



HAL
open science

Acoustique des milieux bulleux

Maxime Lanoy

► **To cite this version:**

Maxime Lanoy. Acoustique des milieux bulleux. Physique [physics]. Université Paris Denis Diderot, 2016. Français. ⟨NNT : 2016USPCC147⟩. ⟨tel-01494543⟩

HAL Id: tel-01494543

<https://hal.science/tel-01494543v1>

Submitted on 23 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Institut **Langevin**
ONDES ET IMAGES



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ
PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ PARIS DENIS DIDEROT
ÉCOLE DOCTORALE 564 - PHYSIQUE EN ILE DE FRANCE

Acoustique des milieux bulleux :

Applications à la conception de métamatériaux et à la manipulation de bulles

Par **Maxime Lanoy**

sous la direction de **Arnaud Tourin** et de **Valentin Leroy**
Institut Langevin - Ondes et Images
Laboratoire Matière et Systèmes Complexes

Présentée et soutenue publiquement à Paris le 2 décembre 2016
devant le jury composé de :

Philippe Marmottant
Vincent Laude
Régis Wunenburger
Thomas Brunet
Geoffroy Lerosey
Arnaud Tourin
Valentin Leroy
Bertrand Habert

Président du jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Co-directeur de thèse
Invité

Remerciements

Pour commencer, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mes deux encadrants de thèse, Valentin et Arnaud, qui ont accepté de se lancer dans cette aventure et qui m'ont tant appris.

Merci à Valentin, la force tranquille. Derrière son sourire paisible, on se rend vite compte que ça bouillonne : autant dire que les questions ne restent pas bien longtemps sans réponse ! Et puis merci à Arnaud, "le Professeur" au savoir absolument encyclopédique et, surtout, maître dans l'art de le faire partager. Je suis sincèrement honoré d'avoir pu conduire ces travaux à vos côtés.

Je souhaite également profiter des ces lignes pour remercier chaleureusement mes deux rapporteurs, Régis Wunenburger et Vincent Laude, qui ont lu minutieusement mon manuscrit ainsi que Thomas Brunet, Philippe Marmottant, Vincent Habert et Geoffroy Lerosey qui m'ont accordé l'honneur de participer à mon jury de soutenance.

Je remercierai Geoffroy plutôt deux fois qu'une puisque c'est en assistant à ses réunions de groupe que j'ai pu découvrir le monde fabuleux des métamatériaux.

Un grand merci à Romain Pierrat qui m'a permis de percer les mystères de l'écran noir ainsi qu'à Caroline Derec, Mathieu Receveur et Laurent Réa qui m'ont aidé à concevoir les manips sur les forces de Bjerknæs.

Et puis il y a aussi Fabrice, que je considère désormais plus comme un ami que comme un collègue mais que je dois aussi remercier pour ses nombreux coups de main ainsi que pour sa faculté à rendre la science plaisante autant dans une salle de manip qu'autour d'une bière.

Puisqu'on parle de bière, il me faut également saluer ici mes compagnons de fortune des soirs de fin de semaine. Il faut bien reconnaître que certains d'entre eux se sont distingués par leur assiduité dans l'exercice. Je remercie en particulier les cofondateurs du "jeuqnard" que sont Florian (alias *Notorious Fish von da funky sip*), Benoît et Amaury ! Il faut également saluer les contributions de Nikos (*El croqueur*),

Juliette et Diego qui, en tant que membres honoraires, ont grandement participé à la convivialité de l'évènement.

Je garderai aussi le souvenir de nos repas du midi, en compagnie de Daria et Laura, qui ont gentiment accepté de s'adapter à nos horaires de pré-retraités. Et puis il y a les autres thésards : Hugo, Mathieu et Nadège mes illustres prédécesseurs et Simon, Samuel et Philipp qui vont assurer la relève. Merci aussi à François aux côtés duquel j'ai apprécié enseigner et qui, j'en suis sûr, parviendra à boucler sa rédaction un jour ! Je n'oublie pas Nico et Olivier, mes compères de Paris 7. D'une manière générale je tiens à remercier l'ensemble des personnels de l'Institut Langevin, du laboratoire MSC ainsi que les deux organismes impliqués dans le financement de ma thèse que sont le CNRS et la DGA.

Je remercie également les copains de promo et de l'école, les volleyeurs ainsi que les quelques amis de longue date qui m'ont régulièrement permis de m'extraire du contexte du laboratoire.

Je conclurai en remerciant ma famille et, en particulier, mon père, ma mère et mon beau-père qui m'ont soutenu tout le long de mes études (promis, c'est fini !) et qui se sont sincèrement intéressés à l'acoustique des bulles (ainsi qu'aux nombreux calembours qui vont avec) sans vraiment savoir ce dont il s'agissait. Merci aussi à la belle-famille italienne qui s'est régulièrement enquis de l'actualité des forces de Bjerknes secondaire.

Pour finir, je ne remercierai jamais assez Allegra, avec qui j'ai le bonheur de partager mon quotidien depuis maintenant six ans, et qui a suivi attentivement chacune des péripéties qui ont accompagné le déroulement de cette thèse. Je lui suis infiniment reconnaissant d'avoir accepté de relire l'essentiel du manuscrit qui suit malgré son peu d'accointances pour l'univers de la physique.

Résumé :

Lorsqu'elle est excitée par une onde ultrasonore, une bulle d'air oscille. Les mouvements l'interface eau-air entraînent un déplacement local du fluide hôte qui devient le siège de la propagation d'une onde diffusée. Ce mécanisme très simple est fidèlement décrit par le formalisme de Rayleigh-Plesset datant du début du siècle dernier. A basse fréquence, au voisinage de la résonance de Minnaert, les oscillations de la bulle peuvent devenir particulièrement amples et la diffusion extrêmement efficace. Dans un environnement réaliste, les bulles sont présentes en grand nombre et la description se complique sensiblement puisque la propagation résulte de l'interférence entre une infinité de séquences de diffusion.

Au cours de cette thèse, nous introduirons les modèles de milieux effectifs qui permettent de prédire le comportement de fluides bulleux désordonnés. Après avoir été confrontées aux résultats issus de la simulation numérique, ces théories effectives nous permettront de concevoir des matériaux désordonnés aux propriétés étonnantes comme la superfocalisation ou la réfraction négative.

Nous envisagerons également l'étude d'arrangements cristallins et verrons que la périodicité induit des modifications sensibles dans le comportement du milieu tout en constituant un levier de contrôle efficace.

Enfin, la bulle est susceptible de se mouvoir et, par conséquent, de ressentir des forces de pression de radiation. En particulier, Nous verrons comment la force de Bjerknes secondaire, issue du champ diffusé par une bulle vers l'une de ses voisines, peut être exploitée afin de manipuler une ou plusieurs bulles mobiles au voisinage d'une ou plusieurs bulles piégées.

Abstract :

A bubble undergoing an acoustic wave is likely to oscillate. The displacement of the air-fluid interface generates a local compression of the outer fluid where a scattered wave is thus created. This very simple mechanism has been successfully described by the famous Rayleigh-Plesset formula derived at the beginning of the previous century. At low frequencies, the resonant behavior (Minnaert) is responsible for a strong enhancement of the oscillations of the bubble which thus becomes a very efficient scatterer. In a realistic media, bubbles are not isolated. The interferences occurring between an infinity of scattering sequences make the description of the propagation a lot harder to achieve.

In this thesis, we introduce the effective theories that are classically adopted to describe random bubbly liquids. After being compared to our numerical results, these theories are used in order to design bubbly materials featuring some interesting properties such as superfocusing or negative refraction.

The case of periodic assembly is addressed as well for both a simple square lattice bubble raft and a cubic centered faces bi-periodic crystal. We show that the periodicity induces an explicit modification in the dispersion of the medium and offers a simple tunable parameter.

At last, we focus on the possibility for the bubble to move inside the host fluid and which is thus likely to experience an acoustic radiation pressure called Bjerknes force. We show how the secondary Bjerknes force, resulting from the wave scattered by a bubble toward its neighbors, can be exploited in order to manipulate one or several free bubble flowing near one or several trapped bubbles.

Table des matières

Introduction	13
Bibliographie	16
1 Acoustique des bulles	17
1.1 La bulle unique	20
1.1.1 Oscillations hydrodynamiques d'une bulle	20
1.1.2 Diffusion du son par une bulle unique	23
1.2 Essaims de bulles	31
1.2.1 Description de la propagation acoustique	31
1.2.2 Conservation de l'énergie	36
1.3 Le couple de bulles	40
1.3.1 Position du problème	40
1.3.2 Champ diffusé	41
1.3.3 Manifestation de la diffusion multiple	42
1.3.4 Conservation de l'énergie	43
1.4 Conclusions	44
Bibliographie	45
2 Milieux bulleux désordonnés	47
2.1 Onde cohérente et paramètres effectifs	50
2.1.1 Définitions	50
2.1.2 Les premières théories effectives	52
2.1.3 Détermination numérique des paramètres effectifs	60
2.2 Contrôle du champ incohérent	66
2.2.1 Contrôle des degrés de liberté spatiaux	67
2.2.2 Contrôle des degrés de liberté temporels - Focalisation par re- tournement temporel	70
2.3 Milieux désordonnés spatialement corrélés	87
2.3.1 Corrélations faibles (Keller)	87

2.3.2	Corrélations fortes (Waterman et Truell)	89
2.4	Conclusion : Vers des milieux structurés	101
	Bibliographie	103
3	Cristaux de bulles	109
3.1	Le plan de bulles	112
3.1.1	Transmission par un plan de bulles	112
3.1.2	Application à la rhéologie haute fréquence	114
3.1.3	Une deuxième application : Conception d'un méta-écran super absorbant	118
3.1.4	Conclusion	125
3.2	Réfraction négative : conception d'une lentille plate	126
3.2.1	Cristaux phononiques et réfraction négative	127
3.2.2	Une nouvelle approche combinant résonances individuelles et effets cristallins	129
3.3	Conclusions	138
	Bibliographie	139
4	Utiliser le son pour manipuler des bulles	143
4.1	Pression de radiation	146
4.1.1	Maxwell, Rayleigh, Langevin et Brillouin	146
4.1.2	Manipulation d'objets	147
4.2	Forces de Bjerknes	149
4.2.1	Historique	149
4.2.2	Formulation générale	150
4.2.3	Oscillations d'une bulle en régime forcé	151
4.2.4	Expression de la force primaire	151
4.2.5	Premières observations et exemples d'applications	153
4.3	Force de Bjerknes secondaire	155
4.3.1	Expression de la force secondaire	155
4.3.2	Approximation des bulles "proches"	156
4.3.3	Signe de la force	158
4.4	Observation expérimentale de la force secondaire	160
4.4.1	Dispositif expérimental et description du problème	160
4.4.2	Calibration de la traînée	161
4.4.3	Observation des deux régimes et validation de l'approximation des bulles proches	162
4.4.4	Influence du couplage	164
4.4.5	Un cas de couplage extrême	165
4.5	Forces de Bjerknes étendues	168
4.5.1	Expression de la force étendue	168
4.5.2	Le trio de bulles	170
4.5.3	Manipulation à deux dimensions : le cas du trio de bulles	170
4.5.4	Manipulation simultanée de plusieurs bulles mobiles	174

4.5.5 Conclusion	176
Bibliographie	177
Conclusion	181
Appendices	185
A Extraction des paramètres effectifs	187
A.1 Méthode 1D	187
A.2 Méthode 3D Sphérique	189
B Plan de bulles	191
B.1 Mise en évidence expérimentale du couplage dans le cadre de la superposition de deux plans de bulles	191
B.2 Mise en évidence numérique du couplage dans le cadre de la superposition de deux plans de bulles	193

Introduction

Quoi de plus simple que de créer un nuage de bulles dans un aquarium ? Et quoi de plus banal qu'une bulle d'air dans l'eau ? Cet objet est pourtant parvenu à concentrer l'attention de générations de chercheurs issus de diverses communautés, et ce depuis les travaux fondateurs de Rayleigh sur l'endommagement des hélices de bateau par les bulles de cavitation [1]. Il faut dire que la physique des bulles est d'une très grande richesse. L'exemple de l'expérience classique de la sonoluminescence en est une bonne illustration. Au début des années 1990, Gaitan [2] montre ainsi qu'une bulle d'air, préalablement piégée aux ventres d'un réseau d'ondes stationnaires, peut être contrainte à émettre un flash lumineux visible à l'œil nu. Si il y a encore débat sur l'origine du phénomène, on sait désormais qu'il résulte de la combinaison d'une grande variété de mécanismes allant de l'acoustique à la chimie en passant par l'hydrodynamique, la physique des plasmas, la thermodynamique ou bien encore l'optique.

Pendant cette thèse, notre intérêt s'est porté sur la bulle vue comme un diffuseur très efficace pour les ondes sonores, et présentant de surcroît la particularité de posséder un caractère résonant à très basse fréquence. Cette résonance, plus connue sous le nom de résonance de Minnaert, intervient pour des longueurs d'onde dans l'eau cinq cent fois supérieures au rayon de la bulle. Son mode de respiration lui confère un degré de liberté interne qui fait qu'on la surnomme parfois "l'atome des acousticiens". A cet égard, elle constitue, comme nous le verrons, un candidat potentiel assez naturel pour la conception de matériaux acoustiques localement résonants, sujet actuellement en plein essor.

Le comportement acoustique d'une bulle isolée dans l'eau est bien compris depuis les travaux fondateurs de Minnaert (1933), découvreur de la résonance éponyme [3], et depuis l'établissement de l'équation de Rayleigh-Plesset qui décrit ses oscillations sous l'effet du champ acoustique [1, 4].

La description de la propagation du son dans un essaim de bulles relève également

de l'histoire ancienne. C'est, en effet, en 1945 que Foldy a publié le premier modèle de milieu effectif permettant de prédire l'atténuation et la vitesse d'une onde dans un milieu constitué de diffuseurs isotropes [5]. Toutefois, si d'autres modèles ont été proposés depuis, et ont permis d'améliorer l'ajustement des données expérimentales, le rôle joué par la diffusion multiple dans les milieux bulleux n'est, à ce jour, pas parfaitement clair. En effet, au voisinage de la résonance, la distance moyenne entre bulles peut être très inférieure à la longueur d'onde, et ce même dans le cas d'échantillons dilués. Pour une fraction volumique d'air de 10^{-4} , à la fréquence de résonance, la sphère de rayon λ contient plus de 10 000 bulles. L'image d'une onde se propageant de proche en proche d'une bulle à l'autre n'est plus satisfaisante, de même que l'hypothèse d'une absence de couplage entre diffuseurs. Dans cette configuration, une estimation du libre parcours moyen élastique à partir de la formule $\ell_e = 1/n\sigma_s$ (avec n la concentration en bulles et σ_s la section efficace de diffusion d'une bulle) semble donc sujette à caution. En effet, si cette formule peut être établie en suivant différentes approches, toutes se rejoignent sur la nécessité de considérer les diffusions comme indépendantes. C'est l'essence même de l'*Independent Scattering Approximation* (ISA). Autrement dit, chaque diffuseur est visité par l'onde au plus une fois. Pourtant, en se fondant sur cette formule, plusieurs travaux ont montré que le critère de Ioffe-Regel, $k\ell_e < 1$, peut être aisément satisfait dans un nuage de bulles résonantes. Cette constatation a parfois conduit à interpréter l'effondrement de la transmission acoustique à travers une population de bulles au-delà de leur fréquence de résonance comme une signature de la localisation forte ou localisation d'Anderson [6–10]. Nous verrons qu'une autre interprétation est possible pour expliquer cette chute de transmission. Il faut par ailleurs noter que le rôle de l'absorption ne doit pas être négligé. Dans la pratique, l'absorption rendrait impossible une démonstration de la localisation fondée sur une simple mesure de la transmission moyenne ; à supposer d'ailleurs que l'on puisse concevoir un échantillon dont les tailles de bulles et leur répartition puissent être contrôlées. Car, la réalisation d'expériences se heurte avant tout bien souvent à la difficulté de concevoir des échantillons contrôlés et stables dans le temps.

À la lumière de ce double enjeu, théorique et expérimental, nous nous sommes fixés deux objectifs : d'une part, contribuer à faire avancer la compréhension de la propagation acoustique dans les milieux bulleux, en particulier dans des régimes où les interactions entre bulles voisines ne peuvent pas être négligées ; d'autre part, apprendre à apprivoiser les bulles, en les piégeant dans des matrices élastomères afin de concevoir des matériaux aux propriétés intéressantes, ou bien en exploitant la force qui s'exerce entre des bulles sollicitées acoustiquement pour contrôler leurs trajectoires. Pour ce faire, nous avons utilisé une triple approche analytique, numérique et expérimentale pour mettre en lumière les effets conjoints de la résonance des bulles et de la diffusion multiple.

Dans le premier chapitre, nous rappelons le comportement d'une bulle soumise à un champ acoustique ; ce qui nous permet d'introduire l'amplitude de diffusion d'une bulle ainsi que les différentes sources d'amortissement (rayonnement, viscosité

et conduction thermique). Nous introduisons ensuite l'outil numérique que nous utiliserons par la suite pour prédire les propriétés de transmission de milieux bulleux (chapitres 2 et 3) mais aussi pour calculer la force exercée par un ensemble de bulles sur l'une d'entre elles (chapitre 4). Nous terminerons ce chapitre par l'étude d'un cas particulier qui, bien qu'extrêmement simple, concentre l'essentiel de la physique qui reviendra au cours du manuscrit : le couple de bulles interagissant par le biais de la diffusion multiple.

Dans le second chapitre, nous utiliserons le code numérique décrit dans le premier chapitre pour étudier la propagation d'une onde acoustique dans un milieu bulleux désordonné. L'analyse de l'onde cohérente, c'est-à-dire de la partie de l'onde qui résiste à une moyenne sur le désordre, nous fournira la relation de dispersion du milieu bulleux. Celle-ci sera confrontée aux prédictions des théories de milieux effectifs, ce qui constituera l'occasion d'une analyse critique de ces dernières. Dans un second temps, nous verrons que la diffusion multiple dans le nuage de bulles crée des degrés de liberté que l'on peut exploiter pour focaliser avec des résolutions spatiales qui battent la limite de diffraction. Enfin, nous verrons que l'introduction d'un degré de corrélation dans la distribution spatiale des bulles peut avoir des conséquences importantes sur la propagation du son et peut être exploité pour approcher des régimes de réfraction négative.

Dans le troisième chapitre, mus par cette idée que la distribution spatiale des bulles est importante y compris en régime sub-longueur d'onde, nous nous intéresserons à des cristaux de bulles. Nous montrerons tout d'abord que les propriétés de transmission d'un cristal monocouche peuvent être prédites analytiquement et discuterons deux applications possibles, d'une part à la caractérisation d'élastomères et, d'autre part, à la conception de revêtements anéchoïques pour l'acoustique sous-marine. Dans un second temps, nous verrons que des cristaux tridimensionnels, réalisés à partir de l'assemblage de plusieurs de ces couches, peuvent posséder des propriétés de transmission étonnantes qui résultent d'une combinaison entre résonance des bulles et effets cristallins .

Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, nous nous intéresserons aux forces qui existent entre des bulles mobiles soumises à un champ acoustique. Nous montrerons alors que si l'une des bulles est piégée, elle peut être utilisée comme actuateur pour apprendre à piloter la trajectoire d'une bulle passant dans son voisinage. La force qui s'exerce alors est connue sous le nom de force de Bjerknes secondaire. Son signe peut être positif ou négatif suivant la position de la fréquence imposée relativement aux fréquences de résonance des deux bulles. Là encore, les effets de la diffusion multiple prendront toute leur importance. En particulier, nous montrerons que, lorsqu'une bulle s'approche de sa voisine en deçà d'une certaine distance, le signe de la force peut changer sans que la fréquence ne soit modifiée. Nous montrerons que ce changement s'avère une conséquence du couplage qui s'opère entre les deux bulles via la diffusion multiple.

Bibliographie

- [1] Lord Rayleigh. VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(200) :94–98, 1917.
- [2] D. F. Gaitan, L. A. Crum, C. C. Church, and R. A. Roy. Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(6) :3166–3183, 1992.
- [3] M. Minnaert. Xvi. on musical air-bubbles and the sounds of running water. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 16(104) :235–248, 1933.
- [4] M. S. Plesset. The dynamics of cavitation bubbles. *Journal of Applied Mechanics*, 16 :277–282, 1949.
- [5] L. L. Foldy. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, 67 :107–119, Feb 1945.
- [6] D. Sornette and B. Souillard. Strong localization of waves by internal resonances. *EPL (Europhysics Letters)*, 7(3) :269, 1988.
- [7] C. A. Condat and T. R. Kirkpatrick. Localization of acoustic waves. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*, 8 :423, 1990.
- [8] D. Sornette and J. P. Bouchaud. Can strong localization of waves be attained by internal resonances? *Journal de Physique I*, 2(10) :1861–1867, 1992.
- [9] K. X. Wang and Z. Ye. Acoustic pulse propagation and localization in bubbly water. *Physical Review E*, 64(5) :056607, 2001.
- [10] B. Liang and J. C. Cheng. Acoustic localization in weakly compressible elastic media containing random air bubbles. *Physical Review E*, 75(1) :016605, 2007.

CHAPITRE 1

Acoustique des bulles

Sommaire

1.1 La bulle unique	20
1.1.1 Oscillations hydrodynamiques d'une bulle	20
1.1.2 Diffusion du son par une bulle unique	23
1.2 Essaims de bulles	31
1.2.1 Description de la propagation acoustique	31
1.2.2 Conservation de l'énergie	36
1.3 Le couple de bulles	40
1.3.1 Position du problème	40
1.3.2 Champ diffusé	41
1.3.3 Manifestation de la diffusion multiple	42
1.3.4 Conservation de l'énergie	43
1.4 Conclusions	44
Bibliographie	45

Nous avons tous déjà été témoins de la capacité des bulles à produire du son. Au détour d'une balade en montagne, elle se manifeste dans le bruissement des ruisseaux. On pense également au son caractéristique produit par l'impact d'une goutte de pluie à la surface de l'eau. Dans l'univers sous-marin, le léger crépitement qui se fait entendre au sein des populations de micro-organismes y traduit la présence de bulles. D'ailleurs, c'est aussi dans cet environnement que la crevette-pistolet s'illustre en utilisant les bulles comme armes de chasse. Grâce à sa pince hypertrophiée, elle peut générer une bulle de cavitation qui, en s'effondrant, engendre une onde de choc qui étourdit ses proies. Le petit crustacé utilise cette stratégie depuis des centaines de millions d'années. En ce qui nous concerne, c'est le début du 20ème siècle qui, avec les travaux fondateurs de Rayleigh, a marqué une avancée significative dans la compréhension des mécanismes d'émission du son par une bulle soumise à une onde acoustique. Ce processus, que l'on qualifie de diffusif, est susceptible d'altérer la propagation d'une onde sonore. C'est d'ailleurs pour cette raison que le fonctionnement des sonars est souvent perturbé dans les régions les plus "bulleuses" de l'océan. Dans ce chapitre, nous étudions d'abord la capacité d'une bulle unique à émettre et/ou à diffuser une onde acoustique. Nous introduisons ainsi les concepts (résonance de Minnaert, section efficace de diffusion, pertes radiatives, visqueuses et thermiques) avec lesquels nous jouerons par la suite pour, d'une part, concevoir des matériaux bulleux présentant des propriétés de transmission ajustables et, d'autre part, apprendre à piloter la trajectoire d'une bulle. Dans un second temps, nous introduisons le formalisme qui permet la description exacte de la propagation acoustique dans un nuage de bulles en régime de diffusion multiple. Ce formalisme est à la base d'un code de calcul dont on trouve de nombreuses descriptions dans la littérature sous des appellations différentes suivant les types d'ondes. Lorsqu'il s'agit d'étudier la propagation d'une onde acoustique à travers une collection de diffuseurs de forme simple (ponctuels, cylindriques, sphériques), ce code est connu sous le nom MST (pour Multiple Scattering Theory). Nous présenterons ici les rouages du code tel que nous l'avons construit ainsi qu'un exemple simple d'utilisation.

1.1 La bulle unique

Que se passe-t-il lorsqu'une bulle de gaz immergée dans l'eau est soumise à une excitation acoustique ? La réponse dépend bien évidemment de la fréquence de cette excitation. Dans le cas général, on parle de diffusion de Mie lorsque la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la taille de l'objet insonifié. Le champ diffusé se superpose alors au champ incident et, en fonction du rapport des phases associées, on assiste à la formation d'interférences constructives ou bien destructives. Les résonances associées sont souvent appelées modes de Fabry-Pérot. Ce régime de diffusion, commun à tous les objets présentant un contraste d'impédance avec leur milieu hôte, a été abondamment décrit dans les travaux traitant de la diffusion des suspensions [1]. Or, les exemples mentionnés plus haut font état d'une signature des milieux bulleux dans le domaine de l'audible ; ce qui n'est pas le cas des autres suspensions pour des tailles particulières comparables. Cette spécificité des bulles suppose l'existence d'une autre dynamique résonnante à beaucoup plus basse fréquence. C'est cette dernière qui sera l'objet de cette partie. Nous nous pencherons dans un premier temps sur le problème classique des oscillations hydrodynamiques, avant de traiter le cas du couplage avec un milieu extérieur compressible.

1.1.1 Oscillations hydrodynamiques d'une bulle

On s'intéresse tout d'abord au cas particulièrement simple pour lequel le fluide hôte, de viscosité η_0 et de densité ρ_0 , est considéré comme incompressible.

1.1.1.1 Equation de Rayleigh-Plesset

On considère une bulle unique, de rayon à l'équilibre a_0 et soumise à des oscillations de rayon d'amplitude $\xi(t)$ si bien que son rayon instantané s'écrit :

$$a(t) = a_0 + \xi(t). \quad (1.1)$$

Le fluide est alors entraîné par le mouvement de l'interface eau-air. Il y règne une pression hydrodynamique que l'on suppose de la forme

$$P(r, t) = P_0 + p(r, t) \quad (1.2)$$

où r se réfère à la distance au centre de la bulle et $p(r, t)$ à la surpression hydrodynamique induite par le mouvement du fluide. Partons d'un simple constat géométrique : la bulle est sphérique. La symétrie de révolution se répercute sur l'écoulement qu'elle génère, lorsqu'elle oscille, au sein du liquide hôte. On notera donc u_r le champ de vitesse du fluide que l'on supposera strictement radial. L'équation de conservation de la masse permet d'écrire, dans le cas d'un fluide incompressible,

$$4\pi r^2 u_r(r, t) = 4\pi a^2 \dot{a} \quad (1.3)$$

où r appartient à l'intervalle $[a; \infty]$. La vitesse du fluide en r s'exprime par conséquent comme :

$$u_r(r, t) = \left[\frac{a}{r} \right]^2 \dot{a}. \quad (1.4)$$

On écrit l'équation de Navier-Stokes, projetée sur la direction centrifuge, au point r :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (1.5)$$

En remplaçant $u_r(r, t)$ par son expression, et puisque a ne dépend que du temps t , on trouve

$$\ddot{a} \frac{a^2}{r^2} + 2\dot{a}^2 \frac{a}{r^2} - 2\dot{a}^2 \frac{a^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (1.6)$$

Enfin, on intègre entre a et $+\infty$ pour obtenir

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{1}{\rho_0} [P(a, t) - P(\infty, t)] \quad (1.7)$$

Il s'agit là de l'équation de Rayleigh [2]. La contribution de Plesset [3] permettra ensuite d'étendre ce résultat au cadre de la modélisation des phénomènes de cavitation ultrasonore. Elle détaille le membre de droite de l'équation (1.7) en attribuant un rôle déterminant aux effets de tension de surface via l'équation de Laplace [4] tandis que Brennen [5] ajoutera un terme qui permet d'inclure les effets visqueux :

$$P(a, t) = P_{\text{gaz}}(t) - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\eta\dot{a}}{a} \quad (1.8)$$

avec σ la tension superficielle de l'eau et η sa viscosité dynamique.

On suppose que le gaz au sein de la bulle est parfait et subit une transformation isentropique (adiabatique réversible). On peut alors se référer une seconde fois à Laplace et plus particulièrement à sa loi thermodynamique qui s'écrit ici :

$$P_{\text{gaz}} a^{3\gamma} = P_0 a_0^{3\gamma} \quad (1.9)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz. En reprenant l'équation (1.2), on remarque que $P(\infty, t) = P_0 + p_\infty(t)$ où p_∞ ne dépend plus de r puisque, loin de la bulle, le liquide peut être considéré comme au repos. On obtient donc

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{1}{\rho_0} \left[P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\eta\dot{a}}{a} - P_0 - p_\infty(t) \right]. \quad (1.10)$$

C'est l'équation de Rayleigh-Plesset. Ce résultat fondamental permet de traiter de problèmes allant de l'hydrodynamique à l'acoustique en passant par la physique des interfaces.

1.1.1.2 Hypothèse des faibles oscillations

On se propose dans toute la suite de négliger les effets de tension de surface ($\sigma = 0$). Cette hypothèse paraît raisonnable dès lors que $\sigma/(\rho_0 a_0) \ll 1$ c'est-à-dire quand la taille de la bulle est d'au moins 1 μm . Par ailleurs, on introduit le taux

d'amortissement visqueux $\Gamma^{\text{vis}} = 4\eta/(\rho_0 a_0^2)$ ainsi que la variable adimensionnée $x(t) = \xi(t)/a_0$. L'équation de Rayleigh-Plesset devient alors :

$$(1+x)\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{P_0}{\rho_0 a_0^2}(1-(1+x)^{-3\gamma}) + \Gamma^{\text{vis}}\dot{x} = -\frac{p_\infty(t)}{\rho_0 a_0^2} \quad (1.11)$$

L'équation précédente est explicitement non-linéaire. On suppose que, sous des conditions d'excitation raisonnables, l'amplitude des oscillations ξ demeure faible devant le rayon à l'équilibre a_0 . Cela revient à dire que $x \ll 1$. On se propose donc de linéariser l'équation de Rayleigh-Plesset en ne conservant que les termes d'ordre 1 en x . On obtient alors l'équation classique d'un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \Gamma^{\text{vis}}\dot{x} + \frac{3\gamma P_0}{\rho_0 a_0^2}x = -\frac{p_\infty(t)}{\rho_0 a_0^2}. \quad (1.12)$$

1.1.1.3 Résonance de Minnaert

Le résultat précédent fait explicitement apparaître une pulsation de résonance $\omega_M = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0 a_0^2}}$ communément appelée pulsation de Minnaert [6]. On se place en régime monochromatique et on pose $p_\infty(t) = p_\infty e^{-i\omega t}$ et $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ que l'on injecte dans l'équation (1.12) pour finalement obtenir :

$$x_0 = \frac{p_\infty}{\rho_0 a_0^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma^{\text{vis}}\omega} \quad (1.13)$$

On reporte l'évolution des module et phase de $x_0 = \xi_0/a_0$ pour une bulle de rayon $a_0 = 10 \mu\text{m}$ sur la figure 1.1. Le comportement résonant est flagrant. Le maximum de l'amplitude et le saut de phase en attestent. De plus, pour cette taille de bulle, l'hypothèse des faibles oscillations apparaît comme raisonnable puisque leurs amplitudes n'excèdent guère 10% du rayon initial de la bulle. Comme on le verra dans la suite, les choses deviennent plus subtiles lorsque l'on considère des bulles plus volumineuses. En particulier, contrairement à ce que laisse suggérer l'équation de Rayleigh-Plesset, les mécanismes de dissipation peuvent trouver des origines autres que la seule viscosité. Mais il nous faudra, afin de les quantifier, décrire le mécanisme de rayonnement de la bulle ainsi que l'échauffement induit par les oscillations.

On peut facilement établir un parallèle convaincant entre la résonance de Minnaert d'une bulle et la pulsation propre d'un simple système masse-ressort. Pour ce faire, on considère que l'eau située au voisinage de la bulle joue le rôle d'une masse $m = 4\pi\rho_0 a_0^3$ tandis que le gaz, particulièrement compressible, se comporte comme un ressort de constante de raideur $k = 12\pi\gamma a_0 P_0$.

L'application numérique pour la bulle de rayon $a_0 = 10 \mu\text{m}$ donne une longueur d'onde à résonance de $\lambda_M = 4.4 \text{ mm}$. C'est 440 fois le rayon ! Ce résultat surprenant constitue l'essentiel de la spécificité acoustique des bulles. C'est une excellente nouvelle du point de vue théorique puisque, à résonance, le champ pourra souvent être

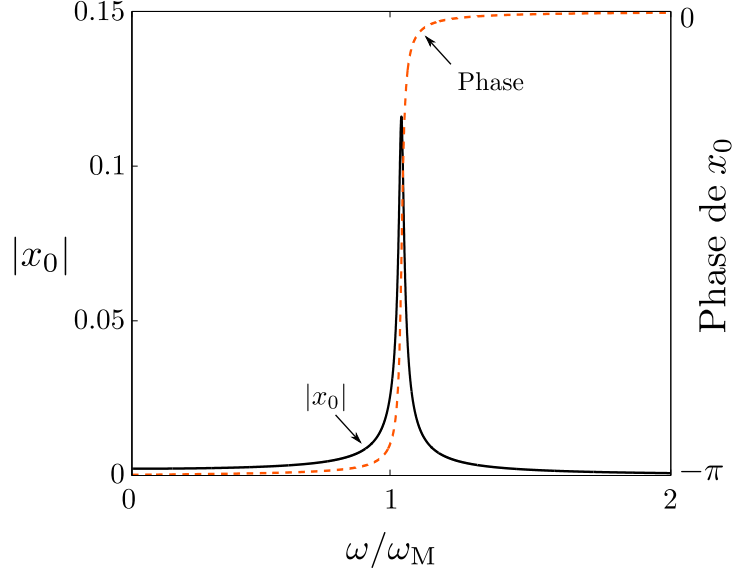


FIGURE 1.1 – Tracé du module et de la phase de $x_0 = \xi_0/a_0$ en fonction de la pulsation réduite ω/ω_M pour une bulle de rayon $a_0 = 10\mu m$ immergée dans l'eau et excitée par un champ stationnaire d'amplitude $p_0 = 1\text{kPa}$.

supposé homogène à l'échelle de la bulle. Cela nous permet d'introduire l'approximation monopolaire selon laquelle celle-ci oscille de façon isotrope. Il s'agit du mode de "respiration". Les caractéristiques de cette résonance auront également des répercussions du point de vue de l'expérimentateur puisque les mesures devront être réalisées à basse fréquence avec toutes les complications que cela implique (séparation d'échos, génération d'ondes stationnaires et diffraction). Pourtant, nous verrons plus tard que cette spécificité fait des bulles d'excellentes briques élémentaires pour confectionner des matériaux architecturés à des échelles bien inférieures à celle de la longueur d'onde (métamatériaux).

1.1.2 Diffusion du son par une bulle unique

On sait désormais que, sous l'effet de la compressibilité du gaz qui la constitue, la bulle oscille. On sait également que les amplitudes de ces oscillations sont d'autant plus marquées que la pulsation de l'excitation est voisine de la pulsation de Minnaert ω_M . Quelles sont alors les conséquences de la présence de bulles sur la propagation du son ? Au sens de Rayleigh-Plesset, il n'y en a pas, le fluide extérieur étant considéré comme incompressible. Pourtant, nous avons tous déjà fait l'expérience de la propagation sonore sous-marine. Pour l'eau, le coefficient de compressibilité isentropique vaut $\chi_s^{\text{eau}} = 0.4 \text{ GPa}^{-1}$. À titre de comparaison, celui de l'air est de $\chi_s^{\text{air}} = 1.4 \times 10^4 \text{ GPa}^{-1}$. La compressibilité de l'eau est donc faible mais pas tout à fait nulle. On tiendra désormais compte de l'existence du couplage entre la bulle et le liquide extérieur. D'ailleurs, si la bulle est capable de rayonner, cela suppose que l'énergie stockée dans ses oscilla-

tions de rayon puisse également subir une atténuation d'origine radiative. La viscosité n'est alors plus le seul mécanisme d'amortissement. Reprenons donc l'expression des oscillations de l'équation (1.13) et rajoutons-lui, à la main, un taux d'amortissement radiatif Γ^{rad} . En notant $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}} + \Gamma^{\text{vis}}$, on a

$$\xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 a_0} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega} \quad (1.14)$$

où p_0 se rapporte à l'amplitude surpression qui est dorénavant d'origine acoustique. Une bulle qui se couple avec son milieu extérieur peut donc non seulement être mise en vibration par une onde sonore, mais également la ré-émettre vers l'extérieur. Cette interaction constitue le phénomène de diffusion ! Pour le décrire, il nous faut introduire la fonction de diffusion.

1.1.2.1 Fonction de diffusion

Lorsqu'une onde sonore interagit avec un objet, le champ de pression se décompose selon deux composantes. La première est appelée pression balistique p_i et se propage comme si l'objet n'avait jamais été présent. La seconde, la pression diffusée p_s prend, en champ lointain, la forme d'une onde sphérique pondérée par la fonction de diffusion ainsi que par la pression incidente ressentie par la bulle. Plaçons-nous donc en géométrie sphérique. L'équation d'onde régissant la propagation de la pression diffusée s'écrit sous la forme :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] r p_s(r, t) = 0 \quad (1.15)$$

On reproduit ici une démonstration dont la version détaillée est disponible en page 18 de la référence [7]. La solution la plus générale respectant la symétrie du problème s'écrit :

$$p_s(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r - a_0}{c}\right) \quad \text{pour } r \geq a_0. \quad (1.16)$$

où f reste à déterminer. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la surface de bulle, c'est-à-dire en $r = a_0$, on obtient :

$$\rho_0 \ddot{\xi}(t) = -\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=a_0} = \frac{1}{a_0^2} f(t) + \frac{1}{a_0 c} f'(t) \quad (1.17)$$

La solution de cette équation est de la forme

$$f(t) = A(t) e^{-\frac{ct}{a_0}}. \quad (1.18)$$

On obtient, en injectant (1.18) dans (1.17), que $A(t)$ vérifie

$$\dot{A}(t) = a_0 c \rho_0 \ddot{\xi}(t) e^{\frac{ct}{a_0}}. \quad (1.19)$$

On considère le régime des oscillations monochromatiques $\xi(t) = \xi_0 e^{-i\omega t}$ décrites par l'équation (1.14), si bien que

$$\begin{aligned} A(t) &= - \int_{-\infty}^t a_0 c \rho_0 \xi_0 \omega^2 e^{\frac{ct'}{a_0}} e^{-i\omega t'} dt \\ &= - \frac{\rho_0 a_0^2 \omega^2 \xi_0}{1 - i\frac{\omega}{c} a_0} e^{\frac{ct}{a_0}} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

en imposant une valeur nulle pour les temps infiniment négatifs. En explicitant ξ_0 et en injectant dans (1.18) puis dans (1.16), on trouve finalement :

$$p_s(r, t) = \frac{-a_0\omega^2}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega} p_0 \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}a_0}}{1 - i\frac{\omega}{c}a_0}. \quad (1.21)$$

Pour une bulle de 10 μm , $\omega a_0/c \ll 1$ tant que la fréquence d'excitation n'excède pas 10 MHz. Cette gamme de fréquences correspond aux résonances d'ordres supérieurs de la bulle qui dépasse le cadre de nos travaux. On simplifiera donc les choses en supposant que

$$\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}a_0}}{1 - i\frac{\omega}{c}a_0} \simeq 1.$$

Enfin, on définit la fonction de diffusion d'une bulle unique, avec la notation que l'on conservera dans la suite :

$$f(\omega) = \frac{-a_0\omega^2}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega}. \quad (1.22)$$

avec $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}} + \Gamma^{\text{vis}}$. De telle manière que le champ diffusé par une bulle s'écrive simplement :

$$p_s(r, t) = p_0 f(\omega) \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}. \quad (1.23)$$

1.1.2.2 Évaluation de l'amortissement dû au rayonnement

On se propose désormais d'obtenir une expression pour Γ^{rad} . Pour cela, on commence par faire l'hypothèse que les sources d'amortissement sont indépendantes l'une de l'autre. On peut donc estimer Γ^{rad} en faisant l'hypothèse d'un fluide parfait, pour lequel on aurait donc $\Gamma^{\text{vis}} = 0$. Les choses deviennent alors beaucoup plus simples et un simple bilan énergétique peut nous suffire pour trancher.

Théorème optique et section efficace de diffusion

On dit d'un diffuseur qui ne subit que les termes d'amortissement radiatif qu'il conserve l'énergie. Si cette énergie est perdue au niveau du diffuseur, elle est en effet restituée sous forme de rayonnement (voir figure 1.2).

Or, le vecteur de Poynting [9] acoustique s'écrit comme le produit de la surpression diffusée et de la vitesse de l'onde acoustique :

$$\mathbf{\Pi}(r, t) = p_s(r, t) \mathbf{u}(r, t) \quad (1.24)$$

Les expressions se simplifient dans le cas d'oscillations monochromatiques forcées puisque $p_s(r, t) = p_s(r)e^{-i\omega t}$ et $\mathbf{u}(r, t) = \mathbf{u}(r)e^{-i\omega t}$. D'où l'écriture du vecteur de Poynting moyenné temporellement :

$$\langle \mathbf{\Pi}(r) \rangle_T = \frac{1}{2} \text{Re} [p_s(r) \mathbf{u}^*(r)] \quad (1.25)$$

La puissance fournie par les sources internes à un volume V est partiellement emmagasinée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, partiellement rayonnée vers l'extérieur. La puissance rayonnée est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface S délimitant V . [Royer et Dieulesaint [8], p. 30]

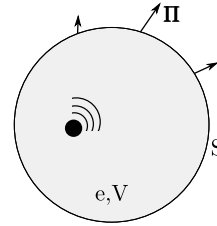


FIGURE 1.2 – Vue schématique d'un diffuseur rayonnant dans un volume V délimité par la surface S .

En utilisant l'équation d'Euler

$$\mathbf{u} = \frac{1}{i\omega\rho_0} \mathbf{grad}(p_s), \quad (1.26)$$

et en substituant la vitesse, on peut réécrire le vecteur de Poynting moyen :

$$\langle \mathbf{\Pi}(r) \rangle_T = -\frac{1}{2\omega\rho_0} \text{Im} [p_s \mathbf{grad}(p_s)^*] \quad (1.27)$$

Dans le cas spécifique de la bulle, on a déjà discuté la structure de l'onde diffusée (équation (1.23)). En introduisant le nombre d'onde en espace libre $k_0 = \omega/c$, on a

$$p_s(r) = p_0 f(\omega) \frac{e^{ik_0 r}}{r}. \quad (1.28)$$

On définit également le vecteur unitaire \mathbf{e}_r orienté radialement à la bulle. Le conjugué du gradient vaut alors

$$\mathbf{grad}(p_s)^* = -p_0 f^*(\omega) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left[\frac{1}{r} + ik_0 \right] \mathbf{e}_r. \quad (1.29)$$

Finalement, la densité surfacique de puissance rayonnée par une bulle s'écrit

$$\langle \mathbf{\Pi}(r) \rangle_T = \frac{p_0^2 |f(\omega)|^2}{2\rho_0 r^2 c} \mathbf{e}_r. \quad (1.30)$$

En évaluant le rapport entre la puissance rayonnée par un objet et l'intensité du faisceau incident, on obtient une grandeur ayant la dimension d'une surface et décrivant le pouvoir diffusant de l'objet en question. On l'appelle section efficace de diffusion σ_s [10]. Dans le cas qui nous intéresse, à savoir celui de la bulle unique monopolaire, la section efficace est particulièrement simple à écrire :

$$\sigma_s = \frac{\iint_S \langle \mathbf{\Pi}(r) \rangle_T ds}{\langle \mathbf{\Pi}_0(r) \rangle_T} = \frac{\iint_S \text{Im}(p_s \mathbf{grad}(p_s)^*) ds}{\text{Im}(p_0 \mathbf{grad}(p_0)^*)} = 4\pi |f(\omega)|^2. \quad (1.31)$$

On se place dans le cas particulier d'une bulle qui assure la conservation de l'énergie ($\Gamma^{\text{vis}} = 0$) et pour laquelle la fonction de diffusion prend la forme suivante :

$$f(\omega) = \frac{-a_0\omega^2}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma^{\text{rad}}\omega}. \quad (1.32)$$

On estime alors que la fraction de la puissance incidente réceptionnée par cette bulle "parfaite" sera intégralement restituée sous forme de rayonnement isotrope. En conséquence, l'évènement de diffusion peut être caractérisé par la manière dont il modifie la directivité de la puissance associée à la propagation. Il existe un pendant quantitatif à cette description très intuitive; c'est le théorème optique [11]. Sa formulation mathématique est la suivante¹ :

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k_0} \text{Im}(f). \quad (1.33)$$

Finalement, en identifiant (1.31) et (1.33), on obtient une expression pour le taux d'amortissement radiatif d'une bulle :

$$\Gamma^{\text{rad}} = k_0 a_0 \omega. \quad (1.34)$$

À la lumière de ce résultat on peut tracer l'évolution de la section efficace de diffusion

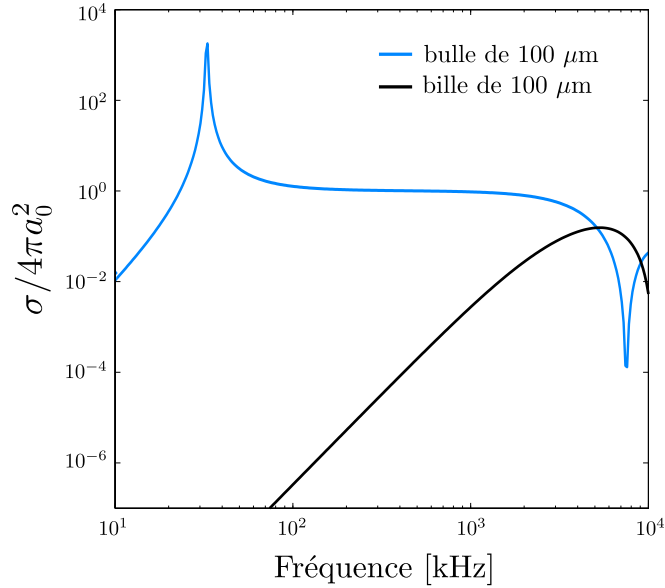


FIGURE 1.3 – Tracé de la section efficace de diffusion normalisée par la section géométrique pour une bulle d'air placée dans un fluide parfait (bleu) et pour une bille d'acier (noir).

pour une bulle de rayon $a_0 = 100 \mu\text{m}$ placée dans l'eau (voir figure 1.3). On considère

1. Lorsque le diffuseur n'est pas isotrope, le théorème optique s'écrit $\sigma = \frac{4\pi}{k_0} \text{Im}(f(\theta = 0))$

le cas d'une bulle idéale pour laquelle seule les pertes de rayonnement interviennent. À titre de comparaison, on trace également la section efficace d'une bille d'acier de même taille placée dans l'eau. On constate qu'à basse fréquence la bulle est un diffuseur bien plus efficace que la bille notamment autour du pic de résonance. D'autre part, remarquons que la section efficace peut atteindre 1000 fois la surface géométrique de la bulle. Même aux hautes fréquences, jusqu'à environ 5 MHz, la section efficace demeure sensiblement supérieure dans le cas de la bulle.

1.1.2.3 Dissipation d'origine thermique

On a considéré, jusqu'ici, l'ensemble des transformations constitutives du cycle de respiration d'une bulle comme isentropiques. Or, il a été démontré par Devin [12], Prosperetti [13] et Leighton [14] que les échanges thermiques se produisant au niveau de la pellicule de gaz voisine de l'interface jouent un rôle essentiel dans le mécanisme de diffusion. On se propose donc de rajouter un terme de dissipation d'origine thermique. Les calculs ayant déjà été menés dans les références citées plus haut, nous nous contenterons ici d'une description très qualitative.

Bien que le cycle d'oscillation d'une bulle soit périodique, le contraste entre les capacités thermiques de l'eau et de l'air, qui valent respectivement $c_p^{\text{eau}} = 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $c_p^{\text{air}} = 4.2 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, est responsable d'une dissymétrie dans les échanges thermiques. La vibration de la bulle s'accompagne donc d'une atténuation par chauffage du fluide. Le champ de température est alors gouverné par un processus de diffusion caractérisé par le coefficient de diffusion D . Ce problème classique peut être résolu en calculant l'évolution radiale du champ de température puis en appliquant la loi des gaz parfaits aux couronnes infinitésimales successives sur lesquelles la température peut être considérée comme constante. On obtient ainsi le taux d'amortissement thermique :

$$\Gamma^{\text{th}} = \frac{P_0}{\omega \rho_0 a_0^2} \text{Im}(\Phi) \quad (1.35)$$

où

$$\Phi = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma - 1)i\left(\frac{\ell_D}{a_0}\right)^2 \left[1 - \sqrt{i\frac{a_0}{\ell_D}} \coth\left(\sqrt{i\frac{a_0}{\ell_D}}\right)\right]} \quad (1.36)$$

et où $\ell_D = \sqrt{D/\omega}$ est la longueur de pénétration thermique du gaz.

Afin de comparer cette source d'amortissement avec celle qui met en jeu la viscosité, on introduit les coefficients d'amortissement adimensionnés $\delta = \Gamma/\omega$. On trace sur la figure 1.4 l'évolution des coefficients thermique $\delta^{\text{th}}(\omega_M)$, visqueux $\delta^{\text{vis}}(\omega_M)$ et radiatif $\delta^{\text{rad}}(\omega_M)$ à résonance en fonction du rayon de la bulle. Il apparaît que le terme visqueux l'emporte pour les bulles de petites tailles tandis que le terme d'origine thermique devient prédominant pour les bulles de plus de $3 \mu\text{m}$ de rayon représentatives de la majorité des cas qui nous intéresseront dans ce manuscrit. Nous résumerons sommairement en retenant que les oscillations des bulles les plus grandes sont les moins amorties.

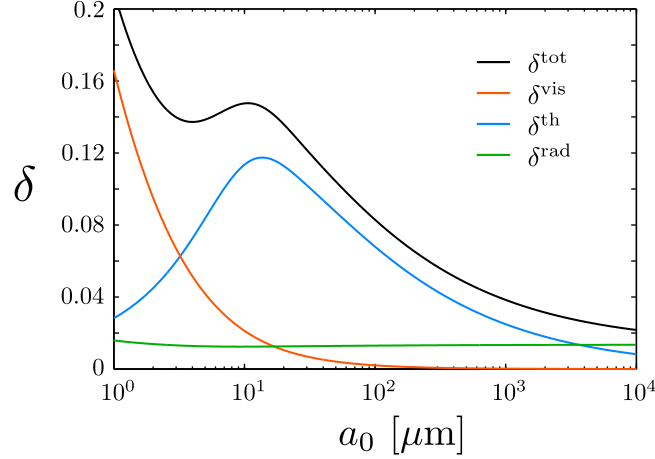


FIGURE 1.4 – Tracé de $\delta^{\text{vis}}(\omega_M)$, $\delta^{\text{th}}(\omega_M)$, $\delta^{\text{rad}}(\omega_M)$ et de $\delta^{\text{tot}}(\omega_M) = \delta^{\text{vis}}(\omega_M) + \delta^{\text{th}}(\omega_M) + \delta^{\text{rad}}(\omega_M)$ en fonction du rayon à l'équilibre a_0 .

