HAL
open science

Continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation en mathématiques au cours préparatoire : une étude de cas au sein d'une ingénierie coopérative

Sophie Joffredo-Lebrun

To cite this version:

Sophie Joffredo-Lebrun. Continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation en mathématiques au cours préparatoire : une étude de cas au sein d'une ingénierie coopérative. Education. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2016. Français. NNT : 2016BRES0073 . tel-01495980

HAL Id: tel-01495980

https://theses.hal.science/tel-01495980

Submitted on 27 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université de bretagne occidentale

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Mention : Sciences de l'Education

École Doctorale des Sciences Humaines et Sociales 507

Présentée par

Sophie Joffredo-Le Brun

Préparée à l'Université de Bretagne Occidentale et à l'unité de recherche n° EA 3875

Centre de recherche sur l'Education, les Apprentissages et la Didactique

Continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation en mathématiques au cours préparatoire

Une étude de cas au sein d'une ingénierie coopérative

Thèse soutenue le 29 novembre 2016

devant le jury composé de :

Yves CHEVALLARD

Professeur émérite, Université d'Aix-Marseille / rapporteur

Michel GRANGEAT

Professeur émérite, Université Grenoble Alpes

Ghislaine GUEUDET

Professeur, Université de Bretagne Occidentale

Alain MERCIER

Professeur émérite, ENS Lyon / Rapporteur

Marie-Jeanne PERRIN

Professeur émérite, Université d'Artois

Isabelle NÉDÉLEC-TROHEL

Maître de conférences, Université de Picardie Jules Verne / co-directrice de thèse

Gérard SENSEVY

Professeur, Université de Bretagne Occidentale / directeur de thèse

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Gérard Sensevy et Isabelle Nédélec-Trohel. Vous suivez mes aventures scientifiques depuis mon Master et encadrez minutieusement mon travail. Vous m'avez apporté de précieux conseils au cours de de ces années de thèse. Vos qualités scientifiques et humaines m'ont permises de progresser tout au long de mon parcours de recherche.

Lors de mon Master 2, j'ai rejoint le groupe de recherche « Savoirs, Dispositifs Gestes » où j'ai fait mes premiers pas dans une ingénierie didactique coopérative.

Puis, Gérard, tu m'as intégrée dans cette grande aventure scientifique et humaine qu'est la recherche ACE-ArithmÉcole où le concept d'ingénierie prend une tout autre dimension…

Merci de m'avoir accompagnée tout au long de mon parcours de doctorat, et de m'avoir tant appris sur différentes facettes du métier de chercheur.

Je profite aussi de ces quelques lignes pour remercier les participants au séminaire « Action du professeur ».

Puis, je souhaite remercier Yves Chevallard et Alain Mercier d'avoir accepté de rédiger les rapports de thèse. Je remercie aussi Michel Grangeat, Ghislaine Gueudet, Marie-Jeanne Perrin pour leur présence et leur intérêt porté à mon travail.

Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble des membres de la recherche nationale ACE-ArithmÉcole avec lesquels je travaille depuis maintenant cinq ans, Jean-Paul Fischer, Emmanuel Sander et Bruno Vilette et leurs équipes.

Ce travail de thèse est issu d'un travail coopératif, chercheurs/professeurs, je tiens donc à remercier l'ensemble des membres de cette ingénierie.

En premier lieu, l'équipe de recherche de Provence/Bretagne, Gérard Sensevy, Serge Quilio, Mireille Morellato, Josiane Ruellan, Valérie Olivier et Patricia Defives. Ces cinq années à travailler intensément à vos côtés ont été particulièrement stimulantes et m'ont offert un cadre de travail idéale pour ma thèse. J'adresse particulièrement mes remerciements à Josiane pour ces relectures attentives, pour son soutien et son amitié.

En second lieu, je tiens à remercier tous les professeurs ayant participé à la recherche ACE-ArithmÉcole depuis le début de son expérimentation en septembre 2012, pour le dynamisme de leurs échanges et leur investissement dans cette recherche. Je ne peux ici citer l'ensemble

de ces professionnels de l'enseignement mais je tiens particulièrement à remercier Valérie N, Fabienne B, Corinne VP, Fabienne D, Sylvie M, Marie-Pierre P, Olivier L, Florence D, Estelle R, Véronique S, Sophie P, Isabelle T, Florence P, Françoise D-M, Laurence C, Céline LM, Morgane G, Aurélia R. Laurence C et Catherine, B. Merci à tous leurs élèves. Un merci tout particulier à Cathy LR pour m'avoir accueilli dans sa classe deux années consécutives.

Merci aussi à Pascal Percheron.

Je tiens à remercier le laboratoire CREAD pour son accueil, ses séminaires et ses formations et le dynamisme de son équipe de doctorants.

Carole et Sylvaine, vous m'avez accompagnée tout au long de ce parcours de thèse. Je vous remercie pour votre soutien, vos conseils et votre bonne humeur. Merci pour nos échanges scientifiques mais aussi pour tous les autres…

Pascale, Virginie, Séverine, Cathy, nos discussions théoriques, méthodologiques ont permis d'enrichir mon questionnement et d'ouvrir sur d'autres possibles. Un merci particulier à Pascale pour son soutien et son amitié.

Enfin, un grand merci à mes amis qui m'ont soutenue tout au long de cette thèse sans toujours le savoir. Je vous remercie pour ces moments de partage, d'amitiés et de rires. Merci à Nathalie, à Helena, à Gaëlle, Martin et leurs enfants, à Caroline et Pierre-Yves et leurs enfants, à Guy et Gwen et à tous les autres qui m'accompagnent depuis si longtemps.

Je souhaite pour terminer remercier ma famille.

Thierry, merci de m'avoir soutenue et encouragée depuis toutes ces années dans ce travail de thèse mais pas seulement.

Titouan et Niels, mes deux fils, auxquels je dédie cette thèse, pour leur patience, leur attention et l'amour qu'ils m'offrent tous les jours. Merci.

Résumé

Notre thèse prend appui sur la recherche Arithmétique et Compréhension à l'École Élémentaire (ACE-ArithmÉcole) dont l'objectif est de produire un curriculum en mathématiques au CP. Notre étude se focalise sur le processus d'élaboration d'une partie de ce curriculum, le domaine « Situations » qui propose des séances sur la construction du nombre. Ce domaine s'est construit au sein d'une ingénierie didactique coopérative. Elle regroupe une équipe de recherche, conceptrice des séances et des professeurs du groupe expérimental.

Notre travail s'inscrit dans la continuité des recherches produites dans les approches comparatistes en didactique et en particulier dans le cadre du développement de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique. Sur le plan théorique, nos analyses sont menées à l'aulne des notions de : jeux d'apprentissage, système de capacités, de la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression.

Cette recherche explore trois volets d'analyses.

Le premier étudie le dialogue d'ingénierie entre l'équipe de recherche et les professeurs expérimentaux. Elle donne à voir l'importance de la construction d'une continuité de l'expérience des élèves à travers les systèmes de représentation du nombre.

Le second volet étudie les modifications opérées par l'équipe de recherche sur les textes de la progression après ce dialogue d'ingénierie. L'avancée du temps didactique que les textes de progression infèrent y est étudiée. Nous mettons en évidence la construction progressive d'un jeu représentationnel réciproque avec des allers-retours entre représentations concrètes et abstraites pour aborder les comparaisons entre les nombres et la notion de différence. Ces analyses donnent à voir comment les représentations deviennent des garants de la continuité didactique par un jeu de traduction représentationnel tout au long de ce curriculum.

Nous montrons ainsi comment peuvent se concevoir des ressources en mathématiques dans le cadre d'un travail coopératif chercheurs/professeurs.

Nous articulons ces deux premiers volets avec une étude fine de séances effectives, mises en œuvre à partir des textes de progression. Ces séances sont menées par deux professeures stagiaires et la professeure titulaire de la classe, membre de l'équipe de recherche. Nous montrons comment se construit la continuité de l'expérience des élèves dans l'action conjointe par l'usage des systèmes de représentation. Cette continuité est nécessaire pour une réelle expérience mathématique des élèves. Nous identifions précisément certains gestes d'enseignement nécessaires pour la construction de cette continuité à travers l'usage des systèmes de représentation.

Mots-clefs : école primaire, mathématiques, enseignement du nombre, conception de ressources, Théorie de l'Action Conjointe en Didactique, Ingénierie didactique, système de représentation, continuité, expérience mathématique, jeu représentationnel.

Abstract

Our research is based on the ACE-ArithmÉcole (Arithmetic and Comprehension at Elementary School) project. The aim of this research is to build a curriculum for mathematics at 1st grade. We focus our study on how this curriculum is elaborated, particularly on the unit entitled “Situations”, that includes lessons on quantities. This unit has been built within a cooperative didactic engineering process, by a team comprising researchers and teachers of the experimental group. Our study is grounded in the theoretical framework developed within the comparative approach of didactics, notably the Joint Action Theory in Didactics. In order to conduct our theoretical analyses, we refer to the following set of notions: learning games, system of capacities, the contract-milieu dialectics and the expression-reticence dialectics.

The analysis work is divided into three parts.

First, we examine the engineering dialogue between the research team and the experimental teachers. This part aims at showing the importance of the students' continuity of experience through the systems that represent numbers.

Second, we study how the research team modifies the unit texts after this dialogue, and how these texts impact the progress of didactic time. We highlight the progressive building of a reciprocal representation game. So as to tackle comparisons between numbers and the notion of difference, a constant back and forth between concrete and abstract representations is needed. These analyses aim at showing how representations are essential to didactic continuity, through a representation translating game all along the curriculum.

So, we show how resources in mathematics within the framework of a cooperative work researchers / teachers can be designed.

Then, we articulate these two parts with a fine study of effective lessons, implemented according to the unit texts. These lessons are conducted by two trainee teachers and by the class teacher, who is a member of the research team. We demonstrate how the students' continuity of experience is built, through joint actions, by the use of representation systems. This continuity is necessary to a true mathematical experience for the students. We particularly identify some teaching gestures that are necessary to build this continuity through the use of representation systems.

Keywords : primary school, mathematics, teaching quantities, Design of resources, Joint Action Theory in Didactics, didactic engeneering, representation system, continuity, mathematical experience, representation game.

Sommaire

Introduction générale **3**
PREMIERE PARTIE : Le cadre de l'enquête **7**
CHAPITRE 1 : Contextualisation **9**
1.La recherche ACE-ArithmÉcole 9
2.Le domaine « Situations » 13
3.L'enseignement des mathématiques : quelques éléments 24
4.Conclusion 36
CHAPITRE 2 : Problématique **39**
1.Le concept de continuité 39
2.Les représentations dans la recherche ACE-ArithmÉcole 53
CHAPITRE 3 : outils théoriques **81**
1.Ingénierie didactique coopérative : postulats théoriques 82
2.Modélisation sous forme de jeux 84
3.Le triplet des genèses, descripteur de l'action conjointe 93
4.Les stratégies contrefactuelles 95
5.Questions de recherche 95
CHAPITRE 4 : Outils méthodologiques **97**
1.Eléments généraux de réflexion méthodologique 97
2.Collectif chercheurs/professeurs 103
3.Les textes curriculaires 113
4.Etude de la pratique effective 115
5.Courte synthèse du chapitre 4 129

DEUXIEME PARTIE : Analyse **133**
CHAPITRE 5 : Coopération chercheurs/professeurs. Introduction des systèmes de représentation **135**
1.Le schéma-ligne : pierre d'achoppement 137
2.La progression des savoirs, premiers éléments d'analyse. 142
3.Processus de régulation immédiat 160
4.Travail coopératif professeurs/chercheurs 187
5.Seconde régulation, vers une continuité des représentations 195
6.Synthèse du chapitre 5 217
CHAPITRE 6 : représentations et écritures additives **223**

1.Désignation orale et représentations 227
2.Systèmes de représentation et comparaison orale 249
3.Entrée dans l'écrit : le module 2 286
4.Synthèse du chapitre 6 320
CHAPITRE 7 : Construction coopérative d'une continuité didactique autour de la différence 331
1.Avancée du temps didactique et différence, version 2012-2013 332
2.Dialogue intra et inter sphères, la différence 355
3.Nouvelle organisation des modules, année 2013-2014 378
4.Synthèse du chapitre 7 392
CHAPITRE 8 : représentations et différence, continuité de l'expérience des élèves 397
1.Introduction de la différence 400
2.La symbolisation de la différence 422
3.Les représentations et la différence 448
4.Synthèse du chapitre 8 462

TROISIEME PARTIE : Synthèse et perspectives 471
CHAPITRE 9 : Eléments de synthèse 473
1.Retour sur les questions de recherche, principaux résultats 473
2.Limites de l'étude et perspectives 503

Conclusion générale 511
1.La conception du nombre 511
2.Conception de ressources 512
3.Continuité de l'expérience des élèves 513
4.Perspectives de recherche 514
Bibliographie 517
Table des matières 531

Introduction générale

L'enseignement des mathématiques est questionné en France depuis quelques années. En effet, les résultats des évaluations nationales et internationales montrent une dégradation des performances des élèves avec notamment 15% des élèves (dont 3% sont en grande difficulté) ne maîtrisant pas les compétences mathématiques attendues au terme de leur scolarité dans le premier degré. La recherche nationale, ACE-ArithmÉcole (Arithmétique et Compréhension à l'école élémentaire) sur laquelle notre travail de thèse de doctorat prend appui est particulièrement motivée par le résultat de ces évaluations. Elle a été impulsée et soutenue par la DGESCO (Direction générale de l'enseignement scolaire). Financée, tout d'abord, par le Fonds d'expérimentation pour la jeunesse (FEJ), puis par le Plan Investissement d'Avenir (PIA).

Cette recherche (2011-2017) se centre sur les apprentissages arithmétiques au cours préparatoire (CP) et en cours élémentaire première année (CE1) (élèves de 6 à 8 ans). L'objectif est de mettre à l'épreuve des hypothèses concernant l'efficacité de l'enseignement des mathématiques en proposant aux professeurs une progression complète des apprentissages numériques en mathématiques, conformément aux contenus et objectifs des programmes (MEN, 2008, 2015). Le cœur de cette recherche est la conception d'une progression et d'activités relatives à la connaissance du nombre, du calcul et de la résolution de problèmes additifs, soustractifs et multiplicatifs. Ce curriculum s'appuie sur les connaissances scientifiques disponibles dans plusieurs disciplines, en Neurosciences, Sciences de l'Education, Psychologie du Développement et en Didactique des mathématiques. Il est conçu par une équipe constituée de quatre laboratoires qui conçoivent respectivement un domaine d'enseignement « Estimation, Grandeurs et Mesures », « Résolution de Problèmes », « Calcul Mental » et « Situations ». Ces domaines s'articulent entre eux et organisent l'enseignement sur l'année scolaire.

L'efficacité de ce curriculum est évaluée par un système de pré et post-tests avec une passation dans des classes du groupe témoin et des classes du groupe expérimental réparties selon leur appartenance ou non à un réseau d'éducation prioritaire (REP). Selon les années, dans chaque groupe, entre 60 et 120 classes sont concernées par ces tests sur l'ensemble du territoire.

Dans ce travail de thèse, nous nous centrons sur deux années de l'expérimentation du curriculum en mathématiques au CP (2012-2014) en nous focalisant sur la conception d'un des quatre domaines composant ce curriculum, le domaine « Situations ». Ce domaine a été élaboré au sein d'une ingénierie didactique coopérative regroupant des professeurs et des chercheurs. Cette ingénierie se structure autour d'un premier groupe, l'équipe de recherche composée de chercheurs et de professeurs de classes d'étude qui testent dans leur classe la progression, dans un rapport de première main à la recherche en éducation. Ces séances sont ensuite analysées collectivement au sein de l'équipe de recherche. Le second groupe se compose de professeurs de classes du groupe expérimental. Ces deux groupes sont en relation constante grâce à la mise en place de plusieurs moyens de communication.

Nous nous intéressons à deux catégories d'expérience. La première est celle vécue par l'équipe de recherche et des professeurs des classes expérimentales dans le cadre du travail coopératif mis en place. La seconde est celle vécue par les élèves dans les classes lors de l'implémentation du domaine « Situations ».

Les premières questions que nous nous posons sont

- Comment, dans le cadre de l'ingénierie, le dialogue entre l'équipe de recherche et les professeurs du groupe expérimental s'est-il construit ?

- Comment s'organise l'enquête collective entre chercheurs et professeurs autour d'objets de savoir issus du curriculum ACE-ArithmÉcole ?

- Quels sont les effets de cette ingénierie sur l'organisation de la progression et donc sur la pratique effective ?

Notre enquête portera spécifiquement sur les conditions d'émergence d'une continuité de l'expérience mathématique des élèves à partir de l'étude du dialogue entre les différents acteurs de cette ingénierie et des différentes versions des textes de progression produites. Notre enquête se poursuivra à travers l'étude de séances de classe.

Cette continuité sera en particulier étudiée à partir des systèmes de représentation du nombre que propose le domaine « Situations ».

Notre travail se structure en trois grandes parties :

- la première partie fixera le cadre de l'enquête. Tout d'abord, nous proposerons une contextualisation de notre travail de thèse dans le cadre de la recherche nationale ACE-ArithmÉcole. Puis, nous relierons cette recherche aux différentes réflexions de l'institution et de la recherche sur l'enseignement des mathématiques en France.

Dans un second temps, nous délimiterons notre problématique en interrogeant, d'une part, la textualisation des savoirs à partir de la notion de continuité didactique et de continuité de l'expérience des élèves. D'autre part, nous identifierons des résultats de recherche sur les systèmes de représentations dans l'enseignement des mathématiques à travers certains travaux en psychologie et en didactique des mathématiques. Dans un troisième temps, nous présenterons notre cadre théorique qui viendra nourrir nos analyses. Pour terminer cette première partie, nous exposons notre méthodologie qui rend compte des trois types de données traités dans ce travail : le dialogue entre l'équipe de recherche et les professeurs du groupe expérimental au sein d'une ingénierie didactique coopérative, les textes de la progression et l'analyse de la pratique effective.

- la seconde partie de cette thèse regroupera les analyses produites qui seront réparties sur quatre chapitres. Les deux premiers étudient non seulement les échanges entre les professeurs des classes expérimentales et l'équipe de recherche autour des trois premiers modules (désignation orale et écrite des nombres inférieurs ou égale à six) qui introduisent les systèmes de représentation mais aussi les effets de ce dialogue sur la textualisation des savoirs et la pratique effective. Les deux autres chapitres reprennent la même structure que précédemment mais en se centrant sur l'introduction d'un nouvel objet de savoir, la notion de différence.

- La troisième partie conclut cet écrit en présentant une synthèse ainsi que les limites et perspectives de notre recherche.

Nous demandons au lecteur de bien vouloir nous excuser pour la longueur de la thèse. Nous avons essayé de faciliter sa lecture grâce à une synthèse de chaque chapitre.

Première partie : Le cadre de l’enquête

CHAPITRE 1 : Contextualisation

Dans ce premier chapitre, nous présenterons une contextualisation de notre étude.

Dans une première section, nous proposerons un court historique de la recherche ACE-ArithmÉcole. Il s'agit d'éclairer le lecteur quant à l'organisation de cette recherche sur les trois années de l'expérimentation de la progression de CP et sur les principes mathématiques liés à son élaboration.

Puis, dans une seconde partie, nous nous focaliserons sur la conception de l'ensemble des modules proposés dans un des quatre domaines de la progression ACE, le domaine « Situations », terrain de recherche de cette thèse.

Enfin, dans une troisième section, nous ferons une synthèse des discussions qui animent l'institution scolaire et les acteurs de la recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

1. La recherche ACE-ArithmÉcole

La recherche ACE-ArithmÉcole est pilotée par un comité scientifique composé de quatre enseignants-chercheurs qui réunissent autour d'eux une équipe qui élabore, selon sa spécificité, un des quatre domaines composant le curriculum ACE :

- le domaine « Estimation, Grandeurs et Mesures », conduit par Bruno Vilette, Professeur en psychologie du développement (Université de Lille 3) ;

- le domaine « Résolution de problèmes », piloté par Emmanuel Sander, Professeur en psychologie du développement et de l'éducation (Université Paris 8) ;

- le domaine « Calcul Mental », conçu par Jean-Paul Fischer (Université de Lorraine), Professeur en psychologie du développement ;

- le domaine « Situations », mené par Gérard Sensevy, Professeur en sciences de l'éducation (Université de Bretagne occidentale, ESPE de Bretagne) en collaboration avec une équipe de l'Université d'Aix-Marseille (Alain Mercier, Professeur à l'Ifé, ENS Lyon, Yves Matheron, Professeur à l'Ifé, ENS Lyon, Serge Quilio, Maître de conférences à l'Université de Nice Sophia Antipolis).

Dans ce chapitre, nous présenterons, tout d'abord, un bref état des lieux de la recherche ACE-ArithmÉcole. Puis, nous nous focaliserons plus spécifiquement sur la conception du domaine « Situations », terrain de notre recherche.

1.1. Les principes mathématiques

L'élaboration de ce curriculum s'appuie sur certains résultats de la recherche qui conduisent à repenser les relations entre l'automatisation des procédures et la compréhension des opérations dans l'enseignement des mathématiques à l'école (MEN, 2011).

Faire des mathématiques, c'est manier différents systèmes de représentation (formes symboliques et analogiques) et de traitement numérique (exact et approximatif), ces systèmes devant toujours ramener à ce qu'ils dénotent. La construction du nombre est, dans ce curriculum, étayée par des procédures de composition/décomposition, par un travail sur la numération décimale, l'approximation et le calcul rapproché. Les mathématiques sont pensées de manière à fournir des modèles pour représenter le réel et l'action sur le réel ; ces modèles permettent de voir comme équivalentes diverses situations.

Ainsi, le domaine « Estimation, Grandeurs et Mesures » repose sur « l'interaction du système de représentation numérique exact et verbal (le système numérique conventionnel) et du système de représentation numérique analogique et approximatif (le sens intuitif et spatial des nombres) qui donne une signification aux procédures et à l'acquisition des automatismes » (Dehaene & Cohen, 1991 ; Nieder & Dehaene, 2009) » (Ibid.). Il organise des activités orales d'approximation (n'exigeant pas que les élèves sachent lire ou écrire les nombres) permettant d'anticiper des activités liées aux situations proposées par le logiciel Estimateur, et celles de décomposition d'écritures additives et soustractives.

Le domaine « Résolution de problèmes », quant à lui, s'appuie sur des recherches récentes en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. Ces recherches ont placé au cœur de la question des apprentissages mathématiques celle du développement conceptuel qui préside aux acquisitions mathématiques, en particulier à travers la notion de recodage sémantique d'une situation problème (Gamo, Sander & Richard, 2010). Une place particulière y est accordée à la mise en œuvre de situations à interprétations multiples qui doivent favoriser la conceptualisation par constat d'équivalence entre procédures apparemment différentes. Il s'agit de construire différents modèles d'une même situation. Ce domaine met l'accent sur le fait que les signes mathématiques sont associés à une diversité sémantique de

situations (par exemple, le signe « – » pourra être associé à plusieurs situations qui montrent l'équivalence entre compter en avançant ou en reculant, le signe « – » n'est plus associé uniquement à une notion de retrait) afin de dégager les acquisitions de contextes sémantiques particuliers et de favoriser le transfert entre situations.

Par ailleurs, la mise en place d'algorithmes doit contribuer à faire mieux comprendre le nombre, sa structure et ses propriétés. L'élaboration de ce curriculum prend en compte certains résultats établis en psychologie, notamment le fait que les relations entre l'automatisation des « procédures » et la compréhension des opérations dans l'enseignement des mathématiques sont indispensables et complémentaires. Cet aspect est pris en compte dans la progression à travers la mise en place d'activités spécifiques relevant des connaissances déclaratives et procédurales dans le domaine « Calcul Mental ». La fréquence des calculs et de la reconstruction d'un même résultat contribue, en effet, à ancrer en mémoire certains faits numériques. En parallèle, un travail spécifique est mené pour mettre en place des procédures efficaces pour retrouver ces résultats notamment par des procédures de surcomptage des petits nombres, le passage par 5 et 10 avec un travail spécifique sur l'automatisation de la reconnaissance des conditions d'application d'une procédure et une automatisation de l'exécution de la procédure.

Les différents domaines existant dans cette progression sont solidaires entre eux. En effet, ils s'appuient sur des représentations schématiques communes. Par exemple, des représentations connues et réutilisables par les élèves sont privilégiées dans les situations proposées notamment le « schéma-ligne » et le « schéma-boîte », que nous traiterons largement dans ce qui suit. Les signes mathématiques (>, <, =, ≠, +, -) sont utilisés et réinvestis dans les situations proposées dans l'ensemble de cette progression.

Nous reviendrons plus précisément sur le domaine « Situations » dans la section suivante. Voyons maintenant comment s'est déroulée la recherche ACE-ArithmÉcole.

1.2. Déroulement de la recherche

L'élaboration et l'expérimentation du curriculum de CP (Cours préparatoire) s'est déroulée sur trois ans (2011-2014). La première année a été dédiée à l'élaboration de la progression, à la conception des activités de classe testées dans quatre classes d'étude en Bretagne et à Marseille, dans deux classes de la région parisienne et deux classes de la région lilloise.

Puis, des professeurs volontaires au sein des quatre académies ont été formés à cette progression en juin ou septembre 2012. Cette formation s'est déroulée sur quatre jours et a regroupé dix-huit professeurs en Bretagne, quinze à Versailles, treize à Marseille et dix-huit dans l'académie de Lille. Ces classes ont été globalement réparties selon leur appartenance ou non à des réseaux d'éducation prioritaire. Cette soixantaine de professeurs expérimentaux a implémenté l'ensemble de la progression dans les classes en 2012-2013, en lien étroit avec les équipes de recherche. Des pré et post-tests ont été réalisés dans ces classes expérimentales et dans des classes témoins en début (septembre 2012) et en fin d'année scolaire (mai-juin 2013).

Des observations dans les classes ont été effectuées et analysées par les différentes équipes de recherche. Suite à cette première année d'expérimentation sur le terrain, certains aspects de la progression ont été modifiés en particulier dans le domaine « Situations » à la suite du stage « bilan/perspectives » organisé sur l'académie de Rennes en fin d'année scolaire.

Au cours de l'année 2013-2014, environ cent-vingt classes ont expérimenté ce curriculum, soit pour la première année, soit pour la seconde année sur les quatre académies concernées. Des pré et post-tests ont, de même, été réalisés dans ces classes et dans des classes témoins.

Ce second groupe expérimental est en relation directe avec les équipes de recherche, comme cela était le cas lors de l'année 2012-2013 via notamment la mise en place d'un site Internet[1] sur lequel est déposé l'ensemble des documents produits par les équipes de recherche.

Les différents domaines composant le curriculum (« Estimation », « Résolution de Problèmes, » « Calcul Mental » et « Situations ») sont répartis pour l'année 2012-2013 de la façon suivante (cf. Tableau 1) :

Domaine « Situations »	Domaine « Résolution de problèmes »	Domaine « Estimateur, Grandeurs et Mesures »	Domaine « Calcul Mental »
58 séances de 45 minutes (séances longues) réparties en onze modules • 9 modules de 37 séances au premier trimestre • 2 modules de huit séances au deuxième trimestre • 1 module de treize séances au troisième trimestre	24 séances de 45 minutes réparties sur cinq modules. • 2 modules sur le premier trimestre • 2 modules sur le deuxième trimestre • 1 module au troisième trimestre	46 séances dont 32 séances longues (45 minutes) et 14 séances courtes (30 minutes). Les deux premiers modules sont répartis sur le premier trimestre, les trois derniers se distribuent sur l'ensemble de l'année. • Module 0 : 3 séances longues • Module 1 : 2 séances longues • Module 2, 3 et 4 : 21 séances longues • Module 5 : 6 séances longues et 14 séances courtes.	1 séance quotidienne de vingt minutes comportant deux activités.

Tableau 1: répartition des séances en fonction des domaines du curriculum

[1] http://python.espe-bretagne.fr/ace/

Le domaine « Situations » a le volume horaire le plus important avec 58 séances de 45 minutes réparties sur douze modules. Le domaine « Résolution de problèmes » prévoit 24 séances sur cinq modules. Le domaine « Estimateur, Grandeurs et Mesures » propose 46 séances sur cinq modules. Le domaine « Calcul Mental », quant à lui, s'organise autour d'une séance quotidienne de vingt minutes.

La section suivante se focalisera sur la conception du domaine « Situations », terrain de notre recherche.

2. Le domaine « Situations »

Nous resserrons notre propos, dans cette seconde section, sur la conception du domaine « Situations » par l'équipe de Rennes/Provence. Ce domaine organise l'enseignement des nombres et du calcul en classe de CP sur l'ensemble de l'année scolaire à partir de certains principes épistémologiques et didactiques que nous décrirons dans un premier paragraphe. Puis, nous étudierons l'organisation de la conception des séances de ce domaine qui s'est déroulée dans le cadre d'une ingénierie didactique coopérative (Sensevy, Forest, Quilio & Morales, 2013) sur trois années consécutives (2011-2014).

2.1. La conception du domaine « Situations »

2.1.1. Les principes du domaine « Situations »

Le domaine « Situations » s'organise autour d'une suite de situations[2] (Brousseau, 1998) peu nombreuses, emboîtées et évolutives qui doivent permettre aux élèves de se confronter à la continuité de l'expérience mathématique. Le professeur fait vivre dans la classe ces situations en plaçant l'élève dans une démarche d'enquête.

Un des principes fondateurs du domaine « Situations » est de favoriser un rapport de première main des élèves à une réelle expérience mathématique (Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat & Perrot, 2005 ; Mcclain & Cobb, 2001 ; Hiebert & Grouwn, 2007). Cette expérience

[2] Les connaissances mathématiques sont représentées par « des situations caractéristiques qui les « fonctionnalisent » sous diverses formes par le jeu de leurs variables cognitives et didactiques. Chaque situation de ce type engendre une famille de situations qui appellent comme moyen de solution des formes diverses de cette connaissance » (Brousseau, 2001, p. 334)

mathématique, ancrant l'enseignement sur l'apprentissage[3], passe par une conception en acte des mathématiques comme modélisation de la réalité. Ainsi, pour que l'enseignement engendre une connaissance de la structure conceptuelle des mathématiques, il est nécessaire que les élèves fréquentent explicitement les concepts et qu'ils traitent publiquement les connexions mathématiques. Ainsi,

> « discussing the mathematical meaning underlying procedures, asking questions about different solution strategies are similar to and different from each other, considering the ways in which mathematical problem build on each other or are special (or general) cases of each other, attending to the relationships among mathematical ideas, and reminding students about the main point of the lesson and how this point fits within the current sequence of lessons and ideas". (Hiebert & Grouws 2007, p. 387)

Hiebert et Grouws (2007) montrent que les élèves doivent mettre en relation les problèmes mathématiques rencontrés avec une multitude de concepts et les procédures nécessaires pour les résoudre. Ces connexions doivent être produites par l'élève et non par le professeur pour l'élève. Le rapport de première main de l'élève à l'expérience mathématique y est donc primordial. Le professeur pourra influer sur les stratégies des élèves mais sans se substituer à lui (clause proprio motu).

Nous reviendrons au fil des analyses sur les principes mathématiques des situations proposées dans le domaine « Situations », mais nous en donnons une première caractérisation ci-dessous :

- un travail sur un temps long sur les petits nombres ;
- un travail sur les grands nombres par analogie aux petits nombres ;
- un travail de comparaison systématique ;
- un travail de composition/décomposition ;
- un développement d'un rapport pré-algébrique notamment à travers le principe inverse ;
- un travail systématique sur les systèmes de représentation du nombre, comme moyen de résolution et de preuve.

La situation initiale du domaine « Situations » est le jeu des annonces au cours duquel les élèves font une annonce avec leurs deux mains et la compare avec un lancer de dé à six faces. Puis, dans un second temps, les élèves comparent une écriture additive à deux termes avec un

[3] Le professeur ancre son enseignement sur les connaissances antérieures des élèves.

nombre usuel, toujours en référence au jeu des annonces. Cette première situation se complexifie au fil des modules pour aborder la notion de différence, les structures multiplicatives, les nombres supérieurs à dix et la numération décimale.

Nous donnerons à voir ci-dessus de manière plus précise comment s'organise le domaine « Situations » ;

2.1.2. Vision synoptique du domaine « Situations »

La progression proposée dans ce domaine a évolué tout au long des trois années d'expérimentation avec un certain nombre de modifications dans l'organisation didactique des savoirs et dans l'agencement des modules entre eux. Nous présentons ci-dessous (cf. Tableau 2) la première version de la progression produite en septembre 2012.

Module	Contenu
Module 0 Situations trains/tours	Consolider les connaissances des élèves sur les premiers nombres et les confronter aux premières décompositions additives. Il fournit un moyen matériel de validation à la situation des annonces qui sera déclinée tout au long de cette progression.
Module 1 Situation orale du jeu des annonces, deux mains/un dé	Introduction du jeu des annonces. Les élèves travaillent par équipes dont les élèves sont de niveau hétérogène et proposent oralement avec leurs deux mains une annonce, qu'ils comparent avec un lancer de dé à six faces (constellations de 1 à 6).
Module 2 Situation écrite du jeu des annonces, deux termes/un dé	L'usage des doigts disparaît pour laisser la place à l'écriture symbolique. Les élèves comparent une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) issu d'un lancer de dé à six faces (en référence au module 1). Les premiers signes mathématiques de comparaison de sommes sont introduits : « = » et « ≠ », et le signe « + ».
Module 3 Situation orale du jeu des annonces, trois mains/un dé	Les élèves proposent oralement une annonce à trois mains qu'ils comparent avec un lancer de dé à six faces (constellations de 1 à 6).
Module 4 Situation écrite du jeu des annonces, trois termes/un dé	Les élèves comparent une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5 et la somme ≤ 6 en référence au module 3) avec un nombre usuel (≤ 6) issu d'un lancer de dé à six faces. De nouveaux signes mathématiques sont alors introduits : « < » et « > ».
Module 5 Situation orale du jeu des annonces, deux mains/deux dés	Les élèves proposent oralement une annonce à deux mains qu'ils comparent avec un lancer de deux dés à six faces (constellations de 1 à 6).
Module 6 Situation écrite du jeu des annonces, deux termes/deux dés	Les élèves comparent deux écritures additives à deux termes (chaque terme ≤ 5 et la somme ≤ 12 en référence au module 5).
Module 7 Beaucoup de mains, les groupements par 10	Approche du système décimal par le biais des groupements par 10.
Module 8 Comparaison d'écritures additives, chaque termes ≤ 10	Comparaison écritures additives de deux ou trois termes
Module 9 La différence	Introduction de la notion de différence comme désignation/représentation exprimée par le signe « - »
Module 10	Renforcement des connaissances des élèves sur les structures pré-algébriques

Le nombre inconnu	des structures additives en proposant la recherche de complément.
Module 11 Les structures multiplicatives	Introduction des structures multiplicatives

Tableau 2 : progression du domaine "Situations" par module en septembre 2012

Les modules de zéro à six se déroulent sur le premier trimestre, les modules sept, huit, neuf et dix sur le second trimestre. Les séances du module 11 se répartissent, quant à elles, sur le dernier trimestre. Ce découpage en modules rend compte du passage d'une situation à une autre ou d'une phase à une autre au sein de la même situation. La progression de ce domaine « Situations » est accompagnée par deux types de dispositifs spécifiques, le Journal du Nombre et des séances d'anticipation.

2.1.3. Le Journal du Nombre et l'Anticipation

Le domaine « Situations » propose au sein de sa progression deux dispositifs particuliers : le Journal du Nombre et l'anticipation que nous décrirons succinctement ci-dessous. Ces dispositifs ont fait l'objet d'une première étude dans la thèse de Nathalie Vigot (Vigot, 2014).

Le Journal du Nombre

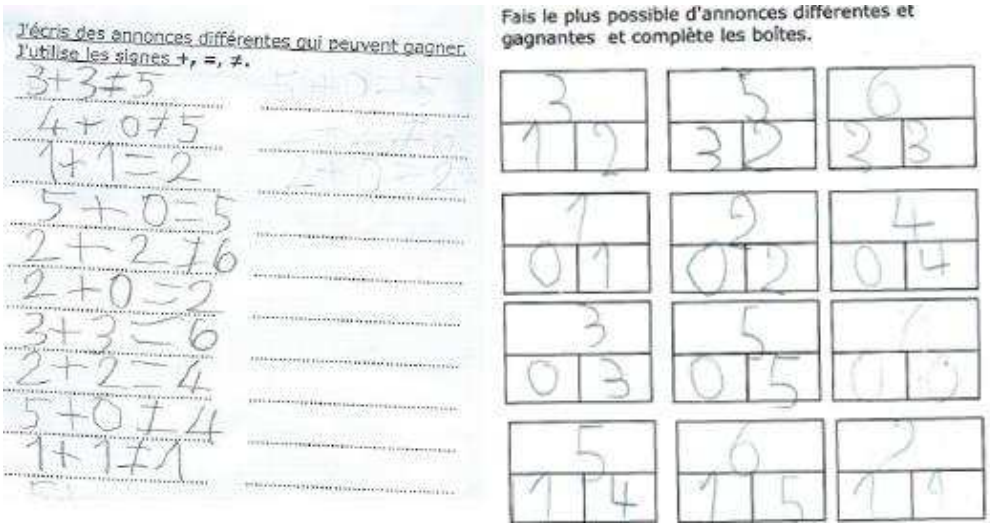
Le Journal du Nombre est un cahier dont le texte introductif est *« J'écris des mathématiques pour mieux comprendre les nombres et les signes mathématiques, pour mieux m'en servir, et* pour que la classe comprenne mieux les nombres et les signes mathématiques, pour mieux *s'en servir*[4] ». Cet outil doit permettre au professeur de proposer une nouvelle manière de considérer l'écriture mathématique de l'élève en construisant un rapport de première main à l'activité mathématique. C'est un espace d'exploration des potentialités des nombres et des signes mathématiques à partir d'incitations, qui ne sont pas à proprement parler des « consignes », mais des invitations à « écrire librement » des mathématiques.

Le Journal du Nombre autorise, de même, une émancipation de l'activité productrice de l'élève pour lui-même (puisque l'élève y exprime ce qu'il sait faire) et pour les autres élèves. Le professeur organise sur cette base la communication mathématique dans la classe. Les incitations proposées émanent soit du professeur soit des élèves eux-mêmes pour continuer l'enquête sur les nombres (Vigot, 2014 ; Lefeuvre, Joffredo-Le Brun & Sensevy, 2015 ; Sensevy, 1998). Ces incitations sont fournies au sein même des textes curriculaires de chaque module ainsi que des indications quant à la fréquence de son usage. Nous prenons ci-dessous un exemple d'incitations proposé dans le texte curriculaire du module 2 (version 2013-2014)

[4] http://python.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=1763

En fonction du travail de ses élèves, le professeur propose, au sein des séances de ce module, des activités de Journal du Nombre (en début ou en fin de séance), qui peuvent être plus ou moins courtes, et qui donnent l'occasion aux élèves de s'essayer à ce qu'ils savent déjà faire. Les activités de Journal du Nombre peuvent être proposées à certains moments seulement à certains élèves, alors que le professeur travaille en particulier avec d'autres, mais tous les élèves doivent pratiquer assidument le Journal du Nombre, quel que soit leur avancement. Voici quelques exemples d'incitations pouvant être proposées dans le Journal du Nombre. - J'écris des annonces différentes J'utilise les signes +, = et ≠ ; - J'écris des annonces gagnantes dans les boîtes ; - J'écris des mathématiques avec les nombres 1, 2, 3 et 4 et les signes mathématiques +, =, ≠ ; - Je représente à l'aide de la boîte et du schéma train/ligne des annonces perdantes (Annexe 16).

Nous proposons ci-dessous une illustration des productions d'élèves à partir des incitations proposées dans le texte du déroulement.



Photogramme 1 : Extraits de journaux du nombre d'une classe de CP

*Le dispositif d'anticip*ation

Lors des deux premières années d'expérimentation de la recherche ACE-ArithmÉcole, des points de vigilance, des nœuds de compréhension ont été identifiés par l'équipe de recherche. Pour pallier les difficultés de certains élèves « moins avancés » dans le savoir, des séances d'anticipation sont proposées dans le corps des textes curriculaires pour que chaque élève puisse continuer à profiter au mieux de l'activité didactique. En effet, l'anticipation est un outil de gestion de l'hétérogénéité des élèves au sein de la classe. C'est un dispositif qui permet à un nombre restreint d'élèves de niveau hétérogène d'anticiper les savoirs qui vont être étudiés ensuite en classe entière. Ces séances d'anticipation, d'une durée de trente minutes environ, se déroulent souvent en début de séance. Le professeur compose un groupe hétérogène d'élèves, avancés et moins avancés. La gestion didactique de la situation par le professeur doit permettre alors une diffusion des savoirs des élèves avancés vers les élèves moins avancés.

Après ce court exposé des principes mathématiques sous-jacents du domaine « Situations » et de son organisation, nous nous recentrerons sur les conditions d'élaboration de ce domaine qui s'est déroulé au sein d'une ingénierie didactique coopérative.

2.2. Conception du domaine « Situations, une ingénierie didactique coopérative

Les modules et les séances élaborés dans le domaine « Situations » l'ont été au sein d'une ingénierie didactique coopérative que nous pouvons qualifier de macro-ingénierie (Brousseau, 2001) dans la mesure où elle porte sur la production de situations sur un temps long concernant un ensemble de connaissances mathématiques. Cette ingénierie se compose de deux sphères, la sphère 1 désignant l'équipe de recherche et la sphère 2, les professeurs des classes expérimentales. Ces deux entités sont, depuis le début de l'expérimentation (septembre 2012), en forte interaction. Nous décrirons ci-dessous ces deux sphères.

2.2.1. L'équipe de recherche, la sphère 1

La conception du domaine « Situations » repose sur une équipe de recherche, que nous nommons la sphère 1, organisée autour de deux pôles géographiquement distants, Rennes et Provence/Marseille. Elles se composent de quatre enseignants-chercheurs en didactique, trois doctorantes[5] (dont deux sont maîtres-formateurs), un formateur en mathématiques et quatre maîtres-formateurs. Les classes des maitres-formateurs sont nommées classes d'étude. Elles testent depuis septembre 2011 les différentes situations et depuis septembre 2012 implémentent l'ensemble du curriculum. Cette équipe conçoit, teste et rédige les différents modules du domaine « Situations ».

Des films sont réalisés dans les classes d'étude par les professeurs eux-mêmes ou par un autre membre de l'équipe de recherche. Ces vidéos sont stockées sur un espace numérique de l'ESPE de Bretagne nommé PUKAO accessible aux différents membres de l'équipe de recherche. Depuis septembre 2011, plus de quatre-vingt-dix séances y ont été déposées.

La sphère 1 se réunit régulièrement depuis 2011, généralement par visioconférence du fait de l'éloignement géographique des acteurs. Ces réunions sont l'occasion d'échanger autour des mises en œuvre de séances réalisées et filmées dans les classes d'étude, de diffuser des

[5] Un de ces maîtres-formateur a soutenu sa thèse en 2014 (Vigot, 2014).

informations de la DGESCO et de l'équipe nationale. De même, elles permettent des explicitations quant aux hypothèses mathématiques sur lesquelles repose la conception de ce domaine. Un compte-rendu est mis à disposition sur le même espace de stockage que les vidéos. Le Tableau 3, ci-dessous, donne à voir la répartition par date des réunions sur les trois ans de la recherche.

2011-2012	2012-2013	2013-2014
12-12-2011	26-09-2012	25-09-2013
24-01-2012	11-10-2012	27-11-2013
13-02-2012	22-10-2012	4-12-2013
21-02-2012	23-01-2013	12-02-2014
21-03-2012	06-02-2013	19-03-2014
03-04- 2012	13-02-2013	10-04-2014
25-04-2012	13-03-2013	03-06-2014
13-06-2012	20-03-2013	
	27-03-2013	
	15-04-2013	
	22-05-2013	
	19-06-2013	
	03-07-2013	

Tableau 3: Synthèse des réunions de l'équipe de recherche

Nous remarquons une forte densité des réunions réparties sur les trois années scolaires (entre septembre et juin) avec en moyenne d'une réunion par mois la première et troisième année. La seconde année, quant à elle, voit une augmentation de leur périodicité avec treize réunions. En effet, cette année 2012-2013 correspond à la première année d'expérimentation dans les classes expérimentales ce qui a entraîné un important travail de régulation et de réécriture des modules de la progression du domaine « Situations » par la sphère 16.

2.2.2. Les classes expérimentales, la sphère 2

Lors de la seconde année[7] d'expérimentation (2012-2013), seize classes expérimentales[8] implémentent l'ensemble du curriculum dans le département des Côtes d'Armor (dont trois en zone d'éducation prioritaire). Vingt-et-une classes témoins sont désignées dans le département d'Ille et Vilaine (dont douze en REP). Sur les seize classes expérimentales, onze continueront à mettre en œuvre le curriculum ACE-ArithmÉcole en 2013-2014 accompagnés de vingt nouveaux professeurs localisés sur le bassin rennais dont certains faisaient partie des classes témoins en 2012-2013. Nous nommerons ces professeurs du groupe expérimental la sphère 2.

---

[6] Comme nous le verrons dans l'étude empirique au sein de la seconde partie de cette thèse

[7] La première année d'expérimentation, nous le rappelons, correspond à l'année de conception de la progression par l'équipe de recherche.

[8] Dans ce travail de thèse, nous nous centrerons sur les classes expérimentales de Bretagne.

En 2012-2013, une semaine de formation a été organisée pour les seize professeurs expérimentaux de CP des Côtes-d'Armor du 18 au 22 juin 2011. Les différentes équipes nationales y sont intervenues dans leur domaine respectif sur une demi-journée. Deux séances de travail ont été dédiées à l'explicitation de deux dispositifs spécifiques, le Journal du Nombre et l'anticipation, comme outil de gestion de l'hétérogénéité des élèves au sein de la classe. L'usage du site Internet de la recherche y est, de même, explicité.

En 2013-2014, une seconde semaine de formation est organisée pour les nouveaux professeurs du groupe expérimental.

Des « animations pédagogiques », que nous nommerons dans ce travail des réunions de régulation sont organisées une fois par période (cinq dans l'année scolaire) par l'inspection académique des Côtes-d'Armor (en 2012-2013 et en 2013-2014) et d'Ille et Vilaine (en 2013-2014). Ces réunions regroupent l'équipe de recherche de Bretagne et les professeurs expérimentaux. Un ordre du jour est rédigé avant chaque réunion à partir d'un questionnaire envoyé au préalable aux professeurs expérimentaux. Ces demi-journées permettent d'échanger autour des pratiques, des difficultés relevées dans les mises en œuvre et des contenus des modules. Elles préparent aussi les points délicats des modules qui seront travaillés dans les classes prochainement. Chaque réunion fait l'objet d'un compte-rendu destiné à l'équipe de recherche.

En juin 2013 et juin 2014 sont organisés par les inspections académiques des deux départements concernés (Ille et Vilaine et Côtes-d'Armor) des stages bilan/perspectives d'une semaine au cours desquels les professeurs expérimentaux échangent entre eux et avec l'équipe de recherche autour du curriculum. Ces stages ont permis de réfléchir et de proposer des pistes d'amélioration dans l'organisation des savoirs sur l'année, dans l'organisation didactique des séances et dans les dispositifs proposés (Journal du Nombre et séances d'anticipation). Chaque stage s'est organisé autour de phases de travail en ateliers et de mises en commun des productions de chaque groupe.

Par ailleurs, une liste de diffusion regroupant l'ensemble des classes expérimentales de Bretagne est créée par l'équipe de recherche pour diffuser des informations mais aussi pour que les professeurs puissent communiquer entre eux et mutualiser les documents qu'ils produisent (fiches de préparation de séances, jeux, programmation…).

A ce moyen de communication s'ajoute un site Internet dédié spécifiquement à la recherche ACE-ArithmÉcole sur lequel chaque professeur peut se connecter via un mot de passe et un

identifiant. Sur ce site, les quatre équipes de recherche déposent régulièrement des documents nécessaires à la mise en œuvre du curriculum.

Ces documents sont de trois types :

- un document « Programmation » proposant un calendrier journalier des séances (cf. Tableau 4).

Semaine 12 : du lundi 26 au vendredi 30 novembre

Jour	Situation (séances longues)	Calcul mental (séances courtes)
Lundi 26/11	Sit Mod 7,3 Dégroupement/regroupement Groupement par 10	Balance1 (Ex. Coll, puis Ind., Ard., avec si possible vérification matérielle) : 2 + combien pour équilibrer 3, 5 + combien pour équilibre 7, … etc. : 10 pbs dans la 1ère dizaine
Mardi 27/11	Sit Mod 7,4 Comparaison de deux écritures additives (groupement par 10) Parties fictives	Balance2 : (Ex. Coll, puis Ind., Ard., avec si possible vérification matérielle) : 12 + combien pour équilibrer 3, 15 + combien pour équilibrer 7, … etc. : 10 pbs dans la 2ème dizaine
Jeudi 29/11	RdP Mod 1 Différencier le calcul du tout et du complément	a) Balance3: sans vérification matérielle b) FCaNov09 : 10+7, 10+9, 8+10, 10+6, 5+10, 2+10, 10+1, 3+10, 10+0, 10+10
Vendredi 30/11	Est Mod 2 : nombre Est Mod 3 : addition Est Mod 4 : soustraction	a) Balance4 : sans vérification matérielle b) FCaNov10 (reprise de la série 2) : 2+2, 5+3, 8+1, 4+4, 2+3, 9+0, 5+5, 7+2, 3+3, 6+3

Tableau 4 : extrait du document Programmation pour l'année 2012-2013

Dans la première colonne est mentionnée la date (ici par exemple, le lundi 26 novembre 2012). La seconde colonne donne la séance à mener soit dans le domaine « Situations », « Résolution de problèmes » ou « Estimation, Grandeurs et Mesures ». La dernière colonne renvoie à la progression journalière proposée en calcul mental. Par exemple, pour le mardi 27 novembre 2012, ce document propose aux professeurs de mettre en œuvre la séance 4 du module 7 du domaine « Situations » et la séance « balance 2 » en Calcul Mental.

- un document « Progression » pour chaque domaine comme nous le montre l'exemple ci-dessous (cf. Tableau 5).

Module	Module 1. Annonce à deux mains, lancer d'un dé à six faces (constellations de 1 à 6), oral, égalité	
Semaine	Semaine 3	Semaine 4
Séances	2 séances	2 séances
Phase de la situation des annonces	Production d'une annonce à deux mains et comparaison orale avec un lancer d'un dé à 6 faces (constellations de 1 à 6). Partie gagnante si annonce **égale** au lancer	
Enjeux	La situation des annonces a pour objectif de travailler l'usage oral et spontané de la désignation des nombres (de 1 à 6) sous forme additive et la comparaison de ces désignations dans les interactions. Les élèves produisent des annonces avec leurs deux mains et les comparent avec un lancer d'un dé à six faces. Les échanges oraux viennent ensuite désigner l'annonce produite par chaque élève à partir de la configuration de doigts choisie (inférieure ou égale à 6). Cette situation permet de confronter la référence aux mains (10 doigts) avec le dé (constellations jusqu'à 6). Cette phase introduit le travail sur la décomposition/composition des nombres. Il y a comparaison entre deux systèmes de représentation : chaque terme, désignant une quantité (les nombres de doigts représentés sur les mains), est mis en relation avec une constellation (le dé). L'oralisation des annonces permet de mettre en évidence l'usage d'énoncés du type « 2 **et** 3 » (première approche de l'écriture additive).	
Descriptif du module	- Produire **oralement** des annonces à deux mains et les comparer avec un nombre usuel (lancer d'un dé à six faces). - Travailler par équipe d'élèves hétérogène. - S'approprier les règles du jeu de la « situation des annonces ». → « figer l'annonce avec les doigts et l'énoncer oralement». → « théâtraliser les annonces : 5, c'est 2 et/ plus 3..... ». - Confronter les élèves aux contraintes de la situation **non formulées par le professeur** : découverte en situation (confrontation de la référence aux mains ≤ 10 avec le dé ≤ 6). - Consolider les désignations orales (de 1 à 6) sous forme additives produites avec les deux mains.	
Journal du nombre	*- Le journal du nombre : dessins de situations additives en appendice des séances (en référence aux mains ou non).*	
Références aux programmes officiels	- Produire oralement des décompositions additives à deux termes. - Comparer oralement deux collections (≤6). - Dénombrer des quantités inférieures ou égales à 6 à partir de collections organisées. - Calculer mentalement des sommes (≤ 6). - Introduire le 0 comme élément neutre.	

Tableau 5 : extrait de document Progression du domaine "Situations"

Ce Tableau 5 décrit de manière synthétique l'organisation du module 0 du domaine « Situations », ses enjeux et les références aux programmes officiels.

- un document « Déroulement » détaillant les phases successives des différentes séances proposées dans chaque module (exemple, cf. Annexe 1, module 0 du domaine « Situations »).

Les déroulements de chaque module sont répartis par domaine et par trimestre sur le site Internet de la recherche. La copie d'écran ci-dessous (Tableau 6) donne à voir l'organisation du premier trimestre de l'ensemble du curriculum.

Domaine "Situations"	Domaine "Estimation" et "Grandeurs et mesures"		Domaine "RDP"
module 0	Module 1a,	Module 2a	RdP_T1. pdf RdP_T1.docx
module 1	Estimateur progression individuelle Estimateur 1b		
Module 2 module 2 parties fictives			
module 3			
module 4 module 4 parties fictives			
module 5			
module 6 module 6 parties fictives			

Tableau 6 : copie d'écran des documents des différents domaines du premier trimestre CP

Le site Internet accueille aussi un forum offrant l'opportunité aux différents acteurs de la recherche d'échanger entre eux.

La figure 1, ci-dessous, donne une vision synoptique des relations entre les deux sphères et du déroulement de la conception du curriculum.

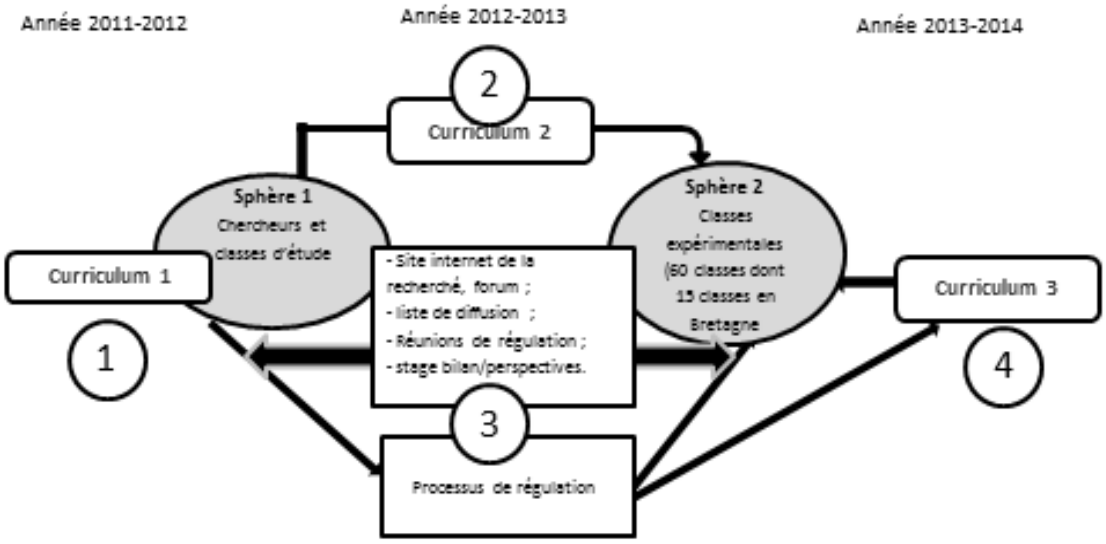


Figure 1: vision synoptique de l'organisation de l'ingénierie didactique

La sphère 1 en 2011-2012 a produit une première version du domaine « Situations » à partir des observations et analyses réalisées dans les classes d'étude (1). Son affinement progressif lors de cette première année d'expérimentation a permis la seconde année (2012-2013) de proposer un curriculum 2 aux classes du groupe expérimental et aux classes d'étude (2). Au cours de cette seconde année, le dialogue entre les membres de la sphère 1 et 2 (3), à travers des lieux d'échange en présentiel ou virtuel ont permis à la sphère 1 de produire une troisième version de la progression (4). Nous reviendrons dans la partie empirique de notre travail sur les effets de cette coopération entre ces deux sphères sur l'élaboration du domaine « Situations ».

Après cette présentation de la recherche ACE aux niveaux national et local, nous vous présenterons, dans une troisième section, le point de vue des acteurs du monde institutionnel et de la recherche sur l'enseignement des mathématiques. En effet, il nous semble pertinent de situer ce terrain de recherche dans le cadre des réflexions menées au niveau national et international.

3. L'enseignement des mathématiques : quelques éléments

Dans cette troisième section, nous produirons une brève revue de littérature concernant les réflexions récentes des acteurs institutionnels et du monde de la recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Ainsi, nous explorerons divers rapports de l'inspection générale de l'éducation nationale, des textes des acteurs de la recherche et de la formation. Nous aborderons successivement trois thèmes :

- une synthèse des résultats des évaluations nationales et internationales ;
- l'enseignement à proprement parlé des mathématiques à l'école primaire ;
- la conception des ressources, leurs usages et la formation des professeurs préconisée par les différents acteurs impliqués dans l'enseignement des mathématiques.

Pour terminer, nous reviendrons sur les programmes officiels sur l'enseignement des mathématiques au cycle deux (MEN, 2015a).

3.1. Les résultats des évaluations

La dernière étude PISA de 2012 (DEPP, 2013) mesurant les performances en culture mathématique des élèves de 15 ans montre une baisse du score global des élèves français entre 2003 et 2012 avec une moyenne se trouvant un point au-dessus de la moyenne des 29 pays de l'OCDE, la France passant de la 13ème à la 18ème place sur 34 pays. De plus, elle donne à voir un creusement des écarts entre les élèves performants et les élèves en difficulté alors qu'il ne varie pas en moyenne dans les autres pays. Ces évaluations révèlent en particulier une dégradation des acquis dans le domaine des savoirs et savoir-faire sur les opérationnels numériques.

Les évaluations nationales, quant à elles, réalisées dans le cadre du CEDRE[9] par la DEPP[10] (DEPP, 2015) confirment cette tendance avec une augmentation des élèves en difficulté en mathématiques en fin d'école primaire (de 15% en 2008 à 16.3% en 2014) et des élèves en très grande difficulté (de 2,6% à 3,7%). Ces derniers ne maîtrisent pas les compétences mathématiques de fin d'école primaire dans différents champs mathématiques tels que le

[9] Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons
[10] Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance

calcul, l'organisation des données, les nombres entiers et décimaux. L'augmentation des écarts entre élèves avancés et moins avancés est importante notamment dans les zones d'éducation prioritaire malgré un score moyen relativement stable.

Dans l'état des lieux sur les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à la fin de l'école primaire, Chesné (2012) montre que 40% des élèves ne possèdent que « des connaissances et des capacités très fragiles ou très locales, globalement insuffisantes pour réussir de façon autonome au collège » (Ibid., p. 10). L'analyse des items proposés lors des évaluations nationales de 2008 montre une baisse des performances en technique opératoire et une hausse des performances sur les ordres de grandeurs. De même, Mégard (2012) observe qu'entre 1987 et 2007, on assiste à une baisse des résultats pour l'addition de 5 à 10 points lorsque sont abordées les opérations avec des grands nombres, avec plusieurs nombres et avec retenue. Cette baisse est encore plus importante pour la soustraction, la multiplication et la division. Mégard (Ibid.) conclut à un défaut de familiarisation des élèves avec les nombres et les opérations. Néanmoins et pour nuancer les résultats des évaluations, Durpaire (2006) estime que les performances globales des élèves à l'entrée en 6ème entre 1980 et 2000 en mathématiques sont de même niveau. Il explique cette stabilisation comme suit « on pourrait même soutenir l'affirmation que le système éducatif réussit plutôt mieux maintenant car l'étude porte sur tous les élèves alors qu'en 1980, une sélection était opérée. En outre, le niveau d'exigence qui transparaît à travers les évaluations nationales n'a pas globalement baissé » (Ibid. p.23).

Néanmoins, le document réalisé par le MEN, « Stratégie mathématiques » (2014a) s'inquiète de ces mauvais résultats et particulièrement de la corrélation entre le milieu socio-économique des élèves et leurs résultats en mathématiques. Cependant, comme le souligne Mégard (2014), les résultats de ces évaluations ne sont que des indicateurs et ne permettent pas de rendre compte des pratiques des professeurs, ni de mesurer leur efficacité ni de diffuser celles qui paraissent les meilleures. De même, du point de vue de la recherche, Brousseau (2012) pointe les conséquences liées à la prise en compte des résultats de ces évaluations par les pouvoirs publics et par les acteurs de l'institution en proposant des objectifs opérationnalisés en éloignant l'élève de l'activité mathématique.

Au-delà des évaluations des élèves, les acteurs institutionnels s'inquiètent de l'augmentation des élèves en difficulté en mathématiques et sur la croissance de l'innumérisme chez les adultes. La « Stratégie mathématiques » met notamment l'accent sur ce problème qui constitue une problématique « sociale et civique » (MEN, 2014a. p. 3). En effet, « l'incapacité

à comprendre les nombres, les grandeurs, les statistiques ne permet pas au citoyen de mobiliser l'esprit critique nécessaire à l'exercice de ses responsabilités » (Ibid. p. 3). Le ministère propose dix mesures-clés pour favoriser la maîtrise des savoirs et des compétences dont la production de ressources d'accompagnement des nouveaux programmes en mathématiques à l'école primaire (Ibid.).

3.2. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire

3.2.1. Réflexions et perspectives institutionnelles

Nous reprenons ici la définition des mathématiques présentée lors de la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques (IGEN[11], 2012). Les mathématiques sont des « sciences de la modélisation » (2012, p. 146) qui « permettent de décrire, d'expliquer et de maîtriser les phénomènes » (Ibid.). Le langage mathématique est composé d'« énoncés symboliques articulés par un jeu de règles précises » (Ibid.). Son enseignement se caractérise par l'acquisition de techniques et par la construction d'une capacité d'abstraction nécessaire à la résolution d'un problème. Cependant, Mégard (2012) questionne les termes « faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes » (Ibid., p. 69) puisque les problèmes proposés varient en fonction de la progression des apprentissages, du niveau de classes, des élèves. Elle propose alors la définition suivante de l'enseignement les mathématiques :

> « accompagner les élèves dans l'appropriation des objets, savoirs et savoir-faire mathématiques, guider le cheminement intellectuel vers la modélisation progressive plus épurée des situations et la résolution de problèmes de plus en plus complexes. Du comptage au calcul du dessin au schéma puis du schéma à l'opération, du problème de calcul à la mémorisation d'un résultat » (Ibid. ; 2012, p.69).

Cette définition repose sur une progressivité dans la modélisation de la réalité à travers l'activité mathématique.

Les recommandations de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (2001), regroupant des chercheurs et des professeurs, met l'accent sur l'importance dans l'enseignement de voir le calcul numérique et algébrique non pas seulement comme des données mais comme une valeur de preuve. Elle préconise de construire des stratégies d'apprentissage basées sur « les particularités, les régularités, les compositions et

[11] Inspection générale de l'Education Nationale

décompositions des nombres mais en visant progressivement une réelle mémorisation » (Ibid. p. 23). Cette commission insiste sur la nécessité de développer des compétences d'organisation de calcul et d'explicitation de cette organisation à travers, par exemple, la représentation des calculs sous forme d'arbre. De même, elle propose que, dès l'école élémentaire, le travail sur les nombres et les grandeurs parte d'objets matériels. Ainsi, pour rendre ces objets accessibles au calcul, un travail de modélisation est nécessaire (par exemple, association d'une collection à un nombre symbolique). Nous retrouvons ces affirmations dans les recommandations pour la mise en oeuvre des programmes (MEN, 2014) qui proposent que la connaissance du nombre et les principes de numération de position doivent s'appuyer sur des techniques de composition/décomposition des nombres. Les élèves mobilisent leurs connaissances sur les nombres en calcul mental pour les additions et soustractions par groupement et décomposition. De même, Mégard (2014) rappelle ce qui a déjà été avancé à la conférence sur l'enseignement des mathématiques, à savoir le rôle essentiel du calcul et de la connaissance des nombres qui permettent de fonder l'ensemble des compétences autour du numérique : la résolution de problèmes, l'algèbre et plus tard, l'analyse. Cette inspectrice générale insiste sur l'importance d'une solide « familiarité » des élèves avec les nombres (Ibid) et sur l'importance de considérer les représentations (dessin, schéma) comme des « clés pour l'entrée dans le monde mathématique des nombres et des opérations » (2012, p. 70). Durpaire (2014) suggère également que la connaissance des nombres entiers et de la numération décimale doit être abordée de manière ludique et complétée par l'entrée concrète des usages à travers les grandeurs et mesures[12].

Dans le cadre de la refondation de l'école de la république (MEN, 2013), le ministère de l'Education Nationale annonce comme une des priorités « la maîtrise des savoirs et des compétences mathématiques par tous les élèves » (Ibid. p. 3). Ainsi, la connaissance et la compréhension du nombre devront prendre un place centrale avec notamment un rôle accru du calcul comme « outil d'appropriation des nombres et des opérations » (MEN, 2014, p. 7.). La place du jeu dans l'apprentissage des mathématiques doit être plus importante pour que les élèves testent des stratégies, s'entraînent au raisonnement.

[12] Durpaire cite le curriculum proposé dans ACE pour illustrer l'importance dès le CP de développer chez les élèves la capacité à décomposer les nombres inférieurs à 100 pour construire une bonne compréhension du nombre.

3.2.2. Réflexions sur l'enseignement des mathématiques par les acteurs de la recherche

L'enseignement des mathématiques désigne, pour Arnoux (2012a), une liste de connaissances et de compétences mais aussi un langage qui permet de décrire le réel. Ainsi, les connaissances abstraites mathématiques doivent être tirées de situations concrètes. Sensevy (2012c) poursuit la même idée en énonçant le fait que les mathématiques fournissent des modèles pour penser le réel et permettent de considérer comme équivalentes des situations qui sont spontanément considérées comme différentes. Le modèle doit se référer à la réalité. « Les mathématiques ne proposent pas de décrire l'action juste, mais de modéliser le monde dans lequel on cherche à agir » (Mercier, 2012, p. 135).

Les réflexions d'un grand nombre d'acteurs de la recherche montrent l'importance à accorder à la compréhension des nombres. La connaissance du nombre signifie connaître plusieurs aspects de celui-ci (Margolinas, Wozniak, 2012). Le nombre peut être considéré comme la désignation de la quantité qui est la mesure de la quantité en tant que grandeur (Ibid.). Brousseau définit quatre usages du terme grandeur. Nous nous intéressons ici au terme grandeur comme « un type de variables mathématiques, physiques, biologiques, psychologiques, sociologiques, économiques etc. dites de même espèce, c'est-à-dire comparables entre elles » (Brousseau, 2001, p. 335). Le cardinal d'une collection finie est une grandeur. Il « est le représentant de toutes les collections qui sont équipotentes » (Margolinas, Wozniak, 2012, p. 40). L'équipotence des collections et la réunion disjointe permettent de définir l'égalité et la somme. Le nombre est un rapport entre deux quantités, un nombre abstrait (Brousseau, 2001). A l'école primaire, on manipule des objets qui représentent des grandeurs (Chambris, 2008). Le concept de grandeur s'acquiert par la résolution de comparaison (Margolinas, Wozniak, 2012) par la comparaison terme à terme mais aussi par la comparaison de deux longueurs. Cela amène à travailler les relations entre les nombres. Ainsi, des chercheurs notamment Chambris (2012, 2014) et Salin (2014) proposent des pistes de travail pour améliorer l'apprentissage sur la numération par un travail sur les relations entre les unités de numération en utilisant le système métrique, les opérations sur les grandeurs et les tâches d'estimation. Ainsi, Chambris (2014, 2008) met l'accent sur l'importance de travailler simultanéement les écritures en unités simples et unités de numération (par exemple 100, c'est une centaine, 10 dizaines…). De même, Perrin-Glorian (2012, 2014) suggère un enseignement mettant en lien les nombres entiers, leurs opérations avec les grandeurs

discrètes et les grandeurs continues. Elle suggère que les opérations sur les nombres prennent sens à partir d'opérations sur les collections mais aussi sur des grandeurs continues comme les longueurs qui peuvent permettre d'aider à la résolution de certains problèmes. Les nombres servent ainsi à comparer des collections et des longueurs au cycle 2. Emprin (2014), quant à lui, souligne que les élèves doivent accéder tout d'abord à la quantité puis aux nombres pour accéder au système de numération.

Arnoux (2012b) parle de nombres vivants et énonce le fait que la capacité à rendre vivant un nombre est un préalable à toute compréhension. Pour cela, il donne des exemples, en particulier de décompositions de nombres et de leurs différentes représentations (sous forme de rectangle, de cercle…). De même, Houdement (2014) insiste sur l'importance pour les élèves de pouvoir désigner les nombres de différentes façons. Sensevy (2012c) donne, quant à lui, certaines catégories normatives pour élaborer une progression en CP notamment en se fondant sur la construction du nombre par un travail sur la composition/décomposition, la numération décimale et l'approche topologique des nombres. Brissiaud (2012) suggère une orientation de l'enseignement en première année d'école élémentaire vers l'appropriation par les élèves des décompositions des premiers nombres notamment pour une meilleure compréhension de la dizaine.

D'autre part, Artigue (2012) insiste sur la nécessité dès les premiers apprentissages de mettre en lien le calcul automatisé et le raisonnement pour travailler sur les propriétés du nombre et les opérations qui le fondent. Elle illustre alors son propos avec l'exemple suivant « si l'égalité 9 + 7 = 16 n'est pas associée à 16 = 7 + 9 , à 16 - 7 = 9 et 16 - 9 =7, elle sera d'une utilité limitée pour le calcul » (Ibid. p. 77). Cette auteure renforce son propos en insistant sur l'importance d'aborder le signe « = » dans le sens de l'équivalence (Artigue, 2012). Brousseau (2012, 1986) confirme cette orientation en proposant notamment d'introduire le signe « = » dès les premières années de l'école primaire en prenant garde de lui donner un minimum de logique et de sens en l'introduisant simultanément avec d'autres symboles dont il doit se distinguer (>, <, ≠). Il énonce le fait que l'usage du signe « = » et des signes algébriques en arithémique à l'école est erroné et souvent faux d'un point de vue logique. Pour pallier cela, Brousseau propose soit de supprimer l'usage du signe « = » et d'attendre l'introduction de l'algèbre soit de l'introduire rapidement mais de manière correcte dès le CP en introduisant « un minimum de grammaire et de logique au cours de la scolarité pour préserver son sens » (Ibid, p. 102). Il insiste sur l'importance de travailler sur les signes paradigmatiques.

Ainsi, une forme de continuité entre arithmétique et algèbre est possible en introduisant au primaire des signes algébriques en arithmétique (Artigue, 2012 ; Brousseau, 2012 ; Chambris 2014) pour promouvoir une entrée plus progressive dans le symbolisme algébrique.

Pour poursuivre la réflexion, Artigue (2012) montre que l'une des difficultés identifiées par la recherche sur l'enseignement de l'algèbre concerne le signe « = » qui est enseigné avec « un sens de production : à gauche de l'égalité, un calcul et à droite, le résultat de ce calcul » (Ibid., p. 119). En effet, l'enseignement de l'arithmétique ne se concentre pas sur la mise en relation des nombres entre eux mais sur le calcul (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001 ; Kieran, 2004).

Les recherches dans le champ du early algebra définit comme suit « to encompass algebraic reasoning ans algebra-related instruction among young learners- from approximately 6 to 12 years of age » (Carraher & Schliemann, 2007, p. 670) confirment les constats précédents. En effet, Carraher & Schliemann (2007) en appui sur plusieurs recherches (Booth, 1984, Kieran, 1981, Vergnaud, 1985, Vergnaud, Cortes & Fabre-Artigue, 1988) ajoutent que les élèves ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité et n'utilisent pas les symboles comme expression des relations entre quantités.

En algèbre, le signe d'égalité est vu comme un signe d'équivalence. Son introduction précoce dans les curricula pourrait permettre aux élèves d'avoir une vision interprétative du signe égal comme le signe d'une équivalence (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2012). Carraher poursuit en citant une recherche (Schifter, 1999) qui donne à voir que les élèves possèdent des méthodes algébriques mais de manière implicite comme par exemple lorsqu'un élève résoud un problème soustractif en utilisant le principe inverse. Ce principe inverse, peut être défini par le principe « a - b - b = a » et par le principe a – b = c donc « b + c = a ». Il autorise la mise en relation des nombres entre eux et donne à voir les relations entre l'addition et la soustraction ainsi qu'entre la multiplication et la division. L'application de ce principe inverse par les élèves élimine les efforts de calcul, accroit son efficacité et permet de comprendre la nature même de l'addition et de la soustraction en saisissant les relations entre les quatre opérations (Verschaffel, Torbeyns & Bryant, 2012).

Grenier (2012), quant à elle, centre son propos sur les activités en classe et émet le constat qu'en France la démarche scientifique en mathématiques n'est pas enseignée. Elle définit cette démarche comme un savoir-faire qui se rapproche de l'activité d'un chercheur « choisir une question, étudier les cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer des conjectures, prouver, définir, changer éventuellement de question initiale » (Ibid. p. 41).

Pour que les élèves expérimentent cette démarche, il est nécessaire de travailler sur un temps long et une organisation didactique et mathématique autre.

3.3. Les ressources et la formation des professeurs

Nous nous pencherons de manière brève sur les réflexions engagées par l'institution et le monde de la recherche autour des ressources proposées aux professeurs et de la question de la formation initiale et continue. Ces thèmes nous intéressent particulièrement dans la mesure où notre travail de thèse est ancré dans un travail coopératif professeurs/chercheurs dont l'objectif est de produire une progression en mathématiques au CP.

Tout d'abord, une mise en garde contre l'usage du fichier en mathématiques est exposée par les acteurs de la recherche comme par le corps d'encadrement de l'éducation nationale. Ainsi, le rapport IGEN[13] (2013) met en évidence trois points liés à l'usage de fichiers :

- l'utilisation des fichiers engendre un apprentissage lié à la progression des pages et n'est donc pas propice au développement d'acquis solides ;

- leur usage n'autorise pas les élèves à écrire assez des mathématiques en valorisant « l'écriture des réponses au détriment des schémas, essais, tâtonnements, périphrases de l'énoncé ». (Ibid. p. 39) ;

- le fichier ne facilite pas la différenciation.

Mégard (2012, 2014) propose la suppression des fichiers en mathématiques au profit de manuels. En effet, les fichiers favorisent « une activité de type occupationnelle, et masque la faiblesse de l'activité mathématique » (Mégard, 2014, p. 71). Certains acteurs de la recherche (Briand, 2012 ; Douaire, 2012 ; Ligozat, 2012) poursuivent cette réflexion en mettant en avant le fait que les fichiers favorisent un simple remplissage des fiches avec un abandon des situations d'apprentissage.

Briand (2012) se questionne, quant à lui, sur l'articulation entre l'organisation linéaire d'un manuel et l'approche en termes de situations a-didactiques et une organisation praxéologique. Cet auteur constate que les éditeurs proposent des manuels et fichiers dont chaque jour est composé d'une multitude d'activités qui aboutissent à une sorte de papillonnage. Cependant, Emprin (2012) souligne que l'absence de manuel conduit les professeurs à utiliser des

[13] Bilan de la mise en œuvre des programmes issus de la réforme de 2008. Rapport IGEN2013-066

ressources (documents téléchargés sur internet, des fiches) qui peuvent être potentiellement riches mais sans « connaissances fines des concepts manipulés pour les exploiter réellement ». (Ibid. 49). Le fichier devient un recueil d'exercices d'application et peut devenir une ressource d'activités occupationnelles. De même, il ne semble pas permettre aux professeurs de maîtriser la progression. Pour pallier ce phénomène, Briand (2012) propose de lier formation et manuel scolaire. Sensevy (2012c) poursuit en affirmant qu'une progression (d'un manuel) clé en main n'est pas possible. Il doit reposer sur « la qualité de l'étude que le professeur pourra en produire, au sein de collectifs appropriés de chercheurs et de professeurs, sur le fond de systèmes de ressources organiquement pensés à cet effet (2012, p. 60). De même, Ligozat (2012) met l'accent sur l'importance du développement de l'étude des activités pour enseigner et de l'analyse des pratiques au sein de collectifs professeurs/chercheurs. La production de ressources pour l'enseignement par un collectif dans le cadre d'un projet commun autorise le développement de nouvelles connaissances professionnelles, à l'inverse des manuels dont l'usage n'engendre que peu de changements de pratiques (Gueudet et Trouche, 2012). Du point de vue institutionnel, les constats sont semblables. Mégard (2014) suggère que les professeurs travaillent en collaboration pour construire des séances de classe les plus pertinentes possibles. Elle illustre son propos en faisant référence aux Lesson Studies[14] japonaises.

Du côté du monde scientifique, le constat est que, pour l'instant, les connaissances didactiques et scientifiques des professeurs ne leur permettent pas d'appréhender de manière satisfaisante les situations, ni les programmes officiels (Emprin, 2012, 2014 ; Butlen & Masselot, 2012 ; Salin 2014). Cependant, des pistes de réflexion sont émises en conclusion de la conférence nationale des mathématiques (Mercier et Jost, 2012). Elles montrent que la qualité de l'enseignement des mathématiques dépend de l'organisation des études universitaires, de la formation initiale et continue des professeurs. En effet, les professeurs ont la nécessité de

> « connaître les enjeux mathématiques et didactiques de ce qu'ils enseignent et qu'ils ont besoin de la meilleure lucidité possible sur l'ensemble du curriculum (…). Un travail d'équipe accru dans les établissements et entre établissements de niveaux différents et d'un même secteur, appuyé régulièrement par des formateurs universitaires, est nécessaire afin que les enseignants produisent des moyens d'enseignement partagés et validés. » (Ibid., p. 155-156).

[14] Les lesson studies ou l'étude collective d'une leçon est un « travail collectif d'une équipe d'enseignants sur la construction par étape d'une leçon » (Miyakawa, Winsløw, 2009, p. 77).

L'enjeu de la formation est bien un travail sur les connaissances mathématiques fondamentales à travers l'analyse des concepts mathématiques sous l'angle didactique, épistémologique. Il peut être aussi un accompagnement aux programmes et recommandations officielles (Houdement, 2012). Sensevy (2012c) suggère que la complexité épistémique et didactique de l'enseignement notamment de l'arithmétique nécessite une formation des professeurs en appui sur des ressources pour que ces derniers puissent avoir un rapport de première main aux savoirs. La formation continue doit s'appuyer sur les ressources pour faire évoluer l'enseignement (Perrin-Glorian, 2012)

3.4. Les programmes

Nous présenterons dans ce paragraphe quelques éléments de réflexion liés à la question des programmes dans l'enseignement des mathématiques de la part de chercheurs et du monde institutionnel. Puis nous reprenons quelques points saillants des nouveaux programmes du cycle 2 (MEN, 2015b) en mathématiques.

3.4.1. Eléments de réflexion sur les programmes

L'enseignement des mathématiques repose sur des programmes d'enseignement qui doivent répondre en premier lieu à des enjeux clairs et affichés. Ces programmes doivent évoluer en fonction de leur capacité à satisfaire ces enjeux. Cette capacité doit être évaluée par des analyses rigoureuses de leur impact, effectuées selon des méthodes scientifiquement incontestables » (Académie des Sciences, 2012). En 2006, l'académie des sciences précise quels sont les enjeux de l'enseignement des mathématiques dans le premier degré :

- donner à l'enfant un socle solide d'automatismes dans le domaine du calcul ;
- maintenir contamment ces calculs en liaison avec leur sens quantitatif et la résolution de problèmes concrets. Cependant, l'automatisation ne peut se faire en dehors du sens, de la compréhension.

Le ministère de l'éducation nationale dans la « Stratégie mathématiques » (2014) décline les orientations que devront proposer les nouveaux programmes. Ce texte précise en introduction que

> « les nouveaux programmes en mathématiques doivent construire chez les élèves une culture mathématique nécessaire à la compréhension du monde d'aujourd'hui et à la vie en société, rendre l'enseignement des mathématiques plus attractif et faciliter la réussite des élèves » (MEN, 2014, p. 7)

Ces programmes devraient être de mieux en mieux maîtrisés par les professeurs grâce au développement de formations et d'outils (Mégard, 2014).

Durpaire (2014) questionne l'organisation des programmes en termes de paliers à atteindre par les élèves en fin de cycle. Il parle lui de système spiralaire qui intègre la notion de continuité et de progression. Du point de vue de la recherche, Fischer (2014) montre que les paliers fournis par le programme scolaire ne sont pas pertinents puisque la « mémoire est un processus dynamique » (Ibid., p. 1). Il semble donc nécessaire d'être vigilant quant à la mise en forme de savoirs à enseigner (Ligozat, 2012). Chambris (2012, 2014) propose de produire des repères partagés, des savoirs de référence sur l'enseignement des mathématiques pour favoriser la continuité des apprentissages. De même, Perrin-Glorian (2012, 2014) suggère des pistes de travail en particulier sur la recherche de progressions cohérentes en mathématiques sur un temps long (la scolarité obligatoire) et une continuité entre différentes rubriques du programme. Ainsi, pour cette auteure, le manque de cohérence, les vides et les ruptures non gérés dans les progressions sont une des causes de l'échec des élèves de milieu socio-économique défavorisé.

D'autre part, Chevallard (2012) questionne la nature même du programme scolaire qui, selon lui, est un document décrivant un système de contraintes formelles imposées à une réalité à venir. Il nomme parcours didactique d'études, une suite de situations d'études, qui devrait satisfaire le texte du programme. La situation d'étude doit comporter un objet et une forme d'étude. L'objet à étudier, à enseigner doit avoir une raison d'être qui doit « s'incarner dans des situations dont l'élève est le protagoniste, l'actant comme le dit Guy Brousseau ». (Chevallard, 2012, p. 35). Il propose donc un changement de paradigme, de celui la visite des œuvres à celui du questionnement du monde où les objets d'étude (les œuvres) sont des questions. Le parcours d'étude serait alors construit à partir des questions étudiées qui détermineront les œuvres à étudier. Se dégage alors une orientation de travail par l'enquête. Les programmes doivent donc être organisés autour de questions à étudier.

3.4.2. Les nouveaux programmes au cycle 2

Après cette brève synthèse des débats sur l'organisation des programmes, nous nous pencherons sur les nouveaux programmes en mathématiques au cycle 2 et en dégagerons les grandes lignes. Le projet de nouveaux programmes au cycle 2 (MEN, 2015a) élaboré par un collège d'experts (groupe d'élaboration des programmes) décline un certain nombre de

spécificités liées à l'enseignement au cycle 2 dans l'ensemble des disciplines et notamment en mathématiques :

- l'importance de construire simultanément le sens et l'automatisation ;
- l'importance du langage qui donne du sens aux apprentissages ;
- l'articulation entre le concret et l'abstrait en proposant des liens entre les activités consacrées au concret, les représentations analogiques et les représentations symboliques ;
- l'importance des connaissances implicites sur lesquelles se fonderont les apprentissages explicites ;
- l'importance de la justification rationnelle des élèves.

Dans le programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (MEN, 2015b) à proprement parlé, il est précisé que les mathématiques participent à l'acquisition des langages scientifiques à travers la compréhension du système de numération, de la pratique du calcul, la connaissance des grandeurs. « Les représentations symboliques transcrivent l'observation, l'exploration et le questionnement des objets et de la réalité du monde » (Ibid.). Ces représentations dénotent donc une certaine réalité en les modélisant.

Il est spécifié que l'écriture occupe une place importante dans l'activité mathématique. Elle évolue progressivement, d'écriture et de représentation en situation vers des formes conventionnelles avec l'aide du professeur. La place de l'activité langagière orale reposant sur une syntaxe et un lexique adaptés est, de même, importante car elle accompagne le recours à l'écrit et permet des échanges d'arguments entre les élèves. La compréhension des nombres entiers passe par l'étude de différentes désignations notamment leur écriture chiffrée, leur nom à l'oral, les compositions/décompositions fondées sur leurs propriétés numériques et leurs décompositions en unités de numération. Les repères de progressivité proposés dans ce document précisent qu'au CP sont étudiées les relations numériques entre les nombres jusqu'à 20 (composition/décomposition), la numération décimale écrite (dizaine et unités) et orale des nombres jusqu'à 99. Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division) sont étudiées à partir de problèmes notamment de grandeurs et de mesures.

La compréhension du nombre repose ainsi sur son étude interne et sur les relations entre les nombres comme nous le montre l'extrait du programme de cycle 2 ci-dessous (cf. Photogramme 2)

Nombres et calculs
La connaissance des nombres entiers et du calcul est un objectif majeur du cycle 2. Elle se développe en appui sur les quantités et les grandeurs, en travaillant selon plusieurs axes.
Des résolutions de problèmes contextualisés : dénombrer des collections, mesurer des grandeurs, repérer un rang dans une liste, prévoir des résultats d'actions portant sur des collections ou des grandeurs (les comparer, les réunir, les augmenter, les diminuer, les partager en parts égales ou inégales, chercher combien de fois l'une est comprise dans l'autre, etc.). Ces actions portent sur des objets tout d'abord matériels puis évoqués à l'oral ou à l'écrit ; le travail de recherche et de modélisation sur ces problèmes permet d'introduire progressivement les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division).
L'étude de relations internes aux nombres : comprendre que le successeur d'un nombre entier c'est « ce nombre plus un », décomposer/recomposer les nombres additivement, multiplicativement, en utilisant les unités de numération (dizaines, centaines, milliers), changer d'unités de numération de référence, comparer, ranger, itérer une suite (+1, +10, +n), etc.
L'étude des différentes désignations orales et/ou écrites : nom du nombre ; écriture usuelle en chiffres (numération décimale de position) ; *double* de, *moitié* de, *somme* de, *produit* de ; *différence* de, *quotient* et *reste de* ; écritures en ligne additives/soustractives, multiplicatives, mixtes, en unités de numération, etc.
L'appropriation de stratégies de calcul adaptées aux nombres et aux opérations en jeu. Ces stratégies s'appuient sur la connaissance de faits numériques mémorisés (répertoires additif et multiplicatif, connaissance des unités de numération et de leurs relations, etc.) et sur celle des propriétés des opérations et de la numération. Le calcul mental est essentiel dans la vie quotidienne où il est souvent nécessaire de parvenir rapidement à un ordre de grandeur du résultat d'une opération, ou de vérifier un prix, etc.

Une bonne connaissance des nombres inférieurs à mille et de leurs relations est le fondement de la compréhension des nombres entiers et ce champ numérique est privilégié pour la construction de stratégies de calcul et la résolution des premiers problèmes arithmétiques.

Photogramme 2 : extrait du BO (2015)

Ces nouveaux programmes semblent prendre en compte les orientations proposées par les acteurs de l'institution et ceux de la recherche notamment dans l'importance à accorder à la compréhension du nombre en liant le sens et l'automatisation du calcul. Une large place est accordée aux procédures de composition/décomposition des nombres, aux unités de numération. Il apparaît que l'écrit et les représentations en mathématiques soient essentiels et évoluent dans la durée pour aboutir à une écriture symbolique. Nous pouvons relier cela aux relations entre concret et abstrait entre les situations réelles, les représentations analogiques et abstraites. Le volet 1 des programmes (MEN, 2015b) stipule en effet,

> « au cycle 2, on ne cesse d'articuler le concret et l'abstrait. Observer et agir sur le réel, manipuler, expérimenter, toutes ces activités mènent à la représentation, qu'elle soit analogique (dessins, images, schématisations) ou symbolique, abstraite (nombres, concepts). Le lien entre familiarisation pratique et élaboration conceptuelle est toujours à construire et reconstruire, dans les deux sens ».

4. Conclusion

En conclusion de ce chapitre, nous dégagerons plusieurs points qui entrent en résonnance avec notre travail de recherche. Nous mettrons en relation les principaux principes mathématiques mis en avant dans la recherche ACE et en particulier dans le domaine « Situation » avec les pistes de réflexions engagées par les acteurs de la recherche et de

l'institution scolaire. Puis nous nous centrerons sur les ressources et réflexions autour de la formation des professeurs.

4.1. Le contenu mathématique

Tout d'abord, les mathématiques sont définies comme la science de la modélisation du réel qui permet de décrire, d'expliquer et de maîtriser les phénomènes. Il est souligné l'importance des représentations (dessin, schéma) pour rentrer dans les mathématiques. De même, il est mis en évidence l'importance d'ancrer les mathématiques dans le réel et de faire travailler les élèves dans une démarche d'enquête. Il doit exister une progressivité, une forme de continuité dans l'enseignement des mathématiques avec un passage du comptage au calcul, du dessin au schéma, du schéma à l'opération, du problème de calcul à la mémorisation.

Ainsi, un des principes de la progression ACE-ArithmÉcole rejoint ces perspectives par le fait que chaque système de représentation, qu'il soit matériel, symbolique ou analogique, doit toujours être rapporté à ce qu'il dénote (par exemple, l'écriture additive 2 + 3 peut être ramenée à une situation réelle, deux doigts sur la main gauche et trois doigts sur la main droite). Dans ACE, faire des mathématiques, c'est manier des systèmes de représentation analogique et symbolique. Les mathématiques sont pensées comme représentation du réel et de l'action dans le réel. Ces modèles peuvent ainsi voir comme équivalentes des situations différentes. Il existe une forme de progressivité dans la modélisation de la réalité.

De plus, la compréhension du nombre passe par l'usage des compositions/décompositions, par différentes formes de désignation. Ainsi, la progression ACE met l'accent sur la composition/décomposition des petits nombres pour aller vers les grands nombres et la numération décimale dans des situations de comparaison.

L'introduction précoce de l'algèbre avec l'usage en particulier du signe de l'égalité comme équivalence est travaillée dans la progression proposée en référence notamment au principe inverse (par exemple des nombres {5, 3, 2} les élèves écrivent 5 = 3 + 2 ; 3 + 2 = 5 ; 2 + 3 = 5, 5 – 3 = 2 ; 5 – 2 = 3). En effet, le principe inverse amène à comprendre le principe de complément, « a + b = c » est équivalent à « a = c - b » (Schneider & Stern, 2009). La connaissance du nombre, des opérations et de la numération décimale est mise en lien avec l'usage des grandeurs et mesures qui sont travaillées en lien avec les systèmes de représentation disponibles notamment le schéma-ligne présent dans l'ensemble des domaines composant la progression ACE-ArithmÉcole.

4.2. Organisation de la recherche ACE

L'organisation au sein d'une ingénierie didactique coopérative de l'équipe conceptrice du domaine « Situations » semble rejoindre certaines pistes de travail proposées dans le cadre de la formation continue des professeurs et la conception de ressources. En effet, certains acteurs institutionnels et de la recherche insistent sur la nécessité de création de collectifs professeurs/chercheurs pour permettre de former des professeurs sur les enjeux épistémiques, épistémologiques et didactiques de l'enseignement des mathématiques. Ce type d'organisation de la formation et de production de ressources pourrait permettre de contourner les obstacles liés à l'usage des fichiers et des fiches dans les classes et de limiter la discrétisation du continuum didactique Il pourrait autoriser l'élaboration de curricula cohérents sur un temps long. En effet, il semble nécessaire d'instaurer une continuité entre les cycles, les niveaux de classes et au sein des apprentissages.

Après cette mise en contexte de notre terrain de recherche, deux premières grandes questions se posent à nous.

D'une part, le domaine « Situations » aborde les mathématiques à travers quelques grands principes. Mais comment s'organise sur un temps long l'ensemble de la progression du domaine « Situations » ? Comment les professeurs du groupe expérimental (sphère 2) se sont-ils saisis de ces enjeux mathématiques et didactiques proposés au sein de ce domaine ? D'autre part, la conception de ce domaine s'est déroulée dans le cadre d'une ingénierie coopérative didactique. Quels ont alors été les effets de cette coopération sur la conception même du curriculum ? Et sur l'expérience mathématique des élèves ?

Dans ce travail de thèse, nous nous centrerons en particulier sur un principe mathématique sous-jacent à la conception du domaine « situations » concernant le travail systématique sur les systèmes de représentation du nombre, leur rôle, leur place et leur maniement tout au long de la progression proposée.

CHAPITRE 2 : Problématique

Après avoir exposé dans le chapitre précédent (Chapitre 1) le contexte de notre recherche, la recherche ACE-ArithmÉcole ainsi que quelques éléments de réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, nous proposons de resserrer notre propos sur les questions qui animent notre travail de doctorat.

Ainsi, nous nous interrogeons sur l'existence d'une continuité de l'expérience mathématique au sein de la suite de situations proposées dans cette progression ? Pour travailler cette question, nous nous centrons sur les systèmes de représentation, puisque comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, faire des mathématiques, c'est manier des systèmes de représentation symboliques, analogiques et matériels. Les systèmes de représentation du nombre, comme moyen de résolution et de preuve font, en effet, l'objet d'un travail spécifique dans le domaine « Situations ». Ils accompagnent les différentes notions mathématiques abordées tout au long de l'année scolaire et sont réinvestis dans les autres domaines de la progression. Mais comment caractériser ces systèmes de représentation du nombre ? Permettent-ils une articulation entre le concret et l'abstrait ?

Dans ce second chapitre, nous expliciterons en premier lieu ce que nous entendons sous le terme de continuité et notamment de continuité de l'expérience des élèves. Puis, en second lieu, nous reviendrons plus particulièrement sur la notion de modélisation et sur les systèmes de représentation en mathématiques.

1. Le concept de continuité

La recherche ACE-ArithmÉcole a pour objectif de construire un curriculum en mathématiques au cycle 2 de l'école primaire et notamment en CP. Mais que signifie le terme curriculum ? Comment s'y organisent les savoirs ?

Les documents fournis aux professeurs dans le domaine « Situations » proposent une organisation des savoirs répartis sur l'année scolaire sous forme de modules, eux-mêmes subdivisés en séances. Ils présentent donc un déroulement temporel des séances, une organisation des savoirs les uns par rapport aux autres. Mais quel lien existe-t-il entre cette textualisation des savoirs et la notion de continuité de l'expérience mathématique des élèves ?

Dans un premier temps, nous aborderons la question du curriculum, en particulier sa mise en texte. Dans un second temps, nous mettrons en avant les conséquences de cette textualisation sur la continuité du temps didactique. Dans un troisième temps, nous relierons la notion de continuité didactique avec celle de l'expérience des élèves.

1.1. La notion de curriculum

La forme scolaire se caractérise principalement par « son caractère planifié de l'apprentissage organisé en curriculum[15] » (Maulini & Perrenoud, 2005, p. 159). Au sens strict, le curriculum désigne ce qui doit être enseigné et appris selon un ordre déterminé de programmation et de progression. Cette progression des savoirs est aussi nommée plan d'études qui est considéré dans « sa globalité systématique, dans sa cohérence didactique, dans sa continuité didactique, c'est-à-dire selon l'ordre de progressivité des situations et des activités d'apprentissage auquel il est censé donné lieu » (Forquin, 2008, p. 8). Le programme scolaire est donc une succession de contenus que l'on retrouve dans les manuels scolaires et les cahiers utilisés chaque jour (Perrenoud, 1993).

Dans notre travail de thèse, nous utiliserons le terme de curriculum[16] pour parler des documents produits au sein de l'ingénierie didactique coopérative qui organisent des savoirs mathématiques en CP sur l'année scolaire. Forquin (2008) nomme « documents curriculaires » (Ibid.) les documents à destination des professeurs. Ces textes qui donnent lieu à « une mise en pratique, à une mise en œuvre qui est semblable à l'interprétation d'une partition (les interprètes ont besoin de la partition mais disposent d'une marge qui fait justement toute la saveur de l'interprétation) » (Ibid., p. 76). Dans le corps de ce travail, nous utilisons le terme de « textes curriculaires » pour nous démarquer de la conception de Forquin (Ibid.). En effet, cette conception est intéressante mais elle minimise le fait que le professeur puisse être co-constructeur de ce curriculum. L'hypothèse émise dans le cadre de la recherche ACE-ArithmÉcole est que les professeurs participent activement à la construction, à la reconstruction du curriculum proposé dans le cadre d'une ingénierie didactique coopérative.

---

[15] Ce terme de curriculum est employé par les anglo-saxons pour désigner un parcours éducatif proposé aux apprenants » (Perrenoud, 1994, p. 61).

[16] Ce curriculum n'est pas prescrit (Ibid.) mais proposé à la co-construction au sein d'une ingénierie didactique coopérative en prenant en considération les expériences des élèves et des professeurs (nous y reviendrons ultérieurement).

Mais comment s'organise un curriculum ? Quelles sont les contraintes inhérentes à l'organisation des savoirs sur une année scolaire ?

1.2. Le temps didactique

Coménius, au XVIe siècle, propose, pour la première fois dans l'enseignement, une progression dans l'ordre des savoirs : « le savoir se fait durée, le temps équivaut à du savoir » (Chevallard & Mercier, 1987, p. 41). Cette organisation prend appui sur des prérequis de départ sur lesquels se fondent le savoir ultérieur. En effet, il faut, pour Coménius que « le déroulement des études ne paraisse apporter rien d'absolument neuf mais soit le développement des études antérieures repris sous un angle particulier » (Prévot, cité par Chevallard & Mercier, p. 44). La progression du savoir à enseigner est l'introduction successive des différents objets d'enseignement dont les programmes fournissent la liste (Ibid.).

Au sein d'une institution didactique, il existe plusieurs types de temps (Chopin, 2010). Le temps scolaire prescrit par l'institution scolaire, qui se décline en année, mois, jours et heures. Ce temps scolaire détermine le temps d'enseignement disponible pendant lequel le professeur doit respecter les horaires et dispenser le programme scolaire. Le temps d'apprentissage est, quant à lui, le temps passé à l'apprentissage par les élèves. Il n'existe pas toujours de corrélation entre le temps d'apprentissage et le temps d'enseignement.

Le temps didactique est un processus qui lie enseignement et apprentissage, c'est le temps de la construction du savoir (Chevallard & Mercier 1987). Ce temps n'est pas purement « temporel », au sens où il nait d'un croisement d'une durée scolaire et d'un savoir, le savoir à enseigner. Le temps devient par conséquent un construit. Lorsque le professeur fait apprendre des savoirs aux élèves, il le réalise dans le cadre d'une progression, un temps de savoir qui est celui du temps didactique (Sensevy, 2011a). Ce temps didactique peut être structuré de manières spécifiques selon son organisation.

1.2.1. Le temps d'objet

La textualisation du savoir donne une forme à l'enseignement et oriente l'action du professeur. La textualisation classique organise le temps d'objet (Chevallard & Mercier, 1987). Les savoirs y sont organisés en unités discrètes. Sensevy (2011a) nomme cette textualisation didactique classique « discrétisation didactique du continu épistémique » (Ibid.,

p. 320). En effet, la progression classique des savoirs permet aux élèves de s'investir dans une étape nouvelle sans faire nécessairement appel à l'étape précédente. Ce temps didactique avance au rythme de l'introduction de nouveaux objets de savoir que prescrivent les programmes. Ainsi, elle risque de privilégier l'organisation, « la structure de surface » du texte du savoir (Ibid. p. 328) au détriment du savoir lui-même.

Ce temps se distingue de celui de l'apprentissage qui ne peut avancer que si les nouveaux objets du savoir se construisent sur des anciens (De Cotret & Giroux, 2003).

Par conséquent, le temps didactique classique empêche « l'élève de s'installer durablement dans le commerce avec les objets du savoir et les relations qui les organisent » (Sensevy, 1998, p. 98). Les objets du savoir deviennent des emblèmes du défilement du temps car « la construction du savoir est un processus irréversible (…) Le passé répond au présent, qu'aucun futur ne pourra remettre en cause » (Chevallard & Mercier, 1987, p. 56). Du côté de l'élève, il y a déconcertation cognitive (Chevallard, 1991b) : l'élève ne peut s'inscrire dans la durée, dans le temps de l'expérience du savoir et donc acquérir une certaine forme d'expertise. Ce temps d'objet qui organise une organisation successive de savoirs engendre un travail mémoriel déficient dans l'action conjointe professeur/élèves. En effet, la mémoire renvoie à un énoncé répondant à une catégorie de problèmes mais pas à une situation référente qui puisse faire retrouver la nécessité du savoir (Sensevy, 2011a). Brousseau et Centeno (1991) nomment alors le professeur le « maître sans mémoire ».

Ceci peut être ici mis en relation avec certains propos de Dewey (1913/2004) qui mettent en évidence le fait que « les procédures scolaires classiques poussent généralement l'élève à ne faire qu'effleurer les problèmes les plus graves, à ne faire qu'un simple et servile effort de mémoire » (Ibid., p. 59). Dewey met, en effet, en lumière un mode éducatif[17] lié directement aux programmes scolaires dont l'objectif est d'amener l'enfant vers des faits stables et bien ordonnés (versus les particularités et les expériences personnelles de l'enfant). Dewey critique ce mode éducatif dont la conséquence majeure est une segmentation du curriculum en fonction des objets d'étude :

> « subdivisons chaque sujet en branches d'études, chaque branche en leçons, chaque leçon en faits spécifiques et en formules. Que l'enfant avance pas à pas afin de maîtriser progressivement chacune de ces parties séparées, jusqu'à ce qu'il ait accompli le parcours dans son entier (...) Par conséquent, il importe de marquer les différentes subdivisions et séquences logiques des matières au programme ». (Dewey, 1902/1959, pp. 62-63)

[17] Mode éducatif qui est à l'œuvre aux Etats-Unis à la fin du XIXe siècle.

Ainsi, les élèves éprouvent des difficultés à réinvestir un savoir dans la mesure où son apprentissage est isolé. Pour qu'il y ait réapparition de ce savoir, il est nécessaire de retrouver des conditions d'une certaine façon identiques à la situation initiale (Dewey, 1916/2011).

Rochex (2011) souligne le fait que le risque dans cette forme scolaire classique est que

> « l'intention d'enseigner du professeur ne soit pas (plus) déterminée en termes de savoir, mais en termes de situations et de tâches, l'effectuation et l'enchaînement des tâches (que celles-ci soient « traditionnelles » et fortement ritualisées ou « innovatrices » et plus ouvertes) étant censés conduire par eux-mêmes à un apprentissage, ou du moins à des savoir-faire que les élèves devraient être à même de mobiliser (et les enseignants de contrôler et d'évaluer) dans d'autres situations, d'autres tâches ». (Ibid.)

Sensevy (2011a), quant à lui, distingue le temps d'objet qui « instaure une fréquentation raisonnée et graduelle, logiquement pensée, des objets du savoir » (Ibid., p. 573) et le temps des tâches où le savoir est mis à distance.

L'organisation du curriculum est donc liée ici à une succession ordonnée des savoirs, découpés en unités discrètes : « tout le problème de l'enseignement consiste à trouver des textes comportant des parties et des séquences logiques et, à les présenter en classe d'une manière aussi graduée et définie » (Dewey, 1902/1959, p. 63).

Ce temps classique, linéaire peut être rapproché du paradigme de la visite des œuvres (Chevallard, 2016) qui propose un parcours ponctué d'arrêts où l'on visite une œuvre un certain temps pour en prendre une certaine connaissance sans construire un rapport « authentique » à cette œuvre.

1.2.2. Le paradigme de la visite des œuvres.

Le paradigme de la visite de l'œuvre est défini par le système S(X, Y, D) où X est un collectif d'élèves, Y, l'équipe d'aide à l'étude et D, un champ d'étude. Ce système étudie des œuvres O qui sont l'enjeu de l'étude (Ladage & Chevallard, 2011). Chaque œuvre est constituée d'un ensemble d'œuvres ou d'œuvrettes (Chevallard, 2015b). Une œuvre est le « fruit d'une activité humaine finalisée » (Chevallard, 2016, p. 20). Etudier un savoir, c'est donc étudier certaines questions relatives à ce savoir (à cette praxéologie). Dans le paradigme de la visite des œuvres[18], le professeur apporte des questions à propos de l'œuvre à étudier (une théorie,

[18] Pour illustrer le paradigme de la visite de l'œuvre, Chevallard (2015) propose deux exemples emblématiques que nous reprenons ci-dessous :

« Un intellectuel bourgeois emblématique d'un certain XIXe siècle, Saint-Marc Girardin, disait très clairement : « je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin, il me suffit qu'il l'ait oublié ». Telle est la formule

une notion, une technique etc) à propos desquelles il aura au préalable élaboré une réponse. Puis, le professeur propose aux élèves la réponse ainsi élaborée à travers un milieu didactique ou un milieu d'étude qui contient les matériaux et le matériel pour la construction de la réponse. Chevallard (2015a) considère la logique du « vieux » système scolaire comme dépendant de ce paradigme de la visite des œuvres qui aboutit à une réification des œuvres. Celles-ci ne sont pas considérées comme des moyens de répondre à des questions mais comme des fins (Chevallard, 2016).

La théorie de l'enquête, qui s'est développée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, vient en opposition au paradigme de la visite des œuvres qui « enferme l'étude dans un ensemble de contraintes formelles qui ne laissent au principe de fonctionnalité qu'une place réduite » (Kim, 2015, p. 59). Comme nous l'avons précisé ci-dessus, ces contraintes segmentent le temps didactique et les savoirs sont indépendants les uns des autres, sans continuité intrinsèque.

1.2.3. Paradigme du questionnement du monde.

Chevallard développe la notion de PER (Parcours d'Etude et de Recherche) qu'il qualifie de didactique car il se définit par des objets et des formes d'études didactiques. Le développement de ce parcours est lié à l'émergence d'un nouveau paradigme, le questionnement du monde. Les PER ont pour objectifs d'

> « instaurer un autre rapport aux savoirs sur la base de deux principes fondamentaux : la question génératrice de l'étude ne devrait pas se limiter aux seules questions mathématiques et les mathématiques rencontrées ne devraient être rien d'autres que les mathématiques utiles pour appréhender « chaque grand type de situations problématiques que peut vivre le citoyen d'aujourd'hui » (Chevallard, 2007, p. 259)

Ces parcours d'étude et de recherche vont donc organiser le schéma de l'étude. Celle-ci se fera dans le cadre de ce nouveau paradigme qui peut être qualifié de pédagogie de l'enquête (Ladage & Chevallard, 2011). L'élaboration d'une réponse à une question posée n'est plus ici une prérogative du professeur, comme cela était le cas dans la visite des œuvres : elle est sous la responsabilité de l'élève, dans une démarche d'enquête, sous la direction du professeur. Les

générique de l'école de la visite des œuvres : « On ne demande pas à un honnête homme de savoir l'équation du second degré, ou la règle de trois, ou les tables de multiplication, et ainsi de suite à l'infini ; il nous suffit qu'il les ait oubliées. » (Ibid. p. 4). Ainsi, dans ce paradigme le professeur fait visiter des œuvres qui sont épistémologiquement non motivées et sans que les raisons d'être de cette étude soit connue (Chevallard, 2015).

élèves peuvent alors constituer eux-mêmes un milieu, un milieu culturel qui peut produire une réponse à la question posée[19] (ibid.).

Dans le paradigme du questionnement du monde, « les œuvres à étudier ne sont plus des fins en elles-mêmes mais elles sont des moyens au service de la construction, collective et critique, de réponses aux questions qui se posent à nous » (Chevallard, 2015b, p. 6). Ainsi, ce paradigme redonne sa place aux questions (Chevallard, 2016). Alors, « étudier une œuvre revient à étudier des questions soulevées à propos de cette œuvre dans la perspective de son utilisation pour créer une réponse $R^{\heartsuit}$, c'est-à-dire dans une perspective finalisée par l'étude de la question génératrice Q » (Ibid. ; p. 33). Le schéma Herbartien, modèle pour analyser et agir du questionnement du monde est le suivant :

$$S(X; Y; Q) \rightarrow [\{R^1, R^2, \ldots, R^n, On+1, On+2, \ldots Om\}] \rightarrow R^{\spadesuit}$$

Le programme scolaire devient ici un « répertoire structuré de questions » (Chevallard, 2015a, p. 8). Chevallard (2015b) définit donc un programme scolaire comme un répertoire d'œuvres qui serait enseigné dans un certain niveau scolaire.

Dans le cadre de ce nouveau paradigme, il semble que les connexions entre les différents savoirs doivent être produites par les élèves dans une démarche d'enquête dans un rapport de première main à l'expérience.

Nous continuons notre enquête sur d'autres textualisations possibles des savoirs à travers le temps de situation.

1.2.4. Le temps de situation

Brousseau dans Rationnels et Décimaux (1987) propose un canevas de cet enseignement qu'il présente ainsi

> « Il représente en fait une suite de questions et de problèmes qui tendent à constituer une genèse : la question de rang n naît des problèmes rencontrés avec les solutions trouvées à la question de rang n – 1, ou des conséquences et développements de ces solutions ». (Brousseau & Brousseau, 1987 p. 461)

Il existe bien ici une textualisation du savoir avec un temps didactique spécifique que Brousseau explicite par le fait qu'il existe des relations entre les différentes situations au sein d'un même curriculum. La situation de niveau n naît de la nécessité de résolution d'un problème posé par une situation de niveau n-1 dans un jeu de questions et de réponses.

[19] Le milieu pourra être constitué de plusieurs réponses mais aussi de l'étude de plusieurs œuvres (œuvres considérées ici comme des outils pour répondre à une question).

« Le temps des situations est le temps de la durée propre des savoirs et donc de la durée propre de l'élève » (Sensevy, 2011a, p. 572). Il correspond à la production d'un temps propre à la simulation fonctionnelle où les élèves font preuve de la fonctionnalité des savoirs (ibid.). Mais que signifie une simulation fonctionnelle du savoir ?

> « Les simulations « donnent aux connaissances le sens finalement retenu par les mathématiciens ». La simulation est simulation, et non simulacre ou imitation des traits de surface, parce que le sens que les élèves attribuent au savoir est raisonnablement similaire à celui que les mathématiciens considèrent. La simulation fonctionnelle produit du similaire » (Sensevy, 2011a, p. 302).

Cette simulation fonctionnelle vient donc à l'encontre de la textualisation classique des savoirs où le risque est plutôt de privilégier la structure de surface produite par le texte par rapport au savoir (Ibid.).

Ainsi, Brousseau compare les méthodes d'apprentissage traditionnel en mathématiques, basées sur les problèmes avec celles basées sur des situations didactiques.

> « Les méthodes d'apprentissage classiques consistent à exposer le savoir, puis à en faire apprendre le texte, puis à demander la restitution de ce texte en réponse à des circonstances voisines. Cette restitution ne représente pas bien l'activité mathématique : tout ce qui s'écarte du texte et des méthodes enseignées est considéré comme des maladresses ou des erreurs. Or l'activité mathématique réelle a abouti à ces textes par des processus beaucoup plus variés, où la production de questions et de connaissances nouvelles avait son prix. Ainsi pour les élèves aussi, faire des mathématiques serait aussi poser de nouveaux problèmes, de nouvelles questions en construisant au passage les instruments d'étude nécessaires. D'où l'idée d'élargir la notion de "problème" centrée sur la construction logique des énoncés mathématiques, à celle plus large de "situation[20]", qui par des propriétés poïétiques pourrait susciter une sorte de genèse mathématique des concepts » (Brousseau ; 2010)

Brousseau compare l'activité des mathématiciens à celle des élèves en classe de mathématiques. Il met en évidence l'importance des questions et de la production d'instruments d'étude pour la production de connaissances scientifiques et non pas la restitution d'une réponse dans des contextes différents.

Brousseau (1986) résume le travail en mathématiques de l'élève ainsi :

> « Le travail intellectuel de l'élève doit être par moments comparable à cette activité scientifique. Savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer ; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. Une bonne

[20] Les conditions sous lesquelles les « êtres humains produisent, communiquent et apprennent les connaissances » (Brousseau, 2011, p. 108). Les mathématiques sont modélisées « par des systèmes appelés situations, qui conduisent des agents en interaction avec elles à manifester cette connaissance » (Ibid.)

> reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc. » (Ibid., p. 284).

Les élèves doivent donc reproduire des comportements se rapprochant de celui des mathématiciens tout en étant différent d'eux.

Le travail du professeur est, quant à lui, de

> « Simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves » (Ibid. p. 285).

Cette simulation fonctionnelle du savoir ne peut se produire à partir d'une suite de problèmes, d'objets de savoir successifs comme cela est le cas dans les curricula classiques mais au sein de situations qui « peuvent susciter une genèse des concepts » (Brousseau, 2010). Sensevy (2011a) met en évidence le fait que le passage de la notion de problème à celle de situation mathématique permettrait « de simuler l'activité source (celle du mathématicien) dans l'activité didactique » (Ibid. p. 309). Il propose de « replacer le temps d'objet – dont on a vu qu'il peut constituer un instrument pertinent de gestion didactique – sous la dépendance de ce que j'ai appelé le temps de situation. Dans cette perspective, il faut voir le temps de situation comme le premier élément de cette genèse artificielle des savoirs » (Ibid. p. 578). Ce temps de situation engendre donc un nouveau temps didactique (par rapport au temps classique). En effet, les situations proposées doivent structurer l'expérience des élèves. Ces situations peuvent être réexpérienciées par les élèves sous l'action du professeur. Ainsi, les connaissances

> « leur mobilisation ultérieure, et leur institutionnalisation supposent la reproduction ou l'évocation des circonstances de leur apparition (la situation fait partie du sens des connaissances). L'utilisation didactique ultérieure de ces connaissances exige donc qu'il se réfère à ces situations passées » (Brousseau, dans Centeno, 1995, p. 127).

Les connaissances sont ici intrinsèques à la situation didactique. Il y a donc nécessité de la reviviscence des situations pour faire réexpériencier un savoir (Quilio, 2008 ; 2012). Cette notion d'expérienciation correspond à une expérience vécue, éprouvée par un sujet (Coquidé, 2000). Le déroulement du temps didactique classique ne permet pas cette réexpérienciation et ne laisse pas le temps aux élèves le temps pour apprendre et le prive de l'expérience agentive (Sensevy, 2015).

1.3. Continuité de l'expérience des élèves

Pour étudier la question de l'expérience et de la continuité, nous nous appuierons dans ce travail de thèse sur les travaux de John Dewey (1859-1952), philosophe pragmatiste. La réflexion sur l'éducation a joué un rôle majeur dans son œuvre.

Dewey (1916/2011) présente une vision globale de l'éducation dont les objectifs sont de permettre aux individus de croître continuellement. Ses objectifs doivent être internes au processus de l'éducation, aux activités proprement dites et posséder une continuité intrinsèque. Ils ne doivent pas être dictés par l'extérieur, par le professeur qui dicte les actes des élèves, actes dont l'ordre provient « de leçons imposées et d'ordre donnés par un autre » (Ibid. p. 185). En effet, ce dernier ignore les particularités individuelles et les expériences de l'enfant. Son objectif est d'amener l'enfant vers des faits stables et bien ordonnés (versus les particularités et les expériences personnelles de l'enfant). Ainsi, pour Dewey, dans son ouvrage *l'école et l'enfant* (1913/2004), les conséquences de ce mode éducatif sont une division de chaque thème du curriculum en étude, chaque étude en leçon, chaque leçon en faits et formules spécifiques. L'accent est donc mis sur les subdivisions logiques et consécutives du sujet d'étude. Cette théorie éducative amène l'enfant à avancer pas à pas pour, à terme, accomplir l'ensemble du parcours proposé. Il y a ici un rapprochement des analyses des didacticiens précités ci-dessus sur le temps didactique.

Pour Dewey, l'éducation doit permettre à l'enfant de devenir autonome, indépendant et de s'adapter aux modifications de la société. Elle est « la reconstruction permanente de l'expérience (…). L'éducation, c'est tirer du présent tout ce qui sert à la croissance » (Dewey, 2003, p. 154). C'est pourquoi « le problème central d'une éducation basée sur l'expérience, consiste à choisir la nature des expériences présentes capables de demeurer fécondes et créatrices dans les expériences suivantes » (Ibid., p. 467). Toutefois, en éducation, il existe plusieurs sortes d'expériences. D'une part, les expériences qui sont indépendantes les unes des autres et ne permettent donc pas de contrôler les expériences futures car elles entraînent des « habitudes centrifuges, sans force d'intégration, d'où en résulte une inaptitude à contrôler les expériences ultérieures » (Dewey, 1968/2011, p. 466). D'autre part, des expériences qui éprouvent (élément actif de l'expérience) et qui subissent (élément passif) :

> « quand nous faisons une expérience d'une chose, nous agissons sur elle, nous faisons quelque chose avec elle ; puis nous en subissons les conséquences. Nous faisons quelque chose à la chose qui, à son tour, nous fait ensuite quelque chose (…). La fécondité, la valeur de l'expérience se mesure à la manière dont les deux phases sont liées » (Dewey, 1916/2011, p. 223).

Cependant, cette expérience ne se produit pas aléatoirement, elle se déroule au sein de situations dans lesquelles il existe des interactions entre un sujet, un objet et d'autres personnes (Dewey, 1968/2011). Les situations peuvent être considérées comme des moments qui peuvent permettre l'apprentissage. Ainsi la création de certains types de situations est la première voie, le premier chemin vers l'apprentissage[21] (Hildebrand, 2016). La situation est « un environnement mis au foyer de l'expérience par l'objet » (Dewey, 1938/1967, p. 18), l'objet étant sur quoi porte l'enquête dans la situation.

Par exemple, dans une situation du jeu des annonces (module 1 du domaine « Situations »), les élèves doivent produire différentes désignations du nombre 6, objet de l'enquête. Ils agissent donc en produisant des décompositions de ce nombre (6 = 4 + 2 ; 6 = 1+ 2 +3…). Cette expérience va permettre aux élèves de construire de nouvelles connaissances qui vont devenir des moyens dans une situation ultérieure pour comparer par exemple deux écritures additives par des stratégies de composition/décomposition. De plus, cette conception du nombre « 6 » va permettre aux élèves d'établir une continuité, un lien, une relation entre le nombre 6 et le nombre 3 par exemple (6 étant le double de 3).

Dewey propose deux principes essentiels à l'expérience, la continuité (continuité de l'homme avec la nature, de l'individu et du groupe, de l'enfant et de l'adulte, de l'école et de la société) et l'interaction (transaction entre les individus, l'environnement). Toute expérience est interactive et consiste à établir une continuité.

Revenons plus précisément sur la notion de continuité de l'expérience où « chaque expérience, d'une part emprunte quelques choses aux expériences antérieures, et d'autre part, modifie de quelque manière la qualité des expériences ultérieures » (Dewey, 1968/2011, p. 473). L'individu élabore ainsi progressivement au sein des expériences des « outils conceptuels, cognitifs et intellectuels nécessaires à l'appréhension d'objets de plus en plus complexes » (Gégout, 2012. p. 154-155). Sans continuité, le sujet ne peut manipuler, rencontrer, se confronter à un objet » (Ibid. p. 154). Deledalle, dans son introduction à l'ouvrage Démocratie et Education (1916/2011) cite Dewey « ce qu'il (l'individu) a acquis de savoir et de savoir-faire dans une situation précédente, devient un instrument de

[21] The importance of "situation" to education cannot be understated; more familiar to pedagogues as "teachable moments," the creation of certain kinds of situations is the primary way learning (of all kinds: skills, theories, facts, values, and so on) advances. In DE, Dewey is clearly developing the metaphysical and logical importance of situations as he applies it to education (Hildebrand, 2016, p. 75)

compréhension et d'action efficace dans les situations suivantes » (Ibid. p. 71). Le savoir est donc un instrument, un moyen pour continuer l'enquête.

La continuité est temporelle et désigne la progressivité dans les apprentissages. Ainsi, « l'acte de connaître renvoie à des opérations qui donnent aux objets dont on fait l'expérience une forme comprenant des relations dont on fait une expérience sûre et qui déterminent le cours ultérieur des évènements (…) Le savoir est intermédiaire et instrumental » (Dewey, 1915/2014, p. 320). Ainsi, la connaissance est issue d'une enquête particulière, connaissance qui devient un moyen d'enquêter dans une situation ultérieure. Dewey utilise le terme « assertion garantie » plutôt que connaissance pour signifier la potentialité du savoir qui doit être continuellement renouvelé dans l'enquête (Dewey, 1967). Mais, l'instrumentalité ne se limite pas au savoir. Elle inclut le matériel, les outils et les techniques (Dewey, 1967) comme moyen pour enquêter[22].

Nous pouvons effectuer un premier rapprochement avec la notion de temps de situation où le savoir est, d'une part, intrinsèque aux situations proposées puisque celles-ci rassemblent un ensemble de conditions que le sujet doit nécessairement utiliser « comme moyen pour obtenir un certain résultat » (Brousseau, p. 245, p. 2001). Le savoir n'est donc pas externe à la situation mais est ici un moyen de résoudre le problème posé.

La mise en texte du savoir sous forme de manuel dans l'éducation classique assure une forme de continuité (et permanence) dans le cursus des études (Chevallard & Mercier, 1987). Cependant, cette continuité semble avant surtout liée à la forme « externe » de l'activité. Elle n'est pas inhérente aux savoirs. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, ce type de textualisation peut engendrer un travail en surface des savoirs en jeu (Sensevy, 2011a). Le temps de situation, quant à lui, doit produire une forme de continuité de l'expérience puisque qu'il instaure une

> « genèse du savoir, son développement, sa croissance, en moteur d'action. C'est ainsi une manière de produire du temps de situation consiste à faire en sorte que la situation de niveau n naisse de la nécessité de résolution d'un problème posé par la situation de niveau n-1 » (Sensevy, 2011a, p. 578).

Néanmoins, cette continuité nécessite des ruptures au cours desquels l'élève rencontre son ignorance (Mercier, 1992 ; Sensevy, 1998) où les savoirs déjà-là ne sont plus suffisants pour résoudre le problème posé.

---

[22] Dewey définit l'enquête comme « la transformation contrôlée et dirigée d'une situation indéterminée en une situation qui est si déterminée en ses distinctions et relations constitutives qu'elle convertit les éléments de la situation originelle en un tout unifié (Dewey, 1967, p. 169).

Cette reviviscence, cette réexpérienciation des situations renvoie à la notion de continuité au sein du temps didactique et à la continuité de l'expérience des élèves.

D'autre part, les situations contiennent les moyens pour atteindre les fins. Il est donc important d'organiser une suite de situations qui engendre une chaîne de questions et de solutions. Ainsi, agir est le fait d'avoir « la capacité de relier les conditions présentes au résultat futur et les conséquences futures aux conditions présentes » (Dewey, 1916/2011, p. 186). La création de cette genèse des savoirs (Mercier, 2008 ; Sensevy, 2011a) doit reposer sur l'expérience des élèves et sa continuité.

De plus, la capacité d'apprendre des expériences est liée à l'acquisition d'habitudes qui permettent de modifier ses actions en fonction des résultats des expériences antérieures (Dewey, 1916/2011). C'est une disposition intellectuelle, une habitude de modes de pensée, de réflexion dans l'action. Ces habitudes sont considérées, par Dewey, comme des capacités effectives de réadaptation de l'activité à de nouvelles conditions. Cette réadaptation est liée à la notion de croissance. Ainsi, la transformation des habitudes nécessite une continuité entre chaque situation à travers les relations qui se créent (Wickman, 2012).

Il apparaît ici intéressant de rapprocher la notion d'habitude développée chez Dewey avec celle de savoir comme puissance d'agir, en situation qui implique « la maîtrise d'un jeu de langage, en tant que maîtrise technique » (Sensevy, 2011a, p. 61). Ce jeu de langage est enchâssé dans une certaine forme de vie (Wittgenstein, 2004), dans une pratique. Une forme de vie se compose de « l'entrelacement de la culture, des conceptions du monde et du langage (…) Parler un langage fait partie d'une activité ou d'une « forme de vie » (Glock, 1996, p. 250). Ainsi « les faits de la vie sont des manières spécifiques d'agir qui, prises ensemble constituent une forme de vie » (Ibid., p. 251). Le langage repose donc sur des formes de vie stables et sur une activité régulière. Ils « sont imbriqués dans des activités non linguistiques et doivent être compris dans ce contexte. » (Ibid., p. 250). Ainsi, la notion d'habitude chez Dewey pourrait se construire dans une pratique particulière, c'est-à-dire dans une certaine forme de vie. La puissance d'agir s'exprime en situation, on apprend d'une expérience mais aussi on apprend une expérience (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat & Flückiger, 2007). Nous pouvons opérer un second rapprochement de la notion de continuité de l'expérience avec le nouveau paradigme du questionnement du monde (Chevallard & Ladage, 2010) développé dans la théorie anthropologique du didactique. Ce paradigme repose sur un processus d'enquête. Les réponses fournies aux élèves ne sont plus seulement estampillées par une institution, en particulier par le professeur. Elles sont le fruit de l'enquête menée par les

élèves. Dans l'enseignement classique, le professeur propose ou impose les réponses aux questions en menant lui-même une enquête plus ou moins simulée, et sans tenir compte des réponses des élèves eux-mêmes (Ibid.). Les élèves sont donc interdits d'expérience (Sensevy, 2011a). L'enquête, dans le paradigme du questionnement du monde, a pour objet une sorte particulière d'œuvre O, que sont les questions Q1, Q2, etc. Enquêter sur une œuvre, sur une question ne sera pas simplement donner une réponse mais enquêter sur la question Q, sur son origine, sur ce qui l'a motivée etc… (Chevallard & Ladage, 2010)[23]. Il existe bien ici une continuité et interaction entre l'élève et son environnement où les élèves vont explorer, enquêter de manière ouverte. Les élèves vont donc construire des connaissances au cours de différentes enquêtes qui vont constituer « un réservoir d'outils potentiels en vue d'enquêtes à venir » (Chevallard & Ladage, 2010, p. 9). Les œuvres ne sont donc plus « sacralisées », et perdent leur caractère ultime. Elles deviennent des supports de travail, des hypothèses qui permettent de continuer l'enquête. Nous pouvons rapprocher ces propos de ceux de Dewey (2003) qui met en évidence, en sciences, la non division des fins et des moyens « la théorie, dans la conduite de l'enquête scientifique, a perdu son caractère ultime. Les théories sont devenues des hypothèses » (Ibid. p. 37).

Après cette étude non exhaustive des différentes formes de textualisation du savoir en éducation, nous pouvons déjà nous questionner sur le texte de savoir produit dans le cadre de la progression ACE. Comment cette textualisation s'organise-t-elle ? Autorise-t-elle une continuité dans l'expérience mathématique des élèves ? Comment cette continuité se construit-elle sur un temps long (une année scolaire) ? Quelle(s) forme (s) peut-elle prendre ? Comme nous l'avons spécifié dans le premier chapitre, nous nous centrerons plus spécifiquement sur les systèmes de représentation présents dans le domaine « Situations » pour voir ci-ceux-ci autorisent une forme de continuité de l'expérience des élèves. Mais avant cela, nous produirons une étude plus précise des systèmes de représentation dans ACE.

[23] Chevallard et Ladage (2010) donnent comme exemple celui de l'étude d'une figure géométrique où la question Q est « quelle est la mesure en degré de l'angle BAI ? La réponse classique, scolaire est que l'angle mesure n degrés. Dans le paradigme de l'enquête, « enquêter sur Q, ce sera enquêter par exemple sur l'origine de la question-quand et où elle est apparue ? - et sur ce qui l'a motivée ou la motive » (Ibid. p. 3).

2. Les représentations dans la recherche ACE-ArithmÉcole

Un des principes fondateurs de la conception du curriculum ACE, notamment du domaine « Situations » est de favoriser un rapport de première main des élèves à une réelle expérience mathématique (Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat & Perrot, 2005 ; Mcclain & Cobb, 2001, Hiebert & Grouws, 2007). Cette expérience mathématique, ancrant l'enseignement sur l'apprentissage[24], passe par une conception en acte des mathématiques comme modélisation de la réalité. Cette conception suppose un travail systématique de justification et de preuve (par exemple, le résultat d'une soustraction peut se justifier en utilisant le principe inverse, 5 - 2 = 3 puisque 2 + 3 = 5). Ce travail mathématique exige un rapport spécifique à la référence, dans la dénotation (Frege, 1884). En effet, une écriture mathématique doit pouvoir se référer à une situation concrète (comme par exemple la situation du jeu oral des annonces). De même, l'usage de systèmes de représentation, comme moyens de preuve et de résolution (pour représenter un problème) est systématiquement mobilisé sur l'ensemble du curriculum.

Ce rapport de première main à l'expérience mathématique se cristallise dans la classe, dans l'action conjointe professeur/élèves autour du savoir à travers notamment des situations didactiques qui prennent en considération les connaissances antérieures des élèves, les problèmes proposés et le travail énonciatif du professeur.

Comme nous l'avons vu précédemment, la progression ACE et en particulier le domaine « Situations », propose des outils pour faciliter cette expérience mathématique. Dans ce paragraphe, nous tenterons de définir certaines notions précitées notamment celles de modélisation, de référence et de systèmes de représentation à partir d'une approche épistémologique spécifique.

Ainsi, nous pouvons nous poser les questions suivantes :

- comment définissons-nous la notion de modélisation de la réalité ?
- quel est ce rapport à la référence ?
- qu'est-ce qu'un système de représentation en mathématiques ?

[24] Le professeur ancre son enseignement sur les connaissances antérieures des élèves.

1.1. La notion de modélisation

La notion de modélisation dépend de la manière dont on considère l'activité scientifique et de l'épistémologie à laquelle on se réfère (Sensevy, Tiberghien, Santini, Laubé & Griggs, 2008). Pour notre travail de recherche, nous nous intéresserons plus particulièrement à une certaine forme d'épistémologie vue par le biais des travaux de différents auteurs, Cartwright (1999) avec la machine nomologique, Wittgenstein (2004) avec les jeux de langage, et Fleck (2005) avec le style de pensée (Ibid. ; Sensevy, 2011a). Cette approche nous intéresse particulièrement car elle montre comment les modèles « réalisent l'articulation du concret de l'expérience avec l'abstrait de la théorie et sont l'expression d'un collectif de pensée » (Sensevy & Santini, 2006, p. 163). Cette conception du modèle peut être qualifiée d'empirique (Ibid.) car elle « réévalue l'importance de l'expérience, de la situation, des instruments dans la production continue de modèles » (Ibid., p. 163). L'un des principes de la progression ACE, comme nous l'avons vu précédemment, est lié à l'importance de l'expérience mathématique, ce qui suppose la construction d'un rapport concret-abstrait spécifique. Mais comment peut-on définir ces notions de concret et abstrait ?

Cartwright (1999) présente un exemple emblématique de modélisation à partir de la formule en physique F = ma :

> « en mécanique, nous avons ce genre de relation exacte, mais au coût d'introduire des concepts abstraits comme force, concepts dont la relation au monde doit être médiée par des concepts plus concrets. Ces concepts plus concrets se révèlent très spécifiques dans leur forme : les formes sont données par les modèles interprétatifs de la théorie, par exemple, deux masses compactes séparées par une distance r, l'oscillateur harmonique linéaire, ou le modèle pour une charge se déplaçant dans un champ magnétique uniforme. Ceci assure à force un contenu très précis. Mais cela signifie aussi que ce contenu est sévèrement limité dans sa gamme d'applications. Il ne peut être attaché seulement qu'à ces situations qui peuvent être représentées par ces modèles hautement spécialisés » (Ibid. p. 3).

Ainsi, les théories, les concepts abstraits doivent être médiés, traduits par des concepts plus concrets[25]. Ces concepts concrets donnent à voir certaines particularités des concepts abstraits et sont spécifiques à certaines situations. Pour illustrer ce passage de l'abstrait au concret, Cartwright propose une analogie entre fable/modèle où la morale est assimilée à la théorie, à l'abstraction à laquelle est adossée une certaine description plus concrète. Cartwright cite ainsi Lessing (2008) : « pour donner une conclusion symbolique générale toute la qualité dont elle est capable (…) nous devons la réduire au particulier afin de la connaître intuitivement »

[25] Le concret n'est pas la matérialité. Le concret est ce avec quoi on peut agir adéquatement, qui consonne avec l'habitude.

(Cartwright, 1999, p. 38). Ainsi, l'abstrait peut être adossé à des descriptions plus concrètes. Un concept est abstrait par rapport à quelque chose, à une description concrète.

Pour comprendre et utiliser certains modèles, certaines formes de modélisation, il est nécessaire de maitriser un certain arrière-plan composé de différents niveaux de spécificité. « Dès que l'on considère un modèle dans son usage effectif, on prend conscience d'un très grand nombre de nécessités dont beaucoup, même triviales, conditionnent son application » (Sensevy, Santini, 2006, p. 172). Il est donc indispensable d'avoir acquis certaines connaissances préalables, connaissances qui peuvent être génériques comme spécifiques.

Par exemple en mathématiques, des systèmes de représentation peuvent modéliser certaines propriétés du nombre. Pour représenter un nombre sur une ligne numérique, il est nécessaire de maîtriser le fait que ce nombre représente une quantité et une seule, de connaître la notion d'ordre. Ces connaissances pourront être définies comme génériques. Les connaissances spécifiques pourront être, par exemple, la nécessité de prise en compte de la première graduation, celle du zéro. De même, si l'on veut représenter l'addition de a et de b sur une même ligne, il est nécessaire de savoir que a + b est le nombre d'éléments de l'ensemble constitué par la réunion de A et de B.

Cette vision de l'activité de modélisation comme articulation entre l'abstrait et le concret se déploie à travers des systèmes sémiotiques de représentation[26]. Ainsi, dans le cadre du domaine « Situations », l'écriture mathématique peut se référer à différents systèmes de représentation, à différentes modélisations qui peuvent se définir selon un certain niveau de concrétude ou d'abstraction[27]. Elle doit se référer dans la dénotation (Frege, 1884) à une représentation plus ou moins concrète ou abstraite.

1.2. La notion de référence dans la dénotation

Pour Frege, la dénotation d'un nom ou d'une expression est l'objet auquel il se réfère (Frege, 1884). Il donne l'exemple de « l'étoile du matin » et « l'étoile du soir » qui ont des sens différents mais une même dénotation, « Vénus ». La dénotation d'un nom propre (ou d'une expression) est donc l'objet même que nous désignons par ce nom (Frege, 1971). Le Du (2004) donne un exemple dans le langage ordinaire de la dénotation : Paris est la capitale de la France. Il y a ici identité entre les dénotations de deux expressions particulières. « La capitale

[26] Représentation non pas mentaliste mais matérielle et publique (Hacking, 1989)

[27] Nous reviendrons spécifiquement sur ces systèmes de représentation dans un paragraphe suivant.

de la France » et « Paris » dénotent la même « entité ». Le verbe « être » exprime ici une identité (Frege, 1971) entre les deux expressions.

Mais revenons aux écritures mathématiques en reprenant un exemple proposé par Frege : a = b est un jugement d'identité, dans lequel « a » et « b » dénotent des objets. « a = b » est vrai si l'objet « a » est identique à l'objet « b », en d'autres termes si a et b dénotent le même objet. Le signe « = » désigne ici la dénotation.

Dans le curriculum ACE et en particulier dans le domaine « Situations », un travail spécifique de la relation entre concret et abstrait est proposé. Toute écriture mathématique doit pouvoir se référer à un autre système sémiotique de représentation. Par exemple, l'écriture additive peut, par exemple, dénoter une annonce à deux mains. Cette écriture peut aussi référer à d'autres réalités qui peuvent être modélisées par des systèmes de représentation du nombre tels qu'une ligne numérique qui donne à voir le rapport des grandeurs entre elles.

L'usage des systèmes de représentation du nombre dans la progression ACE autorise les élèves à référer une écriture symbolique mathématique à ce qu'elle désigne. Ces différents systèmes de représentation donnent à voir des propriétés différentes du nombre. Par exemple, la représentation corporelle (annonce produite avec les mains) permet de montrer qu'un nombre peut désigner la réunion de deux sous-collections (le nombre comme mesure de grandeur de deux sous-collections d'objets). Ces systèmes de représentation ne peuvent pas se correspondre terme à terme mais peuvent donner à voir différentes propriétés du nombre. Pour illustrer notre propos, nous reprenons les propos d'Olivier (2015) qui, en parlant des compatibilités des traductions entre deux langues, énonce que « deux langues n'ont aucune raison a priori de se correspondre terme à terme de façon unique. Elles disent le monde à leur façon respective, et une correspondance entre elle, est à construire analytiquement, comme moyen parmi d'autres possibles, de traduire l'une et l'autre » (Ibid., p. 72). Dans son ouvrage, Olivier explicite ainsi dans cette perspective la thèse de la sous détermination de la référence de Quine : « l'indétermination de la référence revient à dire qu'un langage, même associé à des comportements non verbaux, est en général une théorie[28] qui admet plusieurs modèles[29] » (Ibid. p. 85).

---

[28] Chez Quine, les notions de langage et de théorie se confondent puisque le langage se réfère à des objets et que « tout système de signes qui présuppose un univers d'objets comme existant est déjà une théorie » (Ibid. p. 85)

[29] Le modèle pour une théorie chez Quine est une interprétation des signes (qui sont interprétés en fonction d'une référence, d'un objet) de la théorie qui est telle que cela rend la théorie vraie. Pour illustrer ce propos, Olivier donne l'exemple du nombre, la série d'objet qui rend vraie les règles de l'arithmétique.

Olivier propose un exemple non scientifique pour illustrer ce propos

> « considérons l'énoncé suivant, que l'on considérera comme l'unique énoncé de notre théorie : un peuple est une multiplicité d'individus soumis à une autorité politique. Son interprétation attendue est celle des citoyens d'une nation. Mais l'ensemble des militants d'un parti politique, voire l'ensemble des salariés d'un grand service public pourraient constituer des modèles inattendus de notre micro-société » (Ibid. 86-87)

Le modèle ici, les citoyens, les militants, les salariés sont des modèles de la théorie proposée. Ils rendent tous vraie la théorie, « un peuple est une multiplicité des individus soumis à une autorité politique ». Ils correspondent, interprètent les signes de la théorie, des termes exprimés dans la théorie.

Cette notion de modèle peut être rapprochée de celle de Cartwright dans la mesure où le modèle rend concret la théorie abstraite. Par exemple dans la fable, l'histoire rend vraie la morale. Ainsi, Lessing (2008) par exemple définit la fable comme « lorsque l'on ramène une proposition générale à un cas particulier, que l'on confère à ce cas la réalité, qu'on invente à partir de là une histoire dans laquelle on reconnaît intuitivement la proposition générale, cette fiction s'appelle la fable » (Ibid., p. 59)

Dans la progression ACE, les systèmes de représentation dénotent, réfèrent certaines des spécificités des nombres et peuvent être considérés comme des modèles. Chaque modèle, met en évidence quelque chose du nombre, ses propriétés et des relations qu'il peut exister entre eux. Ils interprètent un concept abstrait.

Mais qu'entendons-nous par les concepts concrets et abstraits, les représentations concrètes et abstraites. Comment ces représentations sémiotiques peuvent être traduites les unes par rapport aux autres et quels sont les avantages pour l'enseignement/apprentissage de cette mise en correspondance ?

1.3. Relation concret/abstrait : les travaux en psychologie

De nombreuses recherches anglo-saxonnes notamment en psychologie étudient les effets de l'usage des représentations dans l'apprentissage des mathématiques. Deux types de représentation sont mis en évidence, les représentations concrètes et abstraites et les relations qui les unissent. Nous nous appuyons sur une vision particulière des représentations et des rapports entre leur concrétude et leur abstraction qui est celle de McNeil et Fyfe.

1.3.1. Les représentations concrètes

Les représentations concrètes sont liées à une expérience perceptive et motrice (McNeil & Fyfe, 2012). Elles peuvent être considérées comme des objets matériels mais aussi comme des diagrammes, des images qui représentent des concepts, des idées mathématiques (Ding & Li, 2014 ; Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014). Ces représentations concrètes peuvent donc recéler différents niveaux de concrétude (par exemple, le matériel manipulable comme des cubes emboîtables est plus concret qu'une image représentant une collection d'objets qui a une valeur symbolique). L'usage du matériel concret offre des bénéfices à l'apprentissage car il active des connaissances du monde réel des élèves. Il induit des actions physiques et imaginatives et autorise les élèves à construire leurs propres connaissances des concepts abstraits (Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014). Il est cependant intéressant de noter que certains professeurs pensent que la connaissance mathématique abstraite peut résulter de l'usage direct du matériel concret (Ball, 1992, McNeil & Fyfe, 2012). Sur cette question, toutefois, les recherches sur les manipulations sont mitigées (Petersen & McNeil, 2013). Le matériel perceptivement riche peut augmenter l'engagement des élèves mais peut aussi distraire les élèves de la structure mathématique de la tâche (Ibid. ; Uttal, Nührenbörger & Streingring, 2008 ; Scudder & DeLoache, 1997) du fait notamment de la richesse perceptive des objets utilisés. Cette attention à l'objet lui-même et non pas au référent peut empêcher le transfert d'une connaissance vers un nouveau problème (Goldstone & Sakamoto, 2003 ; Kaminski & al, 2008). Il est nécessaire que les élèves voient au fur et à mesure le matériel concret comme des symboles matériels qui servent à représenter des structures mathématiques, des relations et des modèles (Nührenbörger & Streingring, 2008). Il apparaît ainsi que les élèves performent mieux lorsqu'ils utilisent du matériel standard, uniforme (comme les cubes, les barres de dix…) qui autorise un meilleur transfert d'un contexte à l'autre.

Ma (2010) insiste sur le fait que l'usage de la manipulation dépend largement de la direction que lui donne le professeur[30]. Il est nécessaire, selon elle et plusieurs auteurs, que le professeur aide les élèves à mettre en relation les manipulations avec des idées mathématiques explicites (Ball, 1992 ; Driscoll, 1981). Pour cela, les professeurs doivent avoir bien compris les conceptions sous-jacentes à l'usage des manipulations (Ma, 2010). Il semble ainsi que la

[30] Par exemple les professeurs chinois accordent une place importance à la discussion collective après la phase de manipulation où les élèves expliquent leur propre stratégie.

valeur des représentations concrètes dépend de leur relation avec les structures et les concepts mathématiques qu'ils représentent (Nührenbörger & Streingring, 2008).

1.3.2. Les représentions abstraites.

Les représentations abstraites sont des symboles qui représentent des concepts et des idées mathématiques. Ces symboles sont nécessaires pour représenter les objets mathématiques qui n'ont pas d'existence tangible[31] (Sfard, 2000 ; Uttal, Liu & Delaoche, 1999 ; Ding & Li, 2014). En effet, ces représentations éliminent les détails perceptibles et sont souvent arbitrairement en lien avec le référence (Ding & Li, 2014 ; McNeil & Fyfe, 2012). Ces représentations abstraites focalisent l'attention des élèves sur des aspects structurels de la représentation et non sur des caractères de surface comme cela peut être le cas dans les représentations concrètes. Elles offrent donc une portabilité et une généralisation accrues dans des contextes différents (Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014). Cependant, il semble que l'apprentissage des mathématiques par les représentations abstraites peut engendrer des erreurs logiques, des stratégies peu efficaces. Les élèves peuvent manipuler les symboles sans leur donner de sens véritable, sans compréhension conceptuelle véritable (Ding & Li, 2014 ; Goldstone & Son, 2005 ; Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014). Ainsi, l'abstraction a des vertus « mais si on manque de distinction, penser devient aussi difficile que respirer au somment de l'Everest » (Hofstadter & Sander, 2013, p. 137).

Des études de Kaminski (2006) ont remis en cause l'idée que l'apprentissage des mathématiques se déroule de manière plus efficace du concret vers l'abstrait. Ainsi, il apparait que les élèves doivent fournir des efforts supplémentaires pour arriver à la structure mathématique lorsqu'ils sont confrontés à des contextes concrets comprenant des informations inutiles. Cependant, il semble que lors de l'apprentissage à partir d'un contexte abstrait, les élèves appliquent des règles formelles sans mettre du sens dans les combinaisons de symboles effectuées ((De Bock, Deprez, Van Dooren, Roelens & Verschaffel, 2013).

Les approches socioculturelles basées sur les travaux de Vygotsky soutiennent que les activités de symbolisation ne sont pas externes à la pratique mathématique mais font partie du

[31] Par exemple, les symboles comme les nombres ont un rôle de notation qui évite la manipulation physique de quantités et permettent de produire des opérations sur des représentations abstraites (Uttal, Lui & Deloache, 1999).

raisonnement mathématique[32]. Ainsi, Gravenmeijer (2002) définit le modèle de « chaîne de signification » où les premières symbolisations informelles jouent « tout d'abord le rôle d'un modèle de la situation qu'elles représentent (« a model of the situation »), puis elles deviennent un modèle pour soutenir le raisonnement mathématique (« a model of mathematical reasonning ») permettant conjointement l'évolution vers des symbolismes conventionnels et le développement de certains concepts » (Fagnant, 2013, p. 35). Cette évolution se déroule lors des phases de confrontations des différentes procédures des élèves et des symbolisations qui y sont liées.

1.3.3. Le Concreteness Fading

Nous centrons maintenant notre propos sur la théorie du Concreteness Fading (Fyle & McNeil, 2014) qui combine le concret et l'abstrait et tente de minimiser leurs désavantages respectifs. Cette approche propose l'usage du matériel concret qui s'efface progressivement avec un dépouillement progressif des détails au profit d'une représentation abstraite et plus économique. Elle permet à l'élève de bénéficier initialement du contexte concret tout en l'encourageant à généraliser. Cette théorie se réfère aux trois stades de progression présentés par Bruner (1966) :

- enactive form : physique, matériel, le modèle concret du concept ;
- iconic form : graphique ou image du modèle ;
- symbolic form : forme symbolique du concept.

Le tableau ci-dessous donne à voir ces différentes étapes :

[32] Les symboles sont considérés par Cobb (2000) comme des traces écrites (dessin, schéma, écriture symbolique mathématique)

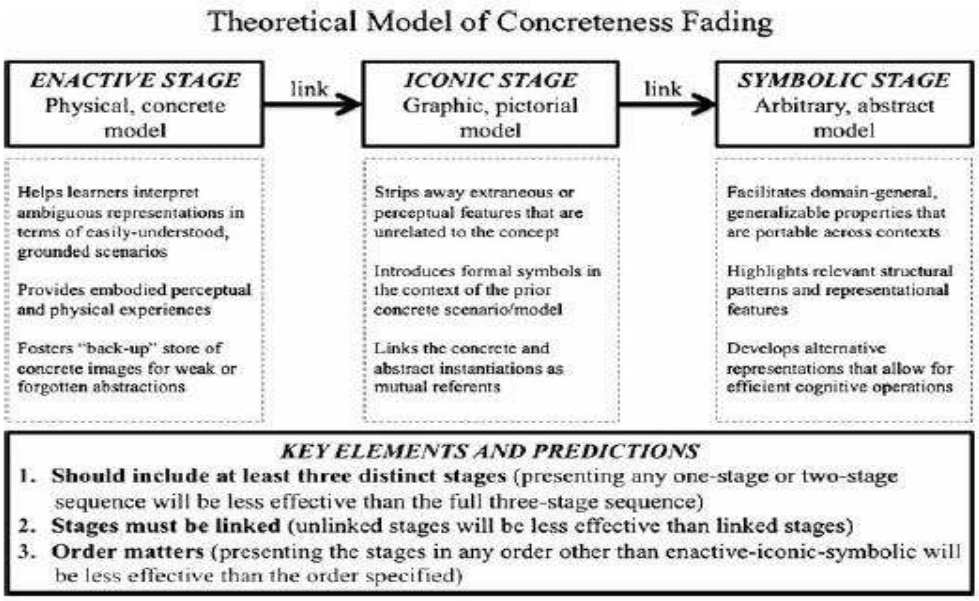


Figure 2 : modèle théorique du Concreteness Fading (Fyfe, McNeil, Son, & Goldstone, 2014, p. 12)

Dans la théorie du Concreteness Fading, ces trois formes représentent un même concept mathématique et sont liées entre elles par la jonction de leurs structures communes. Selon les auteurs, les bénéfices liés à la mise en correspondance entre ces différentes représentations sont les suivants :

> - « Helping learners interpret ambiguous or opaque abstract symbols in terms of well-understood concrete objects;
> - providing embodied perceptual and physical experiences that ground abstract thinking ;
> - enabling learners to build up a store of memorable images that can be used when abstract symbols lose meaning ;
> - guiding learners to strip away extraneaous concrete properties and distill the generic, generalizable propreties » (Fyfe, McNeil, So & Goldstone, 2014, p. 9).

Ainsi, le Concreteness Fading présente simultanément des représentations concrètes et abstraites en faisant varier le concret grâce à une progression spécifique. Le concret devient une référence aux exemples iconiques et abstraits. L'accent est mis ici non pas sur les similitudes et les différences entre les représentations mais entre les correspondances, les liens entre ces représentations.

Il est néanmoins important de noter que quelques études (Ainsworth, 2006) ont montré que la présentation simultanée de multiples représentations peut entraîner une surcharge cognitive des élèves. De plus, les élèves peuvent avoir des difficultés à comprendre comment ces représentations sont liées les unes avec les autres. Il est donc nécessaire qu'il y ait un apprentissage spécifique sur cette mise en relation.

1.3.4. La montée de l'abstrait au concret

Davydov (1975) développe à partir des années 50 un programme en mathématiques sur la base de la théorie de Vygotsky. En effet, Vygotsky affirmait l'importance pour les élèves de maîtriser les concepts scientifiques pour pouvoir développer des capacités de pensée théorique. Il soulignait le rôle de médiation des formes sémiotiques et du système symbolique pour accéder à ces capacités. Pour cela, il suggérait d'introduire non pas l'arithmétique puis l'algèbre mais l'algèbre puis l'arithmétique dans un processus de montée de l'abstrait vers le concret[33] (Il'enkov, 1982 ; Hegel, 1966 ; Marx, 1909, 1971) dès le début de l'école élémentaire. Ainsi,

> " puisque les concepts arithmétiques demeurent même qu'on assimile l'algèbre, une question se pose tout naturellement : qu'est-ce qui distingue le concept arithmétique de l'adolescent qui maîtrise l'algèbre du concept du jeune écolier ? L'étude le montre : c'est que derrière lui il y a le concept algébrique, c'est que le concept arithmétique est considéré comme un cas particulier d'un concept plus général, c'est que l'opération dans laquelle il intervient est plus libre, puisqu'elle part d'une formule générale, et donc est indépendante d'une expression arithmétique déterminée » (Vygotsky, 1997, p. 393)[34]

Ainsi, Vygotsky montre que le « concept arithmétique est considéré comme un cas particulier d'un concept plus général » (Ibid.), le concept algébrique.

La théorie de Vygotsky met donc l'accent sur les concepts scientifiques et la compréhension théorique en orientant l'enfant dès l'école élémentaire vers plus d'abstraction et un niveau général de compréhension (Schmittau, 2005). Les élèves apprennent à penser théoriquement et aller au-delà des aspects empiriques des phénomènes (Schmittau & Morris, 2004). Ainsi, les élèves abordent tout d'abord le concept de quantité avant celui de nombre.

En effet, la généralisation et l'abstraction se développent à travers une centration sur les caractéristiques générales et abstraites des phénomènes réels. Par exemple, les élèves,

---

[33] La théorie des systèmes d'activité (Engeström, 1987) est basée sur la montée de l'abstrait vers le concret que l'auteur définit ainsi « This a method of grasping the essence of an object by tracing and reproducing theoretically the logic of its development, of its historical formation through the emergence and resolution of its inner contradictions. A new theoretical idea or concept is initially produced in the form of an abstract, simple explanatory relationship, a 'germ cell'. This initial abstraction is step-by-step enriched and transformed into a concrete system of multiple, constantly developing manifestations. In an expansive learning cycle, the initial simple idea is transformed into a complex object, into a new form of practice. At the same time, the cycle produces new theoretical concepts - theoretically grasped practice - concrete in systemic richness and multiplicity of manifestations" (Ibid, p. 11).

[34] Nous reprenons ici cette citation en anglais "At the earlier stage certain aspects of objects had been abstracted and generalized into ideas of numbers. Algebraic concepts represents abstractions and generalizations of aspect of the numbers, not objects, and thus signify a new departure, a new, higher plane thought. The new, higher concepts, in turn, transform meaning of lower. The adolescent who mastered algebraic concepts has gained a vantage point from which he sees concepts of arithmetic in a broader perspective" (Vygotsky, 1986, p. 202).

commencent l'exploration des propriétés quantitatives (le poids, le volume, la longueur…) des objets en les comparant. Les élèves ne connaissent pas les quantités réelles et les remplacent par des lettres. Ils comprennent, par exemple, que lorsque l'on ajoute un volume A à un volume B, le résultat est le même que si on inverse l'ordre des termes (propriété de commutativité de l'addition). Ce résultat est alors généralisable à toute quantité. Par conséquent, la désignation par des nombres de ces quantités devient une simple application concrète des formules algébriques. La mesure et la désignation numérique est alors une montée de l'abstrait vers le concret (Schmittau, 2005).

Il est important de noter que dans le cadre de ce curriculum, les élèves schématisent rapidement les objets réels notamment par une ligne numérique en la codant avec des expressions symboliques, des lettres dénotant des propriétés quantitatives des objets (Schmittau & Morris, 2004). Nous y reviendrons ci-dessous.

1.4. Le concept de représentation en didactique des mathématiques

Dans ce quatrième paragraphe sur les représentations en mathématiques, nous focaliserons notre propos sur le concept de représentation en didactique des mathématiques. Pour cela, nous aborderons le concept de représentation chez Brousseau et celui de jeu représentationnel (Sensevy, 2011c) qui en est issu.

1.4.1. Les représentations chez Brousseau

Brousseau publie en 2004 un article sur *l'étude des représentations au sein de la théorie des* situations. Il rapproche cette notion de représentation avec celle de modélisation en mettant en évidence l'importance de ce concept dans des domaines tels que la psychologie cognitive.

Brousseau présente le concept de représentation comme « l'action de « rendre présent à nouveau » et son résultat » (Ibid. p. 241). Il le définit à partir de trois objets « un objet représenté, un objet représentant qui est souvent appelé « représentation » et une certaine relation qui relie le représentant au représenté. Cette relation est aussi appelée « représentation » » (Ibid. p. 243). Pour Brousseau, une situation objective de représentation est lorsque l'actant doit utiliser une représentation pour résoudre un problème que lui pose la situation :

« une situation objective de représentation est donc déterminé par le « septet » <∑, A, S, f, S', U-é, U-ant >. Nous dirons en abrégé que f est une représentation que A fait de S dans la situation ∑, S est pris dans l'univers représenté U-é, et S' dans l'univers représentant U-ant[35] » (Ibid. p.247)

En mathématiques, l'usage d'une représentation devient nécessaire lorsque pour résoudre un problème posé dans une première situation ($\sum_1$), l'actant construit une nouvelle situation ($\sum_2$). Dans cette nouvelle situation, « il pourra transporter une partie S de $\sum_1$ avec l'espoir que dans $\sum_2$ une solution lui apparaîtra et qu'il pourra la rapatrier dans $\sum_1$ » (Ibid. P. 251).

Comme cet auteur le précise, la représentation peut déjà être connue (il donne l'exemple de la représentation des quantités par des longueurs de segments, la représentation de la somme des nombres fractionnaires par la somme de nombres décimaux). L'invention ou l'usage d'une représentation déjà-là permet de trouver un objet ou de traduire une relation. Les usages des représentations en didactique sont pour Brousseau « « les objets même de l'enseignement ». A ce titre, elles sont aussi des « moyens de connaissances pour les élèves », elles doivent être enseignées comme telles » (Ibid. p. 243-244).

Dans le cadre du domaine « Situations », les systèmes de représentation sont mis à disposition des élèves et leur usage donne lieu à un apprentissage spécifique. Le processus de représentation, la relation qui relie le représentant au représenté y est, de même, traité. Les systèmes de représentation proposés peuvent être un moyen de modéliser une situation. Ils peuvent donc être considérés comme des modèles ayant chacun des propriétés particulières.

Nous donnerons ici un exemple en appui sur les systèmes de représentation présents dans la progression ACE.

L'écriture mathématique « 2 + 4 » que nous pouvons considérer comme le représenté peut se référer à une annonce produite à deux mains (deux doigts sur la main gauche et quatre sur la main droite), le représentant. Dans la relation de représentation, chaque terme de l'addition représente deux sous-collections. Cette écriture mathématique peut, de même, avoir un second représentant par exemple, une ligne numérique comme le montre la Figure 3 ci-dessous.

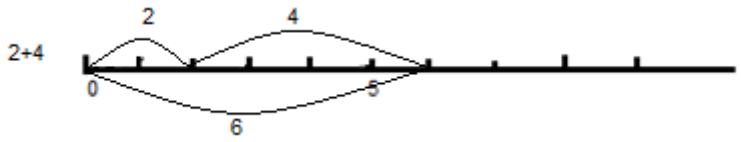


Figure 3 : représentation de 2 + 4 sur une ligne numérique

[35] ∑ étant la situation, A, l'actant, S et S' sont deux structures, f un morphisme qui relie chacun des composants de S, U-é et U-ant, l'univers représenté et représentant.

Le représenté « 2 + 4 » peut donc avoir plusieurs représentants, il peut être modélisé par différents systèmes de représentation.

Brousseau met en évidence qu'une relation de représentation met en relation deux univers avec un univers qui « contient la chose représentée, l'autre la chose représentante. Représentant et représenté ont des relations dans leurs univers respectifs » (Ibid. p. 243). Ainsi, cette relation de représentation autorise des relations dans l'univers représenté qui peuvent être traduites dans l'univers représentant. Cette traduction (f, dans le triplet <S, f, S'> peut aussi s'opérer dans un ordre différent, d'abord par les objets et les relations puis considérer les relations image dans le représentant. Ces relations autorisent ainsi la « réimportation d'une signification de l'univers représentant dans l'univers représenté » (Ibid. p. 243). Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, nous considérons que dans l'univers représenté, les écritures mathématiques sont traduites dans une relation de représentation dans un univers concret, corporel puis dans un troisième univers, analogique/symbolique

Le processus de représentation est un objet de connaissance pour l'élève mais aussi pour le professeur qui doit maîtriser les conceptions sous-jacentes à ces représentations.

Dans notre travail de recherche, nous mobiliserons les notions de représenté, représentant et de représentation pour spécifier le rôle et l'usage des systèmes de représentation et les relations qui les unissent.

Nous poursuivons avec la notion de jeu représentationnel (Sensevy, 2011c) qui découle du concept de représentation développé par Brousseau.

1.4.2. Le jeu représentationnel

Sensevy (2011c) propose une structure générique des formes symboliques qu'il nomme « jeu représentationnel » en s'inspirant des travaux de Brousseau (2004) et de Van Fraassen (2008).

Nous reprenons ici les propos de Van Fraassen (2008) cités par Sensevy.

> « les systèmes de représentation ne partent pas de rien, d'un référent « hors du monde et du langage » mais d'abord d'une possibilité d'explication de l'expérience (…) C'est cette possibilité de d'explicitation, qui inclut forcément l'autre (ne serait-ce que soi-même comme un autre), et donc cette possibilité de structuration de l'expérience, qui amène à la nécessité d'un système de représentation » (Sensevy, 2011c, p. 40)

Les premiers systèmes de représentation présentés dans la progression du domaine « Situations » renvoient à des usages scolaires mais aussi à des usages sociaux. En effet, les élèves proposent un nombre, le produisent sur deux mains (sous forme d'une décomposition

en deux sous-collections) et le comparent à un lancer de dé à six faces. Cette expérience de l'usage des configurations de doigts et des constellations de dé renvoie à l'usage qui peut en être fait en dehors de l'institution scolaire, dans l'environnement social (notamment par les jeux). Ainsi, les systèmes de représentation donnent à voir d'une manière différenciée la même réalité à travers des niveaux de concrétude et d'abstraction divers. Ils permettent de structurer l'expérience mathématique des élèves à travers différentes formes de modélisation d'une même réalité.

Pour Van Fraassen (2008), la représentation est intentionnelle car elle relève d'une intention épistémique. Ainsi, pour comprendre la représentation, il est nécessaire de comprendre son usage (les facteurs contextuels) à travers l'intention du représenteur et de son interprétation par un public. Dans le cadre de la progression ACE, les représentations sont données par les textes curriculaires et ne sont pas liées directement à l'intention du représenteur[36]. Ce dernier, par les représentations, donne à voir aux adressés (aux élèves, au professeur), dans un style de pensée particulier, une forme de modélisation d'une situation-problème. Il permet, de même, de contrôler l'écriture mathématique produite (la représentation abstraite).

La production de différentes représentations du nombre et leurs usages dans le jeu didactique constituent

> « en elles-mêmes un milieu qu'il s'agit pour l'élève de rendre signifiant, soit parce qu'il permet d'agir sur les représentés (et indirectement sur les représentants), soit parce qu'il permet de donner à voir la structure des représentants (et par conséquent celle des représentés) » (Sensevy, 2011c, p. 40).

Pour Sensevy, le jeu représentationnel amène à une conception relationnelle, dans le processus de représentation, entre les systèmes de représentation. Ainsi, chaque système sémiotique de représentation peut renvoyer à d'autres choses qu'à lui-même, à d'autres systèmes sémiotiques.

Ce jeu représentationnel repose sur six composants :

- le représenté ;
- le représentant ;
- la relation de représentation (au sens de Brousseau, 2004)
- le représenteur ;
- l'adressé ;

[36] Comme cela peut être le cas dans le jeu des trésors (Morales, 2014).

- le style de pensée (Fleck, 2005) dans lequel s'exprime le processus de représentation et qui est commun au représenteur et à l'adressé au sein d'un collectif de pensée.

L'étude des représentations « doit être considérée comme matérielle, publique et commune au sein d'un collectif » (Morales, 2014, p. 572).

Mais quels sont les systèmes de représentation que le curriculum ACE propose ?

1.5. Les représentations dans ACE

Dans ce cinquième paragraphe, nous présenterons les systèmes de représentation proposés dans le curriculum ACE. Nous nous centrerons sur ceux que le domaine « Situations » introduit et qui sont mobilisés sur l'ensemble des situations[37]. Nous introduirons une forme de première catégorisation de ces systèmes en fonction de la manière dont ils modélisent certains concepts mathématiques, leurs propriétés. Nous nous référerons, de même, au niveau de concrétude et d'abstraction qu'ils recèlent. Nous ne reprendrons donc pas l'ordre chronologique de leur introduction au sein du domaine « Situations », nous y reviendrons plus spécifiquement dans la partie II « Analyse » de ce travail.

Nous présenterons trois catégories de représentation, des représentations concrètes que nous divisons en deux sous-catégories, les représentations matérielles et des représentations analogiques qui se présentent sous forme schématique, iconique[38] où le système sémiotique invoqué ressemble à l'objet qu'il remplace (Peirce, 1978). Ces représentations schématiques, iconiques recèlent chacune une part différente de concrétude et d'abstraction. Elles permettent, en particulier, un effacement des similitudes avec l'objet qu'elles dénotent (les cubes par exemple). Une dernière catégorie est celle des représentations abstraites qui sont des formes symboliques. Elles sont arbitrairement liées au référent et autorisent une portabilité et une généralisation dans des contextes différents.

Le tableau synoptique ci-dessous donne à voir ces différentes représentations.

---

[37] L'usage de certains de ces systèmes de représentation notamment le schéma-ligne et le schéma-boîte se retrouvent dans le domaine « Résolution de problèmes ». La ligne numérique est, de même, travaillée lors des activités d'estimation avec le logiciel « Estimateur » dans le domaine « Grandeurs, mesures et estimation ».

[38] Une icône renvoie à son objet sous un rapport de ressemblance. Cette ressemblance ne peut être déclarée qu'au sein une catégorisation, donc grâce à une certaine symbolisation (Sensevy, 2011a).

Représentations concrètes					Représentations abstraites
Représentations matérielles		Représentations analogiques : représentations schématiques, plus ou moins iconiques (ou l'icône renvoie à son objet sous un rapport de ressemblance)			L'écriture symbolique mathématique : ces symboles sont arbitrairement liés au référent.
Nombres d'entités	longueur	Nombres d'entités	Longueur	Analogie de la réunion de deux nombres	
- les doigts (représentation corporelle) - le train-cubes (composé d'objets matériels, les cubes)	le train-cubes (composé d'objet matériel, les cubes)	- le schéma-train ; - le train-nombres ; - le schéma-ligne ;	- le schéma-train ; - le train-nombres ; - le schéma-ligne ;	Le schéma-boîte	

Tableau 7 : tableau synoptique des représentations dans le domaine "Situations".

1.5.1. Les représentations concrètes

Nous centrerons dans ce premier paragraphe sur les représentations concrètes et en particulier sur les représentations que nous qualifierons de matérielles puisqu'elles sont constituées d'objets (Petersen & McNeil, 2013). En effet, à partir des deux représentations concrètes exposées ci-dessous, les élèves font une réelle expérience de la manipulation des quantités, des manipulations concrètes (Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014).

La représentation corporelle des mains.

