (1967) (ci-après CFL), qui impose de réduire le pas de temps lorsque l'on raffine le maillage spatial :

$$\delta t \leq D\delta l^2, \quad (3.124)$$

où  $\delta l$  est la plus petite taille de maille, et  $D$  est une constante fixée par le système d'équations à résoudre. Cette contrainte peut mener à des temps de calcul rédhibitoires.

Afin de s'affranchir de la condition CFL, nous emploierons dans la suite une méthode de résolution implicite, qui s'écrit formellement

$$h_{p+1} = h_p + \mathcal{F}[(1 - \Theta)h_p + \Theta h_{p+1}]\delta t, \quad \Theta \in [0, 1]. \quad (3.125)$$

Si la constante de pondération  $\Theta$  est strictement positive (dans le cas contraire nous retrouvons l'équation (3.123)), la relation (3.121) définit  $h_{p+1}$  de façon implicite. Pour un pas de temps suffisamment petit, l'opérateur  $\mathcal{F}$  peut être linéarisé pour donner

$$\frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t} \approx \mathcal{F}[h_p] + \Theta \delta t \mathcal{L}[h_p, \frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t}], \quad \frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t} = \frac{h_{p+1} - h_p}{\delta t}. \quad (3.126)$$

où  $\mathcal{L}[f_1, f_2]$  désigne une fonctionnelle linéaire en son second argument  $f_2$ . La solution de l'équation linéaire (3.126) peut être approchée numériquement par la méthode des éléments finis (voir § 3.3.1.3). Si l'opérateur  $\mathcal{F}$  peut être décomposé en deux parties (fluide, sédiments), il n'en va pas de même pour la fonctionnelle  $\mathcal{L}$ , dont la matrice correspondante dans l'espace des éléments finis n'est pas *a priori* diagonale par blocs. L'algorithme de résolution doit donc être adapté à cette nouvelle formulation (voir figure 3.23). La première étape de la résolution consiste à déterminer la hauteur d'eau initiale  $\eta_0$  de l'écoulement pour une topographie  $h_0$  donnée à l'aide de l'équation (3.117) (voir § 3.3.1.2.1). Connaissant  $\eta_p$  et  $h_p$ , la résolution du problème



variationnel associé à l'équation (3.126) permet de calculer directement  $\eta_{p+1}$  et  $h_{p+1}$ . Cette seconde étape peut se succéder à elle-même autant de fois que nécessaire pour atteindre l'instant final  $t_f$  (algorithme  $A_1$  de la figure 3.23). Cependant, afin de garantir à chaque pas de temps que l'écoulement correspondant à  $\eta_p$  demeure en accord avec la topographie  $h_p$ , la première étape peut être répétée à chaque pas de temps (algorithme  $A_2$  de la figure 3.23).

### 3.3.1.2 Équations complètes pour les différentes étapes de la résolution

#### 3.3.1.2.1 Méthode de relaxation pour l'écoulement seul

**Problème linéarisé** Le problème non-linéaire constitué par l'association de l'équation (3.117) avec la condition d'imperméabilité des berges (3.118) ne peut être résolu directement par la méthode des éléments finis. Une première solution approchée  $\eta_0$  peut être obtenue en linéarisant ces équations dans le cas où les déformations de la surface libre sont petites en comparaison de la hauteur d'eau. Dans ce cas, au premier ordre, le problème s'écrit

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \left( h^3 \frac{\partial \eta}{\partial x_l} \right) = 3RS h^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (3.127)$$

La condition (3.118) demeure inchangée. La solution approchée  $\eta_0$  permet d'initialiser l'algorithme de relaxation.

**Problème non-linéaire** La méthode de relaxation consiste à remplacer le problème spatial (3.117) par le problème spatio-temporel suivant :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_r} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( d^3 \frac{\partial \eta}{\partial x_l} \right) - 3RS d^2 \frac{\partial d}{\partial x}, \quad (3.128)$$

associé à la condition (3.118). Le temps  $t_r$  ne revêt aucune signification physique : il s'agit de la variable de relaxation.  $\eta$  et  $d$  deviennent ici des fonctions de l'espace et de  $t_r$ . Si l'évolution selon  $t_r$  du problème (3.128) conduit à une solution stationnaire, cette dernière est naturellement solution du problème initial. Cette évolution étant soumise aux contraintes de stabilité évoquées au § 3.3.1.1, un algorithme explicite de relaxation sera avantageusement remplacé par son équivalent implicite. Le principe formellement représenté par la formule (3.126) conduit à cet équivalent implicite. Pour des pas de temps suffisamment courts, le problème (3.128) est donc approché par le problème discret

$$\begin{aligned} \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} = & \frac{\partial}{\partial x_l} \left( d_p^3 \frac{\partial \eta_p}{\partial x_l} \right) - 3RS d_p^2 \frac{\partial d_p}{\partial x} \\ & + \Theta \delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \left( 3d_p^2 \frac{\partial \eta_p}{\partial x_l} \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} + d_p^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) \right) \right. \\ & \left. - 3RS \left( d_p^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) + 2d_p \frac{\partial d_p}{\partial x} \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) \right), \quad (3.129) \end{aligned}$$

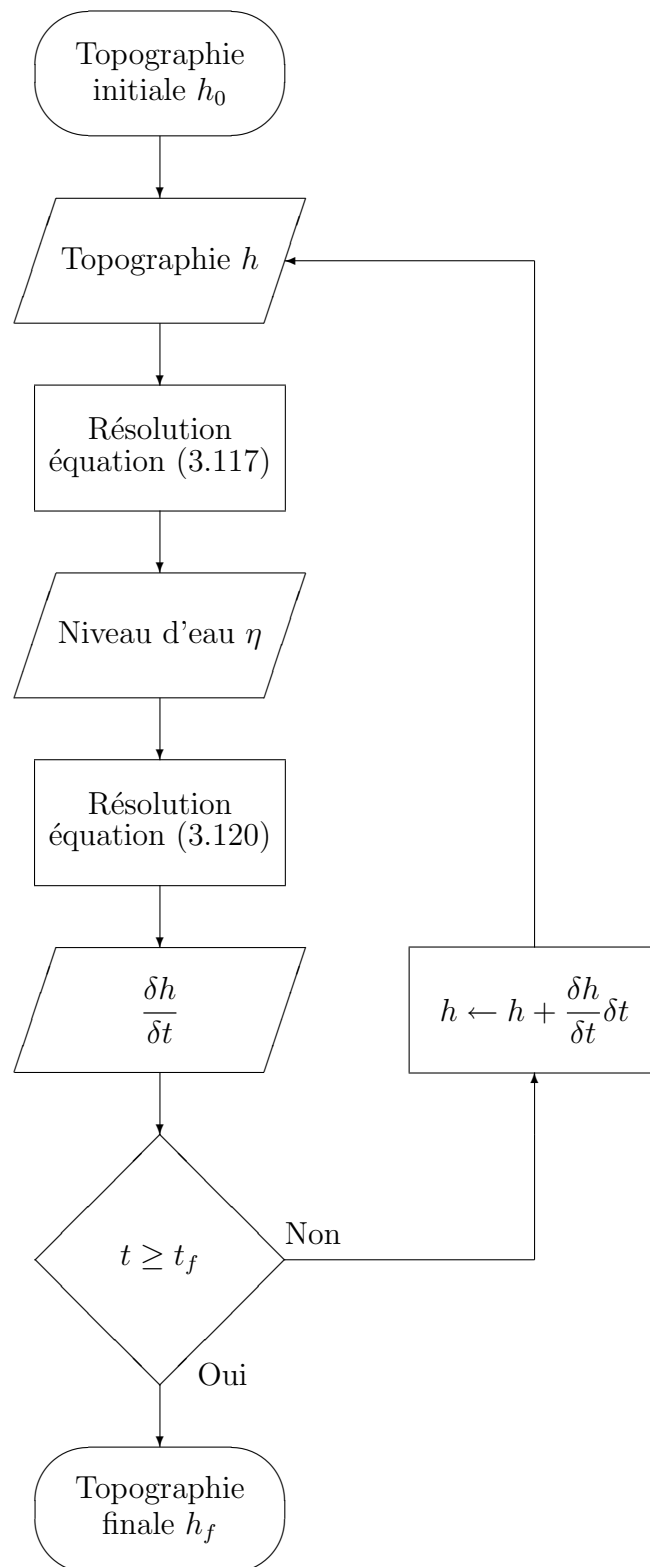


FIG. 3.22 – Organigramme représentant la résolution explicite du système constitué par les équations (3.117) et (3.120).

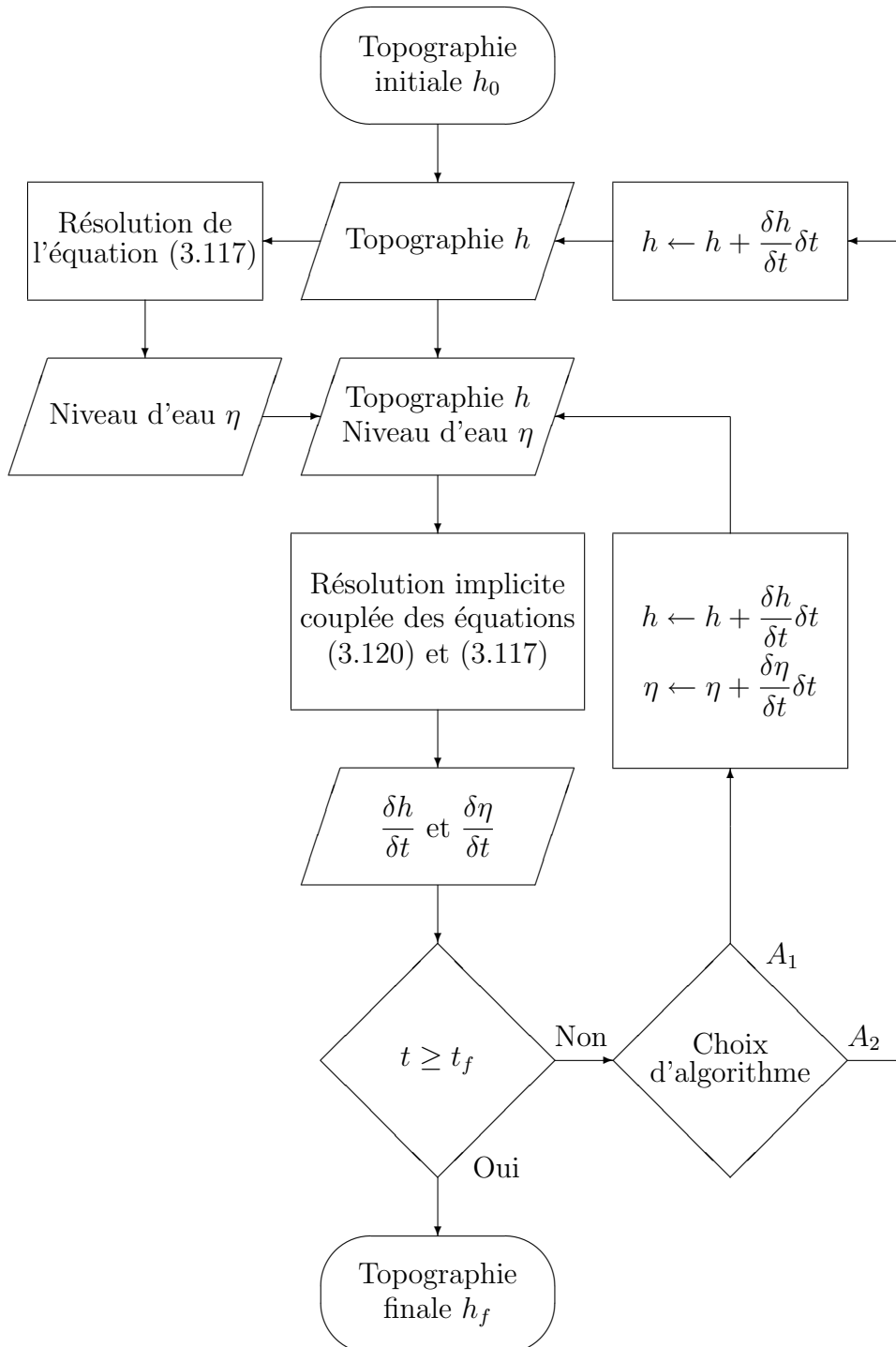


FIG. 3.23 – Organigramme représentant la résolution implicite du système constitué par les équations (3.117) et (3.120).

associé à la condition

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) = 0 \quad (3.130)$$

en  $y = \pm R/2$ . Ce système linéaire elliptique en  $\delta \eta_{p+1/2}/\delta t$  peut être résolu par la méthode des éléments finis.

**3.3.1.2.2 Formulation implicite du système complet** En appliquant à nouveau la formule (3.126) aux équations (3.117) et (3.120), sans oublier que dans le cas présent  $h$  est une fonction du temps, nous obtenons le système discret implicite suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} = & \frac{\partial}{\partial x_l} \left( d_p^3 \frac{\partial \eta_p}{\partial x_l} \right) - 3RS d_p^2 \frac{\partial d_p}{\partial x} \\ & + \Theta \delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \left( 3d_p^2 \frac{\partial \eta_p}{\partial x_l} \frac{\delta d_{p+1/2}}{\delta t} + d_p^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) \right) \right. \\ & \left. - 3RS \left( d_p^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta d_{p+1/2}}{\delta t} \right) + 2d_p \frac{\partial d_p}{\partial x} \frac{\delta d_{p+1/2}}{\delta t} \right) \right), \quad (3.131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t} = & -\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\phi(\theta_0 \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel)}{R \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel} \left( -\frac{\partial h_p}{\partial x_l} \gamma \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel + R(\tau_{l,p} + S\gamma \delta_{1,l} \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel) \right) \right) \\ & + \frac{\delta t \Theta}{R \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel^3} \left( \left( R \frac{\delta \tau_{l,p+1/2}}{\delta t} \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel^2 - \gamma \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t} \right) \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel^3 \right. \right. \\ & \left. \left. - R \frac{\delta \tau_{k,p+1/2}}{\delta t} \tau_{l,p} \tau_{k,p} \right) \phi(\theta_0 \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel) + \right. \\ & \left. \theta_0 \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel \left( -\frac{\partial h_p}{\partial x_l} \gamma \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel + R(\tau_{l,p} + S\gamma \delta_{1,l} \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel) \right) \right. \\ & \left. \frac{\delta \tau_{k,p+1/2}}{\delta t} \tau_{k,p} \phi'(\theta_0 \parallel \boldsymbol{\tau}_p \parallel) \right). \quad (3.132) \end{aligned}$$

Grâce aux définitions  $d = \eta - h$  et (3.121) de la hauteur d'eau et du cisaillement qui donnent

$$\frac{\delta d_{p+1/2}}{\delta t} = \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} - \frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t} \quad (3.133)$$

et

$$\frac{\delta \tau_{i,p+1/2}}{\delta t} = \delta_{1,i} \frac{\delta d_{p+1/2}}{\delta t} - \frac{1}{RS} \left( \frac{\partial \eta_p}{\partial x_i} \frac{\delta d_{p+1/2}}{\delta t} + d_p \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) \right), \quad (3.134)$$

les équations (3.131) et (3.132) forment un système linéaire elliptique pour le couple  $(\delta \eta_{p+1/2}/\delta t, \delta h_{p+1/2}/\delta t)$ . À nouveau, ce système peut être résolu par la méthode des éléments finis, en utilisant les conditions d'imperméabilité et de rigidité de la berge

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\delta \eta_{p+1/2}}{\delta t} \right) = 0 \quad (3.135)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\delta h_{p+1/2}}{\delta t} \right) = 0 \quad (3.136)$$

en  $y = \pm R/2$ .

### 3.3.1.3 Comparaison avec les résultats de la stabilité linéaire

Le logiciel FreeFem++ (Hecht et coll., 2007) permet de résoudre les problèmes linéaires des § 3.3.1.2.1 et 3.3.1.2.2 par la méthode des éléments finis. L'ensemble des résultats que nous présenterons ont été obtenus au moyen de l'algorithme  $A_2$  de la figure 3.23. Le domaine de résolution  $\Omega = [-\Lambda/2, \Lambda/2] \otimes [-1/2, 1/2]$  est décomposé en mailles carrées, dont la taille est de l'ordre de  $1/15$  (rappelons que la largeur de la rivière fixe l'échelle de longueur horizontale).  $\Lambda$  est la longueur de  $\Omega$  dans la direction  $x$ , c'est également la longueur d'onde maximale de la perturbation du fond. Les conditions aux limites en  $x = \pm\Lambda/2$  sont périodiques, tandis que les berges sont imperméables et rigides en  $y = \pm R/2$  (à l'exception du § 3.3.2.2). L'amplitude du pas de temps  $\delta t$  employé lors d'un calcul numérique peut varier considérablement selon la célérité et la vitesse de croissance de l'instabilité étudiée (0.01 est un ordre de grandeur typique).

La figure 3.24 illustre la comparaison des prédictions de la théorie de stabilité linéaire développée dans le § 3.2.1.1 avec les résultats d'une résolution numérique. Tant que l'amplitude de la perturbation demeure faible, les deux méthodes prédisent un taux de croissance similaire. Naturellement, à mesure que croît l'amplitude de la perturbation, les effets non linéaires influencent les résultats numériques, et la croissance de l'instabilité ralentit. Cette influence des termes non-linéaires apparaît également sur la figure 3.25. Le motif final de l'instabilité ne correspond plus aux formes sinusoidales (il s'agit du mode 2) de la perturbation initiale. La non-linéarité a introduit des longueurs d'ondes supplémentaires dans le spectre de la perturbation.

Précisons que, lors de la transcription des algorithmes de résolution numérique dont nous présentons ici les résultats, nous avons utilisé une hypothèse couramment et implicitement employée en géomorphologie (en particulier par les premiers articles traitant de la stabilité linéaire des rivières, voir Callander (1969), Engelund et Skovgaard (1973) ou encore Parker (1976)). Cette hypothèse consiste à négliger le terme de pente moyenne  $S$  dans l'expression du flux de sédiments (voir § 1.24, en particulier l'équation (1.29)). Dans le cas présent, cela revient à omettre le terme  $-S\delta_{1,l}$  de l'équation (3.120). L'erreur engendrée par cette approximation sur l'équation de dispersion linéaire, dans le cas d'un écoulement laminaire, s'écrit

$$\frac{iS\gamma (k_x^4\gamma + 2k_x^2k_y^2\gamma + k_y^4\gamma + 3ik_x^3S\gamma + 3ik_xk_y^2(1 + S\gamma))}{(k_x^2 + k_y^2 + 3ik_xS)(1 + S\gamma)}, \quad (3.137)$$

elle est donc négligeable pour une pente suffisamment faible. Les comparaisons avec la théorie linéaire présentées dans la suite tiennent compte de cette approximation : les taux de croissance sont calculés en omettant le terme de pente.

## 3.3.2 Les motifs d'érosion en chevrons

### 3.3.2.1 Un front d'érosion

Sous certaines conditions, lorsqu'un film d'eau s'écoule sur un matériau granulaire, des motifs d'érosion en forme de chevrons peuvent apparaître. Ces losanges

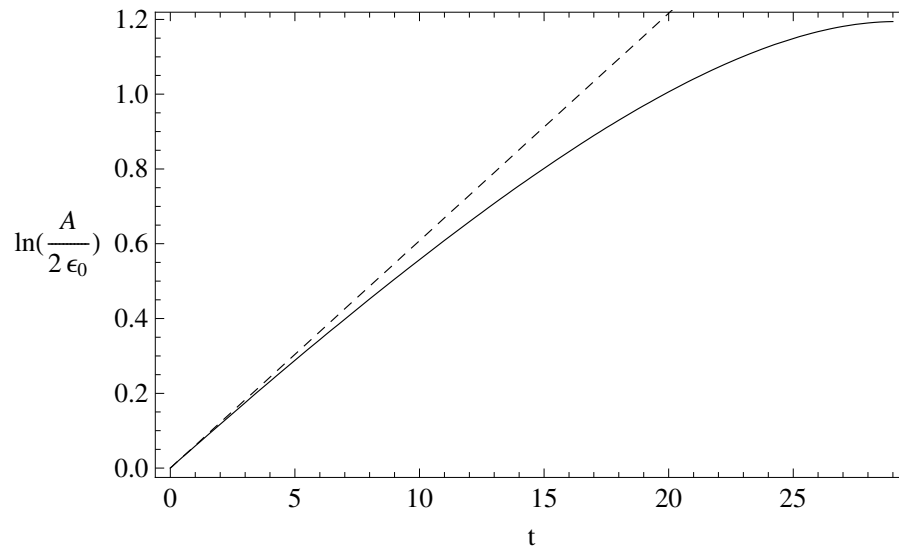


FIG. 3.24 – Évolution de l'amplitude d'une perturbation initialement sinusoïdale dans le cadre de la théorie linéaire (trait pointillé), et issu d'un calcul numérique approché (trait plein). La topographie initiale a pour équation  $h_0(x, y) = -1 + \epsilon_0 \sin(2\pi x/\Lambda) \cos(2\pi y)$ , avec  $\epsilon_0 = 0.1$ . Les valeurs des paramètres sont  $\beta = 3.75$ ,  $R = 200$ ,  $S = 0.0875$ ,  $\gamma = 1$ . Le taux de croissance  $\sigma$  issu de l'analyse de stabilité linéaire correspondant à cette instabilité vaut 0.061.

apparaissent comme l'intersection de lignes droites espacées régulièrement, et formant un angle aigu avec la ligne de plus grande pente. Dans la nature, on rencontre parfois ces motifs sur les plages, dans la zone de l'estran, après le retrait d'une nappe d'eau déposée par le ressac (voir la figure 1.4). Daerr et coll. (2003) ont reproduit ce phénomène en laboratoire, en extrayant une plaque recouverte d'un matériau granulaire d'un bain d'eau, à pente et vitesse constante. Le film d'eau entraîné par la plaque, en s'écoulant, peut former des motifs en chevrons. Des expériences préliminaires menées en collaboration avec L. Malverti et É. Lajeunesse à l'Institut de Physique du Globe de Paris ont montré que le développement de ces instabilités peut être obtenu par un dispositif expérimental plus simple, grâce auquel un régime permanent est rapidement atteint. Un simple canal droit à surface libre, incliné et alimenté en eau de manière continue, permet en effet, lorsque de la poudre de silice en recouvre le fond, d'observer la formation et le déplacement de motifs d'érosion en chevrons (voir la figure 3.26). Le tableau 3.3 réunit des valeurs indicatives pour les paramètres associés à ces expériences.