1.1.2.4 Extinction et absorption

Notons que dans le cadre de l'acoustique sous-marine ou des tissus biologiques, d'autres sources de dissipation peuvent intervenir [15]. Dans ce travail, on se contentera d'une description reproduisant le contexte du laboratoire pour lequel les trois termes détaillés plus haut sont les plus significatifs. On peut donc désormais introduire la section efficace d'extinction σ_e qui caractérise le pouvoir d'atténuation d'un diffuseur pour la direction de l'énergie incidente. L'extinction tient compte des mécanismes diffusifs et dissipatifs. On l'obtient donc en appliquant le théorème optique de l'équation (1.33) au cas de la fonction de diffusion généralisée, c'est-à-dire pour laquelle $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}} + \Gamma^{\text{vis}} + \Gamma^{\text{th}}$. On obtient ainsi

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{k_0} \frac{a_0 \omega^3 \Gamma}{(\omega^2 - \omega_M^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (1.37)$$

En multipliant de part et d'autre par $\Gamma^{\text{rad}}/\Gamma$, et en remplaçant Γ^{rad} à droite, on obtient

$$\frac{\Gamma^{\text{rad}}}{\Gamma} \sigma_e = \frac{4\pi a_0^2 \omega^4}{(\omega^2 - \omega_M^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (1.38)$$

Pour le membre de droite, on reconnaît l'expression de la section efficace de diffusion de l'équation (1.31). On peut donc retenir le résultat suivant :

$$\sigma_e = \frac{\Gamma}{\Gamma^{\text{rad}}} \sigma_s = \frac{\delta}{\delta^{\text{rad}}} \sigma_s. \quad (1.39)$$

Introduisons enfin la section efficace d'absorption σ_a , relative aux mécanismes d'amortissement thermique et visqueux. Elle quantifie donc l'énergie qui n'est ni retransmise dans la direction incidente, ni convertie en rayonnement. La conservation de l'énergie nous impose

$$\sigma_e = \sigma_a + \sigma_s \quad (1.40)$$

et donc l'expression de la section efficace d'absorption :

$$\sigma_a = \frac{\Gamma^{\text{vis}} + \Gamma^{\text{th}}}{\Gamma^{\text{rad}}} \sigma_s = \frac{\delta^{\text{vis}} + \delta^{\text{th}}}{\delta^{\text{rad}}} \sigma_s. \quad (1.41)$$

1.2 Essaims de bulles

Dans un environnement naturel les bulles ne sont généralement pas isolées. Elles forment le plus souvent des essaims dont le caractère aléatoire combiné à la variété de réponses individuelles peut rapidement rendre le problème inextricable. En particulier, il n'existe toujours pas de méthode convaincante pour décrire un milieu multiplement diffusant à partir de simples acquisitions du champ. Pour des échantillons fins, les techniques les plus probantes consistent à extraire le champ cohérent en moyennant les signaux sur un grand nombre de réalisations du désordre de façon à s'affranchir des phénomènes interférentiels. La technique de *Diffusing Wave Spectroscopy* (DWS) [16, 17], permet d'exploiter le fait que certains milieux évoluent naturellement afin de les caractériser du point de vue statistique. Lorsque l'échantillon devient trop épais pour pouvoir mesurer l'onde cohérente, on se tourne plutôt vers l'intensité moyenne. Cette dernière est, en effet, solution de l'équation du transfert radiatif [18, 19] et, à une approximation près [20–22], d'une équation de diffusion. Notons que cette dernière occurrence du mot diffusion se rapporte non pas à l'évènement de diffusion ("scattering" en anglais) mais au phénomène de diffusion classique ; à savoir au fait que l'intensité moyenne se comporte alors comme un marcheur aléatoire ("diffusion" en anglais). L'analyse de ce processus, notamment via l'extraction du coefficient de diffusion, constitue alors une méthode efficace pour caractériser le milieu diffusant [23–25]. Dans le cadre de ce manuscrit, seule la technique basée sur l'analyse du champ cohérent sera employée. *A fortiori*, toutes les occurrences du mot diffusion se rapporteront à l'interaction entre une onde sonore et une bulle.

1.2.1 Description de la propagation acoustique

Il convient, dans un premier temps, de distinguer différents régimes de diffusion associés à différents types de milieux. Dans toute cette partie, ainsi que dans la suivante, on considèrera des échantillons constitués de diffuseurs répartis aléatoirement.

1.2.1.1 Diffusion simple - Diffusion multiple

Dans le cas d'un échantillon suffisamment fin, l'approximation de la diffusion simple est parfois utilisée. Dans ce cadre, le processus diffusif est extrêmement simple à décrire puisque le champ au point \mathbf{r} de l'espace se résume à la somme du champ balistique et des contributions individuelles de chaque bulle. En exploitant le résultat de l'équation (1.23), on obtient l'expression suivante :

$$p(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_k) f_k(\omega) \frac{e^{ik_0\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\|} \quad (1.42)$$

pour une collection constituée de N bulles repérées par leur position \mathbf{r}_k . Si elle a le mérite d'être simple, cette expression est néanmoins très incomplète puisqu'elle ne tient pas compte des séquences de diffusions qui impliquent plusieurs diffuseurs (voir figure 1.5) ; autrement dit, les bulles ne se voient pas. La réalité en est autrement. En

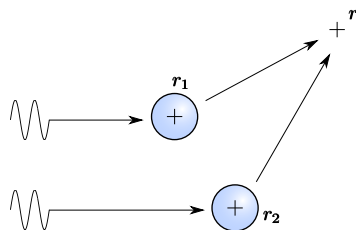


FIGURE 1.5 – Schéma d'un processus de diffusion simple à deux bulles.

effet, le champ diffusé par une bulle aura des répercussions sur ses voisines. De même, cette modification du champ au niveau des dites voisines sera elle-même diffusée et transmise vers d'autres bulles. On peut ainsi adopter une représentation séquentielle du phénomène et décomposer les effets de la diffusion multiple selon chacun des chemins décrits par la suppression. On reporte, sur la figure 1.6, un exemple de chemin de diffusion multiple. La pression ressentie en \mathbf{r} et associée à cette séquence s'écrit :

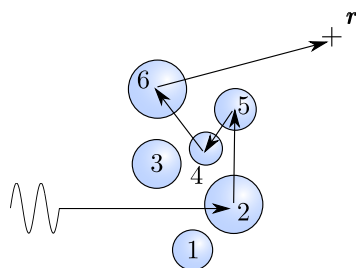


FIGURE 1.6 – Schéma d'une séquence de diffusion multiple.

$$p(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_2) f_2(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2\|}}{\|\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2\|} f_5(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5\|}}{\|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5\|} f_4(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_4\|}}{\|\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_4\|} f_6(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_6\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_6\|}.$$

On réalise alors l'étendue de la tâche à accomplir si l'on souhaite dénombrer l'ensemble des chemins de diffusion. En réalité, il en existe même une infinité puisque les chemins en "boucle" sont également à envisager. On entend par là les séquences investissant plusieurs fois le même diffuseur. Par exemple, sur la figure 1.6, on peut envisager une séquence du type 2542546. La boucle effectuée parmi les bulles 2, 5 et 4 peut, théoriquement, être parcourue à souhait.

1.2.1.2 Développement de Born

Une première solution consiste à hiérarchiser les contributions afin d'en négliger une partie. Grossièrement, on peut imaginer que les séquences les plus longues ne contribuent que peu en raison de la dissipation qui intervient lors de chacun des évènements de diffusion. Mais pour cela il faut disposer d'une liste exhaustive et ordonnée. C'est précisément ce que propose le développement de Born. Pour l'établir, il suffit de reprendre le résultat de l'équation (1.42) en tenant compte du fait que

la pression ressentie au niveau de chaque bulle n'est pas assimilable à la pression incidente :

$$p(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N p(\mathbf{r}_k) f_k(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}. \quad (1.43)$$

Puisque l'expression donne la pression en tout point, on peut l'appliquer en particulier au point \mathbf{r}_k en supposant que la bulle k ne contribue pas au champ qu'elle ressent.

$$p(\mathbf{r}_k) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_k) + \sum_{j \neq k} p(\mathbf{r}_j) f_j(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|}}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|}. \quad (1.44)$$

En injectant ce résultat dans l'équation (1.43), on obtient

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{k=1}^N p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_k) f_k(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|} \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} p(\mathbf{r}_j) f_j(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|}}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|} f_k(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

On identifie facilement les trois termes. Le premier se rapporte au champ balistique. Le second correspond à la diffusion simple sur chacune des bulles. Enfin le dernier terme comprend à la fois les contributions de diffusion double et celles d'ordres supérieurs. Notons qu'en négligeant le troisième terme, on retrouve l'expression (1.5). Pour alléger les notations on introduit la fonction de Green monochromatique homogène à trois dimensions entre les points \mathbf{r}_a et \mathbf{r}_b :

$$G_0(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a\|}}{\|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a\|}. \quad (1.46)$$

On peut, bien entendu, développer autant qu'on le souhaite. Par exemple, à l'ordre 4 en terme d'évènements de diffusion, on obtient

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &+ (4\pi) \sum_{k=1}^N p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_k) f_k G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \\ &+ (4\pi)^2 \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_j) f_j G_0(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) f_k G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \\ &+ (4\pi)^3 \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \sum_{m \neq j} p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_m) f_m G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m) f_j G_0(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) f_k G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \\ &+ (4\pi)^4 \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \sum_{m \neq j} \sum_{n \neq m} p(\mathbf{r}_n) f_n G_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) f_m G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m) f_j G_0(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) f_k G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \end{aligned}$$

où l'on a simplifié l'écriture des fonctions de diffusion afin d'alléger l'expression. On peut évidemment encore développer à l'infini, mais il nous faut nous en remettre à la confiance du lecteur. Une fois les contributions hiérarchisées de cette façon, on est libre de décider lesquelles conserver. Mais il nous faudrait pour cela introduire les ingrédients physiques nécessaires à l'évaluation de ces termes et, à ce stade du manuscrit, une telle troncature serait trop arbitraire.

1.2.1.3 Définition implicite

Une deuxième méthode consiste à utiliser la définition implicite fournie par l'équation (1.44) pour chacune des bulles du système :

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{r}_1) - 4\pi \sum_{j \neq 1} p(\mathbf{r}_j) f_j(\omega) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j) &= p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) \\
p(\mathbf{r}_2) - 4\pi \sum_{j \neq 2} p(\mathbf{r}_j) f_j(\omega) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_j) &= p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_2) \\
\vdots & \\
p(\mathbf{r}_N) - 4\pi \sum_{j \neq N} p(\mathbf{r}_j) f_j(\omega) G_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_j) &= p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_N)
\end{aligned} \tag{1.47}$$

On a ici un système de N équations indépendantes à N inconnues que l'on peut réécrire sous forme matricielle :

$$\mathcal{S}\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\text{inc}} \tag{1.48}$$

avec

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -4\pi f_2 G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \dots & -4\pi f_N G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_N) \\ -4\pi f_1 G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) & 1 & \dots & -4\pi f_N G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -4\pi f_1 G_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_1) & -4\pi f_2 G_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_2) & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p(\mathbf{r}_1) \\ p(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ p(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

et

$$\mathcal{P}^{\text{inc}} = \begin{pmatrix} p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) \\ p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ p^{\text{inc}}(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Sous réserve que le système ne soit pas singulier, il suffit d'inverser la matrice \mathcal{S} pour obtenir la pression ressentie par chaque bulle :

$$\mathcal{P} = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{P}^{\text{inc}}. \tag{1.52}$$

Enfin, il ne reste plus qu'à repropager le signal émis par chacune d'entre elles jusqu'en \mathbf{r} :

$$p(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + {}^t \mathcal{G}^{\text{out}} \mathcal{P} = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + {}^t \mathcal{G}^{\text{out}} \mathcal{S}^{-1} \mathcal{P}^{\text{inc}} \quad (1.53)$$

où

$$\mathcal{G}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} 4\pi f_1 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \\ 4\pi f_2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ 4\pi f_N G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_N) \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

On a donc obtenu une expression qui tient compte des effets de la diffusion multiple et pour laquelle la principale difficulté réside dans l'inversion d'une matrice $N \times N$. Il faut également noter que cette expression est exacte et peut aisément être transposée au cas de diffuseurs anisotropes ou bien à des problèmes à deux dimensions. Le seul pré-requis est de pouvoir considérer les diffuseurs comme ponctuels. Dans le cas des bulles, cela semble légitime en raison, une fois encore, du caractère basse fréquence de la résonance qui nous intéresse.

Notons enfin que, pour plus de généralité, on peut écrire l'équation (1.53) en termes de fonction de Green hétérogène :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + {}^t \mathcal{G}^{\text{out}} \mathcal{S}^{-1} \mathcal{G}^{\text{in}} \quad (1.55)$$

en définissant

$$\mathcal{G}^{\text{in}} = \begin{pmatrix} G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \\ G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \\ \vdots \\ G_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_0) \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Approche numérique

Pendant cette thèse, nous avons eu l'occasion de développer un code de diffusion multiple basé sur la méthode présentée dans cette partie. Ce type de technique numérique figure dans la littérature sous les appellations de *Multiple Scattering Theory* (MST) ou encore méthode des dipôles couplés. Nous avons pour cela utilisé une architecture Fortran qui, associée aux moyens de calcul disponibles au laboratoire, nous a permis d'obtenir le détail du champ diffusé pour une grande variété d'échantillons. La décomposition LU (Lower-Upper) consistant à écrire la matrice \mathcal{S} comme un produit de deux matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure, constitue alors l'étape de calcul discriminante. Plus concrètement, nous sommes ainsi capables de résoudre le problème pour des échantillons contenant jusqu'à 50000 diffuseurs. Pour nous assurer du bien fondé du code, nous avons été amenés à vérifier sa compatibilité avec la condition de conservation de l'énergie que nous discuterons dans le prochain paragraphe.

1.2.2 Conservation de l'énergie

Avec un milieu diffusant, comme avec un diffuseur isolé, la conservation de l'énergie doit être assurée (à supposer que $\Gamma^{\text{th}} = 0$ et $\Gamma^{\text{vis}} = 0$).

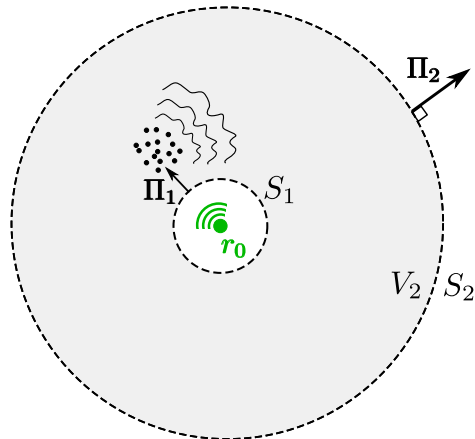


FIGURE 1.7 – Une source $s(\mathbf{r}, t)$, placée en \mathbf{r}_0 crée un champ de pression qui est multiplement diffusé par un nuage aléatoire de bulles. On choisit S_1 une surface fermée centrée sur \mathbf{r}_0 et ne contenant pas les diffuseurs et S_2 une surface analogue et délimitant un volume V_2 contenant \mathbf{r}_0 ainsi que le nuage de bulles. On ajoute que S_2 est choisie de façon à se trouver dans le champ lointain du système {source–diffuseurs}.

1.2.2.1 Puissance rayonnée par la source à travers S_1

On se propose de déterminer, dans un premier temps, la puissance rayonnée par une source ponctuelle $s(\mathbf{r}, t) = v_0(\omega)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e^{-i\omega t}$. On choisit, pour cela, une surface fermée S_1 délimitant un volume V_1 contenant la source (voir figure 1.7). Revenons aux équations constitutives, à savoir l'équation d'Euler ainsi que la conservation de la masse, appliquées au volume V_1 dans leur version linéarisée :

$$\mathbf{grad}(p) + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1.57a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \text{div}(\mathbf{u}) = \rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1.57b)$$

En utilisant la compressibilité isentropique ainsi que l'écriture complexe des champs, les équations précédentes deviennent

$$\mathbf{grad}(p) - i\omega\rho_0\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.58a)$$

$$-i\omega\chi_s p + \text{div}(\mathbf{u}) = -i\omega s \quad (1.58b)$$

Une manipulation classique [26] consiste à fabriquer la combinaison linéaire

$$\mathbf{u}^* \times (1.58a) + p \times (1.58b)^* + \mathbf{u} \times (1.58a)^* + p^* \times (1.58b)$$

pour obtenir

$$\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{grad}(p) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(p)^* + p^* \operatorname{div}(\mathbf{u}) + p \operatorname{div}(\mathbf{u})^* = i\omega(s^*p - sp^*) \quad (1.59)$$

soit encore

$$2\operatorname{Re}(\operatorname{div}(p\mathbf{u}^*)) = i\omega(s^*p - sp^*) \quad (1.60)$$

En intégrant de part et d'autre sur le volume V_1 , et en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, il suit

$$\oint_{S_1} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p\mathbf{u}^*) dS = \frac{i\omega}{4} \iiint_{V_1} (s^*p - sp^*) dV. \quad (1.61)$$

On reconnaît à gauche le flux du vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{\Pi}_1 \rangle$ à travers la surface S_1 . Le terme de droite fait intervenir le terme source que l'on a défini préalablement ainsi que la pression mesurée au sein du volume V_1 . Celle-ci peut s'exprimer, sans perte de généralité, en faisant intervenir la fonction de Green hétérogène :

$$p(\mathbf{r}) = -\omega^2 \rho_0 v_0(\omega) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) e^{-i\omega t} \quad (1.62)$$

Par conséquent, l'équation (1.61) se réécrit

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \langle \mathbf{\Pi}_1 \rangle dS &= -\frac{i\rho_0 v_0^2 \omega^3}{4} [G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)^*] \\ &= \frac{\rho_0 v_0^2 \omega^3}{2} \operatorname{Im}[G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)]. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Le terme $\operatorname{Im}[G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)]$, très utilisé par les opticiens des milieux diffusants, représente la densité locale d'états (LDOS) et permet d'évaluer la capacité d'émission d'une source placée en champ proche d'un milieu diffusant. En définitive, la source rayonnera d'autant mieux que le couplage avec son entourage sera efficace. D'ailleurs, en choisissant convenablement l'arrangement spatial des diffuseurs, on peut théoriquement optimiser l'émission comme on peut brouiller la source pour l'empêcher d'émettre.

L'évaluation numérique de la LDOS se fait en développant la fonction de Green hétérogène afin d'éviter la divergence du champ balistique.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)] &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \operatorname{Im}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \\ &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \operatorname{Im}[G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + {}^t \mathcal{G}^{\text{out}} \mathcal{S}^{-1} \mathcal{G}^{\text{in}}] \\ &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \left[\frac{k_0}{4\pi} \operatorname{sinc}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) \right] + \operatorname{Im}[{}^t \mathcal{G}^{\text{out}}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) \mathcal{S}^{-1} \mathcal{G}^{\text{in}}] \\ &= \frac{k_0}{4\pi} + \operatorname{Im}[{}^t \mathcal{G}^{\text{out}}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) \mathcal{S}^{-1} \mathcal{G}^{\text{in}}] \end{aligned} \quad (1.64)$$

1.2.2.2 Puissance rayonnée en champ lointain à travers S_2

Considérons désormais un point \mathbf{r} libre de se déplacer sur la surface S_2 choisie sphérique et centrée sur le point \mathbf{r}_0 . On choisit l'origine des axes en $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ de manière à alléger les notations. On choisit r , le rayon de la sphère, suffisamment grand ($k_0 r \gg 1$) pour que \mathbf{r} soit situé en champ lointain de la source et du milieu diffusant. Pour rappel, l'expression générale de la pression, donnée par l'équation (1.53) est la suivante :

$$p(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + {}^t \mathcal{G}^{\text{out}} \mathcal{S}^{-1} \mathcal{P}^{\text{inc}} \quad (1.65)$$

La pression balistique se propageant de la source jusqu'au point \mathbf{r} s'écrit :

$$p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = -\omega^2 \rho_0 v_0 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) e^{-i\omega t} \quad (1.66)$$

De manière analogue le vecteur \mathcal{P}^{inc} peut s'écrire :

$$\mathcal{P}^{\text{inc}} = -\omega^2 \rho_0 v_0 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \\ G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \\ \vdots \\ G_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_0) \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

Enfin, puisque l'on se place en champ lointain, $r \gg |\mathbf{r}_j|$ donc la distance entre la bulle j et \mathbf{r} se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\| &= \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j + |\mathbf{r}_j|^2} \\ &= r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{r^2} + \frac{|\mathbf{r}_j|^2}{r^2}} \\ &\simeq r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{r^2}\right) \\ &= r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_j \end{aligned} \quad (1.68)$$

avec $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$. Il convient de remarquer que, dans le système des coordonnées sphériques, \mathbf{e} dépend de θ et ϕ . En notant $\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{e}_r$, on a

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\|} \simeq \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j}$$

De sorte que le vecteur \mathcal{G}^{out} se simplifie lui aussi :

$$\mathcal{G}^{\text{out}} = 4\pi G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \begin{pmatrix} f_1 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} \\ f_2 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2} \\ \vdots \\ f_N e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_N} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Finalement, on peut introduire la grandeur suivante

$$H(\theta, \phi) = 1 + 4\pi \begin{pmatrix} f_1 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} & f_2 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2} & \dots & f_N e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_N} \end{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} \begin{pmatrix} G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \\ G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \\ \vdots \\ G_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_0) \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

qui ne dépend pas de r et décrit uniquement le mécanisme de couplage entre la source et le nuage. L'expression de la pression en champ lointain devient alors particulièrement simple :

$$p(\mathbf{r}) = -\omega^2 \rho_0 v_0 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) H(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (1.71)$$

On peut en déduire le vecteur de Poynting en \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}_2 \rangle &= -\frac{1}{2\omega\rho_0} \text{Im} [p \mathbf{grad}(p)^*] \\ &= \frac{1}{32} \frac{\rho_0 v_0^2 \omega^4}{\pi^2 r^2 c} |H(\theta, \phi)|^2 \mathbf{e}_r + \beta_\theta \mathbf{e}_\theta + \beta_\phi \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.72)$$

où l'on n'a pas pris la peine de détailler les composantes portées par \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_ϕ qui n'interviennent pas dans le calcul du flux du vecteur de Poynting à travers la sphère S_2 :

$$\iint_{S_2} \langle \mathbf{\Pi}_2 \rangle dS \mathbf{u}_r = \frac{1}{32} \frac{\rho_0 v_0^2 \omega^4}{\pi^2 c} \iint_{4\pi} |H(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.73)$$

1.2.2.3 Condition de conservation

En définitive, la conservation de l'énergie est assurée si les flux des vecteurs de Poynting à travers les surfaces S_1 et S_2 s'égalisent. Cela revient à vérifier que

$$\text{Im} [G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)] = \frac{k_0}{4\pi} \iint_{4\pi} \frac{1}{4\pi} |H(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.74)$$

L'analogie avec le théorème optique (équation (1.33)) est particulièrement frappante. Sans risquer les parallèles fortuits, on peut tout de même souligner la similitude entre la section efficace d'une bulle unique et le terme intégral traduisant le comportement du nuage désordonné.

1.3 Le couple de bulles

Nous sommes désormais en mesure de traiter un exemple concret. Pour se faire la main, nous nous intéresserons d'abord à une configuration extrêmement simple : la paire de bulles. Ce premier exemple nous permet d'illustrer l'utilisation du code de diffusion multiple mais constitue également un cas d'école dont nous reparlerons à plusieurs reprises dans la suite du manuscrit. Ici, il nous permet notamment d'introduire les concepts fondamentaux que sont les notions de couplage et d'hybridation.

1.3.1 Position du problème

On place une source ponctuelle en \mathbf{r}_0 :

$$s(\mathbf{r}, t) = v_0(\omega)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e^{-i\omega t} \quad (1.75)$$

On pose $A_0 = -\omega^2\rho_0v_0e^{-i\omega t}$ de façon à ce que la pression incidente ressentie au point \mathbf{r} , en l'absence de bulle, s'écrive :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = A_0G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0). \quad (1.76)$$

Notons que, dans cette partie, on place le point \mathbf{r}_0 suffisamment loin de nos bulles,

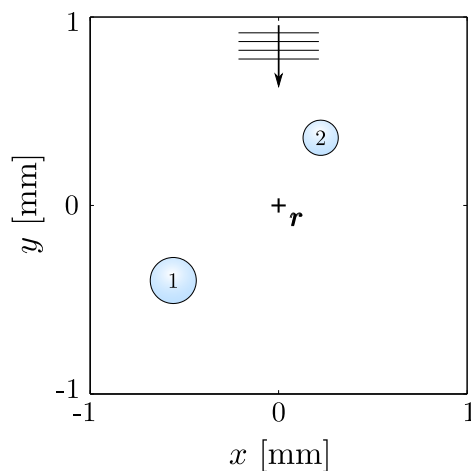


FIGURE 1.8 – Nuage désordonné constitué de deux bulles d'air dans l'eau. Les deux bulles sont situées à la même côte $z = 0$.

de manière à pouvoir assimiler l'onde incidente à une onde plane et, ainsi, à éviter une trop grande sensibilité du système vis-à-vis de la position de la source. On réalise ensuite le tirage aléatoire de deux bulles et on obtient la configuration reportée sur la figure 1.8. Ici, nos deux bulles possèdent des rayons à l'équilibre légèrement différents puisque $a_1 = 122 \mu\text{m}$ et $a_2 = 93 \mu\text{m}$. Notons enfin que, dans toute cette partie, nous considérerons le cas de bulles d'air dans l'eau pour lesquelles nous tiendrons compte des pertes d'origines thermique et visqueuse.

1.3.2 Champ diffusé

On peut calculer la pression au point \mathbf{r} en appliquant directement la formule de l'équation (1.53). Pour ce type de nuages, l'inverse de la matrice \mathcal{S} est relativement aisé à calculer. En notant d_{12} la distance entre les deux bulles, on a :

$$\mathcal{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -f_2 \frac{e^{ik_0 d_{12}}}{d_{12}} \\ -f_1 \frac{e^{ik_0 d_{12}}}{d_{12}} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{e^{2ik_0 d_{12}}}{d_{12}^2} f_1 f_2} \begin{pmatrix} 1 & f_2 \frac{e^{ik_0 d_{12}}}{d_{12}} \\ f_1 \frac{e^{ik_0 d_{12}}}{d_{12}} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

En repropageant le signal puis en lui superposant le champ balistique, on peut obtenir le spectre du champ en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (voir figure 1.9). On y observe deux pics correspondant

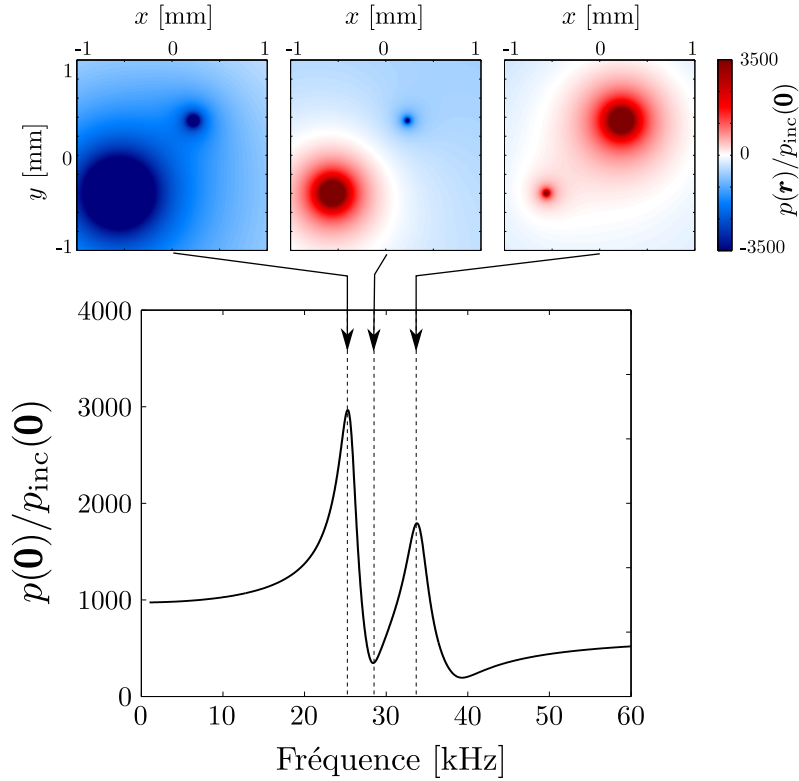


FIGURE 1.9 – Cartes de champ et spectre mesuré en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ pour la pression normalisée $p(\mathbf{r})/p_{\text{inc}}(\mathbf{0})$. Les cartes de champ correspondent aux fréquences 25.5 kHz, 28.5 kHz et 34 kHz.

aux résonances de Minnaert respectives de chacune des deux bulles. Inversement, on observe également deux zones pour lesquelles le champ mesuré est presque nul. Pour la première d'entre elles, située aux alentours de 28 kHz, ceci peut s'interpréter comme un effet d'interférence destructive entre les champs diffusés par les deux bulles. Comme on l'a vu sur la figure 1.1, la résonance de Minnaert introduit un saut de phase dans les oscillations de la bulle et, par conséquent, dans le champ diffusé par celle-ci. Dans la gamme de fréquences située entre les deux résonances, les deux bulles diffuseront donc des champs opposés en phase. Or, le point \mathbf{r} étant placé entre les deux bulles

(voir fig 1.8), il se trouve précisément dans la zone pour laquelle les deux contributions se compensent. La seconde annulation du champ est observée autour 40 kHz, c'est-à-dire au delà des deux résonances. Il s'agit, cette fois encore, d'une conséquence des interférences destructives entre le champ diffusé d'une part (les deux bulles oscillent désormais en accord de phase) et le champ balistique d'autre part. Nous verrons dans la suite que ce phénomène peut, dans le cas de milieux plus concentrés, être responsable de l'apparition d'une bande interdite, dite d'hybridation, pour laquelle le champ s'annule complètement et ce sur de larges gammes de fréquence.

On peut aussi balayer l'espace avec le point \mathbf{r} pour obtenir une carte du champ de pression. Sur la figure 1.9, on a représenté les cartes de champ pour des fréquences de 23 kHz et 32 kHz. Sur la première, on peut observer que l'émission des deux bulles se fait en accord de phase et que la bulle 1 diffuse beaucoup plus intensément que sa voisine. Ce n'est pas vraiment surprenant puisque la fréquence a été choisie juste avant sa résonance. Sur la seconde carte, les deux bulles diffusent en opposition de phase ; ce qui est conforme aux prédictions explicitées plus haut.

1.3.3 Manifestation de la diffusion multiple

Profitons de cette configuration simple pour faire la lumière sur la transition entre les régimes de diffusion simple et de diffusion multiple. Les expérimentateurs qui travaillent avec des diffuseurs de Mie considèrent généralement que l'approximation de la diffusion simple s'applique pour des échantillons suffisamment fins. Mais c'est un diffuseur de Rayleigh qui fait l'objet de ce manuscrit. La bulle, on l'a vu, est particulière puisqu'elle diffuse fortement et, de surcroît, de manière isotrope. Elle est, par conséquent, susceptible de se coupler efficacement à son environnement remettant ainsi en question l'usage de l'approximation de la diffusion simple.

Pour la mettre à l'épreuve, on ré-exploite le même tirage que précédemment en plaçant le point \mathbf{r} exactement à mi-chemin entre les deux bulles. Comme dans le paragraphe précédent, on fait le calcul du spectre au point \mathbf{r} en tenant compte de la diffusion multiple mais aussi en faisant l'approximation de la diffusion simple. Cela revient à utiliser respectivement les équations (1.43) et (1.42). On reproduit l'opération en faisant varier la distance d_{12} entre les deux bulles tout en s'arrangeant pour que le point \mathbf{r} demeure fixe dans l'espace et reste au centre du couple de bulles. On a ainsi procédé à une transformation homothétique du système. Les résultats sont reportés sur la figure 1.10. Conformément à ce que l'on pouvait anticiper, les spectres sont semblables pour les plus grandes valeurs de d_{12} (vert clair). En revanche, les choses se compliquent lorsque l'on rapproche les deux bulles et que les courbes s'assombrissent. En particulier, on observe une amplification pour les deux pics dans le cas de la diffusion simple et uniquement pour le premier (à 25 kHz) dans le cas du calcul complet. Le cas de la diffusion simple tombe sous le sens. Les deux diffuseurs ne se voient pas mais le point \mathbf{r} , lui, les voit tous les deux. Or, en s'approchant, les deux bulles

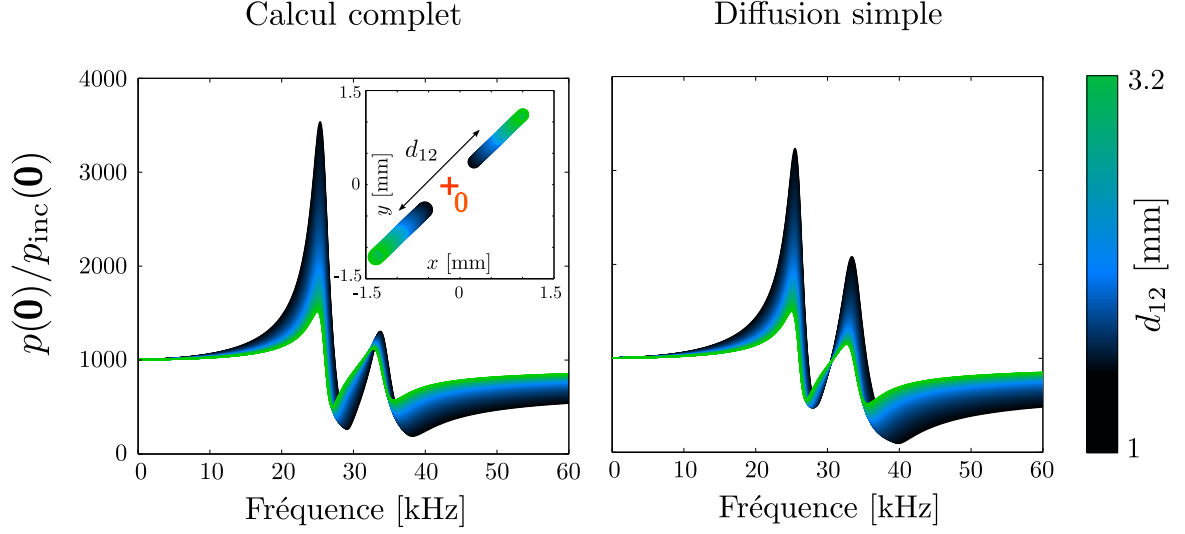


FIGURE 1.10 – Spectre calculé en \mathbf{r} pour des distances d_{12} variant de 1 mm à 3.2 mm. L’insert dans la figure de gauche représente les deux bulles pour les différentes distances. La figure de gauche a été obtenue en procédant au calcul complet du champ en \mathbf{r} tandis que la figure de droite a été obtenue en faisant l’approximation de la diffusion simple.

s’approchent également de \mathbf{r} , ce qui a pour effet d’amplifier le signal recueilli. Dans le cas de la diffusion multiple, les deux pics ne sont plus véritablement associés aux deux résonances individuelles. Il faut plutôt se les représenter comme des signatures de modes propres dégénérés du système couplé. Le mode basse fréquence dispose alors d’une symétrie monopolaire tandis que le second exhibe un comportement dipolaire qui, naturellement, aura tendance à minimiser le champ en son centre, c’est-à-dire au point \mathbf{r} .

1.3.4 Conservation de l’énergie

Le calcul du champ diffus, on le sait, repose essentiellement sur l’inversion d’une matrice $N \times N$ et ce pour chacune des fréquences que l’on souhaite renseigner. Or, on peut pronostiquer, sans trop ruiner l’effet de surprise, que la suite du manuscrit sera l’occasion d’étudier des nuages sensiblement plus peuplés que celui qui fait l’objet de ce paragraphe. Il nous faut, par conséquent, nous assurer du bien fondé du code numérique que nous exploiterons copieusement dans la suite. La condition de conservation de l’énergie constitue un candidat idéal pour le mettre à l’épreuve. On reconduit le calcul dans le cas du nuage de la figure 1.8, et on trace l’évolution en fréquence du terme de chacun des termes de l’équation (1.74) (voir figure 1.11). L’intégrale du terme de droite est évaluée numériquement en prenant 150 valeurs pour θ et ϕ . L’accord est éloquent ce qui a pour mérite de montrer que notre approche satisfait à la condition de conservation de l’énergie.

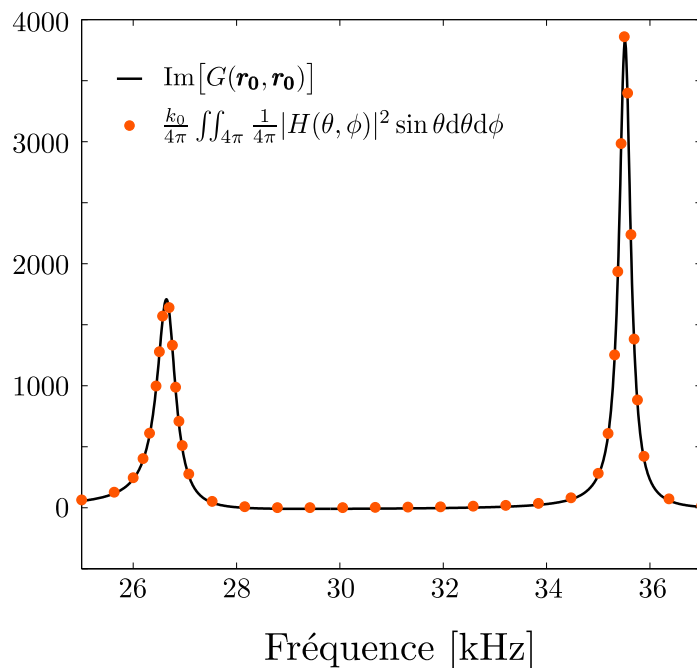


FIGURE 1.11 – Evolution de $\text{Im}[G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)]$ (trait noir) et de $\frac{k_0}{4\pi} \iint_{4\pi} \frac{1}{4\pi} |H(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi$ (points rouges) en fonction de la fréquence pour le nuage de la figure 1.8.

1.4 Conclusions

Ce premier chapitre nous a permis d'expliciter les mécanismes d'oscillation et de diffusion d'une bulle à basse fréquence. Nous avons notamment pu détailler la notion centrale de fonction de diffusion et identifier les diverses sources d'atténuation. Nous nous sommes également intéressés à la situation réaliste d'un milieu contenant un grand nombre de bulles. Il faut alors tenir compte de la diffusion multiple qui peut être calculée de manière exacte en introduisant le formalisme de la *multiple scattering theory* (MST) et grâce à laquelle nous avons pu mettre au point un code de calcul numérique qui peut prédire le comportement d'échantillons contenant jusqu'à environ 50000 bulles.

Bibliographie

- [1] J. R. Allegra and S. A. Hawley. Attenuation of sound in suspensions and emulsions : theory and experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(5B) :1545–1564, 1972.
- [2] Lord Rayleigh. VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(200) :94–98, 1917.
- [3] M. S. Plesset. The dynamics of cavitation bubbles. *Journal of Applied Mechanics*, 16 :277–282, 1949.
- [4] P. S. Laplace. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace... ; tome premier [-quatrième]*, volume 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [5] C. E Brennen. Oxford University Press. 1995.
- [6] M. Minnaert. Xvi. on musical air-bubbles and the sounds of running water. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 16(104) :235–248, 1933.
- [7] V. Leroy. *Bulles d’air dans l’eau : couplage d’oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique*. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2004.
- [8] D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides : propagation libre et guidée*. Masson, 1996.
- [9] J. H. Poynting. On the transfer of energy in the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 175 :343–361, 1884.
- [10] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition Volume I*, volume 1. Basic books, 2013.
- [11] G. Mie. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik*, 330(3) :377–445, 1908.
- [12] C. Devin Jr. Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(12) :1654–1667, 1959.
- [13] A. Prosperetti. Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(1) :17–27, 1977.
- [14] T. G. Leighton. The acoustic bubble (academic, london). *Chap*, 2 :67–128, 1994.
- [15] M. A. Ainslie and T. G. Leighton. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(5) :3184–3208, 2011.
- [16] G. Maret and P. E. Wolf. Multiple light scattering from disordered media. the effect of brownian motion of scatterers. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 65(4) :409–413, 1987.

-
- [17] D. J. Pine, D. A. Weitz, J. X. Zhu, and E. Herbolzheimer. Diffusing-wave spectroscopy : dynamic light scattering in the multiple scattering limit. *Journal de Physique*, 51(18) :2101–2127, 1990.
- [18] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Oxford University Press, 1950.
- [19] G. C. Papanicolaou and R. Burridge. Transport equations for the stokes parameters from maxwell’s equations in a random medium. *Journal of Mathematical Physics*, 16(10) :2074–2085, 1975.
- [20] H. C. Van de Hulst. Multiple light scattering. vols. _1_ and _2_. *Multiple light scattering. Vols. _1_ and _2_, by van de Hulst, HC. New York, NY (USA) : Academic Press, 739 p., 1, 1980.*
- [21] J. H. Page, H. P. Schriemer, A. E. Bailey, and D. A. Weitz. Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound. *Physical Review E*, 52(3) :3106, 1995.
- [22] E. Amic, J. M. Luck, and T. M. Nieuwenhuizen. Anisotropic multiple scattering in diffusive media. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 29(16) :4915, 1996.
- [23] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A. van Tiggelen, and M. Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Physical Review Letters*, 79(19) :3637, 1997.
- [24] A. Tourin, A. Derode, A. Peyre, and M. Fink. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108(2) :503–512, 2000.
- [25] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*, 4(12) :945–948, 2008.
- [26] R. Snieder, H. Douma, and I. Vasconcelos. Extracting the green’s function from measurements of the energy flux. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4) :EL309–EL315, 2012.

Sommaire

2.1	Onde cohérente et paramètres effectifs	50
2.1.1	Définitions	50
2.1.2	Les premières théories effectives	52
2.1.3	Détermination numérique des paramètres effectifs	60
2.2	Contrôle du champ incohérent	66
2.2.1	Contrôle des degrés de liberté spatiaux	67
2.2.2	Contrôle des degrés de liberté temporels - Focalisation par retournement temporel	70
2.3	Milieus désordonnés spatialement corrélés	87
2.3.1	Corrélations faibles (Keller)	87
2.3.2	Corrélations fortes (Waterman et Truell)	89
2.4	Conclusion : Vers des milieux structurés	101
	Bibliographie	103

On sait maintenant calculer le champ généré en tout point de l'espace pour un milieu bulleux donné. De façon générale, la description complète de la propagation en milieu hétérogène découle de la connaissance de la dépendance spatiale des deux paramètres que sont la densité $\rho(\mathbf{r})$ et la compressibilité $\chi(\mathbf{r})$.

Pour un milieu biphasique comme celui qui nous préoccupe, cela revient à connaître la répartition spatiale des deux phases. Malheureusement, les milieux bulleux ont cette fâcheuse tendance à souvent se présenter de manière extrêmement désordonnée et polydisperse. Les expérimentateurs familiers de ce genre d'échantillons pourront témoigner de la difficulté à en décrire les distributions en position et en taille $\{\mathbf{r}_i, a_i\}$. La littérature spécialisée est pourtant abondante et les tentatives de caractérisation nombreuses. Mais les choses se compliquent sérieusement [1, 2] lorsque l'on tient compte de l'évolution temporelle suscitée par les effets de murissement d'Ostwald [3], de coalescence ou encore de gravité. Les industriels des secteurs du nucléaire et de l'agro-alimentaire sont particulièrement amateurs de telles techniques de caractérisation. Des techniques d'imagerie par tomographie rayons X ont récemment été développées [4–7] grâce à la technologie synchrotron permettant ainsi d'améliorer et d'accélérer le processus de caractérisation (voir figure 2.1). Toutefois, ces procédés sont

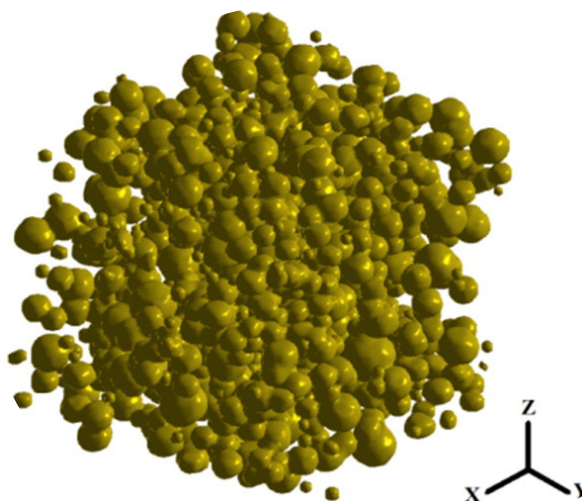


FIGURE 2.1 – Microtomographie à rayons X réalisée sur un échantillon de pâte à pain. Crédits [7].

encore relativement contraignants et l'alternative ultrasonore est particulièrement prometteuse eu égard à sa facilité d'emploi ainsi qu'à sa versatilité. Nous verrons ainsi, dans une première partie, que l'onde cohérente peut constituer un outil efficace pour qui veut extraire des informations grâce aux ultrasons.

D'un autre côté, cet aspect fortement désordonné constitue également une richesse certaine du point de vue du contenu fréquentiel à la fois spatial et temporel. Nous introduirons, dans un deuxième temps, les méthodes de façonnage de front d'onde et du retournement temporel qui permettent de tirer parti de la variété offerte par de

tels échantillons de manière à contrôler la propagation de l'onde incohérente.

Enfin, nous nous intéresserons aux conséquences de l'introduction d'une corrélation dans la distribution spatiale des diffuseurs.

2.1 Onde cohérente et paramètres effectifs

2.1.1 Définitions

Considérons pour cela un champ de pression p interagissant avec un milieu diffusant. On peut le développer en ses contributions cohérente p_c et incohérente p_i .

$$p = p_c + p_i \quad (2.1)$$

Par définition, le champ cohérent est la composante qui résiste lorsque l'on fabrique la moyenne du champ sur un grand nombre de réalisations du désordre :

$$\langle p \rangle = p_c \quad (2.2)$$

Celui-ci ne dépend donc pas, *a priori*, de la disposition des bulles. Il appréhende le milieu diffusant comme si celui-ci était parfaitement homogène. Les propriétés acoustiques ne dépendent donc plus de l'espace. On s'intéresse alors aux paramètres dits "effectifs" ρ_{eff} et χ_{eff} qui ne dépendent pas de r . Le problème se résume à obtenir ces paramètres à partir de mesures du champ. Bien sûr, l'onde cohérente ne permet pas l'extraction d'informations sur la répartition exacte des inhomogénéités, mais elle nous apportera, nous le verrons, un certain nombre d'enseignements sur la statistique du milieu d'intérêt.

2.1.1.1 Libre parcours moyen d'extinction

Qui dit diffusion dit atténuation. Ainsi, lors de sa progression à travers un milieu diffusant, l'amplitude du champ cohérent décroît. Pour en rendre compte, il nous faut considérer un vecteur d'onde effectif complexe. Pour ce faire, on définit l'atténuation α_{eff} et la vitesse v_{eff} comme suit

$$k_{\text{eff}} = \frac{\omega}{v_{\text{eff}}} + i \frac{\alpha_{\text{eff}}}{2}.$$

En particulier, intéressons-nous à la situation de la figure 2.2 : une onde plane se propageant dans l'espace libre, défini par ses paramètres acoustiques ρ_0 et χ_0 , rencontre, en $z = 0$, un milieu diffusant décrit par ses paramètres ρ_{eff} et χ_{eff} . On définit les impédances $Z_0 = \sqrt{\rho_0/\chi_0}$ et $Z_{\text{eff}} = \sqrt{\rho_{\text{eff}}/\chi_{\text{eff}}}$. (voir figure 2.2). Le champ de pression à l'intérieur de l'échantillon peut ainsi s'écrire

$$t \exp\left(-\frac{\alpha_{\text{eff}}}{2}z\right) \exp\left(i\frac{\omega}{v_{\text{eff}}}z\right) \quad (2.3)$$

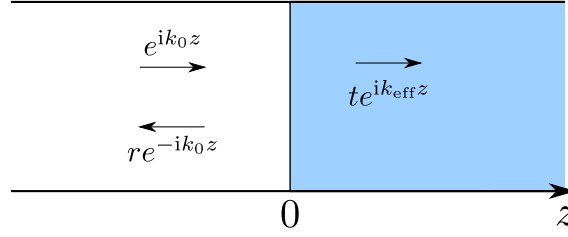


FIGURE 2.2 – Interface 1D entre l’espace libre (ρ_0, χ_0) et un milieu homogène atténuant $(\rho_{\text{eff}}, \chi_{\text{eff}})$.

avec le coefficient de transmission :

$$t = \frac{2Z_{\text{eff}}}{Z_0 + Z_{\text{eff}}}. \quad (2.4)$$

L’amplitude de l’onde cohérente est donc exponentiellement atténuée et la distance caractéristique de cette atténuation s’assimile, par définition, au demi¹ libre parcours moyen d’extinction ℓ_{ext} :

$$\ell_{\text{ext}} = \frac{1}{\alpha_{\text{eff}}} = \frac{1}{2 \text{Im}(k_{\text{eff}})} \quad (2.5)$$

2.1.1.2 Le cas de l’absorption

Introduisons le libre parcours moyen élastique ℓ_e . Il représente la distance caractéristique d’atténuation due à la diffusion élastique. Dans l’hypothèse où la propagation s’effectue de façon conservative, il peut être assimilé au libre parcours moyen d’extinction ℓ_{ext} :

$$\ell_e = \ell_{\text{ext}} \quad (2.6)$$

Dans ce cas de figure, ℓ_e est généralement considéré comme étant le paramètre pertinent pour rendre compte du caractère multiplement diffusant. En effet, la décroissance du champ dans la direction incidente n’est imputable qu’à la redistribution des vecteurs d’ondes associés à la diffusion multiple.

Lorsque l’on souhaite intégrer les mécanismes dissipatifs (ici pertes thermiques et visqueuses), il suffit d’ajouter la contribution du libre parcours moyen d’absorption ℓ_a de telle sorte que :

$$\frac{1}{\ell_{\text{ext}}} = \frac{1}{\ell_e} + \frac{1}{\ell_a}. \quad (2.7)$$

2.1.1.3 Libre parcours moyen de transport

On peut définir, à partir du libre parcours moyen élastique, une seconde longueur caractéristique pour la diffusion multiple. En effet, lors de l’évènement de diffusion,

1. ℓ_{ext} est la distance d’atténuation caractéristique de l’intensité

la redistribution angulaire de l'onde incidente dépend directement de l'anisotropie de l'objet diffusant. Plus un objet diffuse de façon isotrope, plus l'onde incidente perd "rapidement" la mémoire de sa direction d'origine. La distance caractéristique associée à cette isotropisation de l'onde diffusée est appelée libre parcours moyen de transport ℓ^* , défini par

$$\ell^* = \frac{\ell}{1 - g} \quad (2.8)$$

où g est le facteur d'anisotropie et dépend de la fonction de diffusion f :

$$g = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \cos \theta d\phi d\theta. \quad (2.9)$$

Dans le cas de la bulle, la diffusion étant isotrope sur une large gamme de fréquences, on peut considérer que g est nul. Le libre parcours moyen de transport est donc assimilable au libre parcours moyen élastique. Pourtant, nous verrons plus loin que les choses peuvent sensiblement évoluer lorsque l'échantillon n'est plus parfaitement désordonné.

2.1.2 Les premières théories effectives

Les paramètres effectifs sont donc intimement liés à l'onde cohérente. Mais ce qui nous intéresse, en réalité, c'est comment ces paramètres peuvent nous renseigner sur le matériau. Inversement : on aimerait également pouvoir concevoir des milieux bulleux ayant des propriétés intéressantes pour l'onde cohérente. Explicitons donc ces paramètres effectifs à l'aide, dans un premier temps, de deux modèles aussi simples que populaires.

2.1.2.1 Modèle de Wood

Avant même d'être des milieux diffusants, les liquides bulleux sont des échantillons biphasiques air-eau. Essayons donc de les décrire en ces termes. Par définition, la compressibilité effective s'écrit

$$\chi_{\text{eff}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (2.10)$$

où $V = V_{\text{eau}} + V_{\text{air}}$ est le volume total de l'échantillon. En définissant la fraction volumique d'air comme le rapport $\phi = V_{\text{air}}/V$, on a

$$\chi_{\text{eff}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V_{\text{eau}}}{\partial P} - \frac{1}{V} \frac{\partial V_{\text{air}}}{\partial P} = \frac{V_{\text{eau}}}{V} \chi_{\text{eau}} + \frac{V_{\text{air}}}{V} \chi_{\text{air}} = (1 - \phi) \chi_{\text{eau}} + \phi \chi_{\text{air}} \quad (2.11)$$

La densité peut s'écrire de la même manière :

$$\rho_{\text{eff}} = (1 - \phi) \rho_{\text{eau}} + \phi \rho_{\text{air}} \quad (2.12)$$

On peut en déduire la vitesse de phase de l'onde cohérente :

$$v_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{eff}} \chi_{\text{eff}}}} \quad (2.13)$$

Il s'agit de la loi de Wood [8]. Ce résultat est intéressant puisqu'il implique que chaque phase apporte sa propre contribution à la densité et à la compressibilité. Pourtant, dans le cas du mélange air-eau, le contraste acoustique entre les deux phases est absolument considérable. En particulier, rappelons que l'impédance de l'air vaut $Z_{\text{air}} \simeq 400$ Rayl tandis que celle de l'eau vaut $Z_{\text{eau}} \simeq 1.46$ MRayl. C'est la conséquence directe du fait que l'eau est beaucoup plus dense que l'air tout en étant beaucoup moins compressible que ce dernier. L'expression de la vitesse peut donc être raisonnablement approchée par :

$$v_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{eau}}\chi_{\text{air}}}\sqrt{\phi(1-\phi)}}. \quad (2.14)$$

Dans la plupart des cas qui nous intéresseront, ϕ n'excédera pas 1%. L'expression de la vitesse se simplifie de nouveau :

$$v_{\text{eff}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{eau}}\chi_{\text{air}}}\sqrt{\phi}}. \quad (2.15)$$

Comme nous le verrons, ce résultat est satisfaisant à basse fréquence mais ne tient absolument pas compte de l'aspect résonant indissociable de la réponse acoustique d'une bulle d'air. Il s'agit d'autre part d'une approche statique ne tenant pas compte de la dynamique de l'échantillon. Enfin, ce premier modèle ne fait pas explicitement intervenir les effets de la diffusion multiple qui constituent pourtant, comme on l'a vu, un aspect essentiel de la description du problème.