La situation initiale du domaine « Situations » est le jeu des annonces au cours de laquelle les élèves choisissent un nombre, le montrent sur leurs deux mains et le comparent avec un lancer de dé à six faces. Ce jeu évolue progressivement en gardant une référence constante aux mains (comparaison d'un lancer de dé avec une annonce à trois mains, comparaison d'une annonce à deux mains avec un lancer de deux dés à six faces, recherche de la différence entre deux annonces à deux mains). La comparaison entre des sous-collections d'unités discrètes (les doigts) et une constellation de points sur un dé montre la correspondance terme à terme entre deux collections d'objets dont l'ensemble est défini par un nombre (Chambris, 2007 ; Margolinas & Wozniak, 2012). Ces configurations de doigts et ces constellations présentes sur le dé font partie des usages sociaux et scolaires (Ibid.).

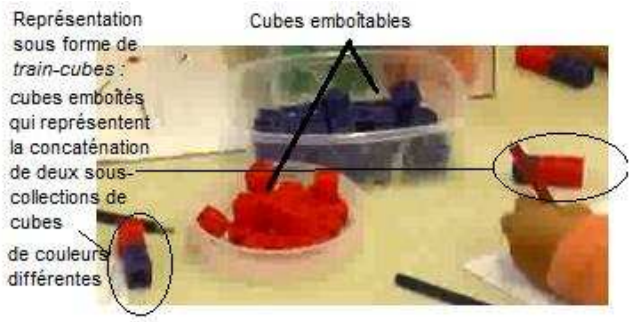
Ces représentations peuvent être considérées comme concrètes[39], mais aussi comme matérielles[40] (Margolinas, Wozniak, 2012). Les élèves font l'expérience dans leur corps de la

[39] Néanmoins, il est important de noter que Fayol (2012) considère que les configurations canoniques telles que les constellations et les configurations de doigts peuvent être traitées comme des symboles dans la mesure où elles ont acquis un statut sémantique. Elles peuvent fonctionner comme des codes en désignant des nombres.

représentation d'un nombre par deux sous-collections. Les élèves ont donc ici une expérience perceptive et motrice (Fyfe, McNeil, So & Goldstone, 2014) du nombre comme quantité. Le nombre choisi au départ par les élèves dénote une réalité effective représentée par la réunion de deux sous-collections d'unités discrètes. Les objets (les collections d'objets isolables telles que les configurations de doigts et de points) peuvent être comparés entre eux puisqu'ils recèlent une même caractéristique, celle de la quantité discontinue. Une comparaison est donc possible, celle de deux grandeurs.

Le train-cubes

Au cours des différents modules, les élèves éprouvent une autre représentation matérielle, le train-cubes. Cette représentation est constituée d'un ensemble de cubes emboîtables dont chaque couleur représente une sous-collection d'unités (Photogramme 3 ci-dessous).



Photogramme 3 : le train-cubes.

Les trains-cubes, construits sur le photogramme ci-dessus, représentent chacun la réunion de deux collections. Le premier à gauche représente une collection de deux cubes bleus à laquelle s'ajoute deux cubes rouges. Le second, à droite du photogramme, représente deux collections de cubes concaténées, deux rouges et un bleu.

Les élèves, comme pour la représentation corporelle, font une expérience motrice de la concaténation de collections d'objets matériels. L'unité, l'objet de la collection est ici le cube. Chaque nombre correspond alors à un ensemble de cubes (au cardinal de la collection) qui peut être composé de plusieurs sous-collections (cubes de couleurs différentes).

L'organisation spatiale des collections sous forme d'une succession de cubes permet de comparer les différentes collections d'objets entre elles. Cette disposition autorise alors la

[40] Margolinas et Wozniak (2012) parlent des dés, des doigts comme des représentations permettant d'accéder à certains aspects du nombre. Elles énoncent que ce sont des « systèmes matériels qui reposent sur le principe de correspondance et de collections équipotentes » (Ibid., p. 99)

comparaison de deux grandeurs, la longueur de chaque train-cubes (par exemple, la comparaison effective de deux trains-cubes montre que trois cubes rouges et deux cubes bleus sont plus grands/longs que deux rouges et un bleu). Cette représentation donne donc à voir l'addition d'un point de vue ensembliste, dans son aspect cardinal.

Nous remarquons que ces deux premières représentations concrètes (les mains, le train-cubes) que nous venons de décrire peuvent être considérées comme du matériel uniforme, standard, générique qui est censé autoriser un meilleur transfert vers l'abstrait (Pertersen & McNeil, 2013). Ces systèmes de représentation mettent en relation le nombre avec ce qu'il dénote, une collection d'unités (les doigts et les cubes). Ils autorisent la comparaison de deux grandeurs, les configurations des doigts avec les constellations de points et la longueur d'un train-cubes avec celle d'un autre. De plus, ils premettent une première approche de la décomposition des petits nombres et de la notion d'équivalence.

Nous pouvons représenter le nombre 4, par exemple, sous forme de deux trains-cubes différents. Ces trains-cubes auront la même longueur, même si leur composition interne est différente (un train-cubes de deux cubes bleus et deux cubes rouges est égal à un train-cubes composé de trois cubes bleus et un cube rouge). De même, le nombre quatre peut être décomposé sur deux mains. Cette décomposition peut prendre plusieurs formes (deux doigts sur la main gauche et deux sur la main droite ou un doigt sur la main gauche et trois sur la main droite)

Il existe donc une relation entre les expressions mathématiques (les nombres oraux) et les manipulations effectuées par les élèves[41]. Cette relation peut permettre aux élèves de comprendre comment les manipulations représentent un concept mathématique (Uttal, Scudder & Deloache, 1997).

1.5.2. Les représentations analogiques

La présentation des systèmes de représentation proposés dans le curriculum ACE se poursuit avec les représentations que nous nommerons « analogiques ». Ces représentations d'après la théorie du Concreteness Fading peuvent être considérées comme des représentations iconiques ou schématiques puisqu'elles gardent une similitude de forme avec ce qu'elles dénotent. Elles donnent à voir des ressemblances avec certains concepts, propriétés

[41] Le nombre est alors la mesure de la quantité en tant que grandeur.

mathématiques. Quatre représentations seront ici décrites dont les niveaux de concrétude et d'abstraction varient.

Le schéma-train

Le schéma-train est une représentation graphique, schématique du train-cubes. Il met en correspondance le nombre avec les éléments de la collection qu'il désigne et donne à voir le rapport entre deux grandeurs (cf. Figure 4)

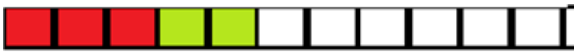


Figure 4 : exemple de schéma-train représentant deux sous-collections (3 et 2)

Le schéma-train ci-dessus est système sémiotique de représentation de deux sous-collections composées respectivement de trois et de deux éléments. Les ressemblances physiques avec le train-cubes sont ici saillantes[42] par leurs formes et leur organisation dans l'espace. Chaque unité du schéma-train peut être mise en correspondance avec les éléments constituant le train-cubes. De même, cette représentation peut être mise en relation avec les décompositions proposées avec les mains, chaque sous-collection du train-cubes correspondant à une sous-collection représentée sur une main.

Nous parlerons d'une première forme de modélisation dans la mesure où le schéma-train est une première mise à distance, un premier effacement du matériel donnant à voir la décomposition d'un nombre. Ce schéma montre la relation entre le nombre et ce qu'il dénote mais il n'est pas manipulable, déplaçable effectivement par les élèves.

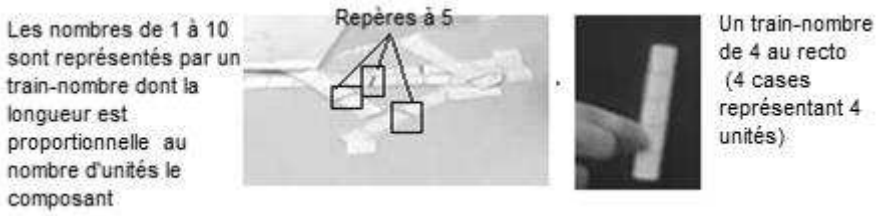
Il donne à voir deux sortes de grandeurs, les quantités et la longueur.

Le train-nombre

Les nombres de un à dix sont représentés sous forme de train-nombre. Chaque train-nombre est constitué d'une bande de carton dont le recto est quadrillé (en cm) en fonction du nombre représenté. Le verso de cette bande, quant à lui, est laissé en blanc, sans marque. La largeur de chaque train-nombre est de un centimètre de large et la longueur proportionnelle au nombre qu'il représente (par exemple le nombre 8 est représenté par un train-rectangle de 8 cm de long sur 1 cm de large). Sur le recto, les repères cinq et dix sont mis en évidence pour limiter

[42] Nous pouvons parler ici d' « extension catégorielle par analogie » (Hofstadter & Sander, 2013).

le comptage et pour que les élèves s'habituent à estimer les trains-nombres en fonction des repères prédéfinis (Cf. Photogramme 4).



Photogramme 4 : le train-nombre

Ce système de représentation reste analogique car il donne à voir la quantité que le nombre désigne, un ensemble fini d'objets. Cette représentation offre des similarités avec celles citées précédemment. Chaque « carré » -unité peut être mis en correspondance avec un élément d'un train-cubes. Ces unités sont, de plus, représentées comme sur le schéma-train par des carrés juxtaposés pour former une bande rectangulaire. Cette relation est d'autant plus aisée que l'organisation des collections y est identique.

La comparaison de deux nombres est également possible par la juxtaposition ou la superposition de deux trains-nombres. La différence entre les deux nombres est ici visible (par exemple, on peut voir que l'écart entre un train-nombre de quatre et un train-nombre de six est de deux unités).

Cette représentation reste cependant concrète. En effet, elle peut être manipulée physiquement par les élèves qui peuvent les superposer ou les juxtaposer pour les comparer. Elle autorise les élèves à construire le concept de nombre, le nombre qui modélise un ensemble composé d'unités pris comme étalon (ici les carrés). Le nombre est vu comme une itération de l'unité (car si on superpose par exemple les trains-nombres 5 et 4, on observe que 5, c'est un de plus que 4, c'est 4 + 1).

La ligne numérique ou le schéma-ligne

La ligne numérique présentée dans le domaine « Situations » que nous nommons le schéma-ligne est une demi-droite horizontale (sur un plan cartésien, l'axe x) sur lequel sont représentées des graduations désignant les entiers positifs, le point d'origine étant le zéro[43].

[43] La prise en compte du zéro dans les procédures des élèves lors de la mesure de grandeurs sur la ligne numérique est indispensable puisqu'il renvoie au point de départ, au point d'origine (Margolinas, Wozniak, 2012).

Deux graduations sont séparées par un intervalle représenté par un segment de même longueur qui désigne une unité. L'unité est donc spécifiée par le choix d'une paire de points [0, 1] (Bass, 2015). La direction de 0 à 1 donne l'orientation positive de la ligne. Les nombres sont présentés de manière croissante, de un en un (le nombre à droite est plus grand de un que le nombre à gauche). Un segment compris entre le zéro, point d'origine et une graduation n représente la longueur de ce nombre. Ce système de représentation est donc analogue à la suite des nombres. Il donne à voir et à comprendre notamment le concept de valeur de position (par la notation de position).

Par l'usage du schéma-ligne, les élèves mettent en relation le nom du nombre et la quantité par succession, le nom suivant correspondant au « plus un ». Cela permet de comprendre qu'un nombre vient après ou avant un autre et que la quantité évoquée est plus grande ou plus petite (Fayol, 2012). Les collections sont représentés sur ce schéma-ligne sous forme de schéma-pont, trait en forme de demi-cercle incluant le nombre d'intervalles (d'unités) correspondant au cardinal du nombre à représenter. Chaque collection est donc représentée par une suite d'unités (d'intervalles) désignée par un nombre symbolique. Le schéma-ligne autorise les élèves à comprendre le comptage discret mais aussi le sens de la mesure des quantités continues (Bass, 2015).

Dans un premier temps, le schéma-ligne est représenté dans un contexte discret d'ensembles finis, les nombres sont introduits comme la mesure de grandeurs de quantité (de « nombre d'entités »). Puis, ce schéma-ligne évolue tout au long de l'année. Il se dépouille progressivement de ces graduations, tout d'abord en ne gardant que les graduations de 5 en 5 puis en les supprimant. Les élèves représentent alors les nombres en estimant leur longueur. Ce schéma-ligne sans graduation autorise la représentation de plus grands nombres. La suppression progressive des graduations permet de contrer le développement chez les élèves du comptage-numérotage où le mot nombre est vu comme un numéro et non pas comme une pluralité d'objets (Brissiaud, 2013). La figure ci-dessous (cf. Figure 5) donne à voir cette évolution.

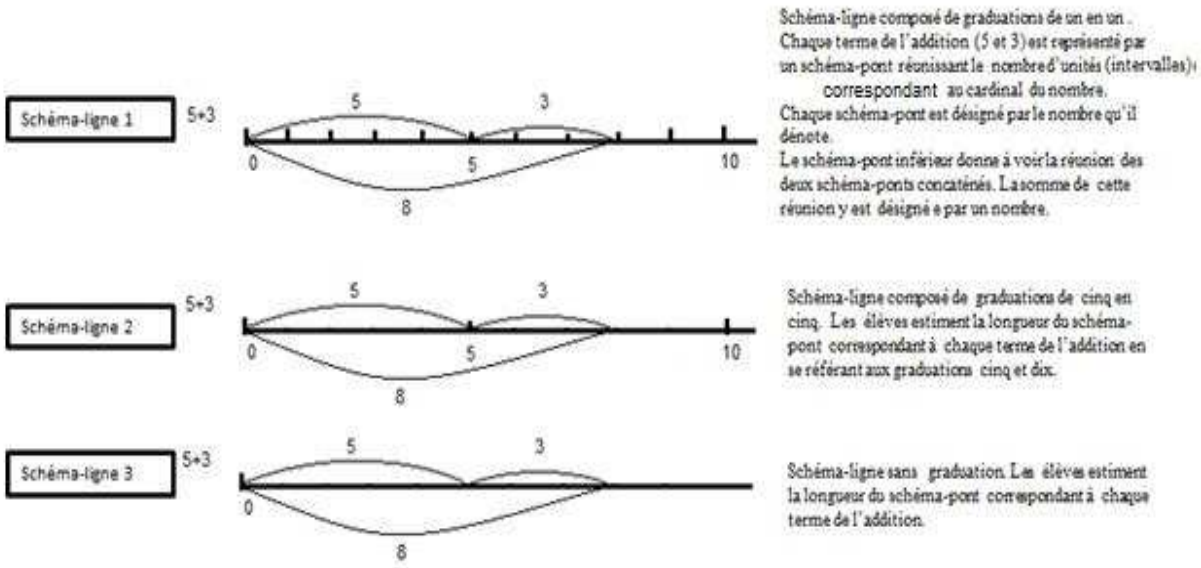


Figure 5: évolution du schéma-ligne au fil de l'année

Pour le schéma-ligne 1 (cf. Figure 5) les élèves peuvent utiliser différentes procédures pour représenter une addition à deux termes. Ils peuvent compter les graduations ou les intervalles de un en un ou prendre comme repères les graduations 5 et 10.

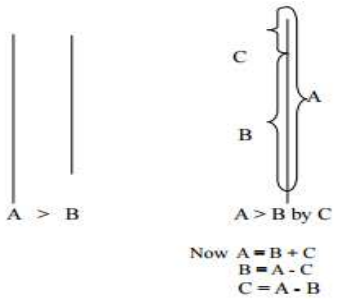
Pour le schéma-ligne 2, les élèves peuvent représenter le second terme de l'addition, en se représentant mentalement les graduations intermédiaires (de un en un) ou en estimant la longueur du nombre 3 (juste après le milieu du segment [5, 10]).

Pour le schéma-ligne 3, les élèves peuvent tracer le premier schéma-pont en proposant une longueur plus ou moins aléatoire. L'important reste que le second schéma-pont soit proportionnel au premier (que le 3 ne soit pas plus long que le 5, ou beaucoup plus petit).

L'usage de la ligne numérique amène les élèves à discerner dans la résolution d'un problème les parties d'un tout et que le tout est plus grand que chaque partie (Schmittau, 2005).

Dans l'exemple présenté ci-dessus, la représentation d'une addition sur le schéma-ligne montre que le tout est bien le 8 et que les parties sont le 5 et le 3, le 3 et le 5, ils sont contenus dans le 8. Il donne donc à voir la structure interne du nombre (comme décomposition). Les élèves peuvent donc voir et analyser les relations entre les nombres.

Il est à noter que dans la progression ACE, ce système de représentation n'est travaillé qu'en relation avec des valeurs numériques. Dans le curriculum proposé par Davydov (1975), celui-ci est codé par des lettres, dans une conception algébrique (cf. Photogramme 5).



Photogramme 5 : représentation d'un problème de recherche d'égalité entre deux volumes (Schmittau, 2005, p. 19)

L'exemple que nous présente Schmittau (Ibid.) ici est celui de la recherche d'une égalité entre deux volumes représentés par les deux segments de droite. Les élèves déterminent que si le volume A est plus grand que le volume B alors A = B + C où C est la différence entre A et B. La ligne numérique vient ici modéliser la situation proposée, les lettres dénotant les quantités (Schmittau & Morris, 2004). Nous observons que ce travail schématique montre le rapport des grandeurs entre elles d'où découle une première écriture algébrique.

Dans le cadre d'ACE, l'usage du schéma-ligne est directement lié à une situation où le nombre désigne une mesure de grandeur. Il permet aussi de comparer deux longueurs comme nous montre l'exemple ci-dessous (cf. Figure 6).

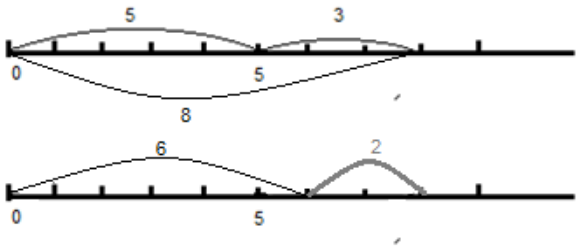


Figure 6: comparaison entre 5 + 3 et 6

Nous voyons ici le segment du premier schéma-ligne représentant la somme de « 5 + 3 » est plus grand/long que celui du second schéma-ligne (6). La différence entre les deux est représentée par « l'écart » entre l'extrémité des deux segments (schéma-pont grisé).

De la première ligne numérique découle une écriture pré-algébrique : 5 + 3 = 8 ; 8 - 3 = 5 et 8 - 5 = 3.

Ce système de représentation propose une atténuation de la part de concret, en limitant les ressemblances avec les représentations matérielles (comme le train-cubes) et augmente la part d'abstraction avec l'introduction des nombres écrits qui restent en lien avec ce qu'ils dénotent Lors de la représentation d'une écriture additive à deux termes, le schéma-ligne peut devenir un modèle du concept de l'addition en mettant en évidence par exemple la somme de deux

nombres, c'est-à-dire le nombre d'éléments d'un ensemble A et d'un ensemble B, A et B étant disjoints. Il montre aussi l'aspect ordinal de l'addition c'est-à-dire que la somme de « A + B » est égale au nombre atteint en comptant B après A.

Le schéma-boîte

Le schéma-boîte est un système sémiotique de représentation analogique qui donne à voir la réunion de deux nombres comme nous montre l'exemple ci-dessous (cf. Figure 7).

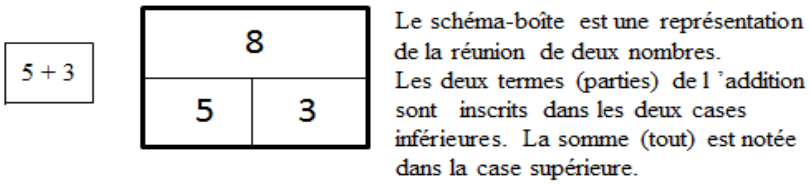


Figure 7 : Représentation du schéma-boîte

Les deux termes de l'addition, le 5 et le 3, sont notés dans les deux cases inférieures, la somme est écrite dans la case supérieure. L'organisation spatiale du schéma-boîte donne donc à voir que le nombre 8 est composé de deux nombres, le 5 et le 3.

Le schéma-boîte est une représentation sémiotique où les éléments sont de moins en moins reliés au référent. Ainsi, le nombre en tant que symbole abstrait n'est plus lié directement à ce qu'il dénote, un ensemble d'éléments finis comme cela est le cas pour le schéma-train ou le train-nombres. Néanmoins, il montre les relations des nombres entre eux, la relation de réunion entre deux nombres. En effet, son organisation spatiale (une case supérieure englobant les deux cases inférieures) donne à voir le tout et les parties. Il permet de développer une approche pré-algébrique notamment avec la perception du principe inverse (Verschaffel, Bryant & Torbeyns, 2012), qui permet, par exemple, aux élèves de « déduire » de 5 + 3 = 8, à la fois 8 - 5 = 3 et 8 - 3 = 5.

Cette représentation recèle une part d'abstraction plus importante que les représentations précédentes dans la mesure où les opérations mathématiques se font directement sur les nombres, les manipulations se faisant sur les symboles et non plus sur des grandeurs. Cette modélisation se détache d'une description plus concrète (par exemple, le nombre 5 n'est pas décrit par le biais d'un schéma-pont de cinq intervalles mais comme symbole abstrait).

1.5.3. L'écriture symbolique mathématique

Nous introduisons une dernière catégorisation qui relève spécifiquement de l'abstrait, l'écriture symbolique mathématique. Celle-ci est arbitrairement liée au référent, à ce qu'elle dénote. Cette représentation peut être difficile à appréhender puisqu'elle ne donne pas à voir directement les relations des nombres entre eux. Ces relations sont médiées par des signes mathématiques tels que « =, +, -… ». Il est donc nécessaire de donner du sens à ces signes en l'absence de référent (Brousseau, 1986).

Ces représentations symboliques abstraites ne renvoient donc plus vers un contexte particulier, vers une expérience effective comme cela peut être le cas dans les représentations sous forme de schéma-train, train-cubes par exemple. L'avantage de celles-ci est leur portabilité et leur généralisation dans des contextes différents (Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014).

Mais la question est celle du déchiffrement de ce registre formel et combinatoire par les élèves. En effet, les élèves ne se représentent pas nécessairement la spécificité du signe en fonction de la place qu'il occupe dans le texte. Par exemple, on ne peut écrire « + 2 + 5 = 7 » car dans un texte mathématique, le signe crée deux places vides en amont et en aval (à gauche et à droite du signe) potentiellement occupé par un nombre déterminé (Serfati, 2005).

Nous noterons que l'écriture mathématique que nous considérons ici comme une représentation abstraite ne reflète pas la vision de Davydov (1975).

1.6. Synthèse des représentations

L'enseignement des mathématiques au début de la scolarité obligatoire se centre sur la compréhension des nombres entiers positifs, sur leurs propriétés et les relations qui les lient. Pour cela, le domaine « Situations » introduit différents systèmes de représentation présentés ci-dessus. Dans ce dernier paragraphe, nous mettrons en lien les représentations présentes dans le domaine « Situations » et les différents travaux invoqués dans cette section sur les représentations.

Dans un premier temps, il nous semble intéressant de considérer ces représentations comme des modèles qui autorisent la construction d'un rapport spécifique au concret et à l'abstrait. A partir d'un nombre oral ou écrit, les élèves font l'expérience, dans des situations déterminées, de ce passage du concret à l'abstrait. En effet, les nombres et les signes mathématiques vus

comme des symboles abstraits (sans existence tangible) sont mis en correspondance avec d'autres systèmes de représentation plus concrets, voire matériels comme les cubes, les mains, le schéma-ligne[44]. Ces représentations viennent modéliser certaines particularités du nombre comme mesure d'une grandeur. Elles décrivent plus concrètement les symboles mathématiques en proposant un rapport spécifique à la référence dans la dénotation (par exemple un schéma-ligne composé de deux schémas-ponts concaténés de 5 et de 3 dénote le nombre 8). Ces modèles donnent donc à voir différemment une même réalité (le nombre). La correspondance entre les différentes représentations peut être vue comme une traduction de signes à l'aide d'autres signes, au sein d'un autre système (Le Hénaff, 2016), comme un entrelacement des « voir comme[45] » dans des jeux de langage différents (Wittgenstein, 2004 ; Sensevy et al. 2008). Ces « voir-comme » sont issus de différentes formes de modélisation du nombre. Cette "traduction de signes" vise la construction d'un réseau de représentations où chaque représentation pourrait être mise en correspondance avec une autre, dans un jeu d'aller et retour entre le concret et l'abstrait, entre le particulier et le général. Ce processus de représentation amène donc à produire des liens entre chaque catégorie de représentation et au sein d'une même catégorie. Ces liens peuvent être définis comme une traduction entre chaque système de représentation[46] – et non pas par une recherche de ressemblances ou de différences entre représentations. Ainsi, l'abstrait, l'écriture symbolique mathématique comme l'écriture additive peut être traduite par un schéma-train qui donne à voir la réunion de sous-collections et l'aspect ordinal de l'addition. Le concret matériel comme analogique donne à voir une même abstraction.

Ce processus de traduction peut, de même, être effectué entre les différentes représentations du concret vers l'abstrait, ou de l'abstrait vers le concret avec des allers-retours possibles entre les deux. Ainsi, « une catégorie A est plus abstraite qu'une catégorie B si B est une sous-catégorie de A, c'est-à-dire si l'appartenance d'une entité B entraîne son appartenance à A (…) l'abstraction est définie par une relation d'inclusion entre les exemplaires des catégories concernées » (Hofstadter & Sander 2013, p. 234). Cette abstraction généralisante (Ibid.) peut être pensée dans le cadre des systèmes de représentation présents dans la progression ACE. En effet, l'écriture mathématique en tant que représentation abstraite

[44] Ces représentations peuvent aisément représenter quelque chose d'autre, dans des contextes différents.

[45] On peut dire que les systèmes de représentation donnent à voir et à interpréter les nombres et leurs relations de manières différentes.

[46] Nous reprenons ici une citation de Duhem (1997) pour illustrer l'idée de traduction « un fait pratique ne se traduit pas par un fait théorique unique », et « une infinité de faits théoriques peuvent être pris pour traduction d'un même fait pratique » (Ibid. p. 201)

(symboles représentant des concepts et des idées mathématiques) renvoie à différentes représentations du nombre. Le nombre peut être vu comme mesure d'une grandeur "nombre d'entités" (doigts, cubes, intervalles sur un schéma-ligne) mais aussi comme une mesure de longueur (comparaison de deux longueurs avec le train-nombre, le schéma-ligne). Ces représentations donnent à voir les propriétés des structures additives (commutativité, élément neutre, associativité) et les relations qui relient les nombres entre eux (le schéma-boîte) dans une vision pré-algébrique.

Mais comment ces systèmes de représentation s'inscrivent-ils dans la progression ACE et particulièrement dans le domaine « Situations » ? Jouent-ils un rôle dans la construction d'une continuité didactique dans l'expérience des élèves ? Quel type de jeu représentationnel est mis en place dans le texte curriculaire mais aussi dans les séances mises en œuvre par les professeurs ?

L'ensemble des questions soulevées dans les deux premiers chapitres (présentation du contexte et étude non exhaustive de la continuité didactique et des systèmes de représentation) constitue les éléments centraux qui motivent notre réflexion.

Les premières questions que nous nous posons sont liées à la conception du domaine « Situations » dont nous avons dit qu'elle se déroulait au sein d'une ingénierie didactique avec une coopération entre l'équipe de recherche et les professeurs des classes du groupe expérimental.

Ainsi, dans le cadre de cette ingénierie, comment s'est construit le dialogue intra et inter sphères ? A-t-il conduit des prises de décisions didactiques permettant l'amélioration de la continuité de l'expérience des élèves ? Que produisent ces prises de décisions dans la (re)construction du curriculum ? Quels places et rôles occupent les systèmes de représentation dans la construction cette continuité de l'expérience didactique des élèves ? Comment se construit l'articulation entre concret et abstrait au sein du jeu représentationnel ?

Les secondes questions sont directement liées à l'implémentation de ce curriculum dans les classes. En effet, comment les professeurs se sont-ils saisis des textes curriculaires ? Les mises en œuvre dans les classes autorisent-t-elles l'expérience mathématique des élèves ? Comment les systèmes de représentation sont-ils travaillés, notamment à travers les liens entre concret et abstrait ?

Ce premier questionnement sera précisé à la lumière de notre cadre théorique au chapitre suivant.

CHAPITRE 3 : outils théoriques

Ce troisième chapitre présente les outils théoriques que nous mobiliserons pour étudier trois catégories de données. La première catégorie relève des transactions intra et inter-sphères observées au sein d'une ingénierie didactique coopérative. La seconde se réfère aux textes curriculaires produits au sein de cette ingénierie. La dernière catégorie de données renvoie aux séances mises en œuvre par une professeure d'une classe d'étude (membre de l'équipe de recherche) que nous avons suivie sur une année scolaire.

Notre travail se situe dans le cadre général du paradigme de l'action conjointe (Mead, 2006 ; Blumer, 2004 ; Tomasello, 2008) et plus spécifiquement au sein de la théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD), (Sensevy, 2011a ; Sensevy, Gruson & Forest, 2015, Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat, & Perrot, 2005 ; Gruson, Forest & Loquet, 2012 ; Sensevy & Mercier, 2007) qui s'inscrit en filiation avec les travaux en Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2016) et en Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). La TACD s'est développée autour des études de l'action professorale (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000) et de la démarche comparatiste (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002).

Mais pourquoi l'action conjointe ? Pour Mead (2006), un acte social est un acte « dont l'objet est distribué, un acte dans lequel les conduites d'un participant – ses attitudes, ses gestes, ses expressions et ses postures corporelles – servent de stimuli à ses partenaires pour qu'ils accomplissent leur propre part dans l'acte social » (Céfaï & Quéré, in Mead, 2006, p. 57). L'acte social nécessite donc la prise en compte de l'action de l'autre dans une forme de socialité foncière de l'action humaine (Sensevy, 2011a ; Sensevy, 2015). En effet, pour Blumer (2004) et Mead (2006), l'acte individuel est lié à un « processus continu de reconnaissance des formes » (ongoing patterning). Pour comprendre l'action, il est donc nécessaire de « comprendre l'ajustement mutuel et la coordination inhérente à l'action conjointe (…) en tant que perception de signaux (…) émis par autrui qui peuvent former mon action, et émission par moi-même de signaux en retour : un processus de sémiose, de sémiose d'autrui qui énacte l'ajustement mutuel » (Sensevy, 2011a, p. 53). Cette action conjointe devient didactique dans la théorie de l'action conjointe en didactique.

Nous nous intéresserons à trois types d'action conjointe. Le premier concerne les transactions entre professeurs et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique coopérative. La seconde

action conjointe se caractérise non pas sur une action conjointe effective mais pensée en tant que telle lors de l'écriture des textes curriculaires (Professeur/Elèves). La troisième porte sur la relation entre une professeure d'une classe d'étude (P), ses élèves. Ces actions conjointes sont étudiées à partir de certains objets de savoir travaillés dans le domaine « Situations ». L'action didactique se tisse donc dans une relation ternaire entre savoir et deux instances (Chercheur/Professeur et Professeur/Elèves).

1. Ingénierie didactique coopérative : postulats théoriques

L'ingénierie didactique est apparue dans les années 80 en didactique des mathématiques pour répondre à deux questions : comment prendre en compte la complexité de la classe dans les méthodologies de recherche et comment penser les relations entre recherche et action sur un système d'enseignement ? Son objectif est la « mise à l'épreuve des constructions théoriques élaborées dans les recherches, par l'engagement de ces constructions dans un mécanisme de production » (Artigue, 2011, p. 246). Sa méthodologie se caractérise par un schéma expérimental basé sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse des séquences d'enseignement (Ibid.). Deux types d'ingénierie peuvent se côtoyer et se compléter :

- une macro-ingénierie avec un mode de validation « externe » qui se base sur la comparaison des performances d'un groupe expérimental et témoin. La recherche ACE se déploie, pour certains de ses aspects, au sein d'une telle méthodologie dans un dispositif quasi-expérimental avec la comparaison d'un pré et posttest entre un groupe expérimental et un groupe témoin[47] ;
- une micro-ingénierie dont la validation est interne avec confrontation des analyses a priori et a posteriori. (Artigue, 1988).

Cependant, le domaine « Situations » s'est élaboré au sein non pas d'une ingénierie didactique classique comme cité ci-dessus mais dans le cadre d'une ingénierie didactique coopérative qui organise le travail professeurs-chercheurs. Nous exposerons quelques éléments épistémologiques et théoriques que cette notion sous-entend.

L'ingénierie didactique coopérative se construit en opposition au dualisme entre chercheurs et professeurs existant souvent en Sciences de l'Education. Dans une telle conception, les

[47] L'originalité de la recherche ACE-ArithmEcole au sein des ingénieries didactiques tient au fait qu'aucune recherche à la française ne s'est accompli, il nous semble, dans un paradigme expérimental pré et post-test.

professeurs sont cantonnés dans une relation pratique à leur travail et les chercheurs à un positionnement théorique (Sensevy, Forest, Quilio & Morales, 2013). L'ingénierie coopérative récuse ce dualisme entre moyen et fins (Dewey, 2003) entre les moyens c'est-à-dire l'action/la pratique et les fins, la conception/la théorie (Sensevy, 2011a).

Ainsi, une ingénierie coopérative didactique peut se caractériser comme une activité conjointe entre professeurs et chercheurs autour d'un projet commun de conception et d'analyse de séquences d'enseignement/apprentissage. Cette enquête commune se centre sur un savoir que l'on veut enseigner et sur la production de dispositifs et de gestes d'enseignement à travers des productions d'hypothèses de travail. Dans le cadre de l'ingénierie étudiée, l'enquête se concentre autour de l'élaboration d'un ensemble de séances en mathématiques autour de principes mathématiques[48] précités dans la partie contexte (cf. Chapitre 1) de cet écrit. Les séances produites sont pensées conjointement, mise en œuvre, analyser et repenser puis ré-implémenter, analyser dans un processus, un mouvement itératif (Sensevy, Blocher, Joffredo-Le Brun & Morales, 2013).

L'ingénierie didactique coopérative repose sur des postulats théoriques.

Ainsi, le travail coopératif s'élabore à travers « la détermination commune de fins communes » (Sensevy, 2011a, p. 678). Cette détermination se construit par une référence commune du point de vue de la pratique (les professeurs) et du point de vue analytique, théorique (les chercheurs), par un arrière-plan partagé.

Dans le cadre de l'ingénierie sur laquelle se base notre étude, nous postulons que l'arrière-plan commun des membres de ce collectif prend appui sur les principes mathématiques sous-jacents au domaine « situations » mais aussi sur la nécessité de travailler conjointement pour améliorer le curriculum. Ce dispositif nécessite la recherche de la construction d'une symétrie entre professeurs et chercheurs sans effacer les spécificités, les « savoirs que » (Ryle, 1949, 2005) sur lesquels la pratique doit s'appuyer et les « savoirs comment » (Ibid.), le sens pratique, le sens du jeu de chacun des membres du collectif. La construction de cette symétrie s'exprime à travers le principe « d'explicitation partagée » (Sensevy, 2011a, p. 680) qui engage chaque membre du collectif dans le jeu d'offres et de demandes de raisons (Brandom,

---

[48] Suite de situations emboîtées se centrant sur un travail systématique de composition/décomposition, de comparaison pour aborder les structures additives, soustractives et multiplicatives.

Développement d'un rapport pré-algébrique notamment le principe inverse

Travail systématique sur les signes mathématiques, de type « paradigmatique ». (Brousseau, 1986)

Développement de systèmes de représentation du nombre mis en correspondance comme moyen de résolution et de preuve.

2009) c'est-à-dire, notamment, par des justifications épistémologiques, épistémiques, et didactiques. Nous conjecturons que ce travail coopératif peut entraîner à certains moments des *zones d'indiscernabilité praxéologique locale* (Sensevy, 2013) c'est-à-dire des temps où les membres de l'ingénierie changent de place et de rôle de manière indistincte.

Le dialogue d'ingénierie construit autour d'une référence commune pourrait être modélisé à partir des concepts développés en Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy, Joffredo-Le Brun, Morellato, Quilio & Vigot, 2015) notamment à travers le triplet des genèses et les notions de contrat et de milieu que nous définirons dans ce chapitre.

Nous nous focaliserons maintenant sur les concepts que nous mobiliserons lors de l'analyse de notre corpus.

2. Modélisation sous forme de jeux

La théorie de l'action conjointe modélise les pratiques de classes sous forme de jeux (Sensevy, 2012a ; Sensevy, 2011a ; Gruson, Loquet & Forest, 2012). Son objectif est d'identifier la logique d'action et le sens de l'action des individus, leurs stratégies au sein d'une activité didactique. Ainsi, voir l'activité humaine comme un jeu permet à la fois de « rendre compte des intentions des acteurs et les reconnaître pour ce qu'elles sont en tant qu'émanations de structures qui transcendent pour une grande part les « choix subjectifs » des individus » (Sensevy, 2012b, p. 367). Le modèle du jeu tente donc d'identifier la logique de l'action des individus au sein d'un environnement, d'un contexte qui donne sens à leur action. Ce modèle permet de répondre aux questions « à quel jeu les individus jouent-ils ? » (Sensevy, 2012a).

Nous reprenons une citation de Sensevy (2013) qui met en évidence l'intérêt de la modélisation sous forme de jeu dans la théorie de l'action conjointe en didactique.

> « La théorie de l'action conjointe en didactique va donc se centrer sur le contenu des interactions, c'est-à-dire sur le jeu auquel les individus jouent, sur le but du jeu (sur ce qui constitue le gain dans ce jeu), et donc sur le réseau intentionnel dans lequel l'action se trouve prise. Elle va se centrer sur le contenu, parce qu'elle postule que la transmission des savoirs oriente l'action, et que le jeu auquel jouent les élèves et le professeur est précisément le jeu qui consiste à agir de manière conjointe pour que les élèves s'approprient les savoirs. La théorie identifie donc ainsi ce qu'elle considère comme la grammaire fondamentale de l'action didactique. Le modèle du jeu permet d'identifier cette grammaire, en tant que système de formes fondamentales d'organisation de la pratique » (Ibid., chapitre 29)

La notion de jeu, en tant que modèle de la pratique, peut être décrite par une structure tripartite comprenant les règles définitoires, les règles stratégiques et les stratégies (Sensevy, 2011a).

Ainsi, à la suite d'Hintikka (1994), Sensevy (2011a) définit ces trois entités pour décrire les jeux :

- les règles définitoires (ou constitutives) indiquent comment jouer au jeu. Elles correspondent aux règles d'un jeu conventionnel (Sensevy, 2012a). La transmission des règles définitoires du jeu didactique précise son enjeu et son gain, les élèves devant, pour jouer, savoir à quoi ils jouent ;

- les règles stratégiques qui peuvent être indépendantes du jeu effectivement joué dans les transactions didactiques. Elles explicitent comment bien jouer au jeu. Elles peuvent être transmises par un connaisseur (Ibid.) ;

- les stratégies correspondent, à la différence des règles stratégiques, à ce qui est effectivement joué dans le hic et nunc. Elles actualisent les règles stratégiques. « Les stratégies constituent pour le joueur la manière concrète d'agir dans une praxis déterminée, en révélant (plus ou moins) un certain sens du jeu » (Ibid., p. 112).

Nous prendrons comme exemple illustratif le jeu des annonces oral proposé dans le module 1 du domaine « Situations ». Les élèves comparent une annonce produite sur deux mains et la comparent avec un lancer de dé à six faces. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer. Les règles définitoires pourraient être ici « produire une annonce sur deux mains qui soit égale au résultat du lancer de dé ». Une règle stratégique peut être « produire une annonce sur deux mains inférieure à six pour avoir plus de chance de gagner ». Les élèves, en faisant l'expérience effective de ce jeu, vont mettre en place progressivement des stratégies telles que ne pas montrer plus de six doigts, utiliser le zéro (poing fermé) pour produire une annonce égale à un.

Précisons ici que la TACD modélise sous forme de jeu, non seulement les « jeux effectifs », comme ici avec le jeu des annonces, mais encore toute sorte d'activité didactique, même celles non spontanément considérées comme jeu.

2.1. Jeu d'apprentissage et jeu épistémique

Le jeu didactique, dans l'action conjointe, peut être découpé sous forme de jeux d'apprentissage. Ceux-ci modélisent certaines scènes définies par les modifications de

l'activité épistémique. Les changements de jeu sont liés à l'action épistémique (Sensevy, 2011a).

Ce jeu d'apprentissage se définit comme un jeu du professeur sur le jeu de l'élève (Sensevy, 2011a ; Gruson, Forest & Loquet, 2012) et, en « réponse », un jeu de l'élève sur le professeur.

Il se caractérise par deux descripteurs que sont le contrat et le milieu associés à un savoir déterminé.

> « la description fondamentale d'un jeu d'apprentissage donné consistera donc à décrire le (nouveau) milieu et le (nouveau) contrat instanciés par l'introduction d'un nouvel enjeu de savoir, et l'équilibre nouveau que la réorganisation de ces deux systèmes impose au système didactique » (Sensevy, 2011a, p. 137).

Le jeu d'apprentissage change en fonction de l'action du professeur, en fonction de l'évolution du contrat didactique et/ou de milieu. Il y a donc « évolution des relations entre deux systèmes stratégiques, dans le processus d'assimilation et d'accommodation du contrat par le milieu » (Ibid. p. 142), dans un processus *d'équilibration didactique*.

Le jeu d'apprentissage en tant que jeu du professeur sur le jeu de l'élève dans le savoir, et jeu de l'élève sur celui du professeur renvoie à une pratique de savoir que nous modéliserons par un jeu épistémique. Celui-ci peut être émergent lorsqu'on l'infère à partir d'une activité didactique ou source lorsqu'il renvoie directement à une pratique de savoir transposée (Chevallard, 1991a), qu'on peut considérer comme une pratique de référence (Martinand, 1989).

Reprenons l'exemple illustratif du module 1. Les élèves produisent une annonce sur leurs deux mains (par exemple deux doigts sur la main droite et un doigt sur la main gauche) et la comparent à un lancer de dé à six faces (le résultat du lancer est de « 1 »). L'annonce est donc perdante car elle n'est pas égale au lancer. Pour valider le résultat de cette comparaison, les élèves construisent deux trains-cubes, celui de l'annonce (par exemple deux cubes rouges et un bleu) et celui du lancer (par exemple un cube vert) qu'ils comparent. Un premier jeu d'apprentissage peut être défini par « faire produire une décomposition d'un nombre sous forme de deux sous-collections et la comparer à un nombre ≤ 6 ». Le second jeu d'apprentissage peut être « faire traduire une décomposition additive et un nombre sous forme de deux sous-collections par un train-cubes et les comparer ». Il y a ici changement de jeu puisqu'il y a modification du contrat didactique et du milieu. Mais précisons ci-dessous la définition du contrat didactique et du milieu.

2.1.1. Le contrat didactique

Le contrat didactique a été introduit en didactique des mathématiques dans la Théorie des Situations Didactiques au début des années 80. Brousseau le définit comme « l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître » (Brousseau, 1998, p. 32). Le contrat didactique est la façon dont le professeur régule l'activité didactique (Brousseau, 1986). Il est « l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la situation didactique impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose à propos de la connaissance en cause » (Brousseau, 1998b, p. 6).

Ce concept de contrat didactique a été ensuite retravaillé dans le cadre de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD). Ainsi, pour Sensevy

> « étudier le contrat didactique propre à un système de transactions, c'est donc mettre au jour cette dialectique particulière entre institution (les habitudes instituées qui me permettent d'assimiler la réalité autour de moi) et mise en situation (ce qui correspond à un déséquilibre dans cette réalité, à un « problème », et qui nécessite l'accommodation du contrat) (Sensevy, 2011a, p. 99).

Cette « mise en situation » est à la fois liée à la notion de « situation » au sens de Brousseau (Brousseau, 1998) et à celle de « situation » au sens de Dewey (Dewey, 1967).

Le contrat didactique est donc un système de capacités « constitué par un système de savoir-faire, de savoir comment » (Sensevy, 2011a, p.102) qui autorise une action dans une situation particulière. En d'autres mots,

> « le contrat didactique propre à un savoir donné, dans un jeu didactique spécifique à ce savoir, constitue le système stratégique disponible au moyen duquel le professeur et les élèves vont jouer ce jeu » (Ibid. p.103).

Ce contrat va donner aux élèves des possibilités d'agir, une puissance d'agir dans de nouvelles situations. En effet, un savoir est une puissance d'agir qui permet d'exercer des capacités (Sensevy & Mercier, 2007). Ce système de capacité peut être considéré comme un arrière-plan (Searle, 1998 ; Wittgenstein, 2006) qui est la source de l'action future. Le savoir est donc un système de capacités qui renvoie à la notion de skill, de savoir-faire que G. Ryle (1949, 2005) décompose en knowing that (savoir-que) et en knowing how (savoir-comment) (Sensevy, 2011a) que nous avons déjà mise en évidence dans de la première section de ce

chapitre concernant l'ingénierie didactique (cf. Ingénierie didactique coopérative : postulats théoriques).

« Le contrat didactique pourra ainsi se concevoir, à travers la règle de décodage qu'il représente, comme un système de règles d'usages liées au problème enjeu de l'activité » (Sensevy, 2011a, p. 100). Le contrat didactique naît ainsi, au sein de l'action conjointe, dans les signes constitués dans des actions répétées au sein d'une suite de situations didactiques. De plus, pour une théorie renouvelée et étendue du contrat, le contrat est un déjà-là, constitué en situation didactique, pour une part et pour l'essentiel, par l'action conjointe antérieure. Ce déjà-là peut être ancien et/ou récent. En effet, à partir d'un système stratégique disponible qui « renvoie au contrat didactique, aux significations communes élaborées au sein de l'action conjointe passée et nécessaires à l'action conjointe future » (Sensevy, 2011a, p. 110), l'élève aborde un problème qui échappe, au moins en partie, à ce système stratégique. Nous reprendrons dans le paragraphe suivant ce concept élargi du contrat didactique.

Dans notre travail, pour étudier la continuité didactique, nous mobiliserons la notion de capacité comme système stratégique avec lequel les élèves et le professeur abordent un nouveau savoir. En effet, le contrat didactique, vu comme un système capacitaire disponible sera un outil pour étudier l'avancée du temps didactique « institutionnel » (décrit dans les textes curriculaires) et l'avancée du temps didactique effectif dans les transactions en classe et la continuité de l'expérience des élèves dans l'action conjointe. Nous les nommerons capacités-cibles lorsqu'elles ont été essentialisées et scénarisées par les chercheurs dans les textes curriculaires[49].

Revenons à notre exemple illustratif. Lors du module 1, les élèves produisent et comparent une annonce à deux mains avec un lancer de dé à six faces. Puis, ils valident le résultat de cette comparaison par la construction de deux trains-cubes, celui de l'annonce et du lancer. Lors du module 2, l'annonce n'est plus produite sur deux mains mais par écrit (l'annonce « deux doigts sur la main droite et un doigt sur la main gauche » s'écrit « 2 + 1 »). Pour comparer cette écriture additive à deux termes avec un lancer de dé à six faces, les élèves font appel à des capacités construites dans l'action conjointe antérieure c'est-à-dire à des connaissances déjà-là. Par exemple, pour valider le résultat de cette comparaison, ils mobilisent et réinvestissent la capacité de traduction d'une annonce à deux mains par un train-cubes pour traduire une écriture additive par le train-cubes. En effet, les élèves savent qu'un

[49] Nous nous inspirons de la notion de jeu épistémique cible modélisée par Gruson, Forest, Loquet (2012),

nombre mesure une grandeur qui peut être représentée par une collection d'objet (ici des cubes).

2.1.2. Le milieu

Brousseau définit le milieu comme « tout ce qui agit sur l'élève et / ou ce sur quoi l'élève agit » (Brousseau, 1998b, p. 3). L'Élève « agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation (…) en fonction de son répertoire de connaissances » (Ibid.) en les ajustant au mieux aux contraintes d'une situation donnée.

Le milieu propose donc un ensemble d'éléments, un état du monde qui offre aux élèves des possibilités d'enquête.

Dans notre travail, nous utiliserons la notion de milieu développée dans le cadre de la TACD qui est défini comme le substrat de l'action, un « ensemble des possibles et des nécessaires offerts par une situation donnée » (Sensevy, 2002, p. 76), possibles et nécessaires qui apparaissent peu à peu dans l'enquête. C'est la structure épistémique du problème en jeu, ce qui doit être connu (Sensevy & Tiberghien, 2015 ; Sensevy, Gruson, & Forest, 2015). Le milieu est constitué par ce à quoi l'élève est confronté, un état du monde problématique qui contient des affordances, des saillances dont l'élève va faire usage pour jouer et activer un système stratégique (un système de capacités) pour gagner au jeu (Sensevy, 2011a).

Sensevy (2011a) propose plusieurs descriptions possibles du milieu :

- description qui se base sur la matérialité sémiotique en tant que situation ;
- description à partir des stratégies qu'il permet d'instancier ;
- description à partir du contrat didactique, en tant que système stratégique disponible, qui rend ou non possible la production des stratégies liées au milieu.

Pour qu'il y ait apprentissage, une confrontation à un milieu est nécessaire, à un milieu-problème que l'élève doit résoudre en mettant en relation les différents éléments du milieu. Le milieu est donc constitué du potentiel d'action disponible des élèves et d'un potentiel d'action virtuel qui va être élaboré dans l'apprentissage au sein de l'action conjointe.

Nous reprenons ci-dessous une citation de Dewey (1916/2011) déjà énoncée dans notre chapitre 2 (cf. Chapitre 2, Problématique).

> « quand nous faisons une expérience d'une chose, nous agissons sur elle, nous faisons quelque chose avec elle ; puis nous en subissons les conséquences. Nous faisons quelque chose à la chose

> qui, à son tour, nous fait ensuite quelque chose (…). La fécondité, la valeur de l'expérience se mesure à la manière dont les deux phases sont liées » (Ibid. p. 223).

Nous pouvons rapprocher ces propos du concept de milieu développé en TACD. En effet, dans une situation didactique, nous agissons dans un milieu pour mettre en relation les différents éléments symboliques, pour former un tout cohérent. Nous agissons donc dans le milieu mais nous en subissons aussi les conséquences puisque nous incorporons ces formes symboliques. Ainsi, Sensevy (2015) énonce que

> « l'action conjointe (…) consiste à apprendre d'autrui à agir dans un milieu symbolique, à incorporer grâce à lui les formes symboliques qui organisent le social, pour ainsi se rendre capable de jouer le jeu social (des jeux sociaux) » (Ibid.).

Travailler un problème dans un milieu, mettre en lien les différents éléments du milieu et donc incorporer ces formes symboliques amènent à construire des connaissances qui dans la situation didactique future seront modélisées par le contrat didactique (le connu). Le milieu offre donc des possibilités d'enquête (Dewey, 1967) grâce aux potentialités d'action qu'il déploie. L'enquête, selon Dewey (1967) est ainsi une transformation contrôlée d'une situation qui était en déséquilibre. Il y a unification de l'enquête lorsque de nouvelles données (issue de l'enquête) se combinent avec des données antérieures. Il y a donc continuité dans les éléments constituant l'enquête. Ainsi, lorsque les élèves sont confrontés à un état du monde en déséquilibre, ils usent du système stratégique disponible qui, à termes, amène à l'assimilation/accommodation du milieu, c'est-à-dire à la construction de nouvelles connaissances.

Les élèves, dans des situations didactiques, font donc des expériences au cours desquelles ils construisent des connaissances, au cours d'une enquête dans le milieu. Ces connaissances vont permettre dans un second temps de se confronter à d'autres milieux, dans d'autres expériences.

2.2. Dialectique contrat/milieu et équilibration didactique.

Nous considérons dans notre travail que la dialectique contrat/milieu fournit une description de l'activité de l'élève. En effet, lorsque l'élève est confronté à un milieu, défini comme la structure épistémique du problème à connaître (Sensevy & Tiberghien 2015 ; Sensevy, Gruson & Forest, 2015), il active des connaissances construites dans l'action conjointe

antérieure, investies pour ce milieu. Le contrat didactique seul « ne permet pas de traiter [le problème], même s'il est une condition nécessaire de ce traitement » (Ibid.). Ainsi, dans le jeu didactique, l'objectif est de passer du système stratégique disponible au système stratégique que le milieu doit concrétiser. Il est donc nécessaire de se référer à une connaissance ancienne pour penser le nouveau construit[50] et réciproquement (Sensevy, Gruson & Forest, 2015)

Les connaissances construites dans les situations antérieures, les connaissances déjà-là des élèves, sont donc en relation avec ce que le professeur veut faire apprendre aux élèves, le nouvel objet de savoir. Cette relation se construit au sein d'une situation didactique spécifique. Pour qu'il y ait apprentissage, il est nécessaire que l'élève, à partir de ce qu'il connaît (le contrat) puisse acquérir de nouvelles capacités lorsqu'il est confronté à un certain milieu (à connaître) (Sensevy & Vigot, 2016). Les savoirs ou les systèmes de capacités vont donc permettre aux élèves de se confronter à un nouveau milieu et donc de continuer l'enquête didactique. Le savoir devient donc instrumental (Dewey, 1915/2014).

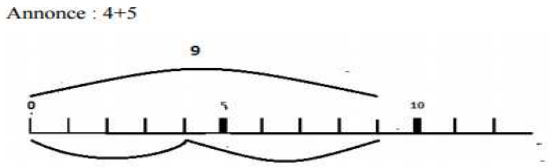
Le processus *d'équilibration didactique*, qui aboutira à la production d'un savoir dans l'action conjointe, renvoie à la nécessité d'adéquation entre le contrat didactique et le milieu, « quelle que soit, par ailleurs, la distance entre le système stratégique déjà-là du contrat et le système stratégique virtuel du milieu, qu'il s'agit d'élaborer » (Sensevy, 2011c, p. 330). L'équilibration didactique c'est-à-dire la relation entre le milieu (symbolique) et le contrat didactique est au cœur de l'action didactique et est « radicalement déterminée par la forme d'éducation dans laquelle elle s'exprime » (Sensevy, 2015).

Reprenons notre exemple illustratif.

Lors du module 2, les élèves comparent deux écritures additives. Pour cela, ils doivent les représenter sur un double schéma-ligne (deux demi-droites graduée de un en un). Ils mettent en relation les différents éléments du milieu qui est ainsi offert, par exemple, en reliant chaque terme de l'écriture avec une portion de la demi-droite représentée par un nombre d'intervalles ou de graduations déterminés. Les élèves abordent ce milieu avec un système stratégique disponible (les connaissances déjà-là). Ainsi, ils ont à leur disposition des connaissances relatives à la grandeur que désigne un nombre (le nombre « d'entités »). Ils peuvent/savent ainsi représenter les termes de l'addition par un certain nombre d'intervalles. De même, comme les élèves savent qu'une addition est la réunion de deux grandeurs, ils représentent par

[50] "But one may consider them at the same time as complementary entities, in that it is impossible to think of a new knowledge to build without referring to the ancient knowledge on which the new one is grounded (and reciprocally) (Sensevy, Gruson & Forest, 2015, p. 391).

deux schémas-ponts concaténés les deux termes de l'addition comme le montre l'exemple ci-dessous.



Mais, au sein du jeu didactique, pour travailler conjointement avec les élèves la relation contrat-milieu, le professeur doit mettre en place certaines stratégies pour orienter l'action des élèves, dans son énonciation.

2.3. La dialectique réticence/expression

Quel rôle joue le professeur dans la gestion de cette dialectique contrat/milieu ? Comment les stratégies professorales permettent-elles d'orienter l'action des élèves pour qu'ils gagnent au jeu tout en laissant cependant l'élève jouer de son propre mouvement, en respectant la clause proprio motu ?

Un outil crucial à la disposition du professeur est celui de *l'énonciation*. En effet, le professeur peut retenir ce qu'il sait en le taisant/le cachant aux élèves (la réticence) ou produire des signes pour orienter l'action des élèves (l'expression). C'est la dialectique réticence/expression (Sensevy, Gruson & Forest, 2015 ; Sensevy & Quilio, 2002). Cette dialectique est un outil fondamental du jeu du professeur sur le jeu de l'élève. Ainsi, le professeur peut jouer de la relaxation et de la tension de la réticence didactique c'est-à-dire qu'il peut plus ou moins taire/cacher certains éléments aux élèves. Cependant, la réticence du professeur ne veut pas dire qu'il ne s'exprime pas. Il peut en effet, s'exprimer tout en restant réticent quant au savoir en jeu. Par exemple, si le professeur dit aux élèves « qu'est-ce que tu vas nous faire pour nous parler de l'annonce un plus quatre ? », il s'exprime tout en cachant ce qu'il sait, c'est-à-dire le « comment parler de cette annonce », plus précisément « comment traduire cette écriture additive par des systèmes de représentation ». Sur cet exemple d'énonciation, on perçoit bien la dialectique de la réticence et de l'expression, qui sont à la fois opposées et complémentaires. La réticence demande l'expression, l'expression construit la réticence.

La réticence/expression est constitutive de la gestion, par le professeur, de la relation contrat-milieu puisqu'elle va orienter l'action des élèves soit vers le milieu, c'est-à-dire vers ce qui

est à connaître ou vers le contrat, les connaissances déjà-là des élèves. Ainsi, la réticence (ou l'expression) est différentielle et peut concerner soit le contrat, soit le milieu.

Nous pouvons dire schématiquement que :

- la relaxation de la réticence didactique est souvent associée à une position topogénétique haute, elle oriente la relation didactique vers le contrat, par référence à ce qui est connu ;

- la tension de la réticence didactique est souvent associée à une position topogénétique basse, elle oriente la relation didactique vers le milieu, par référence à ce qui est à connaître.

3. Le triplet des genèses, descripteur de l'action conjointe

Le triplet des genèses se centre sur la construction du jeu par le professeur conjointement avec les élèves au sein des transactions didactiques. Ces notions tentent de décrire la dynamique d'élaboration des savoirs au sein de l'action conjointe (Sensevy, 2011a). Nous mobiliserons particulièrement ce triplet dans le cadre de l'analyse des séances de classe effectives.

3.1. La mésogénèse

La mésogénèse est la genèse du milieu (Chevallard, 1991 ; Sensevy, Mercier & Schubauer-Léoni, 2000). Cette catégorie met en évidence les modifications opérées dans les transactions sur le contenu « tel qu'il est formé et perçu par les transactants (…). La catégorie de la mésogénèse répond donc à l'élaboration d'un système de significations communes dans l'action conjointe » (Sensevy, 2011a, p. 147). Il y a mouvement mésogénétique lorsqu'est introduit un nouvel énoncé, un nouvel objet ou tout autre système sémiotique qui reconfigurent le milieu. La mésogénèse décrit donc un renouvellement du système didactique et décrit « les états successifs relativement stabilisés du milieu » (Sensevy, 2011a, p 148)

Dans notre travail de thèse nous étudierons à certains moments ce mouvement mésogénétique sur une échelle de temps long, sur plusieurs séances mais aussi sur une échelle plus micro lors de l'analyse d'épisode.

3.2. La chronogénèse

La chronogénèse correspond à l'avancée du temps didactique, du savoir sur l'axe du temps (Chevallard, 1991 ; Mercier & Chevallard, 1988 ; Sensevy, Mercier & Schubauer-Léoni, 2000). La dynamique chronogénétique se concrétise dans les transactions professeur-élèves lorsqu'un savoir nouveau vient remplacer l'ancien. Ce mouvement chronogénétique peut être identifié grâce aux changements de jeux d'apprentissage (Sensevy, 2011a).

Il apparaît donc que la chronogénèse et la mésogénèse sont entrelacées puisqu'un « énoncé mésogénétique paradigmatique est de la forme « le milieu est composé de telle(s) entité(s), qui signifient de telle ou telle manière pour tel élève » ; un énoncé chronogénétique est de la forme « pour telle raison, le temps didactique a avancé parce que tel élément a été introduit dans le milieu » (Ibid., p. 148).

Dans notre étude, ces outils seront mobilisés pour décrire l'avancée du temps didactique et mettre en évidence une certaine forme de continuité dans la progression proposée dans les textes curriculaires Ainsi, par exemple, nous étudierons les textes curriculaires à partir de leur modélisation sous forme de jeux d'apprentissage, ce qui impliquera l'usage des deux catégories susnommées.

3.3. La topogénèse

La topogénèse (Chevallard, 1991 ; Sensevy, Mercier & Schubauer-Léoni, 2000) cherche à décrire le partage des responsabilités au sein du savoir dans les transactions didactiques.

La catégorie de topogénèse incite ainsi à « décrire la force transactionnelle de l'action didactique, c'est-à-dire à évaluer à quel point elles reposent organiquement sur une activité épistémique partagée entre le professeur et l'élève, en différenciant bien l'existence d'une action de l'élève, de sa densité épistémique » (Sensevy, 2011a, p. 642). La dialectique réticence-expression peut être considéré comme une dialectique de la topogénèse puisqu'elle décrit comment le professeur oriente l'action des élèves en leur laissant adopter ou non une position topogénétique haute ou basse face au savoir en jeu. En d'autres mots, si le professeur laisse les élèves agir en première main en taisant les relations entre les éléments symboliques du milieu.

4. Les stratégies contrefactuelles

Dans notre étude, nous mettrons à l'épreuve la notion de stratégie contrefactuelle qui permet d'imaginer d'autres possibles à partir de la description de la pratique effective dans la classe qui nous suivons à l'aide de l'entrelacement de la dialectique contrat/milieu et réticence/expression (Sensevy & Vigot, 2016 ; Gruson, à paraître). Produire une stratégie contrefactuelle amène à explorer la pratique et notamment à « rendre compte de la manière dont, au sein des accomplissements pratiques, les humains produisent des intentions et des choix : des intentions et des choix, c'est-à-dire des stratégies » (Sensevy & Vigot, 2016). Ces stratégies peuvent être décrites dans un tableau comme ci-dessous.

Connu (contrat)		À connaître (milieu)
Stratégie CF 1	Stratégie CF 2	Stratégie CF 3, etc.
Description de la stratégie	Description de la stratégie	Description de la stratégie
Caractéristiques dialectiques : connu-à connaître/ réticence-expression (dynamique mésogénétique)	Caractéristiques dialectiques : connu-à connaître/ réticence-expression (dynamique mésogénétique)	Caractéristiques dialectiques : connu-à connaître/ réticence-expression (dynamique mésogénétique)
Dynamique topogénétique	Dynamique topogénétique	Dynamique topogénétique
Dynamique chronogénétique	Dynamique chronogénétique	Dynamique chronogénétique

Ces stratégies donneront à voir notamment comment l'équilibration didactique peut être modifié au sein des transactions en lien avec la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression.

5. Questions de recherche

Dans cette dernière section, nous reprendrons les questions initiales que nous avons avancées dans les deux chapitres précédents de manière synthétique.

Tout d'abord, c*omment s'organise sur un temps long l'ensemble de la progression du* domaine « Situations » ? Comment les professeurs du groupe expérimental (sphère 2) se sont-ils saisis de ces enjeux mathématiques et didactiques proposés au sein de ce domaine ?

Comme nous l'avons vu, la conception de ce domaine s'est déroulée dans le cadre d'une ingénierie coopérative didactique mais quels ont alors été les effets de cette coopération sur la conception même du curriculum ? A-t-elle conduit des prises de décisions didactiques *permettant l'amélioration de la continuité de l'expérience des élèves* ?

Comme l'explicite le chapitre 2 « Problématique », ce travail de thèse se centre en particulier sur un principe mathématique concernant le travail systématique sur les systèmes de représentation du nombre, leur rôle, leur place et leur maniement tout au long de la progression proposée. Les questions soulevées sont alors :

Quels ont été les effets de la coopération entre la sphère 1 et 2 sur la place des systèmes de représentation dans les textes des modules du domaine « Situations ».

Quels rôles ces systèmes jouent-ils dans la construction de la continuité didactique dans *l'expérience des élèves dans les textes de la progression mais aussi dans l'effec*tuation des séances proposées ?

Nous précisons maintenant nos questions à l'aulne de notre cadre théorique.

La textualisation des savoirs sur l'année scolaire donne sa forme au temps didactique, à l'avancée du savoir. Mais comment le texte des différents modules organise-t-*il l'avancée* des savoirs, leur continuité ? Cette textualisation des savoirs engendre-t-elle des conditions *d'apparition de certaines difficultés du processus d'enseignement/apprentissage* ? *L'étude du* mouvement chronogénétique des savoirs par la modélisation des textes sous forme de jeux *d'apprentissage* peut-elle permettre de comprendre les ruptures ou non de la continuité de *l'expérience des élèves* ? En effet, nous faisons l'hypothèse que c'est au cours des jeux d'apprentissage que se construisent des habitudes d'action, des systèmes capacitaires qui viennent nourrir les jeux d'apprentissages ultérieurs. Ces habitudes, ces capacités vont permettre aux élèves de modifier leurs actions en fonction des résultats des expériences antérieures (Dewey, 1916/2011).

L'usage des systèmes de représentation, l'aller-retour entre concret et abstrait dans un jeu représentationnel permet-il de construire une continuité didactique entre différents objets de *savoir (ici l'appréhension des structures additives et soustractives)* ?

Comment ces textes « figés » *dans l'écrit prennent*-ils une forme dynamique dans la mise en *œuvre dans une classe* ? Comment, *dans l'action conjointe*, se construit la continuité de *l'expérience des élève*s à travers la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression ? Comment se construit le familier, *c'est*-à-dire le système stratégique des élèves (le style de pensée), *dans l'action conjointe sur un temps long* ?

Pour répondre à ces questions, nous disposons de trois dispositifs de recueil et d'analyse de données que nous exposerons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4 : Outils méthodologiques

Dans notre travail, nous étudions la continuité de l'expérience des élèves à travers l'usage des systèmes de représentation. Cette étude prend sa source au sein d'une ingénierie didactique coopérative et du dialogue entre les différents membres de celle-ci. Pour apporter des éléments de réponses aux questions que nous nous posons, nous avons mis en place une méthodologie particulière s'articulant principalement autour de deux grandes orientations. La première résulte de l'hypothèse selon laquelle la création d'un collectif chercheurs/professeurs permettrait de produire une étude approfondie d'un système de ressources. Ce collectif, dans un processus itératif de mise en œuvre et de reconceptualisation, permettrait la construction d'une forme de continuité didactique dans la textualisation du savoir. La seconde orientation de notre travail est l'étude des séances de classes in situ. Il s'agit de donner à voir et à comprendre comment peuvent être interprétés les textes curriculaires par un professeur et d'étudier les effets de cette textualisation sur l'expérience des élèves. Pour cette étude, une méthodologie complexe est mise en place, qui combine le suivi d'une ingénierie coopérative didactique, le suivi des différentes versions des textes curriculaires et l'étude des vidéos de séances de classe.

Dans une première section, nous reprendrons quelques principes méthodologiques généraux. Dans la seconde section et troisième section, nous présenterons notre méthodologie pour étudier le dialogue d'ingénierie et les textes de progression. La quatrième section reviendra sur la méthodologie de recueil et le traitement des données des séances de classes.

1. Eléments généraux de réflexion méthodologique

1.1. Approche clinique et paradigme indiciaire

Pour étudier l'action conjointe en didactique, il est nécessaire de « se donner des outils méthodologiques capables de rendre visible l'ajustement mutuel d'autrui, l'ajustement mutuel de l'autre dans le savoir » (Sensevy, 2011d, p. 231).

Notre étude sur la construction d'une continuité didactique au sein d'une ingénierie didactique et son effet sur l'expérience des élèves sur un empan temporel long nécessite la mise en place d'un dispositif de recherche particulier. Ainsi, afin d'apporter des éléments de réponses à nos questions de recherche, il a été nécessaire de recueillir différentes traces (Leutenegger, 2009) et de les croiser[51]. En effet, à partir de faits observés, le chercheur regroupe un ensemble de signes[52] (Leutenegger, 2000).

Dans notre travail, trois types de données seront étudiés, données qui se répondent et s'éclairent l'un l'autre :

- étude du dialogue d'ingénierie entre professeurs/chercheurs autour de certains objets de savoir ;

- étude des textes curriculaires où le système didactique ternaire Professeur, Elève et Savoir est considéré (les deux premières instances étant fictives) ;

- étude du système didactique triadique, Professeur, Elève et Savoir à partir de films d'étude.

Nous observerons, dans un premier temps, le processus d'enquête collectif au sein de l'ingénierie didactique. Cette enquête doit aboutir à la « production d'assertions, collectivement appropriées par le collectif, c'est-à-dire à propos desquelles à la fois engagements et autorisations[53] sont partagées par tous » (Sensevy, 2011a, p. 685). Nous cherchons à comprendre les conditions d'élaboration d'hypothèses d'amélioration de la progression du domaine « Situations » composé d'une suite de modules regroupant un ensemble de séances sur l'enseignement du nombre.

Dans un second temps, nous étudions la textualisation des savoirs avant et après le dialogue d'ingénierie pour donner à voir les effets de celui-ci sur les textes curriculaires.

Dans un troisième temps, nous analysons, à partir de données filmiques, les effets de cette textualisation sur l'expérience effective des élèves dans l'action conjointe.

---

[51] Nous avons, par exemple, croisé des données issues des comptes rendus des professeurs des classes d'étude avec des observations réalisées par les professeurs des classes expérimentales sur un objet de savoir en particulier. Ces deux types de données ne sont pas nécessairement synchronisés dans le temps.

[52] Des indices isolés ne sont pas signifiants (Leutenegger, 2009).

[53] Engagement « comittment » et "autorisations" "entitlement" sont les concepts au moyen desquels Brandom (2009) décrit "the game of giving and asking for reasons". Il énonce que « ceux qui jouent au jeu de l'offre et de la demande de raisons doivent distinguer, parmi les engagements que prend un interlocuteur, une sous-classe à laquelle il est autorisé. Fournir des raisons à l'appui d'une affirmation consiste à produire d'autres assertions qui habilitent ou autorisent quelqu'un à faire cette affirmation et qui la justifient… Les pratiques d'offres de raison n'ont de sens que si la question peut se poser de savoir si oui ou non leurs auteurs sont autorisés à s'engager ». (Ibid., p. 204)

Nous nous situons dans le cadre d'une approche clinique (Leutenegger, 2000 ; Schubauer-Leoni & Leutenegger 2002 ; Leutenegger, 2009 ; Ligozat, 2008 ; Sensevy, 2011a) et dans la continuité du paradigme indiciaire (Ginzburg, 1980, 1989, Foucault, 1963). L'analyse des indices, des signes, des traces collectionnées et le déchiffrement de ces signes au sein des trois systèmes que nous décrirons ci-dessus autorisent une compréhension et une interprétation de leur fonctionnement. Pour étudier ces systèmes, le chercheur se donne « les moyens théoriques et méthodologiques pour déterminer les objets observés » (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002). Nous avons donc réuni une configuration d'indices rendant compte d'un système d'événements.

La construction de ces collections de traces et leurs mises en archive (Ibid.) a été facilitée par notre implication dans la recherche ACE-ArithmÉcole. Elle nous a permis de recueillir un ensemble de données issues de sources diverses (comptes rendus de réunion, de séances, échanges virtuels ou en présence entre les membres de l'ingénierie, films…). A partir d'un ensemble de moyens d'observation de ces systèmes, nous avons pu mettre en mémoire différentes données en observant l'action en cours mais aussi en y participant. En effet, « le dispositif de production de traces comprend à la fois l'observation des activités et donc du cours des actions (le système didactique en fonctionnement) mais aussi le récit (enregistré) anticipateur ou/évocateur d'acteurs autorisés (participants voire témoins oculaires des évènements » (Ibid. 241). Dans notre recherche, les comptes rendus de réunions, les échanges sur les listes de diffusion peuvent être considérés comme des récits évocateurs de l'action des acteurs puisqu'ils se situent en amont ou en aval des mises en œuvre des séances dans les classes.

Le fait d'avoir accès à une multiplicité de données nous a permis de produire des collections de traces et de les croiser, de les articuler entre elles pour apporter des éléments de réponses à nos questions de recherche et réduire ainsi l'incertitude (Leutenegger, 2009). Chaque collection de traces est ici nourrie par un questionnement particulier, en fonction de l'objet de savoir en jeu et des différentes sources mobilisées.

L'organisation de notre enquête a donc été dictée par un maillage entre chaque niveau d'observation, de traces, d'indices. Le « déroulement temporel du dispositif induit, quoi qu'il en soit, une sorte de fil conducteur » (Ibid., p. 157) mais le chercheur organise la liaison entre les différentes collections de signes et crée alors une distance avec son objet d'étude. Comme le précise Ginzburg (1980) « si la réalité est opaque, il existe des zones privilégiées - des indices - qui permettent de la déchiffrer » (Ibid., p. 29). Les outils méthodologiques choisis

nous permettent de combler si nécessaire les lacunes dans la narration de la chronologie des connaissances abordées.

1.2. Jeux d'échelle et continuité

L'enseignement et l'apprentissage sont des actions de transformation sur la « longue durée » (Sensevy, 2011b, p. 184). Les conséquences méthodologiques en termes de niveaux d'échelles sont donc importantes pour appréhender le processus didactique (Ibid.). L'enseignement s'inscrit dans une chronogénèse qui, elle-même, dépend d'une textualisation du savoir.

Pour étudier la continuité dans l'enseignement et l'apprentissage, nous travaillons sur différents niveaux de granularité de la description. Nous étudions les relations, les connexions qui peuvent exister à chaque niveau de description pour donner à voir la dynamique de l'avancée des savoirs et le processus de construction de l'expérience. Ces deux dynamiques sont observées dans deux contextes différents, à partir des textes curriculaires et des vidéos de films de classe. Dans ces deux contextes, trois niveaux d'échelle sont envisagés. Le niveau macroscopique donne à voir l'ensemble de la progression du domaine « Situations » sur l'année scolaire à partir de l'agencement des modules. Le niveau mésoscopique permet de comprendre et donner à voir la dynamique chronogénétique à partir d'une modélisation en termes de jeux d'apprentissage. Le niveau microscopique autorise, quant à lui, l'étude du jeu du professeur sur celui des élèves (et le "jeu réciproque des élèves") en s'attachant à certains évènements didactiques (Sensevy, 2011d).

Les analyses produites à différents niveaux d'échelle ont pour objectif la compréhension des contenus à enseigner et enseignés in situ par « l'appropriation d'un réseau d'éléments de connaissance qui ne peut se faire que dans la durée » (Tiberghien, 2012). Dans notre étude sur la continuité de l'expérience des élèves et les systèmes de représentation, il est nécessaire de comprendre la chronologie des savoirs. En effet, l'expérience

> « est le pouvoir de retenir d'une expérience quelque chose qui serait utile pour faire face aux difficultés de situations ultérieures. Cela signifie le pouvoir de modifier les actions sur la base de résultats d'expériences antérieures, le pouvoir d'acquérir des dispositions, sans lequel l'acquisition des habitudes est impossible » (Dewey, 1916/2011, p. 124).

Ainsi, comment les élèves construisent-ils certains savoirs, comment ces savoirs évoluent-t-ils tout au long de l'année ? Comment le style de pensée (Fleck, 2005) particulier à l'usage des systèmes de représentation du nombre et de leur traduction sont-ils construit ? Pour répondre

à ces questions, il a été nécessaire de travailler sur un large empan temporel pour observer comment un style de pensée particulier, une disposition pour une perception dirigée, s'est construite à partir de savoirs antérieurs. Nous reprenons ci-dessous une citation de Fleck (2005) :

> « il est de première importance d'apprendre à regarder, à questionner jusqu'à ce que la tradition, l'éducation, l'accoutumance aient donné jour à une disposition pour une manière de percevoir et de procéder qui soit conforme à un style c'est-à-dire ciblée et délimitée » (Ibid. p. 149).

En effet, les élèves au cours de l'année scolaire accumulent de l'expérience « reposant sur l'expérimentation, l'observation, les savoir-faire techniques, des transformations de concepts » (Ibid., p. 24). Mais, les textes curriculaires permettent-ils la construction de cette accumulation d'expériences[54] ? Comment cette expérience se réalise-t-elle dans l'action conjointe effective ?

Nous conjecturons que cette production d'un style de pensée se déroule sur un temps long. Il est donc nécessaire d'avoir une vision macroscopique de ce qui doit être, les objectifs de chaque module. Cependant, pour comprendre la logique de l'action, de la pratique, une description au niveau mésoscopique est nécessaire. Sensevy (2011d) nomme ces descriptions, « des « descriptions-pivots » qui possèdent la particularité de se prêter particulièrement bien à la mise en connexion » (Ibid. p, 275). Elles peuvent être « mise en relation avec d'autres niveaux d'échelle (…), cette mise en relation permettant d'affiner l'explication et la compréhension des comportements produits dans les transactions didactiques (Ibid.)

Ces transactions peuvent être fictives lors de l'analyse des textes curriculaires ou effectives pour l'étude des séances de classes. Ainsi, d'une part, la description du jeu didactique sous forme de succession de jeux d'apprentissage offre, dans notre étude, la possibilité de donner à voir la progression des capacités épistémiques émergentes (Sensevy, 2011a) en situation. D'autre part, l'analyse des textes curriculaires des différents modules permet la décomposition du savoir à enseigner (Tiberghien & Malkoun, 2007) et la compréhension de son cheminement. Elle donnera à voir les jeux d'apprentissages et capacités cibles[55] inférés par les textes curriculaires. Cette analyse éclairera le processus d'enseignement/apprentissage mis en œuvre dans la classe étudiée. L'analyse de l'action conjointe à une échelle

---

[54] Fleck (2005) définit l'expérience comme un « état intellectuel extrêmement complexe, reposant sur des interactions entre ceux qui connaissent, ce qui est déjà connu et ce qui est à connaître » (Ibid., p. 24).

[55] Nous nous inspirons ici de la modélisation des ingénieries didactiques effectuée par Gruson, Forest & Loquet (2012).

microscopique de l'ordre de la phrase va donc se situer dans un contexte plus large, au sein d'un jeu d'apprentissage, puis encore plus large au sein d'une suite de situations didactiques.

1.3. Positionnement de chercheur

Le chercheur fait partie intégrante de sa recherche, « ce qui me paraît premier, en effet, ce sont les interactions que le chercheur entretient avec son objet d'étude » (Chevallard, 1996, p.42). Dans notre travail, nous avons un rapport particulier à notre terrain de recherche dans la mesure où nous y occupons deux rôles distincts.

En premier lieu, nous sommes membre de l'équipe de recherche ACE-ArithmÉcole depuis septembre 2011. Nous avons participé à la conception, à la rédaction et à l'élaboration des différentes versions des modules du domaine « Situations » sur trois années successives. Nous avons élaboré le site Internet de la recherche, suivi et répondu aux commentaires postés, mis à jour les documents sur ce site. Nous sommes, de même, membre des listes de diffusion de la sphère 1 et 2. Nous avons participé à l'animation des réunions de formation et de régulation et suivi des groupes de travail lors du stage bilan/perspectives. Pendant deux années (2011-2013), nous avons filmé de manière régulière une classe d'étude (autre que celle étudiée dans ce travail) et expérimentale (2012-2014).

En second lieu, nous nous positionnons en tant que chercheur sur cette recherche. La logique du chercheur consiste notamment « à construire un rapport théorique à l'action d'enseignement qu'il(s) étudie(nt) » (Sensevy, 2006, p. 1). Notre questionnement de départ a été initié par l'observation d'un obstacle[56] dans le processus d'enseignement/apprentissage lors de la mise en œuvre du module 2 du domaine « Situations ». Nous avons alors enquêté sur les causes possibles de cet obstacle à partir de l'analyse des textes curriculaire, en nous focalisant en particulier sur la continuité des savoirs. Puis dans un deuxième temps, nous avons continué cette enquête en étudiant comment cet obstacle était travaillé au sein du dialogue d'ingénierie entre professeurs et chercheurs. Celui-ci a entraîné une réécriture de certains modules que nous avons analysés toujours en lien avec la notion de continuité. Pour terminer, nous avons étudié des séances effectives.

Notre terrain de recherche s'est donc construit à partir de l'expérimentation ACE-ArithmÉcole. Nous devons donc nous interroger en permanence sur notre posture puisque

[56] A un déséquilibre dans une situation, comme le propose Dewey (1967).

notre position est interne à ce dispositif de recherche. Notre relation avec les acteurs de terrain et notre participation à l'élaboration des hypothèses de travail sont donc à prendre en compte dans cette étude.

Toutefois, il est à noter que notre positionnement en tant qu'observateur est différent selon les données recueillies. En effet, le chercheur est ici acteur impliqué dans le dialogue inter et intra sphères et dans la conception et la rédaction des différentes versions des textes curriculaires. Mais il reste un observateur absent lors des séances effectives où la professeure a capté elle-même les séances de classe.

La distance entre nos deux identités, "ingénieur" et "chercheur" s'est opérée graduellement par la mise en place d'outils de recueil de données (enregistrements vidéo et audio et du choix du positionnement du matériel (Daina, Mathe, Pelay & Sabra, 2011)). Par exemple, lors des réunions de régulation et du stage bilan/perspectives de juin 2013, nous avons positionné en priorité notre matériel de captation sur les groupes dialoguant autour de nos objets de recherche (les systèmes de représentation dans les situations de comparaison et d'introduction de la notion de différence). Ces choix traduisent déjà des options plus ou moins explicites (Ibid.). Ainsi, l'utilisation de médiation technique et le traitement de ces données autorisent le chercheur à ne pas appréhender la réalité immédiatement mais de manière réflexive grâce à un retour possible sur les scènes ainsi enregistrées.

Mais comment s'est déroulé le recueil de données sur les différents terrains investigués et comment ces données ont-elles été traitées ? Les sections suivantes présentent successivement ces différentes catégories de données.

2. Collectif chercheurs/professeurs

Dans ce travail de thèse, nous étudierons le dialogue intra et inter sphères au sein d'une ingénierie didactique coopérative réunissant l'équipe de recherche et les professeurs des classes expérimentales de Bretagne. Nous avons donc recueilli une collection de traces (Schubauer-Léoni & Leutenegger, 2002) fournissant des informations sur le travail coopératif entre les différents membres de cette l'ingénierie. Ces traces visent à comprendre et expliquer les modifications effectuées au sein des textes curriculaires. L'étude ne porte pas sur le système didactique, Professeur, Elève, Savoir mais sur celui de Professeur, Chercheur, Savoir. La méthodologie mise en place a pour objectif de reconstruire et identifier des phénomènes relatifs au fonctionnement de ce système triangulaire.

2.1. Organisation de l'ingénierie

L'ingénierie coopérative didactique se réfère à un processus méthodologique dans lequel un collectif de chercheurs et de professeurs implémente et ré-implémente une séance de classe sur un sujet particulier (Sensevy, Forest, Quilio & Morales, 2013). Elle reprend la structure itérative des Lesson studies (Miyakawa &Winsløw, 2009). Dans le cas de notre travail, les professeurs implémentent non pas une séance mais une progression complète en mathématiques sur une année scolaire.

Nous reprenons succinctement ci-dessous l'organisation de l'ingénierie, terrain de notre recherche.

D'une part, l'équipe de recherche (sphère 1) se compose d'un collectif pluri-catégoriel sur deux sites distants, en Bretagne et à Aix/Marseille. Comme nous l'avons présenté dans le chapitre contexte (cf. Chapitre 1), cette équipe regroupe des enseignants-chercheurs, des formateurs, des maîtres-formateurs et des doctorants sur les deux sites précités. Elle conçoit conjointement le domaine « Situations ». Au sein de la sphère 1, nous avons étudié le groupe constitué uniquement de l'équipe de Bretagne. Celle-ci anime les réunions de régulation et les stages bilan/perspectives sur l'académie de Rennes. Elle regroupe un enseignant-chercheur (C1) qui fait partie du comité de pilotage de la recherche ACE-ArithmÉcole, trois maîtres-formateurs professeurs dans des classes d'étude, un formateur en mathématiques et un doctorant financé sur cette recherche. Les professeurs des classes d'étude implémentent et ré implémentent les séances de la progression. Dans ce travail de thèse, nous suivons, dans sa classe, un des maîtres-formateurs de cette équipe.

D'autre part, la sphère 2 regroupe les professeurs du groupe expérimental du département des Côtes-d'Armor. Il se composait en 2012-2013 de dix-huit professeurs que nous qualifierons de professeurs ordinaires dont trois étaient en REP (Réseau d'établissements prioritaires).

L'ensemble des séances produites par la sphère 1 sont implémentées dans le temps didactique annuel de ces classes. Ces professeurs ordinaires sont inclus dans le dispositif d'ingénierie grâce à une instrumentation particulière comportant différents moyens de communication, virtuels ou non (réunions, listes de diffusion, forum sur le site Internet de la recherche). Ils peuvent ainsi faire part de leur expérience dans la mise en œuvre des modules.

Dans notre travail de recherche, nous étudions le travail coopératif entre les deux sphères et ses effets sur la progression du domaine « Situations ». Les différents échanges entre ces deux sphères constituent une partie de nos données empiriques. Nous conjecturons que le dialogue

entre les deux sphères autorise l'étude de la robustesse de la suite des situations proposées dans le curriculum.

Nous présenterons successivement les différents types de données liés directement au dialogue d'ingénierie.

2.2. Données liées à la sphère 1

Nous avons recueilli, dans un premier temps, des données relatives uniquement à la sphère 1 qui seront mises en relation, dans un second temps, avec celles recueillies dans le cadre du dialogue entre les deux sphères. Cette mise en relation va permettre de produire un faisceau d'indices organisé en fonction de notre problématique de recherche.

Trois types de données ont ainsi été collectés au sein de l'équipe de recherche pour comprendre le déroulement du travail de régulation des textes curriculaires.

Nous avons recueilli, d'une part, l'ensemble des comptes rendus des réunions organisées l'année 2012-2013 par la sphère 1. Ces réunions réunissaient, en visioconférence, les deux pôles, Rennes et Provence/Marseille (cf. Tableau 8).

2012-2013
26-09-2012
11-10-2012
22-10-2012
23-01-2013
06-02-2013
13-02-2013
13-03-2013
20-03-2013
27-03-2013
15-04-2013
22-05-2013
19-06-2013
03-07-2013

Tableau 8 : ensemble des réunions entre les membres de l'équipe de recherche, sphère 1

Ces réunions permettaient à l'équipe de recherche d'échanger sur les différentes mises en œuvre des séances dans les classes d'étude, sur les retours de certaines classes expérimentales et sur les différentes orientations de travail pour l'écriture des modules[57].

D'autre part, nous avons recueilli l'ensemble des comptes rendus des séances mises en œuvre dans les classes d'étude rédigés par les professeurs eux-mêmes ou par un membre de l'équipe de recherche sur cette année scolaire. Ces données nous permettent de mettre en relation les

[57] Par exemple, la réunion du 27 mars 2013 revient sur la mise en œuvre du module 10 dans les classes d'étude et sur les différents aspects de sa réécriture notamment sur l'importance à accorder aux procédures de composition et décomposition en lien avec l'écriture soustractive

réflexions des professeurs des classes expérimentales et celles des professeurs des classes d'étude sur certaines séances.

Nous avons, de même, répertorié l'ensemble des échanges entre les membres de la sphère 1 sur la liste de diffusion prévue à cet effet. Pour cela, nous avons créé sur notre logiciel de courrier électronique des dossiers spécifiques pour chaque module comme nous le montre le photogramme ci-dessous (cf. Photogramme 6).

Photogramme 6 : dossiers dans notre logiciel de courriers électroniques réunissant les échanges sur la liste de diffusion par module

Chaque dossier regroupe l'ensemble des messages échangés sur les modules ainsi que leurs différentes versions.

Dans notre travail, nous nous sommes centrés, en premier lieu, sur les échanges entre les membres de la sphère 1 sur les modules 1, 2, 3 et 4 et les comptes rendus des professeurs des classes d'étude. En effet, nous nous sommes intéressés à la régulation des premiers modules à travers l'usage des systèmes de représentation et de la continuité des savoirs. En second lieu, nous nous sommes penchés sur le module 9 introduisant la différence.

Le recueil de ces données a donc été nécessaire pour :

- étudier si l'expérience des professeurs des classes d'étude dans la mise en œuvre de certains modules était similaire/complémentaire à celle des classes expérimentales ;

- comprendre la reconstruction des modules par la sphère 1 au sein d'un processus de régulation.

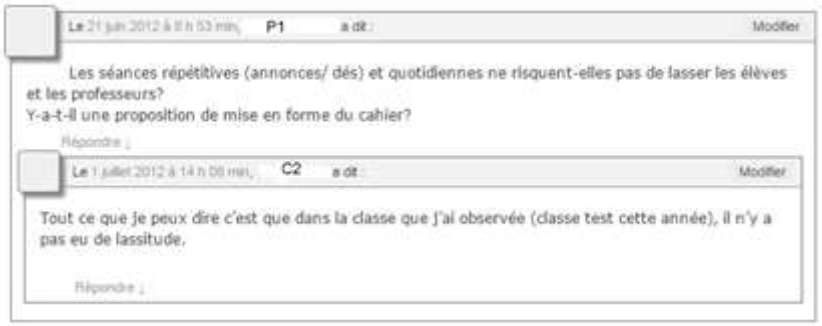
2.3. Données liées à la sphère 2 et au dialogue inter sphères

Afin de mener notre enquête sur le processus de régulation au sein de l'ingénierie didactique, nous nous intéressons au dialogue entre l'équipe de recherche et les classes expérimentales.

Pour cela, nous avons recueilli différentes catégories de données issues des moyens de communication à distance et en présence mis en place dans le cadre de cette ingénierie.

2.3.1. Forum du site Internet de la recherche

A partir du site Internet de la recherche ACE-ArithmÉcole, nous avons recueilli les commentaires postés sur le forum par les professeurs expérimentaux et les membres de l'équipe de recherche[58]. Nous proposons ci-dessous un exemple d'un court dialogue extrait de ce forum (cf. Photogramme 7).



Photogramme 7 : extrait d'échanges via le forum du site Internet de la recherche

Le photogramme ci-dessus donne à voir comment s'organise les échanges sur ce forum. Par exemple, ici le 21 juin 2012, P1 s'interroge sur la répétitivité des séances. Le 1 juillet, un membre de l'équipe de recherche (C2) lui répond.

A partir de notre questionnement de départ, nous avons sélectionné et regroupé certains échanges en relation à nos objets de recherche.

2.3.2. Les réunions inter-sphères

Nous avons extrait des données issues de la captation audio et/ou vidéo des réunions de régulation entre la sphère 1 et 2 qui se sont déroulées tout au long de l'année scolaire 2012-2013 lors de la première année d'implémentation de l'ensemble du curriculum.

Ainsi, en lien avec l'inspection académique des Côtes d'Armor, différentes réunions sont organisées entre les membres de l'équipe de recherche (restreinte) et les professeurs expérimentaux des Côtes d'Armor. Le tableau ci-dessous présente ces réunions qui sont de deux types : des « réunions des régulation » et un stage « bilan-perspective ».

[58] En juin 2012 après la semaine de formation des premiers professeurs expérimentaux, le forum a été créé sur le site Internet de la recherche ACE-ArithmEcole. Chaque membre de l'ingénierie y avait accès via un identifiant et un mot de passe personnel.

2012-2013
Réunion de régulation : - 17-10-2012 - 19-12-2012 - 20-02-2013 - 17-04-2013 Stage bilan/perspectives : -17 au 21 juin 2013

Tableau 9 : synthèse des réunions en présence entre la sphère 1 et 2 en 2012-2013

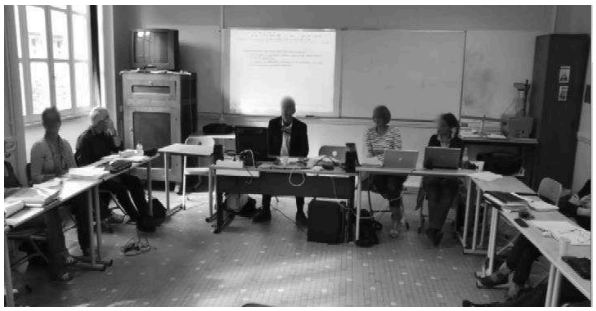
Dans un premier temps, les réunions de régulation se sont déroulées sur quatre mercredis matins répartis sur l'année scolaire. Elles ont permis d'échanger autour des mises en œuvre déjà réalisées, d'anticiper les modules ultérieurs et communiquer autour des enjeux épistémiques de la progression. Ces réunions ont bénéficié d'un enregistrement audio via un dictaphone. Nous avons sélectionné et transcrit la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe 32) car elle donne à voir les échanges d'expériences entre la sphère 1 et 2 sur le module introduisant la différence.

Dans un second temps, un stage bilan/perspectives du 17 au 21 juin 2013 a été mis en place. Son objectif était « de construire ensemble [équipe de recherche et professeurs expérimentaux] une réflexion sur l'expérience ACE de cette année et de préparer l'expérience ACE de l'année prochaine » (extrait d'un courriel adressé aux professeurs expérimentaux par C1[59], le 11/06/2013). Ce stage s'est organisé autour de quatre thématiques. La première s'est centrée sur l'ajustement entre les différents domaines et entre les différents modules du domaine « Situations ». La seconde thématique s'est organisée autour d'un travail sur des notions plus spécifiques, notamment l'introduction du schéma-ligne et de la différence. Deux autres thématiques se sont centrées sur les élèves moins avancés et sur des dispositifs spécifiques, le Journal du Nombre et les séances d'anticipation.

Cette semaine de stage s'est construite autour d'une alternance entre travail en petits groupes et discussions collectives. Chaque groupe de travail réunissait des professeurs et des membres de l'équipe de recherche sur des sujets choisis. Puis, ces groupes exposaient leurs réflexions au collectif, réflexions à partir desquelles s'engageaient des échanges.

L'ensemble de ce stage a été enregistré. Une caméra sur pied a été positionnée au fond de la salle lors des phases de présentation ou de mise en commun pour saisir l'ensemble des échanges et la projection des documents au tableau (cf. Photogramme 8).

[59] C1 : enseignant-chercheur pilotant le projet ACE.



Photogramme 8 : photogramme d'une captation de la caméra sur pied positionné au fond de la salle qui filme l'ensemble des échanges et les documents projetés

Sur ce photogramme, les membres de l'équipe de recherche sont positionnés devant le tableau et sur les côtés. Les conseillers pédagogiques et les professeurs du groupe expérimental sont installés en face et sur les côtés.

Lors du travail en groupe, la caméra est placée à proximité et en plongée pour saisir l'ensemble des échanges (cf. Photogramme, 9).

Photogramme 9 : Photogramme d'un travail en groupe

Les professeurs sont installés autour des tables, l'une d'elles prend des notes pour l'ensemble du groupe. Deux membres de l'équipe de recherche sont présents, l'un debout à gauche et l'autre de dos à droite du photogramme. Tous les groupes n'ont pu être filmés mais l'ensemble des échanges ont fait l'objet d'un enregistrement audio.

Nous avons ciblé certains extraits de la semaine de stage bilan/perspectives au cours desquels les échanges se centraient sur deux contenus particuliers, *l'introduction des systèmes de* représentation et la différence.

Nous énumérons ci-dessous les différentes transcriptions du stage bilan/perspectives effectuées à l'aide du logiciel d'analyse vidéo, Transana.

Le lundi 17 juin 2013 :

- phase de mise en commun du travail en petits groupes relatif aux *lieux d'ajustement entre* les modules. Les groupes reviennent et pointent les difficultés rencontrées, notamment l'usage

des systèmes de représentation et des difficultés de compréhension de la différence comme écart entre deux nombres (cf. Annexe 10) ;

- présentation du travail du groupe 2 sur l'organisation de la progression du domaine « Situations » et de la cohérence des modules entre eux. L'accent y est mis sur les liens entre les systèmes de représentation (cf. Annexe 11) ;

- présentation du travail du groupe 1 sur la cohérence de la progression liée à l'introduction de la différence au module 9 (cf. Annexe, 33).

Le 18 juin 2013, les professeurs travaillent autour de six notions[60] mises en évidence lors du travail engagé le lundi précédent :

- travail en petit groupe autour de l'introduction du schéma-ligne (cf. Annexe, 13) ;

- introduction collective du travail sur le module « Différence » (rappel de la séance précédente) (cf. Annexe 34) ;

- travail en petit groupe sur la notion de différence (cf. Annexe, 35) ;

- mise en commun de ce groupe de travail sur la différence (cf. Annexe 36) ;

Nous donnons à voir l'organisation d'une des transcriptions (cf. Transcription 1).

temps	tdp	Actant	Contenu
(2:33:39.3)	1	VN	Le domaine situations. Au départ, on était parti en disant qu'on allait faire module par module, c'est pour ça qu'on a commencé par le module 0 et puis bon après, on a fait un truc plus général avec des points du module 1 au module 7 et on a été, module 9, 10, on a pas été
(2:33:57.9)	2	P	On a pas eu le temps. (rires)
(2:34:00.8)	3	VN	Dans le module 0, on a trouvé que c'était très bien mais que il aurait fallu deux séances supplémentaires éventuellement consacrées au journal du nombre et puis peut-être et ça, on s'est posé la question faire un lien entre le train. Parce qu'on a trouvé que le module 0 était intéressant mais que après ça s'arrêtait d'un coup et puis qu'on retrouvait plus ça ailleurs. Et qu'on l'avait retrouvé longtemps après en fait. Donc en fait peut-être dès la fin du module 0 préparer le lien euh.

Transcription 1 : extrait de la transcription de du groupe 1 du 17/06/13

La première colonne donne des repères temporels, la seconde colonne le tour de parole, la troisième l'actant et la dernière colonne le contenu. La transcription de ces moments d'échange a pour objectif de comprendre comment le dialogue instauré entre les deux sphères a contribué à modifier ou non les textes curriculaires des modules.

[60] Le module différence, le schéma-ligne, RDP, l'Estimateur, l'égalité et la soustraction.

De même, ont été recueillies des données externes telles que les synthèses écrites des groupes de travail (cf. Annexe 9) et les fiches de préparation de ces journées rédigées par la sphère 1 (cf. Annexes 8 et 12).

2.3.3. Liste de diffusion inter-sphères

Des données ont été recueillies à partir de la liste de diffusion regroupant les professeurs du groupe expérimental breton et l'équipe de recherche restreinte. Comme pour la liste de diffusion de la sphère 1, nous avons répertorié les échanges sur notre logiciel de courrier par module et enregistré les différents documents échangés.

Nous reproduisons ci-dessous un échange entre les membres de la sphère 2 concernant le module introduisant la différence (cf. Photogramme 10).

Le 16/01/2014 20:07, P2 a écrit :

> Bonsoir
> Merci à tous pour vos ressentis.
> Nous avons eu la même réaction P1 :-)
> Les jours se suivent et ne se ressemblent pas ouf!!!
> Aujourd'hui, j'ai repris le jeu des trains par binôme ,on a joué à faire voir un train dans un autre,on a cassé le train puis à la bataille des trains celui qui avait le plus grand train gagnait un jeton et écrivait sur l'ardoise une ou plusieurs opérations correspondant à la différence.
> Ensuite on a repris ça en collectif et c'était beaucoup mieux que mardi yesssssss!
> le midi j'ai retravaillé tout ça avec des élèves moins avancés en soutien
> l' après-midi j'ai repris la boite et là ,même chose que du bonheur!!!!!

> Merci "P" je viens de voir ton mail alors que je viens de finir le mien :(. c'est rassurant de voir que nous avons les mêmes réactions et que nous passons par les mêmes phases de doutes et de réussites avec de la patience et un peu d'acharnement quand même :). Le temps..... c'est exactement ça!!!!!

> Bonne soirée
> P2
> Le 16 janv. 2014 à 18:50, P3 a écrit :

> Bonsoir,

Alors, P2 je crois que nous avons tous le même ressenti: la différence est difficile à comprendre pour certains élèves.
J'ai constaté après la séance 2 et suite à une séance JDN que quelques enfants avaient beaucoup de mal à produire des soustractions en se donnant une différence.
Ex: certains, pour une différence de 5 écrivaient: 5 - 2; 5 -1 ...
Je suis donc revenue à une manipulation avec les "bandes trains": nous avons refait des comparaisons, écrit des soustractions.
Puis avec ta fiche, Corinne, celle jointe à ton mail, nous avons rejoué au jeu du lancer de dés.
Les élèves ont encore du mal à produire les soustractions et additions correspondant à leurs lancers, mais je pense qu'ils ont besoin de temps pour s'approprier ces notions qui ne sont pas simples!
En tout cas, ils participent activement et sont contents quand ils y arrivent!
A suivre, on va y arriver!
Bonne soirée,
P3

Photogramme 10 : capture d'écran via la liste de diffusion inter-sphères

Le message de P2 (premier message) fait référence à un échange de courriel avec P, professeur d'une classe d'étude, qui a partagé son expérience sur les mises en œuvre des séances sur la différence.

Nous avons sélectionné les échanges autour de deux objets de savoirs, les systèmes de représentation et la différence qui se sont déroulés lors de l'implémentation du module 2 et 9 en 2012-2014.

2.4. Synthèse

Dans cette seconde section, nous avons explicité la méthodologie de recueil et de traitement des données liés au travail coopératif entre chercheurs et professeurs. Cette méthodologie s'appuie sur une approche clinique avec l'observation des activités, du dialogue inter et intra sphère par le biais de différents moyens de communication (forum, liste de diffusion et réunion en présence). Le choix des objets pris en considération dans cette étude est directement lié au dispositif de recherche mis en place dans ce travail de thèse mais aussi aux orientations plus globales d'expérimentation de la recherche ACE-ArithmÉcole.

Nous reprenons ci-dessous le dispositif de recherche mis en place pour étudier le dialogue au sein de l'ingénierie (cf. Figure 8).

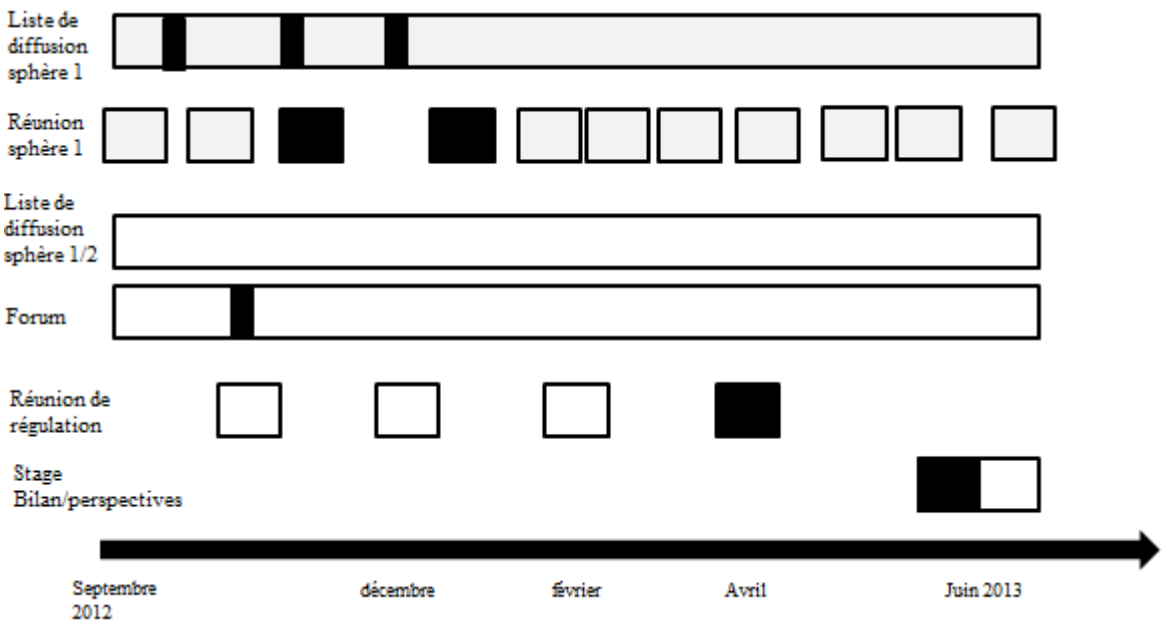


Figure 8 : organisation temporelle des échanges intra et inter sphère 2012-2013

La figure 8 donne à voir l'organisation des échanges entre les différents membres de l'ingénierie sur l'année 2012-2013. Les données prélevées pour notre recherche sont en noir. Les deux premières lignes (en grisé) montrent les lieux d'échange de la sphère 1. La première ligne représente les échanges entre les membres de l'équipe de recherche sur la liste de diffusion. Comme nous pouvons l'observer, ces échanges sont continus sur l'ensemble de l'année. Les comptes rendus de séances y sont postés par les professeurs des classes d'étude.

La seconde ligne représente les différentes réunions en visioconférence organisées. Dans notre travail, nous nous sommes centrés sur celle du 22 octobre 2012 (discussion sur le

processus de régulation des premiers modules) et celle du 23 janvier (discussion autour du module Différence).

Les trois lignes inférieures (en blanc) présentent les lieux de dialogue entre la sphère 1 et 2.

Sur le forum du site Internet de la recherche, nous avons prélevé des échanges en octobre 2012. Puis lors des réunions en présence, nous avons recueilli des données lors de la réunion de régulation d'avril 2013 et des deux premiers jours du stage bilan/perspectives en juin 2013.

Les « ponctions » (Leutenegger, 2000) réalisées dans ce dispositif de recherche sont ciblées selon notre objet de recherche, le dialogue inter et intra sphère autour de notre objet de recherche. Le chercheur a donc regroupé des faits concordants, un ensemble de signes à partir d'une pluralité de faits observés (Ibid.) ce qui lui a permis une reconstruction la réalité du dialogue ingénierique.

3. Les textes curriculaires

Pour comprendre les effets de la coopération entre la sphère 1 et 2 sur la réécriture des textes de progression, nous nous sommes intéressés aux différentes versions des textes « déroulement » des modules proposées dans le domaine « Situations ». En effet, l'étude de la textualisation des savoirs nous apparaît essentielle à la compréhension de l'avancée des savoirs et des difficultés mises en évidence lors de l'implémentation des séances dans les classes.

3.1. Organisation des textes curriculaires

Nous présenterons tout d'abord succinctement comment sont organisés les documents Déroulement[61] dans le domaine « Situations ». Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1 « Contexte » de cet écrit, la progression du domaine « Situations » est divisée en plusieurs modules. Ces modules décrivent une suite de situations didactiques dont les enjeux de savoirs sont spécifiques. Par exemple, le module 0, la situation du train (ou des tours) a pour objectif

> « d'enrichir les connaissances des élèves sur les premiers nombres et de les préparer à l'addition. Au cours de ce module, les élèves doivent passer d'une correspondance terme à terme (correspondance des wagons du train avec les cubes) au nombre comme moyen de codage d'une quantité. Elle introduit la situation des annonces et lui fournit un moyen de validation, qui pourra être éventuellement

[61] Les documents Déroulement seront nommés dans cette recherche les textes curriculaires. Certains de ces textes se trouvent en annexe de ce travail et sur le site Internet de la recherche ACE.

« effectif » durant toute la progression (construction d'un train/tour et comptage effectif des wagons/étages) » (Extrait du texte curriculaire du module 0, cf. Annexe 1).

Les différents modules ont une structure générale à peu près identique :

- une introduction ;

- une première partie, "enjeux du module", qui présente le module et le rôle didactique du professeur ;

- une seconde partie, "une mise en place effective de la première séance", qui détaille par phases (collective, individuelle…) l'ensemble de la séance. Elle donne des exemples d'énoncés et de gestes professoraux ;

- une troisième partie donne à voir certains comportements d'élèves observés dans les classes ;

- une quatrième partie présente une vision synoptique d'éléments de réflexion relatifs aux stratégies du professeur ;

- une cinquième partie décrit les autres séances du module.

A ces différentes parties, nous pouvons ajouter une présentation, pour certains modules, de séances d'anticipation et de séances de Journal du Nombre.

Les documents "Déroulement" peuvent contenir jusqu'à quarante pages par module (exemple, Annexes 1 ; 3…)

3.2. Méthodologie d'analyse

La théorie de l'action conjointe en didactique tente de penser de manière solidaire les opérations de "construction" et d'"effectuation" du jeu (Sensevy, 2011b). Les textes curriculaires peuvent ainsi fournir une première description du système stratégique du professeur in situ. Cette description en amont de l'action permet de mettre en évidence l'épistémologie sous-jacente et des enjeux épistémiques. Ces textes curriculaires constituent donc une source essentielle de l'action du professeur. Les séances proposées fournissent ainsi une architecture à la préparation des activités menées en classe, les activités in situ.

Sensevy (Ibid.) précise que « l'action à distance que le professeur imagine en construisant le jeu peut ne pas être moins conjointe que l'action in situ – elle peut l'être même davantage, délivrée qu'elle est de certaines contingences… » (Ibid. p. 187). Nous reprenons ici ces propos en remplaçant le substantif de professeur par celui de concepteurs. En effet, la rédaction des séances, la construction du jeu didactique, par l'équipe de recherche, s'adresse à

un professeur générique sans prendre en compte l'ensemble des contingences inhérentes à chaque classe. L'action conjointe se déploie in absentia, les concepteurs du curriculum anticipent le travail du professeur et des élèves dans la classe. Toutefois, il est à préciser que l'écriture de ces textes tente de prendre en compte les différentes observations et analyses effectuées par l'équipe de recherche des séances effectivement implémentées par les professeurs des classes d'étude et des classes expérimentales[62].

Nous étudierons à des granularités différentes certains de ces textes curriculaires en fonction de nos questions de recherche. Par exemple, pour tenter de comprendre les difficultés des élèves dans l'usage des systèmes de représentation révélées lors de la mise en œuvre du module 2, nous avons analysé l'avancée du savoir dans les modules 0, 1 et à un grain plus microscopique certaines séances proposées dans le module 2.

Cette étude des textes amène à voir l'agencement chronologique des savoirs à une échelle mésoscopique en termes de jeux d'apprentissage et de capacités cibles. Les descripteurs tels que le triplet des genèses notamment la chronogénèse et la mésogénèse peuvent permettre de décrire une action virtuelle à travers les documents (Sensevy, 2010).

Cette étude des textes présente comment le jeu pourrait se jouer dans les classe et amène à montrer l'institution (Sensevy, 1998 ; Douglas, 1999) et le style de pensée (Fleck, 2005) dans lesquels sont pris les professeurs engagés dans l'expérimentation.

4. Etude de la pratique effective

Pour terminer, nous étudierons la mise en œuvre de certaines séances de la progression du domaine « Situations » menées par une professeure d'une classe d'étude. Cette professeure est membre de l'équipe de recherche depuis le début de l'expérimentation en septembre 2011.

Cette étude de cas (Passeron & Revel, 2005) a pour objectif de montrer, à partir de certains objets de savoir, la pratique d'un professeur ayant participé activement à l'ingénierie didactique coopérative. La qualification d'un cas étant liée

> « au suivi temporel de l'histoire dont elle [la singularité] le produit en remontant aussi loin qu'il est nécessaire et qu'il est possible dans le passé du cas, en même temps qu'à une exploration détaillée du devenir corrélatif du (ou des) contexte(s) dans lequel il s'inscrit » (Ibid. p. 17-18).

[62] Nous rappelons que des séances ont été implémentées dans les classes d'étude l'année 0 (2011-2012) et les années suivantes.

La singularité du cas présenté dans cette recherche est mise en évidence par un suivi sur un temps long et par la connaissance du contexte de ces mises en œuvre. En effet, comme le précisent Margolinas et Wozniak (2012), les professeurs agissent selon des contraintes d'enseignement qui ne peuvent pas être anticipées, prises en compte par l'ingénierie didactique. L'adaptation des textes dépend alors des conceptions des savoirs mathématiques des professeurs. Ces conceptions sont souvent issues de la façon dont ils enseignent les mathématiques depuis le début de leur carrière. L'étude de cette classe sur l'année scolaire nous est donc apparue pertinente car elle donne à voir comment les séances sont mises en œuvre par un professeur expérimenté, connaisseur des enjeux épistémologiques et épistémiques de la progression.

Mais, comment les textes produits au sein d'une ingénierie didactique sont-ils interprétés par l'ingéniosité de la professeure ? Comment cette professeure réinscrit l'activité proposée dans le contexte de sa classe (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002 ; Mercier, Lemoye & Rouchier, 2001) ?

4.1. Choix du professeur

Cette professeure (P), maître-formatrice enseigne dans une commune du département des Côtes-d'Armor. L'école élémentaire dans laquelle elle enseigne regroupe environ 160 élèves sur six classes. Le niveau socio-professionnel des parents y est relativement élevé.

Nous proposons ci-dessous une courte description de son expérience d'enseignement.

Cette professeure (P) a passé le concours de l'école normale en fin de classe de troisième en 1971. Puis, en 2000, elle passe le CAFIPEMF et prend un poste de formatrice à la rentrée 2001.

Elle enseigne depuis 1977 en école primaire et a passé 32 années en classe de CP. Lors de notre entretien, cette professeure met en avant son intérêt d'enseigner en classe de CP : « *c'est* un niveau où les élèves ne sont pas blasés et enthousiastes pour tout nouvel apprentissage. *C'est également un niveau où on a la satisfaction de voir très vite l'effet (ou le non effet) de son action d'enseignant* » *(extrait de l'entretien)*.

Son intérêt pour l'enseignement en mathématiques l'a amenée à participer au séminaire de didactique des mathématiques proposé à l'ESPE[63] de Bretagne à partir de 2005. Ce groupe

[63] Ecole supérieure du professorat et de l'éducation.

étudiait « *l'effet des ostensifs pour aider à la résolution de problèmes et ils faisaient le constat que cela avait surtout pour effet d'*amplifier les écarts puisque les bons savaient aussi bien utiliser le matériel, que les dessins alors que les moins avancés avaient des difficultés à faire *le lien entre les dessins, le matériel et le problème qu'on leur demandait de résoudre* » (Ibid.).

Le travail au sein de ce séminaire se centrait aussi sur la recherche de situations didactiques qui amèneraient les élèves de CP à éprouver la nécessité d'utiliser, dans un premier temps, les groupements puis, dans un second temps, les groupements par dix. Ce travail a abouti à la rédaction d'un article dans la revue Grand N « Freddy la grenouille ou la notion de groupements en CP (Hili & Ruellan-Le Coat, 2009).

Le désir de poursuivre le travail commencé dans le séminaire de didactique de mathématiques auquel elle ne pouvait plus participer, l'a motivée pour intégrer le Groupe de Recherche et de Ressources (G2R) « Savoirs, Dispositifs et Gestes » en 2011. Elle rejoint alors le sous-groupe ACE-ArithmÉcole coordonné par Gérard Sensevy au sein de l'ESPE de Bretagne. Ce G2R fonctionne en lien étroit avec l'Institut Français de l'Education (IFé) en tant que Lieu d'éducation Associés (LéA).

Mais revenons à la recherche ACE-ArithmÉcole et l'analyse que P fait de son rôle dans ce travail coopératif.

Dans un premier temps, en tant que membre de l'équipe de recherche, elle met en évidence, lors de l'entretien, cinq points essentiels :

> *- « mettre en œuvre des situations imaginées par l'équipe, étudier les réactions (difficultés, temps) des élèves, la faisabilité de ce qui a été imaginé ;*
>
> *- proposer des aménagements ;*
>
> *- participer à l'écriture, à la conception des documents remis aux professeurs ;*
>
> *- tester la cohérence des différents domaines de la progression ;*
>
> *- tirer inlassablement des signaux d'alarme » (Ibid.).*

Dans un second temps, elle analyse son rôle auprès des classes expérimentales (sur les listes de diffusion, lors des réunions de régulation, sur le forum du site internet de la recherche) comme suit :

> *« Je ne me sens pas toujours légitime lors des animations pédagogiques. J'ai la chance de faire partie du groupe de recherche et d'avoir ainsi un plus quant à la vision globale sur la progression, mais lorsque j'entends leurs propositions, leurs réalisations je suis à chaque fois épatée.*
>
> *Sur les listes de diffusion c'est délicat : j'ai souvent tendance à répondre avec des outils que j'ai mis en place ou des travaux de mes élèves. » (Ibid.)*

Les extraits de l'entretien mené montrent, d'une part, l'intérêt certain de P pour l'enseignement des mathématiques du fait de son investissement dans la recherche de situations permettant d'améliorer l'apprentissage des élèves de CP. D'autre part, son rôle actif au sein de la recherche ACE-ArithmÉcole, dans l'équipe de recherche mais aussi auprès des classes expérimentales avec lesquelles elles partagent son expérience.

Comme nous venons de le voir ci-dessus, P est maître–formatrice. Sa mission est, entre autres, d'accueillir dans sa classe des étudiants effectuant des stages d'observation et de pratique accompagnée et, le cas échéant, des professeurs stagiaires ou des professeurs d'écoles titulaires. Lors de notre recueil de données dans cette classe, P a accueilli deux professeures stagiaires, PES1 et PES2 en début d'année scolaire (septembre/octobre 2013). Nous avons fait le choix d'analyser certaines des séances menées par ces deux professeures débutantes au cours du module 1. Ces séances donnent à voir l'introduction de systèmes de représentation. Leur étude permet de voir comment le texte de progression peut être appréhendé par des professeurs non expérimentés et de s'intéresser à « ce qui peut être rencontré partout », en considérant toute circonstance d'enseignement/apprentissage, tout objet de transmission culturelle et donc tout représentant de la situation (enseignant et élèves), comme légitime et pertinent » (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002, p. 228). Cette étude complète celle menée auprès de P.

4.2. Choix de l'année d'observation et des séances

L'ensemble des données filmiques captées dans la classe de P est destiné à l'équipe de recherche. Ces données ont parfois servi de supports d'exemples de mise en œuvre des modules lors des réunions de régulation avec les professeurs des classes expérimentales[64]. Ces vidéos sont stockées sur un espace numérique de l'ESPE de Bretagne dédié à la recherche ACE auquel tous les membres de la sphère 1 ont accès. Une caméra est restée à demeure dans la classe de P pendant quatre ans pour qu'elle puisse filmer elle-même certaines séances lorsqu'aucun membre de la sphère 1 ne pouvait se déplacer. Ainsi, de nombreuses séances captées l'ont été par la professeure elle-même du fait de son éloignement géographique (170 km) de l'ESPE de Bretagne (site de Rennes).

[64] Des extraits d'autres séances filmées dans les classes d'étude mais aussi expérimentales ont été projetés lors de ces réunions et analysés collectivement.

Nous produisons ci-dessous un tableau (cf. Tableau 10) reprenant les séances filmées sur les deux années sur lesquelles s'appuie notre recherche.

Module	2012-2013	2013-2014
Module 1		Séance 3 : 19-09-13
		Séance 4 : 20-09-13
Module 2		Séance anticipation : 26-09-13
		Séance 1 : 27-09-13
		Séance 2 : 03-10-13
Module 3		Séance 1 : 10-10-13 ?
Module 4	Séance 2 : 25-10-12	Séance anticipation 06-11-13
		Séance 1 : 06-11-13
		Séance2 : 08-11-13
Module 7		Séance 1 : 16-12-13
		Séance 2 : 19-12-13
		Séance 3 : 06-01-14
		Séance 4 : 09-01-14
Module 8		Séance 2 anticipation : 29-01-14
Module 9	Séance 1 : 02-13	Séance anticipation : 24-02-14
	Séance 4 : 19-02-13	Séance 1 : 24-012-14
		Séance 2 : 27-02-14
Module 10	Séance 1 : 11-04-13	
	Séance 2 : 12-04-13	
Module 11	Séance d'anticipation	
	Séance 1 : 16-05-13	
	Séance 2 : 17-05-13	

Tableau 10 : vision synoptique des séances filmées par P

Nous avons fait le choix de nous centrer sur les séances filmées lors de l'année 2013-2014. En effet, l'année 2012-2013 correspondait à un travail important de régulation des textes de modules par la sphère 1 en collaboration avec les classes du groupe expérimental. Ce choix de l'année d'observation a donc été motivé par le fait que 2013-2014 correspondait à la dernière mouture (à l'heure actuelle) de la progression du domaine « Situations ». Cette dernière version est depuis septembre 2014 accessible sur le site Internet de la recherche à l'ensemble des professeurs intéressés et implémentée dans des classes de CP sur l'ensemble du territoire.

Le choix des séances étudiées a été dicté par notre objet de recherche, la continuité de *l'expérience mathématiques* des élèves et les systèmes de représentation. Pour étudier cette continuité, nous avons, tout d'abord, porté notre attention sur l'introduction des systèmes de

représentation au début de l'année scolaire sur deux modules. Pour cela, nous avons sélectionné les quatre séances filmées du module 1 et 2 :

- module 1 : séance 3 du 19-09-13, séance 4 du 201-09-13 ;

- module 2, séance 1 du 27-09-13 et la séance 3 du 03-10-13(cf. Tableau, 10).

Ces deux modules introduisent la situation initiale du « jeu des annonces ». Ainsi, lors du premier module, les élèves choisissent un nombre, le montrent sur deux mains et le comparent avec un lancer de dé à six faces. Le second module voit l'introduction de l'écriture mathématique. Comme on l'a vu, il constitue de fait une "version écrite" du module 1. Les élèves produisent une écriture additive à deux termes (chaque terme est inférieur ou égal à cinq) et la comparent à un nombre inférieur ou égal à six (à un lancer de dé à six faces). Lors de ces deux modules, les systèmes de représentation du nombre sont présents : le train-cubes, le schéma-train, les doigts, le schéma-ligne, le schéma-boite et l'écriture symbolique. Ces représentations seront travaillées, expérienciées[65] par les élèves tout au long de la progression. Ces deux modules nous donnent donc à voir et à comprendre comment ces différentes représentations sont mises en relation et leur usage dans des situations de comparaison.

Dans un second temps, nous nous centrons sur le module 7 se déroulant en décembre 2013 et janvier 2014. Il introduit un nouveau savoir mathématique, la différence en tant qu'écart entre deux nombres. L'objectif de l'étude est de donner à voir et à comprendre comment les systèmes de représentation sont réinvestis dans l'action conjointe pour travailler cette notion de différence.

4.3. Traitement des données

Nous étudions comment les savoirs mis en évidence lors de l'analyse des textes curriculaires peuvent vivre in situ au sein des transactions. Dans l'étude de cette pratique de classe, nous nous situons donc dans une région située entre l'approche clinique et l'approche expérimentale.

Expérimentale puisque l'ingénierie didactique, productrice des séances implémentées, introduit des perturbations dans l'action ordinaire du professeur. Cependant, les conditions de l'expérience peuvent être considérées comme assimilées dans la pratique ordinaire de P puisque nous étudions la troisième année d'implémentation du curriculum dans sa classe.

[65] Expérienciation vue comme une expérience vécue, éprouvée par le sujet (cf. Chapitre 2).

L'entretien que nous avons mené avec P montre bien cette évolution Ainsi, à la question sur l'évolution des mises en œuvre des séances au cours de différentes années d'expérimentation, elle répond ainsi ceci :

> *« Je prends plus de liberté puisque je ne suis plus dans la situation de tester un déroulement. J'anticipe mieux aussi sur les séances à venir, sur ce qui se travaille dans les autres domaines et j'arrive plus facilement à faire des ponts ».*

Il y a donc une transformation des textes par P en vue de leur actualisation dans la classe (Ligozat, 2010). Nous pouvons dire alors que nous nous situons dans une approche clinique.

Nous n'avons pas réalisé d'entretien pré et post séance puisque nous n'étions pas présents lors du filmage des séances étudiées mais nous avons conservé l'ensemble des comptes rendus de séances rédigés par cette professeure. Ceux-ci vont pouvoir venir éclairer sa pratique.

De plus, et c'est un aspect qui nous semble important, P a produit des commentaires directement sur les analyses produites dans ce travail de thèse (cf. Chapitres 6 et 8) sur sa propre pratique. Nous les avons intégrés dans le corps du texte. Ces commentaires viennent éclairer l'interprétation des données comme cela peut être le cas avec les entretiens pré et post séances. Cette démarche est organique à notre posture de chercheur dans une ingénierie coopérative.

Dans le paragraphe suivant, nous présenterons le traitement des données vidéoscopées collectées dans la classe de P.

4.3.1. La vision synoptique

La réduction des données filmiques de la pratique apparaît nécessaire lorsqu'on considère les films comme analogon de l'action. Dans ce travail, cette réduction s'est opérée par la production de synopsis d'action qui va venir résumer l'action en proposant une forme d'unité à la pratique (Sensevy, 2001c), en situant la partie dans le tout.

Nous avons, dans un premier temps, produit un synopsis pour l'ensemble des séances filmées dans la classe de P sur l'année scolaire soit dix-sept séances. Ces synopsis ont été élaborés après le visionnement des séances. Cette première réduction des données a été nécessaire pour dégager le fonctionnement du système didactique. En effet, l'usage des tableaux synoptiques « vise d'une part à réduire l'information et à repérer/situer les systèmes d'évènements candidats à une analyse plus fine (Schubauer-Léoni & al, 2007, p. 62).

En exemple, nous présentons ci-dessous un extrait du synopsis que nous avons réalisé pour la séance 3 du module 1.

Phases	Scène et durée	Temps	Modalités	Description brève des contenus
Jeu des annonces	Retour sur les référentiels sur le jeu des annonces 8'06''	(0:00:00.0)	collectif	Rappel des règles du jeu des annonces en appui sur les référentiels produits par le collectif dans les séances précédentes - rôle de l'arbitre - découvertes faites (rôle du zéro, domaine numérique
	Jeu des annonces oral 30'03''	(0:08:06.2)	jeu par équipe	Les élèves jouent au jeu des annonces à l'oral par équipe de quatre. Annonce gagnante si égale au lancer.
		(0:30:03.1)	Collectif	Mise en commun des découvertes réalisées lors de la phase de jeu par équipe
	Traduction d'une annonce par des systèmes de représentation 08'25''	(0:37:20.5)	Collectif	Retour sur une annonce produite lors du jeu par équipe 2+3 par Mar - Dessin au tableau par Mar d'un schéma-train de 3 carrés rouges - Construction par PES1 d'un train-cube de trois wagons. Mise en correspondance par PES1 du schéma-train et du train-cube. - Correspondance entre les doigts levés sur la main gauche de Mar et l'énoncé de Mar par PES1. - PES1 emboîte deux cubes bleus avant des trois rouges. - Mar dessine deux carrés bleus à la suite des rouges sur le schéma-train. - Traçage des ponts sous le schéma-train (intervention de PE2, rappel d'une situation ultérieure. Intervention d'une élève pour aider Mar : Lou explique à Mar comment tracer les ponts. - Ecriture des cardinaux des deux sous- collections sous les ponts par Mar. - Traçage du pont de la somme de l'annonce par Mar avec l'aide de Lou E -Ecriture du cardinal de la collection.
		(0:44:48.8)	collective	synthèse par PES1 mise en correspondance entre l'annonce, le train-cube et le schéma-train.

Tableau 11 : extrait du synopsis de la séance 3 du module 1

La première colonne répertorie les différentes phases de chaque séance. Chaque phase est découpée en scènes (seconde colonne).

Nous reprenons ici la définition proposée par Sensevy (2011a) de scène didactique

> « les scènes didactiques » se déclinent en général par une « entrée en matière » -qui annonce une nouvelle scène et la démarque de la précédente, par une « conclusion » » (Ibid. p, 134).

Ces scènes sont ici repérées au visionnement du film et à partir du contenu épistémique des transactions didactiques.

La troisième et quatrième colonnes présentent respectivement le défilement temporel de la séance et les modalités de mises en œuvre (collectif, individuel…).

La dernière colonne décrit de manière brève le contenu des scènes que le découpage met en lumière.

A partir de ce premier synopsis d'action, nous avons produit un second tableau qui intègre des éléments nouveaux qui permettent de repérer de manière plus précise l'usage des systèmes de représentation du nombre. Nous illustrons notre propos à partir du tableau ci-dessous (cf. Tableau 12)

	Sujet de la séance	Support	Découpage en jeux d'apprentissage	Capacité	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Module 1 séance 3 (PES1) 19-09-13	Retour sur les référentiels du jeu des annonces oral.	Référentiel des découvertes et des règles du jeu	Faire se remémorer comment jouer au jeu des annonces			
	- Jeu des annonces : égalité entre une annonce produite sur deux mains et un dé à six faces.	Jeu par équipe	Faire produire à l'oral une décomposition de deux sous-collections à deux mains égale au lancer d'un dé à six faces.	- réinvestissement de la notion d'égalité -Réinvestissement des capacités de désignation d'un même nombre sous forme de deux sous-collections	.	
	-Traduction d'une annonce par les systèmes de représentation	Collectif à partir d'une annonce produite par un élève avec deux mains	Faire traduire une décomposition de deux sous-collections par différentes représentations du nombre : les	- Réinvestissement des capacités de désignation d'un même nombre sous forme de deux sous-collections - Réinvestissement de la capacité de	Introduction du train-cubes et du schéma-train pour représenter le lancer et le comparer avec l'annonce	Traduction d'une décomposition en deux sous-collections d'un nombre inférieur ou égal à 6 (annonce à deux mains) par un schéma-train.

Tableau 12 : extrait d'un tableau analytique

La première colonne rappelle le nom et la date de la séance. La seconde et la troisième colonne reprennent le découpage en scènes proposé dans le synopsis initial ainsi que les modalités de mise en œuvre (cf. Tableau 10, ci-dessus).

La quatrième colonne propose une première modélisation des différentes scènes proposées en jeux d'apprentissage. Comme le souligne Sensevy (2011a)

> « on peut identifier un jeu d'apprentissage par une modification relativement importante de la configuration didactique, qui correspond à l'introduction, dans l'action conjointe, d'un enjeu de savoir (…) chaque transformation effective c'est-à-dire chaque transformation épistémique, des modes de transaction didactique peut s'appréhender sous le modèle d'un jeu d'apprentissage » (Ibid. p. 135-136).

La cinquième colonne met en évidence les capacités épistémiques, en tant que savoir-faire que le jeu d'apprentissage introduit ou réactive. Cette modélisation des connaissances déjà-là ou en cours de construction permet de voir comment dans la succession chronologique des modules et des séances, les connaissances sont actualisées tout au long de la progression. Comme nous n'avions pas à notre disposition l'ensemble des séances menées par P, nous nous sommes appuyés sur les analyses des textes curriculaires (capacité cible) pour reconstruire (partiellement) ces capacités.

La sixième colonne présente le nouvel enjeu de savoir introduit dans la séance. Dans l'exemple proposé ci-dessus, le nouveau savoir se nomme « introduction du schéma-train et schéma-cubes pour représenter le résultat du lancer d'un dé à six faces ».

La dernière colonne montre les différentes traductions représentationnelles activées pendant la séance.

Nous avons ainsi reconstruit l'avancée des savoirs en fonction des dix-sept séances mises à notre disposition dans la classe de P.

Ce tableau analytique est donc une première forme d'analyse à gros grain, une première forme de modélisation de chaque séance. Il met en évidence l'avancée des savoirs à travers la succession des jeux d'apprentissage et l'évolution du système capacitaire[66] des élèves. La mise en lumière des moments d'introduction de nouveaux contenus de savoirs et du jeu représentationnel[67] (Sensevy, 2011a ; Brousseau, 2004) mis en œuvre dans chaque séance nous a amené à situer de manière plus fine les évènements clefs en fonction de nos questions de recherche.

Ces deux tableaux (synopsis d'action et tableau analytique) nous ont permis de réduire les informations apportées par les films d'étude tout en gardant l'empan temporel des séances. Ainsi, chaque unité d'analyse n'est pas isolée, elle peut se référer à l'ensemble d'une séance et/ou à un ensemble de séances à des niveaux d'échelle différents. Certaines unités organiquement séparées ont pu être ainsi mises en relation. Par exemple, dans notre étude, l'usage des systèmes de représentation dans le module 7 a pu être mis en relation avec les capacités construites au cours des modules 1 et 2 du domaine « Situations » (trois mois s'étant écoulés entre le module 1 et 7).

Ainsi, le croisement des deux tableaux (synopsis d'action et tableau analytique) nous a permis dans un premier temps de nous rendre familier de la pratique et de nous l'approprier (Sensevy, 2011d). Dans un second temps, il a fait apparaître une structuration de la pratique sur un empan temporel long. Dans un troisième temps, par cette connaissance plus fine des séances, nous avons localisé des épisodes candidats et extrait certains éléments, en fonction de nos objectifs de recherche, la continuité et les systèmes de représentation, le synopsis invitant « à l'exploration plus fine de certaines unités de ce découpage » (Sensevy, 2011d, p. 258).

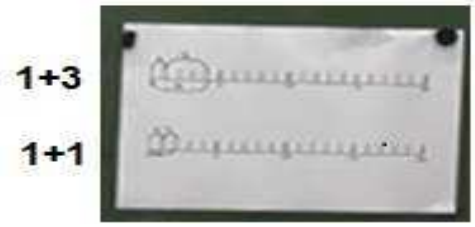
---

[66] Le système capacitaire est le système stratégique avec lequel les élèves et le professeur abordent un nouveau savoir. Il renvoie à la notion de skill, de savoir-faire (cf. Chapitre 3).

[67] Ce jeu représentationnel repose sur six composants : le représenté ; le représentant ; la relation de représentation (au sens de Brousseau, 2004), le représenteur ; l'adressé ; le style de pensée (Fleck, 2005) dans lequel s'exprime le processus de représentation et qui est commun au représenteur et à l'adressé au sein d'un collectif de pensée (cf. Chapitre 2).

4.3.2. Les transcriptions

Les extraits sélectionnés ont été, dans un second temps, transcrits à partir du logiciel d'analyse vidéo Transana. Pour accompagner ces transcriptions nous avons intégré des photogrammes, soit dans le corps du texte soit directement dans la transcription pour maintenir « la perception des images auxquelles le transcript est associé » (Sensevy, 2011d, p. 247). Ceci nous a permis des allers-retours entre le digital et l'analogique[68]. En effet, l'analogique (la dépiction) apporte plus d'« informations » que le digital (la description). Cet apport permet de circonscrire les possibilités d'interprétation de la réalité (Ibid.). Nous donnons ci-dessous un exemple de cette incrustation au sein du transcript de photogramme.

 **Photogramme 11 : représentation de deux écritures additives sur les schémas-lignes**	**Tdp 79-Els** : Félicien **Tdp 80-P** : De Félicien [Anaëlle trace deux ponts *consécutifs d'un intervalle et inscrit au*-dessus de chaque pont le nombre 1 puis trace un pont de deux intervalles en dessous du schéma-ligne et note le nombre 2]. Et l'annonce de Félicien fait ? **Tdp 81-Els** : deux

Transcription 2 : exemple d'incrustation dans la transcription

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus (cf. Transcription 2) le photogramme (la dépiction) montre comment les élèves ont représenté les deux écritures additives sur le double schéma-ligne. Il permet donc de situer clairement la description effectuée au sein de la didascalie du Tdp 80.

De plus, au sein de l'analyse des épisodes sélectionnés, nous avons introduit des photogrammes pour donner à voir au lecteur le langage corporel (Forest, 2006) en segmentant la gestuelle du professeur et celui de l'élève. Nous avons pour certains photogrammes ajoutés, dans des bulles, les paroles des actants pour illustrer de manière précise nos analyses comme nous montre le photogramme suivant (cf. Photogramme 12)

[68] Les images filmiques sont analogiques à la réalité. Elles sont un mode de communication sur les relations (Winkin, 2001). Elles réduisent le nombre de « possibilités d'interprétation » de la réalité en apportant davantage d'informations. Ces représentations analogiques sont denses et peuvent donner lieu à un très grand nombre de descriptions (Sensevy, 2011d.) La communication digitale est, quant à elle, un mode de communication sur le contenu (les choses) (Winkin, 2001). Elle est lacunaire dans le sens où elle échoue à « établir de la catégorisation, à considérer deux éléments différents comme étant les mêmes » (Sensevy, 2011d, p. 225).

Photogramme 12 : extrait du chapitre 5

4.3.3. Mise en intrigue

La mise en intrigue est « le récit des transactions didactiques dans une situation particulière » (Sensevy 2011d, p. 259). Elle vient compléter ici le synopsis d'action et le tableau analytique en donnant à voir l'enchaînement, les rapports, les connexions des évènements entre eux dans un rapport d'antécédence et de conséquence. Un évènement antécédent est alors interrogé en tant que possible source (Ibid.) de ce qui suit. En effet, le synopsis construit des connexions entre différentes entités, dans un tableau, alors que l'intrigue établit ces connexions dans le récit. Pour rendre compréhensible le jeu des transactions didactiques pensé par la théorie de l'action conjointe en didactique, il est nécessaire que le chercheur comprenne ce jeu et en devienne un connaisseur (Bazin, 2008, Gallie, 1964). La mise en intrigue va donc permettre de comprendre à quel jeu joue les agents. Sa production dans un langage familier de l'action doit être neutre et autorisée une sorte de suspension théorique.

Nous avons produit une mise en intrigue pour chaque séance analysée afin de couvrir l'ensemble de l'empan temporel de celle-ci, pour « suivre l'histoire » et ainsi appréhender la durée didactique. L'extrait ci-dessous nous donne un exemple de cette mise en intrigue.

> *Lors de la première phase, PES2, professeure débutante, rappelle les règles du jeu des annonces aux élèves : la professeure est l'arbitre, les élèves secouent les doigts, proposent une annonce sur leurs deux mains et la montrent. PES2 lance le dé. Si les élèves pensent que leur annonce est gagnante alors ils gardent les mains levées (extrait d'une mise en intrigue d'une séance, chapitre 5).*

Cette mise en intrigue va ainsi situer les évènements sélectionnés dans le défilement du récit didactique produit.

Dans un second temps, nous avons produit pour chaque extrait analysé une mise en intrigue réunissant des citations de tours de parole et de la narration (Assude & Mercier, 2007).

> *« PES1 reprend la proposition de cet élève au tdp 13 « on pourrait choisir une couleur, deux rouges, deux bleus, on peut choisir ». Elle présente ensuite un code couleur pour représenter les cubes (main*

droite en rouge et main gauche en bleu) en lien avec les affiches présentes des deux côtés du tableau qui désignent le côté gauche et droit. La professeure précise toujours au tdp 13 « on va garder la même règle pour dessiner nos trains » (extrait d'une mise en intrigue, chapitre 5).

Ces deux mises en intrigue vont venir se compléter en apportant des indications quant au jeu didactique joué dans les transactions.

4.4. Choix des épisodes analysés

Notre observation des échanges au sein de l'ingénierie didactique coopérative nous a amené à mettre en évidence deux moments spécifiques. Ces moments se focalisent autour de la recherche d'une forme de continuité didactique à travers le réagencement de certains modules.

Le premier se centre sur la réorganisation des premiers modules (module 0, 1 et 2) en lien avec l'introduction du schéma-ligne et des difficultés des élèves à comprendre son usage.

Le second intervient plus tard dans la progression lors de l'introduction de la notion de différence. En effet, les élèves connaissent des difficultés pour comprendre cette notion et réinvestir les systèmes de représentation connus.

Après avoir donc étudié le dialogue ingénierique et son effet sur la textualisation des savoirs, nous avons choisi d'explorer, comme nous l'avons énoncé ci-dessous, six séances filmées dans la classe de P. Ces six vidéos correspondent à la mise en œuvre des modules 1, 2 et 7 (module sur la différence) et donc aux deux moments sélectionnés d'échanges au sein de l'ingénierie.

A partir des synopsis et des tableaux analytiques réalisés pour chaque séance, nous avons mis en évidence des évènements remarquables autour de l'introduction de nouveau savoir et du jeu représentationnel (cf. Tableau 12).

4.4.1. Le module 1

Pour les deux premières séances du module 1 (Séance 3 du 19-09-13 et Séance 4 du 20-09-13), nous avons sélectionné des épisodes qui donnent à voir comment se construit l'usage des systèmes de représentation à travers la comparaison orale d'une annonce produite à deux mains et un lancer de dé à six faces. Nous avons mené notre enquête pour voir comment, dans l'action conjointe, se construit un jeu représentationnel à travers la production d'une référence mutuelle entre les représentations matérielles, analogiques et symboliques. Comment ces différentes représentations peuvent-elles modéliser une situation-problème.

Il est important de préciser que ces deux séances du module 1 sont menées par deux professeures débutantes.

Ainsi, lors des séances 3 et 4, nous avons sélectionné trois événements (respectivement Extrait 1 et Extraits 2 et 3) aux cours desquels les élèves réexpériencient les systèmes de représentation (le schéma-train et le train-cubes) mobilisés lors du module 0 dans une nouvelle situation, le jeu des annonces.

Ces deux événements se complètent dans la mesure où le premier donne à voir comment, dans l'action conjointe, la représentation d'une annonce sur deux mains peut être elle-même représentée, traduite par différentes autres représentations (analogique, matérielle). Le second montre comment ces représentations peuvent être réinvesties pour comparer une décomposition d'un nombre sous forme de deux sous-collections et le résultat d'un lancer de dé à six faces. Le troisième introduit un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne et se centre d'une part sur le rôle du zéro et d'autre part sur les traductions entre systèmes de représentation.

4.4.2. Module 2

Les deux séances sélectionnées lors du module 2 sont menées cette fois-ci par la professeure titulaire de la classe.

Nous avons sélectionné deux événements-clés qui montrent comment les systèmes de représentation sont réexpérienciés dans une nouvelle situation, la comparaison d'une écriture additive à deux termes avec un nombre (≤ 6) en référence au jeu des annonces à l'oral.

Au cours de la première séance, nous avons sélectionné un événement (Extrait 4) qui donne à voir comment l'usage des systèmes de représentation déjà connus des élèves permettent un rapport spécifique à la référence, dans la dénotation. Nous conjecturons que la compréhension de l'écriture mathématique peut être facilitée par sa mise en relation avec d'autres systèmes de représentation (analogique et matériel).

Lors de la seconde séance, nous avons sélectionné un évènement (Extrait 5) au cours duquel l'usage des systèmes de représentation est réexpériencié par les élèves lors de la comparaison d'une écriture additive et un nombre. Cet extrait introduit les signes « = » et « ≠ » pour désigner cette comparaison. Le choix de ces événements est dicté dans ces deux premiers modules par la volonté d'étudier comment se construit dans l'action conjointe un jeu

représentationnel et comment celui-ci autorise une continuité dans l'expérience des élèves dans deux situations didactiques successives.

Dans un second temps, nous avons voulu continuer notre enquête sur l'usage de ces systèmes de représentation dans une nouvelle situation qui introduit la notion de différence.

4.4.3. Module 7, la différence

Toujours à partir des synopsis des séances et des tableaux analytiques, nous avons sélectionné dans la première séance (16/12/13) un événement remarquable (Extrait 6) au cours duquel les élèves recherchent la différence entre deux nombres en s'appuyant sur les systèmes de représentation connus.

Le second évènement (Extrait 7) donne à voir comment dans l'action conjointe, les élèves enquêtent sur la désignation de la différence par une écriture symbolique, toujours en usant des systèmes de représentation.

Lors de la seconde séance du 19/12/13, nous avons, de même, sélectionné un événement (Extrait 8) qui présente comment les élèves réexpériencient l'usage des représentations dans une situation de recherche de différence entre deux écritures additives.

Les choix de ces évènements ont pour objectifs de donner à voir comment le nouveau réagencement des modules et des savoirs au sein des modules autorisent une continuité de l'expérience des élèves. En effet, nous conjecturons que la construction dans l'action conjointe d'un jeu représentationnel entre des représentations concrètes, analogiques et symboliques autorise cette continuité.

5. Courte synthèse du chapitre 4

La construction de notre méthodologie repose sur notre cadre théorique et renvoie à nos questions de recherche. L'étude de la construction d'une continuité de l'expérience des élèves à travers les systèmes de représentation au sein d'une ingénierie didactique coopérative requiert, comme nous l'avons décrit ci-dessus, une méthodologie complexe. Elle nécessite un suivi sur un temps long, deux années consécutives (2012-2014).

Les trois volets de notre travail, le dialogue d'ingénierie, l'analyse des textes curriculaires et l'étude de la pratique effective s'éclairent l'un l'autre et exige la mise en place de différentes méthodologies de recueil, de traitement et d'analyse des données.

5.1. Le dialogue d'ingénierie

Les outils méthodologiques instaurés pour rendre compte du dialogue intra et inter-sphère (2012-2013) permettront de croiser des données différentes (données prélevées sur le forum du site Internet de la recherche, sur les listes de diffusion, dans les réunions…). Ce regroupement de données mettra en évidence certains moments d'échanges entre professeurs et chercheurs liés à la nécessité de construire une continuité entre les modules mais aussi entre les séances de chaque module. Cette nécessité émane de l'expérience des professeurs et des élèves dans la mise en œuvre effective des modules.

A partir des données recueillies, nous avons sélectionné deux moments-clés. Le premier est lié à l'introduction des systèmes de représentation et en particulier du schéma-ligne. Cette introduction sera étudiée à travers le dialogue d'ingénierie et le réagencement des premiers modules (chapitre 5). Le second se centre sur l'introduction de la notion de différence (chapitre 7).

5.2. L'étude des textes de la progression

Afin de donner à voir les effets de ce dialogue sur la reconstruction des textes de la progression, il a été nécessaire, dans un premier temps, d'analyser la première version des textes de progression (2012-2013). Cette première étude donnera à voir l'arrière-plan contractuel sur lequel se construit le dialogue entre les différents membres de l'ingénierie. De plus, elle permettra de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves lors des mises en œuvre de certaines séances. Ainsi, pour étudier ces textes, nous mobiliserons principalement les concepts de jeux d'apprentissage et de capacités cibles. Nous faisons l'hypothèse que cela mettra en évidence la continuité et les ruptures dans l'avancée des savoirs proposée par les textes des modules.

Dans un second temps, l'analyse de la seconde version des textes curriculaires (2013-2014) donnera à voir la nouvelle textualisation des modules et donc les effets possibles du dialogue inter-sphères sur la reconstruction de la progression. Cette réécriture des modules a été faite progressivement par la sphère 1 tout au long de l'année 2013-2014.

Nous appellerons les mêmes concepts que précédemment, jeu d'apprentissage et capacités cibles, pour étudier l'avancée des savoirs.

L'analyse des textes curriculaires vient donc éclairer l'étude du dialogue d'ingénierie et la genèse des formes de l'action didactique dans la pratique effective.

5.3. L'analyse de la pratique effective

Le troisième volet de notre étude, l'analyse de la pratique effective dans la classe d'une professeure d'une classe d'étude (membre de l'équipe de recherche) a nécessité une prise de données sur l'ensemble de l'année scolaire 2013-2014. En effet, nos questions de recherche nous amènent à étudier la continuité de l'expérience des élèves à travers l'usage des systèmes de représentation. Cette continuité sera analysée à deux moments différents de l'année, en septembre/octobre et en décembre/janvier lors de l'introduction des systèmes de représentation dans des situations de comparaison additive (Chapitre 6) et lors de l'introduction de la notion de différence (Chapitre 8).

Pour étudier la continuité de l'expérience, il a été nécessaire de produire un synopsis et un tableau analytique de chaque séance filmée. L'articulation entre ces deux tableaux nous a permis de décrire plus précisément le système capacitaire élaboré dans l'action conjointe. Dans l'analyse des séances et épisodes sélectionnés, nous avons pu ainsi reconstruire les connaissances déjà-là des élèves avec lesquelles ils abordent un nouveau milieu-problème.

L'analyse des extraits sélectionnés donnera à voir comment les professeurs (deux professeures débutantes et la professeure titulaire) s'emparent de la progression et quelles sont les stratégies professorales mises en place. Comment un jeu représentationnel, une mise en traduction entre représentation se construisent-ils dans l'action conjointe, sur un temps long et comment ce jeu est-il réexpériencié par les élèves dans une nouvelle situation ?

Les trois volets de notre étude ont donc nécessité la mise en place d'une méthodologie spécifique qui est en cohérence avec nos questions de recherche et notre cadre théorique. Nous avons construit des outils pour un suivi longitudinal d'une ingénierie coopérative ainsi que pour le suivi d'une classe sur l'ensemble de la progression du domaine « Situations ».

L'articulation de ces données entre elles nous permettra de répondre à nos questions liées à la construction d'une continuité didactique de l'expérience des élèves au sein d'une textualisation du savoir et dans une pratique effective sur un empan temporel long.

Deuxième partie : Analyse

CHAPITRE 5 : Coopération chercheurs/professeurs. Introduction des systèmes de représentation

La conception du domaine « Situations » repose sur une ingénierie didactique coopérative (Sensevy, Forest, Quilio & Morales, 2013) regroupant deux sphères, la sphère 1, l'équipe de recherche et la sphère 2, les classes du groupe expérimental. Cette ingénierie se fonde sur un contrat de recherche qui ne cantonne pas les professeurs du groupe expérimental à un rôle d'opérateurs, mais de (co)-concepteurs du curriculum. Mais comment fonctionne réellement cette coopération entre les sphères 1 et 2 ? Les échanges entre les deux sphères sont facilités (comme nous l'avons vu dans les chapitres 1 et 4) par la mise en place de certains moyens de communication virtuels et en présence. Nous avons choisi d'étudier dans ce chapitre un aspect de cette coopération qui prend sa source lors de la mise en œuvre des premiers modules du domaine « Situations » pendant la seconde année d'expérimentation (2012-2013). En effet, un certain nombre de problèmes a été relevé par la sphère 2 via le forum du site Internet de la recherche lors de l'implémentation du module 2. Les commentaires postés mettent en évidence les difficultés des élèves à passer du jeu des annonces à l'oral (produire une annonce à deux mains et la comparer à un lancer de dé à six faces, module 1) au jeu des annonces à l'écrit (produire une écriture additive à deux termes et la comparer avec un nombre ≤ 6, module 2). Celles-ci sont amplifiées par des obstacles liés à l'utilisation de systèmes de représentation du nombre introduits dans ce second module, le schéma-ligne et le schéma-boîte. Pour permettre au lecteur de se repérer, le tableau ci-dessous (cf. Tableau 13) donne à voir l'organisation des modules du domaine « Situations » en début d'année (2012-2013).

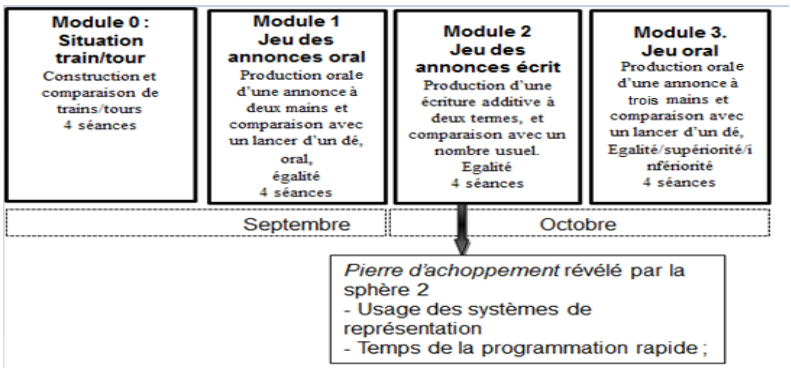


Tableau 13 : chronologie des modules

Le module 2 est le troisième module du domaine « Situations » après le module 0, train/tour et le module 1, le jeu oral des annonces. Il propose une transposition du jeu oral des annonces à l'écrit. Les élèves produisent une écriture additive à deux termes et la comparent avec un nombre usuel (≤ 6). Ce tableau révèle le moment de la progression au cours duquel émerge un obstacle important dans l'avancée des savoirs.

Notre travail de recherche nous amènera à étudier, dans ce cadre précis, comment le dialogue inter-sphères (sphère 1 et sphère 2) et intra-sphère a conduit à des prises de décisions didactiques au cours de l'année 2 (2012-2013) et l'année 3 (2013-2014) qui ont amené in fine à la réécriture des quatre premiers modules. Il s'agit de comprendre les raisons d'être des modifications apportées dans les premiers modules du domaine « Situations ».

La première section de ce chapitre mettra en évidence à partir des commentaires des professeurs du groupe expérimental (sphère 2) et de l'équipe de recherche (sphère 1) les difficultés attestées lors de la mise en œuvre de ce module 2. Puis dans une seconde section, nous nous centrerons sur les raisons de l'apparition de ces difficultés. Pour cela, nous examinerons tout d'abord l'agencement des savoirs, la mise en texte des savoirs (Chevallard & Mercier, 1987) au sein des trois premiers modules à travers l'étude des textes curriculaires, documents détaillant les différentes phases de mise en œuvre des séances. Puis, notre attention se focalisera plus spécifiquement sur le texte curriculaire du module 2. Dans une troisième section, nous étudierons comment, à travers une certaine forme de coopération entre les deux sphères, une régulation immédiate s'est opérée pour pallier les difficultés rencontrées par les élèves pendant l'année 2012-2013, notamment sur l'usage du schéma ligne. La quatrième section, quant à elle, se centrera sur la seconde phase de coopération inter-sphères qui va aboutir à la réécriture des trois premiers modules par l'équipe de recherche. Les

nouveaux textes curriculaires issus de la réécriture seront analysés dans une cinquième section. La dernière section sera consacrée à la synthèse de ce chapitre 5.

1. Le schéma-ligne : pierre d'achoppement

Dans cette première section, nous mettrons en évidence comment les échanges effectués via les outils de communication mis à la disposition des professeurs des classes expérimentales et de l'équipe de recherche (site Internet, listes de diffusion, réunions) ont révélé les difficultés des élèves au cours de l'implémentation du module 2. Nous recenserons et croiserons ici les difficultés mises au jour par les deux sphères.

1.1. Relevé d'expériences des professeurs expérimentaux

Au cours de la mise en œuvre du module 2, le 2 octobre 2012, une discussion s'est engagée entre quelques professeurs du groupe expérimental sur le forum du site Internet de la recherche. Module 2 dont la mise en œuvre était prévue du 26 septembre au 4 octobre 2012 comme nous le montre l'extrait du document « Programmation » ci-dessous (cf. Tableau 14).

Jour	Situation (séances longues)
Lundi 24/09	Sit Mod 1,3 Production orale d'annonce à deux mains (chaque terme = 5 et somme = 6)) et comparaison avec un lancer de dé à 6 faces
Mardi 25/09	Sit Mod 1,4 Production orale d'annonce à deux mains (chaque terme = 5 et somme = 6)) et comparaison avec un lancer de dé à 6 faces
Jeudi 26/09	Sit Mod 2,1 Production d'écritures additives à deux termes (chaque terme =5, somme =6) et comparaison avec un nombre usuel (=6)
Vendredi 27/09	Est Mod 1: estimateur (collections)

Tableau 14 : extrait du document "Programmation"

Ces échanges portaient sur les difficultés éprouvées par les élèves lors de l'implémentation du module. 2 La copie d'écran du forum du site de la recherche (cf. Tableau 15) ci-dessous donne à voir ces discussions. Chaque discussion est constituée d'encarts imbriqués les uns dans les autres (par exemple, la première discussion débute par la question posée par « nanault » à laquelle répond « nmeheust » …)

.

Le 1 octobre 2012 à 13 h 19 min, menault a dit : Modifier

bonjour
Je voulais dire que j'ai énormément de difficulté à faire remplir les feuilles de parties fictives du module 2 situation par les élèves. Il y a beaucoup trop de contraintes, et les enfants perdent toute notion du sens. Est ce pareil pour vous?

Répondre

Le 2 octobre 2012 à 18 h 52 min, mmeheust a dit : Modifier

oui je sens que la moitié du groupe décroche. ils ont trop de nouvelles informations en même temps à intégrer: passage à l'écrit de l'annonce, boîte de fisher, règle...
cela me paraît trop abstrait d'un coup.
j'ai le sentiment que le protocole à suivre va trop vite pour les modules SIT.
la feuille de calcul de ce matin a été difficile aussi à faire suivre.j'ai fait les 5 premiers calculs d'un coup puis correction et les 5 suivants. on a mis un petit trait sous chaque bonne réponse et recompter le total des points à la fin et inscrit le score au bout de la ligne dans une bulle.
voilà
je suis ce soir un peu inquiète pour mes élèves qui décrochent.

Répondre

Le 2 octobre 2012 à 20 h 28 min, menault a dit : Modifier

Merci, ça rassure de voir que je ne suis pas la seule. Moi c'est le repérage sur la règle graduée qui est compliqué, surtout les deux sauts consécutifs. Il aurait fallu avoir le temps de l'étudier avant.
Je suis obligée de les guider individuellement. Et je pense que je vais devoir les refaire jouer avec le dé et les doigts car comme toi, la moitié de la classe ne comprend pas les situations abstraites.
Et je n'ai pas commencé la feuille 3.

Répondre

Le 2 octobre 2012 à 21 h 57 min, Catherine Le Reun a dit : Modifier

moi aussi ça m'a paru hors de portée. mais lors de la séance de ce jour, des progrès fulgurants apparaissent. les choses semblent se mettre en place.
certains 3/12, ont fait toutes les parties fictives (très à l'aise). d'autres 2 parties fictives 6/12 et 2 seulement n'ont fait que la partie fictive 1 (j'ai un absent pour scarlatine). (sinon j'ai 8 CE1, mais je ne fais pas ça avec eux.)
la boîte de fisher aucun problème.
la difficulté reste sur la droite graduée. on a fait le parallèle avec le train en faisant un petit pont entre deux graduations pour compter les cubes ex 2+3 c'est 2 cubes rouges (2 ponts) puis 3 cubes verts 3 ponts, cela fait un train de 5 cubes (cuvette par en-dessous) c'est une idée venue de trois enfants (moins avancés)et maintenant tout le monde y arrive.
la séance avant parties fictives fiche 4 a été faite deux fois la première fois on a réussi à remplir deux lancer, la deuxième fois certains ont fait la partie entière mais d'autre 2 ou 3 lancer. on s'adapte!

Le 3 octobre 2012 à 9 h 27 min, menault a dit : Modifier

je vais essayer le parallèle avec les wagons, merci du tuyau

Le 3 octobre 2012 à 17 h 07 min, fdenemevel a dit : Modifier

Des difficultés aussi pour mes élèves en ce qui concerne les parties fictives, avec effectivement beaucoup de nouvelles infos en peu de temps, et des difficultés de repérage sur la droite graduée
Le parallèle avec les trains est intéressant.
Je suis inquiète de voir que je dois souvent « déborder » pour les math, en particulier aussi pour les modules SIT, afin de pouvoir suivre la programmation.

Répondre

Le 3 octobre 2012 à 21 h 06 min, cestienne a dit : Modifier

Pour l'instant je prends mon temps et on explore en même temps, tous ensemble les différentes parties. La première de chaque jeu est faite en groupe classe, puis on essaye la deuxième seul et on la corrige ensemble, pour la 3 et 4, ils la font en autonomie et on corrige après. Ce qui fait qu'à ce rythme, j'en suis à la moitié du jeu 2 des nouvelles parties fictives mais j'ai pris le parti d'aller doucement pour que les élèves comprennent sachant que cette forme sera revue de nombreuses fois.
On prend bien le temps aussi d'identifier les infos que l'on a et celles que l'on doit trouver. La projection de parties fictives en grand sur le TNI est d'une grande aide. Déjà au bout de la deuxième séance, plus d'élèves sont accrochés.
Pour faire les sauts sur la ligne graduée,par exemple 1 saut de 3, on fait de 1 en 1 jusqu'à 3 avec des petits arcs de cercles de trait à trait et après on marque la longueur du suat de 3 car certains élèves comptent les traits au lieu des sauts et d'autres n'arrivent pas à se projeter jusqu'à 3.

Répondre

Le 10 octobre 2012 à 20 h 38 min, lghesquiere a dit : Modifi

Nous rencontrons d'énormes difficultés avec le mode de représentation du module sit 2.
la grande majorité des élèves voire la quasi totalité ne parvient pas à utiliser la règle graduée :
y mettant des « coupelles »
Pourtant, ils ont quasi tous compris le système annonce lancer GP
Nous cherchons à remédier à cela.
Nous avons pensé à fermer la règle graduée par un trait au dessus et à nous servir de deux couleurs pour colorier les cases qui représentent l'annonce.
que faire ? on peut aménager ou on doit respecter quoiqu'il arrive ?
merci Line

Tableau 15 : extrait des discussions ouvertes sur le forum du site de la recherche

Au sein de ces échanges, nous repérons deux types d'intervention. Le premier relate les difficultés rencontrées par les élèves. Le second décrit les solutions trouvées pour pallier ces mêmes difficultés.

Nous nous centrerons ici sur les deux écueils relevés lors de la mise en œuvre du module 2 (cf. Transcription 3).

Passage (trop) rapide de la situation concrète du jeu oral des annonces à une première forme de symbolisation mathématique avec perte de sens.

« *(...) Il*s ont trop de nouvelles informations en même temps à traiter »

« trop de nouvelles informations en même temps à intégrer ».

« *J'ai le sentiment que le protocole à suivre va trop vite pour les module SIT. Je suis ce soir un peu inquiète* pour mes élèves qui décrochent

« la moitié de ma classe ne comprend pas les situations abstraites ».

« *ils ont trop de nouvelles informations en même temps à intégrer: passage à l'écrit de l'annonce, boîte de Fisher, règle...cela me paraît trop abstrait d'un coup.* »

« *(...)* difficulté à faire remplir les fiches de parties fictives du module 2 situation par les élèves. Il y a beaucoup trop de contraintes, et les enfants perdent toute notion de sens ».

Difficulté à user du schéma-ligne

« *moi, c'est le repérage sur la ligne graduée qui est compliqué, surtout les deux sauts consécutifs. (...)* »

«, (...) des difficultés de repérage sur la droite graduée. »

« La grande majorité des élèves voire la quasi-totalité ne parvient pas à utiliser la règle graduée en y mettant des « coupelles » »

« *Il aurait fallu avoir le temps de l'étudier [la règle graduée] avant* »

Transcription 3 : synthèse des difficultés des élèves lors de la mise en œuvre du module 2 sur le forum du site de la recherche

Ces échanges montrent que le questionnement des professeurs se focalise, dans un premier temps, sur la gestion temporelle des séances. En effet, il semble que le suivi de la programmation des séances proposées dans les textes curriculaires ne permet pas aux professeurs d'installer certains savoirs et ne laisse pas le temps aux élèves de se les approprier. Il apparaît que le passage de la situation pragmatique orale du jeu des annonces étudiée dans le module 1 (comparaison d'une annonce à deux mains et d'un lancer de dé à six faces) à la situation écrite du jeu des annonces (écriture symbolique et introduction des systèmes de représentation) dans le module 2 est trop rapide avec une perte de la référence aux mains, au concret. Une seconde difficulté évoquée dans ces échanges est liée à la compréhension par les élèves des systèmes de représentation, notamment du schéma-ligne. Les commentaires laissent à penser que les élèves ne donnent pas de sens à l'usage des graduations (cf. Figure 9, ci-dessous). En effet, le texte curriculaire du module 2 propose que les élèves représentent sur le schéma-ligne une écriture additive à deux termes. Pour cela, ils

tracent des schémas-ponts représentés par un arc de cercle réunissant un ensemble d'intervalles désignant chaque terme de l'écriture additive. Par exemple, « 3 + 2 » est représenté sur le schéma-ligne par un schéma-pont de deux intervalles qui commence à la graduation zéro et se termine à la graduation deux. Puis, d'un second schéma-pont de trois intervalles qui commence à la graduation deux et se termine à la cinquième graduation comme nous le montre le schéma-ligne ci-dessous (cf. Figure 9). La prise en compte du zéro est ici indispensable puisqu'il renvoie au point de départ, au point d'origine dans la mesure des grandeurs sur une ligne numérique (Margolinas & Wozniak, 2012).

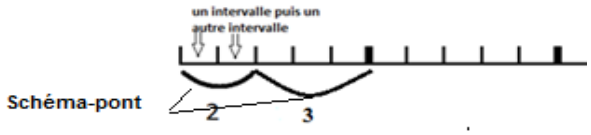


Figure 9 : représentation de l'annonce 2+3 sur un schéma-ligne

Les élèves doivent donc comprendre que chaque intervalle entre deux graduations représente une unité.

Mais ces difficultés rencontrées sont-elles spécifiques à la sphère 2 ? Les constats effectués dans les classes d'étude sont-ils similaires ?

1.2. Relevé d'expérience dans les classes d'étude

Les difficultés relevées sur le forum par les membres de la sphère 2 nous amènent maintenant à nous pencher du côté des classes d'étude, membres de la sphère 1 et co-concepteurs des modules proposés. Nous nous appuierons ici sur trois types de documents : les comptes rendus de séances réalisés par les professeurs eux-mêmes, des comptes rendus de réunions et les échanges de courriels entre membres de la sphère 1.

Ainsi, après que les professeurs du groupe expérimental ont posté les commentaires sur le site Internet de la recherche, une discussion s'est engagée au sein de la sphère 1, sous l'impulsion de C1 (enseignant-chercheur, coordinateur de l'équipe de recherche). L'objectif était de construire des réponses « axées sur la pratique » correspondant aux préoccupations des professeurs expérimentaux. Ce travail de mutualisation s'est déroulé sur six jours (du 4 au 10 octobre 2012). Deux types d'acteurs s'y côtoient, des observateurs visitant les classes d'étude (doctorants, chercheurs et conseillers pédagogiques) posant un regard extérieur sur la pratique et les professeurs des classes d'étude eux-mêmes.

Les transcriptions ci-dessous (cf. Transcription 4 et 5) donnent à voir des extraits des observations faites dans les classes d'étude par les professeurs eux-mêmes (PCE1 et PCE2) et par un chercheur, C2, observateur d'une classe d'étude.