Le débit d'eau et l'inclinaison du canal conditionnent l'existence et la longueur d'onde des chevrons, qui peuvent coexister et interférer avec des instabilités de ride pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds. Lorsque les conditions de l'expérience en permettent l'apparition (voir le § 4.1), ces rides semblent déformer les motifs en chevrons jusqu'à leur donner une forme linguoïde. En dehors de ces circonstances, les chevrons se déplacent sans déformation visible. Tous ceux que nous



Paramètre	Valeurs typiques
Longueur du canal	1 m
Largeur du canal	5 cm
Débit d'eau	0.5 - 4 l.min <sup>-1</sup>
Inclinaison du canal	0.5 - 4 °
Diamètre des grains	100 μm
Masse volumique des grains	2.2 g.cm <sup>-3</sup>

TAB. 3.3 – Valeurs typiques des paramètres intervenant dans les expériences préliminaires de formation de chevrons en canal droit.

Grandeur	Valeurs typiques
Hauteur d'eau	0.5 - 4 mm
Longueur d'onde des chevrons <sup>5</sup>	5 - 20 cm
Angle aigu des chevrons	25 - 35 °
Vitesse de déplacement des chevrons <sup>5</sup>	1 - 10 mm.s <sup>-1</sup>

TAB. 3.4 – Valeurs typiques pour les grandeurs mesurées lors des expériences préliminaires de formation de chevrons en canal droit.

avons pu observer avançaient dans le sens de l'écoulement, à une vitesse bien inférieure à celle de l'eau. La valeur de l'angle aigu des chevrons varie peu dans toute la gamme des paramètres où ils existent. Le lecteur trouvera dans le tableau 3.4 les valeurs typiques des grandeurs observées.

### 3.3.2.2 Évolution non-linéaire d'une onde plane sinusoïdale

#### 3.3.2.2.1 Résultats numériques à nombre de Froude nul

**Formation d'un front** Comme nous l'avons vu au § 3.2.1.1, ce sont les conditions d'imperméabilité et de rigidité des berges qui imposent la forme en bancs alternés de l'instabilité de bancs (voir à ce sujet l'article récent de Hall (2007), dans le cas des rivières naturelles). En remplaçant les conditions à la berge en  $y = \pm 1/2$  par des conditions périodiques, nous nous ramenons au cas du § 3.1.1, pour lequel l'équation de dispersion est définie pour un nombre d'onde  $\mathbf{k}$  élément de  $\mathbb{R}^2$ . Il est alors possible d'étudier numériquement l'évolution non-linéaire d'une onde plane sinusoïdale isolée. La figure 3.27 permet de comparer l'onde plane initiale avec le mode non-linéaire correspondant pour  $t = 3$  : le modèle présenté dans cette étude semble bien prédire la formation d'un front. Les effets non-linéaires apparaissent plus clairement si l'on trace l'évolution du même mode non-linéaire dans l'espace des phases

<sup>5</sup>Mesurée dans le sens de l'écoulement.



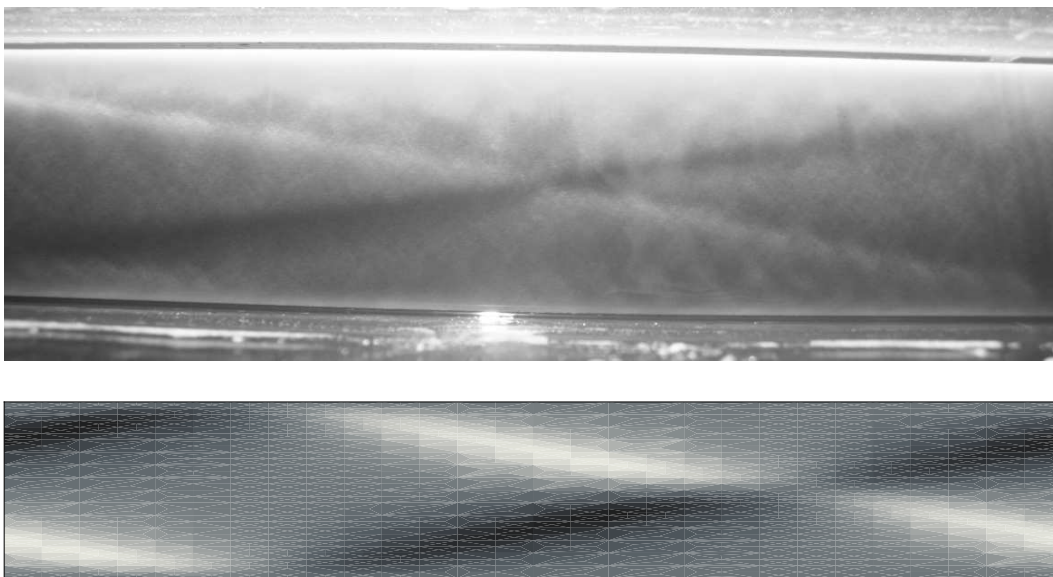


FIG. 3.26 – Motifs d'érosion en chevrons obtenus expérimentalement à l'Institut de Physique du Globe de Paris, dans un canal droit soumis à un écoulement d'eau permanent (au-dessus ; photographie : É. Lajeunesse, L. Malverti et l'auteur). Motifs d'érosion en chevrons obtenus numériquement (au-dessous), la dérivée de la topographie  $h$  selon la direction  $y$  est représentée par les niveaux de gris. Le nombre de Froude expérimental est de l'ordre de 1. Il est nul dans la simulation numérique. Defina (2003) et Hall (2006) ont récemment obtenu des résultats similaires pour des rivières turbulentes, par des méthodes respectivement numérique et analytique. Voir également la figure 1.4, qui présente des chevrons d'érosion en milieu naturel.

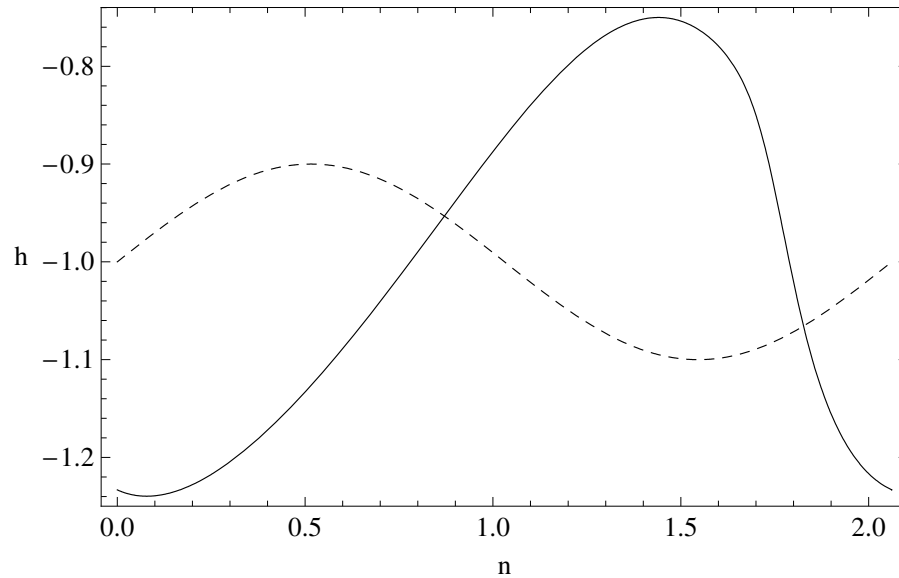


FIG. 3.27 – Croissance d’un mode non-linéaire d’instabilité de banc. À l’instant initial ( $t = 0$ ), la topographie est perturbée par une onde plane sinusoïdale (trait pointillé) :  $h_0(x, y) = -1 + \epsilon_0 \sin(2\pi(x/\Lambda + y))$ , avec  $\epsilon_0 = 0.1$  et  $\Lambda = 4$ . À l’instant ( $t = 3$ ), ce mode tend à former un front (trait plein). Les valeurs des paramètres sont  $\beta = 5$ ,  $S = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  et  $F = 0$ . La coordonnée d’espace  $n$  correspond à la direction propre de l’onde.

(figure 3.28). La déformation de l’ellipse correspondant à la perturbation initiale révèle un enrichissement spectral du mode, caractéristique des effets non linéaires. Le spectre de Fourier de ce mode à l’instant  $t = 3$  quantifie cet enrichissement spectral (figure 3.29).

Hall (2006) a établi l’équation d’amplitude qui représente l’évolution non-linéaire des bancs alternés dans une rivière turbulente, au voisinage du seuil d’érosion. Cette formulation du problème conduit à la formation de chocs d’érosion, dont la ressemblance avec les motifs expérimentaux et numériques que nous avons obtenus est frappante. L’application aux micro-rivières de la méthode développée par cet auteur apparaît donc naturellement comme une voie prometteuse.

**Déstabilisation du front** La formation d’un front décrite au paragraphe précédent suggère que les chevrons de la figure 1.4 sont la forme stationnaire<sup>6</sup> d’un mode non-linéaire, dont la stabilité initiale serait décrite par le modèle d’écoulement et d’érosion de la présente étude. En revanche, les expériences préliminaires présentées au § 3.3.2.1 mettent en évidence la stabilisation des chevrons au-delà d’une certaine amplitude, ce que ne prédit pas notre modèle (pour un nombre de Froude nul). En effet, si l’amplitude du mode non-linéaire étudié au paragraphe précédent

<sup>6</sup>Cette forme stationnaire semble se déplacer à vitesse constante, en ce sens il s’agit peut-être d’un soliton.

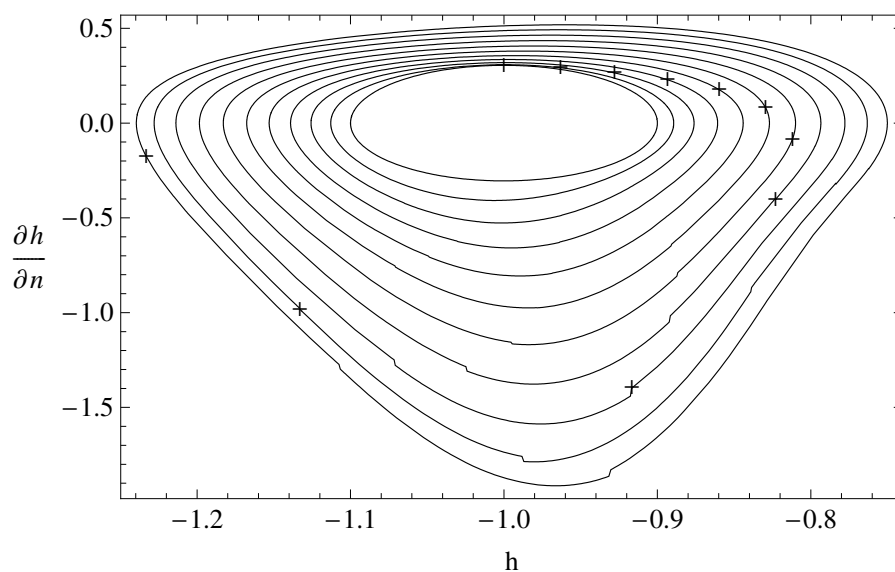


FIG. 3.28 – Déformation du mode non-linéaire de la figure 3.27 dans l'espace des phases. L'ellipse correspondant à l'instant initial (à l'intérieur des autres courbes) se déforme sous l'effet de la non-linéarité des équations de l'écoulement et du transport de sédiments. Le passage de chaque courbe vers la courbe qui l'entoure correspond à un pas de temps d'amplitude 0.3. La courbe extérieure correspond à l'instant  $t = 3$ . Chaque croix indique la position  $x = 0$ .

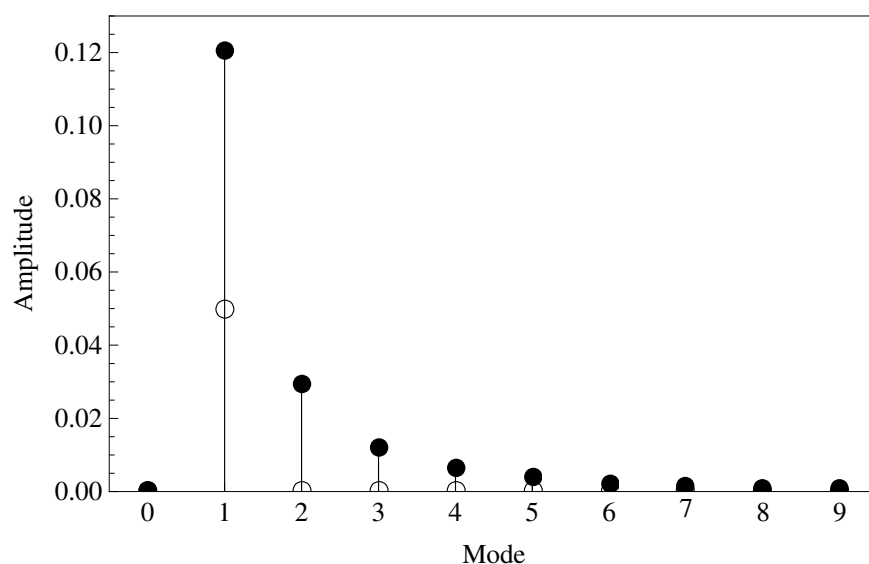


FIG. 3.29 – Enrichissement non-linéaire du spectre spatial de l'onde d'érosion représentée sur la figure 3.27. Les disques (respectivement les cercles) représentent l'amplitude de chacun des modes de la série de Fourier de l'instabilité à l'instant  $t = 3$  (respectivement  $t = 0$ ). La croissance du mode fondamental (mode 1) s'accompagne de l'apparition de modes harmoniques.

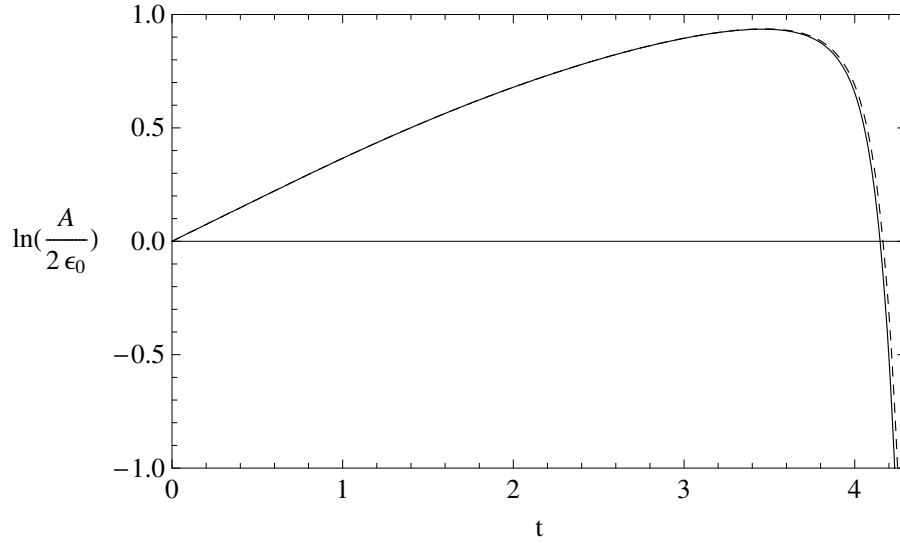


FIG. 3.30 – Évolution de l'amplitude  $A$  du mode non-linéaire de la figure 3.27, calculée sur deux maillages carrés différents : 1600 mailles (trait pointillé) et 6400 mailles (trait plein). La similarité des résultats de ces deux calculs conforte la validité de la résolution numérique. La décroissance de l'amplitude du mode non-linéaire au delà de l'instant  $t \approx 3.46$  tend à démontrer l'incapacité du présent modèle à prédire la stabilisation d'un front progressif d'érosion (au moins pour un nombre de Froude nul).

croît bien jusqu'à atteindre un maximum, elle décroît ensuite pour atteindre un niveau inférieur à celui de l'amplitude de départ. La figure 3.30 illustre ce phénomène. L'utilisation de deux tailles de mailles différentes ne modifie pas sensiblement ce résultat, confortant ainsi l'hypothèse d'une défaillance du modèle plutôt que de la méthode de résolution numérique employée.

### 3.3.2.3 Prédications de la théorie linéaire

Seule la prise en compte des termes non-linéaires des équations de l'écoulement et du transport de sédiments permet de prédire la formation et l'éventuelle stabilisation d'un front. Cependant, si l'amplitude de cette onde est suffisamment faible, la théorie linéaire du § 3.1 peut fournir une approximation de la vitesse de groupe du front d'onde. En effet, pour les longueurs d'onde très courtes, qui forment l'essentiel du spectre d'un front, l'équation de dispersion (3.13) peut être approchée par

$$\omega_c(k, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(k, \psi) = -\frac{ik^2\gamma}{1 + S\gamma} - \frac{5k \cos(\psi)(1 + 3\beta(1 + S\gamma) + (-1 + \beta + S\beta\gamma) \cos(2\psi))}{2(1 + S\gamma)(-5 + 3F^2(1 + \cos(2\psi)))}, \quad (3.138)$$

où  $k$  et  $\psi$  désignent respectivement la norme du vecteur d'onde, et l'angle formé entre la direction propre de l'onde et l'axe  $x$ . La théorie linéaire conduit donc à une

vitesse  $c_l$  pour le front, dont l'expression est la suivante

$$c_l(\psi) = \Re \left( \frac{\partial \omega_c}{\partial k} \right) = - \frac{5 \cos(\psi)(1 + 3\beta(1 + S\gamma) + (-1 + \beta + S\beta\gamma) \cos(2\psi))}{2(1 + S\gamma)(-5 + 3F^2(1 + \cos(2\psi)))}. \quad (3.139)$$

Pour des valeurs du nombre de Froude supérieures à  $F_c = \sqrt{5/6}$ , il existe un angle  $\psi_c$  pour lequel la vitesse  $c_l$  diverge. Cette divergence correspond au ressaut hydraulique, qui se forme lorsque la vitesse des ondes de gravité vaut exactement la vitesse moyenne du fluide (dans la direction normale à la perturbation du fond). Une explication possible pour la formation des motifs d'érosion en chevrons serait de les considérer comme la trace d'une instabilité liée au phénomène de ressaut hydraulique. En effet, les ondes stationnaires produites par les écoulements d'eau à petit nombre de Reynolds dans les canaux à surface libre déforment cette surface selon des motifs en chevrons, sans que le fond du canal soit érodable. Ces motifs sont produits par l'intersection des caractéristiques des ondes de gravité. L'allure de la vitesse  $c_l$ , tracée pour des valeurs réalistes des paramètres (voir figure 3.31), contredit cette proposition. En effet, l'angle aigu des chevrons observés expérimentalement (voir figures 3.26 et 1.4) est de l'ordre de  $30^\circ$ , ce qui correspond à une valeur de  $\psi$  nettement supérieure à la valeur de  $\psi_c$ . Notons également que la vitesse des fronts  $c_l$  est bien positive pour ces valeurs de l'angle des chevrons, conformément aux observations expérimentales.

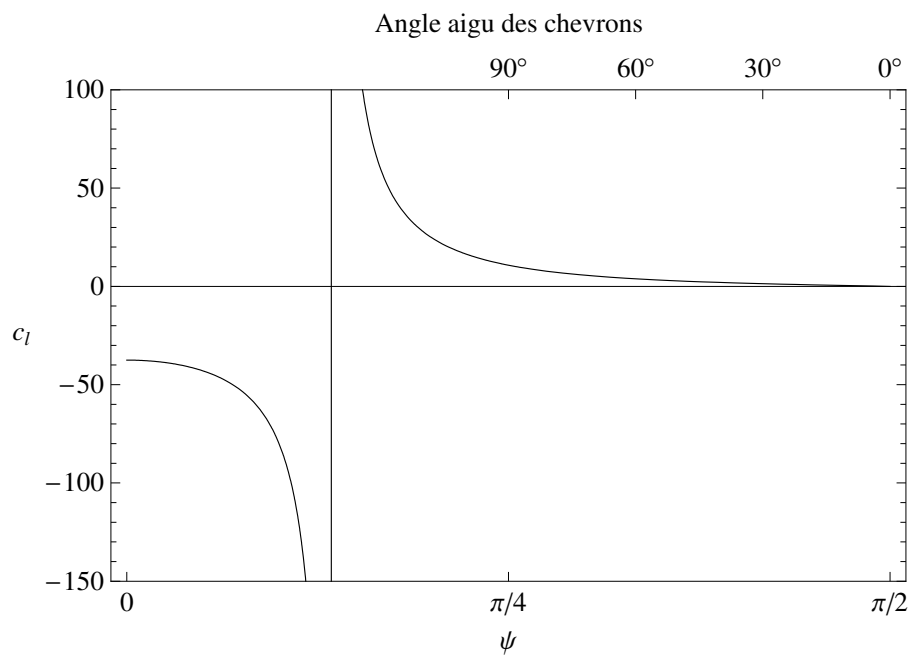


FIG. 3.31 – Allure de la vitesse  $c_l$  des fronts d'érosion prédite par la théorie linéaire, en fonction de l'angle formé par la direction propre de l'onde avec l'axe des  $x$ , dans un cas particulier. Les valeurs des paramètres sont  $\beta = 5$ ,  $S = 0.05$ ,  $\gamma = 1$  et  $F = 1$ . Les valeurs correspondantes de l'angle aigu des chevrons, indiquées sur la bordure supérieure du cadre, illustrent la distinction entre le phénomène d'instabilité d'érosion considéré dans la présente étude, et une instabilité de type ressaut hydraulique (mise en évidence par la divergence de  $c_l$ ).



# Chapitre 4

## Phénomènes invariants dans la direction transverse

### 4.1 Rides formées par un écoulement laminaire à surface libre

*Les résultats exposés ci-dessous (§ 4.1) sont le fruit du travail de K.-D. Nguyen Thu-Lam, qui a collaboré avec nous de juin à août 2007, sous la direction de P.-Y. Lagrée.*

#### 4.1.1 Écoulement dans un plan vertical

Par définition, les rides se développent uniformément dans la direction transverse, au moins dans les premiers instants de leur existence (voir § 1.1.2.2). L'étude exposée dans ce chapitre sera donc restreinte au plan vertical  $(O, x, z)$ . De plus, comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, nous supposons que l'écoulement du fluide est quasi-statique, c'est-à-dire que la formation des rides laisse à l'écoulement qui les engendre le temps d'atteindre un régime stationnaire, qui n'évolue qu'avec la forme du fond. Cette approximation requiert, outre la lenteur des phénomènes d'érosion, la stabilité de l'écoulement lui-même, qui ne peut être garantie que pour un nombre de Reynolds suffisamment petit. Nous admettrons qu'elle est vérifiée dans ce qui suit, en renvoyant le lecteur intéressé à Yih (1963). Les notations employées dans ce chapitre sont celles du § 2.1.