2.1.2.2 Modèle de Foldy

Adoptons désormais une description plus "acousticienne" de la propagation de l'onde cohérente. Nous repartirons pour cela de la définition implicite de l'équation (1.43) qui, après passage à la moyenne sur le désordre, donne

$$\begin{aligned} \langle p(\mathbf{r}) \rangle &= p_c(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \left\langle \sum_{k=1}^N p(\mathbf{r}_k) f(a_k) 4\pi G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \right\rangle \\ &= p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + 4\pi \sum_{k=1}^N \langle p(\mathbf{r}_k) f(a_k) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

où l'on a privilégié une notation faisant intervenir le rayon a_k de la bulle k pour la fonction de diffusion. Comment calculer la moyenne du champ diffus ? Ce problème a été traité pour la première fois par Leslie Foldy en 1945 [9]. Pour ce faire, Foldy remarque que la statistique du problème, commune à toutes les réalisations du désordre, peut se résumer à deux degrés de liberté : la position \mathbf{r}_k et le rayon a_k de chaque bulle. Chaque tirage étant constitué de N bulles, la statistique complète est décrite par une fonction à $2N$ variables. On définit $Q(\mathbf{r}_1, a_1, \dots, \mathbf{r}_N, a_N)$ la probabilité d'obtenir exactement un nuage précis. En supposant que les positions des N bulles sont statistiquement indépendantes, on peut tout aussi bien réduire le problème à une fonction de deux

variables $n(\mathbf{r}, a)$. Ici, n a été choisie comme la densité volumique de bulle ayant le rayon a . On a donc

$$\int_V \underbrace{\int_0^\infty n(\mathbf{r}, a) da}_{\text{concentration } n(\mathbf{r})} d^3r = N. \quad (2.17)$$

La probabilité d'obtenir exactement un nuage est alors équivalente au produit des probabilités de trouver la bonne position et le bon rayon pour chaque bulle le constituant :

$$Q(\mathbf{r}_1, a_1, \dots, \mathbf{r}_N, a_N) = \frac{1}{N^N} n(\mathbf{r}_1, a_1) \times \dots \times n(\mathbf{r}_N, a_N) \quad (2.18)$$

La valeur moyenne de n'importe quelle fonction des deux variables aléatoires \mathbf{r}_k et a_k peut alors s'obtenir en intégrant comme suit :

$$\langle F(\mathbf{r}_k, a_k) \rangle = \iint \dots \iint F(\mathbf{r}_k, a_k) \frac{n(\mathbf{r}_1, a_1) \dots n(\mathbf{r}_N, a_N)}{N^N} da_1 d^3r_1 \dots da_N d^3r_N. \quad (2.19)$$

Dans le cas qui nous intéresse on a donc :

$$\begin{aligned} \langle p(\mathbf{r}_k) f(a_k) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \rangle &= \iint \dots \iint p(\mathbf{r}_k) f(a_k) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \frac{n(\mathbf{r}_1, a_1) \dots n(\mathbf{r}_N, a_N)}{N^N} da_1 d^3r_1 \dots da_N d^3r_N \\ &= \iint \langle p(\mathbf{r}_k) \rangle_k f(a_k) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \frac{n(\mathbf{r}_k, a_k)}{N} da_k d^3r_k \\ &= \frac{1}{N} \int_V \langle p(\mathbf{r}_k) \rangle_k F(\mathbf{r}_k) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) d^3r_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \langle p(\mathbf{r}_k) \rangle_k &= \iint \dots \iint p(\mathbf{r}_k) \frac{n(\mathbf{r}_1, a_1) \dots n(\mathbf{r}_{k-1}, a_{k-1}) n(\mathbf{r}_{k+1}, a_{k+1}) \dots n(\mathbf{r}_N, a_N)}{N^{N-1}} \\ &\quad \times da_1 d^3r_1 \dots da_{k-1} d^3r_{k-1} da_{k+1} d^3r_{k+1} \dots da_N d^3r_N \end{aligned} \quad (2.21)$$

et

$$F(\mathbf{r}_k) = \int_0^\infty f(a_k) n(\mathbf{r}_k, a_k) da_k \quad (2.22)$$

Le champ de pression, bien que mesuré en \mathbf{r}_k , est en réalité dépendant des positions de toutes les bulles ; c'est pourquoi on ne peut le sortir des intégrales. Qualitativement, $\langle p(\mathbf{r}_k) \rangle_k$ se réfère à un moyennage configurationnel de $p(\mathbf{r}_k)$ pour lequel on aurait retiré l'effet de la taille et de la position de la bulle k elle-même. C'est à ce stade que Foldy propose de simplifier le problème. Dans le cas où le milieu est "suffisamment" ² dilué, celui-ci suppose que le champ ressenti par la bulle k dépend des $N - 1$ autres bulles et non pas de la bulle k elle-même. L'approximation revient donc à considérer que

$$\langle p(\mathbf{r}_k) \rangle_k = \langle p(\mathbf{r}_k) \rangle. \quad (2.23)$$

2. Nous reviendrons sur les domaines de validité de cette approximation dans la suite.

On obtient ainsi une expression simple pour le champ cohérent :

$$\langle p(\mathbf{r}) \rangle = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + 4\pi \int_V \langle p(\mathbf{r}_k) \rangle F(\mathbf{r}_k) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) d^3 r_k. \quad (2.24)$$

Rappelons que, par définition de G_0 ,

$$[\Delta + k_0^2] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (2.25)$$

Ce qui, après multiplication par $4\pi \langle p(\mathbf{r}_k) \rangle F(\mathbf{r}_k)$ et intégration sur le volume V , donne

$$[\Delta + k_0^2] \langle p(\mathbf{r}) \rangle = -4\pi \langle p(\mathbf{r}) \rangle F(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

On peut réécrire le dernier résultat en le mettant sous la forme d'une équation de propagation en milieu homogène pour l'onde cohérente :

$$[\Delta + k_{\text{eff}}^2] \langle p(\mathbf{r}) \rangle = 0 \quad (2.27)$$

à condition d'avoir

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + 4\pi F(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

C'est le résultat du modèle de Foldy. Il est particulièrement simple d'utilisation et nous le reverrons régulièrement au cours de ce manuscrit. Ce résultat est semblable à celui obtenu en faisant l'approximation de diffusion indépendante [10] (*Independent Scattering Approximation* ou ISA en anglais). La différence essentielle réside dans le fait que l'ISA est également applicable dans le cas de diffuseurs anisotropes, mais ne tient compte que de la fonction de diffusion évaluée dans la direction incidente. Dans le cas de la résonance monopolaire des bulles, les deux résultats sont parfaitement équivalents.

Dans la suite, on considèrera le plus souvent des échantillons monodisperses pour lesquels le modèle de Foldy s'écrit plus simplement

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + 4\pi n f. \quad (2.29)$$

Il suffit donc de connaître la concentration en bulles ainsi que la fonction de diffusion pour décrire la propagation de l'onde cohérente dans un tel matériau. Inversement, si l'on est capable de mesurer le nombre d'onde effectif dans le milieu, on pourra obtenir des informations sur sa composition.

Enfin remarquons que, du point de vue du modèle de Foldy, le nombre d'onde effectif résulte de deux contributions de natures bien différentes. Le premier terme est lié à la phase continue tandis que le second témoigne de l'action de la population de diffuseurs. On peut d'ailleurs fabriquer le rapport des deux contributions en réécrivant l'équation (2.29) sous la forme :

$$k_{\text{eff}} = k_0 \left(1 + \frac{4\pi n f}{k_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

On résiste difficilement à l'envie d'explorer le régime pour lequel $4\pi n|f| \ll k_0^2$; ce qui revient à faire une approximation de milieux dilué. Dans ces conditions, on a

$$k_{\text{eff}} = k_0 + \frac{2\pi n f}{k_0}. \quad (2.31)$$

puis, en passant à la partie imaginaire et en appliquant le théorème optique (1.33) :

$$\ell_e = \frac{1}{n\sigma_s}. \quad (2.32)$$

C'est un résultat que l'on retrouve souvent dans la littérature des milieux diffusants. Dans le cas des bulles, nous verrons qu'il n'est que rarement applicable.

2.1.2.3 Dispersion dans les milieux bulleux

Partie réelle

On a reproduit, sur la figure 2.3, les courbes de dispersion (fréquence - k_{eff}) obtenues via les modèles de Foldy et de Wood pour un nuage monodisperse constitué de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$. On fixe la fraction volumique d'air à $\phi = 0.01\%$. À titre de comparaison on ajoute la dispersion de l'eau pure (k_0). On constate que les deux pré-

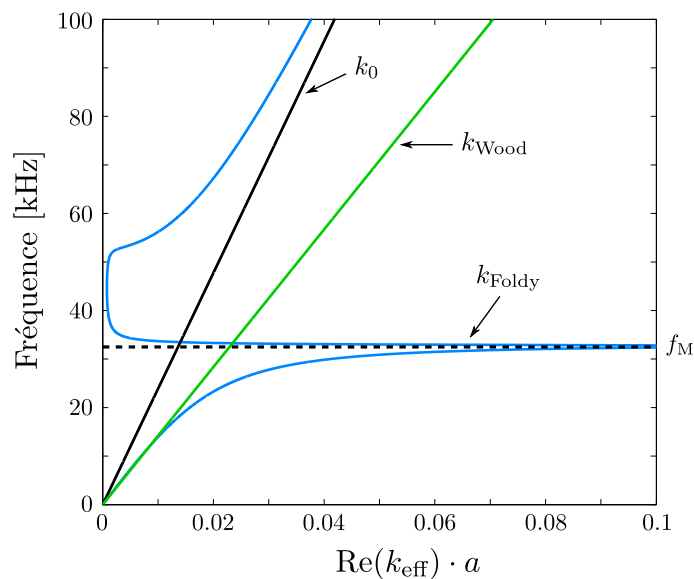


FIGURE 2.3 – Courbes de dispersion obtenues avec les modèles de Wood et de Foldy et dispersion dans l'eau pure. Les pointillés horizontaux indiquent la fréquence de Minnaert. On a choisi les paramètres suivants : $a = 100 \mu\text{m}$, $\phi = 0.01\%$, $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$.

dictions donnent des courbes de dispersion très différentes. Contrairement au modèle de Wood, celui de Foldy rend bien compte du caractère dispersif. En particulier, il confère un rôle central à la résonance de Minnaert. Il n'est pas surprenant qu'il n'en soit pas de même pour le modèle de Wood puisque celui-ci ne tient pas compte de

la forme, et donc du caractère potentiellement résonant, des inclusions. Examinons l'allure de la dispersion prévue par Foldy. À basse fréquence, elle s'accorde avec la prédiction de Wood. La longueur d'onde est en effet suffisamment grande pour que la taille des bulles n'ait pas d'importance et les lacunes du modèle de Wood restent sans conséquences. L'onde se propage donc comme dans un fluide homogène constitué d'air et d'eau. On se propose de le montrer en développant l'expression de Foldy monodisperse (équation (2.29)). On pose $\epsilon = \omega/\omega_M \ll 1$. Dans le cas monodisperse, en utilisant la relation $n = 3\phi/(4\pi a^3)$ ainsi que l'expression de la fonction de diffusion (équation (1.22)), le nombre d'onde prévu par le modèle de Foldy s'écrit :

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + \frac{3\phi\epsilon^2}{a^2} \frac{1}{1 - \epsilon^2 - i\delta\epsilon^2} \simeq k_0^2 + \frac{3\phi\epsilon^2}{a^2}. \quad (2.33)$$

Comme $k_0^2 = \omega^2 \rho_0 \chi_{\text{eau}}$ et que $\rho_0 = 3\gamma P_0/(\omega_M^2 a^2)$,

$$k_{\text{eff}}^2 \simeq \frac{3\epsilon^2}{a^2} [\phi + \gamma P_0 \chi_{\text{eau}}]. \quad (2.34)$$

En raison de la faible compressibilité de l'eau le terme $\gamma P_0 \chi_{\text{eau}}$, qui est de l'ordre de 10^{-6} , est presque toujours négligeable. En remplaçant ω_M par son expression, on trouve que

$$k_{\text{eff}}^2 \simeq \frac{\rho_0 \omega^2 \phi}{\gamma P_0}. \quad (2.35)$$

Finalement, en tenant compte du fait que pour un gaz parfait $\gamma P_0 = 1/\chi_{\text{gaz}}$, on obtient l'écriture

$$k_{\text{eff}}^2 \simeq \omega^2 \rho_0 \chi_{\text{gaz}} \phi \quad (2.36)$$

qui est équivalente à celle de l'équation (2.15) puisque le terme de droite est réel. Signalons tout de même que l'accord est susceptible de faillir pour les fractions volumiques les plus élevées. En effet, le terme en $(1 - \phi)$ de l'équation (2.12) peut devenir sensiblement plus petit que 1, auquel cas la densité effective ρ_{eff} ne sera plus assimilable ρ_{eau} . Or, le modèle de Foldy est incapable de rendre compte des variations de densité puisqu'il considère les diffuseurs comme parfaitement isotropes.

Que se passe-t-il lorsque l'on augmente la fréquence ? Tout d'abord, on se rapproche de la résonance de Minnaert. Cela signifie que les bulles diffusent fortement. Le champ mesuré dans l'échantillon résulte alors de la superposition du champ incident et du champ diffus. Cette interférence est particulière en cela qu'elle fait intervenir deux objets très différents. D'un côté, l'onde incidente, qui est parfois appelée "continuum" en raison de son extension dans l'espace de Fourier ; de l'autre, l'onde diffusée, dont l'amplitude est intimement liée au caractère résonant de l'objet et qui se comporte *a fortiori* comme un événement discret. On parle d'interférence de Fano [11]. Sa particularité réside dans son caractère fréquentiel asymétrique inhérent à l'intervention de la phase de la résonance. Pour les fréquences inférieures à la résonance, $\omega < \omega_M$, le décalage de phase $\varphi(\omega) = \arg(f)$ entre le champ diffus et le champ incident est inférieur à $\pi/2$ et augmente à mesure que l'on approche de la résonance. L'interférence de Fano

est constructive. Lorsque $\omega > \omega_M$, $\varphi(\omega)$ devient supérieur à $\pi/2$. Le champ diffus est donc en opposition de phase avec le champ incident ; l'interférence est destructive. Pourvu que l'échantillon soit statistiquement homogène, le champ s'annule partout. La longueur d'onde devient alors infinie. C'est ce phénomène qui est à l'origine de la bande interdite obtenue. Cette dernière est souvent appelée bande interdite d'hybridation en référence aux travaux de Aeppli et Fisk [12] qui ont permis d'expliquer le comportement isolant observé à basse température pour les semi-conducteurs de Kondo sans que cela soit prédit par leur structure de bande. Dans notre cas, la bande interdite persiste tant que le champ diffusé reste suffisamment ample pour annuler le champ incident. Toutes les bulles collaborent alors dans cet unique but. Par exemple, si on utilise une fréquence trop éloignée de la résonance pour que les premières bulles exposées parviennent à supprimer le champ incident, les suivantes prendront le relais et interféreront négativement à leur tour avec ce qu'il reste du champ incident. Les propriétés de la bande interdite dépendent donc directement de la concentration en bulles.

On augmente encore la fréquence. Les bulles ne sont alors plus assez efficaces pour éteindre le champ et la propagation reprend ses droits. À la limite aux très hautes fréquences, l'onde incidente se propage dans l'eau pure comme si les bulles, qui deviennent de piètres diffuseurs, étaient absentes.

Partie imaginaire

On peut extraire la partie imaginaire de la même manière. On obtient le tracé de la figure 2.4. La partie imaginaire du vecteur d'onde prévue par Wood est toujours nulle, ce qui est logique au vu de l'expression (2.15). Celle prévue par Foldy est presque toujours nulle sauf dans la région de la bande interdite. En fait, après la résonance, les bulles répondent en opposition de phase et la compressibilité effective devient négative. Comme la partie réelle est alors négligeable, k_{eff} devient essentiellement imaginaire et le champ transmis est purement évanescent. De plus, la valeur de $\text{Im}(k_{\text{eff}})$ nous renseigne sur la distance caractéristique d'amortissement. En particulier, dès que le milieu devient plus épais que le libre parcours moyen d'extinction $\ell_{\text{ext}} = 1/(2\text{Im}(k_{\text{eff}}))$, l'onde incidente est annulée et le matériau peut être considéré comme opaque.

2.1.2.4 Domaines de validité du modèle de Foldy

Revenons sur l'approximation des milieux dilués telle que postulée par Foldy. On aimerait extraire un critère pour pouvoir estimer, *a priori*, la pertinence de celle-ci. Pour cela, considérons la situation représentée sur la figure 2.5 où l'on ne tient compte que de deux bulles voisines et distantes de r . La bulle k ressent le champ incident p_0 , le champ p_1 émis par sa voisine $k + 1$ ainsi que le champ multiplément diffusé entre les deux bulles (voir figure 2.5). Prenons, par exemple, le champ p_2 , qui a subi une

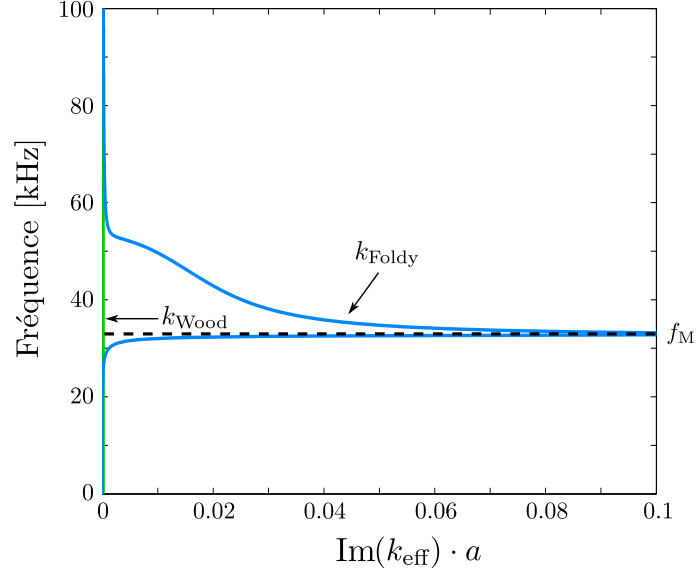


FIGURE 2.4 – Partie imaginaire des nombres d’onde obtenus avec les modèles de Wood et de Foldy. Les pointillés horizontaux indiquent la fréquence de Minnaert. On a choisi les paramètres suivants : $a = 100 \mu\text{m}$, $\phi = 0.01\%$, $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$.

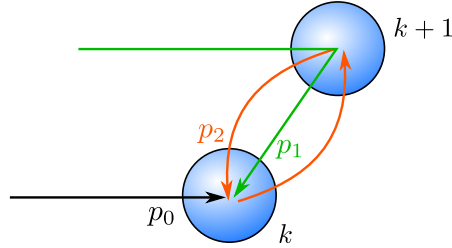


FIGURE 2.5 – Schéma représentant les trois premières séquences participant au champ ressenti par la bulle k et impliquant sa voisine $k + 1$.

boucle complète de diffusion entre k et $k + 1$. Il est de la forme

$$p_2 = p_0 f(a_k) f(a_{k+1}) \left(\frac{e^{ik_0 r}}{r} \right)^2 \quad (2.37)$$

Si l’on considère le milieu comme monodisperse, p_2 ne dépend plus que de la seule variable r et sa moyenne configurationnelle s’écrit donc (cf équation (2.19)) :

$$\langle p_2(\mathbf{r}) \rangle = p_0 \int_V f^2 \frac{e^{2ik_0 r}}{r^2} n(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (2.38)$$

Supposons que l’échantillon soit statistiquement homogène si bien que la concentration n ne dépend plus de la position. En écrivant $d^3 r = 4\pi r^2 dr$ et en postulant une petite

partie imaginaire pour k_0 de manière à faire converger l'intégrale, on obtient :

$$\langle p_2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{2\pi n f^2 p_0}{ik_0} \quad (2.39)$$

Notons que la moyenne configurationnelle de p_1 dépend de la taille de l'échantillon et ne peut donc pas être utilisée pour formuler un critère général. Waterman et Truell [13] ont proposé de comparer la contribution de $\langle p_2(\mathbf{r}) \rangle$ avec celle du champ incident.

$$\left| \frac{\langle p_2(\mathbf{r}) \rangle}{p_0} \right| = \frac{2\pi n |f|^2}{k_0} \quad (2.40)$$

Ils parviennent ainsi à la conclusion que les termes d'ordre 2 en f sont susceptibles de devenir négligeables lorsque :

$$\frac{n\sigma_s}{2k_0} < 1. \quad (2.41)$$

En utilisant le résultat (2.32), le critère de validité devient $k_0 l_e > 1/2$. Il s'agit, à un facteur 1/2 près, du critère bien connu caractérisant l'entrée dans le régime de la localisation d'Anderson qui s'apparente à une transition de phase de type conducteur-isolant [14–16]. On peut souligner l'aspect paradoxal, propre aux milieux bulleux, qu'il y a à retrouver un résultat généralement adopté pour les systèmes concentrés en utilisant la formule (2.32) qui découle elle-même d'une approximation de milieux dilués. Par ailleurs, c'est précisément pour cela que les milieux bulleux ont été présentés comme des candidats idéaux pour l'étude de ce régime particulier [17–19]. Revenons à notre critère. Il a été montré [20, 21] que l'erreur d'ordre 2 en f , commise sur le champ ressenti par la bulle k , se traduit par une erreur d'ordre 3 en f , commise lors de l'évaluation de k_{eff}^2 . On peut l'expliquer, avec les mains, par le fait que le champ p_2 est le champ ressenti par la bulle k . Le champ diffusé par cette dernière contient donc un terme d'ordre 3 en f . Le tracé du critère est reproduit en figure 2.6. On constate que l'approximation est convaincante partout sauf au voisinage de la résonance. C'est somme toute assez logique puisque la bulle diffuse beaucoup plus efficacement dans cette région. Le champ diffus est alors susceptible de résister à des séquences de diffusion beaucoup plus longues. En particulier, les séquences en boucle, qui sont problématiques vis-à-vis de l'approximation indépendante de diffusion, deviennent plus probables. Naturellement, les choses s'aggravent encore lorsque l'on supprime les pertes. Plus récemment, de nombreux contributeurs [21–29] se sont intéressés à l'obtention de termes d'ordres supérieurs afin d'étendre le domaine de validité des théories de milieux effectifs. Mais aucune des méthodes proposées ne fait pour l'instant l'unanimité et certaines approches ont même suscité des réactions particulièrement véhémentes [20, 21, 30, 31]. Nous reviendrons, à la fin de ce chapitre, sur les développements de Keller [32] ainsi que de Waterman et Truell [13] qui permettent de traiter les cas de milieux bulleux bien particuliers.

2.1.3 Détermination numérique des paramètres effectifs

Les deux descriptions analytiques introduites dans le paragraphe précédent montrent que les propriétés effectives de l'échantillon sont intimement liées à sa composition (ϕ

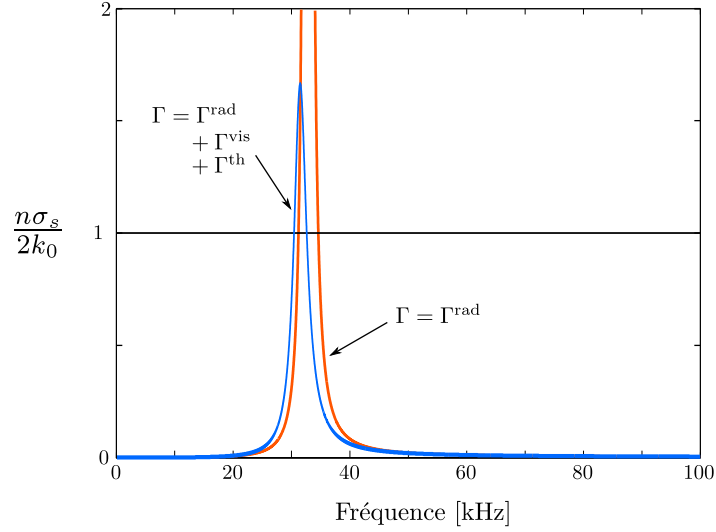


FIGURE 2.6 – Tracé de $\frac{n\sigma_s}{2k_0}$ en fonction de la fréquence avec (trait bleu) et sans atténuation (trait rouge). On a choisi les paramètres $a = 100 \mu\text{m}$ et $\phi = 0.01\%$.

et a). Or, nous disposons de l'outil numérique introduit dans la partie précédente qui nous permet de confronter les prédictions analytiques aux résultats numériques.

Nous allons donc désormais tirer des collections de bulles aléatoires pour lesquelles nous déterminerons les paramètres effectifs. Pour cela, il faut être capable de les extraire à partir de simples mesures de champ. La simulation est un outil particulièrement confortable car elle permet d'avoir accès au champ à l'intérieur de l'échantillon. La méthode la plus naturelle consiste alors à extraire k_{eff} via l'analyse de Fourier dans l'échantillon. L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle est extrêmement sensible aux effets de bords, notamment pour les fréquences associées aux valeurs de $\text{Re}(k_{\text{eff}})$ les plus faibles ; c'est-à-dire pour les basses fréquences ainsi que celles situées dans la bande interdite. Par ailleurs, les cartes de champ obtenues sont polluées par les "points brillants". En effet, le champ diffusé par une bulle étant proportionnel à $e^{ik_0 r}/r$, il diverge pour les petites valeurs de r . On obtiendra donc un point brillant à chaque fois qu'une bulle sera située à proximité de la zone d'acquisition. Une solution pour s'en débarrasser consiste à effectuer le moyennage du champ sur un grand nombre de configurations. Mais elle est extrêmement contraignante en termes de temps de calcul. On privilégiera donc une méthode ne nécessitant que des acquisitions en champ lointain. Les points brillants ne posent alors plus de difficulté et l'extraction devient nettement plus rapide. Dans la suite, nous introduisons deux techniques similaires mais associées à des géométries différentes. Les résultats simulés seront confrontés aux prédictions du modèle de Foldy.

2.1.3.1 Extraction pour le problème 1D

Il a récemment été montré [33, 34] que dans le cas d'un problème unidimensionnel, on peut extraire les paramètres effectifs d'un échantillon d'épaisseur e à l'aide des seuls coefficients de réflexion et de transmission r et t . La démonstration est reportée en annexe A.1.

Expérience numérique

La méthode en question est adaptée à un problème 1D ce qui ne paraît, *a priori*, pas tout à fait pertinent quand on veut étudier un milieu bulleux. Mais on peut construire un échantillon simili-1D en fabriquant une couche cylindrique et en l'insonifiant à l'aide d'un faisceau gaussien comme représenté sur la figure 2.7. On note $w(z)$ l'extension

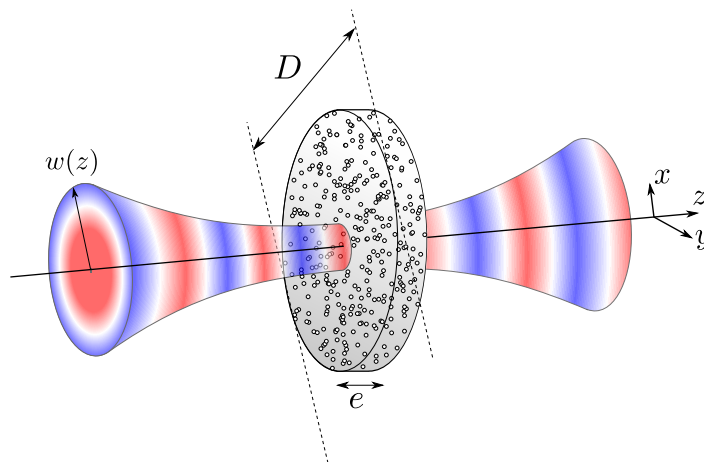


FIGURE 2.7 – Une couche cylindrique de diamètre D et d'épaisseur e contient des bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ réparties aléatoirement. On le soumet à une insonification gaussienne d'extension transverse $w(z)$ sous incidence normale.

transverse du faisceau gaussien. Elle vérifie [35] :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0 z}{\pi w_0^2} \right)^2}. \quad (2.42)$$

Pour se rapprocher du problème 1D, il faut s'assurer que le faisceau ne soit pas trop courbé. Cela revient à imposer $w_0 \gg \lambda_0$. De la même façon, il faut impérativement s'affranchir des effets de bords. Cela suppose que $D \gg w_0$. La méthode 1D requiert donc des échantillons relativement grands. Pour compenser on travaillera sur des épaisseurs e modestes. Techniquement, l'extraction est d'ailleurs plus aisée pour les petites épaisseurs à condition de veiller à ce que l'incertitude δe demeure raisonnable [33]. On générera ici une couche fine de dimension $D = 30 \text{ cm}$, $e = 300 \mu\text{m}$ et l'extension minimale du faisceau gaussien $w_0 = 4 \text{ cm}$. Pour une fraction volumique d'air de $\phi = 0.01\%$, chaque nuage contient alors $N = 500$ bulles. On mesure le champ en 2 points de l'axe

z avec et sans le milieu bulleux et on en déduit les coefficients en transmission et en réflexion t et r . On limite la contribution du champ incohérent en moyennant la mesure sur 10 configurations du désordre. Après application de (A.7), on obtient la dispersion reproduite sur la figure 2.8. On a coloré la gamme de fréquence pour laquelle le critère

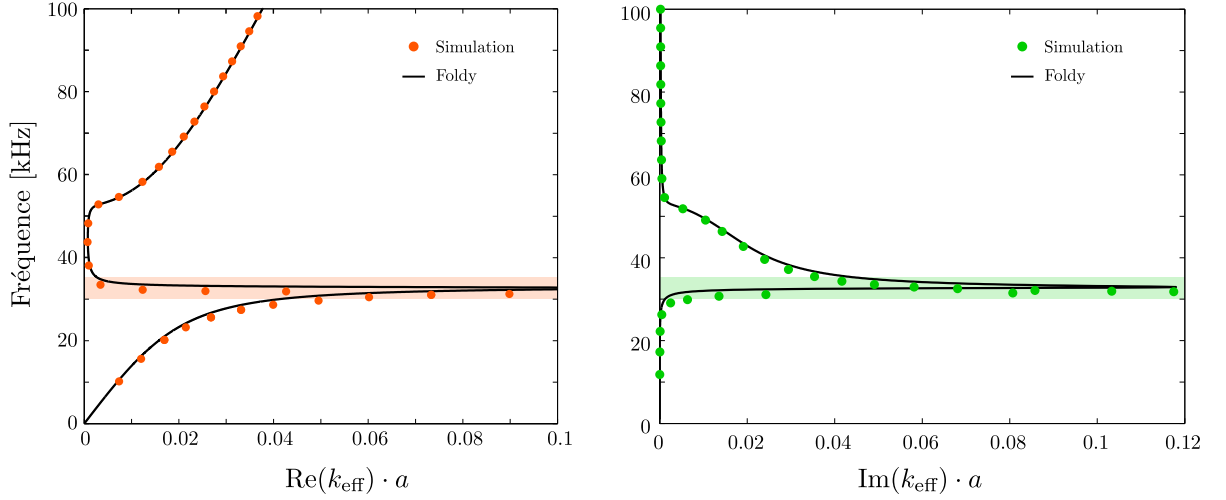


FIGURE 2.8 – Courbe de dispersion numérique obtenue en appliquant la formule (A.7) pour une couche de diamètre $D = 30$ cm et d'épaisseur $e = 300 \mu\text{m}$ contenant un tirage aléatoire de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$. La fraction volumique vaut $\phi = 0.01\%$ et on prend $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$. On a reporté la partie réelle (à gauche) et la partie imaginaire (à droite) de k_{eff} . La zone en couleur indique la gamme de fréquence pour laquelle le critère de validité de l'approximation de diffusion indépendante (2.41) n'est plus rempli.

de (2.41) n'est pas vérifié. La simulation donne un accord raisonnable avec le modèle. Même dans la zone où l'approximation de diffusion indépendante n'est peut-être pas pertinente, l'écart reste mince. Pour une faible concentration, on retiendra donc que simulation et prédiction de Foldy sont en relatif bon accord. Pour sonder les limites du modèle, il faudra donc considérer des échantillons plus concentrés. Les données expérimentales disponibles dans la littérature [36] relatent un bon accord avec le modèle pour les fractions volumiques n'excédant pas 1%. C'est donc cette limite qu'il faut aller sonder. Cependant, du fait des contraintes qui accompagnent la méthode 1D, notamment sur la question de la taille de l'échantillon, les milieux concentrés risquent d'être délicats à simuler. Pour un échantillon similaire à celui de l'exemple précédent et concentré à 1%, il faudrait pouvoir générer un nuage contenant $N = 50000$ bulles et ce pour chaque configuration du désordre. On touche là aux limites des capacités de calcul disponibles au laboratoire. Enfin, notons que le faisceau gaussien est une solution approchée de l'équation d'onde dans l'approximation paraxiale et est donc lui-même susceptible de constituer une source d'erreur.

2.1.3.2 Géométrie sphérique

On propose ici une approche alternative plus en adéquation avec le caractère tridimensionnel de nos diffuseurs. Compte tenu du caractère monopolaire de la diffusion dans le cas des bulles, la géométrie la plus naturelle est celle de la boule. Cet objet présente d'ailleurs l'avantage d'être bien connu des acousticiens et le mécanisme de diffusion par boule a été décrit analytiquement [37]. Nous allons donc générer nos nuages aléatoires sous forme de boules et supposer que ceux-ci diffusent l'onde cohérente de la même façon qu'une boule homogène d'indice *ad hoc*. Si c'est le cas, la mesure du champ diffusé loin de la boule devrait, comme précédemment, permettre d'extraire les paramètres effectifs. La méthode d'extraction complète est disponible en annexe A.2.

Tirage du nuage sphérique

La génération du nuage sphérique mérite d'être détaillée. Tout d'abord, quel diamètre D faut-il envisager pour la boule ? Aucune hypothèse n'a pour l'instant été nécessaire. C'est une bonne nouvelle puisque, contrairement à la technique 1D, on devrait pouvoir obtenir une estimation de k_{eff} sans avoir recours à des échantillons de taille déraisonnable. C'est d'ailleurs plutôt l'inverse puisque l'extraction de k_{eff} sera d'autant plus aisée que l'équation (A.15) aura peu de solutions.

En pratique, la technique la plus simple pour obtenir un nuage sphérique consiste à tirer un nuage cubique avant de retirer les bulles qui se trouvent au delà d'une distance $D/2$ du centre de la sphère. Cette méthode n'est pourtant pas tout à fait satisfaisante puisque la bulle la plus éloignée du centre sera toujours située à une distance strictement inférieure à $D/2$. Autant le biais introduit ne devrait pas poser problème pour des sphères suffisamment grandes, autant il peut le devenir pour des sphères de petite taille. Or, c'est précisément ce qui constitue l'intérêt principal de la méthode. Une solution consiste à générer le désordre sur des couronnes sphériques successives pour réduire l'incertitude à la dernière couronne sphérique. C'est cette méthode que nous utiliserons ici.

Résultats

Nous générons ici des nuages concentrés à $\phi = 1\%$, c'est-à-dire la fraction volumique pour laquelle le modèle de Foldy est susceptible d'échouer. On tire aléatoirement 1000 sphères de diamètre $D = 1.6$ mm. Cela signifie que chacune de ces sphères contient exactement 5 bulles ! Dans ces conditions, la simulation est extrêmement rapide. On reporte sur la figure 2.9 la dispersion obtenue après extraction des paramètres effectifs via la méthode décrite plus haut. De même que précédemment, on indique la zone pour laquelle le critère de validité du modèle de Foldy (2.41) n'est plus valable. Évidemment, cette zone est bien plus étendue que dans le cas précédent, puisque la concentration est 100 fois plus élevée. On constate que l'accord observé entre théorie et simulation s'est légèrement dégradé. Il est toutefois difficile de garantir que le désaccord incombe à la

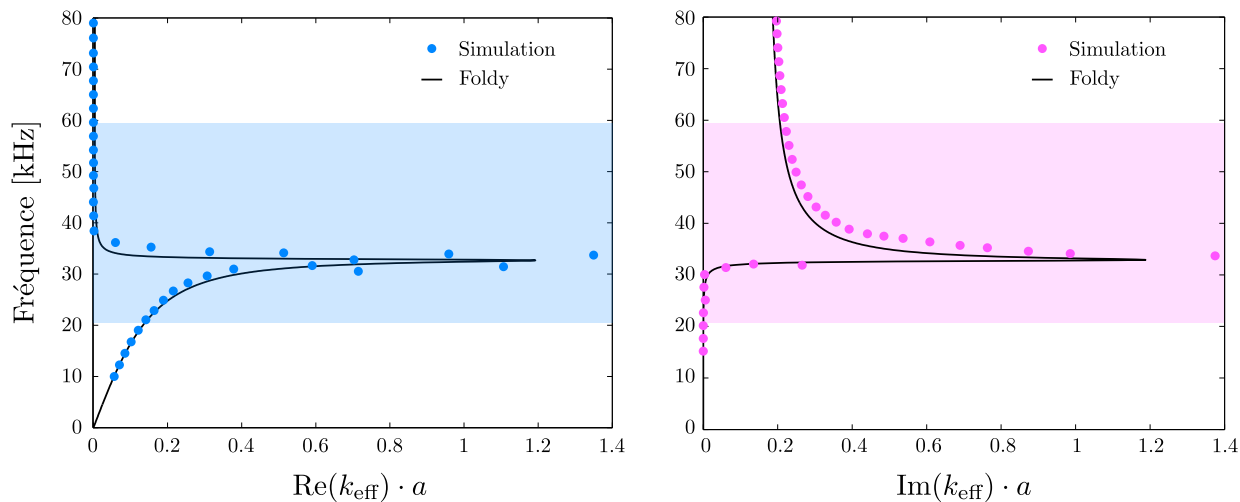


FIGURE 2.9 – Dispersion numérique obtenue après résolution numérique de l'équation (A.15) pour une boule de diamètre $D = 1.6$ mm au sein de laquelle on a effectué un tirage aléatoire de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$. La fraction volumique vaut $\phi = 1\%$ et $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$. On a reporté la partie réelle (à gauche) et la partie imaginaire (à droite) de k_{eff} . La zone en couleur indique la gamme de fréquence pour laquelle le critère (2.41) faillit.

défaillance de l'approximation de diffusion indépendante. L'incertitude sur la taille du nuage peut également être dommageable. D'ailleurs, les points litigieux se situent pour la plupart autour de la résonance et l'accord est plutôt convaincant partout ailleurs, et ce même dans la zone colorée pour laquelle le critère (2.41) n'est pas vérifié. En tout état de cause, on dispose désormais d'une technique rapide et efficace pour sonder les propriétés effectives de milieux bulleux concentrés.

2.2 Contrôle du champ incohérent

Faisons un premier bilan. S'il fallait retenir deux caractéristiques essentielles pour les milieux bulleux aléatoires nous retiendrions le caractère résonant des inclusions que constituent les bulles ainsi que le rôle fondamental joué par la diffusion multiple. Quand on parle de diffusion multiple, on a vu qu'il est généralement nécessaire d'isoler l'onde cohérente. Or l'extraction de cette dernière n'est pas toujours possible puisque l'acquisition de la moyenne configurationnelle ne constitue pas forcément une tâche aisée pour l'expérimentateur. Il faut alors faire avec le champ incohérent p_i . Celui-ci peut être défini comme la différence entre le champ mesuré et le champ cohérent. On peut en donner une illustration en considérant l'exemple de la couche bulleuse représentée sur la figure 2.10 et excitée par une impulsion ultrasonore. On simule le

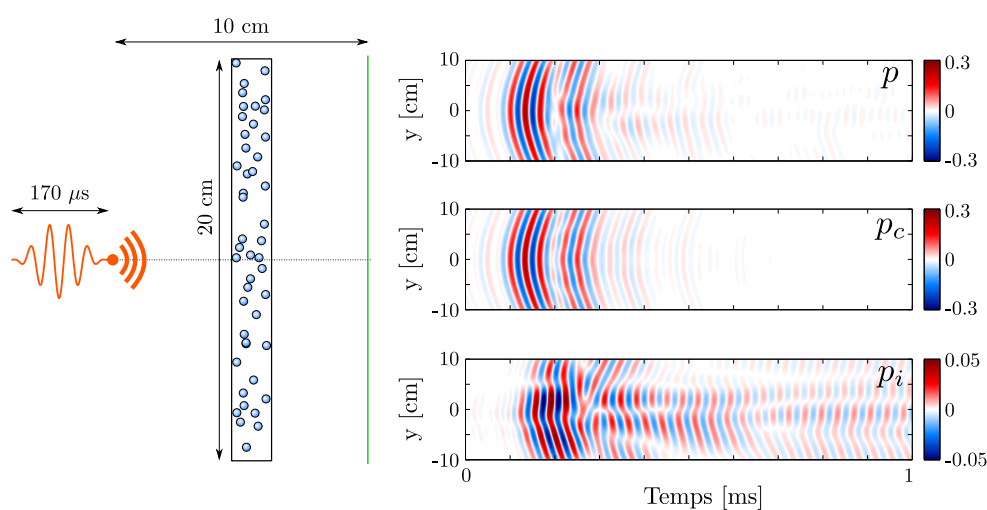


FIGURE 2.10 – Une impulsion centrée sur 30 kHz est émise depuis un point source. On mesure les signaux temporels transmis par une couche de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ faiblement concentrée ($\phi = 0.001\%$). L'acquisition est réalisée le long d'une ligne orthogonale à l'axe de propagation (B-scan). On extrait le champ p (haut), le champ cohérent p_c (milieu) ainsi que le champ incohérent p_i (bas). $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}} + \Gamma^{\text{vis}} + \Gamma^{\text{th}}$.

champ p transmis sur une ligne orthogonale à l'axe de propagation (B-scan). On fait de même pour le champ cohérent p_c en répétant l'opération sur 500 réalisations du désordre puis on extrait le champ incohérent $p_i = p - p_c$. La structure de ce dernier est très différente de celle obtenue pour le champ cohérent. On remarque notamment un étalement temporel de l'énergie accompagné d'une distorsion des fronts d'ondes attestant du rôle joué par la diffusion multiple. On imagine aisément les limitations qui en découlent pour un certain nombre de techniques comme par exemple l'imagerie médicale, l'écho-location sous marine ou encore la thérapie par focalisation ultrasonore.

Pourtant, nous verrons dans cette partie, que la complexité apparente de l'onde

incohérente est également le témoignage d'une grande richesse que l'on peut exploiter. Celle-ci résulte en effet de la superposition d'un grand nombre de chemins indépendants que l'on peut appréhender comme des degrés de liberté. Nous verrons que l'on peut les exploiter en travaillant uniquement sur le signal d'émission. Nous introduirons notamment les techniques de façonnage du front d'onde comme l'optimisation récursive ou encore l'apprentissage de la matrice complète de diffusion dont l'utilisation s'est avérée efficace pour contrôler la propagation de divers types d'ondes (micro-ondes, optique, ultrasons).

Enfin, nous nous intéresserons plus spécifiquement à la technique de focalisation par retournement temporel. Nous expliciterons dans un premier temps le principe de la cavité à retournement temporel qui n'est malheureusement pas transposable dans la pratique. Pourtant, nous montrerons que la diffusion multiple peut alors se transformer en alliée précieuse et jouer le rôle de convertisseur de degrés de libertés temporels en degrés de liberté spatiaux permettant ainsi de transposer la technique au cadre des milieux ouverts. Les bulles constituent, à cet égard, des diffuseurs très intéressants, en raison de leur caractère résonant à basse fréquence qui offre des perspectives encourageantes en termes de résolution spatiale.

2.2.1 Contrôle des degrés de liberté spatiaux

Lorsque l'on insonifie un milieu multiplement diffusant à l'aide d'un champ monochromatique, la structure du champ incohérent observé en transmission présente une alternance spatialement hétérogène de zones sombres ou brillantes. Il s'agit d'une figure de tavelures ("speckle" en anglais). En décalant le point source parallèlement à l'échantillon, on assiste à une décorrélation progressive du champ transmis. On appelle grain d'information spatial la distance minimale $\delta x(x)$ qui permet de décorrélérer totalement le champ transmis. Nous verrons dans cette partie que chaque grain d'information spatial constitue un degré de liberté permettant de contrôler la propagation de l'onde multiplement diffusée.

2.2.1.1 Optimisation du front d'onde incident

On se place dans une situation analogue à celle de la figure 2.10 sauf que, cette fois-ci, on dispose de 25 sources ponctuelles réparties dans le plan $z = -5$ cm. Pour simplifier, on représentera le dispositif d'émission sous la forme d'un tableau 5×5 de côté 16 cm si bien que les sources sont disposées régulièrement tous les 4 cm (voir figure 2.11). On espère ainsi pouvoir exploiter plusieurs degrés de liberté spatiaux. Chaque source émet un signal monochromatique à $f = 27$ kHz. En $z = 0$, on place une fine couche cylindrique ($e = 500 \mu\text{m}$, $D = 25$ cm) contenant des bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ réparties aléatoirement. La fraction volumique d'air est ici de $\phi = 0.1$ %. Sur la figure 2.11, on a représenté le champ incohérent perçu sur un écran placé en $z = 1$ cm lorsque toutes les sources émettent de manière synchrone. Dans cette configuration, l'onde générée s'apparente à une onde plane. Le champ incohérent transmis

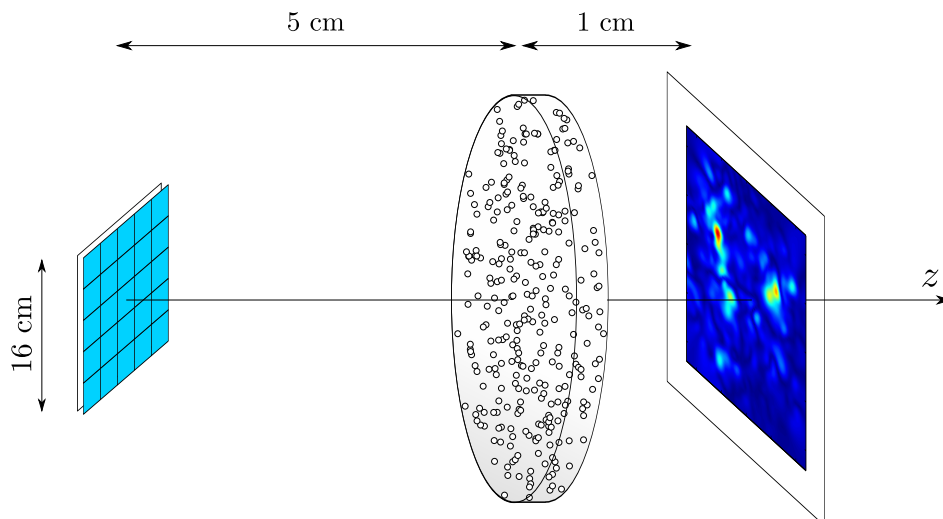


FIGURE 2.11 – Les 25 sources émettent de manière synchrone à 27 kHz. On extrait le champ incohérent transmis par une couche aléatoire composée de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$. Paramètres : $a = 100 \mu\text{m}$, $\phi = 0.1 \%$ et $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$.

est, lui, bien différent. Sur la figure 2.11 on a représenté sa valeur absolue. La distribution obtenue est celle d'une figure de speckle.

La méthode du façonnage de front d'onde consiste à modifier la phase de chacune des sources de façon à contrôler la structure du champ transmis. On peut, par exemple, imaginer corriger l'aberration introduite par le milieu diffusant de façon à recouvrer une structure d'onde plane en transmission. Ici, nous allons expliciter le procédé consistant à focaliser le champ derrière notre couche de bulles. La technique la plus simple d'usage est celle de l'optimisation récursive. Elle consiste à déphaser successivement chacune des sources appartenant au réseau en ne retenant, pour chacune d'entre elles, que la phase qui permet de maximiser le champ au niveau de la cible convoitée. Il s'agit simplement d'une transposition de la technique bien connue de focalisation par application des lois de retard numériques qu'on utilise pour les milieux faiblement hétérogènes tels que ceux rencontrés dans le domaine de l'échographie médicale. La différence essentielle réside dans le fait que les retards ne peuvent, dans le cas présent, pas être prédits³ ce qui suppose d'avoir recours à une phase d'apprentissage. Sur la figure 2.12, on a représenté en couleur le masque de phase obtenu après optimisation ainsi que la valeur absolue du champ incohérent mesuré en transmission pour les trois situations suivantes : (a) les sources sont synchronisées, on émet une onde plane et on obtient la figure de speckle de 2.11 ; (b) On utilise l'algorithme de focalisation pour une cible placée en $\{x = -4 \text{ cm}; y = 6 \text{ cm}\}$ et (c) même chose pour une cible placée en $\{x = 0; y = 0\}$. Si la focalisation est manifeste dans les deux cas, elle est de moindre qualité dans le cas (c). D'une part on dépose moins d'énergie et

3. C'est vrai dès que $e > \ell^*$.

d'autre part la correspondance entre la focalisation constatée et la cible est discutable. On peut l'interpréter comme le fait que l'on dispose d'un nombre encore trop limité de degrés de libertés. Plusieurs solutions sont alors envisageables. L'une d'entre elles

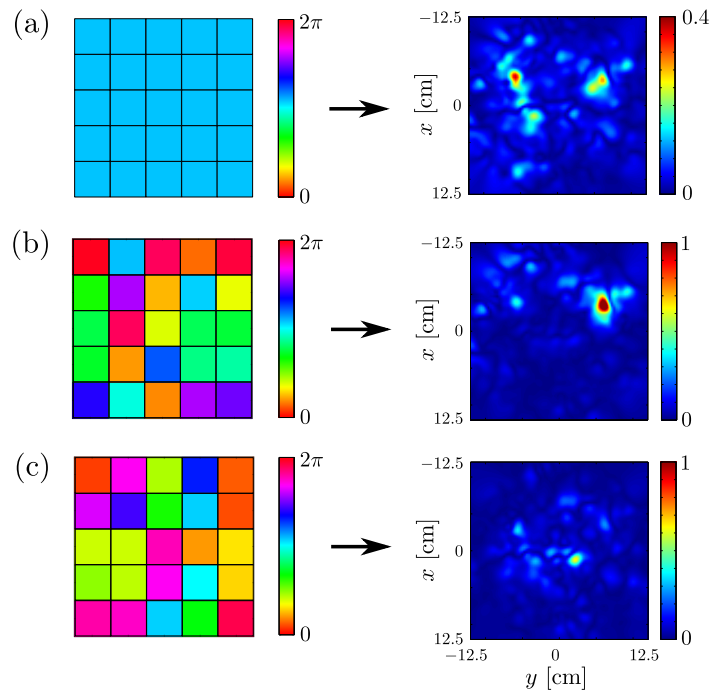


FIGURE 2.12 – Masques de phase appliqués au réseau de sources et cartes du champ incohérent correspondant pour (a) une onde plane, (b) une onde focalisée en $(-4 \text{ cm} ; 6 \text{ cm})$ et (c) une onde focalisée en $(0 ; 0)$.

consiste à combiner degrés de liberté spatiaux et degrés de liberté temporels : c'est la technique du retournement temporel que l'on étudiera dans la suite. Une autre solution consiste à utiliser des réseaux de transducteurs plus grands. Enfin, notons que le résultat de focalisation peut être sensiblement amélioré en modulant les amplitudes d'émission au niveau de chacune des sources.

Cette méthode a récemment rencontré beaucoup de succès en acoustique [38–40], en optique [41] et même en cavité électromagnétique [42].

2.2.1.2 Matrice de transmission

Une seconde méthode, développée en acoustique [43], puis appliquée au contexte du contrôle de front d'onde en optique [44], consiste à fabriquer la matrice de transmission H du système. Classiquement, cette matrice fait correspondre chaque élément du réseau émetteur aux diverses positions d'acquisition du signal. Une fois la matrice connue, on peut aisément déterminer la combinaison des vecteurs d'entrée qui focalise en un seul point en réception. Les résultats sont alors comparables à ceux obtenus via

la technique d'optimisation (en phase et en amplitude).