PCE2 : « (à la fin du module 2), une séance de « reprise » a été envisagée avec le groupe classe sur les annonces écrites car 8 élèves sur 20 écrivaient encore des annonces >6 »

PCE1 : « *L'expérience de l'écriture des annonces en jouant mériterait au moins une séance supplémentaire* avant le passage aux parties fictives »

C2 commentant les observations faites dans la classe de PCE4

« la durée des séances conduites par les professeurs marseillais anormalement longues (30 min pour deux lancers fictifs). En effet le temps pris pour utiliser comprendre et construire le sens des fiches avec les élèves est important (trop) ce qui fait que les élèves arrivent à perdre le sens de G/P alors que presque immédiatement certains arrivent à anticiper avec la lecture de la seule décomposition écrite.

Transcription 4 : extraits des constats de la sphère 1

Le sens du jeu des annonces à l'écrit, l'appropriation des règles du jeu et de la fiche de jeu posent quelques problèmes aux élèves. Le temps d'enseignement (quatre séances) proposé par les documents curriculaires semble donc trop court pour que les élèves puissent faire l'expérience de l'écriture additive en situation et des contraintes propres au jeu des annonces (chaque terme de l'annonce doit être inférieur ou égal à 5 et la somme inférieure ou égale à 6).

Une seconde difficulté relevée (cf. ci-dessous) est liée à l'usage du schéma-ligne. En effet, les élèves ne semblent pas comprendre comment représenter un nombre sur ce schéma en usant des intervalles. Les élèves comptent une à une les graduations et non les intervalles.

PCE1 : « L'utilisation de la règle pour l'annonce avec des « cordes » au-dessous et au-dessus est plus ou moins comprise. Pour certains les graduations ne sont pas prises en compte et ils reproduisent sur la ligne ce qu'ils ont fait avec les boîtes : 2 nombres en bas, 1 en haut mais sans tenir compte des graduations. »

PCE2 : « Là encore les systèmes de représentation auraient pu être introduits par anticipation »

« *pour les parties fictives l'appropriation de la ligne graduée est très difficile* ».

Prévoir des séances de reprise ligne graduée pour les E en difficulté. »

PCE1 : « De plus, le rôle du « schéma-ligne *» ne semble pas compris par les élèves puisqu'ils comparent en général l'annonce avec le lancer sans passer par le schéma*-ligne. « je pense que le dispositif des parties fictives à traiter sur les fiches individuelles et collectivement est prématuré dans les conditions dans lesquelles on les a imaginées »

C2 : Le second, à mon sens plus central, est la question de la place et du rôle des représentations (boîte et segments) dans ces parties fictives. Nous avons constaté que les échanges entre prof et élèves perdaient le lien avec le jeu des annonces, ce qui revenait de fait à une situation de comptage de traits ou d'intervalles (problématique pour le 0 par exemple). Les élèves rentraient ainsi dans un milieu totalement étanche avec la partie virtuelle doigts-dé. »

Transcription 5 : extraits des comptes rendus de séances des classes d'étude.

D'une manière générale, les professeurs se questionnent sur la manière dont l'introduction du schéma-ligne est proposée dans le texte du module 2, sur son rôle et sur l'appropriation de son usage par les élèves.

La question que nous pouvons maintenant nous poser est pourquoi de tels problèmes sont-ils apparus lors de la mise en œuvre du module 2, notamment ceux liés à l'usage du schéma-ligne ? Pourquoi le système de représentation qu'est le schéma-ligne ne semble-t-il pas faire signe aux élèves ?

2. La progression des savoirs, premiers éléments d'analyse.

Pour comprendre ces difficultés attestées par les professeurs expérimentaux et des classes d'étude, nous étudierons dans cette seconde section, tout d'abord, l'avancée des savoirs au sein des trois premiers modules du domaine « Situations » à travers les textes curriculaires fournis aux professeurs par la sphère 1. Ces textes ont pour objectif de les aider à préparer leurs séances avant de les mettre en œuvre, de construire le jeu didactique avant de le faire jouer, pourrait-on dire en termes théoriques. Pour cela, nous examinerons les scénarii construits par la sphère 1 pour chacun des trois modules. Puis, nous analyserons de manière plus microscopique le module 2. Cette première étude semble nécessaire pour comprendre l'organisation de la progression des savoirs et les difficultés mentionnées dans la section précédente.

2.1. Module 0 : situation trains/tours, désignation orale et écrite des quantités

2.1.1. Description du module 0

La situation proposée dans le module 0 prend appui sur une situation implémentée à l'école maternelle Michelet à Talence en 1998. Cette situation introduisait les écritures additives sur onze séances. Dans le cadre du domaine « Situations », cette situation est réaménagée et se déroule sur quatre séances. Son objectif est *« enrichir les connaissances des élèves sur les premiers nombres et de les préparer à l'écriture additive » (cf. Annexe 1).*

L'enjeu est de

« faire comprendre aux élèves qu'une quantité peut être représentée par un nombre, quantité pouvant être décomposée en sous-collections. Les élèves recherchent une stratégie pour reconstituer un train/tour à partir d'un schéma représentant le cardinal d'une collection sous forme additive (Ibid.).

Il est indiqué, en préambule, que ce module 0 introduit la situation du jeu des annonces qui sera déclinée tout au long du premier trimestre par un aménagement progressif des règles du jeu. Son objectif est *« la construction du nombre à travers notamment l'usage des compositions et décompositions »(Ibid.)*. La situation trains/tours lui fournira un moyen de validation par la construction effective de train/tours avec des cubes emboitables, un train-cubes.

Première séance : Désignation orale des nombres

Un schéma-train est affiché au tableau par le professeur. Il est composé d'un ensemble de cases juxtaposées (« wagons ») dont le nombre est inférieur ou égal à trente. Les wagons sont répartis sur l'ensemble du schéma-train par groupement (chaque groupement est inférieur ou égal à six wagons) de quatre couleurs différentes (cf. Photogramme 13).

Photogramme 13 : schéma-train extrait du texte curriculaire du module 0 (Annexe1)

A partir de ce schéma-train, les élèves construisent par équipe un « train-cubes » identique à l'aide de cubes emboités de quatre couleurs distinctes. Les élèves se déplacent et demandent au professeur le nombre de cubes nécessaire pour la construction des sous-collections de la couleur dont ils sont responsables. Les élèves mettent alors en place des stratégies de dénombrement pour ramener le nombre de cubes nécessaires. Puis, chaque équipe construit collectivement le train-cubes en prenant garde à respecter l'ordre des couleurs. La validation s'effectue par comparaison effective du train-cubes construit avec le schéma-train proposé (cf. Photogramme 14)

Photogramme 14 : extrait de déroulement du module 0 (Annexe, 1)

Le professeur interroge ensuite les élèves sur les stratégies utilisées pour aller chercher le nombre de cubes nécessaires à la construction du train.

Séance 2 et 3 : Désignation écrite

Les séances deux et trois ont, quant à elles, pour objectif la construction d'un code commun nécessitant l'usage d'une désignation écrite du nombre, le nombre comme représentant d'une quantité, la mémoire de la quantité. Pour cela, une situation de communication (Brousseau, 1998) est proposée. Les élèves sont regroupés en binôme. L'élève émetteur reçoit un schéma-train à partir duquel il doit écrire un message sur une feuille avec quatre crayons de couleurs différentes. Ce message est transmis à un élève récepteur qui construit, à partir de ce message, un train-cubes. Les contraintes d'écriture du message évoluent progressivement au cours des deux séances, du codage sous forme de dessin vers un code écrit. Les phases de mises en commun de ces deux séances sont l'occasion pour les élèves d'expliciter leurs stratégies de codage. Pour conclure, le professeur institutionnalise un codage qui deviendra une référence commune à l'ensemble de la classe du type 5V, 3B, 2J, 4V... (5 cubes verts, 3 cubes bleus, 5 cubes jaunes, 4 cubes verts...).

Séance 4 : Introduction au Journal du Nombre

Cette séance se centre sur l'introduction d'un nouvel outil, le Journal du Nombre dans lequel les élèves vont *« écrire des mathématiques pour mieux comprendre le nombre »*. Pour ce premier travail, il est proposé aux professeurs de demander à leurs élèves de dessiner des schémas-trains et de les coder à partir du référentiel commun construit dans la séance précédente ou à l'inverse, à partir d'un message codé qu'ils ont inventé, dessiner un schéma-train. Certaines productions peuvent faire l'objet d'une étude collective.

Le tableau 16 ci-dessous propose une vision synoptique de l'organisation de ce module 0.

Construction de stratégies de dénombrement	Désignation écrite	Journal du nombre
Construction par équipe d'un train avec des cubes identique au modèle proposé au tableau, le schéma train	Ecriture d'un message codant un schéma-train par un élève émetteur pour qu'un 'élève récepteur puisse construire avec des cubes un train identique. Construction d'un codage commun	Production par les élèves dans le journal du nombre d'un schéma-train qu'ils codent en fonction du référentiel construit dans la classe.

Tableau 16 : Vision synoptique du module 3

5.1.1. Eléments d'analyse du module 0

Ce premier module se donne comme objectif de faire acquérir progressivement aux élèves deux type de capacités [69] :

- capacité de désigner tout d'abord à l'oral puis par écrit des quantités par un nombre, le nombre comme mesure de grandeur de quantité. Les élèves utilisent alors différentes stratégies de dénombrement (comptage de un en un de chaque sous-collection, comptage de un en un de l'ensemble de la collection de cubes de couleur, surcomptage).

- capacité de traduction d'un train-cubes par un schéma-train lors de la validation de la construction.

La première séance peut être modélisée sous forme d'un jeu d'apprentissage défini ainsi « faire produire des stratégies de dénombrement pour construire un train-cubes à l'aide de cubes emboîtables identique à un schéma-train (≤ 30) composé de sous-collections de wagons (≤ 6) de quatre couleurs différentes ». La règle définitoire c'est-à-dire la règle qui dit comment jouer au jeu, est « construire un train identique au schéma-train proposé ». Pour résoudre le problème posé, les élèves peuvent s'appuyer sur leurs connaissances antérieures (composante épistémique du contrat didactique) relatives aux compétences acquises en fin de grande section de maternelle[70]. Le milieu est ici composé d'un schéma-train (représentation analogique) qui représente des sous-collections sous forme de carrés juxtaposés de quatre couleurs différents (Cf. tableau synoptique ci-dessus). Ce schéma-train a comme référent matériel (représentation analogique/matérielle), un train-cubes constitué de cubes emboîtés de quatre couleurs différentes. La dénotation (Frege, 1884) du schéma-train, en tant que référence matérielle, est donc le train composé de cubes emboités.

La seconde et troisième séance du module 0 doivent, quant à elles, permettre aux élèves de désigner par écrit une collection composée de plusieurs sous-collections à travers des situations de communication. Le jeu d'apprentissage peut ici se caractériser par « faire produire un code écrit pour désigner un ensemble de sous-collections ». Les règles définitoires issues du contrat didactique peuvent se définir ainsi : « écrire un message pour que l'élève récepteur puisse construire un train-cubes identique au schéma-train de l'élève

---

[69] Capacité comme puissance d'action au sens aristotélicien ou encore « skill » en anglais.

[70] Réaliser une collection dont le cardinal est donné, utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée (MEN, 2015b).

émetteur ». Le système stratégique dont disposent les élèves pour résoudre ce problème s'appuie sur les connaissances acquises à l'école maternelle[71] et celles construites dans le jeu d'apprentissage précédent (désigner oralement des quantités). Cette situation doit donc amener les élèves à élaborer des stratégies pour désigner par écrit des quantités. A cela s'ajoute des stratégies de codage des sous-collections de wagons de couleurs différentes pour reconstituer l'ordre de celles-ci. La situation de communication proposée introduit dans le milieu précédent le nombre écrit et une lettre pour désigner la couleur de chaque sous-collection.

La dernière séance occupe une place particulière puisqu'elle autorise les élèves à créer eux-mêmes des problèmes écrits de transformation d'un code en schéma-train et inversement. Le milieu est maintenant principalement scriptural. Les capacités de dénombrement, de désignation écrite d'un nombre et de codage construites dans les deux jeux d'apprentissage précédents sont ici réexpérienciées par les élèves. Le tableau (cf. Tableau 17) ci-dessous propose un découpage du module 0 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles.

Module 0		
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire des stratégies de dénombrement pour construire un train-cubes à l'aide de cubes emboîtables identique à un schéma-train (≤30) composé de sous-collections de wagons (≤ 6) de quatre couleurs différentes. **Capacité cible 1 :** Désignation orale d'une quantité par un nombre en usant de stratégies de dénombrement. **Capacité cible 2** : Traduction d'un train-cubes par d'un schéma-train.	Jeu d'apprentissage 2 : Faire produire un code écrit pour désigner un ensemble de sous-collections. **Capacité cible 3 :** Désignation par écrit une quantité par des stratégies de codage de sous-collections	Jeu d'apprentissage 3 : Faire créer des problèmes mathématiques dans le Journal du Nombre **Réinvestissement des capacités** construites dans les deux jeux d'apprentissage visés précédents

Tableau 17 : modélisation du module 0 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

Nous analyserons maintenant le texte curriculaire du module 1 pour continuer notre enquête sur l'avancée des savoirs proposée dans la progression du domaine « Situations ».

[71] Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité (MEN, 2015)

2.2. Introduction du jeu des annonces, le module 1

Nous décrirons puis analyserons le texte curriculaire du module 1 qui introduit la situation du jeu des annonces, situation qui évoluera tout au long de la progression du domaine « Situations ».

2.2.1. Organisation du module 1

Le jeu des annonces présenté dans ce module propose une entrée dans l'enquête numérique à travers certains usages sociaux du nombre et du nombre à travers le corps. C'est par la reconnaissance des configurations de doigts, des constellations présentes sur le dé que les élèves désignent un nombre. En dehors de l'institution scolaire, dans leur environnement social (Dewey, 1968/2011), les élèves ont pu faire l'expérience de l'usage de leurs doigts comme moyen de compter, de désigner une quantité. De même, ils ont pu faire l'expérience de l'usage du dé et s'approprier ainsi certaines configurations de points.

Cette situation du jeu des annonces est une situation dans laquelle les élèves comparent oralement une annonce produite avec leurs deux mains avec un lancer de dé à six faces.

Les enjeux de ce module sont définis dans le texte curriculaire de la manière suivante :

> *« Les productions des élèves peuvent être considérées comme des **désignations**. Les élèves découvrent et construisent les différentes désignations d'un même nombre, les propriétés de chacune (on peut par exemple désigner 6 comme un double, en l'écrivant 3 + 3, ou comme 5 + 1), et les relations possibles entre les différentes désignations (comment peut-on « passer » de « 3 + 3 » à « 5 + 1 ») (…). (Cf. Annexe 2)*

Dans cette situation, il n'existe pas de stratégie pour être certain de gagner. En effet, le gain est attribué de manière aléatoire en fonction du résultat du lancer du dé. Cependant, le joueur peut prendre des décisions de plus en plus pertinentes pour optimiser ses chances de gagner. Par exemple, il peut produire des annonces inférieures ou égales à six (puisque les constellations du dé sont égales ou inférieures à six), produire une annonce de un (en fermant un poing et en levant un doigt sur la main opposée) puisque le dé peut faire un mais sans faire de zéro (en fermant les deux points) puisqu'il n'y pas de zéro sur le dé.

Cette situation autorise un premier travail sur la sémantique du nombre (Brousseau, 1972) en associant un nombre oral à une quantité (notion de cardinalité).

Ce module se décompose en quatre séances construites de manière isomorphe.

Le texte curriculaire du module 1 propose une présentation des règles du jeu par le professeur :

> *« Je vous explique les règles du jeu des annonces. Il y a 5 élèves dans une équipe : des élèves « annonceurs » et un élève « lanceur de dé/arbitre ». Pour jouer à ce jeu, il faut deux mains et un dé. Les élèves « annonceurs » pensent et choisissent un nombre qu'ils devront dire et montrer avec leurs deux mains. Les deux mains devront ensuite rester immobiles et être posées sur la table ou le sol. Le lanceur/arbitre jette le dé qui s'arrête sur un nombre. Si le nombre du dé est le même que celui représenté avec les doigts, l'élève gagne un pion » (Annexe 2)*

Donnons un exemple de ce jeu : j'annonce à l'oral le nombre 5 (réunion de deux ensembles disjoints) que je décompose sur mes deux mains (deux doigts sur ma main gauche et trois doigts sur ma main droite). Puis je compare ces deux sous-ensembles avec le nombre désigné par la constellation de points représentée sur la face d'un dé à six faces. Je gagne si le lancer (la constellation de points présente sur le dé) est égal à cinq.

Lors des phases de mise en commun de chaque séance, le professeur recense progressivement les contraintes inhérentes au jeu, contraintes permettant d'optimiser les chances de gagner.

Ce jeu autorise donc une appropriation progressive de la décomposition des premiers nombres. En effet, les élèves construisent des différentes désignations des nombres inférieurs et égaux à six (par exemple 6 = 3 + 3 mais aussi 6 = 4 + 2...).

Le tableau (cf. Tableau 18) ci-dessous donne à voir de manière effective la situation orale des annonces.

Construction de désignation orale du nombre sous forme additive à deux termes

Choisir un nombre, l'exprimer sur ses deux mains (somme des deux mains inférieure à 6, usage du 0) et le comparer avec un lancer de dé à six faces.
L'annonce est gagnante si égale au lancer.

Tableau 18 : vision synoptique du module 1, la situation orale du jeu des annonces

Nous analyserons maintenant ce module 1 pour rendre compte de l'avancée des savoirs.

2.2.2. Eléments d'analyse du module 1

Dans ce module, la capacité cible est la construction de désignations orales des nombres sous forme de deux sous-collections à travers une situation de comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé à six faces.

Nous pouvons modéliser le canevas de mise en œuvre fourni aux professeurs sous forme d'un jeu d'apprentissage que nous définissons comme « Faire produire une décomposition d'un nombre sous forme de deux sous-collections avec deux mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces. ». La règle définitoire issue du contrat didactique (nous nous appuyons sur la proposition de consigne proposée dans le texte curriculaire (cf. ci-dessus)) pourrait se définir comme « produire une annonce à deux mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces ». Cette règle reste constante tout au long de ce module. Pour jouer à ce jeu, les élèves s'appuient sur des connaissances antérieures : reconnaissance des configurations de dé et de doigts (usages sociaux et corporels) et sur la capacité de désignation orale des quantités (capacités construites au cours du module 0). Les élèves dans ce jeu construisent progressivement des règles stratégiques qui leur permettront de réguler les aléas du jeu. Le milieu est, quant à lui, différent de celui existant dans le module 0. En effet, les élèves énoncent un nombre (milieu discursif) et produisent une annonce avec leurs deux mains (représentation corporelle, le corps comme instrument (Mauss, 1950). Le dé et les jetons distribués par l'arbitre lorsqu'il y a gain font partie du milieu matériel. Pour gagner au jeu, les élèves doivent développer diverses stratégies notamment en faisant l'expérience, en situation, de l'adéquation entre l'annonce proposée et le champ numérique du dé. Le tableau ci-dessous (cf., Tableau 19) propose une modélisation de ce module sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités.

Module 1
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une décomposition d'un nombre sous forme de deux sous-collections avec deux mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces. **Capacité ciblée 1** : Désignation orale des nombres (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (chaque collection ≤ 5) Jeu d'apprentissage 2 : Faire produire un référentiel commun des règles du jeu des annonces

Tableau 19 : modélisation du module 1 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

Notre étude portera maintenant sur le module 2 qui introduit l'écriture additive à deux termes.

2.3. Entrée dans l'écriture symbolique, le module 2

Nous nous attacherons, ici, à décrire et analyser à gros grain le module 2 en mettant en évidence la succession de jeux d'apprentissage.

Ce module propose une première mise à distance du jeu oral des annonces proposé dans le module 1. Les élèves ne montrent plus une annonce avec leurs deux mains mais l'écrivent sous forme additive A + B. La référence aux contraintes du jeu des annonces, c'est-à-dire aux mains et au dé, reste présente (cf. Annexe, 3)

L'objectif de ce module est d'introduire l'écriture mathématique (nombre et signe mathématique) pour exprimer une annonce produite auparavant avec deux mains, de passer d'une désignation orale à une désignation écrite du nombre. Les élèves écrivent une annonce à l'aide des premiers nombres et du signe « + ». Les signes « = et ≠ » viennent coder le résultat de la comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel.

L'aspect sémantique du nombre (le nombre représentant une collection) et l'aspect syntaxique des expressions arithmétiques (règles d'écriture de l'addition) sont donc abordés dans ce module. A cela s'ajoute l'introduction de deux systèmes de représentation du nombre : le schéma-ligne et le schéma-boîte.

2.3.1. Organisation du module

Ce module est composé de quatre séances qui se découpent en deux parties distinctes, deux séances au cours desquelles les élèves sont en situation de jeu et deux séances où ils sont confrontés à des « parties fictives ».

Au cours des deux premières séances, les élèves produisent et comparent une écriture additive à deux termes à un nombre usuel. Les règles du jeu sont les suivantes : les élèves notent sur une fiche de jeu une écriture additive à deux termes (une annonce) puis le professeur lance un dé à six faces (le lancer). Les élèves notent sur leur fiche le nombre correspondant au lancer et le comparent avec l'annonce écrite. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer. Les élèves notent alors P pour « Perdu » ou G pour « Gagné ». Puis, ils échangent par binôme leur fiche de jeu pour vérifier la validité des écritures proposées et les gains acquis. Le professeur propose en fin de séance une mise en commun en prenant appui sur certaines productions

d'élèves. Il introduit alors deux systèmes de représentation, le schéma-boîte et le schéma-ligne[72] que nous décrivons brièvement ci-dessous.

Le schéma-boîte se présente ainsi : dans les deux cases inférieures sont inscrits les deux termes d'une addition et dans la case supérieure la somme. Il donne à voir la réunion de deux parties (cf. Figure 10).

Par exemple, l'annonce 2+1 se note

2 + 1 = 3

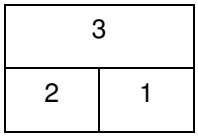


Figure 10 : exemple de schéma-boîte

Le schéma-ligne, quant à lui, est composé de graduations de un en un (avec des marquages plus accentués toutes les cinq graduations). Les élèves tracent des schémas-ponts représentant les termes de l'écriture additive au-dessous et sa somme au-dessus de ce schéma (cf. Figure 11). L'addition 2 + 1 se présente donc ainsi sur le schéma-ligne :

Figure 11 : exemple de schéma-ligne

Un schéma-pont de deux intervalles pour le nombre 2, un schéma-pont d'un intervalle pour le nombre 1 et un pont de trois intervalles pour la somme.

Ce schéma-ligne (avec les schémas-ponts) donne à voir le rapport des nombres entre eux. Ici, l'addition 2 + 1 désigne le nombre 3. Il représente la réunion de deux ensembles comme ajout des cardinaux. De même, il montre ici que 2 est deux fois plus grand/long que le nombre 1.

Les deux séances suivantes de ce module se fondent sur des parties fictives. Les élèves comparent une écriture additive à deux termes avec un nombre usuel (données fournies par le professeur) en complétant des fiches de jeu et les systèmes de représentation correspondants. Le document curriculaire présente ainsi ces parties :

> *« Des séances fondées sur des parties fictives sont mises en œuvre, à la fois issues des questionnements ou des écritures des élèves, et centrées sur des questions mathématiques importantes proposées par le professeur » (Annexe 3).*

Des parties fictives sont proposées à la fin du module 2 (cf. Annexe, 3).

Le professeur dispose de quatre séances pour amener les élèves vers le savoir visé, c'est-à-dire la désignation des nombres (≤ 6) sous forme d'une écriture additive à deux termes « A +

[72] Nous reviendrons plus spécifiquement sur ces systèmes de représentation dans ce chapitre.

B » (chaque terme ≤ 5) et l'usage des signes mathématiques « +, = et ≠ » pour désigner des égalités et inégalités. Les propriétés de l'addition, la commutativité, l'élément neutre, sont mises en évidence. Les auteurs du module entendent faciliter une prise de conscience des relations qui lient les nombres entre eux.

Le texte curriculaire du module 2 précise qu'une place importante doit être accordée au langage oral avec l'usage systématique des notions de « plus grand que », « plus petit que ».

Le tableau ci-dessous synthétise l'organisation du module 2 (deux séances sur la désignation écrite d'une écriture additive et deux séances de parties fictives).

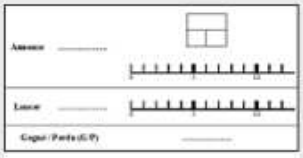
Passage d'une désignation orale d'une décomposition additive à une désignation écriture.	Séances de parties fictives
- Ecrire une addition (dont la somme est ≤ 6) à deux termes (chaque terme ≤ 5) et la comparer avec un nombre usuel (un lancer de dé à six faces). -Se familiariser avec l'usage du signe mathématique « + » - Utiliser les signe = et ≠ en situation et des notions de plus grand et plus petit à l'oral - User de deux systèmes de représentation du nombre, la ligne graduée et la boîte Annonce : 2+1 Lancer : 4 Gagné/Perdu (G/P): P 5 2 3	- Résoudre un problème de comparaison entre une écriture additive (chaque terme ≤ 5 et la somme ≤ 6) et un nombre usuel (≤ 6). - User des systèmes de représentation, la lige graduée et la boîte pour résoudre ou justifier le résultat trouvé. 

Tableau 20 : vision synoptique du module 2

2.3.2. Eléments d'analyse du module 2

A partir du scénario produit par l'équipe de recherche et fourni aux professeurs via le texte curriculaire du module 2, nous pouvons modéliser a priori une succession de trois jeux d'apprentissage.

Ainsi, dans un premier temps, le professeur demande aux élèves de produire une écriture additive à deux termes et de la comparer avec un nombre usuel (issu d'un lancer de dé à six faces). Nous nommerons ce nouveau jeu d'apprentissage « faire produire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel ≤ 6) ». Pour traiter ce problème, les élèves prennent appui sur des connaissances antérieures. La composante épistémique du contrat didactique repose sur certaines capacités élaborées par les élèves lors du module 0 et 1. En effet, en reprenant les textes curriculaires de ces modules, nous pouvons faire l'hypothèse suivante. Lors du module 0, les élèves sont rendus capables de produire des désignations écrites des quantités (mot nombre), capacité

cible que nous avons nommée « désigner par écrit une quantité par des stratégies de codage de sous collections ». Lors du module 1, les élèves se sont appropriés la capacité cible « construction de différentes désignations des nombres (≤ 6) orales sous forme de deux sous-collections (chaque collection ≤ 5) ». A partir de cet arrière-plan, le texte curriculaire du module 2 fait l'hypothèse que les élèves sont capables d'appréhender le nouveau milieu proposé composé de symboles mathématiques. Ce premier jeu d'apprentissage doit permettre aux élèves de construire des capacités liées à la désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes.

Le second et le troisième jeu d'apprentissage modélisent l'activité proposée dans le texte curriculaire du module 2 peut se définir ainsi : « faire traduire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) par un le schéma-ligne » et « faire traduire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) par un schéma-boîte ».

Ces deux jeux d'apprentissage se construisent à travers un contrat didactique d'imitation (Sensevy, 2016) pour et par l'usage des systèmes de représentation. En effet, le professeur montre aux élèves comment user du schéma-ligne et du schéma-boîte à travers l'exemple d'une partie effectivement jouée par les élèves. Puis, il les laisse en faire l'expérience dans les deux séances de parties fictives prévues. Il y a donc complexification du milieu symbolique (constitué de nombres et de signes mathématiques) et l'introduction de deux systèmes de représentation du nombre. La question que nous pouvons d'ores et déjà nous poser est celle du système stratégique dont dispose les élèves pour aborder ces deux jeux d'apprentissage.

Quatre capacités cibles semblent être ici en jeu :

- capacité de traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne ;
- capacité de traduction d'une écriture additive sous forme d'un schéma-boîte ;
- capacité d'user du schéma-ligne pour prouver ou résoudre le problème de comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel ;
- capacité d'user du schéma-boîte pour prouver ou résoudre le problème de comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel.

Le quatrième jeu d'apprentissage « faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison » prend place lors de l'introduction des séances de parties fictives. Les élèves utilisent les systèmes de représentation pour résoudre un problème de comparaison ou démontrer le résultat obtenu.

Le tableau (cf. Tableau 21) ci-dessous donne une vision synoptique du découpage en jeux d'apprentissage et capacités cibles du module.

Module 2		
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel ≤ 6). **Capacité cible 1** : Désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes. **Capacité cible 2 :** Utiliser les signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6). **Réinvestissement de la capacité** de désignation orale des nombres (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (chaque collection ≤ 5) Désignation par écrit une quantité par des stratégies de codage de sous-collections.	Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) par un schéma-ligne. **Capacité cible 1** : Traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne **Capacité cible 2** : Usage du schéma-ligne pour prouver ou résoudre le problème de comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel Jeu d'apprentissage 3 : Faire traduire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) par un schéma-boîte **Capacité cible 3** : Traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-boîte **Capacité cible 4 :** Usage du schéma-boîte pour prouver ou résoudre le problème de comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel	Jeu d'apprentissage 4 : Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison. **Réinvestissement des capacités** construites dans les deux jeux d'apprentissage visés précédents

Tableau 21 : modélisation du module 2 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

Cependant, si nous revenons aux commentaires postés sur le site Internet de la recherche tels que nous les avons décrits ci-dessus, force est de constater qu'à partir de ce module 2, les élèves éprouvent quelques difficultés dans l'usage du langage mathématique symbolique et des systèmes de représentation notamment le schéma-ligne. Ainsi, dans un premier temps, nous conjecturerons que la composante épistémique du contrat didactique du jeu d'apprentissage 2 c'est-à-dire les connaissances antérieures des élèves, n'est pas être suffisante pour aborder ce nouveau milieu. Les élèves ne peuvent représenter chaque terme de l'addition et sa somme sur le schéma-ligne en prenant correctement en compte les graduations et intervalles.

Pour vérifier cette hypothèse, nous analyserons plus spécifiquement la première séance proposée dans le texte de la progression du module 2.

2.4. Ecriture symbolique et systèmes de représentation : analyse microscopique

Nous analyserons maintenant de manière microscopique la première séance du module 2. Cette séance propose l'introduction d'une écriture additive pour représenter une annonce produite, dans le module 1, avec deux mains. L'écriture symbolique vient dénoter l'usage des mains, modéliser le réel. Cette écriture additive à deux termes est alors comparée avec un nombre usuel (lancer d'un dé à six faces). Deux systèmes de représentation du nombre, le schéma-boîte et le schéma-ligne, sont présentés simultanément dans cette séance.

2.4.1. Analyse de la séance 1 du module 2.

Cette première séance se décompose en quatre phases. Au cours de la première phase, le professeur présente de manière collective une fiche de jeu aux élèves et explicite les consignes. Le texte curriculaire du module 2 propose un exemple de présentation de ces consignes par le professeur

> *On va jouer à nouveau au jeu des annonces. Il y a toujours un dé mais ce qui change c'est qu'à la place des doigts, vous allez écrire une annonce sur une fiche. Auparavant, les élèves pensaient à un nombre, le disaient et le montraient avec les deux mains. Maintenant, les élèves pensent toujours à un nombre mais ils écrivent leur annonce sur une fiche » (Annexe 3)*

Après que le professeur a explicité les règles du jeu, un élève vient au tableau, complète la fiche de jeu (exemple ci-dessous, cf. Figure 12) et compare une écriture additive avec un nombre usuel.

Annonce : 2+1
Lancer : 4
Gagné/Perdu (G/P) : P

Figure 12 : exemple de feuille de jeu (Annexe 3)

Si l'annonce (addition à deux termes) est égale au lancer (au nombre usuel) alors la partie est gagnante et l'élève inscrit G pour « Gagné » (sinon P pour « Perdu ») sur la dernière ligne. Dans l'exemple présenté ici, « 2 + 1 » n'est pas égal à 4 alors la partie est perdue.

Lors de cette phase, le professeur insiste sur la nécessité d'écrire correctement des annonces à deux termes grâce au signe mathématique « + ». Le professeur peut le présenter en référence à la conjonction de coordination « et » utilisée par les élèves dans le module 1. Par exemple dans le module 1, un élève montrait deux doigts sur la main gauche et trois doigts sur la main droite et annonçait « 2 et 3 ». Un exemple est donné dans le texte du module (cf. Annexe 3).

Dans la seconde phase de la séance, les élèves jouent individuellement, contre le professeur qui endosse le rôle de lanceur. Les élèves écrivent une annonce à deux termes sur la ligne « annonce » de la fiche de jeu puis notent le nombre correspondant au lancer de dé à six faces effectué par le professeur (sur la ligne « lancer »). Enfin, ils notent à l'aide des lettres P/G s'ils ont perdu ou gagné. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer. Le choix est laissé au professeur d'aménager des temps de régulation au cours de cette phase de jeu individuel ou en fin de séance lors de la mise en commun.

Nous pouvons remarquer ici que la suggestion d'énonciation des consignes proposée dans le texte curriculaire « jouer à nouveau au jeu des annonces *(...). Vous allez écrire une annonce* sur une fiche » est lacunaire et ne précise pas véritablement aux élèves quel est le problème posé. En effet, nous sommes bien ici en présence d'une situation de comparaison entre une annonce (que l'élève doit écrire sous forme A + B) avec un lancer de dé, mais cela n'est pas clairement énoncé. Les élèves, implicitement, doivent comprendre qu'il y a transposition du jeu oral des annonces en jeu écrit.

La règle définitoire « penser à un nombre et l'écrire en référence aux annonces produites avec les mains » du contrat didactique de la situation décrite ci-dessus, ne donne pas de précision sur la nature du jeu d'apprentissage auquel les élèves doivent jouer « Faire produire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel ≤ 6) » (JA1). De plus, il n'est pas fait référence aux stratégies développées par les élèves dans le module précédent pour avoir plus de chance de gagner, stratégies référencées par le professeur afin de construire une mémoire commune lors du module 1. Ces règles stratégiques (production d'une annonce inférieure ou égale à 6, chaque terme de l'annonce inférieur ou égal à 5, usage du 0) restent tues par le professeur. C'est dans l'action effective du jeu que les élèves devront mettre en place des stratégies pour gagner au jeu proposé.

En ce début de module, nous observons donc un passage d'une situation « pragmatique » (production d'annonces avec les mains) à une première forme de modélisation des annonces à travers une écriture symbolique (une écriture additive à deux termes). L'écriture symbolique vient représenter le réel, l'annonce à deux mains. Elle devient le représentant (Brousseau, 2004) d'une annonce à deux mains, qui est elle-même le représenté au cours d'un processus de représentation.

Au cours de la dernière phase de jeu, une mise en commun est organisée. Le professeur sélectionne des parties réalisées par des élèves qui lui semblent intéressantes et propose une

validation collective « afin de prendre une décision collective argumentée » *(cf. Annexe 3).* Pendant cette phase sont introduits de manière formelle deux systèmes de représentation que sont le schéma-ligne et le schéma-boîte.

> *« Le professeur lors de la mise en commun notamment au cours de la première séance introduit deux systèmes de représentation, le segment[73] et la boîte qui seront réinvestis lors des parties fictives (séances 3 et 4 de ce module et des modules suivants). L'objectif est que les élèves puissent passer d'un système de représentation à un autre. Par exemple, à partir d'un segment représenter la boîte puis écrire l'addition correspondante. L'introduction rapide des représentations segments et boîtes permet d'entraîner tous les élèves dans un langage écrit commun pour comparer leur annonce avec le lancer. Par exemple, le professeur propose au tableau à partir d'une annonce choisie, de la représenter de plusieurs façons ». (Ibid.)*

Annonces	Lancer	Gagné/perdu
2+1	4	P

3	
2	1

Figure 13 : extrait du texte curriculaire du module 2 (Annexe 3)

Nous observons que le texte curriculaire du module 2 propose au professeur d'expliciter directement aux élèves l'usage du schéma-ligne à partir d'un exemple de comparaison entre une annonce et un lancer. Le professeur annote au tableau le schéma-ligne avec les schémas-ponts. Les ponts tracés en dessous du schéma désignent les deux termes de l'écriture additive proposée et le schéma-pont au-dessus, la somme de ces deux termes. Chaque intervalle représente donc une unité, le nombre x dénote une quantité de x intervalles (ici le nombre 3 désigne trois intervalles du schéma-ligne).

2.4.2. Séances de parties fictives

Les deux dernières séances de ce module 2 sont dédiées spécifiquement aux parties fictives. Les élèves doivent résoudre un problème de comparaison entre une addition à deux termes et un nombre usuel en s'appuyant sur les systèmes de représentation que sont le schéma-ligne et le schéma-boîte. Il est précisé dans le déroulement que ces deux systèmes de représentation « ont pour but de donner un espace concret qui puisse « donner à voir et à comprendre » le(s) nombre(s) » (Ibid.). Il est ajouté que « pour chacune des « recherches », on prendra soin de faire

[73] Dans la première version du texte curriculaire du module 2 proposé la première année aux professeurs du groupe expérimental, le schéma-ligne se nommait le segment.

expliciter par les élèves, et en particulier les moins avancés, les raisons des « calculs ». On sera attentif au vocabulaire (en particulier les mots « termes » et « somme ») et à la construction des phrases utilisées pour « parler les mathématiques » ». (Ibid.).

Des feuilles de parties fictives sont proposées à la fin du texte du module 3 (cf. Annexe 3)

Les élèves pour résoudre ces problèmes de comparaison doivent s'appuyer sur leurs connaissances de l'usage du schéma-ligne. Cependant, la composante épistémique du contrat c'est-à-dire « le système de savoirs et de connaissances avec lequel l'élève traite le problème » (Sensevy, 2011a, p. 106) qui repose ici sur la dernière phase de la séance 1 semble ne pas être suffisante pour que les élèves résolvent les problèmes posés. Les élèves, pour utiliser les schémas-ponts sur le schéma-ligne, ne peuvent se référer à une expérience pratique mathématique puisqu'ils n'ont pas au cours des séances précédentes fait l'expérience de l'usage de ce système de représentation. Ils doivent user des représentations sans en avoir fait l'expérience au préalable et sans pouvoir se référer à des connaissances antérieures construites lors des modules précédents.

2.4.3. Premiers éléments de synthèse

L'analyse des premiers modules et particulièrement du module 2 nous ramène aux interrogations des professeurs du groupe expérimental face aux difficultés rencontrées par leurs élèves lors du module 2 : rythme trop rapide/soutenu des mises en œuvre, perte de sens du jeu dans les parties fictives et difficultés dans l'usage du schéma-ligne.

En effet, si nous reprenons le texte curriculaire du module 2 sur lequel les professeurs prennent appui pour construire leurs séances, nous notons que le premier savoir visé dans les deux premières séances, « désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes » doit être acquis rapidement par les élèves. Ainsi, sur les deux séances programmées, les élèves doivent s'approprier la forme syntaxique de l'addition c'est-à-dire l'usage du signe « + », vu comme assembleur avec une place en amont et en aval pour accueillir un nombre indéterminé (Serfati, 2005, p. 76) afin de coder une opération à effectuer (ici la réunion de deux collections).

De plus, pendant ce même laps de temps, les élèves doivent faire appel à leur expérience antérieure du jeu des annonces (module 1) et réexpériencer en situation de jeu les contraintes inhérentes au jeu des annonces c'est-à-dire l'inadéquation entre l'usage de certains nombres et la référence aux mains et au dé. En effet, ces stratégies mises en évidence lors du module précédent ne sont pas rappelées à la mémoire collective par le professeur. Mais comme le

formule le déroulé du module 2, « *l'entrée dans l'écriture symbolique affaiblit l'impossibilité* de produire une écriture additive avec six » *(...)* « *l'élève doit abandonner l'usage des* doigts mais cela peut prendre du temps » (Annexe 3). Cette réexpérienciation peut donc prendre du temps. Cela nous renvoie aux observations faites dans les classes expérimentales et d'étude sur le passage (trop) rapide/soutenu de la situation orale du jeu des annonces à la situation écrite et le peu de temps proposé pour que les élèves fassent l'expérience en situation. Il est important de spécifier que dans ce texte curriculaire, il n'est plus fait référence à la situation orale du jeu des annonces. Les élèves ne peuvent transférer leur capacité de désignation d'un nombre en deux sous-collections à celle de désignation écrite.

De plus, s'ajoute l'introduction des systèmes de représentation du nombre, le schéma-ligne et le schéma-boîte, lors de la première séance. A travers un contrat d'imitation par et pour l'usage, les élèves doivent en comprendre le sens et l'usage. Le professeur montre, explicite l'usage du schéma-ligne aux élèves (les règles d'action) sans qu'il ne soit prévu dans le déroulement une prise en charge par l'élève de ce système de représentation en amont des parties fictives. Par ailleurs, comme nous le spécifient les commentaires postés sur le site de la recherche, les élèves ne semblent pas donner de signification aux intervalles du schéma-ligne. Leurs connaissances ne leur permettent pas de comprendre que chaque intervalle représente une unité. La distance de l'élève à l'usage adéquat du schéma-ligne est plus importante que prévue. Le contrat d'imitation par/pour l'usage ici ne semble pas fonctionner dans la mesure où les connaissances et le savoir-faire des élèves sont trop éloignés des connaissances nécessaires à l'usage de ce schéma. L'analyse des trois premiers modules montre qu'il n'existe pas d'arrière-plan commun, de significations communes (Descombes, 1996) quant à l'usage des intervalles et graduations présents sur ce schéma.

Nous conjecturons donc que les jeux d'apprentissage 1 et 2 sont en suspens dans la mesure où la part de ce contrat d'imitation souffre d'une distance trop grande entre le système de connaissances antérieures des élèves et le milieu qu'il s'agit d'accommoder.

Se pose alors la question du temps d'apprentissage dont dispose les élèves pour construire les capacités cibles du module 2 :

- capacité de désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes ;

- capacité d'utiliser les signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque termes ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) ;

- capacité de traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne et de schéma-boîte ;

- capacité de construction de systèmes de représentation du nombre comme moyen de preuve ou de résolution d'un problème de comparaison.

Pour pallier les problèmes soulevés par les professeurs, des régulations ont été opérées grâce au dialogue instauré entre les deux sphères. Nous allons, dans une seconde section, nous pencher sur les choix didactiques opérés par l'équipe de recherche pour tenter de remédier aux obstacles rencontrés, notamment ceux liés au schéma-ligne.

3. Processus de régulation *immédiat*

Après avoir mis en évidence dans les sections précédentes les difficultés rencontrées par les élèves lors de la mise en œuvre du module 2 et donné, à travers l'analyse des premiers modules, les raisons a priori de l'apparition de ces problèmes, nous nous centrerons ici sur les régulations opérées par l'équipe de recherche pour pallier ces mêmes difficultés.

En effet, quelles ont été les propositions de régulation émises par la sphère 1 pour résoudre rapidement les problèmes rencontrés par les élèves lors de l'implémentation du module 2 ? Comment se sont construites ces régulations « online » ? Quels sont les effets du dialogue intra et inter-sphères sur les choix effectués par la sphère 1 dans ce processus de régulation ? Quelles orientations didactiques ces choix ont-ils engendrées ?

Comme nous l'avons montré dans la première section, les professeurs du groupe expérimental et les professeurs des classes d'étude constatent que leurs élèves rencontrent trois grandes difficultés lors de l'implémentation du module 2 :

- difficultés liées au rythme trop soutenu des mises en œuvre proposé par le texte de programmation ;

- difficulté liée à la perte trop rapide d'une référence concrète dans la situation écrite du jeu des annonces ;

- difficulté liée à l'usage du schéma-ligne.

Dans cette section, nous nous présenterons, dans un premier temps, les régulations que les professeurs des classes expérimentales et des classes d'étude ont opéré dans leur classe lors de l'apparition de ces difficultés. Pour cela, nous nous appuierons d'une part sur les échanges qui ont eu lieu entre les professeurs expérimentaux sur le site Internet de la recherche et d'autre

part sur les échanges de courriels, les comptes rendus de réunion et de séances de la sphère 1. Dans un second temps, nous analyserons les régulations proposées par la sphère 1. Ces régulations ont été proposées tout d'abord par le biais de commentaires sur le forum du site de la recherche puis directement dans les textes curriculaires des modules 3 et 4, modules répondant à l'avancée de la programmation proposée.

3.1. Processus de régulation en classe

3.1.1. Les classes expérimentales

Pour pallier les difficultés rencontrées par leurs élèves, trois des professeurs participant aux discussions sur le forum du site de la recherche s'expriment sur les régulations qu'ils ont mises en place dans leur classe (cf. Transcription 6, ci-dessous). Ces régulations portent dans un premier temps sur les séances de parties fictives (deux dernières séances du module 2).

PE5 : « *Pour l'instant, je prends mon temps et on explore en même temps, tous ensemble les différentes parties.* La première de chaque groupe est fait en groupe classe, puis on essaye la deuxième seule et on la corrige ensemble (...) je suis à la moitié du jeu 2 *des nouvelles parties fictives mais j'ai pris le parti d'aller doucement* pour que les élèves comprennent, sachant que cette forme sera revue de nombreuses fois. On prend bien le temps *aussi d'identifier les infos que l'on a et celles que l'on doit* trouver ».

PE3 : *« Moi aussi ça m'a paru hors de portée, mais lors de la séance de ce jour, des progrès fulgurants* apparaissent, les choses semblent se mettre en place (...) la séance avant la partie fictive 4 a été faite deux fois la première fois on a réussi à r*emplir deux lancers, la deuxième fois certains ont fait la partie entière mais d'autre 2 ou 3 lancers, on s'adapte.* »

Transcription 6 : Extraits des commentaires postés sur le forum du site Internet de la recherche par les professeurs du groupe expérimental.

Nous constatons que ces deux professeurs organisent les séances de parties fictives de manière progressive avec une alternance entre travail collectif et individuel sans focalisation particulière sur le nombre de parties fictives effectuées et disponibles à la fin du texte du module 2. La priorité est donnée à la compréhension des différents éléments présents sur les fiches (écriture symbolique, schéma-boîte, schéma-ligne). Puis, ces professeurs tentent d'améliorer la compréhension de l'usage du schéma-ligne par des élèves avec la mise en place d'outils de remédiation comme nous le montrent les extraits suivants (cf. Transcription 7) :

PE5 : « pour faire des sauts sur la ligne graduée, par exemple un saut de 3, on fait de 1 en 1 avec des petits arcs de cercles de trait en trait et après on marque la longueur du saut de 3 car certains élèves comptent les traits au *lieu des sauts et d'autres n'arrivent pas à se projeter jusqu'à 3* ».

PE6 : « Fermer la règle graduée par un trait au-dessus et à nous servir de deux couleurs pour colorier les cases *pour représenter l'annonce* »

PE3 : « La difficulté reste la ligne graduée. On a fait le parallèle avec le train en faisant un petit pont entre deux graduations pour compter les cubes *ex 2+3 c'est 2 cubes rouges (2 ponts) puis 3 cubes verts 3 ponts cela fait un* pont de 5 cubes (cuvette par-*dessous) c'est une idée venue de trois enfants (moins avancés) et maintenant tout le* monde y arrive. »

Transcription 7 : extraits des commentaires postés sur le forum du site Internet de la recherche par les professeurs du groupe expérimental

Les régulations portent ici sur la compréhension de l'usage des graduations et des intervalles pour désigner le cardinal de chaque nombre sur le schéma-ligne. Dans les exemples ci-dessus, les professeurs utilisent des couleurs, des wagons de couleurs différentes (en lien avec le module 0) pour montrer que chaque intervalle désigne une unité.

3.1.2. Les classes d'étude

Les comptes rendus de séances réalisés par les professeurs des classes d'étude ainsi que les échanges de courriels internes à la sphère 1 mettent en évidence des régulations spécifiques à chaque classe. Ainsi, comme dans les classes expérimentales citées ci-dessus, les professeurs travaillent plus spécifiquement le schéma-ligne. Par exemple, PCE1[74] introduit une séance spécifique sur le schéma-ligne intercalée entre les deux séances de parties fictives dans laquelle « ils (les élèves) ont la possibilité de dessiner des billes dans les intervalles avant de tracer les « cordes *». Chaque élève a pu s'entraîner sur la ligne graduée grand format sous* plastique ». F2[75] commente alors ce propos « je donnerais ce conseil, qui est proche de celui de PCE*1, aux collègues. Avec l'idée que j'ai vue chez PCE4 aussi de colorier (plus que de* mettre des billes) les intervalles de la ligne graduée (analogie avec le train) ». Des séances supplémentaires sont aussi proposées soit pour que les élèves aient le temps de s'approprier des règles de la situation écrite du jeu des annonces (chaque terme de l'annonce inférieur ou égal à 5 et la somme inférieure ou égale à 6) soit pour un travail plus systématique sur les parties fictives. Ainsi, PCE3 met en place des séances de parties fictives supplémentaires « J'ai réalisé 4 ou 5 séances sur les parties fictives ». PCE2, quant à lui, organise une séance de reprise à la suite des deux séances de jeu effectif (séances 1 et 2 du texte curriculaire) « une séance de reprise a été envisagée avec le groupe classe sur les annonces écrites car 8 E sur 20 écrivaient encore des annonces > 6 ». PCE1 commente le fait qu'il a supprimé le schéma-ligne dans les parties fictives « *J'ai réservé l'utilisation des lignes graduée*s à la mise en commun au tableau. Ce sont les élèves qui sont venus le faire. On a réussi à engager une

[74] PC1 : professeur de classe d'étude 1 faisant partie de l'équipe de recherche.
[75] F2 : formateur 2 de l'équipe de recherche.

discussion à propos de la graduation 6 et de la graduation 7. Les élèves sont revenus dans le sens ». PCE2 organise un temps de mise en commun sur l'usage du schéma-ligne « (...) difficulté avec la ligne graduée : confusion segment et traits. (...). Après chaque partie fictive, des élèves venaient expliquer comment ils avaient procédé, un affichage en grand au tableau permettait de montrer l'utilisation de la ligne ». Enfin, PCE1 énonce dans son compte-rendu que « le signe + a été introduit en dernière séance du module 1 pour noter les annonces du *jeu du lancer, si bien qu'il ne pose aucun problème* ».

Les professeurs des classes d'étude proposent donc un allongement du temps d'enseignement/apprentissage avec la mise en place de séances supplémentaires. Un travail particulier sur l'usage du schéma-ligne est de même réalisé avec l'introduction d'un codage spécifique (couleurs, billes) des intervalles pour donner à voir que chaque intervalle représente une unité.

L'ensemble des remarques des professeurs des classes d'étude et des classes du groupe expérimental montre l'importance du rôle du professeur dans l'explicitation de l'usage du schéma-ligne lors des phases collectives avant de laisser progressivement la main aux élèves. Le schéma-ligne est étudié pour lui-même. En effet, son introduction dans le texte curriculaire modélisée, comme nous l'avons explicité précédemment, par *le contrat d'imitation* par et *pour l'usage du* schéma-ligne ne semble pas suffisant pour qu'il y ait appropriation par les élèves de cette représentation puisqu'il existe une distance trop importante entre les capacités des élèves et son usage. Les propositions de régulation en classe autorisent donc un temps d'appropriation plus long du schéma-ligne avec notamment l'usage de couleurs pour représenter chaque unité.

Nous nous focalisons maintenant sur les propositions de régulation produites par l'équipe de recherche pour répondre immédiatement aux attentes des professeurs du groupe expérimental.

3.2. Régulation immédiate *en ligne*

Ce second paragraphe nous amène à observer les régulations opérées par la sphère 1 immédiatement après la publication sur le site de la recherche des commentaires des professeurs du groupe expérimental. Ces régulations prennent la forme de courts textes postés par l'équipe de recherche sur ce même site.

3.2.1. Première régulation, le module 2

A partir des observations réalisées par les membres de la sphère 1 dans les classes et après discussion orale et écrite avec le collectif d'étude, une première réponse est postée sur le site Internet de la recherche par C1 (enseignent-chercheur de l'équipe de recherche) le 4 octobre 2012 en lien avec le module 2.

Trois axes de régulation s'en dégagent :

- un allègement du rythme des parties fictives (séances 3 et 4 du module 2) ;

> *« laisser du temps au temps, et (de) prendre conscience que les élèves vont comprendre peu à peu comment ce système (le schéma-ligne) fonctionne. Dans cette perspective on peut tout à fait, au début, limiter fortement le nombre de parties fictives, en prenant du temps pour que tous les élèves se sentent à l'aise. » (Extrait du forum du site Internet de la recherche)*

- une réorganisation du travail professoral avec des phases de mises en commun sur l'usage du schéma-ligne en s'appuyant sur les productions des élèves ;

> *« Il faut mieux faire peu de parties fictives, en faisant en sorte de bien mettre en commun le travail de chacun, pour que chaque élève comprenne ce à quoi renvoie la représentation sous forme de ligne et de graduation, et intériorise peu à peu la manière de fonctionner avec les graduations (l'analogie avec les wagons du train me paraît très intéressante) ». (Ibid.)*

- une modalité d'aller-retour entre le concret du jeu des annonces avec les mains et une première forme d'abstraction, le « schéma-ligne » ;

> *«Un deuxième aspect important consiste à faire toujours le lien avec la partie « réelle » à laquelle cette « partie fictive » renvoie (...). Il est important de s'assurer que les élèves comprennent qu'une ligne graduée donnée représente une annonce qu'on peut jouer avec les mains. On pourrait imaginer par exemple, pour favoriser cela que le professeur, en commentant une partie fictive, inscrive au tableau une ligne graduée, par exemple en variant les couleurs (par exemple bleu pour le nombre désigné sur la main droite, rouge pour le nombre désigné sur la main gauche), et demande aux élèves de montrer avec leurs doigts l'annonce que représente la ligne graduée ». (Ibid.)*

C1 module donc le protocole proposé dans le texte curriculaire initial du module 2 et le document programmation, en préconisant notamment une diminution du rythme des séances, pour qu'il y ait une accommodation progressive des élèves au milieu schéma-ligne. Cette accommodation passera par une étude collective de l'usage de ce système de représentation.

De plus, C1 propose d'aborder la compréhension de l'usage du schéma-ligne par sa mise en analogie avec une annonce à deux mains « une ligne graduée donnée représente une annonce *qu'on peut jouer avec les mains* ». Ainsi, C1 suggère l'institution d'une mise en traduction entre le schéma-ligne et l'annonce à deux mains avec un jeu d'aller-retour entre la représentation corporelle et la représentation analogique/symbolique du schéma-ligne. Il place

la discussion dans un jeu de représentation réciproque. Les élèves sont ici les représenteurs de ce jeu représentationnel (Sensevy, 2011c) pour le collectif. En outre, pour faciliter la compréhension des graduations du schéma-ligne, C1 propose d'utiliser deux couleurs pour désigner, sur le schéma-ligne, les deux sous-collections représentées par l'annonce à deux mains (par l'analogie avec les wagons des trains comme le proposait PE3 dans le commentaire déposé (cf. ci-dessus)). Ainsi, par cette mise en analogie, il y a articulation entre la suite des nombres sur le schéma-ligne et le cardinal du nombre désigné par les doigts.

Nous observons dans cette première régulation le rôle du site Internet de la recherche. En effet, il autorise un partage d'expériences vécues dans les classes expérimentales et nourrit l'espace collaboratif entre les sphères 1 et 2, comme le souligne C1 dans un nouveau commentaire posté sur le forum en réaction à une remarque d'un professeur du groupe expérimental sur le rythme de la progression :

> *« je pense que ce type de remarque est tout à fait intéressant, et va amener l'équipe de recherche, en coopération étroite avec les professeurs du groupe expérimental, à des aménagements de la progression (ce qui est bien l'un des buts de ce travail collectif). »*

3.2.2. Seconde régulation en ligne, le module 3

Les commentaires postés sur le site Internet de la recherche ont suscité des discussions internes à l'équipe de recherche qui ont permis de révéler des incohérences dans les textes curriculaires des modules notamment en ce qui concerne l'introduction des signes « = et ≠ » au cours du module 2. Ainsi, PCE1 dans un courriel du 7/10/12 relate le fait que ces signes mathématiques ne sont pas utilisés lors des parties fictives du module 2 et que rien dans le texte de progression ne prévoit leur introduction « je n'ai trouvé aucun moment où l'on suggérait d'introduire ces signes mais c'est présent dans la progression ».

Pour ne pas reproduire ce manque de précision lors de l'introduction des signes « < et > » au cours des modules 3 et 4, C1 poste un commentaire (en lien avec les discussions précédentes) sur le site de la recherche (le 09/10/12) proposant d'anticiper par écrit leur usage.

> *« Dans le module 3, les élèves ne traitent pas par écrit les signes « ≠, =, > et <. ». Mais c'est à la charge du professeur de les introduire lors des mises en commun, de manière qu'ils aient une première familiarité avec ces signes avant le module 4 (parties fictives) où ils vont les utiliser par écrit (...). Lors des séances 3 et 4 de ce module (les élèves doivent produire une annonce inférieure ou supérieure au jet), le professeur agit de la même façon, mais en utilisant l'ensemble des signes ≠, =, > et <. Pour certaines de ces écritures (ou pour toutes) le professeur peut s'appuyer sur la ligne graduée, ce qui constituer l'occasion d'en continuer l'étude ». (Extrait d'un commentaire posté sur le forum par C1)*

Ce commentaire sera intégré dans une nouvelle version du module 3 mise en ligne le 11/10/12.

Nous allons maintenant nous focaliser sur la seconde phase de régulation qui chronologiquement prend place après les propositions de travail citées ci-dessous.

3.3. Nouvelle régulation : réécriture des modules 3 et 4

Une première forme de régulation a donc été proposée via l'espace d'échange du site Internet de la recherche pour amener les professeurs du groupe expérimental à focaliser leur enseignement sur trois points particuliers : l'usage du schéma-ligne et des signes mathématiques « =, ≠, <, > » ainsi qu'un travail sur la mise en relation entre la situation concrète du jeu des annonces et les parties fictives. Puis, une seconde forme de régulation est amorcée par l'équipe de recherche quelques jours plus tard avec la réécriture des modules 3 et 4.

Le schéma ci-dessous (cf. Figure 14) montre les différentes phases de régulation (en grisé), les publications de commentaires sur le site de la recherche et les dates de réunions intra et inter-sphères en fonction de l'avancée programmée des modules 2, 3 et 4. Il permet de comprendre pourquoi le choix de la réécriture s'est porté sur les modules 3 et 4, modules correspondant à la programmation prévue dans le document du même nom fourni aux professeurs en début d'année.

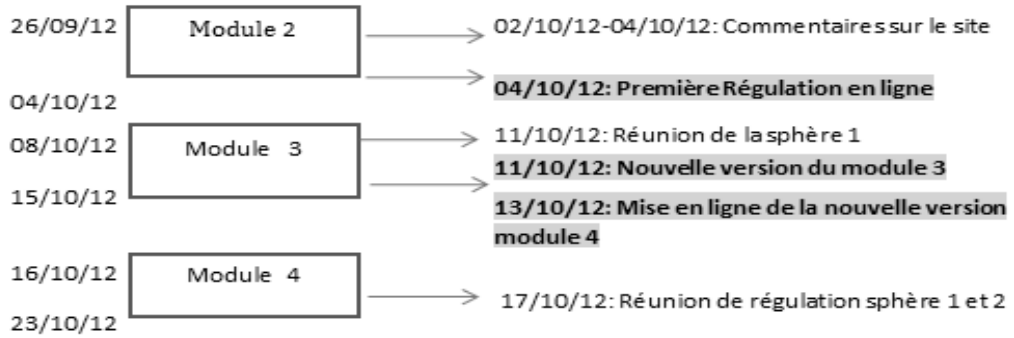


Figure 14 : chronologie des régulations successives

Cette seconde régulation vient compléter la première publiée sur le site de la recherche (cf. ci-dessus). Les choix opérés par la sphère 1 pour réécrire ces deux modules prennent appui sur les comptes rendus de séances et les échanges de courriel au sein de la sphère 1 liés

directement aux questions et problèmes posés par les professeurs du groupe expérimental. Nous analyserons dans ce paragraphe les modifications apportées aux modules 3 et 4.

3.3.1. Réagencement du Module 3

Ce module 3 « annonce à trois mains, un lancer de dé à six faces » a pour objectif la construction de désignations orales des nombres sous forme de trois sous-collections. Le texte curriculaire de ce module propose une programmation sur quatre séances isomorphes. Les élèves jouent par équipe de quatre joueurs. Les trois élèves annonceurs produisent une annonce à trois mains (une main par élève) puis l'arbitre lance un dé à six faces. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer dans les deux premières séances puis gagnante si elle est inférieure ou supérieure au lancer dans les deux séances suivantes. Nous sommes donc ici en présence de deux changements majeurs des règles du jeu par rapport au module 1 « entrée dans le jeu des annonces ». Les élèves produisent une annonce à trois mains (et non à deux mains). Le gain est obtenu non plus seulement si l'annonce est égale au lancer mais si elle est supérieure ou inférieure au lancer. Les élèves doivent mettre en place de nouvelles stratégies, en plus des stratégies déjà construites lors du module 1 (production d'annonces inférieures ou égales à six, usage du zéro) pour avoir plus de chance de gagner (produire des annonces proches de 1 lorsque l'annonce doit être inférieure au lancer et proche de 6 si l'annonce doit être supérieure au lancer). Après chaque partie, il est prévu une phase de mise en commun au cours de laquelle le professeur recense les parties effectuées et « *ce qu'il est possible, pas* possible de faire, les difficultés rencontrées lors de la collaboration entre les trois élèves » (Annexe 4).

Les modifications

La phase de mise en commun du texte curriculaire du module 3 est complétée par le commentaire posté sur le site de la recherche par C1. Ce texte suggère que le professeur prenne à sa charge l'introduction des signes mathématiques « <, > » et continue l'utilisation des signes « =, ≠ » pour noter l'égalité ou l'inégalité découlant de la comparaison d'une annonce à trois mains avec un nombre (≤ 6). Il est ajouté que « pour certaines écritures (ou pour toutes) le professeur peut *s'appuyer sur la ligne graduée, ce qui constitue l'occasion d'en continuer l'étude* » (annexe 5)

Le tableau synthétique (cf. Tableau 22) ci-dessous donne à voir les modifications apportées dans le texte curriculaire. Ainsi, dans le rectangle central est consignée la première version du module 3 et dans le second rectangle, apparaissent les modifications apportées.

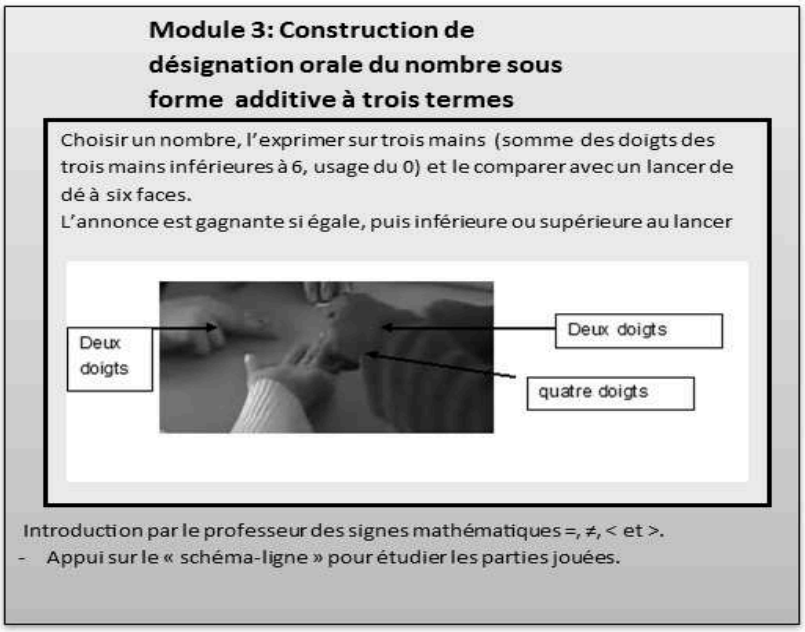


Tableau 22 : vision synoptique des modifications entre le module 3 V1 et V2

Nous assistons donc ici à une première réorganisation du texte curriculaire prenant en compte le temps nécessaire à une familiarisation par les élèves des signes mathématiques mais aussi la nécessité d'une fréquentation continue du schéma-ligne.

Eléments d'analyse

L'analyse des deux versions successives de ce module (septembre 2012 et octobre 2012) nous amène à distinguer deux capacités cibles. La première est présente dans les deux versions de ce module. Il s'agit de la construction de la désignation orale des nombres (≤ 6) sous forme de trois sous-collections (chaque collection $\leq$ 5). Cette capacité se construit dans un jeu d'apprentissage (JA1) que nous nommerons « faire produire des décompositions additives à trois mains et les comparer avec un lancer de dé à six faces ». Le milieu proposé ici est donc discursif (puisque les élèves énoncent un nombre), corporel (représentation des trois sous-collections avec les mains) et matériel (dé, jetons). A partir du texte curriculaire, nous pouvons déduire la règle définitoire issue du contrat didactique « produire une annonce à trois mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces ». Les élèves s'appuient sur leurs connaissances antérieures construites lors du module 1 et 2 c'est-à-dire sur leurs

connaissances des désignations orales des nombres. Cette règle semble pouvoir activer la mémoire didactique de la classe puisqu'elle fait référence au jeu d'apprentissage du module 1 « faire produire des décompositions additives à deux mains et les comparer avec un lancer de dé à six faces » et donc doit favoriser l'émergence des stratégies mises en évidence lors du module 1 (production d'annonces inférieures ou égales à 6).

La seconde version du texte de déroulement de ce module (que nous nommons 3') propose de compléter la phase de mise en commun (dans laquelle le professeur fait la synthèse des parties jouées) par l'introduction des signes mathématiques « =, ≠, < et > » « pour que les élèves se familiarisent avec ces signes avant le module 4 » (Annexe 5). Il est aussi précisé que le professeur peut s'appuyer sur le schéma-ligne pour étudier ces écritures mathématiques. Nous modéliserons cette nouvelle proposition de mise en œuvre par un jeu d'apprentissage 2 « faire traduire une décomposition de trois-sous-collections (avec trois mains) par un schéma-ligne et traduire sa comparaison avec un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique (en usant des signes =, ≠, <, >, + ». Ce nouveau jeu d'apprentissage introduit deux nouvelles capacités cibles :

- traduction d'une décomposition d'un nombre en trois sous-collections (annonce) par un schéma-ligne ;

- traduction d'une comparaison entre trois sous-collections (chacune ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique en usant des signes « =, <, >, + » ».

Nous sommes en présence ici d'un jeu d'imitation dans la mesure où le professeur montre aux élèves comment traduire en langage mathématique écrit le résultat de la comparaison entre une annonce à trois mains et un lancer de dé en s'appuyant sur le schéma-ligne (les élèves seront amenés à réinvestir ces signes lors du module 4). Le milieu se complexifie avec l'introduction de l'écriture d'une égalité ou d'une inégalité mathématique et du schéma-ligne. Le professeur montre la correspondance entre le langage naturel, le schéma-ligne et l'écriture symbolique. Ce jeu d'apprentissage permet l'introduction de nouveaux signes mathématiques traduisant les expressions orales « plus petit que, plus grand que ». Il autorise une familiarisation progressive des élèves avec les signes mathématiques et une certaine continuité dans l'usage des représentations. Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 23) donne à voir les modifications apportées à ce module 3.

Module 3	
Version 1	Version 2
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire des décompositions additives à trois mains et les comparer avec un lancer de dé à six faces. **Capacité cible 1 :** Désignations orales des nombres (≤ 6) sous forme de trois sous-collections (chaque collection ≤ 5)	
	Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire une décomposition de trois-sous-collections (avec trois mains) par un schéma-ligne et traduire sa comparaison avec un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique (en usant des signes =, <, >, + » ». **Capacité cible 2 :** Traduction d'une décomposition en trois sous collections d'un nombre (annonce) par un schéma-ligne. **Capacité cible 3 :** Traduction d'une comparaison entre trois sous-collections (chacune ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique en usant des signes. « =, <, >, + »

Tableau 23 : modélisation des versions 1 et 2 du module 3 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités-cibles

Le tableau ci-dessus synthétise l'évolution de ce module 3 en fonction des capacités cibles et des jeux d'apprentissage modélisant le texte curriculaire. Nous observons donc une densification de l'activité épistémique par un travail spécifique sur la mise en correspondance/traduction/mise en analogie d'une comparaison orale avec son écriture mathématique et sa représentation sur un schéma-ligne. Le concept d'égalité est ici approfondi avec l'introduction de deux nouveaux signes mathématiques « <, > » venant traduire l'inégalité entre l'écriture additive à trois termes et un nombre ≤ 6. Le signe « = » se construit donc en opposition avec trois autres signes qui permettent de le distinguer dans un travail systématique sur les signes, de type « paradigmatique » (Brousseau, 1986).

Nous remarquons que dans le texte curriculaire du module 3' (version 2), la relation de représentation proposée se fait toujours de l'annonce à trois mains, c'est-à-dire de la représentation corporelle (le représenté) vers l'écriture symbolique ou le schéma-ligne (les représentants). Il n'existe pas comme dans la proposition faite par C1 sur le forum du site de la recherche une relation de représentation réciproque entre les différentes représentations du nombre, corporelle, symbolique et analogique/symbolique. De même, la proposition d'user de code couleur pour représenter chaque main sur le schéma-ligne n'est pas reprise ici.

Cette nouvelle version amène donc une complexification centrée sur la modélisation par deux systèmes sémiotiques différents (écriture mathématique et schéma-ligne) de l'activité mathématique des élèves.

Nous nous pencherons dans la suite de cette étude sur les modifications apportées par la sphère 1 au module 4.

3.3.2. Module 4 : le jeu des correspondances

Dans un second temps, la sphère 1 opère un travail plus spécifique sur le module 4 pour tenter de remédier aux problèmes rencontrés par les élèves lors du module 2. Le choix de retravailler précisément ce module 4 s'explique, tout d'abord, par le fait qu'il correspond à l'avancée des modules prévue dans le texte de programmation (mise en œuvre prévue du 16 au 23 octobre 2012). Ensuite parce que ce module consolide les capacités construites lors du module 2 notamment l'usage des signes mathématiques « = et ≠ ». Il propose un travail d'approfondissement de la désignation des nombres sous forme additive et sur les systèmes de représentation. Ce module autorise les élèves à faire l'expérience de la construction de la forme additive à trois termes comme moyen de désignation des nombres. Des nouveaux signes mathématiques « < ; > » sont introduits en complément des signes « = ; ≠ ». Toutefois, comme nous l'avons analysé plus en amont, l'appropriation de ces connaissances a posé des problèmes aux élèves lors du module 2 d'où la nécessité pour la sphère 1 de produire une seconde version.

A partir des comptes rendus de séances de classes d'étude et des échanges entre les membres de la sphère 1, quatre types de modifications sont proposés dans le cadre de la réécriture de ce module :

- l'introduction du schéma-ligne lors des phases de mise en commun des deux premières séances ;

- un travail systématique sur les signes mathématiques « =, ≠, < et > » ;

- un travail spécifique sur l'appropriation du schéma-ligne avec une mise en correspondance entre ce schéma et le schéma-train (en lien avec le module 0). Cette mise en relation permet de produire une correspondance terme à terme entre les unités du schéma-train et les intervalles du schéma-ligne (cf. Figure 15, ci-dessous) ;

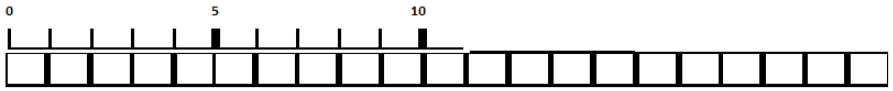


Figure 15 : schéma-train/ligne (Annexe 7)

- un travail sur le jeu des correspondances entre les différentes représentations du nombre, jeu oral des annonces, écriture additive, schéma-train, schéma-ligne dans un processus de référence mutuelle (Fyfe, McNeil, Son & Goldstone, 2014).

Nous nommerons la nouvelle version de ce module 4, le module 4'. Nous analyserons tout d'abord succinctement la première version du texte curriculaire du module 4 mis à disposition des professeurs du groupe expérimental en juin 2012. Puis, nous étudierons plus spécifiquement les principales modifications opérées dans le module 4' par la sphère 1 résultant des échanges intra et inter-sphères.

Première version du module 4 (cf. Annexe 6)

Les objectifs visés dans le module 4 s'appuient sur les connaissances acquises lors du module 3 (désignations orales des nombres (≤ 6) sous forme de trois sous-collections (≤ 5)) « qui sont venues compléter celles construites dans le module 1 et 2 » (annexe 6). L'enjeu de ce module est de

> *« consolider l'usage du signe « + » et de laisser les élèves faire l'expérience par écrit des contraintes des dés à six faces (la somme des trois termes ne peut être supérieure à six) et des mains (chaque terme doit être inférieur ou égal à cinq). Il y a dans cette situation une nécessité de connaître le répertoire additif et de l'avoir mémorisé. ». (Ibid.)*

L'organisation proposée de quatre séances de cette première version du module 4 est identique à celle du module 2. Deux premières séances au cours desquelles les élèves notent sur leur fiche de jeu une écriture additive à trois termes puis la comparent avec le résultat d'un lancer de dé. L'annonce est gagnante dans la première séance si elle est égale au lancer puis dans la séance suivante si elle est inférieure ou supérieure au lancer. Les élèves écrivent la lettre P pour perdu ou G pour gagner sur leur fiche de jeu. Le texte du déroulement propose aux professeurs de présenter le problème de la façon suivante :

> « *On va continuer à jouer au jeu des annonces mais sans utiliser les mains. On va maintenant utiliser une fiche de jeu. Nous avons lors des parties précédentes joué avec trois mains, il faudra donc écrire une annonce à trois termes et séparer chaque terme par le signe* + ». (Annexe 6)

Annonce	Lancer	Gagné/perdu
3+2+1	2	Gagné

Figure 16 : extrait du module 4 (Annexe 6)

Les élèves écrivent une addition à trois termes (première colonne) qu'ils comparent avec le résultat d'un lancer de dé à six faces (deuxième colonne) et notent s'ils ont gagné ou perdu (troisième colonne).

Puis, une phase de mise en commun est organisée par le professeur dans laquelle les élèves doivent justifier des résultats trouvés.

Les deux dernières séances se focalisent sur des parties fictives proposées dans le texte curriculaire dans lesquelles les élèves résolvent des problèmes de comparaison en s'appuyant sur les systèmes de représentation, le schéma-boîte et le schéma-ligne en usant des signes « =, ≠, < et > ».

Seconde version du module 4

Les deux premières séances de la seconde version du module 4 se voient enrichies de deux modifications majeures.

Dans un premier temps est ajoutée une ligne dans la fiche de jeu, ligne sur laquelle les élèves notent l'écriture mathématique correspondante au résultat de la comparaison effectuée (en complément des lettres G/P). Cette ligne supplémentaire fait écho à la remarque de PCE1 sur l'usage des signes mathématiques (cf. Régulation en ligne) et prend place ainsi dans la continuité de la seconde version du module 3 avec l'introduction par le professeur des signes mathématiques « =, ≠, < et > ». La figure ci-dessous (cf. Figure 17) montre l'évolution de la feuille de jeu proposée dans les deux versions du module 4.

Annonce	Lancer	Gagné/perdu
3+2+1	2	gagné

Annonce : 2+1+1
Lancer : 5
Gagné/Perdu (G/P) : P 2+1+1 ≠ 5

Figure 17 : version 1 (module 4 (annexe 6) et 2 de la feuille de jeu du module 4' (Annexe 7)

Dans un second temps, est intégré un travail sur les systèmes de représentation lors de la phase de mise en commun. Ainsi, le texte curriculaire propose au professeur de mettre en relation les systèmes de représentation (le schéma-boîte et schéma-ligne), le langage naturel

associé (différent de, y plus grand que x de z, x plus petit que y .de z (y, x et z représentent des nombres entiers naturels)) et l'écriture mathématique à partir des comparaisons produites par les élèves. Ainsi, la nouvelle version module 4 autorise les élèves à se familiariser avec l'usage des signes mathématiques « =, ≠, > et < » et de continuer l'étude des systèmes de représentation par le biais du professeur.

Dans un troisième temps, la séance 3 du module 4 est entièrement ré-agencée pour que les élèves s'approprient l'usage du schéma-ligne et fassent le lien entre les différents systèmes sémiotiques proposés et la situation réelle du jeu oral des annonces. Ainsi, à partir d'une partie fictive choisie par le professeur (addition à trois termes), les élèves, travaillant en collectif-classe, mettent en correspondance cette écriture additive avec une partie réelle de jeu (une annonce à trois mains). Puis, elle est mise en relation avec le schéma-train (module 0) que le professeur superpose ensuite avec le schéma-ligne pour aboutir à un schéma train/ligne. Ce nouveau système de représentation doit permettre aux élèves de comprendre que chaque intervalle du schéma-ligne correspond à un wagon du schéma-train et donc à une unité. Une place particulière est réservée au langage oral accompagnant cette mise en correspondance (par exemple, le premier terme « 3 » de l'annonce correspond aux 3 wagons rouges…).

Un travail de comparaison entre l'annonce et le lancer est ensuite proposé par le professeur à partir du schéma-train/ligne désignant l'annonce et le schéma-ligne du lancer. Cette comparaison passe par la mise en relation du langage naturel (plus petit que/inférieur à, plus grand que/supérieur à, différent de, égal) avec les écritures mathématiques (>, <, ≠, =) comme nous le précise le texte du déroulement (cf. Annexe 7).

La seconde partie de la séance propose, quant à elle, de faire travailler les élèves sur des fiches plastifiées de parties fictives avec une centration sur l'usage du schéma-ligne. Considérant une annonce produite par trois élèves avec leurs mains et écrite au tableau par le professeur, les élèves la représentent sur le schéma-ligne. Le lancer effectué par le professeur est ensuite représenté sur un second schéma-ligne. Enfin, lors de la mise en commun, le professeur, sous la directive des élèves, trace au tableau les schémas-ponts correspondants sur les schémas-lignes et compare l'annonce avec le lancer en usant du vocabulaire adéquat. Il est précisé qu'un appui sur le schéma-ligne/train peut être réalisé.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 24) montre dans la colonne de gauche l'organisation de la première version du module 4 et dans la colonne de droite la version réactualisée en octobre 2012 par la sphère 1 (les modifications majeures sont grisées).

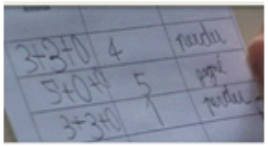
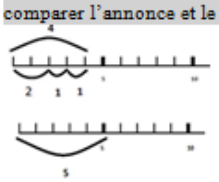
Version 1	Version 2
Ecrire une addition à trois termes (une annonce) dont la somme est ≤ 6 et chaque terme ≤ 5 et la comparer avec un nombre usuel (un lancer de dé à six faces). L'annonce est gagnante si égale, supérieure ou inférieure au lancer selon la règle définie par le professeur. 	Ecrire une addition à trois termes (une annonce) dont la somme est ≤ 6 et chaque terme ≤ 5 et la comparer avec un nombre usuel (un lancer de dé à six faces). L'annonce est gagnante si égale, supérieure ou inférieure au lancer selon la règle définie par le professeur - User des signes mathématiques « =, ≠, < et > » et du schéma-ligne pour comparer l'annonce et le lancer  Annonce : 2+1+1 Lancer : 5 Gagné/Perdu (G/P) : P 2+1+1 < 5
	Mettre en correspondance une partie fictive avec une annonce à trois mains, un schéma-train, un schéma-ligne, l'écriture mathématique et le langage oral. 5 est plus petit (inférieur à) 6 — 6 > 5 6 est plus grand que (supérieur à) 5 — 5 < 6 3+2+1 est différent de 5 ; — 3 + 2 + 1 ≠ 5 3+2+1 est plus grand que (supérieur à) 5 ; — 3 + 2+ 1 > 5 5 est plus petit que (inférieur à) 3+2+1 — 5 < 3 + 2 + 1
- Résoudre un problème de comparaison entre une écriture additive à trois termes (chaque terme inférieur ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) en s'appuyant sur les systèmes de représentation (boîte et schéma-ligne) pour résoudre ou justifier le résultat trouvé.	- Résoudre un problème de comparaison entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) en s'appuyant sur les systèmes de représentation (schéma-boîte et schéma-ligne) pour résoudre ou justifier le résultat trouvé. - Discussion collective de chaque partie fictive en appui sur l'étude des systèmes de représentation (Schéma-ligne/train)

Tableau 24 : Vision synoptique des modifications apportées au module 4 par la sphère 1

Analyse des modifications apportées

Nous modéliserons ici les deux versions successives du texte curriculaire du module 4 produites par la sphère 1 sous forme de jeux d'apprentissage et capacités cibles pour tenter de comprendre l'évolution de l'organisation des savoirs proposés.

- Analyse de la première version, module 4

La première version du texte du module 4 peut être modélisée par deux jeux d'apprentissage successifs. Le premier (JA1) peut se définir ainsi « faire produire une écriture additive à trois termes en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel ». Ce jeu doit rendre les élèves capables de construire différentes désignations des nombres (≤ 6) sous forme d'écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5).

Les règles définitoires du contrat didactique peuvent se définir par « écrire une annonce à trois termes sur une fiche de jeu » et par « l'annonce est gagnante si elle est égale au lancer ». Cette seconde règle définitoire évolue dans la deuxième séance vers « l'annonce est gagnante si supérieure ou inférieure au lancer ».

Les connaissances antérieures des élèves pour aborder ce jeu d'apprentissage proviennent des capacités construites lors du module 2 (entrée dans l'écriture symbolique) du JA 1 « désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes » et lors du JA1 du module 3 « désignation orale des nombres (≤ 6) sous forme de trois sous-collections (chaque collection ≤ 5) ». Cependant, il n'est pas précisé dans ce texte si les élèves doivent user des signes mathématiques « =, ≠, < et > ».

Le second jeu d'apprentissage de ce module qui modélise les deux dernières séances est « Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison ». Il permet un réinvestissement des capacités construites lors du jeu d'apprentissage précédent mais aussi de celles construites lors du module 2 qui, comme nous l'avons analysé dans la seconde section de ce chapitre, reste en suspens.

- Analyse de la seconde version, le module 4'

La seconde version du module 4 peut, quant à elle, se décomposer en quatre jeux d'apprentissage. Le jeu d'apprentissage 1 reste semblable à la version précédente « faire produire une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et la comparer avec un nombre usuel (≤ 6) ». Cependant, le milieu scriptural de la fiche de jeu est complété par une ligne supplémentaire sur laquelle les élèves valident le résultat de leur comparaison par l'écriture d'une égalité ou inégalité en usant des signes mathématiques « =, ≠, < et > ». L'écriture mathématique traduit le résultat de la comparaison (P/G) et la valide. Le milieu s'enrichit donc d'une écriture mathématique désignant une égalité ou une inégalité. Une nouvelle capacité cible s'ajoute à la première :

- capacité cible 1 : désignation des nombres (≤ 6) sous forme d'écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5)),

- capacité cible 2 : usage des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6).

Un second jeu d'apprentissage lui succède, qui s'inspire du jeu d'apprentissage 2 du module 2 « faire traduire une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) par un schéma-ligne et traduire leur comparaison par une écriture mathématique ». Le milieu symbolique (nombres et écriture mathématique) est traduit dans un nouveau milieu analogique/symbolique que sont les deux systèmes de représentation du nombre, le schéma-

ligne et le schéma-boîte. Le milieu-problème s'enrichit avec la mise en relation entre des schémas-lignes représentant l'annonce et le lancer, le langage naturel et les signes mathématiques « < et > ». Cette mise en correspondance est à la charge du professeur dans un contrat didactique d'imitation. Il y a donc ici une première densification du travail épistémique des élèves dans la mesure où ils doivent user des signes mathématiques « =, ≠, < et > » pour justifier leur résultat. Puis, une seconde densification apparaît avec l'introduction par le professeur des systèmes de représentation en lien avec le langage et les signes mathématiques correspondant. Celle-ci autorise la continuation du travail amorcée lors du JA 2 de la seconde version du module 3 « faire traduire une décomposition en trois-sous-collections (avec trois mains) d'un nombre par un schéma-ligne et traduire sa comparaison avec un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique en usant des signes « =, <, >, + ».

Le troisième jeu d'apprentissage « faire comparer une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) » modélise le nouveau texte de la séance 3. Dans ce jeu d'apprentissage, plusieurs capacités sont ciblées :

- traduction d'une écriture additive à trois termes par une annonce à trois mains, un schéma-train/ligne (complété par les schémas-ponts) ;

- traduction d'une comparaison entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) par une écriture mathématique en usant des signes « <, >, =, ≠ ».

La construction de ces capacités se base dans un premier temps sur le réinvestissement par les élèves des capacités construites lors du JA 2 du module 3' c'est-à-dire la traduction d'une décomposition en trois sous collections (annonce) d'un nombre par un schéma-ligne et la traduction d'une comparaison entre trois sous-collections (chacune ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique en usant des signes. « =, <, >, + ». Le JA 3 de la nouvelle version du module 4 a donc pour objectif de continuer la construction d'une capacité de traduction sur le schéma-train/ligne d'une écriture additive. Cette capacité cible est retravaillée dans ce nouveau jeu d'apprentissage en se focalisant sur la compréhension du sens des graduations du schéma-ligne. Pour cela est introduit dans le milieu un nouveau système de représentation du nombre, un schéma-train (module 0) venant se superposer au schéma-ligne pour que chaque intervalle corresponde à une unité (un wagon).

Le dernier jeu d'apprentissage du texte de ce module concerne les séances dédiées aux parties fictives et reprend donc celui du module 2 « faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison ».

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 25) donne une vision synoptique de l'évolution des jeux d'apprentissage en comparant les deux versions successives du module 4 (les nouveaux JA et capacités cibles sont en grisé).

Module 4	
Version 1	Version 2
Séance 1 et 2	
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel (≤ 6). **Capacité cible 1** : Désignation des nombres (≤ 6) sous forme d'écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5).	Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une addition à trois termes (chaque terme ≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel (≤ 6). **Capacité cible 1** : Désignation des nombres (≤ 6) sous forme d'écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5). **Capacité cible 2 :** Usage des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) Jeu d'apprentissage 2 : faire traduire une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) par un schéma-ligne et traduire leur comparaison par une écriture mathématique. **Réinvestissement des capacités construites :** **dans le module 2 (JA 2)** : Capacité de construction de systèmes de représentation du nombre comme moyen de preuve ou de résolution d'un problème de comparaison **dans le module 3' (JA 2)** : capacité de traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne et de schéma-boîte.
Séances 3 et 4 Jeu d'apprentissage 1 : Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison. **Réinvestissement des capacités construites** dans le jeu d'apprentissage précédent et au cours du JA2 du module 2.	**Séance 3** Jeu d'apprentissage 3 : Faire comparer une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6). **Capacité cible 1** : Traduction d'une écriture additive à trois termes par une annonce à trois mains, un schéma-train/ligne (complété par les schémas-ponts **Capacité cible 2 :** Traduction d'une comparaison entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) par une écriture mathématique en usant des signes « <, >, =, ≠ ». Jeu d'apprentissage 4 : Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison.

Tableau 25 : modélisation des versions 1 et 2 du module 4 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités-cibles

Dans la seconde version du module, il y a une complexification, centrée sur la modélisation par deux systèmes sémiotiques différents (écriture mathématique et le schéma-train/ligne), du travail mathématique de l'élève avec une place de plus en plus grande laissée au langage naturel qui accompagne ces systèmes sémiotiques.

Nous allons maintenant nous focaliser sur l'analyse de la séance 3 du module 4'qui propose une remédiation spécifique aux difficultés rencontrées par les élèves lors du module 2.

3.3.3. Le jeu des correspondances, module 4' séance 3

Le module 4 (re)construit par la sphère 1 afin de remédier aux difficultés des élèves se compose comme nous l'avons vu précédemment de quatre séances. Nous nous centrerons ici sur l'analyse de la séance 3 car sa création ad hoc tente de répondre aux attentes des professeurs du groupe expérimental, notamment sur l'usage du schéma-ligne et la perte de référence concrète lors du passage à la situation écrite des annonces (cf. Annexe 7, séance 3).

Cette séance se décompose en deux phases, une phase collective avec l'étude d'une partie fictive puis une phase de travail en atelier avec un travail spécifique sur l'usage du schéma-ligne pour comparer une écriture additive à trois termes et un nombre usuel. Nous étudierons dans cette section de manière microscopique la première phase de cette séance. En effet, le texte curriculaire de la séance 3 du module 4' propose aux élèves de résoudre un nouveau problème qui peut être défini comme la mise en relation entre les différents systèmes de représentation, la représentation corporelle avec les mains, le schéma-ligne, le schéma-train et l'écriture symbolique.

Dans un premier temps, nous examinerons comment le texte curriculaire organise l'étude de la compréhension des graduations du schéma-ligne et les liens entre les différentes représentations du nombre. Puis, dans un second temps, nous analyserons comment est abordée la mise en relation entre l'écriture mathématiques (égalités et inégalités) avec les systèmes de représentation.

Systèmes sémiotiques

Le texte curriculaire suggère l'organisation de la séance 3 suivante. Le professeur affiche au tableau une feuille de jeu que les élèves ont déjà rencontrée au cours des deux séances précédentes. Sur celle-ci est notée une écriture additive à trois termes (une annonce) et un nombre usuel (le lancer).

Annonce : 3+2+1
Lancer : 5
Gagné/Perdu (G/P) : ……..

Figure 18 : partie fictive proposée dans le module 4' (annexe 7)

Le professeur demande alors à trois élèves d'exprimer l'écriture additive à trois termes par une partie réelle à trois mains (cf. Annexe 7). Chaque terme de l'addition est traduit par une sous-collection de doigts d'une main. Par un processus de représentation, l'écriture symbolique, le représenté, est mise en analogie avec une représentation corporelle (le représentant). Cette écriture additive symbolique est donc rattachée dans un premier temps à une situation effective « corporelle », bien connue des élèves. Les termes de l'écriture additive sont alors mis en relation avec le cardinal de la collection qu'elle dénote. Il y a donc activation d'un milieu effectif (corporel) préexistant qui renvoie à la capacité mathématique incorporée construite lors du premier jeu d'apprentissage du module 3 « désignations orales des nombres (≤ 6) sous forme de trois sous-collections (chaque collection ≤ 5) ». . Le texte curriculaire laisse les élèves prendre la main, être représenteurs pour le collectif de la monstration de cette mise en analogie.

Nous sommes donc ici en présence d'une première tentative de remédiation par la sphère 1 de la difficulté des élèves à mettre en relation une écriture mathématique avec une référence au réel.

Dans un second temps, cette première écriture symbolique est mise en correspondance avec le schéma-train, première représentation analogique de collections réelles que les élèves ont rencontrée lors du module 0 (représenté par des cubes emboîtables, le train-cubes). Ce schéma est composé d'une juxtaposition de carrés, chaque carré représentant une unité. Le nombre (chaque terme de l'écriture additive) comme mesure de grandeur est représenté par une collection de carrés de même couleur et des doigts montrée sur une main. Il demande

> *« à un élève de colorier les wagons correspondant à l'annonce proposée dans la partie fictive, chaque terme correspondant à la première main, par exemple, en posant la question qui veut colorier les wagons correspondant à la première main (...) » (Annexe 7).*

Figure 19 : schéma-train extrait du module 4' (Annexe 7)

Ainsi, le professeur demande aux élèves de produire une double traduction :

- entre les trois termes de l'écriture additive et les trois sous-collections représentées par trois portions du schéma-train ;

- entre ces trois sous-collections représentées par le schéma-train et trois mains.

Il y a donc ici transfert du schéma-train du module 0 (où le schéma-train est la représentation graphique/analogique du train-cubes) vers la situation des annonces. Il vient représenter une écriture additive à trois termes et une annonce à trois mains.

Nous observons ici une volonté de la part de la sphère 1 de construire un jeu d'aller-retour entre les différentes représentations du nombre déjà rencontrées par les élèves (mains, schéma-train, écriture symbolique). Les élèves doivent pouvoir référer à une situation réelle (les mains) les systèmes de représentation plus abstraits.

Dans un troisième temps, le professeur introduit au tableau le schéma-ligne qu'il superpose au schéma-train en faisant correspondre chaque wagon à un intervalle (cf. Figure 20).

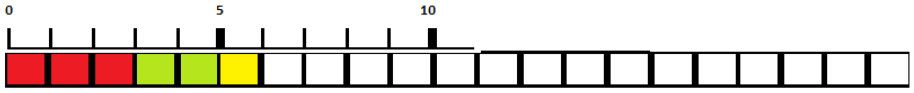


Figure 20 : schéma-train/ligne extrait du module 4' (annexe 7)

Il fait ensuite s'exprimer les élèves sur la place de chaque wagon en fonction des intervalles/graduations du schéma-ligne (cf. Annexe 7). L'objectif est donc ici que les élèves comprennent qu'à chaque intervalle du schéma-ligne correspond une unité du schéma-train.

Dans un quatrième temps, le professeur place les schémas-ponts (trait graphique symbolisant chaque collection sur le schéma-ligne) sur le schéma-ligne en prenant appui sur le schéma-train pour que « *les élèves puissent observer l'analogie entre les ponts représentant cha*que *terme de l'annonce et les wagons* » (Annexe 7).

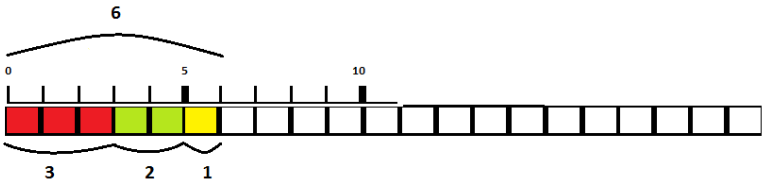


Figure 21 : schéma-train/ligne avec schémas-ponts extrait du module 4' (Annexe 7)

L'enjeu de cette analogie entre le schéma-train et le schéma-ligne est de montrer aux élèves que les schémas-ponts tracés désignent des sous-collections et collections de wagons qui correspondent eux-mêmes à un nombre d'intervalles (à une collection d'unités).

Le professeur demande alors aux élèves de mettre oralement en correspondance les termes de l'annonce avec les sous-collections du schéma-train « *le premier nombre de l'annonce, 3,* correspond aux wagons rouges *; le deuxième nombre de l'annonce, 2, cor*respond aux wagons verts *; le troisième nombre de l'annonce, 1, correspond au wagon jaune.* » (Annexe 7).

Le texte curriculaire propose alors au professeur de laisser la main aux élèves pour traduire le schéma-train/ligne par l'écriture symbolique, d'en faire oralement l'expérience.

La figure ci-dessous (cf. Figure 22) décrit à grain microscopique comment le texte curriculaire de la séance 3 du module 4' autorise un enrichissement progressivement du contenu didactique du JA3.

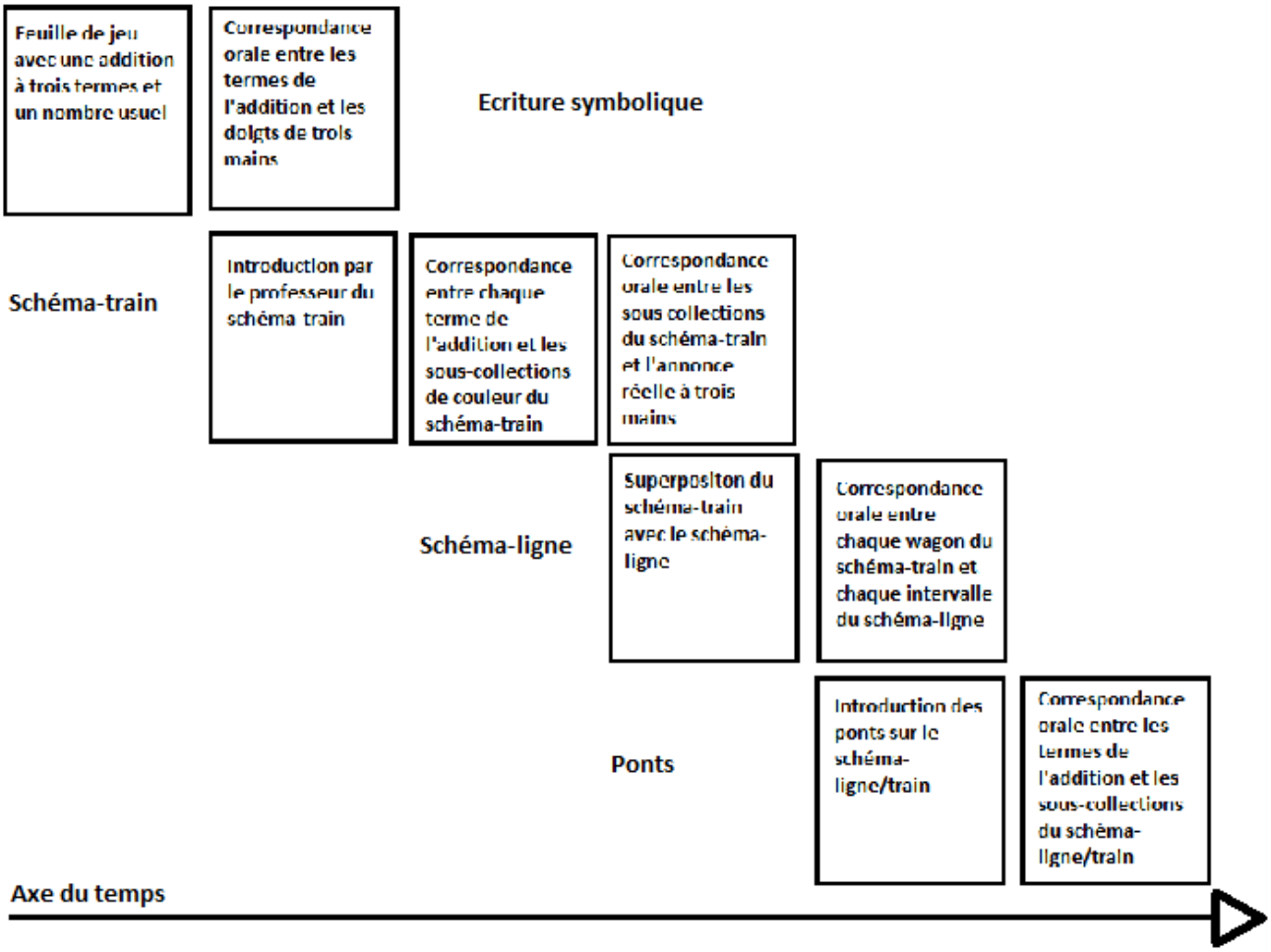


Figure 22 : complexification du jeu didactique de la phase 1 de la séance 3 du module 4'

Le problème que l'élève doit résoudre est ici de mettre en relation différents systèmes de représentation entre eux. Nous observons une succession de micro jeux d'apprentissage avec une complexification relationnelle progressive du milieu grâce à l'introduction échelonnée de

différents systèmes sémiotiques (l'écriture symbolique, le schéma-train, le schéma-ligne, le schéma-pont) déjà rencontrés par les élèves au cours des modules précédents. La règle définitoire « générique » du contrat didactique pourrait être définie par « mettre en relation des systèmes de représentation entre eux ». Elle se spécifie au fur et à mesure de l'avancée de la séance. Le problème est donc bien ici le problème d'analogie entre milieux. L'élève doit être capable d'exprimer dans un milieu A ce qui est exprimé dans un milieu B et réciproquement.

A cela s'ajoute la juxtaposition de deux représentations déjà connues par les élèves pour aboutir au le schéma-ligne/train. Le texte curriculaire propose une structuration du travail des élèves par le professeur. Il alterne les phases où les élèves sont invités à exprimer oralement, corporellement et de manière scripturale les correspondances entre les différentes représentations et donc à occuper une position topogenétique haute. Puis, des phases où le professeur montre la correspondance entre ces systèmes de représentation (entre le schéma-train, le schéma-ligne et l'usage des ponts pour désigner les termes de l'annonce) à travers un contrat d'imitation.

Le jeu d'apprentissage 3 modélisant le texte curriculaire propose de pallier la compréhension par les élèves du schéma-ligne par l'usage du schéma-ligne/train et apporte une référence concrète à l'écriture additive, au schéma-ligne à travers les annonces produites avec les mains. Il continue le travail amorcé dans la nouvelle version du module 3, la traduction des systèmes de représentation entre eux, leur mise en analogie à travers une structure de représentation qu'on ne pense pas a priori comme représentant ou représenté pour montrer qu'elle peut devenir, selon le jeu représentationnel, l'un ou l'autre.

Usage des signes mathématiques dans la comparaison

Nous nous intéressons maintenant à la seconde étape de cette première phase de la séance 3 qui complète et conclut le problème de comparaison proposé au début de la séance. Cette seconde étape propose une mise en relation systématique des égalités ou inégalités écrites avec les systèmes de représentation. Pour cela, le professeur propose de comparer l'annonce avec le lancer à partir de leur représentation sur respectivement un schéma-ligne/train et un schéma-ligne (cf. Figure 23).

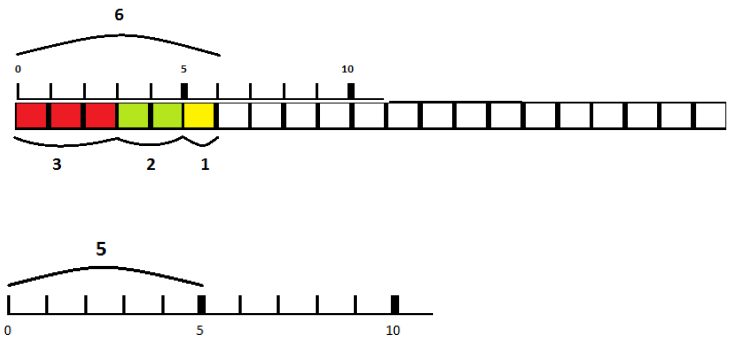


Figure 23 : comparaison de 3+2+1 avec 5, extrait du module 4' (annexe 7)

Cette comparaison se fait d'abord en langage naturel puis elle est traduite au tableau par le professeur sous forme d'écriture mathématique (cf. Annexe 7, séance 3).

Cet exemple montre aux élèves que le schéma-ligne permet de résoudre un problème de comparaison. En effet, il donne à voir le fait que la somme des trois termes de l'addition est différente du lancer. La portion du schéma-train-ligne représentée par un schéma-pont (qui figure au-dessus de la ligne) est plus long/grand que celui du lancer. Le schéma-pont permet donc de donner à voir que le nombre 6 est plus grand de 1 du nombre 5. Ces observations traduites en langage naturel sont ensuite notées par le professeur au tableau sous forme mathématiques. Il y a donc ici réinvestissement des capacités cibles construites au début de la nouvelle version du module 4' au cours du JA 1et JA 2

- capacité d'utiliser les signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) ;

- capacité de traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne ;

- capacité de construction de systèmes de représentation du nombre comme moyen de preuve ou de résolution d'un problème de comparaison.

3.4. Synthèse de la régulation immédiate réalisée par la sphère 1

Pour remédier aux difficultés des élèves liées au rythme soutenu des séances proposé par le document programmation et à l'usage des systèmes de représentation introduits dans le texte curriculaire du module 2, la sphère 1 propose deux types de régulations lors du premier trimestre 2012 ;

- une régulation immédiate en ligne par le bais de commentaires déposés sur le forum du site internet de la recherche ACE ;

- une régulation écrite avec des modifications apportées dans le corps même des textes curriculaires du module 3 et 4.

L'analyse de la première régulation en ligne a permis de mettre en évidence une orientation, par l'équipe de recherche, du travail du professeur et des élèves vers l'institution d'une traduction représentationnelle. En effet, l'équipe de recherche suggère aux professeurs, dans un premier temps, de mettre en lien le schéma-ligne avec le schéma-train pour que chaque intervalle corresponde à une unité. Dans un second temps, elle propose de traduire la représentation du schéma-ligne par une annonce à deux mains pour renvoyer à ce qu'elle dénote dans la réalité, le schéma-ligne modélisant une annonce produite avec les mains.

La seconde régulation présente une réécriture de certaines sections du module 3 et 4. Ainsi, le texte curriculaire du module 3' introduit, dans les phases de mise en commun (après que les élèves jouent au jeu oral des annonces à trois mains), le schéma-ligne ainsi que l'écriture mathématique. Le professeur est invité à représenter la comparaison entre une annonce à trois mains et le résultat d'un lancer de dé à six faces sur le schéma-ligne et à produire l'écriture mathématique correspondante en utilisant les signes « $=$, $\neq$, $<$ et $>$ ». Il y a donc ici une volonté de travailler sur la mise en analogie d'une annonce à trois mains avec un schéma-ligne et l'écriture mathématique correspondante.

Dans le module 4', une séance spécifique a été produite par l'équipe de recherche pour travailler précisément la traduction représentationnelle entre les mains, le schéma-train, le schéma-ligne et l'écriture mathématique.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 26) donne une vision synoptique de cette régulation en fonction des capacités cibles.

Module 2 : Jeu écrit des annonces (comparaison d'une écriture additive à deux termes et un lancer de dé à six faces)	**Module 3'** : Jeu oral des annonces (comparaison d'une annonce à trois mains et d'un lancer de dé à six faces)	**Module 4' :** Jeu écrit des annonces (comparaison d'une écriture additive à trois termes et un lancer de dé à six faces)
Capacité cible : Désignation écrite de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes. **Capacité cible :** Usage des signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6).	**Capacité cible :** Désignation orale de nombres (≤ 6) sous forme de trois sous-collections (chaque collection ≤ 5).	**Capacité cible** : Désignation écrite de nombres (≤ 6) sous forme d'écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5). **Capacité cible** : Usage des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6)
Capacité cible : Traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne et de schéma-boîte. **Capacité cible :** Traduction d'un schéma-ligne avec une annonce à deux mains. **Capacité cible** : Traduction d'un schéma-ligne avec un schéma-train. **Capacité cible** : Construction de systèmes de représentation du nombre comme moyen de preuve ou de résolution d'un problème de comparaison.	**Capacité cible** : Traduction d'une comparaison entre trois sous-collections (chacune ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) par une écriture symbolique en usant des signes « =, <, >, + » **Capacité cible :** traduction d'une décomposition de trois sous collections (annonce) par un schéma-ligne	**Capacité cible** : Traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne et de schéma-boîte. **Capacité cible :** Traduction d'une écriture additive à trois termes par une annonce à trois mains, un schéma-train/ligne (complété par les schémas-ponts). **Capacité cible** : Traduction d'une comparaison entre une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) par une écriture mathématique en usant des signes « <, >, =, ≠ ». **Capacité cible :** Construction de systèmes de représentation du nombre comme moyen de

Tableau 26 : construction d'un système capacitaire

Ce tableau catégorise les capacités cibles modélisées dans les textes curriculaires des modules 3' et 4' ainsi que celles liées aux orientations de travail données sur le forum de la recherche par la sphère 1. Nous remarquons que les nouvelles capacités cibles dans ce tableau se centrent sur l'institution d'une mise en analogie représentationnelle, d'une traduction représentationnelle entre les systèmes de représentation présents dans la progression.

Le tableau ci-dessous donne à voir comment dans une relation de représentation, chaque système de représentation passe d'objet représentant à un objet représenté et réciproquement au cours des différents modules

Modules	Représenté	Représentant
2	schéma-ligne	les mains
3'	les mains	le schéma-ligne
	les mains	écriture mathématique
4'	écriture mathématique	les mains
	écriture mathématique	schéma-train
	schéma-train	schéma-ligne
	schéma-pont	écriture mathématique
	écriture mathématique	schéma-train/ligne

Tableau 27 : évolution des capacités cibles dans le module 4

Nous observons la recherche d'une certaine forme de continuité dans l'usage des systèmes de représentation par la sphère 1 avec une complexification progressive des relations entre les représentations. Il semble exister aussi la volonté de construire un système capacitaire de mise en analogie/de traduction représentationnelle. Chaque milieu peut être traduit dans un autre milieu et réciproquement, chaque structure de représentation est tour à tour système et modèle.

Le contrat didactique est dans tout d'abord, un contrat d'imitation au cours duquel le professeur montre les relations entre les représentations. Puis, les élèves travaillent par eux-mêmes en mettant en relation les différentes représentations présentes dans le domaine « Situations » pour résoudre le problème de comparaison proposé.

Les modifications apportées dans les premiers modules devraient amener à une diminution de la distance entre les connaissances antérieures des élèves et ce que les élèves doivent apprendre.

De même, nous remarquons que les régulations effectuées par la sphère 1 se focalisent sur l'écriture mathématique qui vient de manière presque systématique traduire le résultat de la comparaison proposée. Le signe de l'égalité est mis en opposition « paradigmatique » (Brousseau, 1986) avec le signe « ≠ » (module 2) puis avec les signes « < et > » (modules 3 et 4). Ainsi, les élèves peuvent utiliser les signes mathématiques pour exprimer une relation entre les grandeurs.

Nous continuerons notre enquête dans la section suivante sur la seconde régulation effectuée par la sphère 1 par la réécriture des premiers modules du domaine « Situations ». Ces nouvelles versions des textes curriculaires sont mises à disposition des professeurs du groupe expérimental entre août et octobre 2013 sur le site de la recherche ACE.

4. Travail coopératif professeurs/chercheurs

Dans cette quatrième section, nous nous centrerons sur le travail coopératif entre l'équipe de recherche et les professeurs des classes du groupe expérimental autour des difficultés rencontrées lors de l'implémentation du module 2. Ce travail s'est déroulé lors du stage bilan/perspectives d'une semaine organisé en juin 2013 par l'équipe de recherche et

l'inspection académique des Côtes-d'Armor regroupant les quinze professeurs expérimentaux et l'ensemble de l'équipe de recherche de Bretagne.

Dans un premier temps, nous présenterons ce stage, lieu de dialogue de l'ingénierie didactique coopérative. Puis, dans un second temps, nous analyserons les échanges entre les sphères 1 et 2.

4.1. Stage bilan/perspectives

4.1.1. Présentation du stage bilan/perspectives

Pour conclure la première année d'expérimentation (2012-2013) est organisé par l'inspection académique des Côtes-d'Armor et l'équipe de recherche un stage de quatre jours (du 17 au 21 juin 2013) réunissant les dix-huit professeurs du groupe expérimental de Bretagne et certains membres de la sphère 1 (chercheurs, formateur et professeurs des classes d'étude de l'académie de Rennes). Cette semaine a pour objectif « de construire ensemble une réflexion sur l'expérience ACE de cette année et de préparer l'expérience ACE de l'année prochaine » (extrait d'un courriel adressé aux professeurs expérimentaux par C1 (enseignant-chercheur pilotant le projet ACE) le 11/06/2013). Son organisation prend appui sur les réponses apportées par les professeurs expérimentaux à deux questions posées par l'équipe de recherche en vue de préparer les journées de stage :

> *« 1) Du point de vue des modalités d'organisation de ce travail, quelles sont celles qui vous paraissent le plus souhaitables ?*
>
> *2) Du point de vue du fond, pourriez-vous donner trois éléments qui vous paraissent devoir être travaillés en priorité ? » (Ibid.)*

La synthèse des commentaires reçus fait émerger l'idée d'une organisation basée sur une alternance entre des phases de travail en petits groupes et des phases de mises en commun avec un contenu des échanges axé principalement sur trois points :

- la cohérence entre les différents domaines de la progression ;
- un allégement, une simplification des modules ;
- la réalisation d'un travail spécifique pour aider les élèves moins avancés.

A partir de ces propositions, C1 propose d'organiser la semaine de la façon suivante (cf. Tableau 28) :

	Lundi 17 Juin	**Mardi 18 juin**	**Jeudi 20 Juin**	**Vendredi 21 Juin**
9h-	Accueil, organisation	Réflexion collective	Réflexion collective	Réflexion collective

10h30	du stage	initiale, puis travail en petits groupes (2a) Notions spécifiques	initiale, puis travail en petits groupes (3a) Élèves moins avancés : dispositifs et outils	initiale, puis travail en petits groupes (4a) Finalités *et mise en œuvre du Journal* du Nombre ; finalités de *l'enseignement*.
10h45-12h00	Travail en petits groupes (1a) *Lieux d'ajustem*ents entre les divers modules, et relevé de notions spécifiques à travailler	Mise en commun collective	Mise en commun collective	Mise en commun collective
13h30-14h30	Travail en petits groupes (1b) *Lieux d'ajustements* entre les divers modules et relevé de notions spécifiques à travailler	Travail en petits groupes (2b) Notions spécifiques	Travail en petits groupes (3b) Élèves moins avancés : dispositifs et outils	Travail en petits groupes (4b) Finalités et mise en *œuvre du Journal du* Nombre ; finalités de *l'enseignement.*
14h30-15h00	Mise en commun collective	Mise en commun collective	Mise en commun collective	Mise en commun collective
15h15-16h00	Suite mise en commun collective et conséquences sur la progression	Suite mise en commun collective et conséquences sur la progression	Suite mise en commun collective et conséquences sur la progression	Suite mise en commun collective et conséquences sur la progression
16h-16h30	Eléments de synthèse pour la journée et journée suivante	Eléments de synthèse pour la journée et journée suivante	Eléments de synthèse pour la journée et journée suivante	Eléments de synthèse pour le stage, et suite

Tableau 28 : planning de la semaine de stage bilan/perspective

Nous remarquons que cette planification tient compte des demandes des professeurs en offrant des possibilités de travail en petits groupes couplées avec des temps de mutualisation.

Dans cette section, nous nous intéressons aux deux premières journées pendant lesquelles certains débats se sont orientés vers la problématique de l'introduction du schéma-ligne. Nous nous appuierons ici sur la transcription des échanges (qui ont été, en partie, vidéoscopés) et sur les fiches de synthèse réalisées par chaque groupe.

4.1.2. La métamorphose du train

Nous étudierons dans ce chapitre deux moments du stage bilan/perspectives. Le premier se déroule le premier jour du stage et porte sur la problématique d'ajustement et de cohérence entre les différents modules du domaine « Situations ». Le second moment (la seconde journée du stage) se centre sur la question précise de l'introduction du schéma-ligne dans les tout premiers modules.

Le schéma-train

La première journée de stage bilan/perspectives du 17 juin suit l'organisation proposée par l'équipe de recherche (cf. Annexe 8).

Ce premier travail a tout d'abord été réalisé en petits groupes puis chaque groupe a exposé ses réflexions devant le collectif. Nous nous centrerons donc ici sur les propositions d'ajustement et d'allègement faites par les professeurs du groupe expérimental en lien avec les difficultés relevées lors de l'introduction du schéma-ligne. Ainsi, la transcription des échanges lors de la mise en commun démontre l'intérêt et l'attachement des professeurs à tisser un lien entre le schéma-train (module 0) et le schéma-ligne (module 2) dans la continuité de ce qui a été proposé lors de la réécriture du module 4 en octobre 2012. La synthèse écrite du travail réalisée par le premier groupe propose l'organisation suivante pour les trois premiers modules (cf. Tableau 29) :

> *« - Module 0 : supprimer le codage lettres des trains travail spécifique dans le Journal du Nombre Incitation de l'usage du vocabulaire plus que/moins que/autant que avant/après.*
>
> *- Module 1 : moment collectif : analogie train/annonce.*
>
> *- Module 2 : introduction de la boîte avec appui sur le train. Transformation (progressive) du train en ligne »*

Tableau 29 : Synthèse du groupe 1, 17/06/2013, Annexe 9

Nous observons l'importance pour ce groupe de faire le lien dès le module 0 entre le schéma-train et le schéma-ligne. La transcription ci-dessous (cf. Transcription 8) des échanges dans ce groupe renforce cette idée de l'importance à accorder au schéma-train du module 0 :

> « On *s'est posé la question faire un lien entre le train. Parce qu'on a trouvé que le module 0 était intéressant, mais que après ça s'arrêtait d'un coup et puis qu'on trouvait plus ça ailleurs. Et qu'on l'avait retrouvé longtemps après en fait. Donc, en fait, peut*-être dès la fin du module 0 préparer un lien. »

Transcription 8 : extrait de la transcription du 17/06/2013, Tdp 3, Annexe 10

Cette idée est reprise par un second groupe comme nous le montre les extraits de transcription des propositions des professeurs des classes expérimentales lors de la mise en commun des réflexions du groupe 2 (Annexe 12)

> « *On a dit qu'on voulait introduire les ponts, la ligne dès le* module 0 » (Ibid., Tdp20)
>
> « On voulait vraiment lier le module 0 à la ligne graduée et donc effectivement mettre une séance en plus » (Ibid. tdp 7)
>
> « Le train et la ligne mettre une séance spécifique et continuer à utiliser cette, ce train ligne » (Ibid. tdp 13)

« *cette ligne train dans le module 1. Tout ce qui est production d'annonce 3, on pourrait le coder* » (Ibid. tdp 15)

« trois rouges, deux verts et on travaillerait sur la ligne en grand groupe (...) Les enfants font les annonces, et donc en fin de séance on prend une annonce et on systématise euh cette ligne train en utilisant les annonces qui ont été faites » (Ibid. tdp 17)

« *d'être dans la représentation avec la ligne et l'associer avec le train. En fait, finalement c'était fait a* posteriori (...). On avait ajouté le train sous la ligne pour venir illustrer justement le lien entre les deux » (Ibid. tdp 21)

« Dans le module 2 donc on introduirait donc avec toujours la ligne, la ligne train et on introduirait la *boîte et progressivement c'est le train qui passerait à la ligne, à la droite numérique* » (Ibid. tdp 23)

Transcription 9 : extraits de la transcription du 17/06/2013, Annexe 11

L'idée directrice est l'introduction dès le module 0 du schéma-ligne en appui avec le schéma-train. Les professeurs ont la volonté de construire une continuité dans l'usage des systèmes de représentation au cours des premiers modules. Celle-ci s'accompagne de propositions de mise en analogie des représentations entre elles (les mains, le schéma-train et le schéma-ligne). Ces premières réflexions collectives des membres de la sphère 2 se voient complétées et confirmées par les propos de C1, membre de l'équipe de recherche « je pense que cette *histoire de ligne train, dès le module 0, voir comment on s'y prend. En gros le problème que l'on se pose, que l'on cherche à travailler, c'est comment introduire* une continuité entre le train et le reste. Comment maintenir le train sur le temps, sur tout le temps de la progression *parce que c'est une référence très forte et très concrète et très nette* » (Ibid. tdp 22)

Ces échanges entre les professeurs et l'équipe de recherche, autour d'une même problématique, confirme l'idée d'une nécessité de repenser l'introduction du schéma-ligne en lien un système de représentation préexistant, le schéma-train. En effet, les textes curriculaires des différents modules n'offrent pas de possibilité de réinvestissement de ce schéma malgré son intérêt observé lors de la mise en œuvre de la seconde version du module 4 (octobre 2012) proposant sa superposition avec le schéma-ligne. Les professeurs du groupe expérimental se questionnent donc sur la mise en relation, la mise en correspondance du schéma-train et du schéma-ligne au cours des premiers modules.

4.1.3. Du schéma-train au schéma-ligne

La seconde journée de stage (cf. Tableau 28) envisage un travail sur certains aspects notionnels mis en évidence lors de la journée précédente notamment sur « le travail sur les trains comme référence qui dure, dès le module 0, et qui continue : le train qui se « métamorphose » en ligne graduée. » (cf. Annexe 12).

Sept professeurs et un membre (doctorant) de la sphère 1 se réunissent alors autour de ce thème (cf. Photogramme 15). Nous nous appuierons ici sur la transcription de cette session de travail ainsi que sur le document produit par ce groupe pour observer comment les professeurs et les chercheurs tentent de construire une première ébauche de réorganisation des trois premiers modules pour introduire progressivement le schéma-ligne mais aussi pour simplifier certains aspects du module 0.

Photogramme 15: groupe de réflexion professeurs/chercheur sur la métamorphose du train

Le premier point abordé dans ce groupe concerne la complexité du codage proposé dans la première version du module 0 (un nombre et une lettre pour désigner la couleur du cube : par exemple deux cubes verts sont codés par 2V). En effet, pour rebondir sur une remarque faite par un membre de la sphère 2, le collectif de travail constitué propose de suppléer l'initiale de la lettre par l'écriture du nombre de la sous-collection en couleur (deux cubes verts sont alors codés par le nombre « 2 » écrit en vert).

Le second point traité relève du problème mis en évidence lors de la mise en œuvre du module 2 dans les classes, c'est-à-dire l'usage du schéma-ligne et la compréhension par les élèves qu'un intervalle compris entre deux graduations correspond à une unité (cf. Annexe 13). En effet, dans ce module, les élèves étaient confrontés à des difficultés lors du traçage des schémas-ponts sur le schéma-ligne pour désigner le cardinal d'une collection. Pour tenter de corriger cela, le chercheur, présent dans ce groupe, propose quelques pistes de réflexions concernant la réorganisation de plusieurs séances des trois premiers modules pour y introduire progressivement le schéma-ligne.

Ainsi, dès la première séance du module 0, il suggère de prendre appui sur le schéma-train pour introduire les schémas-ponts. Le professeur tracerait des ponts au-dessous de chaque sous-collection du schéma-train pour valider ou non la construction effective du train en cubes emboîtables (reproduction du schéma-train affiché au tableau) *« on peut déjà l'introduire (le pont) à la fin de la première séance, mais c'est le professeur qui l'introduit. Là les élèves, ils n'écrivent pas ». (Annexe 13, tdp 156)*. Le traçage de ces ponts serait pris en

charge par les élèves lors de la séance sur le Journal du Nombre « *on pourrait l'intr*oduire au moment du Journal du Nombre (...) » (Ibid., tdp 160).

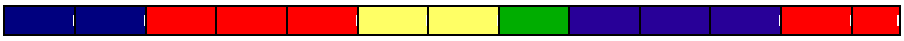
Pour le module 1, le chercheur propose d'« introduire progressivement après, sur ces trains-là, la ligne graduée » (Ibid., tdp 50*)* comme cela est proposé dans la seconde version du module 4 d'octobre 2012. Il propose d'élaborer une séance d'anticipation pour faire travailler les élèves sur ce schéma ligne/train. Il conclut en précisant qu'ainsi, « le module 0 est réinvesti » (Ibid., tdp 54)

Cette proposition est alors commentée par deux professeurs « Et du coup la relation concrète avec le train va rester plus longtemps parce que pour certains, on est passé à une situation concrète » (Ibid., tdp 66), « *Oui, rester plus longtemps, c'est bien parce que là, ceux qui sont* en difficulté parlent encore du train ». (Ibid., tdp 67).

Pour l'organisation du module 2, un professeur suggère de garder la présentation du schéma-ligne/train : « et dans le module 2, on présente systématiquement mais alors là par contre, *c'est à l'écrit. Présentation du segment, de la ligne graduée. Présentation de la ligne graduée* avec le train juste en dessous de la ligne » (Ibid. tdp 176).

Ci-dessous, la synthèse réalisée par ce groupe de travail et présentée à l'ensemble des professeurs lors de la mise en commun (cf. Figure 24).

La métamorphose du train (Module 0)



Séance 1
Une fois le codage réalisé, le chef de gare (un enfant différent à chaque fois) valide en faisant des ponts en-dessous au tableau à la craie.
Séance 2
Même déroulement : validation au tableau avec les ponts
Séance 3
Même déroulement mais le codage lettres disparaît au profit d'un codage avec nombre + la couleur.
Validation des trains avec les ponts au tableau.
Séance 4
Journal du Nombre[76] : Les élèves créent leur train, ils le codent sous forme de ponts avec le nombre en-dessous de chaque pont.
Dans le module 1 : mise en commun avec utilisation des ponts
Dans le module 2 : présentation de la ligne graduée avec le train juste en-dessous en faisant correspondre les graduations. Les ponts seront à faire sous le train. Petit à petit faire disparaître les trains.

Figure 24: synthèse du groupe de travail sur la métamorphose du train

[76] Les élèves créent un problème de codage pour eux-mêmes dans leur Journal du Nombre.

Nous proposerons dans le paragraphe suivant une analyse du travail coopératif chercheurs/professeurs réalisé sur les systèmes de représentation lors de la semaine stage bilan/perspectives.

4.2. Analyse du travail coopératif

Cette coopération chercheurs/professeurs est possible par une volonté de l'équipe de recherche d'intégrer les professeurs du groupe expérimental dans la conception même du curriculum. Cette idée est précisée par C1 dans un courriel adressé aux professeurs avant cette semaine de stage « construire **ensemble** une réflexion sur l'expérience ACE de cette année et de préparer l'expérience ACE de l'année prochaine ». L'expression « construire ensemble » renvoie à une volonté d'élaborer conjointement une réflexion en mutualisant les expériences de l'équipe de recherche et des professeurs des classes expérimentales. Ainsi, ce stage s'organise en considérant la nature des savoirs en jeu (travail sur les notions abordées dans la progression) et la manière de les enseigner. En effet, les discussions engagées prennent en compte l'analyse des professeurs sur l'implication effective des élèves dans les situations en mettant en avant des éléments importants du savoir en jeu et leur agencement au sein du curriculum. Ce travail est rendu possible grâce à une organisation des échanges en petit groupe qui semble faciliter la prise de parole de chacun et la mutualisation des expériences.

Dans le cas qui nous intéresse ici, l'introduction du schéma-ligne, nous remarquons que les professeurs du groupe expérimental prennent en considération les modifications apportées dans la seconde version du module 4 c'est-à-dire la superposition du schéma-train et du schéma-ligne pour reconstruire les premiers modules. Ainsi, à partir du module 0, lieu premier de l'usage du schéma-train, est envisagé d'introduire le traçage des schémas-ponts en dessous de chaque sous-collection du schéma-train pour arriver pas à pas à la représentation d'une écriture additive à deux termes (module 2) sur le schéma-ligne. Différentes étapes sont envisagées

- schéma-train complété du schéma-ponts ;
- schéma-train complété par des schémas-ponts et les nombres correspondants aux collections représentées ;
- superposition du schéma ligne/train ;
- suppression du schéma-train.

Les échanges entre la sphère 1 et 2 mettent en évidence l'existence d'une discontinuité dans la progression initiale avec la disparition dès le module 0 du schéma-train. L'intérêt didactique de cette représentation, de cette première modélisation du train construit avec des cubes emboîtés, est révélé lors de sa juxtaposition avec le schéma-ligne, et donc lors de sa mise en relation avec une nouvelle représentation du nombre. Une mise en analogie est ainsi proposée entre les sous-collections présentes sur le schéma-train (les collections de cubes de couleurs différentes), les schémas-ponts et le schéma-ligne. Les propositions émises ci-dessus illustrent la volonté des professeurs de garder un lien étroit avec le schéma-train « du coup, la relation concrète avec le train va rester plus longtemps parce que pour certains on est passé à une abstraction » (Annexe 13) « *oui, rester plus longtemps, c'est bien parce que là ceux qui sont* en difficulté parlent encore du train » (Ibid.). Ainsi, le schéma-train vient représenter concrètement la portion du schéma-ligne désignée par un schéma-pont et un nombre.

Ce travail engagé dans ce petit groupe peut s'apparenter à une enquête collective dans laquelle chaque membre du groupe (professeurs et chercheur) prend part à la réflexion sur la problématique proposée « la métamorphose du train ». Cette enquête a pour objectif de résoudre une situation problématique (Dewey, 1967) représentée par les difficultés des élèves face à l'usage du schéma-ligne.

Cette question de l'introduction du schéma-ligne est une préoccupation majeure des sphères 1 et 2 depuis octobre 2012. Ainsi, par exemple, lorsque C1 prend la parole, au moins à certains moments, on peut dire qu'il se fait l'interprète d'une position d'ensemble de la sphère 1, ou, dans certains cas, des « tendances » qui s'y sont dessinés, à la fois dans la réflexion collective, et de la mise en œuvre effective dans les classes d'étude (souvent prise en référence dans ladite discussion collective).

Nous pouvons donc considérer ce travail d'enquête comme une tentative de construction de nouveaux jeux didactiques par le collectif chercheurs/professeurs, jeux qui pourraient apporter une solution au problème posé.

5. Seconde régulation, vers une continuité des représentations

Pour la seconde année d'expérimentation du curriculum (2013-2014), l'équipe de recherche entreprend de réécrire les cinq premiers modules (du module 0 à 4) du domaine « Situations »

en fonction des échanges réalisés lors de la semaine de stage bilan/perspectives et des discussions internes à la sphère 1 sur l'introduction du schéma-ligne. La transmission des nouvelles versions de ces modules par l'équipe de recherche aux professeurs du groupe expérimental se répartit entre août (module 0 et 1) et octobre 2013 (module 2, 3 et 4). Nous étudierons dans ce chapitre les versions quasi-définitives des trois premiers modules pour comprendre le réagencement des savoirs et quels ont été les effets de ce réaménagement sur la continuité des savoirs en particulier à travers les systèmes de représentation.

5.2. Le module 0, situation trains/tours (2013-2014)

Le module 0 a été réécrit en août 2013 par la sphère 1. Cette nouvelle version prend en considération les différents commentaires émis lors du stage bilan/perspectives comme nous allons le voir.

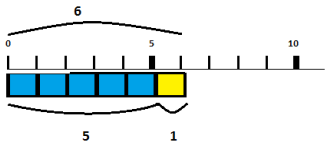
5.1.1. Description des modifications

Nous rappelons tout d'abord que ce module 0 a pour objectif d'enrichir les connaissances des élèves sur les premiers nombres et de les préparer à l'écriture additive à travers des situations de désignations orales et écrites des nombres. La nouvelle version de cette situation trains/tours insiste sur l'importance du rôle des systèmes de représentation dans la suite de la progression :

- le train-cubes construit à l'aide de cubes emboîtés, représentant différentes sous-collections (désignés par des couleurs différentes)

- le schéma-train, première forme de modélisation de ce train-cubes.

Il est indiqué que ce module prévoit un travail d'appropriation progressif du schéma-pont permettant de désigner des sous-collections d'unités sur le schéma-train « la situation *trains/tours est aussi celle de l'introduction de «* ponts » pour désigner un nombre ou une addition de nombres, « ponts » qui seront ensuite utilisés pour désigner de façon similaire des nombres sur la ligne graduée » (Ibid.).



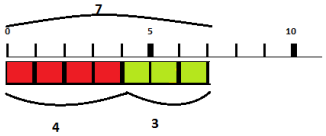


Figure 25 : extrait du module 0 version 2013-2014 (annexe 14)

Les deux schémas ci-dessus (cf. Figure 25) donne à voir comment le schéma-ligne/train sera réinvesti dans lors du jeu des annonces.

Nous nous appuierons ici sur un tableau synoptique comparatif[77] de l'organisation du module 0. Nous décrirons les quatre séances proposées en fonction des objectifs visés pour donner à voir les modifications majeures apportées dans le cadre de sa réécriture. Ainsi, le rectangle supérieur (en gris clair) reprend l'organisation du module dans sa première version et le rectangle inférieur (en gris foncé) l'organisation du module dans sa seconde version.

Construction de stratégies de dénombrement	Désignation écrite	Journal du nombre
Construction par équipe d'un train avec des cubes identique au modèle proposé au tableau, le schéma train	Ecriture d'un message codant un schéma-train par un élève émetteur pour qu'un 'élève récepteur puisse construire avec des cubes un train identique. Construction d'un codage commun	Production par les élèves dans le journal du nombre d'un schéma-train qu'ils codent en fonction du référentiel construit dans la classe.
Construction par équipe d'un train avec des cubes identique au modèle proposé au tableau, le schéma train - Introduction d'un signe graphique (le pont) pour représenter des sous collections de wagons sur le schéma-train	Ecriture d'une message codant un schéma-train par un élève émetteur pour qu'un élève récepteur puisse construire avec des cubes un train identique. Construction d'un code commun Désignation par un nombre des sous-collections du schéma-train représentées par un pont. Schéma-train comme moyen de validation des constructions	Production par les élèves dans le journal du nombre d'un schéma-train qu'ils codent en fonction du référentiel construit dans la classe. Je m'amuse à inventer des trains et à écrire les ponts et le code en dessous :

Tableau 30 : vision synoptique des modifications apportées au module 0

La première séance, désignation orale des nombres, reste dans sa première phase identique à la première version du module 0 avec la construction par équipe d'un train composé de cubes

[77] Ce tableau compare l'organisation du module 0 dans sa première version de 2012 et la nouvelle version rédigée par la sphère 1 en août 2013.

emboîtés identique au modèle proposé et affiché au tableau sous forme de schéma-train. Cependant, cette activité est complétée par un travail spécifique sur le schéma-train avec mise en correspondance des sous-collections sur le train-cubes et celles représentées sur le schéma-train. Ce schéma est enrichi par le professeur par un trait graphique, le schéma-pont, désignant chaque collection (cf. Figure 26, ci-dessous).

Figure 26 : schéma-train complété par des schémas-ponts (annexe 14)

Cette figure est illustrée dans le texte du module 0 comme suit :

> *« Le professeur pourra sélectionner des constructions qui lui semblent intéressantes. Il pourra alors mettre en correspondance le train construit et le schéma-train affiché au tableau pour vérifier, valider les productions. Pour cela, il tracera en dessous du train affiché au tableau des ponts correspondant aux wagons de même couleur (...). Le professeur dessine sous chaque ensemble de couleur le pont qui désigne le nombre de cubes tout en disant oralement le nombre auquel ce pont correspond » (Annexe 14)*

Le texte de ce module précise l'objectif de ce travail

> *« Cette désignation de chaque sous-collection par des ponts a pour objectif d'amener progressivement les élèves à s'approprier un nouveau système de représentation (la ligne graduée) présente dans l'ensemble de la progression. » (Ibid.).*

Les séances 2 et 3 proposent une situation de communication (Brousseau, 1998) dans laquelle un élève émetteur écrit un message codé représentant un schéma-train qu'il transmet à un élève récepteur pour qu'il puisse construire un train-cubes identique au premier modèle (le schéma-train). L'objectif de cette situation est la désignation écrite des nombres. Ces deux séances se voient modifiées avec, d'une part, une simplification du codage du schéma-train (les élèves codent par exemple en écrivant 2 en rouge pour désigner deux cubes rouges et non plus 2R) et, d'autre part, la représentation des sous-collections par des schémas-ponts tracés sur le schéma-train et par le nombre désignant le cardinal de chaque sous-collection *« le nombre de cubes que désigne ce pont sera indiqué, si possible, sur proposition des élèves. » (Ibid.)*

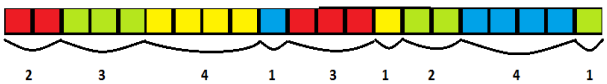


Figure 27 : schéma-train complété par des schémas-ponts et du cardinal de chaque sous-collection (Annexe 14)

De plus, le texte curriculaire spécifie que les élèves doivent *« vérifier la correspondance entre le message, le schéma train initial et le train construit par l'élève récepteur ». (Annexe 14)*

Il y a donc une première mise en correspondance entre les différentes représentations du schéma-train que sont le train effectif et le message codé

Le texte de la dernière séance, quant à lui, explicite le fait que dans le Journal du Nombre, les élèves doivent *« se donner à eux-mêmes » des trains qu'ils codent ensuite, ou des codages qu'ils transforment en train » (Ibid.).*

Cette précision vient insister sur le fait que le Journal du Nombre n'est pas un simple cahier d'exercices mais un lieu où les élèves produisent de leur propre mouvement des problèmes de codage qu'ils se posent à eux-mêmes.

5.1.2. Analyse de la version 2 du module 0

La première version du module 0 se donnait comme objectif de faire acquérir aux élèves trois capacités cibles : désigner oralement et par écrit une grandeur par un nombre et produire une traduction d'un train-cubes et d'un schéma-train (cf. tableau ci-dessous).

La nouvelle version se voit enrichie de deux nouveaux jeux d'apprentissage. Le premier « faire désigner par un signe graphique « le schéma-pont » les sous-collections représentées sur le schéma-train et le mettre en correspondance avec le train-cubes » modélise la dernière phase de la séance 1. L'enjeu de ce nouveau jeu est de rendre capables les élèves de représenter par un signe graphique (le schéma-pont) des sous-collections présentes sur le schéma-train.

Le second jeu d'apprentissage modélise, quant à lui, les dernières phases de la séance 2 et 3 « faire désigner par un signe graphique, le schéma-pont et par un nombre le cardinal de sous-collections représentées sur un schéma-train et le mettre en correspondance avec d'autres systèmes de représentation (codage et le train) ». Il a pour objectif de rendre capables les élèves de représenter par un signe graphique (le schéma-pont) des sous-collections présentes sur le schéma-train et par un nombre la mesure de cette grandeur. Nous remarquons qu'il vient compléter la capacité précédemment citée.

Ces deux capacités cibles se construisent progressivement lors des phases de mise en commun des trois premières séances. En effet, le texte curriculaire invite le professeur, dans la première séance, à mettre en correspondance le train-cubes et le schéma-train pour valider les productions des élèves (cf. Annexe 14). Puis dans la seconde et troisième séance, il est suggéré aux professeurs d'écrire en dessous de chaque pont tracé, le cardinal de chaque sous-collection si possible sur proposition des élèves.

Ces deux jeux d'apprentissage peuvent être caractérisés par un contrat didactique qu'on peut désigner comme un contrat d'imitation centré sur l'usage du signe graphique « le schéma-pont » pour représenter une sous-collection et sur l'usage concomitant d'un nombre écrit pour désigner son cardinal. En effet, le texte curriculaire spécifie que le professeur expose directement aux élèves comment tracer des « ponts » sur le schéma-train. Il précise que le professeur explicite oralement la correspondance entre les ponts et les sous-collections désignées (Annexe 14).

Le milieu est complété progressivement par l'introduction du schéma-pont et de l'écriture symbolique. Nous sommes donc en présence d'une proposition de travail énonciatif de la part du professeur qui permet de mettre en relation le signe graphique du schéma-pont avec les différentes sous-collections du schéma-train représenté ainsi qu'avec les sous-collections du train construit effectivement avec ces cubes de couleurs différentes.

Le tableau, ci-dessous, permet de distinguer en grisé les modifications apportées dans la seconde version du module 0.

Module 0		
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire des stratégies de dénombrement pour construire un train à l'aide de cubes emboîtables identique à un schéma-train (≤ 30) composé de sous collections de wagons (≤ 6) de quatre couleurs différentes. Capacité cible 1 : Désignation orale une quantité par un nombre en usant de stratégies de dénombrement. Capacité cible 2 : Traduction d'un schéma-train et d'un train-cubes.	Jeu d'apprentissage 2: Faire produire un code écrit pour désigner des collections Capacité cible 2 : Désignation par écrit une quantité par des stratégies de codage de sous-collections	Jeu d'apprentissage 3 : Faire créer des problèmes mathématiques dans le Journal du Nombre Réinvestissement des capacités construites dans les deux jeux d'apprentissage visés précédents
Jeu d'apprentissage 2 : Faire désigner par un signe graphique et un symbole mathématique (le nombre) le cardinal de sous-collections représentées sur un schéma-train et le mettre en correspondance avec d'autres systèmes de représentation (codage et le train). Capacité cible 1 : Usage du schéma-pont pour désigner une sous-collection sur un schéma-train	Jeu d'apprentissage 2 : Faire désigner par un signe graphique, le schéma-pont et un nombre symbolique les sous-collections représentées sur un schéma-train et le mettre en correspondance avec le train-cubes et une écriture symbolique. Capacité cible 1 : Représentation par un signe graphique (le schéma-pont) des sous-collections présentes sur le schéma-train et une écriture symbolique. Capacité cible 2 : traduction des schémas-ponts et du nombre désignant chaque collection par un train-cubes.	

Tableau 31: Modélisation des modifications apportées au module 0

Comme précisé ci-dessus (cf. Tableau 31), nous relevons ici la construction de deux nouveaux jeux d'apprentissage relatifs à l'usage d'un système de représentation du nombre qu'est le schéma-train agrémenté du signe graphique « le schéma-pont » et d'un nombre pour valider la construction d'un ensemble de sous-collections de cubes de couleurs différentes.

Dans cette seconde version du module, les suggestions de réaménagements de ce module émises lors du stage bilan/perspectives de juin 2013 ont été prises en compte par la sphère 1, avec notamment le traçage des schémas-ponts sur le schéma-train pour valider la construction d'un train-cubes par les élèves (identique au schéma-train proposé). La sphère 1 organise alors les quatre séances de ce module pour introduire progressivement le traçage du schéma-pont sur le schéma-train. Cette introduction est tout d'abord prise en charge par le professeur puis par les élèves qui le réinvestissent dans le Journal du Nombre.

Nous allons maintenant étudier comment les capacités de représentation du schéma-train et de mise en traduction du train-cubes et du schéma-train construites dans ce module 0 vont être réinvesties dans le module 1, le jeu des annonces.

5.2. Le module 1, construction d'une continuité

5.2.1. Le module 1, les réagencements

Le module 1 constitue le premier module du « jeu des annonces ». Il comprend quatre séances isomorphes, dont l'objectif est de rendre les élèves capables de produire oralement des décompositions additives sous forme de deux sous-collections (≤ 5) des nombres inférieurs ou égaux à six et de les comparer avec un nombre usuel (désigné par le lancer d'un dé à six faces).

La seconde version de ce module complète ces séances. Elle introduit une phase de mise en commun pendant laquelle le professeur questionne les élèves sur leurs découvertes concernant les contraintes du jeu des annonces. Cette phase de mise en commun est de même, l'occasion d'un travail de mise en correspondance par les élèves,

i) d'une annonce produite avec deux mains,

ii) d'un train construit avec des cubes emboîtables de deux couleurs différentes

iii) d'un schéma-train sous lequel est tracé des schémas-ponts et le nombre désignant la mesure de la grandeur des deux sous-collections.

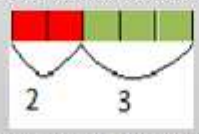
Il est ajouté dans le texte curriculaire que cette mise en relation s'exprimera dans le langage. Ainsi, le professeur pourra demander oralement aux élèves de « transformer un problème *d'annonce en pro*blème de train tour » (Annexe 15*)*. De plus, le texte curriculaire propose, à travers des propositions d'incitation, des temps de production dans le Journal du Nombre « même sur des instants très courts par exemple en fin ou en début de séance » (Ibid.).

Le tableau (cf. Tableau 32) ci-dessous donne à voir dans le rectangle supérieur l'organisation de la première version et dans le rectangle inférieur celui de la seconde version de ce module.

Module 1: Le jeu des annonces
Construction de désignation orale du nombre sous forme additive à deux termes

Choisir un nombre , l'exprimer sur ses deux mains (somme des deux mains ≤ 6, usage du 0) et le comparer avec un lancer de dé à six faces.
L'annonce est gagnante si égale au lancer.

- Choisir un nombre , l'exprimer sur ses deux mains (somme des deux mains ≤ 6, usage du 0) et le comparer avec un lancer de dé à six faces.
L'annonce est gagnante si égale au lancer.
- Validation des comparaisons entre une annonce produite avec deux mains et un lancer de dé à six faces par la construction effective avec des cubes du train correspondant à l'annonce et un schéma-train.



Incitation dans le journal du nombre : exemple

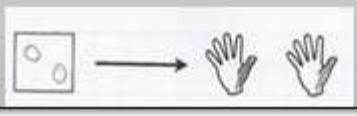


Tableau 32 : vision synoptique du module 1 version 2013-2014

Nous observons donc ici l'élaboration d'un travail spécifique sur le schéma-train (complété par le schéma-pont et un nombre), dans la continuité du module précédent, le module 0 et sur sa mise en correspondance avec les annonces produites avec deux mains et le train-cubes.

5.2.2. Analyse du module 1, Construction d'une capacité de traduction

La première version de cet ensemble de quatre séances visait à construire la capacité cible que nous avons précédemment définie par « désignation orale des nombres (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (chaque collection ≤ 5) ». Cette capacité se bâtit à travers un jeu d'apprentissage « faire produire une décomposition d'un nombre sous forme de deux sous-collections avec deux mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces ». Les règles définitoires du contrat didactique restent identiques tout au long de ce module « produire une *annonce à deux mains et la comparer avec le lancer d'un dé à six faces* » ainsi que le milieu, milieu discursif (énonciation d'un nombre) et milieu concret avec le dé et les jetons.

La réécriture de ce module par la sphère 1 a comme conséquence l'introduction d'une seconde capacité cible « traduire une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train (composé de schémas-ponts et de nombres) ». Cette capacité se construit à travers un nouveau jeu d'apprentissage que nous définissons comme « faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collections (≤ 5) par un train-cubes et un schéma-train ». Le schéma-train du module 0 est donc réinvesti dans ce module à l'aide de l'analogie faite entre le train-cubes, représentation matérielle de sous-collections et une décomposition additive produite à deux mains.

Le tableau ci-dessous reprend et complète la modélisation en capacités cibles et en jeux d'apprentissage de la première version du module 1

Module 1		
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une décomposition d'un nombre (≤ 6) sous forme de deux sous-collections à deux mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces. - **Capacité ciblée 1 :** Désignation orale des nombres inférieurs ou égaux à six sous forme de deux sous collections. **Capacité cible 2 :** Construction orale de la notion d'égalité Jeu d'apprentissage 2 : faire produire un référentiel commun des règles du jeu des annonces	Jeu d'apprentissage 3 : Faire traduire une décomposition additive (≤ 6) sous forme de deux sous-collections par un train-cubes et un schéma-train. - Capacité ciblée 3 : Traduire une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train. Réinvestissement de la capacité de représenter par un signe graphique (le schéma-pont) les sous-collections sur le schéma-train et par un nombre.	Jeu d'apprentissage 4 : Faire créer des problèmes mathématiques dans le JDN -Réinvestissement des capacités construites dans les deux jeux d'apprentissage précédents

Tableau 33 : modélisation en capacités et en jeux d'apprentissage du module 1 2013-2014

Le contrat didactique, c'est-à-dire les connaissances antérieures des élèves pour aborder le jeu d'apprentissage 3, ont ici été construites lors des deux nouveaux jeux module 0, dans la perspective suivante :

- représentation par des signes graphiques, « les schémas-ponts », des sous-collections représentées sur le schéma-train et mise en correspondance des schémas-ponts avec le train-cubes ;

- désignation par des nombres des sous-collections représentées sur un schéma-train et mise en correspondance des nombres avec d'autres systèmes de représentation (le codage et le train).

Le milieu est alors composé des différentes représentations du nombre dont les élèves ont pu faire l'expérience au cours du module 0 et du module 1. Cette organisation autorise une mise en relation, une mise en analogie entre différents milieux.

Les élèves pourront expérimenter ces mises en analogie en première main dans leur Journal du Nombre lors de la dernière séance de ce module.

Ce nouveau module continue donc à proposer l'institution d'une mise en traduction entre les systèmes de représentation :

- la représentation corporelle avec les deux mains ;
- la représentation analogique/matérielle avec le train-cubes ;
- la représentation analogique/symbolique avec le schéma-train.

L'idée est ici que les élèves puissent comprendre que ces différents systèmes de représentation réfèrent une même réalité. Cette structure de représentation peut être utilisée tour à tour comme représenté et comme représentant au sein d'un jeu représentationnel.

Nous observons la volonté de la sphère 1 de proposer aux professeurs des classes expérimentales la construction *d'*une continuité plus forte entre les modules, dans l'avancée des savoirs notamment par l'usage des systèmes de représentation. Le travail sur ces représentations est ici une sorte de garant de la continuité de l'expérience des élèves au sein de l'action conjointe (ici imaginée).

5.3. Module 2, écriture symbolique et mise en traduction des représentations

Dans ce paragraphe, nous décrirons et analyserons les modifications apportées au module 2 lors de la deuxième année d'expérimentation du curriculum. Nous rappelons aux lecteurs que ce module 2 introduit l'écriture symbolique, les élèves proposant une écriture additive à deux termes (une annonce sous forme A + B) et la comparant avec un nombre usuel issu d'un lancer de dé à six faces. Ce module introduit les signes « = et ≠ » pour exprimer cette

comparaison en lien avec les systèmes de représentation que sont le schéma-ligne et le schéma-boîte.

5.3.1. Nouvelles orientations du module 2 2013-2014

La lecture du texte curriculaire de la seconde version de ce module nous donne à découvrir, dès l'introduction, trois aménagements majeurs. Le premier est une séance d'anticipation présentée comme la première séance de ce module (qui en comporte maintenant cinq au lieu de quatre dans la version précédente). Celle-ci se donne comme objectif « *d'introduire un* nouveau système de représentation, la ligne graduée, en lien avec le schéma train-ponts pour *une compréhension plus fine des élèves de l'usage des intervalles (chaque intervalle* désignant une quantité) ». (Annexe 16)

Cette séance s'organise de la façon suivante : le professeur propose aux anticipants (groupe hétérogène de quatre à six élèves) une écriture additive à deux termes en leur explicitant l'usage du signe « + ». Il leur demande de la comparer avec un lancer de dé à six faces par exemple « 3 + 2 » et « 3 ». Pour valider ou invalider le résultat trouvé, le professeur présente « le schéma-train sur lequel vient se superposer une ligne graduée » (Ibid.) et met en relation « chaque intervalle de la ligne graduée avec un cube » (ibid.). Il trace les schémas-ponts et écrit le nombre correspondant au cardinal de chaque sous-collection. La validation ou l'invalidation du gain se fait par comparaison des schémas-trains/lignes du lancer et de l'annonce comme nous le montre la figure ci-dessus (Figure 28).

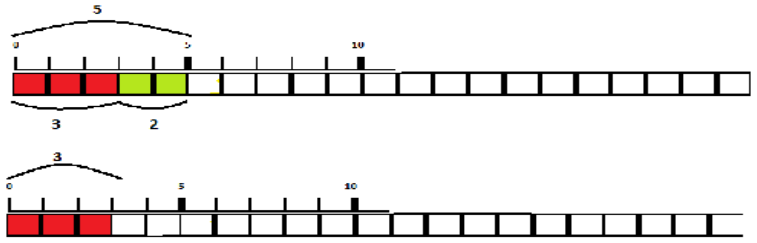


Figure 28: représentation d'une annonce et d'un lancer sur un schéma-ligne/train

La seconde modification s'applique à la fiche de jeu, proposée dans les deux premières séances, sur laquelle les élèves inscrivent leur annonce, le lancer et leur gain (gagné ou perdu). Les élèves notent dans cette nouvelle version l'égalité ou l'inégalité résultant de la comparaison de l'addition à deux termes avec un nombre (≤ 6) grâce aux signes mathématiques « = et ≠ ».

Le troisième réaménagement concerne l'introduction des systèmes de représentation du nombre, le schéma-ligne et le schéma-boîte. L'introduction du schéma-ligne se fera « par analogie au schéma-train pour laisser place progressivement à la ligne graduée. Cette ligne *permettra aux élèves de valider ou d'invalider les réponses produites lors des comparaisons d'une annonce avec un lancer* ». (Annexe 16)

Nous allons examiner maintenant de manière plus microscopique le texte de la version 2013-2014 de ce module.

5.3.2. Description du module 2

Les deux premières séances plénières se découpent en quatre phases. La première phase, dédiée à la présentation collective du jeu, est complétée dans la seconde version du module par l'usage des signes mathématiques « =, ≠, + ». Ces signes mathématiques sont introduits par le professeur lors de la phase de présentation collective du jeu (cf. Annexe 16).

Ce premier travail sur les signes « = et ≠ » n'était pas envisagé dans la première version de ce module. Il était simplement précisé dans la présentation du module que « les parties fictives *permettent l'utilisation des signes « = et ≠* » en situation » (cf. Annexe 3)

Lors de la phase 2; les élèves inscrivent individuellement une écriture additive à deux termes et la comparent avec un lancer de dé. Ces signes mathématiques sont réinvestis sur leur fiche de jeu pour valider le résultat de la comparaison, comme le montre la fiche ci-dessus (cf. Figure 29).

Annonce A+B
Lancer (1 dé) N
Gagné / Perdu (G/P) .....A+B = (?) C **donc** G/P.....

Figure 29: exemple de feuille de jeu individuelle (annexe 14)

Sur la troisième ligne les élèves notent l'égalité ou l'inégalité découlant de la comparaison effectuée et en déduisent s'il y a gain ou non (P si l'annonce est différente du lancer et G si égale au lancer).

Lors de la troisième phase, chaque joueur transmet sa fiche de jeu à un pair pour qu'il vérifie les annonces produites et le résultat des comparaisons.

La quatrième phase se déroule en collectif. Elle propose une mise en correspondance des écritures additives avec la production d'annonces sur deux mains et le schéma-train. Puis, elle introduit deux nouveaux systèmes de représentation, le schéma-ligne et le schéma-boîte

comme cela était déjà le cas dans la première version de ce module. Cependant, la seconde version suggère que « dans cette phase de mise en commun, le professeur proposera pour introduire la ligne graduée une superposition de cette ligne avec le schéma-train » (Annexe 16)

Pour cela, le texte curriculaire détaille les étapes de cette phase de mise en commun comme cela était le cas dans la seconde version du module 4 (cf. Annexe 7). Ainsi, il est proposé au professeur de sélectionner une fiche de jeu puis il

> *« fait exprimer par les élèves la « partie réelle » qui correspond à cette partie virtuelle (un élève a fait/montré/annoncé trois doigts sur une main et deux doigts sur la seconde main. Le professeur affiche ensuite au tableau un train composé de 20 wagons (par exemple). Il demande à un élève de colorier les wagons correspondant à l'annonce proposée, chaque terme correspond à une main (...) » (Annexe 16)*

Le professeur demande aux élèves de désigner les deux sous-collections du schéma-train par des schémas-ponts et un nombre. Il superpose le schéma-ligne sur le schéma-train. Le texte curriculaire présente au professeur une manière de s'exprimer pour travailler collectivement ce nouveau système de représentation, le schéma ligne/train.

> *« Où est le premier wagon sur la ligne graduée ? de 0 à 1, Où se trouve le quatrième wagon ? de 3 à 4… ». Ces énoncés sont toujours accompagnés de la désignation, par le professeur, de la « graduation », du « wagon » correspondant et de la production du geste de cette correspondance » (Ibid.)*

Le schéma-pont de la somme de l'écriture additive est ensuite tracé par le professeur sur le schéma train/ligne de l'annonce. Il représente ensuite le résultat du lancer sur un second schéma ligne/train. En s'appuyant sur ces deux schémas train/ligne, le professeur compare le lancer et l'annonce comme nous le montre l'extrait du module 2 2013-2014 ci-dessous. (cf. Figure 30).

« Dans cette dernière phase, le professeur sera attentif au vocabulaire usité :	*….et notera au tableau, après chaq*ue énoncé verbal, *l'écriture mathématique correspondante* :
- 5 est plus petit que (inférieur à) 6	- *5<6*
- 6 est plus grand que (supérieur à) 5 ;	- *6>5*
- 3+2 est différent de 6 ; 3 + 2 ne sont pas 6 ; 3 + 2 *n'est pas égal à 6.*	- *3+2 ≠ 6*
- 3+2 est plus petit que (inférieur à) 6 ;	- *3+2 < 6*
- 6 est plus grand que (supérieur à) 3+2	- *6 > 3+2*

Figure 30 : comparaison de deux schéma-ligne/train (annexe 16)

Le professeur utilise le vocabulaire adéquat et l'écriture mathématique correspondante. Il traduit donc la comparaison des deux systèmes de représentation par le langage oral et une

écriture symbolique. Nous remarquons ici l'introduction dans ce module des signes mathématiques « < et > » qui viennent coder les énoncés oraux plus grand, plus petit.

La version 2013-2014 de ce module présente une quatrième phase dans le déroulement de ces deux séances. Elle propose un travail préparatoire aux séances de parties fictives au cours duquel, sur une fiche de partie fictive glissée dans une pochette transparente, les élèves représentent, sur un double schéma train/ligne et dans un schéma-boîte, l'annonce et le lancer écrits au tableau. Le professeur trace ensuite au tableau sur les deux schémas ligne/train les schémas-ponts sous la directive des élèves. Il est précisé que

> *« la comparaison des représentations à l'annonce et au lancer, à partir de la ligne graduée, favorise l'usage d'un vocabulaire mathématique (...) les systèmes de représentation servant de validation au résultat trouvé (...) les élèves ont à leur charge uniquement les représentations sur la ligne graduée et la boîte ». (Ibid.)*

Cette quatrième phase permet aux élèves de se saisir du milieu problème en se confrontant individuellement à l'usage des systèmes de représentation.

A la fin de chaque séance, des activités dans le Journal du Nombre sont préconisées avec quelques propositions d'incitation.

Pour les deux dernières séances, dédiées aux parties fictives, le texte curriculaire donne des précisions quant à leur mise en œuvre (cf. Annexe 16). De même, il est précisé que le professeur peut user de la superposition du schéma-train avec le schéma-ligne chaque fois que cela lui semblera utile. Les parties fictives proposées dans le document sont elles aussi réaménagées avec l'introduction d'une ligne sur laquelle les élèves écrivent l'égalité ou l'inégalité correspondant à la comparaison de l'annonce et du lancer. Le schéma-ligne est remplacé par un schéma-train/ligne.

De plus, des précisions sont ajoutées dans cette version du module 2 sur le rôle et l'usage du schéma-boîte comme système de représentation. Il est ainsi décrit que

> *« la boîte permet de symboliser une structure additive/soustractive (...) la boîte peut être conçue comme une petite « machine algébrique » dans la mesure où elle rend «visible » pour l'exemple concerné, des égalités mathématiques : 5 = 2 + 3 ; 2 + 3 = 5 ; 5 = 3 + 2 ; 3 + 2 = 5 ; 5 - 3 = 2 ; 5 – 2 = 3. » (Ibid.)*

Nous observons donc ici que la rédaction de ce module 2013-2014 prend appui tout d'abord sur la première version du module 2 (2012-2013) avec des objectifs identiques, l'entrée dans l'écriture symbolique et l'introduction des deux systèmes de représentation du nombre que sont le schéma-boîte et le schéma-ligne. Cependant, comme nous venons de le décrire, la nouvelle version renvoie aussi aux modifications apportées à la séance 3 du module 4, lors de

la première phase de régulation, avec un travail spécifique sur la mise en relation des différentes représentations du nombre et l'introduction progressive du schéma-ligne associée au schéma-train. Ce travail de mise en relation sera réinvesti par les élèves lors d'une phase d'entraînement avant les séances de parties fictives.

Le tableau ci-dessous reprend l'organisation des deux versions successives de ce module. La partie supérieure du tableau (rectangle gris clair) donne à voir l'organisation de la première version de ce module et le rectangle inférieur (gris foncé) la seconde version de ce module. Nous observons donc l'introduction de nouveaux enjeux mathématiques notamment l'usage par les élèves des signes « =, ≠ » pour valider le gain ou non des parties réalisées ainsi qu'un appui sur le schéma-train pour introduire le schéma-ligne. Un travail spécifique sur la mise en relation entre les différentes représentations est aussi envisagé. Il y a donc continuation du travail amorcé dans les deux modules précédents avec mise en correspondance entre différentes représentations du nombre. De plus, ce module est complété par l'introduction écrite par le professeur des signes inférieurs et supérieurs « < et > ».

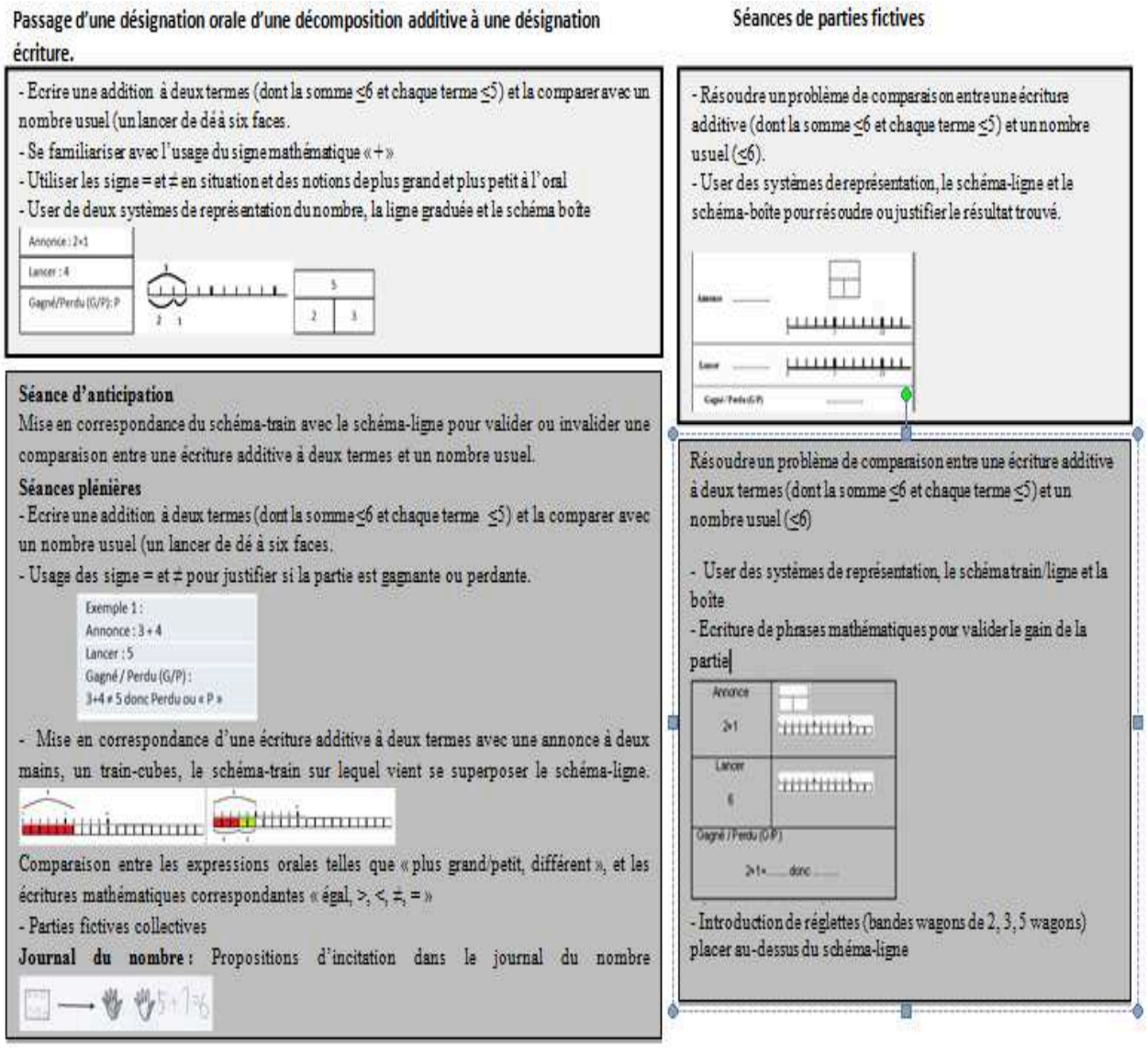


Figure 31 : Modifications apportées au module 2

Nous analyserons maintenant la version 2013-2014 du module 2 et plus spécifiquement le texte du déroulement de la phase 3 des séances 1 et 2.

5.3.3. Analyse du module 2, jeu représentationnel

Pour commencer, nous modéliserons le module 2 2013-2014 en jeux d'apprentissage et en capacités cibles. Pour cela, nous reprendrons le tableau (cf. Tableau 34) élaboré pour analyser la première version du module 2 pour le comparer avec la nouvelle version de ce module.

Module 2 (2012-2013)	Module 2 (2013-2014)
Séances 1 et 2 Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une écriture additive à deux termes (chaque	**Séances 1 et 2** Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) en utilisant

terme ≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel (≤ 6) **Capacité cible 1** : Désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes. **Capacité cible 2 :** Usage des signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) par un schéma-ligne et un schéma-boîte. **Capacité cible 3** : Traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne et de schéma-boîte. **Capacité cible 4** : Construction de systèmes de représentation du nombre comme moyen de preuve ou de résolution d'un problème de comparaison	le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel ≤ 6) **Capacité cible 1** : Désignation de nombres inférieurs ou égaux à six sous forme d'une écriture additive à deux termes (≤.5) **Capacité cible 2** : Usage des signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) Jeu d'apprentissage 2 : Faire comparer une écriture additive à deux termes (≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) **Capacité cible 3** : Traduction d'une écriture additive sous forme d'une annonce à deux mains, d'un schéma-train, d'un schéma-train/ligne. **Capacité cible 4 :** Comparaison entre deux schémas-ligne/train par une écriture mathématique. Jeu d'apprentissage 3 : Faire comparer une écriture additive à deux termes avec un nombre usuel en usant des systèmes de représentation du nombre Réinvestissement des capacités construites précédemment
Séance 3 et 4 Jeu d'apprentissage 3 : Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison. Réinvestissement des capacités construites dans les deux jeux d'apprentissage visés précédents	**Séance 3 et 4** Jeu d'apprentissage 4 : Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison. Réinvestissement des capacités construites dans les trois jeux d'apprentissage visés précédents

Tableau 34: comparatif de la modélisation du module 2 2012-2013 et module 2 2013-2014

Nous remarquons que le premier jeu d'apprentissage reste identique dans les deux versions tandis que le deuxième est similaire à celui modélisé lors de l'analyse de la séance 3 du module 4'[78] « Faire comparer une écriture additive à trois termes (chaque terme ≤ 5) avec un nombre usuel ≤ 6) » avec un travail sur l'écriture additive à deux termes et non à trois termes. La construction des capacités cibles de ces deux jeux d'apprentissage devrait être facilitée par le travail déjà réalisé en amont par les élèves au cours des jeux d'apprentissage précédents. Ainsi, la dernière version du module 0 (2013-2014) propose de construire la capacité suivante « représentation des sous-collections présentes sur le schéma-train par un signe graphique (le schéma-pont) et par un nombre désignant son cardinal ». Cette capacité doit rendre capable les élèves de tracer des schémas-ponts pour représenter des sous-collections sur le schéma-train et les désigner par un nombre. L'usage de ce schéma-train est alors réinvesti et consolidé lors de la nouvelle version du module 1 (2013-2014) et principalement lors du jeu d'apprentissage « faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collections (≤ 5) par un train-cubes et un schéma-train ». Le schéma-train, et la production d'annonces sur deux mains sont mis en relation.