##### 4.1.1.1 Équations de Navier-Stokes et choix des dimensions

Si l'on considère un fluide newtonien (tel que l'eau, tant que sa concentration en sédiments demeure faible), le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \rho\nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.1)$$



et les équations de Navier-Stokes deviennent

$$v_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_m} = 0, \quad (4.3)$$

où nous employons la convention d'Einstein avec l'indice  $m$ , limitée dans le plan vertical ( $m = 1$  ou  $m = 3$ ). On admet, en première approximation, que la vitesse du fluide s'annule à la surface des sédiments<sup>1</sup> :

$$v_i|_{z=h} = 0. \quad (4.4)$$

La condition cinématique d'interface à la surface du fluide s'écrit

$$w|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} u|_{z=\eta}. \quad (4.5)$$

Enfin, si l'on considère que l'air n'exerce aucune contrainte à la surface du fluide, l'écoulement doit respecter la condition dynamique de surface :

$$\sigma_{i,m}|_{z=\eta} n_m = 0. \quad (4.6)$$

L'écoulement de base, pour un fond plat ( $h = 0$ ), est celui d'un film de Nusselt de hauteur  $\mathcal{H}$ , défini par l'équation (2.21). La vitesse débitante de ce film, choisie comme échelle de vitesse  $\mathcal{U}$ , vaut

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{H}^2 g_x}{3\nu}. \quad (4.7)$$

On choisit pour nouvelle échelle de pression  $\mathcal{P} = \rho \mathcal{U}^2$ . Dans ce système de dimensions, les équations de l'écoulement deviennent

$$v_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{3}{\text{Re}} (\delta_{i,x} - \frac{\delta_{i,z}}{S}) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_m} = 0, \quad (4.9)$$

où les grandeurs sont à présent sans dimension.  $\text{Re}$  désigne le nombre de Reynolds, et  $S$  la pente moyenne du support (voir le § 3.1). Ce changement de dimension n'affecte pas les conditions (4.4) et (4.5). La condition dynamique de surface s'écrit

$$\left( 1 - \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.10)$$

$$\text{Re} p - 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.11)$$

pour  $z = \eta$ .

<sup>1</sup>La condition d'adhérence peut être mise en défaut à l'interface d'un milieu granulaire, à cause de la porosité de ce dernier (Beavers et Joseph, 1967), et du mouvement des grains superficiels (Brivois et coll., 2007).

### 4.1.1.2 Équations linéarisées pour des rides de faible amplitude

**4.1.1.2.1 Écoulement au premier ordre** Considérons à présent le cas d'un écoulement sur un fond perturbé par une déformation sinusoïdale d'amplitude  $\epsilon$  infinitésimale. Au premier ordre en  $\epsilon$ , nous pouvons approcher l'écoulement par

$$\varphi(x, z) \approx \varphi_0(x, z) + \epsilon \varphi_1(z) e^{ikx}, \quad (4.12)$$

où les composantes du vecteur  $\varphi$  sont  $u$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $h$  et  $\eta$ . L'état de base s'écrit

$$\varphi_0 = \left( \frac{3}{2}z(2-z), 0, \frac{1-z}{F^2}, 0, 1 \right), \quad (4.13)$$

où le nombre de Froude  $F$  vérifie  $F^2 = SRe/3$ . On note  $\varphi_1$  la perturbation de l'écoulement et du fond :

$$\varphi_1 = (u_1(z), w_1(z), p_1(z), 1, \eta_1). \quad (4.14)$$

Toujours au premier ordre, les équations de Navier-Stokes (4.8) et (4.9) donnent

$$iku_0 u_1 + u_0' w_1 = -ikp_1 + \frac{1}{Re} (-k^2 u_1 + u_1''), \quad (4.15)$$

$$iku_0 w_1 = -p_1' + \frac{1}{Re} (-k^2 w_1 + w_1''), \quad (4.16)$$

$$iku_1 + w_1' = 0. \quad (4.17)$$

De même, les conditions aux bords (4.4), (4.5), (4.10) et (4.11) deviennent respectivement

$$u_1(0) + u_0'(0) = 0, \quad w_1(0) = 0, \quad w_1(1) - ik\eta_1 u_0(1) = 0, \quad (4.18)$$

$$ikw_1(1) + u_1'(1) + \eta_1 u_0''(1) = 0, \quad (4.19)$$

$$p_1(1) + \eta_1 p_0'(1) = \frac{1}{Re} (2w_1'(1) - ik\eta_1 u_0'(1)). \quad (4.20)$$

**4.1.1.2.2 Équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire** Si l'on définit la fonction courant  $\Psi$  de l'écoulement à l'ordre un par

$$u_1 = \Psi'(z), \quad w_1 = -ik\Psi(z), \quad (4.21)$$

le champ de perturbation de vitesse satisfait systématiquement l'équation de conservation de la masse (4.17). Les équations de conservation de la quantité de mouvement (4.15) et (4.16) conduisent à l'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire (ci-après OSS) :

$$\Psi^{(4)} - 2k^2\Psi'' + k^4\Psi = ikRe \left( \frac{3z}{2}(2-z)(\Psi'' - k^2\Psi) + 3\Psi \right). \quad (4.22)$$

Les conditions aux limites suivantes doivent lui être associées :

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = -3, \quad \Psi''(1) = -(2 + k^2)\Psi(1), \quad (4.23)$$

$$\Psi^{(3)}(1) = \left(3k^2 + \frac{3ik}{2}\text{Re}\right) \Psi'(1) - \frac{2}{S}ik\Psi(1). \quad (4.24)$$

**4.1.1.2.3 Solution analytique pour les grandes longueurs d'onde** Si l'on fait tendre vers 0 le nombre d'onde<sup>2</sup>  $k$  dans l'équation d'OSS, ainsi que dans les conditions aux limites associées, on peut approcher la solution par une série de puissances de  $k$  :

$$\Psi = \Psi_0 + k\Psi_1 + \mathcal{O}(k^2) \quad (4.25)$$

À l'ordre 0, le problème s'écrit

$$\Psi_0^{(4)} = 0, \quad \Psi_0(0) = 0, \quad \Psi_0'(0) = -3, \quad \Psi_0''(1) = -2\Psi_0(1), \quad \Psi_0^{(3)}(1) = 0, \quad (4.26)$$

dont la solution est

$$\Psi_0 = \frac{3z}{2}(z - 2). \quad (4.27)$$

Ce problème peut être traité analytiquement jusqu'à l'ordre 1 :

$$\Psi_1^{(4)} = 9iz\text{Re}(2 - z), \quad (4.28)$$

$$\Psi_1(0) = 0, \quad \Psi_1'(0) = 0, \quad \Psi_1''(1) = 0, \quad \Psi_1^{(3)}(1) = \frac{3i}{2}\text{Re}\Psi_1'(1) - \frac{2i}{S}\Psi_1(1), \quad (4.29)$$

dont la solution est

$$\Psi_1 = \frac{iz^2}{2S}(z - 2). \quad (4.30)$$

Finalement, on obtient le développement à l'ordre 1 en  $k$  de la fonction courant  $\Psi$  :

$$\Psi_S = \frac{z}{2}(z - 2)\left(3 + \frac{ikz}{S}\right). \quad (4.31)$$

#### 4.1.1.3 Comparaison avec le modèle de Saint-Venant

L'équation d'OSS obtenue au § 4.1.1.2 est écrite en variables adimensionnées, aussi la limite  $k \ll 1$  correspond-elle à  $\mathcal{H} \ll \mathcal{L}$ , où  $\mathcal{L}$  désigne l'échelle horizontale de longueur. En ce sens, le développement proposé au § 4.1.1.2.3 requiert les mêmes conditions que l'approximation de Saint-Venant (voir § 2.1). Par ailleurs, nous pouvons résoudre l'équation complète (4.22) numériquement : cette solution  $\Psi_N$  servira d'étalon pour la comparaison de la solution de Saint-Venant  $\Psi_{SV}$  et du développement  $\Psi_S$ .

Tant que l'on s'intéresse uniquement au transport de sédiments par charriage, l'écoulement ne modifie la topographie du substrat que par l'intermédiaire de la contrainte normale exercée par le fluide sur la surface de ce substrat (voir § 1.2). Nous ferons donc porter la comparaison de  $\Psi_{SV}$  et  $\Psi_S$  sur le cisaillement associé à chaque expression.

<sup>2</sup>Cette limite est ici entendue au sens strict, c'est-à-dire que l'on suppose également  $k\text{Re} \ll 1$  et  $k/S \ll 1$ .

**4.1.1.3.1 Contrainte à l'ordre 1, pour les solutions  $\Psi_S$  et  $\Psi_N$**  Par définition, la contrainte tangentielle  $\tau_t$  exercée par l'écoulement sur la surface des sédiments s'écrit

$$\tau_t = \tau_{ij}|_{z=h} n_i t_j, \quad (4.32)$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  désignent respectivement les vecteurs unitaires normal et tangentiel à la surface de sédiments. Ces deux vecteurs étant orthogonaux, la pression n'intervient pas dans le calcul, et la formule (4.1) devient, au premier ordre

$$\tau_t \approx \tau_{t,0} + \epsilon \tau_{t,1} e^{ikx} = \rho \nu u'_0(0) + \epsilon \rho \nu (ik w_1(0) + u'_1(0) + u''_0(0)) e^{ikx}. \quad (4.33)$$

Grâce aux relations (4.21), (4.13) et aux conditions aux limites (4.23), le rapport de l'amplitude de la perturbation de contrainte et de la contrainte de l'état de base prend la forme

$$\tau_* = \frac{\tau_{t,1}}{\tau_{t,0}} = \frac{\Psi''(0)}{3} - 1. \quad (4.34)$$

L'évaluation de  $\Psi_N$  permet de calculer directement  $\tau_{*,N}$ , la valeur approchée numériquement de  $\tau_*$ . La valeur approchée de  $\tau_*$  aux grandes longueurs d'onde s'écrit, d'après l'équation (4.31)

$$\tau_{*,S} = -\frac{2ik}{3S}. \quad (4.35)$$

**4.1.1.3.2 Contrainte à l'ordre 1, pour la solution  $\Psi_{SV}$**  Écrites dans la seule direction longitudinale, les équations de Saint-Venant (voir § 2.1) deviennent :

$$\frac{2\text{Re}}{5} u_{SV} \frac{\partial u_{SV}}{\partial x} = 1 - \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} (h + d) - \frac{u_{SV}}{d^2}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_{SV} d) = 0, \quad (4.37)$$

où  $u_{SV}$  désigne la vitesse débitante dans la direction  $x$ . Pour une perturbation sinusoïdale de faible amplitude, ces équations peuvent être linéarisées et résolues au premier ordre en  $\epsilon$  :

$$u_{SV,1} = -d_1 = \frac{5k}{15iS + k(5 - 2\text{Re}S)}, \quad (4.38)$$

où  $u_{SV,1}$  désigne l'amplitude du premier ordre de la perturbation de  $u_{SV}$ . En revenant à la définition du champ de vitesse approché pour les équations de Saint-Venant (2.21), la relation (4.33) donne

$$\tau_{t,SV} \approx 3\rho\nu + 3\rho\nu\epsilon(u_{SV,1} - d_1)e^{ikx}, \quad (4.39)$$

Cette relation est équivalente au premier ordre à  $3\rho\nu u_{SV}/d$ , formule que nous avons couramment employée précédemment. Finalement, la valeur de  $\tau_*$  approchée par les équations de Saint-Venant, s'écrit

$$\tau_{*,SV} = \frac{10k}{15iS + k(5 - 2\text{Re}S)}, \quad (4.40)$$

dont le développement au premier ordre en  $k$  donne bien à nouveau la relation (4.35).

**4.1.1.3.3 Comparaison des deux modèles** Le modèle de Saint-Venant et le développement en puissances du nombre d'onde  $k$ , quoique reposant tous deux sur l'hypothèse de grande longueur d'onde, conduisent à des résultats sensiblement différents. La figure 4.1 permet de comparer les prédictions du cisaillement  $\tau_*$  par ces deux modèles à la solution numérique des équations complètes. Naturellement, les trois prédictions sont identiques au premier ordre en  $k$ . Cependant, les prédictions du modèle de Saint-Venant demeurent correctes jusqu'à des nombres d'onde de l'ordre de 0.1, contrairement au développement en puissances de  $k$ , et ce, pour une valeur relativement élevée du nombre de Reynolds ( $Re = 50$ ). Ce comportement illustre la supériorité de la méthode consistant à projeter la solution réelle sur un mode proche du profil d'équilibre (voir § 2.1.2), par rapport à un développement standard. Notons en outre que la première méthode requiert des calculs plus brefs que la seconde. La grande faiblesse de l'approximation de Saint-Venant est son inaptitude à décrire correctement le déphasage de l'écoulement par rapport à la topographie du fond, ce qui est indifférent tant que l'instabilité de bancs est concernée, mais devient crucial lorsque l'on décrit la formation de rides.

## 4.1.2 Couplage avec l'érosion

### 4.1.2.1 Équation de dispersion

Par l'intermédiaire de la loi de transport (1.29), nous pouvons déduire le flux de sédiments  $q_x$  de la contrainte  $\tau_t$ . Au premier ordre en  $\epsilon$ , cette loi s'écrit :

$$q_1 = \beta\tau_* - ik, \quad (4.41)$$

où le coefficient  $\beta$  dépend de la loi d'érosion (voir § 3.1.1.2). Enfin, l'équation de conservation de la masse de sédiments,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}, \quad (4.42)$$

permet de déterminer la pulsation complexe d'une perturbation<sup>3</sup> :

$$\omega = kq_1 = \beta k\tau_* - ik^2\gamma. \quad (4.43)$$

Notons que nous avons considéré ici que la loi d'érosion détermine le flux horizontal de sédiments,  $q_x$ . Plus rigoureusement, cette loi fixe le flux tangent à la surface de sédiments ; l'erreur induite par cette approximation est d'ordre 2 en  $\epsilon$ .

Le taux de croissance obtenu en déterminant la partie imaginaire de  $\omega$  doit être dimensionné, si l'on souhaite le comparer aux résultats des expériences décrites au § 3.3.2.1. L'échelle de temps d'érosion  $T_e$ , issue de l'équation d'Exner, s'écrit (voir § 3.1.1)

$$T_e = \frac{\mathcal{H}^2}{Q_s}, \quad (4.44)$$

---

<sup>3</sup>Tant que le temps n'apparaît pas explicitement dans les équations de l'écoulement, nous pouvons sans inconvénient ne l'introduire qu'ici.

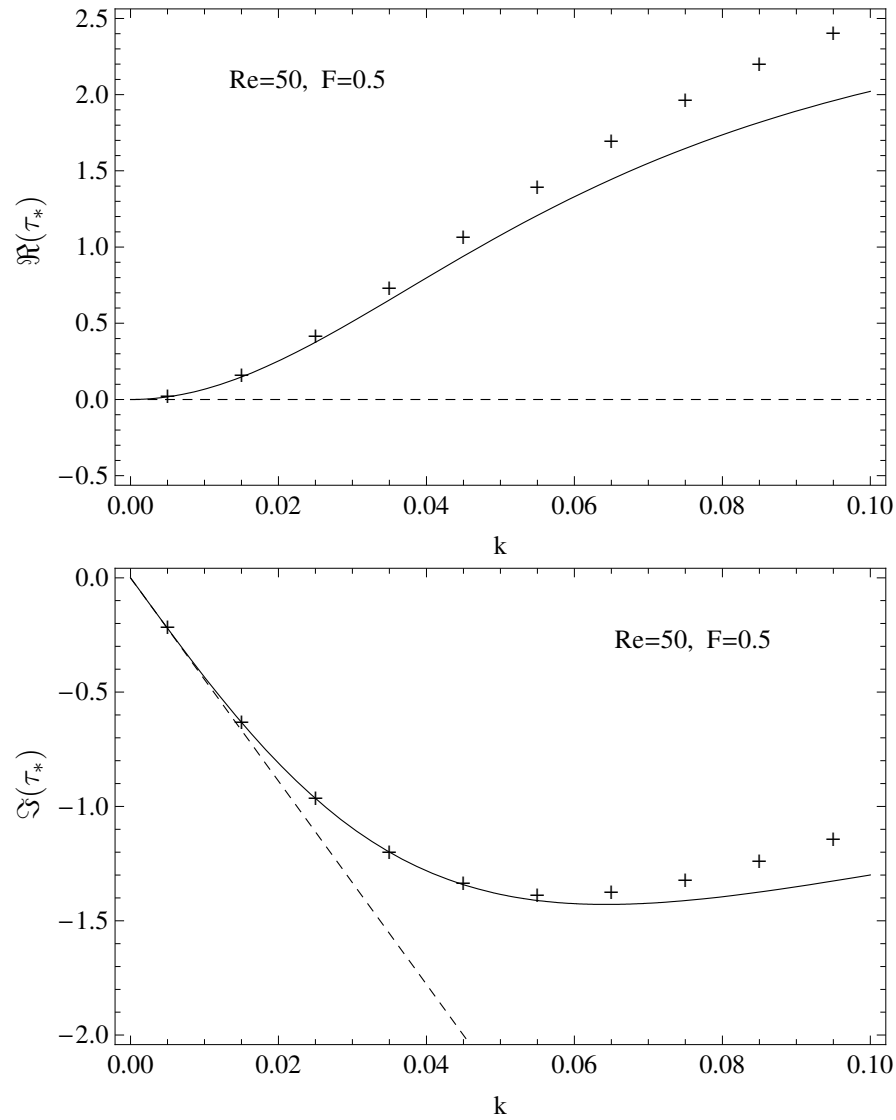


FIG. 4.1 – Contrainte de cisaillement  $\tau_*$  exercée par le fluide sur le substrat, en fonction du nombre d'onde  $k$  de la perturbation du fond. Ces deux grandeurs sans dimension ont été approchées par trois méthodes différentes. Croix : estimation numérique de référence ( $\tau_{*,N}$ ). Trait plein : prédiction des équations de Saint-Venant ( $\tau_{*,SV}$ ). Trait pointillé : développement à l'ordre un pour les grandes longueurs d'onde ( $\tau_{*,S}$ ). Les valeurs des paramètres sont  $Re = 50$  et  $F = 0.5$ . (Voir la suite page 134.)

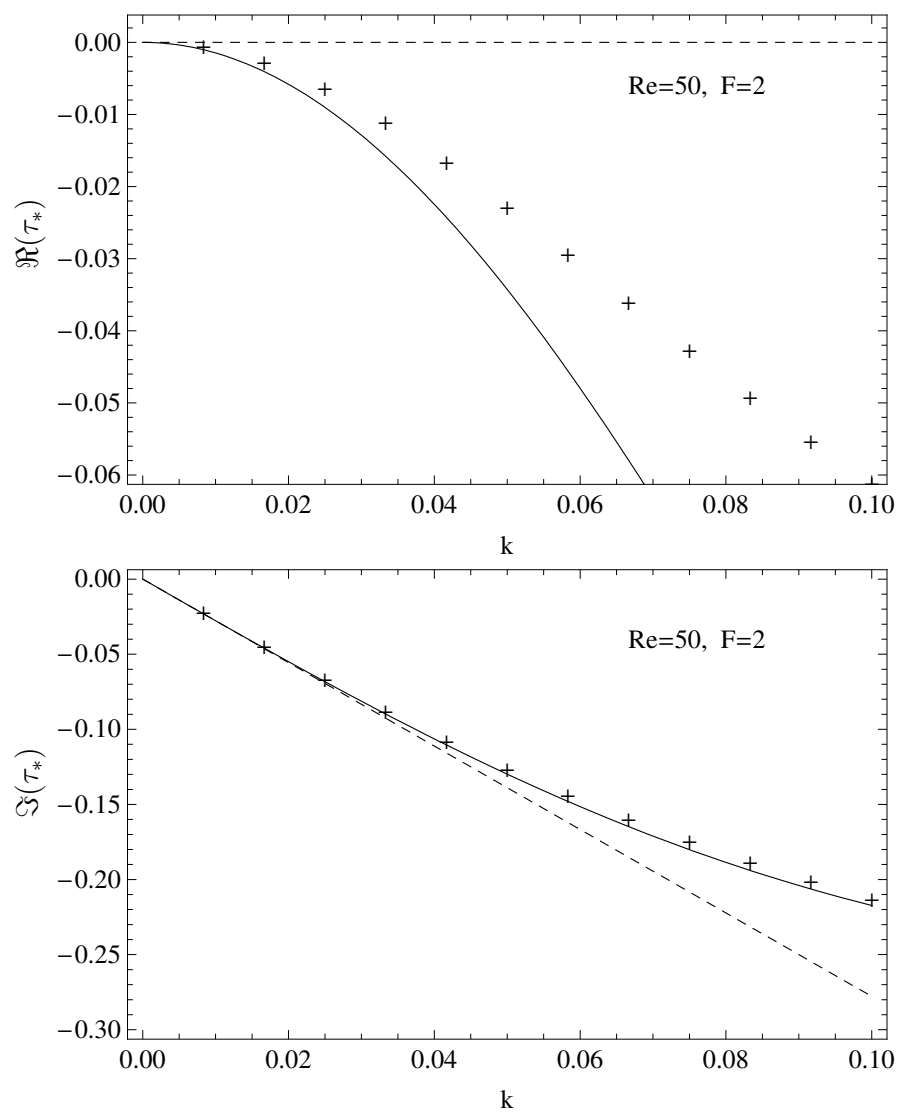


FIG. 4.1 – (Suite de la page 133.) Le nombre de Froude  $F$  vaut ici 2. Pour un nombre de Reynolds relativement élevé, les prédictions du modèle de Saint-Venant laminaire demeurent correctes pour des longueurs d'onde de l'ordre de, ou supérieures à, cent fois la profondeur du fluide.

où  $\mathcal{Q}_s$  désigne le flux de sédiments de l'état de base. Les relations (1.13), (1.23), (1.12), (2.30) et (3.35) conduisent à

$$T_e = \frac{183^{2/3} \text{Re}^{2/3} \nu^{7/3} \rho}{d_s^3 g^{5/3} S^{2/3} (1 + S\gamma) (\rho_s - \rho) \chi_s \phi \left( \frac{3^{1/3} \text{Re}^{1/3} (S\nu)^{2/3} \rho}{d_s g^{1/3} (\rho_s - \rho)} \right)}. \quad (4.45)$$

Les ordres de grandeur des différents paramètres constants impliqués dans la définition du temps caractéristique figurent dans le tableau 3.3. Si l'on représente les grains par des sphères identiques, la fraction volumique  $\chi_s$  occupée par les sédiments dans le substrat varie entre 0.56 et 0.64 (Valverde et Castellanos, 2006); nous fixerons arbitrairement dans la suite  $\chi_s = 0.6$ .