Les développements les plus récents montrent que la focalisation peut également être assurée dans le temps autant pour la méthode d'optimisation [45] que pour celle s'appuyant sur l'acquisition de la matrice de transmission [46]. Ces méthodes nécessitent encore des phases préliminaires relativement contraignantes et requièrent une électronique sophistiquée. Par ailleurs, dans le cas des milieux bulleux, la prise en compte des mécanismes de dissipation est extrêmement néfaste pour le champ incohérent. Il suffit de se reporter à la figure 1.4 pour s'en convaincre. Celle-ci montre que, pour des bulles de rayon inférieur au centimètre, le rapport $(\delta^{\text{vis}} + \delta^{\text{th}})/\delta^{\text{rad}}$ est toujours plus grand que 1. La section efficace d'absorption l'emporte alors sur la section efficace de diffusion ce qui signifie que chaque bulle dissipe plus qu'elle ne diffuse. Les séquences de diffusion les plus longues n'auront donc que peu d'influence sur le champ transmis.

2.2.2 Contrôle des degrés de liberté temporels - Focalisation par retournement temporel

De la même manière que précédemment, lorsque l'on insonifie un milieu multiple-ment diffusant avec une impulsion, on observe, en transmission, une figure de speckle qui évolue avec le temps. Le temps caractéristique de décorrélation du champ est appelé gain d'information temporel. On peut également l'évaluer en émettant une excitation monochromatique dont on modifie progressivement la fréquence et en mesurant la bande passante $\delta\omega(\omega)$ sur laquelle le champ reste corrélé. Nous verrons dans cette partie que chaque grain d'information temporel constitue un degré de liberté permettant de contrôler la propagation de l'onde multiple-ment diffusée.

2.2.2.1 La cavité à retournement temporel

La théorie qui suit a été élaborée au laboratoire au début des années 1990 [47].

Principe

L'équation d'onde en milieu hétérogène s'écrit :

$$\rho(\mathbf{r}) \operatorname{div} \cdot \left[\frac{\mathbf{grad} p(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r})} \right] = \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.43)$$

Remarquons la dérivée seconde du membre de droite. Elle suggère que si $p(\mathbf{r}, t)$ est solution de (2.43), alors il en sera de même pour $p(\mathbf{r}, -t)$. On parle de réversibilité de l'équation d'onde. En particulier, à une solution particulière correspondant à l'excitation depuis un point source placé en \mathbf{r}_0 , on peut faire correspondre une onde convergente se propageant en sens inverse selon le même cheminement et reconvergeant en \mathbf{r}_0 . Or, en vertu du théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff, pour avoir unicité de la solution de l'équation d'onde dans un domaine de l'espace, il "suffit" de

connaitre le champ ainsi que sa dérivée normale sur les frontières de ce domaine :

$$p(\mathbf{r}) = \iint_S \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{grad} p(\mathbf{r}') - p(\mathbf{r}') \mathbf{grad} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.44)$$

où $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ est une fonction de Green du problème et où \mathbf{n} est le vecteur unitaire orienté normalement à la surface et vers l'extérieur de celle-ci. Faisons l'expérience de pensée représentée sur la figure 2.13. Durant la phase d'apprentissage, une source ponctuelle placée en \mathbf{r}_0 émet une impulsion qui se propage jusqu'à la surface de la cavité qui est tapissée de récepteurs piézoélectriques. Ceux-ci réalisent alors l'enregistrement du champ ainsi que de sa dérivée normale. Dans un second temps, chaque récepteur émet le retourné temporel du champ qu'il a enregistré ainsi que de la dérivée normale, de manière à repropager la "cousine" anti-causale de la solution enregistrée préalablement. Celle-ci reproduit le même parcours en sens inverse pour finalement reconverger en \mathbf{r}_0 [47–52]. On obtient alors une tache focale d'extension spatiale $\lambda/2$. En effet, l'énergie n'a aucune raison de s'arrêter à cet instant précis : l'onde focali-

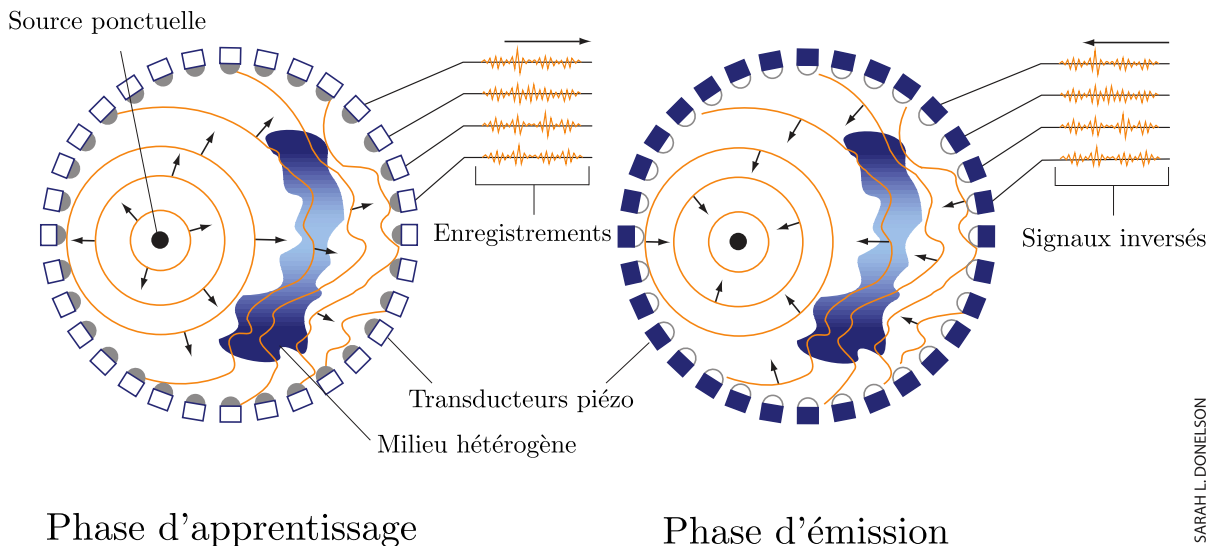


FIGURE 2.13 – Représentation schématique de l'expérience de la cavité à retournement temporel. À gauche : Phase d'apprentissage. Une impulsion est émise en \mathbf{r}_0 puis se propage jusqu'à atteindre les parois de la cavité à retournement temporel où on réalise l'acquisition du champ et de sa dérivée normale. À droite : Phase d'émission. Les signaux sont retournés temporellement puis réémis. Crédits [50].

sée est alors convertie en onde divergente qui se repropagera comme si elle avait été émise depuis r_0 . L'aspect de la tache focale découle donc de l'interférence entre l'onde convergente et l'onde divergente à l'instant de la focalisation. Initialement introduite pour l'acoustique, l'idée du retournement temporel a pu, depuis, être transposée au contexte des ondes électromagnétiques [53, 54]. En optique, en revanche, les variations temporelles du champ sont généralement trop rapides pour permettre leur acquisition.

Compression temporelle

Intéressons-nous à la réception. L'enregistrement réalisé au niveau de chaque élément piézoélectrique peut-être particulièrement long. Il s'agit en effet d'un signal ayant été multiplement diffusé au sein du milieu hétérogène pouvant ainsi s'être propagé selon des séquences de diffusion extrêmement longues. On appelle ce signal la "Coda". Il relève alors de la responsabilité de l'expérimentateur de réaliser le fenêtrage temporel afin de conserver les signaux les plus pertinents. Cette étape constitue souvent une première source d'erreur qui peut s'avérer préjudiciable pour la refocalisation. Si tout se passe bien, la refocalisation doit reproduire l'impulsion originale. On obtient alors un signal dont l'extension temporelle est infime en comparaison du signal émis aux bords de la cavité. On parle du phénomène de compression temporelle. Cela permet d'envisager l'utilisation du retournement temporel comme un outil d'amplification particulièrement efficace.

2.2.2.2 Expérience réelle

La cavité parfaite est, en pratique, difficilement réalisable. Il faudrait pour cela disposer d'un grand nombre de transducteurs ainsi que de l'électronique multivoies *ad hoc*. En pratique, on se contente d'une portion de cavité que l'on obtient en utilisant une barrette multi-éléments communément appelée "miroir à retournement temporel". Une alternative a été proposée en créant une cavité chaotique réfléchissante pour les ondes élastiques [55]. On peut alors utiliser un unique récepteur-émetteur qui du fait du caractère ergodique de la cavité, générera une infinité de sources images permettant ainsi d'obtenir une pseudo cavité à retournement temporel. Mais revenons aux ultrasons et à nos miroirs réalistes. Du fait de leur faible extension spatiale, ceux-ci bénéficient d'une ouverture angulaire limitée. On introduit ainsi une seconde source d'erreur puisque les conditions aux limites ne sont pas parfaitement respectées. Il s'ensuit un élargissement de la tache focale constatée. On peut d'ailleurs prévoir la focalisation optimale pour une ouverture \mathcal{O} en utilisant la formule d'Abbe [56] :

$$\delta = \frac{\lambda}{2\mathcal{O}} \quad (2.45)$$

Une autre façon de présenter les choses consiste à dire qu'on ne peut plus exploiter autant de degrés de liberté spatiaux que précédemment.

Conversion des degrés de liberté

Autant ce constat eut été préjudiciable pour les techniques reposant essentiellement sur le contrôle des degrés de liberté spatiaux, autant la technique du retournement temporel bénéficie d'une grande robustesse grâce à sa capacité à exploiter les degrés de liberté temporels. Ceci est essentiellement dû au fait qu'il s'agit d'une technologie large bande. En effet, on souhaite *a priori* focaliser aussi efficacement que possible dans le temps afin de concentrer au mieux l'énergie. Ceci suppose que le signal émis pendant la phase d'apprentissage consiste le plus souvent en une impulsion aussi brève que possible. Par conséquent, cette dernière sera extrêmement riche du point de vue

fréquentiel. Or, les milieux multiplement diffusant se distinguent par leur capacité à supporter un grand nombre de fréquences décorréelées les unes des autres. La focalisation consiste ainsi à faire coïncider le maximum de chacun des modes associés à ces fréquences au niveau de la cible. Le principe de sommation des degrés de liberté est schématisé sur la figure 2.14. Le champ associé à chaque grain d'information temporel est représenté par un vecteur dont l'orientation traduit la phase. Les différents vecteurs

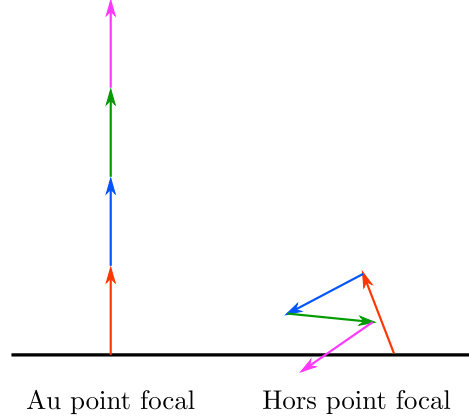


FIGURE 2.14 – Représentation schématique de la superposition du champ pour $N_\omega = 4$ degrés de liberté ; au point focal et en dehors du point focal.

se somment de manière aléatoire partout sauf au point focal où ils s'alignent et interfèrent constructivement. Le nombre de grains d'information temporels est déterminé par le rapport entre la largeur spectrale de l'impulsion et la longueur de corrélation fréquentielle du milieu diffusant. On a donc

$$N_\omega = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \quad (2.46)$$

dans le cas où la taille du grain d'information temporel est constant sur la bande passante et

$$N_\omega = \int_{\Delta\omega} \frac{d\omega}{\delta\omega(\omega)} \quad (2.47)$$

dans le cas général. Notons tout de même que plus l'impulsion sera brève plus l'opération sera gourmande en terme d'échantillonnage temporel ce qui a pour conséquence d'introduire un troisième biais expérimental. Dans l'exemple de la figure 2.14, on a choisi arbitrairement $N_\omega = 4$. Cette représentation est un peu trompeuse puisque, les modes associée à ces degrés de liberté n'ayant *a priori* pas le même facteur de qualité, il n'y a aucune raison pour qu'ils contribuent de la même manière à la construction du point focal. Cependant, les travaux de Tanter [57], Aubry [58] puis Montaldo [59] ont permis de montrer qu'un filtrage adéquat permettait de compenser ces disparités en amplifiant les contributions les plus faibles. Après filtrage on a donc (i) au niveau du point focal, les degrés de liberté temporels qui contribuent équitablement à la focalisation donnant ainsi une amplitude de champ proportionnelle à N_ω et (ii) en dehors

du point focal, une statistique du champ similaire à celle d'une marche aléatoire 2D et donc une amplitude proportionnelle à $\sqrt{N_\omega}$. Le rapport signal à bruit est alors proportionnel à $\sqrt{N_\omega}$. On comprend ainsi mieux en quoi la focalisation bénéficie du nombre de degrés de liberté. De ce point de vue, le désordre se transforme en allié précieux.

Mais ce n'est pas tout ! La diffusion multiple peut également contrebalancer les limitations en terme d'ouverture numérique en convertissant les degrés de liberté temporels en degrés de liberté spatiaux. Pour illustrer ce point, prenons l'exemple du retournement temporel monovoie. Dans cette configuration, on ne dispose que d'un unique élément piézoélectrique pour réaliser l'étape de ré-émission. L'ouverture numérique du dispositif est donc, *a priori*, extrêmement médiocre. Ajoutons maintenant un milieu diffusant comme sur la figure 2.15. Chaque évènement de diffusion engendre une isotropisation du champ. Plus le champ incohérent progresse dans l'échantillon, plus la distribution des vecteurs d'ondes disponibles s'élargit. Ainsi, si l'épaisseur e du milieu

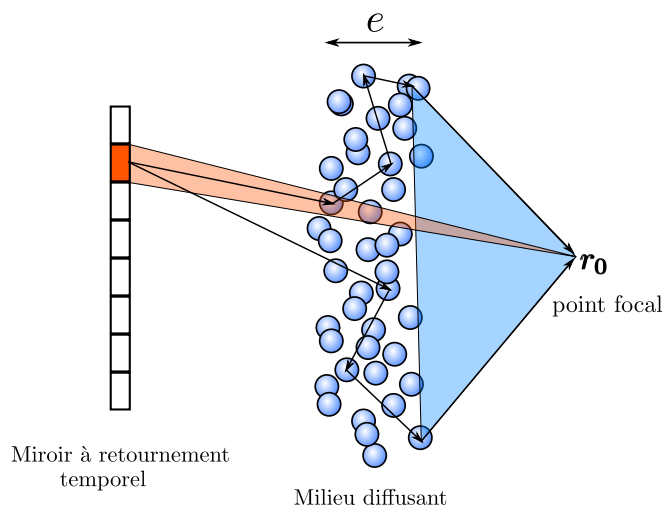


FIGURE 2.15 – On utilise un unique élément d'un miroir à retournement temporel pour réaliser la focalisation derrière un milieu diffusant. L'ouverture numérique disponible pour fabriquer le point focal est indiquée en (i) bleu en présence du milieu diffusant et (ii) rouge en l'absence de milieu diffusant.

diffusant devient suffisante pour que le champ incohérent oublie sa direction d'origine, c'est-à-dire si $e > \ell^*$, l'ouverture du miroir n'est plus discriminante. En particulier, la résolution de la tache focale devient :

$$\delta = \frac{\lambda}{2\mathcal{O}'} \quad (2.48)$$

où \mathcal{O}' désigne l'ouverture définie par le milieu diffusant⁴. L'effet est naturellement encore plus prononcé lorsque la cible se situe à l'intérieur du milieu diffusant. Si la

4. Si la source utilisée pour la phase d'apprentissage a une ouverture angulaire limitée, alors elle est susceptible d'intervenir également.

cible est située à plus d'un libre parcours moyen de transport des bords, on peut même récupérer une tache focale similaire à celle que l'on aurait obtenu avec une cavité parfaite i.e. présentant une extension spatiale de l'ordre de la demi-longueur d'onde. Ce résultat a été démontré numériquement en optique [60] ainsi qu'en acoustique [61]. Notons que le même type de conversion peut être observé avec un support ergodique comme, par exemple, le wafer de silicium utilisé dans la référence [55].

En raison de leur faculté à diffuser de façon isotrope à basse fréquence, les bulles laissent présager d'excellentes performances en termes de conversion des degrés de libertés temporels en degrés de liberté spatiaux et, *a fortiori*, de bonnes performances pour la focalisation.

Propriétés de la tache focale, résolution et super-résolution

Et si faire aussi bien que l'expérience de la cavité à retournement temporel n'était pas une fin en soi ? Dans ce paragraphe, nous déterminerons dans un premier temps les propriétés de la tache focale dans l'expérience de pensée de la cavité. Nous présenterons ensuite deux techniques permettant de redéfinir complètement les limites de performance en terme de résolution.

Reprenons notre cavité idéale représentée en figure 2.16. Pour étudier les propriétés de la focalisation, il convient d'adopter une description monochromatique. La source, placée en \mathbf{r}_0 émet donc le signal $s(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e^{-i\omega t}$. Le champ enregistré au transducteur placé en \mathbf{r}' vaut donc $p(\mathbf{r}') = A_0 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)$ où A_0 nous permet d'assurer l'homogénéité. On souhaite déterminer le champ reçu en \mathbf{r}_1 , un point quelconque de la cavité, au moment de la focalisation.

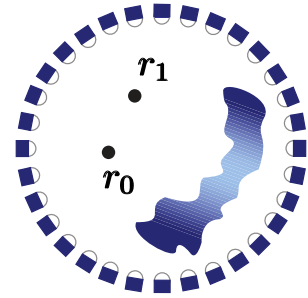


FIGURE 2.16 – Cavité à retournement temporel focalisée en \mathbf{r}_0 .

Utilisons le théorème de Helmholtz-Kirchhoff appliqué au point \mathbf{r}_1 :

$$p_{\text{RT}}(\mathbf{r}_1) = \iint_S \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \mathbf{grad} p_{\text{RT}}(\mathbf{r}') - p_{\text{RT}}(\mathbf{r}') \mathbf{grad} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \right] \mathbf{n} dS \quad (2.49)$$

où p_{RT} dénote le retourné temporel du champ et s'obtient simplement en conjuguant le signal reçu pendant la phase d'enregistrement. En remplaçant, on trouve donc

$$p_{\text{RT}}(\mathbf{r}_1) = A_0^* \iint_S \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \mathbf{grad} G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) - G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \mathbf{grad} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \right] \mathbf{n} dS \quad (2.50)$$

Appliquons l'identité $\text{div}[A \mathbf{grad} B - B \mathbf{grad} A] = A \Delta B - B \Delta A$ puis le théorème de Green-Ostrogradski pour obtenir

$$p_{\text{RT}}(\mathbf{r}_1) = A_0^* \iiint_V \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \Delta G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) - G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \right] dV \quad (2.51)$$

Par définition, la fonction de Green est solution de l'équation de Green

$$\Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) = -k^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (2.52)$$

En remplaçant $\Delta G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)$ et $\Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1)$, il vient

$$\begin{aligned} p_{\text{RT}}(\mathbf{r}_1) &= -A_0^* \iiint_V \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) - G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \right] dV \\ &= -A_0^* [G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) - G^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)] \\ &= -2i A_0^* \text{Im} [G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

La dernière étape suppose que le milieu soit réciproque ce qui est toujours le cas en l'absence d'écoulement. Le résultat final est particulièrement parlant. La tache focale constitue un estimateur de la fonction de Green. En particulier, au point focal on dispose d'une mesure de la densité locale d'état (LDOS) du système. Pour fixer la résolution optimale, on se place dans le cas de figure particulier pour lequel le volume V ne contient aucune hétérogénéité. La fonction de Green peut alors être remplacée par la fonction de Green homogène

$$G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\|}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\|} \quad (2.54)$$

et la pression ressentie en \mathbf{r}_1 après opération de retournement temporel vaut

$$p_{\text{RT}}(\mathbf{r}_1) = \frac{k_0 A_0^*}{2\pi i} \text{sinc}(k_0 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\|). \quad (2.55)$$

Cette solution ne diverge pas en \mathbf{r}_0 . Le retournement temporel n'a donc pas permis de reconstituer la solution de la phase aller puisque l'impulsion $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ n'est pas reconstruite. On définit l'extension de la tache focale comme la position de la première annulation du champ. Ici, on trouve que l'extension vaut $\lambda/2$. Mais cette mesure n'est pas toujours la plus aisée. Aussi, dans la suite on s'intéressera plutôt à la largeur à mi-hauteur qui est du même ordre de grandeur⁵. Notons également que la fonction sinus cardinal possède des lobes secondaires (voir figure 2.17) ce qui suppose que l'énergie ne sera pas exclusivement concentrée au point focal. On peut interpréter cette dépendance spatiale comme une manifestation de l'existence de l'onde divergente. Il s'agit en fait du résultat de l'interférence entre les ondes convergente et divergente. Pour restaurer les caractéristiques de l'onde convergente et ainsi améliorer la focalisation, De Rosny [55] a proposé une solution consistant à absorber l'onde divergente au moment précis de sa formation. La méthode, popularisée sous le nom de "puits acoustique", a ainsi permis de fabriquer un point focal affichant une largeur à mi-hauteur de $\lambda/14$. La limite classiquement admise est battue et on parle alors de super-résolution.

Un autre moyen d'améliorer la résolution consiste à focaliser à l'intérieur d'un milieu désordonné constitué de diffuseurs très proches les uns des autres. Lorsque la

5. La largeur à mi-hauteur vaut ici $1.89\lambda/\pi \simeq 0.6\lambda$.

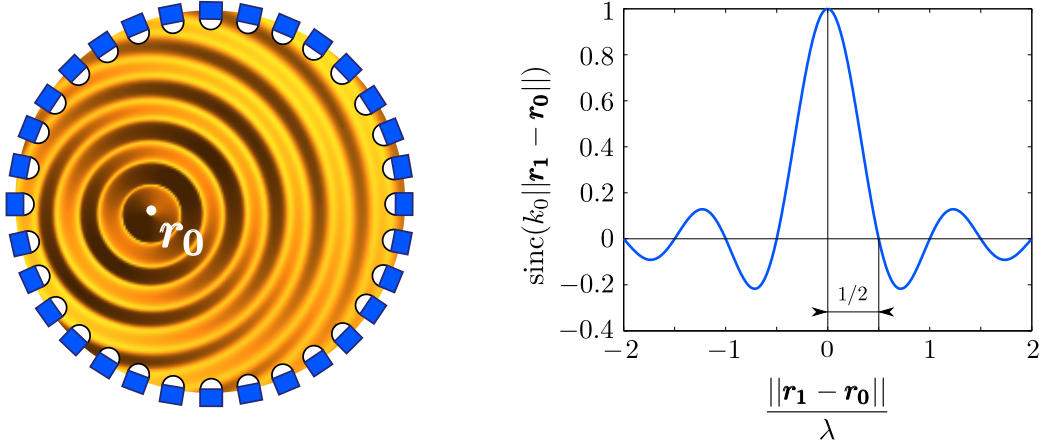


FIGURE 2.17 – À Gauche : répartition du champ dans la cavité homogène après l’opération de retournement temporel. À droite : Coupe du champ tracé en fonction de la variable d’espace normalisée $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\|/\lambda$. La largeur à mi-hauteur vaut approximativement $1.89/\pi$.

distance caractéristique entre diffuseurs devient inférieure à la longueur d’onde, l’expérimentateur observe une résolution améliorée. Cette technique, proposée par Lerosey pour les micro-ondes [62] peut être interprétée à l’aide de l’approche des milieux effectifs introduite en début de chapitre. En effet, on a vu qu’une onde interagissant avec un milieu structuré à des échelles sub-longueur d’onde se comporte comme si elle visitait un milieu homogène. Les paramètres effectifs de ce milieu découlent alors directement du pouvoir diffusant de chacun des diffuseurs ainsi que de leur concentration. En particulier, la longueur d’onde effective peut sensiblement différer de celle qui règne en espace libre et l’utilisateur peut choisir les paramètres qui lui offrent la résolution souhaitée. Les travaux récemment menés par Lemoult *et al* en micro-ondes [63, 64] et en acoustique [65] ont montré que l’utilisation de diffuseurs résonants permet d’avoir accès à des longueurs d’ondes effectives extrêmement faibles et donc à une résolution accrue.

2.2.2.3 Retournement temporel numérique dans un liquide bulleux

Les milieux bulleux constituent un support idéal de la focalisation par retournement temporel pour les raisons suivantes : (i) Les bulles sont des diffuseurs isotropes et permettent donc de conférer une grande variété de fréquences spatiales à l’onde incohérente. (ii) Les bulles sont des diffuseurs basse fréquence et peuvent donc être arrangés en nuages de dimension inférieure à la longueur d’onde. (iii) Les bulles sont d’excellents résonateurs, ce qui permet d’imaginer des variations importantes des paramètres effectifs. (iv) Enfin nous verrons dans la suite que l’on peut ajouter à cela un quatrième argument ; celui du contraste acoustique naturel qui règne entre les deux phases qui composent la bulle. Comme on l’a vu avec le modèle de Wood, ce contraste permet d’envisager avoir accès à de larges gammes de valeurs pour les paramètres

effectifs à basse fréquence, et ce sans même impliquer le caractère résonant.

Milieu sans pertes

Dans ce paragraphe on s'intéresse à un milieu bulleux conservatif ($\Gamma = k_0 a \omega$), peu concentré ($\phi = 10^{-4}$) et monodisperse ($a = 50 \mu\text{m}$). La fréquence de résonance des bulles vaut $\omega_M/(2\pi) = 59 \text{ kHz}$. Les deux étapes de l'opération de retournement temporel sont réalisées numériquement via le code décrit au chapitre I. Les bulles sont supposées fixes pendant toute la durée de l'opération. Durant la phase d'apprentissage, une source de pression, placée en \mathbf{r}_0 et caractérisée par son spectre $p(\omega)$, émet une impulsion du type $s(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)s(t)$ avec $s(t) = \int p(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$. Après propagation de cette impulsion, le $i^{\text{ème}}$ élément du miroir à retournement temporel (MRT), positionné en \mathbf{r}_i , enregistre le signal

$$E_i(t) = \int p(\omega)G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_0)e^{-i\omega t}d\omega \quad (2.56)$$

Sur la figure 2.18, on montre le résultat de la phase d'apprentissage réalisée avec une impulsion de $150 \mu\text{s}$ et de fréquence centrale 55 kHz émise depuis le centre d'un nuage cubique de côté $L = 2 \text{ cm}$. Le signal enregistré au niveau du récepteur est considéré

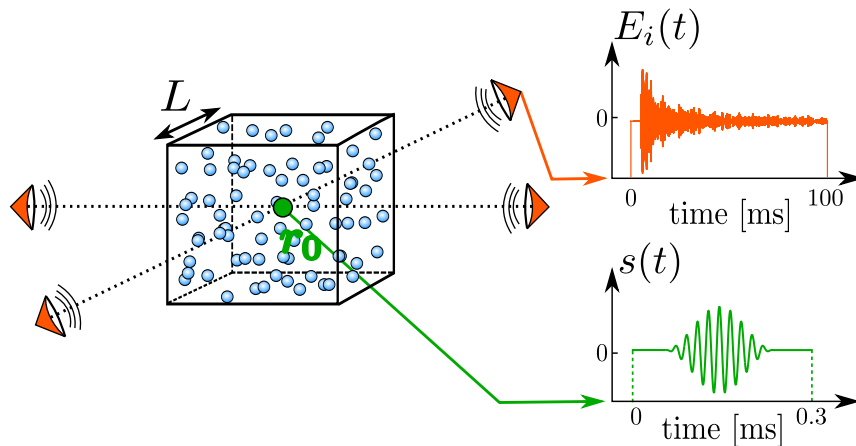


FIGURE 2.18 – L'échantillon d'intérêt est un nuage de bulles monodisperses ($a = 50 \mu\text{m}$) de côté $L = 2 \text{ cm}$ et de fraction volumique $\phi = 10^{-4}$.

ablement plus long que l'impulsion originale. Il est composé d'un grand nombre de répliques du signal d'origine chacune d'entre elle correspondant à une séquence de diffusion possible dans le nuage. Cette coda est une manifestation de la richesse de l'échantillon du point de vue de la diffusion multiple. Par ailleurs, l'amplitude décroît avec le temps. Ceci vient du fait que les échos qui arrivent le plus tard correspondent aux séquences de diffusion les plus longues et ont donc été les plus atténuées. Notons que l'analyse de la coda permet de retrouver le nombre de degrés de liberté temporels disponibles. On prend pour cela la durée totale ΔT de la coda que l'on divise par la durée τ de l'impulsion originale [66, 67]. Ici, on obtient $N_\omega = 667$, ce qui laisse

présager d'un RSB de 25 ce qui est très encourageant.

Passons à l'étape de ré-émission. Du point de vue du calcul, on conjugue le signal enregistré puis on le repropage jusqu'au point \mathbf{r} où l'on mesure

$$p_{\text{RT}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \int p(\omega) * G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_0) * G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.57)$$

La figure 2.19 représente un Bscan (tracé de l'évolution temporelle du champ mesuré selon une ligne qui passe par \mathbf{r}_0) obtenu après que l'opération de retournement temporel ait été effectuée à l'aide d'un MRT de 4 éléments. À titre de comparaison, on effectue le calcul dans l'eau pure (gauche) et sur notre milieu bulleux (droite). La présence des bulles améliore très nettement la focalisation. Le résultat est d'autant

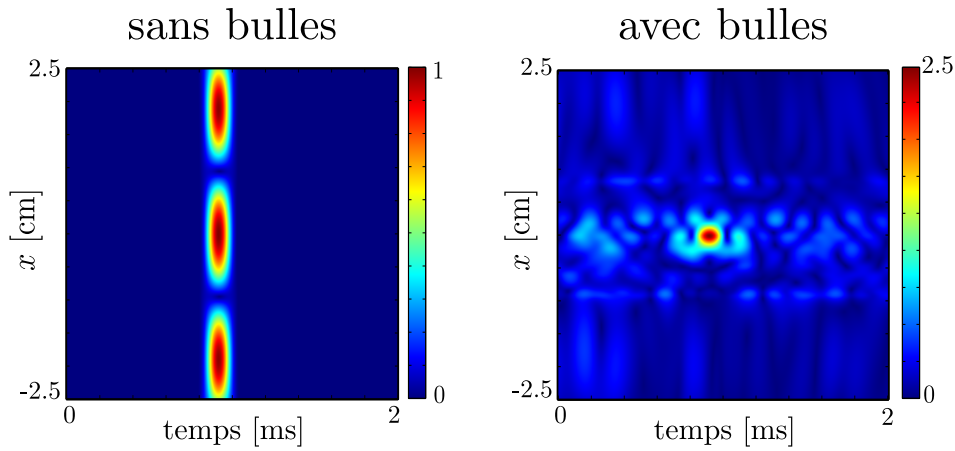


FIGURE 2.19 – Bscan obtenu en prenant une coupe du nuage passant par \mathbf{r}_0 . À Gauche : focalisation obtenue en l'absence de bulle. À droite : focalisation obtenue avec le milieu bulleux.

plus éloquent que le milieu est ici extrêmement dilué : la distance caractéristique entre deux voisines est de l'ordre de 30 rayons de bulle ! La largeur à mi-hauteur de la tache focale vaut $w = 3.5$ mm, c'est-à-dire $\lambda/8$ en considérant la longueur d'onde centrale du paquet d'ondes dans l'eau. Par ailleurs, les lobes secondaires ont été compensés.

Onde incohérente et théorie effective

Cherchons à interpréter l'extension spatiale constatée pour la tache focale. On trace pour cela la courbe de dispersion simulée à partir de notre échantillon à laquelle on superpose la prédiction analytique correspondant au modèle de Foldy. Les résultats numériques ont été obtenus après moyennage configurationnel sur 10 nuages statistiquement équivalents. À titre de comparaison, on ajoute la dispersion obtenue pour un échantillon sans bulle. Les résultats sont rassemblés sur la figure 2.20. Un premier constat est que pour de telles concentrations, le modèle de Foldy s'accorde avec la dispersion numérique. De plus, en se reportant au tracé orange, on observe qu'à 55 kHz

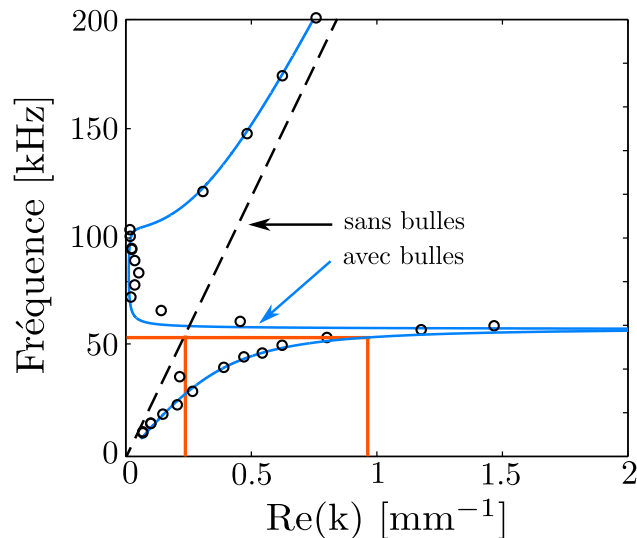


FIGURE 2.20 – Courbes de dispersion numériques (cercles) et théorique (trait bleu) obtenues pour un milieu bulleux monodisperse composé de bulles de rayon $a = 50 \mu\text{m}$ et de fraction volumique $\phi = 10^{-4}$ ainsi que pour de l'eau pure (trait pointillé). À 55 kHz (trait rouge), on mesure $\text{Re}(k) = 0.95 \text{mm}^{-1}$ dans le milieu bulleux et $\text{Re}(k) = 0.25 \text{mm}^{-1}$ dans l'eau.

la partie réelle du vecteur d'onde est presque 4 fois plus grande dans le milieu bulleux que dans l'eau pure (respectivement 0.95mm^{-1} et 0.25mm^{-1}). Par conséquent, la longueur d'onde effective qui règne dans le milieu bulleux est près de 4 fois inférieure à celle de l'espace libre. On retrouve donc le même ratio que pour l'extension des taches focales obtenues en figure 2.19. On peut toutefois se poser la question de la légitimité d'un modèle de milieu effectif pour préjuger d'un phénomène observé sur une unique réalisation du désordre. En réalité, le retournement temporel est un processus très particulier en ceci qu'il implique de larges bandes passantes et qu'il superpose ainsi un grand nombre de modes décorrélés. Ceci est d'autant plus vrai que l'on se rapproche de la résonance de Minnaert. En effet, on assiste alors à une augmentation de la densité de modes et donc à une diminution de la taille du grain d'information temporel. En superposant ainsi un grand nombre de modes indépendants, le retournement temporel agit comme un processus auto-moyennant dont les propriétés deviennent extrêmement robustes d'une réalisation du désordre à l'autre [52].

Rôle de la résonance

Pour déterminer le rôle de la résonance dans la focalisation, nous entreprenons désormais de réaliser l'opération de retournement temporel en utilisant deux impulsions associées à des bandes passantes disjointes. La première, BP1 [56-59] kHz, encadre la région de la résonance. La seconde, notée BP2 [10-45] kHz, est choisie de manière à n'exploiter que les basses fréquences. Sur la figure 2.21(a), on reporte la courbe de dispersion analytique obtenue précédemment et normalisée, pour les fréquences

temporelles par la fréquence de Minnaert ω_M et pour les fréquences spatiales par la fréquence spatiale dans l'eau pure k_0 . Sur l'axe des abscisses, on lit ainsi directement le rapport entre la longueur d'onde dans l'eau pure et celle dans le milieu bulleux. On

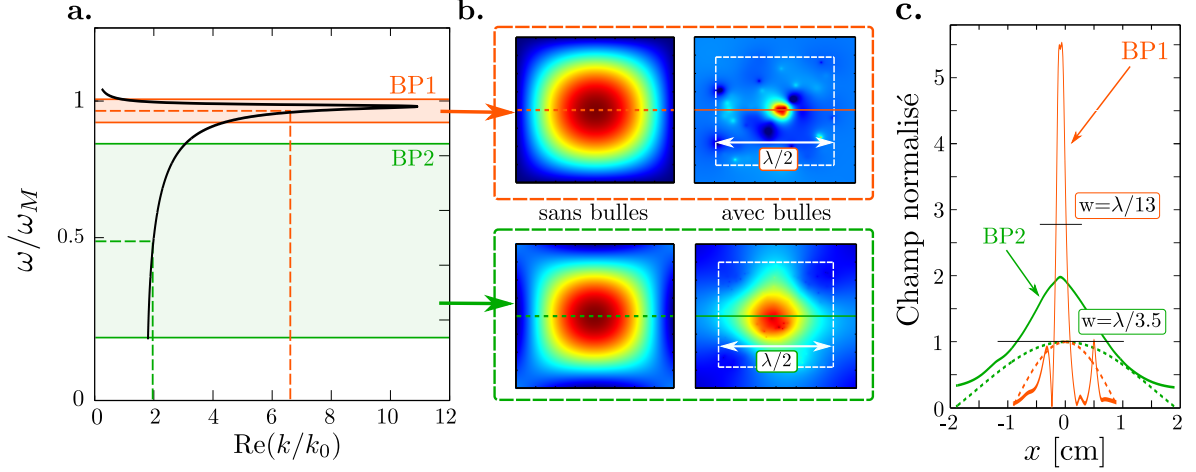


FIGURE 2.21 – (a) Même relation de dispersion que précédemment renormalisée par la pulsation de Minnaert ω_M en ordonnée et par le nombre d'onde dans l'eau pure k_0 en abscisse. On fait apparaître deux bandes passantes de travail : BP1 (56-59 kHz, en orange) avec un rapport $k/k_0 \simeq 6$ et BP2 (10-45 kHz, en vert) pour laquelle on mesure un rapport $k/k_0 \simeq 2$. (b) Cartes de champ selon une section horizontale passant par \mathbf{r}_0 obtenues après retournement temporel exploitant BP1 (haut) et BP2 (bas) en l'absence (gauche) et en présence de bulles (droite). Les nuages simulés sont de côté $\lambda/2$ ($\lambda = 2.6$ cm pour BP1 centrée en 57.5 kHz ; et $\lambda = 5.5$ cm pour BP2, centrée en 27.5 kHz) et de fraction volumique d'air $\phi = 10^{-4}$. (c) Profils de pression mesurés le long des lignes tracées en (b) et normalisés par le maximum du champ obtenu en l'absence de bulles. On mesure les largeurs à mi-hauteur suivantes : $w = 2$ mm pour BP1 et $w = 1.5$ cm pour BP2.

indique, en couleur, les bandes passantes BP1 (orange) et BP2 (vert) correspondant à chacune des deux impulsions. Si l'on s'en réfère à la fréquence centrale de chaque bande passante (pointillés colorés), le modèle de Foldy prévoit des vecteurs d'onde effectifs respectivement 6 et 2 fois plus grands que ceux obtenus dans l'eau pure pour BP1 et BP2. Même à basse fréquence, notre liquide bulleux, pourtant très peu concentré, bénéficie de propriétés sensiblement différentes de celles de l'eau pure. On réalise alors l'opération de retournement temporel en utilisant des nuages de taille $\lambda/2$, λ se référant à la longueur d'onde évaluée pour la fréquence centrale pour chaque impulsion. De cette façon, on s'attend à ce que la focalisation idéale obtenue dans l'eau pure aboutisse à des extensions comparables aux dimensions des nuages. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 2.21(b) qui recense les taches focales obtenues pour les deux bandes passantes en l'absence (gauche) et en présence (droite) des bulles. Les dimensions des nuages sont symbolisées par un carré blanc sur les cartes de champ. La présence des bulles améliore le résultat dans les deux configurations. Enfin, en traçant

l'évolution du champ selon une ligne passant par le point focal (voir figure 2.21(c)), on peut mesurer les largeurs à mi-hauteur et en conclure que notre focalisation bat la limite de diffraction d'un facteur 6.5 pour BP2 et d'un facteur 1.8 pour BP1. Ainsi, le caractère résonant, bien que bénéfique à la focalisation, ne semble pas absolument essentiel pour la super-résolution. Remarquons, qu'ici encore, les résultats s'accordent favorablement avec les prédictions analytiques.

Rôle de la concentration

La super-résolution observée à basse fréquence montre que la résonance n'est pas la seule à modifier les propriétés du milieu bulleux. D'autre part, l'examen de la courbe de dispersion analytique met en évidence une valeur asymptotique pour $\text{Re}(k)$ bien supérieure à k_0 . Cela provient de la très grande compressibilité des bulles qui, à basse fréquence, se répercute, comme prévu par la loi de Wood, sur la vitesse de l'onde dans le milieu effectif et *a fortiori* sur le vecteur d'onde du milieu effectif :

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k_0} = \frac{v_0}{v_{\text{eff}}} = \sqrt{\frac{\chi_{\text{air}}}{\chi_{\text{eau}}} \phi(1 - \phi)} \quad (2.58)$$

Pour les faibles concentrations on a $\phi(1 - \phi) \simeq \phi$. On s'attend donc à ce que les performances bénéficient d'une augmentation de la concentration en air. Pour s'en convaincre, on reproduit la même procédure que précédemment pour des fractions volumiques allant de 10^{-7} à 2.5×10^{-2} . On s'intéresse en particulier au paramètre $2w/\lambda$ qui mesure le rapport entre la largeur à mi-hauteur de la tache focale et la limite de diffraction $\lambda/2$. Les résultats reproduits sur la figure 2.22 montrent que, pour les deux bandes passantes, la tache focale s'affine à mesure que l'on concentre. On constate,

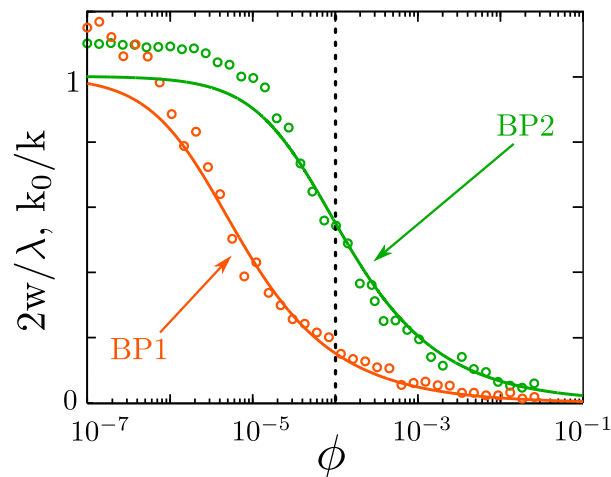


FIGURE 2.22 – Tracé de la largeur à mi-hauteur réduite $2w/\lambda$ obtenue numériquement (cercles) pour différentes fractions volumiques d'air ϕ . Le résultat est comparé au rapport k_0/k prévu par le modèle de Foldy (traits pleins). La ligne verticale en pointillés indique la fraction volumique $\phi = 10^{-4}$ correspondant aux essais précédents.

encore une fois, que la prédiction analytique fournit une estimation satisfaisante de la qualité de la focalisation, et ce sur une large gamme de concentrations. Notons toutefois que l'accord se dégrade pour les faibles valeurs de ϕ . Ceci est simplement lié au fait que nous ne disposons pas d'une cavité idéale. L'opération a en effet été réalisée avec un miroir à retournement temporel composé de 4 éléments. Dès que la concentration devient suffisante (environ 10^{-6} pour BP1 et 10^{-5} pour BP2) la diffusion multiple prend le relais et compense l'ouverture numérique limitée en convertissant les degrés de liberté temporels en degrés de liberté spatiaux.

Retenons ici que, bien que la résonance de Minnaert permette d'obtenir d'excellents résultats pour les faibles fractions volumiques, les liquides bulleux se distinguent par leur capacité à atteindre des valeurs extrêmement faibles pour le rapport k_0/k (ou des valeurs extrêmement faibles pour la vitesse), et ce, indépendamment du caractère résonant.

Influence des pertes

Les résultats précédents, bien que particulièrement encourageants, se limitent au champ de l'investigation numérique. En pratique, les bulles ne sont pas des objets conservatifs puisqu'elles dissipent l'énergie incidente selon des mécanismes thermiques et visqueux. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au contexte plus réaliste pour lequel le gaz se caractérise par son coefficient adiabatique $\gamma = 1.1$ ⁶ et l'eau, par sa viscosité $\eta = 10^{-3}$ Pa.s. Notons que, pour de telles valeurs, le coefficient d'amortissement $\delta = \Gamma/\omega$ d'une bulle à résonance est de l'ordre de 0.04 alors qu'il était de 0.012 dans les paragraphes précédents. On reproduit le processus de focalisation pour les bandes passantes BP1 et BP2, mais cette-fois ci pour un nuage de concentration $\phi = 10^{-2}$. Pour cette concentration, le processus de retournement temporel peut être réalisé avec un miroir à retournement temporel mono-élément. Les profils de champ après focalisation avec et sans pertes sont reproduits sur la figure 2.23. En l'absence de dissipation on parvient à une focalisation extrêmement convaincante de $\lambda/100$ pour BP1 et $\lambda/25$ pour BP2. En revanche, lorsque l'on tient compte de la dissipation, la situation change drastiquement. La bande passante BP1 ne permet plus de focaliser tandis que pour BP2, la tache focale s'élargit mais demeure super-résolue affichant une extension spatiale de $\lambda/14$. L'influence de la dissipation semble devenir d'autant plus critique que l'on monte en fréquence. Pour s'en convaincre, on enregistre le spectre du nuage en \mathbf{r}_0 dans les deux cas. Le résultat illustré par la figure 2.24 est assez parlant. En l'absence de dissipation, le spectre est d'autant plus riche que l'on s'approche de la résonance. De manière équivalente, la taille du grain d'information temporel N_ω décroît. On peut illustrer ce phénomène en terme de facteur de qualité. Au voisinage de la résonance, la courbe de dispersion devient de plus en plus horizontale. Les vitesses de groupes associées sont donc particulièrement faibles ce qui implique que les temps

6. Le coefficient adiabatique est de l'ordre de 1.4 pour l'air pur et de 1.1 pour l'air saturé en perfluorohexane. Comme le montre l'équation (1.35), le coefficient de pertes d'origine thermique fait intervenir un terme en $(\gamma - 1)$ justifiant ainsi l'emploi du perfluorohexane qui, par ailleurs, permet également de stabiliser les bulles.

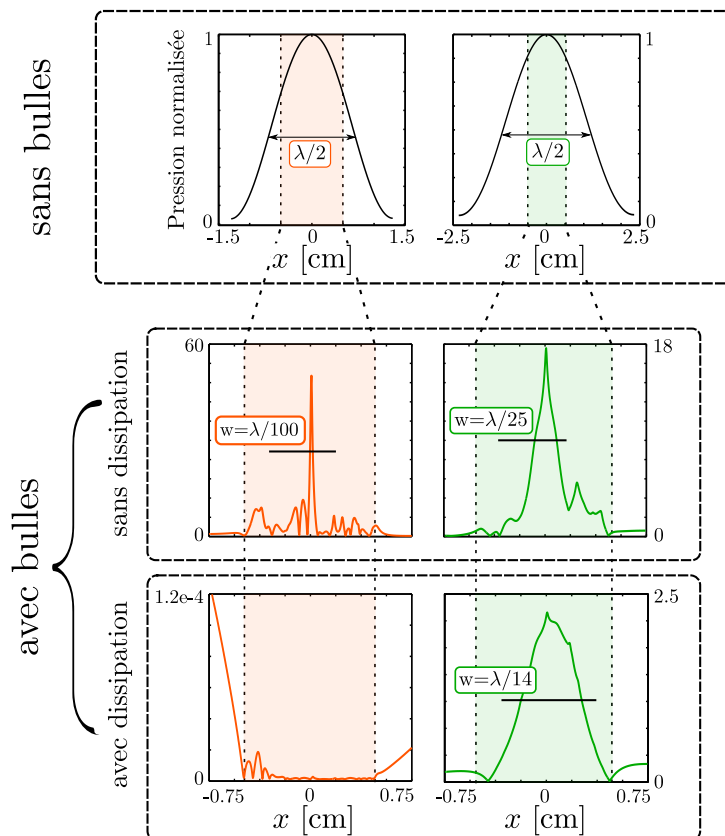


FIGURE 2.23 – Taches focales obtenues pour BP1 (gauche) et BP2 (droite) pour les trois configurations suivantes : Dans une cavité sans bulle (haut), dans un nuage de bulles de concentration $\phi = 10^{-2}$ sans tenir compte de la dissipation (milieu) dans le même nuage en tenant compte de la dissipation (bas). Le nuage fait 1 cm de côté. Les champs ont été normalisés par le maximum mesuré en l’absence de bulles.

de vie des modes augmentent significativement. Par conséquent, le facteur de qualité croit et les modes correspondants sont de plus en plus piqués. Ajoutons désormais l’ingrédient de la dissipation. Ces modes hautes fréquences subissent d’autant plus l’effet de la dissipation qu’ils éprouvent des difficultés à fuir le nuage. En particulier les modes qui servaient de support à la bande BP1 ne se couplent plus à l’extérieur et ne peuvent, réciproquement, plus être excités depuis le champ lointain. À basse fréquence en revanche, le spectre semble mieux conservé et certains modes sont toujours exploitables, expliquant ainsi la robustesse de la focalisation pour BP2. Des exemples de modes survivant à la dissipation sont représentés dans la partie supérieure de la figure 2.24. Notons que, même dans le cas des modes les plus résistants, l’élargissement spectral associé à l’introduction des pertes peut susciter des chevauchements et ainsi faire chuter le nombre de degrés de liberté adressables indépendamment.

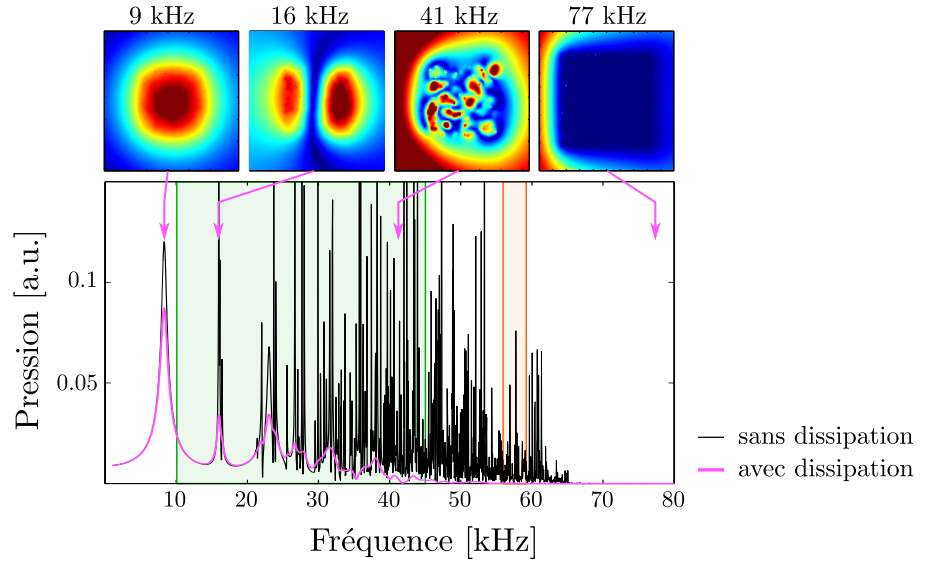


FIGURE 2.24 – Spectre enregistré en r_0 pour un nuage de concentration $\phi = 10^{-2}$ et de côté 1 cm dans les cas où l'on néglige (tracé noir) et où l'on tient compte (tracé rose) de la dissipation. Les encarts de la partie supérieure reproduisent les cartes de champ obtenues pour quatre fréquences différentes dans le cas où l'on tient compte de la dissipation.

Échantillons polydisperses

Dans le but de s'approcher encore de situations concrètes, on se pose dorénavant la question de la robustesse du processus lorsque le nuage n'est plus parfaitement monodisperse. On réalise pour cela un tirage aléatoire des tailles de bulle selon une distribution normale centrée sur $a_0 = 50 \mu\text{m}$:

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_0\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a/a_0-1}{\sigma}\right)^2} \quad (2.59)$$

Aussi, on se place dans les mêmes conditions que pour la figure 2.21, et on s'intéresse à la qualité de la focalisation obtenue après retournement temporel pour un écart type σ variant de 0% à 8% pour les deux bandes passantes BP1 et BP2. Sur la figure 2.25, on observe que, pour BP1, la focalisation reste efficace pour des valeurs de l'écart type n'excédant pas 4%. Au delà de cette valeur, la tache focale se dégrade sérieusement. Une interprétation possible est la faillite de la bande BP1 qui avait été choisie pour l'échantillon monodisperse. En revanche, pour BP2, le processus semble extrêmement robuste et la polydispersité n'entraîne pas de dégradation apparente.