La construction de cette capacité est prolongée dans la dernière version du module 2 (2013-2014) avec une complexification relationnelle des éléments du milieu par l'introduction de l'écriture symbolique et du schéma-ligne (en lien avec le schéma-train).

Dans le paragraphe suivant nous allons analyser plus spécifiquement l'introduction du schéma-ligne dans la progression proposée la seconde année d'expérimentation du curriculum.

5.3.4. Analyse de l'introduction du schéma-ligne

Régulations antérieures et module 2 2013-2014

Il est important de rappeler ici que la situation introduisant le schéma-ligne dans la version 2013-2014 du module 2 prend appui sur la première version du module 2 (2012-2013) mais aussi sur la séance 3 du module 4' rédigée par la sphère 1 en octobre 2012. Le tableau ci-dessous donne à voir l'évolution de cette introduction à travers les trois textes successifs.

[78] L'analyse de cette phase sera réalisée dans le paragraphe suivant

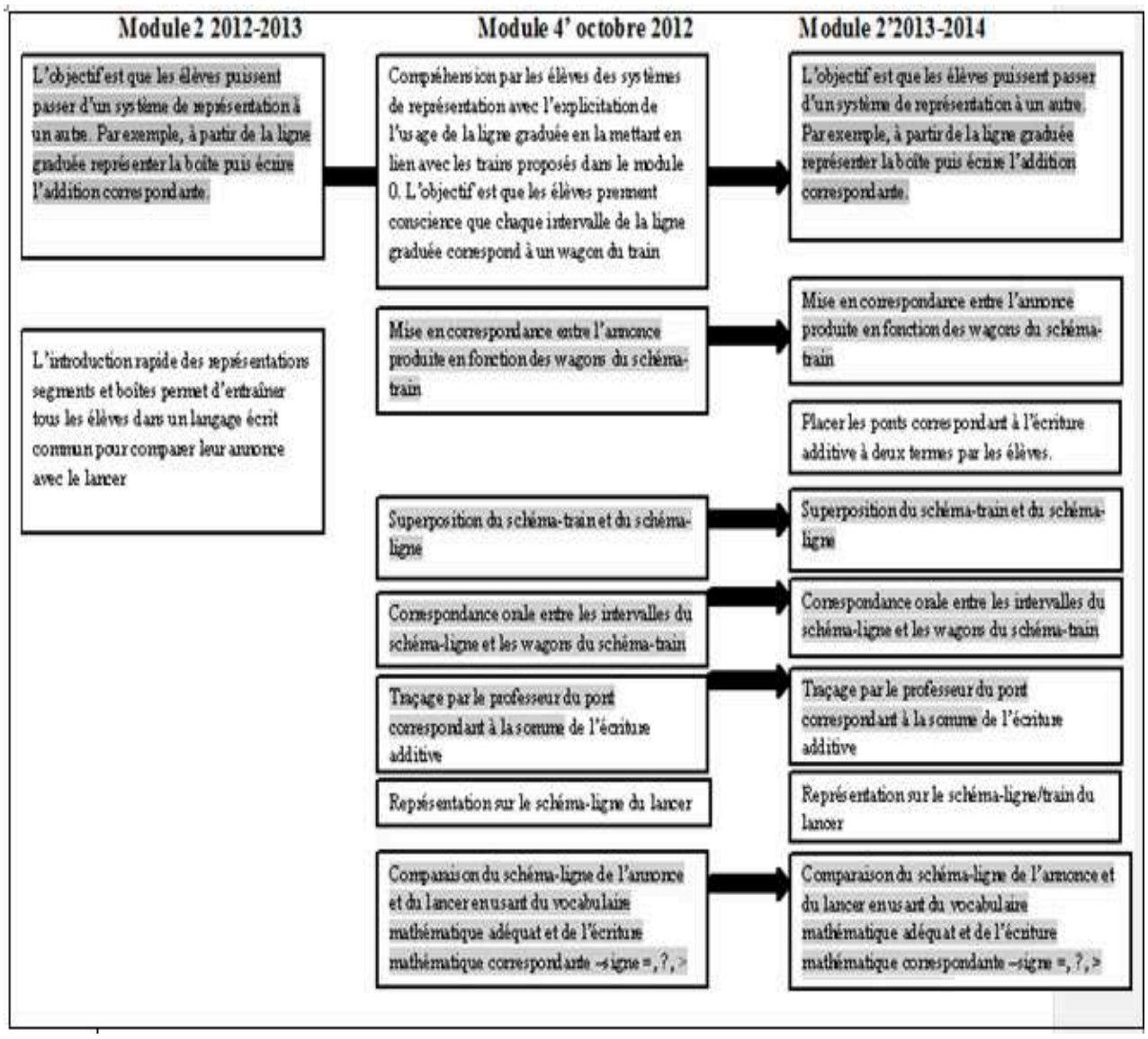


Tableau 35 : construction du module 2 2013-2014 en fonction des régulations antérieures

Les flèches et le texte grisé montrent les reprises effectuées pour la rédaction du module 2 2013-2014.

L'objectif de la première version du module 2 est gardé, puisqu'il s'agit de « passer d'un système de représentation à un autre » ainsi que l'organisation générale de la séance 3 du module 4. Toutefois, quelques aménagements sont réalisés notamment en ce qui concerne l'usage plus systématique du schéma train/ligne pour représenter l'annonce et le lancer ainsi que l'usage du schéma-pont pour désigner les collections du schéma-train.

Quatre représentations d'une décomposition additive à deux termes sont utilisées successivement dans ce module 2 : l'écriture symbolique, les doigts des deux mains, le schéma-train et le schéma-train/ligne (le schéma-train complété avec le schéma-ligne).

Introduction du schéma-ligne

Nous modéliserons le déroulement de la phase d'introduction du schéma-ligne dans les séances 1 et 2 du module 2 (2013-2014) par un jeu d'apprentissage « faire comparer une écriture additive à deux termes (≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) ». Il doit rendre les élèves capables de construire deux capacités cibles :

- traduction une écriture additive par une annonce à deux mains, un schéma-train, un schéma-ligne/train ;

- comparaison entre deux schémas-ligne/train par une écriture mathématique.

Ce jeu d'apprentissage doit rendre capable les élèves de passer d'un système de représentation à un autre, dans un processus de traduction représentationnelle.

En examinant de manière plus microscopique ce jeu d'apprentissage, nous remarquons une succession de micro-jeux d'apprentissage. En effet, les élèves doivent progressivement mettre en relation différents systèmes de représentation, différents milieux entre eux. Le tableau, ci-dessous (cf. Tableau 32), présente les différentes mises en correspondance des différents milieux présents dans la situation

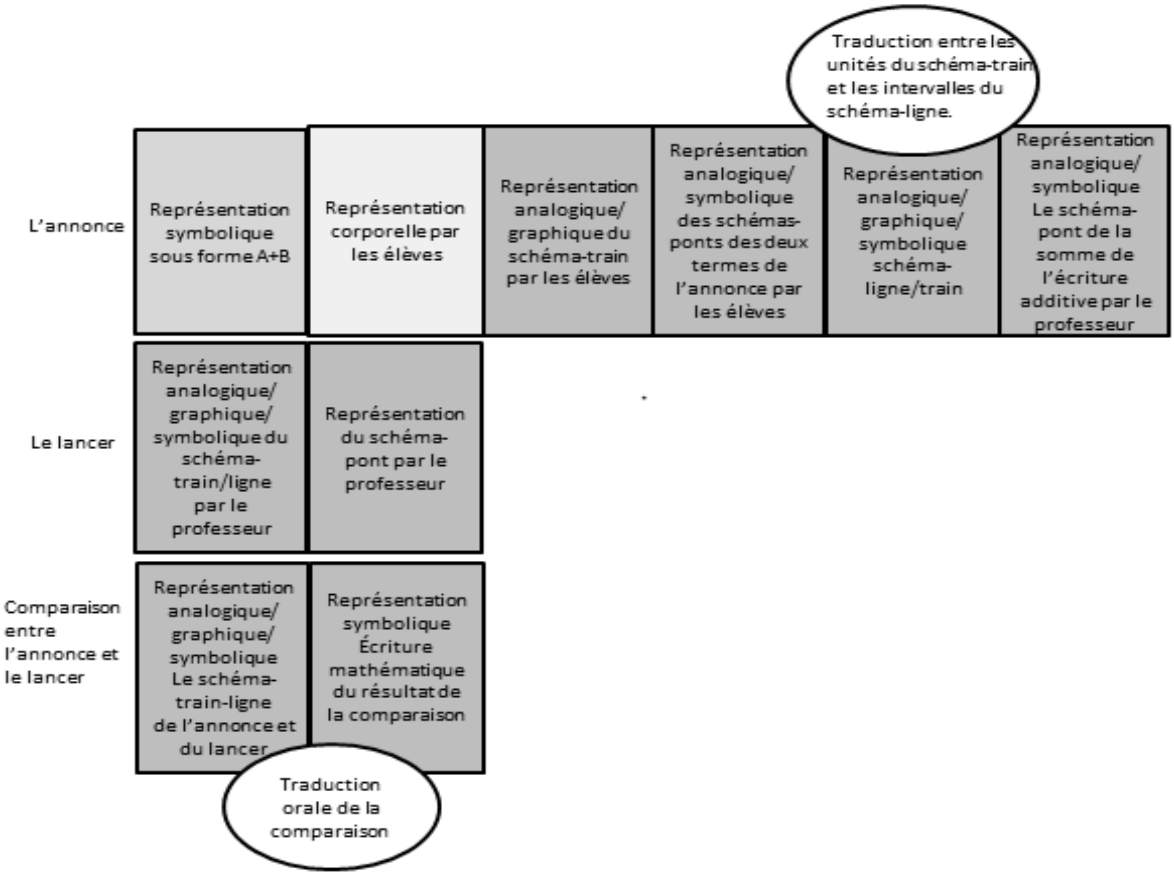


Figure 32 : schématisation du processus de mise en traduction

Ainsi que nous l'exprimons ci-dessus, dans un premier temps, une écriture additive à deux termes est proposée (milieu (A) symbolique de l'addition). Le professeur demande alors aux élèves de la mettre en lien avec une annonce à deux mains (milieu (B) corporel, les mains). Il y a une première mise en correspondance d'une expression mathématique (le représenté) avec la réalité qu'elle dénote (le représentant, les mains). Elle renvoie à l'expérience vécue par les élèves lors du module 1 avec la production d'une annonce à deux mains. Les deux termes de l'addition désignent donc ici la mesure d'une grandeur. Dans un premier temps, il y a donc association entre une écriture mathématique, un code symbolique (abstrait) qui n'entretient a priori aucune relation (propriété de « l'arbitraire du signe ») avec ce qu'il représente (Fayol, 2012) et une situation réelle expérimentée au préalable par les élèves.

Dans un second temps, il est proposé aux élèves de représenter cette annonce à deux mains sur un schéma-train (milieu (C) analogique/graphique du schéma-train). Cette mise en relation est déjà présente dans le module 1 où l'annonce produite avec deux mains est modélisée par le schéma-train (deux couleurs de cases différentes pour représenter les deux collections).

Ce schéma-train peut être considéré comme une première forme de schématisation d'une collection d'objets (les cubes dans le module 0) qui est représentés sous forme d'unités discrètes. Il renvoie donc à une première modélisation (Sensevy & Santini, 2006), à une forme symbolique qui permet de coder une première réalité (les doigts des deux mains et les collections de cubes). Le schéma-train devient alors une référence commune pour représenter des collections, chaque unité de la collection correspondant à une unité sur le schéma-train.

Le milieu symbolique de l'addition et celui du schéma-train sont successivement traduits dans le milieu corporel des doigts pour que les élèves puissent se référer régulièrement à une réalité matérielle, à un milieu d'une certaine manière plus concret et moins symbolique.

Lors du placement des schémas-ponts sur le schéma-train et de leur désignation par un nombre, il est demandé aux élèves de mettre en lien chaque terme de l'annonce avec les unités du schéma-train coloriées. Il y a ici retour à l'écriture additive proposée au départ de la situation. La schéma-train est traduit en langage mathématique. Il y a mise en relation entre le milieu du schéma-train et celui de l'écriture additive pour que les élèves puissent faire la correspondance entre le cardinal de la collection accompagnant le schéma-pont sur le schéma-train et les termes de l'addition, correspondance entre une quantité et un nombre. Ainsi, le schéma-pont, représentation analogique/symbolique (le représenté) est mis en analogie avec les termes de l'écriture additive (le représentant), la représentation symbolique. Nous observons donc une forme de continuité entre le schéma-pont qui est, d'une certaine manière,

concret puisqu'il donne à voir une collection d'unités et symbolique puisqu'il réfère au cardinal de celle-ci. Si l'on compare la version 2013-2014 du module 2 et celle de la séance 3 du module 4 (octobre 2012) sur laquelle prend appui la réécriture de ce module, nous remarquons que le schéma-train est ici complété par le placement du schéma-pont et l'écriture du nombre dans la continuité des modules 0 et 1 (2013-2014).

La première version de la progression du domaine « Situations », les schémas-ponts n'apparaissent que lors de l'introduction du schéma-ligne. Puis le schéma-ligne est introduit par le professeur en le superposant au schéma-train. Ce nouveau système de représentation qu'est le schéma-ligne est, tout d'abord, exprimé en lien avec le schéma-train. Le professeur questionne les élèves sur la correspondance entre les intervalles du schéma-ligne et les unités représentées sur le schéma-train. Cette désignation orale est accompagnée par un geste de monstration par le professeur de cette relation entre les graduations et l'unité. Cette superposition du schéma-ligne et du schéma-train est héritée de la séance 3 du module 4. Elle tente de pallier les difficultés rencontrées alors par les élèves sur l'usage des graduations. Ces difficultés proviennent principalement du fait que le dénombrement des grandeurs discrètes (comme les doigts des mains, les cubes) commence sur la ligne au « 1 » tandis que le dénombrement de grandeur continue (comme pourrait représenter le schéma-ligne) commence au 0. S'ajoute le fait que le cardinal est « en retard » sur l'ordinal (ce qui n'est pas le cas pour les grandeurs discrètes). La mise en correspondance entre les graduations du schéma-ligne et les unités du schéma-train autorise le passage à une représentation analogique du nombre décomposée en unités discrètes, l'unité étalon étant l'intervalle entre deux graduations.

Le professeur place alors le schéma-pont au-dessus du schéma-train/ligne désignant la somme de l'addition à deux termes de l'annonce. Le résultat du lancer est ensuite représenté sur un schéma-train/ligne. Cette représentation donne la possibilité de comparer les nombres entre eux (le lancer et l'annonce). Elle donne à voir la différence entre deux nombres. Cette propriété est alors utilisée par le professeur pour comparer l'annonce avec le lancer en usant des expressions orales adéquates « plus grand que » (supérieur à), « plus petit que » (inférieur à), « différent » (pas égal). Ces énoncés oraux sont mis en relation avec les énoncés mathématiques écrits. De ce fait, le professeur introduit les signes « < et > » en amont du module 3 et réinvestit les signes « = et ≠ ». Ainsi, le signe de l'égalité est utilisé de manière concomitante avec d'autres signes relationnels « ≠, < et > » (Brousseau, 1986). Les signes mathématiques expriment des relations entre des grandeurs (représentées sur les schémas-lignes/trains grâce à une relation de représentation entre ces deux systèmes de représentation).

De plus, l'égalité est introduite avec différents sens, égalité entre deux nombres, égalité entre deux quantités, égalité entre deux longueurs.

6. Synthèse du chapitre 5

L'objectif de ce premier chapitre d'analyse est de donner à voir et à comprendre comment l'institution d'un travail commun professeurs/chercheurs au sein d'une ingénierie didactique coopérative peut permettre de fournir des pistes d'amélioration d'une partie d'un curriculum en mathématique au cours préparatoire. Ce travail coopératif a pu prendre corps pour deux raisons majeures. La première est le contrat de recherche émis par la sphère 1 lors de la présentation du dispositif de recherche aux professeurs du groupe expérimental (sphère 2). Ce contrat précise l'importance du rôle d'analystes et de critiques des professeurs à l'égard de la progression, l'importance de leurs commentaires pour proposer et concevoir les séances. Les professeurs restent libres d'aménager le rythme de la progression par des séances supplémentaires pour permettre aux élèves des explorations complémentaires pour maîtriser les savoirs en jeu Ce contrat insiste sur la perspective coopérative de ce dispositif avec comme idée de bâtir à terme un « objet » commun, approprié par tous. Le rôle des professeurs de la sphère 2 ne se cantonne pas à être des opérateurs, mais des (co)-concepteurs de ce curriculum.

La seconde raison est liée aux outils de communication mis en place par la sphère 1 pour permettre des échanges continus intra et inter-sphères : le site Internet de la recherche et son forum, les listes de diffusion intra et inter-sphères, les réunions régulières entre les membres de l'équipe de recherche, les réunions de régulation et la semaine de stage bilan/perspectives réunissant les deux sphères.

Dans ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur un problème d'enseignement révélé dans le cadre de cette coopération intra et inter-sphère : l'appropriation par les élèves du schéma-ligne et la perte trop rapide de la référence concrète au jeu des annonces. Les remarques des professeurs ainsi que l'analyse des premiers modules de la première version de la progression du domaine « Situations » mettent en évidence la distance trop grande entre les connaissances antérieures des élèves et le nouveau milieu schéma-ligne. Face à ce problème, s'est créé un espace de travail commun entre chercheurs et professeurs. Une enquête (Dewey, 1967) collective s'est donc déroulée autour des systèmes de représentation qui apparaissent alors comme le garant d'une forme de continuité entre les modules, continuité entre représentation

concrète et abstraite du nombre, continuité dans leur mise en relation et continuité de l'usage des représentations dans l'avancée des savoirs. Cette enquête menée par les professeurs et les chercheurs repose donc sur la « détermination commune de fins communes » (Sensevy, 2011a, p. 678).

Nous pouvons ici rapprocher cette pratique de celle de l'étude des textbooks par les professeurs d'une même école en Chine (Ma, 1999) pour approfondir leur compréhension des mathématiques. Cependant, ce collectif de pensée (Fleck, 2005 ; Sensevy, 2009) ne propose pas de modification des ressources. Les lessons studies au Japon, quant à elles, offrent à un collectif de professeurs et d'universitaires un espace de collaboration pour élaborer une leçon et la tester dans une classe. Les résultats de ce travail sur les ressources sont ensuite transmis par le biais de publications (Miyakawa & Winsløw, 2009).

Dans cette dernière section, nous nous centrerons sur deux points qui émergent de l'analyse.

Tout d'abord, nous reviendrons sur l'importance des systèmes de représentation dans l'avancée du savoir vue au travers du prisme des échanges inter et intra-sphères. Puis nous spécifierons comment la construction du jeu de l'institution d'une mise en analogie/traduction entre les représentations se concrétise dans les textes curriculaires.

6.1. Continuité et systèmes de représentation

L'enquête menée au sein de l'ingénierie coopérative montre la nécessité de mettre en relation les différentes représentations du nombre présentes dans le domaine « Situations ». Chaque système sémiotique sera successivement le représenté et le représentant dans une relation de représentation (Brousseau, 2014). Ainsi, lors de la réécriture des trois premiers modules (2013-2014), les représentations matérielles et corporelles (respectivement le train-cubes, les mains) sont mises en relation avec une représentation analogique/graphique telle que le schéma-train (similaire au train-cubes). Le schéma-train dénote une même réalité que l'annonce faite à deux mains ainsi que celle du train-cubes, une collection d'objets représentée sous forme de deux ou trois sous-collections (module 2 et 3).

De plus, chaque collection du schéma-train est codée par un signe graphique, le schéma-pont et par un nombre. Un schéma-ligne vient ensuite se superposer à cette représentation. Le schéma-train/ligne montre alors le rapport entre deux grandeurs. La comparaison entre le schéma-train/ligne du lancer et de l'annonce autorise, de même, la comparaison entre deux

longueurs. Il y a donc une volonté de créer une structure de représentation à travers un jeu représentationnel avec des allers retours entre les diverses représentations, chaque représentation pouvant se référer à une même réalité. L'écriture mathématique peut être ainsi mise en analogie avec certaines manipulations matérielles (les cubes, les doigts) et des représentations recelant des parts de concrétude et d'abstraction diverses (schéma-train, schéma-ligne). L'analyse des nouveaux modules 0, 1 et 2 (2013-2014) montre une volonté de construire progressivement chez les élèves une capacité de mise en relation/mise en analogie, de traduction entre les différents systèmes de représentation. Ceci semble possible grâce à une succession de capacités cibles autorisant la production d'une certaine forme de continuité entre les différents modules dans l'expérience des élèves et au sein de l'action conjointe en classe. Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 36) reprend certaines capacités travaillées dans nouveaux textes curriculaires (2013-2014)

Module 0	Module 1	Module 2
JA1 : faire produire des stratégies de dénombrement pour construire un train-cubes identique à un schéma-train (≤ 30) composé de sous-collections (≤ 6). **CC 1 :** Désignation orale d'une quantité par un nombre en usant de stratégies de dénombrement **CC2 :** Traduction d'un schéma-train par un train-cubes JA 2 : Faire désigner par un signe graphique et un nombre le cardinal de sous-collections représentées sur un schéma-train. **CC3 :** Usage du schéma-pont pour désigner une sous collection sur le schéma-train. JA3 : Faire produire un code écrit pour désigner des collections **CC4** : Désignation par un nombre écrit une quantité par des stratégies de codage de sous collections. JA 4 : Faire désigner par un signe graphique , le schéma-pont et un nombre écrit les sous-collections représentées sur un schéma-train et le mettre en correspondance avec le train-cubes. **Réinvestissement du CC4.** **CC5 :** Traduction des schémas-ponts et du nombre désignant chaque collection par un train-cubes. JA 5 : Faire créer des problèmes mathématiques dans le Journal du Nombre **Réinvestissement des capacités cibles précédentes.**	JA1: Faire produire une décomposition d'un nombre (≤ 6) sous forme de deux sous-collections à deux mains et la comparer avec un lancer de dé à six faces **CC1: Désignation orale des nombres** (≤ 6) sous forme de deux sous-collections **CC2:** Construction orale de la notion d'égalité JA2 : Faire produire un référentiel commun des règles du jeu des annonces JA3 : Faire traduire une décomposition d'un nombre (≤ 6) sous forme de deux sous-collections par un train-cubes et un schéma-train. **CC3** : Traduire une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train. Réinvestissement de la capacité de représenter par un signe graphique (schéma-pont) et par un nombre les sous-collections sur le schéma-train JA4 : Faire créer des problèmes mathématique dans le Journal du Nombre **Réinvestissement** des capacités construites dans les JA précédents.	JA 1 : Faire produire une écriture additive à deux termes (≤ 5) en utilisant le signe « + » et la comparer avec un nombre usuel (≤ 6). **CC1 : Désignation de nombres** ≤ 6 sous forme d'une écriture additive à deux termes (≤ 5). **CC2 :** Usage des signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) JA2 : Faire comparer une écriture additive à deux termes (≤ 5) avec un nombre usuel (≤ 6) **CC3 :** Traduction d'une écriture additive sous forme d'une annonce à deux mains, d'un schéma-train, d'un schéma-train/ligne. CC4 : Comparaison entre deux schémas-ligne/train par une écriture mathématique JA3 : Faire comparer une écriture additive à deux termes avec un nombre usuel en usant des systèmes de représentation du nombre . **Réinvestissement** des capacités construites précédemment JA4 : Faire utiliser les systèmes de représentation pour résoudre ou justifier un problème de comparaison. **Réinvestissement** des capacités construites dans les trois jeux d'apprentissage visés précédents

Tableau 36 : succession sur les trois premiers modules des jeux d'apprentissage et capacités cibles de traduction représentationnelle

Nous remarquons, à la lecture de ce tableau, une succession de capacités cibles dont l'enjeu est de construire des capacités de mise en relation entre les systèmes de représentation. Ainsi,

le module 0 a pour objectif, dans un premier temps, de faire correspondre le train-cubes (représentation matérielle) avec un schéma-train (représentation analogique/graphique). Ainsi, chaque collection de cubes du train-cubes peut être représentée par des collections d'unités graphiques (succession de cases juxtaposées). Dans un second temps, chaque collection du schéma-train est représentée par un schéma-pont (trait graphique incluant l'ensemble des éléments d'une collection) et désignée par un nombre. Il existe donc dans ce premier module, la volonté d'une mise en relation entre le matériel concret, les cubes avec une représentation analogique/graphique/symbolique (schéma-train avec les ponts). Ici, l'écriture mathématique, le schéma-pont, les portions du schéma-train modélisent une même réalité, des collections d'objets (ici des cubes).

Lors du module 1, cette capacité de représentation de sous-ensembles d'objets est réinvestie. Cette fois-ci, c'est une décomposition additive sous forme de deux sous-collections (annonce avec deux mains) qui est traduite sous forme de schéma-cubes et de schéma-train. Les élèves réexpériencient des capacités construites précédemment dans une nouvelle situation, le jeu des annonces oral. Ce module est donc en continuité avec la situation trains/tours puisque les mêmes représentations du nombre sont en jeu. Ainsi, les buts poursuivis au cours du module 0 deviennent ici des moyens, des instruments pour continuer l'enquête sur le concept d'égalité (l'enjeu du module 1 étant de construire des désignations orales des nombres (≤ 6) par deux sous-collections (≤ 5)).

Le module 2 (jeu des annonces à l'écrit) voit, quant à lui, l'introduction de l'écriture mathématique. La première dénotation de cette écriture symbolique est alors la représentation corporelle à deux mains à laquelle elle se réfère. Puis elle est traduite sous forme de schéma-ligne/train. L'écriture mathématique vient alors traduire la comparaison entre deux schémas-lignes/trains représentant respectivement une écriture additive à deux termes et un nombre inférieur ou égal à six. Les mathématiques (l'écriture mathématique) viennent modéliser une réalité, médiée par des formes symboliques (les systèmes de représentation).

Le concept mathématique d'égalité se construit donc progressivement à travers les trois premiers modules du domaine « Situations ». Cette progressivité autorise la modélisation sous différentes formes d'un même concept, chaque modélisation se référant à une même réalité. Ainsi, il y a croissance et reconstruction permanente de l'expérience des élèves au travers des systèmes de représentation. Comme le précise Dewey (2003, p. 154) « l'acquisition d'une compétence, la maîtrise d'un savoir ou un bagage intellectuel ne sont pas des fins mais des signes de développement et des moyens de poursuivre ce développement ». Il semble ici qu'il

y ait progressivité dans l'apprentissage des élèves dans la mesure où ils élaborent au sein des expériences des « outils conceptuels, cognitifs et intellectuels nécessaires à l'appréhension d'objets de plus en plus complexes » (Gégout, 2013, p.154). Les élèves font l'expérience tout d'abord d'une première forme de modélisation du nombre sous forme de schéma-train et de train-cubes mise en relation avec le nombre oral puis écrit. Dans un second temps, ces représentations sont elles-mêmes mises en analogie avec le schéma-ligne, la boîte et l'écriture mathématique de l'égalité. L'élève manipule, rencontre et se confronte à un objet mathématique (Ibid.) dans la continuité. Nous caractérisons cette continuité à travers l'avancée du temps didactique, la chronogénèse.

Les systèmes de représentation sont introduits progressivement et mis en relation les uns avec les autres sans qu'il y ait discrétisation de chaque objet. En effet, chaque représentation est traduite par une autre dans un processus de référence mutuelle.

Il semble donc qu'il y ait une forme de cohérence didactique avec une suite des capacités cibles qui modélisent les nouvelles versions des trois premiers modules. La construction de ces capacités permettra aux élèves de poursuivre l'exploration des nombres dans l'expérience.

Mais comment l'activité didactique s'organise-t-elle au sein des modules pour produire ce style de pensée ?

6.2. Dialectique contrat/milieu

Lors de l'analyse des extraits des textes curriculaires, nous avons montré que lorsqu'une nouvelle représentation était introduite, le professeur explicitait à l'ensemble de la classe son usage et ses relations en s'appuyant sur des représentations déjà connues des élèves.

L'étude de certains jeux d'apprentissage en termes de contrat/milieu met en évidence l'importance du contrat d'imitation par et pour l'usage des représentations. Le contrat d'imitation est défini par Sensevy (2016) par une

> « pratique, dans laquelle le professeur (au sens général et anthropologique de ce terme) donne à l'élève (au sens général et anthropologique de ce terme) une conduite (le savoir) à « imiter », que l'élève ne pourra s'approprier qu'avec une intense répétition, avec beaucoup d'exercices, mais aussi avec la claire conscience qu'il ne s'agit pas de reproduire l'opus operatum (le produit de l'action), mais de s'approprier le modus operandi (le processus d'action).» (Ibid.).

Le professeur s'exprime sur l'usage du nouveau système de représentation en le mettant en relation avec ceux déjà connus. Ce contrat repose sur une mise en traduction des

représentations connues des élèves liées aux capacités cibles construites/en cours de construction, sur les représentations qu'ils ont eux-mêmes expérienciées lors des séances précédentes de parties fictives et du Journal du Nombre. Ce contrat d'imitation tend à ce que les élèves assimilent un nouveau système de représentation, un nouveau milieu en fonction des autres milieux connus. Ainsi, par exemple le contrat d'imitation mis en évidence pour introduire le schéma-ligne (le professeur montre comment tracer les schémas-ponts représentant chaque terme de l'addition) est nécessaire car le professeur semble le seul à avoir conscience du potentiel sémiotique (Bartolini, 2008) de cette représentation, de ses significations mathématiques et de son usage. Le professeur oriente l'action de l'élève en proposant une mise en relation entre le savoir ancien et nouveau. Il apparaît une forme d'interpénétration des savoirs entre eux (Chevallard, 1991). L'élève apprend en se collectant à des milieux différents (Sensevy, 2011) que le professeur met en relation progressivement. Les textes curriculaires amènent le professeur à créer un style de pensée (Fleck, 2005) au sein de l'institution classe, une perception dirigée, l'institution d'une structure représentationnelle basée sur un jeu représentationnel (Sensevy, 2011c).

Prenons un exemple : le professeur, lors du module 2, introduit le schéma-ligne en prenant appui sur le schéma-train que les élèves manipulent depuis le module 0. Il montre aux élèves les relations entre ces deux représentations. Chaque intervalle du schéma-ligne représente une unité du schéma-train et le schéma-pont réunit l'ensemble des collections représentées. Le professeur traduit donc sur une ligne numérique représentée par la suite des nombres, des grandeurs. Les élèves font ensuite l'expérience de l'usage de ce schéma dans le cadre du Journal du Nombre et des parties fictives. Les élèves, face à un problème de comparaison, sont invités à user des représentations pour résoudre le problème proposé ou qu'ils se sont eux-mêmes donné. Ils enquêtent sur un problème de comparaison. Le contrat d'imitation-problématisation repose ici sur un arrière-plan commun entre le professeur et les élèves, un réseau commun de capacités épistémiques.

Dans le chapitre suivant, nous allons tenter d'analyser quels sont les effets de ces choix didactiques sur l'expérience des élèves.

CHAPITRE 6 : représentations et écritures additives

Dans ce chapitre, nous analyserons comment une professeure d'une classe d'étude met en œuvre les premiers modules du domaine « Situations », au cours de l'année 2013-2014. Cette professeure teste l'ensemble de la progression depuis 3 ans dans sa classe[79] et participe activement à l'élaboration des modules « Situations ». Cette étude de cas viendra illustrer le chapitre précédent dans lequel nous décrivons et analysons les modifications apportées au domaine « Situations » grâce au travail coopératif entre la sphère 1 et la sphère 2. Pour rappel, ce travail de régulation sur les quatre premiers modules du domaine « Situations » s'est opéré à la suite de difficultés rencontrées par les élèves sur l'usage du schéma-ligne lors de la première année d'implémentation dans les classes expérimentales. Ce travail coopératif entre les professeurs expérimentaux et l'équipe de recherche semble avoir conduit à la construction d'une continuité didactique plus forte entre les premiers modules, au sein du texte curriculaire, à travers l'usage des systèmes de représentation. Ce travail d'analyse du texte curriculaire nous a permis d'avoir une vision des enjeux épistémiques sous-jacents à l'action didactique conjointe pensée par les didacticiens (ici la sphère 1) qui constitue l'arrière-plan à l'action effective (Sensevy, 2011a) que nous allons étudier dans ce chapitre.

Les systèmes de représentation introduits dans ces premiers modules sont convoqués tout au long du curriculum et apparaissent ainsi comme une sorte de garant d'une forme de continuité entre les différentes notions mathématiques abordées. En effet, nous conjecturons que les trois premiers modules du domaine "situations" ont comme fin de construire chez les élèves des capacités de traduction entre les différentes représentations du nombre et que cette fin, dans les modules suivants, devient un moyen pour résoudre des situations problèmes proposées : toute fin étant « un moyen de continuer l'activité aussitôt que la fin est atteinte » (Dewey, 1916/2011, p. 189). Nous nous fonderons sur cinq séances filmées[80] du module 1 et 2. Une particularité est ici à souligner : les deux séances vidéoscopées du module 1 sont menées par deux professeurs stagiaires, PES1 et PES2. Ces séances ont été préparées par ces professeurs en se référant aux fiches de préparation de l'année précédente de la professeure (P) titulaire de

[79] En tant que classe d'étude la première année (2011-2012) pour la conception des modules « Situations » et les deux années suivantes en implémentant l'ensemble de la progression ACE.

[80] Principalement par le professeur de la classe elle-même.

la classe et au texte curriculaire du module 1. Il est à noter que P leur a présenté les enjeux et des points d'attention particuliers liés à la mise en œuvre de ce module.

Comment la nouvelle version des premiers modules est-elle mise en oeuvre dans une classe ? Comment s'organise, dans l'action conjointe, l'avancée des savoirs ? Comment les systèmes de représentation sont-ils introduits dans l'action conjointe ?

Dans cette étude, nous nous centrerons sur les premiers modules pour donner à voir et à comprendre comment, dans l'action conjointe, l'avancée des savoirs s'organise (désignation orale, écrite des nombres sous forme additive, les signes mathématiques « +, =, ≠ »). Nous étudierons certains épisodes à travers le prisme de l'introduction de nouvelles connaissances mathématiques et des nouveaux systèmes de représentation du nombre (écriture symbolique, schéma-train, schéma-ligne et le schéma-boîte).

Nous rappelons brièvement l'organisation et les objectifs de trois premiers modules du domaine « Situations » dans sa seconde version, après réécriture par la sphère 1 pour l'année 2013-2014 (cf. Tableau 37).

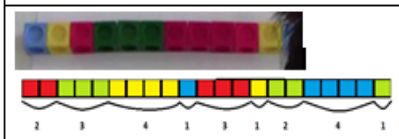
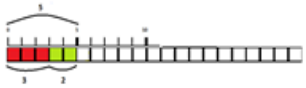
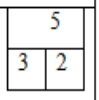
Module 0	Module 1	Module 2
L'enjeu du module 0 « est de faire prendre conscience aux élèves qu'une quantité peut être représentée par un nombre, quantité pouvant être décomposée en sous collections » (XXX). Ainsi, la situation proposée offre une première forme de modélisation de sous-collections de cubes en un schéma-train et de la désignation des sous-collections par un nombre et un « pont »	Le module 1 introduit le jeu des annonces. Son objectif est « de rendre les élèves capables de produire différentes désignations d'une quantité représentée par les constellations inscrites sur les faces d'un dé à six faces (constellations de 1 à 6) » (XXX). Les quatre séances du module s'organisent principalement de la façon suivante : « les élèves, dans un premier temps, choisissent un nombre, qu'ils « expriment » sur leurs deux mains et qu'ils « annoncent » oralement (en disant par exemple « 3 et 2 » ou « 5 »). Dans un second temps, ils comparent cette annonce à un lancer de dé à six faces (constellations de 1 à 6). L'élève gagne si et seulement si l'annonce est égale au lancer de dé. » (XXX). Lors de la phase de mise en commun, le document curriculaire propose aux professeurs de représenter l'annonce produite par la construction d'un train formé de cubes emboîtés puis sur un schéma-train (avec le traçage des ponts correspondants et les nombres désignant les collections).	Le module 2, quant à lui, introduit l'écriture symbolique en référence au jeu des annonces oral. Les élèves produisent une écriture additive à deux termes et la comparent avec un nombre usuel. De plus, « ce module introduit deux nouveaux systèmes de représentation, la ligne graduée et la boîte, systèmes qui perdureront tout au long de la progression (...). La ligne graduée dans ce module sera introduite par analogie au schéma train-ponts (Cf. module 1) pour laisser place progressivement à la ligne graduée seule » (XXX)
		3+2 =5  

Tableau 37 : vision synoptique des trois premiers modules du domaine "Situations"

Le module 0 est composé de quatre séances au cours desquelles les élèves construisent la capacité de désignation des quantités par un nombre. Il propose deux systèmes de représentation, le train-cubes et le schéma-train qui sont mutuellement mis en correspondance Chaque sous-collection du schéma-train est mise en relation avec chaque sous-collection de cubes composant le train-cubes. Chaque sous-collection est désignée par un nombre.

Le module 1 introduit la situation du jeu des annonces où les élèves construisent des capacités de désignation orale des nombres sous forme de deux sous-collections. Ils comparent oralement deux collections dont une est composée de deux sous-collections (une annonce produite sur deux mains et une constellation de points sur un dé à six faces). Ces différentes collections sont mises en correspondance avec un schéma-train et un train-cubes et désigné par un nombre oral puis écrit.

Le module 2 transpose à l'écrit la situation orale du jeu des annonces (module 1). Les élèves construisent des capacités de désignation d'un nombre par une écriture additive à deux termes et de comparaison de cette écriture avec nombre usuel en lien. Ces comparaisons sont désignées par des égalités ou inégalités (« = ; ≠ »). Ces écritures sont mises en relation avec une annonce à deux mains, un train-cubes et un schéma-train auquel est juxtaposé un schéma-ligne (demi-droite numérique).

Après ce bref rappel des objectifs de ces trois modules ainsi que les différents systèmes de représentation du nombre qu'ils construisent, nous analyserons comment PES1, PES2 professeures stagiaires) et P (professeure titulaire de la classe) mettent en œuvre in situ certaines séances de ces trois modules.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 38) donne une vision macroscopique des cinq séances captées au cours de la mise en œuvre des modules 1 et 2. Nous retrouvons dans la première colonne le nom du module, dans la seconde le numéro de la séance puis le sujet des séances et la durée de celles-ci. Ce tableau doit permettre aux lecteurs de se repérer dans la chronologie des séances, leur organisation et les savoirs en jeu.

Module	séance	Sujet de la séance	Durée
Module 1	Séance 3 19-09-13	- Jeu des annonces par équipe : production d'une décomposition additive en deux sous-collections (sur deux mains) et comparaison avec une constellation de points issue d'un lancer de dé à six faces. - Traduction d'une décomposition additive en deux sous-collections par un train-cube et un schéma-train.	00:45
	Séance 4 20-09-13	- Jeu des annonces individuel : production d'une décomposition additive en deux sous-collections (sur deux mains et comparaison avec une constellation de points issue d'un lancer de dé à six faces - Traduction d'une décomposition additive en deux sous-collections par un schéma-train et par un schéma-train/ligne. - Jeu du lancer : Production d'une décomposition additive en deux sous-collections égale à une constellation de points issue d'une lancer de dé à six faces ;	00 :39
Module 2	Séance d'anticipation 26-09-13	- Correspondance entre une écriture additive à deux termes et une annonce produite à deux mains. - Introduction du signe « + » -Traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition de deux sous-collections (sur deux mains et un train-cube,	00 : 40
	séance 27-09-13	- Production d'une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et la comparer avec un nombre usuel (≤6). - Introduction du signe « + » - Traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition en deux sous-collections (sur deux mains)	00 :41
	séance 3 03-10-13	- Discussion collective autour des productions des élèves de la séance précédente (comparaison entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) - Introduction des signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner une égalité et une inégalité. -Traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition additive en deux sous-collections (sur deux mains) et sur un schéma-train/ligne.	00 : 46

Tableau 38 : vision synoptique de l'organisation des séances du module 1 et 2

Nous nous appuierons sur les analyses produites dans le chapitre précédent[81] pour reconstruire l'avancée du savoir et les capacités préalablement construites par les élèves.

La première section de ce chapitre se focalisera sur la séance 3 du module 1 au cours de laquelle les élèves jouent par équipe au jeu des annonces. Chaque élève choisit un nombre, l'annonce sur ses deux mains et le compare avec un lancer de dé à six faces. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer. Ces annonces produites sont ensuite traduites par deux systèmes de représentation, le train-cubes et le schéma-train.

La seconde section étudiera la séance suivante, la séance 4 (isomorphe à la séance 3). Les élèves jouent individuellement au jeu des annonces. Ils choisissent un nombre, le montrent sur deux mains. La professeure lance un dé à six faces. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer. Ces annonces sont traduites par un schéma-train et un schéma-train/ligne. Il existe une certaine similitude entre ces deux séances dans la mesure où le jeu effectif garde une place importante et où les systèmes de représentation sont mis en correspondance avec les décompositions additives produites avec les mains.

[81] Nous ne possédons par de films de classe du module 0. Nous conjecturons que les capacités définies lors de l'analyse du document curriculaire du module 0 ont été travaillées et sont construites ou en cours de construction par les élèves.

La troisième section se centrera sur le passage de la situation orale du jeu des annonces à la situation écrite en analysant certains épisodes de la séance 1 et 2 du module 2. Pour terminer, nous proposerons une synthèse des analyses produites.

1. Désignation orale et représentations

Dans cette première section, nous nous centrerons sur le module 1 du domaine situation, le jeu des annonces. L'enjeu, nous l'avons vu, est la désignation orale d'un nombre (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (≤ 5). Nous examinerons plus précisément la troisième séance mise en œuvre dans la classe de P (cf. Tableau 38) sous la responsabilité de PES1 le 19 septembre 2013. Pour analyser cette séance, nous faisons l'hypothèse que certaines connaissances ont, au préalable, été abordées dans cette classe. Nous nous appuyons sur le déroulement prévu des séances dans les textes curriculaires des modules 0 et 1 et certains indices prélevés dans les séances filmées et dans leurs transcriptions pour décrire les capacités travaillées préalablement à la séance analysée.

Comment les systèmes de représentation, le schéma-train et le train-cubes introduits dans le module 0 sont-ils réinvestis dans le module 1 ? Comment dans l'action conjointe, se construit une continuité de l'expérience des élèves à travers l'usage des systèmes de représentation ?

Tout d'abord, nous contextualiserons et décrirons la séance 3 du module 1. Puis, nous analyserons trois épisodes issus de cette séance dont l'objet est la traduction par des systèmes de représentation d'une annonce produite à deux mains. Pour terminer nous proposerons une synthèse de l'analyse de ces trois épisodes.

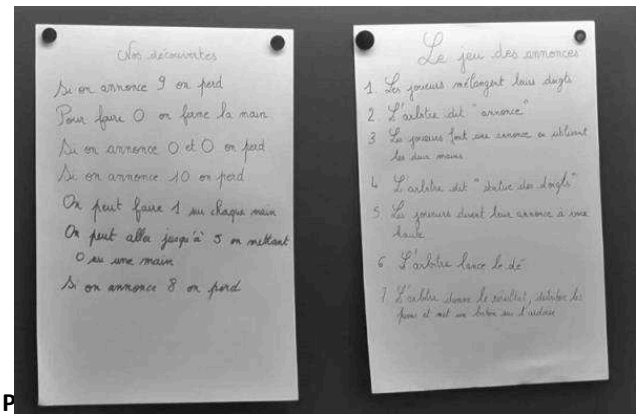
1.1. Présentation de la séance 3 du module 1

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 39) donne à voir le découpage en phases et en jeux d'apprentissage de la séance 3 du module 1 menée par une professeure stagiaire. Ce découpage a été réalisé à partir du synopsis d'action de cette séance (cf. annexe 17). Ce tableau montre l'organisation interne de la séance et l'articulation qui peut exister entre les jeux d'apprentissage qui modélisent le jeu du professeur sur celui de l'élève. Ce premier découpage va nous permettre dans un second temps de contextualiser les épisodes que nous avons sélectionnés en fonction de notre questionnement de départ.

Phase de la séance	Support, modalité	Découpage en jeux d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Retour sur les affiches, Référentiels, du jeu des annonces produits lors des séances précédentes : règles du jeu et découvertes.	Affiche au tableau (Référentiels des règles du jeu des annonces et des découvertes effectuées lors des jeux effectifs).	Faire se remémorer comment jouer au jeu des annonces.		
Jeu des annonces oral : production d'une annonce à deux mains et comparaison avec un lancer de dé à six faces.	Par équipe avec un arbitre.	Faire comparer une décomposition additive sous forme de deux sous-collections avec un nombre usuel issu d'un lancer de dé à six faces.		
Retour sur les découvertes mises en avant lors du jeu en équipe	En appui sur le référentiel précédent	Faire recenser les découvertes issues de la phase de jeu		
Traduction d'une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train.	Collectif en appui sur les productions des élèves lors de la phase précédente.	Faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collections par un train-cubes et un schéma-train.	Introduction des ponts sur le schéma-train.	Annonce à deux mains traduite sous forme de train-cubes et de schéma-train.

Tableau 39: Découpage de la séance en jeux d'apprentissage

Cette séance a pour objectif premier de rendre capables les élèves de produire différentes désignations orales d'un nombre (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (≤ 5). Elle se découpe en quatre phases (cf. Tableau 39). La première et la troisième donnent la possibilité aux élèves de mettre en commun leurs découvertes réalisées lors du jeu effectif (par exemple, possibilité de faire zéro avec le poing fermé, produire des annonces inférieures à six pour avoir au moins une chance de gagner...) comme nous montre le photogramme ci-contre (cf. Photogramme 16). Ces affiches Référentiels sont complétées au fur et à mesure des séances.



Ces deux référentiels reprennent les découvertes réalisées par les élèves (à gauche du photogramme) et les règles du jeu (à droite du photogramme).

La seconde phase organise le jeu des annonces autour d'équipes de quatre élèves. Trois élèves proposent une annonce à deux mains, l'arbitre lance un dé à six faces. Le résultat de ce lancer est comparé aux annonces qui, pour gagner, doivent être égales au lancer. L'arbitre vérifie et distribue les jetons gagnants. Cette phase occupe deux tiers du temps de la séance. La quatrième phase à laquelle nous nous intéresserons plus spécifiquement se centre sur la mise en relation entre les différents systèmes de représentation du nombre :

- relation entre la représentation d'un nombre sous forme de deux sous-collections sur deux mains et le train-cubes (cubes emboîtables) ;

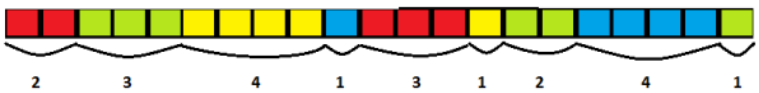
- relation entre la représentation d'un nombre sous forme de deux sous-collections sur deux mains et un schéma-train (composé de carrés de deux couleurs juxtaposés) et le nombre désignant chaque sous collection représentée.

Ces systèmes de représentations que sont le train-cubes et le schéma-train ont été introduits au cours du module 0 de la façon suivante :

A partir d'un schéma-train, les élèves construisent un train-cubes (cf. Photogramme 17) identique

Photogramme 17 : construction d'un train-cubes lors du module 0 (cf. Annexe 14)

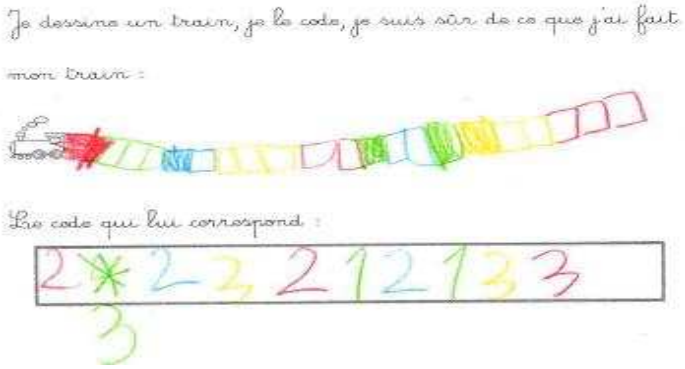
Pour valider cette construction, chaque sous-collection composant le train-cubes est mise en relation avec les sous-collections représentées sur le schéma-train. Pour cela, un schéma-pont est tracé réunissant l'ensemble des unités composant chaque sous-collection et mis en correspondance avec le nombre qu'il désigne (cf. Photogramme 18).



Photogramme 18 : schéma-train agrémenté de schémas-ponts et du nombre désignant le cardinal de chaque collection (cf. Annexe 14)

Il y a mise en correspondance entre une représentation matérielle/analogique (le train-cubes) et une représentation analogique-graphique/symbolique (le schéma-train). Les ressemblances entre le train-cubes et le schéma-train sont saillantes du fait notamment de la similitude dans l'organisation des collections dans l'espace et par leur forme. Le schéma-train donne à voir, en complément, les nombres désignant le cardinal de chaque sous-collection.

Nous donnons ci-dessous un exemple de production d'un élève dans le Journal du Nombre dans le module 0 réalisé en septembre 2013 dans la classe de P



Photogramme 19 : extrait d'un Journal du Nombre

Cet élève a dessiné un schéma-train puis a codé chaque collection par un nombre et une couleur.

Mais comment ces systèmes de représentation sont réinvestis dans le module 1 ? Comment la professeure organise-t-elle le jeu pour que les élèves puissent réexpériencier ces représentations dans une nouvelle situation, celle du jeu des annonces ?

Nous avons tout d'abord élaboré un premier découpage de cette séance en jeux d'apprentissage[82] que nous avons mis en lien avec le savoir en jeu (cf. Tableau 40). Cette première grille de lecture nous permet de mettre en évidence le contexte des interactions entre le professeur et les élèves et de donner à voir et à comprendre l'avancée des savoirs dans cette séance[83].

Jeux d'apprentissage	Capacités
JA2 : Faire comparer une décomposition additive sous forme de deux sous-collections produite avec deux mains et un nombre usuel issu d'un lancer de dé à six faces.	- Réinvestissement de la capacité de construction orale de la notion d'égalité - Réinvestissement de la capacité de désigner oralement un nombre (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (≤ 5).
JA4 : Faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collections par un train-cube et un schéma-train.	- Réinvestissement de la capacité de désignation orale d'un nombre sous forme de deux sous-collections produites avec deux mains (≤ 5). - Réinvestissement de la capacité de traduction d'une décomposition additive sous forme de deux sous-collections produite avec deux mains par un train-cubes et un schéma-

[82] Nous mettrons de côté le premier JA1 et JA3 respectivement « faire se remémorer comment jouer au jeu des annonces » et « faire recenser les découvertes issues de la phase de jeu précédente » car ils ne renvoient pas directement à notre questionnement de départ.

[83] Dans la colonne « Capacités », nous parlons de "réinvestissement" car nous faisons l'hypothèse, à partir de l'analyse des textes curriculaires, que ces capacités ont été abordées lors des séances précédentes.

	train. - Réinvestissement de la capacité de représentation par un signe graphique (le pont) des sous-collections présentes sur le schéma-train et par le nombre désignant le cardinal de chaque collection.

Tableau 40: découpage en jeux d'apprentissage en lien avec les capacités émergentes

Notre analyse se centre sur le quatrième jeu d'apprentissage « Faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collections par un train-cubes et un schéma-train » dont nous analyserons trois épisodes successifs.

1.2. Traduction d'une décomposition de deux sous-collections

Nous étudierons ici le JA4 de la séance 1 « Faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collections par un train-cubes et un schéma-train ». Cette modélisation en termes de jeu d'apprentissage nous amène à nous poser la question suivante : comment le professeur et les élèves s'y prennent-ils pour gagner au jeu c'est-à-dire pour mettre en correspondance une annonce produite à deux mains avec le train-cubes et le schéma-train, systèmes de représentation élaborés dans le module 0 ?

Ce JA se déroule collectivement autour de la découverte réalisée par deux élèves lors du jeu oral des annonces (phase 2 de la séance) sur les différentes manières de désigner le nombre cinq avec les deux mains.

Nous nous centrerons ici sur un extrait de ce JA au cours duquel le premier élève, Jules, est appelé au tableau pour montrer au groupe classe quelle décomposition il a adopté pour représenter le nombre cinq sur ces deux mains. Jules lève deux doigts sur la main droite et trois doigts sur la main gauche comme nous le montre le photogramme ci-contre (cf. Photogramme 20).

Photogramme 20: Jules représente le nombre 5 sur ses deux mains

Comme nous l'avons précisé dans la partie « Méthodologie » (cf. Chapitre 4), nous avons justifié le choix de cet extrait en montrant qu'il donne à voir comment se construit un premier jeu représentationnel entre une annonce produite à deux mains (représentation corporelle) et

deux autres systèmes de représentation, le schéma-train et le train-cubes mobilisés lors du module 0. Nous avons découpé cet extrait en trois épisodes distincts (cf. tableau 41).

Episode	tdp	Extrait 1 : traduction d'une annonce à deux mains
Episode 1	11-17	Traduction de la main droite (trois doigts) d'une annonce produite à deux mains par un train-cubes et un schéma-train.
Episode 2	17-20	Traduction de la main gauche (deux doigts) d'une annonce produite à deux mains (deux et trois doigts) par un train-cubes et un schéma-trains.
Episode 3	20-31	Représentation des schémas-ponts et du nombre désignant chaque sous-collection sur le schéma-train.

Tableau 41 : découpage du JA4 en trois épisodes significatifs

Nous étudierons successivement ces trois épisodes qui montrent comment dans l'action conjointe est traduite l'annonce à deux mains de Jules sous forme de train-cubes et de schéma-train.

1.2.1. Episode 1 : désignation des quantités (main droite)

Description de l'épisode 1

Jules montre sur ses deux mains le nombre « 5 », deux doigts sur la main gauche et trois doigts sur la main droite. PES1 prend la main droite de Jules sur laquelle trois doigts sont levés et lui demande de les représenter avec des « trains ».

La transcription ci-dessous donne à voir comment s'organisent les échanges autour de la représentation des trois doigts levés de l'annonce produite par Jules (« 2 et 3 ») sous forme de « train » (cf. Transcription 10). Nous rappelons que la professeure qui mène la séance est une professeure en formation

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:38:03.7)	11	PES1	Sur l'autre trois. Et donc, en tout, il y en a bien cinq, il a raison. Alors maintenant, Jules tu restes avec nous, j'aimerais bien que Jules tu essaies de, vous vous souvenez, on avait fait des trains. On avait réussi à faire des trains avec nos annonces. Si on essayait aussi de faire le train de ton annonce. D'accord ? Alors, tu nous remontres tes doigts, tu avais choisi [Jules produit une annonce avec trois doigts sur la main droite et deux doigts sur la main gauche] tout à l'heure, tu nous avais choisi trois sur celle-là et deux sur celle-là [Jules modifie son annonce, deux doigts sur la main gauche et trois doigts sur la main droite]. D'accord. Alors comment on pourrait représenter celle-là ? [PES1 prend la main droite de Jules]

(0:38:41.7)	12	El	Deux rouges ou deux jaunes, ou deux bleus.
(0:38:45.1)	13	PES1	On pourrait choisir une couleur, deux rouges, deux bleus, on peut choisir. Moi, ce que je vous propose, ce que je vous propose, c'est qu'on choisisse une règle, c'est qu'on choisisse une couleur pour la main droite, d'accord et cette couleur je vous propose que l'on choisisse le rouge parce que si vous regardez bien, alors voyez ici [PES1 montre une affiche en haut à gauche du tableau représentant la main droite]. Alors, ici, votre main droite, si vous regardez bien, il y a déjà des affiches qui ont été collées dans la classe et c'est écrit droite en rouge alors, on va garder la même règle pour dessiner nos trains. Alors Jules tu nous as dit que l'on peut prendre des cubes, ça des cubes ou des carrés rouges. Alors, tu avais choisi deux, trois sur cette main-là ? [PES1 prend la main droite de Jules] Alors, tu vas essayer de nous dessiner, dessiner ton, ton train avec, sur cette main-là avec des cubes. Alors, on a choisi le rouge. [PES1 tend à Jules une craie de couleur rouge]. Tu peux nous faire du coup ton, + tes wagons rouges. Tes trois wagons rouges.
(0:39:50.3)	14	P	Ferme tes cubes d'abord. [Jules dessine au tableau trois carrés juxtaposés]
(0:39:59.0)	15	PES1	Alors, je vous montre la main droite de Jules qui nous avait marqué trois wagons, qui nous avait marqué trois doigts que l'on va représenter avec nos trois wagons [PES1 emboîte trois cubes rouges] un, deux et trois. D'accord ? Est-ce que vous êtes d'accord ? [PES1 positionne le train-cube en dessous du schéma-train]

Transcription 10 : Mise en correspondance entre les systèmes de représentation, train-cubes et schéma-train (Annexe 18)

PES1 propose tout d'abord de représenter cette annonce sous forme de « train » au tdp 11 « vous vous souvenez, on avait fait des trains. On avait réussi à faire des trains avec nos annonces. Si on essayait de faire des trains avec ton annonce ». Un élève propose au tdp 12 « deux rouges ou deux jaunes, ou deux bleus ». PES1 reprend la proposition de cet élève au tdp 13 « on pourrait choisir une couleur, deux rouges, deux bleus, on peut choisir ». Elle présente ensuite un code couleur pour représenter les cubes (main droite en rouge et main gauche en bleu) en lien avec les affiches présentes des deux côtés du tableau qui désignent le côté gauche et droit. La professeure précise toujours au tdp 13 « on va garder la même règle pour dessiner nos trains ». Elle reprend « Alors, tu vas essayer de nous dessiner, dessiner ton, ton train avec, sur cette main-là avec des cubes. Alors, on a choisi le rouge. Tu peux nous faire du coup ton, + tes wagons rouges. Tes trois wagons rouges ». PES1 tend une craie rouge à Jules et dit « tu peux nous faire du coup ton, + tes wagons rouges. Tes trois wagons rouges ».

Jules dessine au tableau trois carrés rouges représentant les trois doigts de sa main gauche. PES1 fait immédiatement correspondre ce schéma-train avec un train-cubes qu'elle construit en emboîtant trois cubes rouges et en faisant oralement le lien avec la main droite de Jules au tdp 15 « Alors, je vous montre la main droite de Jules qui avait marqué trois wagons, qui

nous avait marqué trois doigts que l'on va représenter avec nous trois wagons [PES1 emboîte les trois cubes rouges] ».

Eléments d'analyse de l'épisode 1

Lors du module 0, les élèves ont construit une capacité de traduction d'un schéma-train par un train-cubes. Dans le jeu des annonces oral, ces deux systèmes de représentation sont réexpérienciés pour traduire une annonce produite à deux mains.

En effet, la professeure s'appuie dès le début de cet épisode sur les connaissances antérieures des élèves au tdp 11 en énonçant « *vous vous souvenez, on avait fait des trains (...) des trains* avec nos annonces ». Cependant, le mot « train » reste vague, imprécis puisqu'il peut désigner soit le train-cubes, soit le schéma-train.

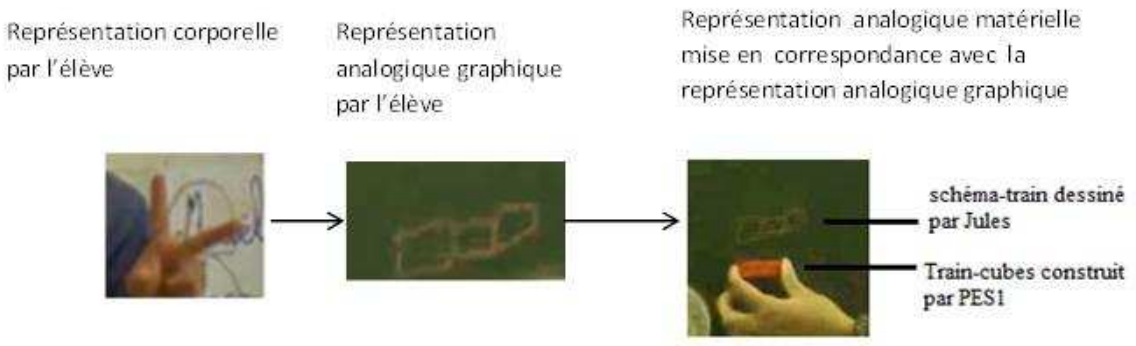
Au tdp 12, un élève suggère de représenter la main droite de Jules par « deux rouges ou deux jaunes, ou deux bleus ». Cet élève propose de représenter la main droite de Jules sous forme de « train » (sans que l'on sache s'il s'agit d'un train-cubes ou d'un schéma-train) en énonçant un nombre d'unités erroné « 2 ». Ce mot « train » semble donc faire partie du vocabulaire de la classe, de la mémoire du collectif. PES1 reprend alors à son compte cette valeur numérique au tdp 13 « deux rouges, deux bleus » sans mettre en avant le fait que cet élève a fait une erreur dans le nombre de doigts à représenter. Cette imprécision de dénomination des éléments du milieu par PES1 se poursuit au tdp 13 lorsqu'elle parle de « dessiner nos trains *(...) tu nous as dit que l'on peut prendre des cubes, ça des cubes ou des carrés rouges (...) tu* vas essayer de nous dessiner ton train avec, sur cette main-là avec des cubes ». Tout en prononçant cette dernière phrase, PES1 tend une craie rouge à Jules en continuant « tu peux nous faire du coup, tes trois wagons rouges, tes trois wagons rouges ».

La position topogénétique de PES1 est ici très haute par rapport au savoir en jeu, c'est-à-dire la représentation d'une sous-collection représentée par trois doigts levés sur un schéma-train. Elle donne, en effet, directement le nombre d'unités à dessiner (trois wagons) ainsi que la couleur à utiliser en tendant une craie rouge et en signifiant oralement la couleur des trois wagons rouges. Cependant, la professeure reste réticente quant au tracé de ce schéma-train en laissant Jules agir en première main.

Par la suite, PES1 met, elle-même, en relation les éléments du milieu, le schéma-train et la main droite de Jules, sans laisser les élèves investiguer les relations entre ceux-ci. Le savoir, la traduction d'une quantité par une représentation analogique, le schéma-train, est explicitement formulé par la professeure.

Puis, PES1 construit elle-même le train-cubes en emboîtant trois cubes rouges et en le mettant en relation avec le schéma-train.

Ainsi, par son expression, PES1 propose aux élèves de traduire la sous-collection « 3 » présente sur la main droite de Jules par un schéma-train et un train-cubes. Ce jeu représentationnel est donc initié par la professeure. Il met en correspondance le représenté, les trois doigts, avec son représentant, les trois unités du schéma-train. Puis ce dernier devient le représenté, qui est lui-même traduit par le train-cubes. Les vignettes ci-dessous (cf. Photogramme 21) donnent à voir ce jeu représentationnel.



Photogramme 21 : chronologie des mises en correspondance

A la fin de cet épisode, PES1 propose une micro-institutionnalisation de ce jeu au tdp 15 « Alors, je vous montre la main droite de Jules qui nous avait marqué trois wagons, qui nous avait marqué trois doigts que l'on va représenter avec nos trois wagons ». Le vocabulaire utilisé pour désigner chaque élément des différents systèmes de représentation paraît équivoque. En effet, le mot « wagon » désigne de manière indifférente les cubes du train-cubes, les unités du schéma-train, voire les doigts. Ce constat complète celui observé précédemment à propos de la signification que PES1 attribue au mot « train ».

La composante transactionnelle du contrat didactique, c'est-à-dire les comportements du professeur pour orienter l'élève dans une direction d'action (Sensevy, 2011a) pourrait, dans ce cas précis, rendre confuse la signification des éléments du milieu pour les élèves.

1.2.2. Episode 2 : Désignation des quantités (main gauche)

Description de l'épisode 2

La séance se poursuit avec la représentation de la main gauche de Jules (deux doigts levés) sur le schéma-train et le train-cubes

L'extrait de transcription ci-dessous (cf. Transcription 11) donne à voir précisément comment PES1 propose une mise en correspondance, une traduction entre les différents systèmes de représentation pour la main droite de Jules.

(0:40:26.7)	17	PES1	Jules nous a fait un, deux trois wagons [PES1 montre les unités du schéma-cubes les uns après les autres]. Maintenant sur l'autre main, Jules qu'est-ce que tu nous proposes ?
(0:40:32.6)	18	Jules	Deux parce que gauche, c'est bleu
(0:40:37.3)	19	PES1	Sur son autre main, tu nous montres combien tu avais de doigts sur ton autre main pour que tout le monde le voie bien ? [Jules lève deux doigts sur sa main gauche]. Regardez, sur l'autre doigt, sur l'autre main, il avait deux doigts [PES1 prend la main gauche de Jules] et Jules nous dit ben moi, je vais choisir deux wagons bleus pour suivre la même, les mêmes couleurs que dans la classe, la gauche on a choisi le bleu. Alors, je vais chercher les deux wagons bleus comme ce que tu viens de nous dire Jules. Donc, tu nous as dit que tu choisissais le bleu. Donc, il avait deux doigts bleus, deux doigts sur son autre main, donc un wagon bleu [PES1 emboîte un cube bleu à la suite des trois cubes rouges]. Deux wagons bleus [PES1 emboîte un deuxième cube bleu à la suite des trois cubes rouges et du cube bleu et tend une craie de couleur bleue à Jules]. Je te laisse représenter [Jules trace au tableau un schéma-train de deux carrés au début du schéma-train de trois carrés rouges]. (…)

Transcription 11 : Mise en correspondance entre les systèmes de représentation : train-cubes et schéma-train (Annexe 18)

Au tdp 17, PES1 demande à Jules « maintenant *sur l'autre main, Jules qu'est*-ce que tu peux proposer ? » Jules suggère au tdp 18 « deux parce que gauche*, c'est bleu* ». Puis, au tdp 19, PES1 invite Jules à lever deux doigts sur sa main gauche. Elle prend alors en charge l'explicitation de la mise en relation des deux doigts levés de la main gauche de Jules et de la représentation sous forme de train-cubes « je vais chois*ir deux wagons bleus (...) alors je vais chercher les deux wagons bleus comme ce que tu viens de nous dire Jules (...) il avait deux* doigts bleus, sur son autre main, donc un wagon bleu [PES1 emboîte un cube bleu à la suite des trois cubes rouges]. Deux wagons bleus [PES1 emboîte un deuxième cube bleu à la suite des trois cubes rouges et du cube bleu et tend une craie de couleur bleue à Jules] ». Pour terminer, PES1 invite Jules à représenter ce train-cubes sous forme de schéma-train au tableau toujours au tdp 19 « je te laisse représenter ». Jules trace deux carrés bleus juxtaposés avant les trois unités de couleur rouge (représentant la main droite de Jules).

Eléments d'analyse de l'épisode 2

Au début de cet épisode, au tdp 17, PES1 invite Jules à proposer quelque chose pour la main gauche. Jules suggère deux bleus au tdp 18. PES1 semble s'appuyer sur ce qui a été réalisé

dans l'épisode précédent puisque les règles définitoires du jeu didactique restent ici implicites, « qu'est-ce que tu proposes ? » De même, la réponse de Jules apparaît comme incertaine puisqu'il donne la valeur numérique appropriée mais sans énoncer les objets ainsi désignés, deux cubes ou deux wagons (les unités du schéma-train). L'accent est mis ici sur la couleur de ces objets. L'ambiguïté du vocabulaire usité lors du premier épisode par PES1 semble conduire à une incertitude de l'élève quant au système de représentation qu'il doit utiliser. Le jeu représentationnel que PES1 veut mettre en place paraît vague pour les élèves dans la mesure où le représenté est ici bien identifié mais pas le représentant.

La suite de l'épisode montre que PES1 prend la main et renvoie vers le collectif la proposition de Jules « je vais choisir deux wagons bleus » et emboîte deux cubes bleus à la suite des trois premiers cubes rouges. Elle fait correspondre oralement cette construction avec les deux doigts de la main gauche de Jules au tdp 19 « *il y avait deux doigts bleus (...) deux wagons* bleus ».

PES1 reprend la valeur numérique (2) proposée par Jules mais met en correspondance l'énoncé deux wagons avec la construction du schéma-cubes. La confusion dans la dénomination exacte des systèmes de représentation par la professeure perdure tout au long de cet épisode.

Pour terminer, PES1 oriente l'action de Jules vers la représentation sous forme de schéma-train en lui proposant au tdp 19 « je te laisse le représenter ». Jules dessine alors deux carrés de couleur bleue sur le schéma-train.

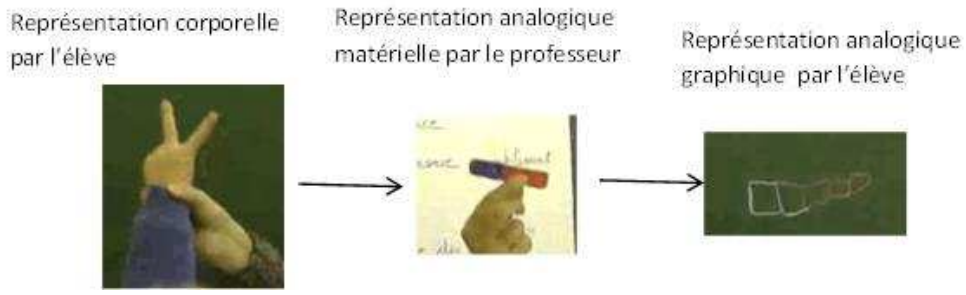
La constitution du milieu problème s'appuie sur des systèmes de représentation connus des élèves et dont ils ont déjà expériencié la mise en correspondance avec une annonce produite avec les mains (épisode 1). Cependant, les énoncés de PES1 nous montrent que le vocabulaire lié aux éléments du milieu ne semble pas être bien maîtrisé par la professeure débutante. Il y a confusion entre les objets dont chaque représentation est constituée (le train-cube est constitué de cubes emboîtés, le schéma-train de wagons).

La position topogénétique de PES1 est haute car elle construit elle-même le train-cubes. L'expression de PES1 est en effet importante vis-à-vis du milieu (la mise en correspondance des représentations) mais aussi incertaine vis-à-vis du contrat (les représentations). PES1 ne peut s'appuyer sur les connaissances partagées bien identifiées (le contrat), elle fait elle-même le travail de mise en relation dans le milieu. Cependant, il est à noter qu'elle laisse Jules représenter le schéma-train. Cet élève prend en charge la représentation de l'annonce sur le

schéma-train alors que la professeure s'occupe essentiellement de la construction du train-cubes. La professeure semble laisser l'élève faire l'expérience de l'usage du schéma-train.

L'analyse de la transcription montre que la professeure commente les mises en analogie entre le train-cubes et la main gauche de Jules, en orientant son discours vers l'ensemble des élèves de la classe alors que l'élève au tableau, quant à lui, reste sur le travail graphique. Puis, PES1 valide le schéma-ligne dessiné par Jules mais sans en référer à l'ensemble de la classe.

La micro-institutionnalisation des mises en correspondance des représentations n'est donc pas dirigée vers l'ensemble des élèves. Les vignettes ci-dessous (cf. Photogramme 22) nous donne à voir de manière chronologique les mises en analogie.



Photogramme 22 : chronologie des mises en correspondance entre les représentations.

La représentation corporelle (le représenté) est tout d'abord mise en relation avec une représentation analogique/matérielle (le représentant). Cette représentation analogique/matérielle (qui devient le représenté) est elle-même traduite par une représentation analogique/graphique (le représentant)[84].

Dans cet épisode, le point de départ est le jeu oral des annonces c'est-à-dire la représentation corporelle d'une décomposition additive avec deux mains (premier élément de ce schéma), donnée par l'élève. Puis il y a dissociation de cette décomposition en deux parties distinctes.

Pour la main droite, il y a tout d'abord traduction d'une représentation concrète (les doigts) par une première forme de modélisation sous forme de schéma-train (une représentation analogique/graphique) qui est mise en relation dans un second temps avec le train-cubes (représentation analogique matérielle) que PES1 prend en charge.

En revanche, pour la main gauche, nous observons une progressivité dans le passage entre le concret et l'abstrait avec une transition par deux représentations matérielles (les doigts et les cubes) pour aller progressivement vers le schéma-train.

[84] Il est intéressant de noter ici que la première représentation (la main gauche de Jules) ne correspond pas aux deux représentations suivantes qui représentent les deux sous-collections produites à deux mains.

1.2.3. Episode 3 : schéma-ponts et représentation symbolique des quantités

Après cette traduction par le schéma-train et le schéma-cubes d'une décomposition additive sous forme de deux sous-collections représentées sur deux mains, il y a centration du travail sur le schéma-train. L'objectif est ici de produire trois schémas-ponts représentant respectivement les deux sous-collections présentes sur le schéma-train et la réunion de celles-ci. L'écriture symbolique viendra désigner le cardinal de ces trois collections. Cette capacité a été précédemment travaillée lors du module 0 « capacité de représentation par un signe graphique (le schéma-pont) des sous-collections présentes sur le schéma-train et par le nombre désignant le cardinal de chaque collection ». Cependant, cette capacité migre de la situation train/tour (module 0) à celle du jeu des annonces (module 1).

Etudions maintenant comment s'organise la réexpérienciation de cette capacité dans cette situation du jeu des annonces à partir de la transcription suivante (cf. Transcription 12)

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:40:37.3)	19	PES1	(…) D'accord ? Et maintenant Jules, est-ce que tu pourrais nous faire, nous faire un pont sous tes wagons bleus et nous faire un pont et nous indiquer combien tu as de wagons bleus ? [Jules commence à tracer un pont que PES1 efface (cf. Photogramme 23, ci-dessous)]. Est-ce que tu te souviens quand on fait des ponts, quand on fait des ponts pour les syllabes ?
(0:41:53.6)	20	P	Quand on avait fait des ponts sous le grand train, tu te rappelles ? [Jules trace un pont] Non, Jules quand on avait fait, chercher le grand train pour savoir si on avait construit exactement le même train, on montrait tous les wagons d'une seule couleur, on les mettait ensemble et puis on écrivait, on faisait un pont. Tu te rappelles de ça ou pas ? [Jules opine de la tête]

Transcription 12 : appel à la mémoire didactique (Annexe 18)

PES1 au tdp 19 demande à Jules « est-ce que tu pourrais nous faire, nous faire un pont sous tes wagons bleus et nous faire un pont et nous indiquer combien tu as de wagons bleus ». Jules trace alors des ponts de manière inopportune au-dessous du schéma-train comme le montre le photogramme ci-dessous (Cf. photogramme 23).

Photogramme 23 : le schéma-train et les ponts

PES1 efface les schémas-ponts tracés par Jules et fait alors référence au tdp 19 à une activité de lecture « est-ce que tu te souviens quand on fait des ponts (...) pour les syllabes ». Puis, P (la professeure titulaire de la classe) prend la parole et tente de guider le travail de Jules au tdp 20 « on a fait des ponts sous le grand train, tu te rappelles ? ». Jules trace de nouveau un schéma-pont de manière incorrecte. P reprend toujours au tdp 20 « quand, on avait fait, chercher le grand train pour savoir si on avait construit exactement le même train, on *montrait tous les wagons d'une seule couleur, on les mettait ensemble et puis on écrivait, on* faisant un pont ».

PES1 fait donc référence à une activité de lecture tandis que P renvoie à une activité mathématique et plus spécifiquement au travail réalisé lors du module 0[85] .PES1 tente de laisser la main aux élèves mais n'a pas encore le recul suffisant par rapport à ce qui est enseigné pour le convoquer.

L'énoncé de P nous donne donc à penser que les schéma-ponts sont introduits pour la première fois dans cette séance depuis le module 0. P s'appuie donc sur une capacité construite lors du module 0 « désigner par un signe graphique (le pont) des sous-collections du schéma-train et par une écriture symbolique le cardinal de ces collections » et la transfère vers une nouvelle situation, le jeu des annonces. Nous avons donc ici un réinvestissement de l'expérience passée des élèves dans une situation nouvelle. La représentation d'un train-cubes par un schéma-train, dont chaque sous-collection est exprimée par un schéma-pont et par le nombre qu'il désigne, est transférée dans une situation nouvelle. Le schéma-train représente une annonce à deux mains. La continuité de l'expérience des élèves prend forme ici par la construction d'une traduction représentationnelle, une analogie représentationnelle. Un ensemble de sous-collections d'unités (les doigts, les cubes) est représenté par un même système de représentation, le schéma-train.

P fait alors appel à une nouvelle élève, Adèle, pour aider Jules à tracer les schémas-ponts correspondant aux deux sous-collections présentes sur le schéma-train comme nous le montre la transcription suivante (cf. Transcription 13).

[85] P, titulaire de la classe fait, ici, appel à la mémoire de l'élève en lui rappelant les conditions d'acquisition de la capacité de représentation des schémas-ponts sur un schéma-train au module 0 (Brousseau, Centeno, 1991). La mémoire didactique de PES1, quant à elle, est plus limitée (même si elle a assisté à la mise en œuvre du module 0). Elle fait donc appel à une situation qui lui est connue.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:42:21.2)	24	P	Est-ce que Adèle, est ce qu'Adèle saurait aller aider Jules ? Va aider Jules. Lui parce que Jules se retrouve dans une situation compliquée là.
(0:42:30.5)	25	Adèle	Bah, on commence de là et on se termine à la fin du bleu [Adèle place son index sur le premier carré bleu, trace un pont virtuel jusqu'au dernier carré bleu. Jules trace deux ponts, un en dessous du premier et du second carré]
(0:42:35.6)	26	P	Alors, est-ce que tu es d'accord avec ce qu'il a fait.
(0:42:38.7)	27	Adèle	Non
(0:42:40.5)	28	P	Qu'est-ce qu'il a fait là ?
(0:42:41.8)	29	Adèle	Il a fait deux ponts, il faut faire qu'un grand pont.
(0:42:44.5)	30	P	Oui parce qu'on prend les deux cubes bleus d'un coup.
(0:42:47.4)	31	PES1	J'efface et comme ça tu vas pouvoir le refaire [PES1 efface les deux ponts tracés par Jules]. Vas y. [Jules trace un grand pont incluant les deux carrés bleus du schéma-train]. Est-ce que tu es d'accord comme ça euh, Adèle ? et qu'est-ce qu'on pourrait marquer sous ce pont ?
(0:42:57.0)	32	Els	Deux
(0:42:58.5)	33	PES1	Combien nous avons de wagons ?
(0:42:59.2)	34	Els	Deux
(0:43:00.5)	35	PES1	Deux [Jules écrit le nombre deux en dessous du pont]
(0:43:05.2)	36	Adèle	Il est à l'envers.
(0:43:06.5)	37	PES1	Regarde Jules, ton deux est à l'envers. Je te l'efface, tu nous le refais dans le bon sens.
(0:43:10.8)	38	El	On dirait que c'était un s
(0:43:14.0)	39	PES1	[Jules réécrit le nombre 2] D'accord. Et maintenant si on faisait le pont des wagons rouges. [Jules trace le pont incluant les trois wagons rouges]. Très bien. Et combien tu en as Jules ?
(0:43:23.4)	40	Jules	Trois [Jules écrit le nombre 3 en dessous du pont]. Vous êtes d'accord ?
(0:43:27.1)	41	Els	Oui
(0:43:29.2)	42	PES1	Et maintenant si tu choisis une autre couleur [PES1 tend à Jules une craie de couleur verte] est ce que tu peux nous faire le pont qui représente tous les wagons de ton train au-dessus ? [Jules place sa craie à plusieurs centimètres du schéma-train] Alors, Adèle ?
(0:43:40.0)	43	Adèle	Non, on commence pas d'ici.
(0:43:41.2)	44	PES1	Où tu ? Tu montres à Jules où on commencerait.
(0:43:42.5)	45	Adèle	Là [Adèle montre avec son index la fin du schéma-train]
(0:43:44.0)	46	PES1	Oui, vas-y et jusqu'où Adèle ?
(0:43:46.4)	47	Adèle	Là [Adèle montre avec son index le début du schéma-train]
(0:43:47.8)	48	PES1	Jusque-là. Pour faire le pont de tous les wagons que tu as fait tout à l'heure. [Jules trace un carré au-dessous du schéma-train]. Attends, Adèle va t'aider, d'accord. Tu nous montres Adèle comment tu ferais le pont pour indiquer tous les wagons que tu as dans ton train. [Adèle trace avec son index un grand pont au-dessus du schéma-train]. Voilà et combien tu en as Jules, tu nous as dit tout à l'heure ? [Jules trace le pont au-dessus du schéma-train]
(0:44:06.0)	49	Jules	Cinq
(0:44:06.9)	50	PES1	Cinq. Alors, est ce que tu es assez grand Jules pour écrire cinq tout en haut ? Hop vas-y [PES1 apporte un marchepied à Jules qui écrit le nombre 5]

Transcription 13 : Echange autour de la production du schéma-train (Annexe 18)

Au tdp 24, P, la professeure titulaire de la classe, prend la main et demande à Adèle de venir aider Jules. Cette élève, au tdp 25 montre avec son index où commence et se termine le premier schéma-pont représentant la sous-collection de deux unités bleues et énonce « Bah, on commence de là et on se termine à la fin du bleu » comme nous le montre le photogramme suivant (cf. Photogramme 24)

Photogramme 24 : Adèle montre à Jules comment tracer les schémas-ponts

Ainsi, Adèle montre à Jules le tracé du pont que ce dernier va dans un second temps prendre lui-même en charge en traçant deux ponts sous chaque unité du schéma-train (cf. Photogramme 25)

Photogramme 25 : Jules trace deux schémas-ponts d'une unité chacun

P reprend alors la parole et questionne Adèle sur la validité des ponts tracés au tdp 28 « *qu'est-ce qu'il a fait là* ? ». Adèle répond au tdp 29 « Il a fait deux ponts, il fallait faire un grand pont ». P complète la réponse d'Adèle au tdp 30 « *oui, parce qu'on prend les deux cubes bleus d'un seul coup* ». Jules trace alors un grand pont sous les deux wagons bleus du schéma-train (Cf. Photogramme 26). Puis il écrit le nombre « 2 » désignant le cardinal de cette sous-collection sous la dictée des élèves de la classe. Enfin, il trace seul et sans erreur le schéma-pont de la seconde sous-collection (trois wagons rouges) et note le nombre « 3 » le désignant

Au tdp 42, PES1 demande à Jules « est-ce que tu peux nous faire le pont qui représente tous les wagons de ton train au-dessus ? ». Jules positionne sa craie très en dessus du schéma-train. PES1 tend alors sa main vers celle de Jules et se ravise. Elle demande ensuite à Adèle de lui venir en aide à Jules au tdp 44 et 46 « Alors, Adèle », « tu montres à Jules où on commencerait ? ». Adèle montre avec son index le schéma-pont réunissant les cinq unités. Jules trace ce schéma-pont et note le nombre « 5 » au-dessus de celui-ci.

Les cinq vignettes suivantes montrent comment dans l'action conjointe sont construits schémas-ponts (cf. Photogramme 26).

Photogramme 26 : construction des schémas-ponts sur le schéma-train.

Dans cet épisode, l'intervention de la professeure titulaire de la classe oriente l'activité des élèves au tableau vers un travail coopératif. P ne valide pas ou n'invalide pas la production de Jules mais renvoie la question de cette validation vers ses pairs « *qu'est-ce qu'il a fait là* ? » au tdp 28. P est réticente par rapport au savoir en jeu, la représentation des schémas-ponts tout en orientant les actions des élèves sur la production de Jules. Ainsi, elle s'appuie sur les connaissances déjà-là des élèves c'est-à-dire la capacité de représenter sur un schéma-train les schémas-ponts correspondant à chaque sous-collection. Néanmoins, elle reste réticente vis-à-vis du contrat (des connaissances déjà-là) et vis-à-vis du milieu (à connaître) en laissant Adèle mettre en relation les éléments du milieu. L'avancée du temps didactique est donc à l'initiative des élèves et de leurs échanges. Ils occupent une position topogénétique haute (notamment Adèle) en montrant comment tracer les schémas-ponts.

Lorsque PES1 reprend la main au tdp 31, elle organise les transactions de manière similaire à P en laissant Adèle montrer à Jules comment tracer le schéma-pont réunissant l'ensemble de la collection. Elle adopte une position topogénétique basse et s'interdit le dévoilement (réticence) de l'usage du schéma-pont. PES1 autorise dans cet épisode la prise en charge de la représentation des ponts sur le schéma-train par deux élèves en leur assignant un rôle précis. Adèle épaule Jules pour repérer sur le schéma-train les collections représentées et montrer comment tracer les schémas-ponts correspondant tandis que Jules les trace et note le nombre désignant le cardinal de la collection que chaque pont réunit.

Cet épisode montre néanmoins que la capacité de représenter des schémas-ponts sur un schéma-train reste encore en cours de construction chez certains élèves.

1.3. Synthèse des trois épisodes, séance 3

1.3.1. Continuité et systèmes de représentation

L'étude de ces trois épisodes montre comment sont réinvestis les systèmes de représentation que les élèves ont au préalable étudiés, le train-cubes et le schéma-train dans la situation train/tour (module 0). Ces représentations matérielles/analogique (le train-cubes) et analogique/graphique/symbolique (le schéma-train avec les schémas-ponts et les nombres désignant les cardinaux des collections représentées) vont, dans la situation des annonces, venir traduire une annonce à deux mains. Cette étude met en évidence la continuité qui existe entre le module 0 et le module 1 à travers la traduction représentationnelle. En effet, les systèmes de représentation du train-cubes et du schéma-train travaillés lors du module 0 sont réinvestis, réexpérienciés dans le module 1.

Le tableau ci-dessous montre (cf. Tableau 42), à partir d'exemples fictifs, les systèmes de représentation présents dans les deux situations.

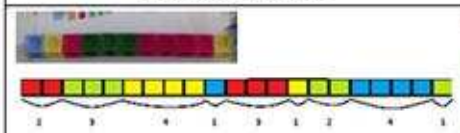
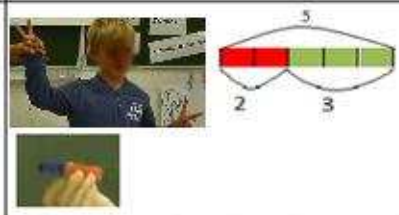
Situtation train/tour	Situation du jeu des annonces
	
Deux systèmes de représentation : train-cubes et schéma-train où chaque sous-collection est désignée par un schéma-pont.	Trois systèmes de représentation : un train-cubes, les doigts, le schéma-train où chaque sous-collection est désignée par un schéma-pont.

Tableau 42 : évolution des systèmes de représentation entre le module 0 et 1

Dans le module 0, la première capacité abordée est la désignation orale de la grandeur mesurée. Elle est ensuite enrichie par la désignation écrite de cette grandeur par une écriture symbolique (le nombre). Ce nombre est mis en correspondance avec la grandeur qu'il désigne via le schéma-pont qui réunit l'ensemble des éléments d'une collection d'objet (ici les unités composant le schéma-train).

Dans le module 1, la capacité travaillée est la désignation d'un même nombre sous forme de deux sous-collections. Cette représentation avec deux mains est traduite par une forme analogique/matérielle (le train-cubes) et analogique graphique/symbolique (le schéma-train) connue des élèves.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 43) donne à voir de manière synthétique les liens entre les différents systèmes de représentation travaillés dans le module 0 et 1.

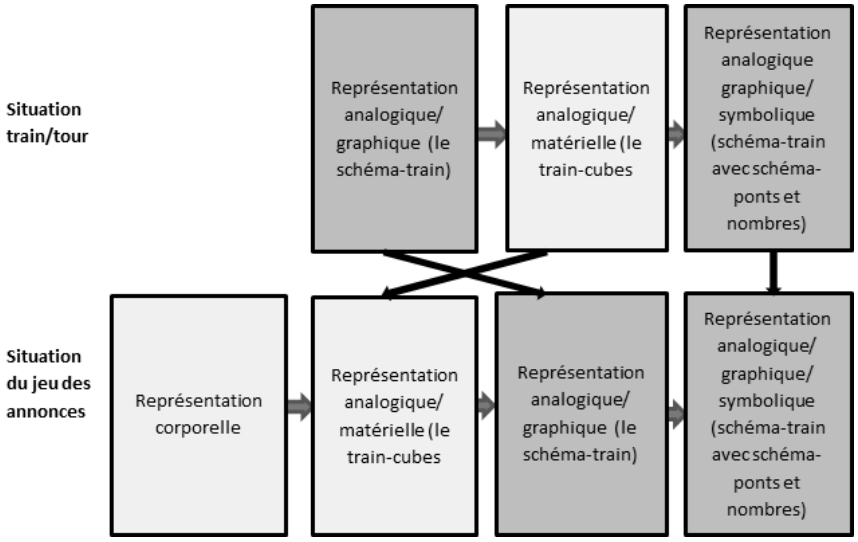


Tableau 43 : les systèmes de représentation dans la situation trains/tours (module 0) et la situation orale du jeu des annonces (module1)

Il existe donc bien ici une continuité dans l'usage des systèmes de représentation entre le module 0 et le module 1. Ils sont ainsi réexpérienciés dans une situation nouvelle. La situation train/tour et la situation du jeu des annonces ont donc deux référents communs, un référent matériel et un référent analogique graphique/symbolique.

Dans le module 1, deux systèmes de représentation dénotent ainsi une même réalité, la décomposition en deux sous-collections d'un nombre (représentée par une annonce produite sur deux mains). Le train-cubes propose une première représentation matérielle sous forme d'emboîtement de cubes. Il y a association d'une collection de doigts à une collection de cubes concaténés qui donne une première vision de la longueur d'un nombre et une première vision ordinale du nombre. Le second système de représentation, schéma-train, quant à lui, modélise de manière analogique/graphique/symbolique la décomposition d'un nombre en deux sous-collections. En effet, le schéma-train introduit l'écriture symbolique pour désigner la taille de chaque collection, le schéma-pont venant représenter graphiquement cette collection. Les systèmes de représentation concrets (matériels et analogiques) sont mis en

relation avec une première forme de représentation abstraite à travers l'écriture symbolique des nombres. Les symboles nombres sont donc liés à leur référent.

1.3.2. Savoir en jeu et stratégie professorale

L'extrait de la séance que nous venons d'analyser, rappelons-le, est mené par une professeure stagiaire qui n'a que peu de connaissances sur la progression elle-même et est en cours de formation. PES1 doit gérer une séance qui nécessite beaucoup de manipulations de différents ordres. D'après les commentaires de P sur la mise en œuvre de cette séance, il semble que PES1 a « beaucoup travaillé sur elle pour ne pas accélérer le temps en prenant tout en charge ». L'analyse du JA4 « faire traduire une décomposition additive sous forme de deux sous-collection par un train-cubes et un schéma-train », nous permet de produire une caractérisation plus fine en scindant ce premier jeu en deux JA distincts :

- JA(4)1 : Faire traduire une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train ;

- JA(4)2 : Faire coder le schéma-train par des schémas-ponts et par le nombre désignant chaque collection.

Le tableau ci-dessous propose une vision synoptique de la caractérisation des épisodes étudiés en termes de jeux d'apprentissage.

JA (4)1	JA (4)2
Faire traduire une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train	Faire coder le schéma-train par des schémas-ponts et par le nombre désignant chaque collection.
Expression de PES1 importante vis-à-vis du contrat et du milieu Réticence faible vis-à-vis du milieu et du contrat	Enquête dans le milieu en appui sur les connaissances antérieures par les élèves Expression vis à vis le contrat de PES1 Réticence vis-à-vis du milieu
Topogénèse P>>Els	Topogénèse P< Els
Mouvement chronogénétique + initié par PES1 +	Mouvement chronogénétique + initié les deux élèves
Mouvement mésogénétique : + par PES1	Mouvement mésogénétique : + initié par les deux élèves.

Tableau 44 : Découpage en jeux d'apprentissage

En effet, lors du JA(4)1 le milieu-problème est constitué de plusieurs éléments, l'annonce à deux mains, le train-cubes et le schéma-train. Les élèves doivent mettre en relation ces différents éléments pour construire une capacité de traduction représentationnelle. Pour cela, ils s'appuient sur une connaissance déjà-là qui a été construite lors du module 0, la traduction d'un train-cubes par un schéma-train. Dans ce jeu d'apprentissage, il semble qu'il y ait

partage des significations entre les élèves et le professeur, significations construites dans l'action conjointe antérieure puisque comme nous l'avons vu, le système capacitaire construit précédemment permet aux élèves d'aborder le problème posé, la traduction d'une annonce à deux mains par un schéma-cubes et un schéma-train.

Au cours de ces deux épisodes, l'expression de PES1 vis-à-vis du milieu est importante puisqu'elle construit elle-même le train-cubes représentant l'annonce à deux mains. Cependant, elle laisse l'élève, au tableau, prendre en charge la représentation sur le schéma-train. De plus, elle s'exprime sur la traduction entre le schéma-train et trains cubes en les mettant côte à côte mais sans les mettre en correspondance avec l'annonce produite à deux mains. Il est, de même, intéressant de noter que PES1 ne semble pas maîtriser le vocabulaire lié à l'usage des systèmes de représentation dans la classe en employant un terme pour un autre (par exemple, au tdp 13 « dessiner ton train avec cette main-là avec des cubes »). Les éléments matériels et analogiques du milieu ne sont pas mis en correspondance avec le langage utilisé par la professeure. La dynamique mésogénétique semble ici partagée entre l'élève et la professeure puisqu'ils construisent respectivement le schéma-train et le train-cubes. Cependant, l'expression de PES1 vis-à-vis du milieu à connaître reste importante dans la mesure où elle met elle-même en correspondance les divers systèmes de représentation sans que les élèves ne puissent en faire effectivement l'expérience. L'objet de savoir du JA (4)1 est bien ici la traduction d'une annonce à deux mains par les systèmes de représentation déjà-connus des élèves dans un jeu représentationnel. La figure (cf. Tableau 45) ci-dessous donne à voir de manière synthétique ce jeu représentationnel.

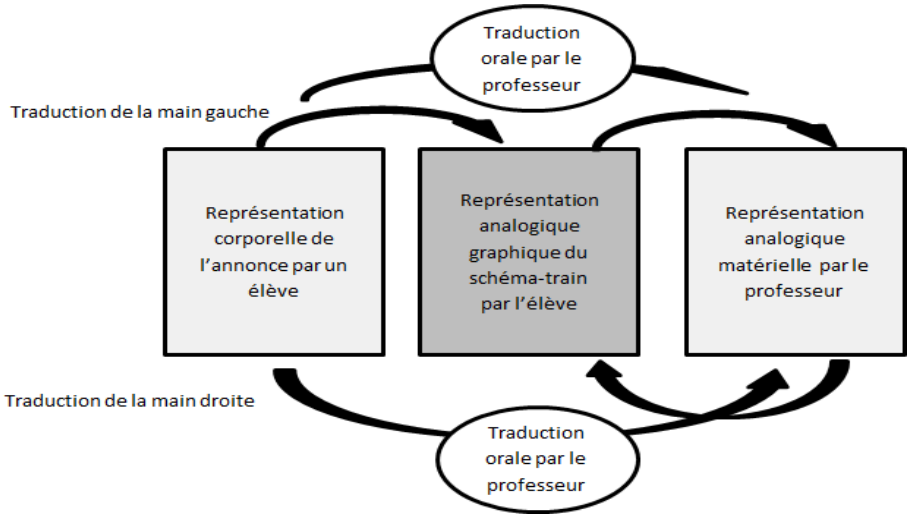


Tableau 45 : jeu représentationnel

La décomposition d'un nombre sur deux mains (le représenté) est successivement traduit pas un train-cubes et un schéma-train (les représentants).

Le second JA(4)2 que l'analyse effective a mis en évidence « Faire coder le schéma-train par des schémas-ponts et par le nombre désignant chaque collection » s'appuie lui aussi sur des connaissances déjà-là des élèves (capacité de coder un schéma-train par des schémas-ponts et un nombre). Les élèves usent de leur expérience passée pour aborder le milieu-problème en codant le schéma-train représentant une annonce à deux mains par le signe graphique des « ponts » et par un nombre. Le contrat didactique agit ici comme un arrière-plan qui permet d'assimiler le milieu. Il semble cependant que pour Jules, les saillances du schéma-train et les orientations fournies par le professeur dans le milieu ne font pas sens (comme le propos de P réactivant la mémoire didactique relative au « grand train », au tdp 20). Cette capacité de codage semble en cours de construction chez cet élève. Pour pallier cette difficulté, le professeur fait appel à un second élève qui oriente le travail de Jules dans le milieu. Il semble donc ici qu'il y ait partage des responsabilités entre pairs avec une position topogénétique basse du professeur face à la construction de cette capacité de représentation des ponts sur le schéma-train. Les deux élèves font avancer conjointement le temps didactique.

Le jeu représentationnel instauré dans ces deux épisodes par la professeure se compose de deux types de représenteur, les élèves et la professeure. Les premiers donnent à voir l'annonce à deux mains (le représenté) qu'ils mettent en relation avec le schéma-train (le représentant). La professeure met, quant à elle, en relation la représentation corporelle (le représentant) avec le train cubes (le représenté). La mise en traduction des trois types de représentation présents dans ces deux épisodes amène les élèves à construire un style de pensée particulier, à développer un « voir comme », c'est-à-dire voir une représentation corporelle comme un schéma-cubes et comme un schéma-train. Cela implique que les élèves se représentent les systèmes de représentation comme pouvant être mis en correspondance les uns avec les autres[86]. Il y a donc ici la construction d'une capacité de traduction entre différentes représentations concrètes/matérielles (les mains et le trains-cubes) avec une représentation analogique/graphique/symbolique (le schéma-train et les nombres désignant les sous-collections) dans un processus de modélisation progressif.

[86] Glock (2003) reprend le propos de Wittgenstein issu de Recherches philosophiques (1998) qui relie l'imagination à la perception de l'aspect « voir X comme Y implique souvent qu'on se représente X comme Y » (Glock, 2003, p. 305).

Ce voir comme se développe ici au sein d'un jeu de langage et forme de vie[87] particulière (jeu représentationnel mettant en relation les systèmes de représentation entre eux)

Cette traduction d'une annonce à deux mains par le train-cubes et un schéma-train semble être, dans les épisodes étudiés, travaillée pour elle-même, en tant que fin. En effet, lors de cette phase de mise en commun, PES1 ne revient pas à proprement parler sur l'étude de la comparaison entre cette annonce et le lancer de dé à six faces.

Nous étudierons, dans la section suivante, comment ces traductions entre représentations vont permettre de travailler les problèmes de comparaison à travers l'étude de nouveaux épisodes.

2. Systèmes de représentation et comparaison orale

Nous nous centrerons dans cette troisième section sur la séance 4 du module 1. Cette séance, comme la précédente, est menée par une deuxième professeure stagiaire que nous nommerons PES2 et filmée par P, professeure titulaire de la classe. Elle se déroule le lendemain de la séance 3 que nous venons d'analyser, le 20 septembre 2013.

Dans l'étude de la séance 3 du module 1 (section 2 de ce chapitre), nous avons mis en évidence comment est construite, dans l'action conjointe, la capacité de traduction d'une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train. Ce contrat de traduction, dans un jeu représentationnel, amène les élèves à développer un rapport particulier à la référence puisque différentes représentations dénotent une même réalité, une décomposition de deux sous-collections.

Dans cette seconde section nous étudierons la suite de la mise en œuvre de ce module. En effet, nous pouvons nous interroger sur comment, dans l'action conjointe, ce premier jeu de traduction évolue au sein de la situation initiale du jeu des annonces ? Quel rôle joue les systèmes de représentation dans la construction d'une continuité de l'expérience des élèves ?

Dans un premier paragraphe, nous présenterons la séance 4 du module 1. Puis, nous étudierons un extrait de cette séance à travers trois épisodes que nous considérons comme clés. Cet extrait montre comment ce contrat de traduction est réexpériencié par les élèves et

[87] « L'expression jeu de langage est censée souligner le fait que « parler un langage fait partie d'une activité ou d'une forme de vie » (Glock, 2003, p. 250, citant Wittgenstein). Glock reprend, de même, une seconde citation de Wittgenstein « il est caractéristique de notre langage que le fondement sur lequel il repose consiste en des formes de vies stables, une activité régulière » (Glock, 2003, p. 251, citant Wittgenstein).

comment il évolue dans une situation de comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé à six faces. Dans un troisième paragraphe, nous aborderons un second extrait de cette même séance qui voit l'introduction d'un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne. Nous conclurons cette troisième section par une synthèse de l'analyse de ces deux extraits.

2.1. Présentation de la séance 4 du module 1

Le tableau ci-dessous donne à voir les différentes phases de cette séance 4 du module 1, les modalités et supports utilisés. Il présente une première modélisation de la pratique effective sous forme de jeux d'apprentissage. Pour réaliser ce premier découpage, nous nous sommes appuyés sur le synopsis de cette séance (cf. Annexe 19).

Phases	Modalité, support	Jeu d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Retour sur les règles du jeu des annonces	Collectif	JA1 : Faire se remémorer comment jouer au jeu des annonces		
Jeu des annonces : égalité entre une annonce produite sur deux mains et un dé à six faces.	Collectif	JA2 : Faire produire à l'oral une décomposition de deux sous-collections à deux mains et la comparer au résultat d'un lancer d'un dé à six faces.		
Vérification du résultat de la comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé par l'usage du train-cubes et du schéma-train	Collectif à partir d'une annonce produite par un élève avec deux mains	JA3 : Faire comparer une décomposition de deux sous-collections et le résultat d'un lancer de dé à six faces par un trains-cubes, un schéma-train/ligne	Introduction du schéma-train/ligne	Deux mains, train-cubes, schéma-train avec les schémas-ponts et les nombres cardinaux
Jeu du lancer : égalité entre un dé à six faces et une annonce produite sur deux mains	Individuel	JA4 : Faire produire à l'oral une décomposition de deux sous-collections à deux mains au résultat d'un lancer de dé à six faces.		
Vérification du résultat de la comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé par l'usage du train-cubes et du schéma-train	Collectif à partir d'une annonce produite par un élève avec deux mains	JA5 : Faire comparer une décomposition de deux sous-collections à deux mains par un train-cubes et schéma-train/ligne		Deux mains ; schéma-train/ligne

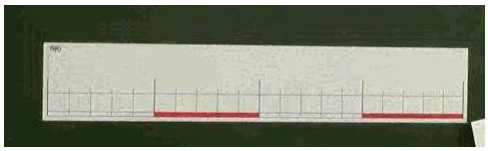
Tableau 46 : vision mésoscopique de la séance 4 du module 1

Lors de la première phase, PES2, professeure débutante, rappelle les règles du jeu des annonces aux élèves : la professeure est l'arbitre, les élèves secouent les doigts, proposent une

annonce sur leurs deux mains et la montrent. PES2 lance le dé. Si les élèves pensent que leur annonce est gagnante alors ils gardent les mains levées.

Dans la deuxième phase, les élèves produisent individuellement une annonce à deux mains et la compare avec un lancer de dé à six faces effectué par la professeure.

A l'issue de ce jeu, la professeure recense les annonces gagnantes (c'est-à-dire égales au lancer du dé). Elle propose alors collectivement de vérifier le résultat des comparaisons effectuées entre une annonce à deux mains et le résultat du dé en s'appuyant sur les systèmes de représentation, le train-cubes et le schéma-train (phase 3). Trois parties sont jouées successivement avec, à chaque fois, une mise en commun organisée par la professeure autour des productions d'élèves. Au cours de la dernière mise en commun, PES2 introduit le schéma-train/ligne (cf. Photogramme 27).



Photogramme 27: le schéma-train-ligne

Un nouveau jeu, le jeu du lancer, est introduit lors de la quatrième phase. La professeure lance un dé à six faces et les élèves produisent une annonce sur leurs deux mains égale au résultat de ce lancer.

Lors de la dernière phase (phase 5) de cette séance, PES2 propose aux élèves, en collectif de vérifier sur deux schémas-lignes le résultat des comparaisons effectuées lors de la phase 4. Deux parties sont jouées successivement.

Nous étudierons deux extraits issus de cette séance se déroulant lors de la troisième phase, au cours de la mise en commun.

Nous avons regroupé dans la phase 2, les trois parties du jeu des annonces réalisées par les élèves. Dans la phase 3, nous avons, de même regroupé les mises en commun au cours desquelles PES2 choisit une annonce considérée comme gagnante par les élèves et demande de vérifier le gain par l'usage des systèmes de représentation. Pour plus de lisibilité, nous avons extrait du synopsis de la séance (Annexe 19) le déroulement exact de ces deux phases avec une alternance de jeu individuel et de mise en commun (cf. Tableau 47).

Déroulement du jeu des annonces avec les phases de jeu individuel et de mise en commun			
Jeu des annonces 00'39''	(0:02:10.6)	Individuel	premier jeu: Les élèves produisent une annonce sur leurs deux mains et le professeur lance le dé. lancer de 4
Traduction d'une annonce par des systèmes de représentation 09'29''	(0:02:59.3)	Collectif : mise en commun	PES2 demande à Jules (4 et 0) et Maxime (2 et 2) de venir au tableau. Ont-ils gagné? - Représentation de l'annonce à l'aide du train-cube par Maxime (2 cubes bleus pour la main gauche et 2 cubes rouges pour la main droite). - PES2 représente le train-cubes de Maxime sous forme de schéma-train. - Représentation du lancer par un train-cube par Louis - Comparaison du train-cube du lancer et de l'annonce. - PES2 représente le lancer sous forme de schéma-train pour comparer avec le schéma-train de l'annonce. - Maxime trace les ponts du schéma-train de l'annonce et note le cardinal de chaque collection. - Louis trace le pont représentant le lancer sur le schéma-train du lancer et écrit le cardinal de la collection.
	(0:09:33.6)		Annonce de Jules (4 et 0) - Verbalisation de l'annonce par Jules "4 plus 0" - Construction du train-cube de l'annonce et comparaison avec le train-cube du lancer. Pourquoi il n'y a pas de rouge dans le train-cube? représentation du zéro.
	(0:11:47.7)		Comparaison par PES2 des deux trains-cubes des annonces : désignation d'un même nombre par deux trains-cubes différents.
Jeu des annonces 01'00	(0:12:30.7)	Individuel	Deuxième partie. Production d'une annonce avec les mains par les élèves et jeter de dé par le professeur (6) Les élèves dont les annonces sont gagnantes restent avec mains en l'air.
Traduction d'une annonce par des systèmes de représentation 7'26''	(0:13:30.3)	Collectif : mise en commun	Chloé (5 et 1) et Julie (3 et 3) - Agathe construit le train-cube du lancer, Chloé et Julie celui du train-cube de leur annonce - Vérification par le collectif des trains-cubes - Chloé et Julie représentent leur annonce sur un schéma-train et tracent les ponts. - PES2 superpose le train-cube de l'annonce de Chloé et du lancer et demande au collectif s'ils sont de la même taille. - PES2 superpose les deux trains-cubes des annonces : « 6 » et « 5 et 1 » sont-ils pareils? - Correction des erreurs sur le grand pont des deux schémas-trains. - Synthèse par PES2 désignation d'un même nombre par différentes décompositions et systèmes de représentation.
Jeu des annonces 01'06''	(0:20:56.8)	Individuel	Troisième partie : Production d'une annonce avec les mains par les élèves et lancer de dé par le professeur (1). Les élèves dont les annonces sont gagnantes restent avec mains en l'air.
Traduction d'une annonce par des systèmes de représentation 05'12''	(0:22:02.8)	Collectif : Mise en commun	- Zélie vient au tableau - PES2 affiche au tableau le schéma-train/ligne - Zélie construit le train-cubes du dé - Comparaison des deux trains-cubes - Représentation par une élève de l'annonce sur le schéma-train/ligne avec les ponts et le cardinal de la collection

Tableau 47 : synopsis de la phase 2 et 3 de la séance 4 du module 1

Le premier extrait (extrait 2) sélectionné de cette séance se déroule au cours de la première mise en commun autour de l'annonce de Maxime « 2 et 2 ».

Le second extrait (Extrait 3) sélectionné se passe lors de la dernière mise en commun autour de l'annonce de Zélie « 0 et 1 ».

Comme nous l'avons précisé dans notre chapitre « Méthodologique » (chapitre 4), le choix de ces deux extraits se justifie par le fait qu'ils donnent à voir comment les systèmes de représentation et leur traduction peuvent être réinvestis dans une situation de comparaison. L'extrait 3 introduit, de plus, un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne et travaille spécifiquement sur le rôle et la place du zéro et les traductions entre systèmes de représentation. L'étude de ces deux extraits vient compléter celle de l'extrait 1 qui donne à voir la construction d'une traduction entre une représentation corporelle et deux autres systèmes de représentation mobilisés au cours du module 0 (schéma-train et train-cubes).

Nous proposons ici un premier tableau (cf. Tableau 48) reprenant les différents épisodes analysés en fonction des extraits sélectionnés.

Episode	Extrait 2 : Comparaison et systèmes de représentation
Episode 4	Traduction d'une annonce à deux mains « 2 et 2 » par un train-cube et un schéma-train.
Episode 5	Traduction d'un résultat de lancer de dé à six faces (« 4 ») par un train-cube et un schéma-train. Comparaison d'une annonce à deux mains « 2 et 2 » et d'un lancer de dé « 4 » par les systèmes de représentation, les trains-cubes et les schémas-trains.
Episode 6	Désignation par des schémas-ponts et les nombres désignant les sous-collections représentées sur le schéma-train de l'annonce « 2 et 2 » et du lancer « 4 ».
	Extrait 3 : Introduction du schéma-train/ligne
Episode 7	Affichage par PES2 du schéma-train/ligne.
Episode 8	Construction du train-cubes de l'annonce et du lancer. Comparaison des deux trains-cubes. Mise en analogie entre l'annonce à deux mains et le train-cubes de l'annonce.
Episode 9	Représentation de l'annonce sur le schéma-train/ligne. Représentation des schémas-ponts de l'annonce sur le schéma-train/ligne.

Tableau 48 : Episodes étudiés en fonction de l'extrait sélectionné

Les deux paragraphes suivants reprennent chaque extrait mentionné ci-dessus.

2.2. Comparaison et traduction

Le premier extrait (extrait 2) montre comment la traduction des différents systèmes de représentation entre eux est réinvestie pour vérifier la comparaison d'une annonce à deux mains et un lancer de dés à six faces. Après avoir travaillé lors de la séance précédente sur la traduction entre une annonce à deux mains, un train-cubes et un schéma-train, nous nous interrogeons sur l'usage de ces traductions dans les situations de comparaison. Comment dans l'action conjointe, ces systèmes de représentation viennent modéliser une situation de comparaison et peuvent justifier le résultat trouvé.

L'extrait 2 se déroule entre les troisième et neuvième minutes de la séance 4 du module 1. Chaque élève a produit une annonce à deux mains et l'a comparée avec un lancer de dé réalisé par la professeure. PES2 demande alors à deux élèves de présenter leur annonce gagnante au collectif. Jules et Maxime montrent respectivement « 4 et 0 » (quatre doigts sur la main gauche et zéro sur la main droite) et « 2 et 2 » (deux doigts sur la main gauche et deux sur la main droite). La professeure demande alors au collectif si ces deux élèves ont effectivement gagné, si leur annonce est égale au lancer de dé « 4 ».

Nous nous centrerons ici sur l'annonce de Maxime « 2 et 2 ».

Nous découperons cet extrait en trois épisodes (cf. Tableau 48) que nous analyserons successivement.

2.2.1. Représentation corporelle et représentation analogique (épisode 4)

Description de l'épisode 4

Maxime montre au collectif l'annonce qu'il a produit sur ses deux mains « 2 et 2 », annonce qu'il considère comme égale au lancer de dé de « 4 » (cf. Photogramme 28).

Annonce à deux mains

Photogramme 28 : annonce à deux mains de Maxine "2 et 2".

La transcription (cf. Transcription 14) ci-dessous donne à voir comment dans les transactions, Maxime fait correspondre son annonce avec un train-cubes et un schéma-train.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:03:49.6)	14	PES2	Alors, je vais demander à Maxime [PES2 pose sur la table du premier rang deux boîtes contenant respectivement des cubes emboîtables rouges et bleus] de venir représenter ton annonce avec les cubes. Alors, tu te rappelles, hop, on se met face au tableau [PES2 positionne Maxime face au tableau]. Regarde, la main gauche, ça va être des cubes de la couleur bleue [PES2 lève la main gauche de Maxime et montre avec son index l'affiche en haut à gauche du tableau] et la main rouge, la main droite [PES2 prend le bras droit de Maxime puis montre l'affiche en haut à droite du tableau] les cubes de la couleur rouge. Donc, comment tu vas faire ton train avec les cubes [PES2 retourne Maxime pour qu'il se place face au groupe classe]. Comment tu vas représenter ton annonce ? [Maxime prend des cubes bleus dans la boîte]. Alors, tu nous expliques ce que tu fais ?
(0:04:20.3)	15	Maxime	J'vais mettre deux ici [Maxime prend deux cubes bleus].
(0:04:22.9)	16	PES2	Alors, deux cubes bleus pour la main gauche [Maxime prend deux cubes rouges dans la boîte et les assemble avec les deux cubes bleus].
(0:04:26.6)	17	Maxime	Et après, je vais mettre, après rouge. De l'autre, de l'autre côté.
(0:04:35.7)	18	PES2	Il prend les deux cubes rouges pour la main droite et il les met en même temps [PES2 montre le train-cube construit par Maxime]. D'accord. Alors, on va dessiner ce train au tableau. [PES2 affiche au tableau une feuille blanche]. Alors, tu le tiens [PES2 donne à

			Maxime le train-cube qu'il positionne en bas de la feuille au tableau] et moi je regarde dessiner, hop on va le mettre dans l'autre sens parce que [PES2 prend le train-cube et le retourne] la gauche et la droite, c'est dans l'autre sens et je dessine le train de Maxime. Alors il a mis deux carrés bleus parce qu'il avait deux doigts levés dans la main gauche [PES2 trace deux carrés bleus puis deux carrés rouges sur la feuille au tableau] et deux carrés rouges, oh là, là il est pas très beau mon rouge, dans la main droite. (…)

Transcription 14 : traduction de l'annonce de Maxime par un train-cubes et un schéma-train (Annexe 20)

Au tdp 14, PES2 demande à Maxime de venir représenter son annonce « 2 et 2 » avec des cubes. Pour cela, elle place devant lui deux boîtes contenant respectivement des cubes emboîtables rouges et bleus. La professeure rappelle le code couleur mis en place dans la classe pour représenter la main gauche et la main droite « Regarde, la main gauche, ça va être les cubes de la couleur bleue et la main rouge, la main droite (...) les cubes de couleur rouge ». Elle montre la main gauche puis droite de Maxime et les associe oralement aux cubes bleus et rouges (cf. Photogramme 29).

Photogramme 29 : rappel par PES2 des couleurs des cubes à utiliser en fonction du code couleur instauré dans la classe (rouge pour la main droite et bleu pour la main gauche).

Elle demande, ensuite, à Maxime toujours au tdp 14 « donc, comment tu vas faire ton train avec les cubes (...). Comment tu vas représenter ton annonce ? (...) Alors tu nous expliques ce que tu fais ? ». Maxime emboîte deux cubes bleus en s'exprimant de la façon suivante au tdp 15 « *j'vais mettre deux ici* ». La professeure prend alors en charge oralement la mise en correspondance entre le train-cubes bleu et la main gauche au tdp 16 « alors, deux cubes bleus dans la main gauche ». Maxime continue à construire le train-cubes de son annonce au tdp 17 *«et après je vais mettre, après rouge de l'autre côté* ». PES2 reprend alors la parole au tdp 18 « Il prend les deux cubes rouges pour la main droite et il les met en même temps ». Elle prend le train-cubes des mains de Maxime et le montre au collectif (cf. Photogramme 30, ci-dessous).

Photogramme 30 : Traduction entre l'annonce à deux mains de Maxime et le train-cubes.

Pour poursuivre, PES2 propose de dessiner le schéma-train correspondant au train-cubes au tdp 18 « alors, on va dessiner ce train au tableau ». Elle affiche alors une feuille blanche au tableau et tend le train-cubes à Maxime qui le place en dessous de la feuille au tableau. PES2 trace alors le schéma-train de l'annonce en s'exprimant de la façon suivant au tdp 18 « alors il *a mis deux carrés bleus parce qu'il avait deux doigts levés dans la main gauche* et deux carrés rouges, oh là, là il est pas très beau mon rouge, dans la main droite » (cf. Photogramme 31)

Photogramme 31 : représentation du schéma-train par PES2 correspondant au train-cubes

Eléments d'analyse de l'épisode 4

Le jeu d'apprentissage 3, que nous avons nommé « Faire comparer une décomposition de deux sous-collections et une collection de points par différentes représentations du nombre : les mains, les trains-cubes, le schéma-train et le schéma-ligne » peut être décrit dans un premier temps par les règles définitoires mises en place par la professeure. Cette règle semble être, dans un premier temps, vérifier si l'annonce de Maxime « 2 et 2 » est bien gagnante, c'est-à-dire égale à « 4 », résultat du lancer de dé. Pour cela, la professeure s'appuie sur la

capacité des élèves construite lors de la séance précédente, *capacité de traduction d'une* décomposition additive sous forme de deux sous-collections produites à deux mains par un train-cubes et un schéma-train. En effet, PES2 introduit successivement dans le milieu des éléments connus des élèves, le train-cubes et le schéma-train. Maxime doit alors réinvestir cette capacité de traduction à partir des valeurs numériques « 2 et 2 ».

Dans un premier temps, PES2 demande à Maxime de venir représenter son annonce avec des cubes (tdp 14 ci-dessus). Elle place devant lui des cubes de deux couleurs, rouges et bleus. Puis elle fait correspondre la main gauche de Maxime avec la couleur bleue et sa main droite avec la couleur rouge (en lien avec le code couleur adopté lors de la séance précédente).

L'expression de la professeure est ici très guidante pour Maxime dans la mesure où elle donne elle-même les éléments du milieu à mettre en relation. Elle propose à Maxime de traduire son annonce par un train-cubes en spécifiant les relations entre chaque sous-ensemble, la main droite doit être représentée par des cubes rouges et la main gauche par des bleus. Néanmoins, PES2 reste réticente par rapport aux nombres d'unités de chaque collection et laisse Maxime construire le train-cubes correspondant à son annonce. Ainsi, Maxime énonce au tdp 15 qu'il emboîte deux cubes puis au tdp 17 qu'il y ajoute des cubes rouges. La professeure accompagne les deux énoncés de Maxime et les complète en indiquant le nombre de cubes de chaque sous-collection et en les mettant en lien avec chaque main. La position didactique du professeur reste d'une certaine manière proche de l'expérience de l'élève puisqu'elle relate au collectif les étapes de la construction du train-cubes par Maxime. Mais elle produit aussi un discours qui se rapproche du savoir en jeu, la traduction entre l'annonce et le train-cubes. La professeure se trouve donc dans une position didactique d'accompagnement mais aussi d'analyse (Schubauer-Léoni, 2005).

Dans un second temps, au tdp 18, PES2 propose de dessiner ce train au tableau. Pour cela, Maxime positionne le train-cubes en dessous de la feuille affichée au tableau et sur laquelle la professeure représente le schéma-train en accompagnant son geste par l'énoncé suivant « il a mis deux carrés bleus parce qu*'il avait deux doigts levés sur la main gauche et deux carrés rouges (…) dans la main droite* » au tdp 18.

Ici, l'expression de PES1 vis-à-vis du contrat et vis-à-vis du milieu est très importante. Elle introduit elle-même un nouvel élément dans le milieu, le schéma-train et le met en relation avec le train-cubes. Le positionnement du train-cubes dans le même espace que le schéma-train semble montrer la volonté de PES2 de mettre directement en correspondance, de manière ostensive, les carrés tracés avec les cubes.

La position topogénétique haute de P par rapport au savoir en jeu, la traduction des systèmes de représentation, amène à voir le milieu comme un simple adjuvant du contrat. La dynamique mésogénétique est donc initiée par le professeur par ses actions et son comportement. Elle introduit les systèmes de représentation et les met en correspondance.

Dans ce quatrième épisode, des relations de représentation sont mis en évidence par la professeure. L'expérience de l'élève se limite à construire le train-cubes correspondant à son annonce.

La représentation corporelle (le représenté) en deux sous-collections est traduite par une représentation matérielle/analogique, le train-cubes (le représentant). Chaque main est mise en correspondance avec les sous-collections composant le trains-cubes. Puis, ce représentant devient le représenté qui est traduit par un schéma-train (le représentant). Pour terminer, chaque sous-collection du schéma-train (le représenté) est mise en correspondance avec chaque sous-collection désignée par les mains (le représentant). Ainsi, il semble ici que l'intention professorale est de mettre en évidence que le train-cubes et le schéma-train dénotent toujours la même réalité, une annonce produite à deux mains. En effet, elle fait cours en faisant ostension des mises en correspondance sans laisser l'élève en faire l'expérience. Il semble donc ici qu'il y ait un amoindrissement de la densité épistémique du fait de l'expression de PES2 vis-à-vis du contrat mais aussi du milieu, de la mise en relation des éléments du milieu. Le comportement des élèves ne peut attester d'une réelle maîtrise des capacités épistémiques engagées dans cette situation malgré le fait que les connaissances déjà-là auraient pu permettre de résoudre le problème posé.

2.2.2. Episode 5, constellation de points sur un dé et représentations analogiques

Après avoir représenté l'annonce de Maxime sous forme de train-cubes et de schéma-train, PES2 propose à Louis de représenter le résultat du lancer sous forme de train-cubes.

Descri*ption de l'épisode 5*

La transcription (cf. Transcription 15) ci-dessous montre comment dans l'action conjointe se déroule cet épisode.

Temps	tdp	Actant	Contenu
(0:04:35.7)	18	PES2	(…) Alors Maxime tu gardes ton train dans la main et maintenant je vais demander à Louis avec les cubes verts, le dé avait fait quatre.

			Est-ce que tu peux me faire le train qui représente le dé avec du vert ? Combien de cubes tu vas prendre ? [La boîte contenant les cubes verts est placée devant Louis] ++Alors, est-ce que quelqu'un peut l'aider ? [PES2 prend le dé dans sa main en montrant la constellation de quatre points]
(0:05:42.8)	19	Els	Oui moi, quatre
(0:05:44.3)	20	PES2	Quatre cubes, et pourquoi quatre cubes ?
(0:05:45.9)	21	El	Parce que c'est le même nombre que sur le dé.
(0:05:49.3)	22	PES2	Parce que sur le dé il y a écrit quatre points [PES2 montre un à un les quatre points sur le dé]. Ça correspond au nombre quatre. Donc, là le train du dé, alors, on va essayer de les mettre en ligne, d'accord. [PES2 se penche sur Louis et elle emboîte des cubes (pas visible sur la vidéo)]. Ça c'est le petit train, le petit train c'est les wagons, il n'y a pas des wagons de travers. Merci [PES2 prend le train-cube des mains de Louis et le montre au groupe classe]. Alors vous êtes d'accord avec Louis ?
(0:06:11.0)	23	Els	Non
(0:06:11.6)	24	PES2	Non ?
(0:06:11.9)	25	Els	Si
(0:06:13.4)	26	PES2	Il a mis quatre wagons verts [PES2 montre un à un les quatre wagons du train-cube]. Et on va regarder avec Maxime si ça correspond. [PES2 juxtapose le train-cube de l'annonce de Maxime avec le train-cube du lancer]. Est-ce que c'est la même taille de train ?
(0:06:24.1)	27	Els	Oui
(0:06:25.9)	28	PES2	Jules ? [PES2 se retourne vers Jules]
(0:06:26.3)	29	Jules	Oui
(0:06:27.8)	30	PES2	Oui, hop alors je te laisse les deux. Moi, je vais représenter ici, hop, je vais représenter le train que Louis m'a fait, quatre wagons [PES2 affiche au tableau une nouvelle feuille et y représente le schéma-train du lancer] Alors, est ce qu'il y a le même nombre de wagons sur le train de Maxime et le même nombre de wagons sur le train de Louis ?
(0:06:53.1)	31	Els	Oui.
(0:06:57.1)	32	PES2	Ici on a quatre et ici [PES2 montre les quatre unités du schéma-train du lancer puis montre avec son index le schéma-train de l'annonce] comment tu fais l'annonce, une annonce ? [PES2 lève les deux mains avec deux doigts levés sur sa main droite et deux sur la main gauche] Comment on dit ? [Maxime montre deux doigts sur la main gauche et deux doigts sur la main droite]
(0:07:05.5)	33	Jules	Deux plus deux quatre
(0:07:06.2)	34	PES2	Deux et deux. Jules me dit deux plus deux quatre. Il y a deux et encore deux [PES2 montre les deux unités bleues puis les deux unités rouges sur le schéma-train de l'annonce] c'est pareil que quatre [PES2 montre avec son index le schéma-train du lancer]. Merci Maxime

Transcription 15 : systèmes de représentation et résultat d'un lancer de dé (Annexe 20)

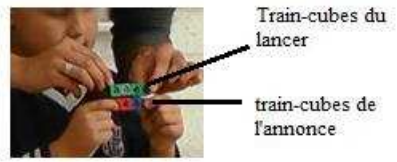
Au tdp 18, la professeure propose à Louis de représenter le résultat du lancer de dé « 4 » par un schéma-cubes « et maintenant je vais demander à Louis avec les cubes verts, le dé avait fait quatre. Est-ce que tu peux me faire le train qui représente le dé avec du vert ? Combien de cubes tu vas prendre ? ». PES2 place alors une boîte de cubes verts devant Louis. Ne

répondant pas à la question posée, la professeure demande aux autres élèves de l'aider et montre la face « 4 » du dé (cf. Photogramme 32).

Photogramme 32 : résultat du lancer de dé

Au tdp 19, des élèves proposent de prendre quatre cubes « Oui moi, quatre ». PES2 demande au collectif de justifier ce choix au tdp 20 « quatre cubes, et pourquoi quatre cubes ? ». Un élève répond alors au tdp 21 « parce que *c'est le même nombre que sur le dé* ». La professeure montre un à un chaque point du dé et énonce au tdp 22 « ça correspond au nombre quatre ».

Louis prend alors quatre cubes verts dans la boîte devant lui qu'il semble assembler par deux (la construction n'est pas visible sur le film de classe). PES2 reprend alors la main toujours au tdp 22 « Donc, là le train du dé, alors, on va essayer de les mettre en ligne, d'accord. [PES2 se penche sur Louis et elle déboîte et emboîte certains cubes] Ça c'est le petit train, le petit *train c'est les wagons, il n'y a pas des wagons de travers* ». La professeure montre alors le train-cubes composé de quatre cubes verts et demande aux élèves s'ils sont d'accord avec Louis (tdp 22). Des élèves répondent au tdp 23 par la négative. PES2 reprend au tdp 23 « non ? ». Les élèves répliquent cette fois-ci par l'affirmatif au tdp suivant. La professeure montre alors le train-cubes composé de quatre cubes verts et énonce au tdp 26 « il a mis quatre wagons verts » et le juxtapose au train-cubes représentant l'annonce de Maxime en posant la question « est-*ce que c'est la même taille de train* ?» (Cf. Photogramme 33).

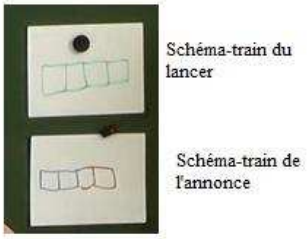


Photogramme 33 : comparaison du train-cubes du lancer "4" et de l'annonce "2 et 2"

Les élèves confirment cette égalité de longueur entre les deux trains-cubes au tdp 27 et 30 sans que la professeure ne demande de justifier cette réponse.

PES2 dessine alors au tableau le schéma-train représentant le lancer en énonçant au tdp 30 « *je vais représenter le train que Louis m'a fait, quatre wagons* ». Elle place ce schéma-train

au-dessus de celui représentant l'annonce de Maxime comme nous le montre le photogramme suivant (cf. Photogramme 34).



Photogramme 34 : représentation du schéma-train du lancer par PES2

PES2 demande alors aux élèves au tdp 30 « *alors, est ce qu'il y a le même nombre de wagons* sur le train de Maxime et le même nombre sur le train de Louis ? ». Les élèves répondent au tdp 32 par l'affirmative au tdp 31. PES2 montre les quatre unités du schéma-train du lancer puis le schéma-train de l'annonce en énonçant au tdp 32 « ici, on a quatre et ici ». Puis, elle montre sur ses deux mains l'annonce produite par Maxime en demandant « comment on dit ? ». Maxime montre l'annonce sur ces deux mains (cf. Photogramme 35).

Photogramme 35 : représentation du schéma-train "2 et 2"

Jules prend alors la parole au tdp 33 « deux plus deux quatre ». PES2 reprend cette proposition au tdp 33 « deux et deux. Jules me dit deux plus deux quatre. Il y a deux et encore *deux, c'est pareil que quatre* » en montrant des deux unités bleues puis rouges sur le schéma-train de l'annonce de Maxime.

Elémen*ts d'analyse de l'épisode 5*

Le milieu-problème se construit à partir des éléments connus des élèves, des connaissances déjà-là, la capacité de traduction de deux sous-collections par un train-cubes. Néanmoins, cette capacité est ici réinvestie dans une nouvelle situation où le représenté (la constellation de point) est différent de celui précédemment rencontré (une annonce à deux mains). L'expression de PES2 vis-à-vis du milieu à connaître semble importante. En effet, elle place devant Louis une seule boîte de cubes verts, ce qui oriente déjà l'action de l'élève vers la construction d'un train-cubes composé d'une seule collection de cubes. Ceci est renforcé par la présentation, par la professeure, de la face du dé et l'énoncé du cardinal de la collection

représenté sur celle-ci. Cependant, en demandant à un pair d'aider Louis, elle laisse les élèves prendre la main. Un élève propose alors au tdp 19 (ci-dessus) le nombre « 4 ». Puis, PES2 complète son énoncé par « quatre cubes » et lui demande pourquoi quatre cubes. La professeure semble ici alterner entre réticence et expression puisqu'elle apporte des compléments à la réponse donnée et laisse l'élève justifier sa réponse « *c'est le même nombre* que sur le dé » (tdp 21). PES2 reprend, par un énoncé d'accompagnent, le propos de cet élève « parce que sur le dé, il y a écrit quatre point » (tdp 22). Louis tente alors de construire le train-cubes mais semble échouer. La professeure prend la main et le construit en emboîtant quatre cubes verts qu'elle montre à l'ensemble de la classe. Nous pouvons faire l'hypothèse que Louis ne parvient pas à construire le train-cubes du fait de la prégnance du contrat didactique précédent, la représentation d'une annonce à deux mains sous forme de deux sous-collections de cubes emboîtables. Il ne semble pas réussir à réinvestir cette capacité issue d'une expérience antérieure. Une seconde hypothèse peut être le fait que Louis n'ait pas encore assimilé cette capacité de traduction. Mais ces hypothèses ne peuvent être ni confirmées ni infirmées dans la mesure où PES2 construit elle-même le train-cubes du lancer.

PES2 est donc ici très expressive vis-à-vis du milieu à connaître (traduction du lancer par un train-cubes et un schéma-train) et du contrat (capacité de traduction d'une annonce par un train-cubes). Elle met en relation les éléments du milieu, la constellation de points sur le dé et la représentation sous forme de train-cubes. Par la suite, PES2 montre le train-cubes composé de quatre cubes verts aux élèves de la classe et leur demande s'ils sont d'accord avec cette construction (tdp 22). Les élèves répondent d'abord par la négation. La professeure relance au tdp 24 par « non ? », les élèves confirment alors la validité de la construction. Nous observons donc ici une incertitude très forte de la part des élèves quant aux attentes du professeur. Les élèves ne font pas l'expérience effective de la traduction d'une seule collection par un train-cubes, le contrat ne semble ici être assimilé par le milieu du fait de la position topogénétique haute de la professeure stagiaire qui fait avancer seule le temps didactique.

L'épisode 4 et 5 donnent à voir la traduction d'une annonce à deux mains par un train-cubes et un schéma-train. Le milieu problème s'ancre ici sur les connaissances récentes déjà-là (séance 3 analysée ci-dessus). Cependant, ce milieu se complexifie avec la représentation du lancer par ces mêmes systèmes de représentation. Il y a ici une dynamique mésogénétique et chronogénétique initiée par le professeur occupant une topogénèse haute vis-à-vis du contrat comme du milieu.

Dans la suite de cet épisode, PES2 superpose le train-cubes du lancer avec celui de l'annonce.

Par cette monstration, elle donne à voir aux élèves comment comparer effectivement les deux trains-cubes sans laisser les élèves tâtonner dans le milieu instauré dans l'action conjointe précédente. La professeure montre aux élèves comment cet instrument, le train-cubes, passe d'un usage de représentation d'une collection (les doigts et les constellations de points) à un usage dans la comparaison de deux collections. Son expression est donc ici importante puisqu'elle donne à voir comment comparer deux trains-cubes mais sans que l'égalité de longueur entre les deux soit effectivement justifiée.

De même, pour exprimer l'égalité entre les deux schémas-trains tracés au tableau, elle montre succinctement ces deux représentations affichées sans justifier cette égalité.

De plus, il est à noter que PES2 utilise des termes différents pour comparer les trains-cubes et les schémas-trains deux à deux. En effet, dans le premier cas, elle parle de « taille », de comparaison de deux longueurs tandis que pour les schémas-trains, elle utilise les termes « le même nombre de wagons ». Elle passe donc d'une comparaison de deux longueurs à une comparaison de deux collections. Les systèmes de représentation dénotent ici deux grandeurs différentes.

Pour terminer, PES2 revient à la représentation initiale, l'annonce de Maxime, qu'elle annonce sur ses deux mains : « 2 et 2 ». Maxime imite alors la professeure en reproduisant l'annonce sur deux mains. Jules répond alors à la question de PES2 « comment on dit » (tdp 32) « deux plus deux quatre » (tdp 33). Il semble que l'intention de PES2 soit de faire correspondre le schéma-train « 2 et 2 » avec sa représentation sur deux mains. PES2 reprend l'énoncé de Jules « deux et deux quatre » et complète par « *deux et encore deux c'est pareil* que quatre » (tdp 34). Elle fait alors correspondre ces nombres avec les deux sous-collections du schéma-train de l'annonce puis celui du lancer.

Jules utilise des termes mathématiques pour désigner la réunion des deux sous-collections de doigts. PES2 reprend cet énoncé et traduit le mot « + » par la conjonction de coordination « et » en l'accompagnant par une monstration des deux sous-collections présentes sur le schéma-train. PES2 s'appuie ici sur la production de Jules mais en faisant elle-même le travail de traduction d'une représentation à une autre. La professeure occupe, dans les deux épisodes analysés, une position topogénétique haute vis-à-vis de la traduction des systèmes de représentation entre eux. En effet, PES2 prend en charge la comparaison du lancer et de l'annonce au moyen de mise en correspondance entre les systèmes de représentation, par des gestes et le langage. Tout d'abord, elle superpose les deux trains-cubes. Ensuite elle dessine les schémas-trains du lancer et de l'annonce et enfin produit l'annonce sur deux mains. Elle

relie ces représentations entre elles (le train-cube et le schéma-train, le schéma-train avec les mains). Les élèves, quant à eux, construisent le train-cubes de l'annonce mais restent distants face à ces systèmes de représentation.

Cette répartition des positions topogénétique entraîne une avancée du temps didactique générée par la professeure. Le schéma ci-dessous (cf. Figure 33) montre de manière synthétique les différentes mises en correspondance proposées entre les systèmes de représentation par les élèves et la professeure.

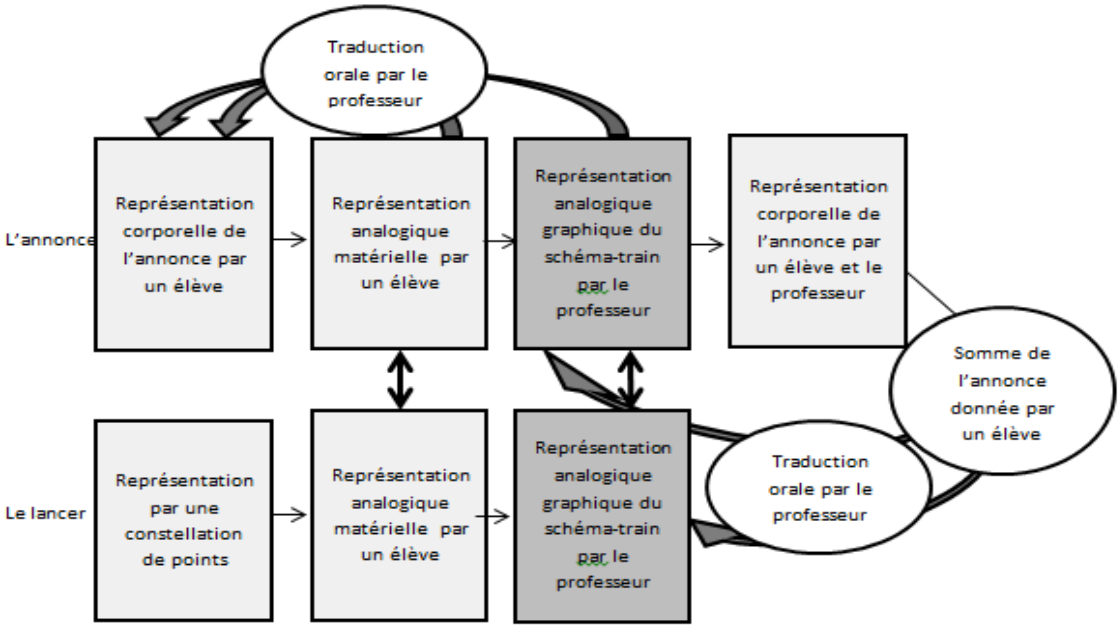


Figure 33: traduction entre systèmes de représentation

L'annonce à deux mains est traduite par, tout d'abord, un train-cubes puis un schéma-train. La professeure réalise un rappel oral de ce que dénotent ces deux représentations au moyen d'une une mise en correspondance avec l'annonce produite à deux mains. Il y a donc un retour de la part du professeur à la référence corporelle (flèches grisées). Le jeu représentationnel construit dans l'action conjointe semble donner une position de force à l'annonce produite à deux mains. Celle-ci joue le rôle de représenté dont les représentants sont le schéma-train et le train-cubes.

Pour le lancer, la construction du train-cubes se fait en référence aux quatre points présents sur la face du dé avec, ensuite, une mise en analogie avec le schéma-train (partie inférieure du schéma).

La comparaison entre l'annonce et le lancer, quant à elle, passe dans un premier temps par la comparaison entre les représentations analogiques matérielles avec une juxtaposition par le professeur des deux trains-cubes. Il y a mise en correspondance entre deux collections

ordonnées de manière différentes, la première en deux sous-collections de cubes et la seconde, en une seule collection de cubes.

Dans un second temps, il y a retour à la représentation corporelle de l'annonce qui est mise en relation avec sa représentation analogique/matérielle qui est elle-même comparée avec celle du lancer (les deux doigts sur chaque main sont représentés par le schéma-train de l'annonce et la réunion de cette collection correspond à l'ensemble de la collection représentée par le schéma-train du lancer). Il y a mise en correspondance entre deux représentations analogiques graphiques de la même quantité avec un travail langagier sur la relation entre « 2 et 2 » et « 4 » par la professeure en usant du terme « il y *a deux et deux c'est pareil que quatre »* au tdp 34.

2.2.3. Les schémas-ponts, Episode 6

Description de l'épisode 6

Le sixième épisode de l'extrait 2 porte sur la traduction des sous-collections sur le schéma-train par des nombres (écritures symboliques) et des schémas-ponts (réunion de chaque sous-collection et de l'ensemble des sous-collections) de l'annonce « 2 et 2 » et du lancer « 4 ». La transcription ci-dessous donne à voir comment les schémas-ponts sont produits dans les transactions (cf. Transcription 16).

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:07:20.3)	35	PES2	Ah, oui. Oh [PES2 tend un crayon à Maxime]. Alors tu vas nous indiquer bien, tu vas faire les ponts en dessous pour nous indiquer
(0:07:29.2)	36	El	Après les numéros
(0:07:29.9)	37	PES2	Pour que vous différenciez bien le bleu et le rouge [Maxime trace un pont, un en-dessous des deux unités bleues]. Alors combien tu vas écrire là ? [PES2 montre le premier pont]
(0:07:36.4)	38	Maxime	Deux
(0:07:36.6)	39	PES2	Deux, très bien [Maxime écrit le nombre deux en dessous du premier pont].
(0:07:38.6)	40	P	Jules, tiens-toi tranquille.
(0:07:42.3)	41	PES2	Deux et le crayon rouge [PES2 tend un crayon rouge à Maxime qui trace le pont en dessous des deux unités rouges]. Deux aussi, ah, trois tu nous mets [Maxime écrit le nombre trois au-dessus du second pont]. Combien de cubes il y a là [PES2 montre les deux unités rouges avec son index].
(0:07:59.6)	42	Maxime	Ah, deux.
(0:08:00.5)	43	PES2	Deux, c'est pas grave [PES2 barre le trois] On barre et tu écris à côté [Maxime écrit le nombre deux]. Donc on a bien deux et deux. Et Louis tu vas venir nous faire le pont sur le train que toi tu as fait. [PES2 descend le schéma-train du lancer à hauteur de l'élève au tableau et tend à Louis un crayon]. Alors Louis tu peux le faire

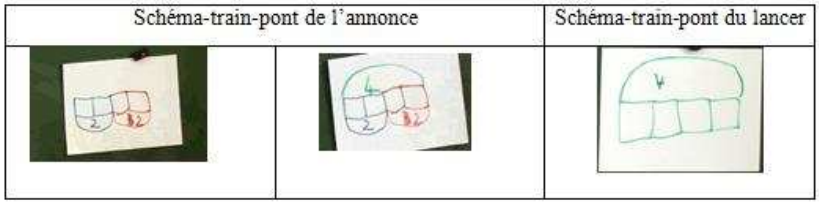
			dessus [PES2 montre avec son index le tracé du pont au-dessus du schéma-train]. Tu fais un grand pont qui prend tout le train. Fais le dessus [Louis trace le pont au-dessus du schéma-ligne]. Et combien, tu vas écrire, là ? ++. Alors est-ce que quelqu'un peut aider Louis.
(0:08:41.1)	44	Els	Oui, quatre.
(0:08:42.4)	45	PES2	Oui quatre, mais pourquoi quatre Louis ?
(0:08:47.1)	46	Louis	[Inaudible]
(0:08:47.6)	47	PES2	Parce que le train est composé de quatre wagons. Alors tu nous fais un quatre [Louis écrit le nombre quatre]. Très bien Louis, très bien.
(0:08:58.1)	48	P	Et Maxime va faire aussi son grand pont sur son train à lui. D'accord Maxime, fais le grand pont sur ton train.
(0:09:07.6)	49	Agathe	Sur ça veut dire au-dessus
(0:09:09.1)	50	P	Au-dessus oui, c'est vrai. Merci Agathe [Maxime trace un grand pont incluant l'ensemble des quatre unités au-dessus du schéma-train de l'annonce]
(0:09:13.2)	51	PES2	Très bien Maxime, et combien tu vas écrire.
(0:09:14.7)	52	Maxime	Quatre [Maxime écrit le nombre quatre].
(0:09:23.6)	53	PES2	Très bien. Alors, tout le monde est d'accord avec nos…

Transcription 16 : production des schémas-ponts sur les schémas-trains (Annexe 20)

PES2 propose de tracer sur le schéma-train de l'annonce et du lancer les schémas-ponts et le nombre désignant chaque collection. Pour cela, elle demande à Maxime au tdp 35 « Alors tu vas nous indiquer bien, tu vas faire les ponts en dessous pour nous indiquer » et lui tend un crayon bleu. Maxime trace un schéma-pont réunissant les deux premières unités bleues du schéma-train de l'annonce. PES2 le questionne sur le nombre que ce schéma-pont désigne au tdp 37 « Alors combien tu vas écrire là ? ». Maxime note le nombre « 2 » » au-dessus du schéma-pont tracé. Puis, la professeure lui tend un crayon rouge et l'élève trace un second schéma-pont réunissant les deux unités rouges du schéma-train. Il note au-dessus le nombre « 3 ». PES2 au tdp 41 énonce « Deux aussi, ah, trois tu nous mets. Combien de cubes il y a là ? » en montrant les deux unités rouges du schéma-train. Maxime rectifie et note le nombre « 2 » au-dessus du deuxième schéma-pont. PES2 conclut au tdp 43 « Donc on a bien deux et deux ».

Ensuite, la professeure demande à Louis de venir compléter le schéma-train du lancer avec un schéma-pont. Pour cela, elle montre avec son index le tracé de ce schéma-pont réunissant les quatre unités vertes en énonçant au tdp 43 « Tu fais un grand pont qui prend tout le train ». Louis trace alors le pont de quatre unités. PES2 lui demande toujours au tdp 43 « Et combien, tu vas écrire, là ? ». Devant l'hésitation de Louis, PES2 renvoie la question au collectif qui répond par le nombre « 4 » au tdp 44. La professeure demande au tdp 45 à Louis de justifier

cette réponse[88]. Au tdp 47, PES2 semble reprendre les propos de Louis « Parce que le train est composé de quatre wagons. Alors tu nous fais un quatre ». Cet élève écrit le nombre « 4 » au-dessus du schéma-train du lancer. Pour terminer, la professeure propose à Maxime de compléter le schéma-train par un schéma-pont réunissant l'ensemble des deux sous-collections. Maxime trace ce schéma-pont et note le nombre « 4 ». Les trois vignettes ci-dessous donnent à voir les deux schémas-trains de l'annonce et du lancer présents au tableau.



Photogramme 36 : Représentation des schémas-trains et des schémas-ponts de l'annonce "2 et 2" et du lancer "4"

Dans un de ces commentaires, P, professeure titulaire de la classe, justifie son intervention car elle « sentait que PES2 n'allait pas le faire ». Cependant, elle précise qu'elle aurait dû intervenir plus pour « faire constater que sur ce schéma avec tous les ponts on voit bien que Maxime a gagné parce que le grand pont a bien la même valeur que le lancer ». Par ailleurs, P fait le constat que « PES2 a donné le feutre vert pour tracer ce pont et pour représenter le train du lancer ». Elle a donc fait un raccourci qui a satisfait P sur le moment parce que l'annonce était bien égale au lancer. Cependant, P pense que ça ne se serait pas produit si l'annonce n'avait pas été égale au lancer et que PES2 n'avait effectivement pas prévu de faire tracer ce pont et que spontanément elle donne le vert parce que c'est égal.

Eléments d'analyse de l'épisode 6

Dans cet épisode, la capacité de désignation des sous-ensembles du schéma-train par un schéma-pont et un nombre est ici réinvestie par les élèves. La professeure, pour cela, laisse les élèves produire ces schémas-ponts et donc mettre en relation les éléments du milieu en s'appuyant sur le déjà-là. Cependant, notons que la gestion du code couleur par PES2, crayon bleu, rouge et vert pour tracer chaque schéma-pont oriente l'action des élèves dans le milieu puisque chaque couleur correspond à une collection en particulier. Il leur suffit de tracer un schéma-pont correspondant à la couleur bleue puis rouge. Le milieu semble donc peu résistant. Il apparaît que la professeure focalise l'attention des élèves non pas sur les

[88] Nous n'avons pas pu transcrire la réponse de Louis.

différentes sous-collections mais sur les couleurs utilisées pour les représenter. Cette représentation, cette modélisation analogique/graphique/symbolique de collections induit du fait de l'omniprésence des couleurs un amenuisement de la centration de l'action de l'élève sur la structure mathématique sous-jacente (la mesure d'une grandeur par un nombre). De plus, nous constatons qu'à la fin de cet épisode le savoir en jeu semble être de représenter les collections des deux schémas-trains par un schéma-pont et un nombre et non plus de comparer ces deux schémas-trains. Il y a une altération du jeu didactique avec une diminution de la densité épistémique avec un passage d'un jeu de comparaison à celui de traduction.

2.2.4. Synthèse de l'analyse de l'extrait 2

L'extrait 2 composé des épisodes 4, 5 et 6 nous est apparu particulièrement intéressant à étudier car il introduit un moyen de vérification d'un problème de comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé à six faces. La validation de cette comparaison s'effectue par la comparaison de deux train-cubes et de deux schémas-trains[89] (respectivement de l'annonce et du lancer). Le système capacitaire construit dans les séances précédentes, notamment la « capacité de traduction d'une décomposition additive sous forme de deux sous-collections produite avec deux mains par un train-cubes et un schéma-train », permet aux élèves d'aborder le milieu-problème en sachant déjà mettre en relation les différents systèmes sémiotiques présents dans le milieu.

Ce jeu d'apprentissage « faire comparer une décomposition en deux sous-collections et une constellation de points par un schéma-train et un train-cubes » semble recéler, plusieurs enjeux de savoirs. Tout d'abord, le savoir en jeu apparaît être, dans un premier temps, la traduction de l'annonce à deux mains et du lancer par un train-cubes et un schéma-train. Dans un second temps, l'enjeu épistémique est l'usage des représentations comme instruments de justification de la comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé. Pour terminer, il y a centration sur l'introduction de l'écriture symbolique (le nombre) venant désigner des sous-collections sur les schémas-trains. L'usage des représentations analogiques pour valider une comparaison semble donc être ici en arrière-plan par rapport au jeu représentationnel lui-même.

[89] Il est précisé dans le texte du module 1 que « cette mise en relation de la situation des annonces avec la situation train/tour (module0) est particulièrement importante (…). La construction de train/tour pourra jouer tout au long de l'année un rôle de validation/invalidation effective des propositions des élèves » (Annexe 15)

Nous affinons notre modélisation en termes de jeux d'apprentissage puisque comme nous venons de le voir, le savoir en jeu semble se modifie au cours de cet extrait (cf. tableau 49).

- JA(3)1 : faire traduire une annonce à deux mains et un lancer de dé par un schéma-cubes et un schéma-train ;

- JA(3)2 : faire comparer deux trains-cubes et deux schémas-trains ;

-JA(3)3 : faire traduire les collections sur des schémas-trains par des nombres désignant son cardinal et par un schéma-pont.

JA (4)1	JA(4)2	JA(4)3
Faire traduire une annonce à deux mains et un lancer de dé par un schéma-cubes et un schéma-train	Faire comparer deux trains-cubes et deux schémas-trains ;	Faire traduire les collections sur des schémas-trains par des nombres désignant son cardinal et par un schéma-pont.
Renforcement du contrat avec une expression importante de PES2 vis-à-vis du contrat et du milieu	Renforcement du contrat avec une expression importante de PES2 vis-à-vis du contrat et du milieu	Orientation par PES2 des élèves de l'action dans le milieu Expression importante de PES2 vis-à-vis du contrat et du milieu
Topogénèse P>> Els	Topogénèse P>> Els	Topogénèse : P = Els
Mouvement chronogénétique + initié par PES2	Mouvement chronogénétique + initié par PES2	Mouvement chronogénétique : =
Mouvement mésogénétique : + initié par PES2	Mouvement mésogénétique : + initié par PES2	Mouvement mésogénétique : +

Tableau 49 : vision synoptique des JA

Le contrat de traduction est donc ici réinvesti dans la même situation que lors de la séance précédente, traduction d'une annonce sur un schéma-train et un train-cubes mais avec des valeurs numériques différentes. Cette répétition pourrait autoriser une continuation de l'expérience des élèves toujours en référence à la pratique. Mais, celle-ci est restreinte par la position topogénétique différentes des élèves et de la professeure selon les représentations. En effet, les élèves prennent la responsabilité de représenter des schémas-ponts et l'écriture du nombre désignant les cardinaux sur le schéma-train préalablement tracé au tableau par PES2. La construction des trains-cubes se fait de manière indifférente par le professeur et les élèves. Les mises en analogie entre ces systèmes de représentation, quant à elles, ne sont exprimées que par PES2 (excepté pour le nombre de cubes pour le train-cubes du lancer). La théorie du jeu représentationnel n'est pas autorisée aux élèves. Les élèves ne peuvent faire l'expérience

du passage du concret à l'abstrait, de la représentation corporelle au nombre comme désignation d'une grandeur.

Si la réexpérienciation de cette capacité de traduction par les élèves avaient été moins contrainte, alors elle aurait pu amener les élèves à former des habitudes « une forme d'habilité d'exécution, d'efficacité dans l'action » (Dewey, 1916/2011, p. 126). De plus, l'engagement des élèves dans la mise en relation des systèmes de représentation reste minime. Leur comportement épistémique ne peut donc attester d'une compréhension du fait que chaque système de représentation se réfère une même réalité, une annonce à deux mains.

Cette première capacité de traduction est complétée dans cet extrait par la capacité de comparaison des différents systèmes de représentation entre eux pour valider ou invalider le résultat d'une comparaison orale de deux collections. Les systèmes de représentation deviennent des instruments (Dewey, 1967) qui vont permettre d'agir sur et dans certains phénomènes (ici le résultat de la comparaison entre deux collections, la modélisation de cette comparaison par différentes représentations). Cette capacité de traduction sur le schéma-train et schéma-ligne qui constituait l'enquête dans la séance préalable se transforme en moyen pour atteindre la fin de l'enquête (la comparaison de deux collections) (Ibid.).

2.3. Introduction du schéma-train/ligne

Le second extrait (Extrait 3) de la séance 4 du module 1 voit l'introduction d'un nouveau système de représentation, le schéma-ligne qui vient s'adosser au schéma-train. Comme nous l'avons analysé dans le chapitre précédent (régulation au sein de l'ingénierie coopérative) cette nouvelle représentation, le schéma-train/ligne doit permettre aux élèves de se familiariser avec l'usage des graduations sur le schéma-ligne. Mais comment se construit dans les transactions cet usage ?

Nous analyserons donc un nouvel extrait qui se déroule lors de la troisième phase de la séance 4 du module 1 « traduction et c*omparaison d'une annonce à deux mains et d'un lancer de dé* par les systèmes de représentation » (cf. Tableau 50 ci-dessous).

Phases	Modalité, support	Jeu d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentation nelle
Retour sur les règles du jeu des annonces	Collectif	JA1 : Faire se remémorer comment jouer au jeu des annonces		

- Jeu des annonces : égalité entre une annonce produite sur deux mains et un dé à six faces.	Collectif	JA2 : Faire produire à l'oral une décomposition de deux sous-collections à deux mains et la comparer au résultat d'un lancer d'un dé à six faces.		
-Traduction et comparaison d'une annonce à deux mains et d'un lancer de dé à six faces par les systèmes de représentation	Collectif à partir d'une annonce produite par un élève avec deux mains	JA3 : Faire comparer une décomposition de deux sous-collections et le résultat d'un lancer de dé à six faces par un train-cubes, le schéma-train/ligne.	Introduction du schéma-train/ligne	Deux mains, train-cubes, schéma-train avec les schéma-ponts et les nombres cardinaux

Tableau 50 : tableau analytique du module 4

Cet extrait se situe entre la vingt-deuxième et la vingt-sixième minute de la séance comme nous le montre l'extrait de synopsis de la séance ci-dessous (cf. Tableau 51)

Jeu des annonces 01'06''	(0:20:56.8)	Individuel	Troisième partie : Production d'une annonce avec les mains par les élèves et jeter de dé par le professeur (1). Les élèves dont les annonces sont gagnantes restent avec mains en l'air.
Traduction d'une annonce par des systèmes de représentation 05'12''	(0:22:02.8)	Collectif : Mise en commun	- Zélie vient au tableau - PES2 affiche au tableau le schéma-train/ligne - Zélie construit le train-cubes du dé - Comparaison des deux trains-cubes - Représentation par une élève de l'annonce sur le schéma-train/ligne avec les ponts et le cardinal de la collection

Tableau 51 : extrait du synopsis de la séance 4 du module 1

Les élèves jouent au jeu des annonces contre la professeure. Ils produisent, de leur place, une annonce à deux mains. La professeure lance un dé à six faces dont le résultat est « 1 ». Les élèves comparent leur annonce avec le lancer. S'ils pensent que leur annonce est égale au lancer, ils gardent leurs deux mains levées. PES2 choisit l'annonce produite par Zélie, un doigt sur la main gauche et le poing fermé sur la main droite (« 1 et 0 »). Elle lui demande de venir la présenter à la classe. Zélie produit son annonce sur deux mains et sur proposition de PES2, l'oralise « 1 et 0 ».

Nous avons découpé cet extrait en trois épisodes que le tableau ci-dessous donne à voir.

Episode	Extrait 3 : Introduction du schéma-train/ligne
7	Affichage par PES2 du schéma-train/ligne
8	Construction du train-cubes de l'annonce et du lancer Comparaison des deux trains-cubes Mise en analogie entre l'annonce à deux mains et le train-cubes de l'annonce
9	Représentation de l'annonce sur le schéma-train/ligne Représentation des schémas-ponts de l'annonce sur le schéma-train/ligne

Tableau 52 : découpage de l'extrait par épisode.

Lors de l'épisode 7, PES2 demande au groupe classe de comparer oralement l'annonce de Zélie « 1 et 0 » avec le résultat du lancer de dé « 1 ». Pour cela, elle demande si « c'est pareil ». Les élèves valident cette comparaison par une réponse positive. La professeure affiche alors au tableau un nouveau système de représentation, le schéma-ligne/train.

PES2 sollicite (épisode 8) Zélie pour construire le train-cubes correspondant à son annonce en fonction du code couleur mis en place dans la classe (rouge pour la main droite et bleu pour la main gauche). PES2 convie également un second élève, Victor, à construire le train-cubes du lancer avec des cubes verts. Après la construction par ces deux élèves des trains-cubes correspondants, la professeure s'empare de ces deux représentations et demande à la classe s'ils sont identiques. Les élèves répondent par l'affirmative. Puis, la professeure engage une discussion avec l'ensemble des élèves de la classe sur l'absence de cube bleu dans le train-cubes de l'annonce (qui correspond au « zéro » de la main gauche).

PES2 demande (épisode 9) à Zélie de représenter son annonce sur le schéma-train/ligne et de tracer les schémas-ponts correspondants en prenant comme exemple la représentation d'une autre annonce sur un schéma-train affichée au tableau.

Les épisodes 7 et 9 donnent à voir comment, dans l'action conjointe, un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne est proposé aux élèves. Lors de l'épisode 8, la professeure opère une centration sur le rôle du zéro et sa représentation sur le train-cubes et sur les doigts.

Cet extrait est modélisé par le jeu d'apprentissage (JA3) « Faire comparer une décomposition de deux sous-collections et le résultat d'un lancer de dé à six faces par un train-cubes, le schéma-train/ligne ».

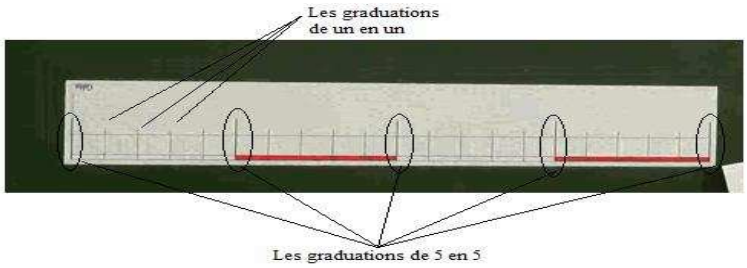
2.3.1. Nouveau système de représentation : le schéma train/ligne (épisode 7)

Le septième épisode (extrait 3) se déroule à la vingt-deuxième minute de la séance. L'objectif est ici de donner à voir au lecteur comment la professeure introduit un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne. Après que les élèves ont comparé leur annonce à deux mains avec le résultat d'un lancer de dé à six faces (« 1 »), PES2 invite Zélie à venir présenter son annonce gagnante à la classe. La transcription ci-dessous (cf. Transcription 17) montre comment dans les transactions est introduit cette nouvelle représentation.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:22:02.1)	1	PES2	Alors Zélie, tu vas venir nous montrer ce que tu as fait au tableau. Viens ici.
(0:22:06.7)	2	El	Et moi ?
(0:22:07.3)	3	PES2	Et toi, tu as rajouté une main après.
(0:22:09.2)	4	El	Et c'est de la triche, c'est ça.
(0:22:11.6)	5	PES2	Un petit peu de la triche. Alors, est-ce que tu peux nous montrer et nous dire à voix haute ton annonce.
(0:22:18.4)	6	Zélie	Un.
(0:22:19.6)	7	PES	Un, alors ++un et ?
(0:22:27.3)	8	Zélie	Et zéro.
(0:22:27.8)	9	PES2	Et zéro, c'est pareil que quoi ? Le dé, il avait fait combien ?
(0:22:31.3)	10	Els	Un
(0:22:31.8)	11	PES2	C'est pareil que un. Est-ce que vous êtes d'accord ?
(0:22:33.1)	12	Els	Oui.
(0:22:34.2)	13	PES2	Alors, moi, j'en ai un peu marre de dessiner mes cubes avec des feutres. [PES va chercher un schéma-train/ligne],
(0:22:53.1)	14	P	Elle est aimantée la
(0:22:54.7)	15	PES2	Ah. Alors [PES2 affiche le schéma-train/ligne au tableau, cf. photogramme 37]. Alors, tu vas nous faire ton cube [PES2 *s'adressant à Zélie*]. Ça va pas être trop long. Alors, c'était sur quelle main que tu as eu fait un. Alors, ça c'est ta main droite donc la main droite, c'est la couleur ?

Transcription 17 : introduction du schéma-ligne, Annexe 20

Zélie présente son annonce au collectif (un doigt sur la main droite et zéro sur la main gauche). La professeure demande au collectif si cette annonce « 1 et 0 » est pareil que le résultat du lancer du dé « 1 » (tdp 11). Les élèves répondent par l'affirmative (tdp 12). PES2 affiche alors au tableau un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne. Elle justifie cette introduction par « *alors, moi, j'en ai un peu marre de dessiner mes cubes avec* des feutres » au tdp 13. Puis, elle demande à Zélie au tdp 15 de représenter son annonce par un train-cubes « Alors, tu vas nous faire ton cube ». La professeure ne présente pas aux élèves ce schéma-train/ligne comme un nouveau système de représentation. En effet, elle ne fait aucunement référence aux nouveautés graphiques saillantes du schéma-train/ligne, qu'il lui serait possible de mentionner :



Photogramme 37**: le schéma-train/ligne (cf. tdp 14)**

- les grands traits verticaux représentant les graduations de cinq en cinq ;

- les petits traits verticaux entre chaque unité ;

- les traits rouges horizontaux en dessous du schéma (entre les graduations 5 et 10, 15 et 20).

PES2 reste très réticence vis-à-vis du nouvel élément qu'elle introduit dans le milieu. Elle affiche simplement au tableau cette nouvelle représentation en énonçant son désir de ne plus dessiner les cubes avec un feutre. De plus, l'usage du mot « cubes » par PES2 montre une incertitude de sa part vis-à-vis du vocabulaire lié aux représentations, les cubes du train-cubes et les wagons du schéma-train. Il semble qu'elle s'appuie sur les ressemblances de cette nouvelle représentation avec le schéma-train (unités juxtaposées verticalement) pour que les élèves donnent sens à cette représentation.

Immédiatement après cette introduction, PES2 demande à Zélie et Victor de construire le train-cubes correspondant respectivement à l'annonce « 1 et 0 » et au lancer « 1 » (Episode 8).

2.3.2. Episode 8, centration sur la place du zéro et mise en traduction

Nous analyserons maintenant l'épisode épisode 8 qui se focalise sur la traduction de l'annonce de Zélie « 1 et 0 » et du lancer « 1 » par deux trains-cubes et de leur comparaison.

Description de l'épisode 8

L'extrait de transcription ci-dessous (cf. Transcription 18) donne à voir comment la professeure organise, dans les transactions, la représentation du train-cubes de l'annonce et du lancer.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:22:54.7)	15	PES2	Ah. Alors [PES2 affiche le schéma-train/ligne au tableau]. Alors, tu vas nous faire ton cube [*PES2 s'adressant à Zélie*]. Ça va pas être trop long. Alors, c'était sur quelle main que tu avais fait un. Alors, ça c'est ta main droite donc la main droite, c'est la couleur ?