#### 4.1.2.2 Influence du terme de pente

Dans la relation de dispersion associée à l'instabilité de ride (4.43), tout comme pour l'instabilité de banc, la diffusion de sédiments liée à la pente du substrat intervient par l'intermédiaire du terme  $-\gamma ikh$ . La taille caractéristique des bancs étant en général bien supérieure à la hauteur d'eau, ce terme, quoique du premier ordre en  $\epsilon$ , demeure néanmoins petit. La longueur d'onde des rides expérimentales, en revanche, est le plus souvent comprise entre une et dix fois la hauteur d'eau (voir figure 1.8). Comme le souligne Kouakou (2005), l'influence de ce terme est alors déterminante : les taux de croissance linéaires de rides présentés sur la figure 4.2 varient considérablement avec la valeur de  $\gamma$ . Il n'est pas envisageable, dans la présente étude, d'évaluer le coefficient  $\gamma$  (voir § 1.2.3); nous nous contenterons de fixer dans la suite sa valeur à 10, afin que la longueur d'onde du mode le plus instable s'accorde aux ordres de grandeur expérimentaux (voir figure 4.2). Comme nous l'avons souligné au § 1.1.2.2, cette méthode conduit à surestimer la valeur de  $\gamma$ , puisque, pour des valeurs suffisamment élevées du nombre de Reynolds, c'est l'inertie des grains charriés, ou la lenteur de la sédimentation, qui contrôle la longueur d'onde (Lagrée, 2003; Charru, 2006). Par simplicité, nous n'introduirons pas ici ce mécanisme : ce choix explique la valeur artificiellement élevée de  $\gamma$  que nous utilisons dans le cas des rides, tandis que nous conservons la valeur standard  $\gamma = 1$  tant que l'instabilité de banc nous occupe (notamment pour la figure 4.3).

#### 4.1.2.3 Diagramme de stabilité

Les expériences préliminaires décrites au § 3.3.2.1, au cours desquelles un substrat granulaire est érodé par un écoulement laminaire à surface libre, conduisent à la formation de deux types de motifs distincts : les chevrons, décrits au § 3.3 et les rides, dont traite le présent chapitre. Le diagramme de la figure 4.3 résume les résultats expérimentaux, ainsi que ceux des analyses de stabilité linéaire des § 4.1.2.1 et 3.2.1.3, qui concernent respectivement les rides et les bancs alternés (dont nous supposons qu'ils sont les précurseurs des chevrons).



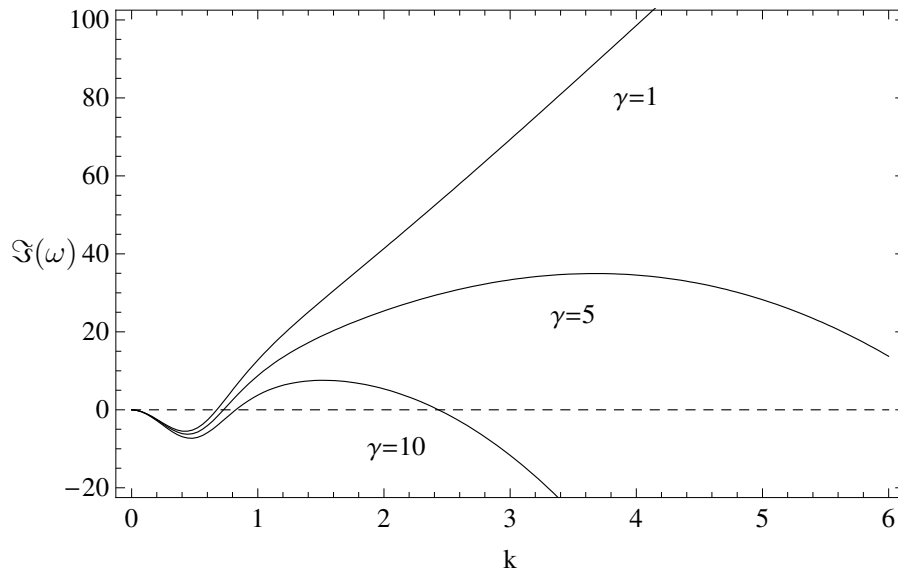


FIG. 4.2 – Taux de croissance de rides formées par un écoulement laminaire, en fonction du nombre d’onde  $k$ , pour différentes valeurs du paramètre de diffusion  $\gamma$ . Le nombre de Reynolds, la pente moyenne de l’écoulement et l’exposant de la loi d’érosion, valent respectivement  $Re = 300$ ,  $S = 0.02$  et  $\beta = 3.75$ . Si la valeur de  $\gamma$  n’influence que modérément l’instabilité de bancs, elle modifie en revanche considérablement le taux de croissance et la longueur d’onde des rides les plus instables.

En utilisant l’expression du temps caractéristique  $\mathcal{T}_e$  donnée par l’équation (4.45), on peut déterminer les domaines du plan  $(Re, S)$  où le taux de croissance des rides permet leur observation. L’établissement de cette courbe de stabilité requiert des temps de calcul numérique très élevés lorsqu’augmente la valeur du nombre de Reynolds. L’épaisseur de la sous-couche visqueuse est en effet d’ordre  $\mathcal{H}/Re^{1/3}$ , ce qui impose de raffiner le pas d’espace de la résolution numérique lorsque  $Re$  croît. Ceci explique que la courbe de stabilité des rides ne parcourt pas la totalité de l’espace des paramètres sur la figure 4.3. Le domaine de stricte instabilité des bancs est représenté sur le même plan. La grande majorité des motifs observés entrent bien dans leur domaine théorique d’instabilité. L’incertitude quant à la valeur du paramètre  $\gamma$  empêche la comparaison directe des taux de croissance de chaque type d’instabilité.

Au regard des résultats expérimentaux préliminaires résumés dans la figure 4.3, les prédictions des théories de stabilité linéaires associées à l’apparition des rides et des chevrons d’érosion sont acceptables. La comparaison avec d’autres paramètres des instabilités mesurables expérimentalement, tels que la vitesse de phase et les longueurs d’onde longitudinale et transverse, devrait permettre d’affiner les modèles utilisés ici, notamment en ce qui concerne la loi d’érosion.

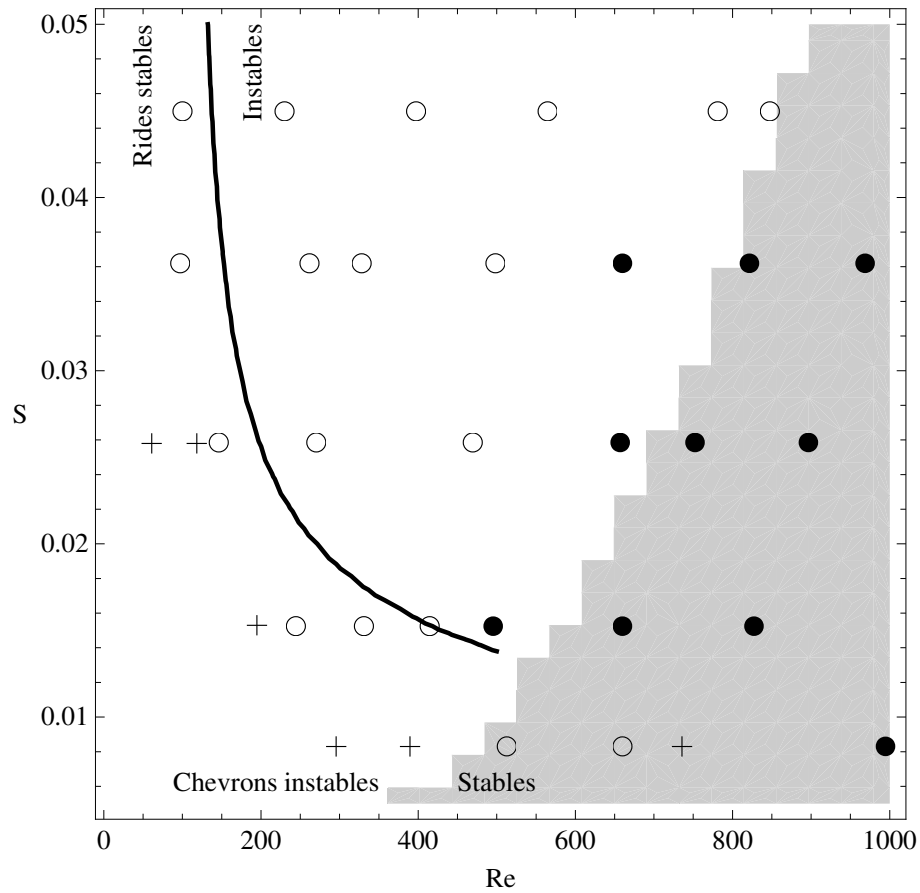


FIG. 4.3 – Les deux principaux motifs d'érosion observés dans un canal laminaire, réunis dans le plan (nombre de Reynolds, inclinaison du canal). Les symboles  $\bullet$ ,  $\circ$  et  $+$  représentent respectivement les rides, les chevrons, et l'absence de motif. La zone grisée correspond au domaine de stabilité stricte des chevrons. La courbe en trait gras indique un taux de croissance dimensionnel égal à  $1/30 \text{ s}^{-1}$  pour l'instabilité de rides. Le coefficient  $\beta$  vaut 3.75, tandis que  $\gamma$  est choisi égal à 10 pour les rides, et à 1 pour les bancs (voir § 4.1.2.2). Les ordres de grandeur proposés dans la présente étude correspondent aux résultats expérimentaux, mais une loi d'érosion plus détaillée sera nécessaire pour comparer quantitativement les taux de croissance linéaires des deux types d'instabilité.

## 4.2 Ligne de contact mobile sur un matériau poreux

*Ce chapitre est la transcription de l'article Devauchelle et coll. (2007b), aux modifications éditoriales près. Les notations y sont indépendantes de celles des chapitres précédents ; en particulier,  $h$  et  $H$  font ici référence à l'épaisseur du film liquide.*

### 4.2.1 Introduction

When sea retreats from the shore, sand structures appear as solid granular particles are transported *via* the liquid. Liquid motion and particularly film retraction on an erodible medium are known to create impressive erosion patterns, such as sand ripples for oscillatory waves (Stegner et Wesfreid, 1999; Scherer et coll., 1999) or sand furrows (Daerr et coll., 2003; Schorghofer et coll., 2004). The case of liquid retraction from a granular bed can be understood as a dewetting dynamics on a porous erodible bed. Such physical phenomena have been reproduced in the laboratory by pulling a plate covered with a bed of grains out of a liquid bath (Daerr et coll., 2003). This situation is similar to the well-known experiment investigating a moving contact line on a non-porous plate (Blake et Ruschak, 1979). In this latter case, a contact line exists for small removal speed  $U$ , whereas for higher speed (above a well-defined critical value  $U_{cr}$ ) a macroscopic water film (the so-called Landau-Levich-Derjaguin film (denoted LLD later on), see Landau et Levich (1942); Derjaguin (1943)) covers the whole plane (Eggers, 2004a). We propose here to investigate this transition for a saturated porous medium, in connection with recent experiments involving granular materials by Daerr et coll. (2003). There, a motor-driven plane, covered with a granular layer, is withdrawn from a water tank at constant speed  $U$ . The solid plane is tilted to an angle  $\theta$ . At high enough velocity, erosion river networks and mudflows are observed, whereas only light patterns appear at smaller speed. We investigate the loss of a static contact line and seek to relate it to the transition between various erosion regimes. We therefore seek the critical velocity above which no static contact line can exist on a granular bed. Below this critical velocity, almost no grain motion is observed so that we identify the granular bed with a rigid porous medium. Dewetting on a porous medium has already been studied in different configurations (see Raphaël et de Gennes (1999); Aradian et coll. (2000); Bacri et Brochard-Wyart (2001) and references herein). The case of a porous plate removed from a liquid was studied by Raphaël et de Gennes (1999), but the focus was on the spatial evolution of the LLD film, the existence of which was assumed. The contact line dynamics was also studied (Aradian et coll., 2000) on a horizontal porous plate into which a liquid film is sucked. From a more theoretical point of view, the problem of a moving contact line on a porous solid is pointed out by de Gennes (1985) as a natural regularization for the contact line dynamics equations. The bulk liquid flow through the porous solid indeed removes the usual stress singularity that one would encounter at a contact line with a no-slip condition (Dussan V. et Davis, 1974).

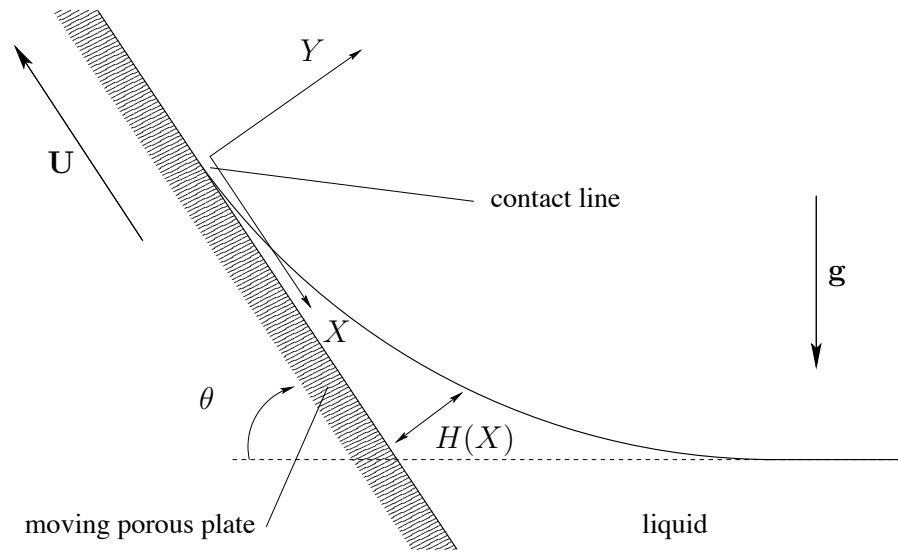


FIG. 4.4 – A porous plate of conductivity  $k$  is being withdrawn from a liquid bath with speed  $U$  at angle  $\theta$ .  $h$ ,  $x$  and  $y$  are the non-dimensional counterpart of  $H$ ,  $X$  and  $Y$ .

No additional assumption, such as the introduction of a Navier slip at microscopic scale, is then required. However, another question arises when considering a porous medium : what is the relevant condition for the contact angle at the contact line? As discussed below, we propose here for a saturated system to take a zero contact angle.

The paper is organized as follows : in the next Section, we use the lubrication approximation to deduce the equation for the static interface shape, both for the contact line and a film solution that does not remove nor add water to the tank, hereafter referred to as a *zero-flux film* (a true LLD film has a finite flux, and its equation is different, see Appendix 4.2.7.1). In Section 4.2.3 we exhibit numerically the transition between these two configurations as the pulling velocity increases. Then, we propose to interpret the solutions in the framework of dynamical systems (Section 4.2.4).

## 4.2.2 Principles

### 4.2.2.1 Lubrication approximation

Our approach seeks to determine the velocity (if any) above which the static contact line can no longer exist in a granular bed withdrawal experiment. Below this velocity, we can consider that the grains almost do not move with respect to the withdrawn plate. Thus the granular material is represented by a non-erodible porous medium (see Figure 4.4) of permeability  $k$ , and we only have to investigate the stationary problem. The fluid is characterized by its density  $\rho$ , viscosity  $\eta$  and surface tension  $\gamma$ . Assuming invariance in the  $Z$ -direction, we consider the two-

dimensional problem where the water surface is described by the function  $H(X)$ . At the beginning of the experiment, the porous plate is saturated with water. For the plate velocities pertinent to the problem (typically  $0.5 \text{ cm.s}^{-1}$ ) and the estimated porosity of the granular bed ( $k \approx 10^{-12} \text{ m}^2$ ) we can consider that the porous medium remains fully saturated with water at any distance from the free water level.

We will restrict our analysis to small angles  $\theta$  so that the lubrication approximation can be employed (*i.e.*  $(\theta, \|H'\|) \ll 1$  where the  $'$  stands for the  $X$ -derivative). Only the  $X$ -component  $u$  of the velocity has to be taken into account, for which Poiseuille profile is assumed, with a vanishing tangential stress on the gas side :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial Y} \right|_{Y=H(X)} = 0. \quad (4.46)$$

Another boundary condition has to be written at the porous surface. The classical no-slip condition, as required at the solid-fluid interface on an impermeable plate, leads to the following equation for  $H(X)$  (its derivation is similar to the one presented in Appendix 4.2.7.1) :

$$H''' + \frac{1}{l_c^2}(-H' + \theta) = \frac{3\text{Ca}}{h^2}, \quad (4.47)$$

where  $l_c$  and  $\text{Ca}$  are respectively the capillary length ( $l_c \approx 2.8 \text{ mm}$  for water) and the capillary number, defined by

$$\text{Ca} = \frac{\eta U}{\gamma}, \quad l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}. \quad (4.48)$$

Equation (4.47) and any derivative of its solutions are singular at the contact line, where  $H = 0$  (Duffy et Wilson, 1997). For a non-porous surface, a short-length regularization is invoked coming either from effective slip near the contact line (Huh et Scriven, 1971), the existence of a pre-wetting liquid film and Van der Waals forces (de Gennes, 1984; Hervet et de Gennes, 1984) or a “diffuse interface model” (Seppecher, 1996). Such a regularization always involves a microscopic cut-off length (on the order of 1 nm) below which it is claimed that hydrodynamics fails. The Navier slip condition is then mostly used in numerical simulations investigating moving contact line problems (Renardy et coll., 2001). This condition reads at the solid-fluid interface :  $u - U = \lambda_N \partial u / \partial Y$  at  $Y = 0$  where  $\lambda_N$  is the cut-off length. With this boundary condition, Equation (4.47) becomes

$$H''' + \frac{1}{l_c^2}(-H' + \theta) = \frac{\text{Ca}}{H^2/3 + \lambda_N H}. \quad (4.49)$$

Equation (4.49) can be numerically solved and analytically approached. A contact line is then found to exist as long as the capillary number is smaller than a critical value, above which a macroscopic LLD film is deposited on the solid (Eggers, 2004a). Notice however that not all the singularities discussed above are suppressed by the Navier slip condition since the capillary pressure still diverges at the contact line (see Appendix 4.2.7.2).

### 4.2.2.2 The case of porous solid

A porous solid allows for both interfacial slip (first proposed by Beavers et Joseph (1967)) and bulk flow. Using the Brinkman equation to describe the flow inside the porous medium, Neale et Nader (1974) showed that, for a homogeneous porous media, the magnitude of the slip is proportional to the prevailing shear stress :

$$u|_{Y=0} - u_p|_{Y=0} = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \left. \frac{\partial u}{\partial Y} \right|_{Y=0}, \quad (4.50)$$

where  $k$  is the permeability of the solid, and  $u_p$  the velocity of the fluid in the porous medium (note that this relation holds both in the laboratory frame and in the porous plate one).  $\alpha$  is a coefficient of order one that must be experimentally measured. It has been identified by Neale et Nader (1974) to  $\sqrt{\mu^*/\mu}$  where  $\mu^*$  is the effective dynamical viscosity of the fluid in the porous medium, used in the Brinkman equation.  $\alpha$  was experimentally measured for different porous media and different fluids, and was found to vary generally between 0.1 and 4. The Brinkman equation produces a boundary layer (of typical depth  $\sqrt{k}$ ) in the porous medium (Goyeau et coll., 2003), below which the flow follows Darcy's law.

Now, if the porous plate is thin enough (see Appendix 4.2.7.3), the water flow inside the porous medium is nearly one dimensional, and is controlled by the pressure boundary condition at the interface with free-water. Finally, let us assume that the plate remains fully saturated during the full experiment, which is true for a sufficient withdrawal velocity. Darcy's law reads

$$u_p + U = -\frac{k}{\eta} \left( \frac{\partial p_p}{\partial X} - \rho g \theta \right), \quad (4.51)$$

(where  $p_p$  is the water pressure in the porous medium) and finally the Equation hereafter describes the shape of the steady fluid film under withdrawal (the detailed derivation is presented in Appendix 4.2.7.1) :

$$H''' + \frac{1}{l_c^2}(-H' + \theta) = \frac{\text{Ca}}{H^2/3 + \sqrt{k}H/\alpha + k}. \quad (4.52)$$

If we choose  $l_c$  as a length scale for both  $H$  and  $X$  (*i.e.*  $H = l_c h$  and  $X = l_c x$ ), the above equation becomes

$$h'' - h' + \theta = \frac{\text{Ca}}{h^2/3 + \lambda h/\alpha + \lambda^2}. \quad (4.53)$$

where  $\lambda = \sqrt{k}/l_c$ .  $h$  and  $x$  are now non-dimensional quantities (and will remain so hereafter). Such an equation is similar to those studied for the contact line on a solid surface, using specific boundary conditions at the solid surface (Eggers, 2004a; Hocking, 2001). It has been shown (in the case of a plate *pushed* into water) that the details of the regularization do not influence the far-field fluid flow as long as the cut-off length is small enough (Eggers, 2004b). However, an important difference in

our case lies in the typical values of  $\lambda$  involved in porous media ( $\approx 10^{-2}$  in Daerr et coll. (2003)) to be compared with  $10^{-6}$  for regular solids.

Here we would like to point out that in recent papers (Maurer et coll., 2003; Hadjiconstantinou, 2003) a second-order slip law is used to model the flow of gases at large Knudsen numbers. This boundary condition (adapted to the present notations) reads

$$u|_{Y=0} + U = \Lambda_C \left. \frac{\partial u}{\partial Y} \right|_{Y=0} - \alpha_C \Lambda_C^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right|_{Y=0}, \quad (4.54)$$

where  $\alpha_C$  is a positive coefficient of order one, and  $\Lambda_C$  is a slip length of the same order than the mean free path of the gas. If such a boundary condition were used at the solid-fluid interface in the case of a contact line, again Equation (4.53) would be obtained.

#### 4.2.2.3 Boundary conditions

The limit for large positive values of  $x$  is well-defined : the water surface is horizontal far from the plane, that is

$$h(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \theta x. \quad (4.55)$$

For the two remaining boundary conditions, two different cases will be studied, depending on whether a contact line is formed between the water surface and the solid plate, or if a film of water remains on the solid surface. In the first case, the water level vanishes at the origin and a contact angle  $\theta_0$  is usually imposed ; the *contact line set* of boundary conditions is

$$\begin{cases} h(0) = 0, \\ h'(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.56)$$

In the present problem, three different contact angles may be defined, depending on the considered scale. At a scale smaller than the pore size, the *microscopic contact angle* is a chemical property fixed once the liquid, the gas and the solid are specified. This microscopic contact angle may be different from zero in this study. At a scale larger than the pore size, but smaller than the capillary length, one may define  $\theta_0$ , which will be hereafter referred to as *contact angle* ( $\theta_0$ ). This angle results from pore-scales effects, and is analogous to the contact angle defined on an heterogeneous medium (see de Gennes et coll. (2005)). It may be affected by hysteresis, but in the present case only its receding value must be considered. Finally, at the capillary length scale, an *apparent contact angle* ( $\theta_{ap}^*$ ) is defined mathematically as the limit of the meniscus solution slope when  $x$  tends to zero (see Section 4.2.2.5 and Eggers (2004a)).