2.2.2.4 Conclusions

Les résultats présentés dans ce qui précède ont fait l'objet d'une publication dans la revue Phys. Rev. B [61].

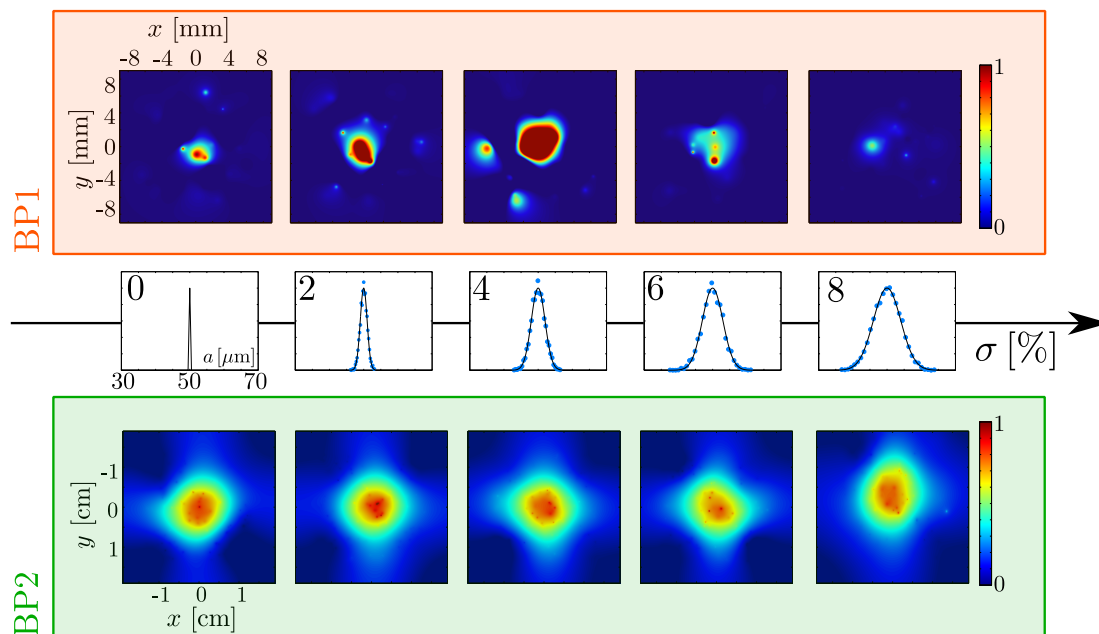


FIGURE 2.25 – Taches focales obtenue en utilisant BP1 (haut) et BP2 (bas) pour des nuages polydisperses suivant une loi normale avec σ allant de 0 à 8%. Les histogrammes correspondant à chaque tirage ainsi que les distributions théoriques sont indiquées. La nuages sont les mêmes que ceux de la figure 2.21

On retiendra en particulier que les milieux bulleux constituent un support de choix pour la technique de focalisation par retournement temporel. Si la résonance de Minnaert permet d'obtenir une résolution exceptionnelle, les modes associés sont en réalité difficilement exploitables en raison de la dissipation. Mais même aux très basses fréquences, pour lesquelles celle-ci est quasi nulle, la fraction volumique d'air constitue déjà un levier donnant accès à des indices de réfraction potentiellement élevés ainsi qu'à une résolution accrue. Rajoutons que les bulles étant, à ces fréquences, des diffuseurs monopolaires, la conversion des degrés de liberté temporels en degrés de liberté spatiaux, qui est pilotée par la diffusion multiple, est très efficace ce qui permet de réaliser la focalisation avec un dispositif minimaliste.

Il faut également souligner que la super-résolution est obtenue pour des valeurs de ϕ aussi faible que 10^{-4} . On peut donc envisager l'incorporation de bulles comme un amplificateur de résolution pour tout fluide comportant des objets d'intérêt.

Enfin, rappelons que la faible contribution du champ incohérent rend le processus extrêmement fidèle aux prédictions fournies par les modèles de milieux effectifs. Cet accord est toutefois probablement transposable à d'autres types de diffuseurs/ondes en raison du caractère auto-moyennant qui incombe au processus du retournement temporel.

2.3 Milieux désordonnés spatialement corrélés

Les deux premières parties de ce chapitre nous ont permis de distinguer les notions d'onde cohérente et incohérente. Un premier bilan, un peu naïf, consiste à retenir que l'onde cohérente est sensible aux paramètres intensifs (concentration et taille des particules) de l'échantillon, tandis que l'onde incohérente est également affectée par les positions des diffuseurs. Dans cette partie, nous présenterons quelques exemples qui contrarient ce constat. En particulier, nous verrons que l'introduction de corrélations statistiques dans la répartition spatiale des diffuseurs peut avoir des conséquences importantes sur le comportement de l'onde cohérente.

2.3.1 Corrélations faibles (Keller)

Modèle de Keller

On a déjà évoqué la faillite de modèles de milieux effectifs, comme celui de Foldy, dans le cas de milieux fortement concentrés. On avait alors invoqué l'approximation consistant à négliger les séquences présentant des boucles de diffusion. Mais il convient également de tenir compte du biais dans la distribution spatiale émanant de la condition de non-interpénétration entre bulles voisines. Celui-ci devient d'ailleurs d'autant plus décisif que le milieu est concentré. La statistique spatiale peut être évaluée à l'aide de la fonction de corrélation de paire $g(r)$ qui représente la probabilité de trouver une bulle à la distance r d'une bulle donnée. Elle doit donc vérifier l'égalité

$$N - 1 = \int_0^\infty n g(r) 4\pi r^2 dr \quad (2.60)$$

N étant le nombre total de bulles.

Une démonstration expérimentale de cet effet a été réalisée sur une forêt de tiges d'acier [68] pour laquelle la fonction de corrélation de paire s'écartait de celle mesurée dans le cas d'un échantillon parfaitement aléatoire. Le libre parcours moyen mesuré sur de tels échantillons correspond alors à celui prévu par le modèle de Keller [32], dont une version généralisée s'écrit

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + \frac{4\pi n f}{1 + 4\pi n f \int_0^\infty \frac{\sin(k_{\text{eff}} r)}{k_{\text{eff}}} e^{ik_0 r} [1 - g(r)] dr}. \quad (2.61)$$

Cette formule possède la particularité de faire apparaître k_{eff} dans l'intégrale du membre de droite. L'extraction des paramètres effectifs sera donc une tâche délicate. Mais on peut tout de même remarquer qu'en développant le dénominateur on fait apparaître une version corrigée du modèle de Foldy qui, à l'ordre 2 en f , correspond à l'expression obtenue par Keller [32] :

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + 4\pi n f - 16\pi^2 n^2 f^2 \int_0^\infty \frac{\sin(k_{\text{eff}} r)}{k_{\text{eff}}} e^{ik_0 r} [1 - g(r)] dr + \mathcal{O}(n^3 f^3). \quad (2.62)$$

Dans la plupart des cas on peut donc approcher la valeur de k_{eff} à l'aide d'une méthode récursive. Lors de la première itération, on supposera généralement que $k_{\text{eff}} = k_0$. Enfin, notons que cette expression suggère que les corrélations spatiales se traduisent

par une correction d'ordre 2 en f et sont donc susceptibles de prévaloir sur l'effet des boucles de diffusion qui interviennent comme une correction d'ordre 3⁷.

Dans le cas des milieux bulleux, on trouve également des développements expérimentaux [69] relatant l'influence des corrélations de position sur les paramètres effectifs.

Comparaison avec les données numériques

On reprend les tirages correspondant à la figure 2.9. Il s'agissait d'échantillons aléatoires sphériques de fraction volumique d'air $\phi = 1\%$. Les bulles, de rayon $a = 100 \mu\text{m}$, ne peuvent pas s'interpénétrer. Après extraction de la distribution des positions pour 100 configurations, on peut obtenir une estimation de la fonction de corrélation de paire $g(r)$ qui est reproduite sur la figure 2.26(a). On constate que la fonction g peut

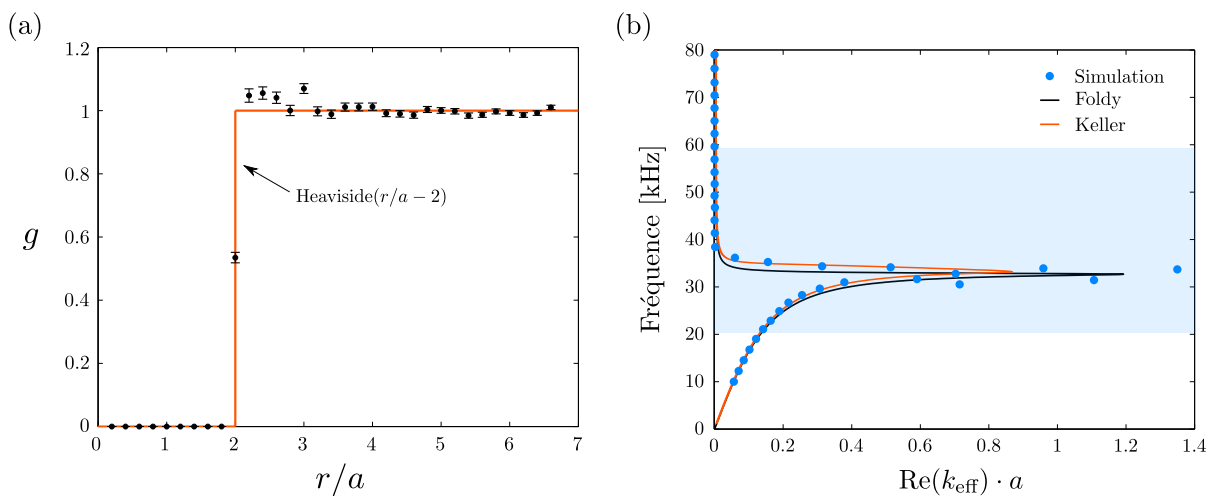


FIGURE 2.26 – (a) Évolution de la fonction de corrélation de paire g avec r/a . L'estimation est obtenue sur un ensemble de 100 tirages indépendants. On a superposé la fonction $\text{Heaviside}(r/a - 2)$. (b) Courbe de dispersion de la figure 2.9 à laquelle on a superposé le modèle de Keller (trait rouge). Paramètres : $a = 100 \mu\text{m}$, $\phi = 1\%$ et $\Gamma = \Gamma^{\text{th}}$.

être approchée par une fonction porte ce qui revient à simplifier la formule (2.61) ("Hole correction") :

$$k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + \frac{4\pi n f}{1 + 4\pi n f \int_0^{2a} \frac{\sin(k_{\text{eff}} r)}{k_{\text{eff}}} e^{ik_0 r} dr}. \quad (2.63)$$

On reprend la courbe 2.9 et on lui superpose le nombre d'onde prévu par (2.63). On obtient ainsi le tracé de la figure 2.26(b). La résonance prévue par le modèle de Keller

7. Attention, pour les échantillons les plus dilués l'exposant de n peut également intervenir or le premier terme du développement de Keller est en $n^2 f^2$ alors que le premier terme de "boucle" est en $n f^3$.

n'est, certes, pas aussi creusée que celle obtenue en simulation. Ceci est peut-être attribuable au fait que l'on ait substitué la fonction $g(r)$ par une porte ou encore aux corrections d'ordre supérieur. Partout ailleurs, le modèle de Keller semble être en meilleur accord avec la simulation que le modèle de Foldy. Pour s'en convaincre on introduit une grandeur qui mesure l'écart relatif entre les résultats de simulation et la prédiction analytique :

$$\epsilon_{\text{re}} = \frac{\text{Re}(k_{\text{simu}}) - \text{Re}(k_{\text{eff}})}{\text{Re}(k_{\text{simu}})} \quad (2.64)$$

où le $\text{Re}(k_{\text{eff}})$ est prévu par les modèles de Foldy ou de Keller. On a reporté sur la figure 2.27 le logarithme de $|\epsilon_{\text{re}}|$ ainsi que de son analogue pour la partie imaginaire ϵ_{im} . Le tracé confirme l'intuition qui émanait de la figure précédente. L'erreur commise

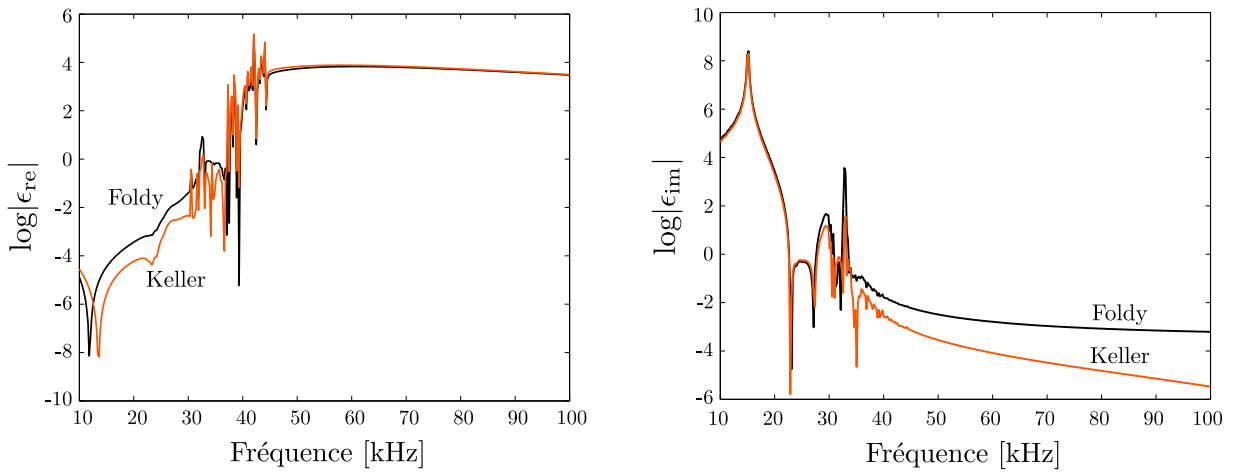


FIGURE 2.27 – À gauche : tracé de $\log|\epsilon_{\text{re}}|$ en fonction de la fréquence pour les modèles de Foldy (en noir) et de Keller (en rouge). À droite : même chose pour ϵ_{im} .

est presque toujours moindre lorsque l'on utilise la prédiction de Keller. Ce résultat milite en faveur d'un rôle substantiel joué par les corrélations de position. Des constats similaires on déjà été rapportés en optique pour des milieux présentant des types de corrélations originales comme des doubles diffuseurs imbriqués [70] ou encore des milieux hyperuniformes [71]. Pourtant, le cas des bulles demeure intrigant s'agissant de diffuseurs distribués à des échelles infimes devant la longueur d'onde. Nous verrons dans la suite que l'on peut aller plus loin et obtenir des effets surprenants pour des milieux bulleux exhibant un haut degré de corrélation.

2.3.2 Corrélations fortes (Waterman et Truell)

Les corrélations spatiales influencent donc sensiblement les propriétés effectives du matériau. Dans l'exemple décrit plus haut, ces corrélations s'imposent d'elles-mêmes à l'expérimentateur puisqu'elles sont inhérentes à la structure des bulles. Mais elles permettent également d'envisager des perspectives intéressantes. Dans cette partie, nous

montrons qu'il est aussi possible de façonner les propriétés du milieu en lui imposant un nouveau type de corrélation spatiale. Fabriquons, pour cela, un milieu désordonné constitué de paires de bulles. On considère que l'échantillon est parfaitement monodisperse ($a = 100 \mu\text{m}$) et que toutes les paires sont alignées selon la direction Oz . On tire un nuage cylindrique de génératrice (Oz) que l'on insonifie avec un faisceau gaussien de manière à reproduire l'expérience pseudo-1D présentée en 2.1.3.1. Le "dispositif" numérique est représenté sur la figure 2.28. On note d la distance séparant les centres

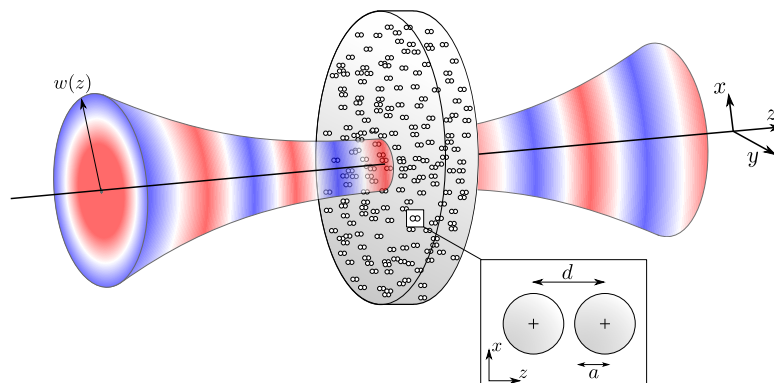


FIGURE 2.28 – Une couche cylindrique constituée de paires de bulles réparties aléatoirement est soumise à une insonification gaussienne sous incidence normale. Les paires sont toutes alignées selon l'axe (Oz) et se composent de deux bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ espacées d'une distance d .

des deux bulles de chaque paire. Pour commencer, on choisit $d = 250 \mu\text{m}$ et on fixe la fraction volumique d'air à $\phi = 1\%$.

Spectre

Une simple mesure du champ suffit à obtenir un certain nombre d'enseignements. Comme le montre la figure 2.29, le spectre enregistré au centre du milieu parfaitement désordonné (gauche) est extrêmement différent de celui obtenu dans le cas d'un nuage pour lequel les bulles sont ordonnées par paires (droite). La différence la plus notable concerne la bande interdite d'hybridation qui semble à la fois plus étroite et devient discontinue dans le cas corrélé. On remarque notamment l'apparition d'une plage de fréquences située dans la bande interdite et pour laquelle on mesure un champ non-nul. Ce phénomène ne va pas sans rappeler le concept de transparence acoustique que l'on rencontre dans les structures périodiques dont la cellule unité exhibe simultanément deux résonances différentes. Ces dernières sont alors susceptibles de générer des champs qui interfèrent négativement et empiètent sur l'interférence de type Fano responsable de l'hybridation, le matériau redevient alors 'transparent'. Ce phénomène a été d'abord observé pour les ondes électromagnétiques [72, 73] avant d'être étendu au domaine des cristaux phononiques [74–76].

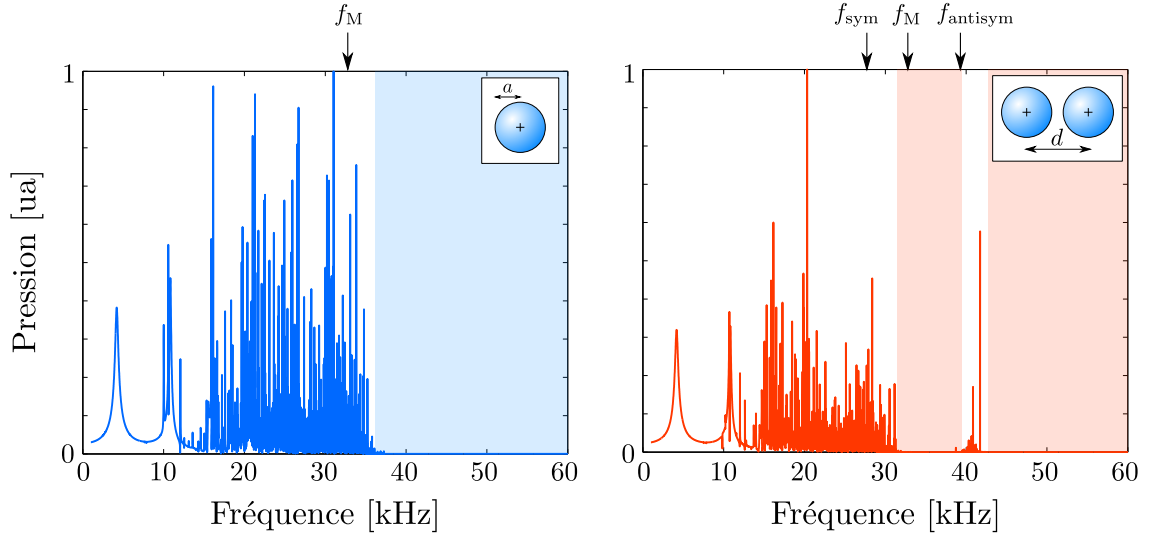


FIGURE 2.29 – Spectres mesurés au centre de l'échantillon pour un nuage désordonné (gauche) et pour un nuage corrélé (droite). Les bulles ont un rayon $a = 100 \mu\text{m}$ et la distance de corrélation des paires vaut $d = 250 \mu\text{m}$. Les zones colorées indiquent la bande interdite. Les fréquences f_M , f_{sym} et f_{antisym} se rapportent respectivement à la fréquence de Minnaert et aux fréquences des modes symétrique et antisymétrique des paires qui seront explicitées dans la suite.

Diffusion par une paire de bulles

Dans le cas de nos paires de bulles, il est relativement aisé de comprendre l'origine de cette double résonance. Dans la partie 1.3, on a étudié un cas de couplage à deux bulles dans le cas plus général pour lequel les rayons sont différents. On avait alors expliqué que, pour des bulles suffisamment proches, le couplage devient tel que la paire de bulles se comporte comme un système à deux niveaux, l'un correspondant à une résonance monopolaire et l'autre dipolaire. On s'attend à ce que cela soit d'autant plus le cas ici que les deux bulles ont le même rayon. Le couplage est alors susceptible d'être particulièrement efficace. On peut obtenir une illustration plus quantitative en calculant la fonction de diffusion f_d pour notre paire de bulle.

Considérons la situation de la figure 2.30 pour laquelle une paire de bulle est isolée et insonifiée à l'aide d'une onde plane se propageant selon (Oz) . Les deux bulles sont placées en \mathbf{r}_A et \mathbf{r}_B . La pression diffusée ressentie au point \mathbf{r}_M vaut

$$p(\mathbf{r}_M) = p_0 + p_A f \frac{e^{-ik_0 \|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A\|}}{\|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A\|} + p_B f \frac{e^{-ik_0 \|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_B\|}}{\|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_B\|} \quad (2.65)$$

avec

$$\|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A\| = \sqrt{\frac{d^2}{4} + r_M^2 + r_M d \cos \theta}$$

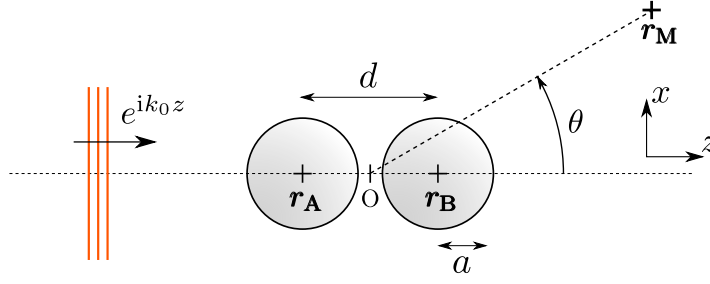


FIGURE 2.30 – Représentation schématique d’une paire de bulles de rayon a et séparées d’une distance d . On excite avec une onde plane se propageant selon Oz et on mesure le champ au point \mathbf{r}_M repéré, dans le système des coordonnées polaires par la distance r_M avec le centre de la bulle ainsi que par l’angle θ respectivement à l’axe Oz .

et

$$\| \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_B \| = \sqrt{\frac{d^2}{4} + r_M^2 - r_M d \cos \theta}.$$

Les pressions ressenties par les bulles A et B s’obtiennent en inversant la matrice de diffusion multiple du système :

$$\begin{bmatrix} p_A \\ p_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -f(\omega) \frac{e^{ik_0 d}}{d} \\ -f(\omega) \frac{e^{ik_0 d}}{d} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} p_{0A} \\ p_{0B} \end{bmatrix}$$

avec, pour les pressions incidentes,

$$p_{0A} = e^{-ik_0 d/2} \quad \text{et} \quad p_{0B} = e^{ik_0 d/2}.$$

On obtient la fonction de diffusion de la paire de bulle en divisant l’expression obtenue pour la pression diffusée par $e^{ik_0 r_M}/r_M$. Puis on passe à la limite en $r_M \rightarrow \infty$ pour finalement obtenir

$$f_d(\theta) = \frac{d^2 f}{d^2 - f^2 e^{2ik_0 d}} \left[e^{-ik_0 \frac{d}{2}(1-\cos\theta)} \left(1 + \frac{f}{d} e^{2ik_0 d} \right) + e^{ik_0 \frac{d}{2}(1-\cos\theta)} \left(1 + \frac{f}{d} \right) \right]. \quad (2.66)$$

Cette étape de calcul consiste à assimiler notre couple de bulle à un unique diffuseur ponctuel placé en \mathbf{O} . Le ratio d/λ_0 étant de l’ordre de 10^{-2} , cette approche semble assez légitime. Dans les cas particuliers de la diffusion vers l’avant ($\theta = 0$) et vers l’arrière ($\theta = \pi$), on trouve

$$f_d(0) = \frac{d^2 f}{d^2 - f^2 e^{2ik_0 d}} \left[2 + \frac{f}{d} (1 + e^{2ik_0 d}) \right] \quad (2.67)$$

et

$$f_d(\pi) = \frac{d^2 f}{d^2 - f^2 e^{2ik_0 d}} \left[2 \cos(k_0 d) + 2 \frac{f}{d} e^{ik_0 d} \right] \quad (2.68)$$

On peut enfin évaluer les contributions monopolaires et dipolaires en faisant apparaître les parties symétrique et antisymétrique de la fonction de diffusion :

$$\frac{f_d(0) + f_d(\pi)}{2} = \frac{2a}{\left(\frac{\omega_M}{\omega}\right)^2 - \left(1 + \frac{a}{d}\right) - i(\delta^{\text{th}} + \delta^{\text{vis}} + 2k_0a)} \quad (2.69)$$

et

$$\frac{f_d(0) - f_d(\pi)}{2} = \frac{k_0^2 d^2 a / 2}{\left(\frac{\omega_M}{\omega}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{d} + \frac{k_0 a k_0 d}{2}\right) - i(\delta^{\text{th}} + \delta^{\text{vis}} + k_0 a k_0^2 d^2 / 6)}. \quad (2.70)$$

On obtient ainsi une résonance monopolaire à la pulsation $\omega_{\text{sym}} = \omega_M / \sqrt{1 + a/d}$ ainsi qu'une résonance dipolaire à la pulsation $\omega_{\text{antisym}} = \omega_M / \sqrt{1 - a/d}$ ⁸. Notons que l'expression de la fonction de diffusion antisymétrique a été développé à l'ordre supérieur pour faire apparaître le terme de couplage radiatif. On représente sur la figure 2.31 les diagrammes de directivité de $f_d(\omega, \theta)$ pour les pulsations ω_{sym} et ω_{antisym} .

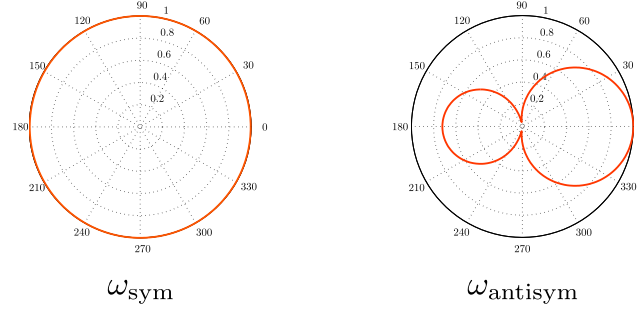


FIGURE 2.31 – Diagrammes de directivité obtenus pour les pulsations ω_{sym} et ω_{antisym} .

Réfraction négative

La connaissance de la fonction de diffusion nous permet d'avoir accès aux propriétés de l'échantillon via l'utilisation des théories de milieux effectifs. Dans cette optique, l'usage de la formule de Foldy ne paraît pas adaptée ici puisqu'elle ne tient compte que de la diffusion vers l'avant. Si cela n'était pas préjudiciable dans le cas des diffuseurs isotropes qui nous ont intéressés jusqu'ici, la singularité de nos paires réside précisément dans leur anisotropie. Empruntons plutôt le modèle de Waterman et Truell [13] qui fait intervenir la fonction de diffusion mesurée vers l'avant mais aussi vers l'arrière. Les deux auteurs nous fournissent l'expression suivante pour le nombre d'onde effectif :

$$\frac{k_{\text{eff}}^2}{k_0^2} = \left[1 + \frac{2\pi n f_d(0)}{k_0^2}\right]^2 - \left[\frac{2\pi n f_d(\pi)}{k_0^2}\right]^2 \quad (2.71)$$

Remarquons que cette formule peut être factorisée se mettant alors sous la forme

$$\frac{k_{\text{eff}}^2}{k_0^2} = \left[1 + \frac{2\pi n}{k_0^2} [f_d(0) + f_d(\pi)]\right] \left[1 + \frac{2\pi n}{k_0^2} [f_d(0) - f_d(\pi)]\right] \quad (2.72)$$

8. On peut négliger le terme en $k_0^2 ad/2$ car $a \ll \lambda_0$ et $d \ll \lambda_0$.

Comme $k_{\text{eff}}^2 = \omega^2 \rho_{\text{eff}} \chi_{\text{eff}}$, on identifie la compressibilité effective avec le terme faisant intervenir le mode symétrique et la densité effective à celui faisant intervenir le mode antisymétrique. La formule de Waterman et Truell nous fournit ainsi une estimation des densité et compressibilité effectives :

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{\text{eff}}}{\chi_0} &= 1 + \frac{2\pi n}{k_0^2} [f_d(0) + f_d(\pi)] \\ \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} &= 1 + \frac{2\pi n}{k_0^2} [f_d(0) - f_d(\pi)] \end{aligned} \quad (2.73)$$

On trace les courbes de dispersion ainsi que les parties réelles de la densité et de la compressibilité obtenues avec les modèles de Foldy (rouge) et de Waterman et Truell (bleu) (figure 2.32). On constate immédiatement deux comportements bien distincts.

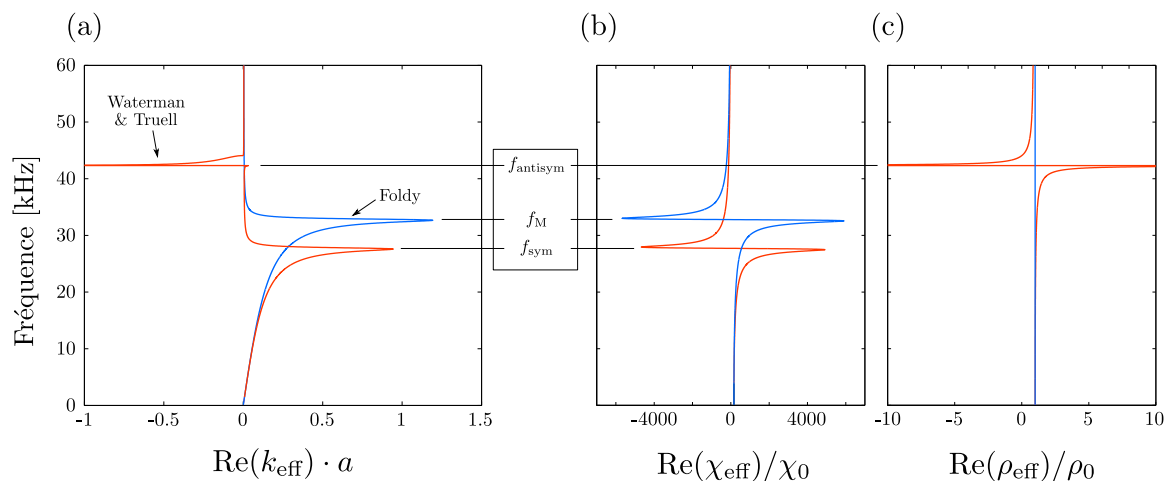


FIGURE 2.32 – Tracé des prédictions obtenues avec les modèles de Foldy (trait bleu) et de Waterman et Truell (trait rouge) pour les parties réelles du nombre d'onde effectif (a), de la compressibilité effective (b) et de la densité effective (c). On indique la fréquence de Minnaert f_M d'une bulle unique ainsi que les fréquences des modes symétrique (f_{sym}) et antisymétrique (f_{antisym}) d'une paire de bulles. On a pris les paramètres suivants : $a = 100 \mu\text{m}$, $d = 250 \mu\text{m}$, $\phi = 1 \%$, $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$.

Le nombre d'onde obtenu avec le modèle de Foldy et correspondant au cas du nuage parfaitement désordonné est évidemment toujours positif. En revanche, le modèle de Waterman et Truell prévoit, dans le cas de nos paires de bulles, une branche négative correspondant à la fenêtre de transparence. En s'attardant sur le comportement des parties réelles de χ_{eff} et ρ_{eff} , on réalise que la différence la plus significative entre les deux modèles se lit dans l'évolution de la densité effective. Le modèle de Foldy prévoit que $\rho_{\text{eff}} = \rho_0$ sur toute la gamme de fréquence étudiée. Ça n'est pas vraiment surprenant puisque cette prédiction considère chaque diffuseur comme parfaitement monopolaire. On remarque en revanche, que la résonance antisymétrique d'une paire de bulles affecte sérieusement la densité prévue par Waterman et Truell. En particulier, celle-ci prend

des valeurs négatives au delà de la fréquence f_{antisym} . La compressibilité effective étant elle-même négative au delà de la fréquence de Minnaert dans le cas désordonné et de f_{sym} dans le cas corrélé, on observe des valeurs simultanément négatives pour ρ_{eff} et χ_{eff} . Or, Veselago [77] a montré que de cette négativité simultanée des paramètres canoniques⁹ découle la négativité de l'indice de réfraction $n = \text{Re}(k_{\text{eff}})/k_0$. Cette propriété est particulièrement recherchée puisqu'elle permet d'envisager des applications telles que la conception de milieux complémentaires donnant accès au camouflage d'objets [78], l'imagerie super-résolue par amplification du champ évanescent [79, 80] ou encore la focalisation passive [81, 82]. On recense dans la littérature différents types de stratégies pour obtenir la réfraction négative. Les méthodes les plus populaires sont probablement celles qui exploitent les deux premières résonances de Mie d'un unique diffuseur [83, 84] et celles qui combinent deux résonateurs différents au sein d'un même matériau [85–87]. Mentionnons également une méthode plus récente consistant à profiter des effets de repliement de la structure de bande propre aux cristaux pouvant être décrits à la fois par une cellule unité et par une super-cellule comme c'est le cas pour le graphène [88]. Notons toutefois que, même dans le cas d'un milieu simplement négatif, une atténuation suffisante peut permettre d'observer la réfraction négative [89].

Toutes ces méthodes ont en cela en commun qu'elles se fondent sur la conception d'un matériau composite constitué d'un ou plusieurs résonateurs ainsi que d'un milieu continu. Le travail consiste alors à obtenir une combinaison astucieuse entre les caractéristiques de la résonance et l'arrangement spatial afin d'obtenir les propriétés acoustiques souhaitées. Les possibilités sont nombreuses et dépassent souvent le cadre des matériaux disponibles à l'état naturel. C'est pour cette raison que la terminologie de "métamatériaux" a été introduite dans les années 90 [90]. Ces métamatériaux ont d'ailleurs été transposés dans l'ensemble des domaines de la physique des ondes et permettent notamment d'agir sur la propagation sans considération de la longueur d'onde en jeu ; ce qui s'avère particulièrement avantageux lorsque l'on souhaite travailler avec des ondes sismiques ou dans le domaine de l'acoustique audible par exemple.

Le matériau qui nous intéresse investit, de la même manière, la résonance d'un diffuseur dégénéré qui, à la manière du cristal doublement périodique de [88], bénéficie de la diffusion multiple émanant de la corrélation spatiale pour créer le mode dipolaire. Mais elle se distingue par l'aspect désordonné de l'échantillon étudié. Elle souligne en cela le paradoxe qui incombe à la classe des métamatériaux. En raison de l'architecture sub-longueur d'onde dont ils sont l'objet, ceux-ci se comportent essentiellement comme des milieux homogènes pour lesquels la position de chaque diffuseur ne devrait pas s'avérer déterminante. Ils sont d'ailleurs généralement bien modélisés par les théories de milieux effectifs. Pour autant, on a vu que l'introduction d'une simple corrélation statistique dans la position des diffuseurs pouvait avoir des répercussions considérables sur la propagation.

9. ρ_{eff} et χ_{eff} ici ; ϵ_{eff} et μ_{eff} en électromagnétique.

Description de la bande négative

La formule de Watermann et Truell prévoit donc bien l'existence d'une bande d'indice négatif pour les fréquences correspondant à la transparence observée sur les premières simulations. Mais comment se comporte cette bande lorsque l'on modifie les paramètres de l'échantillon ? Et surtout l'observerait-on dans un contexte plus réaliste où l'on tient compte de la dissipation ? On se propose ici d'étudier les deux caractéristiques que sont la largeur et la profondeur de la bande négative en fonction du paramètre d/a ainsi que la robustesse aux pertes d'origine thermique et visqueuse.

(i) Largeur de la bande négative :

La compressibilité effective étant toujours négative pour $f > f_M$, c'est la densité effective qui pilote la réfraction négative. Intéressons-nous donc à la condition

$$\text{Re}(\rho_{\text{eff}}) < 0. \quad (2.74)$$

Elle équivaut à

$$1 + 2\pi n \text{Re}[f_d(0) - f_d(\pi)]/k_0^2 < 0. \quad (2.75)$$

On introduit les paramètres

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{a}{d} + \frac{k_0 a k_0 d}{2} \\ \Omega &= \left(\frac{\omega_M}{\omega}\right)^2 - A \\ B &= 2\pi n d^2 a = \frac{3\phi}{2} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \\ \text{et } \Delta &= \delta^{\text{th}} + \delta^{\text{vis}} + \frac{k_0 a k_0^2 d^2}{6} \end{aligned} \quad (2.76)$$

De sorte qu'il nous faut résoudre l'inégalité

$$\Omega^2 + B\Omega + \Delta^2 < 0 \quad (2.77)$$

dont les racines sont

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{B}{2} + \frac{\sqrt{B^2 - 4\Delta^2}}{2} \\ \text{et } \Omega_2 &= -\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{B^2 - 4\Delta^2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

On obtient une expression analytique pour les extrema de la bande négative :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_M}{\sqrt{A - \frac{B}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\Delta^2}{B^2}}\right]}} \\ \text{et } \omega_2 &= \frac{\omega_M}{\sqrt{A - \frac{B}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\Delta^2}{B^2}}\right]}}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

On veut se faire une idée de l'influence des paramètres du dipôle ainsi que du rôle que jouent les pertes visqueuse et thermique. Sur la figure 2.33, on a reproduit l'évolution de $(\omega_2 - \omega_1)/\omega_M$ en fonction de d/a lorsque l'on néglige (trait bleu) et lorsque l'on tient compte des pertes (trait vert). Le passage à la limite dans le calcul de f_d (équation (2.66)) suppose que les paires soient statistiquement isolées et ne se chevauchent pas. Compte tenu de la distance caractéristique entre bulles $d_c = a(4\pi)^{1/3}(3\phi)^{-1/3}$, la

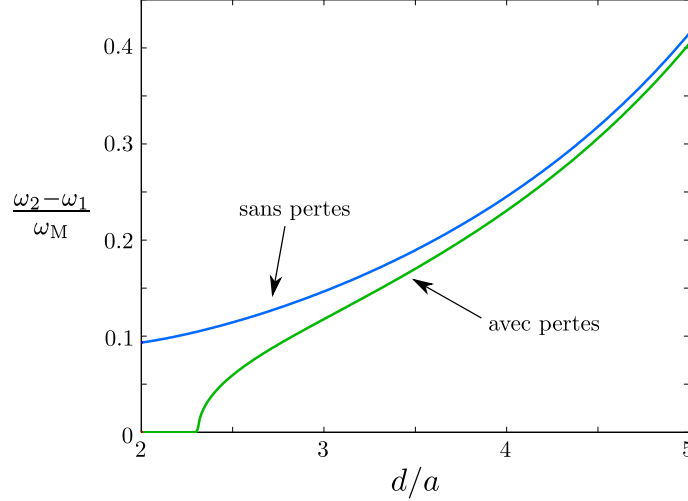


FIGURE 2.33 – Tracé de la largeur $\omega_2 - \omega_1$ de la bande négative exprimée en pourcentage de ω_M en fonction de la distance entre les deux bulles d'une même paire d/a . On compare les deux situations pour lesquelles les pertes thermique et visqueuse sont négligées (trait bleu) et prise en compte (trait vert).

prédiction ne sera donc pertinente que lorsque $d/a < 5$. D'autre part, la condition de non-interpénétration des bulles impose que l'on se limite à l'intervalle $2 < d/a < 5$. Le tracé de la figure 2.33 montre que la bande négative s'élargit à mesure que les bulles d'une même paire s'éloignent. On remarque, d'autre part, que si la dissipation semble préjudiciable lorsque les bulles sont proches, les choses s'arrangent quand on augmente d/a . Les deux branches semblent d'ailleurs se rejoindre ce qui milite pour une influence modeste des pertes et donc de Δ . Au contraire, B , qui est proportionnel à d^2/a^2 , augmente fortement. Il est donc légitime d'adopter une expression approchée pour les extrema :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_M}{\sqrt{A}} \\ \text{et } \omega_2 &= \frac{\omega_M}{\sqrt{A - B}}. \end{aligned} \tag{2.80}$$

La largeur de la bande négative découle directement de B . On peut donc l'élargir en augmentant d/a mais aussi en accentuant la fraction volumique ϕ . Étant donné les fréquences auxquelles on travaille, on vérifie à la fois $k_0 a \ll 1$ et $k_0 d \ll 1$. On peut donc négliger le terme en $k_0 a k_0 d/2$ dans l'expression de A . On tombe alors sur $\omega_1 = \omega_{\text{antisym}}$ ce qui signifie que la bande négative s'ouvre à la résonance du mode

dipolaire. Rien de réellement surprenant ici puisque, si les pertes sont négligeables, la réfraction négative équivaut à la double négativité qui, elle, est obtenue dès que $\omega \geq \omega_{\text{antisym}}$. C'est précisément le comportement que l'on observe sur la figure 2.32.

(ii) Profondeur de la bande négative :

On peut également caractériser la profondeur de la bande négative, c'est-à-dire $\min [\text{Re}(k_{\text{eff}})]$.

On peut écrire $k_{\text{eff}} = \omega \rho_{\text{eff}}^{1/2} \chi_{\text{eff}}^{1/2}$. Considérons donc les variations des trois termes du membre de droite dans l'intervalle $[\omega_1; \omega_2]$. En dehors de la résonance du monopole, χ_{eff} ne varie presque pas (voir figure 2.32). Comme ω varie peu entre ω_1 et ω_2 , c'est une nouvelle fois ρ_{eff} qui dictera les choses. On suppose donc que le minimum de $\text{Re}(k_{\text{eff}})$ est le même que le minimum de $\text{Re}(\rho_{\text{eff}})$ que l'on connaît puisqu'il s'agit de ω_{antisym} . On reproduit l'évolution de $\text{Re}(k_{\text{eff}}(\omega_{\text{antisym}})) \cdot a$ en fonction de d/a sur la figure 2.34. Encore une fois, plus on écarte les deux bulles d'une même paire, plus la bande est profonde. Cette propriété semble, en revanche, beaucoup plus sensible à dissipation. A y regarder de plus près, la profondeur prend des valeurs qui peuvent même sembler

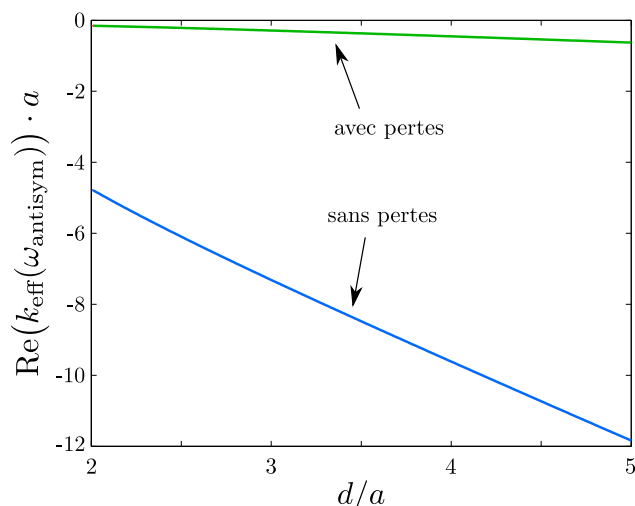


FIGURE 2.34 – Tracé de la profondeur $\text{Re}(k_{\text{eff}}(\omega_{\text{antisym}})) \cdot a$ de la bande négative en fonction de la distance entre les deux bulles d'une même paire d/a . On compare les deux situations pour lesquelles les pertes thermique et visqueuse sont négligées (trait bleu) ou prise en compte (trait vert).

excessives lorsque l'on néglige les pertes. Par exemple, $\text{Re}(k_{\text{eff}}(\omega_{\text{antisym}})) \cdot a < -6$ signifie que la longueur d'onde effective est plus petite qu'un rayon de bulle ce qui n'a pas vraiment de signification physique ici. Il faut donc remettre en question le bien fondé du modèle vis-à-vis de la profondeur de la bande dans le cas idéal. Dans le cas dissipatif, en revanche, on observe des valeurs qui suggèrent que la bande négative survit à l'incorporation des pertes.

Pour s'en convaincre, on se propose de simuler la relation de dispersion avec la méthode du paragraphe 2.1.3.1. On se place pour cela dans la configuration de la

figure 2.28 puis on extrait les paramètres effectifs de la mesure des champs transmis et réfléchis. On obtient l'évolution de la figure 2.35. On a reporté les résultats de

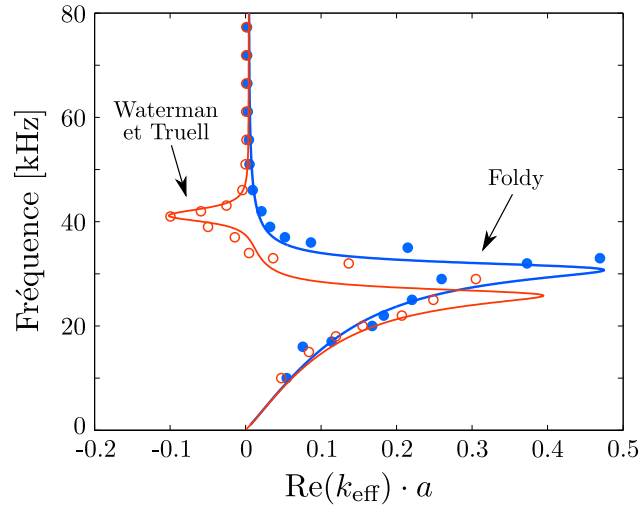


FIGURE 2.35 – Courbes de dispersion numériques (symboles) et analytiques (traits) obtenues pour un nuage de bulle désordonné (bleu) ainsi que pour un nuage constitué de paires de bulles (rouge). On a pris les paramètres suivants : $a = 100 \mu\text{m}$, $d = 250 \mu\text{m}$, $\phi = 1 \%$, $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}} + \Gamma^{\text{vis}} + \Gamma^{\text{th}}$.

simulation pour un nuage parfaitement aléatoire (points bleus) et pour un nuage corrélé (cercles rouges). Dans les deux cas on tient compte des pertes thermique et visqueuse. On compare aux modèles de Foldy (trait bleu) et de Waterman et Truell (trait rouge). Non seulement la bande négative résiste aux pertes mais l'accord modèle-simulation est convaincant. Les valeurs observées pour la largeur et la profondeur de la bande négative sont conformes à celles prévues par les figures 2.34 et 2.33.

Incidence oblique

On souhaite fournir ici une illustration du phénomène de réfraction négative. On constitue pour cela une couche de milieu corrélé que l'on insonifie à l'aide d'un faisceau gaussien de largeur w_0 sous incidence oblique. Il est souhaitable que le faisceau gaussien soit aussi peu focalisé que possible. Il faut donc qu'il vérifie $w_0 \gg \lambda$. On veut, par ailleurs, s'affranchir des effets de bords ce qui suppose d'assurer la condition $D \gg w_0$ avec D l'extension transverse du nuage de bulles. En définitive, la couche doit être particulièrement large ce qui engendre des temps de calculs relativement indigestes. Ce n'est pas une nouveauté puisque c'était déjà le cas dans la configuration qui nous a permis d'obtenir la figure 2.35. On s'en sort généralement en se contentant d'une couche extrêmement fine ($400 \mu\text{m}$ pour la figure 2.35). Mais la situation présente est différente puisqu'on ambitionne de visualiser le champ au sein du nuage. L'épaisseur devient alors critique et le temps de simulation inabordable.

Si on ne peut travailler à ces fréquences, il faut déplacer le problème. Lorsqu'une bulle est piégée dans un fluide élastique, sa résonance de Minnaert est affectée. Son

expression devient alors [91] :

$$\omega_M^2 = \frac{3\gamma P_0 + 4G'}{\rho_0 a^2} \quad (2.81)$$

où G' est le module de cisaillement du fluide. L'élasticité se traduit donc par un décalage de la résonance vers les hautes fréquences nous permettant ainsi de réduire les dimensions transverses de l'échantillon. On considère ici une matrice élastique de module de cisaillement $G' = 5$ MPa. La résonance associée est $f_M = 229$ kHz. On néglige l'effet des pertes soit $\delta = \delta^{\text{rad}}$. Comme l'indique la figure 2.36, la dispersion est, ici encore, très sensible aux corrélations spatiales puisque le résultat est très différent selon que l'on considère un nuage corrélé (rouge) ou non (bleu). Pour l'illustrer on simule une couche de largeur $D = 6$ cm et d'épaisseur $e = 5$ mm que l'on insonifie à l'aide d'un faisceau gaussien incident selon un angle $\theta = 51.5^\circ$ respectivement à la normale à l'interface. On choisit deux fréquences d'excitation différentes. Pour la première, on se place avant la bande interdite. On attend donc un comportement similaire pour les deux types de nuages. Prenons par exemple ω_{sym} . La figure 2.36(b) confirme que les deux situations sont comparables avec toutefois une atténuation légèrement supérieure dans le cas du nuage corrélé qui s'explique par la valeur plus élevée prise par la partie imaginaire de k_{eff} dans ce cas. Choisissons maintenant une fréquence d'excitation située dans la bande de transparence : par exemple ω_{antisym} . Cette fois-ci les cartes de champ obtenues sont sensiblement différentes selon que les bulles sont disposées par paires ou non. Bien que relativement faible dans le cas corrélé, la transmission devient nulle dans le cas désordonné. Et pour cause, cette pulsation se situe alors dans la bande interdite. L'examen du champ à l'intérieur de l'échantillon est plus instructive encore. Celui-ci est, en effet, nul à l'intérieur du nuage aléatoire et pas à l'intérieur du nuage corrélé ce qui atteste de l'effet de transparence acoustique mentionnée plus haut. Notons finalement que la direction des fronts d'ondes s'inverse à la traversée de l'interface dans le cas corrélé. C'est une signature du changement de signe de l'indice de réfraction. Les observateurs les plus attentifs constateront que le même phénomène se reproduit au niveau de la seconde interface.

Ainsi nous avons pu démontrer l'existence d'une bande de fréquences située dans la bande d'interdite d'hybridation et pour laquelle l'échantillon devient "transparent" lorsque les bulles s'arrangent par paires. La prise en compte du couplage au sein de chaque paire permet d'expliquer que l'indice de réfraction devienne alors négatif. On a également pu caractériser la bande négative qui résiste à la prise en compte des pertes d'origine thermique et visqueuse et qui semble profiter (du point de vue de la largeur et de la profondeur) de l'augmentation du paramètre d/a .

Dans la rubrique perspectives, on peut tout à fait envisager des développements expérimentaux par exemple en empruntant les techniques d'encapsulation développées en microfluidique afin de piéger les bulles, par paires, dans des microgouttes.