(0:23:11.0)	16	Zélie	Rouge
(0:23:14.2)	17	PES2	Rouge+++Et Victor tu vas nous faire le train du dé. Alors combien y avait sur le dé ? [Zélie prend un cube rouge]
(0:23:23.1)	18	Victor	Un
(0:23:23.5)	19	PES2	Un, alors qu'est-ce que tu vas mettre [*PES2 s'adressant à Victor*]. On avait déjà des. C'est bon, tu as fait ton train du dé ? [Victor prend un cube vert].
(0:23:33.7)	20	PES2	C'est le wagon du train [PES2 prend le train-cube du lancer et de l'annonce dans ses mains et les montre au groupe classe]. Alors, est-ce que c'est pareil ?
(0:23:36.5)	21	Els	Oui
(0:23:39.7)	22	PES2	Et pourquoi, y a pas de bleu sur celui-là ? [PES2 montre le train-cube rouge]
(0:23:41.5)	23	El	Parce que c'est la main droite.
(0:23:44.5)	24	PES2	C'est la main droite, et pourquoi y a pas de bleu ?
(0:23:47.3)	25	El	Parce que le bleu c'est la main gauche.
(0:23:50.4)	26	El	Et il faut mettre du bleu.
(0:23:51.8)	27	PES2	Neil pourquoi y a pas de bleu ?
(0:23:52.4)	28	Neil	Parce que, parce que [inaudible] a fait un
(0:23:56.6)	29	PES2	Et alors ? [*PES2 s'adressant à Neil*]
(0:23:58.0)	30	Neil	Parce que elle, elle a pas de bleu parce que le dé a fait un.
(0:24:01.5)	31	PES2	Mais pourquoi, le dé a fait un mais elle aurait pu avoir du bleu.
(0:24:04.8)	32	El	Mais parce que
(0:24:05.9)	33	PES2	On lève la main. Felix
(0:24:08.9)	34	Felix	Parce que c'est pas sur à droite et à gauche [inaudible]
(0:24:14.4)	35	PES2	Oui mais le bleu, c'est de ce côté-là [PES2 lève la main droite de Zélie sur lequel il y a un doigt de levé. Ou alors. Ah si [PES2 positionne Zélie face au tableau pour faire correspondre le code couleur affiché au-dessus du tableau avec la main droite de Zélie]. Alors qu'est-ce qu'elle avait de ce côté-là? [PES2 tend le bras gauche de Zélie]
(0:24:26.7)	36	El	Elle avait zéro cube et un autre un.
(0:24:29.5)	37	PES2	Et un autre un. Donc le un [PES2 montre le doigt levé sur la main droite de Zélie, cf. photogramme 38 ci-dessous], c'est le cube rouge et ici on a zéro cube bleu [PES2 montre le poing fermé de la main gauche de Zélie] C'est à dire zéro. Alors.

Transcription 18 : construction des trains-cubes (Annexe 20)

PES2 demande à Zélie au tdp 15 « Alors, tu vas nous faire ton cube. Ça va pas être trop long. *Alors, c'était quelle main que tu* avais fait un ? Alors, ça c'est ta main droite donc la main droite, c'est la couleur ?». Zélie propose de prendre un cube rouge au tdp 16. PES2 sollicite Victor au tdp 17 « Tu vas nous faire le train du dé. Alors combien il y avait sur le dé ? ». L'élève répond au tdp 17 « un » et prend un cube vert.

PES2 s'empare alors des deux trains-cubes et les montre à l'ensemble de la classe en posant la question suivante au tdp 20 « est-*ce que c'est* pareil ? » (Cf. Photogramme 38).

Photogramme 38: comparaison des trains-cubes par le professeur PES2, tdp 21, cf. transcription ci-dessous (cf. Transcription 18).

Les élèves répondent alors par l'affirmative à cette question liée à la comparaison de ces deux trains-cubes au tdp 21.

Puis, PES2 demande aux élèves pourquoi n'y a-t-il pas de cube bleu dans le train-cubes construit par Zélie au tdp 22 « Et pourquoi, *il n'*y a pas de bleu sur celui-là ? [PES2 montre le train-cube rouge] ». Un élève donne comme explication « Parce que c'est la main droite » au tdp 23. PES2 relance alors les élèves au tdp 24 « et pourquoi pas de bleu ? ». Un élève répond au tdp 25 « *parce que le bleu c'est la main gauche* ». Un second élève prend alors la parole et propose d'ajouter du bleu au tdp 26 « Et il faut mettre du bleu. ». La professeure oriente la question liée à l'absence de cube bleu vers Neil qui répond au tdp 28 « Parce que, parce que [inaudible] a fait un » et continue son explication au tdp 30 « Parce que elle, elle a pas de bleu parce que le dé a fait un ».

PES2 relance la question concernant l'absence de cube bleu dans le train-cubes représentant l'annonce de Zélie. Après quelques échanges, PES2 au tdp 35 prend les deux mains de Zélie annonçant « 1 et 0 » et les fait correspondre avec les affiches présentes de chaque côté du tableau (affiches indiquant la gauche et la droite coder par deux couleurs respectivement le bleu et le rouge). Elle énonce « Alors qu'est-ce qu'elle avait de ce côté-là ? » en tendant le bras gauche de Zélie. Un élève répond « Elle avait zéro cube et un autre un » au tdp 36.

Au tdp 37, la professeure dit « Et un autre un. Donc le un, c'est le cube rouge et ici on a zéro cube bleu, c'est à dire zéro » en montrant respectivement la main droite (1 doigt) et la main gauche (0) de Zélie comme nous montre le photogramme ci-dessous.

Photogramme 39 : traduction du train-cubes par une annonce à deux mains, tdp 3

Eléments d'analyse de l'épisode 8

Au tdp 15, PES2 demande à Zélie de « faire son cube ». Par cette première phrase, la professeure oriente la production de Zélie en dévoilant le nombre de cubes composant le train-cubes de l'annonce puis reprend « sur quelle main tu avais fait un ». Puis, elle guide l'élève sur la couleur du cube composant ce train en fonction de la main avec un doigt levé (en lien avec le code couleur adopté par la classe) « Alors, ça c'est ta main droite donc la main droite, c'est la couleur ? ». Zélie énonce la couleur rouge désignant la main droite et prend alors un cube rouge. Puis, au tdp suivant, elle oriente l'action de Victor vers la construction du train-cubes du lancer.

PES2 est ici très expressive vis-à-vis du milieu en mettant elle-même en correspondance le nombre de cubes avec l'annonce produite en énonçant par deux fois le nombre de cubes que doit contenir le train-cubes correspondant à l'annonce «1 et 0 ». Elle laisse simplement l'élève exprimer la couleur du cube. Puis, la professeure, en demandant à Victor, tout de suite après, de construire le train-cubes du lancer donne un coup d'arrêt à l'enquête sur la construction du train-cubes de l'annonce. Il apparaît que la relation didactique mise en évidence ici s'apparente à un effet Topaze (Brousseau, 1998) où la professeure oriente de manière marquée le comportement de l'élève en lui donnant le nombre de cubes à assembler (en donnant ce nombre par deux fois et en orientant l'action ultérieure vers un autre problème après que l'élève ait pris ce cube). L'objet de l'enquête semble ici plutôt du côté de la couleur du cube que de la traduction d'une annonce à deux mains par un train-cubes puisque la professeure reste seulement réticence vis-à-vis de la couleur du cube. Le milieu devient un adjuvant du contrat. Zélie s'inscrit dans le dialogue didactique mais c'est PES2 qui dévoile le savoir en jeu. On pourrait parler ici d'altération du jeu didactique (Rilhac, 2008 ; Gruson & Marlot, 2016) dans le sens où la relation didactique tend à se vider de son contenu épistémique.

Victor construit ensuite le train-cubes du lancer composé d'un cube vert. PES2 passe rapidement sur la question de la comparaison des trains-cubes de l'annonce et du lancer. Elle montre les deux trains cubes et demande s'ils sont pareils. Les élèves répondent par l'affirmative. Nous conjecturons que PES2 infère le fait que les élèves savent comparer de manière immédiate ces deux trains-cubes sans faire référence à ce qu'ils dénotent, ces deux trains-nombres étant composés d'un seul cube. De plus, nous remarquons que PES2 ne juxtapose pas les deux trains-cubes comme cela était le cas lors de l'épisode 5 (cf.

Photogramme 17, comparaison de deux trains-cubes « 4 » et « 2 et 2). Il apparaît que la professeure s'appuie sur des connaissances déjà-là très récentes des élèves pour faire avancer le temps didactique. Elle infère donc un état épistémique "adéquat" des élèves et accepte ici de reconnaître une marque de savoir, le résultat de la comparaison de « 1 et 0 » et de « 1 ».

De plus, elle n'insiste pas particulièrement sur la non-représentation du « 0 » sur le train-cube qui peut néanmoins être une difficulté pour les élèves.

Les trois derniers tours de parole montrent comment PES2 prend en charge la mise en traduction des deux mains et les cubes correspondants en plaçant le cube rouge juste au-dessus de la main droite dont le pouce est relevé et sa main ouverte juste au-dessus de la main gauche de Zélie dont le poing est fermé. Cette monstration est accompagnée par l'énoncé suivant au tdp 36 « Donc le un ».

Ainsi, après avoir dans un premier temps orienté le travail de l'élève sur la traduction entre l'annonce à deux mains et le train-cubes de l'annonce (cf. tdp 14 à 16), les attentes de la professeure se tournent dans un second temps, mais de manière très brève, vers la comparaison entre le train-cubes du lancer et de l'annonce (cf.tdp 16 à 20, photogramme 2). Dans un troisième temps, PES2 recentre les transactions sur les relations entre le train-cubes de l'annonce et l'annonce produite avec les mains (cf.tdp 36, photogramme 3). Nous observons donc une modification très brève du contrat didactique au cours de la phase 3 de cet épisode avec la comparaison des deux trains-cubes puis un retour à la mise en traduction entre les systèmes de représentation. Nous pouvons nous demander qu'elle est l'enjeu de ce jeu d'apprentissage : comparer ou traduire ?

Nous poursuivons maintenant notre enquête sur l'usage du schéma-train/ligne que PES2 a introduit lors de la première phase de l'épisode analysée (tdp 12 et photogramme 37). Episode 9, le schéma-train/ligne

Description de l'épisode 9

L'extrait de transcipt ci-dessous (cf. Tanscription 19) donne à voir comme PES2 propose à Zélie de représenter son annonce sur le schéma-train/ligne.

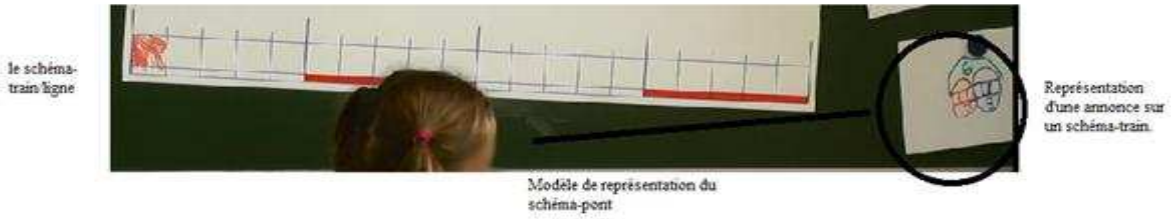
Temps	tdp	Actant	Contenu
(0:24:43.4)	38	PES2	(…). Donc, c'est rouge. Donc, tu vas venir, tu vas nous colorier ici un cube rouge. Tu le colories là, voilà. [Zélie colorie la première case du schéma-train/ligne]. Hop, elle colorie le cube rouge de son petit train [PES2 montre le train-cubes *de l'annonce*].
(0:25:03.8)	39	P	Mais c'est pas grave si c'est pas super colorié ?

(0:25:08.7)	40	PES2 PES2	Et en dessus [PES2 trace avec son index le pont de un au-dessus du schéma-train/ligne] tu vas faire pareil que l'on a fait là [PES2 montre le schéma-train affiché sur la droite du tableau]. Le pont et tu nous indiques combien tu avais fait de cette main-là. [Zélie trace un pont au-dessus du schéma-train/ligne et écrit le nombre 1] Un. Et si moi je veux faire le grand pont ?
(0:25:29.1)	41	El	Non, tu peux pas.
(0:25:30.2)	42	PES2	Je peux pas faire le grand pont ?
(0:25:33.0)	43	El	Si.
(0:25:33.6)	44	El	Non parce que.
(0:25:34.8)	45	PES2	Ben si alors Félicien vient. Tu viens nous faire le grand pont si tout le monde dit qu'on peut faire. [PES2 tend un crayon à Félicien]
(0:25:43.0)	46	Félicien	Lequel grand pont ?
(0:25:44.0)	47	PES2	Ah, ben regarde, ici par exemple, j'avais quatre rouges ou ici par exemple j'avais trois rouges et trois bleus [PES2 montre le schéma-cube à droite du tableau] et j'ai fait le grand pont qui prenait tous les cubes en même temps [PES2 montre avec son index le grand pont de six]
(0:25:55.7)	48	Félicien	On peut faire ça [Félicien mime un pont au-dessus du schéma-train/ligne]
(0:25:58.0)	49	PES2	Alors, ils sont où tous les cubes ? Combien de cubes il y a à colorier là ?
(0:26:01.7)	50	Félicien	Un.
(0:26:02.1)	51	PES2	Un, donc combien de cubes il va faire ce grand pont [PES2 montre le cube vert dans sa main]
(0:26:06.4)	52	Els	Un
(0:26:06.8)	53	PES2	Un, un cube aussi [Félicien trace un pont incluant deux cubes sur le schéma-train/ligne].
(0:26:09.2)	54	El	Du coup, on pourra pas faire.
(0:26:10.5)	55	PES2	Ben, combien tu nous as fait là Félicien ?
(0:26:11.4)	56	Els	Deux
(0:26:15.8)	57	PES2	Un, alors [Zélie efface avec son pouce le pont tracé par Félicien]
(0:26:19.6)	58	P	Ou est ce qu'il se termine le wagon de Jules Félicien ?
(0:26:23.5)	59	PES2	Le cube rouge là [PES2 montre la première unité coloriée en rouge du schéma-train/ligne et le cube rouge dans sa main]. Là un cube. [Félicien trace un pont de un sur le schéma-train/ligne]. Ecartez-vous pour que les autres voient. Un cube, c'est un carré ici, donc ici c'est un deuxième wagon mais on l'a pas colorié [PES2 montre la seconde unité du schéma-ligne/train]. Ça veut dire qu'il ne fait pas partie de notre train. Et combien tu vas écrire au-dessus [PES2 montre avec son index le pont] ?
(0:26:42.9)	60	Félicien	Un [Félicien écrit le nombre 1 au-dessus du pont]
(0:26:45.0)	61	PES2	Comme le nombre de wagons [PES2 montre un cube vert dans sa main], de wagons dans le train. Merci.

Transcription 19 : représentation de l'annonce "1 et 0" sur un schéma-train/ligne (Annexe 20)

Au tdp 38, PES2 demande à Zélie « donc, tu vas venir, tu vas nous colorier ici un cube rouge. Tu le colories, voilà. Hop, elle colorie le rouge de son petit train ». Zélie colorie la première unité du schéma-train-ligne. Puis, PES2 l'invite à tracer le schéma-pont représentant cette collection sur ce schéma. Pour cela, la professeure trace avec son index le schéma-pont de « 1 » au-dessus du schéma-train/ligne et énonce que tdp 40 « et en dessus, tu vas faire pareil

que l'on a fait là ». Elle propose ainsi à Zélie de prendre appui sur la représentation des schémas-ponts sur le schéma-train à droite sur le tableau (cf. Photogramme 40) pour tracer le schéma-pont de son annonce sur le schéma-train/ligne.



Photogramme 40 : mise en correspondance par PES2 de la représentation sur un schéma-train d'une annonce avec le schéma-train/ligne

PES2 continue toujours au tdp 40 « Le pont et tu nous indiques combien tu avais fait de cette main-là ». Zélie trace un pont au-dessus du schéma-train/ligne et écrit le nombre « 1 » (cf. photogramme 41).

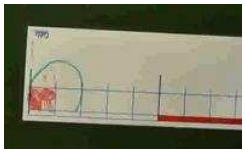
Photogramme 41 : Représentation par Zélie du « 1 » de l'annonce « 1 et 0 » sur le schéma-train/ligne

PES2 interroge Zélie sur la possibilité de tracer un grand schéma-pont sur ce schéma-train/ligne au tdp « est-ce que tu peux faire le grand pont ? ». Un élève répond au tdp 41 « non tu peux pas ». PES2 relance la question au tdp 42 « tu ne peux pas faire le grand pont ? » et un élève au tdp 43 répond cette fois ci par l'affirmative. La professeure invite Félicien à venir dessiner le grand pont sur le schéma-train/ligne au tdp 45 « tu viens nous faire le grand pont si tout le monde dit *qu'on peut le faire* ». Félicien reprend au tdp 46 « lequel grand pont ». PES2 prend exemple sur le schéma-train présent à droite du tableau au tdp 47.

Photogramme 42 : explication par PES2 du schéma-pont réunissant l'ensemble des collections représenté sur le schéma-train.

La vidéo de la séance de classe ne nous permet pas de voir comment Félicien mime le grand schéma-pont sur le schéma-train/ligne. Cependant, PES2 lui demande au tdp 49 « alors ils sont où tous les cubes. Combien de cubes il y a à colorier ? » Félicien propose le nombre

« 1 ». PES2 poursuit au tdp 51 en reprenant la réponse de Félicien et en montrant le train-cube de l'annonce (un cube vert) « Un, donc combien de cubes il va faire ce grand pont ?». Les élèves acquiescent et Félicien trace un schéma-pont de deux unités sur le schéma-train/ligne comme nous le montre le photogramme suivant (Cf. Photogramme 43) pendant qu'un élève dit « du coup, on pourra pas faire » au tdp 55



Photogramme 43 : Félicien trace un schéma-pont de deux sur le schéma-train/ligne de l'annonce "1 et 0".

La professeure interroge alors Félicien sur le nombre d'unités qu'il a représenté au tdp 55 « alors combien tu nous as fait Félicien ? ». Les élèves de la classe répondent deux. Zélie et PES2 efface le schéma-pont de Félicien qui reprend son tracé en englobant seulement la première unité du schéma-train/ligne. P, professeure titulaire de la classe, demande à Félicien où se termine le wagon de Zélie au tdp 58. PES2 prend alors la main au tdp 59, montre l'unité coloriée en rouge sur le schéma-train/ligne « le cube rouge » et le cube rouge du train-cubes « là, le cube ». Elle place le cube rouge sur l'unité coloriée en rouge sur schéma-train/ligne puis montre la seconde unité de ce schéma-train (cf. Photogramme 44).

Photogramme 44 : mise en correspondance par PES2 de train-cubes et du schéma-train/ligne

Elle demande à Félicien le nombre qu'il va écrire au-dessus de ce schéma-pont vert. Félicien répond au tdp 60 « un » et écrit ce nombre. PES2 conclut au tdp 61 « comme le nombre de wagon, de wagon dans le train » en montrant le cube vert (train-cubes du lancer).

Elémen*ts d'analyse de l'épisode 9*

Dans un premier temps, PES2 dévoile à Zélie comment représenter le train-cube d'une unité sur le schéma-train/ligne en énonçant « tu vas nous colorier ici un cube rouge » au tdp 38. Elle explicite directement à cette élève comment représenter l'annonce sur le schéma-train/ligne, non plus cette fois-ci en traçant les unités comme pour le schéma-train mais en

coloriant les unités du schéma-train/ligne correspondant. L'énoncé de PES2 gomme le processus de représentation/modélisation, mais elle a l'avantage potentiel de rapprocher la représentation (la portion du schéma-train/ligne) de la référence (le cube rouge). Le processus de représentation entre le représenté, le train-cubes (le cube rouge) et le représentant, le schéma-train/ligne ne peut se faire puisque l'image du représenté reste le cube rouge et non la portion du schéma-train/ligne. En effet, au lieu de dire « colorie une partie du schéma qui représente le cube rouge », elle énonce « colorier un cube rouge ».

PES2, par son énoncé dévoile comment mettre en relation le schéma-train/ligne et le train-cubes. Néanmoins, elle reste réticente sur l'usage de ce nouvel instrument, le schéma-train/ligne notamment le rôle des graduations et la notion de segment, de portion de ce schéma (la longueur) que le nombre représenté dénote.

De plus, PES2 ne fait aucunement référence à la représentation de l'annonce produite à deux mains et laisse donc en suspens le fait que ce train-cubes ne dénote pas seulement une production à une main mais à deux mains. Le rôle du zéro comme élément neutre de l'addition[90] est passé sous silence par la professeure.

Une stratégie contrefactuelle (une autre stratégie possible) que la professeure peut mettre en place, est d'inviter les élèves à passer d'un énoncé à un autre. Par exemple, elle peut demander aux élèves de dire à quoi correspondait la portion du schéma-train/ligne sur le train-cubes et sur les mains. Les élèves passent ainsi d'un système de représentation à un autre : « le wagon rouge du schéma-train/ligne correspond au cube rouge du schéma-train et à *l'annonce à deux mains, un doigt sur la main droite et zéro sur la main gauche* », « le cube rouge du train-cubes correspond à la portion du schéma-*train/ligne représentée par l'unité* coloriée (le w*agon rouge) et à l'annonce à deux mains* : un doigt sur la main droite et zéro sur la main gauche ». Ainsi, pour cet exemple d'énoncé, le représenté, le cube rouge du train-cubes a pour représentant la portion du schéma-train/ligne, représentant qui devient le représenté de l'annonce à deux mains. De plus, en mettant en relation le schéma-train/ligne et le train-cubes avec la représentation corporelle, les élèves expérimentent le rôle du zéro.

Il semble que l'énonciation doit toujours bien différencier/mettre en correspondance le système et le modèle, la référence et la représentation.

---

[90] Le 0 est un élément neutre pour l'addition, x étant un nombre x + 0 = 0 + x = x (l'élément neutre additionné à un nombre donne ce nombre comme somme).

Par la suite, PES2 demande à Zélie de tracer le schéma-pont représentant la première sous-collection (un doigt levé sur la main droite). Pour cela, elle mime le tracé de ce schéma-pont sur le schéma-train/ligne et montre un exemple de schéma-pont sur la production d'un schéma-train correspondant à l'annonce « 3 et 3 » affiché au tableau. Zélie trace le schéma-pont au-dessus de la première unité coloriée en rouge et le désigne par le nombre « 1 ».

Nous observons ici une position topogénétique haute de cette professeure débutante. Elle s'exerce dans une forme de contrat qu'on pourrait décrire comme un « faire cours » dans l'action conjointe. Elle fait preuve d'ostension par la traduction d'un train-cube sur un schéma-train/ligne et par la construction des schémas-ponts. L'élaboration de ces capacités de traduction, rappelons-le, a été mise en évidence dans l'analyse des épisodes précédents.

A la suite de cet épisode, PES2 demande à Félicien de tracer le schéma-pont représentant la réunion des deux sous-collections présentes sur un schéma-train. Cet élève demande au tdp 46 « quel grand pont ? ». La professeure oriente l'attention de Félicien vers le même exemple que pour Zélie et montre les trois schémas-ponts tracés (celui des deux sous-collections et de la réunion de celles-ci). Elle demande à Félicien « combien de cubes il y a à colorier » (tdp.49). Il propose alors de colorier un cube. PES2 continue et l'interroge sur le nombre de cubes que le grand pont va réunir en montrant un cube vert.

Il apparaît ici qu'il y ait une incertitude de la part de PES2 face au savoir en jeu. En effet, l'enjeu est ici que les élèves comprennent que la réunion (la mesure) de deux sous-collections dont la seconde est nulle est égale au cardinal (à la mesure) de la première. Cependant, le vocabulaire de PES2 est ambigu puisqu'elle demande à Félicien combien de cubes sont à colorier et montre de surcroit un cube vert (le train-cube représentant le lancer). Félicien semble répondre aux attentes de la professeure puisqu'il trace un schéma-pont réunissant deux unités, et une unité (peut-être celle du lancer).

La professeure, titulaire de la classe, prend la parole et demande à Félicien où se termine le wagon de Zélie au tdp 58. Il apparaît que P fasse référence à la représentation d'une unité sur le schéma-train/ligne pour orienter l'action de Félicien vers la représentation correcte du schéma-pont sans mettre en évidence le fait que ce soit la représentation correspondante à l'annonce « 1 et 0 ».

A la suite, PES2 montre l'unité du schéma-train/ligne colorié et le fait correspondre avec le train-cubes (un cube rouge). Félicien trace alors correctement le pont de la somme de l'annonce (une unité). PES2 met elle-même les éléments du milieu en relation. Félicien suit les orientations de PES2.

P, professeure titulaire de la classe, indique dans ces commentaires que pour Félicien, la tâche de tracer ce grand pont dans cette situation où il n'y a qu'une collection et en plus d'un seul cube était à ce moment-là déjà « énorme » au niveau compréhension pour cet élève.

PES2 fait correspondre le train-cubes de l'annonce avec l'unité représentée sur le schéma-train/ligne puis montre la seconde unité. Elle justifie le fait qu'elle ne soit pas comprise dans le schéma-pont car qu'elle n'est pas coloriée. La professeure ne renvoie pas à ce que dénote cette représentation sur le schéma-train/ligne, c'est-à-dire « 1 et 0 ». Il n'y a pas ici de justification mathématique de la part du professeur, pas de retour sur la propriété du zéro en tant qu'élément neutre. Il semble ici qu'il y ait une diminution de la densité épistémique dans la mesure où les enjeux mathématiques (les propriétés de l'élément neutre dans l'addition) que cet épisode recèle s'évaporent.

Pour conclure, PES2 revient sur un des enjeux de savoir de cet épisode, la comparaison d'une annonce à deux mains avec un lancer de dé à six faces. PES2 propose elle-même cette comparaison au tdp 62 « Comme le nombre de wagons, de wagons dans le train » en montrant un cube vert dans sa main. PES2 est ici expressive vis-à-vis du milieu puisqu'elle met en relation les éléments du milieu, le schéma-train/ligne de l'annonce et le train-cubes du lancer. Néanmoins, l'usage de deux types de représentations différents pour la comparaison (un schéma-train/ligne et un train-cubes) peut engendrer chez les élèves une incompréhension, voire une désorientation quant à ce que réfère chaque représentation. Par exemple, ici le train-cubes vert est utilisé par la professeure de manière indifférente pour le train-cubes du lancer comme celui de l'annonce. La question que l'on peut de même se poser est si le schéma-pont vert tracé sur le schéma-train/ligne de l'annonce désigne pour le professeur le résultat du lancer. Le milieu élaboré par PES2 est ambigu ainsi que les relations qu'elle construit entre chaque élément de celui-ci.

2.3.3. Synthèse de l'analyse de l'extrait 3

L'étude de cet épisode montre comment est introduit dans le milieu un nouveau système de représentation, le schéma-train/ligne (dont la présentation n'est pas prévue par le texte curriculaire du module 1) sans que PES2 le présente comme tel. En effet, il est utilisé ici de manière similaire au schéma-train. Les élèves trace les ponts en fonction des unités du schéma-train. Il reste donc une représentation analogique graphique/symbolique. Il ne semble pas y avoir ici de construction d'une nouvelle capacité liée à l'usage du schéma-train/ligne. Il apparaît néanmoins que cette représentation recèle une part de concrétude moins importante et

une part d'abstraction plus importante que le schéma-train. Les élèves doivent, non plus, reproduire graphiquement le train-cubes mais doivent faire correspondre une annonce à deux mains ou un train-cubes avec un segment d'une demi-droite mais toujours en relation avec la grandeur d'une collection

Dans ce jeu d'apprentissage « Faire traduire et comparer une décomposition de deux sous-collections et une collection de points par différentes représentations du nombre : les mains, les trains-cubes et le schéma-train/ligne », les transactions ne semblent pas autoriser un réel travail dans le milieu par les élèves. En effet, la professeure oriente fortement, et de manière explicite les actions de l'élève, dans la construction des trains-cubes comme dans la représentation du schéma-train/ligne. L'élève, d'une certaine manière, fait comme le professeur lui dit de faire, sans avoir à travailler par lui-même le problème de la mise en correspondance des représentations. Toutefois, le système capacitaire construit antérieurement par les élèves de la classe pourrait être suffisant pour qu'ils puissent opérer sans trop de difficulté (puisque le schéma-train/ligne est présenté comme un analogue du schéma-train).

Ainsi, la place topogénétique de la professeure face aux systèmes de représentation est ici continûment haute dans la mesure où elle donne directement aux élèves les réponses aux questions posées. Nous pouvons conjecturer que si la professeure est longtemps dans cette position, la densité épistémique du travail des élèves va s'affaiblir. En effet, les élèves ne semblent pas pouvoir réexpériencier par eux-mêmes les capacités construites précédemment. Il n'y a donc pas de place pour l'entraînement, pour la répétition qui permet l'incorporation du modèle d'action (Sensevy, 2016), l'intégration d'un geste (Billeter, 2010). PES2 prend en charge les mises en correspondance. Si elle laisse les élèves construire les trains-cubes de l'annonce et du lancer et la représentation du schéma-train/ligne, c'est de manière très guidée, en prenant l'essentiel de la responsabilité épistémique au sein des transactions. Elle produit un geste « classique » de monstration-explication.

La construction d'une capacité de comparaison entre systèmes de représentation comme moyen de preuve et de modélisation d'une situation de comparaison reste dans cet extrait en retrait par rapport à celle de traduction. Les analyses produites ne permettent pas d'attester raisonnablement de la construction ou non de certaines capacités chez les élèves telles que la capacité de traduction et de comparaison entre les systèmes de représentation ainsi que celle liée à la propriété de l'élément neutre dans l'addition.

3. Entrée dans l'écrit : le module 2

Nous nous centrons maintenant sur le module 2 qui propose une continuation du jeu des annonces avec un passage de l'oral à l'écrit. Les élèves produisent une écriture additive à deux termes (chaque terme est ≤ 5 et la somme est ≤ 6) et la comparent avec un nombre usuel issu d'un lancer de dé à six faces. Ce module introduit le signe mathématique « + » pour désigner la réunion de deux collections et les signes « = et ≠ ».

Pour notre étude de l'avancée des savoirs et l'usage des systèmes de représentation nous nous appuierons sur les séances 1 et 2 de ce module se déroulant respectivement le 27 septembre et le 3 octobre 2013. Ces séances sont maintenant mises en œuvre par P, professeure titulaire de la classe et membre de l'équipe de recherche depuis 2011. Elle participe à la conception des séances du domaine « Situations » et implémente l'ensemble de la progression ACE dans sa classe depuis septembre 2012.

Les questions que nous pouvons soulever sont :

- La situation du jeu des annonces à l'écrit (module 2) permet-elle une continuité de l'expérience des élèves ?

- Comment sont réinvesties, dans l'action conjointe, les capacités de désignation des nombres sous forme de deux sous-collections, de traduction et de comparaison des systèmes de représentation dans ce module ?

- Comment sont reliées les écritures mathématiques, les représentations symboliques aux représentations concrètes (matérielles comme analogique) ?

Dans un premier temps, nous étudierons comment est introduite l'écriture symbolique, comment dans l'action conjointe se construit une capacité de désignation écrite d'un nombre sous forme additive. Puis, dans un second temps, nous analyserons comment les systèmes de représentation sont réinvestis dans cette nouvelle situation.

3.1. Introduction de l'écriture mathématique

Cette première séance du module 2, « passage à l'écrit » se déroule le 27 septembre soit une semaine après la séance 4 du module 1 dont certains épisodes ont été analysés dans la section précédente. Cette séance se centre sur la production et la comparaison d'une écriture additive à deux termes et d'un nombre usuel.

3.1.1. Présentation de la première séance du module 2

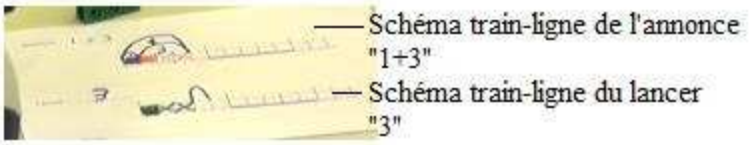
Nous décrirons tout d'abord de manière succincte la séance d'anticipation[91] mise en œuvre le 26 septembre 2013, juste avant la séance plénière. Ce dispositif regroupait cinq élèves de niveau hétérogène, Félicien, Lou, Bérénice, Emma et Louis. Ces élèves ont travaillé spécifiquement sur l'introduction du signe « + » et sur la mise en correspondance entre une écriture additive à deux termes avec une annonce produite à deux mains, un train-cubes et un schéma-train/ligne. Dans un second paragraphe, nous présenterons plus spécifiquement la séance 1 du module 2

3.1.1.1. La séance d'anticipation

P, professeure titulaire de la classe, regroupe autour d'elle cinq élèves de niveau hétérogène[92]., quatre élèves moins avancés mais pour des raisons différentes (Lou, Félicien, Emma et Louis) et une élève avancée, Bérénice (élève très discrète). Elle leur présente une feuille sur laquelle est notée une écriture additive à deux termes « 1 + 3 » et deux schémas-trains/lignes (pour représenter l'annonce et le lancer).

Dans une première phase, la professeure demande aux élèves de faire correspondre l'écriture additive « 1 + 3 » avec une annonce à deux mains et un train-cubes. Puis elle lance un dé à six faces dont le résultat est de « 3 ».

Dans une seconde phase, les élèves travaillent sur la comparaison entre « 1 + 3 » et le nombre « 3 ». Pour cela, P juxtapose les trains-cubes du lancer et de l'annonce. Les élèves énoncent le résultat de la comparaison. Puis, une élève, Emma, représente sur le schéma-train/ligne l'annonce en coloriant une unité en bleu et trois en rouge. Bérénice trace les schémas-ponts de l'annonce et note le nombre désignant chaque sous-collection. Pour le lancer, Félicien colorie trois unités sur le second schéma-train/ligne. Lou tente de représenter le schéma-pont comme nous le montre le photogramme ci-dessous (cf. Photogramme 15).



Photogramme 45: représentation de l'annonce et du lancer sur le schéma train-ligne

[91] Nous ne reviendrons pas spécifiquement sur les séances d'anticipation dans ce travail de thèse.
[92] Les autres élèves de la classe sont en autonomie.

Emma prend alors la main et trace correctement le schéma-pont du lancer et note le cardinal de la collection représentée. La professeure, sous la dictée des élèves, note la lettre « P » pour perdu sur la dernière ligne de la feuille de jeu.

Dans la dernière phase de cette séance d'anticipation, la professeure distribue à chaque élève une feuille de jeu vierge (cf. ci-dessus, Photogramme 45). Les élèves y produisent une écriture additive à deux termes qu'ils comparent au résultat d'un lancer de dé à six faces en s'appuyant sur deux schémas train-ligne. Pour cela, P leur demande de produire une annonce à deux mains et de la traduire oralement en usant du mot « plus » (et non plus la conjonction de coordination « et »). Chaque élève écrit sur sa feuille de jeu l'écriture additive correspondante à son annonce. Seule Lou oublie de mettre le signe « + » entre les deux nombres. La professeure propose alors aux élèves de construire un train-cube relatif à l'écriture additive produite. Lou éprouve des difficultés lors de la construction de son train-cubes représentant l'écriture additive « 2 + 2 » comme nous montre les vignettes ci-dessous.

Photogramme 46 : phases de construction du train-cubes correspondant à l'écriture additve 2+2 par Lou

Grâce à un étayage étroit de la part de P, Lou représente correctement son annonce sous forme de train-cubes.

La professeure demande ensuite aux élèves de représenter leur annonce sur le premier schéma train/ligne de leur feuille de jeu. Chaque élève représente correctement leur annonce en coloriant les unités correspondant à chaque terme (à chaque sous-collection). Néanmoins, Félicien et Lou ne parviennent pas à tracer correctement les schémas-ponts. Ils tracent un pont pour chaque unité du schéma-train et non pour l'ensemble de la sous-collection représentée. De plus, ils éprouvent des difficultés à tracer le schéma-pont de la somme des deux termes (arrêt avant la dernière graduation).

Pour terminer, P lance un dé à six faces. Les élèves complètent le schéma train-ligne correspondant et le comparent avec l'écriture additive produite.

Cette brève description de la séance d'anticipation nous permet de mettre en avant le travail effectué par certains des élèves que nous retrouverons lors des deux séances suivantes.

En effet, un travail spécifique de mise en relation entre la représentation corporelle, l'écriture additive, le train-cubes et le schéma train/ligne y a été réalisé. Les élèves ont ici réinvesti des capacités de traduction et de comparaison. Cette séance a permis de révéler les difficultés de deux élèves, Lou et Félicien (élèves moins avancés) concernant la traduction d'une écriture additive par un train-cubes et la compréhension de l'usage des schémas-ponts sur le schéma-train/ligne.

3.1.1.2. Présentation de la séance 1 du module 2

Nous centrons notre attention sur la séance 1 du module 2 qui introduit l'écriture additive.

Le tableau ci-dessous (cf. tableau 53) nous donne à voir l'organisation de cette séance et la succession chronologique des jeux d'apprentissage en lien avec l'introduction de nouveaux savoirs et les traductions entre les systèmes de représentation du nombre proposées. Pour réaliser ce tableau, nous nous sommes appuyés sur le synopsis (Annexe, 21).

Sujet de la séance	Support	Découpage en jeux d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Présentation du nouveau jeu	Feuille de jeu collective	JA1 : Faire comprendre les nouvelles règles du jeu		
Comparaison d'une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et d'un nombre usuel (≤ 6)	Feuille de jeu collective	JA2 : Faire produire collectivement une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) en appui sur une représentation corporelle et la comparer au résultat d'un lancer de dé à six faces.).	Introduction du signe + et de l'écriture symbolique	Traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition en deux sous-collections à deux mains
Ecriture d'une annonce à deux termes	Sur fiche de jeu individuel	JA3 : Faire produire une écriture additive à deux termes en usant du signe « + »		Traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition en deux sous-collections à deux mains
Recensement à l'oral des écritures additives produites par les élèves	Collectif	JA4 : Faire verbaliser les écritures additives		
Comparaison d'une écriture additive à deux termes avec un lancer de dé à six faces	Fiche de jeu individuelle et collective	JA5 : Faire comparer une écriture additive à deux termes (chaque terme est ≤ 5) au lancer d'un dé à six faces.		
Recensement des annonces gagnantes	Collectif	JA6 : Faire recenser les écritures additives égales au résultat d'un lancer de dé à six faces		

Tableau 53 : Tableau analytique de la séance 1 du module 2

Dans la première phase, une feuille de jeu est affichée au tableau par la professeure (feuille de jeu qui sera, par la suite, distribuée à chaque élève). La professeure introduit la séance en précisant que les élèves vont jouer au jeu des annonces mais cette fois-ci en les écrivant. Elle propose alors à certains d'entre eux de commenter cette feuille. Après que deux élèves se sont exprimés, P écrit son nom sur la feuille de jeu et montre successivement les cinq encadrés contenant trois lignes chacun. Chaque encadré correspondant à une partie effective où les élèves produisent une écriture additive à deux termes, écrivent le résultat du lancer de dé et les comparer en notant « P » pour perdu et « G » pour gagner (l'annonce est gagnante si elle est égale au lancer).

Dans la seconde phase, une élève, Emma, ayant participé au dispositif d'anticipation est invitée par la professeure à jouer une partie au tableau. Emma note sur la feuille de jeu « 5 + 0 » en s'appuyant sur la représentation à deux mains de cette annonce. La professeure lance

un dé à six faces. Une nouvelle élève, Bérénice, vient noter sur la seconde ligne le résultat du lancer, « 2 ». Les élèves échangent pour savoir si l'annonce est égale au lancer. Bérénice note la lettre « P » pour « Perdu » sur la troisième ligne. Dans un troisième temps, la professeure distribue à chaque élève une feuille de jeu. Les élèves jouent cinq parties consécutives. Nous avons découpé chaque partie en trois phases (phase 4, 5 et 6 de la séance, cf. Tableau 53).

Au cours de la phase 3, les élèves notent sur leur feuille une écriture additive. Dans une phase 4, la professeure recense à l'oral les écritures produites. Puis, elle lance un dé à six faces.

Les élèves comparent individuellement le résultat de ce lancer avec l'écriture additive (phase 5). Enfin, la professeure inventorie alors à l'oral les annonces gagnantes (phase 6).

Nous nous centrerons dans les paragraphes suivants sur le début de cette séance et en particulier sur le JA1 « faire comprendre les nouvelles règles du jeu » et le JA2 « Faire produire collectivement une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) en appui sur la représentation corporelle et la comparer à un nombre usuel (≤ 6) ».

Comme nous l'avons précisé dans la partie « Méthodologie » (cf. Chapitre 4), nous justifions le choix de cet extrait par le fait qu'il montre comment les élèves réinvestissent les systèmes de représentation et leur traduction pour appréhender l'écriture mathématique symbolique et notamment l'usage du signe « + ». Nous l'avons découpé en trois épisodes (cf. Tableau 54).

Episode	Extrait 4 : introduction de l'écriture additive
Episode 10	Présentation du jeu des annonces à l'écrit Introduction de la feuille de jeu et explicitation de son organisation
Episode 11	**Représentation corporelle et écriture additive** Production par une élève anticipante d'une écriture additive à deux termes
Episode 12	Introduction du signe « + »

Tableau 54 : découpage en trois épisodes du JA1 et JA2

Lors de l'épisode 10, la professeure propose aux élèves de jouer à un nouveau jeu, le jeu des annonces à l'écrit et affiche au tableau, une feuille de jeu agrandie en explicitant son organisation. Au cours de l'épisode 11, une élève anticipante, Emma, est invitée à jouer une partie, en collectif. Elle produit une écriture mathématique qui est mise en relation avec une annonce à deux mains.

Le dernier épisode (épisode 12), quant à lui, voit l'introduction du signe « + ».

Notre centration sur les deux premiers jeux d'apprentissage va nous permettre de voir comment la professeure et les élèves s'y prennent ensemble pour gagner au jeu. Le savoir en

jeu apparaît ici être le passage d'une désignation orale des nombres inférieurs ou égaux à six à une désignation écrite.

Comment les capacités construites dans le module 1, la situation orale du jeu des annonces est réinvestie dans le module 2 avec le passage à une situation écrite ? Comment s'organise dans l'action conjointe cette continuité ?

Nous reprenons brièvement les capacités construites lors des deux modules précédents :

- capacité de désignation orale d'un nombre sous forme de deux sous-collections (à deux mains) ;

- capacité de traduction de deux sous-collections (annonce à deux mains) et d'une collection par un train-cubes et un schéma-train (et un schéma-train/ligne) ;

- capacité de comparaison de deux sous-collections (annonce à deux mains) et d'une collection (constellation de points sur un dé) ;

- capacité de comparaison des systèmes de représentation entre eux (schéma-cube, et schéma-train).

3.1.2. Introduction du nouveau jeu (épisode 10)

Nous nous focaliserons sur le premier épisode (épisode 10) de cette première séance du module 2. Il se situe au tout début de la séance pendant la présentation du jeu par P au cours du jeu d'apprentissage identifié ci-avant « Faire comprendre les règles du jeu ». Il donne à voir comment la professeure prend appui sur les connaissances antérieures des élèves pour construire de nouvelles capacités. La transcription ci-dessous (cf. Transcription 20) présente l'introduction de la nouvelle situation.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:00:00.0)	1	P	Aujourd'hui on va continuer à jouer au jeu des annonces sauf qu'au lieu de jouer au jeu des annonces tous ensemble, en groupe à sa table en levant les doigts, on va écrire les annonces. Alors, je vais donner tout à l'heure [P affiche au tableau une feuille de jeu, cf. photogramme 47 ci-dessous] à chacun d'entre vous des feuilles qui ressemble à ça. [P pose sa main sur la feuille au tableau] Sauf qu'elle sera plus petite. Est-ce que vous avez des choses à me dire à propos de cette feuille-là ? Je t'écoute Neil.

Transcription 20 : Présentation du jeu des annonces écrit (Annexe 22)

Ainsi, P présente la nouvelle situation aux élèves au tdp1 « *Aujourd'hui on va continuer à jouer au jeu des annonces sauf qu'au lieu de jouer au jeu des annonces tous ensemble, en* groupe en levant les doigts, on va écrire les annonces ».

Cet énoncé professoral montre comment P prend appui sur les connaissances antérieures des élèves issues de leur expérience du jeu des annonces à l'oral (module 1) pour introduire l'écriture additive. En effet, il semble qu'elle dise cela dans une continuité du type suivant : « au lieu de jouer en groupes au jeu des annonces, on va écrire ». La (nouvelle) règle définitoire du contrat didactique est de « jouer au jeu des annonces à l'écrit ». Les élèves vont réexpériencier la capacité construite précédemment « désignation orale des nombres inférieurs ou égaux à six sous forme de deux sous-collections » en la faisant évoluer vers une « désignation écrite des nombres (≤ 6) sous forme d'une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) ». La professeure énonce ici, de manière implicite, le fait qu'on joue au "jeu des annonces" avec les contraintes inhérentes du jeu (termes ≤ 5 et somme de l'écriture additive ≤ 6). Cette règle définitoire contraint donc l'action des élèves. Puis, P affiche au tableau une feuille de jeu agrandie composée de cinq encadrés représentant les parties à jouer. Le photogramme ci-dessous donne à voir comment s'organise cette feuille de jeu.

Cinq parties avec chacune:
- une ligne pour produire une écriture à deux termes;
- Une ligne pour écrire le résultat du lancer de dé à six faces;
- une ligne pour le résultat de la comparaison

Annonce :
Lancer :
G/P :

Photogramme 47 : feuille de jeu agrandie au tableau avec la reproduction de l'organisation d'une partie ci-contre.

Chaque partie se compose d'une première ligne sur laquelle les élèves produisent une écriture additive à deux termes, une seconde où ils notent le résultat du lancer de dé et une troisième où ils écrivent le résultat de la comparaison entre l'écriture additive et un nombre usuel (G/gagné et P/perdu).

Notre analyse se poursuit avec l'étude d'un second épisode (épisode 11) où une élève anticipante produit une écriture additive à deux termes.

3.1.3. Episode 11, représentation corporelle et désignation écrite

Cet épisode montre comment, dans l'action conjointe, la mise en traduction de deux représentations du nombre autorise l'avancée des savoirs.

3.1.3.1. Description de l'épisode 11

Une partie de jeu des annonces est jouée collectivement. La transcription (cf. Transcription 21) ci-dessous donne à voir comment, dans les transactions, se déroule la découverte de ce nouveau jeu.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:02:23.8)	15	P	(…) Alors, tiens, je voudrais bien que Emma euh, vienne ici et m'écrive une annonce sur la feuille, tu veux bien ?
(0:02:41.9)	16	Emma	Oui [Emma prend le crayon que lui tend P]
(0:02:43.1)	17	P	Tu fais une annonce. Alors, vous voyez que c'est la partie 1 [P montre avec son index le tableau 1]. Vas-y, écris l'annonce, ton annonce. [Emma écrit sur la feuille de jeu sur la ligne de l'annonce]
(0:02:54.8)	18	Emma	Mince
(0:02:55.3)	19	P	Bon, tu vas recommencer à côté. Est ce qu'elle est finie ton annonce ? Tu la fais avec tes mains cette annonce-là, s'il te plaît. [P prend dans les *mains d'Emma le crayon. Emma produit une annonce sur deux mains,* cinq doigts sur la main gauche et poing fermé sur la main droite]. Alors est ce que vous pensez qu'Emma a fini d'écrire son annonce, là ?
(0:03:12.0)	20	Els	Oui, non
(0:03:13.5)	21	P	Ben, qu'est-ce que tu as écrit Emma ?
(0:03:17.1)	22	El	Cinq et zéro [inaudible]
(0:03:19.0)	23	P	Qu'est-ce que tu as écrit Emma ? [P place son index sur l'annonce écrite]
(0:03:19.8)	24	Emma	Cinq
(0:03:21.2)	25	P	Cinq. Alors t'as parlé d'une main. Est-ce que tu as parlé d'une autre main ?
(0:03:24.7)	26	Emma	Non
(0:03:25.2)	27	P	Ben alors dépêche-toi de, d'écrire ce que tu as fait avec ton autre main [Emma écrit un 0 à la suite du 5]. Qu'est-ce que tu as oublié, Emma ? Tu te rappelles ce que l'on a travaillé ensemble quand on était là, hier [P montre le fond de la classe avec son index]. Quand on écrit l'annonce, qu'est-ce qu'on doit faire ?
(0:03:40.3)	28	Emma	On doit lever les mains.

Transcription 21 : Ecriture additive et annonce à deux mains (Annexe 22)

La professeure demande à Emma, une élève moins avancée ayant participé au dispositif d'anticipation, de venir au tableau produire une annonce au tdp 15 « je voudrais bien que Emma euh, vienne ici et m'écrive une annonce sur la feuille ». P lui montre la première ligne de la première partie et dit au tdp 19 « Tu fais une annonce. Alors, vous voyez que c'est la partie 1. Vas-y, écris l'annonce, ton annonce ». Il s'avère que l'annonce produite par Emma

ne comporte que le nombre « 5 ». La professeure intervient au tdp 19, « Tu la fais avec tes mains cette annonce-*là, s'il te plaît* » (cf. photogramme 48). Emma produit alors une annonce avec cinq doigts sur la main gauche et zéro sur la main droite comme nous le montre le photogramme ci-dessous.

Photogramme 48 : mise en traduction d'une annonce à deux mains et d'une écriture additive, cf. tdp 19

La professeure suggère à Emma de comparer son annonce à deux mains avec l'écriture produite (« 5 ») sur la feuille de jeu au tdp 23 « *qu'e*st-ce que tu as écrit Emma ? » en montrant le nombre écrit sur la première ligne. Emma nomme le nombre « 5 » au tdp 24. P reprend au tdp 25 « *Cinq, alors t'as parlé d'une main. Est-ce que tu as parlé d'une autre* main ? ». Emma répond alors par la négation. P reprend au tdp 27 « Ben alors dépêche-toi *de, d'écrire ce que tu as fait avec ton autre main* ». Emma écrit un 0 à la suite du 5.

3.1.3.2. Eléments d'analyse, épisode 11

Face à l'écriture erronée de l'élève (dont l'écriture de l'annonce ne comprend qu'un seul terme « 5 »), la professeure oriente l'action de l'élève vers la traduction de cette écriture par une représentation corporelle à deux mains. Elle s'appuie ainsi sur des connaissances construites précédemment, la désignation orale d'un nombre sous forme de deux sous-collections. P est expressive vis-à-vis du contrat en orientant l'action d'Emma vers du connu mais reste réticente vis-à-vis du milieu, c'est-à-dire la mise en correspondance de l'écriture mathématique et la représentation corporelle.

P guide l'attention d'Emma par des questions « Cinq. Alors t'as parlé d'une main. Est-ce que tu as parlé d'une autre main ? » au tdp 25. La professeure amène donc l'élève à construire une mise en correspondance entre le nombre « 5 » écrit au tableau et sa main gauche. Puis, elle oriente l'élève vers une mise en relation de la main droite « poing fermé » et de l'écriture symbolique. P s'exprime donc sur la traduction entre l'écriture additive et l'annonce produite à deux mains sans néanmoins dévoiler directement le savoir en jeu, la représentation de l'annonce produite sous forme d'écriture additive à deux termes.

La professeure use du verbe « parler » pour mettre en correspondance les deux représentations du nombre et exprimer le processus de représentation. Il apparaît par cet énoncé que la professeure veuille mettre en évidence que les représentations symbolique et corporelle expriment le même concept mathématique, le nombre comme mesure d'une quantité, « deux langages pour le même concept ». P renvoie donc l'élève vers la référence concrète, vers ce que dénote l'écriture symbolique.

Dans cet épisode, en premier lieu, les mains sont le représentant et l'écriture symbolique le représenté. En second lieu, la mise en relation s'inverse, les mains sont le représenté, et l'écriture symbolique le représentant. Il y a donc bien ici un processus de représentation réciproque entre une représentation abstraite (« 5 ») et une représentation concrète du nombre (cinq doigts sur la main gauche et zéro sur la main droite).

La professeure, par son expression, sa réticence, et donc par l'équilibre particulier qu'elle instaure dans la double dialectique, crée une continuité entre la représentation corporelle d'une décomposition additive en deux sous-collections et l'écriture symbolique c'est-à-dire entre le module 1 et le module 2. Les doigts dénotent ainsi l'écriture symbolique et réciproquement.

3.1.4. Ecriture additive, le signe « + »

L'épisode 12 voir l'introduction du signe « + » pour désigner la réunion de deux collections.

3.1.4.1. Description de l'épisode 12

L'enquête sur la représentation mathématique d'une annonce continue et se centre sur le signe « + » (cf. Transcription 22).

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:03:25.2)	27	P	Ben alors dépêche-toi de, d'écrire ce que tu as fait avec ton autre main [Emma écrit un 0 à la suite du 5]. Qu'est-ce que tu as oublié, Emma ? Tu te rappelles ce que l'on a travaillé ensemble quand on était là, hier [P montre le fond de la classe avec son index]. Quand on écrit l'annonce, qu'est-ce qu'on doit faire ?
(0:03:40.3)	28	Emma	On doit lever les mains.
(0:03:41.5)	29	P	Oui mais quand on écrit l'annonce ? il n'y a pas quelque chose ?
(0:03:44.0)	30	El	Il faut mettre le zéro derrière.
(0:03:46.1)	31	P	Ah, non, il est très bien là le zéro.
(0:03:48.8)	32	El	Non, il faut laisser un peu d'espace.
(0:03:49.1)	33	P	Et oui, il faut laisser un peu d'espace. Mais qu'est-ce qu'on met dans cet espace-là ? Qui était avec moi hier qui se souvient comment on faisait.

			Ah, qu'est-ce qu'on avait fait Lou hier ?
(0:03:57.4)	34	Lou	[Inaudible]
(0:03:58.2)	35	P	Ben oui Chloé elle n'était pas avec moi hier mais elle sait. Viens Lou, Chloé, plutôt venir écrire l'annonce d'Emma en pensant à tout ce qu'il faut écrire. Non, ça y est, il est ouvert ton feutre. [Chloé écrit sur la feuille au tableau]
(0:04:22.6)	36	El	Elle a fait un x
(0:04:22.9)	37	P	Alors, elle a fait ?
(0:04:25.1)	38	El	Un x
(0:04:26.1)	39	P	Un x. Est-ce que c'est le plus ça ?
(0:04:28.1)	40	Els	Non
(0:04:29.2)	41	P	Non, alors tu vas et tu recommences encore à côté. Chut, attends, laisse-moi faire, laisse-moi faire. Je barre et hop tu recommences à côté s'il te plaît *[P prend le crayon de la main d'Emma et barre les écritures* erronées puis redonne le crayon à Emma. Emma écrit sur la feuille de jeu]. Ah, alors, je vous l'écris en gros, cinq plus mais on se rappelle que quand on écrit plus, on ne fait pas une croix comme ça, hein ? [P écrit le nombre 5 puis un signe "+" et écrit une croix qu'elle efface]. On fait une croix avec un bâton bien droit qui descend et un autre bien droit dans l'autre sens. Cinq plus zéro. Ça c'est ton annonce. C'est ce qu'on écrit dans la première ligne [P montre la première ligne du tableau 1]. Dans la deuxième ligne, il y a encore des pointillés.

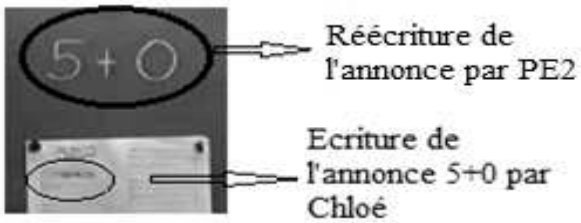
Transcription 22 : introduction du signe "+" (Annexe 22)

Après avoir produit une annonce sur ses deux mains « 5 et 0 », Emma écrit « 50 » sur la feuille de jeu du tableau. P fait alors appel à la mémoire de cette élève[93] au tdp 27 « *qu'est*-ce que tu as oublié Emma *? Tu te rappelles ce que l'on a travaillé ensemble quand on était là, hier. Quand on écrit l'annonce, qu'est-ce qu'on doit faire* ? ». Emma propose alors de lever les mains. P précise alors sa question au tdp 29 « *Oui mais quand on écrit l'annonce ? il n'y a* pas quelque chose ? ».

Le collectif s'empare alors cette question. Ainsi, un premier élève, au tdp 30, propose de déplacer le « 0 » derrière le nombre « 5 ». Un second élève, au tdp 32, propose de laisser un espace « Non, il faut laisser un peu d'espace ». P rebondit alors sur cette remarque en renvoyant au collectif la question de « *qu'est-ce qu'on met dans cet espace*-là » au tdp 33. Chloé est invitée par la professeure à venir au tableau compléter l'écriture produite. Elle note le signe « x » entre le «5 » et le « 0 ». Un élève fait remarquer au tdp 36 que Chloé a écrit le signe « x ». La professeure questionne le collectif sur l'usage de ce signe au tdp 37 « alors,

[93] Emma, comme on l'a vu, a participé à une séance d'anticipation la journée précédente au cours de laquelle est introduit par la professeure l'écriture additive et le signe « + » en référence à une annonce à deux mains et un train-cubes.

elle a fait ? » et au tdp 39 « un x? Est-*ce que c'est le plus ça* ? ». Chloé rectifie son écrit et note sur la feuille de jeu « 5 + 0 » que P réécrit en plus grand sur le tableau (cf. photogramme 49). P conclut au tdp 39 « Cinq plus zéro. Ça c'est ton annonce ».



Photogramme 49: production d'une écriture additive à deux termes

3.1.4.2. Eléments d'analyse de l'épisode 12

Face à l'écriture produite par Emma – « 50 » pour désigner l'annonce « 5 et 0 » – la professeure demande ce qu'il faut faire lorsqu'on écrit une annonce (tdp 27). Emma propose de lever les mains, un autre de laisser un espace. P renvoie cette réponse au collectif en posant la question de ce qu'il faudrait mettre dans cet espace (tdp 33).

Devant la difficulté d'Emma à produire une écriture additive correcte, P fait appel au collectif et sélectionne l'énoncé qui lui semble pertinent, « laisser un espace » qui va orienter l'attention des élèves sur un « manque, une absence de notation » dans l'expression mathématique produite. P fait appel à la mémoire didactique des élèves ayant participé au dispositif d'anticipation au tdp 33 « Qui était avec moi hier qui se souvient comment on faisait ? ».

Il apparaît que P soit réticente vis-à-vis du milieu puisqu'elle ne dévoile pas le signe à utiliser pour produire une écriture mathématique correcte. Cependant, elle attire l'attention des élèves sur le travail réalisé en séance d'anticipation tout en taisant son contenu. Nous observons ici une gestion professorale de l'expression et de la réticence très subtile dans la mesure où elle amène certains élèves à se remémorer la situation proposée dans la séance d'anticipation tout en taisant le contenu de savoir. L'intention professorale semble être ici que les élèves anticipants puissent réinvestir leur connaissance sur l'écriture en actualisant un milieu ancien dans une nouvelle situation (Quilio, 2012). Cependant, nous remarquons que l'expérience de la situation proposée dans le cadre du dispositif d'anticipation n'est pas réinvestie par ces élèves, même par les élèves avancés qui y participaient. Le signe mathématique « + » comme signe matériel et comme assembleur entre deux collections désignées par deux nombres, en tant que syntaxe de l'addition (Serfati, 2005), ne semble pas faire signe aux élèves.

La professeure fait donc appel à une autre élève, Chloé (non anticipante). Elle écrit le signe « x » entre « 5 et 0 » pour désigner l'expression « plus ». Cette élève se corrige et écrit par la suite le signe « + ». Le système capacitaire construit antérieurement ne semble pas a priori permettre aux élèves de traiter de manière adéquate le milieu-problème. Néanmoins, c'est une élève n'ayant pas abordé cette connaissance qui résout le problème posé.

La position topogénétique des élèves est ici haute dans la mesure où ils agissent en première main dans le milieu, assument la responsabilité de l'avancée du temps didactique.

Les capacités émergentes de l'action conjointe des épisodes 11 et 12 pourraient être nommées de la façon suivante :

- capacité de traduction entre une écriture additive à deux termes et une décomposition sous forme de deux sous-collections produite avec les mains ;

- capacité de désignation par une écriture additive (chaque terme ≤ 5) à deux termes d'un nombre (≤ 6).

Nous observons ici une cohérence dans la continuité des savoirs dans la mesure où la professeure établit des liens entre les connaissances antérieures des élèves et le nouvel enjeu de savoir, l'écriture additive à deux termes. Ce lien se fait par la construction d'une mise en relation entre deux représentations, l'écriture symbolique et la représentation corporelle, entre la représentation abstraite et la représentation corporelle, matérielle.

3.2. Usage des systèmes de représentation

Après avoir analysé comment est introduit l'écriture symbolique au sein du module 2 du domaine « Situations », nous nous focaliserons sur la séance 2. Elle montre comment les systèmes de représentation sont réinvestis dans la comparaison d'une écriture additive à deux termes et un nombre usuel. Cette seconde séance se compose de deux phases distinctes comme nous montre le tableau suivant (cf. Tableau 55).

Sujet de la séance	Support	Découpage en jeux d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Discussion autour des parties du jeu des annonces produites lors de la séance précédente	Affichage des productions des élèves (feuille de jeu) de la séance 2 du module 2	Faire vérifier les comparaisons entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel produites par les élèves en usant des systèmes de représentation et de l'écriture symbolique	Introduction du signe mathématique « = » et « ≠ »	Traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition produite à deux mains et par le schéma-train/ligne. Traduction de la comparaison par une égalité ou une inégalité.
Comparaison d'une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et d'un lancer de dé à 6 faces.	Une feuille de jeu par élève. Jeu par équipe avec lancer du dé à six faces par l'arbitre	Faire produire une écriture additive à deux termes et la comparer avec un nombre usuel.		

Tableau 55 : Tableau analytique de la séance 2 du module 2

La première phase concerne la mise en discussion de productions d'élèves issues de la troisième phase de la séance précédente « *Comparaison d'une écriture additive à deux termes* avec un lancer de dé à six faces ». Lors de la seconde phase, les élèves jouent par équipe au jeu des annonces à l'écrit. Ils notent sur leur feuille de jeu une écriture additive à deux termes qu'ils comparent avec le résultat du lancer de dé à six faces effectué par l'élève arbitre.

Nous nous intéresserons à la première phase de cette séance au cours de laquelle les élèves s'expriment sur les résultats de la comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel. La professeure a recensé certains résultats de comparaisons réalisés par les élèves lors de la séance précédente et les a affichés au tableau. Les élèves discutent collectivement autour de ces productions. Nous avons nommé ce jeu d'apprentissage « Faire vérifier les comparaisons produites entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel en usant des systèmes de représentation ».

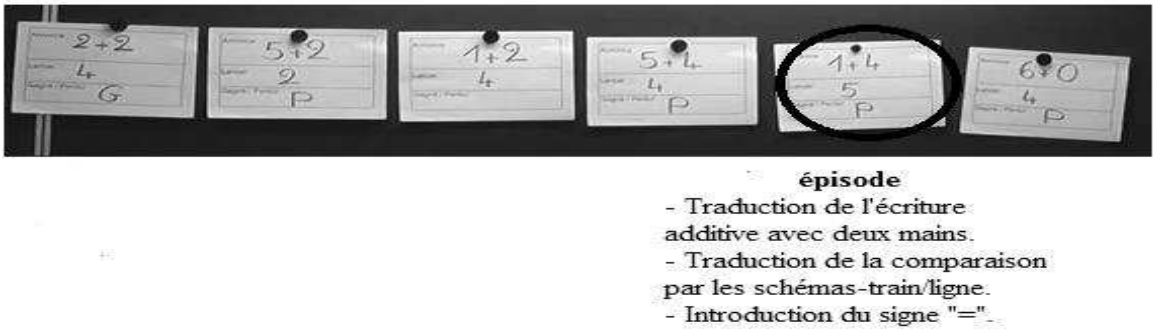
Les élèves abordent ce milieu-problème avec un système capacitaire construit lors des séances précédentes soit au cours du module 1 (capacité récente) ou lors de la séance 1 du module 2 (capacité très récente).

- Capacité de traduction d'une écriture additive à deux termes par une décomposition sous forme de deux sous-collections produites avec deux mains (capacité très récente) ;
- Capacité de désignation d'un nombre (≤ 6) par une écriture additive (chaque terme ≤ 5) à deux termes (capacité récente) ;

- Capacité de traduction d'une décomposition sous forme de deux sous-collections produites avec deux mains par un train-cubes, un schéma-train/ligne (capacité récente).

Dans ce jeu d'apprentissage, le système de représentation schéma-train/ligne est utilisé pour vérifier le résultat d'une comparaison entre une écriture additive et un nombre usuel. Le professeur y introduit les signes mathématiques « = » et « ≠ » pour désigner le résultat des comparaisons (sous forme d'une égalité et d'une inégalité).

Nous nous focaliserons sur un extrait (Extrait 5) qui se situe au cœur du jeu d'apprentissage précité. Il se déroule lors de la discussion collective autour de certaines productions d'élèves que nous donne à voir le photogramme ci-dessous (cf. Photogramme 50).



Photogramme 50 : sélection des épisodes analysés

Cet extrait 5 nous parait intéressant (comme nous l'avons précisé dans le chapitre « Méthodologique » (cf. Chapitre 4)) car il montre comment, dans l'action conjointe, les mises en traduction entre les systèmes de représentation du nombre autorisent l'introduction d'un nouveau concept mathématique, l'égalité.

Il se découpe de la manière suivante :

Episode	Extrait 5 : traduction, égalité et inégalité
13	Proposition de Maxime : 1+4 =14 -Mise en analogie avec l'annonce à deux mains
14	Proposition de Juliette 1+4 est une annonce gagnante et non perdante Usage du schéma-train/ligne pour justifier le résultat de la comparaison entre 1+4 et 5.
15	Introduction du signe « = »

Tableau 56: vision synoptique de l'extrait 5

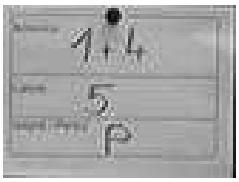
Nous étudierons tout d'abord le premier épisode (épisode 13) au cours duquel un élève revient sur la feuille de jeu « 1 + 4 ; 5 ; P ». Puis, nous étudierons le second épisode (Episode 14) où le schéma-train/ligne est utilisé pour vérifier le résultat de la comparaison proposée. Enfin,

nous étudierons le troisième épisode (Episode 15) qui clôt cet extrait et introduit le signe « = ».

3.2.1. Episode 13, comparaison et représentation corporelle

3.2.1.1. Description de l'épisode 13

Ainsi, après avoir affiché au tableau six productions d'élèves de la séance 1 du module 2, la professeure demande au collectif de s'exprimer sur les comparaisons proposées. Maxime choisit de discuter sur la production « 1 + 4 ; 5 ; P » (cf. photogramme 51).



Photogramme 51 : discussion autour de la comparaison de "1 + 4" et "5"

La transcription ci-dessous donne à voir cette discussion autour de cette production.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:06:45.3)	1	Maxime	L'annonce un plus quatre, et ben ça fait quatorze.
(0:06:53.5)	2	P	L'annonce un plus quatre, ça fait quatorze. Alors ?
(0:06:56.8)	3	Els	Non
(0:06:57.9)	4	P	Alors, tu vas venir ici, tu m'intéresses énormément [P abaisse la feuille de jeu au tableau]. L'annonce un plus quatre fait quatorze. Fais-moi l'annonce s'il te plait. Chut, chut, fais-moi l'annonce s'il te plait [Maxime se place dos au tableau et montre quatre doigts sur sa main droite un doigt sur sa main gauche]. Bon t'as levé quatorze doigts ? [Sourire de la part de Maxime]. Compte tes doigts s'il te plait.
(0:07:18.3)	5	Maxime	Un, deux, trois, quatre, cinq [Maxime compte ses doigts un à un]
(0:07:23.0)	6	P	Qu'est-ce que vous en pensez ?
(0:07:24.4)	7	Els	Oui, oui.
(0:07:25.6)	8	P	Donc l'annonce un plus quatre, ça fait cinq.
(0:07:31.4)	9	El	C'est bien ça.

Transcription 23 : Ecriture symbolique et annonce à deux mains (Annexe 24).

Maxime, au tdp 1, énonce oralement le fait que « *l'annonce un plus* quatre, et ben ça fait quatorze ». La professeure renvoie vers le collectif l'énoncé de Maxime au tdp 2. Les élèves infirment le résultat de cette addition au tdp 3. P demande alors à Maxime « L'annonce un plus quatre fait quatorze. Fais-moi l'annonce s'il te plait ». Maxime vient au tableau et montre

quatre doigts sur sa main droite et un doigt sur sa main gauche comme nous montre le photogramme ci-dessous (cf. photogramme 52).

Photogramme 52 : traduction de l'écriture "1 + 4" par une annonce à deux mains

La professeure demande alors à Maxime de compter le nombre de doigts qu'il a levé toujours au tdp 3 « Bon t'as levé quatorze doigts ? Compte tes doigts s'il te plait ». Maxime sourit et dénombre un à un les doigts levés à voix haute jusqu'au nombre 5. P renvoie alors le résultat trouvé par Maxime « 5 » vers le collectif par une question au tdp 6 « Qu'est-ce que vous en pensez ? ». Les élèves confirment le résultat et P énonce au tdp 8 « Donc l'annonce un plus quatre, ça fait cinq ». Les élèves acquiescent.

3.2.1.2. Analyse de l'épisode 13

Face à la remarque de Maxime concernant le résultat de la somme « 4 + 1 », P oriente l'élève vers la traduction de l'écriture mathématique par une représentation corporelle (avec deux mains), comme dans l'épisode précédent (épisode 12). Pour cela, elle énonce simplement « L'annonce un plus quatre fait quatorze. Fais-moi l'annonce s'il te plait ». Elle propose donc d'introduire dans le milieu-problème un nouvel élément, une nouvelle représentation connue des élèves. Elle s'exprime donc vis-à-vis du contrat, des connaissances antérieures construites lors de la séance précédente (capacité de traduction entre une écriture additive à deux termes et une décomposition sous forme de deux sous-collections produite avec les mains). Cependant, elle reste réticente quant à la mise en relation de l'écriture additive et l'annonce à deux mains. Elle laisse l'élève réexpériencier cette capacité dans une nouvelle situation. Ainsi, elle fait appel à la mémoire didactique de l'élève. On a donc ici une relation complexe entre mémoire didactique qui permet de « réveiller » une capacité et la nouvelle situation au sein de laquelle il s'agit de faire vivre cette capacité.

P instaure donc un certain jeu représentationnel, l'écriture additive (le représenté) devient une annonce à deux mains (le représentant) dans un processus de représentation. Il y a donc un retour à la référence, à ce que l'écriture additive dénote dans la réalité (la réunion de deux sous-collections). Le nombre désigne de manière concrète la mesure d'une grandeur (le nombre de doigts levés sur les deux mains). La professeure laisse donc l'élève faire

l'expérience de cette mise en traduction sans néanmoins s'exprimer ou laisser l'élève s'exprimer réellement sur la signification du signe mathématique « + ». En effet, l'erreur produite par Maxime au début de cet épisode, « 1 + 4 = 14 » semble montrer des difficultés classiques dans l'usage des signes mathématiques (Pascal, 1980), qui peuvent s'expliquer dans la priorité problématique accordée par les élèves à la lexis (une manière d'user des signes sans les associer à la pratique qu'ils dénotent), sur la praxis (la pratique mathématique à laquelle on peut référer ces signes ou systèmes de signes). Par la traduction de l'écriture mathématique par deux sous-collections, cette difficulté semble contournée (comptage de l'ensemble des doigts levés), mais sans toutefois que soit mis en lien la réunion des deux mains et le signe « + ».

Il apparaît que le système capacitaire de Maxime, c'est-à-dire les connaissances qu'il a construites précédemment, ne lui permettent pas encore de traiter le problème posé de manière adéquate. En effet, la signification du signe « + » comme réunion de deux nombres, parait en cours de construction. Le milieu symbolique mathématique, les nombres « 1 + 4 » tels qu'ils sont placés au tableau ne semblent pas, dans un premier temps, fournir de signification, par référence à la pratique mathématique, l'autorisant à produire une stratégie gagnante (additionner les deux termes de l'écriture additive pour calculer la somme). Le processus de représentation, de traduction suggérée par P entre l'écriture additive et une annonce autorise alors une avancée du temps didactique puisqu'il révèle à l'élève l'inadéquation de sa réponse face à la comparaison proposée sur la feuille de jeu ("1 + 4").

3.2.2. Episode 14, représentation et comparaison

Le second épisode (épisode 14, cf. Tableau 56) de la séance 2 du module 2 se centre sur l'usage du schéma-train/ligne pour justifier le résultat d'une comparaison d'une écriture additive à deux termes « 1 + 4 » avec un nombre usuel « 5 » (feuille de jeu, cf. Photogramme 50). Il se déroule entre la septième et quatorzième minute de la séance.

Les élèves, lors de la discussion précédente autour cette feuille de jeu, ont découvert que l'annonce était gagnante (égale au lancer) et non perdante comme cela était inscrit sur la feuille. La professeure affiche alors au tableau une feuille sur laquelle deux schémas-train/ligne sont tracés et demande si un élève peut venir y tracer les ponts pour représenter l'annonce « 1 + 4 ».

3.2.2.1. Description de l'épisode 14

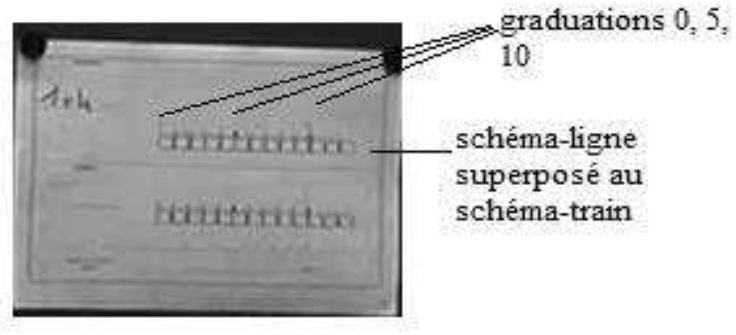
La transcription (cf. Transcription 24) ci-dessous donne à voir comment cette comparaison est justifiée par l'usage des représentations.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:09:25.4)	28	P	Attends, attends, on parle des autres après. On s'est arrêté, tu perds pas tes idées sur les autres annonces. Tu veux bien Victor ? On finit de s'occuper de celle-là [P montre l'annonce 1 + 4 inscrite sur la feuille de jeu] pour vérifier si Juliette nous dit bien la vérité, qu'elle a bien gagné. Alors, qu'est-ce que tu vas nous faire pour nous parler de l'annonce un plus quatre ? [Louis se trouve devant la feuille avec les schémas-train/ligne]. Tu as besoin de quelque chose ? [Louis prend un crayon]. Et bien vas-y. + Alors, qu'est-ce que tu vas faire pour parler du un et pour parler du quatre ?
(0:09:55.8)	29	Els	Je sais, je sais.
(0:09:58.2)	30	P	Louis tu as levé le doigt pour nous dire que tu voulais venir alors tu nous fais.
(0:10:02.6)	31	Louis	Un
(0:10:03.1)	32	P	Alors, tu vas nous faire un et quatre. Alors qu'est-ce que tu vas nous faire ?
(0:10:07.7)	33	Louis	Un pont
(0:10:08.2)	34	P	Un petit pont vas-y. [Louis trace un pont de 1 de la graduation 0 à la graduation 1]. Un petit pont qui fait quoi ?
(0:10:11.1)	35	Louis	Un
(0:10:11.7)	36	P	Alors écarte toi un peu, je montre [P prend Louis par le bras et le place à droite de la feuille de jeu]. Est-ce que vous voyez le petit pont que Louis vient de faire ? [PE2 montre avec son index le pont dessiné par Louis]
(0:10:15.3)	37	Els	Oui
(0:10:17.6)	38	P	Il vient de faire un petit pont de combien, ça ?
(0:10:19.9)	39	Els	Un
(0:10:20.0)	40	P	Un, donc ça parle de ça [P montre le premier terme de l'addition] Ok. Très bien Louis. Et qu'est-ce que tu vas me faire maintenant ? [Louis positionne son crayon sur la troisième graduation du schéma-train/ligne]
(0:10:30.6)	41	El	Pas là.
(0:10:31.4)	42	P	Ah, vous n'êtes pas d'accord ?
(0:10:33.3)	43	El	Si
(0:10:34.9)	44	El	Non parce que il y a deux lignes en bas et une en haut.
(0:10:36.8)	45	P	Oui mais attend il faut, là pour l'instant, il est sur la ligne, le train des annonces. [Louis trace un pont qui part de la seconde graduation et qui s'arrête à la cinquième graduation]. Est-ce que vous êtes d'accord avec lui ?
(0:10:50.6)	46	Els	Oui
(0:10:50.6)	47	P	Oui, c'est bien. Comment, alors ça c'est un pont de combien ? [P montre le second pont avec son index]
(0:10:55.4)	48	Louis	Quatre.
(0:10:56.5)	49	P	Comment tu sais qu'il y a quatre, là ?
(0:10:59.7)	50	Louis	J'ai compté.
(0:10:59.8)	51	P	Où est-ce que, t'as compté où ? T'as compté quelque part ? Montre-nous. Explique-nous, fais à voix haute ce que tu as compté dans ta tête,

			s'il te plait. Parce que c'est très bien, simplement.
(0:11:10.4)	52	Louis	J'ai compté sur mes doigts.
(0:11:10.6)	53	P	T'as compté sur tes doigts, ça m'étonnerait que tu aies compté sur tes doigts, lorsque tu étais en train de faire ça. Est-ce que par hasard, est-ce que par hasard, tu aurais compté les wagons qui sont là ? [P montre les quatre unités du schéma-train/ligne]
(0:11:21.5)	54	Louis	Oui
(0:11:21.7)	55	P	Ah ouais, alors, je vais vérifier. les oreilles, les oreilles sont ouvertes oui et les yeux aussi. Est-ce que Félicien voit ?
(0:11:29.6)	56	Félicien	Oui
(0:11:30.1)	57	P	Louis ne te dérange pas. Alors ici, y a un wagon, Louis a fait le pont de 1. D'ailleurs moi au-dessus, je vais écrire un [P met la pointe de son crayon au centre du premier wagon et écrit le nombre un au-dessous du premier pont]. Et ici, maintenant je compte, un, deux, trois quatre wagons pour parler du quatre [P place la pointe de son crayon dans les deuxième, troisième, quatrième et cinquième wagon du schéma-train/ligne puis montre le second terme de l'annonce et écrit le nombre quatre au-dessous du second pont] et Louis a fait le pont de quatre et il y a combien de wagons dans ce train-là, Louis ? Dans le train un plus quatre ? [P trace un pont en dessous du schéma-train/ligne à partir de la graduation 0 jusqu'à la cinquième]

Transcription 24 : comparaison d'une écriture additive et d'un nombre (Annexe 24)

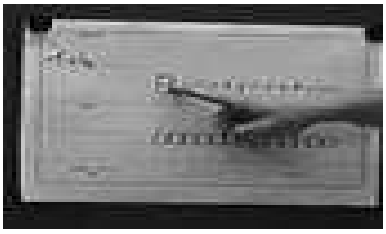
Après la mise en correspondance par Maxime de l'écriture symbolique avec une représentation corporelle, Juliette prend la parole et fait remarquer que pour « 1 + 4 ; 5 ; P » (cf. Photogramme 50), l'erreur se trouve sur la ligne du résultat de la comparaison « P ». La professeure affiche alors au tableau une feuille sur laquelle se trouvent deux schémas-train/ligne pour représenter respectivement l'annonce et le lancer. Sur la troisième ligne sera notée l'écriture mathématique correspondant au résultat de cette comparaison (cf. photogramme 53, ci-dessous).



Photogramme 53 : Comparaison de deux schémas-train/ligne pour justifier une comparaison

La professeure justifie l'introduction de la feuille ci-dessus en énonçant au tdp 28 « pour *vérifier si Juliette nous dit bien la vérité, qu'elle a gagné* ». Puis, elle questionne Louis « Alors, qu'est-ce que tu vas nous faire pour nous parler de l'annonce un plus quatre ?». Cet élève propose au tdp 31 « un ». P reprend la parole au tdp 32 « Alors, tu vas nous faire un et

quatre. Alors qu'est-ce que tu vas nous faire ? ». Louis suggère de dessiner un pont au tdp 33. La professeure l'encourage au tdp 34 « un petit pont, vas-y, un petit pont qui fait quoi ? » et Louis trace un schéma-pont réunissant le premier intervalle du schéma-train/ligne que P montre ensuite à l'ensemble de la classe au tdp 36 comme nous le montre le photogramme ci-dessus.

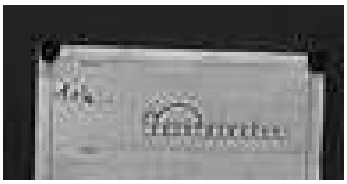


Photogramme 54 : monstration par P du schéma-pont de "1"

Après que les élèves ont proposé le nombre « 1 » au tdp 39 en réponse à la question de P « Il vient de faire un petit pont de combien, ça ? ». La professeure fait alors glisser son index du schéma-pont vers le premier terme de l'écriture additive à droite de la feuille et dit au tdp 40 « Un, donc ça parle de ça » (cf. Photogramme 55, ci-dessous).

Photogramme 55 : mise en relation par P du schéma-pont de "1" avec le premier terme de l'écriture additive

La professeure demande à Louis toujours au tdp 40 « et qu'est-ce que tu vas me faire maintenant ? ». Louis positionne alors son crayon sur la troisième graduation du schéma-train/ligne. Certains élèves de la classe l'informent au tdp 41 que ce n'est pas là « pas là ». La professeure rebondit sur cette remarque et relance vers le collectif « *vous n'ête*s pas *d'accord* ? » au tdp 43. Un élève répond par l'affirmative tandis qu'un second répond par la négative au tdp 44 « *non, parce qu'il y a deux lignes en bas et une ligne en haut* ». P recentre alors l'attention des élèves sur le premier schéma-train/ligne, celui de l'annonce. Louis trace un second schéma-pont de la deuxième graduation à la cinquième (correspond au second terme de l'écriture additive). P demande au groupe classe s'il est d'accord. Les élèves répondent par l'affirmative au tdp 46. Le photogramme ci-dessous montre le schéma-train/ligne de l'annonce (cf. photogramme 56).



Photogramme 56 : représentation du second terme de l'addition sur le schéma-train/ligne

P questionne alors Louis « Comment, alors ça *c'est* un pont de combien ? » en montrant avec son index le second schéma-pont. Louis propose le nombre « 4 » au tdp 48. P lui demande de justifier cette réponse « Comment tu sais qu'il y a quatre, là ? » au tdp 49. Il répond « J'ai compté », tdp 50. La professeure intervient pour que Louis précise sa réponse au tdp 51 « où est-*ce que, t'as compté où ? T'as compté quelque part* ? Montre-nous. Explique-nous, fais à voix haute ce que tu as compté dans ta tête, s'il te plait ». Louis répond qu'il a compté sur ses doigts. P relance Louis au tdp 53 « est-ce que par hasard, tu aurais compté les wagons qui sont là ? ». L'élève répond par l'affirmative. La professeure reprend la main et dirige son discours vers le collectif pour expliciter les relations entre les schémas-ponts, les unités du schéma-train/ligne et l'écriture additive au tdp 57 comme nous donne à voir les six vignettes ci-dessous (cf. Photogramme 57)

Photogramme 57 : Mise en analogie, écriture symbolique, schéma-train/ligne, schéma-pont, tdp 56.

3.2.2.2. Eléments d'analyse de l'épisode 14

Dans un premier temps, la professeure donne les raisons de l'usage du schéma-train/ligne en précisant qu'il permet de vérifier le résultat de la comparaison de l'écriture additive et du lancer (ici l'annonce « 1 + 4 » est gagnante car égale au nombre « 5 »). Le travail d'expression de la professeure est ici "sémantiquement dense" dans la mesure où elle use du terme « vérité » au tdp 28 « pour vérifier si Juliette nous dit bien la v*érité, qu'elle a bien* gagné » en montrant l'annonce « 1 + 4 ». Elle use, de même, du verbe « parler » ; toujours au tdp 28 « qu'est-ce que tu vas nous faire pour nous parler de l'annonce un plus quatre ? ».

La professeure s'exprime donc, dans un premier temps, en fournissant les raisons de l'usage du schéma-train/ligne comme instrument de validation (« la vérité ») de la comparaison entre

une écriture additive et un nombre. Puis, dans un second temps, elle s'exprime sur l'action que doit réaliser les élèves, c'est-à-dire « parler » sur le schéma-train/ligne de l'annonce « 1 + 4 ». Mais ces deux énoncés professoraux renvoient dans le même mouvement à la réticence car la professeure ne dit pas comment représenter cette annonce et comment user les représentations pour valider la comparaison.

Elle renvoie donc les élèves vers un contrat de traduction, vers la capacité de traduction d'une écriture additive par un schéma-train/ligne élaboré dans un passé récent, lors de la séance 4 du module 1. En effet, la professeure semble vouloir exprimer simplement le fait que la représentation symbolique (l'écriture chiffrée) doit pouvoir être parlée, être traduite par la représentation analogique/symbolique (le schéma-train/ligne) dans la mesure où celles-ci réfèrent à la même réalité mathématique. Elle oriente donc l'action de l'élève vers un processus de représentation.

Puis, Louis propose de venir au tableau pour parler du un et du quatre (tdp 28). La professeure lui demande ce qu'il va faire au tdp 32. Par cet énoncé, elle plonge Louis dans le milieu en le laissant explorer par lui-même les éléments du milieu et leur mise en relation. En effet, Louis suggère de tracer un schéma-pont (au tdp 33). P accompagne cette proposition en reprenant le terme utilisé par cet élève mais en y ajoutant l'adjectif « petit » (au tdp 34 « Un petit pont *(...). Un petit pont qui fait quoi ?* »). La professeure centre l'attention de cet élève sur la traduction entre la portion du schéma-train/ligne et le nombre qu'il désigne. Par la suite, la professeure reprend la main et montre à l'ensemble de la classe avec son index le schéma-pont d'un intervalle de « 1 » que Louis vient de tracer et le premier terme de l'addition.

Il nous semble ici, dans cette micro-situation, que P incite Louis à endosser le rôle de « référent à la traduction » pour toute la classe. Elle infère l'état épistémique de cet élève, ses connaissances liées à la traduction d'une écriture additive sur un schéma-train/ligne. Puis, dans un second temps, elle propose une mise en correspondance concrète de la portion du schéma-train/ligne représentée par un schéma-pont avec le premier terme de l'addition. Elle les montre successivement en questionnant le collectif sur le nombre désignant ce pont et en le rapprochant de l'écriture additive « un, donc ça parle de ça » au tdp 40. P, dans cette micro-institutionnalisation, fait concrètement le lien entre la portion du schéma-train/ligne et l'écriture additive par sa gestuelle. Néanmoins, elle ne donne pas les valeurs numériques, elle laisse les élèves faire la relation entre le nombre « 1 » désignant le schéma-pont et le premier terme de l'addition.

Dans la suite de cet épisode, P demande à Louis au tdp 40 « Et qu'est-ce que tu vas me faire maintenant ? ».

Cet élève positionne alors la pointe de son crayon sur la troisième graduation. Un élève de la classe réagit en en disant « pas là ». Louis trace alors un schéma-pont de la première graduation à la cinquième graduation.

L'expression de P, quant à la suite de la représentation de l'écriture additive sur le schéma-ligne/train, reste vague. En effet, elle n'oriente pas l'attention de l'élève ni sur le second terme de l'addition « 4 », ni sur le schéma-train/ligne. Elle laisse Louis continuer son enquête dans le milieu. Il est intéressant de noter ici que la régulation du jeu se fait non pas par la professeure mais par les élèves eux-mêmes qui influent sur la stratégie adoptée par l'élève au tableau. P reprend par des énoncés d'accompagnement les énoncés des élèves.

La professeure, par une succession de questions/réponses, interroge alors Louis sur la stratégie adoptée pour tracer correctement le schéma-pont de quatre intervalles. Louis énonce, dans un premier temps, qu'il a compté. P reprend cet énoncé et lui demande des précisions « *t'as compté où, t'as compté quelque part* ? (tdp 51) ». Louis répond en disant qu'il a compté sur ses doigts (tdp 52). P met en doute le fait qu'il ait vraiment compté sur ses doigts et oriente alors la réponse de Louis au tdp 53 en lui demandant s'il a utilisé les wagons en montrant les quatre unités du schéma-train présent en dessous du schéma-ligne. Louis répond par l'affirmative.

Nous observons que Louis propose de tracer le schéma-pont désignant le premier intervalle du schéma-train/ligne, le premier terme de l'annonce sans passer par le coloriage de la première unité du schéma-train (juxtaposé au schéma-ligne). Il semble que Louis n'ait plus besoin de représenter de manière visible le cardinal de la collection qu'il doit désigner sur le schéma-train/ligne. Il s'appuie sur les intervalles présents sur ce schéma, sur la suite des nombres. Louis n'ayant pu répondre aux attentes de P, celle-ci prend la main et s'exprime directement sur une stratégie. En effet, elle s'appuie sur une capacité de traduction d'un nombre sur un schéma-train que les élèves ont expériencés dans des situations variées depuis le module 0. Nous conjecturons que P veut, ici, rendre publique une stratégie de production de schéma-pont sur un schéma-train/ligne et ainsi la rendre accessible à l'ensemble des élèves. Pour cela, elle évoque une connaissance antérieure des élèves relativement ancienne mais non encore maîtrisée par tous les élèves (cf. description de la séance d'anticipation), notamment les élèves moins avancés.

Pour terminer, la professeure pointe la première unité (c'est-à-dire le premier « wagon » du schéma-train) du schéma-train/ligne en énonçant le nombre désignant son cardinal, « un wagon ». Puis, elle fait correspondre cette sous-collection avec le schéma-pont au moyen de la pointe de son crayon en s'exprimant « Louis a fait un pont de un ». Elle écrit alors le nombre correspondant au-dessus du schéma-pont. Puis, P s'exprime sur le second terme de l'écriture additive « 4 », en comptant une à une les unités de la portion du schéma-train/ligne que le pont réunit. Elle montre le second terme de l'écriture symbolique en disant « je compte un, deux, trois, quatre pour parler du quatre » au tdp 57. La procédure de comptage est ici favorisée par P pour ancrer solidement les significations du schéma-ligne à travers la correspondance avec le schéma-train. Pour finir, elle écrit le cardinal désignant la sous-collection représentée par le schéma-pont « 4 ». Par un jeu de langage particulier lié à un jeu représentationnel, dans une forme de vie (Wittgenstein, 2004), P fait correspondre précisément chaque élément du milieu. Ainsi, en premier lieu, une portion du schéma-train/ligne, le premier intervalle (le représenté), est désignée par le schéma-pont réunissant une unité (le représentant). Ce dernier devient à son tour représenté et est traduit par un nombre désignant le cardinal de la collection « 1 » (le second représentant).

En second lieu, les quatre unités suivantes du schéma-train (le représenté) sont mises en relation avec le second terme de l'écriture additive « 4 » (le représentant). Le nombre « 4 » vient alors désigner le nombre représentant le second schéma-pont du schéma-train/ligne.

Le tableau ci-dessous donne une vision synoptique des mises en traduction proposées par P :

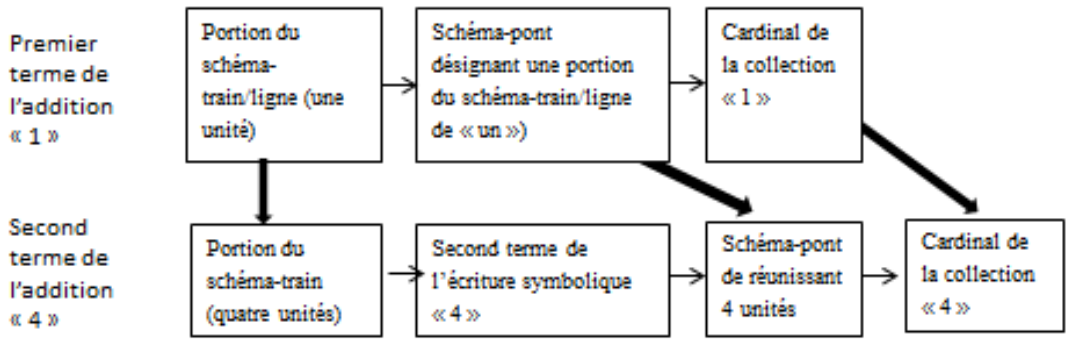


Tableau 57 : processus de représentation réciproque

Ainsi, le travail énonciatif et monstratif du professeur propose la mise en traduction entre différentes représentations :

- le schéma-train/ligne, représentation analogique/graphique/symbolique composée d'unités discrètes (le schéma-train), un nombre y est représenté sous forme d'une collection d'unités le

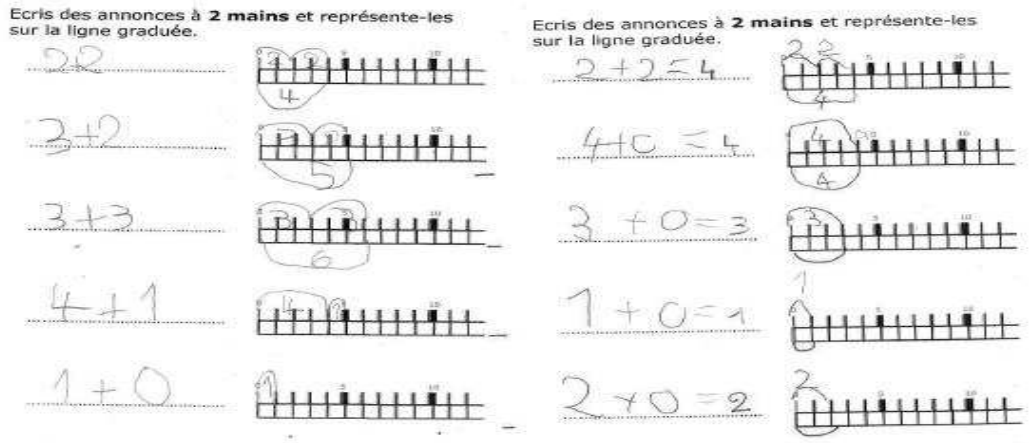
"train") et une ligne numérique dont les unités sont désignées par des intervalles et des graduations ;

- le schéma-pont, représentation graphique/symbolique qui met en correspondance l'ensemble des éléments d'une collection et son cardinal, sa mesure ;

- les nombres et les écritures mathématiques, représentations symboliques représentant les concepts mathématiques.

La référence concrète, la représentation corporelle (annonce à deux mains) et matérielle (le train-cubes) tend à laisser la place à une référence graphique/analogique/symbolique (la représentation sur le schéma-train/ligne), l'écriture symbolique mathématique renvoie à la représentation sur le schéma-train/ligne puis ce dernier devient représentant de l'écriture symbolique.

Nous introduisons ci-dessous un extrait de Journal du Nombre de deux élèves. Cet extrait (cf. Photogramme 58) donne à voir comment à partir d'une écriture additive qu'ils se sont eux-mêmes donnée, ces élèves les traduisent sur un schéma-train/ligne. Il y a ici traduction d'une représentation symbolique mathématique par une représentation analogique/graphique/symbolique donnant à voir la mesure de grandeur que désignent les nombres (par exemple, « 2 » désigne deux unités ou une portion du schéma-train/ligne de deux).



Photogramme 58 : Extraits de deux Journaux du nombre

3.2.3. Episode 15, introduction de l'égalité mathématique

3.2.3.1. Description de l'épisode 15

Après ce travail de représentation de l'écriture additive sur le schéma-train/ligne, P trace le schéma-pont représentant la somme de « 1 + 4 ». Puis, elle demande à une autre élève, Lou de représenter le résultat du lancer sur le second schéma-train/ligne (cf. Transcription 25 ci-dessous)

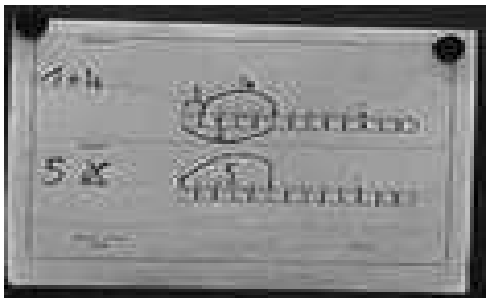
Temps	tdp	Actant	Contenu
(0:12:04.9)	61	P	(…). Alors, c'est sur le train du dé que tu vas te débrouiller. Il a fait cinq. Combien il va y avoir de wagons dans le train ?
(0:12:49.1)	62	El	Cinq.
(0:12:53.5)	63	P	Et regarde ce que tu fais.
(0:12:57.8)	64	Lou	Un pont
(0:12:57.9)	65	P	Un pont de combien ?
(0:13:01.6)	66	Lou	De cinq.
(0:13:02.4)	67	P	Un pont de cinq. Donc il va aller jusqu'où le pont de cinq ? [Lou place la pointe de son crayon sur la première graduation du schéma-train/ligne et déplace son crayon dans les différents wagons]. Tu as le droit de mettre des petits points dans les wagons si tu veux. Un [Lou met des points dans les cinq premiers wagons du schéma-train/ligne et trace un pont de cinq]. Êtes-vous d'accord avec Lou ?
(0:13:22.7)	68	Els	Oui, non.
(0:13:24.1)	69	P	Qui me dit non ? Pourquoi, t'es pas d'accord, Juliette ?
(0:13:28.1)	70	Juliette	Parce qu'il a entouré quatre.
(0:13:31.7)	71	P	Ah, viens ici, parce que euh
(0:13:35.9)	72	Lou	Un, deux, trois quatre, cinq [Lou compte un à un les wagons du schéma-train/ligne du lancer]
(0:13:39.6)	73	Juliette	Ah oui, j'avais pas vu le dernier.
(0:13:41.7)	74	P	T'avais pas vu le dernier. Et puis en plus, en plus, vous ne voyez pas parce que vous êtes loin mais il y avait quelque chose écrit ici [P montre avec son index la graduation cinq], là, juste au-dessus de ce trait-là.
(0:13:49.9)	75	El	Oui, c'était cinq
(0:13:50.7)	76	P	C'est écrit cinq. Alors, tu veux bien m'écrire combien il y a de wagons dans ce pont-là ? [P montre avec son index le pont du lancer. Lou écrit le nombre cinq en dessous du pont]. Super, donc ici on a l'annonce [P montre le schéma-train/ligne de l'annonce] un plus quatre, ça nous fait un train de cinq [P passe avec son index sur le pont désignant la somme de l'annonce]. On a le dé de cinq [P passe avec son index sur le pont désignant le lancer] donc gagné ou perdu ?
(0:14:16.4)	77	Els	Gagné.
(0:14:18.6)	78	P	Alors je vais vous, je vais vous apprendre mais peut-être que vous savez déjà. Baissez le doigt. Je vais vous apprendre une écriture mathématique, euh, on est en train de faire des mathématiques, donc on écrit des mathématiques. Une écriture mathématique pour dire que un plus quatre, peut être que vous savez, c'est pareil que cinq. Un plus quatre [P écrit sur la dernière ligne de la feuille de jeu 1 + 4]. Là je vais mettre quelque chose.

(0:14:43.8)	79	Agathe	Egal.
(0:14:44.7)	80	P	Je vais mettre quelque chose pour dire que c'est pareil et tu connais ce signe qui dit que c'est pareil ? Tu l'appelles égal alors viens ici. Tu le connais toi aussi Briac le signe égal ?
(0:14:56.2)	81	Els	Moi aussi
(0:14:58.1)	82	P	Mais où est-ce que vous avez appris ça vous ?
(0:15:00.4)	83	El	Avec mon grand frère.
(0:15:01.8)	84	El	Moi avec mes parents.
(0:15:04.2)	85	P	Chut, attention, attention, chut [Agathe écrit le signe "="] Attention, stop, stop, stop ; Ben, c'est fou tout ce que vous savez déjà. Regardez le signe qu'Agathe a fait, elle a fait deux petits traits [P montre avec la pointe de son crayon le signe "="] l'un au-dessus de l'autre, égal et alors égale quoi ?
(0:15:20.6)	86	Agathe	Égale cinq
(0:15:21.7)	87	P	Egale cinq [P tend le crayon à Anaïs qui écrit le nombre cinq à la suite du signe "="], ça ça veut dire que un plus quatre, c'est la même chose que cinq, un plus quatre égale cinq [P montre l'écriture additive]. Donc puisque un plus quatre égale cinq donc on a gagné [P écrit la lettre G].

Transcription 25 : comparaison de deux schémas-train/ligne et égalité (Annexe 24)

La professeure demande à Lou, élève moins avancée[94], au tdp 61 « Alors, c'est sur le train du dé, tu vas te débrouiller. Il a fait cinq. Combien il va y avoir de wagons dans le train ? ». Des élèves de la classe répondent au tdp 62 que le train doit comporter cinq wagons. P relance Lou en lui demandant au tdp 63 « regarde ce que tu fais ». Lou précise qu'elle va tracer un pont (tdp 64). P poursuit « Un pont de combien ? », Lou propose de tracer un schéma-pont de cinq unités. La professeure reprend cette proposition au tdp 67 « Un pont de cinq. Donc il va aller jusqu'où le pont de cinq ? ». Lou place alors son crayon sur la première graduation puis le déplace sur les unités du schéma-train. P l'invite à « mettre des petits points dans les wagons » toujours au tdp 67. L'élève compte alors un à un les cinq premières unités du schéma-train et trace un schéma-pont les réunissant. Puis, P demande au collectif s'il est d'accord avec la production de Lou. Une élève, Juliette pense que le schéma-pont de Lou ne réunit que quatre unités. Pour vérifier que le schéma-pont représente bien cinq unités Lou dénombre une à une les unités du schéma-train/ligne (tdp 72). A cette occasion, P présente aux élèves un élément saillant du schéma-train/ligne, la graduation « 5 ». Lou écrit le nombre « 5 » au-dessous du schéma-pont après que P lui ait demandé au tdp 76 « Alors, tu veux bien m'écrire combien il y a de wagons dans ce pont-là ? » comme nous le montre le photogramme suivant (cf. Photogramme 59).

[94] Cette élève pendant la séance d'anticipation ne parvenait pas à construire un train-cubes représentant une écriture additive à deux termes ni à tracer les schémas-pont sur le schéma-train/ligne.



Photogramme 59 : représentation de l'annonce (1+4) et du lancer (5) sur des schémas-trains/lignes

La professeure prend alors la parole et montre avec son index les deux schémas-ponts représentant chaque terme de l'addition sur le premier schéma-train/ligne (de l'annonce) en énonçant « un plus quatre, ça nous fait un train de cinq » au tdp 76. Elle accompagne ce discours en faisant glisser son doigt le long du schéma-pont représentant la réunion des deux sous-collections « 1 et 4 ». Elle montre ensuite sur le schéma-train/ligne du lancer le schéma-pont de cinq unités « On a le dé de cinq, donc gagné ou perdu ? ». Les élèves au tdp 77 répondent « gagné ».

P annonce « je vais vous apprendre une écriture mathématique, euh, on est en train de faire des mathématiques, donc on écrit des mathématiques. Une écriture mathématique pour dire que un plus quatre, peut être que vous savez, c'est pareil que cinq. Un plus quatre » au tdp 78. Elle écrit sur la dernière ligne de la feuille (cf. Photogramme 59), « 1 + 4 » et ajoute « là je vais mettre quelque chose ». Agathe propose au tdp 79 le signe « égal ». P rebondit alors sur cette proposition et reprend au tdp 80 « Je vais mettre quelque chose pour dire que c'est pareil et tu connais ce signe qui dit que c'est pareil ? Tu l'appelles égal alors viens ici. Tu le connais toi aussi Briac le signe égal ». Agathe écrit alors le signe « = » à la suite de « 1 + 4 ». La professeure accompagne la production d'Agathe au tdp 85 « Regardez le signe qu'Agathe a fait, elle a fait deux petits traits l'un au-dessus de l'autre, égal et alors égale quoi ? ». Agathe au tdp 86 propose « égale cinq ». La professeure conclut cet épisode au tdp 87 « Egale cinq, ça ça veut dire que un plus quatre, c'est la même chose que cinq, un plus quatre égale cinq Donc puisque un plus quatre égale cinq donc on a gagné ».

3.2.3.2. Eléments d'analyse de l'épisode 15

Lou, élève moins avancée, a participé à la séance d'anticipation qui s'est déroulée au début du module 2. La description de ce dispositif a mis en évidence les difficultés de cette élève : quant à la traduction d'une écriture additive à deux termes par un train-cubes ; quant à la représentation des deux termes de l'addition par des schémas-ponts sur le schéma-train/ligne.

Pour introduire la recherche de Lou sur la représentation du résultat du lancer sur le second schéma-train/ligne de la feuille de jeu, la professeure lui rappelle le résultat de celui-ci, « 5 ». Puis, elle demande à Lou de traduire ce résultat en fonction du nombre de wagons sur le train (tdp 61). P relance Lou par des questions aux tdp 63 et 65 en lui demandant ce qu'elle va faire, Lou répond « un pont » puis, P reprend « un pont de combien ? » Lou précise que ce schéma-pont fera cinq. Lou compte une à une les unités du schéma-train en plaçant la pointe de son crayon au centre de chaque unité en commençant par le premier wagon (la première unité). P accompagne Lou en lui demandant jusqu'où ira le schéma-pont et en lui proposant de mettre des points dans chaque unité.

La professeure oriente, par ses propos, l'attention de Lou vers l'usage du schéma-train et non vers le schéma-ligne en lui demandant le nombre de wagons dans le train. Nous observons ici que P use d'une forme de différenciation entre Louis (épisode 15) et Lou. En effet, dans l'épisode précédent, nous avons analysé le fait que pour représenter l'annonce sur le schéma-train/ligne, P laissait Louis mener l'enquête en énonçant « *qu'est*-ce que tu vas faire pour parler du un et pour parler du quatre ? » (tdp 28). Dans cet épisode 16, le milieu de l'enquête se trouve modifié puisque l'action de Lou est orientée sur le nombre d'unités que le lancer représente sur le schéma-train et le comptage un à un de ces unités. Cette différenciation didactique ordinaire (Sensevy, 2007) semble avoir comme objectif d'ancrer la signification du schéma-pont en lien avec le schéma-train (réunion d'unités) c'est-à-dire de faire correspondre le schéma-ligne avec celui du schéma-train (correspondance entre les intervalles et les unités). Malgré l'orientation de l'action de Lou par P vers le schéma-train (expression vis-à-vis du contrat de traduction plus ancien), il n'y a pas de relaxation de la réticence de la professeure dans la mesure où elle laisse Lou mettre en lien les éléments du milieu, le résultat du lancer, les unités du schéma-train et le schéma-pont correspondant. Lou parvient à produire le schéma-pont correspondant au lancer et fait avancer le temps didactique de la classe dans une dynamique mésogénétique. Lou, quoiqu'élève moins avancée, endosse le rôle de référent à la traduction pour l'ensemble de la classe et se trouve dans une position topogénétique haute vis-à-vis du savoir en jeu. Elle réexpériencie dans une nouvelle situation la capacité de traduction sur un schéma-train d'une annonce à deux mains.

Dans un second temps, P lui demande d'écrire le nombre désigné par ce schéma-pont en montrant explicitement avec son doigt ce schéma. Lou écrit le nombre « 5 ». P ne fait plus ici référence aux unités composant cette collection mais montre l'ensemble de la collection par sa

gestuelle. Il y a donc un passage d'une représentation d'une grandeur sous forme d'unités individualisées à une grandeur liée au cardinal de la collection.

La professeure conclut en comparant les schémas-train/ligne de l'annonce et du lancer. Elle met ainsi en relation oralement l'écriture additive « un plus quatre » avec les deux schémas-ponts représentant chaque terme de l'addition. Elle les montre explicitement avec son doigt. Puis elle montre le schéma-pont représentant la somme de celle-ci « 5 ». Elle fait de même avec le résultat du lancer en énonçant que le dé a fait cinq et en montrant le schéma-pont du lancer.

P met donc en relation l'écriture additive et le résultat du lancer (le représenté) avec les schémas-ponts sur les deux schémas-train/ligne correspondants (le représentant).

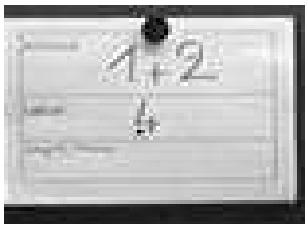
Elle interroge ensuite les élèves sur le gain de la partie « gagné ou perdu ». Les élèves répondent « gagné ». La professeure propose alors de traduire ce gain par une écriture mathématique au tdp 78 « *une écriture mathématique pour dire que un plus quatre (...) c'est* pareil que cinq ». Elle écrit au tableau « 1 + 4 » puis dit « je vais mettre quelque chose ». Agathe propose le signe égal. P renvoie ici le résultat de la comparaison entre les deux schémas-train/ligne, entre une écriture additive et un nombre vers une expression mathématique, un langage mathématique. Pour cela, l'expression de P est subtile puisqu'elle utilise le verbe « dire » pour faire le lien entre l'écriture mathématique de l'égalité et les deux entités « 1 + 4 » et « 5 », ses deux membres. Nous rapprocherons l'usage de ce verbe avec celui de « parler » utilisé lors de l'épisode précédent. Elle propose donc une mise en traduction. De plus, pour faire le lien entre ces deux expressions, elle utilise « c'est pareil ». Ainsi, elle laisse les élèves rechercher le terme mathématique synonyme mais aussi sa graphie. P rebondit sur la proposition d'une élève qui propose le terme « égal » qu'elle vient écrire au tableau. Elle renvoie alors vers le collectif cette écriture en la commentant au tdp 85 « *elle a fait deux petits traits, l'un au-dessus de l'autre, égal et égal*e à quoi ». L'intention de P semble ici de rendre accessible à l'ensemble des élèves de la classe la proposition d'Agathe en ramenant l'attention du collectif vers l'écriture produite au tableau. P demande aux élèves à quoi est égal « 1 + 4 ». Agathe répond à « 5 » et note ce nombre au tableau « 1 + 4 = 5 ». La professeure reprend l'égalité en utilisant des expressions synonymes, c'est « la même chose, c'est égal ». L'introduction d'une nouvelle connaissance, l'écriture d'une égalité entre deux expressions mathématiques est initiée par P. Cependant, elle laisse les élèves prendre la main et être force de propositions. Par l'espace laissé à l'enquête des élèves, P peut s'appuyer sur leurs propositions. Ici, P reste dans une position topogénétique basse en laissant l'élève

produire l'égalité mathématique. Les élèves jouent en première main. P les accompagne par des questions mais sans dévoiler le savoir en jeu. Son rôle principal est d'institutionnaliser le savoir (l'écriture mathématique) en s'assurant que l'ensemble des élèves y ait accès.

3.2.3.3. Eclairage complémentaire, introduction du signe ≠

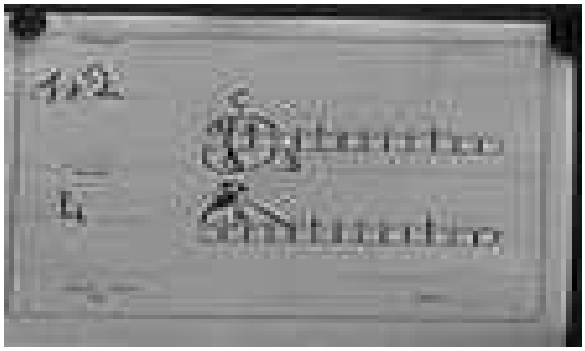
Pour compléter l'analyse de l'épisode précédent et l'éclairer, nous décrirons rapidement ici comment la professeure introduit le signe « ≠ » qui vient coder le résultat d'une comparaison entre une écriture additive à deux termes et un nombre.

Un nouvel élève choisit de discuter sur une nouvelle production d'élève affichée au tableau.



Photogramme 60 : discussion autour de la feuille de jeu affichée au tableau

Sur cette feuille n'est pas indiqué si l'annonce est gagnante ou perdante (G ou P) sur la dernière ligne Après que Victor a énoncé le fait que l'annonce « 1 + 2 » a perdu, la professeure l'invite à vérifier le résultat de cette comparaison sur deux schémas-train/ligne. Victor représente les deux nombres sur ces schémas en traçant des schémas-ponts comme nous le montre le photogramme suivant (cf. Photogramme 64)



Photogramme 61 : Représentation sur deux schémas-train/ligne de "1 + 2 " et "4"

La transcription ci-dessous donne à voir comment est introduit le signe différent (cf. Transcription 26).

(0:19:02.5)	109	P	Non, ils ne sont pas de la même taille. Donc, est ce qu'on va pouvoir écrire égal ?
(0:19:07.5)	110	Els	Non
(0:19:10.0)	111	P	Alors, qu'est-ce qu'on va pouvoir écrire ? On va chercher une idée, tiens

(0:19:13.3)	112	El	Ah, moins.
(0:19:16.4)	113	P	Quelle que chose qui dit [P écrit sur la feuille de jeu du tableau 1 + 3] que ce n'est pas égal.
(0:19:21.1)	114	Els	Moins, moins
(0:19:21.8)	115	P	Moins ?
(0:19:23.1)	116	Els	Moins, égal
(0:19:24.3)	117	P	Mais non, c'est pas égal, on peut pas dire égal.
(0:19:25.2)	118	El	Plus
(0:19:26.4)	119	PE 2	Mais ce n'est pas égal. Chut. Est ce qu'on peut. Stop, stop, stop, stop, là vous êtes en train de crier, je n'aurais pas dû vous poser cette question, là. Alors, moi, je vais vous dire. Tout à l'heure on a dit que quand on faisait les deux traits les uns au-dessus des autres, c'était égal. Alors, là je vais dire, ce n'est pas égal, ce n'est pas pareil, c'est différent, je vais faire le signe égal et pour dire que ce n'est pas pareil [P note le signe "=" et le barre] je le barre. Un plus deux, ce n'est pas pareil que quatre, un plus deux est différent de quatre donc gagné ou perdu ?

Transcription 26 : introduction du signe différent (Annexe 24)

Les élèves comparent les deux schémas-train/ligne et valident le fait qu'ils ne sont pas de la même « taille » (tdp 109). La professeure leur demande alors s'ils vont pouvoir écrire le signe égal. Les élèves répondent par la négative. P les encourage à « chercher une idée » au tdp 111 et écrit au tableau « 1+ 2 ». Les élèves produisent des réponses, notamment autour des signes « -, +, = ». Ils énumèrent donc les signes mathématiques connus et répondent ainsi aux attentes de la professeure. La professeure prend alors la main au tdp 119 « Tout à l'heure on a dit que quand on faisait les deux traits les uns au-dessus des autres, c'était égal. Alors, là je vais dire, ce n'est pas égal, ce n'est pas pareil, c'est différent, je vais faire le signe égal et pour dire que ce n'est pas pareil [P note le signe "=" et le barre] je le barre. Un plus deux, ce n'est pas pareil que quatre, un plus deux est différent de quatre donc gagné ou perdu ? ».

Pour introduire le signe « ≠ », P fait appel à la mémoire didactique des élèves en rappelant la situation précédente où les deux schémas-train/ligne étaient égaux (cf. Episode 16). Elle met ainsi le signe « = » en opposition au signe « ≠ », dans une vision paradigmatique de l'égalité (Brousseau, 1986). Elle l'écrit en prenant soin d'oraliser le fait que c'est le signe égal que l'on a barré. Elle utilise alors des expressions synonymes : "ce n'est pas pareil", "ce n'est pas égal".

Le module 2 introduit l'écriture additive qui vient exprimer mathématiquement une annonce à deux mains.

L'étude de ces épisodes des deux premières séances de ce module 2 tend à montrer l'émergence dans l'action conjointe de nouvelles capacités chez les élèves :

- capacité de traduction d'une écriture additive par une annonce à deux mains ;

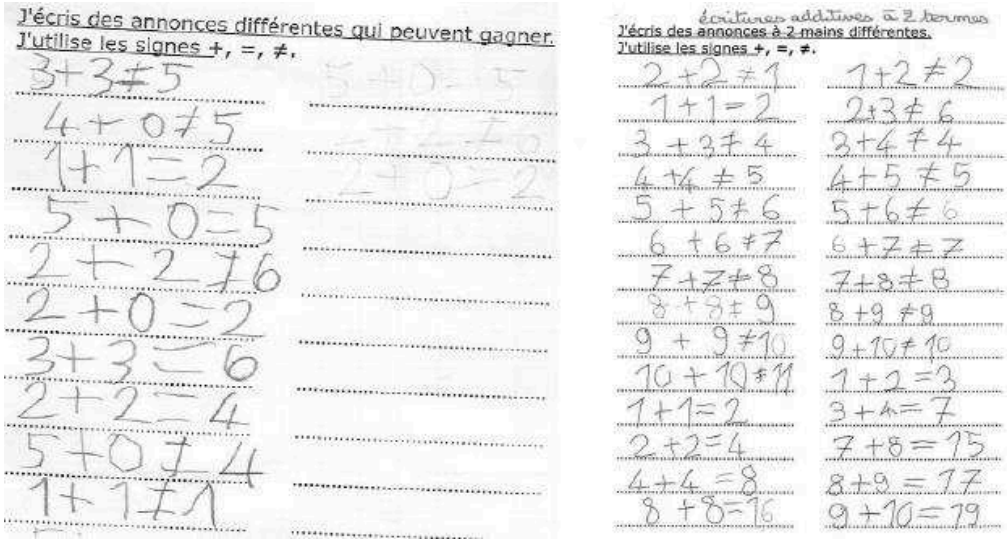
- capacité de désignation d'un nombre sous forme d'une écriture additive à deux termes ;

- capacité d'usage du signe « + » comme assembleur entre deux sous-collections ;

- capacité de traduction d'une écriture additive à deux termes avec un schéma-train/ligne ;

- capacité d'usage des signes « =, ≠ » pour désigner l'égalité ou l'inégalité entre deux nombres.

L'extrait de deux Journaux du Nombre (cf. Photogramme 65) suivant montre comment les élèves réinvestissent les capacités construites précédemment.



Photogramme 62 : Extraits de deux Journaux du Nombre

4. Synthèse du chapitre 6

Dans cette dernière section, nous reviendrons dans un premier temps sur l'usage des systèmes de représentation dans la situation orale et écrite du jeu des annonces puis dans un second temps, sur les différentes stratégies professorales mis à jour dans ce chapitre.

4.1. Systèmes de représentation et continuité didactique

4.1.1. Systèmes de représentation

Les épisodes étudiés lors du module 1 et 2 montrent comment se construit une capacité de traduction par différents systèmes de représentation d'une mesure d'une grandeur désignée

par un nombre, nombre au départ oral puis écrit. Dans l'action conjointe, les élèves construisent des relations explicites entre des représentations corporelles, analogiques/matérielles, analogiques/symboliques et des symboles plus abstraits dans un processus de référence mutuelle (Fyfe et al., 2014). Ce processus s'élabore au sein d'un jeu représentationnel (Sensevy, 2011c) par des jeux d'aller-retour entre chaque représentation.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 58) reprend les différentes représentations utilisées dans ces deux modules :

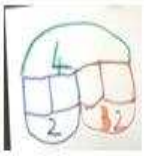
La représentation corporelle : annonce à deux mains	Représentation analogique/matérielle : Le train-cubes	Représentation analogique/graphique/symbolique Le schéma-train	Représentation analogique/graphique/symbolique Le schéma-train/ligne	Représentation symbolique : Ecriture mathématique
				

Tableau 58 : les quatre systèmes de représentation présents dans le milieu

La représentation corporelle d'une décomposition additive sur deux mains, issue d'une expérience réelle (« le jeu des annonces »), est modélisée ensuite sous forme de représentation analogique/matérielle (le train-cubes). La grandeur, ici la taille des deux sous-collections de doigts, est représentée par deux sous-collections de cubes. Cette deuxième forme de représentation concrète d'une décomposition additive en deux sous-collections autorise une première mise à distance de la situation du jeu des annonces en transférant le concept mathématique travaillé sur des objets matériels stables (la représentation sur les mains peut être mouvante). Il y a ici une variation dans la concrétude de la représentation. Le train-cubes pourrait être considéré comme une représentation concrète générique puisqu'elle peut désigner un ensemble plus vaste de décompositions additives et être décontextualisée de la situation réelle (on le voit ici, par exemple, dans la "migration" de cette représentation du module 0 (la situation train/tour) au module 1 (le jeu des annonces)).

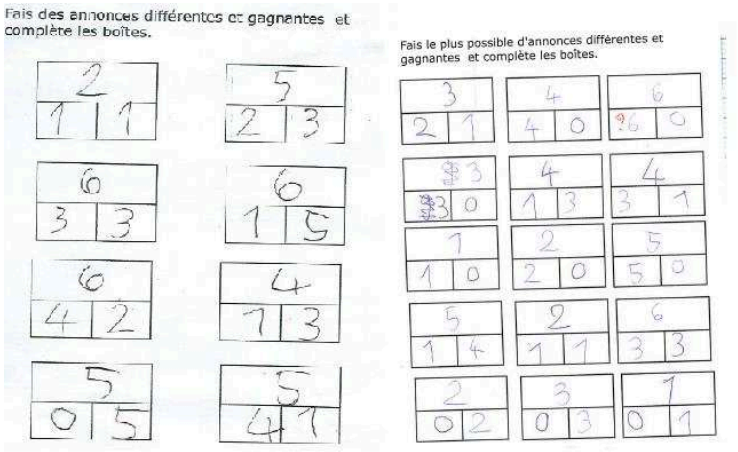
Une troisième représentation est introduite, le schéma-train. Celle-ci peut aussi être vue comme une forme de modélisation d'une décomposition additive. Elle est analogique dans la mesure où elle a une structure similaire au train-cubes avec une suite d'unités discrètes. Elle est un modèle de la réalité, de la matérialité du train-cubes. Le schéma-train, représentation graphique, autorise l'introduction de l'écriture symbolique, le nombre désignant la mesure de la grandeur.

Le schéma-train/ligne apparaît dès le module 1. Il se substitue au schéma-train et va permettre progressivement aux élèves de se familiariser avec l'usage des graduations et des intervalles pour représenter un nombre. Ce nouveau système de représentation montre une abstraction plus importante que le schéma-train dans la mesure où le nombre n'est plus déterminé par un ensemble fini d'unités mais est représenté par une portion, un segment d'une demi-droite. Le nombre va venir désigner une mesure d'une grandeur, celle de la longueur.

Enfin, lors du dernier épisode étudié est introduite *l'écri*ture mathématique venant désigner une égalité ou une inégalité entre deux nombres. L'écriture mathématique élimine ici la référence au concret, aux unités tangibles composant une collection.

La part de concrétude dans les représentations concrètes présentées ici est relative dans la mesure où, par exemple, la représentation matérielle analogique (le train-cubes) contient des objets physiques, ce qui n'est pas le cas pour les représentations graphiques (schéma-train). Mais à terme, elles pourront être considérées par les élèves comme des symboles matériels (Nührenbörger & Steinbring, 2013 ; McNeil & Petersen, 2013).

Dans les extraits que nous avons analysés dans ce chapitre, nous n'avons pas présenté un nouveau système de représentation qui a été introduit lors du module 2, le schéma-boîte[95]. Pour combler cette lacune, nous présentons ci-dessous des extraits de Journaux du Nombre (cf. Photogramme 63) où les élèves sont invités à produire des schémas-boîtes dans lesquelles les annonces peuvent être gagnantes (dont chaque terme est inférieur à 5 et dont la somme est inférieure à 6).



Photogramme 63 : Extraits de Journaux du nombre

[95] Nous n'avons pas de séances filmées au cours desquelles ce système de représentation est utilisé.

Le concept de nombre en tant que mesure d'une grandeur est donc présenté dans un contexte concret et abstrait – ou plus ou moins concret et plus ou moins abstrait– dans un processus de référence mutuelle. En effet, ces représentations peuvent être présentes simultanément (Fyfe & McNeil, 2014). Ainsi, l'écriture symbolique peut être référée à différentes réalités, dans la dénotation. Il y a montée progressive du concret à l'abstrait (avec différentes modélisations d'une décomposition additive) mais aussi une montée de l'abstrait vers le concret. Ainsi, grâce à l'étape concrète, les élèves peuvent interpréter les symboles abstraits et produire des inférences, lors de l'usage des symboles, dans le concret (Ibid.). Par exemple, les élèves peuvent référer une écriture mathématique à une annonce à deux mains, à un train-cubes, le nombre désignant concrètement une collection, un ensemble d'unités.

4.1.2. Continuité didactique

Le système capacitaire émergent des situations effectives étudiées lors du module 1 regroupe :

- la capacité *de désignation orale d'un nombre* (≤ 6) sous forme de deux sous-collections produites à deux mains (≤ 5) ;

- la capacité *de traduction d'une décomposition additive* sous forme de deux sous-collections produite avec les mains par un train-cubes, un schéma-train et un schéma-train/ligne ;

- la capacité de comparaison *d'*une décomposition additive sous forme de deux sous-collections (annonce à deux mains) avec une collection (constellation de points sur le dé) par un train-cubes, un schéma-train et un schéma-train/ligne.

Ces capacités construites au cours du module 1 se voient réinvesties lors du module 2 avec la construction de capacités :

- de désignation écrite *d'un nombre* (≤ 6) sous forme de deux sous-collections produites à deux mains (≤ 5) ;

- *de traduction d'une* écriture additive sous forme de deux sous-collections produites avec les mains par un train-cubes, un schéma-train et un schéma-train/ligne ;

- de comparaison *d'une écriture additive à deux termes avec un nombre* par un schéma-train/ligne ;

- *de désignation d'une comparaiso*n par une écriture mathématique, une égalité ou une inégalité

Il existe une mise en relation avec les éléments de savoir construits dans le module 0. Dans un premier temps, les élèves réexpériencient « la capacité de traduction *d'un train*-cubes par le

schéma-train » dans une nouvelle situation dont l'objectif est la construction de désignation des nombres (≤ 6) sous forme de deux sous-collections (chacune ≤ 5). Les décompositions additives sur deux mains sont traduites par un train-cubes et un schéma-train. Cette capacité est réinvestie pour valider la comparaison entre deux nombres Ainsi, la traduction des nombres par différentes représentations autorise une comparaison effective des grandeurs que le nombre désigne. Dans un second temps, ces capacités liées à la désignation orale sont retravaillées dans le cadre de l'introduction de l'écriture symbolique. Les épisodes analysés du module 1 montrent que le travail s'oriente principalement sur la traduction des systèmes de représentation entre eux. Ces représentations sont donc étudiées pour elles-mêmes, comme fins. L'objectif est qu'elles deviennent, au fur et à mesure de leur expérienciation par les élèves, opérationnelles pour servir de moyens pour mener l'enquête didactique dans une situation nouvelle[96] (Dewey, 1967). Les représentations fournissent alors des instrumentalités nouvelles. Ainsi, le savoir élaboré par les élèves, une forme d'habilité, passe dans la situation suivante en devenant l'instrument de compréhension et d'action dans la nouvelle situation. Mais comment s'articulent les jeux d'apprentissage entre eux ? Existe-t-il une continuité dans le jeu du professeur sur celui de l'élève ? La figure (cf. Figure 34) ci-dessous donne à voir les relations entre les JA que modélise l'activité effective.

[96] « Comme terme général, « instrumental » est mis pour la relation « moyen-conséquence » comme catégorie fondamentale de l'interprétation des formes logiques, tandis que « opérationnel » est mis pour les conditions par lesquelles l'objet est adapté pour servir de moyen et fonctionne réellement comme moyen en effectuant la transformation objective qui est la fin de l'enquête" (Dewey, 1967, p. 72).

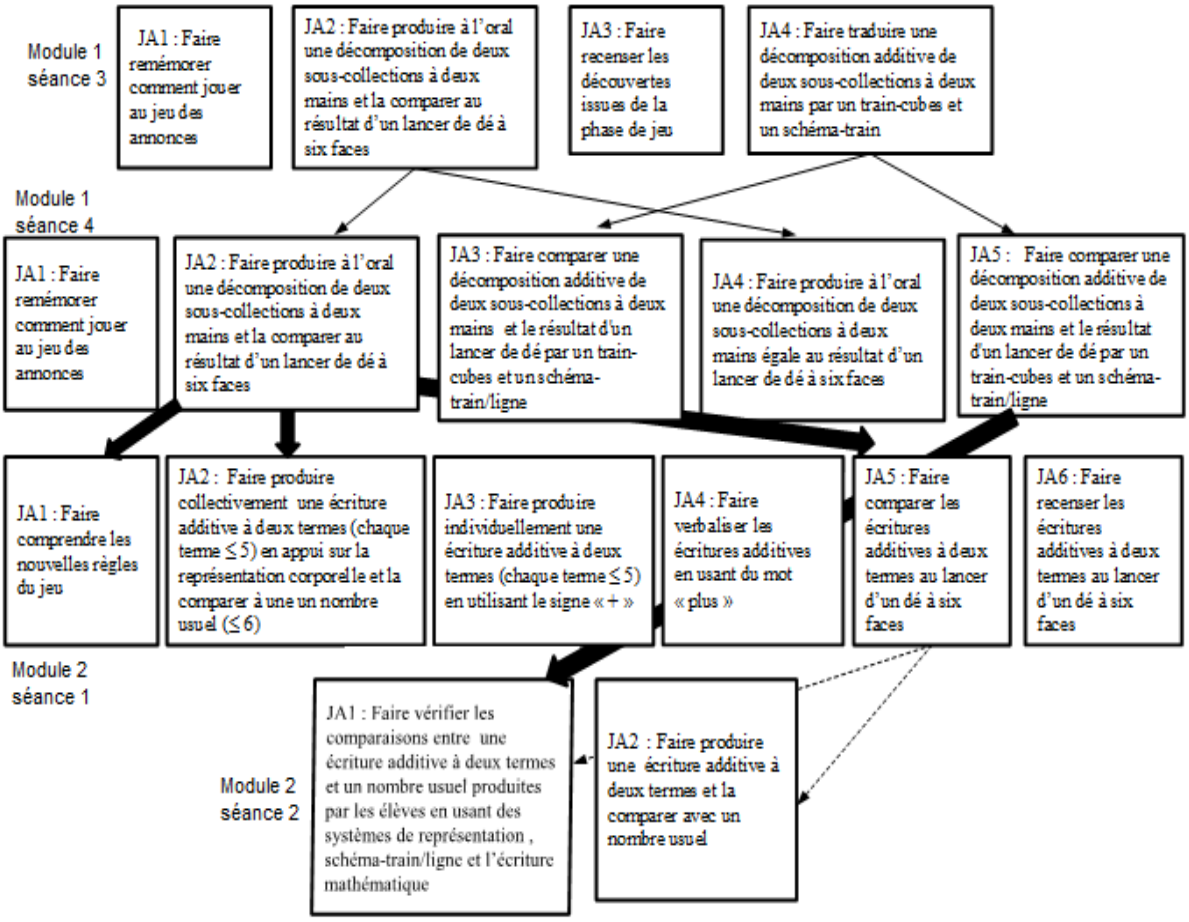


Figure 34 : articulation des jeux d'apprentissage, module 1 séances 3 et 4 ; module 2, séances 1 et 2.

Les flèches pleines et noires dans la partie supérieure du schéma montrent les relations entre les JA du module 1. Nous observons que les JA de production d'une annonce à deux mains, et de traduction d'une décomposition additive par un train-cubes et un schéma-train de la séance 3, sont retravaillés au sein de la séance 4 lors des JA de comparaison entre une décomposition et un résultat de lancer de dé.

Les flèches pleines et épaisses, quant à elles, donnent à voir comment les JA du module 1 sont mis en relation avec les JA du module 2. Le JA (JA 2, module 1, séance 4) de production d'une décomposition additive se retrouve lors du JA de production d'écriture additive à deux termes (JA2 de la séance 1 du module 2). L'usage du schéma-train/ligne pour vérifier le résultat de la comparaison entre une décomposition additive et un nombre (JA 5 de la séance 4 du module 1) se retrouve réinvesti lors du JA1 du module 2 séance 2 lors de la vérification de la comparaison d'une écriture additive à deux termes avec un nombre.

Les flèches en pointillés montrent les liens entre les deux séances du module 2 où il y a réexpérienciation des élèves de la comparaison d'une écriture additive et d'un nombre issu du résultat d'un lancer de dé à six faces.

Il existe donc une continuité entre les séances du module 1 et 2 dans la mesure où l'on peut mettre en évidence des relations entre les différents jeux d'apprentissage qui modélisent le jeu du professeur sur celui de l'élève. Cette succession de jeux doit rendre capables progressivement les élèves de comprendre le nombre comme mesure d'une grandeur à travers une sorte de méta-capacité de mise en correspondance des systèmes de représentation entre eux.

4.2. Stratégies professorales

Dans ce chapitre, nous avons étudié la mise en œuvre des modules 1 et 2 menée par trois professeures différentes. Les deux séances (séances 3 et 4) analysées du module 1 l'ont été par deux professeures stagiaires. Les deux séances du module 2, ont, quant à elles, été réalisées par la professeure titulaire de la classe.

Que met en évidence l'analyse de ces différentes séances sur les stratégies des professeurs débutants et expérimentés lors de l'implémentation de la progression ACE ?

4.2.1. Les professeurs débutants

Dans un premier temps, les professeures semblent rencontrer des difficultés liées à la maîtrise du vocabulaire, notamment celui de l'usage des systèmes de représentation. En effet, les deux professeures n'associent pas nécessairement la bonne expression linguistique à chaque représentation. Par exemple, PES1 emploie de manière indifférente le mot "train" pour désigner les unités du train-cubes, le schéma-train (épisode 2). De même PES2 utilise le même vocabulaire pour désigner les unités du schéma-train et du train-cubes (des cubes) dans l'épisode 9. Il existe donc une incertitude langagière de la part de ces deux professeures qui peut amener les élèves à ne pas pouvoir s'orienter correctement dans le milieu, à mettre en relation les éléments du milieu. En effet, l'énonciation des professeures ne permet pas de différencier et de mettre en correspondance la référence et la représentation, le représenté et le représentant dans un jeu représentationnel cohérent.

Dans un second temps, la gestion des séances ACE semble technique et demande des gestes complexes et spécifiques sans lesquels le dispositif ne peut se concrétiser didactiquement dans

une action conjointe exigeante. En effet, nous avons observé la difficulté des professeures débutantes à laisser les élèves expériencier des capacités qu'ils ont élaborées dans l'action conjointe précédente. La position topogénétique haute des professeures stagiaires empêche l'expérience mathématique des élèves. En limitant le jeu de demande d'offres et de raisons (Brandom, 2009), elle fait obstacle à ce que l'élève agisse en première personne. Ici, les professeures dévoilent les stratégies gagnantes aux élèves en mettant en traduction les systèmes de représentation entre eux, par une expression délibérée vis-à-vis du milieu à connaître. Elles produisent elles-mêmes les mises en relations entre les systèmes de représentation, les mains, le train-cubes et le schéma-train. L'expression vis-à-vis du contrat est, quant à elle, incertaine puisque les professeures ne peuvent s'appuyer sur des connaissances partagées bien identifiées. Le travail de traduction entre représentations ne peut probablement être réalisé par les élèves que s'ils peuvent investir les bonnes connaissances (connaissances identifiées par l'usage d'un vocabulaire spécifique). De plus, les deux professeures instaurent un jeu représentationnel avec une topogénèse différente selon les mises en correspondance effectuées. Les représenteurs sont soit les élèves, soit le professeur. Par exemple, dans la séance menée par PES1, les élèves produisent l'annonce sur deux mains et le schéma-train (représentation analogique/graphique/symbolique) alors que la professeure construit le train-cubes correspondant et met en relation oralement et par monstration la traduction entre ces trois systèmes de représentation. Cette position topogénétique basse des élèves face à la traduction des représentations ne permet pas d'attester par leur comportement de la construction d'une capacité de traduction, d'une capacité de construction d'une référence mutuelle (Fyfe & al. 2014) entre les différentes représentations. Certes, les deux professeures débutantes produisent une action conjointe avec les élèves mais elle est limitée et contingentée. Tout se passe comme si elles donnaient un cours en faisant ostension des traductions. De plus, il semble qu'à certains moments, l'enjeu de savoir – la représentation et la traduction d'une annonce à deux mains, d'une mesure de même grandeur selon des représentations différentes – est mis en arrière-plan. L'attention et l'action des élèves sont orientées vers la mise en correspondance des différentes couleurs utilisées dans l'usage de ces représentations et non sur les connaissances mathématiques (Nuhrenbürger & Steinbring, 2008 ; McNeil & Perterson, 2013 ; Uttal, Scudder, & Deloache, 1997). La densité épistémique des épisodes analysés semble donc amoindrie.

4.2.2. La professeure titulaire de la classe

Les deux séances analysées dans le module 2 lors de l'introduction de l'écriture mathématique sont menées par la professeure titulaire, P. L'étude de ces séances met en évidence que les nouvelles situations, les nouveaux milieux-problèmes sont introduits en référence aux situations antérieures. En effet, P renvoie les élèves vers des situations passées. Par exemple, dans les épisodes 11 et 13, pour vérifier les écritures additives produites, elle dirige les élèves vers une réexpérienciation d'une situation passée, la représentation corporelle. Les habitudes d'action des élèves sont, dans la nouvelle situation, mises à mal par le nouveau milieu (la représentation symbolique mathématique). La professeure permet leur accommodation en proposant une réexpérienciation d'une situation passée. Il y a donc ici un travail mémoriel (Centeno, 1995 ; Brousseau, Centeno, 1991) de la part de la professeure qui réveille une capacité construite précédemment, que les élèves doivent réinvestir dans une nouvelle situation. Ici, l'usage d'une annonce à deux mains pour représenter une écriture additive à deux termes a pour objectif de devenir une nouvelle habitude d'action chez les élèves dans le nouveau milieu. Cet usage permet de ramener à ce que l'écriture symbolique dénote, à une référence concrète. Il existe donc une *montée de l'abstrait vers le concret.*

La gestion subtile de la dialectique réticence/expression de la part de P, notamment à travers l'usage d'un langage particulier dans le jeu représentationnel, autorise les élèves à apprendre de leur propre mouvement (Sensevy, 2011a, Sensevy, 2007) et entrer dans l'enquête. Par exemple, P utilise de manière récurrente le verbe « parler » pour que les élèves fassent eux-mêmes les mises en relation entre les systèmes de représentation. Par exemple, lors de l'épisode 14 la professeure énonce au tdp 28 « *qu'est*-ce que tu vas nous faire pour parler de *l'annonce un plus quatr*e ». L'intention professorale semble ici d'amener les élèves à comprendre que les représentations sont des moyens, des instruments pour parler de quelque chose, d'une certaine réalité et que cette réalité peut avoir différentes représentations. Ainsi, la professeure amène un certain jeu de langage dans la pratique du jeu représentationnel, ce jeu de langage se joue sur l'arrière fond d'une forme de vie (Wittgenstein, 1961). Le professeur installe donc un jeu de langage qui consiste à considérer qu'une représentation, et notamment l'écriture symbolique, parle de quelque chose qui a été fait, parle d'une action. Il y a donc une action qui consiste par exemple à utiliser un signe (la forme de vie), et un langage qui lui correspond (parler…), qui donne à ce signe une fonction. Cette dialectique réticence/expression engendre un travail particulier des élèves dans le milieu. Le contrat

devient ici un adjuvant du milieu et entraîne une forme d'équilibration didactique sans altération des jeux d'apprentissage. En effet, la professeure laisse les élèves enquêter dans le milieu en taisant les relations à établir entre les éléments de celui-ci tout en s'exprimant de manière subtile (en orientant l'action des élèves vers une représentation en particulier, épisode 13). La position topogénétique des élèves dans les épisodes étudiés est haute car P les autorise à enquêter dans le milieu et à produire eux-mêmes des systèmes sémiotiques qui renvoient à une conceptualisation liée à la mesure des grandeurs. Cette enquête est favorisée par le fait que les systèmes de représentation connus des élèves deviennent des instruments pour enquêter, enquête liée à la validation des résultats de comparaison entre deux nombres. Les élèves actualisent leurs connaissances antérieures dans une nouvelle situation dans un processus de reconstruction de l'expérience (Sensevy, 2011a). P centre l'attention des élèves sur l'essentiel épistémique c'est-à-dire la conception du nombre comme mesure de grandeur à travers l'usage des différents systèmes de représentation. Le comportement des élèves au cours des épisodes analysés semble attester qu'il y a apprentissage puisqu'ils donnent à voir leur raisonnement en gérant notamment les systèmes sémiotiques en jeu. Au cours de ces deux modules, il y a construction d'une « disposition pour une manière de percevoir et de procéder qui soit conforme à un style, c'est-à-dire ciblée et délimitée » (Fleck, 2005, p.149) au sein d'un jeu représentationnel. Ce style de pensée prend forme dans un processus de référence mutuelle, voir les systèmes de représentation comme un même concept mathématique, le nombre comme mesure d'une grandeur. Ce style de pensée est élaboré pour que d'une certaine manière il devienne une habitude, un moyen d'action ancré pour les élèves « une forme d'habilité d'exécution, d'efficacité dans l'action » (Dewey, 1916/2011, p. 126) qui va leur permettre de les utiliser « comme moyens d'atteindre des fins » (Ibid.).

CHAPITRE 7 : Construction coopérative d'une continuité didactique autour de la différence

Dans ce chapitre 3, nous reviendrons sur les effets de la coopération entre chercheurs et professeurs sur la (re) conception du curriculum. Nous nous sommes ici intéressés plus spécifiquement au dialogue inter-sphères autour de l'introduction au sein du domaine « Situations » d'un nouvel objet de savoir, la différence. Cette notion de différence est abordée au cours du module 9 dans la version 2012-2013 de la progression. Sa mise en œuvre est prévue en janvier 2013.

Notre intérêt pour ce module est motivé par deux aspects issus de l'observation clinique (Leutenegger, 2000) de l'ingénierie coopérative didactique et en particulier des échanges intra et inter-sphères. En effet, au cours des réunions successives réunissant les deux sphères sont apparus des points de vigilance dans sa mise en œuvre. Le premier se centre autour de la représentation de la différence par les systèmes de représentation déjà connus des élèves (annonces produites avec les mains, le schéma-ligne, le schéma-boîte et l'écriture symbolique) et donc de l'assimilation de leurs usages pour donner à voir ce nouvel objet de savoir qu'est la différence. Le second aspect est issu de notre questionnement de départ : la continuité didactique et la continuité de l'expérience mathématique des élèves. Le dialogue inter-sphères met ainsi en évidence un manque de cohérence didactique autour de cette notion dans l'organisation et le contenu des différents modules.

Comment la notion de différence est-elle introduite dans la première mouture de la progression du domaine « Situations » ? Existe-t-il une continuité didactique avec les modules précédents et en particulier dans l'usage des systèmes de représentation dont nous avons étudié l'introduction lors des premiers modules ? Comment l'appropriation des textes de la progression par les professeurs du groupe expérimental et leurs expériences liées à leurs mises en œuvre orientent-ils les choix didactiques pris par la sphère 1 dans reconstruction des modules ?

Dans une première section, nous analyserons, tout d'abord, l'avancée du savoir tel qu'il est proposé dans la version 2012-2013 de la progression du domaine « Situations » jusqu'au module différence, le module 9. Puis, nous étudierons plus précisément ce module. La

seconde section sera consacrée au dialogue intra et inter-sphère autour de la mise en œuvre de ce module Différence. La dernière section étudiera les effets de ce dialogue sur la réécriture des modules. Nous nous focaliserons sur la manière dont la notion de différence est intégrée progressivement au cours des modules, sa représentation à travers l'usage des systèmes de représentation. Nous étudierons, de même, l'introduction d'un premier travail sur les écritures du type pré-algébrique, le principe inverse (Verschaffel, Bryant & Torbeyns, 2012).

1. Avancée du temps didactique et différence, version 2012-2013

Cette première section étudiera en premier lieu l'agencement des modules à partir du module 4 du domaine « Situations » tel qu'il est présenté aux professeurs du groupe expérimental lors de l'année 2012-2013. Pour cela, nous décrirons le contenu de chaque module puis nous analyserons ces textes en les modélisant en termes de jeux d'apprentissage et les capacités cibles. Cette analyse rendra compte de l'avancée du temps didactique que tente de générer les textes de progression. Ce découpage permet de modéliser certaines scènes de l'activité didactique (Sensevy, 2011a) proposée dans les textes, telle qu'elle a été conçue, rédigée par la sphère 1 et de repérer les modifications de l'activité épistémique. Les changements de jeux pourront permettre d'identifier l'avancée du temps didactique prévue dans les textes. De plus, ce découpage autorise l'étude de la construction du système capacitaire (virtuel) des élèves et de son évolution.

En second lieu, nous analyserons plus spécifiquement le module 9 qui introduit la notion de différence à travers la comparaison des nombres.

Pour orienter le lecteur, l'annexe 25 donne une vision synoptique de l'organisation des modules « Situations » sur l'ensemble de l'année. Cette vision synoptique reprend les régulations « immédiates[97] », effectuées au fil de l'année par la sphère 1 pendant l'année 2012-2013. Deux modifications importantes ont été réalisées. La première est l'introduction

[97] Les régulations immédiates auxquelles nous faisons référence ont été réalisées par la sphère 1 pendant l'année 2012-2013. Elles concernent, comme nous l'avons étudié dans le chapitre 1 « Coopération chercheures/professeurs » les premiers modules avec notamment :

- l'introduction dès le module 3 de l'usage par le professeur des signes « > et < » pour désigner des inégalités ;
- un travail, lors du module 4, sur la traduction d'une écriture additive à trois termes par un schéma-train/ligne.7
- un travail du professeur au cours du module 5 sur la mise en relation du résultat de la comparaison entre deux décompositions additives et de son écriture mathématique.

d'un module 6B (Annexe 28) qui se positionne comme module « sas » entre la comparaison de deux écritures additives à deux termes (module 6) et les groupements par 10 (module 7).

La seconde régulation est intervenue directement au sein du module 7, les groupements par 10. La situation proposée initialement, « beaucoup de mains », consistait à réduire en le moins de mains possibles un ensemble d'annonces réalisées par tous les élèves de la classe Cette situation introductive du module 7 a été modifiée en janvier 2013 par la sphère 1 et remplacée par une situation de réduction d'une écriture additive à 9 termes (14+8+4+5+3+5+9+13+11) pour que les élèves fassent l'expérience de l'économie du groupement par 10 (cf. Annexe 29)[98].

1.1. Retour sur les premiers modules

Nous reprenons rapidement l'analyse des premiers modules réalisée dans le chapitre 5. Nous ne prenons en compte que les modules modifiés après la première phase de régulation effectuée en 2012-2013 par la sphère 1. En effet, les professeurs des classes expérimentales ont, dans leur mise en œuvre des modules 2, 3 et 4 intégré les modifications apportées aux textes curriculaires. L'analyse des cinq premiers modules (de 0 à 4) montre la construction de deux grands types de capacités.

Le premier type renvoie à la désignation orale de collections (inférieures ou égales à six) sous forme d'une décomposition en deux ou trois sous-collections (chaque sous-collection est inférieure ou égale à cinq) et à la désignation écrite des nombres (inférieurs ou égaux à six) par une écriture additive à deux et trois termes (chaque terme inférieur ou égal à cinq).

La construction de ces capacités de désignation est accompagnée par la construction d'un second type de capacités cibles, axées sur l'usage de systèmes de représentation, les doigts, le train-cubes, le schéma-train, le schéma-ligne, le schéma-boîte, l'écriture symbolique ainsi que sur la traduction entre ces différentes représentations.

Nous continuons maintenant l'analyse des modules suivants jusqu'au module 9 qui introduit la différence. En effet, les questions que nous nous posons maintenant sont :

- comment s'organisent les modules suivants pour amener la notion de différence ?

- comment s'articulent ces modules entre eux, les capacités construites ?

---

[98] Pour rappel, le tableau (cf. annexe 20) reprend l'ensemble des modules en explicitant de manière succincte leur contenu.

- existe-t-il une continuité didactique entre les modules, entre les séances pour que les élèves construisent progressivement la notion de différence à travers notamment des situations de comparaison et les systèmes de représentation ?

Nous étudierons donc les modules suivants pour dégager la succession des capacités cibles que les textes curriculaires ont l'ambition de construire chez les élèves.

1.2. Module 5 : Annonce à deux mains et lancer de deux dés

L'objectif de ce module est de comparer une annonce à deux mains avec un lancer de deux dés à six faces. Il reprend la situation initiale du jeu des annonces (module 1) où une annonce à deux mains est comparée avec un lancer de dé à six faces. Ce module introduit donc la comparaison entre deux formes additives. L'annonce est gagnante si elle est égale au lancer. Les enjeux de ce module sont définis dans le texte curriculaire de la progression (Annexe, 26)

Il se décompose en deux séances de 45 minutes chacune construite de manière isomorphe. Le texte curriculaire propose une présentation des règles du jeu par le professeur (Ibid.).

Après un rappel des règles du jeu des annonces (produire des annonces à deux mains, statut des mains, rôle de l'arbitre) lors de la première phase, le professeur forme des équipes de quatre élèves Chaque équipe joue successivement de trois à cinq parties (phase 2).

Lors de la troisième phase, le professeur propose une mise en commun des stratégies de validation des annonces. Pour cela, il demande aux élèves de justifier le résultat de la comparaison en produisant l'écriture mathématique correspondante. Sont donc réinvestis les signes « +, =, ≠, < et > ».

La dernière phase (phase 4) est dédiée à une activité centrée sur le jeu inverse « le jeu du lancer », lancer de deux dés à six faces et production d'une annonce à deux mains égale au lancer.

Dans ce module 5, les valeurs numériques augmentent par rapport aux modules précédents Les contraintes du jeu évoluent et les élèves en font effectivement l'expérience. Ils construisent progressivement des règles stratégiques qui vont leur permettre d'avoir plus de chance de gagner au jeu.

Nous modéliserons le canevas de mise en œuvre proposé aux professeurs sous la forme de trois jeux d'apprentissage.

Le premier se définit comme « faire produire une décomposition d'un nombre (≤ 10) sous forme de deux sous-collections avec deux mains et la comparer avec un lancer de deux dés à six faces ». La règle définitoire est ici de produire et de comparer oralement une annonce à deux mains et le lancer de deux dés à six faces. Le milieu est, quant à lui, constitué d'un milieu discursif, les élèves énonçant un nombre qu'ils produisent sur leurs mains, d'un milieu corporel avec les doigts. Les dés et les jetons distribués font partie du milieu matériel.

Pour jouer à ce jeu, les élèves réinvestissent et s'appuient sur un système capacitaire construit lors des modules précédents, notamment la capacité de désignation des nombres (≤ 6) sous forme de deux sous-collections, c'est-à-dire la constitution (orale en particulier) des répertoires additifs.

Le second jeu d'apprentissage est « faire traduire une comparaison de deux sous-collections produite sous forme d'annonce à deux mains avec un lancer de deux dés à six faces par l'écriture mathématique en usant des signes « =, ≠, >, < » et par le schéma-train et le schéma-ligne ». La règle définitoire du contrat est ici de valider par des écritures mathématiques et les systèmes de représentation la comparaison de l'annonce avec le lancer des dés. Le milieu est discursif mais aussi scriptural avec les représentations symboliques, l'écriture mathématique et analogique/symbolique avec le schéma-train et le schéma-ligne. Les élèves approfondissent les capacités construites précédemment :

- usage des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre une écriture additive à deux termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) ;

- traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne ou schéma-train/ligne et de schéma-boîte.

Le dernier jeu d'apprentissage qui modélise ce module se définit comme « faire produire une décomposition sous forme de deux sous-collections produite avec les mains égale à la somme d'un lancer de deux dés à six faces ». La capacité cible reprend ici celle du jeu d'apprentissage 1 « Comparaison de deux collections désignées chacune sous forme de deux sous-collections ».

Le tableau ci-dessous propose une vision synoptique de la modélisation de ce module.

Module 5
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire une décomposition d'un nombre (≤ 10) sous forme de deux sous-collections avec deux mains et la comparer avec un lancer de deux dés à six faces ». **Capacité cible 1** : Comparaison de deux collections désignées chacune sous forme de deux sous-collections.

Réinvestissement et approfondissement des capacités de désignation des nombres (≤ 6) sous forme de deux sous-collections.
Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire une comparaison de deux sous- collections produites sous forme d'annonce à deux mains avec un lancer de deux dés à six faces par écriture mathématique en usant des signes « =, ≠, >, < » et le schéma-train et le schéma-ligne » **Capacité cible 2** : Utilisation les signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre deux écritures additives à deux termes. **Capacité cible 3** : Traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-train/ligne.
Jeu d'apprentissage 3 : Faire produire une décomposition sous forme de deux sous-collections produite avec les mains égale à la somme d'un lancer de deux dés à six faces. **Réinvestissement de la capacité cible1 :** Comparaison de deux collections désignées chacune sous forme de deux sous-collections.

Tableau 59: modélisation du module 5 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

Cette analyse montre comment, dans cette nouvelle situation orale, les connaissances construites précédemment se voient réinvesties et modifiées pour aborder de nouvelles connaissances mathématiques telles que la comparaison de deux écritures additives.

1.3. Module 6 : passage à l'écrit

Ce module 6 propose, comme les modules 2 et 4, un passage de la situation orale de comparaison entre deux collections à une situation écrite de comparaison entre deux écritures additives (qui garde néanmoins les contraintes du jeu oral).

Ce module se compose de deux séances. Les enjeux de ce module sont d'aborder les questions de comparaison d'écritures additives où les différentes stratégies que les élèves vont éprouver va devenir centrale (Annexe, 27). Ce module a donc pour objectif de faire émerger chez les élèves des stratégies de comparaison en réinvestissant leurs connaissances sur les répertoires additifs.

Les élèves vont donc produire des écritures additives à deux termes sur une feuille de jeu et les comparer avec deux lancers de dé à six faces. L'annonce sera gagnante si égale, supérieure ou inférieure au lancer selon la règle fixée par le professeur. Les élèves justifient par une égalité ou une inégalité mathématique s'ils ont gagné ou perdu (cf. figure ci-dessus).

Annonce : 4+5
Lancer : 6+6
Gagné/Perdu (G/P) : P 4+5≠6+6 4+5<6+6

Figure 35 : exemple de feuille de jeu présentéedans le texte du module 6 (annexe. 27)

Lors de la phase de mise en commun, le professeur consigne les écritures gagnantes et reprend les écritures qui auront posé des problèmes d'attribution de gain. Ainsi, un élève représentera l'annonce et le lancer sur deux schémas-lignes ou des schémas-train/ligne ainsi que dans deux schémas-boîtes. Le texte curriculaire ajoute qu'une « correspondance entre les différents systèmes de représentation (mains/dés, train-ligne, ligne graduée, écriture mathématique) doit être systématisée » (Ibid.). Le professeur doit apporter une attention particulière au vocabulaire tout en écrivant les différentes écritures mathématiques (cf. Annexe 27)

Nous modéliserons le canevas de mise en œuvre par deux jeux d'apprentissage. Le premier se caractérise comme suit « faire produire et comparer une écriture additive à deux termes (chaque terme inférieur ou égal à cinq) et la comparer avec une seconde écriture additive à deux termes (chaque terme inférieur ou égal à six) ». Ce jeu d'apprentissage se définit par un contrat didactique dont les règles définitoires pourraient être « produire une écriture additive en référence au jeu des annonces et la comparer avec une seconde écriture additive ». Le milieu est ici constitué d'une feuille de jeu, de deux dés, d'écritures symboliques mathématiques. La capacité cible est dans un premier temps la construction de stratégies de comparaison entre deux écritures additives à deux termes telles que la comparaison terme à terme, les répertoires additifs. Cette capacité est complétée par le réinvestissement de l'utilisation les signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre deux écritures additives à deux termes.

Un second jeu d'apprentissage vient modéliser le texte curriculaire : « faire traduire une comparaison de deux écritures additives à deux termes par un schéma-train et/ou un schéma-ligne et un schéma-boîte ». Le milieu se densifie avec l'introduction du schéma-ligne (ou du schéma-train/ligne) et d'un schéma-boîte. Le milieu symbolique, à travers l'écriture mathématique, est de même réinvesti avec l'usage des différents signes mathématiques pour désigner une inégalité (>, < et ≠) ou égalité (=). Ce milieu symbolique mathématique est mis en correspondance avec un milieu langagier, « plus grand que » (« supérieur à »), « plus petit que » (« inférieur à ») mais aussi « n de plus que » et « n de moins que ».

Les capacités cibles que le texte curriculaire tente de construire chez les élèves sont :

- traduction d'une écriture additive sous forme de schéma-ligne et d'un schéma-boîte ;

- traduction d'une comparaison entre deux écritures additives à deux termes sous forme d'égalité ou d'inégalité mathématique ;

- désignation d'un écart entre deux écritures additives.

Le tableau (cf. Tableau 60) résume la modélisation du texte curriculaire du module 6.

Module 6
Jeu d'apprentissage 1 : Faire produire et comparer une écriture additive à deux termes (chaque terme inférieur ou égal à cinq) et la comparer avec une seconde écriture additive à deux termes (chaque terme inférieur ou égal à six) Cette capacité est complétée par la **Capacité cible 1** : construction de stratégies de comparaison entre deux écritures additives à deux termes **Capacité cible 2 :** traduction d'une comparaison entre deux écritures additives à deux termes par une écriture mathématique Réinvestissement de l'utilisation des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre deux écritures additives à deux termes.
Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire une comparaison de deux écritures additives à deux termes par un schéma-train et/ou un schéma-ligne et un schéma-boîte **Capacité cible 3** : Réinvestissement de la traduction d'une écriture additive à deux termes sous forme de schéma-ligne et d'un schéma-boîte. **Capacité cible 4** : Traduire une comparaison entre deux écritures additives à deux termes sous forme d'égalité ou d'inégalité mathématique **Capacité cible 5** : Désignation orale d'un écart entre deux écritures additives à deux termes.

Tableau 60 : modélisation du module 6 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

Les capacités cibles des modules 5 et 6 s'appuient sur des connaissances antérieures inférées par les textes des modules précédents. Les valeurs numériques des nombres désignés par des décompositions orales et écrites augmentent. Les stratégies de comparaison entre deux écritures additives (terme à terme, composition/décomposition) prennent appui sur des capacités de désignation des nombres construites précédemment. Les connaissances liées à l'usage des systèmes de représentation notamment le schéma-ligne se voient renforcées avec la représentation de deux écritures additives dont la somme est inférieure ou égale à douze.

1.4. Module 6B : vers les groupements par 10

Le module 6B a été produit par l'équipe de recherche suite aux difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre du module 7, les groupements par dix en 2012-2013 (cf. Annexe 28) par les classes d'étude. Nous ne reviendrons pas ici sur les raisons précises de la conception de ce module. Cependant il est important de noter qu'il a pour objectif de proposer des séances intermédiaires avant l'introduction de la dizaine. Il aborde les stratégies de composition et décomposition pour comparer deux écritures additives dont le nombre de termes augmente progressivement (jusqu'à 7 termes).

Ce module se compose de quatre séances dont l'objectif est la comparaison de deux écritures additives à plusieurs termes dont chaque terme est inférieur ou égal à six. Lors de la première séance, le nombre de termes de chaque écriture additive est compris entre deux et quatre (tirage d'une carte dans un jeu de cinquante-quatre cartes dont on a enlevé les têtes et gardé les cartes 2, 3, 4 pour déterminer le nombre de lancer de dé). Le professeur écrit les deux écritures additives issues du résultat des lancers de dé au tableau et invite les élèves à les comparer. Il les interroge à partir de questions types : qui a gagné ? Quelle est l'écriture qui désigne le nombre le plus grand ?

Les signes mathématiques « =, ≠, >, < » sont utilisés pour valider les comparaisons ainsi que le schéma-ligne.

Lors de la seconde séance, le texte curriculaire précise que la comparaison entre deux écritures additives va devenir centrale. Deux équipes de quatre élèves s'affrontent. Chaque équipe tire au sort une carte indiquant le nombre de lancers de dé à six faces à effectuer. Les élèves comparent les deux écritures additives ainsi produites. L'équipe gagnante est celle qui a obtenu l'écriture additive représentant le nombre le plus petit ou le plus grand selon la règle donnée par le professeur. Les élèves valident leur comparaison en produisant une inégalité ou une égalité mathématique. Lors de la mise en commun, le professeur oriente les élèves vers des stratégies de composition/décomposition par des questions.

La dernière phase de la séance propose des parties fictives au cours desquelles les élèves comparent deux écritures additives, avec soit le même nombre de termes, soit un nombre différent (Ibid.)

Les séances 3 et 4 de ce module sont isomorphes à la seconde séance, seul le nombre de termes augmente (de 4 à 7 termes).

La modélisation du texte curriculaire en jeu d'apprentissage peut être envisagée comme le décrit le tableau suivant (cf. Tableau 61). Les capacités cibles sont mises en évidence.

Module 6B
Jeu d'apprentissage 1 : Faire comparer deux écritures additives à plusieurs termes (chaque terme inférieur ou égal à six, le nombre de termes inférieur ou égal à sept). **Capacité cible 1 :** Construction de stratégies de composition/décomposition pour comparer deux écritures additives. **Capacité cible 2 :** désignation d'un nombre par une écriture additive (construction des répertoires additifs, des doubles).
Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire une comparaison de deux écritures additives à plusieurs termes (chaque terme inférieur ou égal à six, le nombre de termes inférieur ou égal à sept). par un schéma-train et/ou un schéma-ligne.

Réinvestissement des capacités : **-** Utilisation des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre deux écritures additives. - Traduction d'une écriture additive à deux termes sous forme de schéma-ligne

Tableau 61 : modélisation sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles du module 6B

1.5. Module 7 : groupement par 10

Le module 7, que nous étudions, est la seconde version produite par la sphère 1 l'année 2012-2013 (Annexe 29). Nous ne reviendrons pas sur la première version dans la mesure où elle n'a pas été expérimentée par les professeurs de la sphère 2 mais seulement par les professeurs des classes d'étude membres de l'équipe de recherche.

1.5.1. Organisation du module 7

Ce module introduit les groupements par dix. Il se compose de quatre séances, les deux premières sont dédiées à l'étude des groupements par 10 et les deux dernières aux parties fictives. L'enjeu de ce module est d'étudier le groupement par 10 et son rôle dans le système de numération (Annexe 29). Les situations proposées consistent à réduire en un minimum de termes les écritures additives proposées (Ibid.)

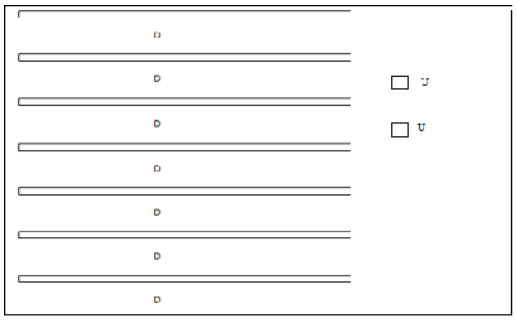
A la fin de chaque séance, une activité de dénombrement de grandes collections est organisée.

Séance 1 et 2

Les deux premières séances sont isomorphes avec néanmoins l'introduction un nouveau système de représentation pour représenter la dizaine lors de la seconde séance.

Le professeur note au tableau l'écriture suivante : « 14 + 8 + 4 + 5 + 3 + 5 + 9 + 1 3 + 11 » et invite les élèves à l'écrire pour qu'elle puisse être lue plus simplement. Les élèves cherchent à réduire cette écriture par binôme. Puis, lors de la phase de mise en commun, le professeur choisit des productions qui lui semblent pertinentes et demandent aux élèves d'expliciter leur stratégie au groupe classe. Un travail de lecture du nombre est alors proposé sous sa forme usuelle (72) et sous forme du groupement par dix, d'unités de numération (sept dizaines et deux unités).

La seconde séance est enrichie par l'introduction d'un nouveau système de représentation représentant une dizaine, la barre de dix (Annexe 29). Le nombre 72 de l'exemple précédent est donc représenté par :



Le module 7 précise que ce système de représentation peut être mis en relation avec les trains et le schéma-ligne.

Un travail de dénombrement de grandes collections de cubes est proposé en fin de séance (Ibid.). Le professeur propose une notation spécifique au nombre de cubes trouvé sous forme de D et de U (dizaine et unité) et représente avec les barres de dix le nombre désigné.

Parties fictives

Les deux dernières séances proposent des parties fictives centrées sur des questions mathématiques importantes issues de l'observation de la classe. Les critères de choix sont énoncés dans le texte curriculaire (Ibid.).

Les élèves comparent deux écritures additives en utilisant des stratégies de composition/décomposition pour réduire chaque écriture sous forme de dizaines et d'unités. Ils les représentent par des barres de dix et des carrés d'unités. Enfin, ils produisent l'égalité ou l'inégalité mathématique correspondant à cette comparaison.

1.5.2. Analyse du module 7

Nous modéliserons tout d'abord les deux premières séances sous forme de jeux d'apprentissage.

Le premier jeu d'apprentissage se définit ainsi « faire réduire une écriture additive à neuf termes par des stratégies de compositions et de décompositions ». La règle définitoire de ce jeu peut se caractériser par « réduire le nombre de termes d'une écriture additive pour qu'elle puisse être lue plus simplement ». Le milieu est composé d'une écriture mathématique symbolique ainsi que d'un milieu matériel, la feuille de recherche des élèves (qui fait aussi partie du contrat).