To perform the present analysis, the contact angle  $\theta_0$  must be specified. The equation presented above lie on the assumption that the pore-scale effects, which are probably intermittent and heterogeneous for a receding contact line, may be represented by a mean value (namely  $\theta_0$ ) at larger scales. We will hereafter consider

that the contact angle  $\theta_0$  is zero for dewetting on a porous medium, following Raphaël et de Gennes (1999). Although we did not find any proof for it, this assumption may be understood as follows : if the porous medium remains fully saturated, its surface (around  $y = 0$ ) is rough and covered with water. If it is so, the microscopic contact angle is alternatively positive and negative (depending on which side of a bump the contact line is), and we consider here as a first approximation that its mean value is zero.

When an infinite film is drawn from the meniscus, the only boundary for  $x \rightarrow \infty$  condition known *a priori* is

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = h_f \quad (4.57)$$

where  $h_f$  is a constant solution of Equation (4.53). Notice that Equation (4.53) stands only for zero-flux films, that neither add nor withdraw water from the tank. The general case is presented in Appendix 4.2.7.4. We omit the important case where a LLD film is continuously elongating with time, a case that was investigated by Hocking (2001). Our study is therefore relevant to determine the loss of a static contact line solution, without any information about the dynamics. The stability of the solution as well as the time-dependent dynamics of a moving meniscus cannot be studied at this stage and will be the purpose of further work. However, we will see in Section 4.2.4 that the film solutions of (4.53) satisfying (4.57) play an important role in the dynamical system describing our solutions. Finally, for a solution to be acceptable, the water level must always lay above the porous medium :  $\forall x, h(x) > 0$ .

#### 4.2.2.4 Parameters

The parameter  $\alpha$  comes from the detailed modeling of the interface slip flow (see Section 4.2.2.2). Its value, as long as it is positive and of order one, has a very small influence on the results presented here. Different values have been tested numerically, and the general patterns of the results (the contact-line transition in particular) remained unchanged. Mathematically,  $\alpha$  does not change the asymptotic behavior of the equation for both limit  $h \rightarrow \infty$  and  $h \rightarrow 0$ , thus it can only affect the local behavior of the solution when  $h$  is of order  $\lambda$ .

For the sake of simplicity the coefficient  $\alpha$  is fixed to one in the following, except in Section 4.2.5 where it will be fixed to  $\sqrt{3}/2$  to allow for analytical computation. The numerical computations are performed with  $\alpha=1$ , and the comparison with analytical results still holds, providing support to the idea that the wetting transition is almost independent of  $\alpha$ .

Now, for  $\alpha = 1$ , Equation (4.53) is an ordinary differential equation (ODE) with three parameters :  $\theta$ , Ca and  $\lambda$ . In fact, one should notice that this equation is only a two-parameter ODE : defining  $h_* = h/\lambda$ , Equation (4.53) becomes

$$h_*''' - h_*' + \theta^* = \frac{\text{Ca}^*}{h_*^2/3 + h_* + 1}, \quad (4.58)$$



where  $\theta^*$  and  $\text{Ca}^*$  are defined as follow :

$$\theta^* = \theta/\lambda = \theta \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g k}}, \quad (4.59)$$

$$\text{Ca}^* = \text{Ca}/\lambda^3 = \frac{U\eta\sqrt{\gamma}}{(\rho g k)^{3/2}}. \quad (4.60)$$

Equation (4.58) is the one we will study later on, but we will omit the  $*$  on  $h_*$  for the sake of readability. These nondimensional parameters were chosen because they are proportional to the two experimental parameters that may be easily and continuously tuned, namely  $U$  and  $\theta$ . If the permeability of the porous solid is extremely low, both  $\theta^*$  and  $\text{Ca}^*$  tend to infinity, as well as the ratio  $\text{Ca}^*/\theta^* = U\eta/(\theta\rho g k)$ . In this case, the velocity inside the porous medium is extremely slow compared to  $U$ . For the experimental study of Daerr et coll. (2003), the rescaled capillary number  $\text{Ca}^*$  is of the order of  $10^5$ .

#### 4.2.2.5 Hydrostatic solutions

Any solution which respects the boundary condition (4.55) for large  $x$  satisfies

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \quad (4.61)$$

thus for large  $x$ , Equation (4.58) becomes

$$h''' - h' + \theta^* = 0. \quad (4.62)$$

The behaviour of the water surface at large  $x$ , hereafter denoted by  $h_\infty$ , is directly obtained from Equation (4.62) :

$$h_\infty(x) = A_\infty + \theta^* x + (\theta^* - \theta_{\text{ap}}^*) \exp(-x), \quad (4.63)$$

where  $A_\infty$  and  $\theta_{\text{ap}}^*$  are two constants, corresponding respectively to the length of the dynamical meniscus and to the so-called *apparent contact angle* (note that the dimensional apparent contact angle is actually  $\theta_{\text{ap}}^* \lambda$ ). Thus, Equation (4.62) leads to the classical static meniscus solution (remember that  $x$  has been scaled by the capillary length  $l_c$ ). We may consider that Equation (4.58) holds at any position on the  $x$ -axis, even though the flow may no longer be laminar far from the plate.

### 4.2.3 Numerical results

#### 4.2.3.1 Contact line solutions

To seek steady contact line solutions, Equation (4.58) may be solved numerically using a finite-difference algorithm. In the case of a contact line, two boundary conditions may be fixed at  $x = 0$  by the contact line conditions (4.56). The third

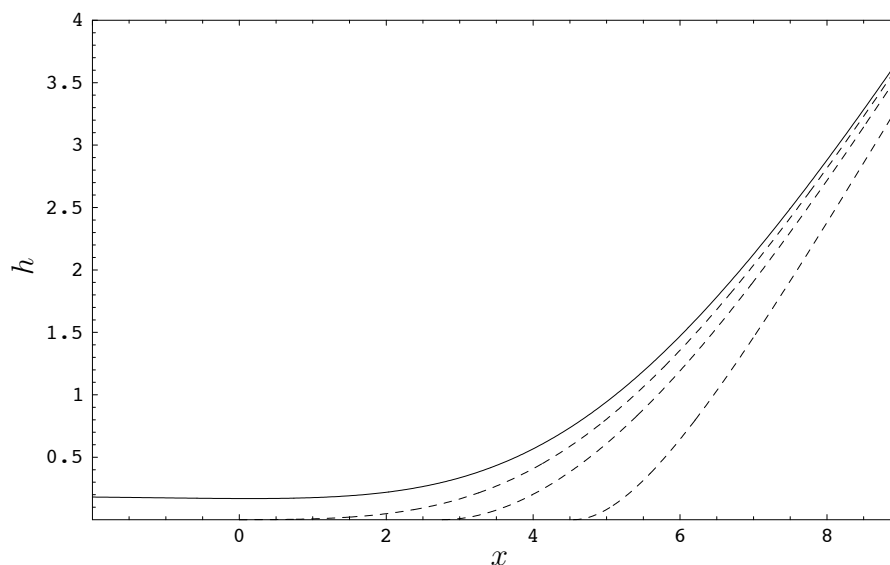


FIG. 4.5 – Numerical solutions of Equation (4.58) for different capillary numbers (From below :  $Ca^* = 0.1$ ,  $Ca^* = 0.8$ ,  $Ca^* = 1.0245$  and  $Ca^* = 1.2$ ). The rescaled tilt angle  $\theta^*$  is fixed to 1

condition comes from the flat water level at infinity (4.55) and we end up with the following system :

$$h''' - h' = f(h), \quad h(0) = h'(0) = 0, \quad h(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \theta^* x, \quad (4.64)$$

where

$$f(h) = \frac{Ca^*}{h^2/3 + h + 1} - \theta^*. \quad (4.65)$$

We use a shooting method (see Manneville (1990)), varying the initial curvature  $h''(0)$  in order to find the numerical solution which corresponds to the hydrostatic condition at large  $x$ . Some numerical contact-line solutions to Equation (4.64) are presented on Figure 4.5 for different  $Ca^*$  at fixed  $\theta^*$ . It is remarkable that contact-line solutions exist for non-zero capillary number and zero contact angle. Indeed, a previous study of Eggers (2004a) showed that for a completely wettable plate ( $\theta_0 = 0$ ), no contact line can exist for positive capillary number. The impregnation law used here as boundary condition at the porous plate surface allows for such a counter-intuitive behavior.

As shown on Figure 4.5, the contact-line zone is somehow stretched as the capillary number is increased. In other words, the curvature  $h''(0)$  at the origin tends to zero as  $Ca^*$  tends to a critical value  $Ca_c^*$ . Above this critical value, no contact-line solution can be found by the shooting method. This transition will be clarified below using the dynamical system associated to (4.64). The disappearance of the contact-line solution may be represented in a kind of bifurcation diagram, plotting the curvature at the origin against the capillary number, as shown in Figure 4.6.

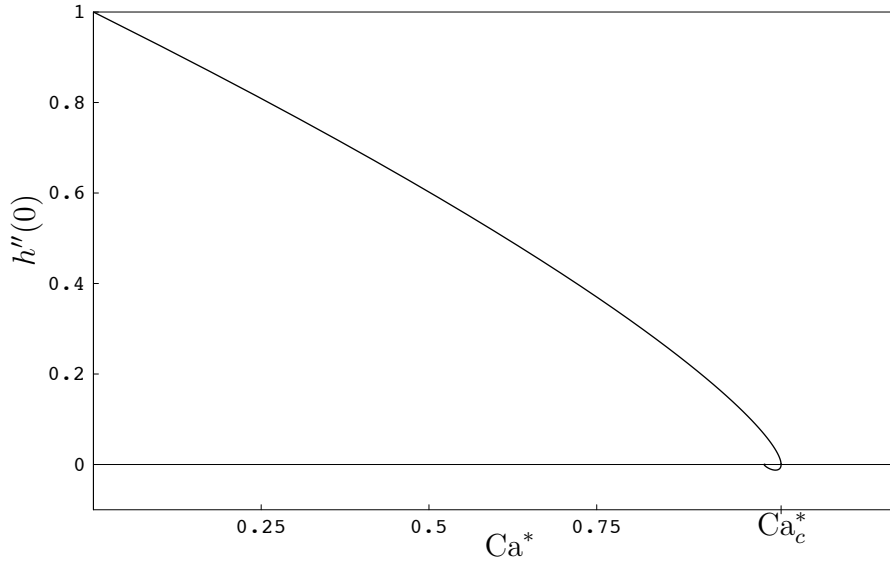


FIG. 4.6 – Curvature at the origin versus rescaled capillary number, for a contact line solution of Equation 4.58. The rescaled tilt angle  $\theta^*$  is fixed to 1. No solution is found for capillary numbers higher than  $Ca_c^* \approx 1.0247$ .

Notice that, even though the curvature at the origin tends to zero as  $Ca_c^*$  is approached, the contact-line solution does not become unrealistic for  $Ca > Ca_c^*$  owing to a negative initial curvature, but rather disappears through a bifurcation. Above the critical capillary number, no matching exists between the behavior of the solution at the contact line and the gravity-capillary solution.

#### 4.2.3.2 Film solutions

A zero-flux film solution can exist whenever there is a positive value  $h_f$  such that  $f(h_f) = 0$ , which occurs as soon as  $Ca^* \geq \theta^*$ . Two major limitations have to be pointed out for these film solutions : first, we might not be able to match this film solution to the hydrostatic region with  $h$  remaining positive everywhere. Moreover we restrict our analysis here to an already-established film of zero mass flux, whereas transitory (Hocking, 2001) and finite flux solutions should be considered. In fact, the flux of the classical LLD film which covers a solid plate at sufficient velocity does not vanish ((Wilson, 1982; Landau et Levich, 1942), the mathematical differences between LLD films and zero-flux films are presented in Appendix 4.2.7.4). However, the focus here is on the disappearance of the contact-line solution, and in the following we will restrict ourselves to the zero-flux equation. A complete study of the wetting transition should include the determination of the flux for the film solution. Numerically, above the critical capillary number  $Ca_c^*$ , we have always been able to find a zero-flux film of thickness  $h_f$  in the limit  $x \rightarrow -\infty$  that could match to the hydrostatic solution without crossing  $h = 0$  (see Figure 4.5). Such a solution may be numerically approached, using a special shooting method described in Section

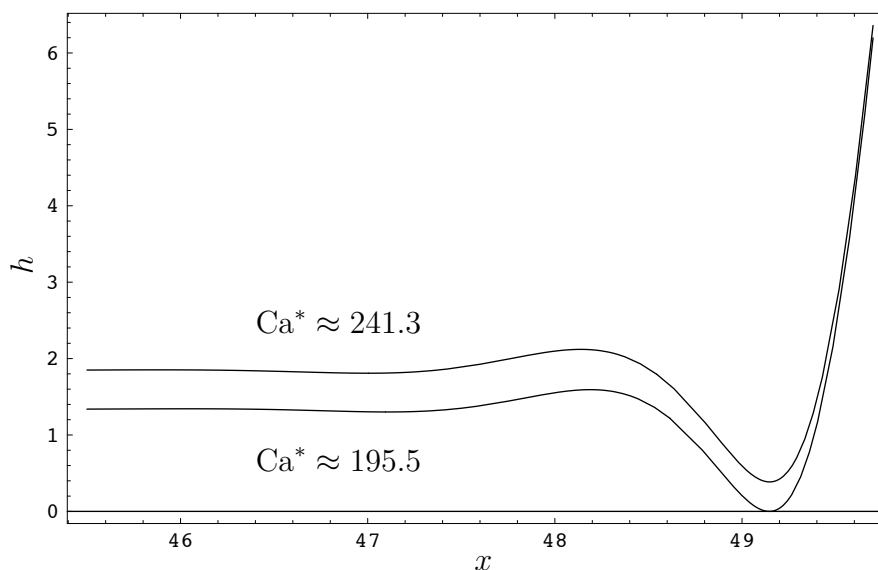


FIG. 4.7 – Two zero-flux film solutions for  $\theta^* \approx 66.62$  at different capillary numbers. The curve below correspond to point  $A$  of Figure 4.10 :  $h(x_{\min}) \approx 0$ .

4.2.4.1.1. We observed that as the capillary number is decreased, the film surface is shifted down along the  $y$ -axis (see Figure 4.7), and we may define a second critical capillary number  $\text{Ca}_{c,2}^*$ , below which the film solution becomes negative in some region. Consequently, if  $\text{Ca}_{c,2}^*$  is smaller than  $\text{Ca}_c^*$ , hysteresis may occurs, that is, two solutions, a contact-line one and zero-flux film one, may coexist for same tilt angle and capillary number.

## 4.2.4 Dynamical systems interpretation

### 4.2.4.1 Phase space

In what follows, we interpret and develop the preceding results using dynamical system theory (Strogatz, 1994). Let us consider the phase space  $\mathcal{V}$  corresponding to Equation (4.58), that is,  $\mathbb{R}^3$  with coordinates  $(h, h', h'')$ . Any solution of (4.58) is a trajectory of  $\mathcal{V}$ , parameterized by  $x$ , which satisfies

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} h' \\ h'' \\ h' + f(h) \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Some trajectories (the same as on Figure 4.5) are represented on Figure 4.8. Notice that the film solution (solid curve) winds exponentially around a *fixed point* on the  $h$ -axis.

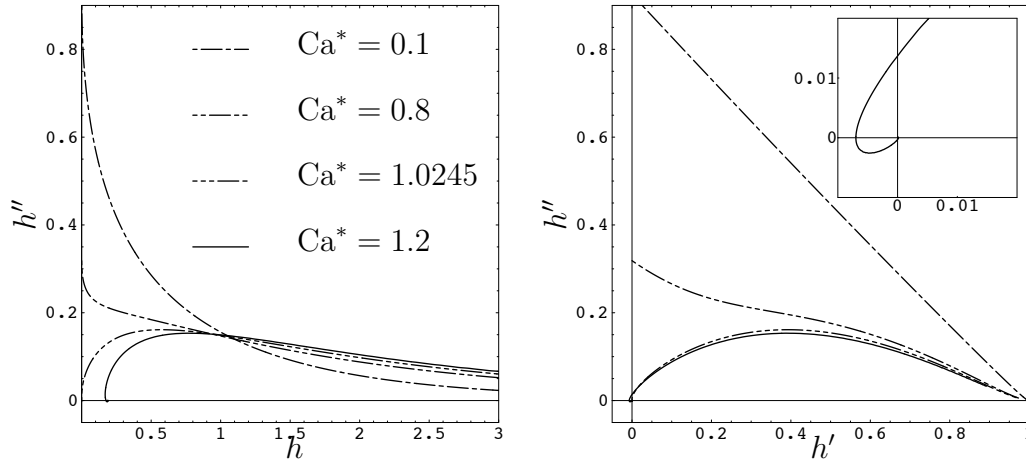


FIG. 4.8 – Numerical solutions of Equation (4.58) for various capillary numbers, represented in phase space (projected on the  $(h, h'')$ - and  $(h', h'')$ -planes). The rescaled tilt angle  $\theta^*$  is fixed to 1. The trajectories correspond to the physical solutions shown in Figure 4.5 : for sub-critical capillary numbers (the three dashed curves), the trajectory starts at a point on the  $h''$ -axis which corresponds to the contact line. On the opposite, the solid line corresponds to a film solution, and thus does not cross the  $h''$ -axis. The inset shows the projection of the film solution on the  $(h', h'')$ -plane, at smaller scale.

**4.2.4.1.1 Hydrostatic solutions in the phase space** For large  $x$ , following the reasoning of Section 4.2.2.5, Equation (4.66) becomes linear :

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta^* \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Any solution of (4.67) which satisfies the boundary condition (4.55) is included in a plane called  $E_\infty$ , which may be parameterized by  $x$  and the apparent contact angle  $\theta_{\text{ap}}^*$  introduced in Section 4.2.2.5.  $E_\infty$  is defined by the equation  $h' + h'' = \theta^*$ .

The solutions of the full Equation (4.66) which satisfy (4.55) are included in a two-dimensional manifold, called  $W$ . This manifold tends to  $E_\infty$  for large  $h$ . This allows us to approximate numerically the zero-flux film trajectories, for which we impose boundary conditions at  $x \rightarrow -\infty$  and  $x \rightarrow +\infty$ . We may indeed use a shooting method with initial conditions varying along a constant (large)  $h$  line on  $E_\infty$ . The boundary condition at  $x \rightarrow +\infty$  is then approximatively satisfied at any step. The shooting method provides an approximation of the only solution that remains constant as  $x$  tends to  $-\infty$ .

Figure 4.9 represents the intersection of  $W$  with the  $(h, h'')$  plane defined by  $h' = 0$ , obtained by the shooting method, for two different capillary numbers, above and below  $\text{Ca}_c^*$ , for  $\theta^* = 2$ . We observe numerically that the major effect of an increase in  $\text{Ca}^*$  is a translation in the higher  $h$  direction. The disappearance of

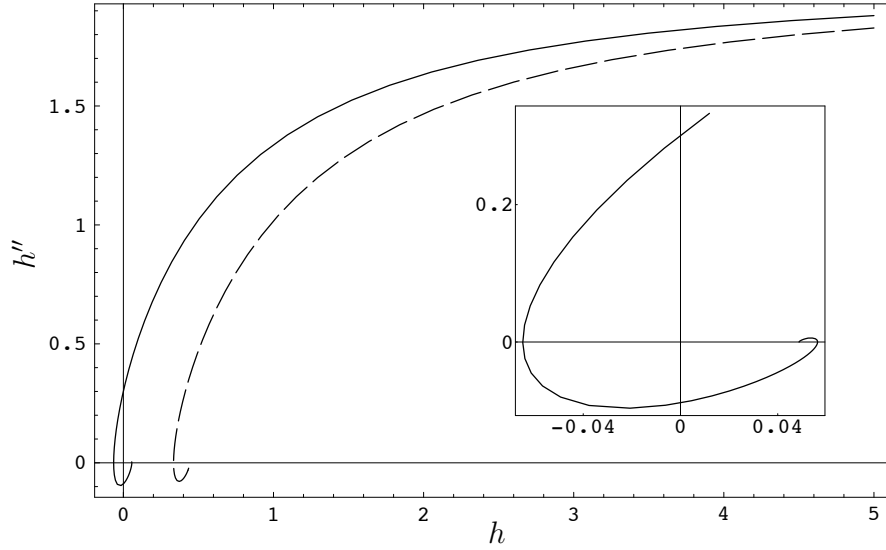


FIG. 4.9 – Intersection of  $W$  (the set of trajectories that tend to a horizontal water surface as  $x$  tends to  $+\infty$ ) with the  $(h, h'')$  plane. These curves were obtained by a shooting method with  $\theta^* = 2$ . Solid line :  $Ca^* = 2.1$  ; dashed line :  $Ca^* = 3$ . Insert shows the solid curve at refined scale.

the contact-line solution may be described in the following way : any contact-line trajectory is embedded in  $W$ , and the boundary conditions impose that it starts on the  $h''$ -axis, consequently, it exists if (and only if) there is an intersection between  $W$  and the  $h''$ -axis. Since the main effect of an increase of  $Ca^*$  on  $W$  is a translation along the  $h$ -axis, this intersection disappears above some value  $Ca_c^*$  of the capillary number. Thus, the existence of fixed points separates  $W$ , that would otherwise be a connected variety. This allows for the sudden disappearance of its intersection with the  $h''$ -axis.