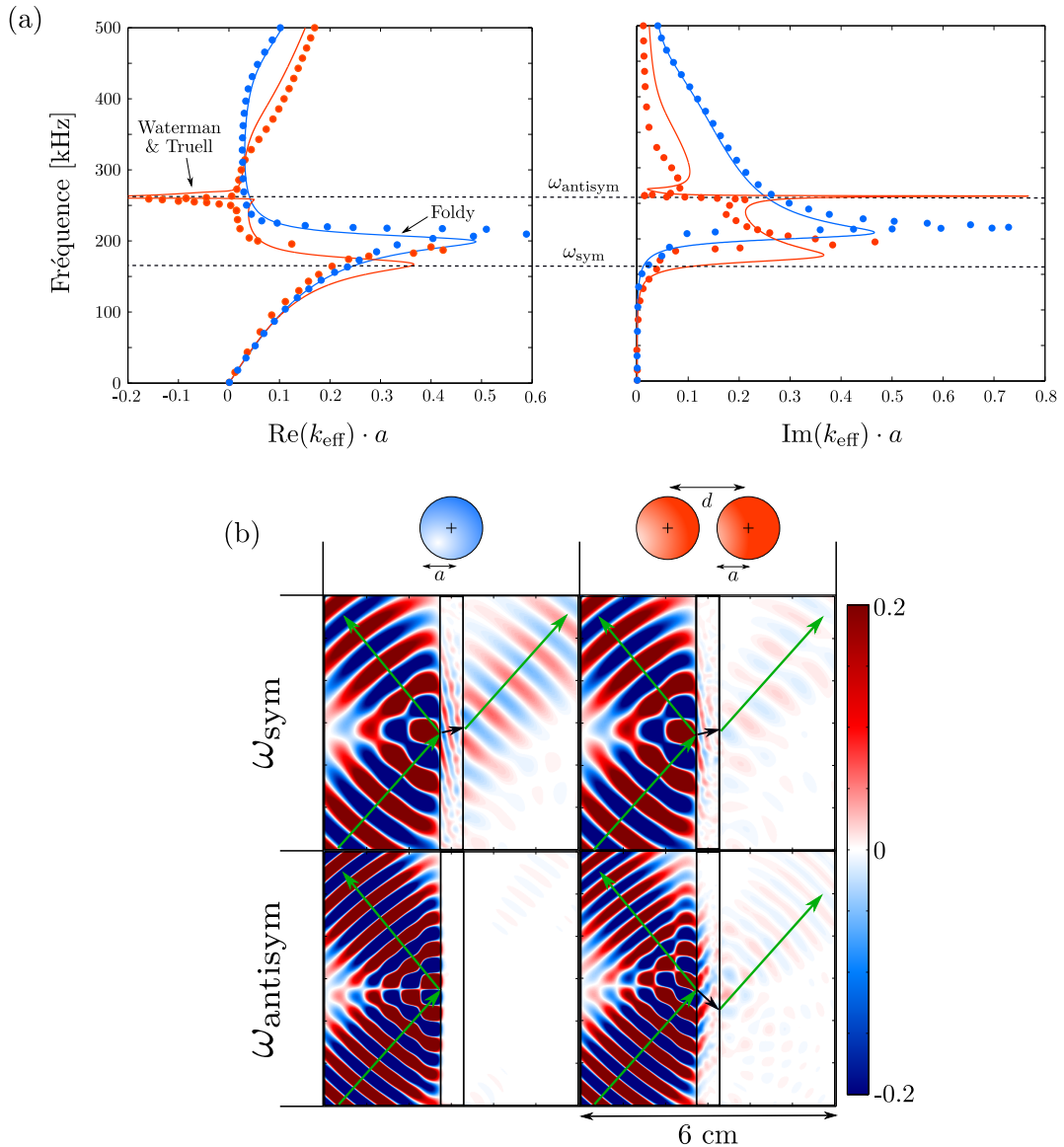


FIGURE 2.36 – (a) Courbes de dispersion numériques (symboles) et analytiques (traits) pour un nuage de bulle désordonné (bleu) ainsi que pour un nuage constitué de paires de bulles (rouge). On a pris les paramètres suivants : $a = 100 \mu\text{m}$, $d = 250 \mu\text{m}$, $\phi = 1 \%$, $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$ et $G' = 5 \text{ MPa}$. (b) Cartes de champ obtenues sous incidence oblique ($\theta = 51.5^\circ$) dans le cas aléatoire (gauche) et dans le cas corrélé (droite) pour des pulsations ω_{sym} et ω_{antisym} . Le milieu bulleux est situé dans le contour noir.

2.4 Conclusion : Vers des milieux structurés

De cette partie, on pourra retenir que le comportement des milieux bulleux est extrêmement bien décrit par les théories de milieux effectifs. Parmi ces théories on trouve notamment celles postulées par Wood, Foldy, Keller ou encore Waterman et Truell. Ceci vient notamment du fait que le champ cohérent est dominant dans le

cas de milieux réalistes (dissipatifs). Néanmoins, nous avons vu que les techniques de façonnage du front d'onde comme le retournement temporel, qui est généralement plutôt utilisé pour manipuler la composante incohérente du champ, s'avérait ici efficace. En effet, en raison de leur nature biphasique ainsi que du contraste acoustique remarquable entre ces deux phases, les liquides bulleux exhibent un comportement original dès les plus basses fréquences pour lesquelles la résonance n'intervient pas. On peut alors expliquer les performances obtenues en invoquant simplement l'existence de modes collectifs variés.

Enfin, nous avons vu que, même dans le cas de milieux atténuants, la résonance est tout sauf anodine puisque les bulles diffusent alors suffisamment pour devenir sensibles à leur entourage proche. Par exemple, l'introduction d'une corrélation dans la distribution de leurs positions entraîne des répercussions manifestes sur le comportement de l'échantillon. Le simple fait que deux bulles voisines ne puissent pas s'interpénétrer explique, du moins en partie, les limitations du modèle de Foldy. Le cas particulier des bulles disposées par paires est également très instructif puisqu'il s'accompagne de propriétés exotiques telles que la transparence acoustique ou la réfraction négative. Dans le contexte de l'essor des métamatériaux, ce bilan est tout sauf anodin et l'ingénierie des milieux complexes a encore de beaux jours devant elle. D'autres types de corrélation spatiales comme les milieux hyper-uniformes ont par ailleurs très récemment [71] montré leur potentiel. Difficile, dans ces conditions, de ne pas s'intéresser aux matériaux hautement structurés que sont les cristaux.

Bibliographie

- [1] E. Chiotellis and G. M. Campbell. Proving of bread dough i : modelling the evolution of the bubble size distribution. *Food and Bioproducts Processing*, 81(3) :194–206, 2003.
- [2] G. G. Bellido, M. G. Scanlon, J. H. Page, and B. Hallgrimsson. The bubble size distribution in wheat flour dough. *Food Research International*, 39(10) :1058–1066, 2006.
- [3] W. Z. Ostwald. Blocking of ostwald ripening allowing long-term stabilization. *The Journal of Physical Chemistry*, 37 :385, 1901.
- [4] P. Babin, G. Della Valle, H. Chiron, P. Cloetens, J. Hoszowska, P. Pernot, A. L. Réguerre, L. Salvo, and R. Dendievel. Fast x-ray tomography analysis of bubble growth and foam setting during breadmaking. *Journal of Cereal Science*, 43(3) :393–397, 2006.
- [5] V. Leroy, Y. Fan, A. L. Strybulevych, G. G. Bellido, J. H. Page, and M. G. Scanlon. Investigating the bubble size distribution in dough using ultrasound. *Bubbles in food*, 2 :51–60, 2008.
- [6] A. Turbin-Orger, P. Babin, E. Boller, L. Chaunier, H. Chiron, G. Della Valle, R. Dendievel, A. L. Réguerre, and L. Salvo. Growth and setting of gas bubbles in a viscoelastic matrix imaged by x-ray microtomography : the evolution of cellular structures in fermenting wheat flour dough. *Soft matter*, 11(17) :3373–3384, 2015.
- [7] F. Koksel, S. Aritan, A. L. Strybulevych, J. H. Page, and M. G. Scanlon. The bubble size distribution and its evolution in non-yeasted wheat flour doughs investigated by synchrotron x-ray microtomography. *Food Research International*, 80 :12–18, 2016.
- [8] A. B. Wood. *A textbook of sound : Being an account of the physics of vibrations with special reference to recent theoretical and technical developments*. G. Bell, 1932.
- [9] L. L. Foldy. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, 67 :107–119, Feb 1945.
- [10] M. Lax. Multiple scattering of waves. *Reviews of Modern Physics*, 23(4) :287, 1951.
- [11] U. Fano. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts. *Physical Review*, 124(6) :1866, 1961.
- [12] G. Aeppli and Z. Fisk. Comments condens. *Matter Phys*, 16(155) :1192, 1992.
- [13] P. C. Waterman and R. Truell. Multiple scattering of waves. *Journal of Mathematical Physics*, 2(4) :512–537, 1961.
- [14] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, 109(5) :1492, 1958.

-
- [15] M. Janssen. Statistics and scaling in disordered mesoscopic electron systems. *Physics Reports*, 295(1) :1–91, 1998.
- [16] A. Lagendijk, B. van Tiggelen, and D. S. Wiersma. Fifty years of anderson localization. *Physics Today*, 62(8) :24–29, 2009.
- [17] Z. Ye and A. Alvarez. Acoustic localization in bubbly liquid media. *Physical Review Letters*, 80(16) :3503, 1998.
- [18] Z. Ye and H. Hsu. Phase transition and acoustic localization in arrays of air bubbles in water. *Applied Physics Letters*, 79(11) :1724–1726, 2001.
- [19] C. H. Kuo, K. K. H. Wang, and Z. Ye. Fluctuation and localization of acoustic waves in bubbly water. *Applied Physics Letters*, 83(20) :4247–4249, 2003.
- [20] Z. Ye and L. Ding. Acoustic dispersion and attenuation relations in bubbly mixture. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 98(3) :1629–1636, 1995.
- [21] F. S. Henyey. Corrections to foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(4) :2149–2154, 1999.
- [22] Multiple scattering of waves. II. “H]ole Corrections” in the Scalar Case, author=Fikioris, J. G. and Waterman, P. C., journal=Journal of Mathematical Physics, volume=5, number=10, pages=1413–1420, year=1964, publisher=AIP Publishing.
- [23] P. Lloyd and M. V. Berry. Wave propagation through an assembly of spheres : Iv. relations between different multiple scattering theories. *Proceedings of the Physical Society*, 91(3) :678, 1967.
- [24] C. M. Linton and P. A. Martin. Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : Second-order corrections for the effective wavenumber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(6) :3413–3423, 2005.
- [25] C. Feuilleade. The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 99(6) :3412–3430, 1996.
- [26] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, and M. G. Scanlon. Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) :1931–1940, 2008.
- [27] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, and I. Jones. Group velocity in strongly scattering media. *Science*, 271(5249) :634, 1996.
- [28] M. L. Cowan, K. Beaty, J. H. Page, Z. Liu, and P. Sheng. Group velocity of acoustic waves in strongly scattering media : Dependence on the volume fraction of scatterers. *Physical Review E*, 58(5) :6626, 1998.
- [29] D. Fuster, J. M. Conoir, and T. Colonius. Effect of direct bubble-bubble interactions on linear-wave propagation in bubbly liquids. *Physical Review E*, 90(6) :063010, 2014.

-
- [30] C. Feuillade. Comment on "Corrections to foldy's effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers" [J. Acoust. Soc. Am. 105, 2149–2154 (1999)]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4) :1552–1555, 2002.
- [31] F. S. Henyey. Reply to Comment on : "Corrections to foldy's effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers" [[J. Acoust. Soc. Am. 111, 1552–1555 (2002)]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4) :1556–1559, 2002.
- [32] J. B. Keller. Stochastic equations and wave propagation in random media. *Stochastic processes in mathematical physics and engineering*, 16 :145, 1980.
- [33] V. Fokin, M. Ambati, C. Sun, and X. Zhang. Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials. *Physical Review B*, 76(14) :144302, 2007.
- [34] G. Lepert, C. Aristégui, O. Poncelet, T. Brunet, C. Audoly, and P. Parneix. Recovery of the effective wavenumber and dynamical mass density for materials with inclusions. In *Acoustics 2012*, 2012.
- [35] C. C. Tsai. *Gaussian Beam Propagation*, volume 1. <http://www.phys.ncku.edu.tw/cctsai/teaching/10202/gaussian>
- [36] V. Leroy, A. Strybulevych, M. G. Scanlon, and J. H. Page. Acoustic transmission through one plane of bubbles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3704–3704, 2008.
- [37] J. R. Allegra and S. A. Hawley. Attenuation of sound in suspensions and emulsions : theory and experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(5B) :1545–1564, 1972.
- [38] M. W. Urban, M. Bernal, and J. F. Greenleaf. Phase aberration correction using ultrasound radiation force and vibrometry optimization. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 54(6) :1142–1153, 2007.
- [39] E. Herbert, G. Montaldo, M. Pernot, M. Fink, and M. Tanter. Application to non invasive aberration. 2010.
- [40] J. Aulbach, A. Bretagne, M. Fink, and A. Tanter, M.and Tourin. Optimal spatiotemporal focusing through complex scattering media. *Physical Review E*, 85(1) :016605, 2012.
- [41] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk. Focusing coherent light through opaque strongly scattering media. *Optics Letters*, 32(16) :2309–2311, 2007.
- [42] N. Kaina, M. Dupré, G. Lerosey, and M. Fink. Shaping complex microwave fields in reverberating media with binary tunable metasurfaces. *Scientific Reports*, 4, 2014.
- [43] R. Sprik, A. Tourin, J. de Rosny, and M. Fink. Eigenvalue distributions of correlated multichannel transfer matrices in strongly scattering systems. *Physical Review B*, 78(1) :012202, 2008.

-
- [44] S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan. Measuring the transmission matrix in optics : an approach to the study and control of light propagation in disordered media. *Physical Review Letters*, 104(10) :100601, 2010.
- [45] P. del Hougne, F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Spatio-temporal wavefront shaping in a microwave cavity. *arXiv preprint arXiv :1607.06732*, 2016.
- [46] M. Mounaix, H. Defienne, and S. Gigan. Deterministic light focusing in space and time through multiple scattering media with a time-resolved transmission matrix approach. *arXiv preprint arXiv :1607.06331*, 2016.
- [47] D. Cassereau and M. Fink. Time-reversal of ultrasonic fields. III. Theory of the closed time-reversal cavity. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5) :579–592, 1992.
- [48] R. G. Sachs. *The physics of time reversal*. University of Chicago Press, 1987.
- [49] M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5) :555–566, 1992.
- [50] M. Fink. Time-reversed acoustics. *Scientific American*, 281(5) :91–97, 1999.
- [51] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J. L. Thomas, and F. Wu. Time-reversed acoustics. *Reports on Progress in Physics*, 63(12) :1933, 2000.
- [52] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process? *Physical Review E*, 64(3) :036606, 2001.
- [53] G. Lerosey, J. De Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink. Time reversal of electromagnetic waves. *Physical Review Letters*, 92(19) :193904, 2004.
- [54] R. Carminati, R. Pierrat, J. De Rosny, and M. Fink. Theory of the time reversal cavity for electromagnetic fields. *Optics Letters*, 32(21) :3107–3109, 2007.
- [55] J. de Rosny and M. Fink. Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. *Physical Review Letters*, 89(12) :124301, 2002.
- [56] E. Abbe. VII. On the estimation of aperture in the microscope. *Journal of the Royal Microscopical Society*, 1(3) :388–423, 1881.
- [57] M. Tanter, J. F. Aubry, J. Gerber, J. L. Thomas, and M. Fink. Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter. I. Basic principles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(1) :37–47, 2001.
- [58] J. F. Aubry, M. Tanter, J. Gerber, J. L. Thomas, and M. Fink. Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter. II. Experiments. Application to focusing through absorbing and reverberating media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(1) :48–58, 2001.
- [59] G. Montaldo, M. Tanter, and M. Fink. Real time inverse filter focusing through iterative time reversal. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(2) :768–775, 2004.

-
- [60] R. Pierrat, C. Vandenbem, M. Fink, and R. Carminati. Subwavelength focusing inside an open disordered medium by time reversal at a single point antenna. *Physical Review A*, 87(4) :041801, 2013.
- [61] M. Lanoy, R. Pierrat, F. Lemoult, M. Fink, V. Leroy, and A. Tourin. Subwavelength focusing in bubbly media using broadband time reversal. *Physical Review B*, 91(22) :224202, 2015.
- [62] G. Lerosey, J. De Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315(5815) :1120–1122, 2007.
- [63] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Far-field sub-wavelength imaging and focusing using a wire medium based resonant metalens. *Waves in Random and Complex Media*, 21(4) :614–627, 2011.
- [64] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny, and M. Fink. Resonant metalenses for breaking the diffraction barrier. *Physical Review Letters*, 104(20) :203901, 2010.
- [65] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Acoustic resonators for far-field control of sound on a subwavelength scale. *Physical Review Letters*, 107(6) :064301, 2011.
- [66] Derode A. *La cohérence des ondes ultrasonores en milieu hétérogène*. PhD thesis, 1994.
- [67] A. Tourin. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. PhD thesis, 1999.
- [68] A. Derode, V. Mamou, and A. Tourin. Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium. *Physical Review E*, 74(3) :036606, 2006.
- [69] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, and M. G. Scanlon. Influence of positional correlations on the propagation of waves in a complex medium with polydisperse resonant scatterers. *Physical Review E*, 83(4) :046605, 2011.
- [70] V. Twerskyt. Transparency of pair-correlated, random distributions of small scatterers, with applications to the cornea. *The Journal of the Optical Society of America*, 65(5) :524–530, 1975.
- [71] O. Leseur, R. Pierrat, and R. Carminati. High-density hyperuniform materials can be transparent. *Optica*, 3(7) :763–767, Jul 2016.
- [72] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, 64(10) :1107, 1990.
- [73] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos. Electromagnetically induced transparency : Optics in coherent media. *Reviews of Modern Physics*, 77(2) :633, 2005.
- [74] F. Liu, M. Ke, A. Zhang, W. Wen, J. Shi, Z. Liu, and P. Sheng. Acoustic analog of electromagnetically induced transparency in periodic arrays of square rods. *Physical Review E*, 82(2) :026601, 2010.
- [75] A. Santillán and S. I. Bozhevolnyi. Acoustic transparency and slow sound using detuned acoustic resonators. *Physical Review B*, 84(6) :064304, 2011.

-
- [76] M. Amin, A. Elayouch, M. Farhat, M. Addouche, A. Khelif, and H. Bağcı. Acoustically induced transparency using fano resonant periodic arrays. *Journal of Applied Physics*, 118(16) :164901, 2015.
- [77] V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values ϵ of and μ . *Soviet Physics Uspekhi*, 10(4) :509, 1968.
- [78] Y. Lai, H. Chen, Z.-Q. Zhang, and C. T. Chan. Complementary media invisibility cloak that cloaks objects at a distance outside the cloaking shell. *Physical Review Letters*, 102(9) :093901, 2009.
- [79] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85(18) :3966, 2000.
- [80] N. Fang, H. Lee, C. Sun, and X. Zhang. Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *Science*, 308(5721) :534–537, 2005.
- [81] J. B. Pendry and S. A. Ramakrishna. Focusing light using negative refraction. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 15(37) :6345, 2003.
- [82] A. Sukhovich, L. Jing, and J. H. Page. Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Physical Review B*, 77(1) :014301, 2008.
- [83] J. Li and C. T. Chan. Double-negative acoustic metamaterial. *Physical Review E*, 70(5) :055602, 2004.
- [84] R. Zhu, X. N. Liu, G. K. Hu, C. T. Sun, and G. L. Huang. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nature Communications*, 5, 2014.
- [85] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 292(5514) :77–79, 2001.
- [86] Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, and J. Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Physical Review Letters*, 99(9) :093904, 2007.
- [87] S. Guenneau, A. Movchan, G. Pétursson, and S. A. Ramakrishna. Acoustic metamaterials for sound focusing and confinement. *New Journal of Physics*, 9(11) :399, 2007.
- [88] N. Kaina, F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Negative refractive index and acoustic superlens from multiple scattering in single negative metamaterials. *Nature*, 525(7567) :77–81, 2015.
- [89] T. Brunet, . Merlin, B. Mascaró, K. Zimny, J. Leng, O. Poncelet, C. Aristégui, and O. Mondain-Monval. Soft 3d acoustic metamaterial with negative index. *Nature Materials*, 14(4) :384–388, 2015.
- [90] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Physical Review Letters*, 76(25) :4773, 1996.
- [91] V. N. Alekseev and S. A. Rybak. Gas bubble oscillations in elastic media. *Acoustical Physics*, 45 :535–540, 1999.

Sommaire

3.1	Le plan de bulles	112
3.1.1	Transmission par un plan de bulles	112
3.1.2	Application à la rhéologie haute fréquence	114
3.1.3	Une deuxième application : Conception d'un méta-écran su- per absorbant	118
3.1.4	Conclusion	125
3.2	Réfraction négative : conception d'une lentille plate	126
3.2.1	Cristaux phononiques et réfraction négative	127
3.2.2	Une nouvelle approche combinant résonances individuelles et effets cristallins	129
3.3	Conclusions	138
	Bibliographie	139

En dépit de leur structuration à des échelles bien inférieures à la longueur d'onde, nos métamatériaux bulleux sont sensibles à la distribution spatiale des diffuseurs qui les composent. Ce constat nous invite à étudier le cas des cristaux de bulles. Dans cette partie, nous nous intéresserons dans un premier temps au cas d'un cristal monocouche, c'est-à-dire d'un plan de bulles périodique. Le papier bulle (cf. Fig. 3.1) en est un exemple de la vie courante. Nous montrerons que les propriétés de transmission d'un tel cristal monocouche peuvent être prédites analytiquement et que cela permet d'envisager des applications concrètes, d'une part pour la caractérisation d'élastomères et, d'autre part, pour la conception de revêtements anéchoïques pour l'acoustique sous-marine. Enfin, nous verrons que des cristaux réalisés à partir de l'assemblage de plusieurs de ces couches peuvent posséder des propriétés de transmission étonnantes qui résultent d'une combinaison entre résonance des bulles et effets cristallins.

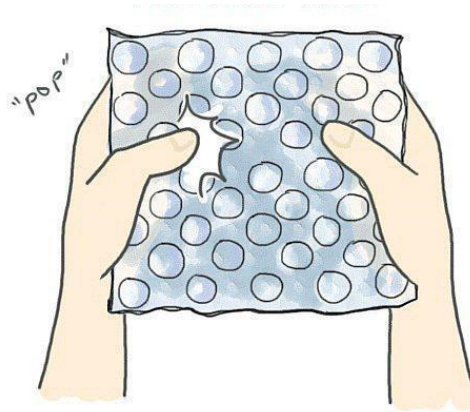


FIGURE 3.1 – Un exemple de cristal monocouche : le papier bulle.

3.1 Le plan de bulles

On propose ici d'étudier les propriétés de la transmission par un plan de bulles cristallin.

3.1.1 Transmission par un plan de bulles

On se place dans la situation représentée sur la figure 3.2. Un cristal monocouche de maille carrée est soumis à une onde plane progressive $p_{\text{inc}} = p_0 e^{i(k_0 z - \omega t)}$. Le paramètre

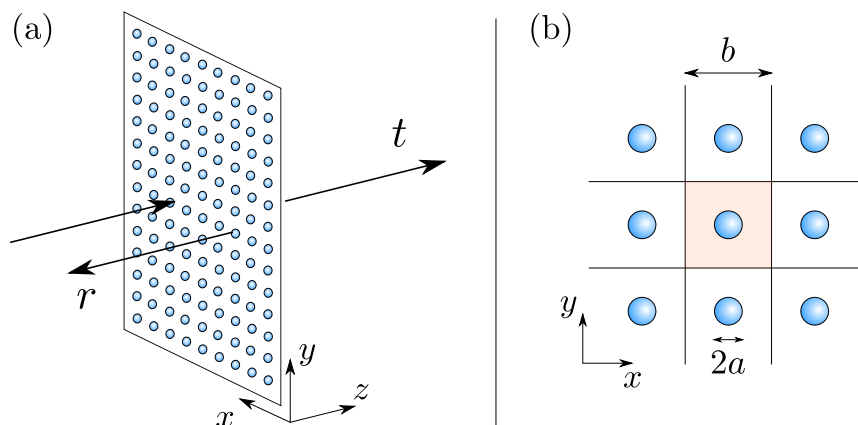


FIGURE 3.2 – (a) Un plan de bulle est soumis à une onde plane se propageant selon les z croissants. On cherche à déterminer les coefficients de transmission t et de réflexion r . (b) Détail de la périodicité : la maille élémentaire est une maille carrée de paramètre b . Le dispositif est insonifié sous incidence normale.

de maille b est petit devant la longueur d'onde λ_0 de sorte que l'on s'attend à ce que les bulles répondent de manière collective. On suppose donc que notre plan de bulles peut être remplacé par une couche homogène de concentration surfacique $n_s = 1/b^2$. Dans l'approximation de la diffusion simple, les coefficients en transmission et en réflexion s'écrivent [1, 2] :

$$\begin{aligned} t &= 1 + iKf \\ \text{et } r &= iKf. \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec

$$K = \frac{2\pi n_s}{k_0}. \tag{3.2}$$

Toutefois, dans le cas qui nous intéresse, la diffusion multiple est susceptible d'introduire un couplage qui, comme on l'a vu au chapitre précédent, est intimement lié aux positions des bulles. On peut alors faire appel à une fonction de diffusion corrigée F , tenant compte du couplage, en suivant l'approche de Leroy *et al* [3]. Pour une insonification par une onde plane, toutes les bulles du système sont équivalentes. On peut donc prendre l'exemple d'une bulle quelconque que l'on repèrera par son indice

k . La pression qu'elle ressent est la somme du champ balistique et des contributions des autres bulles du plan. En notant d_j la distance qui la sépare de chacune des autres bulles, on peut écrire :

$$p = p_0 + pf \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{ik_0 d_j}}{d_j}. \quad (3.3)$$

On peut alors faire intervenir la fonction de diffusion corrigée qui vérifie $Fp_0 = fp$. L'équation (3.3) devient

$$p_0 \frac{F}{f} = p_0 + p_0 F \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{ik_0 d_j}}{d_j}. \quad (3.4)$$

De même, en définissant le facteur de couplage $i\tilde{K} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{ik_0 d_j}}{d_j}$, on obtient

$$F = \frac{f}{1 - i\tilde{K}f}. \quad (3.5)$$

Il reste à calculer \tilde{K} . Dans le cadre de l'approximation de milieux continus et, en introduisant une distance d'exclusion d ,

$$\tilde{K} = \frac{1}{i} \int_d^{\infty} e^{ik_0 r} 2\pi n_s dr = K e^{ik_0 d}. \quad (3.6)$$

On peut préciser la valeur de d à l'aide de considérations géométriques. Il s'agit de la distance en-deçà de laquelle on ne peut trouver aucune bulle voisine. Il serait naturel de porter notre choix vers la maille élémentaire dont la surface vaut $b^2 = 1/n_s$. Cependant, l'intégration suppose ici une géométrie isotrope ; il convient donc de considérer un disque de surface équivalente : c'est-à-dire de rayon $b/\sqrt{\pi}$. Il n'y a aucune raison de trouver une voisine à l'intérieur de celui-ci et on adoptera $d = b/\sqrt{\pi}$. Une validation expérimentale de ce choix a été apportée dans [3]. Puisque $k_0 b \ll 1$, on peut écrire

$$\tilde{K} = K e^{ik_0 b/\sqrt{\pi}} \simeq K \left(1 + i \frac{k_0 b}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (3.7)$$

On obtient finalement la transmission :

$$t = 1 + \frac{iKf}{1 + Kf \frac{k_0 b}{\sqrt{\pi}} - iKf} \quad (3.8)$$

Soit, en introduisant l'expression de la fonction de diffusion (1.22),

$$t = 1 + \frac{iKa}{(\omega_M^2/\omega^2 - 1 + 2\sqrt{\pi} \frac{a}{b}) - i(\delta^{\text{th}} + \delta^{\text{vis}} + Ka)}. \quad (3.9)$$

Ce résultat est riche d'enseignements. Analysons d'abord le terme de pertes. La composante classiquement associée au rayonnement d'une bulle unique, $k_0 a$, est ici remplacé par Ka qui peut donc être interprété comme le rayonnement du plan de bulles.

En effet, ce dernier s'écrit aussi $Ka = Nka/(2\pi)$ où $N = (\lambda_0/b)^2$ est le nombre de bulles oscillant en phase. Le plan de bulles rayonne donc $N/(2\pi)$ fois mieux qu'une bulle unique. Et, puisque $k_0b \ll 1$, N est généralement grand. Il l'est d'ailleurs d'autant plus que le plan est concentré.

Intéressons-nous maintenant à la partie réelle du dénominateur. Ici aussi, on note une différence avec le cas de la bulle unique. En effet, la pulsation de résonance du système n'est plus la résonance de Minnaert mais est décalée vers les hautes fréquences :

$$\omega_0 = \frac{\omega_M}{\sqrt{1 - 2\sqrt{\pi}\frac{a}{b}}}. \quad (3.10)$$

On peut interpréter ce décalage comme résultant de la corrélation extrême qui règne dans le cristal [3]. À titre d'illustration, considérons le cas du plan de bulles désordonné : la distance d'intégration d tend vers 0 ce qui suppose que le plan résonne à la fréquence de Minnaert.

3.1.2 Application à la rhéologie haute fréquence

Ainsi, nous disposons d'un modèle permettant de prévoir la transmission à travers un plan de bulles de maille carrée. Inversement, on peut utiliser le modèle pour extraire de nos mesures, des informations sur le plan de bulles utilisé. En particulier, on s'intéresse ici au cas où, connaissant la périodicité du cristal, on cherche à déterminer les propriétés du milieu dans lequel les bulles sont piégées. De façon générale, on peut décrire le comportement des matériaux visco-élastiques grâce à leur module de cisaillement $G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$. La partie réelle, aussi appelée module élastique, permet de caractériser la réponse élastique des chaînes polymères. On obtient les valeurs de G' les plus élevées pour les matériaux les plus durs. Le module élastique se répercute sur la résonance de Minnaert des bulles comme le prévoit la relation suivante [4] :

$$\omega_M^2 = \frac{3\gamma P_0 + 4G'}{\rho_0 a^2} \quad (3.11)$$

Or, la fréquence de résonance du plan de bulles ω_0 est proportionnelle à ω_M . On s'attend donc à ce que G' affecte directement la transmission.

La partie imaginaire, appelée module de pertes, est liée à la viscosité dynamique η de l'élastomère via la relation $G'' = \eta\omega$. Elle affecte donc le taux d'amortissement visqueux $\Gamma^{\text{vis}} = 4\eta/(\rho_0 a^2)$ et devrait donc, elle aussi, influencer la transmission.

Ainsi, la mesure du champ transmis est susceptible de nous livrer des informations sur le matériau emprisonnant les bulles. Cette perspective n'est pas totalement anodine car les appareillages classiques de rhéologie n'opèrent généralement qu'à basse fréquence. La solution la plus efficace consiste alors à invoquer l'équivalence temps-température afin de prédire le comportement pour les plus hautes fréquences [5]. Mais l'extrapolation de l'évolution constatée à basse fréquence n'est pas toujours possible en raison du changement de comportement associé à la transition vitreuse. Celle-ci peut être interprétée comme une manifestation du changement des échelles spatiales

associées à la relaxation des chaînes polymère. Par exemple, les mouvements qui prédominent à basse fréquence sont principalement les mouvements coopératifs de la chaîne principale. En revanche, à haute fréquence, on assiste plutôt à une réorganisation des conformations locales. Pour l'ensemble de ces raisons, le plan de bulles constitue un outil intéressant dans l'optique de sonder les propriétés de matériaux élastiques aux hautes fréquences.

3.1.2.1 Réalisation du plan de bulles

Notre premier plan de bulles a été réalisé via la méthode développée au laboratoire durant la thèse d'Alice Bretagne [6]. Cette méthode est schématisée sur la figure 3.3. Le principe de cette technique consiste à créer des inclusions dans une

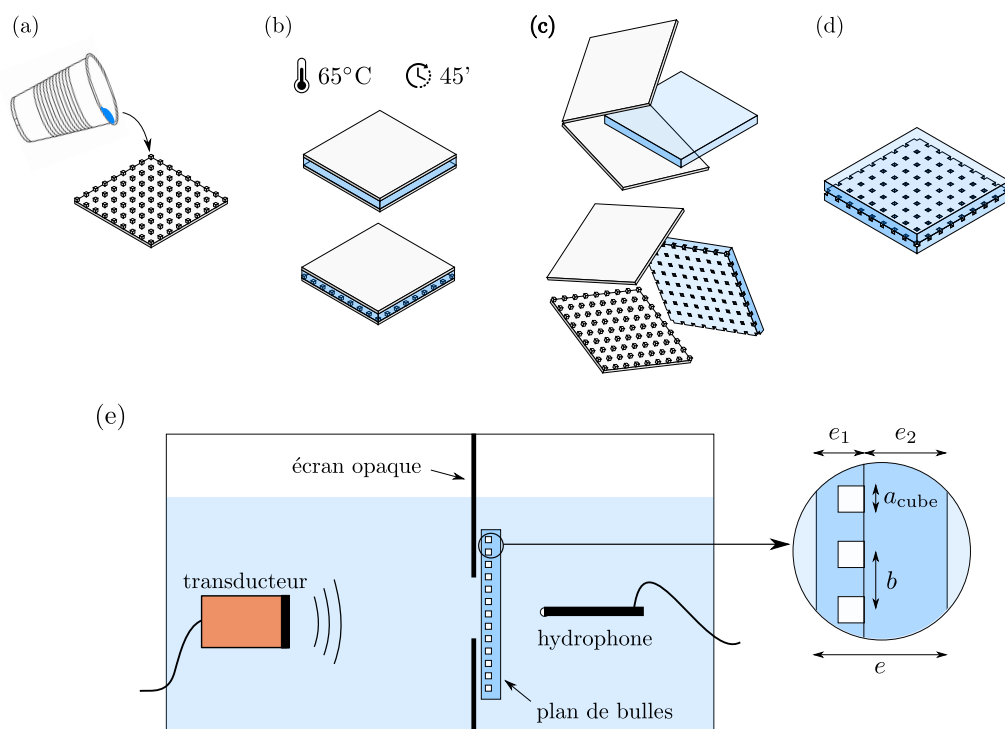


FIGURE 3.3 – Réalisation pratique d'un cristal monocouche de bulles dans du PDMS : (a) On verse le mélange monomère-réticulant sur une surface texturée. (b) Après avoir scellé le moule, on laisse réticuler pendant 45 minutes à 65°C. On répète l'opération avec un second moule non texturé. (c) Après cuisson, le polymère devient solide et peut donc être démoulé. (d) On joint les deux blocs de PDMS de manière à ce que les bulles soient isolées de l'extérieur. (e) Le plan de bulles ainsi obtenu est finalement immergé dans l'eau afin de mesurer sa transmission.

couche d'élastomère. Le polydiméthylsiloxane (PDMS) s'y prête particulièrement bien puisqu'il réticule sous l'effet de la température, ce qui permet de le mouler. Il a été montré [6–8] que, tant que le module élastique G' n'était pas trop élevé, la forme des

bulles n'affectait pas leur résonance qui conserve son caractère basse fréquence monopolaire. Pour des raisons pratiques, nous allons donc concevoir des bulles cubiques de côté $a_{\text{cube}} = 590 \mu\text{m}$ disposées selon une maille carrée de paramètre $b = 2 \text{ mm}$. C'est alors le volume d'air emprisonné qui permet de déterminer la fréquence de résonance. Le rayon a à considérer pour la formule (3.9) est donc celui de la bulle sphérique de même volume que nos cubes ; à savoir $a = 3^{1/3}a_{\text{cube}}/(4\pi)^{1/3}$.

Après avoir mélangé le monomère à son agent réticulant dans les proportions 10/1, on dégaze le mélange à la cloche à vide avant de le verser sur le moule. On referme ce dernier en prenant soin d'ajuster l'épaisseur e_1 de la couche de PDMS finale. On fait de même avec un second moule parfaitement plat de manière à fabriquer une couche lisse d'épaisseur e_2 . On laisse ensuite réticuler à 65°C pendant 45 minutes. Une fois la réticulation complète, on procède au démoulage et on applique la surface de PDMS texturée à une surface lisse de manière à isoler nos bulles cubiques.

Ce type de procédé est souvent utilisé dans le domaine de la microfluidique. On trouve essentiellement deux variantes de PDMS commerciales : le Sylgard 184 et le RTV615. Les compositions de ces deux produits sont soigneusement tenues secrètes. Mais le RTV615 a la réputation d'être plus adapté à la réalisation de microvalves grâce à sa plus grande ductilité. Il est facile d'envisager que cette propriété se répercute sur sa rhéologie. Nous nous proposons donc de passer ces deux matériaux à notre banc d'essai.

3.1.2.2 Résultats

Comme sur la figure 3.3(e), les plans de bulles sont immergés tour à tour dans une cuve remplie d'eau et placés derrière un écran opaque aux ultrasons et présentant une ouverture circulaire de 5 cm de diamètre, de manière à nous prémunir des réflexions parasites. On peut également s'affranchir de ces dernières en travaillant avec des impulsions suffisamment brèves pour pouvoir séparer temporellement le signal des échos.

On réalise la mesure du champ transmis pour chacune des impulsions avec et sans écran de bulles. On extrait ainsi la valeur absolue du coefficient $|t|$ telle que reproduite sur la figure 3.4. On y reconnaît le comportement caractéristique d'une résonance pour laquelle l'écran de bulle semble devenir extrêmement occultant. On cherche alors les valeurs de η et G' qui rendent le mieux compte de l'évolution observée. Finalement, le meilleur accord est obtenu pour les valeurs suivantes :

PDMS	G' (MPa)	η (Pa.s)
RTV615	0.6	1.5
Sylgard	1.8	2.5

Ici, on a considéré que le module élastique G' était indépendant de la fréquence ce qui n'est pas tout à fait exact mais constitue une approximation raisonnable pour les

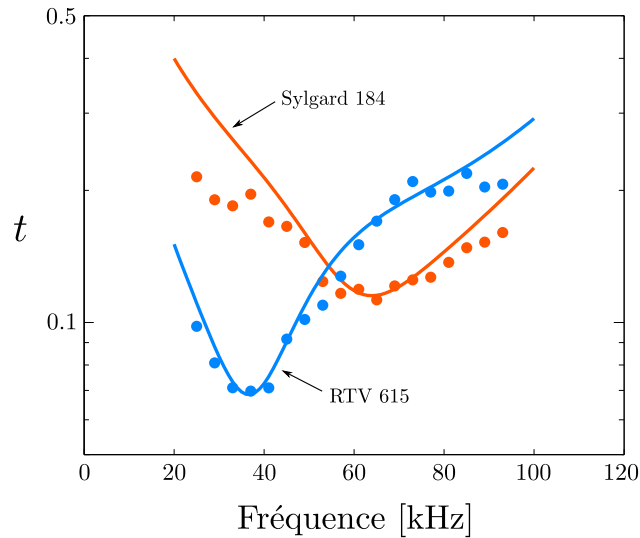


FIGURE 3.4 – Coefficient de transmission mesuré expérimentalement (symboles) et prévu par la formule (3.9) (trait) pour le RTV 615 (bleu) et le Sylgard 185 (rouge).

plages de fréquence étroites qui nous intéressent. Le RTV615 semble donc à la fois plus souple et moins visqueux que le Sylgard, ce qui pourrait justifier le fait qu’il soit privilégié dans la réalisation de microvalves.

Vieillessement du RTV615

Après ces premiers résultats, on souhaite mettre en évidence des variations rhéologiques plus ténues. Les utilisateurs de PDMS sont familiers du phénomène de vieillissement. S’il est apprécié pour sa grande versatilité, ce matériau pose problème en termes de répétabilité. En effet, le mécanisme de réticulation des chaînes est un phénomène complexe qui dépend des conditions de travail et qui est souvent incomplet. Une image très simplifiée consiste à considérer le polymère comme un grand plat de spaghettis dont le degré d’enchevêtrement, qui croît au cours de la polymérisation, est tel qu’il devient rapidement difficile pour les chaînes libres de rejoindre les sites réactifs. Une manifestation bien connue de ce phénomène est l’évolution des propriétés interfaciales du PDMS. Celui-ci, naturellement hydrophobe, est souvent traité au plasma à oxygène par les utilisateurs soucieux d’obtenir de bonnes conditions de mouillage. Mais ce traitement est généralement éphémère en raison de la migration des chaînes de faible masse moléculaire vers la surface. Or, si ces chaînes se déplacent sous l’effet de la diffusion, elles sont également amenées à poursuivre la réticulation selon des échelles de temps bien particulières. On se propose ici d’illustrer ce phénomène en mesurant la transmission d’un unique plan de bulles à divers instants de sa vie. La figure 3.5 recense les résultats obtenus avec le RTV615 en procédant à la mesure 1 heure, 1 jour et 9 jours après la fin de l’étape de réticulation. Le phénomène de vieillissement se manifeste, notamment, par un décalage de la résonance du plan de bulles vers les hautes fréquences qui témoigne d’une augmentation du module élas-

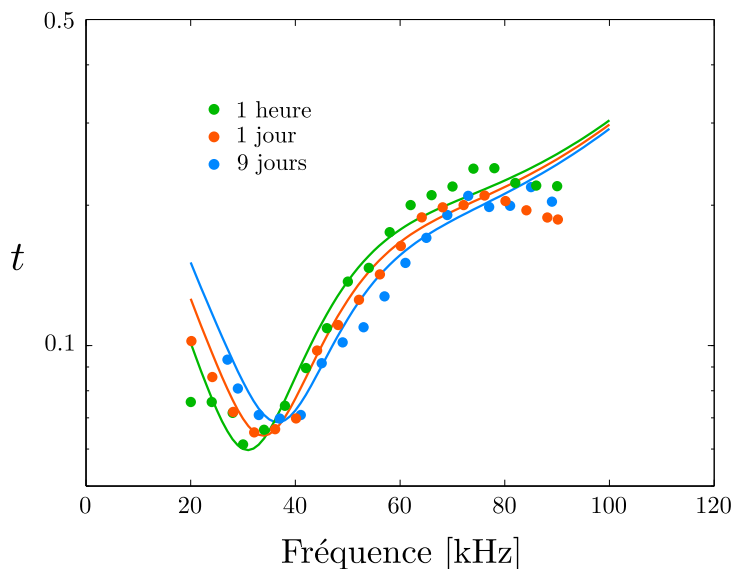


FIGURE 3.5 – Coefficient de transmission mesuré expérimentalement (symboles) et prévu par la formule (3.9) pour le même plan de bulle 1 heure (vert), 1 jour (rouge) et 9 jours (bleu) après la fin de l'étape de réticulation.

tique G' . Ce résultat est cohérent : plus le taux de réticulation augmente, moins les réarrangements de chaînes sont susceptibles de se produire. La réponse à une sollicitation devient alors essentiellement élastique. D'un point de vue plus quantitatif, on a obtenu un bon accord avec le modèle pour les valeurs suivantes :

temps	G' (MPa)	η (Pa.s)
1 heure	0.4	1.4
1 jour	0.5	1.4
9 jours	0.6	1.5

Quant à la viscosité η , elle ne semble pas évoluer de manière significative.

Ces résultats préliminaires sont encourageants. Ils montrent que les bulles emprisonnées dans un matériau visco-élastique peuvent être utilisées pour sonder les propriétés rhéologiques de celui-ci. Dans la suite, nous montrerons que l'on peut travailler sur l'accord entre ces propriétés visco-élastiques et les caractéristiques du cristal afin d'obtenir des propriétés intéressantes en termes d'isolation phonique.

3.1.3 Une deuxième application : Conception d'un méta-écran super absorbant

Une fois notre élastomère caractérisé, on peut apprendre à jouer sur les paramètres du plan de bulles afin de façonner la transmission. En particulier, nous verrons

dans cette partie que l'on peut favoriser l'absorption en choisissant un paramètre de maille adapté. On obtient ainsi un métamatériau, ou plus précisément un méta-écran super-absorbant où le préfixe "super" traduit le fait que le plan de bulles affecte considérablement le champ tout en conservant une épaisseur petite devant la longueur d'onde. Cette partie sera abordée de manière succincte car il s'agit de travaux qui ont été initiés en amont de cette thèse et auxquels j'ai été associé lors de mon arrivée.

3.1.3.1 Condition de couplage critique

On l'a vu, le plan de bulles devient extrêmement occultant aux alentours de ω_0 . La faible transmission mesurée peut traduire une forte réflexion et/ou une forte absorption. Le coefficient de réflexion est relié à la transmission par l'équation $t = 1 + r$. En reprenant la valeur de t donnée par l'équation (3.9), on obtient

$$r = \frac{iKa}{(\omega_M^2/\omega^2 - 1 + 2\sqrt{\pi} \frac{a}{b}) - i(\delta + Ka)}. \quad (3.12)$$

En évaluant cette expression en ω_0 , on obtient

$$r = -\frac{Ka}{\delta + Ka}. \quad (3.13)$$

Or on a vu que le terme Ka est proportionnel au nombre de bulles qui oscillent en phase coopérant ainsi au phénomène de "super-radiance". Pour les plans de bulles suffisamment concentrés il peut devenir très grand auquel cas on aura $r \simeq -1$. L'écran agit alors comme un miroir et l'énergie absorbée est infime. On peut évaluer cette dernière grâce à la condition de conservation de l'énergie :

$$A = 1 - |r|^2 - |t|^2. \quad (3.14)$$

En utilisant les équations (3.9) et (3.12) et, après évaluation en ω_0 , on trouve que

$$A(\omega_0) = \frac{2\delta Ka}{(\delta + Ka)^2}. \quad (3.15)$$

Le maximum potentiel pour A vaut donc 1/2 et est obtenu lorsque $\delta = Ka$, c'est-à-dire lorsque le plan de bulles rayonne exactement autant qu'il dissipe. Ce résultat peut être retrouvé en analysant l'interaction entre une onde plane et un résonateur ouvert comme l'a montré Bliokh [9]. Celui-ci décrit la résonance grâce à son facteur de qualité Q qu'il décompose en un terme de fuite Q_{fuite} et un terme de dissipation Q_{diss} . L'absorption est alors maximale lorsque les deux composantes s'équilibrent ; ce qui constitue la condition dite de "couplage critique" [10–12]. Nous parvenons à la même conclusion en prenant $Q_{\text{fuite}}^{-1} = Ka$ et $Q_{\text{diss}}^{-1} = \delta$, ce qui revient à considérer le plan de bulles comme un résonateur unique.

Dans le cas qui nous intéresse, est-il possible d'assurer une telle condition ? On rappelle que $\delta = \delta^{\text{th}} + \delta^{\text{vis}}$. Or, on ne maîtrise pas vraiment δ^{th} (cf équation (1.35)).

Il convient donc de se placer dans des conditions pour lesquelles $\delta^{vis} \gg \delta^{th}$. En se référant à la figure 1.4, on s'aperçoit que cela sera possible pour des bulles de petite taille. De plus, la bulle est ici entourée d'une matrice beaucoup plus visqueuse que l'eau. La condition devrait donc être plus facile à satisfaire que ce que prévoit la figure 1.4. Dans ces conditions, on aura alors $\delta \simeq \delta^{vis} = 4\eta/(\rho a^2 \omega)$. L'absorption de la moitié de l'énergie incidente sera obtenue pour une viscosité optimale

$$\eta^* = \frac{\pi Z a^3}{2b^2} \quad (3.16)$$

où $Z = \rho c$ est l'impédance de l'élastomère. Cette expression est encourageante puisqu'elle nous indique que l'on peut jouer à la fois sur a et sur b , paramètres pour lesquels on dispose d'une grande liberté de choix. Considérons un plan de bulles sphériques de rayon $a = 8 \mu\text{m}$ réalisé dans du PDMS de viscosité $\eta = 0.32 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ¹ et d'impédance $Z = 1.1 \text{ MRay}$. On a représenté sur la figure 3.6(a) l'évolution des coefficients de transmission, de réflexion ainsi que de l'absorption obtenus via les équations (3.9) et (3.12) (trait) ainsi que via une simulation par la méthode des éléments finis (symboles) lorsque l'on fait varier la distance b et pour une sollicitation à 2 MHz. On repère im-

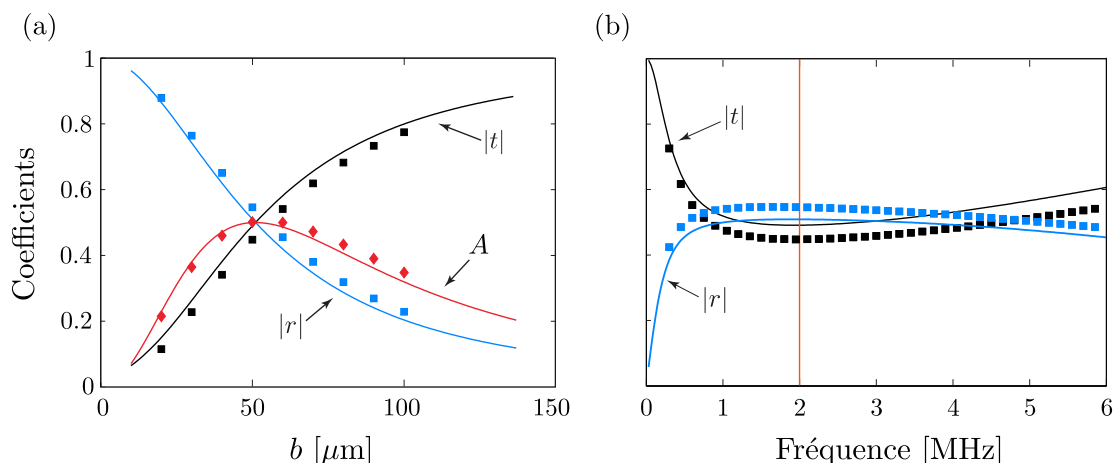


FIGURE 3.6 – (a) Évolution analytique (traits) et simulée (symboles) de la valeur absolue des coefficients t et r ainsi que de l'absorption $A = 1 - |t|^2 - |r|^2$ en fonction du paramètre de maille b pour des bulles sphériques de rayon $a = 8 \mu\text{m}$ placées dans du PDMS de viscosité $\eta = 0.32 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et d'impédance $Z = 1 \text{ MRay}$. On insonifie à la fréquence $f = 2 \text{ MHz}$. (b) Évolution analytique (traits) et simulée (symboles) de la valeur absolue des coefficients t et r en fonction de la fréquence pour un paramètre de maille $b = 50 \mu\text{m}$. Le trait rouge vertical indique la fréquence (2 MHz) utilisée pour (a).

médiatement le maximum d'absorption qui est atteint pour un paramètre de maille

1. La valeur choisie pour la viscosité est ici très inférieure à celle obtenue dans le paragraphe précédent. Cela vient du fait que la viscosité dépend de la fréquence et que l'on travaille désormais au voisinage du MHz.

$b = 50 \mu\text{m}$ correspondant bien à la condition $\eta = \eta^*$. On remarque par ailleurs que ce maximum d'absorption va de pair avec un équilibrage des coefficients de réflexion et de transmission $|r| = |t| = 1/2$. Sur la figure 3.6(b), on reporte l'évolution de $|r|$ et $|t|$ en fonction de la fréquence pour $b = 50 \mu\text{m}$. La plage de fréquences pour laquelle transmission et réflexion s'équilibrent est extrêmement large. Ce n'est pas vraiment surprenant puisque la valeur de η^* prévue par l'équation (3.16) ne dépend pas de la fréquence. Le comportement super absorbant devrait ainsi être robuste sur une large gamme de fréquences permettant ainsi d'envisager la conception de revêtements anéchoïques optimaux pour l'acoustique sous-marine.

3.1.3.2 Absorption totale

Les résultats qui précèdent montrent que notre "méta-écran" permet dans le meilleur des cas de dissiper la moitié de l'énergie incidente. Il existe deux stratégies permettant de compléter le processus d'absorption. La première consiste à émettre une onde plane de chaque côté de l'échantillon en adaptant les phases relatives de manière à réaliser un absorbeur cohérent parfait [13] ("Coherent Perfect Absorber" en anglais). Dans cette partie, nous allons décrire une seconde méthode qui consiste à placer un réflecteur parfait (ici une plaque en acier) derrière notre plan de bulles.