Les capacités cibles 1, 2 et 3 sont respectivement :

- compréhension de l'économie du groupement par dix pour désigner la somme d'une addition ;

- découverte du rôle du groupement par dix dans le système décimal avec la désignation orale et écrite des nombres (sous forme d'une écriture conventionnelle et sous forme de D et de U) ;

- construction des compléments à dix.

Nous nommerons le second jeu d'apprentissage qui modélise le texte curriculaire « faire représenter un nombre par les barres de dix et des unités ».

La capacité cible 4 est de représenter les nombres par un système de représentation, les barres de dix et les carrés d'unité.

La capacité cible 5 est la traduction du système de représentation « barres de dix et carrés d'unité » par des train-cubes et un schéma-ligne.

Le troisième jeu d'apprentissage se caractérise ainsi : « faire dénombrer une grande quantité de cubes et écrire le résultat sous forme conventionnelle et de D et U « dizaines et unités » ».

La capacité cible 6 est de désigner par un nombre écrit de manière conventionnelle ou en unités de numération une grande collection d'objets.

Le quatrième jeu d'apprentissage est « faire représenter et comparer deux écritures additives sous forme de dizaines et d'unités, les représenter sous forme de barres de dix et de carrés d'unité et les comparer ». Ce jeu d'apprentissage met au travail les capacités cibles construit ou en cours de construction dans les jeux d'apprentissage précédent.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 62) reprend la modélisation du module 7 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles.

Module 7
Jeu d'apprentissage 1 : Faire réduire une écriture additive à neuf termes par des stratégies de compositions et de décompositions. **Capacité cible 1 :** Compréhension de l'économie du groupement par dix pour désigner la somme d'une addition, **Capacité cible 2 :** Découverte du rôle du groupement par dix dans le système décimal dans la désignation orale et écrite des nombres (sous forme d'une écriture conventionnelle et sous forme de D et de U) **Capacité cible 3 :** Construction des compléments à dix. Réinvestissement des capacités de désignation d'un nombre par une écriture additive (construction des répertoires additifs, des doubles).
Jeu d'apprentissage 2 : Faire représenter un nombre par les barres de dix et des unités. **Capacité cible 4 :** Traduction d'un nombre par un système de représentation « les barres de dix et les carrés d'unité » **La capacité cible 5 :** Traduction du système de représentation barres de dix et carrés d'unité par des

train-cubes et un schéma-ligne.
Jeu d'apprentissage 3 : Faire dénombrer une grande quantité de cubes et écrire le résultat sous forme conventionnelle et de D et U « dizaines et unités » **Capacité cible 5** : Désignation par un nombre écrit de manière conventionnelle ou décomposé en dizaines et en unités une grande collection d'objets.
Jeu d'apprentissage 4 : Faire représenter et comparer deux écritures additives sous forme de dizaines et d'unités, les représenter sous forme de barres de dix et de carrés d'unité et les comparer. **Réinvestissement des capacités de :** - désignation d'un nombre par une écriture additive (construction des répertoires additifs, des doubles) ; - traduction du système de représentation barres de dix et carrés d'unité ; - réinvestissement de l'utilisation des signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner des égalités ou inégalités entre deux écritures additives à deux termes.

Tableau 62 : modélisation du module 7 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

1.6. Module 8 : comparaison d'écritures additives

Le module 8 (Annexe 30) se situe dans la continuité de l'étude des comparaisons entre deux écritures additives. Les valeurs numériques de chaque terme des écritures additives sont augmentées (comprises entre un et dix) par rapport au module 6B (cf. Annexe 28).

1.6.1. Organisation du module 8

Ce module se décompose en quatre séances.

Les deux premières séances sont isomorphes. Dans une première phase, le professeur présente collectivement les règles du jeu. Deux tirages de cinq cartes (issues d'un jeu de 54 cartes sans les têtes) déterminent les deux écritures additives à comparer. Le professeur affiche les cartes et note les deux écritures additives correspondantes. Les élèves les comparent en recherchant si elles sont égales ou laquelle est plus grande ou plus petite et de combien. La première partie est jouée collectivement. Un élève au tableau « représente la somme trouvée pour chaque écriture additive avec des barres et des carrés pour désigner les dizaines et unités composant *ce nombre et inscrit dans la colonne intermédiaire le signe mathématique qu'il considère* comme juste et justifie oralement son choix » (Ibid.).

Pendant la seconde phase de la séance, le jeu se poursuit mais de manière individuelle. Les élèves comparent deux écritures additives à cinq termes en usant des stratégies de composition/décomposition. Ils représentent les sommes ainsi trouvées sous forme de barres

de dix et de carrés d'unité. Puis, les élèves écrivent l'égalité ou inégalité mathématique désignant le résultat de cette comparaison.

Dans la phase de mise en commun, le professeur peut faire appel à deux élèves qui sont en désaccord ou qui ont résolu le problème de manière différente pour qu'ils exposent au collectif les stratégies mises en œuvre.

Dans une quatrième phase, une activité de dénombrement est suggérée identique à celle énoncée dans le module précédent

Les deux dernières séances correspondent à la mise en œuvre de parties fictives centrées sur des questions mathématiques importantes. Les élèves comparent deux écritures additives à plusieurs termes en utilisant des stratégies de composition/décomposition (recherche des groupements par dix). Puis, ils représentent les sommes trouvées par des barres de dix et des carrés d'unités. Ils justifient mathématiquement la comparaison par l'écriture d'une égalité ou d'une inégalité.

1.6.2. Analyse du module 8

Nous modéliserons le canevas du texte de progression du module 8 sous forme de deux jeux d'apprentissage. Le premier jeu d'apprentissage se définit par « faire comparer deux écritures additives à plusieurs termes (chaque terme est inférieur ou égal à 10) ». La règle définitoire de ce jeu consiste à comparer deux écritures additives. Le milieu est composé d'écriture symbolique mathématique, de systèmes de représentation, barre de 10 et carré d'unité.

Les capacités cibles sont issues d'un réinvestissement de ce qui a été précédemment construit, notamment la construction des compléments à dix, des répertoires additifs ainsi que la traduction d'un nombre par une représentation analogique et symbolique tels que les barres et les cubes. Ce jeu d'apprentissage se retrouve lors des différentes séances. Le contrat et le milieu évoluent de manière très restreinte (par exemple, dans la phase 1 de la séance 1, les élèves comparent collectivement deux écritures additives tandis que dans la phase 2, les élèves travaillent individuellement sur une feuille de jeu).

Le second jeu d'apprentissage est « faire dénombrer une grande quantité de cubes et écrire le résultat sous forme conventionnelle et de D et U « dizaines et unités »

Le tableau ci-dessous donne à voir de manière synoptique les JA qui modélisent ce module.

Module 8
Jeu d'apprentissage 1 : Faire comparer deux écritures additives à plusieurs termes (chaque terme est

inférieur ou égal à 10) **Réinvestissement des capacités de :** - désignation d'un nombre par une écriture additive (construction des répertoires additifs, des doubles) ; - des compléments à 10 ; - traduction d'un nombre par un système de représentation, les barres de dix et les carrés d'unité ; - utilisation les signes mathématiques « =, ≠, <, > » pour désigner les égalités ou inégalités entre deux écritures additives.
Jeu d'apprentissage 2 : Faire dénombrer une grande quantité de cubes et écrire le résultat sous forme conventionnelle et de D et U « dizaines et unités » **Réinvestissement de la capacité de** désignation par un nombre écrit de manière conventionnelle ou décomposé en dizaines et en unités une grande collection d'objets.

Tableau 63 : modélisation sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles le module 8

1.7. Module 9 : la différence

Après avoir analysé les modules 5, 6, 6B, 7 et 8, nous centrerons notre attention plus spécifiquement sur le module 9 (Annexe 31) qui introduit la notion de différence. Le texte curriculaire stipule que l'objectif de ce module est de

> *« représenter/modéliser la différence entre deux nombres par une écriture mathématique. Par exemple, la différence entre 15 et 2 peut être représentée/modélisée par l'écriture 15-2 (…). Les élèves doivent se rendre capables de reconnaître une différence numérique lors d'une comparaison (…) mais aussi d'exprimer à partir d'un nombre la différence qu'il peut signifier, en tant qu'écart entre deux nombres » (Annexe 31)*

Le professeur doit être attentif à ne pas assimiler la différence et la soustraction à une opération de retrait en utilisant des formulations synonymes dont le texte de progression donne un exemple « la différence entre 7 et 4 est 3, ou la *différence entre 7 et 4 c'est 3* », « 7 est plus grand que 4 de 3 », « *7 c'est 3 de plus que 4* », « *4 c'est 3 de moins que 7* », « 4 est plus petit que 7 de 3 » (Ibid.). A la fin du module, les élèves doivent être familiarisés « avec *l'usage de «* type algébrique » des structures additives (par exemple, de 7-3 déduire 4 + 3 = 7 et 7 - 4 = 4) » (Ibid.).

La différence est abordée sur de petits nombres dont la valeur augmente progressivement.

1.7.1. Organisation du module 9

Le texte de ce module prévoit six séances. Un travail de dénombrement de grandes collections est suggéré à la fin de chaque séance.

1.7.1.1. Séance 1, 2 et 3 : introduction de la différence

La première phase de la séance 1 est collective. Il est proposé au professeur d'introduire le jeu de la façon suivante :

> *« Nous allons maintenant jouer à un nouveau jeu. Deux élèves vont venir au tableau présenter chacun une annonce avec leurs deux mains. Vous allez comparer ces deux annonces, en énonçant par exemple qui a le plus de doigts. Quelle annonce a le moins, le plus de doigts et combien de doigts de plus, de moins » (Ibid.)*

La vérification de la comparaison entre deux annonces à deux mains peut se faire par comparaison effective :

- soit en posant les doigts levés de chaque annonce les uns sur les autres, les doigts en contact sont abaissés, les doigts restant représentent la différence ;

- soit en abaissant les doigts de l'annonce la plus petite « sur » l'annonce la plus grande.

Lors de la phase 2, les élèves travaillent par binôme et recherche la différence entre deux annonces produites sur deux mains en la nommant oralement « la différence est de », « l'annonce A est plus grande de », « l'annonce B est plus petite de ». Une mise en commun est organisée autour des productions d'élèves.

La phase 3 introduit le signe « - » pour symboliser la différence. Deux élèves produisent au tableau deux annonces à deux mains. Le professeur demande aux élèves d'écrire la différence entre les deux annonces sur leur ardoise. L'écriture « a – b » est « attendue » tout en sachant que la probabilité d'occurrence « spontanée » de l'écriture attendue est très faible[99]. Le document précise que l'enjeu est ici « *l'usage du signe «* - » dans la soustraction renvoie au calcul de la différence entre deux nombres » (Ibid.). Le professeur indique que dans une écriture soustractive le premier terme est toujours le plus grand nombre.

Dans la phase 4, les élèves écrivent une différence égale au résultat d'un lancer de dé à six faces. Par exemple, pour un lancer de 2, les élèves peuvent écrire « 3 – 1 », « 4 – 2 » ….

La cinquième phase est une mise en commun des écritures produites par les élèves lors de la phase précédente. Le professeur note des productions que les élèves commentent. Il institutionnalise le signe « - » comme signe de la soustraction qui permet d'obtenir une différence entre deux nombres.

Les séances 2 et 3 se déroulent de manière similaire à la première. Ces séances sont complétées par un travail dans le Journal du Nombre dont les incitations sont suggérées dans

[99] Si l'écriture soustractive ne survient pas, alors elle sera proposée délibérément par le professeur.

le texte du module 9 (écrire librement des différences à partir d'un écart que l'élève se donne). Les grands nombres peuvent être abordés.

1.7.1.2. Séance 4, 5 et 6 : Soustraction et différence

L'enjeu de ces séances est stipulé dans le texte du module 9 comme la recherche « de *différences en tant que résultats de soustractions à partir d'une écriture symbolique (sans passer par la comparaison de deux annonces produites avec les mains). L'un des intérêts d'un tel travail peut consister à mettre les élèves en situation de recon*naître les « écritures impossibles » » (Ibid.).

Dans ces séances, les valeurs numériques des deux termes de la soustraction et de l'écart augmentent (jusqu'à 10). Chaque séance se compose de quatre phases.

Lors de la première phase, le professeur tire deux cartes issues d'un jeu de cinquante-quatre cartes (sans les têtes) qu'il affiche au tableau. Un élève écrit sur une feuille de jeu affichée au tableau la soustraction correspondante et la différence que constitue le résultat de cette soustraction. Le professeur propose de représenter cette différence sur des schémas-lignes et dans un schéma-boîte (cf. Annexe 31). L'exemple « 9 – 4 » est présenté dans le document de progression pour illustrer cette activité.

Il est ensuite précisé l'importance de faire travailler les élèves sur le système d'équivalence entre les écritures « 9 – 4 = 5 » parce que « 5 + 4 = 9 » et « 4 + 5 = 9 ».

Lors de la seconde phase, les élèves travaillent individuellement sur une feuille de jeu à partir du tirage de deux cartes (Ibid.).

Lors de la troisième phase, le professeur sélectionne des productions d'élèves qui sont débattues collectivement.

Puis, le professeur invite les élèves à écrire sur leur ardoise des soustractions égales au résultat d'un tirage de carte (≤ 10) lors de la quatrième phase.

Le document préconise un travail dans le Journal du Nombre sur la notion d'équivalence entre les écritures : le jeu de l'addition-soustraction « *A partir d'une addition, les élèves trouvent les* deux soustractions équivalentes et vice-versa » (Ibid.). Par exemple, à partir de « 5 + 8 = 13 », les élèves doivent déduire que « 13 – 8 = 5 » et « 13 – 5 =8 ». Il est précisé qu'un travail sur des nombres plus grands peut être effectué en s'appuyant sur les techniques de transfert dans le Journal du Nombre (par exemple à partir de « 5 – 3 » écrire « 15 – 13 », « 25 – 23 » …)

1.7.1.3. Séance 7 et 8 : parties fictives

Les séances 7 et 8 s'organisent autour de parties fictives (Annexe 31). Voici un exemple de partie fictive proposé dans le module 9

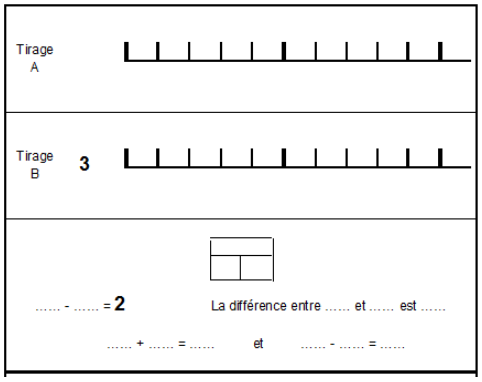


Figure 36 : partie fictive extraite du module 9 (annexe 26)

1.7.2. Analyse du module 9

Le module 9 se fixe donc deux objectifs majeurs. Le premier est la représentation de la différence comme écart entre deux « mesures de grandeurs » (le nombre d'« entités » que représentent les doigts levés) puis entre deux nombres qui « mesurent » ces grandeurs. Le signe « - » vient ensuite coder/représenter cette différence entre deux nombres (par exemple la différence entre le nombre 6 et 2 peut être représentée par l'écriture mathématique « 6 – 2 »). Pour cela, il est suggéré au professeur de ne pas utiliser les termes de retrait « enlever, retirer » mais d'employer des termes tels que la différence entre a et b est c, c'est plus grand que a de b, b c'est a de moins que c.

Le second objectif est la construction chez les élèves d'une première conception de « type algébrique », en référence au champ du early algebra (Carraher & Schleimann, 2007). A partir d'une écriture additive, les élèves vont pouvoir déduire les écritures soustractives qui en découlent (par exemple « 4 + 2 = 6 », « 6 - 2 = 4 » et « 6 - 4 = 2 »).

1.7.2.1. Analyse des séances 1, 2 et 3 : introduction de la différence

Nous modéliserons le canevas des trois premières séances par quatre jeux d'apprentissage.

Le premier jeu d'apprentissage « faire comparer deux annonces à deux mains et trouver la différence entre les deux collections » se caractérise par un milieu constitué d'une représentation concrète, corporelle de la différence (les doigts), d'un milieu langagier avec la

verbalisation de la différence entre deux annonces sous forme d'écart. La règle définitoire de ce jeu consiste à « trouver la différence entre deux annonces produites avec deux mains ». La représentation corporelle (annonce à deux mains) fait, pour une part, partie du contrat didactique, des connaissances antérieures des élèves, qui ont l'habitude d'« afficher » des nombres sur leurs mains mais aussi du milieu car elle vient exprimer la différence. En effet, dans ce premier jeu d'apprentissage, la différence est désignée par le résultat de la comparaison entre deux collections discrètes

Les capacités cibles que ce jeu d'apprentissage doit faire émerger sont la désignation concrète de la différence entre deux annonces à deux mains et la désignation orale de cette différence par les expressions « plus grand de, plus petit de et la différence est de ».

Le second jeu d'apprentissage se définit par « faire coder la différence entre deux grandeurs par un signe mathématique « - » ». La règle définitoire consiste à écrire une soustraction. Le milieu est avant tout symbolique puisque les élèves recherchent l'écriture mathématique de la différence. Les élèves s'appuient pour cela sur leurs connaissances déjà-là ou en cours de construction telle que la représentation corporelle de la différence, sa verbalisation sous forme « plus grand de, plus petit de… ». Ce jeu d'apprentissage vise donc la construction d'une capacité de désignation écrite d'une différence entre deux nombres sous forme « a – b ». L'écart entre deux collections est alors désigné par une écriture mathématique.

Le troisième jeu d'apprentissage « faire écrire une soustraction sous forme « a – b » égale au résultat d'un lancer de dé à six faces » se caractérise par la règle définitoire suivante « produire une écriture soustractive égale à une différence donnée ». Le milieu est composé d'un milieu scriptural symbolique avec des écritures mathématiques. En effet, la structure du problème est bien ici l'écriture d'une soustraction à partir d'une différence. Les élèves expérimentent en situation les capacités cibles précédentes. La capacité cible « désignation écrite d'une différence entre deux nombres sous forme « a - b » est donc ici renforcée et approfondie.

Nous modéliserons par un quatrième jeu d'apprentissage le travail dans le Journal du Nombre que le texte du module 9 suggère. Nous le désignons par « faire produire des écritures soustractives dans le Journal du Nombre à partir d'une différence donnée ». La règle définitoire consiste à se donner un écart et de produire les écritures soustractives correspondantes. Le milieu est matériel avec le Journal du Nombre et symbolique avec l'écriture mathématique soustractive. Mais ces deux éléments du milieu font aussi partie du

contrat didactique car certaines facettes de leur usage sont des connaissances antérieures des élèves. Le tableau ci-dessous propose une vision synoptique de la modélisation de ce module.

Module 9 séances 1, 2 et 3
Jeu d'apprentissage 1 : Faire comparer deux annonces à deux mains et trouver la différence entre les deux collections. **Capacité cible 1 :** désignation concrète de la différence entre deux annonces à deux mains. **Capacité cibles 2 :** désignation orale d'une différence, d'un écart entre deux grandeurs représentées par deux sous-collections. **Réinvestissement de la capacité** de désignation orale des nombres (≤10) sous forme de deux sous-collections (chacune ≤ 5). Jeu d'apprentissage 2 : Faire coder la différence entre deux grandeurs par un signe mathématique « - ». **Capacité cible 3 :** désignation écrite d'une différence (≤ 6) entre deux nombres sous forme a-b. Jeu d'apprentissage 3 : Faire écrire une soustraction sous forme a-b à partir d'une différence issue d'un lancer de dé à six faces (1 à 6). **Réinvestissement des capacités** de désignation écrite d'une différence (≤ 6) entre deux nombres sous forme a-b. Jeu d'apprentissage 4 : Faire produire des écritures soustractives dans le Journal du Nombre à partir d'une différence donnée. **Réinvestissement des capacités de** désignation écrite d'une différence entre deux nombres sous forme a-b.

Tableau 64 : modélisation en jeux d'apprentissage et capacités cibles les séances 1, 2 et 3 du module 9

Nous remarquons que dans ces trois premières séances, la notion de différence est abordée à partir de la comparaison de deux collections discrètes inférieures ou égales à dix. Cette différence est alors traduite oralement par des expressions mathématiques telles que « l'annonce A est plus grande de », « l'annonce B plus petite de ». Puis, cette comparaison entre les deux collections est codée par une écriture mathématique, une écriture soustractive. Cette différence est alors traduite par écriture soustractive « a – b ». Pour terminer, une différence donnée sous forme d'une constellation de points issue d'un lancer de dé (inférieure ou égale à six) est traduite sous forme d'une écriture soustractive. Il y a donc une progressivité dans la construction de la différence avec tout d'abord une représentation concrète et corporelle de celle-ci sur les mains accompagnée d'une désignation orale. La seconde étape est la représentation symbolique de la différence avec l'écriture mathématique soustractive.

La figure ci-dessous (cf. Figure 37) montre de manière synthétique les différentes traductions entre les systèmes de représentation que le texte du module 9 suggère.

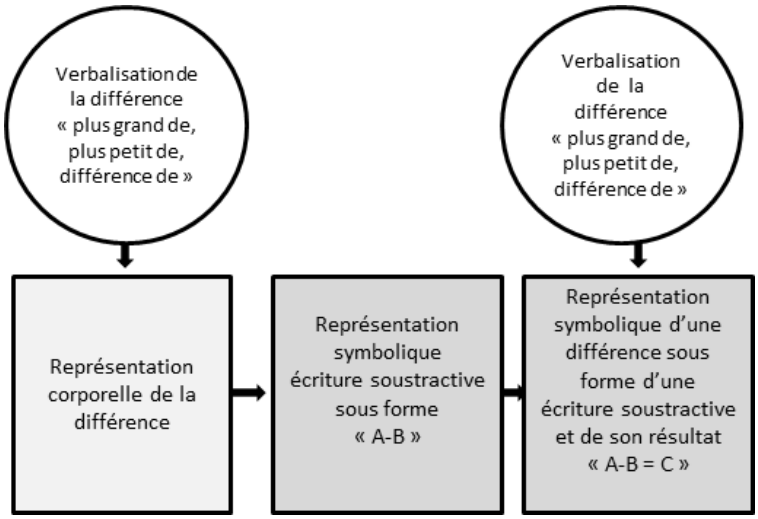


Figure 37: schématisation de mise en analogie des systèmes de représentation pour désigner une différence

1.7.2.2. Analyse des séances 4, 5, 6 : la soustraction et la différence

Le cinquième jeu d'apprentissage qui modélise le texte curriculaire des trois séances isomorphes (séance 4, 5 et 6) peut se définir comme « faire produire une écriture soustractive et son résultat à partir de deux nombres inférieurs ou égaux à dix, les traduire sur deux schémas-lignes et dans un schéma-boîte et noter les écritures de « type algébrique » correspondantes ».

Les systèmes de représentation tels que le schéma-boîte, le schéma-ligne et l'écriture mathématique font partie pour une part du milieu puisque leur usage est modifié avec la représentation de la différence et pour une autre partie du contrat didactique car une part de leur usage est familier des élèves.

La règle définitoire consiste à comparer deux nombres entre eux et de représenter cette comparaison sous différentes formes (écritures symboliques, systèmes de représentation).

Les capacités cibles sont ici de plusieurs sortes :

- capacité cible 1 : désignation par une soustraction d'une comparaison entre deux nombres ≤10 (deux grandeurs de même type) ;

- capacité cible 2 : désignation du résultat de la soustraction par une différence ;

- capacité cible 3 : traduction de la différence entre deux nombres par la comparaison de deux schémas-lignes.

- réinvestissement de la capacité de traduction d'un nombre sur un schéma-ligne ;

- capacité cible 4 : traduction d'une différence entre deux nombres dans un schéma-boîte ;

- capacité cible 5 : compréhension de la relation inverse entre la soustraction et l'addition.

Le sixième jeu d'apprentissage « faire écrire une soustraction sous forme « a – b » à partir d'une différence issue d'un lancer de dé à six faces (0 à 10) est identique au jeu d'apprentissage 2, seules les valeurs numériques sont augmentées. De même, le jeu d'apprentissage 7 « faire produire des écritures soustractives dans le Journal du Nombre à partir d'une différence donnée » est équivalent au JA 4.

Le tableau ci-dessous reprend les JA et les capacités cibles associées des séances 4, 5 et 6 du module 7 (cf. Tableau 65).

Module 9, séances 4, 5 et 6
Jeu d'apprentissage 5 : Faire produire une écriture soustractive et son résultat à partir de deux nombres inférieurs ou égaux à dix, les traduire sur deux schémas-lignes et dans un schéma-boîte et noter les écritures de « type algébrique ». - **Capacité cible 1** : Désignation par une soustraction d'une comparaison de deux nombres ≤10 (deux grandeurs de même type). - **Capacité cible 2** : Désignation du résultat de la soustraction par une différence. **Réinvestissement de la capacité** de désignation écrite d'une différence sous forme a-b d'une différence entre deux nombres (≤ 6). - **Capacité cible 3** : Traduire la différence entre deux nombres par la comparaison de deux schémas-lignes. **Réinvestissement de la capacité** de traduction d'un nombre sur un schéma-ligne. - **Capacité cible 4** : Traduction d'une différence entre deux nombres dans un schéma-boîte **Réinvestissement de la capacité** de traduction d'une écriture additive dans un schéma-boîte. **- Capacité cible 5** : Compréhension de la relation inverse entre la soustraction et l'addition. Jeu d'apprentissage 6 : Faire écrire une soustraction sous forme a-b à partir d'une différence issue d'un lancer de dé à six faces (0 à 10). **Réinvestissement des capacités** de désignation écrite d'une différence (≤ 10) entre deux nombres sous forme. Jeu d'apprentissage 7 : Faire produire des écritures soustractives dans le journal du nombre à partir d'une différence donnée. **Réinvestissement des capacités de** désignation écrite d'une différence entre deux nombres sous forme a-b.

Tableau 65 : modélisation sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles des séances 4, 5 et 6 du module 9

La figure ci-dessous (cf. Figure 38) donne à voir les traductions entre les systèmes de représentation.

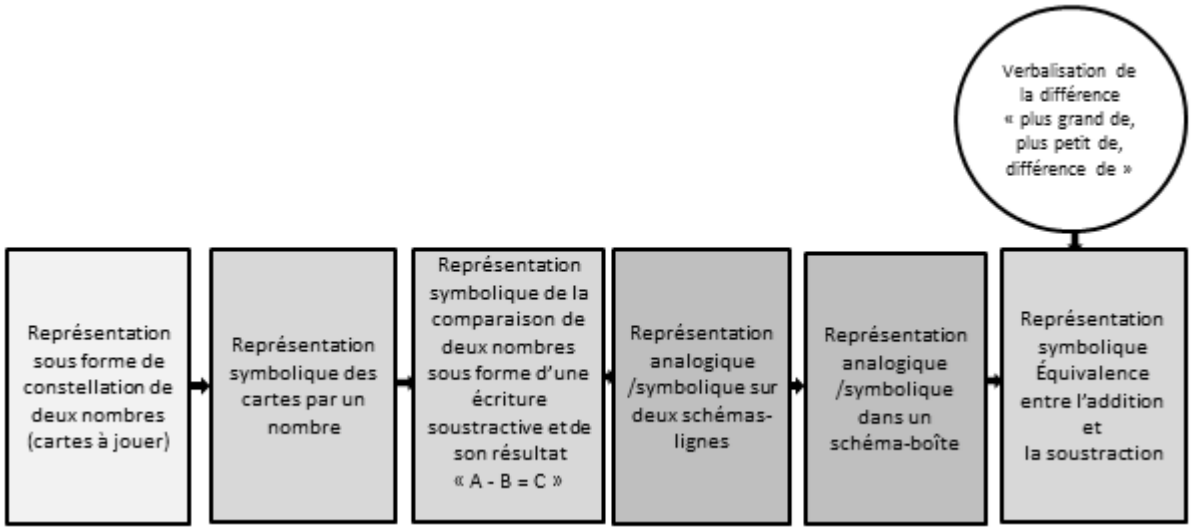


Figure 38 : schématisation de la traduction entre les systèmes de représentation pour désigner une écriture soustractive et une différence.

1.7.2.3. Analyse des séances 7 et 8 : parties fictives

Nous modéliserons les séances de parties fictives par un seul jeu d'apprentissage « faire comparer deux nombres en la désignant par une écriture soustractive et son résultat, traduire cette différence sur deux schémas-ligne et un schéma-boîte et écrire des additions et soustractions découlant du schéma-boîte ». La règle définitoire de ce jeu consiste à comparer deux nombres et de représenter cette comparaison par une écriture soustractive et son résultat. Les capacités cibles sont issues d'un réinvestissement de ce qui a été précédemment construit, notamment la désignation écrite d'une différence (≤ 6) entre deux nombres sous forme « a – b », la traduction d'une différence entre deux nombres dans un schéma-boîte et la compréhension de la relation inverse entre la soustraction et l'addition.

1.8. Synthèse de l'avancée des savoirs

L'analyse des différents modules offre une vision macroscopique de l'avancée des savoirs, de la vie des savoirs proposée par les textes curriculaires. Le découpage en termes de jeux d'apprentissage des modules autorise ici la description du processus didactique que semblent vouloir initier les concepteurs du domaine « Situations ». Il permet de saisir la dynamique de l'élaboration des savoirs et donne des orientations de structuration du travail des élèves par le professeur. Ainsi, l'étude ci-dessus montre des directions de :

- structuration sémantique de chaque situation en proposant par exemple des consignes aux professeurs orientant les élèves dans l'activité ;

- structuration mathématique en mettant en avant les enjeux, les objectifs de chaque situation proposée et en énonçant les conceptions mathématiques sous-jacentes (la différence vue comme un écart, le principe inverse, les conceptions pré-algébriques) ;

- structuration sémiotique du travail des élèves par le professeur en proposant un travail sur les systèmes de représentation qui doivent donner du sens à l'écriture mathématique, renvoyer à une référence ;

- structuration langagière. Les documents suggèrent des mots, des expressions à adopter pour que les élèves se munissent progressivement de vocabulaire mathématique pour s'exprimer.

Les capacités cibles que nous avons données à voir lors de l'analyse des modules tend à montrer qu'avant le module 9, la notion d'écart entre deux grandeurs n'est pas abordée. Néanmoins, nous retrouvons au module 6 la capacité de désignation orale d'un écart entre deux écritures additives à deux termes « combien de plus et combien de moins ». Mais cette capacité n'est pas réinvestie lors des modules suivants. L'élaboration des capacités de désignation de la différence, de la désignation d'un écart entre deux nombres n'est donc pas continue dans la mesure où celle-ci n'est pas reprise entre les modules 7 et 9 malgré un travail de comparaison entre des écritures additives aux modules 6B et 8. L'écriture mathématique sous forme d'inégalité entre deux nombres n'amène pas à la recherche de la différence.

De plus, nous observons que les capacités de traduction des écritures additives par les systèmes de représentation tel que le schéma-ligne sont réinvesties et approfondies jusqu'au module 6B mais ne sont plus utilisées lors du module 7 et 8. Les grands nombres y sont représentés sous forme de barres de dix et de carrés désignant des unités. Le schéma-ligne constitué dans le module 6 de graduations de un en un et d'un schéma-train juxtaposé ne semble pas permettre de représenter les grands nombres. Il y a donc ici une rupture dans l'usage du schéma-ligne sur 8 séances. De même, l'usage du schéma-boîte est abandonné lors des modules 6B, 7 et 8.

L'analyse du module 9, quant à elle, montre que l'introduction de la notion de différence (désignation orale de la différence, son codage par le signe mathématique « - ») se fait à travers la comparaison de deux annonces produites à deux mains, situation connue des élèves (même si cette référence aux mains disparait à partir du module 6). Cette différence est alors représentée par des systèmes de représentation familiers des élèves, le schéma-ligne et le schéma-boîte. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, ils n'ont pas été mobilisés

par les élèves depuis le module 6B. De plus, l'usage de ces représentations pour représenter la différence est nouveau pour les élèves. En effet, les systèmes de représentation doivent passer d'instrument de comparaison à instrument pour représenter la différence, l'écart entre deux nombres. Une part de l'usage non familier côtoie ainsi une part de l'usage familier de ces instruments. Ces systèmes de représentation se retrouvent comme élément du milieu-problème, comme potentiel d'action virtuel mais aussi comme potentiel d'action disponible des élèves.

Après cette analyse des documents du domaine « Situations » en termes d'avancée du savoir, nous étudierons dans la section suivante le dialogue entre l'équipe de recherche et les professeurs des classes expérimentales. Les échanges entre les deux sphères ont-ils révélé des difficultés lors de l'implémentation du module 9 ?

2. Dialogue intra et inter sphères, la différence

Dans cette seconde section, nous étudierons les interactions entre les membres de l'équipe de recherche et les professeurs des classes expérimentales qui implémentent l'ensemble de la progression. Nous continuons notre enquête concernant les effets de l'ingénierie didactique coopérative sur la conception des modules du domaine « Situations ». Nous nous focaliserons principalement sur le dialogue qui s'est instauré autour de la mise en œuvre du module 9 introduisant la différence.

Dans la section précédente, nous avons analysé l'avancée des savoirs en termes de capacités sous-jacentes aux connaissances que les situations tentent de construire chez les élèves. Cette description tente de faire comprendre l'arrière-plan des pratiques mises en œuvre dans les classes. Elle doit permettre de mettre en évidence cet arrière-plan commun à l'ensemble des membres de l'ingénierie coopérative, le cadre de référence (Wittgenstein, 2006) nécessaire à la compréhension de l'action des membres de ce dispositif.

Mais quels ont été les constats réalisés par les professeurs des classes d'étude et des classes expérimentales lors de la mise en œuvre du module 9 ? Le dialogue entre les deux sphères a-t-il permis de questionner le contenu de ce module et/ou des modules ? A-t-il interrogé l'organisation des savoirs au sein du curriculum ? L'expérience mathématique des élèves est-elle continue ou existe-t-il des ruptures ressenties lors des mises en œuvre ?

Pour répondre à ces questions, nous reviendrons dans un premier temps sur le partage d'expériences entre la sphère 1 et 2 concernant la mise en œuvre du module 9. Puis, dans un second temps, nous étudierons comment au sein du dialogue entre les deux sphères une première réorganisation des modules est pensée conjointement.

2.1. Relevé d'expériences

Nous nous pencherons dans ce paragraphe sur les échanges entre les professeurs du groupe expérimental de Bretagne et les membres de l'équipe de recherche. Ces échanges en présence[100], ont eu lieu le 17 avril 2013, lors d'une réunion de régulation. Deux temps étaient prévus lors de cette réunion. Le premier organisait le dialogue autour des expériences de chacun sur la mise en œuvre du module « Différence ». Le second temps prenait appui sur le visionnement collectif d'extraits vidéo d'une séance filmée dans une classe expérimentale. La transcription (cf. Annexe 32) d'une partie de cette réunion a permis de mettre en évidence certaines difficultés liées l'implémentation de ce module. Pour compléter les propos des professeurs des classes d'étude, nous prendrons appui sur les comptes rendus qu'ils ont rédigés à l'issue des séances menées et sur les échanges de courriel, les comptes rendus de réunion intra-sphère 1.

Nous proposerons tout d'abord une synthèse des constats réalisés dans les classes expérimentales et d'étude, en y introduisant les commentaires de C1 (enseignant-chercheur). Dans un second temps, nous analyserons plus finement le contenu de ces échanges.

2.1.1. Partage d'expériences et hypothèses de travail

Les extraits de transcription de cette réunion de régulation donnent à voir les énoncés des professeurs du groupe expérimental (sphère 2) et des professeurs des classes d'étude (sphère 1[101] : PCE1, PCE2, PCE3, PEC4) relatant leur expérience et celle de leurs élèves lors de la mise en œuvre du module 9. Nous les avons organisés en fonction de l'usage des systèmes de représentation auxquels ils renvoient.

- Usage des doigts

[100] Peu de commentaires ont été déposés sur le forum du site de la recherche ACE et peu de courriels ont été échangés sur la liste de diffusion concernant l'implémentation du module 9.

[101] Nous rappelons que la sphère 1 désigne l'équipe de recherche (professeurs des classes d'étude, enseignants-chercheurs, formateurs et doctorants.

Ainsi, le module 9 introduit, comme nous l'avons vu dans la section précédente, la notion de différence à partir de la comparaison de deux annonces produites à deux mains. Un professeur du groupe expérimental relate cette première expérience :

> « La première séance avec la comparaison de doigts, au secours, au secours. Là, ils ont tout mélangé *et après j'ai introduit les choses petit à petit et au bout d'un moment j'ai fini, moi aussi par dire pour certains alors écoute là tu vas enlever parce qu'autrement il y en avait qui* ne comprenaient rien du tout »

Transcription 27 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe, 32)

La recherche de la différence à partir de la comparaison de deux annonces à deux mains a posé des difficultés aux élèves de cette classe. Les stratégies proposées dans le texte curriculaire (correspondance terme à terme ou superposition des doigts) apparaissent complexes à manipuler.

De son côté, PCE1, membre de la sphère 1 relate, dans un compte-rendu de cette même première séance, que pour rechercher la différence entre deux annonces à deux mains, ses élèves utilisent plutôt les nombres que les doigts pour valider la différence, contrairement à ce qui est proposé dans le texte du module[102]. Lors du travail en binôme, les élèves ne recherchent pas spécifiquement la différence entre les deux annonces mais restent sur la recherche de « qui a le plus ou qui a le moins ». La désignation d'une différence en comparant deux annonces à deux mains n'apparaît donc pas pertinente car les élèves ont plutôt tendance à utiliser directement les nombres sans passer par la manipulation des doigts. De plus, en recherchant « qui a le plus qui a le moins », les élèves restent dans un contrat de comparaison sans rechercher la différence.

Le texte curriculaire du module 9 propose à partir de la séance 4 d'introduire deux systèmes de représentation déjà connus des élèves, le schéma-boîte et le schéma-ligne pour montrer la différence entre deux nombres. Mais comment ces représentations sont-elles réexpérienciées par les élèves dans une situation de différence ?

- Le schéma-boîte

D'une part, des professeurs du groupe expérimental et d'étude s'expriment sur les difficultés de leurs élèves quant à l'usage du schéma-boîte dans le module 9.

[102] Rappelons que lors de la phase 1 et 2 de la séance 1, les élèves doivent rechercher la différence entre deux annonces à deux mains en comparant terme à terme les deux annonces ou en abaissant les doigts correspondant à l'annonce la plus petite sur l'annonce la plus grande.

« La différence ça en a noyé un nombre incalculable et ils se sont paumés dans justement la boîte, *l'addition on peut la lire dans les deux sens, la soustraction dans un autre* »

« Avec les élèves moins avancés, quand on a abordé la différence, là je me suis aperçue que la boîte des nombres, ils ne maîtrisaient pas trop ».

« *Sur l'écriture soustractiv*e, on insiste sur le fait que le grand nombre qui est écrit en premier et *finalement dans la boîte, on retrouve ça aussi, c'est le plus grand nombre qui va apparaître en haut et* déjà quand on place celui-ci »

Transcription 28 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe, 32)

De son côté, PCE3, un professeur d'une classe d'étude partage, de même, son expérience.

PCE3 **:** « les élèves moins avancés, ils prennent ce système comme un objet pour apporter une *réponse et puis du coup ils s'étaient engouffrés dans la boîte et la boîte elle était simplement là pour produire une réponse juste. Donc quand le module différence est apparu, ça fonctionnait plus (…). La boîte elle a repris le rôle qu'elle devait avoir, c'est-*à-*dire qu'elle est là pour démontrer, mais elle sert à la validation de la réponse mais elle n'est pas là pour (…) apporter la bonne réponse* ».

Transcription 29 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe, 32)

Les témoignages des professeurs de la sphère 1 et 2 renvoient aux mêmes constatations (transcriptions 28 et 29, ci-dessus). Les élèves utilisent le schéma-boîte de manière « formelle », en s'appuyant sur la place qu'occupent les nombres dans le schéma-boîte plutôt que ce qu'ils désignent dans l'écriture d'une égalité. Cette difficulté est révélée par le passage d'une situation de comparaison à celle de recherche de différence puisque le résultat (la différence) ne se trouve plus dans la case supérieure mais dans une des deux cases inférieures du schéma-boîte.

D'autre part, les comptes rendus de séance de PEC2 mettent en évidence le fait que l'usage du schéma-boîte lui apparaît néanmoins indispensable pour que les élèves comprennent la notion de différence.

-Le schéma-ligne

Les professeurs membres de la sphère 2 s'expriment sur l'usage du schéma-ligne par leurs élèves toujours dans une situation de recherche de différence.

« *La ligne, alors la ligne, on va la lire dans l'ordre des nombres alors que l'opération on met dans un autre sens (…)* »

« *Avec les lignes, ils avaient tendance (…) ajouter après (…).*

Transcription 30 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe, 32)

Le passage d'une présentation d'une écriture additive à une différence sur le schéma-ligne ne semble pas aisé pour les élèves. En effet, la représentation d'une écriture additive à deux termes à partir de ce schéma se lit de gauche à droite, le schéma-pont du premier puis celui du

second terme. Le résultat, la somme, est représenté par le schéma-pont réunissant les deux schémas-ponts précédents. Alors que pour représenter la différence, les deux schémas-ponts des deux termes de l'écriture soustractive sont représentés tous les deux à partir du point d'origine (le 0 de la demi-droite).

Les comptes rendus de séance des professeurs des classes d'étude complètent cette remarque. Ils précisent que sur le schéma-ligne, la représentation de la différence pose aussi des difficultés aux élèves. Ils tracent les schémas-ponts désignant les nombres les uns à la suite des autres (comme pour l'addition) et non pas à partir du point d'origine du schéma-ligne comme nous montre la figure ci-dessous (cf. Figure 39).

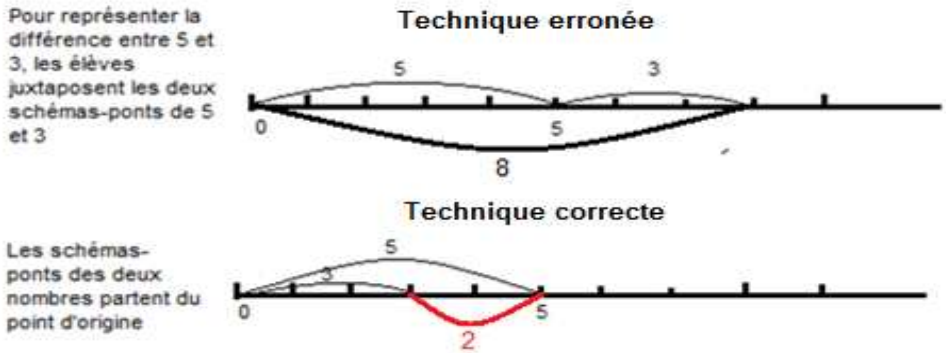


Figure 39 : représentation de la différence entre deux nombres sur le schéma-ligne

Sur le premier schéma-ligne (technique erronée pour la soustraction), l'addition « 5 + 3 » est représentée par :

- un premier schéma-pont de 5 intervalles de la graduation « 0 » à la graduation « 5 » ;

- un second schéma-pont de « 3 » vient représenter le second terme de l'addition de la graduation « 5 » à la graduation « 8 ».

Sur le deuxième schéma-ligne (technique correcte pour la soustraction), les deux nombres à comparer sont eux représentés par deux schémas-ponts partant du point d'origine (graduation « 0 »). La différence entre ces deux nombres y est représentée par un schéma-pont de « 2 » (en rouge).

De son côté, PCE1, professeur d'une classe d'étude, explique au collectif comment dans sa classe, le schéma-ligne est utilisé.

PCE1 : « La différence, on a surtout utilisé le schéma-*ligne (…) J'ai vu que dans un premier temps, que les deux lignes superposées, j'ai dit, c'est trop compliqué. Et ça fait longtemps que j'ai abandonné (…). Ça fait longt*emps aussi que les graduations, je les ai laissées aussi »

Transcription 31 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe, 32)

PCE1 relate que ces élèves utilisent principalement le schéma-ligne pour représenter la différence dans sa classe. Cependant, comme le suggère le texte du module 9, les nombres à comparer ne sont pas représentés sur deux schémas-lignes superposés mais sur un seul dont les graduations ont été supprimées. Ainsi, les élèves estiment la longueur des nombres (par exemple, « 3 » sera représenté par un schéma-pont plus petit que celui de « 5 ») et modélisent ainsi le problème proposé. L'usage du schéma-ligne permet de voir qu'un nombre est effectivement inclus dans un autre (dans l'exemple proposé ci-dessous, le schéma-pont de « 3 » est inclus dans celui de « 5 »).

C1 émet alors des hypothèses de travail pour pallier les difficultés rencontrées par les élèves sur l'usage du schéma-ligne en réponse aux différentes expériences partagées.

« *Imaginons qu'on ait à anticiper le module différence (...). On pourrait faire en sorte que les élèves comprennent bien le jeu auquel on va jouer (...). Il s'agit de bien remarquer une différence entre deux nombres, ben qu'est*-ce que ça veut dire la dif*férence, comment on signe la différence (...). Et ensuite* toujours en anticipation, on pourrait imaginer travailler sur la ligne, alors on fait le jeu des annonces, *il y a un qui a mis quatre sur ces doigts, l'autre qui a mis six, alors on va écrire sur la l*igne ».

Transcription 32 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (cf. Annexe, 32)

Ainsi, C1 suggère d'instituer une ou plusieurs séances d'anticipation au cours desquelles les élèves travailleraient spécifiquement sur la notion de différence et sur la représentation de la différence entre deux annonces sur le schéma-ligne. Il insiste sur la nécessaire de mise en relation des systèmes de représentation entre eux, la représentation corporelle et le schéma-ligne. Mais cette mise en relation apparaît problématique comme nous le montre la suite des échanges.

Ainsi, un professeur du groupe expérimental s'exprime sur le passage du matériel concret à l'écriture symbolique.

« *Chez les moins avancés, c'est les* cubes, les doigts tout ça. A partir du moment où ils ont une base *concrète, ils ont bien compris la comparaison et l'écart et la différence. Mais après quand il faut* abstraire, alors, là ils ne voient plus, ils savent plus »

« *Je m'aperçois que certains sont à utiliser sans réfléchir des outils pour essayer de s'en sortir quand même mais sans vraiment comprendre ce qu'ils font* »

« *Pour moi, c'est pas un problème l'utilisation de toutes les représentations quand il y avait jus*te *l'addition, ils les utilisaient très bien (...) Ils ont tout mélangé [quand on est passé à la soustraction]* »

Transcription 33 : extraits de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (Annexe, 32)

De son côté, un professeur de l'équipe de recherche explicite quelles fonctions ont, pour lui, les systèmes de représentation dans la situation de recherche de différence proposée.

PCE4 : « *Il faudrait les retravailler en tant qu'outils avec des plus petits nombres.*

Transcription 34 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (Annexe, 32).

Ainsi, pour ce professeur, les systèmes de représentation doivent passer d'un usage de comparaison à celle de différence. Ce sont des « outils », des instruments pour travailler la notion de différence.

C1 suggère alors des pistes de travail sur l'usage des différentes représentations.

« *L'idée que le matériel va fournir forcément une aide, c'est pas sûr. Un matériel par définition ce n'est pas symbolique alors que dessiner des barres (…). Les systèmes de représentation, ils devraient apparaître de manière structurée en faisant en sorte qu'il y ait bien des échanges entre les systèmes de* représentation, des mises en lien entre les systèmes de représentation mais pas forcément de façon *simultanée (…). On a des systèmes très ambitieux et il va falloir en fait que ces systèmes très ambitieux on parte réellement des possibilités des élèves et de ce qu'ils sont en train de faire. Et là, et même sûrement, il y a un saut conceptuel sur la différence dont on n'a pas suffisamment pris conscience dans notre, dans la progression et ensuite dans les mises en œuvre, on voit les difficultés. (…).*

La progression vous donne des outils mais la question *après est qu'est-ce qu'on fait, comment on agit* avec ces outils de la manière la plus structurée possible pour que les élèves comprennent et avancent ».

Transcription 35 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (Annexe 32)

Cette correspondance entre les systèmes de représentation est ensuite exemplifiée par C1 à partir du visionnement d'une séance de classe d'une professeure expérimentale

« *Je voudrais attirer l'attention sur le fait que la référence sys*tématique aux doigts puis aux trains *(…) le professeur renvoie à une référence palpable et concrète des arguments qui sont produits (…). Il y a un travail sur la référence sur le fait que l'on se réfère aux doigts ou qu'on se réfère aux trains ou qu'on se* réfère aux expériences des élèves ».

Transcription 36 : extrait de la transcription de la réunion du 17 avril 2013 (Annexe, 32)

Il apparaît, à travers les propos des professeurs expérimentaux, que les représentations concrètes, matérielles telles que les cubes autorisent les élèves à comprendre la notion de différence, d'écart entre deux nombres. L'expérience motrice et effective des élèves liée à l'usage de ces systèmes de représentation permet aux élèves de construire une représentation du concept de différence (Ding & Li, 2014 ; Fyfe & al, 2014).

C1 précise qu'il est nécessaire de partir de l'expérience effective des élèves, de ce qu'ils savent faire. Il rappelle l'importance de ramener l'écriture symbolique à ce qu'elle réfère c'est-à-dire ici aux doigts, aux cubes, à une réalité concrète. La mise en correspondance des systèmes de représentation entre eux est mise au centre de l'action professorale.

2.1.2. Analyse de la réunion de régulation du 17 avril 2013

Les difficultés rencontrées dans la mise en œuvre du module « Différence » dans les classes expérimentales et d'étude sont principalement centrées sur l'usage des systèmes de représentation. Il apparaît, en effet, que le passage d'une situation additive à une situation soustractive soit un obstacle pour les élèves.

- La représentation corporelle

La difficulté première des élèves dans ce module est de montrer concrètement la différence entre deux annonces à deux mains (séance 1, phase 1). Les stratégies de vérification de la comparaison entre deux annonces « *l'annonce A est plus grande de* » ou « *l'annonce B est* plus petite de » proposées dans le texte de progression du module 9 semblent difficiles à mettre en œuvre. Les difficultés des élèves à énoncer la différence entre deux annonces peut s'expliquer par le fait qu'ils doivent passer d'un contrat de comparaison à celui de différence. Dans le contrat de comparaison, les élèves doivent simplement dire A < B, ou A > B ; alors que dans la nouvelle situation, ils doivent dire « de combien » A est plus petit que B », ou « de combien » B est plus petit que A.

De plus, pour montrer concrètement la différence entre deux annonces produites à deux mains, les élèves devaient procéder soit à une comparaison terme à terme soit en abaissant le nombre de doigts correspondant à la plus petite annonce sur l'annonce la plus grande. Cette habilité motrice ne s'avère pas aisée pour les élèves. La représentation corporelle n'apparait donc pas comme propice à la recherche de la différence.

Enfin, comme nous l'avons énoncé précédemment, l'usage de la représentation corporelle disparaît à partir du module 6B (vers les groupements par dix) et ne refait surface qu'au module 9 (soit douze séances programmées). Entre temps, les élèves travaillent principalement sur les nombres en utilisant des stratégies de composition et décomposition et sur un nouveau système de représentation, les « barres de dix ».

Il existe donc ici une rupture dans la continuité didactique de l'usage de la représentation corporelle et rupture dans la continuité de l'expérience des élèves. L'habitude d'usage de cette représentation n'a donc pas trouvé d'environnement qui assure son plein usage (Dewey, 1916/2011).

- Le schéma-ligne et le schéma-boîte

Les difficultés rencontrées par les élèves dans l'usage du schéma-ligne et du schéma-boîte pour représenter la différence sont omniprésentes dans les classes expérimentales comme dans les classes d'étude. Le système capacitaire construit précédemment, capacité de traduction d'une écriture additive sur un schéma-ligne, la capacité de traduction d'une écriture additive dans un schéma-boîte, semble limiter l'action des élèves dans la représentation d'une différence. Les élèves doivent passer d'un contrat sémiotique additif à un contrat sémiotique soustractif.

En effet, comme l'exprime un des professeurs expérimentaux, les élèves ont l'habitude de désigner chaque terme d'écriture additive, sur le schéma-ligne, par deux schémas-ponts concaténés. Il semble s'agir d'une habitude de contrat, spécifiquement sémiotique, qui surdétermine l'action des élèves.

Or, comme on l'a vu, la situation que propose le module « Différence » amène à la représentation de deux nombres sur deux schémas lignes. Dans la progression, la différence est donc "institutionnellement désignée par la portion de la demi-droite qui prend son origine à la fin de la portion du schéma-ligne du nombre le plus petit jusqu'à la fin de la portion du nombre le plus grand comme nous le montre la figure ci-dessous (Figure 40) :

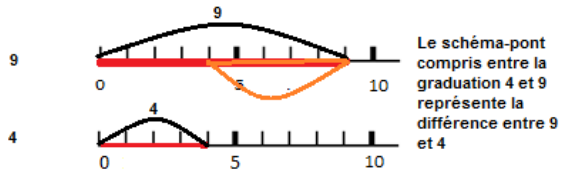


Figure 40 : représentation de la différence sur le schéma-ligne

L'habitude sémiotique de contrat que nous venons de signifier s'oppose à cette nouvelle forme de désignation, elle l'empêche. Les élèves utilisent l'instrument schéma-ligne pour modéliser une addition et non représenter deux nombres et l'écart entre eux. Ils l'utilisent dans la reproduction de ce qu'ils savent déjà faire. Le nouvel usage de cet instrument nécessite un nouveau « voir comme », son actualisation pour rendre capables les élèves de voir le schéma-ligne comme une représentation d'une différence entre deux nombres.

Nous pouvons produire la même constatation pour l'usage du schéma-boîte. Dans un contrat additif, la réponse, le résultat est donné dans la case supérieure de ce schéma. Lors du passage à une situation soustractive, le résultat, c'est-à-dire la différence entre deux nombres se situe

dans une des cases inférieures. La difficulté de représenter la différence ici peut être le fruit d'une forme d'algorithmisation de l'usage du schéma-boîte, avec le résultat dans la case supérieure et non la somme (cf. Figure. 41)

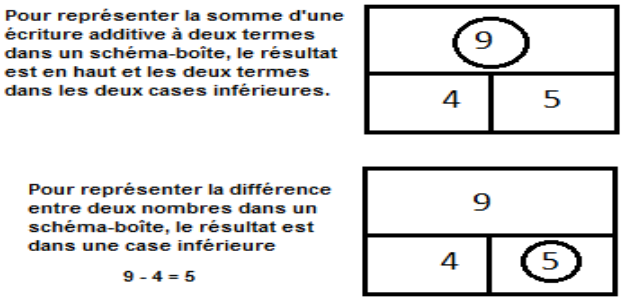


Figure 41 : représentation d'une addition et d'une soustraction dans le schéma-boîte

Il s'agit d'une nouvelle habitude sémiotique de contrat, qui, elle aussi, surdétermine l'usage de la boîte. Tout semble se passer comme si lorsqu'on est confronté à une boîte, le résultat est toujours en haut.

Ainsi, le schéma-boîte ne peut être vu comme une représentation des relations entre les différents nombres d'une égalité mathématique et des relations entre l'addition et la soustraction (Verschaffel, Bryant & Torbeyns, 2012 ; Greer, 2012).

Les professeurs expérimentaux et des classes d'étude (PCE3) remarquent que des élèves utilisent les systèmes de représentation de manière systématique sans comprendre véritablement à quoi ils réfèrent. Les connaissances sémiotiques du contrat en référence aux instruments (le schéma-ligne et le schéma-boîte) empêchent dans un premier temps *l'actualisatio*n de leur usage dans cette nouvelle situation.

Avec du temps laissé aux élèves pour essayer, cette actualisation devient possible. L'exemple suivant, extrait d'un Journal du Nombre d'une classe d'étude (cf. Figure 42), montre comment cette actualisation du potentiel d'action des élèves peut se réaliser.

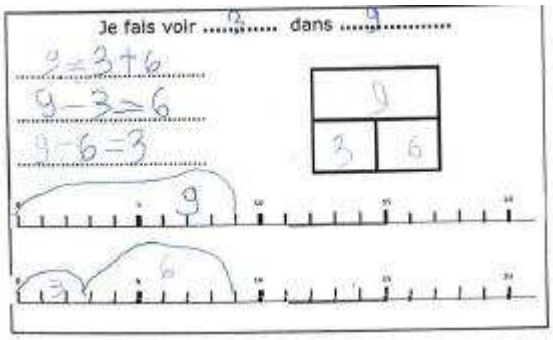


Figure 42 : extrait du Journal du Nombre dans la classe de PCE1

Dans cet extrait, la lecture excriptrice par l'élève du schéma-boîte autorise la production, l'inscription des opérations correspondantes (Chevallard, 2009, Kim, 2015). De même, l'usage du schéma-ligne donne à voir les relations des nombres entre eux, avec le « 3 » et le « 6 » inclus dans le nombre « 9 ».

- Mise en relation des systèmes de représentation

Les échanges lors de la réunion de régulation montrent que les élèves ont des difficultés à passer d'une représentation concrète (avec des cubes par exemple) de la différence à une représentation plus abstraite (sur le schéma-ligne, le schéma-boîte et l'écriture mathématique). Pour pallier ces difficultés, il apparaît que l'équipe de recherche oriente le travail professoral vers une mise en relation des systèmes de représentation entre eux. L'hypothèse de travail est ici de permettre aux élèves de faire l'expérience de la montée de l'abstrait au concret (Engeström, 1987) et pas seulement de la montée du concret à l'abstrait, par un processus de référence mutuelle ((Fyfe, McNeil, So & Goldstone, 2014 ; McNeil & Fyfe, 2012) entre les représentations concrètes et abstraites.

Cette réflexion vient en résonnance avec les modifications apportées au sein des premiers modules lors des « régulations immédiates » proposées par la sphère 1 pour remédier aux difficultés liées à l'usage des représentations par les élèves. Ainsi, par exemple, la séance 3 du module 4 est complétée avec un travail de mise en correspondance entre la représentation avec deux mains, le train-cubes, le schéma-train et le schéma-ligne.

2.2. Réorganisation conjointe des modules

Une semaine de stage (stage bilan/perspective) est organisée par l'équipe de recherche, en lien avec le corps d'inspection. Ce stage s'est déroulé du 17 au 21 juin 2013 et a réuni quinze professeurs expérimentaux des Côtes-d'Armor. Il a pour objectif, nous le rappelons, de « co*nstruire ensemble une réflexion sur l'expérience ACE de l'année 2012*-2013 et de *préparer ACE de l'année 2013*-2014 ».

Nous nous focaliserons dans ce paragraphe principalement sur deux moments d'échanges axés sur la réorganisation des modules et la notion de différence. Le premier moment se situe le premier jour du stage, le 17 juin, lors de la mise en commun du travail effectué en petit groupe par les professeurs concernant les « *lieux d'ajustements entre les différents modules et* le relevé de notions spécifiques à travailler ». Le second se déroule lors de la seconde journée

du stage, le 18 juin. Un groupe de professeurs y réfléchit particulièrement sur la notion de différence, en tant que notion spécifique à travailler.

Nous décrirons dans un premier temps comment au sein du dialogue inter-sphère l'agencement des modules est repensé. Dans un second temps, nous étudierons les échanges autour de la notion spécifique de différence entre deux nombres. Dans un troisième temps, nous relèverons les points de discussion relatifs à la difficulté des élèves liée au passage de situation de comparaison à celle de différence. Pour terminer, nous reviendrons sur une proposition des professeurs du groupe expérimental quant à l'introduction de la différence. Nous conclurons ce paragraphe par une synthèse de ce dialogue inter-sphère.

2.2.1. Réorganisation des modules autour du module « Différence »

Nous reprenons dans ce paragraphe des extraits de transcription issus des deux premières journées de stage bilan/perspectives du 17 et 18 juin 2013.

Lors de la première journée de stage, deux professeurs de la sphère 2 exposent au collectif leurs réflexions issues du travail en groupe réalisé autour des ajustements possibles entre les différents modules.

« *On trouvait qu'on n'avait pas le temps de travailler dans le module 9 sur les grands nombres (…), ça serait bien de prendre, de couper ce module 9 en deux, de prendre, d'utiliser les tous petits* nombres, tout le début, le faire après le module 6 »

« *Le module 6, c'est la comparaison de deux annonces. Il y a quatre plus trois et l'autre fait quatre plus un et on compare et pourquoi on ne pourrait pas dire si maintenant on calculait l'écart, la* différence entre les deux annonces *? (…) Et du coup ça permettrait d'embrayer sur le début du module 9 (…) sur les petits nombres* »

Transcription 37 : Extraits de la transcription du stage 17 juin 2013 (Annexe 33)

Certains professeurs de la sphère 2 proposent donc de scinder le module 9 en deux parties. La première partie de ce module, abordant la différence à partir des petits nombres, viendrait se positionner après le module 6 (comparaison de deux écritures additives). Le travail sur la différence entre les grands nombres viendrait, quant à lui, après le module sur les groupements par dix.

C1 commente alors à cette proposition en s'exprimant comme suit :

« *C'est vraiment la question de la continuité. Aussi bien la ligne*-train que cette proposition sur le *module 6, casser le module 9 en deux et le répartir, c'est p*our assurer justement plus de continuité

(…). Creuser, approfondir le principe d'égalité et approfondir le principe de différence (…). Il faut qu'il y ait aussi un approfondissement des systèmes de représentation »

Transcription 38 : extrait de la transcription du stage du 17 juin 2013 (Annexe 33)

C1 met l'accent ici (cf., Transcription 38) sur l'importance de la continuité au sein de la progression, continuité dans le travail sur l'égalité et sur la différence en lien avec l'usage des systèmes de représentation.

Lors de la seconde journée de stage, le 18 juin, cette hypothèse de réorganisation du module 9 est reprise par C1.

« *Dès le module 2 des problèmes, la différence apparaît. Alors, nous ce qu'on s'est dit aussi en réfléchissant (…), c'est que ce qu'on pourrait imaginer, c'est que en fait, il y a, dans le module 6,* entre le module 6 et le module 9, il y a trois idées différentes.

*La première idée car maintenant on l'inclut, c'est la différence. La deuxième idée, c'es*t composition, *décomposition bien évidemment le cœur de l'idée qu'il y a sous l'idée de comparaison, c'est la composition/décomposition et puis la troisième idée sur les grands nombres, c'est le groupement à dix. Ça c'est les trois idées qui doivent nous s*ervir de boussole dans ce fonctionnement ».

« *C'est-*à*-dire qu'on va à la fois les (les élèves) sensibiliser à la différence plus tôt comme vous le* disiez hier et ça me semble la bonne façon de faire. Et non seulement, on va les sensibiliser à la différence mais voir le signe moins qui va signer cette différence, qui va la montrer cette différence *(…) Après le module 7, le module 8, le module 9 où on revient à la deuxième partie de la différence, c'est-*à*-dire à la différence sur les grands nombres (…). La question est donc qu'est-ce qu'on fait de ce signe moins. Et je pense que ce serait intéressant de repenser, d'inclure parce que les modules 7 et 8 et 6c tels qu'ils sont actuellement ne sont pas touchés par la différence parce qu'initialement ce n'est que* des comparaisons »

Transcription 39 : extrait de la transcription du 18 juin 2013 (Annexe 34)

La figure ci-dessous illustre la réorganisation des modules proposée par C1 au tableau. La partie supérieure représente l'organisation des modules telle qu'elle était proposée en 2012-2013 et la partie inférieure la nouvelle organisation présentée lors de cette journée du 18 juin 2013. Nous avons relié par des traits pleins les différentes versions des mêmes modules.

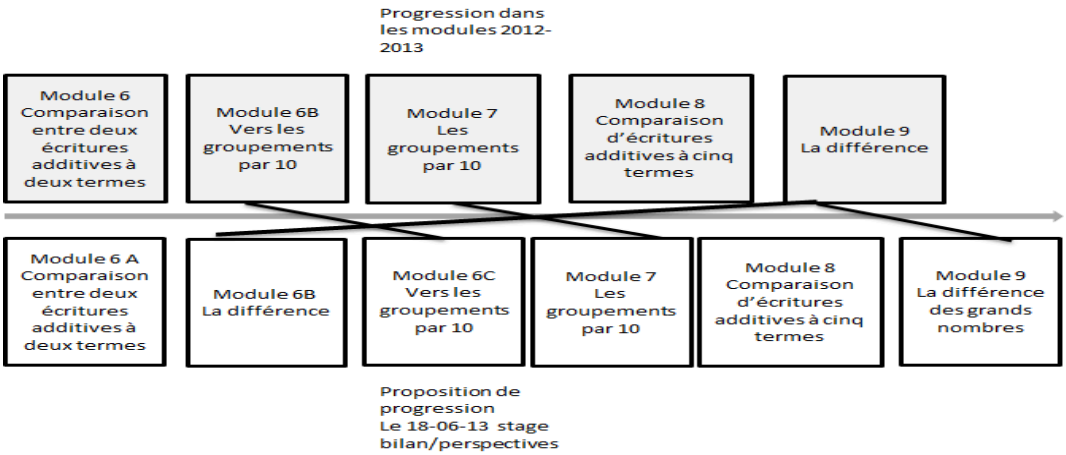


Figure 43 : proposition d'organisation des modules.

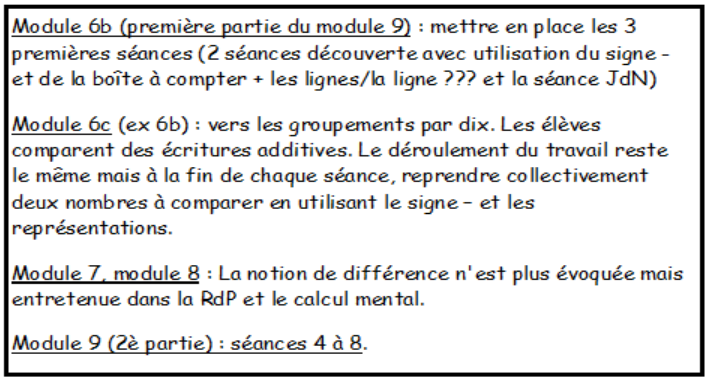
L'« ancien » module 9 est donc scindé en deux :

- une partie du module 9 est « convertie » en module 6B. Ce nouveau module aborde la différence sur les petits nombres et est proposé plus précocement dans l'année après le module 6 (comparaison de deux écritures additives dont les termes sont inférieurs ou égaux à 6) ;

- une partie, constituant le « nouveau » module 9, aborde la différence sur les grands nombres et est introduit après les modules 7 et 8 (respectivement, les groupements par 10 et la comparaison d'écritures additives à cinq termes).

Un second groupe de travail (constitué de professeurs de la sphère 2 et deux membres de la sphère 1) réfléchissant autour de l'introduction de la notion de différence apporte alors des précisions quant au contenu même des modules 6b, 6c, 7 et 8

Le document ci-dessous, fruit de leur réflexion collective, est projeté à l'ensemble des participants au stage. Il propose l'organisation suivante à partir du module 6B, la différence sur les petits nombres.


Module 6b (première partie du module 9) : mettre en place les 3 premières séances (2 séances découverte avec utilisation du signe - et de la boîte à compter + les lignes/la ligne ??? et la séance JdN)

Module 6c (ex 6b) : vers les groupements par dix. Les élèves comparent des écritures additives. Le déroulement du travail reste le même mais à la fin de chaque séance, reprendre collectivement deux nombres à comparer en utilisant le signe - et les représentations.

Module 7, module 8 : La notion de différence n'est plus évoquée mais entretenue dans la RdP et le calcul mental.

Module 9 (2è partie) : séances 4 à 8.

Figure 44 : extrait de la feuille de synthèse du groupe de travail

Ainsi, le module 6b reprend les premières séances du module 9 (La différence) avec un travail spécifique sur l'appropriation du signe « - » et les systèmes de représentation (le schéma-ligne et le schéma-boîte). Le module 6c renvoie au module 6b introduisant le groupement par dix par une situation de comparaison entre deux écritures additives (jusqu'à sept termes). A la fin de ce module, est réinvestie l'écriture soustractive avec le signe « - » introduit lors du module précédent. La notion de différence n'est pas évoquée lors des modules 7 (les groupements par dix) et 8 (comparaison d'écritures additives à cinq termes). Elle n'est travaillée que dans le domaine « Résolution de problèmes ». Cette étude, dans le domaine « Situations », n'est reprise qu'à partir du module 9 introduisant la différence sur les grands nombres. Cette proposition d'organisation amène donc à une rupture temporelle dans l'étude de la différence dans le domaine « Situation ».

Mais comment sont repensés par le collectif les contenus de savoir des modules à partir de la nouvelle organisation déclinée ci-dessus ?

Dans les deux paragraphes suivants, nous décrirons comment le contenu des modules réorganisés est immédiatement discuté entre les membres des deux sphères.

2.2.2. La notion de différence

Nous reprenons dans ce paragraphe de manière plus détaillée les échanges liés aux réflexions inter-sphères autour de la notion de différence dans le domaine « Situations ». Nous nous focaliserons principalement sur les échanges qui ont eu lieu le 18 juin 2013. Nous étudierons le dialogue instauré au sein d'un groupe de travail[103] et lors de la mise en commun des productions des quatre groupes constitués autour d'un travail sur certaines notions. Deux professeurs s'expriment sur la compréhension du mot différence par leurs élèves.

« *Parce que moi, je trouve que ça arrive comme ça. Hop, on fait la différence (...). Moi, j'ai trouvé que les miens étaient un peu paumés au départ. Déjà, ils ne comprenaient pas ce que c'était le mot* différence ».

« *Moi, je me suis trouvé face à une situation et il y a un élève qui me dit, c'est quoi la différence* »

Transcription 40 : extrait du stage du 18 juin 2013 (Annexe 34)

Le mot différence lorsqu'il est introduit dans le module 9 n'est pas compris par l'ensemble des élèves.

[103] Ce groupe de travail a pour thème « module 9 à distribuer en deux parties, la première partie sur les petits nombres après le module 6, la deuxième restant où elle se trouve » Ce groupe est constitué de huit professeurs expérimentaux et un membre d*e l'équipe de recherche C2. C1 y intervient ponctuellement.*

Deux professeurs expérimentaux rebondissent sur la proposition d'avancer le module « Différence » dans le temps.

« Tandis que là, tout serait amené plus tôt » « Déjà la petite graine »

Transcription 41 : extrait du stage du 18 juin 2013 (Annexe 34)

C1 rebondit alors sur cette question d'amener la notion de différence plus en amont dans la progression (après le module 6 plutôt qu'après le module 8).

« *Sur la question de la petite graine, là c'est vraiment la question cruciale de la continuité. Moi, en* fait, je pense que le vocabulaire, quand on v*a reprendre l'écriture des modules, amélioration des modules en fonction de ce qu'on aura vu cette semaine, je pense qu'il faut que très tôt, le mot différence, il faut qu'il apparaisse. Puisque finalement la comparaison c'est bien l'élucidation de la* différence. Il faut parler de différence mais très naturellement. On voit la différence entre deux nombres »

Transcription 42 : extrait du stage du 18 juin 2013 (Annexe 34)

Cet extrait de transcription (cf. Transcription 42) se focalise sur l'intérêt d'introduire plus précocement le mot « différence » dans les modules mais d'une manière "naturelle".

Deux professeurs reprennent alors la parole et apportent l'expérience de leurs élèves face au vocable « différence ».

« La graine q*ui amène à la différence, c'est le signe différent. Puisqu'on regarde si on regarde si les* nombres sont pareils ou pas. Ensuite, quand ils ne sont pas pareils lequel est le plus grand » « *Je trouve que le mot différent par rapport au signe différent (…) ils ne savent pas trop que l'écart, pour certains enfants, c'était plus clair un écart qu'une différence.*

Transcription 43 : extrait du stage du 18 juin 2013 (Annexe 34)

La transcription ci-dessus (cf. Transcription 43) montre la difficulté pour les élèves d'utiliser le mot « différence ». En effet, comme le précise le premier commentaire, le premier terme que les élèves rencontrent pour préciser le résultat d'une comparaison entre deux nombres est celui de différent (en opposition au mot « égal »). Le résultat de cette comparaison est ensuite affiné en précisant si A est plus grand ou plus petit que B.

De son côté, C1 précise ce que signifie le mot différence dans la progression du domaine « Situations ».

« La différenc*e mathématique, c'est la différence de tous les jours, c'est la différence commune sauf qu'elle est mathématisée, on met un nombre derrière la différence (…). La différence mathématique est une différence qui s'exprime par un nombre (…). Donc l'idée que le*s élèves comprennent ce que *veut dire différent, sachent que c'est pas pareil. C'est pas pareil mais en mathématiques, c'est quoi la différence (…). On peut la montrer dès qu'on a la ligne, dès qu'on a un système de représentation. La différence et l'écart, c'est la même chose.* »

Transcription 44 : extrait du stage du 18 juin 2013 (Annexe 34)

Considérons les difficultés que les élèves connaissent dans l'usage même du mot « différence ». Au cours des huit premiers modules, le mot « différent » vient justifier les comparaisons entre deux écritures additives. Par exemple dans le texte curriculaire du module 3', version 2012-2013 (Annexe, 5), il est précisé que le professeur, à partir d'une comparaison « 3 + 1 + 1 ≠ 6 », commente le résultat en utilisant les expressions « différent, est plus petit que). Ces expressions se retrouvent dans le texte du module 4' (Annexe 7) « le professeur pourra en appui sur la ligne graduée user du vocabulaire suivant « 4 est différent de 5, 5 est plus grand que 4, 4 est plus petit de 5 ».

Ce terme « différent » et le signe « ≠ » est introduit dès le module 2 et vient coder une inégalité mathématique. Il est accompagné par l'usage des termes « plus grand que, plus petit que » et des symboles mathématiques « < ; > » qui justifient mathématiquement le résultat des comparaisons effectuées.

En reprenant les capacités cibles émergeant de l'analyse des textes curriculaires effectuée dans la section précédente, nous retrouvons effectivement :

- au module 2, l'usage des signes mathématiques « =, ≠ » pour désigner des égalités et des inégalités entre une écriture additive à deux termes et un nombre usuel (≤ 6) ;

- aux modules 3 et 4, l'usage des signes mathématiques « >, <, =, ≠ » pour désigner des égalités et des inégalités entre deux écritures additives à trois termes (chaque terme ≤ 5) et un nombre usuel (≤ 6) ;

-aux modules 5 et 6, l'usage des signes mathématiques « >, <, =, ≠ » pour désigner des égalités et des inégalités entre deux écritures additives à deux termes ;

- aux modules 7 et 8, l'usage des signes mathématiques « >, <, =, ≠ » pour désigner des égalités et des inégalités entre deux écritures additives à plusieurs termes.

Nous faisons donc l'hypothèse que le terme « différence » pour désigner un écart entre deux nombres rentre en conflit avec le mot « différent » qui renvoie à la notion d'inégalité entre deux écritures additives. Le contrat de comparaison vient donc empêcher ou limiter la construction d'une capacité de désignation d'un écart entre deux nombres. De plus, la distance entre les connaissances déjà-là (contrat de comparaison) et le milieu (recherche de la différence) dans le module 9 est subtile puisque la différence est introduite dans une situation de comparaison :

- comparaison entre deux annonces produites à deux mains (séance 1, 2 et 3) ;

- comparaison entre deux nombres inférieurs ou égaux à 10 (séance 4, 5 et 6).

Les formes symboliques (l'organisation des systèmes de représentation) sont très proches de celles que les élèves ont rencontrées dans le cadre de problèmes de comparaison. Le contrat de comparaison reste donc prégnant et les connaissances déjà-là sont d'autant plus activées par l'usage d'expressions proches telles que « différent » et « différence ». Le maniement effectif par les professeurs des connaissances anciennes et des nouvelles qui doivent émerger de la nouvelle situation est a priori délicat puisque le déchiffrement du milieu sémiotique se joue sur un système de connaissances déjà-là, sur un contrat didactique.

Le dialogue inter-sphère ci-dessus montre tout l'intérêt pour l'équipe de recherche comme pour les professeurs du groupe expérimental d'introduire plus tôt dans la progression le terme différence, bien avant le nouveau module 6b. La différence vient alors modéliser la comparaison, modélisation qui au départ se fera à l'oral sans l'écriture soustractive. Le nombre désignant la différence viendra coder la comparaison entre deux nombres, l'écart entre deux nombres à partir du module 6b. L'hypothèse est ici que la différence devienne progressivement un voir-comme de la comparaison, voir la comparaison entre 9 et 7 comme 2 – 2 comme différence entre 9 et 7.

Il faut comprendre que dans la progression ACE, cette notion de différence est à mettre en relation avec l'usage du schéma. En effet, les élèves utilisent cette représentation analogique/symbolique pour valider ou modéliser un problème de comparaison depuis le module 1. La comparaison de deux nombres représentés sur deux schémas-lignes montre concrètement la différence de longueur entre deux nombres, représentée par une portion (un segment) du schéma-ligne. L'idée n'est plus simplement de voir le schéma-ligne comme un instrument de comparaison mais aussi comme un instrument de mesure d'un écart de longueur entre deux nombres.

Mais quelles sont les difficultés sous-jacentes à l'introduction plus précoce de la notion de différence dans les premiers modules ? Comment penser l'articulation entre des situations de comparaison et de différence ?

2.2.3. La comparaison et la différence

Comme nous venons de le voir ci-dessus, la nouvelle organisation proposée introduit la notion de différence à partir de situations de comparaison. C1 met alors en évidence les conflits

susceptibles d'apparaître entre les stratégies de comparaison et de recherche de différence lors de l'introduction précoce de cette nouvelle notion.

« *Il est clair que si on leur demande d'écrire la différence de suite, ça va les inciter à compter, on va avoir un conflit entre la différence et la comparaison, la composition/décomposition (…). On pourrait travailler en deux temps (…) sur les parties fictives qu'il y en ait trois, quatre, qu'on en fasse beaucoup moins que ce qu'on avait dit initialement, confère ce que l'on disait hier, en choisir moins* est plus justifié. On pourrait passer une première fois, les élèves font ça et puis dans un deuxième temps, ils ont à remplir les cases. Il y aurait un temps où ils comparent et un temps où ils cherchent la différence. Ensuite, on dirait douze plus deux ça fait quatorze, dix et un ça fait onze. La différence, elle *est de trois. La différence, c'est d*onc bien le résultat de la soustraction ».

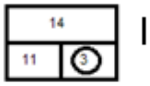
Transcription 45 : extrait de la transcription de la réunion du 18 juin 2013 (Annexe 34).

C1 exprime le fait qu'il est nécessaire d'être attentif, avec l'introduction de la différence, de ne pas contrecarrer les stratégies de composition/décomposition visées lors de la comparaison des écritures additives. En effet, à partir du module 6, le domaine « Situations » travaille particulièrement les procédures de composition/décomposition pour que les élèves appréhendent différentes formes de désignation des nombres, tout d'abord des petits nombres puis des plus grands nombres dans des situations de comparaison. Ces procédures amènent progressivement à découvrir le système décimal à travers les groupements par dix. Il apparaît que la recherche de la différence entre deux nombres pourrait favoriser le développement du comptage, voire du surcomptage et donc faire obstacle aux stratégies de composition/décomposition. C1 précise, de même, que la notion de différence et de comparaison peuvent entrer en conflit. En effet, dans ACE, la comparaison c'est simplement dire si « A est plus grand ou plus petit que B » alors que la différence c'est dire « de combien A est plus grand ou plus petit que B ». Ainsi que nous l'avons maintes fois constaté, les jeux de langage sont ici différents, parce qu'ils sont liés à une activité, une situation (une forme de vie) qui détermine leur usage (Laugier & Chaviré, 2006). Il existe de fait deux types de jeux de langage/forme de vie, le premier de la comparaison, et le second de la soustraction, que C1 va proposer de travailler ensemble.

En effet, la suggestion de C1 (cf. Transcription 45, ci-dessus) d'introduire la notion de différence au sein des parties fictives entraîne la recherche de la comparaison et de la différence entre deux nombres dans une même situation. La structure de la situation au sein de laquelle les élèves vont produire leur action (de comparaison et de recherche de différence) est la même. Ils vont donc devoir jouer à deux jeux différents dans une même situation et

passer d'un style de pensée[104] (Fleck, 2005) à un autre en mobilisant deux jeux de langage différents. De plus, comme on vient de le préciser, une seconde difficulté est la prégnance du contrat de comparaison pour les élèves. Le système capacitaire construit précédemment dans l'action conjointe (l'arrière-plan) peut limiter l'action des élèves dans la mise en relation des éléments du milieu pour rechercher la différence entre deux nombres.

C1 propose des pistes de réflexion sur la manière d'introduire plus précocement la différence, à travers par exemple l'usage du schéma-boîte. La différence entre 14 et 11 est représentée dans le schéma-boîte suivant, les deux écritures mathématiques viennent traduire les relations entre les trois nombres contenus dans ce schéma :



$11 + 3 = 14$ et $14 - 11 = 3$

C1 insiste sur le fait que le travail simultané sur la comparaison et la différence (qui est en quelque sorte un « modèle » de la comparaison) est intéressant car il renvoie à deux regards sur l'égalité notamment à travers le principe inverse (Verchaffel, Bryant & Torbeyns, 2012) où « $a - b = ? \rightarrow b + ? = a$ » (Ibid., p. 327).

L'usage des systèmes de représentation est, de même, mis en réflexion au sein du groupe de travail sur la différence Ainsi, les professeurs du groupe expérimental s'expriment sur l'utilisation du schéma-boîte en lien avec la notion de différence

« A ce moment-là, à partir du module 3, tu peux mettre ici validation collective au tableau avec la boîte ».

« *Ça permettrait dans l'utilisation de la boîte de justement, de, de tout de suite* profiter de sa souplesse *d'utilisation. C'est*-à-*dire que les choses ne soient pas figées, qu'on va placer ce nombre*-là en premier, celui-ci et celui-*là mais plutôt un jeu à trois nombres (…) et on repère ce qu'il peut y avoir de différent entre deux d'entre eux (…) avec l'idée d'entourer ce que l'on recherche* ».

Transcription 46 : extraits des échanges du stage du 18 juin 2013 (Annexe 35)

L'introduction précoce de la différence permettrait ainsi aux élèves de comprendre les relations des nombres entre eux dans le schéma-boîte en évitant une forme d'algorithmisation de l'usage de cette représentation (avec le résultat systématiquement dans la case supérieure).

Le dialogue sur l'introduction précoce de la différence se poursuit entre les professeurs et l'équipe de recherche.

[104] En effet, « jouer c'est toujours s'inscrire dans une institution (Douglas, 1999), toujours épouser un style de pensée (Fleck, 2005) ». (Sensevy, 2008)

2.2.4. La différence, fil rouge

Emergent du travail collectif des professeurs du groupe expérimental des propositions plus précises concernant le contenu même des séances liées aux problématiques rencontrées lors des mises en œuvre. Ainsi, pour introduire plus précocement la notion de différence dans les modules, un groupe de travail expose un nouveau jeu « la bataille des mains » qui serait décliné du module 1 jusqu'au module Différence première partie (module 6B) comme le montre l'extrait de la synthèse produite par ce groupe.

Jeu quotidien/court à partir du module 1 (sous forme de rituel)

Jeu « Pierre/feuille/ciseaux » nommé pour les élèves « *la bataille des mains* » avec des petits nombres (jusqu'à 5=une main).

- Comparer chaque main : qui a gagné ? (celui qui fait le plus/le moins/s'il y a égalité, les deux gagnent)

A partir du module 2

- Même jeu mais identifier et nommer la différence à chaque fois (comparaison de doigts pour valider)

A partir du module 3 jusqu'au module 6

- De combien ? (gagne si la différence est de 1 ; 2...) Validation collective au tableau avec la boîte.
- Un élève propose un certain nombre de doigts (exemple : 3) et demande une différence de 2. Si le camarade propose 1 ou 5 il gagne.
- Variante avec les dés (nombres de 1 à 6) puis les cartes (nombres de 1 à 10).

Figure 45 : extrait de feuille de synthèse du groupe de travail

Au cours du module 1, les élèves expérimentent cette bataille des mains. Les élèves jouent par binôme, montrent chacun une annonce sur une main et les comparent. Il est précisé que les élèves énoncent qui a le plus ou le moins de doigts levés. La bataille des mains est donc tout d'abord une situation de comparaison entre deux représentations corporelles sur des petits nombres (≤ 5). Puis, dès le module 2 le terme différence est introduit. A partir du module 3, les élèves désignent cette différence par un nombre oral. Deux élèves lèvent des doigts sur une main. La différence entre ces deux mains doit être égale à un nombre donné. Les valeurs numériques augmentent avec les dés et les cartes. Les arguments avancés par les professeurs pour justifier l'introduction de ce jeu résultent de l'importance pour les élève de se familiariser précocement avec le mot différence, de la nommer sans la calculer. Cette proposition fait écho à l'expérience de certains professeurs qui introduisent plus tôt dans l'année la différence.

« Ta*nt que l'on est resté sur l'addition, je n'avais pas vraiment de moins avancés (...). Mais à partir du moment où la différence est arrivée, alors là j'ai eu des coulages (...). C'était trop de choses à réfléchir, ils ne savaient plus (...). Avant je sortais la soustraction très tôt dans l'année. A Noël,*

j'avais les deux et je manipulais les deux toute l'année. L'introduire tôt et la manipuler longtemps, c'est mieux ».

Transcription 47 : extraits du travail en groupe du 18 juin 2013 (Annexe 35)

Deux membres de l'équipe de recherche, C1 et C2 réagissent à cette proposition du jeu de la « bataille des mains » de la manière suivante :

C2 « Est-*ce qu'on* ne pourrait pas à la place du nouveau jeu, travailler sur ce que tu proposes mais sur les décompositions additives et lors de la mise en commun, dire que, on peut écrire comme ça dans *la boîte plutôt que d'introduire un nouveau jeu (…) Vous dites qu'il y a deux jeux. Donc c'est quand même d'une certaine manière une annonce. Pourquoi, on* ne dirait pas plutôt annonce à une main, annonce à deux mains ? »

C1 : « *Rien n'empêche, il faudrait revoir les modules 0, 1, 2. Même à partir du module 0, il y a des différences entre les trains. Moi, je pense qu'il faudrait utiliser ce que vous avez pro*duit »

Transcription 48 : extrait du travail de groupe du 18 juin 2013 (Annexe 35)

Nous observons ici la volonté des professeurs des classes expérimentales de devancer l'introduction de la différence par rapport à ce que la progression propose. L'intention semble être de créer une continuité de l'expérience des élèves à travers ce jeu, traversant l'ensemble des modules avec une progressivité quant à l'enjeu (comparaison et différence) et aux valeurs numériques proposées. La comparaison et la différence sont donc travaillées simultanément. Cependant, ce nouveau jeu vient se juxtaposer à celui déjà existant, le jeu des annonces où les élèves comparent deux annonces produites sur deux mains puis sur trois mains avec un nombre usuel. La remarque de C2 vient mettre en évidence cette observation et propose de travailler directement sur la notion de différence à partir du jeu des annonces et les comparaisons des décompositions additives qui en découlent. Néanmoins, cette idée de travailler explicitement sur la différence dès le module 1, voire le module 0 apparaît comme une proposition à explorer comme nous donne à voir l'extrait de transcription ci-dessous

« *C'est plutôt la nommer (la différence). Je pense que c'est important à certains moments qu'on nomme les choses. On fait par rapport à ce qu'on fait jusqu'à présent, c'est qu'on nomme la différence, qu'on systématise beaucoup plus tôt. Alors que jusqu'alors, ils (les élèves) en avaient une* perception plus implicite, plus ou moins implicite et là, on explicite plus tôt le vocabulaire de la différence »

Transcription 49 : extrait de la mise en commun du travail de groupe du 18 juin 2013 (Annexe 36)

Ainsi, à partir des réflexions menées au sein du collectif, C1 met l'accent sur l'importance de nommer la différence Il reprend donc l'idée émise précédemment, la différence doit venir modéliser la comparaison dès les premiers modules.

2.3. Synthèse du dialogue inter-sphères

Le dialogue instauré entre l'équipe de recherche et les professeurs du groupe expérimental que nous venons d'étudier ci-dessus est possible, rappelons-le, grâce au contrat de recherche énoncé par C1 lors de la semaine de formation en juin 2012. Ce contrat se définit dans les termes suivants :

- mettre en œuvre rigoureusement ;
- analyse et critiquer/commenter pour proposer et concevoir ;
- construction d'un « objet » commun, approprié par tous à partir de la proposition de programmation/progression/déroulement dans une perspective coopérative ;
- les professeurs ne sont pas de simples opérateurs, mais des (co)-concepteurs du curriculum.

L'hypothèse de travail envisagée lors des différents réunions/stages est donc liée à l'amélioration du curriculum proposé en tenant compte de l'expérience mathématique des professeurs et de leurs élèves. Ces réflexions et ce dialogue entre les deux sphères amènent donc à repenser l'organisation des modules. Ainsi, il est proposé de scinder le module 9 « Différence » en deux et déplacer le travail sur la différence sur les petits nombres après le module 6. Cette réorganisation des modules serait accompagnée d'une introduction précoce (dès le module 1) de la notion de différence entre deux nombres.

Par le biais des hypothèses de réagencement des modules et du contenu des savoirs interne aux modules, il apparaît donc une volonté de construire une continuité didactique avec un travail sur un temps long de la notion de différence. Cette continuité didactique s'accompagnerait d'une continuité de l'expérience des élèves, une croissance dans les habitudes (Dewey, 1916/2011) avec un travail systématique autour de la comparaison et la différence entre deux nombres. Les extraits de dialogue entre les deux sphères autour du module « Différence » tendent à montrer l'instauration d'un arrière-plan commun de significations, les professeurs et les chercheurs jouent au même jeu à partir d'un même contrat. Ils ont des connaissances partagées liées au contenu même des modules et particulièrement du module « Différence » et de sa mise en œuvre. Chaque participant est confronté à un même problème, la difficulté des élèves à construire des connaissances sur la différence au sein de situations de comparaison. A partir des expériences de chacun (professeurs, élèves et chercheurs), l'idée est de bâtir conjointement des hypothèses de travail. Le milieu-problème, dans sa description la plus générale, consiste à trouver/proposer des

pistes d'amélioration du curriculum en prenant en compte les difficultés des élèves liées à l'introduction de la différence, comme écart entre deux nombres. Mais quels ont été les effets de ce dialogue sur la re-conception des modules du domaine « Situations » pour l'année 2013-2014 ? Dans la section suivante, nous analyserons les modifications apportées aux textes curriculaires des modules par la sphère 1 au cours de l'été 2013.

3. Nouvelle organisation des modules, année 2013-2014

Dans cette troisième section, nous étudierons les nouveaux textes curriculaires produits par la sphère 1 pour la deuxième année consécutive d'expérimentation dans des classes du groupe expérimental. Mais comment sont réinvesties par la sphère 1 les hypothèses de travail dégagées lors du travail coopératif ? Quels sont les effets du dialogue intra et inter-sphères sur la réorganisation des modules et principalement du module Différence ? Comment les réflexions des classes du groupe expérimental ont-elles été intégrées dans le nouveau curriculum ? Comment est pensée la continuité didactique dans la nouvelle version du curriculum ?

Pour aborder ces questions, nous nous appuierons sur les textes curriculaires proposés par la sphère 1 aux professeurs à la rentrée de l'année scolaire 2013-2014.

Dans une première partie, nous reviendrons sur le nouvel agencement des différents modules du domaine « Situations » pour comprendre la nouvelle structure de celle-ci et de ces implications pour la continuité didactique du savoir. Dans une seconde partie, nous analyserons plus précisément la nouvelle mouture du module « Différence » à partir des différentes séances proposées. Nous terminerons par une synthèse de cette réorganisation.

3.1.1. Réagencement des modules et différence

Dans ce premier paragraphe de la section 3, nous observerons de manière macroscopique comment les modules sont réorganisés dans la nouvelle mouture de la progression du domaine « Situation » (2013-2014).

Tout d'abord, nous reprenons succinctement les six premiers modules du domaine « Situations » pour aiguiller le lecteur dans cette nouvelle progression[105].

La figure ci-dessus (cf. Figure 46) reprend la progression des premiers modules. Leur organisation chronologique n'a pas été modifiée entre les deux années. Néanmoins, la structure interne au moins des trois premiers modules a été retravaillée comme nous l'a montré l'analyse de la première régulation.

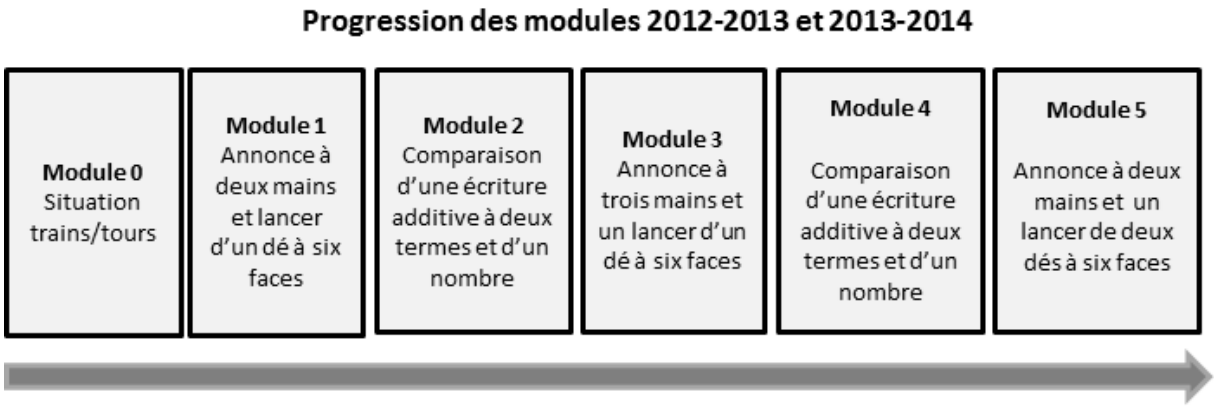


Figure 46 : progression des six premiers modules

Ainsi, dès le module 0 est introduit le schéma-pont et l'écriture symbolique qui vient désigner la mesure de la grandeur représentée sur le schéma-train. Cette représentation est réinvestie dans le module 1 pour valider les comparaisons orales entre une annonce à deux mains et un nombre. Puis, à partir du module 2, elle vient se superposer au schéma-ligne pour une meilleure compréhension des élèves de l'usage des intervalles et des graduations sur la demi-droite graduée. L'usage de cette représentation, le schéma-train/ligne, se poursuit au cours des modules suivants avec progressivement la disparition du schéma-train pour laisser place au seul schéma-ligne.

De plus, à partir du module 4 est introduite par le professeur la notion de différence entre une écriture additive à trois termes et un nombre usuel à partir des expressions « A est plus petit/plus grand que B de ». Le nombre oral vient désigner la mesure de la grandeur de l'écart entre deux nombres. Cette expression complète celle liée au vocabulaire de la comparaison « A est plus grande/plus petite que B », « A est différent de B » et aux écritures mathématiques s'y référant « $A < B$; $A > B$; $A \neq B$ ». Ces expressions écrites et orales sont réinvesties lors des modules 5 et 6.

[105] Les premiers modules et leur évolution ont été analysés dans le chapitre 4 de cette thèse

La notion de différence et celle de comparaison sont donc travaillées simultanément avant l'introduction de l'écriture symbolique de la soustraction.

Nous reprenons ci-dessous la suite de la progression pour donner à voir l'évolution de la chronologie des modules à partir du module 6 à la suite des hypothèses de travail émises lors du travail coopératif précédent.

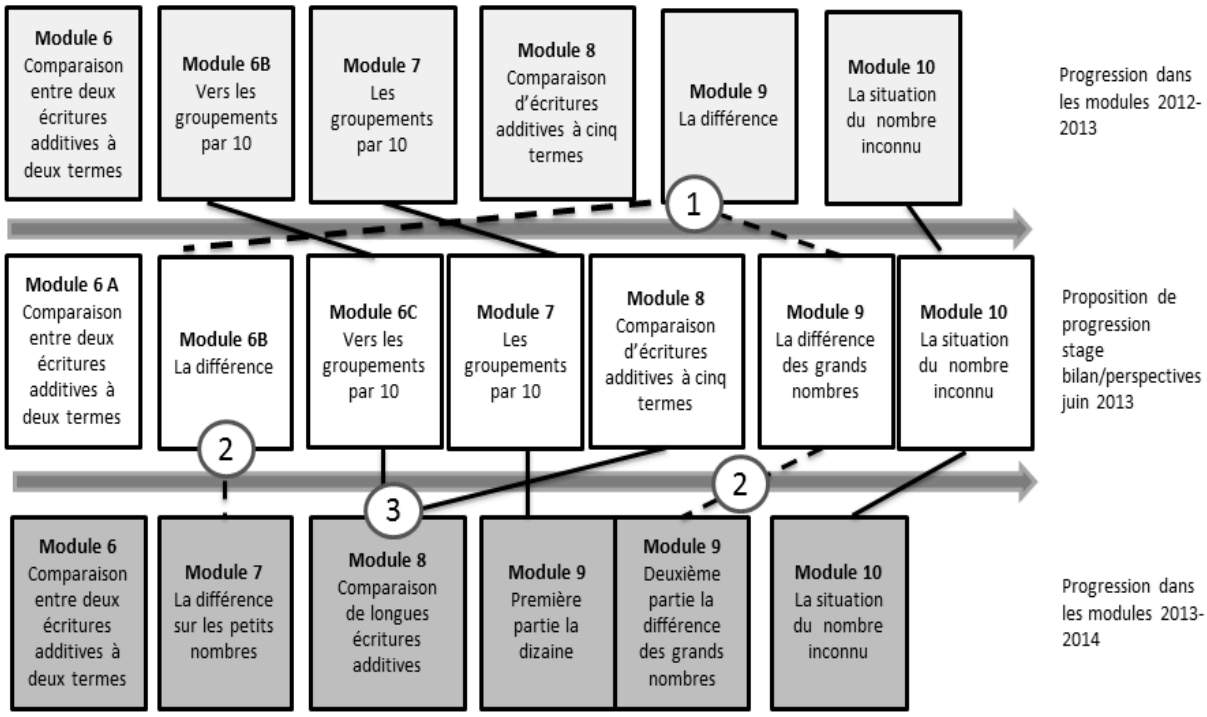


Figure 47 : vision synoptique de l'évolution de l'organisation des modules

La figure 47, ci-dessus, montre quels sont les effets sur l'organisation même des modules du dialogue inter-sphères et comment ce travail coopératif a été pris en compte par la sphère 1.

La première ligne montre l'agencement des modules lors de l'année 2012-2013. Le module « Différence », comme nous l'avons vu dans les deux sections précédentes, est alors le module 9. Il se situe après l'introduction du groupement par dix (module 7) et le travail de comparaison entre deux écritures jusqu'à sept termes (module 8).

La seconde ligne reprend les propositions de réagencement émises lors du stage bilan/perspectives. Les deux flèches en pointillés (1) montrent le découpage du module 9 « Différence » en deux parties. La première partie (module 6b) introduit la différence sur les petits nombres et vient à la suite du module 6 (comparaison de deux écritures additives). La seconde partie, différence sur les grands nombres, vient après les modules introduisant les groupements par 10 (module 7) et le module sur la comparaison d'écritures additives à cinq termes.

La nouvelle progression proposée aux professeurs du groupe expérimental en septembre 2013 est, quant à elle, diminuée d'un module (dernière ligne de la figure 47) avec une fusion du module 6c (vers les groupements par 10) avec le module 8 (comparaison d'écritures additives à cinq termes). Cette volonté de la sphère 1 de regrouper ces deux modules s'explique par le fait qu'ils proposaient une situation similaire, la comparaison de deux écritures additives à plusieurs termes (jusqu'à sept). En effet, le module 6c (ou 6b dans la première version de la progression) avait été produit lors de la première année d'expérimentation pour que les élèves construisent progressivement des stratégies de composition/décomposition avant d'aborder le module sur les groupements par dix. Ce module venait pallier les difficultés des élèves face à l'introduction de la numération décimale. En effet, le groupement par dix est, dans la progression ACE, travaillé à partir d'une écriture additive à onze termes que les élèves réduisent pour expérimenter l'économie de la dizaine. Ce nouveau module fusionné vient dans la nouvelle progression se placer avant le module 9 introduisant la dizaine (flèche 3).

Un second point saillant de cette nouvelle progression est la scission du module « Différence » en deux comme cela est proposé lors du stage bilan/perspective de juin. Cependant, la différence sur les grands nombres est dans cette nouvelle progression intégrée dans la seconde partie du module 9, sur les groupements par dix (flèches 2).

Ainsi la vision synoptique de la réorganisation des modules montre une prise en compte par la sphère 1 des hypothèses de travail émises par la sphère 2 et discutées collectivement. La notion de différence est donc traitée plus précocement que lors de la progression de 2012-2013.

Mais comment au sein du nouveau module 7 « Différence » est repensé par la sphère 1 l'introduction de la différence ?

3.2. Module 7 : la différence sur les petits nombres

Dans ce second paragraphe, nous décrirons et analyserons le nouveau module 7 qui introduit la notion de différence sur les petits nombres. Au cours du premier trimestre 2013, ce module a été repensé et rédigé par les membres de la sphère 1. Il a été mis à disposition des professeurs du groupe expérimental sur le site Internet de la recherche en janvier 2014. La première partie de ce texte de progression présente les enjeux de ce module.

Nous reprenons ci-dessous un extrait de la présentation de ce module 7 qui reprend dans les grandes lignes déjà mise en évidence lors du module 9 (2012-2013).

> *« Les élèves doivent donc se rendre capables d'évaluer exactement une différence numérique lors d'une comparaison (par exemple la différence entre 7 et 4 est 3, entre 10 et 7 est 3, entre 20 est 17 est 3, etc.), mais aussi d'exprimer à partir d'un nombre la différence qu'il peut signifier, en tant qu'« écart » entre deux nombres. (…). Dans cette perspective, une excellente habitude peut être instituée dans la classe, qui consiste à montrer « l'écart », c'est-à-dire la différence, en déplaçant sur la bande numérique un train-nombre (cf. plus bas) de 4, par exemple, ce qui montre la conservation de la différence par translation.*
>
> *A terme, les élèves doivent être familiarisés avec l'usage de « type algébrique » des structures additives (par exemple, de 7 - 3 = 4, déduire 4 + 3 = 7 et 7 - 4 = 3 ; de 4 + 3 = 7, déduire 7 - 4 = 3 et 7 - 3 = 4), qui seront en particulier systématiquement reprises dans les modules suivants » (Annexe 37).*

L'enjeu de ce module est de « représenter/modéliser la différence entre deux nombres par une écriture mathématique » (Annexe, 37). Il est ajouté dans la nouvelle version que ce module

> *« associe à ces notions (la différence et la soustraction) le signe « - » et les systèmes symboliques déjà pratiqués (le schéma-ligne, la boîte). » (Ibid.)*

Nous observons donc une évolution dans la présentation de ce module avec l'idée que la soustraction et la différence sont mises en relation avec les systèmes de représentation déjà connus des élèves tels que le schéma-ligne, la boîte, le schéma-train.

Ce nouveau module est composé de quatre séances pouvant être dédoublées si nécessaire. Certaines sont composées d'une séance d'anticipation et d'un travail dans le Journal du Nombre. Nous présenterons les quatre séances successivement.

3.3. Séance 1 du module 7

La phase 0 de cette séance est dédiée à un travail d'anticipation[106] (15 à 20 minutes) au cours duquel une nouvelle représentation matérielle/symbolique est introduite, le train-nombre[107]. La longueur de chaque train-nombre est proportionnelle à la longueur du nombre que ce train représente. Il est quadrillé au recto et non quadrillé au verso.

Les élèves tirent chacun un train-nombre (A et B), les comparent et recherchent de combien le train-nombre A est plus grand ou plus petit que le train-nombre B, de combien est la différence.

---

[106] Le groupe d'anticipation est composé de quatre à cinq élèves de niveau hétérogène. L'objectif, rappelons-le est que les élèves moins avancés devancent le savoir de la classe.

[107] Nous nommerons dans cette thèse, la représentation train par « train-nombre ».

La phase 1 de cette séance propose un retour en grand groupe avec « la présentation collective du jeu, Prolongement du jeu des annonces » (Annexe 37).

Il est ainsi suggéré au professeur de s'exprimer de la façon suivante :

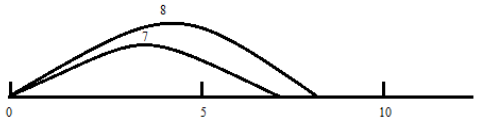
> *« Nous allons jouer à un nouveau jeu. Nous allons comparer deux annonces, en énonçant par exemple quelle est la plus grande annonce/la plus petite et de combien elle est plus grande/plus petite. Puis nous allons chercher la différence qu'il existe entre ces deux annonces » (Ibid.)*

Les élèves écrivent une annonce à deux termes sur leur ardoise, le professeur en choisit deux. Les deux élèves concernés les comparent et recherchent la différence entre les deux. La vérification de l'énoncé produit pourra se faire de plusieurs manières que le texte du module énumère : par le calcul, par la comparaison de deux schémas-lignes, par la comparaison termes à termes, par une procédure de « voir un nombre dans un autre ».

Il est précisé dans le document que ces stratégies seront accompagnées par « *l'usage des doigts, comme dans le jeu initial des annonces, pour faire le récit d'une situation qui correspond à l'écriture de l'annonce* » (Ibid.). Nous illustrons ce propos par le récit lié à la procédure de « voir un nombre dans un autre »

> *« Dans la comparaison de 5 +2 et 4 + 4, « faire voir » par exemple 4 dans 5 + 2 ou « chercher le/les 4 caché(s) » dans 5 + 2 (5 + 2 = 4 + 1 + 2 = 4 + 3). Un récit-référence sera : on peut dire « 5 doigts c'est 4 doigts et 1 doigt, donc, 5 doigts et 2 doigts c'est 4 doigts et 1 doigt et 2 doigts, donc c'est 4 doigts et 3 doigts, etc. »), pour finalement comparer 4 + 4 et 4 + 3, c'est-à-dire 4 et 3. La différence est donc de 1 » (Ibid.).*

Un travail de représentation sur un double schéma-ligne avec ou sans graduation « de un en un » est suggéré ou une représentation sur un seul schéma-ligne pour montrer l'inclusion d'un nombre dans un autre comme nous le montre le photogramme ci-dessous.



Photogramme 64 : représentation sur un schéma-ligne de la différence entre 7 et 8 (Annexe, 37)

La différence est introduite à partir d'une situation de comparaison entre deux écritures additives et non plus, comme dans la version 2012-2013, par la comparaison de deux annonces produites à deux mains. Les difficultés liées à la recherche de la différence sur les doigts relevées par les professeurs expérimentaux et d'étude ont donc été prises en compte par la sphère 1. Cette situation de découverte de la différence est dans la continuité de celle proposée dans le module 6 où les élèves comparent deux écritures additives à deux termes et recherchent si l'annonce A est plus grande/petite que l'annonce B. Cette continuité est

notifiée dans le titre même de la phase 1 de cette première séance par l'expression suivante « prolongement du jeu des annonces » (Ibid.).

Les élèves sont donc amenés à comparer deux écritures additives à deux termes en énonçant « quelle est la plus grande, la plus petite » et « de combien est la plus grande/la plus petite ». Les élèves résolvent donc deux types de problèmes, un problème de comparaison d'abord et un problème de différence ensuite. Le texte curriculaire propose de travailler collectivement ces problèmes. La réponse à la question « de combien A est plus grande/plus petite que B » sera vérifiée collectivement en usant des systèmes de représentation (la représentation corporelle et le schéma-ligne) et des stratégies de composition/décomposition connus des élèves. Dans les transactions, les élèves vont donc réexpériencier leurs connaissances antérieures (le contrat) dans un nouveau milieu-problème, la recherche de la différence. Le milieu est ici composé d'éléments symboliques connus des élèves dont ils doivent actualiser l'usage. L'écart entre deux écritures additives est donc dans un premier temps désigné oralement par les expressions « l'annonce A/B est plus grande/plus petite de » sans passer par l'écriture soustractive. Puis, cette différence est exprimée corporellement et graphiquement à partir de la production d'annonce à deux mains et d'un schéma-ligne. Le texte de progression laisse le choix au professeur d'utiliser un ou deux schémas-lignes avec ou sans graduation pour donner à voir un nombre dans un autre, la différence entre deux nombres.

La phase 2 propose aux élèves de comparer deux trains-nombres (représentation matérielle/analogique/symbolique) en binôme. Le professeur distribue une enveloppe à chaque élève contenant des trains-nombres. La consigne est alors la suivante « Chaque élève « pioche » un train au hasard dans son enveloppe, et compare avec le train du voisin » (Ibid.). Le binôme doit se mettre d'accord sur la différence entre les deux trains-nombres et oraliser de combien chaque train-nombre est plus grand, plus petit et donner la différence entre les deux. Chaque groupe proposera une différence qui sera traitée collectivement en s'appuyant sur la comparaison de deux schémas-lignes ou de la comparaison des deux nombres sur un seul schéma-ligne. Cette comparaison effective de deux trains-nombres (en les superposant) amène les élèves à voir concrètement l'écart entre deux nombres. Les nombres sont ici représentés par une longueur et non plus comme avec les doigts par une collection d'éléments. Le nombre désignant la différence est donc une mesure de grandeur (la longueur). La différence entre deux trains-nombres est traduite sur le schéma-ligne.

La phase 3 introduit la symbolisation de la différence par le signe « - ». Ainsi, à partir de trains-nombres dessinés au tableau, le professeur produit au tableau la différence

mathématique sous forme « a – b = c ». Un exemple est donné au sein du texte : « il (le professeur) écrit au tableau 7 – 4 = 3 et dit « *j'ai écrit au tableau 7 moins 4 égal 3. 7 moins 4, c'est la soustraction, et 3 c'est la différence entre 7 et 4* » (Ibid.)

Le professeur sensibilise les élèves au fait que « ces écritures reposent sur le jeu du « faire voir un nombre dans un autre » : le nombre le plus petit est contenu dans le plus grand avec la différence. On peut exprimer cela en écrivant 6 = 2 + 4 » (Ibid.).

Le professeur donne donc directement à l'élève le savoir, l'écriture mathématique désignant la différence entre deux nombres, dans une forme de jeu d'imitation (Sensevy, 2016) en référence à une représentation concrète analogique (le train-nombre).

La figure-ci-dessous (cf. Figure 48) donne à voir comment au cours des trois phases de cette première séance du module 7 s'organisent les mises en relation entre les systèmes de représentation dans une situation de recherche d'une différence entre deux nombres.

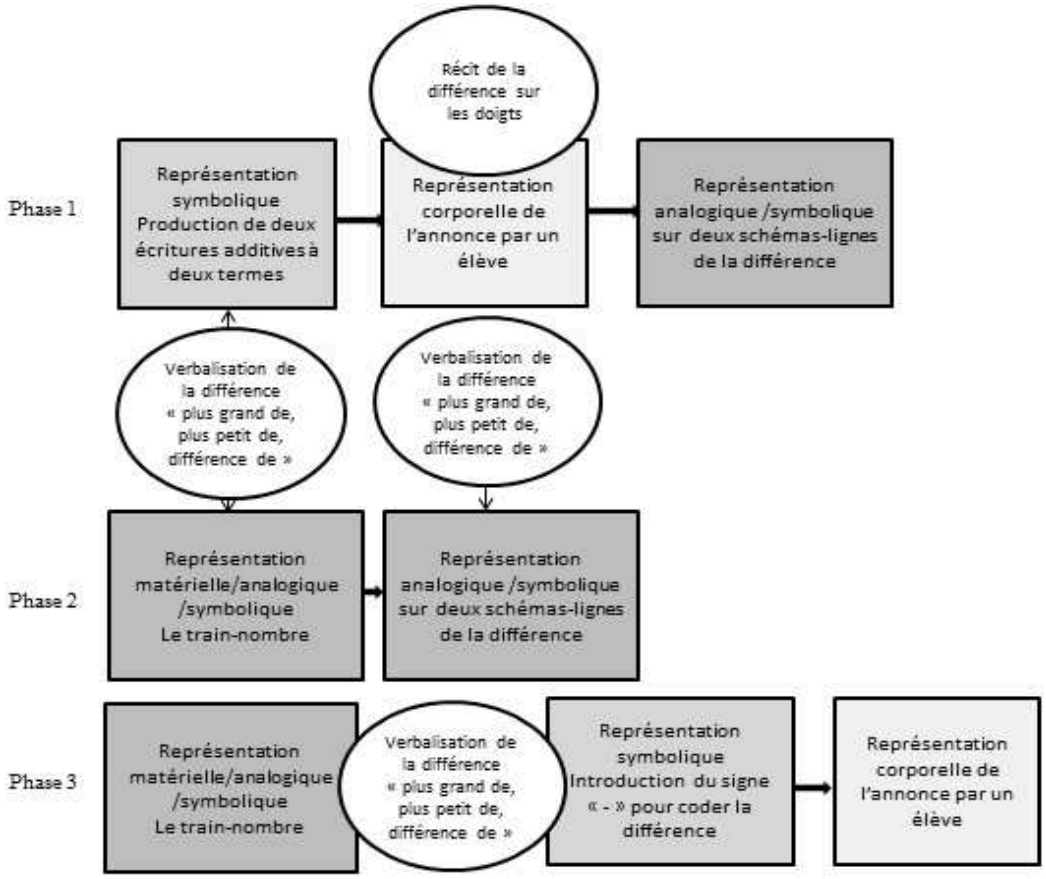


Figure 48 : mise en relation des systèmes de représentation, séance 1 module 7

Les élèves réexpériencient des systèmes de représentation dans une situation nouvelle, la recherche de la différence entre deux écritures additives. La différence vient donc modéliser la comparaison entre deux nombres. L'expression orale de la différence (« plus grand/petit

de ») puis l'écriture soustractive renvoient à une réalité matérielle (phase 1 et 3), une annonce à deux mains ou à une comparaison matérielle entre deux trains-nombres (phase 2). La notion de différence renvoie alors à ce qu'elle dénote.

Il est à noter, de même, qu'un travail systématique sur le schéma-ligne est proposé. Il vient, dans un premier temps, donner à voir la différence entre deux écritures additives. Il permet une première forme de modélisation de la différence à travers la comparaison de deux longueurs. La différence entre deux nombres est ainsi représentée par une portion de ce schéma. Dans un second temps, il autorise à voir l'inclusion d'un nombre dans un autre, d'une grandeur dans une autre.

Nous modéliserons cette première séance en jeux d'apprentissage et capacités cibles. Nous ne prendrons pas en compte dans notre analyse la phase d'anticipation (phase 0) puisque l'ensemble des élèves n'y a pas participé et que nous nous intéressons en particulier dans ce travail à l'avancée des savoirs dans le groupe classe.

Nous modéliserons donc le texte curriculaire en 3 jeux d'apprentissage.

Module 7, séance 1
Jeu d'apprentissage 1 : Faire comparer deux écritures additives à deux termes et trouver la différence. - **Réinvestissement de la capacité** de désignation écrite d'un nombre par une écriture additive à deux termes. **- Réinvestissement de la capacité** de comparaison de deux écritures additives à deux termes. - **Capacité cible 1** : Désignation orale d'une différence entre deux écritures additives à deux termes. Jeu d'apprentissage 2 : Faire traduire la différence entre deux écritures additives à deux termes par un schéma-ligne, une annonce à deux mains et les stratégies de comparaison. **Réinvestissement de la capacité de** traduction d'une écriture à deux termes par une annonce produite à deux mains et un schéma-ligne. **Réinvestissement de la capacité de comparaison** entre deux écritures additives à deux termes (correspondance termes à termes, calcul, composition/décomposition). **Capacité cible 3** : Traduction d'une désignation orale d'une différence par la comparaison de deux grandeurs représentées par deux sous-collections (annonces à deux mains). **Réinvestissement de la capacité de traduction** d'une écriture à deux termes par un schéma-ligne. **Capacité cible 4** : Traduction sur deux schémas-lignes de la différence entre deux écritures additives. Jeu d'apprentissage 3 : Faire comparer deux trains-nombres et rechercher la différence, l'écart entre les deux. **Capacité cible 5 :** Désignation orale de la mesure de l'écart entre deux grandeurs (deux longueurs). Jeu d'apprentissage 4 : Faire traduire la différence entre deux trains-nombres par un schéma-ligne. **Réinvestissement de la capacité 4 :** traduction sur deux schémas-lignes de la différence entre deux nombres.

Jeu d'apprentissage 5 : Faire produire une écriture soustractive pour coder la différence entre deux nombres par le signe « - ».
Capacité cible 6 : Représentation d'une différence entre deux nombres par une écriture soustractive.

Tableau 66 : modélisation de la séance 1 du module 7 sous forme de jeux d'apprentissage et de capacités cibles

Ce tableau tend à montrer comment les connaissances déjà-là des élèves, les capacités cibles émergentes des textes des modules précédents sont ici réinvesties, réexpérienciées par les élèves dans une nouvelle situation. Ces capacités sont de deux sortes :

- capacités de traduction d'une représentation par une autre ;

- capacité de stratégie de comparaison entre deux nombres (correspondance terme à terme, par le calcul, composition/décomposition).

3.4. Séance 2 du module 7

Cette seconde séance se décompose en deux phases. Lors de la première phase le « jeu des soustractions », le professeur lance deux dés à six faces et invite les élèves à écrire la soustraction correspondante et son résultat. Le texte curriculaire suggère de justifier le fait que dans une écriture soustractive le premier terme est toujours le plus grand à partir de l'exemple « 6 - 4 = 2 » (Annexe 37).

Ce jeu se rapproche de celui proposé dans la première version du module 9 (séance 4, phase 1) où les élèves écrivaient la soustraction et la différence entre un tirage de deux cartes. Les valeurs numériques étaient alors plus élevées (de 0 à 10).

Ce premier jeu relève de la compréhension de l'écriture soustractive et notamment celle de la convention du nombre le plus grand écrit en premier. Cette convention est mise à l'épreuve et justifiée par le fait que l'on puisse voir le nombre le plus petit dans le plus grand. L'ensemble A est inclus dans un ensemble B c'est-à-dire que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. La grandeur que mesure le nombre A est donc un sous-ensemble de la grandeur que mesure le nombre B. Les élèves sont confrontés à un milieu problème, écrire une soustraction à partir de deux nombres et trouver sa différence. Pour résoudre ce problème, ils s'appuient sur des connaissances déjà-là très récentes (élaborées lors de la phase 3 de la séance précédente) relatives à la symbolisation de la différence par une écriture mathématique. Les élèves expériencient individuellement cette nouvelle capacité, la mettent à l'épreuve et continuent son étude à partir d'une situation déjà connue mais jouée dans un

premier temps collectivement. Ce début de module organise l'appropriation du processus d'action lié à l'usage de cette représentation abstraite de la différence par les élèves.

La seconde phase présente le jeu des différences (de 1 à 6). A partir d'un lancer de dé à six faces, les élèves produisent des écritures soustractives égales au résultat de ce lancer. Cette phase reprend une phase déjà existante de la première version du module « Différence » (séance 1 phase 4). Dans la nouvelle version est ajoutée au descriptif du jeu une mise en commun pendant laquelle les élèves présentent leur production. Il est précisé que cela doit permettre aux élèves de stabiliser le vocabulaire lié à la différence du type « ces deux soustractions donnent la même différence, qui peut proposer une soustraction qui donne la *même différence, A, c'est* x de plus que *B, B, c'est x de moins que A* » (Ibid.)

Ce second jeu, le jeu des différences, propose donc un travail sur la production d'une écriture soustractive égale à une différence donnée. Les élèves réexpériencent ici l'écriture soustractive, très récemment apprise, dans une nouvelle situation. En effet, le milieu-problème n'est plus comme précédemment de produire une écriture soustractive et son résultat à partir de deux termes donnés mais de produire une écriture soustractive égale à une différence donnée. Il y a continuation de l'enquête des élèves sur cette écriture soustractive à partir de son résultat.

Les élèves enquêtent donc directement sur les nombres comme représentations abstraites sans s'appuyer sur des représentations plus concrètes c'est-à-dire sans pouvoir se référer à ce que la soustraction dénote. Il est simplement précisé dans le texte curriculaire qu'après production par les élèves d'une écriture soustractive, ils peuvent s'appuyer sur les trains-nombres pour valider leur réponse.

Cette séance se conclut par le Journal du Nombre. Plusieurs incitations sont proposées :

- écrire des différences et des soustractions associées ;

- faire voir un nombre dans un autre.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 67) donne une vision synoptique des jeux d'apprentissage et des capacités cibles qui modélisent cette seconde séance.

Module 7, séance 2
Jeu d'apprentissage 6 : Faire produire une écriture soustractive et son résultat à partir de deux nombres (≤ 6). **Réinvestissement de la capacité cible 6 :** représentation d'une différence entre deux nombres par une écriture soustractive.

Jeu d'apprentissage 7 : Faire produire une écriture soustractive à partir d'une différence donnée (≤ 6).
Réinvestissement de la capacité cible 6 : représentation d'une différence entre deux nombres par une écriture soustractive.
Jeu d'apprentissage 8 : Faire produire librement dans le Journal du Nombre à partir d'une incitation donnée.
Réinvestissement de la capacité cible 6 : représentation d'une différence entre deux nombres par une écriture soustractive.

Tableau 67 : modélisation en jeux d'apprentissage et capacités cibles de la séance 2 du module 7

Cette seconde séance du module 7 se centre sur l'écriture mathématique de la différence et son appropriation par les élèves à travers deux types de jeux. L'enquête se fait directement sur les représentations abstraites sans mises en relation avec d'autres systèmes de représentation plus concrets.

3.5. Séance 3 du module 7

Le texte de progression précise que cette séance reprend le jeu des soustractions de la phase 1 de la séance précédente mais avec des valeurs numériques plus grandes (de 0 à 10). Le professeur tire deux cartes dans un jeu de 54 cartes (sans les têtes et auquel on aura ajouté une carte « zéro ») qu'il affiche au tableau. Il présente alors une fiche de jeu (cf. Photogramme 65). Le jeu se déroule collectivement. Un élève note sur la fiche de jeu (deuxième ligne) le résultat du tirage et l'écriture soustractive correspondant à ces deux nombres « 9 - 4 = 5 ». Il traduit la différence entre ces deux nombres sur le double schéma-ligne. Il est précisé dans le texte de présentation du jeu que le schéma-ligne peut être présenté de manière différente selon l'avancée des élèves (avec ou sans graduation, avec le schéma-train).

Au cours de cette phase, l'élève s'appuie sur des connaissances déjà-là pour représenter l'écriture soustractive et le double schéma-ligne

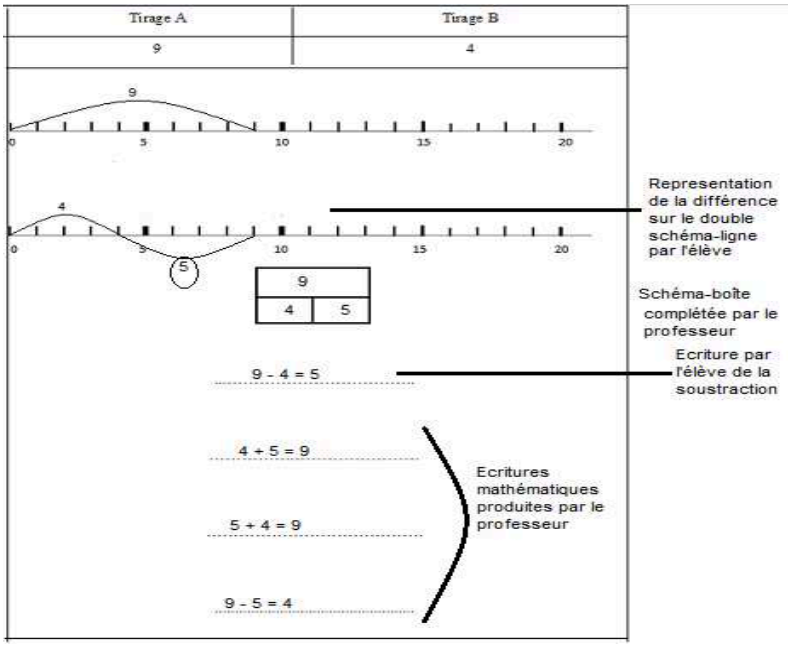
- l'écriture soustractive introduite au cours de la séance 1 (phase 3) et expérienciée par les élèves lors de la séance 2 (phase 1) ;

- l'usage du schéma-ligne comme instrument donnant à voir la différence dans la séance 1 (phase 1 et 2) montré par le professeur lors de la séance 1.

Le professeur introduit alors le schéma-boîte et prend en charge les écritures symboliques que l'on peut extraire de ces deux systèmes de représentation « 9 – 4 = 5 ; 4 + 5 = 9 ; 5 + 4 = 9 » en oralisant les différences écrites (Annexe 37). Il explicite alors le passage de la soustraction

à celle de l'addition et vice-versa. « Cette équivalence va pourvoir fournir la preuve que 9 – 4 = 5 puisque 4 + 5 = 9 » (Ibid.).

Le photogramme ci-dessous donne à voir comment se construit cette fiche de jeu.



Photogramme 65: fiche de jeu proposée dans le module 7 (Annexe, 37)

Il est spécifié que le jeu du « faire voir un nombre dans un autre » est essentiel pour comprendre que l'on peut fabriquer deux soustractions à partir d'une addition et sert d'appui à la mise en lien entre l'addition et la soustraction.

Nous distinguons donc ici deux étapes successives. La première où l'élève mobilise des connaissances déjà-là pour représenter sous forme d'une écriture mathématique et sur deux schéma-lignes la différence entre deux nombres. Ainsi, il continue l'enquête sur des valeurs numériques plus grandes à partir du contrat didactique précédent. Dans la seconde étape, le professeur montre comment user du schéma-boîte mais dans une situation de différence. Il actualise les connaissances des élèves (celle de la traduction d'une écriture additive dans un schéma-boîte) et le milieu puisqu'il montre aux élèves les relations des nombres entre eux dans le schéma-boîte et propose les écritures mathématiques associées. Nous sommes donc ici dans une forme de jeu d'imitation où le professeur, comme précédemment, montre aux élèves comment utiliser le schéma-boite dans une nouvelle situation. Il donne ainsi le modèle mathématique à imiter.

Dans une seconde phase, les élèves travaillent individuellement sur leur fiche de jeu. Les élèves vont enquêter sur la différence entre des nombres donnés par le professeur, dans un

premier temps, puis qu'ils se donneront à eux-mêmes, dans un second temps. Les élèves vont s'appuyer sur des connaissances antérieures récentes (écritures soustractives et leurs traductions sur le schéma-ligne) et très récentes issues de la monstration du professeur de l'usage du schéma-boîte et des écritures mathématiques attenantes. Le milieu s'ancre donc ici dans des connaissances antérieures notamment l'usage des systèmes de représentation qu'il actualise.

Lors de la troisième phase, le professeur sélectionne des productions d'élèves et les note au tableau. Un débat peut s'engager dans la classe autour des propositions des élèves pour valider ou invalider ces propositions. Le texte du module 7 met en évidence l'importance à ce moment pour travailler le jeu de la boîte « on se donne une boîte (ici par exemple 9, en tant que nombre tout, 4 et 5) et on cherche à écrire toutes les écritures que cette boîte peut produire » (Ibid.). L'enquête se poursuit sur l'usage du schéma-boîte comme instrument pour donner à voir les relations entre les nombres, entre l'addition et la soustraction à travers le principe inverse (Verchaffel, Bryant & Torbeyns, 2012).

La dernière phase de cette séance reprend le jeu des différences (phase 2 de la séance 2). Les élèves recherchent des soustractions égales au tirage d'une carte de 1 à 10. Les élèves réexpériencient ainsi la production d'écritures soustractives à partir d'une différence donnée.

Cette séance se conclut par un travail dans le Journal du nombre. Deux incitations sont proposées. La première est le « *le jeu de l'addition*-soustraction *: l'élève se donne une* addition en faisant voir un nombre dans un autre. Par exemple, voulant faire voir 3 dans 8, il écrit 8 = 5 + 3, addition de laquelle il tire 8 – 5 = 3 et 8 – 3 = 5 » (Ibid.). L'élève représente alors ces écritures sur un double schéma-ligne et dans un schéma-boîte. La seconde est « le jeu de la boîte ». Les élèves se donnent un schéma-boîte et écrivent les quatre opérations que cette boîte peut produire.

Nous modéliserons en jeux d'apprentissage et capacités cible cette troisième séance de la façon suivante (cf. Tableau 68) :

Module 7, séance 3
<u>Jeu d'apprentissage 9 :</u> Faire produire une écriture soustractive et son résultat à partir de deux nombres (≤ 10) et la traduire sur deux schémas-lignes. **Réinvestissement de la capacité cible 6 :** représentation d'une différence entre deux nombres par une écriture soustractive. **Réinvestissement de la capacité cible 4** : traduction sur deux schémas-lignes de la différence entre deux écritures additives.

Jeu d'apprentissage 10 : Faire traduire l'écriture soustractive par un schéma-boîte et en déduire les écritures mathématiques en découlant.
Capacité cible 7 : traduction d'une écriture soustractive dans un schéma-boîte
Capacité cible 8 : Compréhension de la relation inverse entre la soustraction et l'addition
Jeu d'apprentissage 11 : Faire déduire d'un schéma-boîte toutes les écritures mathématiques.
Réinvestissement de la capacité cible 8 : Compréhension de la relation inverse entre la soustraction et l'addition
Jeu d'apprentissage 12 : Faire produire une écriture soustractive à partir d'une différence donnée (≤ 10).
Réinvestissement de la capacité cible 6 : représentation d'une différence entre deux nombres par une écriture soustractive.
Jeu d'apprentissage 13 : Faire produire librement dans le Journal du Nombre : déduire d'un schéma-boîte toutes les écritures mathématiques.
Réinvestissement de la capacité cible 8 : Compréhension de la relation inverse entre la soustraction et l'addition

Tableau 68 : modélisation de la séance 3 en jeux d'apprentissage et capacités cibles

Le tableau ci-dessus donne une vision synoptique de l'avancée des savoirs au sein de cette séance avec, tout d'abord, un réinvestissement des capacités épistémiques liées à la représentation de la différence par une écriture soustractive qui est traduite par deux schémas-lignes. Puis, une nouvelle capacité est engagée, celle de la traduction de cette soustraction dans un schéma-boîte et de la compréhension du principe inverse.

Nous ne revenons pas spécifiquement sur la séance 4 proposée par le texte de progression puisqu'elle suggère simplement aux professeurs d'organiser des parties fictives ou de revenir sur des points qu'ils jugent important de retravailler.

4. Synthèse du chapitre 7

L'objectif de ce septième chapitre est de donner à voir et à comprendre comment le travail commun entre les professeurs du groupe expérimental et l'équipe de recherche a fourni des hypothèses d'amélioration du curriculum ACE autour de la notion de différence. Il vient compléter le chapitre 1 qui s'est, quant à lui, centré sur la coopération chercheurs/professeurs en lien avec l'introduction des systèmes de représentation dans la progression.

Une ingénierie didactique coopérative se caractérise par un dialogue entre professeurs et chercheurs autour d'une activité conjointe de conception de séquences d'enseignement/apprentissage (Sensevy, 2011a). Ainsi, l'analyse du dialogue inter-sphères réalisée dans ce chapitre montre comment s'est construite l'enquête collective autour de la

notion mathématique de différence. Cette enquête prend sa source dans le partage des expériences des professeurs et des élèves lors de la mise en œuvre du module 9 « la différence » en 2012-2013. Cette étude montre, dans un premier temps, qu'il existe un arrière-plan commun entre les membres de chaque sphère. En effet, la description par les professeurs de leur pratique et de leurs actions est comprise par l'ensemble du collectif (Ibid.). Cette possibilité de partage d'expériences amène, dans un second temps, à un authentique dialogue entre les membres de l'ingénierie autour de l'analyse et la (re)conception du domaine « Situation » sur la question de la notion de différence.

Cette enquête collective professeurs/chercheurs a produit deux types de régulation lors de l'année 2013-2014. La première régulation concerne la réorganisation des modules avec l'introduction plus précoce de la notion de différence, la seconde est liée plus spécifiquement au travail sur cette notion.

4.1. Organisation des modules

Ainsi, le dialogue inter-sphères a mis en évidence le fait que la notion de différence était enseignée très tardivement dans la progression. Ce constat est d'autant plus vrai que l'implémentation du module 9 « la différence » devait être normalement mise en œuvre en décembre et janvier 2012-2013 dans les classes comme nous le montre le document de programmation suivant. La première séance du module 9 était programmée le 13 décembre 2012.

Jeudi13/12	Sit Mod 9,1 La différence	a) Jeu du Furet : de 29 à 0 b) Ecriture dans JdN de 29 à 20
Vendredi14/12	Est Mod 2 : nombre Est Mod 3 : addition Est Mod 4 : soustraction	a) Jeu de l'Etourdi2 : Ind. Ard b) FCaDéc04

Tableau 69 : extrait du document programmation 2012-2013

Cependant, ce module est effectivement implémenté dans les classes expérimentales en mars/avril 2013, à la fin du second trimestre. L'étude de la différence par les élèves est donc tardive et limitée dans le temps. Les échanges d'expérience au cours des réunions de régulation inter-sphères ont, de plus, mis en évidence les habitudes d'enseignement de certains professeurs qui liaient le travail de l'addition et la soustraction sur un temps long. Le dialogue inter-sphères a donc amené l'équipe de recherche à repenser l'organisation des modules et introduire précocement dans l'année la notion de différence (module 7), notion qui sera réinvestie tout au long des modules suivants :

- Module 8 : comparaison de longues écritures. Les élèves comparent deux écritures additives (en usant de stratégies de composition/décomposition, de comparaison terme à terme, de calcul à partir des répertoires additifs mémorisés…). Ils recherchent quelle écriture additive désigne le plus grand/petit nombre puis la différence entre les deux. L'écriture additive est mise en relation avec l'écriture soustractive et vient ainsi vérifier la différence trouvée ;

- Module 9 : La première partie de ce module (environ dix séances) est consacrée à l'introduction de la dizaine. Les élèves font l'expérience de l'efficacité du groupement par dix pour désigner la somme d'une grande écriture additive (onze termes). La notion de différence n'y est pas reprise. Cependant, on la retrouve dans la seconde partie de ce module qui propose de comparer deux écritures additives composées de dizaines et d'unités. La différence est travaillée à partir du « jeu de la boîte ». Les élèves complètent un schéma-boîte avec des nombres supérieurs à dix et écrivent les écritures additives et soustractives qui en découlent. Ces écritures sont vérifiées sur le schéma-ligne. Les valeurs numériques augmentent progressivement (≤ 100) ;

- Module 10 : le nombre inconnu. Ce module aborde de manière spécifique la comparaison de deux écritures pour la recherche d'un nombre inconnu (par exemple « 5 + 1 + 2 = 6 + 1+ ? ». L'objectif est ici de rechercher l'égalité entre les deux membres de l'addition. Les élèves doivent donc trouver l'écart entre deux nombres par des stratégies de composition/décomposition. Le schéma-boîte et le schéma-ligne sont réinvestis pour modéliser les problèmes posés ou valider le résultat.

Nous observons dans ce nouvel agencement des modules une continuité dans l'étude de la différence dans des situations de comparaison sur un temps long. Ainsi, la nouvelle progression propose des liens plus prégnants entre les différents éléments de savoir, une meilleure cohérence des savoirs à enseigner entre eux (Tiberghien, 2012), dans une continuité didactique. Cette continuité peut être caractérisée à différents niveaux d'échelle, au niveau macroscopique avec l'avancée des savoirs sur l'année (comme nous venons de le voir) et de manière mésoscopique en analysant les textes des modules/séquences d'enseignement proposés.

4.2. La différence

Les échanges autour des praxéologies des professeurs (pratique et discours sur la pratique) fondées sur leur expérience en classe et leur savoir professionnel mettent en évidence les

difficultés de l'usage par leurs élèves des systèmes de représentation dans des situations de différence. Comme nous l'avons vu précédemment, les élèves ont des difficultés à actualiser l'usage des instruments, le schéma-ligne, le schéma-boite et la représentation corporelle. Cette nouvelle forme d'instrumentalité rentre, en effet, en conflit avec celle que les élèves ont l'habitude d'utiliser dans des situations de comparaison. Cette habitude sémiotique est ancrée chez les élèves car elle est introduite dès le module 2 et réinvestie jusqu'au module 9 (version 2012-2013) sur la différence.

De plus, cette difficulté est liée à la complexité de manier deux types de langage « A est plus grand ou plus petit que B » dans une situation de comparaison et « de combien A est plus grand ou plus petit que B » pour la différence. L'hypothèse de travail émise est alors de travailler simultanément les deux expressions.

La réécriture du module 7 montre comment le lien entre une situation (module 6) de comparaison entre deux écritures additives évolue vers une situation liée à la différence.

La figure ci-dessous donne à voir de manière synoptique la continuité que les textes curriculaires infèrent entre le module 6 et le module 7 et au sein même du module 7.

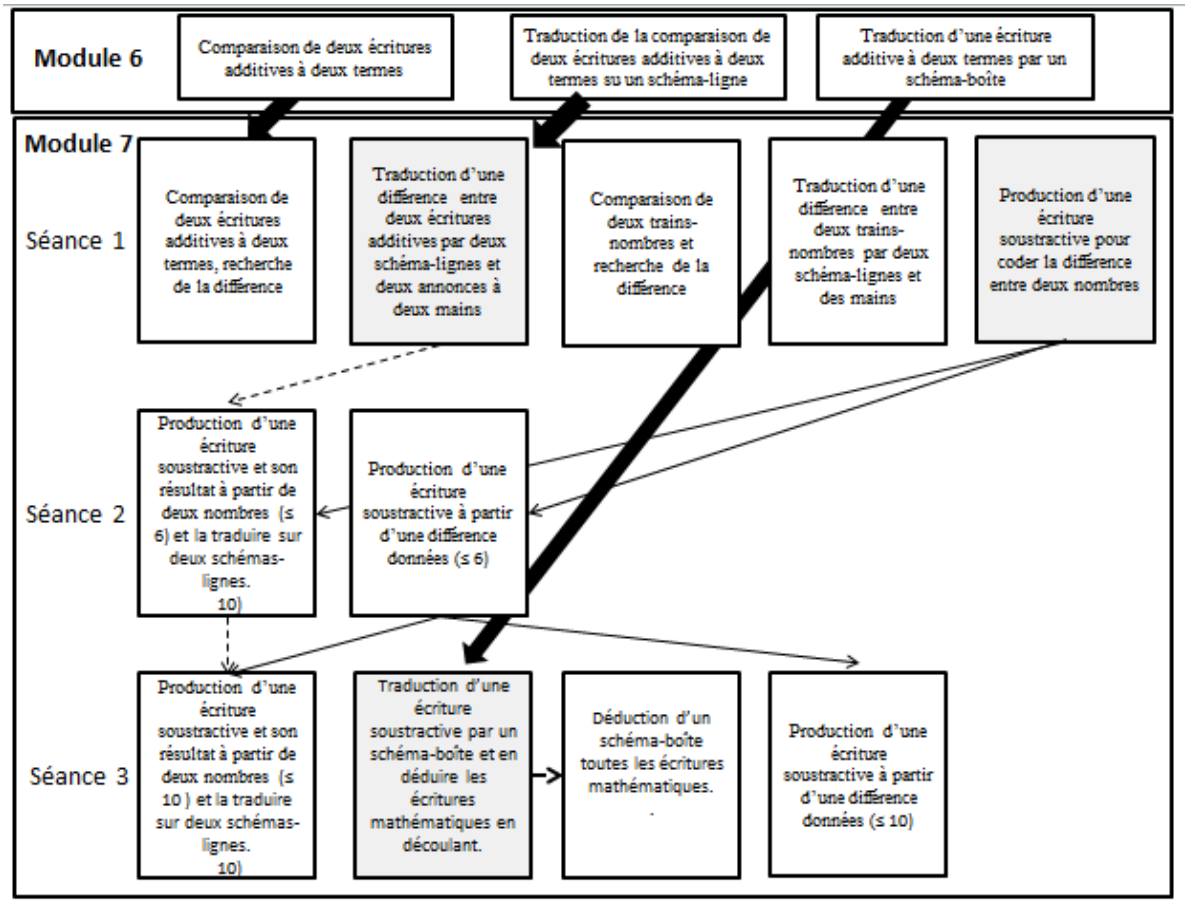


Figure 49 : lien entre les différentes séances et phases du module 7

Nous avons repris sur la première ligne de cette figure les principales capacités cibles que le texte du module 6 met en lumière. Ainsi, nous observons une première continuité entre les modules 6 et 7 (flèches noires épaisses). La comparaison entre deux écritures additives est reprise pour introduire la notion de différence. De même, la traduction d'une écriture additive sur un schéma-ligne est ici réinvestie pour donner à voir l'écart entre deux nombres. Pour terminer, le schéma-boîte traduisant une écriture additive dans le module 6 est réintroduit dans la troisième séance du module 7 pour représenter une écriture soustractive puis donner à voir les opérations que ce schéma modélise dans une conception pré-algébrique.

L'usage des systèmes de représentation s'inscrit donc dans une forme de continuité de l'expérience mathématique. Leur usage évolue au cours du module 7 (flèches en pointillés). Il passe d'instrument pour comparer les nombres instrument pour désigner une différence.

En effet, le professeur va confronter les élèves à des outils, des instruments avec lesquels ils savent déjà jouer mais qui recèlent des potentialités non encore explorées.

Le texte curriculaire propose que ces nouvelles potentialités soient introduites par le professeur sous la forme de jeu d'imitation. En effet, comme nous l'avons analysé précédemment, l'introduction du schéma-ligne et du schéma-boîte est réalisée par le professeur avant que les élèves en fassent l'expérience et enquêtent sur leur usage dans une situation de différence. Le professeur donne aux élèves une conduite d'action, leur montre le maniement des représentations dans la différence puis les laisse en faire l'expérience, en situation. Ainsi, il y a croissance du savoir mathématique à travers une continuité de l'expérience des élèves dans les systèmes de représentation « ce qu'il (l'individu) avait acquis de savoir et d'habilité, dans une situation précédente, devient instrument de compréhension et d'action pour la nouvelle situation » (Dewey, 1968/2011, p. 480). L'usage du schéma-ligne, des mains dans une situation de recherche de différence permet l'introduction de l'écriture soustractive et le schéma-ligne, introduit les relations inverses entre l'addition et la soustraction (flèches pleine).

Les systèmes de représentation sont donc réexpérienciés par les élèves dans de nouvelles situations, l'usage de ces instruments évolue et se complexifie avec l'avancée des savoirs et autorise l'approfondissement de l'enquête sur les nombres tout au long du curriculum. Il y a bien ici une textualisation du savoir mais qui met en relation les différentes situations (Brousseau, 1986), situations de comparaison et de différence dans lesquelles les systèmes de représentation jouent le rôle de garants de la continuité par l'évolution de leur usage.

CHAPITRE 8 : représentations et différence, continuité de l'expérience des élèves

Dans ce huitième chapitre, nous nous focaliserons sur la mise en œuvre du module 7 « la différence » dans la classe de P qui, nous le rappelons, est une *classe d'étude* et fait partie de l'équipe de recherche. Quatre séances de ce module ont été filmées. Le tableau synoptique ci-dessous (cf. Tableau 70) donne à voir le déroulement de ces quatre séances.

Module	Séances	Sujet de la séance	Durée
Module 7	Séance 1 16-12-2013	- Présentation d'un nouveau jeu : comparaison d'écritures additives à deux termes, notion de plus petite/grande et de combien. - Recherche de la différence entre deux écritures additives à deux termes en appui sur le schéma-ligne. - Recherche de la différence entre deux trains-nombres. - Comparaison de deux trains-nombres en appui sur le schéma-boîte et introduction du signe « - ».	00 :58
	Séance 2 19-12-2013	- Discussion autour des découvertes de la séance précédente : comparaison de deux écritures additives à deux termes et recherche de la différence sur deux schémas-lignes, productions d'écritures soustractives égales à 1. - Comparaison de deux trains-nombres et écriture de la soustraction correspondante. - Discussion autour de deux écritures soustractives : 9 - 7 = 2 et 9 - 2= 7 en appui sur le schéma-boîte et le schéma-ligne.	00 :54
	Séance 3 06-01-2013	- Travail dans le journal du nombre : décomposition d'un nombre. - Dispositif d'anticipation avec un groupe d'élèves hétérogène : jeu du pari : trouver le résultat d'une soustraction en appui sur les trains-nombres. - Séance plénière : produire des écritures soustractives à partir d'un lancer de deux dés.	01 : 01
	Séance 4 09-01-2013	- Groupe de cinq élèves (Lou, Emma, Félicien, Muriel, Adèle, Agathe,) travaillant avec P sur « faire voir un nombre dans un autre » en appui sur les trains-nombres.	0 :09

Tableau 70: vision synoptique de la progression des savoirs dans le module 7

La première séance introduit la notion de différence à travers la comparaison de deux écritures additives. Cette introduction prend appui sur un système de représentation, le schéma-ligne. Puis, une nouvelle représentation du nombre y est proposée, le train-nombre, bande de papier quadrillé sur le recto et blanc sur le verso. Chaque train-nombre désigne un nombre de 1 à 10 dont la longueur est proportionnelle au nombre d'unité qu'il représente (par

exemple, le train-nombre 4 est composé de 4 unités d'un centimètre). Cette représentation peut être manipulée de manière effective par les élèves. Elle donne à voir la relation entre le nombre d'unités et la longueur de la bande. Elle autorise de manière concrète à « voir un nombre dans un autre » c'est-à-dire à appréhender la propriété d'inclusion d'un nombre dans un autre[108]. Par exemple, en superposant deux trains-nombres, je peux voir que le train-nombre « 2 » est inclus dans celui de « 5 », la longueur du train-nombre « 2 » est inférieure à celle du nombre « 5 ». Pour terminer, cette séance introduit le signe « - » pour écrire mathématiquement l'opération soustractive dont le résultat est la différence.

La seconde séance s'ouvre sur une discussion collective concernant le travail effectué lors de la première séance :

- la comparaison de deux écritures additives et la recherche de la différence en appui sur le schéma-ligne ;

- les écritures soustractives découvertes lors de la phase de comparaison de deux trains-nombres.

Puis, dans un second temps, les élèves comparent deux trains-nombres et notent les écritures soustractives correspondantes. Une mise en commun est alors organisée par la professeure et certaines découvertes discutées.

La troisième séance se compose, dans un premier temps, d'une séance d'anticipation au cours de laquelle les élèves recherchent la différence entre deux nombres en prenant appui sur les trains-nombres. Dans un second temps est organisée une séance en classe entière où les élèves produisent des écritures soustractives à partir du résultat d'un lancer de deux dés à six faces.

La quatrième et dernière séance filmée montre la professeure proposant le jeu de « faire voir un nombre dans un autre » à partir des trains-nombres, avec un petit groupe de cinq élèves.

Les élèves ont depuis le début de l'année expériencié des situations de comparaisons de deux ou trois sous-collections sous forme d'annonce produite avec deux et trois mains avec un lancer de dé à six faces (module 1 et 3). Ces comparaisons orales ont ensuite été traduites par des écritures additives à deux ou trois termes en usant des signes mathématiques « =, ≠, <, > » (module 2 et 4). Le dernier module étudié (module 6) par les élèves (avant d'aborder la notion de différence) est la comparaison de deux écritures additives à deux termes (par exemple 2 + 3 et 4 + 1). L'étude de ces comparaisons est accompagnée par l'usage de systèmes de

[108] X est un sous-ensemble de Y ou est inclus dans Y, si tous les éléments de l'ensemble X sont des éléments de l'ensemble Y, $X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X, x \in Y$

représentation du nombre tel que le schéma-ligne (demi-droite numérique sur laquelle les écritures additives sont représentées), le schéma-train (représentation analogique d'une suite de cubes emboîtés désignant chaque sous-collections, chaque terme de l'addition) et d'un schéma-boîte (représentation analogique d'une réunion de deux nombres).

Dans le module 7, les ressources proposées aux professeurs suggèrent d'introduire la notion de différence par la comparaison de deux écritures additives à deux termes. Ainsi, il semble qu'il existe une forme de continuité (Dewey, 1967/2011) entre les différentes situations qui se sont succédées jusqu'alors.

Mais comment dans l'action conjointe se construit cette continuité de l'expérience ? Nous étudierons ici comment la notion de différence entre deux nombres est introduite par le professeur à partir des connaissances antérieures des élèves. Nous tenterons de voir si les savoirs anciens autorisent l'enquête didactique. Pour cela, nous nous appuierons sur l'analyse réalisée dans le chapitre 6 qui a mis en évidence les capacités construites ou en cours de construction dans le collectif classe lors des modules 1 et 2. L'analyse des textes curriculaires des modules 3, 4, 5 et 6 complète ces données (cf. Chapitre 7) et donne des indications quant aux capacités épistémiques visées. Nous en faisons ici brièvement une synthèse :

- Capacité de désignation orale des nombres inférieurs ou égaux à 6 sous forme de deux et trois sous-collections produites à deux mains ;
- Capacité de désignation écrite des nombres inférieurs ou égaux à 6 sous forme d'une écriture additive à deux et à trois termes
- Usage des signes mathématiques « =, ≠, >, < » pour désigner des égalités ou des inégalités ;
- Capacité de traduction d'une comparaison entre deux écritures additives à deux termes (chaque terme inférieur ou égal à 5 et la somme est inférieure à 10) par une égalité ou un inégalité mathématique (=, >, <) ;
- Capacité de traduction d'une écriture additive à deux termes et trois termes sur un schéma-ligne et dans un schéma-boîte ;
- Capacité de comparaison de deux schémas-lignes ;
- Capacité de comparaison de deux schémas-boîtes.

Pour cette étude, nous nous centrerons sur la première et la seconde séance filmées dans la classe de P. Les premières questions que nous nous posons sont :

- Comment sont utilisés, dans l'action conjointe, les systèmes de représentation du nombre introduits dans les trois premiers modules (module 0, 1 et 2) pour aborder la différence ?

- Comment dans l'action conjointe se crée une forme de continuité de l'expérience mathématique des élèves à travers les systèmes de représentation ?

- Comment dans l'action conjointe, P organise la reviviscence des situations précédentes et si celle-ci permet aux élèves de réexpériencier les capacités (citées ci-dessus) dans une nouvelle situation ?

Au travers les épisodes sélectionnés au cours des deux premières séances, nous étudierons tout d'abord comment est introduit dans la classe de P la notion de différence, puis l'écriture soustractive qui vient coder cette différence entre deux nombres. Ensuite, nous analyserons comment les systèmes de représentation sont réinvestis dans l'étude de cette nouvelle notion. En dernier lieu, une synthèse de ce chapitre sera proposée.

1. Introduction de la différence

La première séance filmée de ce module 7 se déroule le 16 décembre 2013. Elle se compose de trois phases distinctes comme le montre le tableau (Tableau 71), tableau réalisé à partir de du synopsis de séance (Annexe 38). Nous avons modélisé ces phases par des jeux d'apprentissage pour donner à voir et à comprendre l'organisation des savoirs et leur avancée dans cette séance.

Phases	Modalité, support	Jeu d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Production d'une écriture additive à deux termes	Travail individuel sur ardoise	JA1 : Faire produire une écriture additive à deux termes		
Comparaison de deux écritures additives à deux termes	Collectif au tableau	JA2 : Faire représenter la différence entre deux écritures additives à deux termes sur un schéma-ligne.	Représentation de la différence sur un schéma-train/ligne.	-Traduction de deux écritures additives par deux schémas-train/ligne et recherche de la différence entre eux.
Comparaison de deux trains-nombres (≤10)	10 trains-nombres (de 1 à 10) Travail par binôme	JA3 : Faire chercher des différences en comparant deux trains-nombres.		

Comparaison de deux trains-nombres et sa traduction par l'écriture symbolique		JA4 : Faire traduire la différence entre deux trains-nombres par une écriture mathématique	Introduction du signe « - »	-Traduction dans une boîte d'une écriture soustractive -Traduction par une écriture symbolique d'un écart entre deux nombres

Tableau 71: Vision mésoscopique de la séance 1 du module 7

La description de la séance en termes de succession de jeux d'apprentissage, comme grille de lecture pour le chercheur, donne à voir au sein d'une séance la succession des enjeux de savoir. Ainsi, dans ce tableau, on voit une évolution avec le passage d'une représentation de la différence entre deux écritures additives sur un schéma-ligne à son écriture soustractive. L'enjeu de cette séance pourrait être nommé « la découverte de la différence et de l'écriture soustractive ». A partir de ce premier découpage, nous nous interrogeons sur comment dans l'action conjointe, le professeur et les élèves s'y prennent ensemble pour gagner au jeu.

Dans cette séance, la professeure invite, tout d'abord, les élèves à rechercher la différence entre deux écritures additives à deux termes et à la représenter sur un schéma-ligne. Il y a donc un réinvestissement de la capacité de comparaison de deux écritures additives sur un double schéma-ligne abordées lors du module 6. La recherche de la différence est activée à partir de questions : quelle est l'écriture la plus grande/la plus petite et de combien est-elle plus petite/grande. Puis, dans la troisième et quatrième phase de la séance, les élèves recherchent la différence entre deux trains-nombres. Enfin, à partir du schéma-boîte la professeure introduit le signe « - » pour désigner l'opération soustractive entre deux nombres.

Nous analyserons dans cette section un extrait de la première phase de cette séance, qui regroupe quatre épisodes. Ces épisodes retracent l'introduction d'une nouvelle connaissance mathématique, la soustraction vue non pas comme une action de retrait mais comme une différence. Pour cela, la professeure s'appuie sur des systèmes sémiotiques connus des élèves et expérienciés par eux depuis le début de l'année.

Pour commencer, nous présenterons l'extrait sélectionné puis nous analyserons dans les paragraphes suivants les quatre épisodes qu'il regroupe.

L'extrait que nous analyserons se déroule au mois de décembre pendant la première séance du module sept (cf. Tableau 71 ci-dessous). Comme nous l'avons précisé dans la partie « Méthodologie » (cf. Chapitre 4), le choix de cet extrait est justifié par le fait qu'il montre comment l'introduction de la différence entre deux nombres repose sur les systèmes de représentation connus des élèves.

Episode	Extrait 6 : Découverte de la différence Séance 1 module 7
Episode 16	**Production d'une écriture additive** à deux termes par les élèves sur leur ardoise.
Episode 17	**Comparaison et recherche de la différence** entre « 1 + 3 » et « 1 + 1 ». Proposition de deux élèves : « 1 + 3 » plus grand que « 1 + 1 ». Proposition d'un élève : la différence entre « 1 + 3 » et « 1 + 1 » est de 3.
Episode 18	**La différence** *:* Introduction par le professeur des annonces à deux mains pour vérifier la différence proposée.
Episode 19	**Introduction du schéma-ligne** par le professeur pour rechercher la différence entre « 1 + 3 » et « 1 + 1 ».

Tableau 72 : vision synoptique des extraits sélectionnés de la première phase de la séance

Nous pouvons décrire le tableau qui précède dans le récit suivant.

Chaque élève produit sur son ardoise une écriture additive à deux termes (épisode 16). P sélectionne « 1 + 1 » et « 1 + 3 » et les affiche au tableau. Les élèves recherchent alors quelle est l'écriture la plus grande, la plus petite et la différence entre les deux. Deux élèves énoncent le fait que « 1 + 3 » est plus grand que « 1 + 1 » et justifient oralement leur réponse. Puis un nouvel élève propose une différence erronée de « 3 » entre les deux écritures additives (épisode 2). Devant l'approbation par le collectif de ce résultat, P demande à deux élèves de représenter chaque écriture additive sur leurs deux mains (en référence au jeu des annonces) (épisode 3). Cette représentation corporelle des écritures additives ne permettant pas aux élèves de produire une réponse correcte, P introduit deux schémas-lignes sur lesquels des élèves viennent représenter les deux écritures additives qu'ils comparent pour montrer la différence (épisode 4), qu'ils identifient correctement.

1.1. Episode 16, introduction de la notion de différence

Dans ce premier épisode, la professeure demande à chaque élève de produire une écriture additive à deux termes sur l'ardoise. Elle introduit la nouvelle situation de la manière suivante. « *Alors, aujourd'hui on va commencer un nouveau jeu. C'est toujours un jeu avec des annonces. Mais aujourd'hui ce qu'on va faire, c'es*t comparer vos annonces. On va chercher qui a *l'annonce la plus grande, l'annonce la plus petite mais ce que je voudrais aussi savoir c'est de combien l'annonce la plus grande est plus grande et de combien l'annonce la plus petite est plus petite* ». P reprend un peu plus tard, après que les élèves ont

produit une écriture additive à deux termes, au tdp 15 « *ce qu'on va trouver ça s'appelle la* différence entre deux annonces »

La professeure s'appuie sur une situation déjà connue des élèves, la comparaison de deux écritures additives à deux termes, travaillée lors des séances précédentes. Les élèves abordent donc cette situation avec des capacités épistémiques (c'est-à-dire le « savoir du contrat » de la classe) construites précédemment. Ces capacités doivent permettre aux élèves d'agir dans le milieu, en leur offrant des possibilités d'action, des possibilités d'enquête (Dewey, 1967) pour aborder cette nouvelle situation, rechercher la différence entre deux écritures additives. P fait donc appel à la mémoire didactique (Centeno, 1995) de la classe en proposant une réexpérienciation (Quilio, 2008 ; Sensevy, 2011a) par les élèves d'une situation connue « on va commencer un nouveau jeu. *C'est toujours un jeu avec des annonces* » au tdp 1.

Cependant, il semble que les objectifs de cette nouvelle situation soient multiples : écrire une annonce à deux mains, comparer deux annonces et chercher laquelle est la plus grande, la plus petite, chercher la différence entre les deux annonces.

1.2. Episode 17, recherche de la différence à partir d'écritures additives

1.2.1. Présentation de l'épisode 17

Les élèves ont produit une écriture additive à deux termes sur leur ardoise, La professeure choisit deux productions d'élèves (celle de Félicien « 1 + 1 », et de Neil « 1 + 3 ») comme nous le montre la transcription ci-dessous (cf. Transcription. 50)

 Photogramme 66: affichage au tableau de deux productions d'élèves	**Tdp 19-P** : « Alors je vous, déjà, Neil et Félicien, qu'est-ce que vous en pensez ? Quelle est l'annonce la plus grande, quelle est l'annonce la plus petite ? [Neil lève la main] Neil ? »
	Tdp 20-Neil : C'est la mienne la plus grande **Tdp 21-P** : Comment tu le sais ? **Tdp 22-Neil** : Parce que un plus trois ça fait trois et Félicien il a mis un plus un et lui ça fait deux. **Tdp 23-P** : Ton annonce fait combien ?

	Tdp 24-Neil : Trois **Tdp 25-Els** : Quatre **Tdp 26-P** : Donc là quand tu expliques ça tu nous dis que ton annonce est plus grande parce que la tienne fait quatre et celle de Félicien fait ? **Tdp 27-Els** : deux **Tdp 28-P** : Deux. Est-ce que vous êtes d'accord avec les explications de Neil ? **Tdp 29-Els** : Oui **Tdp 30-El** : Mais j'ai une autre explication **Tdp 31-P** : Il y a une autre explication. Mais est-ce que Neil. Mais arrête, tu te tiens sur tes deux pieds et t'arrête de gigoter. Est-ce que Neil nous a dit quelle était la différence entre les deux annonces. **Tdp 32-Els** : Non **Tdp 33-P** : Non. Il ne nous a pas dit la différence. Est-ce que les ardoises qui sont sur les tables c'est pour les effacer, c'est pour les manger, c'est pour jouer avec ? (…)
 Photogramme 67 : comparaison terme à terme des deux écritures additives	**Tdp 38-Adèle** : En fait dans l'annonce de Neil, le trois il est plus grand que un parce que Félicien il a un. Et euh, ils ont deux un tous les deux et si on cache les deux un [Neil cache le 1 sur son ardoise avec sa main droite et P met sa main gauche devant le premier *terme de l'addition, le 1, de Félicien puis l'enlève]* **Tdp 39-P** : Fais comme Neil cache un un dans ton annonce [Félicien cache le second terme de son annonce sur son ardoise]
	Tdp 40-Adèle : Et en fait il reste plus que un plus trois et après trois est plus grand que un **Tdp 41-P** : Ok, ben toi tu réussis à savoir ça que l'annonce de Neil est plus grande parce que sans calculer et tu as cherché ce qui était pareil

Transcription 50 : comparaison des deux écritures additives (Annexe 39).

La professeure demande à Neil et Félicien « *Quelle est l'annonce la plus grande, quelle est l'annonce la plus petite* ? » au tdp 19. Neil, au tdp 20, affirme que 1 + 3 est la plus grande que 1+1, « *C'est la mienne la plus grande* ». P lui demande alors d'expliquer le résultat de cette comparaison « comment tu le sais ?» (tdp 21). Neil explique au tdp 22 qu'il a calculé la somme de chaque écriture additive « Parce que un plus trois ça fait trois et Félicien il a mis un plus un et lui ça fait deux ». Le collectif corrige le résultat de « 1 + 3 = 3 » proposé par Neil en « 1 + 3 = 4 ». P reformule la réponse de Neil pour l'ensemble de la classe (tdp 26) en demandant s'ils sont d'accord avec cette proposition. Les élèves confirment cette réponse. Puis, P recentre l'attention des élèves sur l'objectif de départ, la recherche de la différence (tdp 31) « Est-ce que Neil nous a dit quelle était la différence entre les deux annonces ». Les élèves répondent par la négative. P donne alors la parole à Adèle qui justifie le résultat de la

comparaison par une correspondance terme à terme entre les deux écritures additives au tdp 38 : « *En fait dans l'annonce de Neil, le trois il est plus grand que un parce que Félicien il a* un. Et euh, ils ont deux un tous les deux et si on cache les deux un ». P reprend cette proposition « *tu réussis à savoir ça que l'annonce de Neil est plus grande parce que sans* calculer et tu as cherché ce qui était pareil » (tdp 42). Pour valider cet énoncé oral, les élèves au tableau cachent les deux termes identiques de chaque écriture additive, le nombre 1, avec leur main pour donner à voir que trois est plus grand que un (cf. Photogramme 67).

L'épisode se poursuit avec la proposition de Félix.

Tdp 52-P : Et trois c'est plus grand que un donc là, on est toujours en train de dire que Neil a fait une annonce plus grande que Félicien et je ne sais toujours pas quelle est la différence entre l'annonce de Neil et l'annonce de Félicien. Va t'asseoir Félicien. Va t'asseoir Neil. Mais moi j'avais envie de savoir quelle est la différence, de combien Neil a gagné, de combien son annonce est plus grande que celle de Félicien. Je t'écoute Félix.
Tdp 53-Félix : L'annonce de Neil est plus grande de trois parce que trois est plus grand que un.
Tdp 54-Adèle : Donc pour, l'annonce de Neil est plus grande de trois parce que trois est plus grand que un. Ça veut dire que Neil a trois de plus dans son annonce ? C'est ça ? Est-ce que vous êtes d'accord avec ce que vient de nous dire Félix ?
Tdp 55-Els : Oui

Transcription 51 : proposition de différence entre « 1 + 1 » et « 1 + 3 » (Annexe 39)

Après que les élèves ont comparé les deux écritures additives, P revient sur la recherche de la différence au tdp 52, « *Mais moi j'avais envie de savoir quelle est la différence, de combien Neil a gagné, de combien son annonce est plus grande que celle de Félicien. Je t'écoute* Félix ». Félix énonce alors au tdp 53 « *L'annonce de Neil est plus grande de trois parce que* trois est plus grand que un ». P reformule cette proposition au tdp 54 « *Donc pour, l'annonce* de Neil est plus grande de trois parce que trois est plus grand que un. Ça veut dire que Neil a trois de plus dans son annonce *? C'est ça* ? Est-*ce que vous êtes d'acco*rd avec ce que vient de nous dire Félix ? » Les élèves approuvent cette différence au tdp 55.