**4.2.4.1.2 Fixed points** A fixed point  $\mathbf{X}_f$  in phase space corresponds physically to a film of constant height  $h_f$  :

$$\mathbf{X}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_f \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

The existence and values of fixed points depend on the parameters  $\theta^*$  and  $Ca^*$ , as presented in Table 4.1. In the following, we will focus on the largest fixed point  $\mathbf{X}_f^+$ , since it is the only one that may be acceptable physically (that is  $h_f > 0$ ). Let us linearize Equation (4.66) around  $\mathbf{X}_f^+$  :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{J}_f^+ (\mathbf{X} - \mathbf{X}_f^+), \quad (4.69)$$

Condition	Fixed points $h_f$
$\text{Ca}^* < \theta^*/4$	None
$\text{Ca}^* = \theta^*/4$	$-3/2$
$\text{Ca}^* > \theta^*/4$	$(3/2) \left( -1 \pm (1/\sqrt{3})\sqrt{4\text{Ca}^*/\theta^* - 1} \right)$

(4.71)

TAB. 4.1 – Existence and values of the fixed points of equation (4.66) (for  $Q^* = 0$ ).

where  $\mathbf{J}_f^+$  is the jacobian of  $\mathbf{F}$  evaluated at  $\mathbf{X}_f^+$ , that is

$$\mathbf{J}_f^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f'(h_f^+) & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

The local behaviour of solutions around the fixed point depends on the eigenvalues of  $\mathbf{J}_f^+$ , which are presented in Table 4.2. If the eigenvalues are real numbers, one is negative and the two others positive. So there is an unstable<sup>4</sup> manifold of dimension two where the trajectories tend monotonically to the fixed point as  $x$  tends to  $-\infty$  and a stable manifold  $S$  (separatrix) of dimension one. On the other hand, when the two eigenvalues are complex conjugate their common real part is always positive, and the trajectories in the corresponding unstable manifold winds around the fixed point while diverging from it at exponential rate. In physical space, the fluid surface forms damped stationary waves along the plate (see Figure 4.10). Therefore, the behaviour of  $W$  in the vicinity of the fixed point may also be described by this linear expansion. Depending on the parameters,  $W$  may either be defined over the whole  $(h, h')$ -plane, or tend to the separatrix  $S$  (which ends on the fixed point). In the latter case,  $W$  winds around the separatrix (as shown in Figure 4.9) or tends to it monotonically. These various regimes are represented in the diagram of Figure 4.11.

**4.2.4.1.3 Critical capillary number** At any point on the  $h$ -axis,  $\mathbf{X}'$  is parallel to the  $h''$ -axis (see equation (4.66)). Consequently, the intersection of  $W$  with the  $(h, h'')$  plane (represented on Figure 4.9) has vertical tangent vectors whenever it crosses the  $h$ -axis. This explains the behaviour of  $h''(0)$  close to the critical capillary number (see Figure 4.6), which may be interpreted as a saddle-node bifurcation. This property is useful for the numerical determination of  $\text{Ca}_c^*$  at a given  $\theta^*$  : since we know that the second derivative  $h''(0)$  must vanish at the critical capillary number, we may approximate  $\text{Ca}_c^*$  by a shooting method which varies  $\text{Ca}^*$  for constant initial

<sup>4</sup>Note that we stick to the classical definition (we call stable a manifold where trajectories tends to the fixed point as the variable tends to  $+\infty$ ) even though in that frame only *unstable* solutions are physically allowed.

Condition	Eigenvalues
$\text{Ca}^* \in \Upsilon(\theta^*)$	$a, b, c$
$\text{Ca}^* \in \partial\Upsilon(\theta^*)$	$a, -a/2, -a/2$
$\text{Ca}^* \notin \Upsilon(\theta^*)$	$a, -a/2 + i\Omega, -a/2 - i\Omega$

TAB. 4.2 – Eigenvalues of the jacobian  $\mathbf{J}_f^+$  at the largest fixed point.  $a, b, c$  and  $\Omega$  are real numbers and  $\Upsilon(\theta^*) = \left[ \frac{9\theta^{*3}}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{9\theta^{*2}}} \right) ; \frac{9\theta^{*3}}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{9\theta^{*2}}} \right) \right]$ . When the eigenvalues are real, they satisfy :  $a < 0 < b < c$ .

conditions (that is,  $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ ). We show in Figure 4.11 the evolution of the critical capillary number with  $\theta^*$ , together with the diagram showing the different regimes described above. Notice that since  $\theta^*$  is a rescaled parameter, we have been able to investigate a large range of values, up to  $\theta^* \approx 10^7$ .

We did not find any reason for the disappearance of the contact-line solution to coincide with the appearance of the zero-flux film solution as  $\text{Ca}^*$  is varied. It may well be possible that, as  $W$  has already intersected the  $h''$ -axis, the zero-flux film trajectory rolls up around the fixed point without  $h$  ever becoming negative. Some numerical simulations give us confidence that hysteresis indeed occurs (that is  $\text{Ca}_c^* > \text{Ca}_{c,2}^*$ ) : a slight hysteresis may indeed be observed in Figure 4.10. Again, the present study is limited to films of zero flux, and other solutions may exist for the same parameters values. Thus, the hysteresis here observed can only describe a reduced part of the solutions set.

When the capillary number is decreased from a supercritical value, the height of the stationary film  $h_f$  decreases, and eventually the film thickness vanishes at some point  $x_{min}$  (see Figure 4.10). This point must be a minimum and in that case both  $h(x_{min})$  and  $h'(x_{min})$  vanish, so this film solution is also a contact-line solution. This explains the change of the sign of  $h(x_{min})$  observed at point  $A$  in Figure 4.10.

The asymptotic behavior of  $\text{Ca}_c^*$  at large  $\theta^*$  has also been investigated (Figure 4.11). We find that the critical capillary number behaves asymptotically as a power law of the tilt angle, that fits to :

$$\text{Ca}_c^* \underset{\theta^* \rightarrow \infty}{\sim} 0.3936 \theta^{* 1.4998}. \quad (4.72)$$

This suggest that for high  $\theta^*$ ,  $\text{Ca}_c^*$  behaves like  $\theta^{* 3/2}$ .

## 4.2.5 Asymptotic results

In the following section we describe a rough analytical approach, inspired from that of Eggers (2004a), which leads to the power law (4.72) for the capillary number obtained numerically in the previous section.



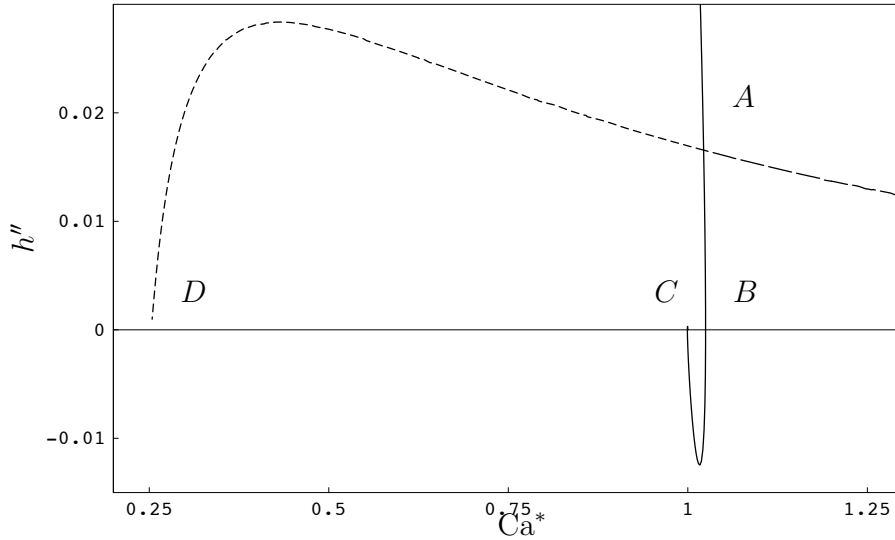


FIG. 4.10 – Second derivative of the film height against the capillary number, for  $\theta^* = 1$ . The solid line corresponds to  $h''(0)$  for the contact-line solution. The dashed line represents the second derivative of  $h$  at the point  $x_{\min}$  where in the case of a zero-flux film solution, the film is thinnest. Large dashes are used if  $h(x_{\min}) > 0$ , and short dashes otherwise. Points  $A, B, C$  and  $D$  correspond respectively to the following values of  $Ca^*$  :  $Ca_{c,2}^* \approx 1.0219$ ,  $Ca_c^* \approx 1.0247$ ,  $\theta^*$  and  $\theta^*/4$ . The film corresponding to point  $A$  is plotted in Figure 4.7.

#### 4.2.5.1 Overview

To determine the dependence of the critical capillary number with the angle, we need to understand better how the solution near the contact line connects with the free surface at infinity. We therefore seek to determine the matching between these two domains. This has actually been done when considering the classical plate withdrawal problem. It involves a matching between three regions : one near the contact line, a capillary-viscous one and the gravity-capillary interface (Eggers, 2004a). However, two major differences arise in the present case compared to the usual problem. First, equation (4.64) is regular over the whole range  $h \in [0; +\infty[$ , whereas in the usual problem the Navier slip condition (4.49) leads to a pressure divergence at the contact line. However, it has been shown (in the case of an *advancing* contact line) that the exact form of the slip law near the contact line does not influence the matching procedure with the far-field solution of the free surface (Eggers, 2004b; Dussan V. et Davis, 1974). The second difference lies in the contact angle condition that we consider to be zero instead of small but finite (as for solid plates). Such a condition is crucial as it can be seen from Eggers (2004a) where the solutions are expanded in powers of the small parameter  $Ca/\theta_e^3$  ( $\theta_e$  being the static contact angle). Consequently, we cannot obtain a proper matching between the behavior in the contact-line zone (cubic polynomial at leading order) with the famous logarithmic behavior in the

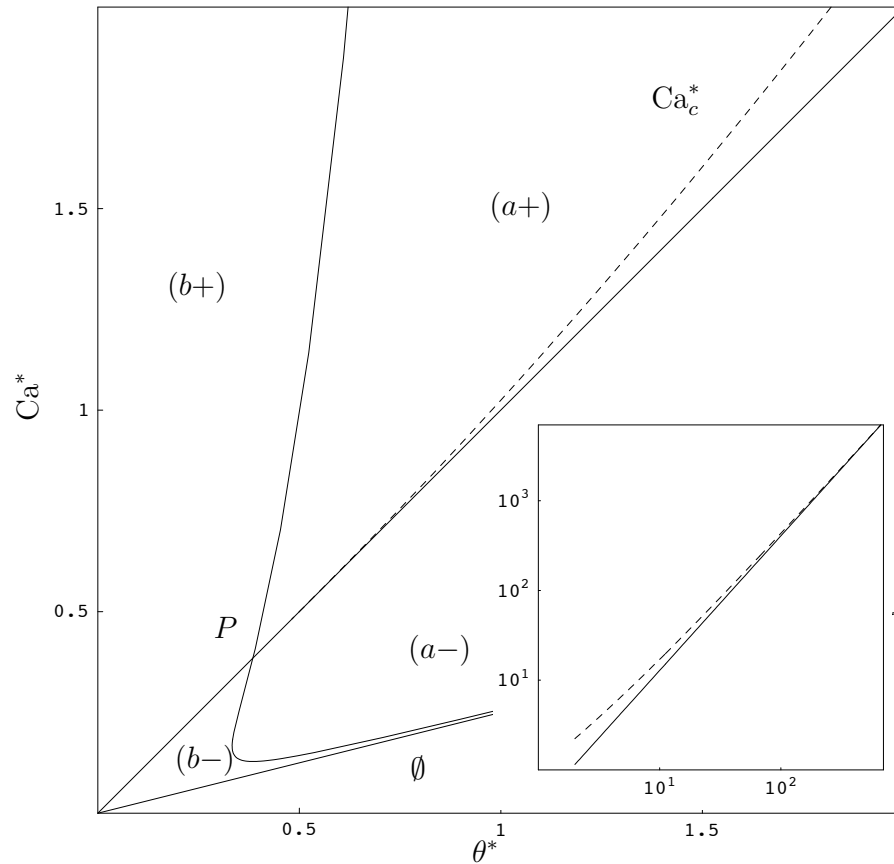


FIG. 4.11 – Behaviour of  $W$  close to the largest fixed point  $\mathbf{J}_f^+$ .  $\emptyset$  : no fixed point ;  $+$  : positive fixed point ;  $-$  : negative fixed point ;  $a$  : spiraling trajectories ;  $b$  : monotonic trajectories. Continuous lines delimit the various behaviors. The dashed line represents the critical capillary number above which the contact-line solution disappears  $Ca_c^*$ . Insert (logarithmic scale) : asymptotic behavior of the critical capillary number for large  $\theta^*$  (dashed line) and asymptotic behavior computed analytically in Section 4.2.5 (solid line).

capillary-viscous region :

$$h'(x) = \left( 9\text{Ca} \ln\left(\frac{\pi}{2^{2/3}\beta^2 x}\right) \right)^{1/3} \quad (4.73)$$

However, we can bypass this difficulty by a slight change in the equations leading to a single approximation valid over the first two regions (contact-line zone and capillary-viscous one).

#### 4.2.5.2 A two-zones matching

The procedure hereafter presented is based on the assumption that the linear term in the right-hand term denominator of Equation (4.64) is not of fundamental importance. In particular, the coefficient  $\alpha$  was arbitrarily set to one at the beginning of this study, but numerical investigations have shown that it may be set to much different values, changing the results of only a few percent. We therefore set from now on  $1/\alpha = 2/\sqrt{3}$  without any change in the equation properties, so that equation (4.64) reduces to

$$h''' - h' + \theta^* = \frac{\text{Ca}^*}{(h/\sqrt{3} + 1)^2}. \quad (4.74)$$

Close enough to the contact line, the film slope  $h'$  may be neglected due to the boundary condition (4.64). In addition, close to the critical capillary number,  $\text{Ca}^* \gg \theta^*$  (this is suggested by the asymptotic behavior (4.72)), and equation (4.74) becomes

$$h''' = \frac{\text{Ca}^*}{(h/\sqrt{3} + 1)^2}, \quad (4.75)$$

which can be solved analytically (as performed by Duffy et Wilson (1997)) after the rescaling

$$x = \frac{\sqrt{3}}{(3\text{Ca}^*)^{1/3}}\xi, \quad h(x) = \sqrt{3}(y(\xi) - 1). \quad (4.76)$$

This rescaling leads to Tanner's problem :

$$y''' = \frac{1}{y^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (4.77)$$

Its solution may be parametrized in terms of Airy functions Ai and Bi :

$$\xi = 2^{1/3} \frac{\text{Bi}(s_0)\text{Ai}(s) - \text{Bi}(s)\text{Ai}(s_0)}{\text{Bi}'(s_0)\text{Ai}(s) - \text{Bi}(s)\text{Ai}'(s_0)}, \quad (4.78)$$

$$y_{\text{in}} = \frac{1}{\pi^2(\text{Bi}'(s_0)\text{Ai}(s) - \text{Bi}(s)\text{Ai}'(s_0))^2}, \quad (4.79)$$

where  $s_0$  is an integration constant, and  $s$  varies between consecutive solutions of equation

$$\text{Bi}'(s_0)\text{Ai}(s) - \text{Bi}(s)\text{Ai}'(s_0) = 0. \quad (4.80)$$

It was shown in Section 4.2.4.1.3 that, at the critical capillary number,  $h''$  vanishes (and so does  $y''$ ). This property sets  $s_0$  to zero and the range for  $s$  to  $[s_1, 0[$ , where  $s_1 \approx -1.98635$  is the largest solution to equation (4.80). Matching solution (4.79) with the meniscus solution should provide a condition on  $\text{Ca}^*$  and  $\theta^*$ . At large  $\xi$ , the behavior of  $y_{\text{in}}$  is

$$y_{\text{in}} = a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi) \quad (4.81)$$

at leading order, where  $a$  has the following expression :

$$a = \left( \frac{\text{Bi}'(0)}{2^{1/3}\text{Bi}(s_1)} \right)^2 \approx 0.758947. \quad (4.82)$$

The second-order Taylor expansion of  $h_\infty$  for small  $x$  is (see Equation (4.63))

$$h_\infty = A_\infty + \theta^* - \theta_{\text{ap}}^* + \theta_{\text{ap}}^* x + (\theta^* - \theta_{\text{ap}}^*) \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad (4.83)$$

In order to match  $y_{\text{in}}$  with  $h_\infty$ , the leading order in the above expression must be  $x^2$ , thus

$$\theta_{\text{ap}}^* = 0, \quad A_\infty = -\theta^*. \quad (4.84)$$

Finally, matching the square terms requires that

$$\text{Ca}_c^* \underset{\theta^* \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2a)^{3/2} 3^{1/4}} \theta^{*3/2}. \quad (4.85)$$

This fits remarkably well with the numerical estimation (4.72), since

$$1/((2a)^{3/2} 3^{1/4}) \approx 0.4063, \quad (4.86)$$

while the above numerical fit gives 0.3936. The matching solution is compared to a numerical one in Figure 4.12 for a high value of  $\theta^*$ , and we observe a remarkable agreement with a reasonably large overlap region. Of course, corrections to this law are expected at next order. In particular,  $\theta_{\text{ap}}^* = 0$  holds only at the first order of the matching, and it has not been shown here that the apparent contact angle vanishes at the wetting transition.

## 4.2.6 Discussion and conclusions

In this work, a continuum model of the forced dewetting on a porous material has been presented. In the framework of lubrication, an ordinary non-linear differential equation was derived, close to the one investigated by Hocking (2001). Even if the contact angle  $\theta_0$  is assumed to vanish, a stationary contact line is found to exist for low de-wetting velocity. Moreover, a transition between this steady contact line and the deposit of a liquid film must occur (either a LLD film or free-flux film), since there is a critical capillary number above which no contact line solution can exist. The transient mechanism of this transition was not studied here.

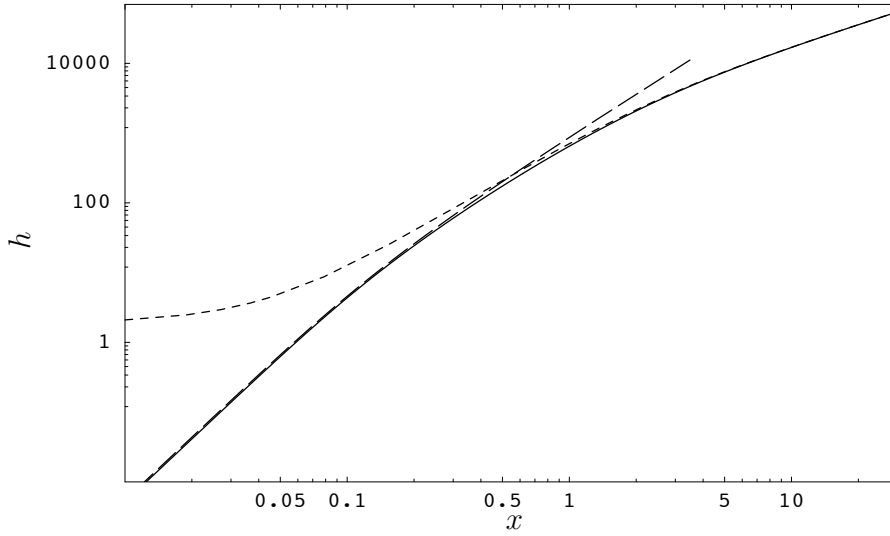


FIG. 4.12 – Comparison between numerical results (solid line) and the matching presented in this paper in logarithmic scales.  $\theta^* \approx 1886$  and  $\text{Ca}^* \approx \text{Ca}_c^* \approx 32870$ . Long dashes : analytical solution to Tanner's problem ( $\sqrt{3}(1 - y_{\text{in}})$ ); short dashes : capillary-gravity meniscus ( $y_\infty$ ).

In the present study, the critical value of the capillary number above which not contact line solution can be observed behaves asymptotically (for small non-dimensional slip length  $\lambda$  and small tilt angle  $\theta$ ) as

$$\text{Ca}_c \sim \frac{1}{(2a)^{3/2} 3^{1/4}} (\lambda\theta)^{3/2}. \quad (4.87)$$

It is remarkable that the critical capillary number does not vanish even though the contact angle is zero. This comes for the slip condition introduced in Section 4.2.2, characteristic of porous media. As expected, when the slip length goes to zero, the critical capillary number also vanishes, and the result of Eggers (2004a) is recovered.

Another surprising result is the mathematical existence of a family of films that may be deposited on the plate, different from the classical LLD film. Indeed, the thickness of these films is *not* fixed by the boundary conditions. These *free-flux films* have never been observed experimentally, as far as we know. We did not study their stability to this day, but they are the subject of further studies.

Various conclusions can be drawn from our results regarding the erosion experiment performed by Daerr et coll. (2003). First, the existence diagram of the contact line can be drawn using the experimental values of the physical parameters. In the present theory, the permeability  $k$  of the porous material is crucial, as is the characteristic slip length at the solid-liquid interface. The value of this parameter may depend strongly on the compaction of the granular material (say between  $10^{-12} \text{ m}^2$  and  $900 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , respectively the value measured by Daerr et coll. (2003) and the square of the grain size). Figure 4.13 presents the critical velocities obtained for these two extremal values of the permeability. For the lowest permeability, and

down to the smallest withdrawal velocities of the erodible plate, no contact line can exist. On the other hand, when choosing the largest permeability, the critical speed of the contact line is of same order than in the experiment.

The flow acts on the granular medium mainly through the bottom shear rate  $\tau = \partial u / \partial Y$ , which is known to trigger the erosion process (see Charru et coll. (2004)). From this shear rate, we can define the Shields number  $S$ , which compares the viscous force applied to the grains by the flow, to the gravity force :

$$S = \frac{\eta\tau}{(\rho_g - \rho)gd}, \quad (4.88)$$

where  $\rho_g$  is the density of the grains (this expression stands only for small tilt angles). Though the erosion process on a granular bed results from discrete and complex phenomena, classical models assume that it starts at a threshold value of the shear rate, at which a critical Shields number  $S_c$  is defined (Charru et coll., 2004). A typical value for  $S_c$  is 0.05 (see among others Fredsøe et Deigaard (1992)), but Daerr et coll. (2003) used  $S_c = 0.12$  to fit their data. In addition to this large range of possible values, note that the critical Shields number is a function of the slope of the bottom : the more inclined it is, the easier it is for the flow to lift grains, thus the tilt reduces the value of  $S_c$ . The shear rate may be deduced from our model, as a function of the dimensionless height of the film  $h$  :

$$\tau = \frac{U}{\sqrt{k}} \frac{h - Q^*}{h^2/3 + h + 1}. \quad (4.89)$$

In the case of a contact line (then  $Q^* = 0$ ), this expression admits a maximum value  $\tau_{\max} = U/(\sqrt{k}(1 + 2/\sqrt{3}))$  for  $h = \sqrt{3}$ , that is necessarily reached, since  $h$  stretches from zero to infinity. If the Shields number is assumed to be independent of the tilt angle of the plate (to first order),  $S = S_c$  defines a vertical line in Figure 4.13 (represented only for  $k = 900 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ). On the left of such a line, no erosion should occur since the Shields number is smaller than the critical value, thus to account for the erosion patterns observed by Daerr et coll. (2003) at small velocities, a low value of  $S_c$  is required.

Now, if a LLD film covers the plate (then  $Q^* > 0$ ), we are not able to predict analytically the maximum shear rate exerted on the granular bed. However, a sharp decrease of the shear rate can be expected at the transition from contact line to LLD film, due to the jump in  $Q^*$ . Such a sharp stress variation could provide an explanation for the transition between the different erosion patterns observed by Daerr et coll. (2003).