On note h la distance entre le centre des inclusions et la surface de la plaque en acier. L'eau et le PDMS étant relativement bien adaptés en impédance², on considère que le problème revient à déterminer la réflexion totale r_{tot} pour un système de deux interfaces, le plan de bulles et l'interface PDMS-acier, séparées d'une distance h . De même, on supposera que les nombres d'onde sont identiques dans l'eau et dans le PDMS et on les notera indifféremment k_0 . Le schéma associé est représenté sur la figure 3.7. En détaillant l'ensemble des trajets qui contribuent à la réflexion on trouve :

$$r_{\text{tot}} = r + \frac{r't^2 e^{2ik_0h}}{1 - rr' e^{2ik_0h}} \quad (3.17)$$

où k_0 est le nombre d'onde dans le PDMS pur. On considère que h est négligeable devant λ , ce qui permet de négliger les termes relatifs à la propagation dans (3.17). Puis, avec $t = 1 + r$, on obtient

$$r_{\text{tot}} = \frac{r + r' + 2rr'}{1 - rr'} \quad (3.18)$$

qui s'annule pour

$$r = -\frac{r'}{1 + 2r'}. \quad (3.19)$$

L'acier étant un réflecteur parfait, on a $r' \simeq 1$, ce qui signifie que l'absorption sera totale pour $r = -1/3$. En injectant ce résultat dans l'équation (3.12), on trouve la nouvelle condition de couplage critique $\delta = 2Ka$, soit encore $\eta = 2\eta^*$. Notons qu'une

2. $Z_{\text{PDMS}} = 1.10 \text{ MRay}$ et $Z_{\text{eau}} = 1.46 \text{ MRay}$

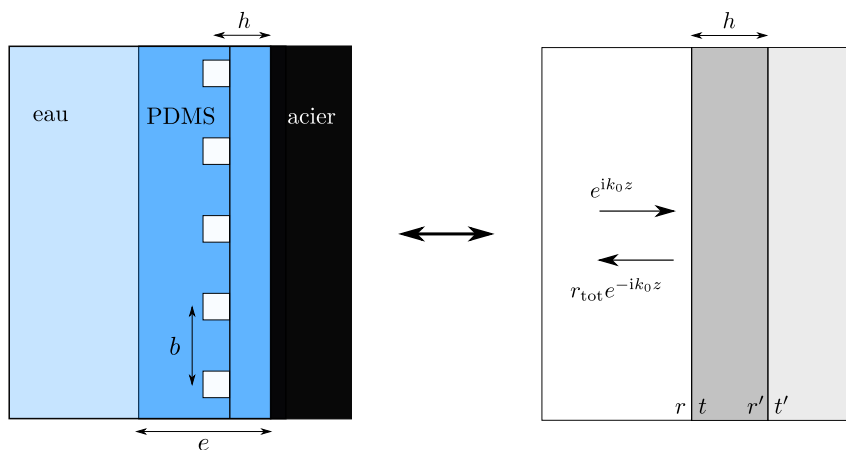


FIGURE 3.7 – Schéma représentant le plan de bulles placé sur une plaque d’acier et le système équivalent. On note h la distance entre le centre des bulles et la plaque d’acier, r et t les coefficients de réflexion et transmission à la première interface et r' et t' ceux à la seconde interface. L’objectif est d’annuler r_{tot} .

telle condition peut également être interprétée comme le point de fonctionnement qui permet de faire interférer les champs réfléchis par l’acier et par le plan de bulles de manière destructive.

3.1.3.3 Résultats expérimentaux

On souhaite réaliser l’expérience. Étant donné les dimensions en jeu, nous avons du faire appel à la technique de lithographie douce afin de réaliser le moule. Cette méthode est décrite dans la référence [14]. Elle consiste notamment à faire réticuler une résine photosensible préalablement déposée sur un wafer de silicium en l’insolant à travers un masque. S’ensuit une étape de lavage qui permet de dissoudre les zones non réticulées et de récupérer le moule souhaité. Outre la possibilité d’avoisiner des résolutions de l’ordre du micron, cette technique permet de fabriquer des inclusions cylindriques³ pour lesquelles on espère un accord avec le modèle encore meilleur que pour les cubes que nous avons utilisés jusqu’à présent. Nous avons ainsi pu obtenir des inclusions de diamètre $D = 24 \mu\text{m}$ et de hauteur $H = 13 \mu\text{m}$. Le rayon de la sphère de même volume vaut $a = 11 \mu\text{m}$. Dans ces conditions, le couplage critique est obtenu pour $b = \sqrt{\pi Z a^2 / \eta} = 118 \mu\text{m}$. Les mesures de réflexion ont été réalisées sur deux plans de bulles de même épaisseur⁴, $e = 230 \mu\text{m}$, mais de paramètres de maille différents : $b = 50 \mu\text{m}$ (correspondant à la condition de couplage critique en l’absence d’acier) et $b = 120 \mu\text{m}$ (correspondant à la condition de couplage critique en présence d’acier). Dans les deux cas, l’échantillon a été déposé directement sur la

3. En réalité, il est même plus aisé d’obtenir des cylindres plutôt que des cubes en raison de l’étape d’insolation qui donne des résultats d’autant plus probants que les formes sont régulières.

4. Pour obtenir de telles épaisseurs, il faut ajouter une étape de "spin-coating" à la méthode décrite dans 3.3.

plaque d'acier de telle sorte que $h = H/2 = 6.5 \mu\text{m}$.

Puisqu'on parle d'isolation sonore, il faut s'intéresser aux coefficients en énergie. On

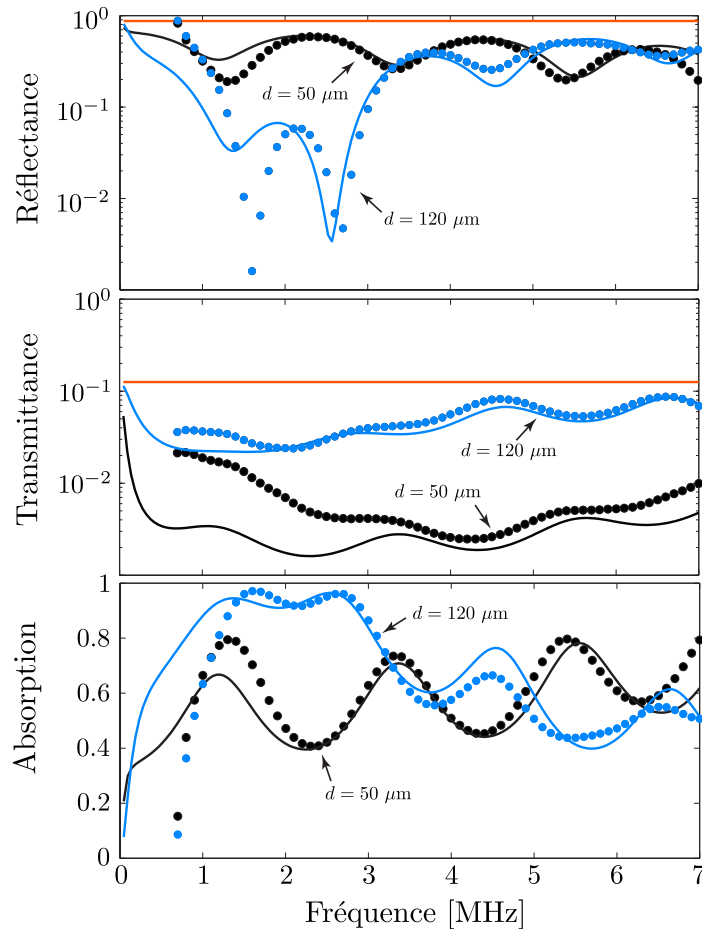


FIGURE 3.8 – Mesure expérimentale (symboles) et prédiction analytique (trait) de la réflectance (haut), transmittance (milieu) et absorption (bas) pour des plans de bulles de paramètres de maille $b = 50 \mu\text{m}$ (noir) et $b = 120 \mu\text{m}$ (bleu). Le trait horizontal rouge indique la réflexion et la transmission de la plaque d'acier seule.

a donc reporté les réflectance, transmittance et absorption mesurées et prévues par le modèle pour nos deux plans de bulles sur la figure 3.8. La ligne horizontale rouge représente le cas où le bloc d'acier est laissé nu. Dans ce cas, 88% de l'énergie incidente est réfléchi et les 12% restants sont transmis. Quel que soit l'écran utilisé, la réflectance est inférieure à celle obtenue dans le cas de l'acier seul ; ce qui est logique puisque les bulles introduisent de la dissipation. Mais l'effet est bien plus substantiel dans le cas du plan de paramètre $b = 120 \mu\text{m}$. En effet, la réflexion constatée est alors inférieure à 6% sur toute la gamme allant de 1.4 à 2.9 MHz avec une réflexion quasi-nulle aux alentours de 1.6 MHz. Les oscillations observées sont imputables aux modes de type Fabry-Pérot qui découlent de la rupture d'impédance entre PDMS et eau. De la même manière que pour la réflectance, la transmittance est atténuée lorsque

les plans de bulles sont présents. Pourtant, c'est le plan de paramètre $b = 50 \mu\text{m}$ qui semble alors le plus efficace. Intéressons-nous maintenant à l'absorption. Elle est supérieure dans le cas du plan de bulles optimisé pour des fréquences allant jusqu'à 5 MHz. On enregistre des performances particulièrement convaincantes pour la gamme allant de 1.4 à 2.9 MHz pour laquelle on constate une absorption supérieure à 91% avec des pics avoisinant les 100% pour 1.6 MHz et 2.7 MHz.

On peut également illustrer ces résultats en réalisant l'expérience suivante : le bloc d'acier est insonifié par une impulsion centrée sur 2 MHz émise depuis l'élément central d'une barrette piézoélectrique multi-éléments. On réceptionne ensuite le signal sur l'ensemble des éléments réalisant ainsi une acquisition spatio-temporelle (Bscan) du champ réfléchi. Sur la figure 3.9, on a reporté les résultats expérimentaux obtenus en l'absence (gauche) et en présence (droite) du méta-écran de bulles optimisé ($b = 120 \mu\text{m}$). La comparaison des deux expériences montre que le champ réfléchi est

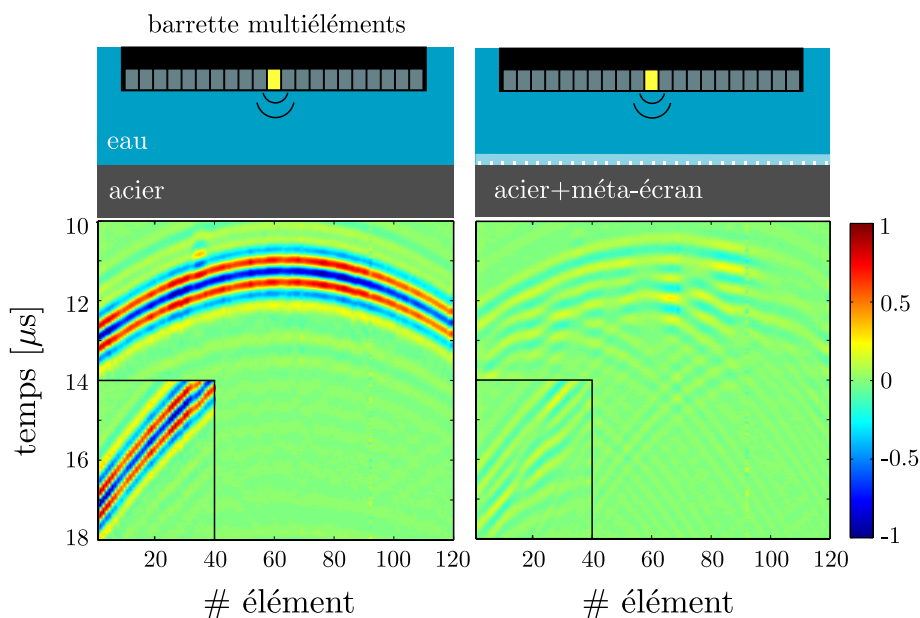


FIGURE 3.9 – Évolution temporelle du champ de pression mesurée en chaque élément d'une barrette échographique (Bscan) après qu'une impulsion centrée en 2 MHz ait été émise par l'élément central. À gauche le bloc d'acier est nu, à droite il est recouvert du méta-écran de paramètre de maille $b = 120 \mu\text{m}$. Le champ a été normalisé par la valeur maximale mesurée dans l'expérience de gauche. Les encarts représentent le champ mesuré après que l'impulsion ait été émise par l'élément situé à l'extrémité droite de la barrette (élément #120).

nettement atténué lorsque le bloc d'acier est recouvert du méta-écran, et ce même lorsque l'on dépasse le cadre de la simple incidence normale. On peut encore accentuer l'incidence en émettant depuis un élément situé à une extrémité de la barrette et en réceptionnant avec les 40 éléments situés à l'autre extrémité. On obtient alors

les résultats reproduits dans les encarts de la figure 3.9. Ici encore le champ réfléchi en présence du méta-écran est infime en comparaison de celui mesuré pour l'acier nu démontrant ainsi la robustesse de la superabsorption vis-à-vis de l'incidence.

En définitive, nos résultats montrent qu'en adaptant les caractéristiques du cristal aux propriétés visco-élastiques du polymère, on peut obtenir un méta-écran absorbant aussi fin qu'efficace. Un objet immergé qui en serait recouvert deviendrait ainsi peu réfléchissant et par conséquent indétectable via les techniques d'écho-location standard comme le sonar. Ces travaux ont récemment fait l'objet d'une publication [15].

3.1.4 Conclusion

Ainsi le plan de bulles est un objet intéressant dont on peut prévoir le comportement en transmission au moyen d'un modèle analytique convaincant. De cette manière, celui-ci peut être utilisé pour sonder les propriétés rhéologiques de matériaux pour lesquels on trouve peu d'informations pour les fréquences les plus élevées. Sa structuration constitue en outre un levier que l'on a pu exploiter de manière à concevoir un méta-écran superabsorbant avec les applications que l'on a évoquées en termes d'isolation et d'"invisibilité" acoustique.

Enfin, d'un point de vue plus pratique, le plan de bulles constitue l'élément de répétition idéal dans la perspective de concevoir des cristaux de bulles plus épais.

3.2 Réfraction négative : conception d'une lentille plate

Imaginons maintenant que l'on superpose un grand nombre de plans de bulles. On obtient alors un cristal. Si l'espacement entre plans successifs est de l'ordre de la longueur d'onde, des effets de Bragg peuvent se superposer aux effets d'hybridation. Ce phénomène a été exploité par Alice Bretagne pendant sa thèse pour apprendre à contrôler la transmission d'une onde ultrasonore avec une grande versatilité [14].

Même si le pas du réseau devient petit par rapport à la longueur d'onde, la façon d'aligner les plans successifs est susceptible d'influencer la transmission observée comme cela est illustré dans des expériences présentées en annexe B.1 ainsi que dans des simulations reportées en annexe B.2. Cela nous conduit à penser que l'on doit pouvoir exploiter la structure du cristal afin de moduler son comportement même dans un régime sub-longueur d'onde.

Dans cet esprit, nous proposons la conception d'une lentille plate (cf. figure 3.10)

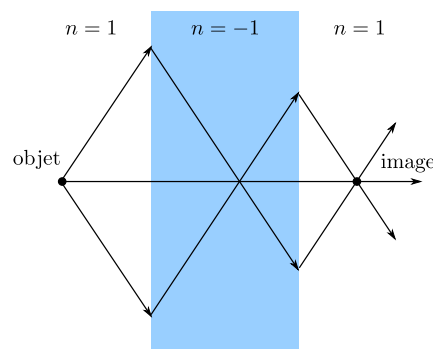


FIGURE 3.10 – Schéma représentant la focalisation par une couche cristalline d'indice $n = -1$.

qui tire ses propriétés d'une combinaison entre résonances individuelles des diffuseurs et distribution spatiale de ces derniers. L'originalité de l'approche proposée tient au fait qu'elle marie les deux stratégies qui ont été exploitées jusqu'à présent dans la littérature : concevoir un métamatériau constitué de diffuseurs sub-longueur d'onde dont les résonances permettent de créer, dans une même bande de fréquences, une compressibilité négative et une masse volumique négative, c'est-à-dire un matériau possédant un indice de réfraction effectif négatif ; ou bien, concevoir un cristal dont les propriétés de réfraction négative viendront d'un changement de concavité de sa relation de dispersion.

Ainsi, nous allons montrer qu'un arrangement périodique de bulles réparties selon une maille diamant se comporte comme une lentille plate.

3.2.1 Cristaux phononiques et réfraction négative

La communauté des cristaux photoniques s'est développée à la fin des années 80 [16, 17]; celle des cristaux phononiques au début des années 90 [18, 19]. Ces derniers consistent en des arrangements périodiques d'inclusions présentant un contraste en densité ou en compressibilité avec leur milieu hôte et de paramètres de maille du même ordre de grandeur que la longueur d'onde (voir figure 3.11). Ils permettent d'ob-

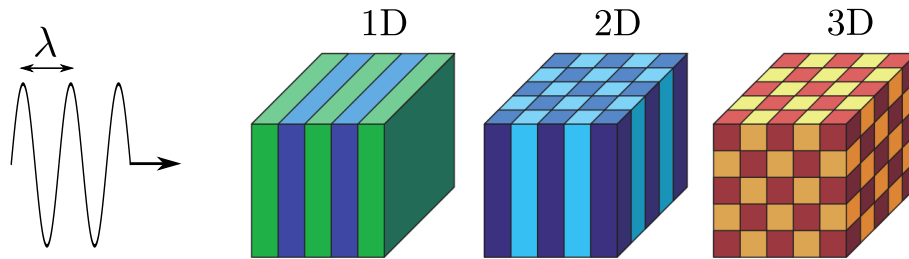


FIGURE 3.11 – Représentation schématique de cristaux phononiques 1D, 2D et 3D. Chaque couleur est associée à des propriétés acoustiques (ρ et χ) différentes. Reproduction de [20]

tenir un certain nombre de propriétés découlant de l'interférence, dite de Bragg, entre le champ excitateur et les différents ordres de diffraction associés au cristal. Du point de vue chronologique, c'est l'ouverture de bandes interdites absolues qui fut la première avancée significative dans le domaine. Notons d'ailleurs que le phénomène avait été observé par Neumann [21], Stokes [22] et évoqué par Rayleigh [23] avant même le développement du formalisme de la physique des solides et la contribution majeure de Bloch [24]. Depuis, d'autres types d'applications ont pu être mises en avant. On peut notamment évoquer le guidage permis par l'introduction de défauts [25, 26] ou encore la possibilité de combiner les effets de Bragg et d'hybridation afin de contrôler profondeur et largeur de la bande interdite. La dernière possibilité a été notamment explorée dans le cas de cristaux de bulles [14, 27, 28]. Mais l'application qui nous intéressera est celle consistant à concevoir un matériau d'indice négatif.

La première démonstration a été apportée par Yang [29] en 2004. L'idée consiste à tirer parti des propriétés d'un cristal constitué de billes de carbure de tungstène de 0.8 mm de diamètre réparties selon un arrangement périodique tridimensionnel cubique à faces centrées (CFC). Nous allons nous appuyer sur les résultats issus de ces travaux afin d'introduire les propriétés du cristal qui nous intéressera par la suite. On a représenté, en figure 3.12, sa cellule unité, sa première zone de Brillouin ainsi que sa courbe de dispersion (issue de [30]). Cette dernière exhibe une bande interdite absolue pour les fréquences de l'ordre du mégahertz. Au delà de cette région, la partie réelle du nombre d'onde diminue lorsque l'on augmente la fréquence. Cela signifie que la vitesse de groupe est négative. Ce constat peut surprendre puisqu'il semble contredire le principe de causalité. Mais il s'agit simplement de la conséquence

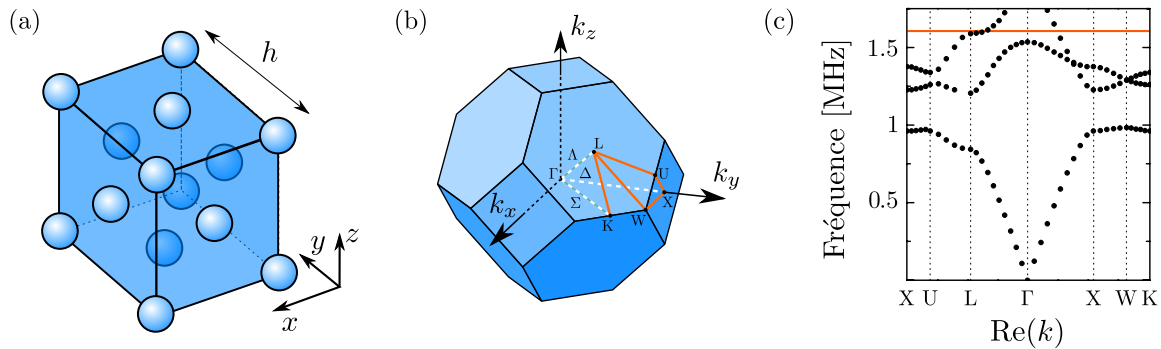


FIGURE 3.12 – (a) Cellule unité associée au réseau cubique faces centrées (CFC). (b) Première zone de Brillouin associée (faces bleues) et zone de Brillouin irréductible (traits rouges). (c) Courbe de dispersion pour un cristal de billes de carbure de tungstène de 0.8 mm de diamètre réparties aux nœuds d’un cristal CFC. Figure reproduite de [30]. La ligne horizontale rouge indique la fréquence de travail choisie dans [29] (1.57 MHz).

du choix qui consiste à représenter la structure de bande dans la première zone de Brillouin : la pente négative observée est simplement le résultat d’un effet de repliement. Remarquons également que, pour les fréquences immédiatement supérieures à 1.5 MHz, la courbe de dispersion ne prédit qu’une seule bande propagative ce qui simplifie l’étude du phénomène. Pour cette raison, les auteurs de [29] ont choisi de travailler à 1.57 MHz. On peut alors prévoir la réfraction à l’interface entre l’eau et le cristal en s’appuyant sur le tracé des contours isofréquence. Pour les raisons que l’on a évoquées, on ne peut pas se contenter des contours correspondants à la première zone de Brillouin. Il convient ici de se reporter à la zone étendue. Sur la figure 3.13, on a représenté l’interface air-eau (trait vertical vert) sur laquelle on dispose le point Γ correspondant à l’origine du réseau réciproque. Comme dans [29], le cristal est orienté de manière à ce que la direction ΓL corresponde à la normale à l’interface. On peut alors représenter les contours isofréquence correspondants à la zone de Brillouin étendue pour l’eau (cercle bleu) ainsi que pour le cristal (contours noirs). On applique ensuite la loi de Snell-Descartes qui impose la conservation de la composante tangentielle du vecteur d’onde (symbolisée par les pointillés noirs) de façon à déterminer le vecteur d’onde \mathbf{k} à l’intérieur du cristal. Une fois la solution obtenue, on peut également déterminer la vitesse de groupe via la relation $v_g(\omega) = \mathbf{grad}_k \omega$. La vitesse sera donc orthogonale aux contours isofréquence et, dans le cas présent, orientée vers l’intérieur de ces derniers puisqu’ils se contractent lorsque la fréquence augmente. Ici, la vitesse de groupe pointe vers la normale à l’interface. Le champ réfracté se situera donc du même côté de cette normale que le champ incident, ce qui constitue un témoignage de la réfraction négative.

De cette manière, les auteurs sont ainsi parvenus à focaliser derrière le cristal faisant ainsi la démonstration que celui-ci se comporte comme une lentille plate. Dans cet exemple, la qualité de la focalisation reste cependant limitée du fait de la forte ani-

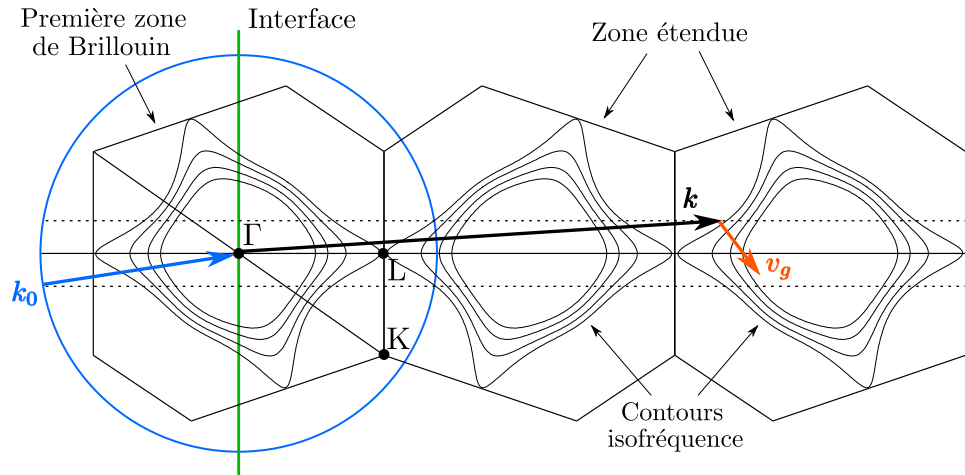


FIGURE 3.13 – Résolution graphique de la loi de Snell-Descartes dans le plan $(\Gamma L, \Gamma K)$. Les contours isofréquence sont issus de [29].

sotropie des contours isofréquence. Les vecteurs d’onde participant à la focalisation ressentiront tous des indices de réfraction différents. Il s’ensuit un étalement de la tache focale le long de l’axe de propagation. De plus, le champ incident sera partiellement réfléchi du fait de la rupture d’impédance à l’interface.

Signalons que ces deux difficultés ont pu être levées en utilisant un cristal phononique 2D de tiges d’acier disposées selon une maille triangulaire [31, 32]. Enfin, des travaux plus récents [33] montrent que l’association de la réfraction négative avec un mode de volume résonant au sein du cristal permettait de faire contribuer le champ évanescent à la focalisation qui devient alors super-résolue. Une démonstration équivalente a été proposée pour les ondes élastiques [34].

3.2.2 Une nouvelle approche combinant résonances individuelles et effets cristallins

3.2.2.1 Cristal CFC simple

La courbe de dispersion 3.12(c) montre que les contours isofréquence du cristal sont particulièrement isotropes pour la première bande propagative. D’ailleurs, parmi les 14 familles cristallines tridimensionnelles répertoriées, le réseau cubique faces centrées est celui qui possède la première zone de Brillouin la plus isotrope puisqu’il s’agit de l’octaèdre rhombique (figure 3.12(b)). C’est la raison pour laquelle les cristaux CFC sont souvent utilisés pour obtenir des bandes interdites absolues [35–37]. Ce réseau a même déjà fait l’objet d’études numériques dans le contexte de cristaux de bulles [38] ou même de ballons [39] pour lesquels les bandes interdites reportées sont, par ailleurs, extrêmement larges. C’est donc cette première bande propagative qu’il faut exploiter afin de rendre le processus de focalisation plus robuste. Seulement, l’indice de réfrac-

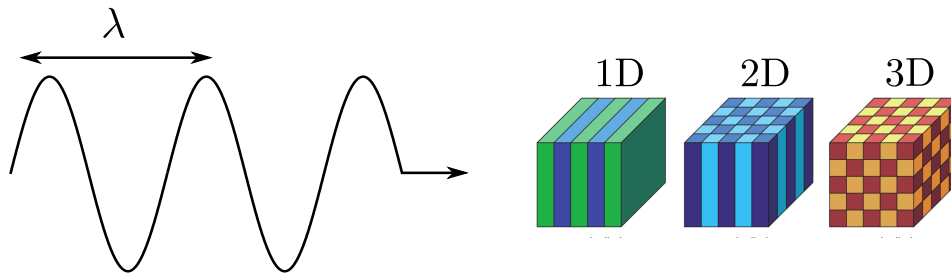


FIGURE 3.14 – Représentation schématique de métamatériaux 1D, 2D et 3D. Chaque couleur est associée à des propriétés acoustiques (ρ et χ) différentes. Reproduction de [20]

tion y est toujours positif. Il faut donc introduire un ingrédient supplémentaire : la résonance de Minnaert. En effet, comme on l'a vu à plusieurs reprises dans ce qui précède, la résonance permet de ramener au premier plan les effets de structure à des fréquences extrêmement basses. Dans cette région, la périodicité du cristal n'intervient plus directement puisqu'elle fait intervenir des distances qui sont plus petites que la longueur d'onde. En particulier, les interférences de Bragg ne se produisent plus (voir figure 3.14). Ce sont alors les effets de couplage entre bulles voisines qui prennent le relais. Considérons donc à nouveau un cristal de type CFC, peuplé de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ et de fraction volumique d'air $\phi = 0.5 \%$. Notons qu'une telle concentration volumique équivaut à un paramètre de maille $h = 1.5 \text{ mm}$ ce qui suppose que les bulles sont très espacées. On se place dans les mêmes conditions qu'en 2.3.2, c'est-à-dire qu'on considère des bulles d'air placées dans une eau à laquelle on rajoute un module élastique $G' = 5 \text{ MPa}$ de manière à décaler la résonance vers les hautes fréquences. Ceci nous permet de considérer des nuages de taille raisonnable.

On commence par simuler la courbe de dispersion de notre cristal CFC en utilisant la méthode des éléments finis. Pour apprécier l'effet de la résonance, on a tracé, sur la figure 3.15, le résultat dans le cas d'un cristal de bulles (trait noir) ainsi que dans le cas d'un cristal équivalent composé de billes rigides⁵ (trait rouge). À haute fréquence, les dispersions obtenues dans les deux cas sont relativement semblables. D'ailleurs, on remarque qu'aucun des deux cristaux n'exhibe de bande interdite absolue à haute fréquence. On peut attribuer cet effet à la faible concentration en diffuseurs. À basse fréquence, les différences sont plus significatives. Le cristal de bulles exhibe une bande interdite qui s'ouvre au voisinage de la résonance de Minnaert et qui est donc imputable à un effet d'hybridation. De plus, les contours isofréquence semblent particulièrement isotropes dans cette région. Mais on n'observe pas d'effet de repliement, ce qui suggère que l'indice de réfraction reste positif.

5. Pour les billes on a choisi $\rho = 3000 \text{ kg.m}^3$ et $c = 5000 \text{ m.s}^{-1}$

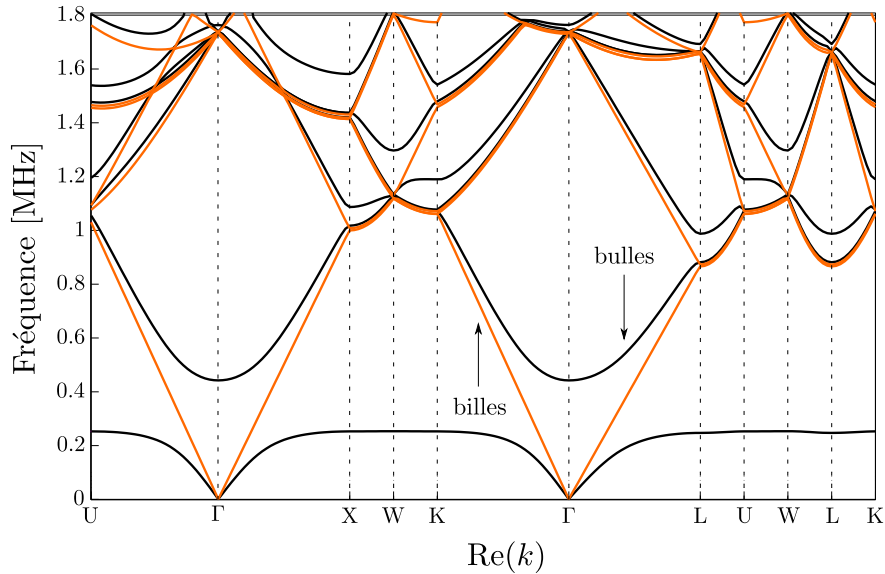


FIGURE 3.15 – Courbe de dispersion simulée pour un cristal CFC peuplé de bulles (noir) ou de billes rigides (rouge) de $100 \mu\text{m}$. Le paramètre de maille vaut $h = 1.5 \text{ mm}$ ce qui équivaut à une fraction volumique d’air $\phi = 0.5 \%$.

3.2.2.2 Diamant de bulles

Modification de la maille primitive

La discussion de la partie 2.3.2 concernant les conditions d’obtention de l’indice négatif pour les métamatériaux montre que celui-ci est conditionné par la négativité simultanée de la densité et de la compressibilité. Lorsqu’ils sont sollicités au delà de la fréquence de Minnaert, les milieux bulleux exhibent une compressibilité négative. En revanche, la densité, qui est généralement associée au mode à géométrie dipolaire, reste toujours positive. Une solution proposée par Ding *et al* [40] consiste à associer deux types de résonateurs, l’un monopolaire et l’autre dipolaire, au sein d’un même cristal. Les auteurs choisissent de placer des bulles et des billes recouvertes de caoutchouc aux nœuds de deux réseaux CFC identiques et décalés de $h/4$ selon les trois directions \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z . De cette façon, la structure de bande, ainsi que la première zone de Brillouin, restent les mêmes que pour le cristal CFC usuel, ce qui permet notamment de s’assurer de l’isotropie des contours isofréquence. La principale différence réside dans l’apparition d’une branche propagative de pente négative dans la région qui précède la bande interdite d’hybridation et pour laquelle la double négativité est effectivement observée.

L’arrangement proposé par Ding n’est pas anodin. En effet, des résultats récents obtenus dans le contexte de l’acoustique audible [41] montrent que l’introduction d’un second résonateur dans la maille primitive d’un réseau isotrope peut suffire à obtenir l’indice négatif sans même que les deux résonateurs soient forcément de nature différente. L’étude en question porte sur un métamatériau constitué de résonateurs de Helmholtz répartis selon un arrangement en nid d’abeille. Cet arrangement peut

également être décrit par une maille triangulaire aux nœuds de laquelle sont disposés deux résonateurs identiques décalés. La bipériodicité ainsi introduite permet à elle

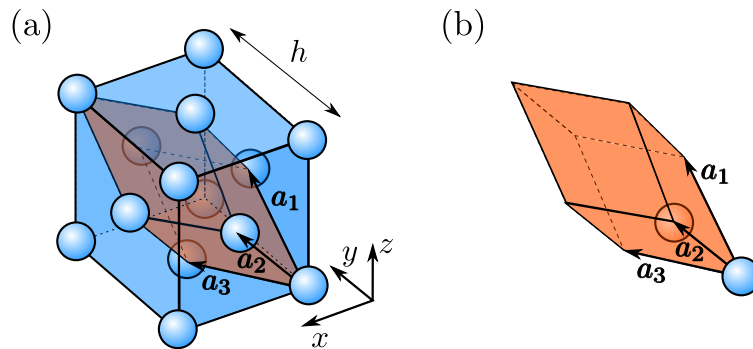


FIGURE 3.16 – (a) Cellule unité du réseau cubique faces centrées (CFC) et sa maille primitive (rouge). Les vecteurs \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y et \mathbf{a}_z sont les vecteurs primitifs. (b) Maille primitive avec une bulle en $\{0; 0; 0\}$ et une bulle en $\{h/4; h/4; h/4\}$ dans le repère $\{x; y; z\}$.

seule d'expliquer l'apparition d'une bande négative dans la même région en invoquant le couplage au sein de la cellule unité. Comme pour le cas des paires de bulles étudiées en 2.3.2, l'arrangement cristallin favorise l'interaction entre deux résonateurs voisins. De cette interaction résultent deux modes, l'un monopolaire et l'autre dipolaire.

On peut concevoir un arrangement analogue à trois dimensions en reprenant notre cristal CFC dont on a représenté la maille primitive sur la figure 3.16(a) et au sein de laquelle on ajoute désormais une seconde bulle, identique à la première. Pour que le comportement isotrope soit conservé, il faut que la nouvelle périodicité se répercute de façon équivalente selon les trois vecteurs primitifs \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y et \mathbf{a}_z . On choisit donc de placer la seconde bulle à la position $[1/4; 1/4; 1/4]$ qui correspond aux sites tétraédriques du réseau (voir figure 3.16(b)). Notre cristal est ainsi identique à celui proposé dans [40] à la différence près qu'il n'est peuplé que de bulles de rayon $a = 100 \mu\text{m}$. Nous avons ainsi affaire à un diamant de bulles.

Courbes de dispersion

Pour apprécier les modifications qui découlent de l'ajout de cette seconde bulle, on compare les structures de bande des deux cristaux (figure 3.17). La différence de comportement entre les deux cristaux est nette. En premier lieu, la bande interdite est plus large dans le cas du diamant (trait vert). Cela vient du fait que la fraction volumique d'air est de 1% dans le cas du diamant contre 0.5% pour le cristal CFC. Mais surtout, on remarque l'apparition d'une branche supplémentaire située sous la bande interdite dans le cas du diamant. L'agrandissement de 3.17(b) montre que cette branche possède une pente négative et qu'elle se comporte de manière analogue à la "branche optique" classiquement observée pour les cristaux dont la maille élémentaire contient

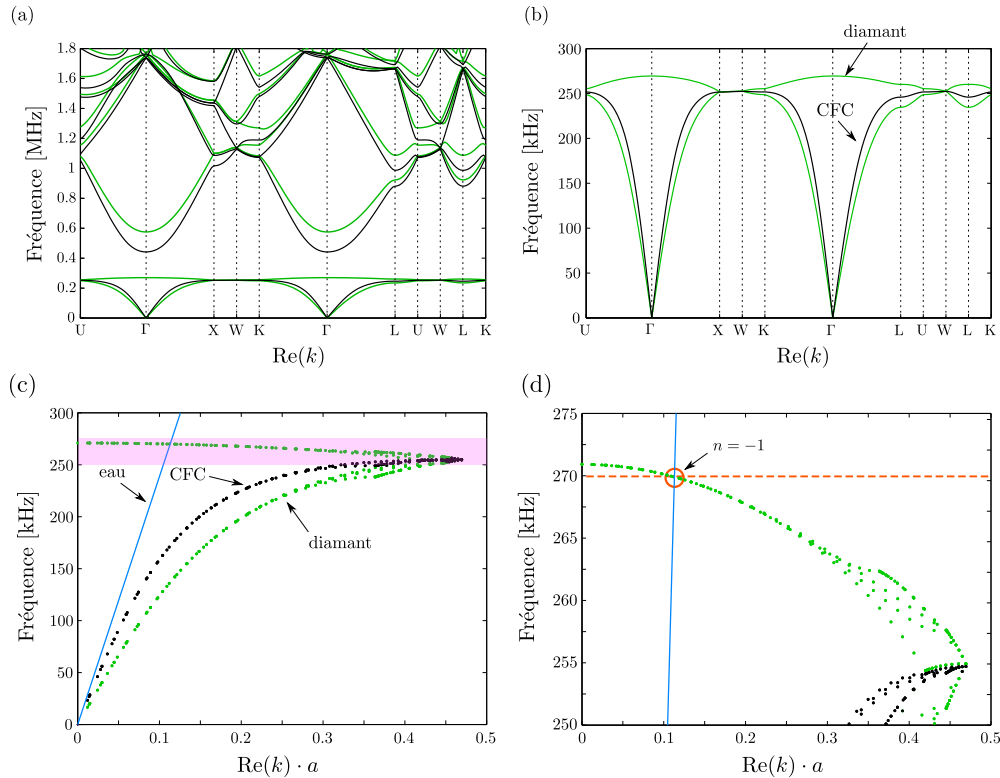


FIGURE 3.17 – (a) Courbe de dispersion simulée pour deux cristaux de bulles (rayon $a = 100 \mu\text{m}$) : Le CFC (noir) et le diamant (vert). Le paramètre de maille vaut $h = 1.5 \text{ mm}$ ce qui équivaut à une fraction volumique d'air $\phi = 0.5\%$ pour le cristal CFC et $\phi = 1\%$ pour le diamant. (b) Agrandissement de (a). (c) Partie réelle du vecteur d'onde réduit pour le diamant (vert), le cristal CFC (noir) et l'eau pure (bleu). On a superposé les différentes composantes selon les directions du cristal. (d) Agrandissement de (c) correspondant à la zone colorée. Le trait rouge horizontal représente la fréquence permettant d'obtenir l'équivalent d'un indice de réfraction $n = -1$.

deux "atomes". Ce résultat nous fournit un témoignage supplémentaire appuyant l'importance des deux ingrédients essentiels que constituent la résonance et la structure. En effet, si la structure permet d'introduire la bipériodicité susceptible d'engendrer la branche négative, la résonance amène le couplage sans lequel les effets de structure demeureraient imperceptibles à basse fréquence. Une autre propriété intéressante de la branche négative est sa largeur : dans le cas représenté en 3.17, elle avoisine 10% de la première bande propagative. Enfin, notons son caractère relativement isotrope qui nous sera d'une aide précieuse pour concevoir notre lentille de bulles. On peut illustrer ce dernier point en superposant les différentes composantes du vecteur d'onde correspondant aux différentes directions du cristal. Comme le montrent les figures 3.17(c) et (d), les points se superposent bien dans la partie supérieure de la courbe de dispersion. De plus, si on ajoute la relation de dispersion dans l'eau pure, on constate qu'elle

intercepte la branche négative pour une fréquence de 270 kHz qui est justement située dans la région la plus isotrope. Pour cette fréquence, le cristal devrait être équivalent à un matériau d'indice $n = -1$. Toutes les conditions sont donc réunies pour obtenir une focalisation performante.

Focalisation

On réalise un diamant numérique de 7 mm d'épaisseur, ce qui correspond à 5 répétitions de la cellule unité⁶. Sur les figures 3.18(b) et (c), on a représenté les cartes de champ respectivement obtenues en plaçant une source ponctuelle, émettant à 268.5 kHz, en $z = -7$ mm et en $z = -10$ mm. L'image se reforme derrière l'échan-

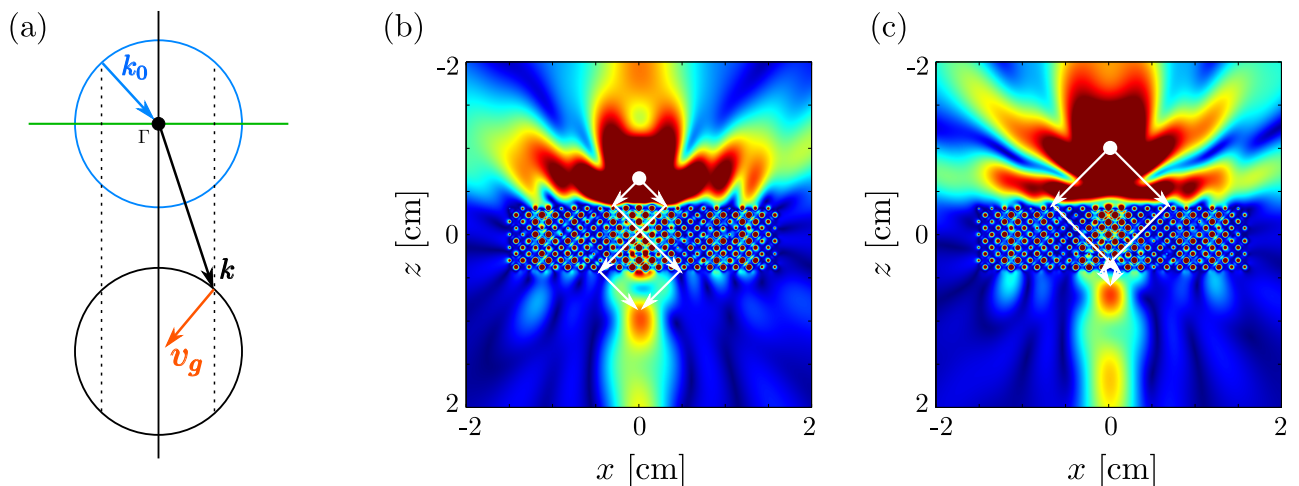


FIGURE 3.18 – (a) Représentation schématique de la loi de Snell-Descartes lorsque $n = -1$ et que les contours isofréquence sont isotropes. (b) Focalisation obtenue à 268.5 kHz pour une source ponctuelle placée en $z = -7$ mm et (c) même chose pour une source ponctuelle placée en $z = -10$ mm .

tillon. En traçant les rayons prévus par la loi de Snell-Descartes pour un indice de réfraction de $n = -1$ (voir figure 3.18(a)), on retrouve bien la position de l'image dans les deux cas. Enfin, on remarque que, lorsque l'on éloigne la source de la lentille, l'image se rapproche. Ces résultats montrent que l'on a bien une lentille plate d'indice $n = -1$. Pourtant, les cartes de champ laissent entendre que l'adaptation d'impédance n'est pas absolument irréprochable. En effet, si l'indice est relié à la vitesse par la relation $n = c/v$, l'impédance fait également intervenir la densité. Or, dans le cas des milieux insonifiés à basse fréquence, la densité est généralement assimilable à la densité de l'eau même à résonance. Mais ici les choses sont bien différentes. En modifiant la structure, nous avons introduit un couplage privilégié entre deux bulles voisines

6. Pour réaliser un diamant de bulles on peut simplement superposer des plans de maille carrée en décalant chaque plan d'une distance $h/2$ par rapport au précédent en alternant les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y .

occasionnant l'apparition d'un mode dipolaire qui, lui, est susceptible d'affecter notablement la densité du milieu. Cette rupture d'impédance suscite notamment une réflexion importante du champ incident à la première interface mais induit également un certain nombre de réflexions multiples au sein de la lentille. Ce sont ces réflexions qui provoquent l'écho de focalisation que l'on peut observer sur la figure 3.18(c).

Incidence oblique

On peut donner une illustration supplémentaire du phénomène de la réfraction négative en insonifiant notre cristal à l'aide d'un faisceau gaussien sous incidence oblique (comme en 2.3.2). On a fixé ici l'extension latérale minimale du faisceau gaussien à

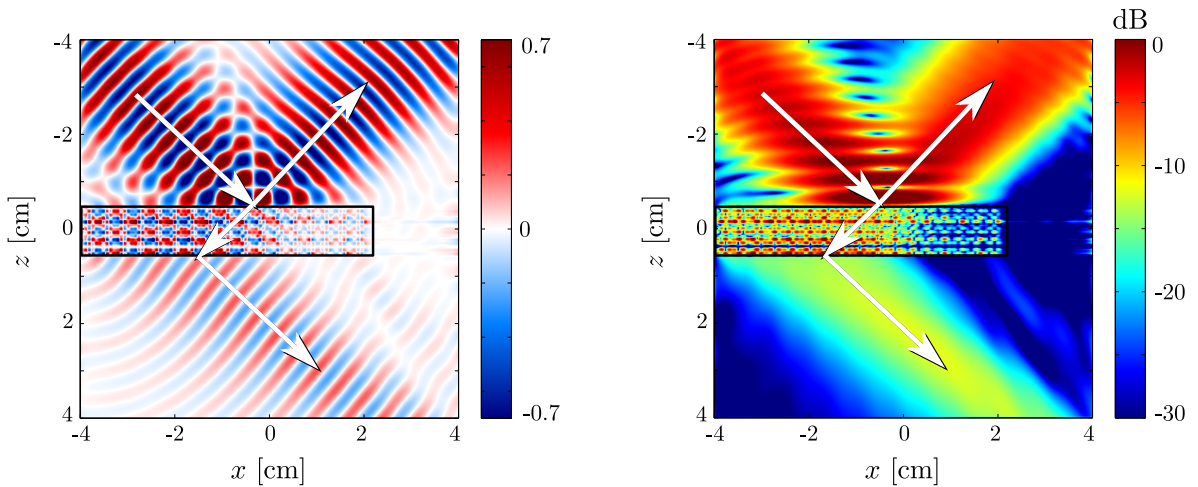


FIGURE 3.19 – Cartes de champ (gauche) et d'intensité (droite) obtenues pour un diamant de bulles d'épaisseur 1 cm et de largeur 6 cm soumis à un faisceau gaussien d'extension $w_0 = 8$ mm et d'incidence oblique $\theta = 45^\circ$. La fréquence d'insonification est 268.5 kHz ; soit la fréquence pour laquelle on attend un indice de réfraction $n = -1$. Les flèches symbolisent les rayons incident, réfléchi et transmis prévus par la loi de Snell-Descartes pour un indice de $n = -1$.

$w_0 = 8$ mm et l'angle d'incidence à $\theta = 45^\circ$. On génère un cristal suffisamment large (6 cm) pour limiter les effets de bords et suffisamment épais (1 cm soit 7 répétitions de la cellule élémentaire) pour pouvoir constater les effets de la réfraction. Sur la figure 3.19, on a représenté les cartes de champ (gauche) et d'intensité (droite) obtenues pour une fréquence de 268.5 kHz. Le champ incident est partiellement réfléchi à la première interface en raison de la rupture d'impédance évoquée précédemment. Intéressons-nous à la composante transmise. Elle est réfractée dans la direction des x négatifs ; c'est-à-dire du même côté de la normale à l'interface que le champ incident. L'angle de réfraction est, de plus, identique à l'angle d'incidence ce qui confirme que l'indice vaut bien -1 pour cette fréquence. Le même phénomène se reproduit à la seconde interface recréant ainsi le faisceau incident décalé vers les x négatifs. Enfin, la carte d'intensité montre que l'énergie se concentre dans la partie gauche du cristal,

ce qui prouve que c'est bien la vitesse de groupe qui pilote la réfraction négative.

Filtrage spatial

Enfin, une autre propriété intéressante de cette lentille est sa capacité à filtrer spatialement le champ incident.

On a vu que, dans la bande négative, les contours isofréquence se contractent lorsque l'on augmente la fréquence. En particulier, pour des fréquences supérieures à 270 kHz, la longueur d'onde au sein du cristal devient supérieure à la longueur d'onde dans l'eau. Dans le cas limite où la longueur d'onde dans le cristal est du même ordre de grandeur que l'extension spatiale de celui-ci on introduit une résonance de type Fabry-Pérot susceptible de fuir dans l'espace libre. Les caractéristiques de l'émission sont alors uniquement dépendantes de la géométrie du cristal. En particulier, dans le cas de la lentille plate, on peut générer de cette manière une onde quasi-plane. C'est ce que montre la figure 3.20. Ici, on a placé une source ponctuelle émettant à 271 kHz au voisinage ($z = -7$ mm) de l'échantillon de manière à s'assurer qu'une grande variété de vecteurs d'onde puissent être collectés. La partie réelle du champ (gauche) montre

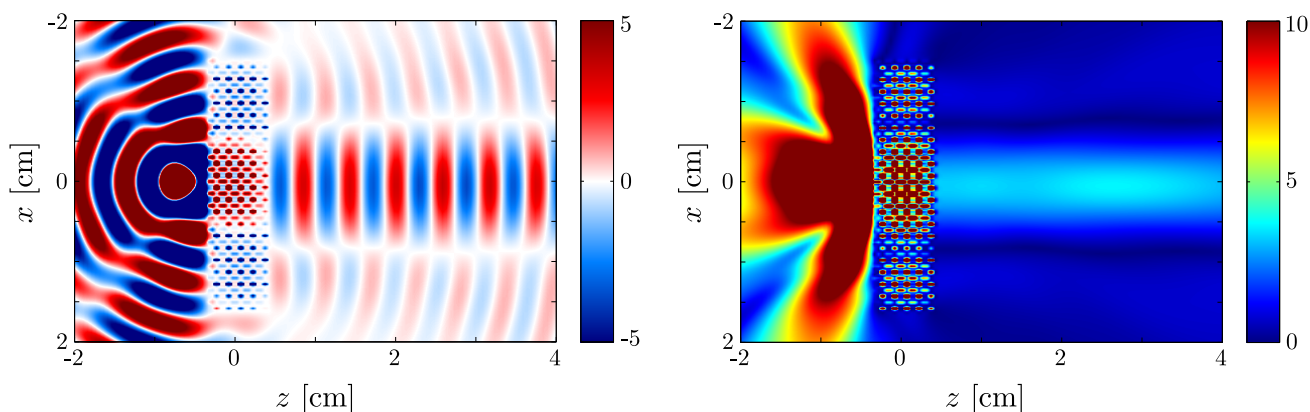


FIGURE 3.20 – Partie réelle (gauche) et valeur absolue (droite) du champ mesuré pour une insonification par une source ponctuelle positionnée en $z = -7$ mm et émettant à 271 kHz.

que la longueur d'onde dans le cristal est supérieure à la longueur d'onde dans l'eau. La valeur absolue (droite) montre que l'on a créé un mode de volume résonant au sein du cristal. L'onde transmise est quasi-plane. Les fronts d'ondes y sont strictement parallèles et la directivité est convaincante. Cependant, son extension latérale est finie et semble imposée par la longueur d'onde au sein du cristal. Ici, ce n'est pas directement le fait que l'indice soit négatif qui importe mais plutôt le fait que la branche négative nous donne accès à des nombres d'onde particulièrement faibles. Ces nombres d'onde existent également dans le cas général d'un milieu bulleux désordonné ou dans le cas d'un cristal conventionnel. Mais les fréquences associées sont le plus souvent situées dans la bande interdite d'hybridation ce qui ne permet pas de les exploiter. Ce type d'usage pourrait donc être intéressant dans l'optique de générer des ondes quasi-planes

d'extension latérale contrôlable.

3.3 Conclusions

Si les milieux désordonnés présentent l'avantage d'être aisément descriptibles grâce à l'approche statistique, les cristaux les plus simples peuvent également être modélisés et ne nécessitent pas, par définition, d'avoir recours à l'extraction du champ cohérent. C'est le cas du plan de bulles. En effet, nous avons vu que, pour cet objet relativement simple, on peut obtenir une prédiction convaincante pour les coefficients de transmission et de réflexion. Dans ce cas précis, la modélisation a eu un double intérêt. Elle nous a permis, d'une part, de sonder les propriétés viscoélastiques d'un élastomère inconnu en y emprisonnant un plan de bulles dont la géométrie était, elle, bien établie. Mais elle a également constitué un moyen de mener une étude paramétrique complète du système afin d'optimiser ses propriétés acoustiques aboutissant notamment à la réalisation d'un méta-écran super absorbant.