1.2.2. Eléments d'analyse

Le chercheur par son enquête met à jour les règles définitoires du jeu didactique (Gruson & al., 2012 ; Sensevy, 2011a) mis en place par le professeur. Ces règles définitoires qui indiquent comment jouer au jeu sont ici multiples. En effet, la professeure pose simultanément plusieurs questions sans véritablement spécifier à laquelle les élèves doivent répondre prioritairement. A quel jeu faut-il jouer, quel est le gain du jeu ? Doit-on comparer,

rechercher l'annonce la plus grande ou la plus petite, rechercher la différence ? Les connaissances mobilisées par les élèves restent, de ce fait, cantonnées à la comparaison des deux additions. Il semble que ce que font les élèves relève du contrat didactique mis à jour dans les modules précédents (5 et 6), comparer deux écritures additives sans nommer l'écart, la différence entre les deux. Ce contrat semble activé par la question posée, par exemple, au tdp 19 par P « *Quelle est l'annonce la plus grande, quelle est l'annonce la plus petite* ? ». L'expression de P se situe donc majoritairement du côté des connaissances déjà-là des élèves orientant leur activité vers la comparaison des deux écritures. La professeure s'exprime par des énoncés d'accompagnement (Schubauer-Léoni, 2005 ; Marlot, 2012) en reformulant les énoncés des élèves (par exemple au tdp 26, 33, 41) mais en recentrant néanmoins l'enquête sur la recherche de la différence au tdp 31et 33. La position topogénétique de P vis-à-vis du milieu (à connaître) reste cependant basse (réticence de la part du professeur) par rapport au savoir en jeu, la différence entre deux nombres. En effet, elle laisse les élèves mener l'enquête à partir des deux écritures symboliques sans les orienter vers la stratégie gagnante, sans produire de signe les incitant à investiguer le milieu des écritures symboliques pour rechercher l'écart entre deux nombres. Ainsi, les élèves ne peuvent se projeter dans une enquête effective. Les élèves ne semblent pas jouer au même jeu que le professeur. Celui-ci tente d'instituer « recherche de la différence » alors que les élèves jouent à « qui a l'annonce la plus grande ». Les élèves ne répondent donc que partiellement aux attentes du professeur. Il y a un effet de rémanence propre au contrat ancien qui perdure dans la nouvelle activité. Il ne semble pas ici y avoir d'avancée du temps didactique. De plus, il apparaît que les élèves répondent à une question posée en utilisant les valeurs numériques proposées dans l'énoncé du problème sans mettre du sens à la question, « de combien l'annonce est la plus grande, de combien l'annonce est la plus petite[109] ? ». La prégnance du contrat didactique précédent, « comparer deux écritures additives » semble faire obstacle à l'enquête didactique des élèves.

Le milieu (les écritures symboliques) dans lequel les élèves doivent enquêter pour rechercher la différence apparait proche du système stratégique actuel des élèves. La réticence de P face au nouveau savoir empêche les élèves de produire un véritable travail dans le milieu.

[109] Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, les élèves nomment la différence par les expressions « il manque x, j'ai x de trop » dans les situations précédentes.

1.2.3. Les stratégies contrefactuelles

Nous proposons ici d'autres possibles que le professeur aurait pu mettre en œuvre. Ces stratégies contrefactuelles permettent de produire un gradient, au plan stratégique, entre la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression.

- A partir des énoncés produits par Neil et Adèle « 3 + 1 plus grand que 1 + 1 » et « 4 est plus grand que 2 », la professeure demande aux élèves d'écrire ces inégalités en utilisant le symbole « > » ou « < ». Les élèves peuvent alors collectivement déterminer les écritures « 3 + 1 > 1 +1 » et « 4 > 2 », « traduisant » ainsi les énoncés produits sous une forme mathématique qui leur est connue. L'expression de P vers l'usage des symboles d'inégalité, déjà connus, pourrait constituer un moyen, nous en faisons une hypothèse, d'enquête, pour minorer la seule comparaison entre deux nombres et l'orienter vers la recherche de la différence.

Ce premier contrefactuel entraînerait un mouvement mésogénétique avec l'introduction de nouvelles écritures mathématiques « 4>2 et 1+3 > 1+1 » ce qui modifierait le milieu d'enquête des élèves.

- Une seconde stratégie contrefactuelle pourrait être le passage de l'enquête collective vers une enquête individuelle à partir des deux écritures additives et/ou des deux inégalités. Le professeur demande à chaque élève (ou par binôme) de noter sur leur ardoise les écritures symboliques et de rechercher la différence. Les élèves travaillent dans le milieu symbolique, en première main pour rechercher la différence et justifier l'écriture des inégalités. Pour cela, ils réinvestissent les connaissances construites précédemment en usant par exemple de stratégie de composition/ décomposition, de comparaison terme à terme pour trouver la différence entre ces deux écritures (par ex, 1 + 3 > 1 + 1 ; 1 + 1+ 2 > 1 + 1 donc la différence entre 1 + 3 et 1 + 1 est 2).

- Une troisième stratégie contrefactuelle : la professeure demande aux élèves de travailler individuellement ou par binôme en leur laissant le choix des outils, des moyens à leur disposition pour rechercher la différence (les mains, les cubes, le schéma-train, le schéma-ligne, l'écriture symbolique). Ainsi, P est fortement réticente par rapport au contrat didactique puisqu'elle laisse les élèves mobiliser leurs connaissances antérieures sans donner d'orientation précise aux stratégies à développer. L'expression de P se limite alors à proposer aux élèves d'utiliser leurs connaissances (l'usage des systèmes de représentation par exemple ou les procédures de comparaison) mais sans les nommer. La réticence de P vis-à-vis du milieu (à connaître) est forte puisqu'elle laisse les élèves enquêter seuls, sans intervenir. Lors

de la mise en commun, les élèves rendent publics les différents moyens de résolution du problème envisagés (par exemple une mise en traduction entre les écritures symboliques et le schéma-ligne), ce qui entraîne un mouvement mésogénétique issu des élèves qui occupent donc une place topogénétique haute par rapport au savoir en jeu. La dynamique chronogénétique provient ainsi des élèves eux-mêmes.

Le tableau ci-dessous donne à voir sous une forme synthétique l'ensemble des stratégies contrefactuelles proposées ainsi que la stratégie effective du professeur.

Stratégie effective du professeur	Stratégie contrefactuelle 1 (CF1)	Stratégie contrefactuelle 2 (CF2)	Stratégie contrefactuelle 3 (CF3)
Rechercher la différence entre deux écritures additives à deux termes	Valider mathématiquement une inégalité : 1+3>1+1, 4> 2	Recherche individuelle de la différence à partir des écritures symboliques	Rechercher à partir des outils sémiotiques disponibles la différence entre deux écritures additives
Renforcement du contrat	Développement du travail dans le milieu à partir des connaissances antérieures des élèves	Travail contrat-milieu	Travail dans le milieu
Topogénèse PE>Els	Topogénèse PE < Els	Topogénèse P < Els	Topogénèse P << Els
Mouvement chronogénétique stable	Mouvement chronogénétique : +	Mouvement chronogénétique : +	Mouvement chronogénétique : ++
Mouvement mésogénétique « = »	Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique par les élèves : ++

Tableau 73 : stratégies contrefactuelles, épisode 17

Dans les exemples de contrefactuels proposés ici, nous avons une description des différentes pratiques possibles qui met en évidence l'entrelacement de deux dialectiques, contrat/milieu et expression/réticence (Sensevy, Vigot, 2016 ; Gruson, à paraître). Le jeu du professeur sur celui de l'élève à travers cette double dialectique permet de décrire comment le problème peut se construire différemment. Dans le premier cas, la stratégie professorale (l'expression du professeur) est orientée vers le contrat didactique, vers les connaissances déjà-là des élèves sans modifier le milieu initial c'est-à-dire en taisant les relations entre les éléments du milieu-problème. Il n'y a pas d'avancée du temps didactique dans les transactions ni de dynamique mésogénétique.

La première stratégie contrefactuelle (CF1) est, elle aussi, orientée vers le contrat mais le travail collectif des élèves peut amener à modifier le milieu de l'enquête par la production de l'inégalité correspondante à la comparaison des deux écritures additives. Les élèves font alors progresser la chronogénèse et la mésogénèse.

La seconde stratégie contrefactuelle, les élèves recherchent individuellement l'écriture mathématique correspondante à la comparaison proposée. Le professeur se met alors en retrait. Les élèves enquêtent directement sur l'écriture symbolique. La mise en commun autorise les élèves à proposer différentes stratégies. La dynamique mésogénétique peut être plus limitée que dans la dernière stratégie contrefactuelle proposée (CF 3) puisque dans ce cas, les caractéristiques du milieu peuvent être fortement modifiées par les élèves eux-mêmes. La densité épistémique du jeu proposé est donc plus importante que dans les autres stratégies puisqu'il entraîne une position topogénétique en faveur des élèves plus importante et des capacités épistémiques engagées plus grandes.

1.3. Episode 18, recherche de la différence et représentation corporelle

1.3.1. Présentation et analyse

Après que les élèves ont approuvé la différence de 3 entre « 1 + 1 » et « 1 + 3 », la professeure énonce alors au tdp 56 (épisode 18) « On va vérifier parce que moi je suis pas *sûre de ça (...) faites*-moi votre annonce avec les doigts ». La transcription 52 ci-dessous nous donne à voir la suite de ces transactions.

 Photogramme 68 : production d'annonces à deux mains correspondant aux écritures additives 1+ 1 et 1 + 3	**Tdp 56-P** : Euh, Neil et Félicien revenez-là. On va vérifier parce que moi je suis pas sûre de ça (…) Alors faites-moi votre annonce avec les doigts [Les deux élèves se retournent *et regardent l'annonce écrite sur les ardoises]*. Fais ton annonce Félicien. Je suis pas d'accord [Félicien montre deux doigts sur la main droite] Voilà [puis il montre un doigt sur chaque main. Neil montre trois doigts sur sa main droite et un doigt sur sa main gauche]
	Tdp 57– Félicien : Ça fait deux **Tdp 58–P** : Ah l'annonce de Félicien fait deux **Tdp 59–El** : L'autre, ça fait quatre **Tdp 60–P** : L'annonce de Neil fait quatre. Est-ce que, est-ce que vous êtes d'accord avec Félix lorsqu'il dit que l'annonce de Neil fait trois de plus que l'annonce de Félix, de Félicien ? **Tdp 61-Els** : Non, oui **Tdp 62- P** : Alors **Tdp 63- Emma :** Deux de plus **Tdp 64-P :** Emma dit deux de plus, allez. Alexis dit trois de plus. Qu'est-ce que tu dis-toi ?

	Tdp 65-Juliette : Deux de plus **Tdp 66-P** : Juliette dit deux de plus et qu'est-ce que tu dis-toi **Tdp 67-El** : Un, un de plus **Tdp 68-P :** Un de plus. Oh là là, alors moi, j'ai une solution Allez-vous asseoir Félicien et Neil. +++ et j'ai préparé cette feuille-là. [P affiche au tableau une feuille avec deux schémas-lignes]. Qu'est-ce que vous voyez sur cette feuille-là ?

Transcription 52 : traduction des écritures additives à deux termes par une annonce à deux mains et recherche de la différence, épisode 18 (Annexe 39)

Nous observons un relâchement de la réticence du professeur qui, par ses propos, invalide la proposition de Félicien au tdp 56 (je ne suis pas d'accord). P propose aux élèves de revenir à ce que l'écriture additive dénote c'est-à-dire à une annonce produite à deux mains en référence au jeu des annonces. Ainsi, P initie l'introduction dans le milieu d'une représentation concrète des nombres sous forme de collection de doigts. Chaque nombre désigne la mesure du cardinal d'une collection. P s'appuie sur les connaissances déjà-là des élèves, la désignation d'une écriture additive à deux termes par une décomposition sous forme de deux sous-collections. Les élèves proposent alors oralement la somme de chaque annonce produite à deux mains, deux et quatre. P interroge le collectif « Est-ce que, est-ce que vous *êtes d'accord avec Félix lorsqu'il dit que l'annonce de Neil fait trois de plus que l'annonce de* Félix, de Félicien ? » (tdp 60). Les avis semblent alors contradictoires, certains élèves valident, d'autres invalident cette différence de trois entre les deux annonces produites.

L'incertitude prégnante des élèves peut être liée au fait que les connaissances issues des expériences précédentes, ne permettent pas de répondre à la question posée. Les élèves doivent changer de « voir comme » (Wittgenstein, 2004) et produire de nouvelles stratégies. Une seconde possibilité, sans doute étroitement liée à la première, pourrait être une incertitude linguistique des élèves à comprendre les expressions de P « combien de plus, combien de moins ». Il semble donc que le passage d'une représentation symbolique à une représentation corporelle des écritures additives ne fasse pas signe aux élèves pour rechercher la différence. En effet, il y a traduction des écritures additives par des annonces à deux mains sans que cette dernière représentation soit investiguée par les élèves, sans que cela produise des actions chez les élèves. Les transactions didactiques montrent que P n'oriente pas les élèves vers une enquête dans ce nouveau milieu, les doigts. P est réticent vis-à-vis du milieu (le problème constitué par la différence entre les deux annonces à deux mains) et expressif vis-à-vis du contrat puisqu'il propose aux élèves de s'appuyer sur un déjà-là, la traduction d'une représentation symbolique par une représentation corporelle. Les annotations réalisées par P

sur cette analyse indiquent que son intention était de « remettre les élèves dans le sens » en montrant concrètement ce que ces écritures mathématiques dénotent. P nous révèle que, dans les séances précédentes, certains élèves étaient capables d'annoncer la différence entre une annonce à deux mains et un lancer de dé à six faces mais sans qu'elle soit nommée en tant que telle, les expressions usitées étaient « il me manque « x » », j'ai « x » de trop ». Ici, certains élèves restent focalisés sur le signe 3 de l'écriture mathématique (ici et plus tard également). Ces élèves semblent comparer le premier terme de chaque écriture additive et non pas la valeur de chacun de ces termes dans l'ajout (3 + 1/1 + 1). Les termes « différence, combien de plus, de moins » sont donc un obstacle à la compréhension du problème proposé par P. La réticence élevée de P n'encourage pas les élèves à s'appuyer sur leurs connaissances antérieures pour investiguer le milieu corporel. « L'habitude sémiotique » du contrat, c'est-à-dire celle des doigts comme instrument pour comparer des nombres empêche, limite ici une nouvelle forme de désignation, celle de la différence.

Ainsi, il y a ici une reconfiguration contractuelle des éléments du milieu-problème puisque les « règles du jeu » ont changé, le jeu « investissant » les doigts, mais sans que cela ne permette aux élèves de continuer l'enquête. Il n'existe pas de dynamique chronogénétique dans la mesure où le savoir stagne malgré un mouvement mésogénétique initié par P « faites-moi votre annonce avec les doigts ». Cet énoncé reconfigure le milieu et constitue un changement de jeu d'apprentissage. La densité épistémique de ce nouveau jeu d'apprentissage apparaît moindre du fait qu'il se réduit à la traduction entre deux représentations (dans un jeu de représentation entre le représenté, les écritures additives et le représentant, les annonces à deux mains) sans apporter d'éléments complémentaires dans le processus d'enquête des élèves. Il y a un glissement du jeu d'apprentissage (Marlot, 2008), du jeu d'apprentissage initial « rechercher la différence entre deux écritures additives » vers un jeu d'apprentissage « traduire une écriture additive à deux termes par une décomposition additive sous forme de deux sous-collections produites sur deux mains ». L'action conjointe ne permet pas l'émergence d'un nouveau savoir. Le milieu est ici un adjuvant du contrat.

1.3.2. Stratégies contrefactuelles

Nous pourrions imaginer une stratégie contrefactuelle, une autre possibilité d'action de P basée sur un autre jeu du professeur sur celui de l'élève avec un entrelacement de la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression différent.

Le professeur propose aux élèves de travailler par binôme sur la recherche de la différence à partir des annonces produites à deux mains. On produit l'hypothèse que les élèves, faisant cela, peuvent expériencier effectivement différentes stratégies de comparaison (comme comparer terme à terme chaque doigt levé). L'expérience antérieure des élèves (celle de la comparaison) peut alors être réinvestie et transformée dans l'action dans et par l'expérience nouvelle. Ainsi, le mouvement mésogénétique provoqué par P est accompagné d'une dynamique chronogénétique produite par les élèves. Le contrat didactique deviendrait ici un adjuvant du milieu.

Stratégie de P	Stratégie contrefactuelle 1 (CF1)
Traduction des deux écritures additives à deux termes par deux annonces à deux mains	Rechercher la différence entre les deux annonces à deux mains
Renforcement du contrat	Travail dans le milieu
Topogénèse PE> Els	Topogénèse P < Els
Mouvement chronogénétique stable	Mouvement chronogénétique : +
Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique : ++

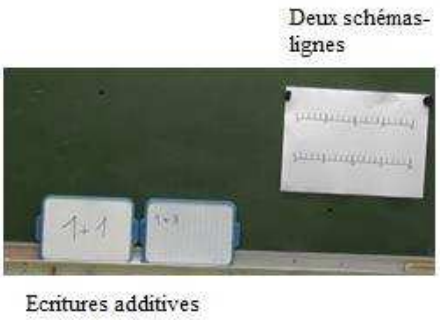
Tableau 74 : stratégies contrefactuelles, épisode 18

Dans ce contrefactuel, la position topogénétique des élèves est plus importante que dans la stratégie effective de P décrite ci-dessus. En effet, P laisse les élèves enquêter dans le milieu (recherche de la différence entre deux annonces à deux mains) ce qui peut déclencher un processus mésogénétique en faisant passer les élèves d'une première reconnaissance du problème à la mise en relation des éléments du milieu (Sensevy, Vigot, 2016). Cette dynamique mésogénétique entraîne dans l'action conjointe un mouvement chronogénétique.

1.4. Episode 19, recherche de la différence et le schéma-ligne,

1.4.1. Le schéma-ligne.

La professeure affiche au tableau, à la suite de l'épisode précédent, deux schémas-lignes comme nous donne à voir la transcription ci-dessous.

 **Photogramme 69: affichage par P de deux schémas-lignes au tableau**	**Tdp 74-P** : Pourquoi il y a deux lignes ? **Tdp 75-Els** : Pour faire les deux annonces **Tdp 76-P** : Pour faire les deux annonces. Pour faire l'annonce de Neil et pour faire l'annonce de Félicien [P montre successivement le premier et le second schéma-ligne avec sa main]. Bon alors, j'embauche + Anaëlle (…) [Anaëlle est au tableau et a pris un crayon feutre] et oui, tu as le droit de descendre [PE2 aide Anaëlle à descendre la feuille avec les schémas-lignes à sa hauteur]. [Anaëlle positionne son crayon sur la graduation 0 du premier schéma-ligne] Alors tu fais l'annonce de qui là ?
	Tdp 77-Anaëlle : Euh [Anaëlle montre avec son index *l'ardoise de Neil]* **Tdp 78-P** : De Neil, sur la première Anaëlle nous représente l'annonce de Neil [Anaëlle trace un premier pont de un puis un pont de trois et note le cardinal de chaque collection, 1 et 3. Puis, elle trace en dessous du schéma-ligne un pont de quatre intervalles et écrit en dessous le nombre 4]. C'est bien une annonce qui fait quatre comme nous l'avait dit Neil. Sur la seconde ligne, que vas-tu faire ? [Anaëlle regarde P]. On a dit qu'on avait une ligne pour l'annonce de Neil et une ligne pour l'annonce de
 Photogramme 70 : représentation des deux écritures additives	**Tdp 79-Els** : Félicien **Tdp 80-P** : De Félicien [Anaëlle trace deux ponts *consécutifs d'un intervalle et inscrit au*-dessus de chaque pont le nombre 1 puis trace un pont de deux intervalles en dessous du schéma-ligne et note le nombre 2]. Et l'annonce de Félicien fait ? **Tdp 81-Els** : deux

Transcription 53 : représentation sur les schémas-lignes

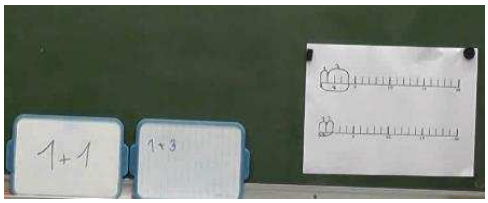
La professeure, au tdp 68, introduit une nouvelle représentation, le schéma-ligne « Oh là là, *alors moi, j'ai une solution (...) et j'ai préparé cette feuille*-là. Après un bref descriptif des schémas-lignes effectué par les élèves sous l'impulsion de P, cette dernière leur demande « pourquoi il y a deux lignes ? » (tdp 76). Les élèves répondent « pour faire les deux annonces » (tdp 77). P montre alors successivement les deux schémas-lignes et énonce au tdp 76 « *Pour faire les deux annonces. Pour faire l'annonce de Neil et pour faire l'annonce de* Félicien ». La professeure fait appel à Anaëlle pour représenter les deux écritures additives sur les deux schémas-lignes. Sans prononcer un mot, cette élève représente sur le premier schéma-ligne l'écriture additive produite par Neil. P relie la représentation de la somme de l'annonce sur le schéma-ligne et la somme de cette écriture additive donnée par Neil au début

de cet extrait au tdp 78 « *c'est bien une annonce qui fait quatre comme nous l'avait dit Neil* ». Puis Anaëlle représente l'écriture additive de Félicien sur le second schéma-ligne.

Il y a ici un travail mésogénétique de P avec une expression centrée sur l'orientation dans le milieu. On observe donc un changement de jeu d'apprentissage. P fait évoluer le milieu en introduisant le schéma-ligne pour rechercher la différence. L'élève s'appuie sur les capacités de traduction d'une écriture additive sur un schéma-ligne construite dans les transactions passées (cf., Photogramme 70). La réticence de P est ici du côté du contrat : elle ne reprend pas les connaissances anciennes liées à la comparaison de deux écritures additives sur les schémas-lignes puisque l'élève représente par elle-même les deux écritures sur les schéma-lignes.

1.4.2. Recherche de la différence sur les schémas-lignes

Dans un second temps, la professeure centre l'attention des élèves sur la représentation de l'écart entre les schémas-lignes (cf. Transcription 54, ci-dessous).

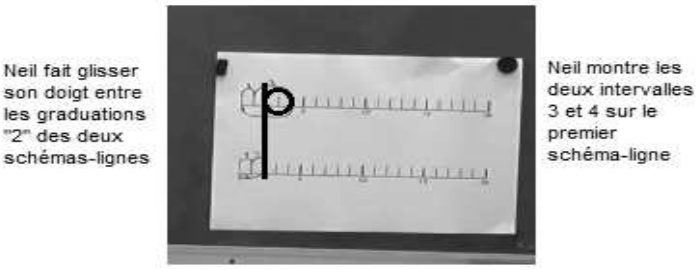
 **Photogramme 71 : recherche de la différence à partir de deux schémas-ligne**	**Tdp 82-P** : Est-ce que tout le monde voit, écarte-toi [P déplace Anaëlle sur la gauche du tableau]. Est-ce qu'on voit sur cette ligne, sur ces deux lignes [P montre avec son index successivement les deux schémas-lignes], est-ce qu'on voit si l'annonce de Neil est plus grande que l'annonce de Félicien ? **Tdp 83-El** : Oui **Tdp 84-El** : De trois **Tdp 85-P** : de trois **Tdp 86- El** : Non, de quatre **Tdp 87-P** : de quatre **Tdp 88-El** : non de deux. **Tdp 89-P :** Alors viens me montrer Neil, où est ce que tu vois que ton annonce, où est ce que tu vois que ton annonce est plus grande [Neil vient au tableau] **Tdp 90-Neil :** Parce que là c'est deux [Neil fait glisser son doigt de la troisième graduation du premier schéma-ligne vers le second] et là [Neil montre avec son doigt les intervalles trois et quatre du premier schéma-ligne] (cf. Photogramme 72) c'est la partie de quatre et quatre et trois et puis. **Tdp 91-P** : Oui, oui continue. **Tdp 92-Neil :** Et puis trois est plus grand que quatre et que trois est plus grand que deux, c'est deux de plus [Neil montre avec son doigt les deux derniers intervalles du pont de quatre] parce que là c'est deux et là c'est trois.

Transcription 54 : recherche de la différence (Annexe 39)

Au tdp 82, P demande aux élèves « est-*ce qu'on voit si l'annonce de Neil est plus grande que l'annonce de Félicien* ? » en montrant successivement les deux schémas, puis au tdp 84 « Est-*ce qu'on peut voir de combien l'annonce de Neil est plus grande* ? ». P ne pose plus la question suivante : « *quelle est l'annonce la plus grande, la plus petite, quelle est la* différence ? ». Elle modifie son expression, en partant de la proposition précédente des élèves, à savoir que l'annonce de Neil est plus grande que celle de Félicien. De plus, en usant du verbe « voir », P oriente l'attention des élèves vers l'observation de la différence de longueurs des deux portions des demi-droites représentées au tableau. L'énonciation de P se construit alors sur une imbrication particulière de réticence et d'expression, puisqu'il s'exprime directement sur la comparaison des deux schémas-lignes par des énoncés oraux et des gestes de monstration. Néanmoins, les réponses produites par les élèves au tdp 84, 86, 88 respectivement « trois, quatre, deux » à la question de combien l'annonce de Neil est la plus grande montrent toujours une incertitude des élèves face au milieu à connaître. Les élèves semblent avoir des difficultés à donner du sens aux expressions « combien de plus, combien de moins », à comprendre une certaine forme de vie/jeu de langage (Wittgenstein, 2004)

P invite ensuite Neil à montrer sur les schémas-lignes au tdp 89 « où est-ce que tu vois que ton annonce, où est-ce que tu vois que ton annonce est plus grande ».

Neil compare effectivement les deux schémas-lignes, comme nous le montre le photogramme suivant (cf. Photogramme 72) :



Photogramme 72 : Schématisation de la gestuelle de Neil pour montrer la différence sur les schémas-lignes

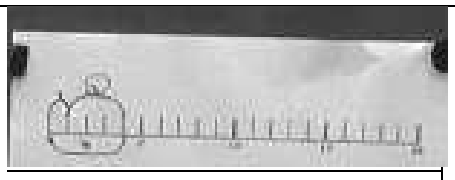
Neil fait glisser son doigt de la graduation « 2 » du premier schéma-ligne à la graduation « 2 » du second schéma-ligne (à gauche) puis montre la portion du premier schéma-ligne plus grande par rapport au second schéma-ligne (à droite). Ainsi, il délimite la portion de la demi-droite désignant ce que le premier schéma-ligne a « de plus » que le second (tdp 90 et 92).

P s'exprime vis-à-vis du milieu (la différence représentée sur le schéma-ligne) en orientant l'attention de Neil vers la représentation effective de la différence entre les deux schémas. Cependant, elle reste en retrait lorsque l'élève s'exprime sur la recherche de cette différence.

Il y a ici un mouvement chronogénétique impulsé par P qui indique ce qu'il faut regarder mais la recherche reste sous la responsabilité de l'élève.

La représentation sur les schémas-lignes permet à Neil de montrer effectivement l'écart entre les deux annonces, la différence entre deux longueurs délimitées par les schémas-ponts. P oriente l'élève dans le milieu tout en taisant/cachant certains éléments qu'il aurait pu exprimer.

Puis, P demande à Neil d'entourer sur le schéma-ligne désignant l'annonce « 1 + 3 » la différence au tdp 93 « *ce que tu as mis en plus par rapport à l'annonce de Félicien* ». Neil entoure alors le nombre « 3 » désignant le deuxième terme de l'annonce. Les commentaires de P sur cet épisode montrent que l'erreur de Félicien est liée notamment à un obstacle langagier dû à une difficulté de compréhension du mot « différence ». En effet, il semble que la professeure n'ait pas au préalable explicité ce mot, qui est utilisé par la plupart des élèves en opposition au mot « pareil »[110].

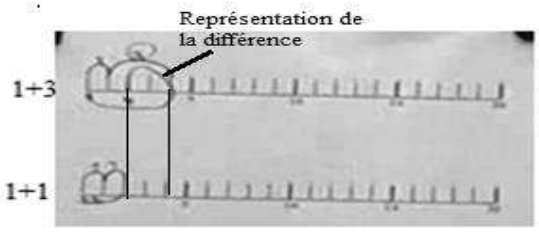
 **Photogramme 73 : Neil entoure le nombre 3 pour désigner la différence entre "1 + 1" et "1 + 3" sur le schéma-ligne**	**Tdp 93-P** : Alors, tiens, je vais prendre [P tend un crayon feutre orange à Neil]. Essaie déjà de m'entourer sur ton annonce ce que tu as mis en plus par rapport à l'annonce de euh Félicien. [Neil entoure le nombre 3 se trouvant au-*dessus du pont représentant le second terme de l'annonce* de Félicien]. Alors, moi, c'est pas ça que je t'ai demandé, tu n'as pas mis trois en plus, c'est pas vrai, tu m'avais dit que tu avais mis deux en plus. Essaie de m'entourer sur la ligne [P fait glisser son doigt le long de la portion du schéma-*ligne désignant la somme de l'annonce]* les wagons que tu as mis en plus de l'annonce de Félicien. Où sont les wagons qui sont en plus [Neil place la pointe de son stylo sur la graduation quatre puis la reporte sur la graduation deux et trace un pont de deux intervalles *jusqu'à la graduation qu*atre]. Est-ce que vous êtes d'accord ?
	Tdp 94-Els : Oui **Tdp 95-P** : Neil, il dit que lui, il a en plus ces deux-là [P fait glisser son doigt le long des deux derniers intervalles du schéma-ligne]. Que l'annonce de Félicien fait deux [P place son doigt sur la graduation deux puis sur la graduation quatre] et que son annonce fait quatre et donc

[110] cf. chapitre 6 sur la régulation de l'ingénierie où il est mis en évidence que l'emploi du mot différent (≠) au cours des modules précédents signifie que deux annonces ne sont pas égales).

	lui il a mis ces deux-là en plus [P fait glisser son doigt sur le pont de deux tracé par Neil]

Transcription 55 : montrer la différence (Annexe 39)

P (tdp 92, ci-dessus) reprend la parole « *alors moi, c'est pas ça que je t'ai demandé, tu n'as pas mis trois de plus, c'est pas vrai, tu m'avais dit que tu avais mis deux de plus. Essaie de m'entourer sur la ligne [PE fait glisser son doigt* le long de la portion du schéma-ligne *désignant la somme de l'annonce] les wagons que tu as mis en plus de l'annonce de Félicien.* Où sont les wagons que tu as mis en plus ». Neil trace alors un pont de deux intervalles de la graduation deux à la graduation quatre (cf. Photogramme 74, ci-dessous).



Photogramme 74 : représentation de la différence entre deux écritures additives sur le schéma-ligne

La professeure oriente donc l'enquête didactique sur la recherche de la différence en s'appuyant sur un système sémiotique déjà expériencié par les élèves lors des modules précédents pour résoudre ou prouver le résultat d'une comparaison entre deux nombres. On passe d'un usage-comparaison du schéma-ligne à un usage-différence. Il apparaît ici que ce système de représentation fait signe aux élèves pour rechercher la différence. En effet, la comparaison de deux schémas-lignes donne à voir un écart, une différence de longueur. Cet écart est représenté par un nombre d'intervalles compris entre la graduation « 2 » et « 4 ». Ainsi, Neil en désignant sur le premier schéma-ligne (1 + 3) la portion de la demi-droite représentant la seconde écriture « 1 + 1 », montre effectivement l'écart entre deux nombres, la différence entre deux longueurs, deux mesures de quantités.

L'introduction du schéma-ligne dans le milieu par P permet un mouvement mésogénétique et déplace le milieu de l'enquête didactique des élèves. P est donc expressif par rapport au contrat didactique, le connu des élèves mais reste réticente par rapport au milieu à connaître. En effet, elle fait travailler les élèves sur le schéma-ligne en les confrontant à un outil, un instrument avec lequel ils savent déjà jouer mais qui recèle des potentialités non encore explorées.

Cependant, lorsque Neil entoure le nombre trois pour désigner la différence entre les deux schémas-lignes, P oriente l'action de l'élève en énonçant « *alors moi, c'est pas ça que je t'ai*

d*emandé, tu n'as pas mis trois en plus, c'est pas vrai, tu m'avais dit que tu avais mis deux en* plus » au tdp 93. Ainsi, P s'exprime sur la validité de la réponse produite par l'élève. Elle accompagne cet énoncé par un geste de monstration en faisant glisser son doigt le long de la portion du schéma-ligne délimitée par le schéma-pont de la somme de 1 + 3. Par ce geste, la professeure semble montrer que la différence est représentée par une portion de la ligne numérique. Elle oriente alors l'action de l'élève vers la désignation de la différence sur le schéma-ligne mais sans dévoiler directement le savoir en jeu. Elle laisse l'élève tracer le « schéma-pont » (cf. photogramme 74) désignant la différence entre les deux annonces. Nous pouvons parler ici d'une expression d'orientation dans le milieu par P. L'instrument, le schéma-ligne permet maintenant de nouveaux possibles avec une modification du « voir-comme », du style de pensée (Fleck, 2005).

Dans ce nouveau jeu d'apprentissage « faire représenter la différence entre deux écritures additives à deux termes sur un schéma-ligne. », nous observons que le contrat devient un adjuvant du milieu. Il y a une assimilation du contrat par le milieu avec une évolution dans le « voir comme », le style de pensée, voir le schéma-ligne comme une représentation de la différence entre deux nombres et non plus comme un moyen de représentation des nombres.

1.4.3. Stratégies contrefactuelles

Un contrefactuel peut être le suivant : P demande à Neil de « montrer la première annonce avec ses doigts », puis de « montrer la deuxième », puis la différence. Il peut aussi demander de représenter sur un même schéma-ligne les deux écritures additives. Une tel contrefactuel permet d'imaginer un système stratégique différent, moins globalement réticent et plus globalement expressif, ou plutôt, dont l'équilibre réticence-expression aurait été différemment organisé.

Un second contrefactuel peut être de demander aux élèves, dans un premier temps de travailler individuellement ou par binôme sur des schémas-lignes. Puis dans un second, le professeur choisit des propositions d'élèves qui lui semblent pertinentes pour les soumettre à une discussion collective. Cette stratégie permet à l'ensemble des élèves d'investiguer le milieu sémiotique proposé et ainsi d'utiliser le système capacitaire construit lors des modules précédents. Cela impliquerait une enquête plus effective dans le milieu par des élèves.

Le tableau ci-dessous (cf. Tableau 75) reprend la stratégie effective de P et la stratégie contrefactuelle que nous venons de développer.

Stratégie effective	Stratégie contrefactuel 1 (CF1)	Stratégie contrefactuel 2 (CF2)
Rechercher collectivement la différence entre deux écritures additives sur deux schémas-lignes	Recherche collective de la différence à partir de la mise en correspondance entre l'écriture symbolique, la représentation sur les mains et sur le schéma-ligne.	Rechercher la différence entre deux écritures additives sur deux schémas-lignes par binôme ou individuellement
Topogénèse : P < Els	Topogénèse : P < Els	Topogénèse : P < < Els
Mouvement chronogénétique : ++	Mouvement chronogénétique : ++	Mouvement chronogénétique : ++
Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique : ++	Mouvement mésogénétique : +

Tableau 75 : synthèse des stratégies contrefactuelles

Dans les différentes stratégies proposées ici, nous observons dans les trois cas, que la position topogénétique des élèves est haute par rapport au savoir en je avec un mouvement chronogénétique en leur faveur.

1.5. Conclusion

Nous revenons, tout d'abord, dans cette conclusion sur le premier découpage en jeux d'apprentissage de la séance 1 du module 7 que nous avons réalisé au début de cette section.

Phases	Jeu d'apprentissage
Production d'une écriture additive à deux termes	JA1 : Faire produire une écriture additive à deux termes
Comparaison de deux écritures additives à deux termes	JA2 : Faire représenter la différence entre deux écritures additives à deux termes sur un schéma-ligne.
Comparaison de deux trains-nombres (≤10)	JA3 : Faire chercher des différences en comparant deux trains-nombres.
Comparaison de deux trains-nombres et sa traduction par l'écriture symbolique	JA4 : Faire traduire la différence entre deux trains-nombres par une écriture mathématique

Tableau 76 : découpage en jeux d'apprentissage de la séance 1

Nous ne revenons pas sur le premier JA « Faire produire une écriture additive à deux termes ». Mais nous nous centrerons sur le JA2 « Faire représenter la différence entre deux écritures additives à deux termes sur un schéma-ligne » dont nous avons analysé ci-dessus une partie du contenu. A partir donc de l'analyse effective, nous pouvons affiner la première modélisation en termes de JA effectués. Ainsi, nous dégageons trois jeux d'apprentissage (cf. Tableau 77) qui montrent comment les élèves et le professeur, dans les interactions, parviennent à gagner au jeu de rechercher la différence entre deux écritures additives.

JA (2)1	JA(2)2	JA(2)3
Faire chercher de la différence entre deux écritures additives à deux termes	Faire traduire de deux écritures additives à deux termes par une décomposition sous forme de deux sous-collections représentées sur deux mains	Faire représenter de la différence entre deux écritures additives sur deux schémas-lignes.
Le milieu adjuvant du contrat	Le milieu adjuvant du contrat	Enquête dans le milieu
Topogénèse PE> Els	Topogénèse PE> Els	Topogénèse : P < Els
Mouvement chronogénétique stable	Mouvement chronogénétique stable	Mouvement chronogénétique : ++
Mouvement mésogénétique : =	Mouvement mésogénétique : + +	Mouvement mésogénétique : +

Tableau 77 : affinement de la modélisation en termes de jeux d'apprentissage

Lors du JA(2)1, le milieu sémiotique des écritures additives ne permet pas aux élèves de travailler le problème. Le milieu devient un adjuvant du contrat. La réticence du professeur vis-à-vis des résultats produits pas les élèves (1 + 3 > 1 + 1) n'autorise pas de mouvement mésogénétique et chronogénétique.

Puis, P introduit la représentation corporelle, ce qui entraîne un changement de jeu d'apprentissage « traduire une écriture additive par une annonce à deux mains ». Cela amène à une diminution de la densité épistémique dans la mesure où P ne laisse pas les élèves réexpériencier le milieu corporel pour rechercher la différence, n'oriente pas véritablement le travail des élèves vers la recherche de la différence à partir de cette représentation.

Cependant, en introduisant le schéma-ligne lors d'un nouveau JA(2)3, P recentre l'enquête sur la recherche de cette différence par une expression plus grande vis-à-vis du milieu. Il y a donc ici une élaboration stratégique spécifique du professeur dont cette caractérisation rend compte.

Pour introduire la notion de différence, la professeure s'appuie sur les connaissances déjà-là des élèves, sur la capacité de comparaison de deux écritures additives et sur l'usage des systèmes de représentation (les mains, le schéma-ligne) dans ces situations de comparaison. Elle instaure un jeu représentationnel où est proposée une reviviscence des situations connues des élèves (Quilio, 2008 ; Sensevy, 2011a). Cependant, la réexpérienciation d'une situation pour faire émerger un nouveau savoir nécessite un travail énonciatif subtil de la part du professeur pour orienter l'action des élèves dans la dialectique du contrat et du milieu. Comme nous montre l'analyse ci-dessus, la réticence du professeur face aux écritures additives et à la représentation avec les mains entraîne une incertitude épistémique, qui limite l'action des élèves dans le milieu (à connaître) tandis que l'orientation de l'action de Neil par des énoncés ciblés pour l'usage des schémas-lignes lui permet de trouver la différence. Les

échanges des élèves semblent bien montrer que cette incertitude n'est pas réductible à un effet de contrat, mais relève de la difficulté à donner du sens aux expressions « l'annonce A est plus grande de x que l'annonce B », et « quelle est la différence ? ». Le schéma-ligne donne la possibilité de donner à voir et à comprendre ce jeu de langage dans une forme de vie (Wittgenstein, 2004).

Alors qu'elle constituait d'abord un empêchement (la comparaison « inhibant » la recherche de la différence), la connaissance construite dans une situation (sur les systèmes de représentation) devient ici un moyen, un instrument de compréhension et d'action dans la situation suivante. En effet, ici la comparaison, dès lors qu'elle se fait en appui sur deux schémas-lignes, amène à introduire la notion de différence entre deux nombres. Il y a ainsi croissance du savoir par une continuité de l'expérience des élèves, « ce qu'il (l'individu) avait acquis de savoir et d'habilité, dans une situation précédente, devient instrument de compréhension et d'action pour la nouvelle situation » (Dewey, 1968/2011, p. 480). On assiste à ce qui pourrait bien devenir un remaniement des connaissances antérieures à travers les systèmes de représentation. Les énoncés et la monstration de P lors de la recherche de la différence sur le schéma-ligne constitue alors un aménagement didactique adéquat pour l'action de Neil, le schéma-ligne donnant à voir concrètement l'écart entre deux grandeurs. La découverte par les élèves d'une nouvelle potentialité du schéma-ligne modifie le style de pensée (Fleck, 2005) sur l'arrière-plan duquel se constitue l'expérience mathématique. Ce style de pensée évolue, se transforme par des expériences successives, comme se transforme peu à peu la perception même des élèves.

Nous observons, de plus, que P, pour faire avancer le temps didactique, s'appuie sur les productions des élèves, production d'écritures additives, d'annonces à deux mains, de schéma-ligne qui elles-mêmes s'enracinent dans des expériences antérieures.

La dynamique mésogénétique engagée par le professeur avec l'introduction d'autres représentations du nombre montre une certaine expertise (Chevallard, 1991) des élèves dans le processus de traduction d'une même réalité, expertise qui amène les élèves à produire de manière justifiée l'écart entre les deux écritures additives en le montrant sur les schémas-lignes. Nous observons donc que la traduction des systèmes de représentation, ici de l'écriture additive au schéma-ligne en passant par la représentation avec les mains autorise les élèves à représenter une même réalité. Les potentialités intrinsèques de chaque système de représentation peuvent permettre aux élèves de mener diverses expériences liées au savoir en

jeu. Ici, le schéma-ligne donne à voir la mesure d'une grandeur, la longueur dont l'unité étalon est ici un intervalle, une quantité d'une unité (Schmittau, 2005).

Dans cette première phase de la séance, les élèves ont découvert la notion de différence à travers la comparaison de deux écritures additives à deux termes et certains systèmes de représentation. Nous nous focaliserons dans cette seconde section sur un extrait qui se déroule entre la quarante-cinquième et la cinquante-quatrième minute de cette première séance, lors du jeu d'apprentissage « Faire chercher des différences en comparant deux trains-nombres ».

2. La symbolisation de la différence

Cette deuxième section se centre sur un second extrait de la première séance au cours duquel l'écriture soustractive est présentée. Il introduit un nouveau système de représentation, le train-nombre, qui donne à voir le nombre en fonction de la longueur qu'il dénote (chaque nombre est représenté sous forme d'une bande rectangulaire dont la longueur est proportionnelle à la quantité qu'il désigne, l'unité étant un carré d'un cm). Les premières questions que nous nous posons sont les suivantes :

Comment l'usage de ce nouveau système de représentation interroge-t-il les autres systèmes de représentation ? Les connaissances antérieures des élèves autorisent-elles l'émergence d'un nouveau savoir, la modélisation par une écriture soustractive d'un écart entre deux nombres ? Comment apparaît cette nouvelle connaissance dans l'action conjointe ?

Nous présenterons tout d'abord l'extrait sélectionné dans son contexte. Puis, nous analyserons successivement les trois épisodes composant cet extrait. Pour terminer, nous proposerons une synthèse de cette analyse.

2.1. Contextualisation et présentation de l'extrait

L'extrait du synopsis ci-dessous (cf. annexe 38) décrit un découpage en trois phases du travail de comparaison entre deux trains-nombres proposé dans la dernière partie de cette première séance du module 7 sur la différence. Il donne à voir le contexte de l'extrait sélectionné.

Phases et durée	Temps	Description brève des contenus
Phase 1 Présentation	(0:27:20.3)	**En collectif** - Définition d'une différence par les élèves : ce que l'on met en plus ou en moins ; ce qui n'est pas pareil.

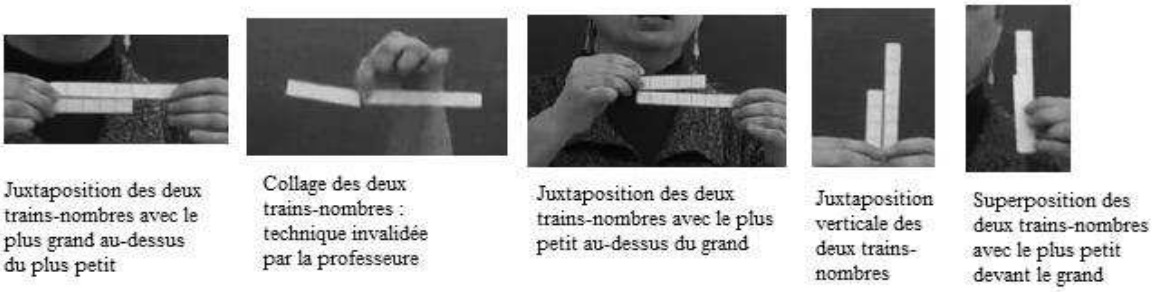
		- Présentation de la nouvelle situation : comparaison de deux nombres-trains. - Recensement par les élèves des moyens de comparaison de deux trains-nombres
Phase 2 Recherche de la différence entre deux trains-nombres	(0:33:07.2)	**Par binôme** Recherche des différences entre deux trains-nombres
Phase 3 Recensement des découvertes des élèves	(0:44:54.8)	**En collectif** - Binôme 1 : Production d'une différence de « 1 » avec des couples de train-nombres différents Comparaison effective par une élève d'un train- nombre de 6 et de 5. Tentative d'écriture au tableau par un élève de « 6 est 1 de plus que le 5 ». « 6 < 5 », correction par P « 6 > 5 » Élève écrit « 6 + 5 » Un second élève propose « 6 + 5 < 6 » Correction par P « 6 + 5 > 6 »
		P note les nombres 6 ; 5 ; 1 et trace une boîte au tableau en référence aux trains-nombres Un élève complète la boîte et note l'écriture additive « 5 + 1 = 6 » Recherche de la différence à partir de l'écriture additive : entourer le nombre désignant la différence dans la boîte et l'écriture additive Proposition d'une nouvelle écriture pour la soustraction : « 6 – 5 = 1 »
		- Retour à la proposition de trouver d'autres différences de 1 avec deux trains-nombres Recherche à partir des trains-nombres « 3 » et « 4 » : écriture de la différence par une soustraction sur proposition d'élève « 4 – 3 = 1 » P valide en passant par l'addition 4 = 3 + 1 Recherche de la différence entre « 2 » et « 1 » : écriture de « 1 – 2 = 1 » P propose d'écrire « 2 – 1 » car le « 1 » est dans le « 2 ».

Tableau 78: extrait du synopsis de la séance 1 du module 7 16-12-13, comparaison de deux trains-nombres (cf. Annexe 38)

Lors de la phase 1, la professeure rappelle que lors du travail précédent, les élèves ont recherché la différence entre deux écritures additives. Elle les interroge sur la définition de ce que peut être une différence. Deux élèves prennent alors la parole. Le premier énonce le fait que la différence est quelque chose que l'on met en plus ou en moins. Le second élève soumet l'idée au collectif que la différence est quelque chose qui n'est pas pareil. Il s'appuie sur l'exemple « 1 + 1 » et « 2 + 2 ». La différence entre ces deux écritures est de « 2 » puisque « 1 + 1 = 2 » et « 2 + 2 = 4 ». Puis, la professeure présente une enveloppe contenant dix trains-nombres représentant les nombres de 1 à 10 (cf. photogramme 75, ci-dessous) en les montrant un par un, tout d'abord le recto composé d'unités (quadrillage) puis le verso, sans unité (en blanc).

Photogramme 75 : Représentation des trains-nombres par P aux élèves

La professeure énonce la consigne suivante, « par deux, vous allez comparer les trains, et chercher quelles sont les différences ». Elle demande alors aux élèves de quelle manière peut-on comparer effectivement, concrètement un train-nombre de « 5 » et de « 8 ». Les élèves proposent différentes possibilités comme le montrent les cinq vignettes suivantes (cf. photogramme 76, ci-dessous)



Photogramme 76: différentes techniques de comparaison de deux trains-nombres proposées par les élèves

Pour terminer, elle demande aux équipes constituées de comparer deux trains-nombres et de rechercher la différence entre eux.

Lors de la phase 2, en binôme, les élèves comparent les trains-nombres distribués par P.

Au cours de la phase 3, la professeure organise une discussion collective autour des découvertes des élèves dont la première partie constituera nos données d'analyses.

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre « Méthodologie » (cf. Chapitre 4), nous avons justifié le choix de cet épisode par le fait qu'il montre comment les élèves appréhendent une nouvelle représentation, le train-nombre et réexpériencient l'usage des représentations dans une situation de recherche de différence entre deux écritures additives.

Pour plus de lisibilité, nous avons découpé cette première partie de la phase trois en trois épisodes distincts (cf. Tableau 79) :

	Extrait 7 : la symbolisation de la différence, séance 1 module 7
Episode 20	**Usage des trains-nombres et recherche de la différence** Discussion collective autour de la découverte d'un binôme. La comparaison de plusieurs trains-nombres amène à une différence de 1. Comparaison entre un train-nombre de 6 et de 5.
Episode	**Enquête sur la désignation de la différence par une écriture symbolique**

21	Recherche par les élèves d'une écriture symbolisant la différence de 1 entre 6 et 5 à partir de la proposition de P « six, c'est un de plus que cinq ». Les élèves proposent différentes écritures symboliques pour traduire l'énoncé de P.
Episode 22	**Le schéma-boîte et la différence** Introduction par P d'un schéma-boîte. A partir des nombres « 6 », « 5 » et « 1 » que P écrit au tableau, les élèves complètent le schéma-boîte. Traduction du schéma-boîte par l'écriture symbolique au tableau. Introduction de l'écriture soustractive par P.

Tableau 79 : découpage du second extrait de la séance 1, l'écriture soustractive

L'épisode 20 (usage des trains-nombres et recherche de la différence) relate la découverte d'Adèle et de Lili. Elles ont repéré que plusieurs comparaisons de deux trains-nombres peuvent donner à voir une différence de « un ». La professeure invite alors Adèle à montrer à la classe cette différence de « 1 » à partir de la comparaison d'un train-nombre de « 5 » et de « 6 ». Cette élève superpose ces deux trains-nombres, montre la différence et explique que le train-nombre de six a un wagon de plus que celui du cinq.

Dans l'épisode 21 (enquête sur la désignation par une écriture symbolique de la différence), la professeure invite Adèle à traduire l'expression « six, c'est un de plus que cinq » par une écriture symbolique. Elle attend l'addition « 6 = 5 + 1 ». Trois élèves se succèdent au tableau pour tenter de produire une écriture mathématique correcte mais sans succès.

Lors du vingt-deuxième épisode, la professeure propose de représenter dans le schéma-boîte les trois nombres qu'elle a écrit au tableau : « 5, 6 et 1 » (nombres désignant les deux trains-nombres et leur différence). Un premier élève, Nicolas, tente de compléter ce schéma, sans succès. Maxime prend la suite et place les nombres correctement. Il note alors l'écriture additive correspondante « 5 + 1 = 6 ». P demande au collectif où se trouve la différence dans l'écriture additive et dans le schéma-boîte. Bérénice vient entourer le nombre « 1 ». La professeure reprend la parole et note l'écriture « 6 = 5 + 1 » et demande au collectif si cette écriture raconte la même histoire que « 5 + 1 = 6 ». Pour conclure, elle introduit l'écriture soustractive qui vient désigner la différence entre « six » et « cinq ».

Dans les trois paragraphes suivants, nous nous centrons sur l'analyse de chacun de ces épisodes.

2.2. Episode 20, le train-nombre et recherche de la différence

Cet épisode 20 donne à voir comment la représentation sous forme de trains-nombres permet de visualiser concrètement la différence entre deux nombres.

Adèle et Lili partagent avec le collectif les découvertes qu'elles ont réalisées lors du travail en binôme sur la recherche de la différence à partir de la comparaison de deux trains-nombres. La transcription ci-dessus montre les transactions se déroulant pendant cet épisode.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:45:40.3)	10	Adèle	On a découvert qu'on pouvait faire un avec tous les trains un de plus ou un de moins, on pouvait faire ça avec tous les trains
(0:45:52.7)	11	P	Alors, j'essaie de traduire. Ecoutez ce que [P montre son oreille avec son index de la main droite puis montre Lili et Adèle] viennent de dire Lili et Adèle. Elles ont trouvé qu'on pouvait faire des différences de un avec plusieurs trains. C'est ça ?
(0:46:18.6)	12	Adèle	Oui
(0:46:19.0)	13	P	Alors par exemple, quels trains vous avez pris pour faire une différence de un ?
(0:46:24.9)	14	Adèle	Par exemple, quatre plus cinq
(0:46:32.8)	15	P	Alors est-ce que [P sort du cadre de la caméra et revient avec deux trains-nombres]
(0:46:33.4)	16	Adèle	Quatre et cinq et ben
(0:46:35.0)	17	P	Attends, cinq et cinq ?
(0:46:36.0)	18	Adèle	Non quatre, quatre et cinq
(0:46:40.9)	19	P	Entre le train de quatre [P montre le train de cinq au groupe classe]. Alors déjà, c'est pas un train de quatre, c'est un train de [P tend le train-nombre de cinq devant elle], c'est un train ? cinq [P montre le train-nombre de six] et un train, un, deux, trois, quatre, cinq, six [P compte le nombre d'unité sur le train-nombre de six]. Entre le train cinq et le train six [P montre les deux trains aux élèves] il y a une différence de ? (Cf. ci-dessous photogramme 77)
(0:46:55.7)	20	Adèle	Un
(0:46:56.2)	21	P	Viens me montrer [Adèle se déplace devant le tableau et se place devant P qui tient dans sa main les deux trains-nombres]
(0:47:01.4)	22	Adèle	Parce que ici [Adèle prend les deux trains-nombres des mains de P]
(0:47:03.5)	23	P	Tu montres, attends tu montres aux autres [P retourne Adèle pour qu'elle fasse face à la classe]
(0:47:05.6)	24	Adèle	Quand on met comme ça, il y en a encore un ici et celui-là il s'arrête ici [Adèle superpose le train-nombre de cinq au-dessus du train-nombre de six et montre avec son index où s'arrête le train-nombre de cinq par rapport à celui de six. Cf. ci-dessous photogramme 78].
(0:47:12.2)	25	P	Donc, qui est-ce qui en a le plus ?
(0:47:15.1)	26	Adèle	Et ben le six

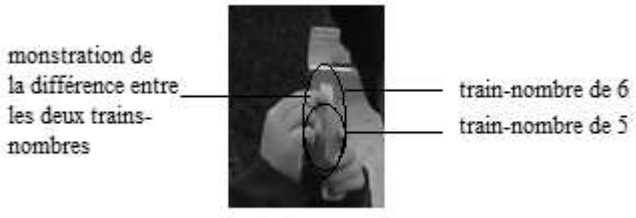
Transcription 56 : monstration de la différence par les trains-nombres

Adèle au tdp 10 fait part de sa découverte « On a découvert qu'on pouvait faire un avec tous les trains un de plus ou un de moins, on pouvait faire ça avec tous les trains ». La professeure reprend la parole et renvoie vers le collectif la proposition d'Adèle au tdp 11 « Alors, j'essaie de traduire. *(...) viennent de dire Lili et Adèle. Elles ont trouvé qu'on pouvait faire des* différences de un avec plusieurs trains. C'est ça ? ». Adèle répond par l'affirmative. La professeure lui demande de montrer un exemple de différence de « 1 » entre deux trains-nombres au tdp 13 « Alors par exemple, quels trains vous avez pris pour faire une différence

de un ? ». P prend les trains-nombres qu'Adèle lui tend (le train-nombre 5 et le train-nombre 6) qu'elle montre successivement à la classe (cf. photogramme 77, ci-dessous).

Photogramme 77 : P montre au groupe classe deux trains-nombres de 5 et de 6 (cf. 19)

Sur invitation de la professeure, Adèle se déplace au tableau pour montrer concrètement la différence entre ces deux trains-nombres (cf. photogramme ci-dessous). Elle s'exprime de la façon suivant au tdp 24 « Quand on met comme ça, il y en a encore un ici et celui-là il s'arrête ici [Adèle superpose le train-nombre de cinq au-dessus du train-nombre de six et montre avec son index où s'arrête le train-nombre de cinq par rapport à celui de six.



Photogramme 78: Monstration de la différence sur les trains-nombres (cf. tdp 24)

Adèle exprime donc la différence par le langage, en énonçant « il y a encore un ici et celui-là *s'arrête*-là » et en montrant concrètement cette différence avec son index. Ce geste montre réellement la relation conceptuelle ancrée dans le matériel (Hutchins, 2005). Le photogramme 78, ci-dessus, illustre comment la différence entre deux nombres est ici matériellement représentée grâce à la superposition de deux trains-nombres. Cette représentation matérielle/analogique autorise la comparaison directe du cardinal de deux collections et permet une mise en analogie de mesure entre ces deux nombres (ici, six (unités) c'est un de plus que cinq (unités) ou cinq (unités) c'est un de moins que six (unités)).

La comparaison de deux trains-nombres permet donc aux élèves de travailler sur le nombre et sur la mesure. En effet, ce système de représentation met en relation le nombre par les quantités d'unités qu'il désigne et la mesure de la longueur du segment (sa longueur étant proportionnelle aux nombres d'unités qu'il désigne). Il peut faire voir ici, donc, le nombre comme *mesure d'une grandeur*.

Nous remarquons aussi que la professeure part d'observations réalisées par les élèves, de leur expérience dans l'action à travers la manipulation des train-nombres et de leurs comparaisons.

Elle laisse les élèves s'exprimer par le langage et par des gestes. En effet, les élèves mènent l'enquête dans le milieu, la comparaison effective de deux trains-nombres. Ils s'appuient sur leurs connaissances antérieures notamment sur les capacités de désignation d'un écart entre deux écritures additives et sa traduction sur un schéma-ligne (cf. section 1 : analyse de l'extrait 6, découverte de la différence). De plus, la professeure laisse Adèle montrer effectivement la différence entre les trains-nombres de « 5 » et de « 6 » devant le collectif sans intervenir. Ainsi, P s'exprime en demandant à l'élève de montrer concrètement sa découverte mais en lui laissant la main dans la démonstration. La professeure accompagne la monstration d'Adèle par une question tdp 25 « Donc, qui est-ce qui en a le plus ? » qui vient soutenir le propos de l'élève et l'aider à verbaliser la différence de « 1 » entre les deux trains-nombres. Le contrat est ici un adjuvant du milieu, ce qui autorise une enquête effective de la part des élèves avec une assimilation du contrat par le milieu. La stratégie adoptée par la professeure semble être, dans un premier temps, de laisser les élèves faire l'expérience de la recherche de la différence. P s'appuie, dans un second temps, sur leurs productions en restant réticente sur le savoir en jeu (la différence) et par son expression, en les accompagnant par des questions dans leur découverte.

Mais comment cette différence entre deux trains-nombres peut-elle être codée par une écriture mathématique ?

2.3. Episode 21, enquête sur la désignation de la différence

2.3.1. Présentation de l'épisode

Le second épisode (épisode 22) de cet extrait introduit la recherche de l'écriture mathématique symbolisant cette différence de « 1 » entre les nombres « 5 » et « 6 » comme nous montre la transcription ci-dessous.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:47:16.4)	27	P	Le six a un wagon de plus que le cinq [P prend les deux trains-nombres des mains de Adèle et lui tend une craie]. Est-ce que tu pourrais m'écrire ça ? Que six c'est un de plus que le cinq, comment on pourrait écrire ça ? [Adèle se tourne vers le tableau et commence à écrire] (11") [Adèle écrit 6 < 5]. Alors lis ce que tu as écrit.
(0:47:44.6)	28	Adèle	Cinq est plus grand que six
(0:47:52.0)	29	P	C'est vrai, ça que cinq est plus grand que six ?
(0:47:53.0)	30	Els	Non, c'est pas vrai
(0:47:55.9)	31	P	C'est pas vrai. Mais moi ce que j'ai demandé, c'est vrai, alors c'est vrai

			que alors, on va [P efface 6 < 5 au tableau et prend la craie de la main *d'Adèle]* l'écrire dans le bon sens [P écrit en haut du tableau 6 > 5] six est plus grand que cinq. Là tu as comparé [P donne la craie à Adèle] mais je voudrais pouvoir lire sur le tableau que six c'est un de plus que cinq. Comment on pourrait écrire ça ? [Adèle écrit au tableau] (10"). Euh, pendant qu'Adèle est en train de réfléchir, vous réfléchissez aussi, j'crois ?
(0:48:29.5)	32	El	Oui
(0:48:30.8)	33	P	Briac est en train de réfléchir ? Alors là tu nous as écrit six plus cinq [Adèle a écrit au tableau 6 + 5], est ce que c'est ça qu'on est en train de faire ? [Adèle fait non de la tête]. Ah, ah, est-ce que quelqu'un est capable de m'écrire six c'est un de plus que cinq, est-ce qu'on sait écrire ça ou pas ?
(0:48:48.5)	34	Els	Non
(0:48:49.1)	35	P	On sait pas l'écrire ?
(0:48:50.0)	36	Els	Si, oui
(0:48:51.6)	37	P	Six c'est un de plus que cinq. Allez, Felix, viens au tableau. [Felix se déplace devant le tableau et écrit 6+5]

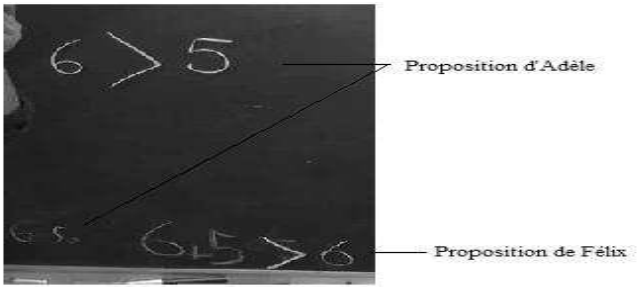
Transcription 57 : recherche de l'écriture symbolique pour désigner la différence (Annexe 40)

La professeure demande à Adèle au tdp 27 « Le six a un wagon de plus que le cinq [P prend les deux trains-nombres des mains de Adèle et lui tend une craie]. Est-ce que tu pourrais m'écrire ça ? Que six c'est un de plus que le cinq, comment on pourrait écrire ça ? ».

La professeure invite donc une élève à traduire en langage symbolique ce qui a été observé lors de la comparaison des trains-nombres de « 5 » et de « 6 ».

Après quelques secondes de réflexion, Adèle écrit au tableau « 6 < 5 » que P lui demande d'oraliser. Adèle dit alors au tdp 28 « ci*nq c'est plus grand que six* ». P renvoie la proposition de cette élève au collectif en lui demandant si elle est vraie au tdp 29 « *C'est vrai ça que cinq* est plus grand que six ? ». Les élèves répondent par la négation, P efface la production d'Adèle et écrit en haut du tableau « 6 > 5 ». La professeure relance la recherche des élèves au tdp 31 « mais je voudrais pouvoir lire sur le tableau que six c'est un de plus que cinq. Comment on pourrait écrire ça ? ». Adèle écrit alors au tableau « 6 + 5 ». P lui demande au tdp 33 « est-ce que c'est ça qu'on est en train de faire ? [Adèle fait non de la tête]. Quelques élèves de la classe répondent par la négative, d'autres par l'affirmative. La professeure invite Félix à venir au tableau écrire sa proposition « 6 + 5 < 6 » au tdp 37. P corrige alors le signe « < » par « > ».

Le Photogramme 79, ci-dessous, donne à voir comment est organisé au tableau les propositions des élèves sur l'écriture possible de « six, c'est un de plus que cinq ». Nous remarquons que P laisse au tableau les réponses des deux élèves à la question posée, erronées par rapport à la question posée, mais mathématiquement justes « 6 > 5 et 6 + 5 > 6 ».



Photogramme 79 : Propositions des deux élèves

2.3.2. Eléments d'analyse

Pour introduire la recherche de l'écriture symbolique de la différence, la professeure n'use pas du terme « différence » comme cela a été le cas lors du tdp 11 « *elles ont trouvé qu'on pouvait* faire des différences de un avec plusieurs trains » et au tdp 13 « quel train vous avez pris pour faire une différence de un ? ». Elle utilise ici l'expression « six c'est un de plus que le cinq ». Nous faisons l'hypothèse que l'intention de la professeure est que les élèves traduisent dans un premier temps la différence entre « six » et « cinq » en s'appuyant sur des connaissances déjà-là, c'est-à-dire l'écriture additive. En effet, dans « 6 = 5 + 1 », le nombre « 1 » désigne la différence entre « 6 » et « 5 ». L'écriture « 6 = 5 + 1 » donne ainsi à voir l'ajout d'une unité pour arriver au nombre supérieur. Puis, dans un second temps, l'intention de P semble être que les élèves mettent en relation cette écriture additive avec l'écriture soustractive. Il apparaît donc que la professeure veuille faire voir la soustraction à travers le principe inverse (Verschaffel, Bryant & Torbens, 2012) comme nous le confirme ces commentaires.

Les règles définitoires du jeu didactique mis en place par le professeur semblent donc ici évoluer. Ainsi, il s'agit, tout d'abord, de rechercher la différence entre deux trains-nombres. Puis, il faut traduire l'expression « six c'est un de plus que le cinq » par une écriture symbolique tout en gardant comme référent la comparaison effective de deux trains-nombres comme nous le montre le photogramme ci-dessous :

Photogramme 80 : mise en relation entre l'expression " six, c'est un de plus que cinq" et de la comparaison des schémas-nombres « cinq » et « six ».

Il semble que les productions des élèves au tableau (« 6 + 5 > 6 », « 5 > 6 ») relèvent du contrat didactique mis au jour dans les modules précédents, c'est-à-dire la production d'égalités ou d'inégalités pour comparer deux nombres. L'expression du professeur se situe ici donc principalement du côté du contrat puisque son énoncé oriente l'activité des élèves vers la production d'une addition. Elle reste réticente tout au long de cet épisode quant au milieu à connaître (l'écriture mathématique symbolisant la différence).

L'expression-réticence du professeur est donc ancrée dans le contrat. Il s'agit de ramener de l'inconnu au connu, c'est-à-dire de la désignation d'une différence par une écriture mathématique, à une écriture additive qui donne à voir cet écart entre deux nombres. En effet, l'expérience des élèves est ici un point d'arrêt dans la mémoire (Centeno, 1995) que le professeur doit pouvoir ensuite utiliser.

Cependant, lorsque les élèves écrivent le signe « inférieur » (« 6 < 5 » au tdp 27 et « 6 + 5 < 6 » au tdp 38) à la place du signe « supérieur », la professeure prend la main et efface les signes erronés et les remplace par le signe « supérieur ». La professeure semble interpréter cette erreur comme vénielle qui peut alors supporter une correction rapide.

De plus, nous remarquons que les élèves ne produisent que des écritures avec les nombres « 5 » et « 6 » sans y inclure le nombre « 1 » qui fait cependant partie de l'énoncé de la professeure.

La professeure laisse le temps aux élèves d'enquêter sur la question posée et de faire appel aux capacités construites précédemment. En effet, face au savoir en jeu, elle laisse le temps aux élèves de réfléchir et d'expérimenter certaines écritures sans orienter les productions. L'élève est donc ici central.

Cependant, l'enquête des élèves ne permet pas de répondre à la question posée par la professeure. Il y a ici un ralentissement du flux du temps didactique. Cet étirement est constitutif du temps de l'enquête. Il y a néanmoins ici un enrichissement du milieu symbolique (« 6+ 5 > 6 » et « 6 > 5 »).

Il est intéressant de noter ici que les élèves n'ont pas les moyens a priori de répondre à la question posée par P (la probabilité est très faible pour que les élèves proposent « spontanément » 6 – 1).

2.3.3. Stratégies contrefactuelles

Nous proposons ici d'autres possibles à l'action du professeur à partir de la modélisation de la pratique effective en termes de contrat/milieu et réticence/expression que nous avons effectuée ci-dessus.

Un premier contrefactuel :

La différence de « 1 » trouvée par le binôme Adèle et Lili entre les trains-nombres de « 6 » et de « 5 » est traduite par la professeure directement par une écriture soustractive. La position topogénétique du professeur est alors haute. Elle apporte directement le savoir nouveau sans que les élèves soient confrontés directement au problème sous-jacent à la question posée, sans qu'ils aient fait l'expérience de leur ignorance et sans qu'ils aient rencontré l'ignorance dans le milieu-problème (l'usage du signe « moins » pour signifier la différence) que le contrat seulement additif ne peut ici assimiler. Ce premier contrefactuel suppose un mouvement chronogénétique et mésogénétique amorcé par le professeur.

Un second contrefactuel :

Les élèves, individuellement ou par binôme, traduisent la différence entre les deux trains-nombres sur un schéma-ligne (rappel de la phase précédente de la séance avec la recherche de la différence entre deux écritures additives). A partir de cette représentation, la professeure invite les élèves à produire l'ensemble des écritures mathématiques que ce schéma-ligne donne à voir. P est alors expressive vis-à-vis du contrat en proposant l'usage d'un système de représentation connu des élèves pour poursuivre l'enquête mais réticente vis-à-vis de l'usage de cet instrument pour représenter la différence. Il y a réexpérienciation du schéma-ligne avec sa mise en correspondance avec les trains-nombres. Les élèves peuvent ainsi enquêter en première main en usant de leurs connaissances antérieures. La mise en commun permet de mettre au jour différentes écritures mathématiques.

Ce contrefactuel suppose un mouvement mésogénétique amorcé par le professeur (avec l'introduction du schéma-ligne) et complété par les productions des élèves et leurs découvertes.

La stratégie effective du professeur, quant à elle, ne met en relation que de manière secondaire la comparaison des trains-nombres avec l'écriture symbolique. Le passage par une représentation connue des élèves, le schéma-ligne peut permettre de relancer l'enquête des élèves à partir de leurs connaissances antérieures. Le professeur peut modifier ainsi le milieu pour qu'il soit plus proche des connaissances des élèves.

Un troisième contrefactuel :

P demande aux élèves de rechercher individuellement ou par binôme l'écriture mathématique correspondante à l'expression « 6, c'est un de plus que 5 » à partir des systèmes de représentation connus, le train-nombre, le schéma-ligne…. Cette stratégie amène à densification du milieu–problème avec un mouvement mésogénétique sous la responsabilité des élèves.

Le tableau (cf. Tableau 80) ci-dessous donne à voir une forme synthétique de l'ensemble des stratégies professorales.

Stratégie contrefactuelle 1 (CF1)	Stratégie effective du professeur	Stratégie contrefactuelle 2 (CF2)	Stratégie contrefactuelle 3 (CF3)
La professeure donne directement l'écriture soustractive correspondante à la différence entre les deux trains-nombres	Recherche par les élèves de l'écriture symbolique traduisant l'expression « six, c'est un de plus que cinq ».	Traduction de la différence entre deux nombres-trains sur un schéma-ligne. Recherche des écritures mathématiques correspondantes.	Traduction par les élèves de l'écriture symbolique traduisant l'expression « six, c'est un de plus que cinq ».
Renforcement du contrat Pas d'enquête dans le milieu	Enquête dans le milieu de l'écriture symbolique en appui sur les connaissances déjà-là.	Enquête dans le milieu symbolique et analogique/symbolique en appui sur le contrat comme connaissances déjà-là.	Enquête dans le milieu symbolique, analogique/symbolique, et matériel en appui sur le contrat comme connaissances déjà-là.
Topogénèse P >> Els	Topogénèse Els> P	Topogénèse Els > P	Topogénèse Els >> P
Mouvement chronogénétique : +++	Mouvement chronogénétique : +	Mouvement chronogénétique : ++	Mouvement chronogénétique : ++
Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique : ++	Mouvement mésogénétique : +++

Tableau 80 : synthèse des stratégies professorales

Nous étudierons maintenant le troisième épisode (épisode 7) de cet extrait (extrait 2), épisode au cours duquel la professeure propose un nouveau cadre à l'enquête sur la différence.

2.4. Episode 22, le schéma-boîte et la différence

Trois points structurent ce dernier épisode, l'introduction du schéma-boîte, son usage et sa mise en relation avec l'écriture soustractive.

2.4.1. Introduction du schéma-boîte

2.4.1.1. Présentation de l'épisode

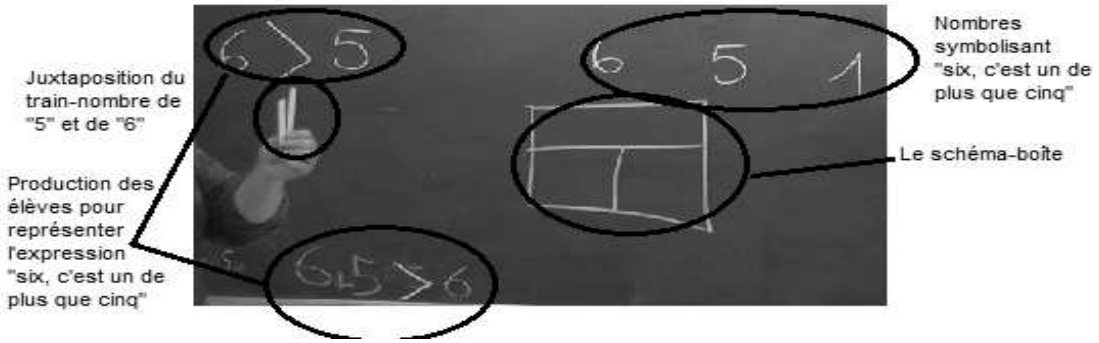
Devant les difficultés des élèves à répondre à la question posée au début de l'épisode précédent, « écrire six, c'est un de plus que cinq », la professeure propose aux élèves de réfléchir à partir du schéma-boîte comme nous le montre la Transcription 58, ci-dessous.

Temps	tdp	Actant	Contenu
(0:50:15.4)	43	P	Non est plus grand [P efface le signe < et le remplace par >]. Bon alors, c'est pas grave, on va réfléchir autrement [Félix retourne à sa place]. Dans l'histoire que je vous raconte on a six, on a cinq et on a un [P écrit au tableau les nombre 6, 5 et 1]. D'accord ? Est-ce que ces nombres-là, on pourrait [P dessine au tableau un schéma-boîte]. Oui, ça c'est le train, le train cinq, le train six [P montre respectivement le train-nombre de cinq et le train-nombre de six qu'elle tient dans sa main droite et gauche] et Adèle et Lili nous ont dit le train six [PE2 lève le train-nombre de six puis le superpose à celui de cinq] a un wagon de plus que le train cinq [P montre à la classe les deux trains-nombres superposés]. Est-ce qu'on pourrait me mettre ces nombres-là dans la boîte à compter [P place sa main gauche sur la boîte dessinée au tableau en tenant de sa main droite les deux trains-nombres superposés]
(0:50:48.7)	44	Els	Oui
(0:50:50.7)	45	P	Oui mais attention, il faut que ma boîte à compter elle fonctionne d'accord [P remue les deux trains-nombres]. Nicolas, on va voir [P tend à Nicolas une craie. Nicolas écrit dans les deux cases du bas de la boîte les nombres cinq et six puis s'arrête]. Alors, qu'est ce qui se passe Nicolas, pourquoi tu ne continues pas ? T'es embêté ? [Nicolas opine de la tête]. Pourquoi tu es embêté?

Transcription 58 : introduction du schéma-boîte (Annexe 40)

La professeure présente, au tdp 43, le problème de la façon suivante « Bon alors, c'est pas grave, on va réfléchir autrement. Dans l'histoire que je vous raconte on a six, on a cinq et on a un ». P écrit au tableau les nombre 6, 5 et 1. Puis, elle trace un schéma-boîte au tableau et montre successivement les trains-nombres de cinq et de six et les superpose en énonçant « Oui, ça c'est le train, le train cinq, le train six et Adèle et Lili nous ont dit le train six a un wagon de plus que le train cinq » au tdp 43

Le photogramme ci-dessous (cf. Photogramme 81) donne à voir les systèmes de représentation présents au début de cet épisode.



Photogramme 81: recherche d'une écriture mathématique à partir de représentation

Ce photogramme 81 montre l'organisation du tableau et l'ensemble des systèmes de représentation présent :

- les écritures mathématiques « 6 > 5 » et « 6 + 5 > 5 », résultats de l'enquête effectuée par les élèves lors de l'épisode précédent (écritures mathématiquement correctes, mais ne répondant pas à la question « six, c'est un de plus que cinq ») ;

- les valeurs numériques « 6 ; 5 ; 1 » notées par la professeure, présent dans l'expression « six, c'est un de plus que cinq »

- le schéma-boîte.

Il apparaît que la professeure tente de faire une analogie entre la narration « s*ix, c'est un de* plus que cinq » et l'écriture mathématique qui en découle en écrivant les trois nombres « 6 ; 5 ; 1 » au tableau. Il nous semble que le fait de dénommer le problème mathématique rencontré comme une « histoire » pourrait montrer l'intention de la professeure de mettre en lien les mots avec les signes mathématiques. En effet, P note les nombres dans l'ordre d'apparition dans l'énoncé « 6 » puis laisse un espace qui pourrait être complété par un signe mathématique « = » qui traduirait le mot « c'est ». Puis, elle écrit le nombre « 5 » et « 1 » en laissant de la même façon un espace qui pourrait être, quant à lui, être complété par le signe mathématique « + » traduisant le terme « de plus ».

Dans un second temps, elle renvoie les nombres « 6, 5 et 1 » à leur représentation initiale, en montrant de nouveau aux élèves les trains-nombres « 5 » et « 6 » et en les juxtaposant. Elle les met ensuite en relation avec le schéma-boîte, toujours au tdp 43 « Est-ce qu'on pourrait me mettre ces nombres-là dans la boîte à compter [P place sa main gauche sur la boîte dessinée au tableau en tenant de sa main droite les deux trains-nombres superposés] ».

2.4.1.2. Eléments d'analyse

Nous observons que la professeure tente de réguler le jeu didactique en orientant l'action des élèves vers une représentation connue, le schéma-boîte[111] pour les aider à représenter mathématiquement l'expression « six, c'est un de plus que cinq ».

Le milieu de recherche, tel qu'il structure le problème posé aux élèves (comment exprimer la différence entre « 6 » et « 5 » à partir de l'expression « six, c'est un de plus que cinq ») est donc composé de trois systèmes de représentation différents.

Les représentations symboliques :

- les écritures mathématiques produites précédemment par les élèves et invalidées par la professeure (« 6 > 5 » et « 6 + 5 > 5 »). Ces écritures découlent des capacités construites précédemment. Les élèves ont comparé des écritures additives à deux termes et utiliser les signes mathématiques « =, ≠, >, < » pour désigner des égalités ou des inégalités entre deux nombres ;

- les nombres désignant les valeurs numériques du problème posé que la professeure inscrit au tableau.

Les représentations analogiques :

- une représentation analogique/symbolique : le schéma-boîte qui donne à voir la réunion de deux nombres. Son usage est connu des élèves. Ils l'utilisent pour modéliser une situation additive comme comparer une écriture additive à deux termes et un nombre ou pour vérifier, prouver le résultat de cette comparaison. Ainsi, lors des modules précédents, les élèves ont construit des capacités de traduction d'une écriture additive (nombres inférieurs ou égaux à 10) par un schéma-boîte ;

- une représentation matérielle/symbolique. En effet, les deux trains-nombres de « 6 » et de « 5 » sont montrés par la professeure et superposés (puis juxtaposés) pour donner à voir aux élèves l'écart, la différence entre les deux.

Comme nous l'avons analysé dans l'épisode précédent, ce système de représentation donne à voir de manière concrète l'écart entre deux nombres par la différence de longueur des deux bandes de papier.

---

[111] Dans nos analyses précédentes, nous n'avons pas fait référence à cette représentation du nombre. Cependant elle apparaît dans les textes curriculaires à partir du module 2. Des extraits du Journal du Nombre des élèves de P donnent à voir son usage.

Ce milieu-problème est construit conjointement entre la professeure et les élèves. Il comprend, d'une part, les productions des élèves avec les écritures mathématiques inadéquates mais mathématiquement correctes et la représentation effective de l'écart « 1 » entre les trains-nombres « 5 » et « 6 ». D'autre part, ce milieu intègre les valeurs juxtaposées émanant de l'expression « six, c'est un de plus que cinq » et le schéma-boîte, tous deux introduits par la professeure.

A partir donc de ce milieu symbolique de recherche, les élèves sont invités à rechercher une réponse à la question posée par la professeure « Est-ce qu'on pourrait me mettre ces nombres-là dans la boîte à compter » au tdp 43. Elle insiste sur le fait qu'il faut que « ma boîte à compter elle fonctionne » au tdp 25. Ce milieu plonge ses racines dans des systèmes de représentation déjà familiers des élèves.

P est donc ici expressive vis-à-vis du contrat en proposant des représentations connues des élèves mais reste réticente vis-à-vis du milieu puisqu'elle ne donne pas d'information quant à la manière de remplir le schéma-boîte et produire une écriture mathématique traduisant l'expression « six, c'est un de plus que cinq ».

Nous avons dans cet épisode typiquement un *travail d'orientation* du professeur. Ce travail consiste à modifier la construction du problème, en appui sur un nouveau système de représentation, ici le schéma-boîte. Nous voyons donc le rôle de ces systèmes, dans « le jeu du professeur sur le jeu de l'élève », pour « redéfinir » la problématisation.

2.4.2. Le schéma-boîte

Pour répondre à la question de la représentation mathématique « six, c'est un de plus que cinq », la professeure introduit le schéma-boîte et demande aux élèves de le compléter avec les nombres « 6 ; 5 ; 1 » présents au tableau.

2.4.2.1. Présentation de l'épisode

La transcription ci-dessous donne à voir les transactions lors de la recherche de la représentation des nombres « 6 ; 5 ; 1 » dans le schéma-boîte.

Temps	tdp	actant	Contenu
(0:50:50.7)	45	P	Oui mais attention, il faut que ma boîte à compter elle fonctionne d'accord [P remue les deux trains-nombres]. Nicolas, on va voir [P tend à Nicolas une craie. Nicolas écrit dans les deux cases du bas de la boîte les nombres cinq et six puis s'arrête]. Alors, qu'est ce qui se passe Nicolas, pourquoi tu ne continues pas ? T'es embêté ? [Nicolas opine de la tête]. Pourquoi tu es embêté ?

(0:51:27.8)	46	El	Parce qu'il [inaudible]
(0:51:31.7)	47	P	Quel nombre, il te reste à écrire ?
(0:51:33.4)	48	El	Le un
(0:51:33.7)	49	P	Un et pourquoi tu es embêté pour l'écrire ?
(0:51:38.2)	50	Adèle	Parce qu'il n'y a pas une autre case à côté
(0:51:42.0)	51	P	Mais moi j'ai donné trois nombres, j'ai trois nombres et trois cases. Alors, est-ce qu'on pourrait mettre le un en haut ? [Nicolas écrit le nombre « 1 » dans la case supérieure de la boîte]
(0:51:49.2)	52	Els	Non
(0:51:50.4)	53	P	Pourquoi on peut pas le mettre là-haut, euh, Maxime ?
(0:51:53.8)	54	Maxime	Parce que le cinq et le un ça fait six et si on met le six en haut ça fait, ça fait six.
(0:52:03.0)	55	P	Allez roule [Maxime se déplace au tableau et efface les nombres inscrits dans la boîte par Nicolas]. Vas t'asseoir Nicolas, et c'est bien tu as bien commencé à réfléchir et tu as bien vu qu'il y avait quelque chose qui ne fonctionnait pas. (6") [Maxime complète la boîte et écrit dans les cases inférieures 1, 5 et dans la case supérieure 6, cf. photogramme 82]. Et est-ce que tu m'as dit que le cinq et le un ça fait six ?
(0:52:23.9)	56	Maxime	Oui parce que

Transcription 59: représentation du schéma-boîte (Annexe 40)

Un premier élève, Nicolas, se présente au tableau, écrit dans les deux cases inférieures du schéma-boîte les nombres « 5 » et « 6 » et s'arrête. P lui demande alors au tdp 45 « Alors, qu'est ce qui se passe Nicolas, pourquoi tu ne continues pas ? T'es embêté ? ». Nicolas confirme et P continue à l'interroger « Pourquoi tu es embêté ? ». Elle lui rappelle qu'il y a trois nombres et trois cases au tdp 51 « Alors, est-ce qu'on pourrait mettre le un en haut ? ». Nicolas écrit alors le nombre « 1 » dans la case supérieure du schéma-boîte alors que P est toujours en train de parler. Cet élève sait que le schéma-boîte avec le nombre « 5 » et « 6 » dans les deux cases inférieures n'est pas juste. Cependant, il complète le schéma-boîte en reportant « 1 » dans la case du haut après que la professeure lui pose la question suivant au tdp 51 « Alors, est-ce qu'on pourrait mettre le « 1 » en haut ? ». La professeure le renvoie à sa place, cf. tdp 55 « Vas t'asseoir Nicolas, et c'est bien tu as bien commencé à réfléchir et tu as bien vu qu'il y avait quelque chose qui ne fonctionnait pas ».

Un second élève, Maxime, prend la parole et explicite sa stratégie au tdp 55 « Parce que le cinq et le un ça fait six et si on met le six en haut ça fait, ça fait six ». Il se déplace au tableau et complète la boîte de manière correcte (cf. photogramme 82, ci-dessous).

Photogramme 82: le schéma-boîte complété par Maxime, cf. tdp 55

2.4.2.2. Eléments d'analyse

Le comportement du premier élève, Nicolas, lorsqu'il inscrit le nombre « 1 » dans la case supérieure du schéma-boîte, apparaît être lié au fait qu'il complète le schéma-boîte comme dans le contrat précédent, le contrat d'addition où le résultat se situe dans la case supérieure de celui-ci. Cependant, il se rend compte rapidement qu'il y a ici un problème. La rémanence de l'ancien contrat l'empêche de voir le schéma-boîte comme la modélisation d'une opération soustractive ou d'une addition à trou où le résultat se trouve dans une des deux cases inférieures.

La position topogénétique de la professeure est ici plutôt haute dans la mesure où elle fait directement remarquer son erreur à Nicolas « et tu as bien vu qu'il y avait quelque chose qui ne fonctionnait pas » au tdp 55 tout en l'encourageant, le félicitant d'avoir remarqué que ce schéma-boîte ne fonctionnait pas en l'état. De plus, P laisse réfléchir, enquêter les élèves en ne donnant pas directement la réponse attendue. Elle reste réticente vis-à-vis du milieu puisqu'elle ne s'exprime pas sur la représentation de la différence entre « 6 » et « 5 » dans le schéma-boîte.

L'action du second élève, Maxime place les trois nombres proposés correctement dans le schéma-boîte. Les connaissances construites précédemment sur l'usage du schéma-boîte peuvent être un moyen de compréhension dans la nouvelle situation proposée. Cet exemple montre bien ici qu'un état du contrat didactique produit des propensions, des tendances mais que ces éléments ne sont pas identiques pour tous les élèves et qu'ils peuvent être modifiés dans les transactions.

2.4.3. Schéma-boîte et écriture soustractive

2.4.3.1. Présentation

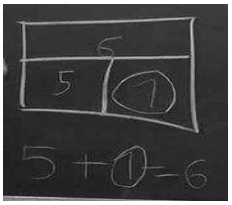
A partir de cette boîte, la professeure invite Maxime à traduire ce schéma-boîte en écriture symbolique (cf. Transcription 60, ci-dessous).

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:52:25.9)	57	P	Ben écris moi ça que cinq et un ça fait six, comment tu écris ça toi. [Maxime écrit au tableau en dessous de la boîte 5+1 = 6]. Ok. Alors, tout à l'heure je vous disais [P prend la craie de la main de Maxime], Vas t'asseoir maintenant [P s'adressant à Maxime.]. Maintenant que Maxime nous a trouvé ça [P montre l'écriture additive écrite au tableau 5 + 1 =6], vous êtes d'accord avec Maxime, cinq plus un égal ça fait six ?
(0:52:48.9)	58	Els	Oui
(0:52:49.9)	59	P	Elle est où la différence ici entre cinq et six ? Où est-elle, est-ce que la

			différence elle est écrite quelque part entre le cinq et le six, c'est quoi la différence, aidez-moi, merci beaucoup. Bérénice, c'est quoi la différence entre le cinq et le six que vient de nous dire Adèle [P montre les deux trains-nombres superposés dans sa main gauche]
(0:53:06.3)	60	Bérénice	C'est un
(0:53:06.4)	61	P	C'est un, est-ce qu'on la voit la différence, est-ce que Maxime l'a écrite quelque part ?
(0:53:09.9)	62	Bérénice	Oui
(0:53:10.0)	63	P	Il a écrit où ? Viens vite l'entourer [P tend la craie à Bérénice. Bérénice entoure le nombre 1 dans l'addition 5+1 = 6]. Entoure dans la boîte aussi [Bérénice entoure le nombre 1 dans la boîte]. Donc, Maxime a bien réussi à écrire [P prend la craie de la main de Bérénice qui retourne à sa place, cf. photogramme 83] ce que je demandais tout à l'heure sauf que tout à l'heure, moi je disais ça, six c'est un de plus que cinq [P écrit au tableau 6 = 5 + 1]. Six c'est cinq plus un. Est-ce que ça raconte la même histoire [P montre avec son index l'écriture 5 + 1 = 6] cinq plus un égale six et six égale cinq plus un ? [P montre l'écriture 6 = 5 + 1]
(0:53:42.8)	64	Els	Oui
(0:53:44.3)	65	P	Alors attention, maintenant [P entoure le un dans l'écriture 6 = 5 + 1] je vais vous écrire quelque chose. Tout le monde est bien assis, je vais écrire une nouvelle écriture mathématique pour trouver la différence, ça s'appelle une soustraction. Je vais écrire six moins cinq égal un [P écrit en haut du tableau 6 - 5 =1]. La différence entre six et cinq c'est un [P montre à la suite le nombre 6 ; 5 et 1]
(0:54:16.8)	66	El	Le moins, il remplace le plus
(0:54:20.2)	67	PE2	Ah ouais le moins remplace le plus mais est-ce qu'il fait le même travail ? Pas tout à fait, hein ? Parce que là c'est pour parler de la différence [P montre le nombre un entouré dans l'écriture 5 + 1 = 6, dans la boîte et dans *l'écriture 6* = 5+ 1], on a trouvé que la différence entre six et cinq est un [P montre respectivement le nombre 6 ; 5 et 1 dans l'écriture 6 - 5 = 1. Cf. photogramme 84], six moins cinq égal un.

Transcription 60 : introduction de l'écriture soustractive (Annexe 40)

Après que Maxime a complété correctement le schéma-boîte, la professeure pose la question suivante au tdp 55 « Et qu'est-ce que tu m'as dit que le cinq et le un ça fait six ? » et reprend au tdp 57 « ben écris-moi ça que cinq et un ça fait six, comment tu écris ça toi ?». Maxime produit alors l'écriture « 5 + 1 = 6 (cf. photogramme 83) » au tableau. Puis, elle questionne les élèves au tdp 59 « elle est où la différence ici entre cinq et six ? Où est-elle, est-ce que la différence elle est écrite quelque part entre le cinq et le six, c'est quoi la différence ». Pour cela, P montre les trains-nombres de 5 et de 6 superposés. Une élève, Bérénice énonce que la différence est de « 1 » et vient au tableau l'entourer dans l'écriture additive et dans le schéma-boîte au tdp 63.

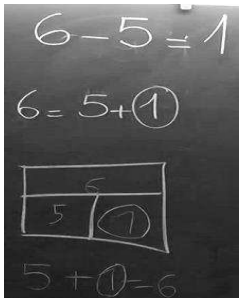


Photogramme 83 : la différence (cf. tdp 63)

Ensuite, P renvoie à la classe la question initialement posée c'est-à-dire représenter « *six, c'est* un de plus que cinq » au tdp 63 et écrit au tableau « 6 = 5 + 1 ». Elle reprend « Est-ce que ça raconte la même histoire [P montre avec son index l'écriture 5 + 1 =6] cinq plus un égal six et six égal cinq plus un ? [P montre l'écriture 6 = 5 + 1] ».

Elle questionne les élèves sur la correspondance entre les deux écritures additives écrites au tableau « 5 + 1 = 6 », « 6 = 5 + 1 ». Puis, P introduit l'écriture soustractive qui montre la différence entre « 6 » et « 5 », au tdp 65 « je vais vous écrire quelque chose. Tout le monde est bien assis, je vais écrire une nouvelle écriture mathématique pour trouver la différence, ça s'appelle une soustraction ». Elle écrit « 6 - 5 = 1 »

Pour conclure, elle énonce au tdp 67 « Parce que là c'est pour parler de la différence [P montre le nombre un entouré dans l'écriture 5 + 1 = 6, dans la boîte et dans l'écriture 6 = 5 + 1], on a trouvé que la différence entre six et cinq est un [P montre respectivement le nombre 6, 5 et 1 dans l'écriture 6 - 5 = 1], six mois cinq égal un ». La professeure fait correspondre les différentes représentations présentes au tableau de la différence à travers l'écriture additive, soustractive et la représentation de la boîte.



Photogramme 84 : Ecritures mathématiques en référence au schéma-boite

2.4.3.2. Eléments d'analyse

Dans un premier temps, la professeure oriente par son questionnement, l'action de Maxime vers la traduction par une écriture mathématique du schéma-boîte. Au tdp 55 « qu'est-ce que tu m'as dit que le cinq et le un ça fait six ? » et au tdp 57 « ça que cinq et un ça fait six, comment tu écris ça toi ? », P traduit elle-même oralement ce que donne à voir le schéma-boîte du point de vue additif tout en restant réticente vis-à-vis de l'écriture soustractive ou l'addition à trou qui en découle. Maxime, sous la responsabilité de P produit alors l'écriture attendue « 5 + 1 = 6 » au tableau. La professeure est donc expressive ici vis-à-vis du contrat didactique, c'est-à-dire sur les capacités de traduction par une écriture additive d'un schéma-boîte mais laisse néanmoins Maxime produire l'écriture attendue. Elle provoque ainsi une

avancée du temps didactique qui amène à une réflexion sur l'objet de savoir de cette séance, c'est-à-dire la différence. Puis, P recentre l'attention des élèves sur la recherche de la différence en posant la question au tdp 59 « Elle est où la différence ici entre cinq et six ? Où est-elle, est-ce que la différence elle est écrite quelque part entre le cinq et le six, c'est quoi la différence ? ». La recherche du nombre désignant la différence dans l'écriture additive « 5 + 1 = 6 » est induite par la question posée par P « écrite quelque part entre le cinq et le six ». L'expression de P vis-à-vis du milieu est importante puisqu'elle oriente significativement l'action des élèves, entourer le nombre désignant la différence.

Elle accompagne ces questions en montrant les deux trains nombres « 5 » et « 6 ». Cette monstration semble avoir comme objectif de redonner aux élèves une référence concrète à la notion de différence. La différence entre deux trains-nombres doit être traduite par un nombre exprimé sous forme symbolique. De plus, dans sa question, la professeure n'exprime pas directement la valeur de la différence mais la montre. Le nombre dénote l'écart entre les deux trains-nombres. Il renvoie ici à une représentation concrète de la différence. Il semble ici que l'intention professorale soit de faire observer aux élèves que le nombre « 1 » dans les trois écritures mathématiques dénote la même réalité, la différence entre les nombres « 6 » et « 5 » matérialisée par l'écart de « 1 » existant entre les deux trains-nombres.

Bérénice entoure le nombre désignant la différence entre « 6 » et « 5 » dans l'écriture additive et dans le schéma-boîte. Ensuite, la professeure au tdp 63 revient sur la question initialement posée « tout à l'heure, moi je disais ça, six c'est un de plus que cinq » et note l'écriture additive correspondante au tableau « 6 = 5 + 1 ». P est ici très expressive car elle donne directement la solution à la question de départ sans laisser les élèves investiguer le milieu déjà constitué par le schéma-boîte et l'écriture « 5 + 1 = 6 ». De plus, la professeure pose simplement une question aux élèves quant à la signification des deux écritures additives « 5 + 1 = 6 et 6 = 5 + 1 » désignant la même chose. Les élèves répondent alors par l'affirmative et P entoure les deux écritures pour marquer leur équivalence. Il semble ici que P s'appuie sur les connaissances déjà-là des élèves, la désignation d'un nombre par une écriture additive à deux nombres et sur la signification du signe « = » non pas comme le signe d'un résultat mais comme une équivalence. Son expression est donc importante vis-à-vis du contrat, expression qui permet de retravailler le contrat, le connu pour le remettre en mémoire, pour être de nouveau attentif à l'essentiel (vers la production de l'écriture soustractive). Pour terminer, la professeure introduit l'écriture soustractive désignant la différence de « 1 » entre « 6 » et « 5 » au tdp 65 « je vais écrire une nouvelle écriture mathématique pour trouver la différence, ça

s'appelle une soustraction. Je vais écrire six moins cinq égal un [PE2 écrit en haut du tableau 6 - 5 =1]. La différence entre six et cinq c'est un [PE2 montre à la suite le nombre 6, 5 et 1] ».

P donne ici aux élèves un savoir à « imiter » (Sensevy, 2016), l'écriture mathématique soustractive qu'ils devront s'approprier dans l'action. Le signe « - » vient coder la différence entre deux nombres, différence entre deux nombres représentés par des trains-nombres, par un schéma-boîte et par une écriture additive. Ainsi, après avoir enquêté sur la différence, les élèves peuvent maintenant mathématiquement la coder grâce au modèle mathématique présenté par la professeure.

Le schéma-boîte autorise donc la représentation de la différence et l'introduction de la soustraction puisqu'il donne à voir par analogie la réunion de deux nombres et donc toutes les opérations qui en découlent, à travers la notion de principe inverse (Verschaffel, Bryant & Torbeyns, 2012). Il est intéressant de relever que dans la fiche de préparation de cette séance (Annexe, p. 41), l'usage du schéma-boîte pour introduire la soustraction n'était pas envisagé, la symbolisation de la différence devait se faire en référence à la comparaison de deux nombres sur le schéma-ligne. Les commentaires de la professeure sur cette séance montrent que son objectif de départ était de présenter les différentes comparaisons de trains-nombres avec un écart de « 1 » trouvées par le binôme, Adèle et Lili. Puis, elle s'est aperçue du potentiel de l'expression « six c'est un de plus que cinq » pour amener les élèves vers l'écriture mathématique.

2.4.3.3. Stratégies contrefactuelles

Nous produirons ici d'autres stratégies possibles du jeu du professeur sur celui de l'élève en proposant des modifications de la grammaire professorale. Ces contrefactuels donnent à voir comment le professeur peut faire vivre le double mouvement contrat/milieu et réticence/expression de manière différente, dans une autre pratique didactique.

Un premier contrefactuel possible.

A partir du schéma-ligne, la professeure demande aux élèves de rechercher par binôme ou individuellement l'écriture mathématique correspondante à l'expression « six, c'est un de plus que cinq ». Puis, elle choisit les productions qui lui semblent les plus significatives et invitent les élèves concernés à exposer leur stratégie. Ce contrefactuel peut mettre en évidence les difficultés de certains élèves face à la notion d'équivalence et à la compréhension de

l'expression « de plus ». Le professeur s'appuie donc ici sur des connaissances récentes des élèves (la représentation de la différence sur le schéma-ligne) mais en laissant les élèves investiguer le milieu et mettre en relation les éléments entre eux. La dynamique mésogénétique est ici du côté des élèves. Le temps didactique avance par l'action des élèves du fait de leur position topogénétique haute face au savoir en jeu.

Un second contrefactuel

P introduit non pas un schéma-boîte mais un schéma-ligne sur lequel les élèves cherchent à représenter les trois nombres « 6 » ; « 5 » et « 1 » écrits au tableau. Cette recherche permet une réexpérienciation par les élèves de la situation du début de séance, la recherche de la différence entre deux nombres sur deux schémas-ligne. Les élèves à partir de cette représentation notent les écritures mathématiques que cette représentation donne à voir. La modification du milieu apportée par le professeur serait alors plus proche des connaissances des élèves.

2.4.4. Conclusion de l'analyse de l'épisode

Comme pour l'analyse de l'épisode précédent, nous revenons sur la première modélisation de la séance en jeux d'apprentissage que nous avons élaborée en ce début de chapitre.

Phases	Jeu d'apprentissage
Production d'une écriture additive à deux termes	JA1 : Faire produire une écriture additive à deux termes
Comparaison de deux écritures additives à deux termes	JA2 : Faire représenter la différence entre deux écritures additives à deux termes sur un schéma-ligne.
Comparaison de deux trains-nombres (≤10)	JA3 : Faire chercher des différences en comparant deux trains-nombres.
Comparaison de deux trains-nombres et sa traduction par l'écriture symbolique	JA4 : Faire traduire la différence entre deux trains-nombres par une écriture mathématique

Tableau 81: modélisation de l'épisode sous forme de jeux d'apprentissage

Dans cette section, nous avons exploré le jeu d'apprentissage JA 4 « Faire traduire la différence entre deux trains-nombres par une écriture mathématique ». Après l'étude de la pratique effective, nous affinons notre caractérisation en termes de jeux d'apprentissage.

JA (4)1	JA(4)2	JA(4)3	JA (4)4
Faire chercher la différence entre deux trains-nombres	Faire enquêter les élèves sur l'expression « six, c'est un de plus que cinq »	Faire enquêter les élèves sur l'expression « six, c'est un de plus que cinq » à partir du schéma-boîte.	Faire coder la différence par une écriture soustractive
Enquête dans le milieu. Le contrat est un adjuvant du milieu	Enquête dans le milieu (représentation train-nombre et écriture symbolique)	Enquête dans le milieu (schéma-boîte, écriture symbolique)	Milieu adjuvant du contrat
Topogénèse P<< Els	Topogénèse P> Els	Topogénèse : P < Els	Topogénèse P>> Els
Mouvement chronogénétique +	Mouvement chronogénétique Stable	Mouvement chronogénétique : ++	Mouvement chronogénétique : +
Mouvement mésogénétique : +	Mouvement mésogénétique : + +	Mouvement mésogénétique : ++	Mouvement mésogénétique : +

Tableau 82 : découpage en jeux d'apprentissage

Lors du JA(4)1, les élèves recherchent la différence entre deux trains-nombres. Cette recherche s'appuie sur un déjà-là, sur la notion de différence, d'écart entre deux écritures additives abordée au début de cette séance. Ce déjà-là récent constitue un appui pour l'enquête, la production des élèves aboutissant à l'énoncé par la professeure « six, c'est un de plus que cinq ».

Lors du JA(4)2, les élèves enquêtent sur l'expression « six, c'est un de plus que cinq », expression issue du JA précédent. Pour cela, ils s'appuient sur des connaissances antérieures qui sont la représentation par une écriture additive des nombres. Le milieu est ici progressivement enrichi par des écritures symboliques mais qui sont inadéquates, en ce qu'elles ne traduisent pas l'expression ci-dessus.

Le troisième JA(4)3 introduit dans le milieu une nouvelle représentation, le schéma-boîte dont l'usage est connu des élèves dans des situations additives. Les élèves s'appuient donc sur leurs connaissances antérieures pour compléter le schéma-boîte à partir des nombres proposés dans l'expression « six, c'est un de plus que cinq ». L'instrument boîte est contractualisé dans la représentation de l'addition. Il faut maintenant en faire usage pour représenter une soustraction (problème posé dans le milieu/au milieu, à l'instrument boîte). Tout se passe comme si l'élève savait faire une chose particulière avec un instrument (contrat), mais pas une autre chose avec le même instrument (celui-ci est alors le lieu du milieu-problème). Pour cela,

il doit établir de nouvelles relations entre des éléments (formes symboliques) qu'il connait déjà.

Au cours du quatrième JA(4)4, le milieu est enrichi par l'introduction par la professeure de l'écriture soustractive venant modéliser la différence entre deux nombres.

L'enchaînement des jeux d'apprentissage montre une continuité puisque dans un premier temps, la notion de différence (JA(4)1) est travaillée à partir d'une représentation nouvelle (le train-nombre). Dans un second temps, la découverte réalisée par les élèves « six, c'est un de plus que cinq » est investiguée par les élèves (JA(4)2) en s'appuyant sur les connaissances déjà-là. Dans un troisième temps, devant les difficultés des élèves émanant du JA précédent, P introduit le schéma-boîte connu des élèves JA(4)3. Le dernier JA4(4) voit l'introduction de l'écriture soustractive par la professeure qui s'appuie sur les écritures symboliques et le schéma-boîte précédemment investis par les élèves.

La question issue du JA(4)2 émane du premier JA (représentation symbolique de la différence), celle du JA(4)3 du second (recherche de l'écriture symbolique à partir du schéma-boîte).

La professeure, pour amener l'écriture soustractive, s'appuie sur l'écriture additive et sur le schéma-boîte. Ainsi, P met étroitement en relation l'addition (connue des élèves) et l'écriture soustraction, en mettant en évidence le principe inverse (Verschaffel, Bryant & Torbeyns, 2012). En effet, le schéma-boîte donne à voir les problèmes du type « partie-partie-tout » et donc ici le fait que deux mesures se composent en une seule (Vergnaud, 1981)

Ma (2010) insiste ainsi sur l'importance du principe inverse :

> *« the concept of inverse operations is one of the main principles that underlie the relationships among the operations of mathematics » (Ma, 2010, p. 23).*

Ma (Ibid.) ajoute que l'usage de l'opération inverse est lié à la compréhension par le professeur de ce concept et qu'il permet aux élèves de penser à l'addition lorqu'ils font des soustractions. Dans cette perspective, nous remarquons que le signe d'égalité est utilisé ici comme un signe d'équivalence puisqu'il n'est pas utilisé simplement comme un signe désignant un résultat (« 6 = 5 + 1 » désigne le même nombre que « 5 + 1 = 6 »).

L'usage de l'instrument schéma-boîte pour introduire l'écriture soustractive tend ainsi à montrer que la professeure possède une bonne connaissance des potentialités de celui-ci pour l'action conjointe et de ce qu'il peut apporter aux élèves en termes de compréhension de la soustraction en lien avec l'addition. C'est parce que ce schéma-boîte est dans le contrat, dans

l'arrière-plan partagé, qu'on va pouvoir aller plus loin dans son usage, qu'on va augmenter son usage, en la rendant susceptible de solutionner des problèmes différents de ce ceux pour lesquels on les a d'abord utilisés.

En effet, cette possibilité de s'appuyer sur le schéma-boîte et donc de mettre en relation dans l'écriture additive et soustractive n'apparaît pas dans le texte curriculaire du module 7, ni dans la fiche de préparation du professeur (annexe 41). Le schéma-boîte vient à la fin de l'épisode occuper une position de force face aux autres représentations, l'écriture mathématique et les trains-nombres sous l'action de P. Il traduit le résultat de la comparaison des deux trains nombres. Dans un jeu de représentation, le représenté (les trains-nombres de départ) est traduit par différents représentants tels que les écritures additives, le schéma-boîte et l'écriture soustractive. Le schéma-boîte apparaît comme une étape vers l'écriture soustractive, l'expérience relative à l'étude de la boîte par les élèves, forte et bien ancrée, se revèlant potentiellement pertinente.

La figure ci-dessous donne à voir le jeu représentationnel mis au jour dans cet épisode.

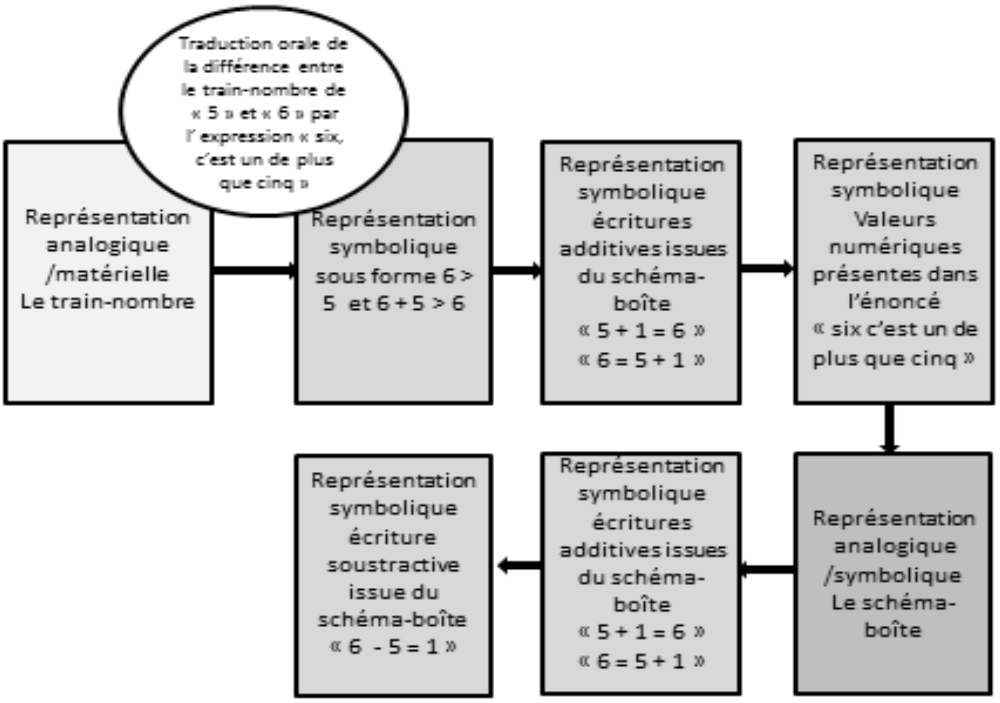


Figure 50 : traduction entre les différentes représentations

La professeure s'appuie le schéma-boîte, dont les élèves usent pour modéliser les opérations additives, dans un « voir comme » particulier. Puis, les élèves découvrent une nouvelle potentialité (la soustraction) de celui-ci dans l'expérience, le style de pensée évolue avec l'usage du schéma-boîte. La continuité dans l'usage des représentations et notamment du

schéma-boîte depuis le module 2 (texte curriculaire introduisant le schéma-boîte) semble permettre aux élèves de s'investir dans l'appropriation d'un nouveau savoir mathématique. Les habilités construites précédemment deviennent ici un instrument de compréhension et d'action dans une nouvelle situation. Le savoir continue à croître.

Les capacités construites lors de cette séance peuvent être déclinées de la manière suivante :

- capacité de traduction d'une différence entre deux écritures additive sur un schéma-ligne ;
- capacité de désignation orale d'un écart, d'une différence entre deux trains-nombres ;
- capacité de traduction d'un schéma-boîte par une écriture soustractive ;
- capacité de mise en relation des écritures additives et soustractives (le principe inverse)
- capacité de désignation d'une différence par une écriture soustractive.

Nous noterons pour terminer que le texte curriculaire propose, quant à lui, que les élèves comparent les trains-nombres entre eux par binôme. Puis dans la phase de mise en commun, la représentation de la différence se fait à partir de deux schéma-lignes. Le professeur introduisant alors le signe « - » pour signer cette différence. Il n'y est pas proposé que les élèves enquêtent sur l'écriture soustractive. Ici, la professeur réalise, ce que nous pouvons appeler une improvisation rationnelle. Celle-ci est possible car l'action conjointe peut reposer sur suffisamment de « partagé », de significations partagées. Les systèmes de représentation, fonctionnant comme des instruments, constituent ce « partagé ».

3. Les représentations et la différence

Nous continuons notre enquête sur l'usage des représentations tels le schéma-ligne et l'écriture symbolique (représentation abstraite) en lien avec la notion de différence. Pour cela, nous nous focaliserons sur la seconde séance du module 7 qui se déroule le 19 décembre, soit trois jours après la première séance introduisant la notion de différence.

En premier lieu, nous présenterons cette séance 2, son organisation et les liens qu'elle entretient avec la première séance analysée ci-dessus. Puis, nous proposerons une description de l'extrait sélectionné. En troisième lieu, nous analyserons les deux épisodes de cet extrait. Pour conclure, nous proposerons une synthèse de l'analyse produite.

3.1. Présentation de la séance 2

Le Tableau 83, ci-dessous, issu du synopsis (Annexe 42) permet d'avoir une vision de l'organisation générale de cette séance.

Phases	Modalité, support	Jeu d'apprentissage	Nouvel objet de savoir	Traduction représentationnelle
Discussion autour des écritures symboliques de la différence et leur représentation sur le schéma-ligne	Affiche au tableau : écriture symbolique et schéma-ligne	JA1 : Faire rechercher une différence entre deux écritures additives sur un schéma-ligne et la traduire sous forme de soustraction.		Traduction d'un écart entre deux nombres sur un schéma-ligne et par une écriture symbolique sous forme de soustraction.
Comparaison de deux trains-nombres et écriture de la soustraction correspondante	Par binôme Deux enveloppes contenant chacune 10 nombres-trains (de 1 à 10) et une ardoise	JA2 : Faire comparer deux trains-nombres et écrire la soustraction correspondante		Traduction d'une comparaison de deux trains-nombres par une écriture soustractive
Mise en commun des découvertes réalisées lors du travail en binôme	Collectif	JA3 : Faire représenter une écriture soustractive sur un schéma-ligne et une boîte		Traduction d'une écriture soustractive par un schéma-ligne et un schéma-boîte

Tableau 83 : vision synoptique de la séance 2 du module 7

Dans la première phase de la séance, les élèves s'expriment autour des productions réalisées collectivement lors de la séance précédente, en particulier la représentation de la différence sur les schémas-lignes et l'écriture soustractive.

La seconde phase se concentre sur la comparaison en binômes de deux trains-nombres et de l'écriture de la soustraction correspondante.

La dernière phase est collective et recense les différentes écritures soustractives découvertes lors du travail en binôme et leur traduction par deux représentations, le schéma-ligne et le schéma-boîte. Nous observons donc une forme de continuité avec la séance précédente. En effet, on assiste, tout d'abord, à une lecture de la différence entre deux écritures additives à deux termes (« 1 + 1 » et « 3 + 1 ») sur des schémas-lignes produits lors de la première phase de la séance précédente. Puis, dans la phase suivante s'effectue une reprise du jeu de comparaison de deux trains-nombres en lien avec l'écriture soustractive découverte pendant la première séance. Enfin, dans la troisième et dernière phase de la séance 2, le travail porte sur une représentation des écritures soustractives par le schéma-ligne et le schéma-boîte. Nous pourrions résumer cette continuité à travers le Tableau 84 suivant :

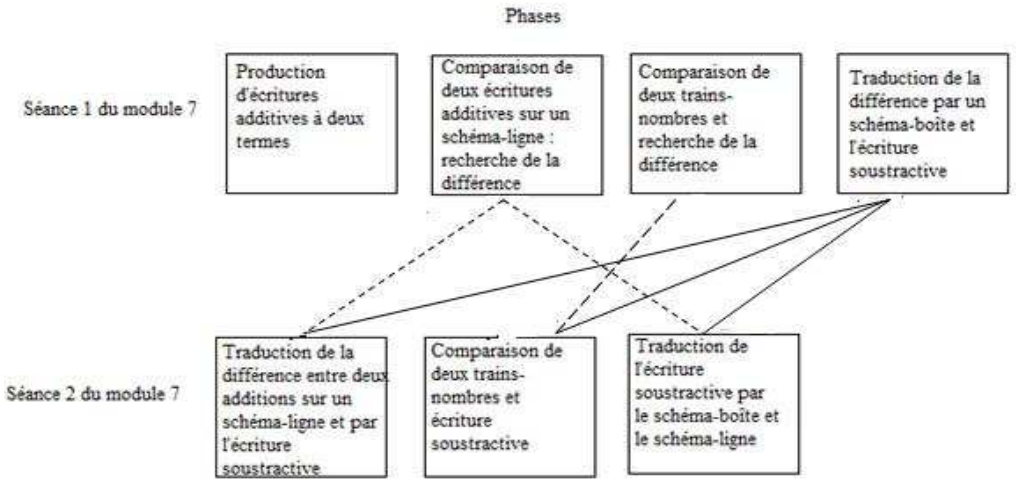


Tableau 84: lien entre les deux premières séances du module 7 par phases

En premier lieu, la figure ci-dessus montre que la *capacité de désignation d'une différence* sous forme soustractive est réinvestie dans l'ensemble des phases de la séance 2 (flèches pleines), écriture mise en correspondance avec trois systèmes de représentation, le schéma-ligne, les trains-nombres et le schéma-boîte. En second lieu, le schéma-ligne est réexpériencié dans les phases 1 et 2 de la séance 2 (flèches en petits pointillés). Il est traduit, tout d'abord, par une écriture soustractive puis cette écriture soustractive est mise en relation avec le schéma-ligne. En troisième lieu, la représentation de la différence à partir de la comparaison de deux trains-nombres est réinvestie en lien avec l'écriture soustractive (la flèche en grands pointillés).

L'ensemble des phases de cette séance renvoie donc au codage de la différence par une écriture soustractive (l'usage du signe moins) en lien avec les systèmes de représentation.

Nous nous centrerons sur la première phase de cette deuxième séance au cours de laquelle les élèves traduisent la représentation de deux écritures additives sur un schéma-ligne par une écriture soustractive.

3.2. Présentation de l'extrait

Les deux épisodes analysés dans le paragraphe suivant se déroulent lors de la première phase de cette séance 2 du module 7. Son objectif est la mise en relation entre deux écritures additives représentées sur le schéma-ligne et l'écriture soustractive. Ces épisodes font partie d'un extrait se situant entre la première et la huitième minute de la séance. Cet extrait montre comment la professeure organise la discussion autour de deux schémas-lignes représentant

deux écritures additives réalisées au cours de la séance précédente et comment elle fait appel à l'expérience des élèves pour travailler l'écriture soustractive. Nous pouvons rapprocher ici la modélisation en jeu d'apprentissage de celle effectuée lors de la première et la seconde séance, cf. Tableau 85, ci-dessous.

Séance 1	
JA2 : Faire représenter la différence entre deux écritures additives à deux termes sur un schéma-ligne.	JA(2)1 : Faire chercher de la différence entre deux écritures additives à deux termes. JA(2)2 : Faire traduire de deux écritures additives à deux termes par une décomposition sous forme de deux sous-collections représentées sur deux mains. JA(2)3 : Faire représenter la différence entre deux écritures additives sur deux schémas-lignes.
Séance 2	
JA1 : Faire reconnaître une différence entre deux écritures additives sur un schéma-ligne et la traduire sous forme de soustraction.	

Tableau 85: Similitude entre deux jeux d'apprentissage

Le JA2 de la séance 1 et le JA1 de la séance 2 sont proches. En effet, l'enjeu du JA2 (séance 1) est de représenter la différence sur le schéma-ligne alors que dans le JA1 (séance 2) le jeu s'oriente vers la reconnaissance de la représentation de la différence sur le schéma-ligne. Nous pouvons faire l'hypothèse que cette proximité permet une relative continuité de l'expérience, tout en soulignant le fait que cette continuité est loin d'une répétition. En effet les deux problèmes soumis aux élèves diffèrent sensiblement, le second impliquant directement la soustraction. Mais, ces deux milieux-problèmes s'ancrent dans les éléments du contrat précédent et particulièrement les systèmes de représentation.

Le choix de cet extrait, comme nous l'avons précisé dans le chapitre « Méthodologie » (cf. Chapitre 4) est justifié par le fait qu'il présente comment les élèves réexpériencient l'usage des représentations dans une situation de recherche de différence entre deux écritures additives. Il montre notamment comment une élève moins avancée s'empare de ces représentations.

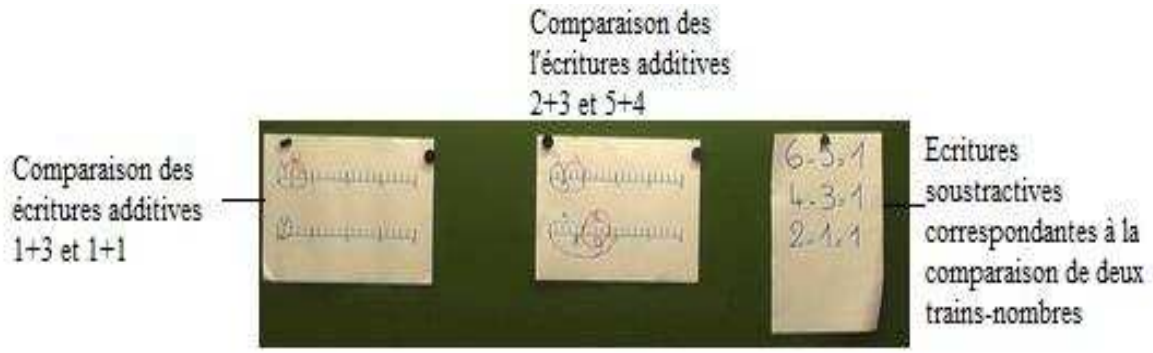
Nous avons relevé dans cet extrait deux épisodes significatifs qui montrent le travail sur le schéma-ligne, cf. Tableau 86, ci-dessous.

	Extrait 7 : Les représentations et la différence, séance 2 module 7
Episode 23	**Traduction par Lou** de la différence entre deux écritures additives représentées sur deux schémas-lignes (« 1 + 3 » et « 1 + 1 »).

Episode 24	**Traduction par Agathe** de la différence entre deux écritures additives représentées sur deux schémas-lignes (« 1 + 3 » et « 1 + 1 »).

Tableau 86: Mise en évidence de deux épisodes significatifs

Pour commencer la séance, la professeure affiche au tableau les productions issues du travail réalisé lors de la séance précédente (séance 1 du module 7) comme le montre le Photogramme 85, ci-dessous.



Photogramme 85 : affichage des productions des élèves réalisées lors de la séance précédente.

P propose à l'ensemble des élèves de commenter les affiches présentes au tableau pour expliquer à une élève absente lors de la séance précédente le travail réalisé.

Lors de l'épisode 23, Lou se présente au tableau et commente l'affiche sur laquelle sont représentées les écritures additives « 1 + 1 » (Félicien) et « 1 + 3 » (Neil). La professeure lui demande d'expliquer ce que représente le schéma-pont tracé en rouge (la différence entre les deux écritures additives). Face aux difficultés rencontrées par cette élève pour donner à voir cette différence entre deux additions, une seconde élève, Agathe, vient au tableau.

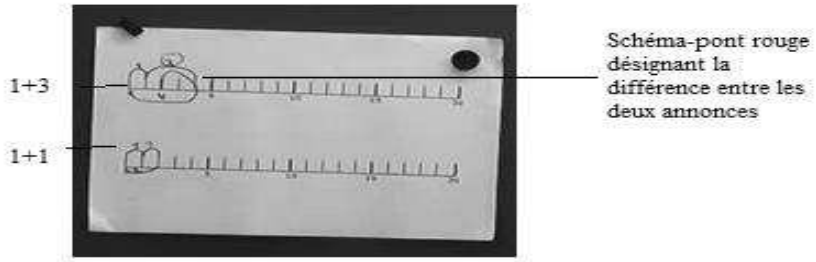
Lors de l'épisode 24, Agathe montre que l'annonce « 1 + 3 » a deux de plus que l'annonce « 1 + 1 ». Cette différence est représentée par le schéma-pont rouge (cf. Photogramme 85 ci-dessus).

Dans les paragraphes suivants, nous analyserons successivement les deux premiers épisodes qui proposent une lecture de la différence sur les schémas-lignes.

3.2.1. Episode 23 : les schémas-lignes

Ce premier épisode (épisode 23) nous semble intéressant à analyser dans la mesure où il montre comment une élève moins avancée, Lou, interprète le travail effectué lors de la séance précédente. Ce travail consistait à représenter la différence entre deux écritures additives (« 1 + 1 » et « 1 + 3 ») sur deux schémas-lignes.

Pour expliquer à la classe le travail réalisé lors de la séance précédente, Lou prend appui sur les deux schémas-lignes. La différence entre ces deux écritures y est représentée par un schéma-pont tracé en rouge comme nous montre le photogramme 86 ci-dessous.



Photogramme 86 : représentation de la différence entre "1 + 1" (Félicien) et "1 + 3" (Neil) sur les schémas-lignes

3.2.1.1. Lecture du schéma-ligne

Le Transcript 61, ci-dessous, donne à voir comment Lou travaille à partir de ces deux schémas-lignes.

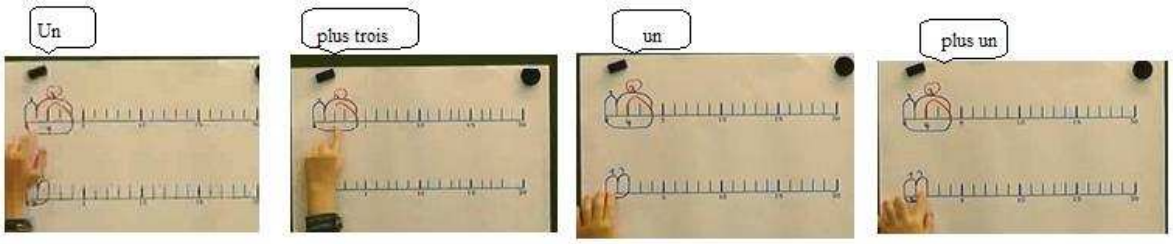
Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:00:01.6)	1	P	(...) On regarde les affiches, est-ce qu'on peut expliquer des choses pour Chloé qui n'était pas avec nous et qui ne sait pas ce qu'on a essayé de faire lundi. Lou ?
(0:00:44.7)	2	Lou	Et ben en fait, on avait fait des annonces.
(0:00:46.9)	3	P	On avait fait des annonces. Sur quelle fiche, quelles affiches parlent des annonces ?
(0:00:53.8)	4	Lou	Ben
(0:00:54.2)	5	P	Tu as droit de te lever Lou, tu as droit d'aller montrer. S'il te plaît, Félicien, tu te tiens tranquille. [Lou montre la première affiche à gauche du tableau représentant les deux schémas-lignes des annonces 1 + 3 et 1 + 1]. Ici, on avait fait des annonces, ok [P descend la fiche à la hauteur de l'élève]. Quelles annonces avaient été écrites, faites, là ? [Non visible]
(0:01:07.5)	6	Lou	Là c'était heu [Lou montre avec son index le premier schéma-ligne] Neil et Félicien [Lou montre avec son index le second schéma-ligne]
(0:01:13.9)	7	P	Oui, et Félicien mais euh
(0:01:15.0)	8	Lou	Félicien
(0:01:15.6)	9	P	Et quelles annonces avaient, quelle annonce avait fait Neil et quelle annonce avait fait Félicien ? Est-ce qu'on peut le savoir en regardant ça.
(0:01:22.6)	10	Lou	Ben oui
(0:01:23.3)	11	P	Oui, alors dis-moi quelle annonce avait fait Neil ?
(0:01:26.3)	12	Lou	Un [Lou montre avec son index le dessous du premier intervalle du schéma-ligne] plus trois [Lou montre le dessous du second intervalle du schéma-ligne]
(0:01:28.1)	13	P	Et Félicien ?
(0:01:30.2)	14	Lou	Un [Lou montre avec son index le dessous du premier intervalle] plus un [Lou montre avec son index le dessous du second intervalle]
(0:01:33.3)	15	P	Oui, très bien et pourquoi est-ce que j'avais demandé de faire des

			annonces, qu'est-ce que je voulais que l'on apprenne à faire ?

Transcription 61 : traduction des schémas-lignes (Annexe 43)

Lou, élève moins avancée, explicite, pour l'ensemble de la classe, quelles sont les écritures additives représentées sur les deux schémas-lignes. Ainsi, au tdp 2, Lou énonce le fait qu'«on avait fait des annonces ». Puis, elle se déplace au tableau et montre l'affiche sur laquelle les deux annonces produites par Félicien et Neil sont représentées sur deux schémas-lignes (Cf. photogramme 87).

La professeure oriente alors l'action de Lou vers la traduction des deux schémas-lignes par une annonce à deux termes au tdp 9 « Et quelles annonces avaient, quelle annonce avait fait Neil et quelle annonce avait fait Félicien ? Est-ce qu'on peut le savoir en regardant ça ». Lou répond par l'affirmative, énonce et montre sur les schémas-lignes les deux annonces produites aux tdp 11 et 14 (cf. photogramme 87).



Photogramme 87 : correspondance entre les schémas-lignes et les annonces

Nous observons que la professeure introduit la situation en proposant d'« expliquer des *choses pour Chloé qui n'était pas avec nous et qui ne sait pas ce qu'on a essayé de faire* lundi ». Les règles définitoires du contrat didactique sont ici très vagues puisque P parle de « choses ». Elle semble se fier à la mémoire didactique (plus ou moins inférée) et au système capacitaire des élèves lié à l'usage du schéma-ligne. Elle est fortement réticente vis-à-vis du milieu à explorer (les affiches du tableau) et laisse Lou s'exprimer librement sur ce qu'elle observe au tableau. Dans un second temps, P oriente l'action de Lou vers la traduction des schémas-lignes, c'est-à-dire vers ce qu'ils peuvent représenter, ici une écriture additive à deux mains.

Lou met en relation, oralement, le mot-nombre avec la partie du schéma-ligne qui lui correspond. Ainsi, elle montre avec son index sur le premier schéma-ligne le premier intervalle et le nomme « 1 » puis elle place son doigt au centre de la portion du schéma-ligne représentant le nombre « 3 ». Elle fait de même pour le schéma-ligne de Félicien. Il y a donc passage du représenté, les portions du schéma-ligne (délimitées par les schémas-ponts) vers l'expression orale de l'addition (le représentant) dans un certain jeu représentationnel.

L'interprétation que fait cette élève, moins avancée, des schémas-ponts et des portions des schéma-lignes est ici correcte. Lou s'appuie sur des connaissances construites précédemment par les élèves dans l'action conjointe, la capacité de traduction d'une écriture additive à deux termes sur le schéma-ligne. La réticence de P semble montrer son intention de laisser l'élève moins avancée s'exprimer[112]. Le schéma-ligne comme instrument représentant une addition, comme concaténation de deux collections désignées par un nombre (Lou utilise le terme « plus » au tdp 12 et 14) apparaît ici compris par cette élève moins avancée.

Cet exemple présente comment un élève moins avancé peut prendre part à l'action didactique collective. Cependant, la suite de cet épisode montre que Lou ne parvient pas à expliquer au groupe classe à quoi correspond le schéma-pont de couleur rouge (la différence entre les deux écritures additives) présent sur le schéma-ligne de Félicien.

3.2.1.2. Le schéma-ligne et la différence

Ainsi, au tdp 15, la professeure demande à Lou en parlant de la séance précédente « *qu'est*-ce *que je voulais qu'on apprenne à faire* ».

La transcription ci-dessous (cf. Transcription 62) donne à voir comme Lou présente à la classe le travail réalisé lors de la séance précédente.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:01:42.9)	17	P	Attends, pour l'instant, c'est Lou qui est au tableau donc est ce que Lou, si Lou ne peut pas nous répondre, quelqu'un l'aidera. Qu'est-ce que je dis qu'on me dise ? Neil, c'est Neil [1 + 3] qui est venu dessiner ça sur la feuille. Tu te rappelles [Lou opine de la tête] Et qu'est-ce qui nous a, qu'est-ce qu'il nous a montré sur la feuille ?
(0:02:00.9)	18	Lou	Il a fait des ponts.
(0:02:01.7)	19	P	Il a fait des ponts, d'accord. Est-ce que tous les ponts sont de la même couleur ?
(0:02:06.8)	20	Lou	Non.
(0:02:08.5)	21	P	Pourquoi il n'y a un pont qui n'est pas de la même couleur ?
(0:02:10.2)	22	Lou	Parce que le deux [Lou montre deux sur sa main droite] il est dans le, dans l'annonce de Neil [Lou montre avec son index le dessous du schéma-ligne représentant l'annonce de Neil]
(0:02:16.1)	23	P	Et c'est quoi ce deux qui est dans l'annonce de Neil
(0:02:18.9)	24	Lou	Ben c'est l'annonce de Félicien [1 + 1) [Lou montre avec son index l'annonce de Félicien représentée sur le schéma-ligne]
(0:02:24.7)	25	P	Ah, l'annonce de Félicien est dans l'annonce de Neil. Elle est où l'annonce de Félicien, Lou, tu m'intéresses [Lou glisse son index sur le schéma-pont de couleur rouge sur le schéma-ligne de l'annonce de Neil]. Alors, est-ce que vous êtes d'accord avec euh, Lou, quand elle dit que l'annonce de

[112] En effet, la professeure aurait pu présenter et traduire elle-même les deux schémas-lignes et les traduire par une écriture additive puisque cette capacité est travaillée et réexpérienciée par les élèves depuis le module 2.

			Félicien est dans là ?
(0:02:36.9)	26	Els	Non

Transcription 62 : représentation de la différence sur le schéma-ligne par Lou (Annexe 43)

P propose à Lou de continuer à expliquer le travail réalisé précédemment à la classe. Pour cela, elle énonce au tdp 17 « Qu'est-ce que je dis qu'on me dise ? Neil, c'est Neil qui est venu dessiner ça sur la feuille. Tu te rappelles Et qu'est-ce qui nous a, qu'est-ce qu'il nous a montré sur la feuille ? ». Lou, par un mouvement de la tête, montre qu'elle se rappelle ce que Neil a représenté sur ces schémas-lignes et énonce au tdp 18 « il a fait des ponts ».

Puis, la professeure lui pose une question relative aux schémas-ponts au tdp 19 « Il a fait des ponts, d'accord. Est-ce que tous les ponts sont de la même couleur ? ». Au tdp 20, Lou répond que les schémas-ponts représentés ne sont pas de la même couleur. P relance alors Lou au tdp 21 « Pourquoi il n'y a un pont qui n'est pas de la même couleur ? ».

La professeure prend appui sur la « mémoire » que Lou peut avoir constitué de la représentation sur les schémas-lignes de la différence entre deux écritures additives, capacité construite lors de la séance précédente. Ainsi, P propose à Lou d'enquêter dans un milieu qui, dans l'action conjointe précédente, formait un système de formes symboliques. Ce système de formes symboliques comme représentation de la différence entre deux écritures additives sur un schéma-ligne a conduit à la construction d'une nouvelle capacité, capacité de désigner la *différence entre deux nombres par l'écart de longueur entre le* nombre A et B sur un schéma-ligne. Ces connaissances, « déjà-là », mais très récentes, sont ici réexpérienciées dans un nouveau milieu (les schémas-lignes des deux additions et la représentation de la différence par un schéma-pont). Il reprend les formes symboliques présentes dans l'activité conjointe précédente que Lou doit mettre en relation pour faire système (Sensevy, 2015). La professeure l'accompagne en orientant son attention vers la couleur des schémas-ponts c'est-à-dire vers la représentation de la différence. P s'exprime en orientant le regard de l'élève sur les schémas-ponts en restant toutefois réticente quant à la signification du schéma-pont de couleur rouge.

Au tdp 22, Lou montre alors deux doigts en énonçant « parce que le deux ». Puis, elle montre avec son doigt le premier schéma-ligne et dit *« il est dans l'annonce de Neil* ». P questionne Lou au tdp 23 « *et c'est quoi ce deux qui est dans l'annonce de Neil* ? ». Lou répond « ben dans *l'annonce de Félicien* » au tdp 24. Les vignettes ci-dessous (cf. Photogramme 88) donnent à voir les gestes accompagnant les propos de Lou.

Photogramme 88 : monstration par Lou de l'annonce de Félicien dans celle de Neil

Lou montre que, pour elle, le schéma-pont rouge (qui représente la différence, égale à « deux intervalles », entre les deux écritures additives) représente l'annonce de Félicien incluse dans celle de Neil. Pour le dire autrement, Lou montre que la portion de la demi-droite qui va de la graduation « 2 » à « 4 » sur le premier schéma-ligne correspond à la portion du second schéma-ligne délimitée par la graduation « 0 » et « 2 ». Elle met donc en évidence le fait que, pour elle, la somme de « 1 + 1 » représentée par deux intervalles est incluse dans le segment allant de 0 à 4 représentant la somme de « 1 + 3 », l'annonce de Félicien est contenue dans celle de Neil.

Lou tente donc ici de mettre en relation les différents éléments du milieu sans toutefois reconnaître de manière effective la différence entre les deux écritures additives. Cette élève s'appuie sur le contrat antérieur où le schéma-pont représente un nombre connu présent dans l'énoncé du problème (la somme de l'annonce « 1 + 1 »). Cependant, nous conjecturons que l'erreur de Lou peut être favorisée par le fait que la différence est ici égale à « 2 » comme la somme de l'annonce de Félicien « 1 + 1 ». Si le nombre désignant l'écart était différent de la somme de l'annonce, la réponse de Lou aurait pu alors être exacte ou tout du moins différente.

Pour que l'élève moins avancée puisse continuer l'enquête, un contrefactuel peut être proposé, que nous pourrions exprimer comme suit. La professeure invite Lou à traduire l'observation produite par la comparaison de deux schémas-trains. Cette élève superpose le train-nombre « 2 » sur celui « 4 ». La question peut alors être : « par quoi est représentée l'annonce « 1 + 1 » de Félicien, par l'écart entre les deux trains-nombres ou par le train-nombre « 2 » » ? Cette recherche peut être complétée par l'introduction du schéma-boîte qui donne à voir la présence des deux nombres « 2 », l'un représentant l'annonce de Félicien et l'autre la différence entre « 4 » et « 2 ».

4	
2	2

Cette recherche s'appuie sur des connaissances antérieures des élèves, la représentation de la différence dans un schéma-boîte abordée lors de la séance précédente. Dans ce contrefactuel, la traduction entre le représentant c'est-à-dire l'écart entre deux nombres représentés sur des schémas-lignes et le schéma-train et/ou le schéma-boîte entraîne un jeu représentationnel au cours duquel les élèves mettent en relation des systèmes de représentation dénotant une même réalité. Ainsi, il y a mouvement mésogénétique avec l'introduction d'autres systèmes de représentation (les trains-nombres et le schéma-boîte) que les élèves ont précédemment expériencié dans des situations de représentation de la différence entre deux nombres.

Pour terminer ce premier épisode, la professeure interroge le collectif au tdp 25 « alors, est ce *que vous êtes d'accord avec, euh ; ou, quand elle dit que l'annonce de Félicien est dans* là ? ». Les élèves répondent par la négative et P demande alors à Agathe de venir au tableau (épisode 2).

3.2.2. Episode 24, représentation de la différence

3.2.2.1. Description de l'épisode

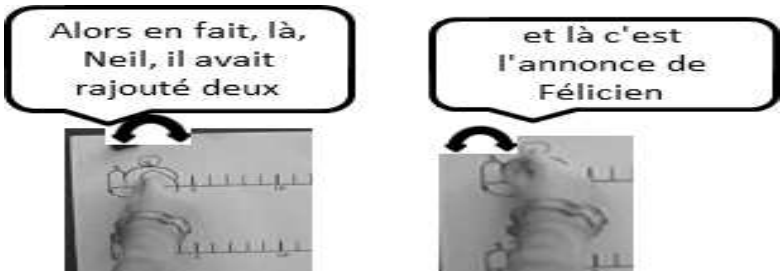
L'épisode 2 donne à voir, comment dans les transactions, la différence entre « 1 + 1 » et « 1 + 3 » est traduit par une élève sur les deux schémas-lignes.

Temps	Tdp	Actant	Contenu
(0:02:58.0)	29	P	Alors, vas-y Agathe explique-nous.
(0:03:00.4)	30	Agathe	Alors en fait, là, [Agathe fait glisser son index sur le schéma-pont de couleur rouge sur le schéma-ligne de Neil] Neil, il avait rajouté deux et là c'est l'annonce de Félicien [Agathe fait glisser son doigt entre les trois premières graduations du schéma-ligne de Neil] (cf. photogramme 89)
(0:03:10.0)	31	P	Là, c'est l'annonce de Félicien, je crois que j'avais donné la grande ligne pour voir ça, pour qu'on voit que l'annonce de Félicien était dans l'annonce de Neil. [P affiche le schéma-train/ligne au tableau]. Et alors, on va terminer, tu m'as dit [P fait glisser son index sur le schéma-pont rouge du schéma-ligne de Neil] ça c'est ce que Neil a ajouté par rapport à l'annonce de Félicien [P montre le schéma-ligne de Félicien], c'est ça ? Comment on avait appelé cette partie-là ? [P fait glisser son index sur le schéma-pont rouge du schéma-ligne de Neil]. Comment on appelle ça ce que Neil a mis en plus ? Victor s'il te plaît [P se penche vers Victor]
(0:03:34.4)	32	Els	Deux plus, deux de plus
(0:03:36.3)	33	P	Il a mis deux de plus mais on cherchait ? + la … ? Vas-y Pimprenelle ?
(0:03:43.3)	34	Pimprenelle	La différence
(0:03:44.0)	35	P	C'est la différence entre [P donne le crayon Velléda à Agathe] l'annonce de Neil [P montre avec son index le schéma-ligne de Neil] et l'annonce

			de Félicien [P montre avec son index le schéma-ligne de Félicien], on a cherché la différence et on a trouvé que Neil avait mis deux de plus, c'était la différence.

Transcription 63: désignation de la différence entre "1 + 1" et "1 +3 " sur les schémas-lignes (Annexe 43)

Agathe se présente au tableau et montre sur le premier schéma-ligne (« 1 + 3 ») l'écart entre l'annonce de Félicien et de Neil (« 1 + 1 »). Les vignettes ci-dessous donne à voir comment Agathe montre et s'exprime sur cet écart (cf. Photogramme 89).



Photogramme 89 : usage du schéma-ligne pour montrer l'écart par Agathe entre "1 + 1" et "1 + 3"

Agathe suit avec son index la courbure du schéma-pont de « 2 » désignant la différence entre les écritures additives « 1 + 1 » et « 1 + 3 » de manière répétée en énonçant « alors, en fait là, Neil, il avait rajouté deux » au tdp 30. Puis, elle forme un demi-cercle avec son index de la graduation 0 à 2 qu'elle parcourt de manière répétée en énonçant « *et là c'est l'annonce de* Félicien » sur le schéma-ligne représentant l'écriture additive « 1 + 3 ».

Puis, la professeure reprend la parole au tdp 31 « *tu m'as* dit ça *c'est ce que Neil a ajouté par rapport à l'annonce de Félicien* » en faisant glisser son index sur le schéma-pont rouge du premier schéma-ligne. Puis elle montre le schéma-ligne de Félicien, « *c'est* ça ? ». Comment on appelle ça ce que Neil a mis de plus ? ». Les élèves de la classe proposent alors au tdp 32 « deux plus, deux de plus ». P relance la question en reprenant l'énoncé des élèves au tdp 33 « il a mis deux de plus mais on cherchait ? ». Une élève, Pimprenelle, de sa place, apporte alors la réponse au tdp 34 « la différence ».

Pour conclure, au tdp 35, la professeure énonce en désignant avec son index les deux schémas-lignes « *c'est la différence entre l'annonce de Neil et de Félicien, on a cherché la différence et on a trouvé que Neil avait mis deux de plus, c'était la différence* ».

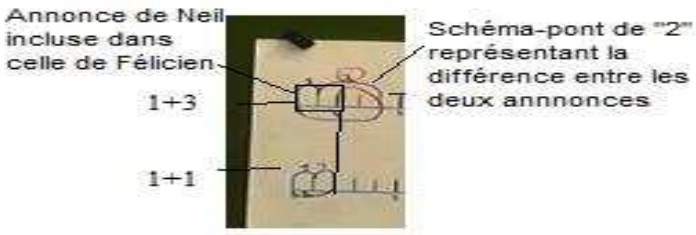
3.2.2.2. Eléments d'analyse

La monstration et l'énoncé d'Agathe au tdp 30 révèlent le fait qu'elle mette en relation les éléments du milieu-problème proposé ici et celui de la séance précédente. En effet, lors de la première phase de la séance 1 et plus précisément lors du JA(2)3 « faire représenter la

différence entre deux écritures additives sur deux schémas-lignes », Neil avait mis en évidence que son annonce (« 1 + 3 ») avait « deux de plus » que celle de Félicien (« 1 +1 »). Il avait tracé le schéma-pont (en rouge) montrant cet écart sur le schéma-ligne représentant l'annonce « 1 + 3 ».

Agathe utilise le terme « rajouter » et montre le schéma-pont désignant cet écart sur le premier schéma-ligne. Néanmoins, elle ne s'exprime pas directement sur cet écart. Certains élèves de la classe prennent la parole en s'appuyant sur le vocabulaire lié à la comparaison (« deux de plus » (au tdp 32)) des deux schémas-lignes et non pas sur le vocabulaire lié à la différence. Ce jeu de langage (celui de la comparaison) entrelacé dans les activités de comparaison précédentes semble dans l'immédiat prégnant pour des élèves. Ce n'est que par l'expression de la professeure vis-à-vis du milieu à connaître (la différence) au tdp 33 « il a mis deux de plus mais on cherchait ? » que le mot différence apparaît. Cet énoncé est emblématique d'un entrelacement des deux dialectiques. Un tel énoncé est orienté vers le milieu, vers l'à connaître. Il est à la fois réticent (le mot « différence » n'apparaît pas), et expressif, dans le sens où il est produit un espace que les élèves doivent combler.

En effet, les connaissances liées à la différence sont récentes (séance précédente). Néanmoins, contrairement à Lou, Agathe repère sur le premier schéma-ligne (cf. Photogramme 90) l'écriture additive proposée par Félicien « 1 + 1 » indépendamment des schémas-ponts présents sur ce schéma.



Photogramme 90: Représentation de l'inclusion de "1 + 1" dans "1 + 3" et représentation de la différence

Agathe met donc en relation les différents éléments du milieu, la représentation de l'écriture additive « 1 + 1 » avec celle de « 1 + 3 » sur un même schéma-ligne. Puis, elle montre combien il faut ajouter (deux de plus) pour arriver la quatrième graduation.

Malgré un langage lié à la notion de comparaison, il semble qu'il y ait chez elle une modification du « voir comme », le schéma-ligne n'est plus simplement un instrument pour comparer deux nombres, mais devient un instrument pour montrer l'inclusion d'un nombre dans un autre. Il y a donc une modification du style de pensée, un même schéma-ligne donnant à voir les relations entre les nombres. Par l'expérience de l'usage du schéma-ligne

dans des milieux-problèmes différents se développe une forme d'habileté[113] (Fleck, 2005) des élèves sur le maniement de cet instrument. Il y a donc un progrès dans l'usage du segment mais aussi un progrès conceptuel.

Le milieu-problème que la professeure remet à l'étude est ancré dans les éléments du contrat, dans les connaissances antérieures des élèves (le connu) que nous reprenons ci-dessous :

- capacité de traduire des écritures additives par un schéma-ligne (connaissance « très ancienne ») ;

- capacité de comparaison entre deux schémas-lignes (connaissance « ancienne ») ;

- capacité de traduction d'une différence entre deux écritures additive sur un schéma-ligne (« connaissance récente[114] »).

Cette dernière capacité a été travaillée dans la séance précédente. Ce déjà-là récent semble entrer en concurrence avec celui établi depuis plus longtemps, au sein du contrat de comparaison.

3.2.3. Synthèse de l'analyse des épisodes 23 et 24

Les deux épisodes analysés ci-dessous montrent que la professeure s'appuie sur les découvertes des élèves réalisées lors de la séance précédente. Le milieu-problème est ici ancré dans les éléments du contrat, liés à la représentation de la différence sur des schémas-lignes.

Dans l'épisode 23, nous remarquons que Lou, élève moins avancée, manifeste, d'une part, une compréhension de l'usage du schéma-ligne pour représenter une écriture additive. Cette capacité de traduction d'une écriture additive sur un schéma-ligne est travaillée depuis le module 2 et de manière continue sur les modules suivants (représentation d'une écriture additive à trois termes dans le module 3 et 4). En parallèle, l'usage de ce schéma-ligne évolue et devient un instrument de comparaison entre deux nombres puis dans le module 7, un instrument de représentation de la différence.

---

[113] Ce développement peut se faire sous forme de « skills » (Ingold, 2001) « This calls for a fundamentally ecological approach, and that is the approach I adopt here. Its basic premise is that human knowledge ability is founded not in some combination of innate capacities and acquired competence, but in skill" (Ibid.)

[114] Nous caractérisons les différentes capacités en fonction de leur ancienneté dans le processus d'enseignement/apprentissage. Ainsi, ici, les connaissances très anciennes (capacité de traduire des écritures additives par un schéma-ligne) ont été construites depuis le module 1 et réexpérienciées depuis au cours des différents modules. La capacité de comparaison entre deux schémas-ligne n'est spécifiquement abordée par les élèves que lors du module 2. Cependant, n'est abordée cette comparaison entre deux écritures additives qu'au module 6. La capacité de traduction d'une différence sur un schéma-ligne est quant à elle très récente car abordée lors de la première séance du module 7.

D'autre part, ce premier épisode montre que Lou manifeste une compréhension de l'inclusion d'un nombre dans un autre, d'une annonce dans une autre. Toutefois, elle ne parvient pas encore à assimiler la convention très récente qui consiste à désigner une différence par « la portion de segment qui dépasse ». Mais cette difficulté peut être explicable par le fait que les deux nombres (celui de la différence « 2 » et celui de la somme de l'écriture additive de Félicien « 1 + 1 ») sont égaux. Lou a donc « raison » numériquement. Finalement, l'étude du comportement mathématique de Lou nous amène à considérer que le schéma-ligne pour *donner à voir l'inclusion d'un nombre dans un autre* apparaît comme pertinent même pour les élèves moins avancés. Nous faisons l'hypothèse que cela peut être le résultat de la fréquentation continue du schéma-ligne, et donc de la continuité de l'expérience des élèves dans l'usage des systèmes de représentation au sein de situations évolutives. En effet, les habitudes dans l'usage du schéma-ligne prises dès le premier module autorisent une réadaptation de cet usage dans d'autres situations.

Agathe (épisode 24), quant à elle, compare effectivement les deux annonces « 1 + 1 » et « 3 + 1 » sur le schéma-ligne en énonçant le fait que celle de Neil a deux de plus que celle de Félicien. Elle donne ainsi à voir l'inclusion d'un nombre dans un autre en montrant une portion de segment incluse dans un segment plus grand.

Il existe donc entre ces deux élèves un arrière-plan commun construit collectivement dans l'action conjointe précédente. Il y a compréhension de la nature du jeu didactique à travers l'usage du schéma-ligne comme instrument pouvant donner à voir un nombre dans un autre et permettant de comparer deux nombres.

4. Synthèse du chapitre 8

4.1. Milieu de l'enquête

L'objectif de ce module 7 est d'introduire la différence comme un écart entre deux nombres. Lors des analyses précédentes, nous avons mis en évidence l'intérêt pour les élèves de s'appuyer sur les systèmes de représentation connus pour enquêter sur la différence entre deux nombres. Le tableau (cf. Tableau 87) ci-dessous reprend les différents épisodes analysés dans ce chapitre.

Episodes	Extrait 6 : Découverte de la différence Séance 1 module 7
Episode	**Production d'une écriture additive** à deux termes par les élèves sur leur ardoise.

16	
Episode 17	**Comparaison et recherche de la différence** entre « 1 + 3 » et « 1 + 1 ». Proposition de deux élèves : « 1 + 3 » plus grand que « 1 + 1 ». Proposition d'un élève : la différence entre « 1 + 3 » et « 1 + 1 » est de 3.
Episode 18	**La différence** Introduction par le professeur des annonces à deux mains pour vérifier la différence proposée.
Episode 19	**Introduction du schéma-ligne** par le professeur pour rechercher la différence entre « 1 + 3 » et « 1 + 1 ».
	Extrait 7 : la symbolisation de la différence Séance 1 module 7
Episode 20	**Usage des trains-nombres et recherche de la différence** Discussion collective autour de la découverte d'un binôme. La comparaison de plusieurs trains-nombres amène à une différence de 1. Comparaison entre un train-nombre de 6 et de 5.
Episode 21	**Enquête sur la désignation de la différence par une écriture symbolique** Recherche par les élèves d'une écriture symbolisant la différence de 1 entre 6 et 5 à partir de la proposition de P « six, c'est un de plus que cinq ». Les élèves proposent différentes écritures symboliques pour traduire l'énoncé de P.
Episode 22	**Le schéma-boîte et la différence** Introduction par P d'un schéma-boîte. A partir des nombres « 6 », « 5 » et « 1 » que P écrit au tableau, les élèves complètent le schéma-boîte. Traduction du schéma-boîte par l'écriture symbolique au tableau. Introduction de l'écriture soustractive par P.
	Extrait 8 : Les représentations et la différence Séance 2 module 7
Episode 23	**Traduction par Lou** de la différence entre deux écritures additives représentées sur deux schémas-lignes (« 1 + 3 » et « 1 + 1 »).
Episode 24	**Traduction par Agathe** de la différence entre deux écritures additives représentées sur deux schémas-lignes (« 1 + 3 » et « 1 + 1 »).

Tableau 87 : vision synoptique des épisodes analysés

Ainsi, dans ce module, une nouvelle situation est proposée, situation en lien avec celles rencontrées précédemment dans la mesure où il y est demandé de comparer deux écritures additives et de nommer l'écart, la différence entre les deux. Dans cette nouvelle situation didactique, les élèves se trouvent confrontés à un nouveau milieu-problème comportant des éléments déjà connus. Ces éléments sont issus de leurs expériences antérieures liées à des :

- capacités de désignations orales et écrites de nombres (très anciennes) ;

- capacités de traduction de ces désignations par différents systèmes de représentation (mains, schéma-ligne, schéma-boîte, écriture symbolique) dans un jeu représentationnel (très anciennes) ;

- capacités de comparaison des différents systèmes de représentation (mains, schéma-ligne, schéma-boîte, écriture symbolique) dans un jeu représentationnel (anciennes).

Nous avons modélisé ces capacités construites dans l'action conjointe précédente par deux types de contrat :

- un contrat de traduction ;

- un contrat de comparaison.

La figure ci-dessous montre comment s'organise l'enquête, dans l'action conjointe, à partir d'une première situation-problème (extrait 6, épisode 16, 17, 18, 19) : la recherche de la différence entre deux écritures additives.

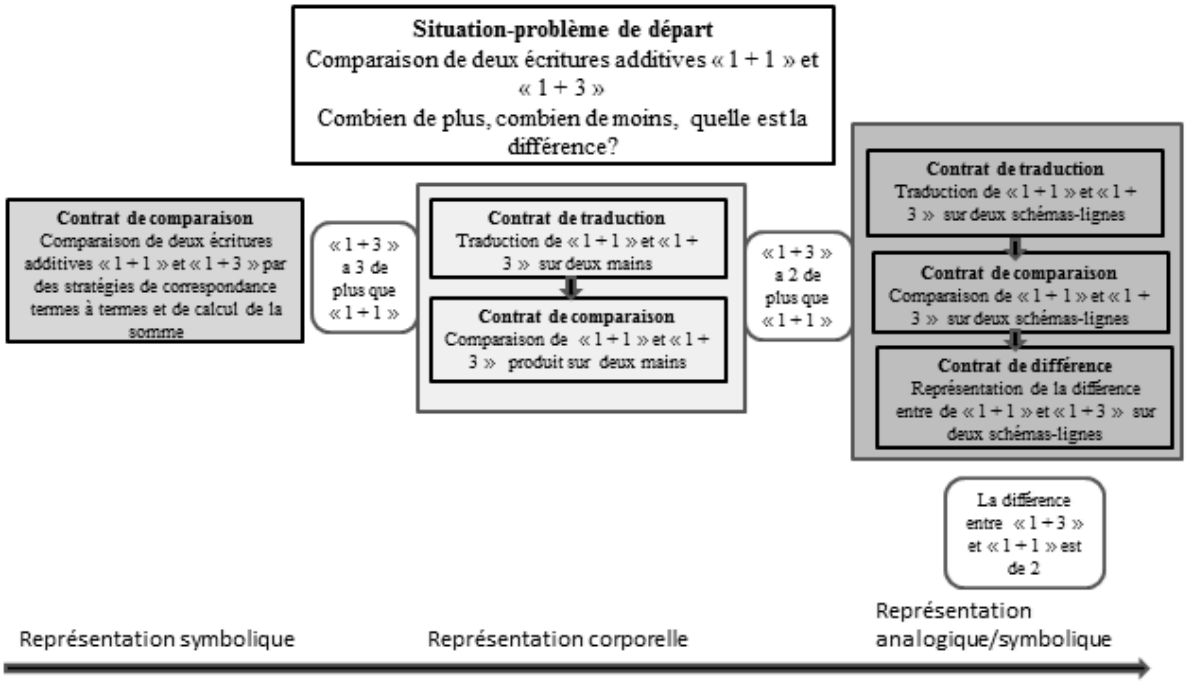


Figure 51 : avancée de l'enquête sur la recherche de la différence entre deux écritures additives à deux termes

Cette figure montre comment les éléments du milieu liés au problème de recherche de la différence entre deux écritures additives sont agencés par la professeure. Ces éléments offrent des possibilités d'action. Le savoir déjà-là, les capacités antérieures des élèves doivent ici leur fournir des repères pour agir.

A partir d'une situation connue, d'une situation unifiée (Dewey, 1967), la comparaison de deux écritures additives, est introduit un déséquilibre avec un nouveau problème, la recherche de la différence entre ces deux écritures additives. Les élèves doivent mener une enquête (Ibid.) c'est-à-dire opérer une transformation contrôlée de la situation[115]. Au départ, les élèves sont donc confrontés à une forme d'incertitude épistémique puisque leurs connaissances

[115] L'enquête se développe à partir d'une situation indéterminée dans laquelle les éléments essentiels ne tiennent pas ensemble (Dewey, 1938/1967). « L'enquête est la transformation contrôlée ou dirigée d'une situation indéterminée en une situation qui est si déterminée en ses distinctions et relations constitutives qu'elle convertit les éléments de la situation originelle en un tout unifié » (Dewey, 1938/1967, p. 169).

antérieures ancrées dans un contrat de comparaison (contrat ancien qui perdure depuis le module 2) les empêchent de résoudre dans un premier temps le problème posé. La professeure organise alors les éléments du milieu en fonction des expériences antérieures des élèves qu'elle considère comme capables de promouvoir la croissance du savoir (Dewey, 1968/2011).

Ainsi, dans l'extrait 6 (cf. Tableau 87), les élèves restent, dans un premier temps, cantonnés dans un contrat de comparaison entre deux écritures additives et ne parviennent pas à trouver la différence entre ces écritures. P introduit alors, dans un second temps (épisode 18), la représentation corporelle pour vérifier le résultat de cette première comparaison effectuée par les élèves. Elle propose une traduction des écritures additives à deux termes sur les mains en se référant à une expérience antérieure très ancienne des élèves (ils énonçaient à partir de la comparaison de deux annonces à deux mains « il me manque x », « j'ai x de trop »). Elle s'appuie donc sur l'énoncé (« 1 + 3 » a deux de plus que « 1 + 1 » ») des élèves pour reconfigurer les éléments du milieu, pour « redéfinir » la problématisation.

Ces éléments, la représentation sur les mains des deux écritures additives, font partie des éléments contractuels du milieu. Ils nécessitent un nouvel agencement pour répondre à la question initiale de la recherche de la différence entre « 1 + 1 » et « 1 + 3 ». Face à l'incertitude prégnante des élèves, P propose de traduire ces deux écritures additives sur deux schémas-lignes. Ce système de représentation devient ici un moyen, un instrument d'action dans cette nouvelle situation avec la représentation de l'écart entre deux nombres dans un nouveau jeu de langage/forme de vie. Les élèves voient le schéma-ligne non plus simplement comme un instrument de comparaison mais comme un instrument représentant l'écart entre deux nombres.

Il y a donc renouvellement du système didactique au cours de deux phases successives s'appuyant sur des éléments des contrats précédents (contrats de traduction et de comparaison). La professeure s'appuie sur la mémoire didactique des élèves et infère l'état épistémique des élèves. Le processus de mésogénèse qui décrit ici les états successifs du milieu (Sensevy, 2011a) est conjoint puisque le professeur s'appuie sur les propositions des élèves. De plus, les élèves assument la responsabilité de l'enquête puisque la comparaison des deux écritures additives, sa traduction sur les mains et sur les schémas-lignes leurs sont dévolus.

Pour le septième extrait analysé (épisodes 20, 21 et 22), la figure ci-dessous donne à voir l'organisation des éléments de l'enquête lors de la recherche de l'écriture soustractive.

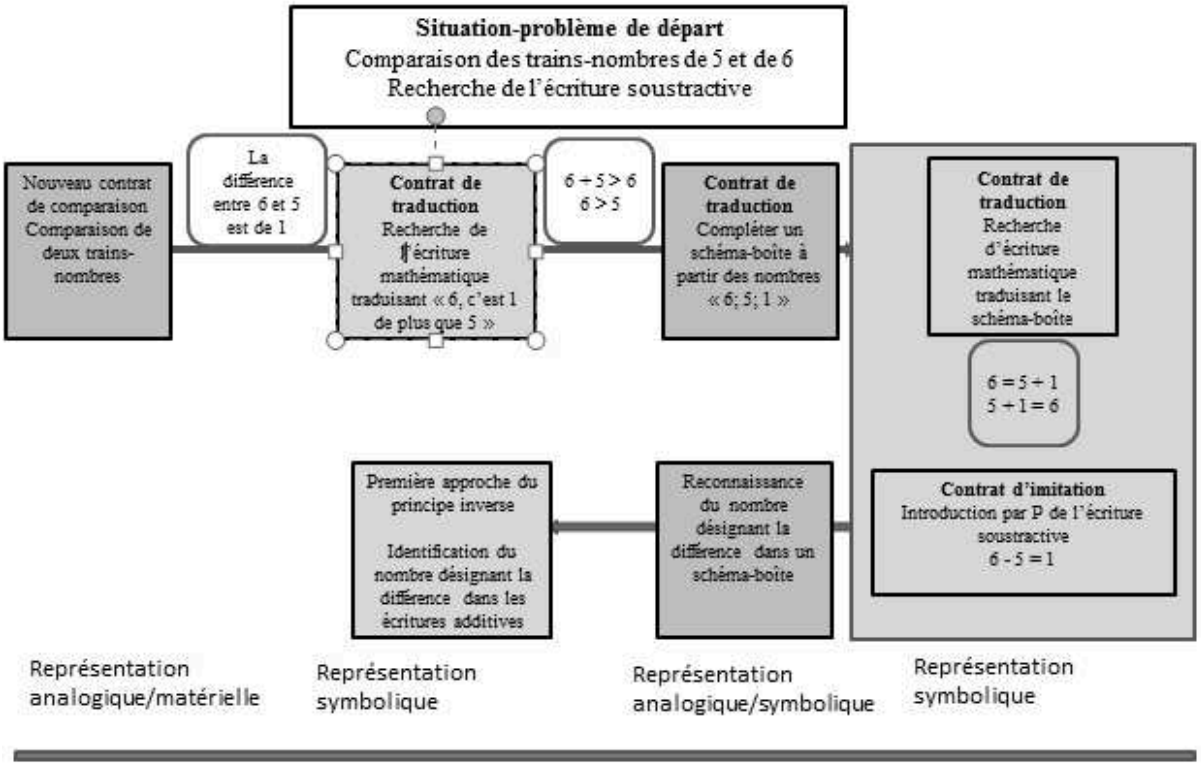


Figure 52 : avancée de l'enquête sur la recherche de la différence entre deux trains-nombres

Le point de départ de la seconde enquête est l'observation par deux élèves d'une différence de « 1 » entre un train-nombre de « 5 » et de « 6 » (épisode 20). La professeure s'appuie sur les connaissances des élèves pour traduire « 6, c'est 1 de plus que 5 » par une écriture mathématique (épisode 21). Ces connaissances peuvent être issues des expériences antérieures des élèves liées à la production d'une écriture additive. Cependant, cela ne semble pas faire signe aux élèves. P introduit alors, dans un second temps (épisode 22), le schéma-boîte et les trois nombres qui devront le compléter (« 1, 5 et 6 »). P s'appuie sur un contrat de traduction entre des nombres et un schéma-boîte, cette capacité (très récente) s'étant construite dans l'action conjointe précédente. Comme nous avons pu le constater, cela a permis aux élèves de déterminer que le nombre « 1 » est inclus dans le nombre « 6 ». Ce travail d'enquête des élèves est possible par une gestion particulière de la dialectique réticence/expression. En effet, celle-ci autorise les élèves à avoir un rapport de première main à leurs connaissances antérieures et aux connaissances à construire. La modélisation en termes de jeux d'apprentissage de la pratique effective montre une densité épistémique importante dans la mesure où les capacités engagées sont denses et reposent sur un engagement important de l'élève dans le milieu.

A l'issue de ce travail d'enquête, dans un contrat d'imitation (Sensevy, 2016), P introduit l'écriture soustractive correspondante. Ainsi, elle fournit aux élèves un modèle d'action, un moyen de traduire par une écriture mathématique une différence entre deux nombres. Ce modèle d'action est offert par la professeure en situation, en lien avec les capacités construites précédemment puisqu'elle permet ici de traduire par une nouvelle représentation symbolique le schéma-boîte en relation avec celles préexistantes (l'écriture additive).

Les deux analyses réalisées montrent l'importance de l'agencement du milieu par le professeur. Si nous suivons Dewey (1938/2011), le professeur règle les conditions objectives de la situation en prenant en compte « les matériaux, l'équipement et les arrangements sociaux dans lesquels le sujet se trouve engagé » (Dewey, Ibid. p. 480). Il organise les transactions à partir d'un sujet qui est ce qu'il est à un moment donné. Le professeur « règle les conditions objectives par son habilité pour influencer l'expérience des autres et détermine l'environnement qui sera en état d'interaction avec les capacités et les besoins des élèves pour créer une expérience valable » (Ibid.).

Dans les exemples étudiés, les connaissances déjà-là autorisent les élèves à mener l'enquête, à la poursuivre en s'appuyant sur des systèmes de représentation expérienciés lors des situations précédentes mais nécessitant néanmoins dans la nouvelle situation une modification du style de pensée (Fleck, 2005) et donc une modification des habitudes (Dewey, 1938). En effet, « ce que l'individu avait acquis de savoir et d'habileté, dans une situation précédente, devient l'instrument de compréhension et d'action pour la nouvelle situation » (Ibid. p. 480). Les systèmes de représentation deviennent des instruments « ordinaires » de l'enquête (Dewey, 1938).