At the transition from contact line to LLD film, transient regimes should not be ignored. They have been studied in the literature for non-vanishing contact angles (Hocking, 2001), and future studies will aim at understanding the case of zero contact angle, which has been shown here to be quite different.

It is our pleasure to thank Daniel Lhuillier, Pierre-Yves Lagrée, Eric Clément, Florent Malloggi and Jens Eggers for stimulating discussions.

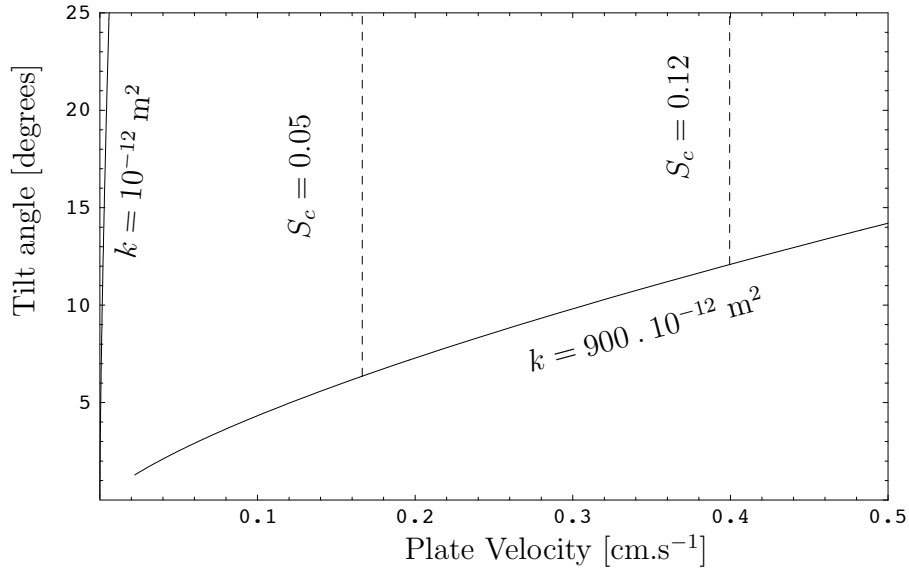


FIG. 4.13 – Critical speed for two values of the permeability  $k$ . For each value of the permeability, a contact line can exist only *above* the corresponding solid curve. The dashed line represents constant Shields numbers  $S_c$ . The values of the physical parameters used in this model are those of Daerr *et al.* (Daerr *et coll.*, 2003) :  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_g = 2750 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  and  $\gamma_s = 0.07 \text{ N.m}^{-1}$ . The velocity and inclination ranges are those of the experiment.

## 4.2.7 Appendixes

### 4.2.7.1 Derivation of the fundamental equation

In the following, Equation (4.53) derived from the two-dimensional Navier-Stokes equations.  $X$  and  $Y$  are dimensional and refer to the axis of Figure 4.4. In the lubrication approximation, and assuming both a permanent regime and small Reynolds number, the momentum conservation reads

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + g \sin(\theta) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (4.90)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y} - g \cos(\theta) = 0, \quad (4.91)$$

where  $u$  and  $v$  stand for the water velocity components respectively parallel and perpendicular to the plate. The second equation may be integrated to give

$$p = \rho g \cos(\theta)(H - Y) + p_L \quad (4.92)$$

where  $p_L$  is the pressure due to surface tension and  $H$  the dimensional water level. Now, if  $\theta$  is small enough, the slope  $H'$  of the free surface should remain reasonably small, so that  $H''$  approximates its curvature, and  $p_L \approx -\gamma H''$  (and, similarly,

$\sin(\theta) \approx \theta$  and  $\cos(\theta) \approx 1$  at first order). The boundary conditions on  $u$  at the bottom and the top of the film are (see Equations (4.46), (4.50) and (4.51))

$$u|_{Y=0} + U = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial Y} \Big|_{Y=0} - \frac{k}{\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial X} \Big|_{Y=0} - \rho g \theta \right) \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} \Big|_{Y=H(X)} = 0, \quad (4.94)$$

thus integrating Equation (4.90) we obtain

$$u = \frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} - g \theta \right) \left( \frac{Y^2}{2} - HY - \frac{\sqrt{k}}{\alpha} H - k \right) + U. \quad (4.95)$$

The water flux withdrawn from the bath through the film is

$$Q = - \int_0^H u \, dY \quad (4.96)$$

In steady state, mass conservation imposes that  $Q$  be a constant, thus

$$\frac{\gamma}{\rho} H''' - gH' + g\theta = \frac{\nu(U - Q/H)}{H^2/3 + H\sqrt{k}/\alpha + k}. \quad (4.97)$$

If  $H$  and  $X$  are rescaled by  $l_c$ , the non-linear equation studied throughout this paper is obtained :

$$h''' - h' + \theta = \frac{\text{Ca}(1 - Q/(Ul_c h))}{h^2/3 + \lambda h + \lambda^2}. \quad (4.98)$$

Another rescaling is used from Section 4.2.2.4 :  $h = \lambda h^*$ . The above equation becomes

$$h_*''' - h_*' + \theta^* = \frac{\text{Ca}^*(1 - Q^*/h_*)}{h_*^2/3 + h_* + 1}, \quad (4.99)$$

where  $Q^* = Q/(Ul_c \lambda)$  and  $\alpha = 1$ . In the case of a contact line, no water is removed from the bath and  $Q^* = 0$ . From Section 4.2.2.4 to the conclusion, the  $*$  is dropped from  $h_*$ .

#### 4.2.7.2 Pressure divergence at the contact line

We aim here to briefly demonstrate that the classical Navier slip condition, leading to Equation (4.49), is not sufficient to eliminate all the singularities at the contact-line, even for a non-vanishing microscopic contact angle ( $\theta_e > 0$ ). Indeed, the first order expansion of Equation (4.49) is (Eggers, 2004a; Hocking, 1983)

$$h'(x) \sim \theta_e - \frac{3\text{Ca}}{\theta_e^2} \left( 1 + \ln \left( \frac{x\theta_e}{\lambda_N} \right) \right), \quad (4.100)$$

where  $h$  and  $x$  are scaled to  $l_c$ . In the lubrication approximation that we have used throughout, the pressure at the plate reads

$$p|_{y=0} = \rho g \cos(\theta) l_c h - \frac{\gamma h''}{l_c}, \quad (4.101)$$



and since  $h''(x) \sim -3\text{Ca}/(\theta_e^2 x)$  the pressure diverges at the contact line. In the present paper, due to the permeability of the porous plate, the expansion of  $h$  near the contact-line is a third-order polynomial ( $h \sim h''(0)x^2/2 + (\text{Ca}^* - \theta^*)x^3/6$ ), and thus the pressure does not diverge.

#### 4.2.7.3 Flow in the porous plate

Using Darcy's law and the conservation of mass, the equation to be solved in the porous plate is

$$\Delta p_p = 0, \quad (4.102)$$

where  $p_p$  is the water pressure in the porous medium, with the following boundary conditions :

$$p_p|_{Y=0} = p|_{Y=0}, \quad \frac{\partial p_p}{\partial Y} \Big|_{Y=-e} = \cos(\theta)\rho g, \quad (4.103)$$

where  $H$ ,  $X$  and  $Y$  are the dimensional counterparts of  $h$ ,  $x$  and  $y$ .  $e$  is the thickness of the plate. Here, the boundary layer thickness ( $\sqrt{k}$ ) is neglected, this layer being modeled by mean of the slip-law presented in Section 4.2.2.2.

Assuming that the plate is extremely flat, the term  $\partial^2 p_p / \partial X^2$  can be neglected in Equation (4.102) and the pressure field reads :

$$p_p = \cos(\theta)\rho g(e - Y) + p|_{Y=0} \quad (4.104)$$

from which one can deduce the water velocity just under the surface of the porous plate.

#### 4.2.7.4 Existence of free-flux film solutions

Numerical results that show the existence of film solutions to Equation (4.99) for  $Q^* = 0$  were presented in Section 4.2.3. This result seems in contradiction with the classical theory of Landau et Levich (1942) where the water flux is fixed by the parameters and boundary conditions. Specifically, Wilson (1982) presents a rigorous asymptotic matching between the film part of the solution (valid for  $x \rightarrow -\infty$ ) and the meniscus (at large  $x$ ), showing that a *unique* value of the flux allows the matching. On the contrary, we aim to show here that, in addition to the well-known LLD films, there exists another kind of film solutions to Equation (4.99), for which the flux is a free parameter in permanent regime.

Wilson (1982) (see page 212) summarizes the link between boundary conditions and parameters in the following fashion : Equation (4.99) is of third order, so there are three constants to be fixed, in addition to the flux. One among these four degrees of freedom corresponds to the origin of  $x$ , that can be translated arbitrarily. The water surface becomes flat at large  $x$ , so the exponentially growing solution must be ruled out (see Section 4.2.2.5). The only remaining condition is :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = h_f, \quad (4.105)$$

where  $h_f$  is the thickness of the deposited film. If  $\lambda h_f$  (noted  $H$  in Wilson (1982)) is small enough, two exponentially growing solutions must be ruled out, the flux is thus fixed. However, as will be shown, this is not the general case, although it is the only one described by Wilson (1982).

Far from the meniscus in the film region, Equation (4.99) links  $h_f$  to  $Q^*$  :

$$Q^*(h_f) = h_f \left( 1 - \frac{\theta^*}{\text{Ca}^*} (h_f^2/3 + h_f + 1) \right). \quad (4.106)$$

Let us introduce  $\delta(x) = h(x) - h_f$  to linearize Equation (4.99) for  $\delta \ll h_f$ . At first order we obtain

$$\delta''' - \delta' - \chi\delta = 0, \quad (4.107)$$

$$\chi = \frac{\text{Ca}^*(Q^*/h_f^2 - \theta^*/\text{Ca}^*(2h_f/3 + 1))}{h_f^2/3 + h_f + 1}. \quad (4.108)$$

It can easily be shown that  $\chi$  has the same sign than  $dQ^*/dh_f$ . Remembering that any exponential term with a negative growth rate shall be ruled out, the following rules can be deduced from Equation (4.107) :

- if  $\chi > 0$ , two integration constants are fixed to zero ;
- else a single constant is fixed to zero.

In other words, the dimension of the unstable manifold  $W_u$  (the set of solutions that tends to  $\mathbf{X}_f$  for  $x \rightarrow -\infty$ , see Section 4.2.4) switches from one to two when  $\chi$  becomes negative. This result is represented on Figure 4.14. In the  $(h_f, Q^*)$ -plane, any solution lies on the curve  $\mathcal{C}$  defined by Equation (4.106). The LLD film solution is a point on the solid part of the curve, where  $\chi$  is positive. On the other hand, when  $\chi$  is negative (dashed line), any point on the curve can be solution *a priori*. In that case, both the stable manifold  $W$  (defined in Section 4.2.4) and the unstable manifold  $W_u$  have dimension two. In the general case, for any  $Q^*$ , they intersect on a trajectory that is a film solution. Although we did not strictly prove the existence of such a solution in any case, the numerical solutions presented on Figure 4.14 give us confidence that this result is quite general.

In addition to the question of the mathematical existence of free-flux film solutions, two physical condition shall be respect if such solutions are to be observed in practice. First, the film thickness has to be positive for any  $x$ , which happens at least in some cases, as can be observed on Figure 4.14. Secondly, the solution has to be stable in time : this issue has not been addressed yet.

Finally, it should be noted that the present analysis is very general in the lubrication framework, and does not depend on the specific form of the right-hand side of Equation (4.99). In particular, the result would be similar without any slip-length hypothesis, as long as the contact-line solutions are not considered. These free-flux films will be the subject of future research.

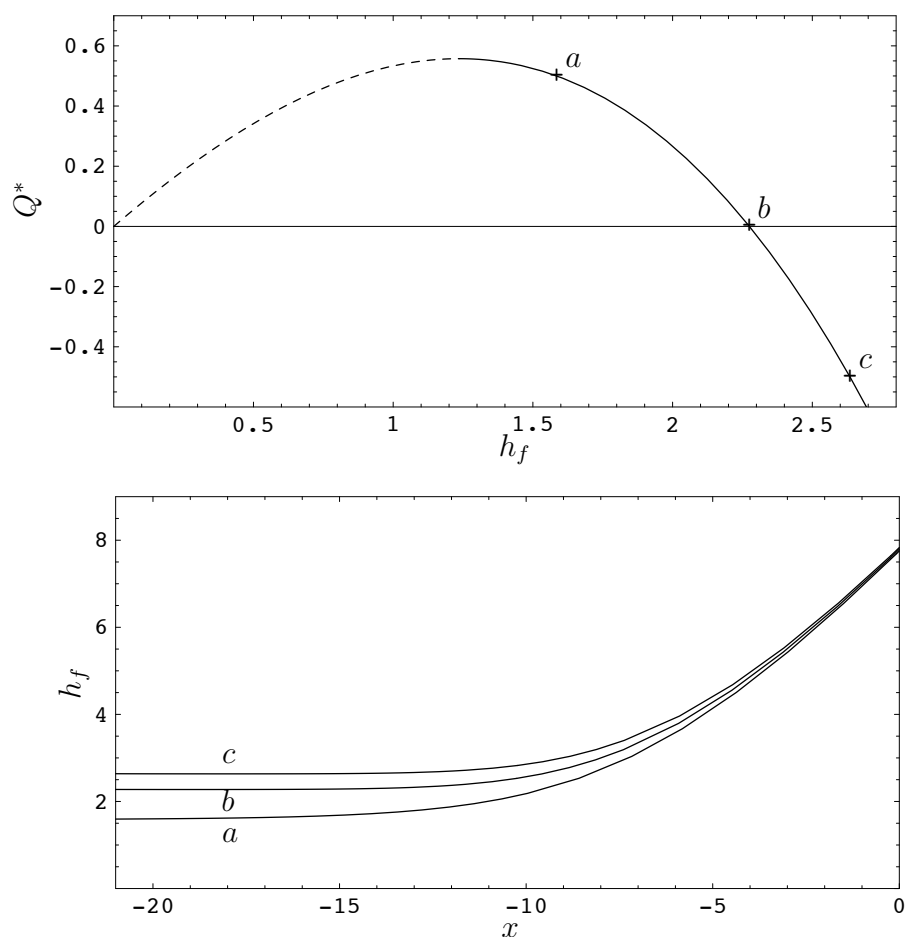


FIG. 4.14 – *Above* : Non-dimensional water flux withdrawn from the bath ( $Q^*$ ) as a function of the non-dimensional thickness of the deposited film  $h_f$ . The curve is dashed if  $\chi$  is positive, that is, if the boundary conditions fix  $Q^*$ . Any point on the solid part of the curve can represent a full film solution. The ratio  $\text{Ca}^*/\theta^*$  is fixed to five here.

*Below* : Three film solutions with different fluxes  $Q^*$ . The letters refers to their representation in the  $(h_f, Q^*)$ -plane

# Conclusion et perspectives

L'écoulement laminaire d'un film de fluide visqueux sur un substrat érodable, tel qu'un matériau granulaire, produit une grande variété de motifs d'érosion, souvent similaires aux motifs naturels formés par des écoulements turbulents (bancs alternés, tresses, *etc.*). À l'exception du § 4.2, la présente étude met l'accent sur les phénomènes liés à l'interaction entre le fluide et les sédiments, en omettant le vaste champ des phénomènes propres à l'écoulement d'un film (ressaut hydraulique, ondes de Kapitza, *etc.*).

L'établissement des équations de Saint-Venant pour un écoulement laminaire (§ 2.1) conduit à un système tout-à-fait semblable au système turbulent; cette similitude constitue la pierre angulaire de l'analogie géomorphologique entre les micro-rivières laminaires et les rivières naturelles. En ajoutant à ce système des lois empiriques simplifiées pour représenter le transport des sédiments par le fluide, nous proposons un modèle d'évolution pour le lit d'une micro-rivière rectiligne qui conduit, à terme, au débordement de ladite rivière (§ 2.2). Ce comportement, ainsi que la succession d'instabilités qui lui sont associées, correspond qualitativement au vieillissement des micro-rivières expérimentales. Les configurations uniformes dans la direction de l'écoulement, pour lesquelles les équations sont réduites à une seule dimension spatiale, facilitent l'établissement de conditions aux berges respectant la conservation de la masse de sédiments, et les propriétés du matériau dont elles sont composées (§ 2.2.3).

L'instabilité de bancs, effet bien connu de l'érosion par des écoulements turbulents, existe également dans le cas laminaire, et ce, même pour un nombre de Froude nul, c'est-à-dire pour un écoulement parfaitement visqueux (§ 3.1). Si l'on confine l'écoulement entre deux berges rigides et imperméables, cette instabilité devient celle des bancs alternés, fréquemment observés en milieu naturel (§ 3.2.1.1). L'évolution non-linéaire de ces structures, déterminée numériquement au § 3.3, reproduit les motifs en chevrons formés en milieu naturel comme en laboratoire par des écoulements laminaires (voir Daerr et coll. (2003) et le § 3.3.2.1). Les travaux de Hall (2006) indiquent que ces motifs devraient trouver leur équivalent dans les cours d'eau turbulents, sans toutefois faire référence à une observation directe de telles structures. En régime laminaire, ces chevrons gardent une forme stable, et progressent à vitesse constante tandis que leur front conserve son inclinaison initiale par rapport à l'écoulement moyen. Ces propriétés, celles d'un soliton ou d'un choc, permettent probablement de réduire le système d'équations à une dimension, et d'écrire des relations de type Rankine-Hugoniot autour du front. La méthode développée par Hall

(2006) pour un écoulement turbulent semble toute indiquée dans le cas laminaire. Ainsi soutenue par des expériences reproductibles et de taille modeste, l'étude des chevrons d'érosion peut fournir un outil supplémentaire pour la compréhension des lois de transport sédimentaire.

Si l'on remplace les berges rigides rectilignes par des berges érodables selon une loi simplifiée couramment utilisée en Géomorphologie (§ 3.2.2.1), on observe une forme d'instabilité de courbure, considérée comme un prélude au développement de méandres dans les rivières turbulentes, et qui fait intervenir indissociablement la déformation des berges, celle du fond et l'écoulement. Les équations de Saint-Venant peuvent donc décrire l'instabilité de courbure, sans intervention de la recirculation. Nous ne saurions en conclure que l'apparition de méandres ne dépend pas de ces courants secondaires. Néanmoins, cet éclairage plaide pour une évaluation quantitative de l'effet du terme de recirculation introduit dans les contributions fondatrices du concept d'instabilité de courbure (Ikeda et coll., 1981; Blondeaux et Seminara, 1985). L'introduction de conditions aux berges respectant la conservation de la masse de sédiments dans les modèles de géomorphologie fluviale ne va pas sans difficulté (§ 3.2.2.2). Pourtant, l'influence des conditions aux berges sur les instabilités du lit est certainement comparable à celle des modèles de turbulence, d'érosion ou de recirculation employés.

Enfin, les écoulements laminaires sont également susceptibles de former des rides, motifs d'érosion uniformes dans la direction transverse<sup>5</sup>, selon un mécanisme très différent de celui de l'instabilité de bancs, puisqu'il repose sur l'inertie verticale de l'écoulement. Le § 4.1 introduit l'influence de la surface libre de l'écoulement dans une étude de stabilité menée par Charru et Hinch (2000) dans le cas d'un écoulement de Couette. Cette nouvelle configuration, qui fait intervenir un paramètre supplémentaire (le nombre de Froude), correspond aux expériences décrites au § 3.3.2.1 : l'étude expérimentale des chevrons d'érosion ne peut donc pas être dissociée de la formation des rides. La méthode développée au § 4.1, et qui consiste à résoudre numériquement l'équation d'Orr-Sommerfeld stationnaire, pourrait fort bien être appliquée à des systèmes dépendants de la direction transverse, ce qui permettrait d'étudier conjointement les instabilités de ride et de banc.

L'ubiquité des principales structures formées par l'érosion traduit le caractère fondamental du processus qui les engendre. La présente étude exploite cette propriété pour analyser un cadre théorique simple, suffisant pour décrire une riche variété de phénomènes, et qui tend à démontrer que ces phénomènes peuvent être reproduits en laboratoire à très petite échelle. Les résultats que nous proposons demandent à être comparés à l'expérience. Il sera ainsi possible de préciser certaines hypothèses (notamment en ce qui concerne les conditions aux berges) dans un cadre beaucoup plus simple que celui des modèles destinés aux prédictions quantitatives en milieu naturel.

---

<sup>5</sup>Cette définition n'est pas universelle, voir le § 4.1.