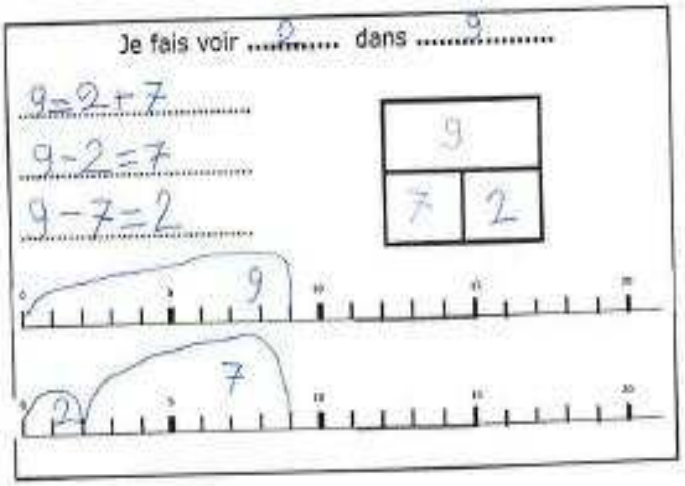
Les stratégies contrefactuelles que nous avons proposées au sein de ce chapitre en prenant comme référence la pratique effective analysée, donnent à voir qu'il peut exister différents gradients dans les dynamiques méso, topo et chronogénétiques selon les caractéristiques de la dialectique contrat/milieu et réticence/expression choisies par le professeur.

Nous proposons ci-dessous des extraits du Journal du Nombre pour donner à voir au lecteur comment les élèves réinvestissent les capacités abordées au cours de ce début de module. A partir d'une incitation donnée ici par le professeur, « écrire des soustractions et les différences auxquelles elles correspondent », les élèves proposent différentes écritures soustractives. Le photogramme ci-dessous (cf. Photogramme 91) montre deux productions d'élèves. La première, l'élève garde le premier terme identique à chaque nouvelle soustraction en augmentant progressivement la valeur du second terme et fait varier l'écart. Les valeurs

numériques sont inférieures ou égales à dix. Le second élève, quant à lui, propose des valeurs numériques plus grandes (jusqu'à 34), qui sortent du champ numérique exploré en classe (jusqu'à 12).

Photogramme 91 : extrait de Journaux du nombre

Un second extrait (cf. Photogramme 92) propose une nouvelle incitation : « faire voir un nombre dans un autre », c'est-à-dire montrer l'inclusion d'un nombre dans un autre en usant des systèmes de représentation connus.



Photogramme 92 : extrait d'un journal du nombre

4.2. Continuité de l'expérience des élèves

La figure ci-dessous donne à voir comment les connaissances construites lors du module 6 sont réexpérienciées au cours du module 7 pour rechercher la différence entre deux nombres.

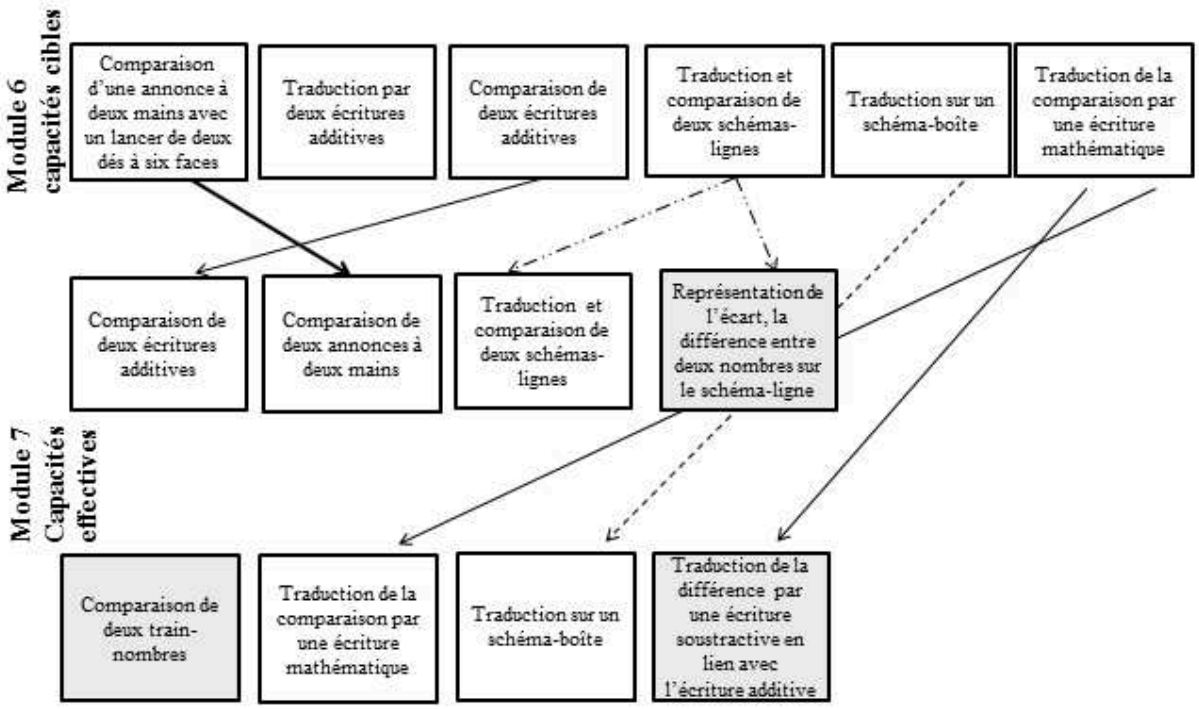


Figure 53 : continuité entre les capacités cibles construites lors du module 6 et les capacités effectives réinvesties ou construites lors du module 7

Pour comprendre comment s'organise la continuité, nous avons, dans un premier temps, repris de manière synthétique les capacités (cibles) réinvesties ou construites lors du module 6. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur l'analyse des textes curriculaires étudiés dans le chapitre précédent. Dans un second temps, nous avons repris les capacités réexpérienciées ou construites effectivement dans le module 7 en prenant appui sur les analyses réalisées dans ce chapitre.

En premier lieu, la figure ci-dessus montre que la capacité de comparer deux écritures additives à deux termes est réinvestie dans une situation de recherche de différence. Cette comparaison est mise en correspondance avec deux types de représentation, les mains et le schéma-ligne. Ainsi, la capacité de comparer une annonce à deux mains avec un lancer de deux dés à six faces est réexpérienciée et actualisée dans la nouvelle situation proposée (flèche pleine et épaisse). De même, la capacité de comparer deux schémas-lignes est ici réinvestie pour rechercher l'écart entre deux nombres. Il y a alors construction d'une nouvelle

capacité, ou plutôt d'une actualisation de la capacité précédente avec la *représentation d'une* différence entre deux nombres sur un schéma-ligne (flèches en pointillés alternés).

En second lieu, la capacité de comparer deux trains-nombres (nouvelle représentation) est mise en correspondance avec la capacité de comparer deux nombres par une écriture mathématique (flèches pleines) et de traduction par un schéma-boîte (flèches en pointillé). Une nouvelle capacité est alors en cours de construction, *la capacité de traduction d'une* différence par une écriture soustractive, capacité qui vient compléter celle liée à l'écriture additive.

La reviviscence des situations didactiques antérieures autorise une réexpérienciation par les élèves des savoirs. Ainsi, la dynamique mésogénétique fonctionne car « les situations sont structurantes de l'expérience des élèves » (Quilio, 2012 p. 24). L'avancée du temps didactique repose donc sur l'actualisation de connaissances déjà-là et la continuité de l'expérience des élèves à travers l'usage des systèmes de représentation.

Troisième partie : Synthèse et perspectives

CHAPITRE 9 : Eléments de synthèse

Les analyses effectuées dans ce travail de thèse viennent nourrir ce chapitre de synthèse.

Dans cette recherche, nous avons étudié l'impact du dialogue entre professeurs et chercheurs sur l'écriture des textes de la progression du domaine « Situations » en nous centrant sur la construction d'une continuité didactique dans l'expérience des élèves. L'impact de cette textualisation des savoirs, fruit de la coopération au sein d'une ingénierie didactique, a été ensuite analysé à partir de séances de classes effectives. Par conséquent, l'étude des textes curriculaires comme point d'origine de la morphogenèse de l'action didactique (Ligozat, 2010) recoupe, dans ce travail, la dynamique observée dans les pratiques de classe, que ce soit par le biais de l'analyse des échanges d'expérience entre professeurs ou par celle des séances dans la classe de P.

Les trois volets de notre travail donnent donc à voir et à comprendre comment peut se penser la conception d'un curriculum au sein d'une ingénierie coopérative didactique. Pour illustrer nos propos, nous proposerons des exemples, que nous considérons comme emblématiques, issus des quatre chapitres d'analyse. Le terme "exemples emblématiques" renvoie à la notion d'exemples exemplaires (Kuhn, 1990 ; Sensevy, 2011a). Ceux-ci « sont des solutions de problèmes concrets, acceptées par le groupe comme paradigmatiques, au sens tout à fait usuel du terme » (Kuhn, 1990, p. 397). Les exemples exemplaires sont ainsi des « exemples étalons d'une communauté » (Ibid., p. 408). Dans ce chapitre, nous utilisons le terme "exemple emblématique" pour désigner des exemples qui pourraient être considérés à terme, dans nos communautés de recherche, comme exemplaires, comme paradigmes.

Nous présenterons, dans ce dernier chapitre, une première section reprenant les principaux résultats issus des analyses produites (dialogue professeurs/chercheurs ; textualisation du savoir ; construction, dans l'action conjointe, de la continuité de l'expérience des élèves). La seconde section pointera, quant à elle, les limites et les perspectives de poursuite de ce travail.

1. Retour sur les questions de recherche, principaux résultats

Rappelons tout d'abord brièvement comment s'est organisée la conception de la progression du domaine « Situations ». Au cours de l'année 2011-2012, une première version des textes a

été produite au sein d'une ingénierie didactique coopérative regroupant quatre professeurs de classes d'étude, enseignants-chercheurs, formateur et doctorants (cf. Chapitre 1). Ce dispositif de recherche a permis de concevoir un ensemble de séquences composé d'environ cinquante-cinq séances dans un processus itératif de mises en œuvre, d'analyses et de réécritures. Le travail de conception s'est poursuivi au sein, cette fois-ci, d'un collectif élargi intégrant dix-huit professeurs de classes expérimentales (2012-2013). Ce dispositif a autorisé la prise en compte de l'expérience des professeurs liée à leur action in situ, et leur interprétation des textes pour construire le jeu didactique. Nous nous sommes centrés sur cette seconde année 2012-2013. Nous avons pu mettre en évidence que le dialogue d'ingénierie élargie a permis de délimiter des problèmes communs, des situations problématiques (Dewey, 1967) à partir de fins partagées entre les différents agents pour lesquelles il a été nécessaire de trouver des moyens de résolution. Les deux situations problématiques étudiées dans cette thèse sont celles mises en avant dans ce dialogue d'ingénierie :

- l'introduction du schéma-ligne ;
- l'introduction de la notion de différence.

Les six paragraphes suivants reprennent les principaux résultats de ce travail de thèse. Ils se structurent de la manière suivante :

- le dialogue d'ingénierie et la conception de ressources ;
- continuité didactique dans l'expérience des élèves et situations de comparaison ;
- continuité didactique dans l'expérience des élèves, recherche de la différence ;
- jeu d'imitation et systèmes de représentation ;
- vers un temps de situation ;
- construction de la continuité de l'expérience des élèves et gestes d'enseignement.

1.1. Dialogue d'ingénierie et conception de ressources

Nous avons montré comment les conceptions des agents (professeurs et chercheurs) peuvent être partagées au sein d'une ingénierie didactique coopérative. Ce partage d'expériences (cf. Chapitres 5 et 7) donne à voir, dans un premier temps, l'émergence de problèmes d'enseignement/apprentissage lors de l'effectuation de certains modules. Les échanges entre les deux sphères ont permis d'une part aux professeurs d'expliciter les raisons de l'apparition

de ces difficultés et, d'autre part, à l'équipe de recherche d'émettre de nouvelles hypothèses de travail. Dans un second temps, ce travail coopératif a eu des effets sur la réorganisation de la progression du domaine « Situations » par la sphère 1. Les deux sous-paragraphes ci-dessous présentent en premier lieu le dialogue d'ingénierie à travers deux exemples emblématiques puis en second lieu une synthèse sur l'ingénierie didactique coopérative et la conception de ressources.

1.1.1. Dialogue d'ingénierie et continuité de l'expérience des élèves

Le travail coopératif entre les professeurs des classes expérimentales et l'équipe de recherche au sein de l'ingénierie ACE-ArithmÉcole est rendu possible, en premier lieu, grâce au contrat de recherche établi entre l'équipe de recherche et les professeurs. Ce contrat insiste sur :

- le rôle d'analystes et de critiques des professeurs envers la progression ;
- leur rôle de co-concepteurs ;
- l'importance de leur expérience pour améliorer et concevoir les séances.

La validité de ce contrat se concrétise dans l'aménagement même du travail coopératif qui s'appuie sur différents moyens de communication inter et intra-sphères.

Premièrement, l'équipe de recherche répond rapidement, et de manière concertée, aux divers questionnements des professeurs par le biais des listes de diffusion, du forum. Ensuite, les réunions de régulation prennent en compte les préoccupations des professeurs (envoi d'un questionnaire préalable par la sphère 1 aux classes expérimentales avant de produire un ordre du jour). Enfin, l'organisation de la semaine de stage bilan/perspectives prend sa source dans les questions soulevées par les professeurs via un questionnaire et lors du premier jour de ce stage. Cet agencement autorise un processus d'enquête approfondi de certaines questions par les deux sphères.

Par conséquent, le système de capacités « constitué par un système de savoir-faire, de savoir comment » (Sensevy, 2011a. p.102) des professeurs et de l'équipe de recherche autorise une réflexion sur les situations considérées comme problématiques dans la pratique effective. Le principe de symétrie se concrétise dans la prise en compte des « savoirs comment » et « savoirs-que » de chaque agent. Ainsi, dans les échanges, les professeurs et les chercheurs rendent explicites leurs propres conceptualisations (Grangeat, 2009) de l'enseignement/apprentissage. Cette extériorisation des conceptualisations devient « un objet

dont les acteurs peuvent s'emparer pour le transformer, pour se l'approprier et pour enrichir leurs propres conceptualisations » (Ibid., p. 155).

Nous illustrerons notre propos au sein de deux exemples emblématiques (Kuhn, 2008 ; Sensevy, 2011a, 2015) extraits du chapitre 5. Le premier traitera du dialogue d'ingénierie à travers le réagencement des premiers modules avec l'introduction du schéma-ligne. Le second se penchera sur la notion de la différence et son introduction dans la progression toujours à travers le dialogue d'ingénierie.

Exemple emblématique 1 du *dialogue d'ingénierie* : la métamorphose du schéma-train vers le schéma-ligne

Lors du module 2 (2012-2013), les élèves doivent modéliser une écriture additive sur un schéma-ligne. L'usage des graduations et des intervalles de cette représentation apparaît comme problématique puisque trop éloigné des connaissances des élèves. Un professeur du groupe expérimental décrit alors sur le forum du site Internet de la recherche la stratégie de contournement de cette difficulté mise en place dans sa classe. Elle explicite que ses élèves mettent en correspondance les intervalles du schéma-ligne et les unités composant le schéma-train (module 0) et tracent les schémas-ponts correspondant à chaque sous-collection. Cette stratégie est reprise par la sphère 1 pour la réécriture du module 4 (octobre 2012) lors du processus de régulation immédiat. Ce lien entre le schéma-train et le schéma-ligne est ensuite discuté lors du stage bilan/perspective (juin 2013). Ces échanges aboutissent à l'élaboration d'une proposition de progressivité dans l'introduction du schéma-ligne en lien avec le schéma-train à partir du module 0. L'extrait de transcript ci-dessous (auquel nous avons enlevé quelques tours de paroles par rapport à la version initiale pour faciliter sa lecture, cf. Annexe 11) donne à voir un échange représentatif du dialogue inter-sphères sur cette hypothèse de travail. Le 17 juin 2013, lors du stage bilan/perspectives, après avoir travaillé par groupes, les professeurs du groupe expérimental expliquent au collectif comment ils ont repensé l'introduction du schéma-ligne à partir du module 0. Les différents actants font partie de la sphère 2, seul C1 est membre de la sphère 1.

Tdp	Actant	Contenu
1	M	On a aussi dit qu'on voulait introduire les ponts, la ligne dès le module 0.
2	P	En fin du module 0 ?
3	M	Il faudrait faire une séance de plus. Je ne sais pas si c'est marqué ?
4	SM	Voilà, on voulait vraiment lier le module 0 à la ligne graduée et donc effectivement mettre une séance en plus pour
5	VN	On cherchait le lien tout à l'heure, mais c'est ça en fait (…)
6	SM	Le train et la ligne mettre une séance spécifique et continuer à utiliser cette, ce train ligne

7	SM	Ou cette ligne train dans le module 1. Tout ce qui est production d'annonce 3, on pourrait le coder
8	M	3 cubes rouges et deux verts
9	SM	Trois rouges, deux verts et on travaillerait sur la ligne en grand groupe. Je ne sais pas si c'est clair ? avant les parties fictives. C'est-à-dire les enfants font les annonces, et donc en fin de séance on prend une annonce et on systématise euh cette ligne train en utilisant les annonces qui ont été faites.
10	FDM	On reproduit
11	SM	On représente avec des couleurs
12	M	Et la comparer avec des tirages.
13	CLM	Oui, finalement quand il y avait eu l'idée… Quand on arrivait justement sur les parties fictives, d'être dans la représentation avec la ligne et de l'associer au train. En fait finalement ça c'était fait a posteriori mais n'empêche qu'il se faisait quand même, après réflexion. Oui, on avait ajouté le train sous la ligne pour venir illustrer justement le lien entre les deux.
14	C1	Je pense que ça me fait penser ce que vous dites là. J'ai pris de temps de réfléchir pour demain, demain en théorie c'est la centration sur ce qu'on avait appelé les notions. Je pense que ça serait intéressant de vraiment de réfléchir à des notions et d'aller voir vraiment dans les modules de façon bien précise comment ce travail sur les notions amènerait à refaire les modules, enfin à recomposer les modules, à réorganiser certains éléments du module. Et là, par exemple, je pense que cette histoire de ligne train, dès le module 0, voir comment on s'y prend. En gros le problème qu'on se pose, que l'on cherche à travailler, c'est comment euh comment introduire une continuité entre le train et le reste. Comment maintenir le train sur le temps, sur tout le temps de la progression parce que c'est une référence très forte et très concrète et très nette… euh, donc voilà, euh ça pourrait être un des éléments du travail qu'on ferait. On prend les modules de départ, et puis on se dit tiens, comment on pourrait les modifier pour qu'au début et par la suite y ait la continuité du train qui amène à la ligne après avec des bonds etc., etc.

Transcription 64 : extrait d'un échange sur l'introduction du schéma-ligne pendant le stage bilan/perspectives du 17 juin 2013 (Annexe 11)

En prenant appui sur les expériences de leurs élèves et sur leurs connaissances de la progression, les professeurs du groupe expérimental proposent un premier réaménagement des premiers modules pour introduire progressivement le schéma-ligne. Ils suggèrent tout d'abord d'introduire le schéma-pont sur le schéma-train dès le module 0. Deux professeurs réagissent alors à cette proposition aux tdp 4 et 5 en faisant remarquer qu'ils recherchaient eux aussi un lien entre ces deux représentations. Puis, ils proposent de réinvestir ce schéma-train lors du module 1 pour représenter les annonces produites à deux mains. Enfin, ils suggèrent de superposer le schéma-ligne au schéma-train au module 2 pour représenter les écritures additives à deux termes. A la suite de cet échange entre les professeurs du groupe expérimental, C1, enseignant-chercheur et coordinateur de la sphère 1, intervient et montre tout l'intérêt de la réflexion menée par la sphère 2. Il met en évidence l'importance de la notion de continuité didactique et celle de l'expérience des élèves autour de l'usage du schéma-train au cours des premiers modules pour introduire la ligne numérique.

Lors de la réécriture des modules (2013-2014), la sphère 1 prend en compte cette logique comme nous le montre la figure ci-dessous (cf. Figure 54).

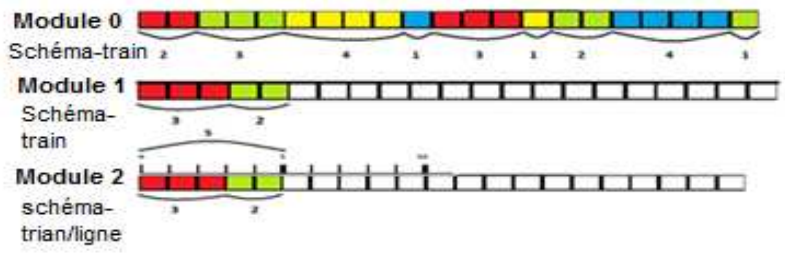


Figure 54 : progressivité dans l'introduction du schéma-ligne

Cet exemple de dialogue donne à voir, d'une part, l'importance pour les professeurs des classes expérimentales de construire une continuité de l'expérience mathématiques des élèves à travers l'usage des représentations. D'autre part, il montre la nécessité pour l'équipe de recherche (à travers les propos de C1) de produire une continuité didactique s'appuyant sur la mise en relation entre systèmes de représentation tout au long de ce début de ce curriculum. Ainsi, la seconde version de la progression (2013-2014), produite par la sphère 1 après ce travail coopératif chercheurs/professeurs, propose une construction graduelle d'une capacité de traduction entre systèmes de représentations lors des premiers modules. Cette mise en traduction s'élabore par une extension conceptuelle par analogie. Elle se concrétise d'un côté par une extension catégorielle horizontale (Hofstadter & Sander, 2013). Les traductions, les mises en analogie entre systèmes de représentation se font entre représentations ayant des caractéristiques communes saillantes, par exemple le train-cubes et le schéma-train. Les concepts sont exprimés par des ressemblances physiques et par des expressions linguistiques telles que « trois cubes bleus correspondent à trois wagons bleus ». D'un autre côté, cette mise en analogie se fait par extension catégorielle verticale (Ibid.) où les systèmes de représentation sont traduits par une écriture mathématique, par un concept plus général (par exemple, une annonce produite à deux mains, deux doigts sur la main gauche et trois sur la main droite, est traduite par une écriture additive « 2 + 3 »). Les écritures mathématiques se réfèrent ainsi à différents modèles qui se définissent selon leur niveau de concrétude et d'abstraction (le schéma-ligne possède une part d'abstraction, de généralité plus importante que le schéma-train).

Exemple emblématique 2 du *dialogue d'ingénierie* : v*ers une continuité dans l'usage des* systèmes de représentation entre comparaison additive et recherche de différence

La continuation de l'étude du travail coopératif (cf. Chapitre 7) a confirmé la volonté des professeurs des classes expérimentales de renforcer la continuité de l'expérience des élèves.

En effet, l'étude des échanges inter-sphères a mis en évidence les difficultés des élèves à user des systèmes de représentation lors de l'introduction de la notion de différence. Cette difficulté est notamment liée à une rupture de continuité dans l'usage des représentations (les mains, le schéma-ligne, le schéma-boîte) dans la première version (2012-2013) du curriculum entre le module 6B et 9.

Pour pallier cet obstacle, il est suggéré d'introduire la notion d'écart dans les situations de comparaison d'écriture additive et de devancer l'implémentation du module « Différence » (du module 9 au module 7) qui vient coder la différence entre des petits nombres par une écriture soustractive. Les extraits de transcriptions ci-dessous viennent illustrer les hypothèses de travail émises lors du dialogue entre les deux sphères. Ces extraits sont issus d'un échange entre les membres de la sphère 1 et 2 lors du stage bilan/perspectives, le 17 juin 2013 autour des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'introduction de la différence. Deux professeurs du groupe expérimental (PE1 et PE2) y exposent comment travailler la notion d'écart entre deux nombres avant le module « Différence » en lien avec notamment le schéma-boîte. C1, membre de l'équipe de recherche, confirme cette idée de construction d'une continuité entre la notion d'égalité et de différence.

PE1 : « *Le module 6, c'est la comparaison de deux annonces. Il y a quatre plus trois et l'autre fait quatre plus un et on compare et pourquoi on ne pourrait pas dire si maintenant on calculait l'écart, la* différence entre les deux annonces *? (...) Et du coup ça permettrait d'embrayer sur le début du module 9 (...) sur les petits nombres* »

PE2 : « *(...)* à partir du module 3, tu peux mettre ici validation collective au tableau avec la boîte ».

« *Ça permettrait dans l'utilisation de la boîte de justement, de,* de tout de suite profiter de sa souplesse *d'utilisation. C'est*-à-*dire que les choses ne soient pas figées, qu'on va placer ce nombre*-là en premier, celui-ci et celui-*là mais plutôt un jeu à trois nombres (...) et on repère ce qu'il peut y avoir* de différent *entre deux d'entre eux (...) avec l'idée d'entourer ce que l'on recherche* ».

C1 : « *C'est vraiment la question de la continuité. Aussi bien la ligne*-train que cette proposition sur *le module 6, casser le module 9 en deux et le répartir, c'est pour assurer* justement plus de continuité *(...). Creuser, approfondir le principe d'égalité et approfondir le principe de différence (...). Il faut qu'il y ait aussi un approfondissement des systèmes de représentation* »

Ainsi, il est proposé lors du stage bilan/perspective de travailler les expressions « A est plus grand ou plus petit que B » et « de combien A est plus grand ou plus petit que B » dans une situation de comparaison avant que les élèves n'abordent le module « Différence ». Pour aborder cette nouvelle notion, les élèves s'appuient sur ces deux expressions et sur les systèmes de représentation connus, l'écriture additive, le schéma-ligne, le schéma-boite et la représentation corporelle (les doigts) au sein d'un jeu représentationnel. Celui-ci se construit progressivement grâce aux relations entre langage oral et systèmes de représentation.

Pour donner à voir les effets de ce dialogue sur les textes, nous nous référons à la seconde version des textes des modules (2013-2014). Ainsi, au module 2 est introduit lors de la comparaison d'une écriture additive à un nombre usuel la notion de plus grand/plus petit en prenant comme référence la comparaison de deux schémas-train/ligne et les signes mathématiques « =, ≠ » (cf. Annexe 16). Lors des modules 3 et 4, l'expression plus grand que/plus petit que est complétée par l'expression « plus grande de/plus petit de » dans une situation de comparaison d'une annonce à trois mains et un nombre ≤ 6. L'usage de ces expressions s'appuie sur la comparaison de deux schémas-train/ligne et sur l'écriture symbolique d'une égalité ou d'une inégalité (=, ≠, >, <). Ces expressions sont, de même, réinvesties au cours des modules 5 et 6 dans le cadre de la comparaison de deux écritures additives à deux termes et en lien avec la comparaison de deux schémas-ligne et deux schémas-boîtes.

Ces systèmes de représentation deviennent des instruments pour comparer deux nombres et modéliser une différence. Ces représentations sémiotiques apparaissent ainsi comme des outils pour la production de nouvelles connaissances.

Pour résumé, l'étude du dialogue entre professeurs et chercheurs a donné à voir l'importance accordée par les professeurs à la notion de continuité de l'expérience. Cette continuité est, d'une part, construite, à travers des situations de comparaison entre les nombres pour aborder la désignation des nombres, l'écriture additive et soustraction. D'autre part, elle s'élabore à travers l'usage des systèmes de représentation.

1.1.2. Ingénierie didactique coopérative et conception de ressources

Au sein de l'ingénierie, il existe une forme d'enseignement mutuel entre chercheurs et professeurs par des principes d'explicitation partagée (Sensevy, 2011a ; Sensevy, Forest, Quilio & Morales, 2013). Cette coopération chercheurs/professeurs repose sur la « détermination commune de fins communes » (Sensevy, 2011a, p. 678). Celles-ci s'appuient sur un arrière-plan commun (arrière-plan qu'elles (re)construisent en retour), sur un cadre de référence commun (Wittgenstein, 2006) qui autorise la communication et l'action. Ce cadre de référence est constitué du texte des différents modules, des expériences de mises en œuvre mais aussi des principes mathématiques sous-jacents au domaine « Situations ».

Nous rapprocherons cette étude de l'ingénierie de celle proposée par Perrin-Glorian (2011) qui est définie selon deux niveaux :

- le premier niveau est, selon Perrin-Glorian (Ibid.), d'assurer expérimentalement la validité de l'ingénierie dans un milieu protégé. Dans l'ingénierie coopérative ACE-ArithmÉcole, les capacités des situations à produire des connaissances attendues sont testées par les professeurs des classes d'étude faisant partie de l'équipe de recherche. Ces classes d'étude sont donc ce milieu « protégé » où les choix fondamentaux de l'ingénierie sont expérimentés ;

- le second niveau, toujours selon Perrin-Glorian (Ibid.), concerne l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire. « L'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont pris comme objet d'étude pour les retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire » (Ibid. p. 68). Dans notre étude, cette adaptabilité des situations est testée par les professeurs des classes expérimentales (pour rappel, environ 120 en 2013-2014) dans un contexte d'enseignement ordinaire. Les professeurs gardent la responsabilité de leur enseignement.

Ainsi, « c'est l'ensemble de ces deux niveaux qu'il faut considérer dans une ingénierie didactique pour le développement des ressources et la formation (…) ou pour une ingénierie de seconde génération » (Ibid., p. 69). Perrin-Glorian nomme ce type d'ingénierie, ingénierie didactique pour le développement et la formation. Cependant, celle-ci n'intègre pas nécessairement l'aspect coopératif comme cela peut être le cas dans l'ingénierie ACE-ArithmÉcole dans laquelle l'organisation autorise l'imbrication des deux niveaux précités. En effet, les professeurs du groupe expérimental deviennent des acteurs actifs de la réflexion autour de la manière dont certaines notions mathématiques sont abordées dans la suite des situations proposées. Par exemple, comme on l'a vu avec les deux exemples emblématiques proposés ci-dessus, ils ont influé sur la chronologie des différents modules en proposant d'introduire plus tôt dans l'année la notion de différence (cf. Chapitre 7) en lien avec les expressions « plus grand/petit que, plus grand/petit de ». De plus, au niveau 1 (précité par Perrin-Glorian) de l'ingénierie, les professeurs des classes d'étude continuent d'expérimenter les différentes propositions de la sphère 1 mais aussi celles émises par la sphère 2. Il y a donc bien ici un processus itératif dans la conception de la progression avec la prise en compte de l'expérience des professeurs de classe d'étude (niveau 1/sphère 1) et des professeurs des classes expérimentales (niveau2/sphère 2). L'analyse des séances ne se fait plus principalement entre les membres de l'équipe de recherche mais aussi par le biais des échanges avec la sphère 2. Il existe donc une expérience lato sensu (Schubauer-Leoni,

Leutenegger, Ligozat & Fluckiger, 2007) constituée par la réorganisation des expériences stricto sensu[116] réalisées dans différentes institutions, dans les classes ordinaires, les classes d'étude et au sein de l'équipe de recherche.

Ce travail coopératif sur l'ensemble d'un curriculum en mathématiques n'est possible que sur un empan temporel long. Ce temps long autorise la confrontation entre l'élaboration théorique et la contingence (Perrin-Glorian, 2011) et permet de prendre en compte les « possibilités d'adaptation des situations par les enseignants dans des conditions ordinaires (…) avec la double perspective de l'étude de la robustesse d'une suite de situations et de la formation des enseignants » (Ibid., p. 57). En effet, les deux sphères peuvent ainsi travailler ensemble dans un certain milieu et tenter de résoudre des problèmes qu'elles se sont appropriés conjointement (Sensevy, 2016).

1.2. Continuité didactique dans l'expérience des élèves et situations de comparaison

Les textes des modules du domaine « Situations » proposent un parcours séquencé par module. Ils fournissent, d'une part, des indications de nature épistémique en décrivant les enjeux mathématiques de chaque module. D'autre part, ils donnent des indications d'ordre didactique en précisant les phases de jeu, les énoncés à produire par le professeur, les mises en relation entre les systèmes de représentation. Ils proposent donc de manière explicite des formes d'agir (Ligozat, 2010). Ils fournissent, de même, des documents destinés aux élèves (feuilles de parties fictives et incitations dans le Journal du Nombre). Ligozat (2010) définit les textes comme

> « des mises en forme discursives et des sémiotisations de pratiques sociales mettant en jeu des savoirs et/ou des savoir-faire. Le caractère prescriptif/incitatif de ces textes vise une réactualisation de ces pratiques dans l'action conjointe du professeur et des élèves (...) le texte est une ressource pour agir, apprendre ou faire apprendre ». (Ibid. p. 305).

Les textes des modules sont donc a priori la principale ressource (Gueudet & Trouche, 2010) disponible pour le professeur. Une ressource est un artefact, « un produit de l'activité humaine élaborée pour s'inscrire dans une activité finalisée (Rabardel, 1995) ou un composant d'un artefact » (Ibid., p 57-58). Le professeur va interagir avec cette ressource (ici le curriculum

[116] L'agent est confronté à une situation-problème précise dans laquelle il accepte de prendre ses propres responsabilités (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat & Fluckiger, 2007).

ACE-ArithmÉcole) en l'adaptant, le revisitant, en le réorganisant dans un processus de conception et de mise en œuvre au cours d'une genèse documentaire. Dans notre travail cette genèse documentaire pourrait s'appliquer non pas à un seul professeur mais à un collectif chercheurs/professeurs qui réadapte la ressource principale. En effet, ils organisent temporellement les savoirs en proposant des séances détaillées. L'élaboration de cette planification des séquences, des séances sur l'année et de leur contenu peut être considérée comme une *œuvre*[117] au sens de Chevallard (1996), œuvre[118] issue du travail coopératif chercheurs/professeurs.

Dans ce second paragraphe, nous donnerons à voir plus précisément les effets du dialogue d'ingénierie sur la continuité didactique dans l'expérience des élèves dans les textes des modules et dans l'effectuation de ces modules dans la classe de P. Nous nous centrons ici sur les situations de comparaison liées à la notion d'égalité ou d'inégalité.

1.2.1. Construction d'une continuité à travers les représentations

Dans ce sous-paragraphe, nous comparerons l'avancée des savoirs des premiers modules proposée par les textes curriculaires de l'année 2012-2013 et par ceux reconstruit l'année 2013-2014 par la sphère 1.

Pour illustrer les effets du dialogue inter-sphères sur les textes, nous avons modélisé les textes des modules sous forme de capacités-cibles et de jeux d'apprentissage. Nous montrons dans cette synthèse l'efficacité de cette modélisation pour donner à voir l'avancée des savoirs et les relations qu'entretiennent entre elles les capacités mises en évidence.

Pour cela, nous avons produit des schémas reprenant les capacités qui modélisent d'abord la première version des textes puis la seconde version. Nous caractérisons les différents types de relations au sein de chaque module et entre les différents modules en distinguant, d'une part, les capacités de traduction (en gris clair) et les capacités de comparaison (en gris foncé). D'autre part, trois types de flèches permettent de visualiser les relations entre les modules :

---

[117] « j'appelle œuvre toute production humaine O permettant d'apporter une réponse à un ou des types de questions Q, questions « théoriques » ou « pratiques » qui sont des raisons d'être de l'œuvre- et cela sans considération de la « taille » de l'œuvre (parmi les œuvres beaucoup sont des « œuvrettes » : par exemple la théorie de la transposition didactique).» (Chevallard, 1996, p. 96).

[118] Margolinas & Wozniak (2010, 2009) parlent d'œuvre du professeur en construction. La planification et la progression des séances sur l'année produit par le professeur se fait autour d'un texte générateur. Le curriculum ACE-ArithmEcole peut être considéré comme le document générateur dans cette recherche.

- les flèches en pointillés relient les capacités-cibles de comparaison ;

- les flèches pleines fines relient les capacités de traduction entre les systèmes de représentation ;

- les flèches pleines épaisses relient les traductions par une écriture symbolique.

De plus, nous avons sémiotisé les différents systèmes de représentation présents dans les modules en optant pour des formes différentes.

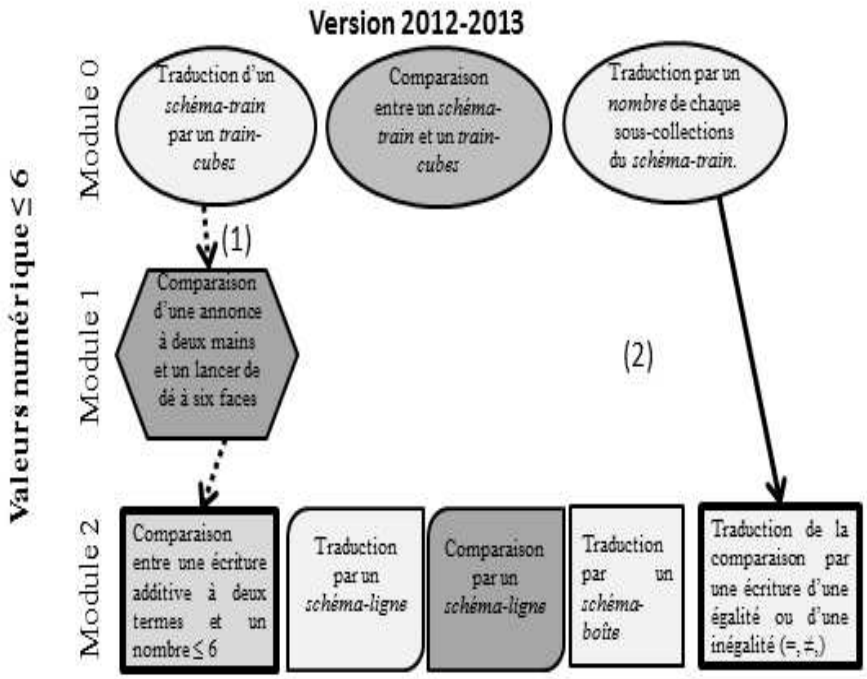


Figure 55 : rupture de continuité

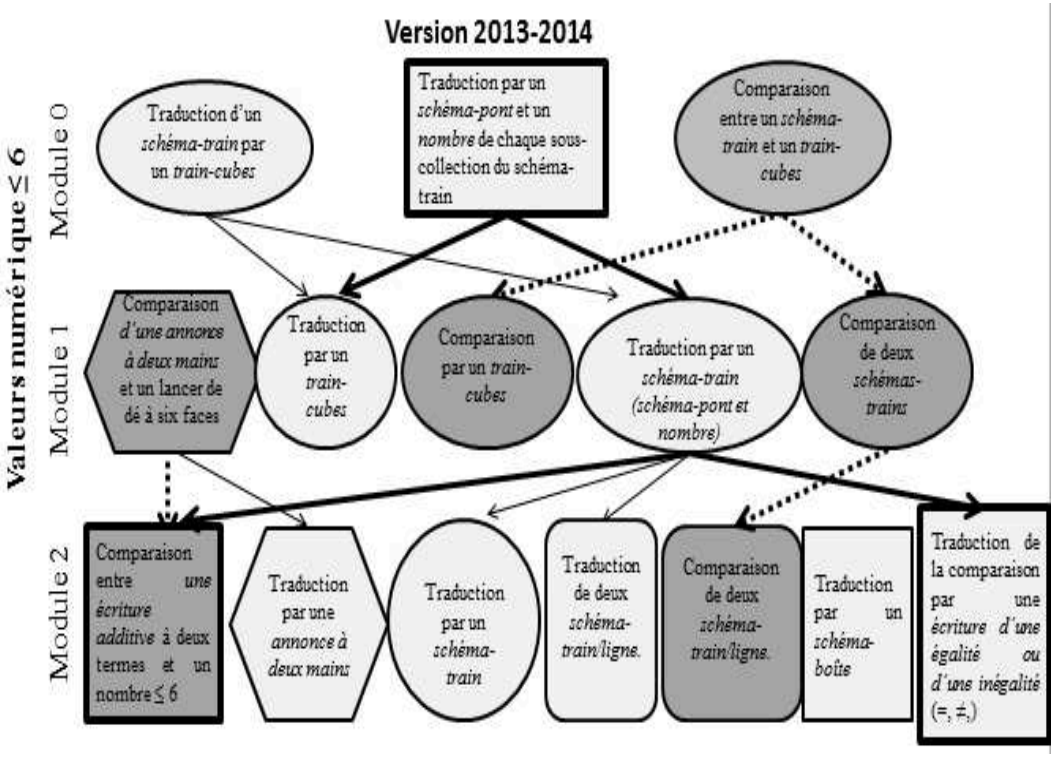


Figure 57 : construction d'une continuité

La figure à gauche (cf. Figure 55) reprend la première version des textes des modules 0 à 3 (2012-2013). Les flèches pointillées (1) indiquent la construction, tout au long des trois premiers modules, de capacités de comparaison par les élèves. Cependant, une discontinuité apparaît car ces comparaisons se font entre différentes représentations :

- module 0 : entre un schéma-train et un train-cube

- module 1 : entre une annonce à deux mains et un lancer de dé à six faces ;

- module 2 : entre une écriture additive et un nombre usuel puis entre deux schémas-lignes.

La flèche pleine fine (2), quant à elle, montre que la capacité de traduction écrite d'une collection par un nombre comme mesure d'une quantité introduite dans le module 0 *n'est pas* réinvestie lors du module 1. De plus, les modules 1 et 2 qui construisent la désignation orale et écrite des nombres inférieurs ou égaux à six ne reprennent pas les systèmes de représentation utilisés lors du module 0 (le schéma-train et le schéma-cubes). Le schéma-ligne et le schéma-boîte (module 2) sont introduits sans référence à une représentation connue des élèves (main, train-cubes ou schéma-train). L'écriture mathématique ne se réfère pas à une connaissance préalable des élèves, à aucune réalité/représentation.

Arrêtons-nous maintenant sur la seconde figure (cf. Figure 56) qui montre l'évolution des textes des trois premiers modules après leur réécriture par la sphère 1 en 2013-2014. Dans un premier temps, la lecture par ligne de cette figure montre que chaque module propose des activités de comparaison et de traduction entre systèmes de représentation. Le train-cubes, le schéma-train sont introduits dès le module 0 ainsi que le nombre pour désigner une collection. Puis, les nouvelles représentations, les mains, le schéma-train/ligne, le schéma-boîte et l'écriture mathématique, sont introduites en relation avec le train-cubes et le schéma-train. Il y a donc une continuité dans l'usage des représentations avec une complexification des mises en relation entre elles au sein des modules. Les capacités de traduction construites dans le module 0 sont réinvesties au cours du module 1 (flèches pleines et minces) pour traduire une annonce produite à deux mains. Ainsi, les comparaisons entre deux trains-cubes et deux schémas-trains viennent valider le résultat de la comparaison entre une annonce à deux mains et un lancer de dé à six faces.

Lors du module 2 apparaissent deux nouveaux systèmes de représentation :

- le schéma-ligne sur lequel vient se superposer le schéma-train ;

- le schéma-boîte.

L'écriture additive à deux termes est traduite par ces nouvelles représentations mais aussi par les représentations déjà connues, les mains et le schéma-train (capacités récentes, voire très récentes). Le résultat de la comparaison entre l'écriture additive et un nombre usuel (≤ 6) est alors traduit par une nouvelle représentation abstraite, une égalité ou une inégalité mathématique (usage des signes « ≠ et = »).

Exemple emblématique 3 du processus de traduction entre représentation : continuité dans *l'usage des représentations*

Pour illustrer notre propos, nous reprenons une schématisation du processus de représentation que le texte du module 2 présente, dans sa version 2013-2014, pour introduire le schéma-ligne et l'écriture mathématique (cf. Chapitre 5).

Figure 58 : processus de traduction entre représentations (module 2)

Lisons le schéma ci-dessus de gauche à droite. Dans un premier temps, l'écriture additive A + B (le représenté) est traduite par une annonce à deux mains (le représentant). Dans un second temps, les mains sont traduites par un schéma-train : du statut de représentant, ce dernier passe au statut de représenté. Dans un troisième temps, ce schéma-train est traduit par un schéma-ligne. Il passe de représentant à celui de représenté. Le schéma-train/ligne devient, dans un quatrième temps, le représenté qui va être traduit par une écriture mathématique (le représentant). La comparaison, quant à elle, se fait par la traduction des deux schémas-train/ligne (le représenté) par l'écriture d'une égalité ou d'une inégalité (le représentant) (cf. Figure 59)

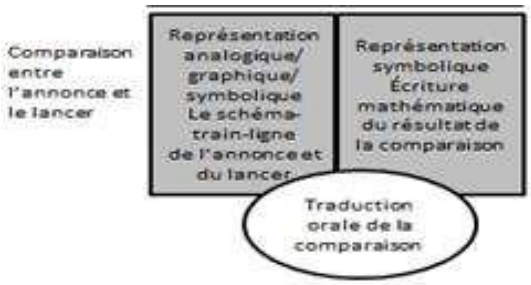


Figure 59 : comparaison entre deux schémas-train/ligne

Cet exemple montre ainsi que lors des premiers modules (0, 1 et 2), on assiste à une complexification relationnelle du milieu dans un jeu représentationnel lui-même complexe, qui constitue un objet fondamental de l'action conjointe du professeur et des élèves. En effet, le travail dans le milieu consiste à proposer aux élèves des systèmes de représentation qu'il s'agit de mettre en relation. Le problème est celui d'analogie, de traduction entre les différents milieux. Par exemple, l'élève doit se rendre capable d'exprimer dans un milieu A (les mains par exemple) ce qui est exprimé dans un milieu B (le schéma-train/ligne, par exemple) et réciproquement.

La construction chez les élèves de ce jeu représentationnel se fait de manière progressive, sur un temps relativement long (environ douze séances). Il y a alors construction d'un système capacitaire de mise en analogie/de traduction, de représentation des représentations.

La représentation abstraite (l'écriture additive) peut être modélisée par différentes représentations matérielles et analogiques. En retour, cette représentation abstraite peut venir modéliser une représentation analogique. Il y a donc bien ici un jeu représentationnel réciproque avec la construction d'un jeu d'aller-retour entre le concret et l'abstrait, entre le particulier (les représentations corporelles, par exemple) et le général (l'écriture symbolique). Mais ce jeu peut aussi s'opérer entre représentations d'un même univers (Brousseau, 2004), matériel, analogique ou symbolique dans une relation de représentation, au sein d'une structure de représentation (vue comme un ensemble de relations et de propriétés). Ce jeu représentationnel n'est donc pas simplement lié à un processus de représentation entre un représenté (l'objet de référence) et un représentant (qui traduit/représente l'objet de référence). Le représenté peut devenir tour à tour représentant et représenté et réciproquement. Le concept de nombre considéré comme une « théorie » (Olivier, 2015) admet donc plusieurs modèles dont la représentation symbolique mathématique fait partie. En effet, comme nous l'avons vu dans notre chapitre 2 (cf. Problématique), la thèse de la sous-

détermination de la référence de Quine amène à voir qu'une théorie peut amener à plusieurs modèles.

Les systèmes de représentation sont devenus un vecteur de la continuité didactique au sein d'un jeu représentationnel réciproque puisqu'ils sont réexpérienciés par les élèves dans des situations nouvelles, pour de nouvelles connaissances mathématiques.

1.2.2. Continuité et systèmes de représentation

Dans ce second sous-paragraphe, nous illustrons cette continuité didactique à travers les systèmes de représentation produite dans les textes curriculaires par l'analyse de la pratique effective. Nous y donnerons deux exemples emblématiques.

Dans les trois premiers modules étudiés ci-dessus, le concept de nombre est appréhendé comme nous venons de le voir via les systèmes de représentation. Chacun de ces systèmes renvoie, d'une part, à un symbole numérique soit par le langage oral (notamment à travers le jeu oral des annonces) soit écrit (schéma-train, schéma-ligne, schéma-boîte et écriture mathématique). Le nombre vient ainsi désigner la mesure de différentes grandeurs : nombres d'entités (doigts, cubes, train-cubes), longueur (schéma-ligne sans graduation), le schéma-train jouant un rôle intermédiaire. D'autre part, l'usage de ces représentations dans des situations de comparaison permet de montrer de manière explicite les relations entre les nombres. Par exemple, sur le schéma-ligne, on peut voir que le nombre 4 est inclus dans le nombre 6, que le nombre 2 + 4 est plus grand que le nombre 1 + 4. Le schéma-boîte, de son côté, donne à voir les relations entre l'addition et la soustraction et donc les relations de réunion et d'inclusion entre les nombres.

Nous proposons la conjecture suivante : pour que les systèmes de représentation et la traduction entre représentations deviennent signifiants, ils doivent être liés à une praxis (Pascal, 1980), à une pratique de traduction de représentation.

Nous illustrons cette pratique de traduction par deux exemples.

Exemple emblématique 4 du processus de traduction entre représentations : le journal du nombre

Le premier exemple (cf. Figure 60) se base sur deux productions issues de Journaux du nombre et montre un usage « créatif » des représentations.

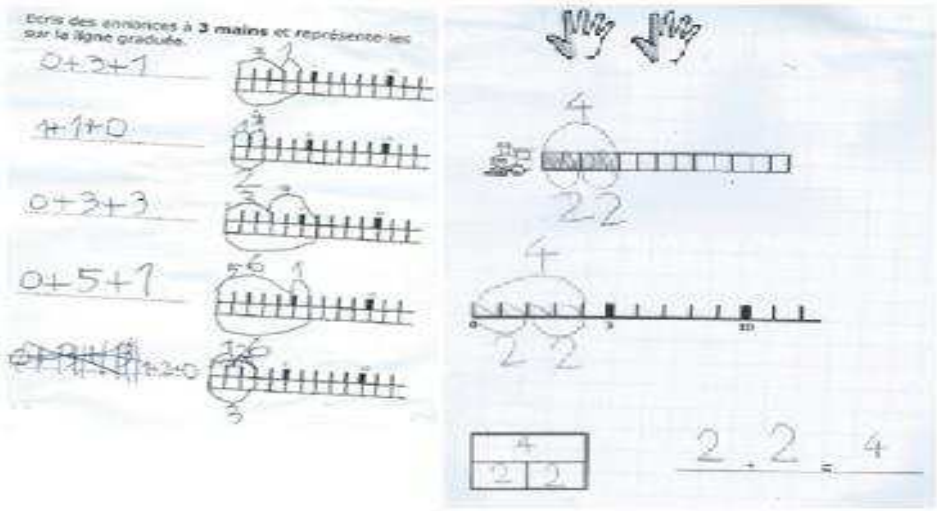


Figure 60 : extraits du Journal du Nombre

Dans la première production, les élèves se donnent une écriture additive à trois termes et la représentent sur un schéma-train/ligne. Nous observons ici que la traduction sur le schéma-train/ligne d'une écriture comportant l'élément neutre (le zéro) permet aux élèves de faire l'expérience de ce qu'elle dénote, qu'on peut décrire comme un ensemble vide.

La seconde production montre comment un élève se donne à lui-même une annonce à deux mains et pratique la traduction entre systèmes de représentation.

Les élèves se donnent donc à eux-mêmes une certaine pratique de la traduction entre systèmes de représentation, dans une dialectique d'inscription et d'excription (d'extraction) (Chevallard, 2004).

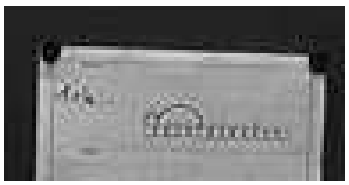
Exemple emblématique 5 du processus de traduction entre représentations : pratique du jeu représentationnel

Le second exemple est extrait de l'étude des séances conduites par la professeure (P). Il montre l'intérêt d'un travail langagier particulier qui amène les élèves à raconter, décrire ce qui se passe dans une situation donnée.

Au cours de la deuxième séance du module 2, les élèves doivent valider ou invalider le résultat de la comparaison entre « 1 + 4 » et « 5 » effectué par un élève lors de la séance précédente et considéré par cet élève, de façon erronée, comme perdante ($1+ 4 \neq 5$)[119]. Un premier élève énonce que cette annonce est perdante puisqu'elle est égale à 14. P lui propose

[119] Pour rappel, une annonce est gagnante si elle est égale au résultat de lancer d'un dé à six faces et perdante si elle est différence du résultat du lancer.

alors de traduire cette écriture sur ses deux mains, ce qui vient infirmer sa proposition. Un second élève énonce le fait que l'annonce produite est gagnante puisque « 1 + 4 = 5 ». Pour vérifier cette affirmation, la professeure introduit deux schémas-trains/lignes en demandant aux élèves de « vérifier si Juliette (la seconde élève) nous dit bien l*a vérité, qu'elle a bien* gagné ». Elle s'adresse à l'élève au tableau et dit « qu'est-ce que tu vas nous faire pour nous parler de l'annonce un plus quatre ? ». Par ces énoncés, la professeure exprime le fait que la représentation symbolique (l'écriture chiffrée) doit pouvoir être parlée, être traduite par la représentation analogique/symbolique (le schéma-train/ligne) dans la mesure où ces deux représentations réfèrent à la même réalité mathématique. La professeure oriente l'action de l'élève vers un processus de représentation. L'élève trace, tout d'abord, le premier schéma-pont de « 1 » que la professeure met explicitement en correspondance avec le premier terme de l'addition. Puis, il trace le second schéma-pont désignant le second terme de l'addition.



Photogramme 93 : représentation sur le schéma-train/ligne de "1 + 5"

La professeure demande alors à cet élève s'il s'est appuyé sur les unités du schéma-train (juxtaposé au schéma-ligne) pour tracer les schémas-ponts. Il répond par l'affirmative. La professeure met alors en relation chaque élément des trois systèmes de représentation présents au tableau comme nous le montre les vignettes de la bande dessinée (Morales, 2014) ci-dessous.

La professeure use d'un langage particulier notamment du verbe « parler » pour que les élèves décrivent et extraient des éléments du milieu-problème pour les besoins de l'enquête (Kim, 2015). En effet, la professeure entraîne les élèves à ne pas produire une lecture des représentations mais à leur donner vie (Chevallard, 2014) en leur demandant de rechercher à quoi correspond l'écriture « 5 + 1 » dans un milieu particulier (ici le schéma-train/ligne) dans un processus d'excription (Ibid.). P met donc en relation d'une manière complexe les

différentes représentations plus ou moins symboliques (au sens premier, nous admettrons que toute représentation est symbolique, en ce sens qu'elle est « mise pour quelque chose »). En effet, la professeure pointe la première unité (le premier « wagon » du schéma-train/ligne) en le mettant en relation avec le nombre qu'il représente, « un wagon » pour par la suite le faire correspondre avec le schéma-pont « Louis a fait un pont de un » en écrivant le nombre « 1 » au-dessus du schéma-pont. Puis, P compte de un à un les unités de la portion du schéma-train/ligne que le second schéma-pont réunit. Elle montre alors le second terme de l'écriture symbolique en disant « je compte un, deux, trois, quatre pour parler du quatre » et écrit le cardinal désignant la sous-collection représentée par le schéma-pont « 4 ». L'idée originale de P est qu'une *représentation parle d'un nombre*. Ainsi, P produit un travail d'explicitation, effectué dans et par le langage verbal. Cette pratique discursive amène à parler le jeu représentationnel, à lui donner une justification dans une pratique. Le langage verbal en tant que « méta-système » de représentation, de méta-système sémiotique » occupe donc un rôle fondamental qui permet de parler, de commenter, de mettre en relation les autres systèmes sémiotiques et de les traduire entre eux.

Ici, l'usage des signes mathématiques est associé à la pratique mathématique, à la praxis (Pascal, 1980). Cette pratique va permettre de venir contrôler, vérifier et modéliser des situations. En effet, les concepts mathématiques sont contenus dans les systèmes de représentation. Ces représentations peuvent être alors considérées comme des ancrages matériels (Hutchins, 2005). Les caractères génériques du nombre, les connaissances arithmétiques et pré-algébriques sont donc formulés par des symboles externes (Carey, 2011), le langage naturel, le langage mathématique et les systèmes de représentation.

La production d'un jeu de langage spécifique à une certaine pratique s'incarne ici par la traduction entre les représentations. La maîtrise de ce jeu de langage en tant que maîtrise technique d'une traduction d'un système de représentation par un autre dans une activité, ici un jeu représentationnel, dans une forme de vie (Wittgenstein, 2004, Glock, 1996) a pour objectif de produire une forme de puissance d'agir chez les élèves, en situation, qui progressivement devient une habitude. Par exemple dans l'exemple 5, le jeu de langage peut être considéré comme le fait de dire et de montrer la correspondance entre un schéma-pont de quatre intervalles et le second terme de l'écriture additive. Toute pratique crée un langage spécifique qui permet sa compréhension et sa transmission. En retour, tout langage spécifique s'éclaire lorsqu'on le renvoie à une pratique particulière.

Ainsi, la continuité permet de montrer, « sur la base des expériences antérieures, ce à quoi les élèves se réfèrent » (Wickman, 2012, p. 72) notamment lorsque les actes et les paroles sont liées.

Pour conclure, nous faisons l'hypothèse que ce système capacitaire de traduction construit au cours des premiers modules peut être modélisé par un jeu épistémique source lié à une pratique de référence, ici l'activité du chercheur. Ainsi, Hofstadter et Sander (2013) proposent une suite d'exemples dans lesquels des scientifiques (Einstein, Poincaré, Cardan, Villani…) usent de l'analogie comme moteur de la recherche scientifique. Nous reprenons ci-dessous une citation d'Henri Poincaré présentée dans l'ouvrage, *L'analogie, le cœur de la pensée* :

> « Croira-t-on, d'autre part, qu'ils (les mathématiciens) ont toujours marché pas à pas sans avoir la vision du but qu'ils voulaient atteindre ? Il a bien fallu qu'ils devinassent le chemin qui y conduisait, et pour cela ils ont eu besoin d'un guide. Ce guide, c'est d'abord l'analogie » (Ibid., p. 528)

Ainsi, les grandes découvertes de la physique se sont produites par « une quête d'analogie cachée entre concepts différents » (Ibid., p 602).

1.3. Continuité didactique dans l'expérience des élèves, recherche de la différence

Dans ce troisième paragraphe, nous montrerons les effets du dialogue d'ingénierie sur la suite du domaine « Situations » et en particulier sur l'introduction de la différence.

Les deux sous-paragraphes ci-dessous reprennent la même structure que le paragraphe précédent avec une synthèse sur les effets de ce dialogue sur la textualisation des modules et sur la pratique effective accompagnée d'exemples emblématiques.

1.3.1. Textes de progression et continuité didactique

La figure ci-dessous synthétise les capacités-cibles de la version 2012-2013 à partir du module 3. Nous sémiotisons les relations entre les modules de la même manière que dans le paragraphe 1.2

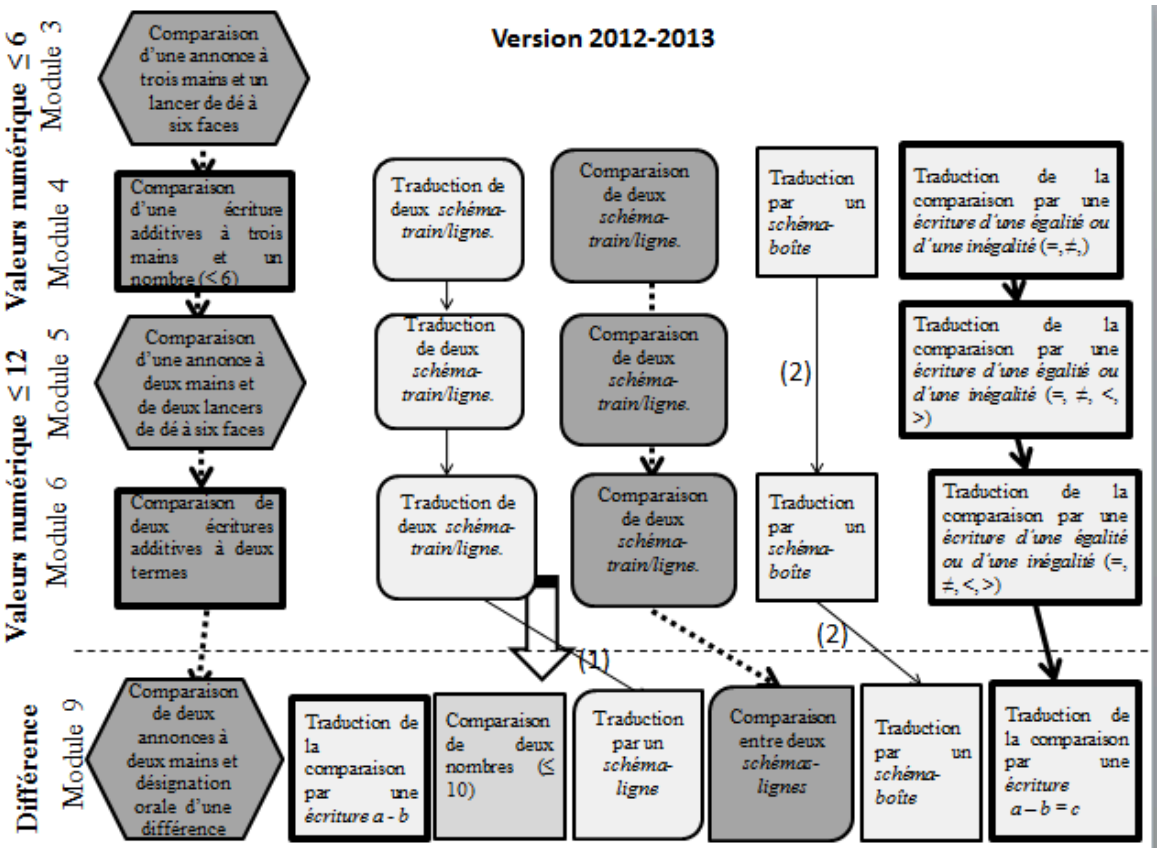


Figure 61 : rupture de continuité et différence

Elle montre que, dans un premier temps, l'usage du schéma-boîte tend à disparaître à partir du module 5 jusqu'au module 6. La capacité de traduction très récente d'une écriture additive par un schéma-boîte (module 2) n'est donc pas réexpériencié par les élèves (flèche (2)). De plus, le schéma-boîte et le schéma-train/ligne ne sont pas réinvestis lors des modules 6B 7, 8[120] (flèches (1) et (2)) avant l'introduction de la différence. Il existe donc une rupture dans la continuité de l'expérience des élèves de son usage dans des situations de comparaison (flèche (1)). Par conséquent, l'introduction de la différence par la comparaison de deux mains, la comparaison de deux schémas-ligne et sa modélisation par le schéma-boîte ne peuvent s'ancrer dans les habitudes sémiotiques des élèves. Les élèves connaissent donc des difficultés à passer d'une modélisation de la comparaison des structures additives par les systèmes de représentation à la modélisation de la différence entre deux nombres par ces mêmes représentations. La transformation des habitudes requiert qu'une continuité s'établisse entre les connaissances antérieures récentes, voire très récentes (Wickman, 2012).

[120] Ces trois modules 6B, 7 et 8 introduisent les groupements par 10 et les comparaisons de grandes écritures (cf. Chapitre 7).

Nous présentons maintenant de manière synthétique les modifications apportées lors de la réélaboration des modules par la sphère 1.

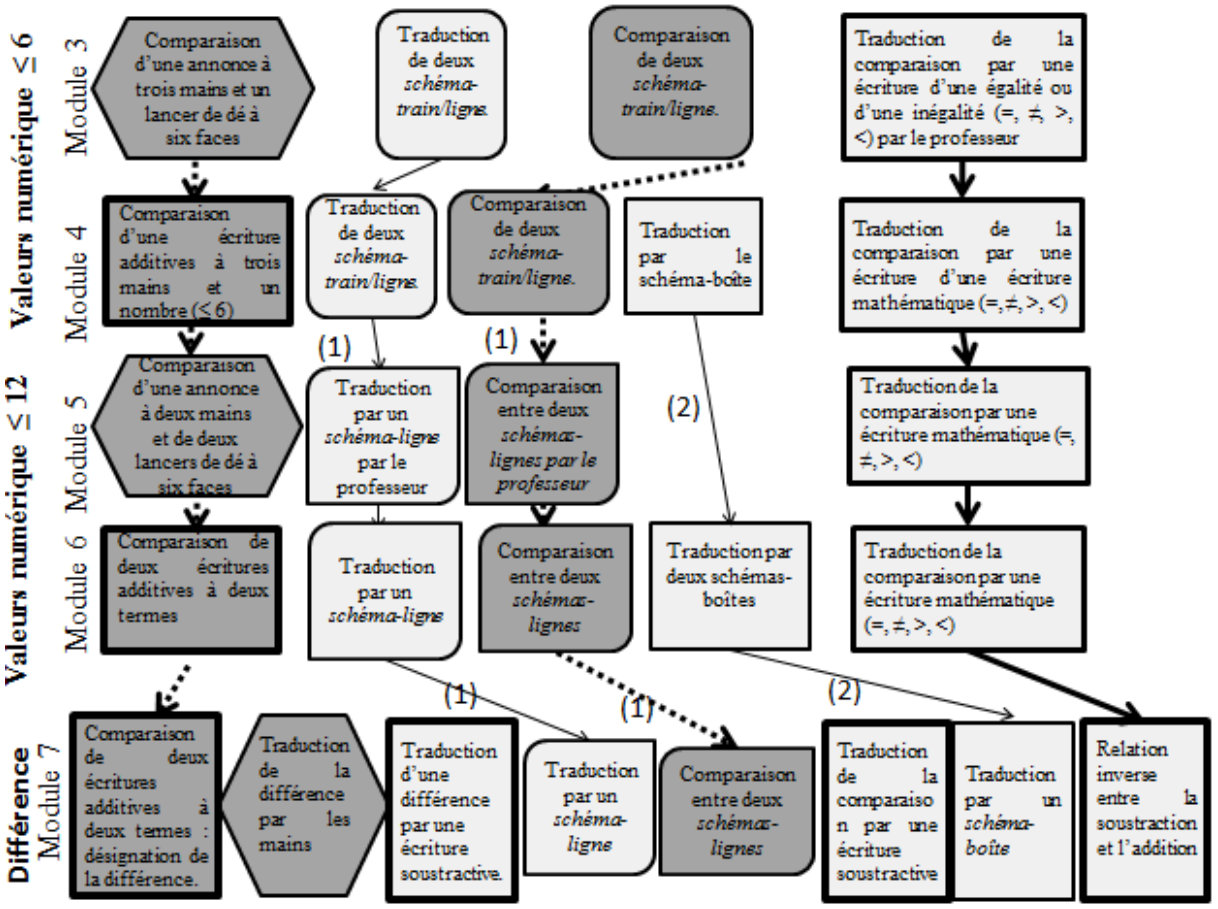


Figure 62 : continuité et différence

La figure ci-dessus (cf. Figure 62) montre comment les capacités-cibles émergent dans les textes des modules suivants (du module 3 au module 7) dans la version 2013-2014 produite après le travail coopératif entre l'équipe de recherche et les professeurs du groupe expérimental. Dans un premier temps, les modules 3 et 4, situations de comparaison orale et écrite d'une annonce à trois termes et d'un nombre inférieur ou égal à six, amènent les élèves à réexpériencier les traductions entre systèmes de représentation pour modéliser la situation de comparaison proposée sous différentes formes :

- mains (capacité ancienne) ;

- schéma-train/ligne (capacité récente) ;

- schéma-boîte (capacité récente) ;

- écriture mathématique (capacité récente).

Pour les modules 5 et 6, les valeurs numériques augmentent (jusqu'à 12). Les élèves comparent par oral et par écrit une annonce à deux mains avec deux lancers de dé à six faces. Les capacités de traduction et de comparaison entre systèmes de représentation sont réinvesties dans des situations isomorphes au module 3 et 4. Cependant, le schéma-train/ligne se voit, au cours du module 4, dépouillé du schéma-train (flèche (1)). Ce système de représentation est réexpériencié dans les situations de comparaison aux modules 5 et 6. Les capacités de traduction et de comparaison de deux schémas-lignes deviennent des capacités anciennes, au fur et à mesure de l'avancée du temps didactique. Elles sont donc de plus en plus signifiantes puisque ancrées dans les habitudes mathématiques des élèves. De même, pour le schéma-boîte dont l'usage continue (excepté au module 5 (flèche (2)). Ces systèmes de représentation deviennent des instruments de compréhension et d'action dans les situations additives de comparaison qui sont ensuite réinvesties au module 7 dans une situation de recherche de différence.

Ainsi, lors de l'introduction de la différence par des situations de comparaison entre deux écritures additives (cf. Chapitre 7), les systèmes de représentation deviennent des instruments de représentation de la différence et non plus seulement des instruments de comparaison entre deux nombres.

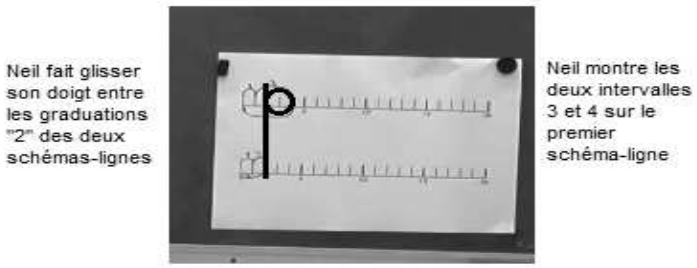
1.3.2. Continuité de l'expérience des élèves dans une situation de différence

Cette continuité dans l'usage des représentations peut être illustrée par un nouvel exemple emblématique dans l'effectuation du module 7 dans la classe de la professeure (P) membre de l'équipe de recherche (cf. Chapitre 8). Cet exemple donne à voir comment les systèmes de représentation dont l'usage est connu des élèves dans des situations de comparaison permettent d'enquêter sur la notion de différence entre deux nombres.

Exemple emblématique 6 *de l'introduction de la différence à partir des systèmes de* représentation : modélisation *de l'écart entre deux nombres*

Lors de la première séance de ce module, la notion de différence est introduite à partir de la comparaison de deux écritures additives que deux élèves produisent sur leur ardoise « 1 + 3 » et « 1 + 1 ». La professeure demande collectivement de trouver la différence entre ces deux nombres. Devant les difficultés des élèves à trouver cette différence, P leur propose de

traduire ces écritures par une annonce à deux mains. Cette traduction n'amenant pas les élèves à produire une réponse adéquate, la professeure introduit deux schémas-lignes sur lesquels les élèves représentent les deux écritures additives. A partir de ces représentations, P demande aux élèves « *quelle est l'annonce la plus grande, la plus petite, quelle est la différence* ? *(...)* Est-*ce qu'on peut voir de combien l'annonce de Neil est plus grande* ? ». Un élève vient ainsi délimiter avec son doigt la portion représentant la différence entre les deux écritures additives sur le premier schéma-ligne (cf. Photogramme 94). Il montre la portion du premier schéma-ligne plus grande/longue que le second schéma-ligne. Il borne ainsi la portion de la demi-droite désignant ce que le premier schéma-ligne a « de plus » que le second.



Photogramme 94 : représentation de la différence sur deux schémas-lignes

Par cet exemple, nous observons tout d'abord que la professeure demande aux élèves d'investiguer différentes représentations connues pour rechercher la différence entre deux nombres. Les deux écritures additives (le représenté) sont traduites par deux annonces à deux mains (représentant) qui seront-elles-mêmes traduites (représenté) par deux schémas-lignes (représentant). Les capacités de traduction anciennes entre représentations sont donc ici réexpérienciées par les élèves. L'instrument schéma-ligne autorise les élèves à enquêter sur la différence. Ce jeu représentationnel offre des possibilités d'action, un système stratégique aux élèves pour aborder une nouvelle notion mathématique.

Ainsi, « le savoir est intermédiaire et instrumental, l'action quand elle est conduite par la connaissance, est une méthode et un moyen, non pas fin » (Dewey, 1915/2014, p. 56). En effet, la connaissance est, pour Dewey, un instrument comme les concepts sont des outils (Hildebrand, 2016). Les capacités épistémiques que les élèves ont élaborées leur permettent d'aborder une nouvelle notion mathématique et d'investiguer le milieu-problème proposé. Ils enquêtent alors sur le concept de différence en mobilisant les systèmes de représentation connus (capacités anciennes). Les habitudes sémiotiques de comparaison de structures additives sont alors interrogées dans une nouvelle situation.

1.4. Jeu d'imitation et systèmes de représentation

Les analyses produites dans ce travail de thèse, notamment la modélisation des textes de progression des modules, ont mis en évidence l'instauration d'un jeu d'imitation par et pour l'usage des représentations. Dans un tel jeu d'imitation, c'est le professeur qui donne à imiter ce que les élèves doivent imiter. C'est de cette manière que l'introduction d'une nouvelle représentation est prise en charge par le professeur. Celui-ci montre comment l'utiliser en appui sur des capacités construites précédemment. Le jeu d'imitation s'appuie, par conséquent, sur un certain contrat didactique puisqu'il ne fonctionne que si les comportements à imiter ne sont pas trop éloignés des connaissances à construire.

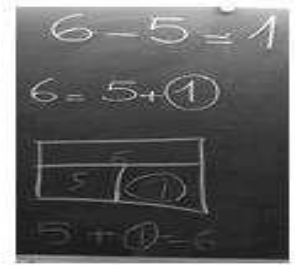
Par exemple, l'analyse microscopique produite du texte de la première séance du module 2 (version 2012-2013, cf. Chapitre 5) donne à voir que le jeu d'imitation au cours duquel le professeur montre et explicite l'usage du schéma-ligne aux élèves n'est pas efficient. Il ne s'appuie pas sur des connaissances préalables des élèves notamment sur l'usage des intervalles et graduations. La distance entre le contrat et le milieu qu'il s'agit d'accommoder est trop important (cf. Chapitre 5). Pour bien imiter, il faut comprendre, ce qui n'est pas (encore) le cas ici.

La réécriture des modules et en particulier celle du module 2 montre comment ce jeu d'imitation lors de l'introduction du schéma-ligne prend appui sur des connaissances préalables des élèves. En effet, le texte de progression propose au professeur de montrer aux élèves comment user des graduations et intervalles du schéma-ligne pour représenter des nombres en se référant à des systèmes de représentation (schéma-train, mains) connus qu'ils ont, au préalable, expérienciés dans diverses situations (module 0 et 1). Dans un second temps, les élèves font l'expérience de l'usage de ces représentations lors des parties fictives et dans le Journal du Nombre (par exemple, ils se donnent des écritures additives qu'ils traduisent sur un schéma-ligne, cf. Figure 60).

Nous illustrons ce jeu d'imitation dans la pratique effective par l'analyse d'un extrait issu du chapitre 8.

Exemple emblématique 7 *de l'introduction de la différence à partir des systèmes de* représentation : *jeu d'imitation et écriture soustractive.*

Dans l'analyse des épisodes liés au module 7 (cf. Chapitre 8) dans la classe de P, l'introduction de l'écriture soustractive se fait par un jeu d'imitation. Pour cela, P demande tout d'abord aux élèves de rechercher une écriture mathématique désignant l'expression « 6, c'est 1 de plus que 5 ». La professeure oriente les élèves dans une enquête qui consiste à user des écritures et expressions que les élèves connaissent (l'écriture additive). Les élèves produisent alors des écritures erronées (6 + 5, 6 < 5…). Pour relancer la recherche, P note au tableau les trois nombres « 6, 5 et 1 » et trace un schéma-boîte que les élèves complètent correctement. A partir de ce schéma-boîte, la professeure demande aux élèves de produire l'écriture mathématique traduisant les relations entre les nombres que le schéma-boîte modélise. Un élève écrit alors « 5 + 1 = 6 ». Puis, P rappelle que l'on s'intéresse à la différence de « 1 ». Un élève entoure donc le nombre 1 dans l'écriture additive et dans le schéma-boîte. La professeure introduit alors l'écriture soustractive qui vient coder, signer la différence.



Photogramme 95 : tableau de recherche sur la différence

Les élèves vont faire cela sur un temps court mais aussi sur un temps long en réexpérienciant la recherche de la différence entre deux nombres dans les systèmes de représentation et par l'écriture soustractive.

La professeure tente de faire produire aux élèves une écriture soustractive tout en sachant qu'ils n'ont pas tout de suite les moyens de cette production. Les élèves doivent assimiler/accommoder le milieu à partir de leurs connaissances antérieures. La professeure montre alors aux élèves comment signer cette différence par une écriture soustractive dans un jeu d'imitation par « un processus de recherche, d'examen, d'investigation » (Dewey, 1916/2011 p. 232) puisque « acquérir a toujours un caractère secondaire et instrumental par rapport à l'acte de s'enquérir » (Ibid.). Le jeu d'imitation découle ici de l'enquête préalable des élèves où ils éprouvent leurs connaissances déjà-là. Cet exemple montre que la continuité de l'expérience des élèves se cristallise dans les systèmes de représentation et dans la durée didactique. Il montre aussi que l'imitation que le professeur propose aux élèves peut être un inducteur de l'enquête.

1.5. Vers un temps de situation

L'activité des élèves est donc orientée vers la mise en traduction de différentes modélisations du nombre tout au long des modules analysés dans des situations de comparaison et de recherche de la différence. Elle s'appuie sur des connaissances déjà construites pour continuer l'enquête. Selon Dewey (1967), « dans une enquête scientifique, le critère de ce qui est considéré comme établi ou comme connaissance, est qu'il soit suffisamment établi dans une enquête ultérieure pour qu'on puisse s'appuyer sur lui » (Ibid., p. 65). Les formes logiques de l'enquête s'effectuent « sur et avec du matériel existant » et « sur et avec des symboles » (Ibid. p. 72). Ainsi, les analyses produites en termes de capacités-cibles et de jeux d'apprentissage des différents textes curriculaires montrent une évolution du curriculum vers un temps de situation. Il s'agit de construire une continuité didactique où le curriculum n'est pas linéaire mais conçu comme un réseau en interconnexion (Richland, Stigler & Holyoak, 2012). Cette continuité est garantie par les systèmes de représentation. Par cette « méta-capacité » de représentation construite par les élèves tout au long de la progression, les élèves sont conduits à enquêter dans de nouvelles situations à partir de leurs connaissances antérieures. Nous ne sommes plus dans le paradigme de la visite des œuvres car comme le précise Chevallard (2016), « le paradigme de la *visite des œuvres* aboutit aisément au fétichisme des œuvres, à leur sacralisation, à leur sanctification : ce qui, à l'origine, est produit comme un moyen pour répondre à des questions devient alors une fin en soi » (Ibid., p. 33). Dans notre étude de cas, les représentations sont considérées comme des moyens pour répondre à des questions, pour enquêter, c'est-à-dire pour permettre un questionnement ou pour travailler un problème, et non pas comme des fins. Ces représentations sont réinvesties dans les différentes situations pour appréhender de nouvelles connaissances mathématiques, l'apprentissage n'est donc plus isolé. Cependant, les élèves ne sont pas à l'origine des questions : elles sont construites par le professeur et/ou le collectif d'élèves

Il y a donc un passage d'un temps d'objet à un temps de situation où les élèves sont rendus capables de décrire différentes réalités, de modéliser des concepts mathématiques abstraits par des concepts mathématiques concrets et réciproquement. Ils sont conduits à établir une continuité dans l'usage des représentations pour investiguer le réel mathématique.

1.6. Construction de la continuité des élèves et gestes d'enseignement

Les gestes d'enseignement produits par les trois professeures observées amènent à questionner l'épaisseur du travail épistémique de l'élève dans l'action conjointe. Cette densité épistémique peut se référer en particulier à :

- la qualité épistémique intrinsèque de ce qui est produit, des capacités aux yeux d'un connaisseur des mathématiques de l'activité engagée. Celle-ci peut, par exemple, se concrétiser dans la mise en relation/traduction de deux systèmes de représentation pour représenter une annonce produite à deux mains ;

- la position topogénétique de l'élève, qui doit être haute et donc attester raisonnablement du comportement, des capacités épistémiques mis en jeu par les élèves. Cette position permet de donner à voir les capacités épistémiques dont il est détenteur.

Nous contrastons dans ce qui suit le comportement des professeures débutantes PES1 et PES2 avec le comportement de P, professeure expérimentée.

Dans les épisodes étudiés menés par les deux professeures stagiaires, des professeures débutantes, la modélisation par la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression montre que ces professeures restent à l'initiative du processus de traduction et de comparaison entre représentations. Elles orientent par leur action et leur expression la dynamique mésogénétique et chronogénétique. L'action conjointe est donc limitée puisque les élèves ne peuvent faire une expérience, ne peuvent éprouver et subir les conséquences de leur action sur le milieu à partir de leurs connaissances antérieures. Les professeurs n'organisent donc pas les conditions de la dévolution (Brousseau, 1998) en ne laissant pas les élèves agir en première main[121]. Les professeures ne laissent pas les élèves exprimer publiquement leurs stratégies et ne peuvent ainsi traiter publiquement les relations entre représentations. La position topogénétique des élèves reste basse tout au long du processus de représentation. L'expression du professeur vers le milieu et le contrat empêche, limite la part d'entraînement des élèves et donc l'incorporation d'un modèle d'action (Sensevy, 2016) et l'intégration d'un geste (Billeter, 2010), la traduction des représentations entre elles. Le comportement des élèves ne peut donc pas attester d'une compréhension du jeu de traduction et de comparaison

[121] Cela est particulièrement mis en évidence lorsque nous avons proposé différentes stratégies contrefactuelles qui donnent à voir d'autres possibles.

entre représentations. Nous faisons l'hypothèse que ces professeurs font jouer un jeu et non le jeu mathématique adéquat sans prendre en compte l'enjeu épistémique du jeu d'apprentissage, sans qu'un travail mathématique soit véritablement mis en place (Schubauer-Léoni & al, 2007).

A contrario, les séances menées par P, professeure expérimentée et membre de la sphère 1, montrent comment elle s'appuie sur les connaissances antérieures des élèves pour qu'ils enquêtent dans le milieu, dans une dialectique subtile entre contrat/milieu et réticence/expression. L'enquête didactique des élèves s'élabore grâce à la continuité entre les situations proposées et à la continuité dans l'élaboration des capacités de traduction et de comparaison à partir des systèmes de représentation.

La position topogénétique des élèves, dans les séances menées par P, reste généralement haute dans la mesure où la professeure les laisse produire eux-mêmes les différents systèmes sémiotiques et entrer dans le processus de représentation. Ils deviennent les représenteurs publics. Ils prennent donc en charge, en première main, dans un processus de dévolution, le jeu représentationnel. Ce faisant, l'élève est chronogène, ce qui lui permet d'agir sur la topogénèse. Par exemple, dans épisodes étudiés au chapitre 8, P laisse les élèves enquêter sur la différence à partir du schéma-boîte et du schéma-ligne. Cette manière de faire jouer le jeu met en évidence les connaissances de P sur la valeur épistémique (la traduction entre représentations assurant la continuité) et épistémologique (dans une conception où le nombre constitue la mesure d'une grandeur) des instruments que sont les systèmes de représentation, leur valeur étant dépendante de l'usage auquel on les destine (Dewey, 1915/2014).

Les concepts mobilisés pour étudier les épisodes sélectionnés dans ces séances sont principalement liés à la double dialectique contrat/milieu et réticence/expression. En effet, la production de gestes d'enseignement doit permettre aux objets de faire milieu et de produire du temps de situation ou un temps d'objet par un agencement particulier du milieu et une gestion fine de l'orientation de l'action des élèves. L'analyse de l'action conjointe à travers cette double dialectique donne à voir de manière microscopique comment les gestes professoraux entraînent ou non un rapport de première main des élèves à une réelle expérience mathématique. Ainsi, cette double dialectique montre si le professeur autorise ou non un rapport de première main, un rapport public de l'élève à l'expérience mathématique et s'ils peuvent devenir eux-mêmes producteurs du temps didactique (Sensevy, 1998). En effet, « la fonction principale du professeur n'est plus ici de proposer toutes faites ses propres réponses mais d'impulser, d'alimenter, de réguler l'enquête en ne cédant jamais sur

l'exigence de construction et de validation optimales de la réponse que l'on recherche » (Chevallard, 2015, p. 9-10). Ainsi, la discussion dans la classe autour des stratégies de résolution de problèmes posés doit autoriser la mise en relation entre différentes idées et concepts mathématiques (Hiebert & Grouws, 2007). De même, Mercer (2008) note que le premier outil qui donne sens à l'expérience collective dans une classe est le langage :

> « Language is our prime tool for making collective sense of experience, and the extent to which students will perceive cohesion and coherence in their classroom work may be heavily dependent on how dialogue mediates that activity. Talk with a teacher, and with other students, is perhaps the most important means for ensuring that a student's engagement in a series of activities contributes to their developing understanding of science, mathematics or any other subject as a whole » (Ibid. p. 4-5).

Cette expérience mathématique doit se penser dans l'action conjointe.

> « It highlights the importance of middle-school curricula that provide opportunities for students to engage in genuine problem solving that supports the development of central mathematical concepts » (Moore, 1996 in Cobb & Mccain, 2001, p. 126)

Dans cette perspective, le travail sur les pratiques des professeurs débutants peut être considéré comme une sorte d'instrument permettant de mieux comprendre les nécessités d'enseignement de la progression du domaine « Situations ». En effet, la description et l'analyse des pratiques des professeurs débutants que nous venons de présenter ci-dessus pointent certains points de vigilance. Elles montrent à quel point la gestion des séances de la progression ACE est technique et demande des gestes spécifiques sans lesquels le dispositif ne peut se concrétiser didactiquement dans une action conjointe exigeante. Se pose alors la question de la diffusion de ce curriculum.

2. Limites de l'étude et perspectives

2.1. Limites et perspectives théoriques

La modélisation des textes curriculaires en termes de jeux d'apprentissage (de contrat et de milieu) et de capacités épistémiques doit à être mise à l'épreuve à partir d'autres textes de progression. Dans cette thèse, cette modélisation est possible en dehors d'une action conjointe effective entre professeurs et élèves dans la mesure où les textes ont été pensés et écrits en prenant appui sur des films de séances de classes d'étude et donc en imaginant une relation didactique entre le professeur et les élèves. Les jeux d'apprentissage renvoient au jeu du

professeur sur celui de l'élève et réciproquement. Ces jeux d'apprentissage doivent rendre les élèves capables de jouer à un ou plusieurs jeux épistémiques (Sensevy, 2011a). Cependant, comme nous l'ont montré les analyses sur la construction d'une capacité de traduction entre représentations, ce jeu épistémique s'élabore progressivement au sein d'une continuité didactique dans l'expérience des élèves.

Nous avons modélisé dans ce travail le processus de représentation en tant que jeu représentationnel qui regroupe l'ensemble des éléments suivants :

- le représenté ;
- le représentant ;
- la représentation, relation établie entre un représenté et un représentant ;
- le représenteur (produisant un représentant) ;
- l'adressé ;
- le style de pensée, qui constitue l'arrière-plan du jeu représentationnel.

Notre travail apporte un nouvel élément, celui du lien de réciprocité entre l'objet de référence et la représentation de celui-ci.

La construction d'un style de pensée (Fleck, 2005) au sein d'un collectif de pensée (ici, la classe mais aussi les sphères 1 et/ou 2) s'élabore progressivement. En effet, l'introduction de nouveaux systèmes de représentation s'appuie sur d'anciens (par exemple le schéma-ligne s'appuie sur le schéma-train) dans un jeu d'imitation. Il existe donc une transformation progressive de la signification des concepts mathématiques avec une reformulation des problèmes.

2.2. Limites et perspectives méthodologiques

Une étude longitudinale

L'intérêt méthodologique de notre recherche tient d'une part au fait qu'elle se déroule sur un empan temporel long (deux ans, 2012-2014). D'autre part, elle montre comment peuvent s'entrecroiser l'étude de trois entités et de deux collectifs de pensée :

- le dialogue entre l'équipe de recherche et les professeurs du groupe expérimental au sein d'une ingénierie didactique coopérative ;
- les effets de ce dialogue sur l'évolution des textes des modules ;
- la pratique effective dans les classes de la recherche.

La méthodologie mise en œuvre pour l'étude du dialogue au sein d'une ingénierie telle qu'à ACE-ArithmÉcole demande la mise en place d'un protocole de recueil de données important au vu des différents espaces d'échanges. Néanmoins, nous n'avons pas eu accès aux échanges que nous nommerons « informels » entre professeurs du groupe expérimental et qui ont a priori une influence sur les échanges plus formels.

En ce qui concerne le suivi du professeur, il aurait été intéressant de faire un entretien pré et post séances pour mettre en évidence le travail documentaire du professeur, ses intentions préalables (Sensevy, 2011b) ainsi que la transformation par ce professeur de la ressource « déroulement » en document (Gueudet & Trouche, 2010). En effet, « l'entretien et le texte lui-même, ainsi que leur entrelacement (le fait que l'entretien puisse fournir une sorte de commentaire du texte) constituent des ressources » (Gueudet & Trouche, 2010). Cet entretien aurait amené le professeur à retracer les grandes lignes de leur compréhension des textes de la séance proposée dans les modules et expliciter les anticipations prévues (Sensevy, 2010).

Les échelles temporelles

Nous avons croisé dans notre recherche différents niveaux d'analyse micro, méso et macroscopique pour donner à voir la dynamique de l'avancée de savoir sur un empan temporel long. Ces descriptions à ces échelles différentes amènent à voir tout d'abord comment les éléments de savoir, en tant que parcours épistémique, s'agencent autour de la construction du nombre sur l'année. Cette échelle macroscopique autorise l'observation la textualisation du savoir au sein d'un curriculum. Ce premier niveau « général » vient dans un second temps nourrir le niveau mésoscopique qui permet de comprendre la continuité de l'expérience des élèves. Les outils méthodologiques sont ici issus de la TACD avec par exemple le travail synoptique sur les séances effectives mais aussi des textes curriculaires.

Nous avons de même produit un second type de synopsis dit analytique qui propose une première modélisation des différentes scènes des onze séances filmées dans la classe de P pour, dans un premier temps, reconstruire la chronogénèse (l'avancée du temps didactique) et la mésogénèse (l'introduction d'un nouveau savoir) et donc observer la construction d'une forme de continuité didactique. Dans un second temps, ce synopsis a pu être croisé avec les analyses produites des textes de progression pour compléter les lacunes liées à des vidéos de séances manquantes.

Le choix du professeur

Notre choix de suivre un professeur appartenant à l'équipe de recherche dont l'implication est importante dans l'écriture des textes, dans les discussions et réflexions internes à l'ingénierie ne donne des indications que partielles quant à l'appropriation de la progression. En effet, ce professeur, comme nous l'avons explicité, met en œuvre la progression depuis trois ans et connait les enjeux épistémiques et épistémologies de celle-ci. Cette étude de cas pourrait être complétée par l'étude de séances menées par un professeur de classe expérimentale. Nous avons recueilli en 2013-2014 des séances sur l'ensemble de l'année dans une classe du groupe expérimental placé en Réseau d'éducation prioritaire. Il serait donc intéressant de compléter notre recherche par l'analyse des séances autour des mêmes objets mathématiques. Cela nous permettrait d'enrichir nos observations liées à l'interprétation des textes de progression et à leur implémentation.

2.3. Les perspectives de recherche

Dans un premier temps, il serait intéressant de terminer ce travail d'analyse de la régulation du curriculum ACE-ArithmÉcole en CP à travers le dialogue entre les professeurs du groupe expérimental et l'équipe de recherche. En effet, nous n'avons, dans cette thèse, mis en évidence que deux points de régulation sans aborder les modifications apportées par exemple aux textes curriculaires introduisant la notion de dizaine.

Dans un second temps, il serait intéressant de continuer à affiner le curriculum proposé grâce au maintien de la relation entre les acteurs de la recherche et les professeurs. La suite de cette coopération pourrait être menée auprès des écoles en réseau d'aide prioritaire (REP). En effet, les résultats des évaluations nationales (DEPP, 2015) montrent une augmentation, au plan national, du nombre des élèves en difficultés (16,3%) voire en très grande difficulté (3.7%). Il serait donc pertinent d'étudier de près ces élèves et d'améliorer la progression en proposant des dispositifs spécifiques. Les résultats des pré et posttests réalisés en 2012-2013 et en 2013-2014 entre les classes ACE-ArithmÉcole et des classes témoins au CP sur les quatre académies concernées donnent déjà quelques éléments encourageants. L'analyse de ceux-ci montre une stagnation des écarts voire une diminution des écarts entre les élèves avancés et moins avancés sur l'année alors que dans les classes témoins, cet écart augmente considérablement.

Cette nouvelle recherche pourrait nous amener à suivre quelques élèves dans plusieurs classes. Pour cela, nous pourrions nous appuyer sur l'expérience des professeurs, dont certains ont commencé des travaux de recherche basés sur à la progression ACE-Arithmécole, et ainsi construire conjointement des dispositifs particuliers. Ces dispositifs se centreraient sur certains objets de savoir repérés comme résistants qui poseraient des difficultés particulières à certains élèves moins avancés.

Dans un troisième temps, nous pourrions poursuivre ce travail de recherche dans le cadre de la conception d'un curriculum pour le CE1 qui constitue la continuation de celui proposé en CP, dans lequel sommes impliquée depuis 2015. Son élaboration se déroule au sein d'une ingénierie didactique coopérative avec certains professeurs ayant implémenté la progression CP pendant deux voire trois années successives. Il serait pertinent de voir l'évolution des pratiques de ces professeurs et de suivre une cohorte d'élèves ou de professeurs sur deux années (CP et CE1) en prenant comme objet d'étude les systèmes de représentation de CP réinvestis dans la progression CE1 et la continuité de l'expérience des élèves.

2.4. Perspectives pour la formation

Les perspectives pour la formation que nous mettrons en avant dans ce paragraphe concernent le travail sur des ingénieries coopératives pour la formation continue, la formation initiale des professeurs et la formation à la recherche.

2.4.1. Formation continue et progression ACE-ArithmÉcole

Tout d'abord, il s'agirait de prolonger le travail collectif entre professeurs et chercheurs pour améliorer le curriculum, notamment celui de CE1 toujours en cours d'expérimentation. Il serait alors nécessaire de continuer à proposer des rencontres régulières, ainsi que des moyens de communications adaptés aux échanges. En effet, notre étude met en évidence les difficultés auxquelles peut se heurter la diffusion d'un curriculum tel que celui produit dans la recherche ACE-ArithmÉcole. Se pose alors la question de l'appropriation des ressources par les professeurs. Une hypothèse d'amélioration de celle-ci pourrait être de produire des systèmes hybrides texte-image-son, les SHTIS.

Nous distinguerons deux fonctions aux SHTIS. La première est liée directement à la diffusion de ressources pour donner à voir et à comprendre la pratique et la transformer. Cela suppose l'intégration d'exemples emblématiques tels que ceux mis en évidence dans cette synthèse.

Le collectif ACE-ArithmÉcole de Bretagne dans lequel nous sommes impliqués a produit un premier module m@gistère « Journal du Nombre » en lien avec l'ESPE de Bretagne, l'Ifé et la DGESCO dont nous donnons ci-dessous la capture d'écran de la page introductive.

PRÉSENTATION DE VOTRE FORMATION

Ce parcours m@gistère propose, à ceux qui le souhaitent, d'introduire en mathématiques un nouvel outil, le Journal du Nombre.
Ce module de formation peut être suivi par les professeurs du cycle 2 comme du cycle 3 puisque le Journal du Nombre s'adapte à la progression mathématique envisagée dans les classes. Il a été testé auprès de professeurs de ces deux cycles.

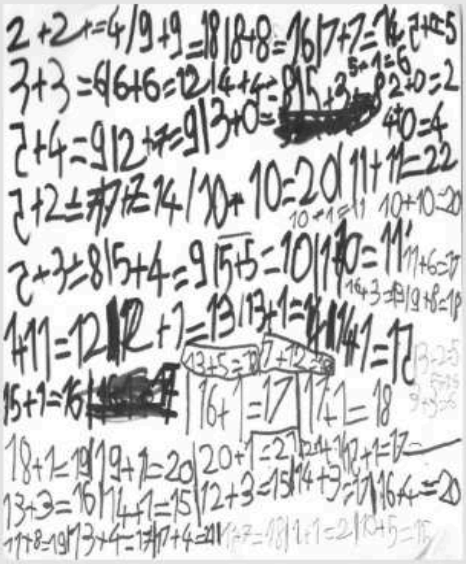
Le petit texte suivant introduit le Journal du Nombre, et peut constituer sa raison d'être.

« J'écris des mathématiques pour mieux comprendre les nombres et les signes mathématiques, pour mieux m'en servir, et pour que la classe comprenne mieux les nombres et les signes mathématiques, pour mieux s'en servir ».

Ce parcours a pour objectif de permettre aux professeurs :

- de se familiariser avec le dispositif du *Journal du nombre* ;
- de le mettre en œuvre dans la classe ;
- de produire des incitations pertinentes en lien avec la progression mathématique envisagée ;
- d'analyser de façon spécifique des productions des élèves.

Ce module Journal du nombre est issu d'une recherche menée sur l'enseignement des mathématiques au cycle 2, ACE-ArithmEcole. Cette recherche a pour objectif de concevoir une progression en mathématiques sur l'année. Les ressources produites sont accessibles sur le site ACE-Arithmécole à l'adresse suivante : http://python.espe-bretagne.fr/ace/

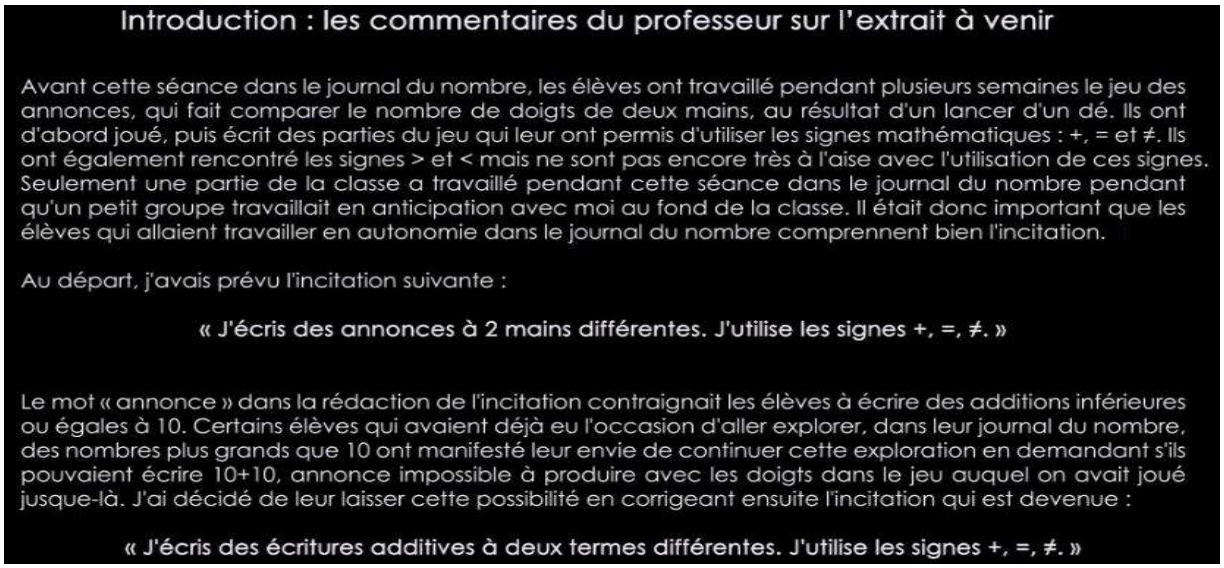


Photogramme 96 : copie d'écran de la page introductive du module m@gistère Journal du Nombre

Nous retrouvons dans cette formation hybride (en présentiel et à distance) deux SHTIS (Blocher, en cours).

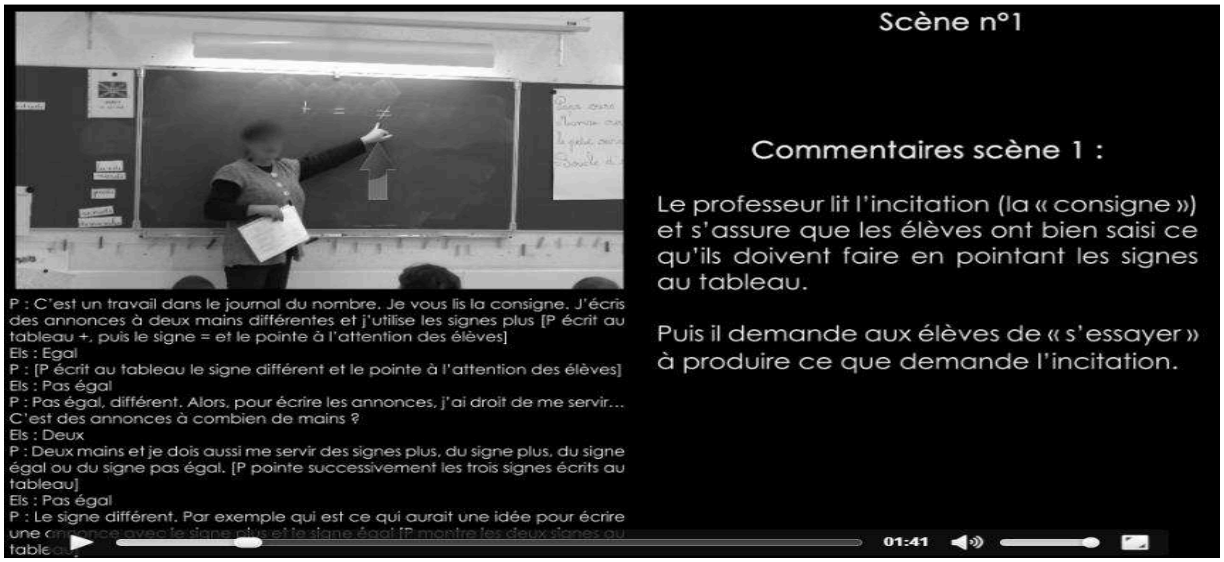
L'exemple de SHTIS présenté ci-dessous montre comment un professeur d'une classe d'étude propose aux élèves une incitation qui sera travailler dans le Journal du Nombre « produire des annonces avec les signes « +, =, ≠ ».

La première image de ce SHTIS donne à voir le commentaire du professeur sur l'extrait de séance de classe qui sera étudié.



Photogramme 97 : copie d'écran de la page d'introduction du système hybride

Nous proposons, ci-dessous, une copie d'écran de ce système hybride qui présente l'organisation de ce système hybride



Photogramme 98: extrait de séance de classe, présentation d'une incitation dans le Journal du Nombre.

Dans la partie gauche du photogramme 98, l'extrait vidéo est synchronisé avec sa transcription (en bas à gauche de l'écran). Une flèche (en rouge) sur la vidéo vient appuyer le geste du professeur pour une meilleure compréhension par le lecteur de ce qui se passe dans la classe. Sur la partie droite de l'écran, des commentaires de l'extrait sont ajoutés pour mettre en valeur les aspects didactiques prépondérants. Ces commentaires constituent l'un des modules d'annotation disponibles. Il peut y en avoir d'autres : commentaires du professeur sur sa propre pratique ; stratégies contrefactuelles relatives à l'épisode considérée ; productions d'élèves analysées ; etc.)

Cet aperçu d'usage d'un SHTIS dans la formation continue des professeurs illustre comment des exemples emblématiques peuvent "montrer" la pratique pour aider à la comprendre. Cependant, ce type d'instrument reste à développer pour accompagner les professeurs dans la mise en œuvre du curriculum ACE-ArithmÉcole qui, comme nous l'avons montré, nécessite l'appropriation de gestes d'enseignement spécifiques.

2.4.2. Formation continue et ingénierie didactique coopérative

Une seconde fonction des SHTIS est de fournir un moyen augmenté de dialogue entre professeurs et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique coopérative (Blocher, Joffredo-Le Brun, Lefeuvre & Sensevy, 2016 ; Blocher, en cours). Ce dialogue d'ingénierie se conçoit alors comme un partage d'exemples emblématiques pour favoriser la construction conjointe d'une référence commune (Sensevy, 2016). A partir d'un exemple emblématique pourrait ainsi se créer une réflexion commune qui amènerait ainsi professeurs et chercheurs à produire des commentaires. Par exemple, l'exemple emblématique 7 *de l'introduction de la différence* à partir des systèmes de représentation : *jeu d'imitation et écriture soustractive* présenté dans ce chapitre montre comment le jeu d'imitation peut être l'organisateur d'une enquête didactique des élèves dans une nouvelle situation à partir de leurs connaissances déjà-là.

2.4.3. Formation à la recherche

Un second type de formation à développer est celui de la formation à la recherche, en proposant une méthodologie spécifique liée à l'ingénierie didactique coopérative. En effet, dans les parcours « métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (MEEF) », premier et second degré proposé dans les ESPE, les étudiants pourraient être intégrés dans des groupes de recherche.

Au-delà, la formation à la recherche, incluant la recherche fondée sur le film d'étude, à destination des doctorants et chercheurs, doit pouvoir faire vivre une conception au sein de laquelle SHTIS, exemples emblématiques, et ingénierie coopérative sont mis en synergie[122]

[122] La structure VISA (http://ife.ens-lyon.fr/manifestations/recherche/visa) est une structure de recherche développant notamment des méthodologies de recherche liées à l'usage des vidéos dans les recherches en Education. Deux écoles thématiques **IR-Vidéo** ont été organisées en 2012 et 2015 à Brest et à Lille qui proposent une formation interdisciplinaire aux chercheurs sur l'usage d'enregistrements vidéos dans les recherches.

Conclusion générale

L'objectif général de cette thèse était de montrer comment, au sein d'une ingénierie didactique coopérative réunissant chercheurs et professeurs, pouvait se penser et s'élaborer un curriculum en mathématiques au CP à travers la recherche d'une continuité didactique dans l'expérience des élèves. Notre focale s'est portée sur le rôle des systèmes de représentation dans cette continuité. Cette conclusion reprend tout d'abord brièvement trois résultats saillants de cette thèse et poursuit avec la mise en perspective de recherches futures.

1. La conception du nombre

Le premier résultat relève de *l'enseignement du nombre dans les premières années de la* scolarité obligatoire. Un grand nombre de chercheurs et d'acteurs de l'institution mettent en évidence l'importance de l'appropriation par les élèves des propriétés du nombre et des premières opérations. Cet apprentissage peut être organisé par l'étude des compositions/décompositions des nombres, la notion d'équivalence et le principe de relation inverse entre les nombres. Les mathématiques doivent être vues comme représentation du réel et de l'action dans le réel, comme une modélisation de la réalité. Les élèves construisent différents modèles d'un même concept avec divers niveaux de spécificité.

Comme nous le montrent les analyses produites dans cette thèse, le curriculum ACE-ArithmEcole permet, grâce à une succession de situations appropriées, de développer des connaissances sur les nombres et de mettre en relation différents systèmes de représentation avec les concepts mathématiques que sous-entend leur usage. Ces connaissances se forment dans le cadre de discussions publiques collectives et dans une forme de praxis. En effet, nous avons mis en évidence, tout d'abord lors de l'analyse des textes curriculaires et du dialogue d'ingénierie, puis dans l'étude des séances de classe, la construction d'un jeu de représentation réciproque entre systèmes de représentation (concrets, analogiques et abstraits). Cette traduction réciproque entre représentations devient un garant de la continuité de l'expérience des élèves au cours des situations composant le domaine « Situations ».

Ainsi, le concept de nombre et ses propriétés sont modélisés par différents systèmes de représentation. Le nombre et ses propriétés peuvent ainsi être renvoyés à ce qu'ils dénotent dans la réalité. Par exemple, la représentation du schéma-boîte donne à voir les relations entre

les nombres et permet d'écrire que 5 = 4 + 1 ; 1 + 4 +5 ; 5 - 4 = 1 et 5 - 1= 4. Les nombres présents dans ce schéma-boîte peuvent de même être traduits par une annonce sur deux mains et sur une ligne numérique, les nombres désignant ainsi la mesure d'une grandeur, qui peut être par exemple « le nombre d'entités », ou « la longueur ».

2. Conception de ressources

Un second résultat important est celui de la conception de ressources. En effet, ce travail de thèse montre comment la conception de ressources peut être pensée en termes de travail conjoint professeurs/chercheurs. Ce travail coopératif a amené, d'une part, les professeurs des classes expérimentales à approfondir les enjeux didactiques et épistémologiques des savoirs en jeu dans cette progression. D'autre part, l'équipe de recherche, première conceptrice des ressources, a bénéficié des connaissances spécifiques des professeurs sur ce qu'ils enseignent et la manière dont ils les enseignent. Cette coopération permet à chaque membre de l'ingénierie, les professeurs comme les chercheurs, d'être chacun pour l'autre « un autrui significatif. » (Sensevy, 2012, p. 83) Le processus d'élaboration des connaissances au sein d'un travail collectif nécessite donc une transmission, c'est à dire des transactions entre les acteurs (Dewey & Bentley, 1949) dans l'enquête. Il existe, dans cette forme de coopération, des transactions entre l'environnement et les différents acteurs qui se redéfinissent l'un l'autre (Dewey, 1916/2011).

La science didactique est alors à la fois anthropologique (nécessité de comprendre les praxéologies didactique) et ingénierique (nécessité de transformer les praxéologies didactiques). Cette approche de la didactique amène à repenser les relations entre les différents acteurs de l'éducation. Elle questionne sur la manière de faire fonctionner ensemble la compréhension et la transformation du système didactique (Sensevy, 2016).

Ce travail coopératif, comme nous l'avons mis en évidence, a amené à repenser et construire une continuité didactique dans l'expérience des élèves à travers l'usage des systèmes de représentation grâce à une enquête collective où chaque acteur a apporté et partagé son expérience. La continuité a pu s'établir aussi au sein-même de l'ingénierie.

3. Continuité de l'expérience des élèves

Un troisième point essentiel est lié à *la construction d'une continuité de l'expérience des* élèves, effective dans les transactions professeurs/élèves. Pour comprendre les effets de la reconceptualisation des différents textes de la progression, nous avons étudié l'action conjointe in situ. Ces analyses ont conclu à la nécessité de permettre à l'élève de travailler en première main pour faire vivre la continuité de l'expérience dans l'usage des systèmes de représentation au sein des situations proposées. Ce travail en première main autorise les élèves à expérimenter et produire des conjectures, les tester, et en tirer des conclusions et de nouvelles directions d'action. Pour cela, l'épaisseur épistémique du travail de l'élève dans l'action conjointe devra être augmentée : le jeu de traduction entre représentations identifié ci-dessus est un élément central d'une telle densification. Le rôle du professeur est de créer des milieux-problèmes favorisant l'enquête des élèves et la réexpérienciation de leurs connaissances dans de nouvelles situations pour leur permettre d'entrer dans une culture mathématique. Le rôle du professeur est d'acquiescer « à la puissance d'émancipation des élèves » (Sensevy, 2012d, p. 85), en permettant à l'élève de transformer le savoir et donc de pouvoir devenir chronogène de l'avancée du savoir dans la classe, dans l'action conjointe. « Le problème central d'une éducation basée sur l'expérience, consiste à choisir la nature des expériences présentes capables de demeurer fécondes et créatrices dans les expériences suivantes » (Dewey, 1968/2011, p. 467). La diffusion de telles stratégies professorales dépend, comme nous l'avons montré, de la formation des professeurs et donc du développement des connaissances professionnelles, celui-ci pouvant être mené dans le cadre de l'appréhension collective des situations.

Ce processus d'enquête authentique, pour une expérience didactique cruciale des élèves, doit se penser dans le cadre plus général des curricula reposant sur la transposition de pratiques savantes. Le temps didactique devient alors le temps intrinsèque au savoir, les élèves éprouvant le savoir dans un processus de problématisation du savoir, dans une forme de continuum expérimental des savoirs.

Deux questions de développement majeures, à notre sens, peuvent alors se poser :

- comment penser un dispositif permettant de produire des situations en prenant en compte la construction d'une continuité sur un empan temporel ne se limitant pas à l'échelle d'une séquence mais sur l'année scolaire voire sur un cycle ?

- quelle méthodologie de recueil et d'analyse mettre en place pour travailler sur une échelle temporelle longue ?

4. Perspectives de recherche

Dans ce travail, certaines questions restent cependant en suspens.

La première relève de l'évolution des pratiques professorales que peut produire ce type de dispositif d'ingénierie, non seulement en mathématiques, mais aussi quant à son transfert dans d'autres disciplines. En effet, comment la nécessité – mise en relief dans cette thèse – de laisser les élèves travailler en première main peut-elle s'étendre dans d'autres domaines disciplinaires ? Cette étude reste à produire car nous n'avons pour l'instant que des témoignages des professeurs des classes expérimentales sur l'évolution de leur pratique. Pour cela, il serait nécessaire d'observer des professeurs sur deux ou trois ans en mathématiques mais pas seulement.

La seconde question est liée à la nécessité de croiser nos résultats de recherche avec d'autres recherches collaboratives impliquant chercheurs et professeurs comme les ingénieries didactiques pour le développement et la formation (Perrin-Glorian, 2011). Il serait de même intéressant de les mettre en relation avec des recherches sur le développement professionnel au sein de collectifs entre professeurs (Grangeat & Munoz, 2006, Grangeat, Rogalski, Lima & Gray, 2009). Une importante perspective pourrait consister à lier le travail sur les ingénieries coopératives à celui sur les PER (Chevallard, 2016).

En effet, il est important de rendre compte de la continuité à travers les relations, les interactions, l'expérience vécue entre les professeurs et leur environnement, l'institution classe et l'ensemble des acteurs de l'éducation. L'expérience, étant, selon Dewey (2008), la production d'une culture, le travail coopératif peut-il alors permettre de développer une certaine forme de culture, en tant que qu'exploration des différentes possibilités, potentialités de l'éducation et donc d'une culture de l'enseignement dans l'action ?

Ainsi, à l'issue de notre recherche, nous avons mis en évidence l'importance pour les élèves, mais aussi pour les professeurs, de la notion de continuité didactique dans l'expérience des systèmes de représentation du nombre. Cette question devrait être reproblématisée sur une plus grande échelle et sur d'autres disciplines. Ainsi, penser en termes de continuité de l'expérience des élèves amène à repenser l'organisation des savoirs et les moyens d'atteindre

les objectifs assignés à l'éducation. Cette réorganisation peut être abordée par le prisme de l'enquête, en développement des milieux-problèmes dans lesquels les élèves vont enquêter en première main. Le savoir acquis n'est pas considéré comme une fin mais comme un moyen. Ce savoir va donc se transformer, s'actualiser dans des situations didactiques particulières. Le savoir devient alors une source d'émancipation. En effet, au-delà de cette étude, la question majeure est celle de la forme scolaire, forme scolaire que la textualisation des savoirs conditionne et dont les pratiques professorales peuvent découler. La réorganisation temporelle de l'enseignement amène à la nécessité de créer des dispositifs et une méthodologie autorisant l'étude des curricula et des pratiques qu'ils produisent. La production, l'expérimentation de tels curricula pourraient se construire au sein d'un collectif de professeurs et de chercheurs dans un processus itératif de mise en œuvre et d'analyse. Cela demanderait, bien évidemment, un temps de conceptualisation long. Des recherches en éducation et en didactique sur le travail coopératif, la conception de ressources pour l'enseignement et plus particulièrement des recherches sur la conception des curricula au sein de tels collectifs pourraient proposer des directions de réflexion différentes qui s'émanciperaient de la forme scolaire classique. Cette réorganisation temporelle de l'enseignement et donc de l'apprentissage pourrait se penser en termes de continuité didactique dans l'expérience des élèves, notamment à travers le temps d'enquête et le temps de situation. Cela pourrait aboutir à l'émergence de nouveaux types de contrats didactiques, de rapport aux milieux et d'un repositionnement des professeurs et des élèves vis-à-vis du savoir.

Ces remarques nous fournissent des orientations de recherche futures qu'il nous faudra approfondir.

Bibliographie

Académie des sciences. (2006). Déclaration de l'Académie des sciences sur l'enseignement. Répéré à http://www.academie-sciences.fr/archivage_site/activite/rapport/avis030206.pdf.

Académie des sciences. (2012). Avis de l'académie des sciences sur la refondation de l'enseignement. Répéré à http://www.academie-sciences.fr/archivage_site/activite/rapport/avis250912.pdf.

Ainsworth, S. (2006). DeFT : a conceptual framework for considering learning with multiple representations. Leraning and instruction, 16, 183-198.

Arnoux, P. (2012a). Quelques remarques sur les représentations mentales des élèves. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.24-25). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Arnoux, P. (2012b). Des nombres "vivants"? Quelques digressions sur la vie des nombres. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.25-27). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (1996). Ingénierie didactique. Dans J. Brun (ed). Didactique des mathématiques, (p. 246-274). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude, et L'ingénierie didactique : un essai de synthèse. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.), En amont et en *aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 225-237). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (2012). Remarques sur l'enseignement du calcul. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.76-79). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Assude, T. & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. Dans A. Mercier & G. Sensevy (dir), Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves (p. 153-185). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Ball, D. (1992). Magical hopes : manuipulatives and the reform of mathematics education. American Educator, 16(14-18), 46-47.

Bartolini Bussi, M. G. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom and signs after a Vygotskian. Dans L. English et al., Handbook of international research in mathematics education (p. 746-783).

Bass, H. (2015). Quantities, numbers, number names, and the real number. Conférence proceedings of ICMI studies. Primary mathematics study on whole numbers, (p. 10-20). Macao.

Bazin, J. (2008). Des clous dans la Joconde. L'anthropologie autrement. Toulouse : Anacharsis.

Billeter, J. F. (2010). *Essai sur l'art chinois de l'écriture et de ses fondements.* Paris : Allia.

Blanchard-Laville, C., Chevallard, Y. & Schubauer-Léoni, M.L. (1996). Regards croisés sur la didactique, un colloque épistolaire. Grenoble: La pensée sauvage.

Blocher, J.-N. (en cours). Comprendre et montrer la transmission du savoir : les systèmes *hybrides comme lieu de production et d'écriture de phénomènes. Illustrations en Théorie de l'Action Conjointe en Didactique* (Thèse en Sciences de l'Education. Université de Bretagne occidentale, Brest).

Blumer, H. (2004). Georges Herbert Mead and Human Conduct. Walnut Creek : Alta-Mira Press.

Booth, L. (1984). Algebra : children's strategies and errors. Windsor : NFER-Nelson.

Brandom, B. (2009). L'articulation des raisons : introduction à l'inférentialisme. Paris : Cerf.

Briand, J. (2012). Un point de vue à propos du manuel scolaire de mathématiques à l'école primaire. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.60-63). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Brissiaud, R. (2012). Quelles pratiques pédagogiques faut-il éviter à l'école maternelle et au CP ? Les réponses d'une expérimentation menée à l'échelle de la nation. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.52-57). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Brissiaud, R. (2013). Apprendre à calculer à l'école. Les pièges à éviter en contexte francophone. Paris : Retz.

Brousseau, G & Brousseau, N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. Dans *La mathématique à l'école* élémentaire, (p. 428-457). Paris : APMEP.

Brousseau, G. (1986). *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* . (Thèse d'état).Université Sciences et Technologies, Bordeaux I. Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/509225/filename/TheseetAnnexesGBA.pdf

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Communication présentée à l'Université de Montréal, Montréal.

Brousseau, G. (1998). La théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998b). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations. Repéré à http://guy-brousseau.com/wpcontent/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

Brousseau, G. (2001). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. Dans J-L. Dorier, M.Artaud, , M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (coordonné par), Actes de la XIe *Ecole d'Eté d*e Didactique des Mathématiques (p. 331-348) .Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. Revue *des sciences de l'éducation, 2*(30), 241-277.

Brousseau, G. (2012). Suggestions d'un didacticien au CS de la conférence. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.81-86). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Brousseau, G. & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. Recherche en didactique des mathématiques, 11(2:3), 167-210.
Bruner, J. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge : Belkapp Press.
Butlen, D. & Masselot, P. (2012). Les mathématiques à l'école élémentaire, état des lieux. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.80-81). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Carey, S. (2011). Précis of the origin of concepts. Behavioral and Brain Sciences 34, 113-167.
Carraher, D W.& Schliemann, A D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans Dans Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (p. 669-706). Charlotte, NC : Information Age Publishing.
Cartwright, N. (1999). The dappled world : a studied of a boundaries of science. Cambridge : Cambirdge University Press.
Centeno, J. (1995). La mémoire didactique de l'enseignant. Université de Bordeaux 2 : Ladist.
Chambris. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques à l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels (Thèse en didactique des mathématiques). Université Paris Diderot.
Chambris. (2012). Quelques réflexions sur l'enseignement des grandeurs, des relations entre grandeurs et nombres, voire des nombres à l'école primaire. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.94-99). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Chambris, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. Repères-IREM, 69, 5-31.
Chambris, C. (2014). Contribution à propos de la numération décimale. Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4. Repéré à la page : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF-_CSP_363233.pdf.
Chesné, J.-F. (2012). Ce que nous apportent les évaluations standardisées sur les acquis des élèves à la fin de l'école primaire en mathématiques (nombres et calcul). Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.10-20). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Chevallard, Y. & Ladage, C. (2010). E*nquêter pour connaître : L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet*. Communication à la journée de réflexion sur le thème « Une approche anthropologique du didactique », Liege.
Chevallard, Y. & Mercier, A. (1987). Sur la formation historique du temps didactique. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
Chevallard, Y. (sous presse). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade et al. (Éds), Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société. Actes du 4ème congrès international sur la TAD.
Chevallard, Y. (1991a). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La pensée sauvage.
Chevallard, Y. (1991b). Sur la déconcertation cognitive. Interactions didactiques, 12, 12-51.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans R. Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (dir), Actes de la VIII école d'été de didactique des mathématiques (p. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en didactique des mathématiques, 2(19), 221-269.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Récupéré sur http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. Récupéré sur Yves Chevallard - Textes et publications: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Chevallard, Y. (2012). Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.32-40). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Chevallard, Y. (2015a). Pour une école du questionnement du monde. Communication au lycée du Rempart. Marseille.

Chevallard, Y. (2015b). Sur la dialectique des médias et des milieux. communication à Liège.

Chopin, M.-P. (2010). Les usages du « temps » dans les recherches sur l'enseignement. Revue Française de Pédagogie, 170, 87-110.

Cobb, P. (2000). The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. Dans L. Burton (Series Ed.) & J. Boaler, A series in international perspectives on mathematics learning : Multiple perspectives on mathematics (p 45–82). London : Abbex.

Cobb, P., Confrey, J., Dissessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Desing experiments in education Research. Education Research, 32(1), 9-13.

Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques . (2001). Rapport d'étape sur le calcul.

Coquidé, M. (2000). Le rapport expérimental au vivant (Note pour l'Habilitation à diriger des recherches). Ecole Normale supérieure de Cachan.

Daina, A., Mathé, A., Pelay, N., & Sabra, H. (2011). L'expérimentation dans nos recherches en didactique des mathématiques : méthodologie et position du chercheur. Réflexion autour du thème du IVème séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM. Dans M. Abboud-Blanchard & A. Flükiger (dir.), Actes du séminaire national en didactique des mathématiques (p. 57-76). Paris : IREM Paris 7. Repéré à http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR12001.pdf.

Davydov, V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In L.P.

De Bock, D., Deprez, J., Van Dooren, W. , Roelens, M. & Verschaffel, L. (2013). Exemples abstraits ou concret ? Apprendre les mathématiques à partir d'exemples abstraits ou concrets: la réponse d'une équipe de psychologues cognitves réfutée? Répéré sur http://ute3.umh.ac.be/revues/index.php?revue=14&page=3

De cotret, R. & Giroux, J. (2003). Le temps didactique dans trois classes de secondaire (doubleurs, ordinaires, forts). Education et francophonie, 31, 115-175.

Decombes, V. (1996). Les institutions du sens. Paris : Editions de minuit.

Dehaene, S & Cohen, L. (1991). Two mental calculation systems : A case study of severe acalculia with preserved approximation. Neuropsychologia (29), 1045-1074.

Descombes, V. (1996). Les Institutions du sens. Paris : Editions de Minuit.

Dewey, J. (1902/1959). The child and the curriculum. Chicago : The university of Chicago Press.
Dewey, J. (1913/2004). L'école et l'enfant. Paris : Fabert.
Dewey, J. (1915/2014). La quête de certitude. Une étude de la relation entre connaissance et action. Paris : Gallimard.
Dewey, J. (1916/2011). Démocratie et Education. Paris : Armand Colin.
Dewey, J. (1967). Logique. La théorie de l'enquête. Paris : Presses Universitaires de France.
Dewey, J. (1968/2011). Expérience et éducation. Paris : Armand Colin.
Dewey, J. (2003). Reconstruction en philosophie. Pau : Presses Universitaires de Pau.
Dewey, J. & Bentley, A. (1949). Knowing and the knows. Boston : Beacon Press.
Ding, M. & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a Chinese textbook series. Educational Studies in Mathematics, 87(1), 103-123.
Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance. (2013). PISA 2012 : baisse des performances des élèves de 15 ans en culture mathématique et augmentation des inégalités scolaires en France. Repéré à http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/92/9/DEPP_NI_2013_31_eleves_15_ans_France_selon_PISA_2012_culture_mathematique_baisse_performances_augmentation_inegalites_depuis_2003_285929.pdf
Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance. (2015). cedre-2014-mathematiques-en-fin-d-ecole-primaire-les-eleves-qui-arrivent-au-college-ont-des-niveaux-tres-heterogenes.html. Récupéré sur Education.gouv: http://www.education.gouv.fr/cid53629/cedre-2014-mathematiques-en-fin-d-ecole-primaire-les-eleves-qui-arrivent-au-college-ont-des-niveaux-tres-heterogenes.html
Douaire, J. (2012). Sur les publications ERMEL. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.63-67). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Douglas, M. (1999). Comment pensent les institutions. Paris : la Découverte.
Driscoll, M. J. (1981). Research within reach : Elementary school mathematics. Reston : VA: National.
Duhem, P. (1997). La théorie physique. Son objet, sa structure. Pari s: Vrin.
Durpaire, J.-L. (2006). L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. repéré http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html: Ministère de l'Education Nationale.
Durpaire, J.-L. (2014). Contribution à la réflexion du conseil supérieur des programmes.
Emprin, F. (2012). Éléments d'observation et d'analyse sur l'enseignement à l'école maternelle. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.47-52). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Emprin, F. (2014). Éléments pour la réflexion sur les programmes de mathématiques à l'école. Repéré à http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/21/9/EMPRIN_Fabien_-_MCF_-_CSP_Contribution_374219.pdf.
Engeström, Y. (1987). Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research. Helsinki : Orienta-Konsultit.
Fagnant. (2013). Opération arithmétiques et symbolisations variées. Partir des démarches informelles des élèves pour donner du sens aux apprentissages. Récupéré sur http://ute3.umh.ac.be/revues/index.php?revue=14&page=3

Fayol, M. (2012). L'acquisition du nombre. Paris: Presses Universitaires de France.
Fischer, J.-P. (2014). À propos du calcul : réponses (très partielles) aux questions du CSP. Répéré http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/85/2/FISCHER_Jean-Paul_-_PU_-_CSP_Contribution_362852.pdf.
Fleck, L. (2005). Génèse et développement d'un fait scientifique. Paris : Les Belles Lettres.
Forest, D. (2006). Analyse proxémique d'interactions didactiques. Carrefour de l'éducation, 21, pp. 73-94.
Forquin, J.-C. (2008). Sociologie du curriculum. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Frege, G. (1884). Les fondements de l'arithmétique. Paris : Seuil.
Frege, G. (1892/1971). Sens et dénotation. Dans écrits logiques et philosophiques. Paris : Seuil.
Fyfe, E., McNeil, M., Son, J. & Goldstone, R. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction : a Systematic Review. Educationnal Psychology Review, 26(1), 9-25.
Gallie, W. (1964). Philosophy ans the historical understanding. London : Chatto & Windus.
Gamo, S., Sander, E. & Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. Learning and Instruction (20), 400-410.
Gégout, P. (2013). DEWEY : pour une pédagogie scientifique. Dans H.-L. Go. (dir.), Dewey, penseur de l'education (p. 151-162). Nancy : Presses Universitaires de Lorraine.
Ginzburg, C. (1989). Mythes, Emblèmes, Traces. Paris. Paris : Flammarion.
Glock, H.-J. (1996). Dictionnaire Wittgenstein . Paris : Gallimard.
Goldstone, R. & Sakamoto. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptive system. Cognitive Psychology, 46, 414-466.
Grangeat, M.; Rogalski, J., Lima, L. & Gray, P. (2009). Comprendre le travail collectif enseignant: effets du contexte de l'activité sur les conceptualisations des acteurs. Revue Suisse des Sciences de l'Education, 1(31), 151-168.
Grangeat, M. & Munoz, G. (2006). Le travail collectif des enseignants : activités de coopération et de partenariat d'enseignants de l'éducation prioritaire. Formation Emploi, , 95, 75-88.
Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concret ant abstract. Dans T. Nune & P. Bryant (Eds), Learning and teaching mathematics. An international perspective (p. 315-345). Hove, East Sussex : Psychology Press Ltd.
Gravemeijer, K. (2002). preambule : from models to medeling. Dans in K. Gravemeijer, R Lehrer, B. Van Oers & L. Verschaffel (Eds), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (p. 7-22). Dordrecht: The Netherlands.
Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. Educationnal studies in mathematics, 79(3), 429-438.
Grenier, D. (2012). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.42-47). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Gruson, B. & Marlot, C. (2016). Do teachers make all their students play the same learning games ? A comparative study of learning games in biology and English as a second language. Teaching Education, 27(1), 1-20.
Gruson, B. (à paraître). L'action conjointe en didactique des langues : élaboration conceptuelle et méthodologique . (Habilitation à diriger des recherches). Université de Bretagne Occidental, Brest.
Gruson, B., Loquet M. & Forest, D. (2012). Jeux de Savoir - Études de l'action conjointe en didactique. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Hegel, G. (1966). The phenomenology of mind. Translated by J. B. Baillie. 7th. London: George Allen & Unwin - Humanities Press. .

Hiebert, J. & Grouws, D.A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 371-404.

Hildebrand, D. (2016). The paramount importance of experience ans situations in Dewey's democraty and education. Educationnal theory, 6(1-2), 73-88.

Hili, H. & Ruellan-Le Coat, J. (2009). Freddy la grenouille ou la notion de groupements en CP. Grand N, 83, 97-116.

Hintikka, J. (1994). Fondement d'une théorie du langage. Paris : Presses Universitaires de France.

Hofstadter, D. & Sander, E. (2013). L'Analogie, coeur de la pensée. Paris : Odile Jacob.

Houdement, C. (2014). Contribution aux programmes. Repéré à la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/22/8/HOUDEMENT_Brigitte_-_MCF_-_CSP_Contribution_374228.pdf.

Hutchins, E. (2005). Material anchors for conceptual blends. Journal of Pragmatics, 37, 1555–1577.

Il'enkov, E. V. (1982). The dialectics of the abstract and the concrete in Marx's. Moscou : Progress.

Ingold, T. (2001). From the transmission of representation to the education of attention. Dans Whitehouse, Harvey (Ed), The debated mind: Evolutionary psychology versus ethnography (p. 113-153). New-York : Berg.

Inspection générale de l'éducation nationale. (2013). *Bilan de la mise en œuvre des* programmes issus de la réforme de l'école primaire de 2008. repéré à la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/72/8/2013-066-Rapport-IGEN-Bilan-de-la-mise-en-oeuvre-des-programmes-issus-de-la-reforme-de-2008_284728.pdf.

Inspection Générale de l'Education Nationale, groupe des maths. (2012). L'enseignement des mathématiques à l'école obligatoire. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.146-149. Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Jost, R. & Mercier, A. (2012). Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.42-47). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Kaminski, J. Sloutsky, V. & Heckler, A. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. Science, 320, 454-455.

Kaminski, J.-A. (2006). The effects of concreteness on learnong, transfer, and representation of mathematical concepts. (67), 1591-1586.

Kieran, C. (1981). Concept associated with the equality symbol. Educationnal studies in mathematics(12), 317-326.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What is it. The mathematics Educator, 8(1), 139-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Fondell, B. (2001). Adding it up : Helping children learn mathematics. Washington DC : National Academy Press.

Kim, S. (2015). Les besoins mathématiques des non-mathematiciens Quel destion institutionnel et social? Etudes d'écologie et d'économie didactiques des cnonnaissances mathématiques (Thèse en Sciences de l'Education). Université d'Aix-Marseille.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'internet : études pour une didactique de l'enquête. Education et Didactique, 5(2), 85-116.

Laparra, M. & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir ? Pratiques (143-144), 51-82.

Laugier, S. & Chauviré, C. (2006). Lire les Recherches Philosophiques de Wittgenstein. Paris : Vrin.

Le Du, M. (2004). Qu'est ce qu'un nombre. Paris : Vrin.

Le Hénaff, C. (2016). La traduction comme enquête anthropologique, esquisse d'une conception. Education & Didactique, 10(1), 49-66.

Lefeuvre, L., Joffredo-Le Brun, S. & Sensevy, G. (2015). Une production de modules M@gistère : questions théoriques, formatives, méthodologiques et épistémologiques. Communication présentée à la 5ème rencontre national des Léa, Lyon, France.

Lessing, G. (2008). Traité sur les fables. Paris : Vrin.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une clinique pour le didactique. Recherches didactiques des mathématiques, 20(2), 209-205.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire. Appr*oche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématiques. Bruxelles : peter Lang.

Ligozat, F. & Mercier, A. (2013). Echelles d'analyse des logiques d'action professorales dans le cadre de la transposition didactique. Le cas des aires à l'école primaire. In A. *Bronner, M. Larguier. Actes de la 16ième Ecole d'Eté de Didactiqu*e des Mathématiques (p. 353-376). Grenoble : La pensée Sauvage.

Ligozat, F. (2008). Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Une étude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement/apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et suisses romandes (Thèse de Sciences de l'Education). Université de Genève et d'Aix -Marseille:

Ligozat, F. (2010). Les textes de l'activité mathématique scolaire. Préconstruits et ressources dans la genèses des formes de l'action didactiques. Dans G. Gueudet & L. Trouche (dir), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (p 303-319). Rennes : Presses Universitaire de Rennes.

Ligozat, F. (2012). Les grandeurs et leurs mesures à l'école primaire – regards sur les curricula et les pratiques de classes en France et en Suisse romande. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.87-93). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Ma, L. (2010). Knowing and Teaching Elementary Mathematics : Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. New-York : Routledge.

Margolinas, C. & Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Revue des sciences de l'éducation, 35(2), 59-82.

Margolinas, C. & Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Dans G. Gueudet & L. Trouche (dir), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques (p. 233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Margolinas, C & Wozniak, F. (2012). Le nombre à l'école maternelle : approche didactique. Bruxelles : De Boeck.

Marlot, C. (2008). Caractérisation des transactions didactiques : deux études de cas en *Découverte Du Monde Vivant au cycle II de l'école élémentaire.* (Thèse en Sciences de l'Education): Université de Rennes 2. Rennes

Marlot, C. (2012). Glissement de jeu d'apprentissage et capital d'adéquation des élèves : une étude de cas à l'école élémentaire en classe de sciences. Dans B. Gruson; D. Forest & M. Loquet (Eds), *Jeux de savoirs, études de l'action conjointe en didactique* (p. 131-153). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Martinand, J.-L. (1989). Pratiques de référence, transposition didactique et savoirs. Les *Sciences de l'éducation, 2*, 22–29.

Marx, K. (1909). Capital. Vol. 1. London : William Glaisher.

Marx, K. (1971). Capital. Vol. 3. Moscow : Progress.

Maulini, O. & Perrenoud, P. (2005). La forme scolaire : permanence et évolutions. Dans O. Maulini & C. Montandon I. O. (dir.), Formel ? Informel ? Les formes de l'éducation (p. 147-168). Bruxelles : De Boeck.

Mauss, M. (1950). Sociologie et anthropologie. Paris : Presses Universitaires de France.

Mcclain, K. & Cobb, P. (2001). Suporting students' hability to reason about data. Educationnal studies in Mathematics (45), 103-129.

McNeil, N. & Fyfe, E. (2012). Concreteness fading promotes transfer of mathematical knowledge. Learning ans instruction, 22, 440-448.

Mead, G. (2006). *L'espr*it, le soi, et la société. Paris : Presses Universitaires de France.

Megard, M. (2012). Quelques constats et éléments d'analyse concernant l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.67-72). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Mégard, M. (2014). Mathématiques aux cycles 2 et 3. Eléments pour le conseil supérieur des programmes. repéré sur http://www.education.gouv.fr/cid82307/le-conseil-superieur-des-programmes-contributions-des-experts-sollicites-par-les-groupes-charges-de-l-elaboration-des-projets-de-programmes.html.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. Un cas en calcul* algébrique (Thèse en mathématiques). Université Bordeaux 1.

Mercier, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. Education et didactique, 2(1), 7-40.

Mercier, A. (2012). Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques et ses conditions. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.134-138). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Mercier, A., Lemoyne, G. & Rouchier, A. (2001). Le génie didactique. Usage et mésusages des théories de l'enseignement. Bruxelles : De Boeck Université.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.L. & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. Revue Française de pédagogie, 141, 5-16.

Ministère de l'Education Nationale. (2008). Cycle des apprentissages fondamentaux-programme du CP et du CE1. Récupéré sur Repéré à http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CP_CE1.htm.

Ministère de l'Education Nationale. (2011). Convention pluriannuelle d'expérimentation. Paris.

Ministère de l'Education Nationale. (2013). Loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'École de la République. LOI n° 2013-595. Repéré à

https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do;jsessionid=?cidTexte=JORFTEXT000027677984&dateTexte=&oldAction=rechJO&categorieLien=id

Ministère de l'éducation nationale. (2014). *Recommandations pour la mise en œuvre des* programmes (circulaire n° 2014-081). Repéré à http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=80467.

Ministère de l'Education Nationale. (2014a). Stratégie mathématique. repéré : http://cache.media.education.gouv.fr/file/12_Decembre/30/2/DP-l-ecole-change-avec-vous-strategie-mathematiques_373302.pdf.

Ministère de l'éducation nationale. (2015). Projet de programmes pour les cycles 2, 3 et 4. repéré http://cache.media.education.gouv.fr/file/09_-_septembre/01/2/20150918ProgrammesCycles234_469012.pdf.

Ministère de l'Education Nationale. (2015b). Annexe 1 Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2). (Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015). Repéré à http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94753

Miyakawa T & Winslow, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: étude collective d'une leçon. Education et Didactique, 3(1), 77-90.

Morales Ibarra, G. (2014). L'enseignement et l'apprentissage de la représentation: une étude de cas à l'école maternelle, le "Jeu des trésors" (Thèse de doctorat inédite). Université de Bretagne Occidentale.

Nieder, A & Dehaene, S. (2009). Represnetation of number in the brain. The Annual Review of Neuroscience, 32, 185-208.

Nührenbörger, M., & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in teacher education. International handbook of mathematics teacher education, 2, 157-181.

Olivier, M. (2015). Quine. paris : Les Belles Lettres.

Pascal, D. (1980). Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur. (Mémoire de DEA de didactique des mathématiques). Université d'Aix-Marseille.

Passeron, J-C & Revel, J. . (2005). Penser par cas. Paris : Ecole des hautes études en sciences sociales.

Peirce, C. S. (1978). Ecrits sur le signe. Paris : Seuil.

Perrenoud, P. (1993). Curriculum : le réel, le formel, le caché. Dans J. Houssaye, La *pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui* (p. 61-76). Paris : ESF.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger (coordonné par), En amont et en aval des ingénieries didactiques (p. 57-79). Grenoble : La pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (2012). La réforme des mathématiques modernes et ses effets à long terme sur la formation des professeurs. Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.113-118). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf

Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Réflexions dans la perspective de nouveaux programmes pour les cycles 2 (CP-CE2) et 3 (CM1-6ème). repéré http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/11/5/Perrin-Glorian_Marie-Jeanne-_PU_-_CSP_Contributionm_376115.pdf.

Petersen, L. & McNeil, N. (2013). Effect of perceptually rich manipulatives on preeschoolers' counting performance : established knowledge counts. Child development, 84(3), 1020-1033.

Quilio, S. (2008). Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école élémentaire (Thèse en Sciences de l'Education). Université de Provence : Aix-Marseille.

Quilio, S. (2012). Une forme caractéristique de condition de l'étude dans la réalisation d'une ingénierie didactique en mathématiques à l'école primaire. Education et didactique, 6(2), 9-26

Rabardel.P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instrumetns contemporains. Paris : Armand Colin.

Rilhac, P. (2008). Etude didactique comparative de pratiques d'élèves au collège en mathématiques et en éducation physique et sportive : vers la notion de juex alternatifs. (Thèse en Sciences de l'Education). Université de Rennes 2.

Rochex, J.-Y. (2011). La fabrication de l'inégalité scolaire : une approche bernsteinienne, conlusion. Dans J.-Y. Rochex, & J. Crinon, La construction des inégalités scolaires. Au coeur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (p. 173-198). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Ryle, G. (1947). The concept of mind. Londres : Hutchinson's University Library.

Salin, M.-H. (2014). Contribution à la réflexion sur les programmes des cycles 2 & 3. Repéré http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/08/2/SALIN-MH-CSP-Contribution_386082.pdf.

Schifter, D. (1999). Reasonning about algebra : early algebra thinking in grades K-6. Dans L.V Stiff & F.R Cursio (Eds), Developping mathematical reasoning in grades K-12 (p. 62-81). Reston VA : National council of teachers of mathematics.

Schliemann, A.D, Carraher, D.W & Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. Dans L. Coulange, & J.-P. Drouhard, Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives. (p. 109-124). Grenoble : Recherche en didactique des mathématiques.

Schmittau, J. & Morris, A. (2004). The development of algebra in Davydov's elementary curriculum. The Mathematics Educator, 8(1), 60-87

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. Zentralblatt Fur Didaktik Der Mathematik (International Review of Mathematics Education), 37(1), 16-22.

Schneider, M. & Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction. A knowledge intergration perspective. Mathematical Thinking and Learning, 11, 92-101.

Schubaeur-Leoni, M.L. & Leutenegger, F. (2002). Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire. Dans M-L. Schubaeur-Leoni & F. Leutenegger, Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation (p. 227-251). Bruxelle : De Boeck.

Schubaeur-Léoni, M-L, Leutenneger, F., Ligozat, F. & Fluckiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. Dans A. Mercier & G. Sensevy (eds), Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves (p. 31-91). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Schubauer-Léoni, M. (2005). Contexte sociaux des apprentissages. Caractérisation des *pratiques d'enseignement* et détermination de leur efficacité : la lecture et les mathématiques au CP. Programme incitatif de recherche en éducaton et formation (PIREF).

Schubauer-Leoni, M-L. , Leutenegger, F., Ligozat, F., & Flückiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élève; les phénomènes qu'il peut/doit traiter. Dans A. Mercier &. G. Sensevy, Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élève dans la classe. (p. 51-91). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Searle, J. (1998). La réalité de la construction sociale. Paris : Gallimard.

Sensevy, G. & Santini, J. (2006). Modélisation : une approche épistémologique. Aster, 43, 163-188.
Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques. Etude et autonomie à l'école élémentaire.* Paris : Presses Universitaires de France.
Sensevy, G. (2006). Esquisse d'une pragmatique didactique. Communication présentée au séminaire IVDA, Lyon.
Sensevy, G. (2008). Le travail du professeur. Pour une théorie de l'action conjointe en didactique. Une action située ? Recherche et formation (59), 39-50.
Sensevy, G. (2009). Contenus de savoirs et gestes d'enseignement. Professeurs et chercheurs : vers de nouveaux modes de coopération ?. Dans D. J. Calnet, Recherche/formation des enseignants. Quelles articulations? (p. 127-141). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Sensevy, G. (2010). Formes de l'intention didacitique, collectifs et le travail documentaire. Dans G. Gueudet & L. Trouche (dir), Ressources vives. le travail documentaire des professeurs en mathématiques (p. 147-161). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Sensevy, G. (2011a). Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique. Bruxelle s: De Boeck.
Sensevy, G. (2011b). Intentions professorales et construction du jeu. Dans G. Sensevy, Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique. Chapitre 5 en ligne : http://python.espe-bretagne.fr/sensevy/sensdusavoir/LeSensDuSavoirChap6.pdf.
Sensevy, G. (2011c). Comprendre l'action didactique : méthode et jeux d'échelle. Dans G. Sensevy, Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique . Chapitre 6 en ligne http://python.espe-bretagne.fr/sensevy/sensdusavoir/LeSensDuSavoirChap6.pdf. Bruxelles: De Boeck.
Sensevy, G. (2011d). Décrire l'action didactique ordinaire. Réticence, certitude, équilibration : étude de cas. Dans Le sens du savoir. éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique. Chapitre en ligne http ://python.espe-bretagne.fr/sensevy/sensdusavoir/LeSensDuSavoirChap8B.pdf). Bruxelle: De Boeck.
Sensevy, G. (2012a). Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques. Nouvelles Perspectives en Sciences Sociales, 7(2), 105-131.
Sensevy, G. (2012b). Postface: pourquoi les jeux ? Le jeu comme modèle quelques remarques. Dans Gruson, M. Loquet & D. Forest, Jeux de savoir. Etudes de l'action conjointe en didactique (p. 363-369). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Sensevy, G. (2012c). Quel type de mathématiques pratiquer en début d'école primaire ? Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, (p.58-60). Lyon. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations:conférence-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf
Sensevy, G. (2012d). La relation, le collectif, l'épistémique et le politique. Dans B. Albero, G. Gueudet, J. Eneaun J-N Blocher, Formes d'éducation et processus d'émancipation (p. 81-88). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Sensevy, G. (2013). Filmer la pratique. Un point de vue de la théorie de l'action conjointe en didactique. Dans L. Veillard & A. Tiberghien. (dir.), Instrumentation de la recherche *en Éducation. Le cas du développement d'une base de vidéos de situation d'enseignement et d'apprentissage ViSA.* Paris : Presses de la MSH. Repéré à http://books.openedition.org/editionsmsh/1954?lang=fr.

Sensevy, G. (2015). Apprendre : faire apprendre. Revue Française de Pédagogie.
Sensevy, G. (2016). Le collectif en didactique. Dans Y. Matheron & G. Gueudet. (eds), Actes de la XVIII Ecole d'été de didactique des mathématiques. Brest : La pensée Sauvage.
Sensevy, G. Blocher, J-N, Joffredo-Le Brun, S & Morales, G. (2013). Les ingénieries coopératives : nature, modalités de production, et questions. communication présentée au laboratoire LDAR. Paris, Université de Paris Diderot.
Sensevy, G. Gruson, B. & Forest, D. (2015). On the Nature of the Semiotic Structure of the Didactic Action : The Joint Action Theory in Didactics Within a Comparative Approach. Interchange, 6(4), 387–412.
Sensevy, G. Joffredo-Le Brun, S. , Morellato, M. Quilio, S. & Vigot, N. (2015). Cooperative Engineering, Comparative Didactics, and Joint Action Theory in Didactics. Communication présentée à ECER, Budapest.
Sensevy, G. & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des* élèves dans le système didactique. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Sensevy, G. & Quilio, S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. Revue Française de pédagogie, 141, 47-56.
Sensevy, G.& Vigot, N. (2016). Modélisation de l'action et contrefactuels. Un exemple exploratoire en didactique. Tréma.
Sensevy, G., & Tiberghien, A. (2015). Milieu. Dans R. Gunstone (Eds), Encyclopedia of science education (vol 2, p. 639-641).
Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. & Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 45(7), 1031-1043.
Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la Course à 20. Recherches en Didactique des mathématiques, 20(3), 263-304.
Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M-L., Ligozat, F. & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in mathematics. Educational Studies in mathematics, 59(1), 153-181.
Sensevy, G., Tiberghien, A., Santini, J., Laubé, S. & Griggs, P. (2008). Modelling, an epistemological approach : cases studies and implications for science teaching. Science Education, 92(3), 424-446.
Serfati, M. (2005). La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Paris : Petra.
Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being, How mathematical discourse and mathematical objects create each other. Dans P. Cobb, K.E. Yackel & K. McClain (eds.), Symbolizing and Communicating, Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design (p. 37–98.). Erlbaum : Mahwah, NJ.
Tiberghein, A. & Sensevy, G. (2012). Video studies : Time and duration in the teaching-learning processes. Dans J. Dillon & D. Jorde J. D. (Eds.), Handbook "The World of Science Education (Vol. 4, p. 141-179). Rotterdam/Boston/Taipei : Sense Publishers.
Tiberghein, A. (2012). Analyse d'une séance de physique en seconde : quelle continuité dans les pratiques ?. Education et Didactique, 6(3), 97-123.
Tiberghien, A. & Malkoun, L. (2007). Différenciation des pratiques d'enseignement et acquisitions des élèves du point de vue du savoir. Éducation et Didactique, 1(1), 29-54.
Tomasello, M. (2008). Origins of Human Communication. Cambridge : MIT Press.
Uttal, D., Liu, L. & Deloache, J. (1999). Taking a hard look at concreteness : do concrete objects help young children learn symbolic relations ?. Dans L. Balter & C. Tamis-

LeMonda (eds), Handbook of early child deveoppment (p. 177-192). PublisherPsychology Press.
Uttal, D.; Scudder, K. & Deloache, J. (1997). Manipulives as symbols : A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. Journal of applied developmental psychology, 18, 37-54.
Van Fraassen, B. (2008). Scientific representation (Vol. 73). Oxford : Oxford University Press.
Vergnaud, G. , Cortes, A. & Favre-Artigue. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. DansG. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin (Eds), Didactique et Acquisition des Concepts Scientifique. Actes du Colloque de Sèvres. (p. 259-279.).
Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité. Bern : Peter Lang.
Vergnaud, G. (1985). Understanding Mathematics at the Secondary School Level. Dans L. B. Dans A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (Eds), Theory, Research and Practice. (p. 27-45). University of Nottingham.
Verschaffel, L., Bryant, P. &Torbeyns, J. (2012). The inverse principle : Psychological, mathematical, and education considerations. Educational studies in mathematics, 79(3), 327-334.
Vigot, N. (2014). Temps des pratiques de savoir, dispositifs et stratégies professorales : une étude de cas en mathématique au cours préparatoire : Journal du nombre et anticipation. (Thèse en Sciences de l'Education).Université de Bretagne occidentale:.
Vygotsky, L. (1986). Thought and Language. Cambridge : MIT Press.
Vygotsky, L. (1997). Pensée et langage. Paris : La dispute/SNEDIT.
Wickman, P.-O. (2012). L'expérience esthétique dans l'enseignement des sciences. Apprentissage et production de sens comme discours situé et action. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
Winkin, Y. (2001). Anthropologie de la communication. Paris : le Seuil.
Wittgenstein. (2004). Recherches philosophiques. Paris : Gallimard.
Wittgenstein, L. (2006). De la certitude. Paris : Gallimard.

Table des matières

Introduction générale **3**
PREMIERE PARTIE : Le cadre de l'enquête **7**
CHAPITRE 1 : Contextualisation **9**
1.La recherche ACE-ArithmÉcole 9
1.1. Les principes mathématiques 10
1.2. Déroulement de la recherche 11
2.Le domaine « Situations » 13
2.1. La conception du domaine « Situations » 13
2.1.1. Les principes du domaine « Situations » 13
2.1.2. Vision synoptique du domaine « Situations » 15
2.1.3. Le Journal du Nombre et l'Anticipation 16
2.2. Conception du domaine « Situations, une ingénierie didactique coopérative 18
2.2.1. L'équipe de recherche, la sphère 1 18
2.2.2. Les classes expérimentales, la sphère 2 19
3.L'enseignement des mathématiques : quelques éléments 24
3.1. Les résultats des évaluations 24
3.2. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire 26
3.2.1. Réflexions et perspectives institutionnelles 26
3.2.2. Réflexions sur l'enseignement des mathématiques par les acteurs de la recherche 28
3.3. Les ressources et la formation des professeurs 31
3.4. Les programmes 33
3.4.1. Eléments de réflexion sur les programmes 33
3.4.2. Les nouveaux programmes au cycle 2 34
4.Conclusion 36
4.1. Le contenu mathématique 37
4.2. Organisation de la recherche ACE 38
CHAPITRE 2 : Problématique **39**
1.Le concept de continuité 39
1.1. La notion de curriculum 40
1.2. Le temps didactique 41
1.2.1. Le temps d'objet 41
1.2.2. Le paradigme de la visite des œuvres. 43
1.2.3. Paradigme du questionnement du monde. 44

1.2.4. Le temps de situation 45
1.3. Continuité de l'expérience des élèves 48
2.Les représentations dans la recherche ACE-ArithmÉcole 53
1.1. La notion de modélisation 54
1.2. La notion de référence dans la dénotation 55
1.3. Relation concret/abstrait : les travaux en psychologie 57
1.3.1. Les représentations concrètes 58
1.3.2. Les représentions abstraites. 59
1.3.3. Le Concreteness Fading 60
1.3.4. La montée de l'abstrait au concret 62
1.4. Le concept de représentation en didactique des mathématiques 63
1.4.1. Les représentations chez Brousseau 63
1.4.2. Le jeu représentationnel 65
1.5. Les représentations dans ACE 67
1.5.1. Les représentations concrètes 68
1.5.2. Les représentations analogiques 70
1.5.3. L'écriture symbolique mathématique 77
1.6. Synthèse des représentations 77
CHAPITRE 3 : outils théoriques 81
1.Ingénierie didactique coopérative : postulats théoriques 82
2.Modélisation sous forme de jeux 84
2.1. Jeu d'apprentissage et jeu épistémique 85
2.1.1. Le contrat didactique 87
2.1.2. Le milieu 89
2.2. Dialectique contrat/milieu et équilibration didactique. 90
2.3. La dialectique réticence/expression 92
3.Le triplet des genèses, descripteur de l'action conjointe 93
3.1. La mésogénèse 93
3.2. La chronogénèse 94
3.3. La topogénèse 94
4.Les stratégies contrefactuelles 95
5.Questions de recherche 95
CHAPITRE 4 : Outils méthodologiques 97
1.Eléments généraux de réflexion méthodologique 97
1.1. Approche clinique et paradigme indiciaire 97
1.2. Jeux d'échelle et continuité 100

1.3. Positionnement de chercheur 102
2.Collectif chercheurs/professeurs 103
2.1. Organisation de l'ingénierie 104
2.2. Données liées à la sphère 1 105
2.3. Données liées à la sphère 2 et au dialogue inter sphères 106
2.3.1. Forum du site Internet de la recherche 107
2.3.2. Les réunions inter-sphères 107
2.3.3. Liste de diffusion inter-sphères 111
2.4. Synthèse 112
3.Les textes curriculaires 113
3.1. Organisation des textes curriculaires 113
3.2. Méthodologie d'analyse 114
4.Etude de la pratique effective 115
4.1. Choix du professeur 116
4.2. Choix de l'année d'observation et des séances 118
4.3. Traitement des données 120
4.3.1. La vision synoptique 121
4.3.2. Les transcriptions 125
4.3.3. Mise en intrigue 126
4.4. Choix des épisodes analysés 127
4.4.1. Le module 1 127
4.4.2. Module 2 128
4.4.3. Module 7, la différence 129
5.Courte synthèse du chapitre 4 129
5.1. Le dialogue d'ingénierie 130
5.2. L'étude des textes de la progression 130
5.3. L'analyse de la pratique effective 131

DEUXIEME PARTIE : Analyse 133
CHAPITRE 5 : Coopération chercheurs/professeurs. Introduction des systèmes de représentation 135
1.Le schéma-ligne : pierre d'achoppement 137
1.1. Relevé d'expériences des professeurs expérimentaux 137
1.2. Relevé d'expérience dans les classes d'étude 140
2.La progression des savoirs, premiers éléments d'analyse 142
2.1. Module 0 : situation trains/tours, désignation orale et écrite des quantités 142

2.1.1. Description du module 0 142
5.1.1. Eléments d'analyse du module 0 145
2.2. Introduction du jeu des annonces, le module 1 147
2.2.1. Organisation du module 1 147
2.2.2. Eléments d'analyse du module 1 149
2.3. Entrée dans l'écriture symbolique, le module 2 150
2.3.1. Organisation du module 150
2.3.2. Eléments d'analyse du module 2 152
2.4. Ecriture symbolique et systèmes de représentation : analyse microscopique 155
2.4.1. Analyse de la séance 1 du module 2. 155
2.4.2. Séances de parties fictives 157
2.4.3. Premiers éléments de synthèse 158
3.Processus de régulation immédiat 160
3.1. Processus de régulation en classe 161
3.1.1. Les classes expérimentales 161
3.1.2. Les classes d'étude 162
3.2. Régulation immédiate en ligne 163
3.2.1. Première régulation, le module 2 164
3.2.2. Seconde régulation en ligne, le module 3 165
3.3. Nouvelle régulation : réécriture des modules 3 et 4 166
3.3.1. Réagencement du Module 3 167
3.3.2. Module 4 : le jeu des correspondances 171
3.3.3. Le jeu des correspondances, module 4' séance 3 179
3.4. Synthèse de la régulation immédiate réalisée par la sphère 1 184
4.Travail coopératif professeurs/chercheurs 187
4.1. Stage bilan/perspectives 188
4.1.1. Présentation du stage bilan/perspectives 188
4.1.2. La métamorphose du train 189
4.1.3. Du schéma-train au schéma-ligne 191
4.2. Analyse du travail coopératif 194
5.Seconde régulation, vers une continuité des représentations 195
5.2. Le module 0, situation trains/tours (2013-2014) 196
5.1.1. Description des modifications 196
5.1.2. Analyse de la version 2 du module 0 199
5.2. Le module 1, construction d'une continuité 201
5.2.1. Le module 1, les réagencements 201

5.2.2. Analyse du module 1, Construction d'une capacité de traduction 202
5.3. Module 2, écriture symbolique et mise en traduction des représentations 204
5.3.1. Nouvelles orientations du module 2 2013-2014 205
5.3.2. Description du module 2 206
5.3.3. Analyse du module 2, jeu représentationnel 210
5.3.4. Analyse de l'introduction du schéma-ligne 212
6.Synthèse du chapitre 5 217
6.1. Continuité et systèmes de représentation 218
6.2. Dialectique contrat/milieu 221
CHAPITRE 6 : représentations et écritures additives 223
1.Désignation orale et représentations 227
1.1. Présentation de la séance 3 du module 1 227
1.2. Traduction d'une décomposition de deux sous-collections 231
1.2.1. Episode 1 : désignation des quantités (main droite) 232
1.2.2. Episode 2 : Désignation des quantités (main gauche) 235
1.2.3. Episode 3 : schéma-ponts et représentation symbolique des quantités 239
1.3. Synthèse des trois épisodes, séance 3 244
1.3.1. Continuité et systèmes de représentation 244
1.3.2. Savoir en jeu et stratégie professorale 246
2.Systèmes de représentation et comparaison orale 249
2.1. Présentation de la séance 4 du module 1 250
2.2. Comparaison et traduction 253
2.2.1. Représentation corporelle et représentation analogique (épisode 4) 254
2.2.2. Episode 5, constellation de points sur un dé et représentations analogiques 258
2.2.3. Les schémas-ponts, Episode 6 265
2.2.4. Synthèse de l'analyse de l'extrait 2 268
2.3. Introduction du schéma-train/ligne 270
2.3.1. Nouveau système de représentation : le schéma train/ligne (épisode 7) 272
2.3.2. Episode 8, centration sur la place du zéro et mise en traduction 274
2.3.3. Synthèse de l'analyse de l'extrait 3 284
3.Entrée dans l'écrit : le module 2 286
3.1. Introduction de l'écriture mathématique 286
3.1.1. Présentation de la première séance du module 2 287
3.1.2. Introduction du nouveau jeu (épisode 10) 292
3.1.3. Episode 11, représentation corporelle et désignation écrite 294
3.1.4. Ecriture additive, le signe « + » 296

3.2. Usage des systèmes de représentation 299
3.2.1. Episode 13, comparaison et représentation corporelle 302
3.2.2. Episode 14, représentation et comparaison 304
3.2.3. Episode 15, introduction de l'égalité mathématique 313
4.Synthèse du chapitre 6 320
4.1. Systèmes de représentation et continuité didactique 320
4.1.1. Systèmes de représentation 320
4.1.2. Continuité didactique 323
4.2. Stratégies professorales 326
4.2.1. Les professeurs débutants 326
4.2.2. La professeure titulaire de la classe 328
CHAPITRE 7 : Construction coopérative d'une continuité didactique autour de la différence 331
1.Avancée du temps didactique **et** différence, version 2012-2013 332
1.1. Retour sur les premiers modules 333
1.2. Module 5 : Annonce à deux mains et lancer de deux dés 334
1.3. Module 6 : passage à l'écrit 336
1.4. Module 6B : vers les groupements par 10 338
1.5. Module 7 : groupement par 10 340
1.5.1. Organisation du module 7 340
1.5.2. Analyse du module 7 341
1.6. Module 8 : comparaison d'écritures additives 343
1.6.1. Organisation du module 8 343
1.6.2. Analyse du module 8 344
1.7. Module 9 : la différence 345
1.7.1. Organisation du module 9 345
1.7.2. Analyse du module 9 348
1.8. Synthèse de l'avancée des savoirs 353
2.Dialogue intra et inter sphères, la différence 355
2.1. Relevé d'expériences 356
2.1.1. Partage d'expériences et hypothèses de travail 356
2.1.2. Analyse de la réunion de régulation du 17 avril 2013 362
2.2. Réorganisation conjointe des modules 365
2.2.1. Réorganisation des modules autour du module « Différence » 366
2.2.2. La notion de différence 369
2.2.3. La comparaison et la différence 372

2.2.4. La différence, fil rouge 375
2.3. Synthèse du dialogue inter-sphères 377
3.Nouvelle organisation des modules, année 2013-2014 378
3.1.1. Réagencement des modules et différence 378
3.2. Module 7 : la différence sur les petits nombres 381
3.3. Séance 1 du module 7 382
3.4. Séance 2 du module 7 387
3.5. Séance 3 du module 7 389
4.Synthèse du chapitre 7 392
4.1. Organisation des modules 393
4.2. La différence 394
CHAPITRE 8 : représentations et différence, continuité de l'expérience des élèves 397
1.Introduction de la différence 400
1.1. Episode 16, introduction de la notion de différence 402
1.2. Episode 17, recherche de la différence à partir d'écritures additives 403
1.2.1. Présentation de l'épisode 17 403
1.2.2. Eléments d'analyse 405
1.2.3. Les stratégies contrefactuelles 407
1.3. Episode 18, recherche de la différence et représentation corporelle 409
1.3.1. Présentation et analyse 409
1.3.2. Stratégies contrefactuelles 411
1.4. Episode 19, recherche de la différence et le schéma-ligne, ... 412
1.4.1. Le schéma-ligne. 412
1.4.2. Recherche de la différence sur les schémas-lignes 414
1.4.3. Stratégies contrefactuelles 418
1.5. Conclusion 419
2.La symbolisation de la différence 422
2.1. Contextualisation et présentation de l'extrait 422
2.2. Episode 20, le train-nombre et recherche de la différence 425
2.3. Episode 21, enquête sur la désignation de la différence 428
2.3.1. Présentation de l'épisode 428
2.3.2. Eléments d'analyse 430
2.3.3. Stratégies contrefactuelles 432
2.4. Episode 22, le schéma-boîte et la différence 433
2.4.1. Introduction du schéma-boîte 434
2.4.2. Le schéma-boîte 437

2.4.3. Schéma-boîte et écriture soustractive 439
2.4.4. Conclusion de l'analyse de l'épisode 444
3.Les représentations et la différence 448
3.1. Présentation de la séance 2 449
3.2. Présentation de l'extrait 450
3.2.1. Episode 23 : les schémas-lignes 452
3.2.2. Episode 24, représentation de la différence 458
3.2.3. Synthèse de l'analyse des épisodes 23 et 24 461
4.Synthèse du chapitre 8 462
4.1. Milieu de l'enquête 462
4.2. Continuité de l'expérience des élèves 469

TROISIEME PARTIE : Synthèse et perspectives 471
CHAPITRE 9 : Eléments de synthèse 473
1.Retour sur les questions de recherche, principaux résultats 473
1.1. Dialogue d'ingénierie et conception de ressources 474
1.1.1. Dialogue d'ingénierie et continuité de l'expérience des élèves 475
1.1.2. Ingénierie didactique coopérative et conception de ressources 480
1.2. Continuité didactique dans l'expérience des élèves et situations de comparaison 482
1.2.1. Construction d'une continuité à travers les représentations 483
1.2.2. Continuité et systèmes de représentation 489
1.3. Continuité didactique dans l'expérience des élèves, recherche de la différence 493
1.3.1. Textes de progression et continuité didactique 493
1.3.2. Continuité de l'expérience des élèves dans une situation de différence 496
1.4. Jeu d'imitation et systèmes de représentation 498
1.5. Vers un temps de situation 500
1.6. Construction de la continuité des élèves et gestes d'enseignement 501
2.Limites de l'étude et perspectives 503
2.1. Limites et perspectives théoriques 503
2.2. Limites et perspectives méthodologiques 504
2.3. Les perspectives de recherche 506
2.4. Perspectives pour la formation 507
2.4.1. Formation continue et progression ACE-ArithmÉcole 507
2.4.2. Formation continue et ingénierie didactique coopérative 510
2.4.3. Formation à la recherche 510

Conclusion générale **511**
1.La conception du nombre 511
2.Conception de ressources 512
3.Continuité de l'expérience des élèves 513
4.Perspectives de recherche 514
Bibliographie **517**
Table des matières **531**