# Principales notations

*Les notations brièvement définies ici sont valables jusqu'au § 4.2, dont les notations sont indépendantes.*

$a$	p. 57	Position de l'interface entre le lit de la rivière et la zone d'avalanche de la berge
$\alpha_c$	p. 42	Angle d'avalanche
$b$	p. 57	Position de la berge
$\beta$	p. 53	Exposant de la loi d'érosion
$d$	p. 48	Profondeur de l'écoulement ( $d = \eta - h$ )
$\eta$	p. 45	Élévation de la surface libre du fluide
$F$	p. 50	Nombre de Froude
$\phi$	p. 38	Loi d'érosion
$\mathbf{g}$	p. 45	Gravité
$\gamma$	p. 41	Coefficient du terme de pente dans la loi de transport sédimentaire
$h$	p. 45	Élévation de la surface des sédiments
$\mathcal{H}$	p. 47	Profondeur typique de l'écoulement
$\mathbf{k}$	p. 70	Vecteur d'onde de l'instabilité de bancs
$\nu$	p. 38	Viscosité du fluide
$\omega$	p. 70	Pulsation complexe de l'instabilité de bancs
$p$	p. 77	Nombre entier caractérisant les modes de l'instabilité de bancs
$\Psi$	p. 129	Fonction courant
$\psi$	p. 72	Angle formé par la direction de propagation d'une onde d'érosion avec la direction principale de l'écoulement
$Q_w$	p. 56	Débit d'eau de la rivière
$\mathbf{q}_q$	p. 42	Flux linéique de sédiments dû aux avalanches
$\mathbf{q}_e$	p. 38	Flux linéique de sédiments dû à l'érosion

$R$	p. 47	Rapport d'aspect typique de l'écoulement
$Re$	p. 70	Nombre de Reynolds
$\rho$	p. 45	Masse volumique du fluide
$S$	p. 51	Pente moyenne ( $S = \tan \vartheta$ )
$\sigma$	p. 72	Taux de croissance d'une instabilité ( $\sigma = \Im(\omega)$ )
$\sigma_{ij}$	p. 127	Tenseur des contraintes complet dans le fluide
$\boldsymbol{\tau}$	p. 45	Partie déviatorique du tenseur des contraintes
$\theta$	p. 38	Nombre de Shields
$\vartheta$	p. 50	Inclinaison moyenne de la topographie dans la direction principale de l'écoulement
$\mathbf{u}$	p. 49	Vitesse débitante du fluide
$\mathcal{U}$	p. 50	Vitesse typique de l'écoulement
$u_{SV}$	p. 131	Vitesse débitante du fluide dans le § 4.1
$x$	p. 45	Direction de l'écoulement
$\mathcal{W}$	p. 47	Largeur typique de l'écoulement
$y$	p. 45	Direction transverse
$z$	p. 45	Direction orthogonale au plan $(x, y)$ (quasi-verticale)

# Bibliographie

- B. ANDREOTTI, P. CLAUDIN et S. DOUADY : Selection of dune shapes and velocities. part 2 : A two-dimensional modelling. *European Physical Journal B*, 2002.
- A. ARADIAN, E. RAPHAËL et P.-G. DE GENNES : Dewetting on porous media with aspiration. *The European Physical Journal E*, 2(4):367–376, 2000.
- L. ARMSTRONG : *Étude de l'érosion des berges et du transport de sédiments d'une micro-rivière à chenal droit*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot, 2003.
- L. BACRI et F. BROCHARD-WYART : Dewetting on porous media. *Europhysics Letters*, 56(3):414–419, 2001.
- R. A. BAGNOLDS : *The physics of sediment transport by wind and water*. American Society of Civil Engineers, 1988.
- N. J. BALMFORTH et A. PROVENZALE : Patterns of dirt. In N. J. BALMFORTH et A. PROVENZALE, éditeurs : *Geomorphological Fluid Mechanics*, chapitre 15, pages 369–393. Springer, 2001.
- A. J. C. BARRÉ DE SAINT-VENANT : Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues de rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Compte Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 73:147–154 et 237–240, 1871.
- S. BEAVERS et D. JOSEPH : Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 30:197–207, 1967.
- A. BETAT, V. FRETTE et I. REHBERG : Sand ripples induced by water shear flow in an annular channel. *Physical Review Letters*, 83:88–91, 1999.
- T. D. BLAKE et K. J. RUSCHAK : A maximum speed of wetting. *Nature*, 282 (5738):489–491, 1979.
- K. BLANCKAERT et H. J. DE VRIEND : Secondary flow in sharp open-channel bends. *J. Fluid Mech.*, 498:353–380, 2004.
- P. BLONDEAUX et G. SEMINARA : A unified bar-bend theory of river meanders. *J. Fluid Mech.*, 157:449–470, 1985.



- J.-P. BOUCHAUD, M. E. CATES, J. RAVI PRAKASH et S. F. EDWARDS : A model for the dynamics of sandpile surfaces. *Journal de Physique*, 4(10):1383–1410, 1994.
- T. BOUTREUX, E. RAPHAËL et P.-G. DE GENNES : Surface flows of granular materials : A modified picture for thick avalanches. *Physical Review*, 58(4):4692–4700, 1998.
- K. A. BOWKER : Albert Einstein and meandering rivers. *Earth Sci. Hist.*, 7(1):45–46, 1988.
- O. BRIVOIS, S. BONELLI et R. BORGHI : Soil erosion in the boundary layer flow along a slope : a theoretical study. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 26, 2007.
- R. A. CALLANDER : Instability and river channels. *J. Fluid Mech.*, 36(3):465–480, 1969.
- C. CAMPOREALE, P. PERONA, A. PORPORATO et L. RIDOLFI : Hierarchy of models for meandering rivers and related morphodynamic processes. *Reviews of Geophysics*, 45, 2007.
- H. CHANSON : *The hydraulics of open channel flow : an introduction*, chapitre 6, pages 141–241. Elsevier, 2004.
- F. CHARRU : Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Physics of Fluids*, 18:121508, 2006.
- F. CHARRU et E. J. HINCH : ‘Phase diagram’ of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability. *J. Fluid Mech.*, 414:195–223, 2000.
- F. CHARRU, H. MOUILLERON et O. EIFF : Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 519:55–80, 2004.
- F. CHARRU et H. MOUILLERON-ARNOULD : Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 452:303–323, 2002.
- S. E. COLEMAN et B. ELING : Sand wavelets in laminar open-channel flows. *Journal of Hydraulic Research*, 38(5):331–338, 2000.
- S. E. COLEMAN et B. W. MELVILLE : Initiations of bed forms on a flat sand bed. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122(6):301–310, 1996.
- M. COLOMBINI, G. SEMINARA et M. TUBINO : Finite-amplitude alternate bars. *J. Fluid Mech.*, 181:213–232, 1987.
- R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY : On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal*, pages 215–234, 1967. Traduction en Anglais de l’original de 1928, écrit en Allemand.

- A. CRAVE et P. DAVY : A stochastic “precipiton” model for simulating erosion/sedimentation dynamics. *Computers & Geosciences*, 2001.
- A. DAERR, P. LEE, J. LANUZA et É. CLÉMENT : Erosion patterns in a sediment layer. *Physical Review E*, 67:065201, 2003.
- S. E. DARBY : Modelling width adjustment in straight alluvial channels. *Hydrol. Process.*, 1998.
- P.-G. DE GENNES : Dynamique d'étalement d'une goutte. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 298(4):111–115, 1984.
- P.-G. DE GENNES : Wetting : statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 57(3):827–863, 1985.
- P.-G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUÉRÉ : *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2005.
- G. DE MARSILY, F. DELAY, J. GONÇALVÈS, P. RENARD, V. TELES et S. VIOLETTE : Dealing with spatial heterogeneity. *Hydrogeol. J.*, 13:161–183, 2005.
- G. DE MARSILY, F. DELAY, V. TELES et M. T. SCHAFMEISTER : Some current methods to represent the heterogeneity of natural media in hydrogeology. *Hydrogeology Journal*, 6:115–130, 1998.
- A. DEFINA : Numerical experiments on bar growth. *Water Resour. Res.*, 39(4), 2003.
- B. V. DERJAGUIN : On the thickness of a layer of liquid remaining on the walls of vessels after their emptying, and the theory of the application of photoemulsion after coating on the cine film. *Acta physico-chemica USSR*, 20:349–352, 1943.
- O. DEVAUCHELLE, C. JOSSERAND, P.-Y. LAGRÉE et S. ZALESKI : Morphodynamic modeling of erodible laminar channels. *Phys. Rev. E*, 2007a. à paraître.
- O. DEVAUCHELLE, C. JOSSERAND et S. ZALESKI : Forced dewetting on porous media. *J. Fluid Mech.*, 574:343–364, 2007b.
- D. DOPPLER : *Stabilité et dynamique de pentes granulaires sous-marines*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11, 2005.
- M. P. DU BOYS : Étude du régime du Rhône et de l'action exercée par les eaux sur un lit à fond de graviers indéfiniment affouillable. *Annales des Ponts et Chaussées*, 5(18):141–195, 1879.
- G. D. DUAN et P. Y. JULIEN : Numerical simulation of the inception of channel meandering. *Earth surface processes and landforms*, 30:1093–1110, 2005.
- B. R. DUFFY et S. K. WILSON : A third-order differential equation arising in thin-film flows and relevant to Tanner's law. *Appl. Math. Lett.*, 10(3):63–68, 1997.

- E. B. DUSSAN V. et S. H. DAVIS : On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *J. Fluid Mech.*, 65:71–95, 1974.
- S. F. EDWARDS et T. B. LIVERPOOL : Dynamics of a meandering river. *Phys. Rev. Letters*, 75(16), 1995.
- B. F. EDWARDS et D. H. SMITH : Critical wavelength for river meandering. *Phys. Rev. E*, 63, 2001.
- B. F. EDWARDS et D. H. SMITH : River meandering dynamics. *Phys. Rev. E*, 65, 2002.
- J. EGGERS : Hydrodynamic theory of forced dewetting. *Physical Review Letters*, 93(9):094502, 2004a.
- J. EGGERS : Toward a description of contact line motion at higher capillary numbers. *Physics of Fluids*, 16(9):3491–3494, 2004b.
- J. EGGERS et H. A. STONE : Characteristic lengths at moving contact lines for a perfectly wetting fluid : the influence of speed on the dynamic contact angle. *J. Fluid Mech.*, 2004.
- A. EINSTEIN : Die Ursache der Mäanderbildung der Flußläufe und des sogenannten Baerschen Gesetzes. *Die Naturwissenschaften*, 11, 1926.
- A. EINSTEIN : *Ideas and Opinions*. Bonanza Books, 1954.
- H. A. EINSTEIN : The bed-load function for sediment transportation in open channels flows. *US Department of Agriculture Technical Bulletin*, 1026, 1950.
- F. ENGELUND : Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.*, 42:225–244, 1970.
- F. ENGELUND et O. SKOVGAARD : On the origin of meandering and braiding in alluvial streams. *J. Fluid Mech.*, 57(2):289–302, 1973.
- B. FEDERICI et C. PAOLA : Dynamics of channel bifurcations in noncohesive sediments. *Water Resour. Res.*, 39(6):1162, 2003.
- B. FEDERICI et G. SEMINARA : On the convective nature of bar instability. *J. Fluid Mech.*, 487:125–145, 2003.
- A. FOURRIÈRE, P. CLAUDIN et B. ANDREOTTI : Integral method for flows down an incline : viscous, turbulent and granular cases. Communication personnelle, 2007.
- F. FREDSEØE : On the development of dunes on erodible channels. *J. Fluid Mech.*, 64, 1974.
- J. FREDSEØE et R. DEIGAARD : *Mechanics of coastal sediment transport*. World Scientific, 1992.

- R. E. GLOVER et Q. L. FLOREY : Stable channel profiles. *U.S. Bur. Reclamation, Hydr.*, 325, 1951.
- B. GOYEAU, D. LHUILLIER, D. GOBIN et M. G. VELARDE : Momentum transport at a fluid-porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46 (21):4071–4081, 2003.
- K. GRAN et C. PAOLA : Riparian vegetation controls on braided stream dynamics. *Water Resour. Res.*, 37(12):3275–3283, 2001.
- R. W. GRIFFITHS et J. A. WHITEHEAD : Earth's surface morphology and convection in the mantle. In N. J. BALMFORTH et A. PROVENZALE, éditeurs : *Geomorphological Fluid Mechanics*, chapitre 5, pages 111–163. Springer, 2001.
- E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT : *Ce que disent les fluides*. Belin, 2005.
- N. G. HADJICONSTANTINOÛ : Comment on Cercignani's second-order slip coefficient. *Phys. Fluids*, 15(8):2352–2354, 2003.
- P. HALL : Nonlinear evolution equations and the braiding of weakly transporting flows over gravel beds. *Studies in Applied Mathematics*, 117:27–69, 2006.
- P. HALL : A note on bar instabilities in very wide rivers. *Int. J. Computing Science and Mathematics*, 1(1), 2007.
- E. HANSEN : The formation of meanders as a stability problem. Basic Research Report 13, Copenhagen Technical University of Denmark, 1967.
- F. HECHT, O. PIRONNEAU, A. LE HYARIC et K. OHTSUKA : Freefem++, version 2.17-1. Rapport technique, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, <http://www.freefem.org/ff++>, septembre 2007.
- P. HERSEN, K. H. ANDERSEN, H. ELBELRHITI, B. ANDREOTTI, P. CLAUDIN et S. DOUADY : Corridors of barchan dunes : Stability and size selection. *Physical Review*, 69:011304, 2004.
- H. HERVET et P.-G. DE GENNES : Dynamique du mouillage : film précurseur sur solide « sec ». *C. R. Acad. Sc. Paris*, 299(9):499–503, 1984.
- L. M. HOCKING : The spreading of a thin drop by gravity and capillarity. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 36:55–69, 1983.
- L. M. HOCKING : Meniscus draw-up and draining. *Eur. J. Appl. Math.*, 12:195–208, 2001.
- E. HUH et L. E. SCRIVEN : Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *J. Colloid Interface Sci.*, 35(1):85–101, 1971.
- H. E. HUPPERT : Gravity currents : a personal perspective. *J. Fluid Mech.*, 554:299–322, 2006.

- S. IKEDA : Self-formed straight channels in sandy beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, 107:389–406, 1981.
- S. IKEDA, G. PARKER et Y. KIMURA : Stable width and depth of straight gravel rivers with heterogeneous bed materials. *Water Resour. Res.*, 24(5):713–722, 1988.
- S. IKEDA, G. PARKER et K. SAWAY : Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development. *J. Fluid Mech.*, 112:363–377, 1981.
- J. IMRAN, G. PARKER et C. PIRMEZ : A nonlinear model of flow in meandering submarine and subaerial channels. *J. Fluid Mech.*, 400:295–331, 1999.
- M. N. R. JAEGGI : Formation and effects of alternate bars. *J. Hydr. Div. ASCE*, 110:142–156, 1984.
- H. JOHANNESSON et G. PARKER : Secondary flow in a mildly sinuous channel. *J. Hydraul. Eng.*, 115(3):289–308, 1989a.
- J. JOHANNESSON et G. PARKER : Linear theory of rivers meanders. In S. IKEDA et G. PARKER, éditeurs : *River Meandering*, volume 12, pages 181–214. Am. Geoph. Union, Water Res. Monograph édition, 1989b.
- C. JOSSERAND, P.-Y. LAGRÉE et D. LHUILLIER : Stationary shear flows of dense granular materials : a tentative continuum modelling. *European Physical Journal*, 14(2):127–135, 2004.
- K. K. J. KOUAKOU : *Instabilités des interfaces écoulement/fond érodable : approches asymptotiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2005.
- K. K. J. KOUAKOU et P.-Y. LAGRÉE : Stability of an erodible bed in various shear flows. *European Physical Journal B*, 47(1):115–125, 2005.
- K. K. J. KOUAKOU et P.-Y. LAGRÉE : Evolution of a model dune in a shear flow. *European Journal of Mechanics B-Fluids*, 25(3):348–359, 2006.
- A. KOVACS et G. PARKER : A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels. *J. Fluid Mech.*, 267:153–183, 1994.
- K. KROY, G. SAUERMAN et H. J. HERRMANN : Minimal model for aeolian sand dunes. *Phys. Rev. E*, 66(3):031302, 2002.
- P.-Y. LAGRÉE : A triple deck model of ripple formation and evolution. *Physics of Fluids*, 15(8):2355–2368, 2003.
- P.-Y. LAGRÉE et D. LHUILLIER : The couette flow of dense and fluid-saturated granular media. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*, 25(6):960–970, 2006.
- D. LAGUE, A. CRAVE et P. DAVY : Laboratory experiments simulating the geomorphic response to tectonic uplift. *Journal of Geophysical Research — Solid Earth*, 108(B1):2008, 2003.

- L. D. LANDAU et B. V. LEVICH : Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta Physico-Chemica USSR*, 17:42–54, 1942.
- E. W. LANE, P. N. LIN et H. K. LIU : The most efficient stable channel for completely clean water in non-cohesive material. *Colorado State Univ. Rep.*, CER 59 HKL 5, 1959.
- V. LANGLOIS : *Instabilité d'un lit granulaire cisailé par un écoulement fluide*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, décembre 2005.
- V. LANGLOIS et A. VALANCE : Formation of two-dimensional sand ripples under laminar shear flow. *Physical Review Letters*, 94:248001, 2005.
- V. LANGLOIS et A. VALANCE : Initiation and evolution of current ripples on a flat sand bed under turbulent water flow. *European Physical Journal E*, 22(3):201–208, 2007.
- S. LANZONI : Experiments on bar formation in a straight flume. 1. Uniform sediment. *Water Resour. Res.*, 2000.
- G. H. MACKY : Large flume experiments on the stable straight gravel bed channel. *Water Resour. Res.*, 35(8), 1999.
- L. MALVERTI, G. PARKER, L. ARMSTRONG, P. LANCIEN, E. LAJEUNESSE, F. MÉTIVIER, S. COLEMAN, C. E. SMITH, T. DAVIES et A. CANTELLI : Fluvial and subaqueous morphodynamics of laminar flow. Communication personnelle, 2006.
- P. MANNEVILLE : *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, 1990.
- J. MARTÍNEZ-FRÍAS, D. HOCHBERG et F. RULL : A review of the contributions of Albert Einstein to Earth Sciences in commemoration of the World Year of Physics. *Naturwissenschaften*, 93:66–71, 2006.
- J. MAURER, P. TABELING, P. JOSEPH et H. WILLAIME : Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen. *Phys. Fluids*, 15(9):2613–2621, 2003.
- E. MEYER-PETER : Transport des matières solides en général et problèmes spéciaux. *Bull. Génie Civil d'Hydraulique Fluviale*, 5, 1951.
- R. G. MILLAR : Influence of bank vegetation on alluvial channel patterns. *Water Resour. Res.*, 36(4):1109–1118, 2000.
- R. G. MILLAR : Theoretical regime equations for mobile gravel-bed rivers with stable banks. *Geomorphology*, 64:207–220, 2005.
- F. MÉTIVIER et P. MEUNIER : Input and Output mass flux correlations in an experimental braided stream. Implications on the dynamics of bed load transport. *J. hydrol. (Amst.)*, 271:22–38, 2003.

- T. NAKAGAWA : Boundary effects on stream meandering and river morphology. *Sedimentology*, 30:117–127, 1983.
- G. NEALE et W. NADER : Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law : Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52(4):475–478, 1974.
- R. NEWBURY : Rivers and the art of stream restauration, natural and anthropogenic influences in fluvial geomorphology. In J. E. COSTA, A. J. MILLER, K. W. POTTER et P.R. WILCOCK, éditeurs : *Natural and Anthropogenic Influences in Fluvial Geomorphology*, 89, pages 137–150. American Geophysical Union, 1995.
- A. M. OSMAN et C. R. THORNE : Riverbank stability analysis, I, theory. *J. Hydraul. Eng.*, 114:134–150, 1988.
- G. PARKER : On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers. *J. Fluid Mech.*, 76(3):457–480, 1976.
- G. PARKER : Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river. *J. Fluid Mech.*, 89:109–125, 1978a.
- G. PARKER : Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 2. The gravel river. *J. Fluid Mech.*, 89:127–146, 1978b.
- G. PARKER : River meanders in a tray. *Nature*, 395:111–112, 1998.
- J. E. PIZZUTO : Numerical simulation of gravel river widening. *Water Resour. Res.*, 26(9):1971–1980, 1990.
- P. RAMEZ : Formation de bancs dans un lit endigué — Partie 1 : théorie. *La Houille Blanche*, 6:20–28, 2005.
- É. RAPHAËL et P.-G. DE GENNES : Imprégnation d'un ruban poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327:685–689, 1999.
- M. RENARDY, Y. RENARDY et J. LI : Numerical simulation of moving contact line using a Volume-Of-Fluid method. *J. Comput. Phys.*, 171(1):243–263, 2001.
- C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Improved modeling of flows down inclined planes. *European Physical Journal B*, 15(2):357–369, 2000.
- M. A. SCHERER, F. MELO et M. MARDER : Sand ripples in an oscillating annular sand-water cell. *Phys. Fluids*, 11(1):58–67, 1999.
- R. SCHIELEN, A. DOELMAN et H. E. DE SWART : On the nonlinear dynamics of free bars in straight channels. *J. Fluid Mech.*, 252:325–356, 1993.
- N. SCHORGHOFER, B. JENSEN, A. KUDROLLI et D. H. ROTHMAN : Spontaneous channelization in permeable ground : theory, experiment, and observation. *J. Fluid Mech.*, 503:357–374, 2004.

- M. SEKINE et H. KIKKAWA : Mechanics of saltating grains. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118:536–558, 1992.
- G. SEMINARA : Stability and morphodynamics. *Meccanica*, 33:59–99, 1998.
- G. SEMINARA : Invitation to sediment transport. In N. J. BALMFORTH et A. PROVENZALE, éditeurs : *Geomorphological Fluid Mechanics*, chapitre 16, pages 394–402. Springer, 2001.
- G. SEMINARA : Meanders. *J. Fluid Mech.*, 554:271–297, 2006.
- P. SEPPECHER : Moving contact lines in the Cahn-Hilliard theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 34(9):977–992, 1996.
- M. SHAMS, G. AHMADI et D. H. SMITH : Computational modeling of flow and sediment transport and deposition in meandering rivers. *Advances in Water Resources*, 25:689–699, 2002.
- I. A. SHIELDS : Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. *Mitt. Preuss. Versuchsanstalt*, 5, 1936.
- C. E. SMITH : Modeling high sinuosity meanders in a small flume. *Geomorphology*, 25:19–30, 1998.
- A. STEGNER et J. E. WESFREID : Dynamical evolution of sand ripples under water. *Phys. Rev. E*, 60(4):R3487–R3490, 1999.
- H.-H. STØLUM : River meandering as a self-organization process. *Science*, 271(5256):1710–1713, 1996.
- S. H. STROGATZ : *Nonlinear dynamics and chaos*. Addison-Wesley, 1994.
- N. STRUIKSMA, K. W. OLESEN, C. FLOKSTRA et H. J. DE VRIEND : Bed deformation in curved alluvial channels. *Journal of Hydraulic Research*, 23(1):57–79, 1985.
- B. SUMER et M. BAKIOGLU : On the formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech.*, 144:177, 1984.
- T. SUN, P. MEAKIN, T. JØSSANG et K. SCHWARZ : A simulation model for meandering rivers. *Water Resour. Res.*, 32(9):2937–2954, 1996.
- A. M. TALMON, N. STRUIKSMA et M. C. L. M. VAN MIERLO : Laboratory measurements of the direction of sediment transport on transverse alluvial-bed slopes. *Journal of Hydraulic Research*, 1995.
- GDR MiDi : On dense granular flows. *European Physical Journal*, 14(4):341–365, 2004.



- J. THOMSON : On the windings of rivers in alluvial plains, with remarks on the flow of water round bends in pipes. *Royal Soc. London Proc.*, 25:5–8, 1876.
- C. R. TWIDALE : River patterns and their meaning. *Earth-Science Reviews*, 67:159–218, 2004.
- J. M. VALVERDE et A. CASTELLANOS : Random loose packing of cohesive granular materials. *Europhysics Letters*, 75(6):985–991, 2006.
- S. D. R. WILSON : The drag-out problem in film coating theory. *J. Eng. Math.*, 16(3):209–221, 1982.
- M. S. YALIN : *River Mechanics*. Pergamon Press, 1992.
- C.-S. YIH : Stability of liquid flow down an inclined plane. *Physics of Fluids*, 6:321–334, 1963.
- G. ZOLEZZI, M. GUALA, D. TERMINI et G. SEMINARA : Experimental observation of upstream overdeepening. *J. Fluid Mech.*, 531:191–219, 2005.
- G. ZOLEZZI et G. SEMINARA : Downstream and upstream influence in river meandering. Part 1. General theory and application to overdeepening. *J. Fluid Mech.*, 438:183–211, 2001.