Ces mêmes plans de bulles ont ensuite été superposés au moyen de l'outil numérique afin de concevoir des cristaux épais. La description analytique n'est, dans ce cas, pas envisageable. Mais la simulation permet tout de même de comprendre le comportement du cristal. Nous nous sommes concentrés sur le seul arrangement cubique à faces centrées présentant l'avantage d'être particulièrement isotrope pour les basses fréquences. Ici encore, on peut sensiblement modifier les propriétés acoustiques de l'échantillon en altérant sa périodicité. Le diamant, résultat de l'enchevêtrement de deux mailles CFC décalées de $h/4$ dans chaque direction, constitue un exemple évocateur. Étant donné les dimensions associées à la périodicité introduite dans ce cas, les répercussions éventuelles sont attendues à haute fréquence. Mais la résonance de Minnaert change sensiblement la donne puisque le couplage entre les bulles voisines engendre un mode dipolaire responsable de l'apparition d'une branche négative avant la bande interdite d'hybridation. Nous avons eu l'occasion de présenter quelques manifestations et applications de l'indice négatif. Mais au delà des applications concrètes, le cheminement emprunté suggère l'existence d'une homologie entre les comportements des cristaux phononiques et des métamatériaux. D'ailleurs, l'essentiel des applications qui ont été envisagées dans une communauté (guidage et bandes interdites pour les cristaux phononiques ; réfraction négative pour les métamatériaux) ont par la suite pu être transposées dans l'autre. La physique n'est pas forcément si différente après tout. Dans ce dialogue, la résonance tient le rôle de l'interprète. En plus de sa capacité à conférer aux bulles un fort pouvoir diffusant à basse fréquence, elle nourrit le couplage et amplifie les effets de structure. C'est une excellente nouvelle pour les méta-ingénieurs de demain !

Bibliographie

- [1] P. M. Morse, H. Feshbach, et al. *Methods of theoretical physics*, volume 1. McGraw-Hill New York, 1953.
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition Volume II*, volume 1. Basic books, 2013.
- [3] V. Leroy, A. Strybulevych, M. G. Scanlon, and J. H. Page. Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles. *The European Physical Journal E*, 29(1) :123–130, 2009.
- [4] V. N. Alekseev and S. A. Rybak. Gas bubble oscillations in elastic media. *Acoustical Physics*, 45 :535–540, 1999.
- [5] J. D. Ferry. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons, 1980.
- [6] V. Leroy, A. Bretagne, M. Fink, H. Willaime, P. Tabeling, and A. Tourin. Design and characterization of bubble phononic crystals. *Applied Physics Letters*, 95(17) :171904, 2009.
- [7] E. Meyer, K. Brendel, and K. Tamm. Pulsation oscillations of cavities in rubber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 30(12) :1116–1124, 1958.
- [8] D. C. Calvo, A. L. Thangawng, and C. N. Layman. Low-frequency resonance of an oblate spheroidal cavity in a soft elastic medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(1) :EL1–EL7, 2012.
- [9] K. Y. Bliokh, Y. P. Bliokh, V. Freilikher, S. Savelev, and F. Nori. Colloquium : Unusual resonators : Plasmonics, metamaterials, and random media. *Reviews of Modern Physics*, 80(4) :1201, 2008.
- [10] H. A. Haus. *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.
- [11] Y. Xu, Y. Li, R. K. Lee, and A. Yariv. Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Physical Review E*, 62(5) :7389, 2000.
- [12] C. Wu, I. Burton Neuner, G. Shvets, J. John, A. Milder, B. Zollars, and S. Savoy. Large-area wide-angle spectrally selective plasmonic absorber. *Physical Review B*, 84(7) :075102, 2011.
- [13] Y. D. Chong, L. Ge, H. Cao, and A. D. Stone. Coherent perfect absorbers : time-reversed lasers. *Physical Review Letters*, 105(5) :053901, 2010.
- [14] A. Bretagne. *Manipulation d’ondes ultrasonores en milieux complexes : filtrage, guidage et focalisation*. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2011.
- [15] V. Leroy, A. Strybulevych, M. Lanoy, F. Lemoult, A. Tourin, and J. H. Page. Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens. *Physical Review B*, 91(2) :020301, 2015.
- [16] S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical Review Letters*, 58(23) :2486, 1987.
- [17] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters*, 58(20) :2059, 1987.

-
- [18] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 71(13) :2022, 1993.
- [19] M. S. Kushwaha and P. Halevi. Band-gap engineering in periodic elastic composites. *Applied Physics Letters*, 64(9) :1085–1087, 1994.
- [20] S. G. Johnson. Photonic crystals : Periodic surprises in electromagnetism. *Lecture 3 : Fabrication technologies for 3d photonic crystals*, 2005.
- [21] F. E. Neumann. *Theoretische Untersuchung der Gesetze : nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen wird*. K. Akademie der Wissenschaften, 1837.
- [22] G. G. Stokes. On a remarkable phenomenon of crystalline reflection. *Proceedings of the Royal Society of London*, 38(235-238) :174–185, 1884.
- [23] Lord Rayleigh. XXVI. On the remarkable phenomenon of crystalline reflexion described by Prof. Stokes. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(160) :256–265, 1888.
- [24] F. Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 52(7-8) :555–600, 1929.
- [25] A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, B. Djafari-Rouhani, and V. Laude. Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides. *Applied Physics Letters*, 84(22) :4400–4402, 2004.
- [26] J. H. Sun and T. T. Wu. Propagation of surface acoustic waves through sharply bent two-dimensional phononic crystal waveguides using a finite-difference time-domain method. *Physical Review B*, 74(17) :174305, 2006.
- [27] A. Bretagne, B. Venzac, V. Leroy, A. Tourin, B. B. J. Linde, J. Paczkowski, and N. Ponikwicki. Bragg and hybridization gaps in bubble phononic crystals. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics*, volume 1433, page 317, 2012.
- [28] V. Leroy, A. Bretagne, M. Lanoy, and A. Tourin. Band gaps in bubble phononic crystals. *En presse*, 2016.
- [29] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and P. Sheng. Focusing of sound in a 3d phononic crystal. *Physical Review Letters*, 93(2) :024301, 2004.
- [30] J. H. Page, S. Yang, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and P. Sheng. Tunneling and dispersion in 3d phononic crystals. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, 220(9-10) :859–870, 2005.
- [31] M. Ke, Z. Liu, C. Qiu, W. Wang, J. Shi, W. Wen, and P. Sheng. Negative-refraction imaging with two-dimensional phononic crystals. *Physical Review B*, 72(6) :064306, 2005.
- [32] A. Sukhovich, L. Jing, and J. H. Page. Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Physical Review B*, 77(1) :014301, 2008.

-
- [33] A. Sukhovich, B. Merheb, K. Muralidharan, J. O. Vasseur, Y. Pennec, P. A. Deymier, and J. H. Page. Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals. *Physical Review Letters*, 102(15) :154301, 2009.
- [34] M. Dubois, M. Farhat, E. Bossy, S. Enoch, S. Guenneau, and P. Sebbah. Flat lens for pulse focusing of elastic waves in thin plates. *Applied Physics Letters*, 103(7) :071915, 2013.
- [35] E. Yablonovitch and T. J. Gmitter. Photonic band structure : The face-centered-cubic case. *Physical Review Letters*, 63(18) :1950, 1989.
- [36] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, and K. M. Leung. Photonic band structure : The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms. *Physical Review Letters*, 67(17) :2295, 1991.
- [37] A. Khelif, F.-L. Hsiao, A. Choujaa, S. Benchabane, and V. Laude. Octave omnidirectional band gap in a three-dimensional phononic crystal. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 57(7) :1621–1625, 2010.
- [38] M. S. Kushwaha, B. Djafari-Rouhani, and L. Dobrzynski. Sound isolation from cubic arrays of air bubbles in water. *Physics Letters A*, 248(2) :252–256, 1998.
- [39] M. S. Kushwaha and B. Djafari-Rouhani. Complete acoustic stop bands for cubic arrays of spherical liquid balloons. *Journal of Applied Physics*, 80(6) :3191–3195, 1996.
- [40] Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, and J. Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Physical Review Letters*, 99(9) :093904, 2007.
- [41] N. Kaina, F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Negative refractive index and acoustic superlens from multiple scattering in single negative metamaterials. *Nature*, 525(7567) :77–81, 2015.

 Utiliser le son pour manipuler des bulles

Sommaire

4.1	Pression de radiation	146
4.1.1	Maxwell, Rayleigh, Langevin et Brillouin	146
4.1.2	Manipulation d'objets	147
4.2	Forces de Bjerknes	149
4.2.1	Historique	149
4.2.2	Formulation générale	150
4.2.3	Oscillations d'une bulle en régime forcé	151
4.2.4	Expression de la force primaire	151
4.2.5	Premières observations et exemples d'applications	153
4.3	Force de Bjerknes secondaire	155
4.3.1	Expression de la force secondaire	155
4.3.2	Approximation des bulles "proches"	156
4.3.3	Signe de la force	158
4.4	Observation expérimentale de la force secondaire	160
4.4.1	Dispositif expérimental et description du problème	160
4.4.2	Calibration de la traînée	161
4.4.3	Observation des deux régimes et validation de l'approximation des bulles proches	162
4.4.4	Influence du couplage	164
4.4.5	Un cas de couplage extrême	165
4.5	Forces de Bjerknes étendues	168
4.5.1	Expression de la force étendue	168
4.5.2	Le trio de bulles	170
4.5.3	Manipulation à deux dimensions : le cas du trio de bulles	170

4.5.4	Manipulation simultanée de plusieurs bulles mobiles	174
4.5.5	Conclusion	176
	Bibliographie	177

La description du mécanisme des oscillations telle que proposée au chapitre I fait intervenir deux approches complémentaires. Si le mécanisme de rayonnement est explicitement relié aux conséquences de l'équation d'onde, l'amortissement visqueux et la forme des oscillations découlent de l'approche hydrodynamique postulée par Rayleigh et Plesset [1, 2]. L'objet bulle se situe donc à l'interface entre acoustique et mécanique des fluides. Mieux encore, pour des excitations suffisamment amples, la bulle peut générer un écoulement non-linéaire dit de streaming [3, 4] et jouer ainsi elle-même le rôle de convertisseur. On peut donc envisager l'usage du son comme actuateur hydrodynamique. C'est une bonne nouvelle puisque, si l'on bénéficie désormais d'un certain recul en matière de génération d'ultrasons, la manipulation de fluides ou d'objets en écoulement n'est jamais chose aisée, surtout quand on parle de l'échelle d'une microbulle. Or, avec l'avènement de la microfluidique et des "laboratoires sur puce", ce genre de défi est plus que jamais d'actualité. Dans cette partie, nous présenterons une alternative exploitant le concept de pression de radiation, afin de déplacer des bulles dans l'eau. Nous montrerons pour cela que les forces en question, connues sous le nom de forces de Bjerknes, sont de deux types. En s'intéressant plus particulièrement à la force secondaire, nous verrons que la structure du champ de pression joue un rôle essentiel au même titre que la diffusion multiple. Nous traiterons enfin, numériquement, le cas d'échantillons multiplement diffusants, avec lesquels nous verrons que la manipulation peut devenir particulièrement efficace.

4.1 Pression de radiation

4.1.1 Maxwell, Rayleigh, Langevin et Brillouin

C'est peu après sa disparition en 1879, et grâce à la contribution de son collègue Niven, que les travaux de Maxwell [5], faisant état pour la première fois de l'existence d'une "pression dans la direction normale à un front d'onde" électromagnétique, voient le jour. Celle-ci prend la forme d'une force moyenne (au sens de la moyenne temporelle) qui s'exerce sur un objet. Elle est notamment à l'origine de l'orientation particulière de la queue de poussière des comètes lorsque ces dernières se rapprochent du soleil. Simultanément, le physicien italien Adolfo Bartoli [6] rebondit sur la publication [7] controversée de H.T. Eddy selon laquelle les pertes de chaleur par rayonnement constituent une violation du second principe de la thermodynamique. Bartoli propose alors de tenir compte d'une pression exercée par transfert radiatif afin de concilier les deux parties. La pression de "Maxwell-Bartoli" est née.

Bien que l'usage du terme "pression" puisse laisser penser le contraire, ce n'est que 20 ans plus tard que le concept est étendu au domaine de l'acoustique. Les travaux de Lord Rayleigh [8, 9] formalisent alors le problème dans le cas d'ondes élastiques.

Dans la première de ses contributions, Rayleigh prend l'exemple d'une corde infinie excitée transversalement et sur laquelle sont disposés deux anneaux ; l'un fixé et l'autre libre de se mouvoir. Il montre alors que la corde exerce une force sur l'anneau mobile. Mieux encore : un phénomène temporellement périodique peut, à condition que l'on brise sa symétrie spatiale (ici grâce à la présence des anneaux), donner lieu à une force dont la résultante, moyennée sur plusieurs périodes, est non nulle. Cette observation traduit l'essence non linéaire du phénomène. Cependant, l'origine de cette non-linéarité a été vivement débattue. Dans la suite de cette même publication ainsi que dans celle de 1905, partant de l'idée erronée qu'une onde acoustique transporte une quantité de mouvement, Rayleigh se penche sur le cas des fluides. Il calcule la force exercée sur un piston situé à l'extrémité d'un cylindre d'air lorsqu'un autre piston, situé à l'autre extrémité, est animé d'un mouvement sinusoïdal. Il obtient alors l'expression suivante :

$$\langle p^{\text{rad}} \rangle = \langle p^L \rangle - p^0 = \frac{\beta}{2} \langle E \rangle \quad (4.1)$$

où $\langle E \rangle$ représente l'énergie volumique transportée par l'onde, β le coefficient de non-linéarité du milieu et p^L la pression lagrangienne, c'est-à-dire la pression au niveau du piston. Seulement, la même démonstration aboutit à une pression de radiation nulle lorsqu'il considère une loi de pression linéaire [10]. Paul Langevin posera lui le problème différemment et obtiendra une expression qui, bien que proche de celle de Rayleigh, ne nécessite pas de tenir compte des ordres supérieurs dans l'expression du champ. En effet, dans ses travaux, relayés par son étudiant Pierre Biquard [11], Langevin établit l'expression suivante :

$$\langle p^{\text{rad}} \rangle = \langle p^L \rangle - p^0 = \langle E \rangle \quad (4.2)$$

l'approche de Rayleigh ne s'appliquant qu'au cas d'une onde plane infinie ou d'une onde parfaitement confinée, les observations expérimentales réalisées au cours du vingtième siècle donnent raison au physicien français. En particulier, Hertz et Mende [12] (voir figure 4.1) ont étudié la déformation d'une interface entre deux fluides sous l'effet de la pression de radiation. Ils ont ainsi mis en évidence le rôle déterminant du contraste de densité (et dans une moindre mesure de compressibilité) entre les fluides afin d'expliquer la direction de la déformation de l'interface qui n'était pas forcément celle de la propagation du son. Parmi les travaux fondateurs, on peut également citer

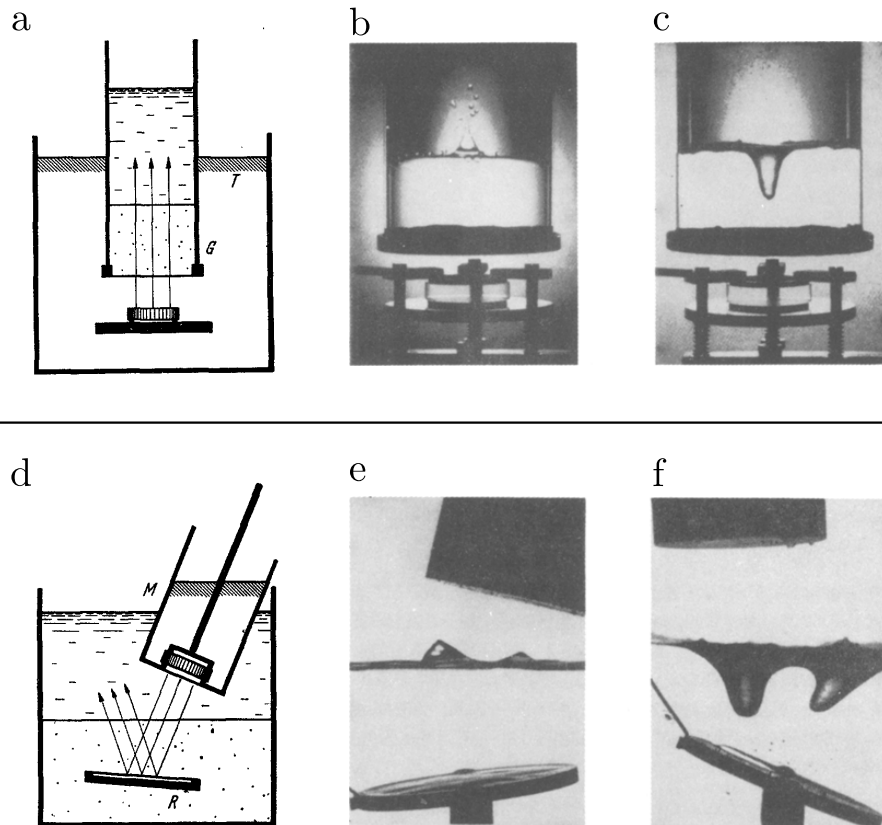


FIGURE 4.1 – Expérience de Hertz et Mende (1939) [12]. (a-c) Etude de la déformation d'une interface eau- CCl_4 (b) et eau-aniline (c). (e-f) même chose en présence d'une réflecteur.

la fontaine acoustique de Bergmann [13] ainsi que les expériences de Hasegawa et Yosioka sur des billes métalliques [14] ou siliceuses [15].

4.1.2 Manipulation d'objets

De la pression de radiation à la manipulation d'objet sans contact il n'y a qu'un pas. Cette fois-ci, c'est le domaine de l'acoustique qui a été pionnier en la matière. La première observation de lévitation acoustique a été réalisée par Allen et Rudnick [16].

Leur démonstration a notamment permis d'accéder aux paramètres rhéophysiques de gouttes en lévitation [17, 18]. Chez les opticiens, c'est Ashkin qui est à créditer des premières expériences concluantes sur le sujet [19, 20]. Beaucoup d'autres ont suivi et on peut citer, de manière non-exhaustive, les études exploitant la contribution du champ évanescent qui permet de piéger des atomes froids [21–23] ou encore celles ayant trait au contexte du tri d'objets biologiques [24–26]. Si les pièges optiques permettent d'accéder à des résolutions extrêmes, il sont bien souvent limités par l'échauffement qu'ils produisent au niveau de l'objet piégé, ce qui peut devenir problématique dans le cas d'échantillons biologiques. Les pièges acoustiques constituent un complément prometteur d'autant plus qu'ils permettent d'opérer dans une gamme de fréquences allant du kilohertz au gigahertz. Plus récemment, des travaux sur les pinces unidirectionnelles [27] ont montré qu'un façonnage subtil du front d'onde sous la forme de vortex permettait une manipulation efficace ne mettant pas en jeu l'existence d'un faisceau contre-propagatif ou l'établissement d'un régime stationnaire.

4.2 Forces de Bjerknes

4.2.1 Historique

Bien que rarement associés au développement de l'étude de la pression de radiation, c'est également au début du 20^{ème} siècle que paraissent les premiers travaux de Vilhelm Bjerknes [28]. Et pour cause, Bjerknes vient d'une toute autre communauté : celle de la météorologie dont il est aujourd'hui considéré comme l'un des fondateurs. À cette époque, il s'intéresse en particulier au déplacement des masses d'air et parvient à convaincre sa communauté du rôle des mathématiques dans le développement des prévisions météorologiques. Il explicite alors les effets de l'inhomogénéité du champ de pression hydrodynamique et introduit la force qui gardera son nom. Dans l'article en question, il présente d'ailleurs une analogie de son expression avec le cas du champ électromagnétique. Dans un ouvrage ultérieur [29], Bjerknes détaille également les effets de l'écart de phase entre deux corps oscillants sur le signe de la force qui les lie l'un à l'autre. Pourtant, ce n'est que sensiblement plus tard que Goldman et Ringo [30] puis Blake [31] l'associent à l'observation de la formation de clusters de bulles lors de l'application d'un champ de pression stationnaire. À l'époque, cette situation est régulièrement évoquée dans le cadre d'études expérimentales sur la cavitation ultrasonore [32] (voir figure 4.2). Si les premiers ne font pas directement le rapprochement avec le physicien norvégien, Blake soulignera le parallèle entre les observations et les prédictions de Bjerknes.

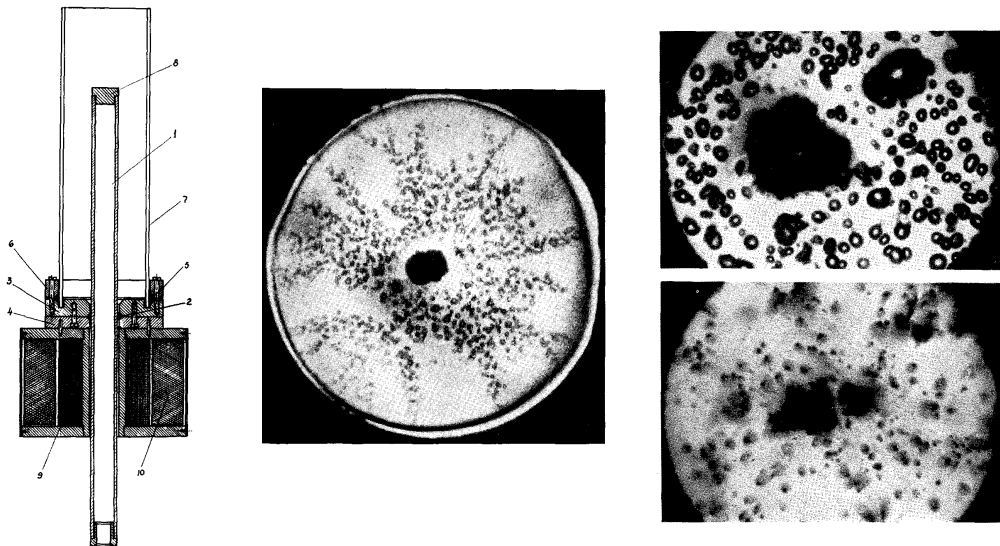


FIGURE 4.2 – Observations de Kornfeld et Suvorov [32]. Le dispositif utilisé est un tube de nickel dont la partie basse est entourée d'une bobine générant des ondes longitudinales le long du tube par magnétostriction. Les clichés réalisés montrent la formation d'agglomérats de bulles au centre du tube.

4.2.2 Formulation générale

De la même manière que pour la pression de radiation débattue par Rayleigh et Langevin, la force de Bjerknes est intrinsèquement non linéaire. Pourtant, le phénomène ne nécessite pas de non-linéarité de propagation. Pour s'en convaincre il suffit d'écrire la formule générale de la force de Bjerknes instantanée dans le cas d'un volume de fluide de surface extérieure S et soumis à un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

$$\mathbf{F}_B = \oint\!\!\!\oint_S \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} \, dS \quad (4.3)$$

Dans le cas d'un fluide parfait, le tenseur des contraintes est diagonal et se résume à la contribution des efforts de pression [33] : $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$. La force de Bjerknes s'exerçant sur un objet quelconque immergé dans un fluide parfait s'écrit donc :

$$\mathbf{F}_B = - \oint\!\!\!\oint_S P \mathbf{n} \, dS = - \iiint_V \mathbf{grad} P \, dV \quad (4.4)$$

Dans le cas général, cette expression n'est pas tout à fait triviale à évaluer [34–36]. Dans le cas des bulles, en revanche, c'est beaucoup plus simple et ça nous convient très bien. On a vu, dans les parties précédentes, que la résonance de Minnaert se distingue par son caractère basse fréquence. Par exemple pour une bulle de rayon $a=100 \mu\text{m}$ et immergée dans l'eau, la longueur d'onde à résonance vaut $\lambda_M = 5 \text{ cm}$. Or, c'est précisément cette résonance que l'on souhaite exploiter pour manipuler des bulles en écoulement. Par conséquent, le gradient du champ pourra être considéré comme homogène à l'échelle de la bulle. En prenant la moyenne temporelle sur une oscillation complète de l'excitation, l'expression se simplifie donc pour donner

$$\mathbf{F}_B = -\langle V \mathbf{grad} P \rangle_T. \quad (4.5)$$

Afin d'établir l'expression de la force, il nous faut déterminer l'expression du volume instantané. Ceci suppose de connaître l'amplitude des oscillations $\xi(t)$, définies comme l'écart autour du rayon d'équilibre de la bulle :

$$a(t) = a_0 + \xi(t). \quad (4.6)$$

Rappelons brièvement les résultats obtenus dans le chapitre I. Si on définit la surpression $p(t)$ telle que $P(t) = P_0 + p(t)$, alors l'amplitude réduite $x(t) = \xi(t)/a_0$ est solution de l'équation classique d'un oscillateur (à l'ordre 1 en x) :

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_M^2 x = -\frac{p(t)}{\rho_0 a_0^2} \quad (4.7)$$

où $\omega_M = \sqrt{\frac{3\kappa P_0}{\rho_0 a_0^2}}$ est la fréquence de Minnaert de la bulle.

4.2.3 Oscillations d'une bulle en régime forcé

On parle de force primaire pour caractériser l'action d'un champ extérieur sur un objet isolé. Prenons l'exemple d'une bulle unique placée dans un champ stationnaire sinusoïdal à une dimension. On peut alors écrire $P(y, t) = P_0 + p_0 e^{-i\omega t} \sin(ky)$. On suppose que la bulle suit la même évolution que le champ de pression avec une amplitude complexe ξ_0 . Par conséquent, on écrira le rayon sous la forme $a(y, t) = a_0 + \xi_0 e^{-i\omega t} \sin(ky)$. En remplaçant x par $\xi_0 e^{-i\omega t} \sin(ky)/a_0$ et p par $p_0 e^{-i\omega t} \sin(ky)$ dans l'équation (4.7), on obtient

$$\xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 a_0} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega}. \quad (4.8)$$

On reporte, sur la figure 4.3, le tracé du module et de la phase ϕ de ξ_0/a_0 en fonction

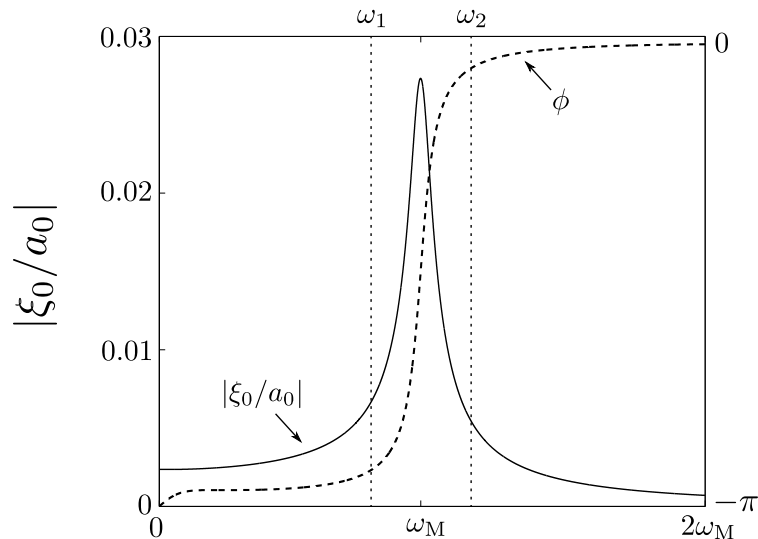


FIGURE 4.3 – Tracé du module et de la phase de ξ_0/a_0 en fonction de la fréquence pour une bulle de rayon $a_0 = 100 \mu\text{m}$ immergée dans l'eau et excitée par un champ stationnaire d'amplitude $p_0 = 1 \text{ kPa}$. On a indiqué les positions de la pulsation de Minnaert ω_M ainsi que des pulsations $\omega_1 = \frac{4}{5}\omega_M$ et $\omega_2 = \frac{6}{5}\omega_M$ qui nous serviront dans la suite.

de ω . L'amplitude des oscillations est maximale à résonance. Elles peuvent atteindre jusqu'à 3% du rayon de la bulle sous ces conditions d'excitation ($p_0 = 1 \text{ kPa}$). L'hypothèse des faibles oscillations $x = \xi/a_0 \ll 1$ reste crédible.

4.2.4 Expression de la force primaire

La situation décrite dans le paragraphe précédent correspond bien à celle qu'on associe généralement à l'étude des forces de Bjerknes primaires. Une bulle est isolée dans

un milieu confiné et peut être déplacée à la faveur de l'application d'un champ stationnaire. Puisqu'on connaît, désormais, l'expression de l'amplitude des oscillations, on peut aussi exprimer le volume instantané :

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi(a_0 + \xi(t))^3 \quad (4.9)$$

que l'on peut également écrire en fonction de $x_0 = \xi_0/a_0$:

$$V(t) = V_0(1 + x_0 e^{-i\omega t} \sin(ky))^3.$$

À l'ordre 1 en x_0 , on obtient :

$$V(t) \approx V_0(1 + 3x_0 e^{-i\omega t} \sin(ky)).$$

Le gradient du champ vaut, quant à lui,

$$\mathbf{grad}P = kp_0 \cos(ky)e^{-i\omega t}\mathbf{u}_y$$

et, en reprenant l'équation (4.5), on obtient finalement l'expression de la force primaire moyennée temporellement :

$$\mathbf{F}_{B1} = -\langle V \mathbf{grad}P^* \rangle_T = -\pi ka_0^2 p_0 \operatorname{re}(\xi_0) \sin(2ky)\mathbf{u}_y \quad (4.10)$$

Pour illustrer les deux comportements possibles de la bulle, on a tracé sur la figure 4.4 l'évolution spatiale de F_{B1} pour deux fréquences différentes. On choisit pour cela $\omega_1 = \frac{4}{5}\omega_M$ et $\omega_2 = \frac{6}{5}\omega_M$. Comme on le voit sur la figure 4.3, ces fréquences se caractérisent par des amplitudes d'oscillation relative $|\xi_0/a_0|$ similaires et se distinguent par l'état de phase de l'oscillateur. Pour ω_1 , le rayon de la bulle oscille en opposition de phase avec le champ de pression (elle est comprimée lorsque le champ est maximal), tandis que pour ω_2 , les deux grandeurs sont en phase. Ces deux situations donnent lieu à deux comportements antagonistes. Sur la figure 4.4, on a représenté la direction de la force par des flèches et on en déduit les positions d'équilibre attendues pour la bulle qui sont représentées par un cercle. On retiendra que, pour $\omega < \omega_M$ les bulles sont attirées par les ventres de pression tandis que pour $\omega > \omega_M$ elles se dirigent vers les nœuds de pression. Ce changement de comportement est matérialisé, dans l'expression (4.10), par le terme $\operatorname{re}(\xi_0) = |\xi_0| \cos \phi$, en accord avec le changement de signe constaté. Ce scénario, pressenti dès les travaux de Bjerknes [29], a été développé analytiquement dans le cas des bulles par Leighton [37]. Sur la figure 4.4, on peut également remarquer que les oscillations spatiales de la force sont deux fois plus rapides que celles du champ. Il s'agit ici d'une manifestation explicite de l'aspect non linéaire du problème. On peut souligner, une fois encore, que cette non-linéarité est intrinsèque à l'expression de la force puisque tous les calculs ont été menés en se limitant à l'ordre 1 en x_0 .

On peut également donner une explication plus imagée du phénomène. La bulle est poussée dans le sens opposé au gradient du champ. Elle sera donc attirée vers

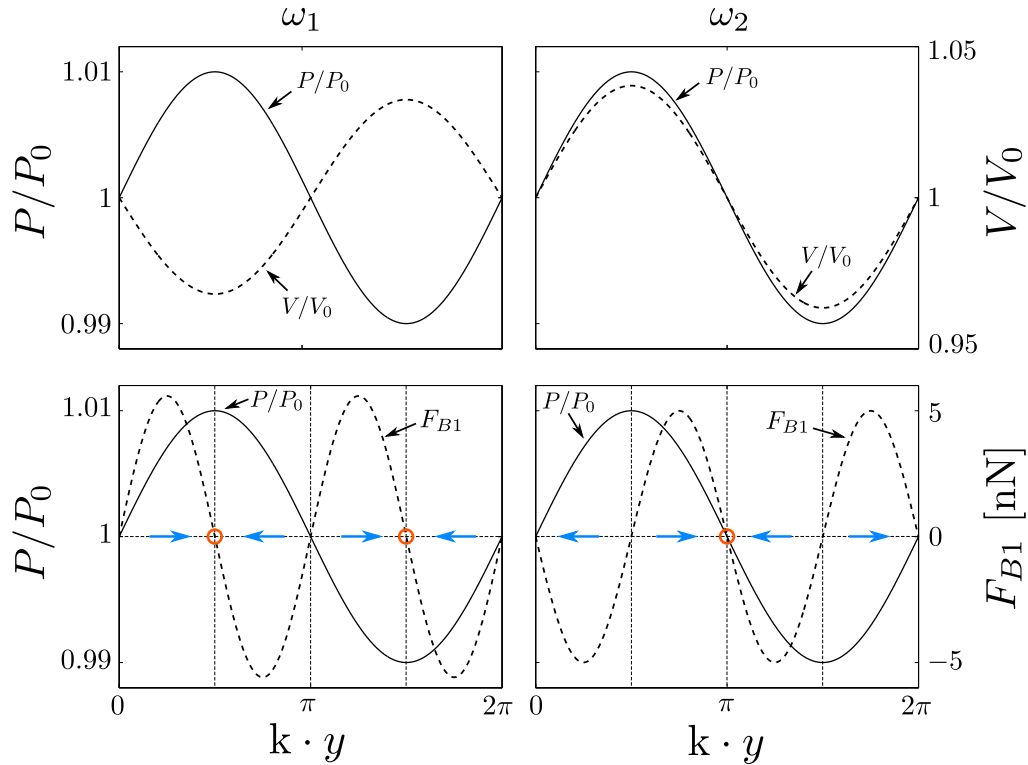


FIGURE 4.4 – Tracé de P/P_0 (traits pleins), V/V_0 (pointillés en haut) et F_{B1} (pointillés en bas) en fonction de $k \cdot y$ pour les pulsations $\omega_1 = \frac{4}{5}\omega_M$ (correspondant à une phase de $\phi = \pi/5$) et $\omega_2 = \frac{6}{5}\omega_M$ (correspondant à une phase de $\phi = 6\pi/5$). On a pris $P_0 = 1$ bar, $p_0 = 1$ kPa, $a_0 = 100 \mu\text{m}$, $c_0 = 1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

les nœuds de pression lorsqu'elle ressent une surpression positive et vers les ventres lorsqu'elle ressent une surpression négative. Pour $\omega < \omega_M$, le volume est minimum dans le premier cas et maximum dans le second. Par conséquent, la force moyenne guidera la bulle vers les ventres du champ de pression. Pour $\omega > \omega_M$, c'est l'inverse qui se produit : la force moyenne est dirigée vers les nœuds de pression.

4.2.5 Premières observations et exemples d'applications

On retrouve les premières traces d'observation du phénomène dans les travaux de Boyle [38] et Hopwood [39]. Goldman et Ringo [30] proposeront, plus tard, d'appliquer l'effet illustré en figure 4.4 à la détermination de la position des nœuds de pression. Enfin, Blake *et al.* [31] sont à créditer des premières observations de bulles piégées aux ventres de pression. Ceci suppose de pouvoir exciter les bulles en dessous de leur résonance monopolaire, qui comme on l'a vu, se produit généralement à basse fréquence ; ce qui peut sensiblement compliquer les choses du point de vue expérimental. On peut également citer un certain nombre de travaux sur la cavitation [40–42] au gré desquels l'existence de la force a souvent été constatée. Enfin, il est difficile de ne pas

évoquer les contributions de Crum et Eller [43, 44] qui font référence pour la clarté des descriptions théoriques et expérimentales qu'elles fournissent. Gould [45] s'inspirera d'ailleurs de leurs résultats pour proposer une méthode empirique de calibration pour transducteur.

On peut imaginer utiliser la résonance de Minnaert comme critère de discrimination de plusieurs populations de bulles afin de les trier en fonction de leur rayon. Pour une fréquence donnée, les bulles de tailles inférieures à la taille résonante à cette fréquence se déplaceront vers les ventres tandis que les bulles plus grandes pourront être récoltées au niveau des nœuds. Cette méthode a été expérimentalement testée [46] et intégrée à une puce microfluidique.

Si les bulles apparaissent comme des candidats naturels, bien d'autres objets peuvent être manipulés via les forces de radiation acoustiques. Pour un objet non-résonant caractérisé par sa compressibilité χ_c et sa densité ρ_c et immergé dans un fluide de compressibilité χ_w et de densité ρ_w , la force de Bjerknes primaire s'exprime [47] ainsi :

$$F_{B1} = -\frac{\pi p_0 V_c \chi_w}{2\lambda} \mathcal{F}(\rho, \chi) \sin(2ky) \quad (4.11)$$

où $\mathcal{F}(\rho, \chi) = \frac{5\rho_c - 2\rho_w}{2\rho_c + \rho_w} - \frac{\chi_c}{\chi_w}$ est le facteur de contraste acoustique. Deux cas de figure se présentent puisque \mathcal{F} peut être négatif et ainsi changer le signe de la force. Différentes populations de particules peuvent ainsi être discriminées et séparées¹. Les objets les plus rigides auront tendance à se mouvoir vers les nœuds de champ tandis que les plus compressibles se dirigeront vers les ventres. Cette technique est efficace car facilement intégrable à des micropuces automatisées, ce qui permet d'envisager des perspectives en termes de diagnostic en temps réel notamment. Cependant, le champ de la micromanipulation ne peut être résumé à l'étape de piégeage d'objets. Dans l'idéal il faudrait également pouvoir les déplacer. Une solution élégante proposée par Tran et al. [48] montre qu'un objet, une fois piégé, peut-être mis en mouvement avec précision en utilisant une modulation en fréquence. Les nœuds et ventres de l'onde stationnaire constituant le piège sont translatés selon chacune des directions affectées par la modulation. Comme le montre la figure 4.5, il est ainsi possible de contrôler efficacement le déplacement de divers objets. L'ensemble des techniques de manipulation utilisant les ondes stationnaires souffre cependant d'un déficit en résolution qui ne peut, *a priori*, pas excéder la demi-longueur d'onde de l'excitation. Du point de vue de la sélectivité, ces techniques demeurent également limitées puisque le déplacement imposé affecte l'ensemble du volume sans distinction.

Nous verrons, dans la suite, que l'utilisation de la force dite secondaire peut permettre de dépasser de telles limitations.

1. De manière équivalente, des bulles soumises à un champ stationnaire monochromatique peuvent être triées selon leur taille.

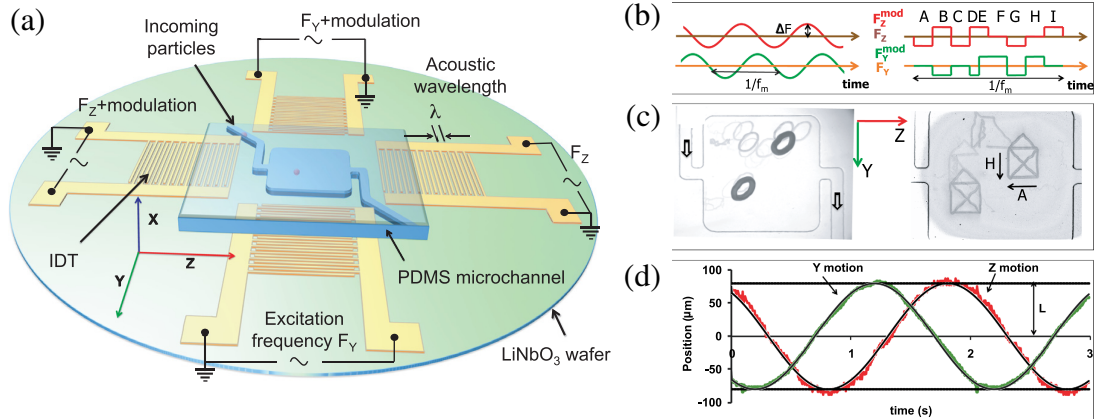


FIGURE 4.5 – Un exemple de manipulation sans contact de micro-objets provenant de [48]. (a) Une cavité microfluidique est placée au centre d’un réseau de peignes piézoélectriques modulables de manière à contrôler le champ stationnaire selon les deux dimensions du problème. (b) Profil temporel de la modulation et (c) trajectoires reconstituées par superposition d’images pour deux objets différents. À gauche : microgouttes d’huile de silicone. À droite : Globules blancs. (d) Positions expérimentales (lignes colorées) et théoriques (lignes noires).

4.3 Force de Bjerknes secondaire

La force de Bjerknes secondaire est la pression de radiation s’exerçant sur une bulle et résultant du champ diffusé par une bulle voisine (voir figure 4.6).

4.3.1 Expression de la force secondaire

La définition de l’équation (4.5) demeure valable dans le cas de la force secondaire. La différence essentielle réside dans la structure du champ de pression puisqu’il s’agit désormais du champ diffusé et non d’un champ stationnaire. Comme le montre

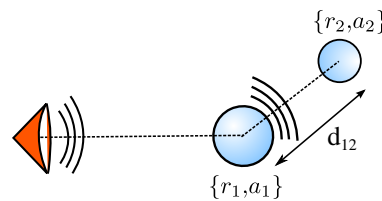


FIGURE 4.6 – Deux bulles voisines respectivement placées en \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 et de rayon a_1 et a_2 sont soumises à un champ extérieur. La bulle placée en \mathbf{r}_1 diffuse le champ incident et exerce une force secondaire sur la bulle en \mathbf{r}_2 ; et réciproquement.

l’équation (1.23) obtenue au chapitre 1, le champ diffusé par la bulle 1 placée en \mathbf{r}_1 et

mesuré en \mathbf{r} s'exprime simplement en faisant intervenir la fonction de diffusion $f_1(\omega)$:

$$p_1(r, \omega) = p_{10} f_1(\omega) \frac{e^{ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} e^{-i\omega t} \quad (4.12)$$

où p_{10} est la pression incidente au niveau de la bulle 1 et où la fonction de diffusion s'écrit :

$$f_1(\omega) = -\frac{a_{10}\omega^2}{(\omega^2 - \omega_{M1}^2) + i\Gamma\omega}. \quad (4.13)$$

En remarquant qu'on a le même dénominateur que dans l'équation (4.8), on peut faire intervenir l'amplitude des oscillations ξ_{10} de la bulle 1 :

$$f_1(\omega) = -\frac{\rho_0 a_{10}^2 \omega^2}{p_{10}} \xi_{10}(\omega). \quad (4.14)$$

En remplaçant dans (4.12), on obtient la pression diffusée par la bulle 1 en r :

$$p_1(r, \omega) = -\rho_0 a_{10}^2 \omega^2 \xi_{10}(\omega) \frac{e^{ik_0 |r - r_1|}}{|r - r_1|} e^{-i\omega t} \quad (4.15)$$

Enfin, on exprime le gradient du champ, que l'on évalue en r_2 :

$$\mathbf{grad} p_1(r_2, \omega) = \rho_0 a_{10}^2 \omega^2 \xi_{10}(\omega) (d_{12}^{-1} - ik_0) \frac{e^{ik_0 d_{12}}}{d_{12}} e^{-i\omega t} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|r_2 - r_1|} \quad (4.16)$$

Pour calculer le volume de la bulle 2, on procède comme précédemment

$$V_2 \approx \frac{4}{3} \pi a_{20}^3 \left(1 + 3 \frac{\xi_{20}}{a_{20}} e^{-i\omega t}\right). \quad (4.17)$$

Si bien que, en appliquant l'équation (4.5), on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_{B2} = 2\pi \rho_0 \omega^2 a_{10}^2 a_{20}^2 \frac{\cos(k_0 d_{12})}{d_{12}} \operatorname{re} \left(\xi_{10} \xi_{20}^* (ik_0 - d_{12}^{-1}) \right) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|r_2 - r_1|} \quad (4.18)$$

4.3.2 Approximation des bulles "proches"

On a traité deux cas bien distincts : celui d'un objet seul placé dans un champ stationnaire et celui d'une paire de bulles ne ressentant que le champ diffusé par leur voisine. Autant le premier cas ne pose pas de problème conceptuel, bien qu'il suppose que l'expérimentateur soit capable d'isoler une bulle, autant le second paraît improbable. Si plusieurs bulles il y a, alors la force ressentie consistera en une superposition des forces primaire et secondaire. Il convient donc d'évaluer leurs contributions respectives. Celle-ci dépend en premier lieu de la distance d_{12} . Le cas où les deux bulles sont éloignées peut-être traité rapidement puisque la force secondaire décroît avec la distance tandis que la force primaire n'en dépend pas, *a priori*. En revanche, lorsque les deux bulles se rapprochent, on peut supposer que $k_0 d_{12} \ll 1$. C'est d'autant plus vrai que, étant donné le caractère basse fréquence de la résonance de Minnaert, k_0

est toujours petit pour les fréquences qui nous intéressent. On a alors $\cos(k_0 d_{12}) \simeq 1$ et $k_0 \ll 1/d_{12}$. C'est l'approximation des bulles proches. L'expression de la force secondaire se réduit à :

$$\mathbf{F}_{B2} = -\frac{2\pi\rho_0\omega^2 a_{10}^2 a_{20}^2 \operatorname{re}(\xi_{10}\xi_{20}^*)}{d_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|r_2 - r_1|} \quad (4.19)$$

Or, si la force secondaire est en $1/d_{12}^2$ cela signifie qu'elle devient extrêmement intense pour les faibles valeurs de d_{12}^2 et l'emporte alors sur la force primaire. C'est donc ce régime qui retiendra notre attention.

De cette expression simplifiée, on peut extraire la distance caractéristique pour laquelle les deux contributions sont équivalentes :

$$\left| \frac{2\pi\rho_0\omega^2 a_{10}^2 a_{20}^2 \xi_{10}\xi_{20}}{d_{\text{eq}}^2} \right| \sim |\pi k_0 \xi_{20} a_{20}^2 p_{20}| \quad (4.20)$$

soit, en utilisant l'équation (4.14),

$$d_{\text{eq}}(\omega) = \sqrt{\frac{2|f_1(\omega)|p_{10}}{k_0 p_{20}}}$$

de sorte que la force secondaire contribuera seule lorsque $d_{12} < d_{\text{eq}}$. En considérant

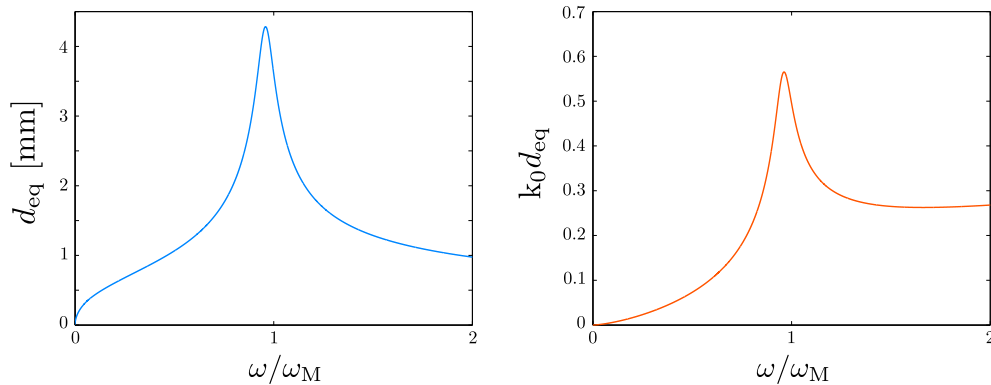


FIGURE 4.7 – Évolution de d_{eq} et $k_0 d_{\text{eq}}$ en fonction de ω/ω_M pour deux bulles de $100 \mu\text{m}$ placées dans l'eau.

les pressions ressenties p_{10} et p_{20} du même ordre de grandeur, on obtient l'évolution de d_{eq} reportée en figure 4.7. Ici, on a considéré deux bulles de rayon $a_{10} = a_{20} = 100 \mu\text{m}$ immergées dans l'eau. Un premier enseignement que l'on peut en tirer est que la distance d'équilibre d_{eq} entre forces primaire et secondaire est de l'ordre de quelques millimètres. D'autre part, on remarque, en traçant $k_0 d_{\text{eq}}$ en fonction de ω , que la condition $k_0 d_{12} \ll 1$ semble déjà satisfaite lorsque $d = d_{\text{eq}}$. D'une manière générale,

2. Pour que la condition de non-interpénétration soit respectée, il faut tout de même s'assurer que d_{12} reste supérieure à $a_{10} + a_{20}$.

on retiendra que, lorsqu'on insonifie un système de bulles de l'ordre de 0.1 mm de rayon et voisines de moins d'un millimètre dans l'eau, la force secondaire l'emporte et son expression se réduit à celle de l'équation (4.19).

4.3.3 Signe de la force

Comme pour la force primaire, F_{B2} est susceptible de changer de signe, donnant lieu à des situations d'attraction ou de répulsion. Le signe de la force est piloté par celui de $\text{re}(\xi_{10}\xi_{20}^*)$, soit encore $|\xi_{10}\xi_{20}| \cos(\phi_1 - \phi_2)$. C'est donc du déphasage entre les deux bulles que dépend la nature de la force. Le cas de deux bulles de même rayon $a_{10} = a_{20}$ est extrêmement simple à traiter puisque les deux lorentziennes se superposent et qu'on a $\phi_1 = \phi_2$ ³. Le signe de la force est toujours négatif, ce qui revient à dire que les deux bulles ne peuvent que s'attirer. En revanche, lorsque $a_{10} \neq a_{20}$, un changement de signe peut s'opérer. Pour s'en convaincre, on trace, figure 4.8(a),

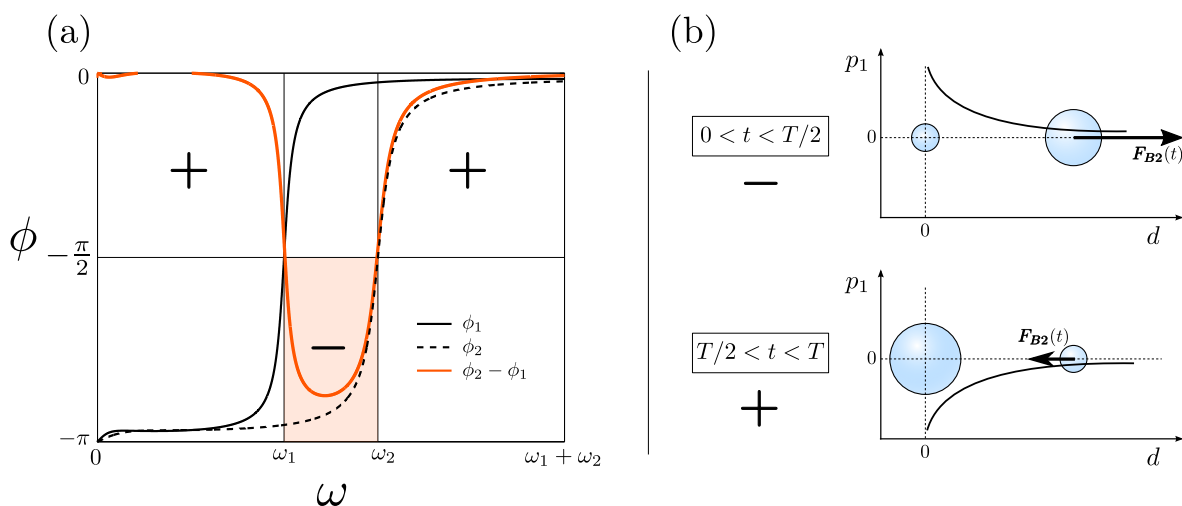


FIGURE 4.8 – (a) ϕ_1 , ϕ_2 et $\phi_2 - \phi_1$ en fonction de ω pour deux bulles de rayons $a_{10} = 120 \mu\text{m}$ et $a_{20} = 80 \mu\text{m}$ dans l'eau. (b) Schéma illustrant la direction de la force instantanée pour les deux demi-périodes d'une oscillation complète de champ et pour une fréquence choisie dans la fenêtre de répulsion.

les phases ϕ_1 , ϕ_2 et la différence $\phi_2 - \phi_1$ pour deux bulles de rayons $a_{10} = 120 \mu\text{m}$ et $a_{20} = 80 \mu\text{m}$. Il apparaît que, pour $\omega_1 < \omega < \omega_2$, $\phi_2 - \phi_1$ devient inférieur à $-\pi/2$. Par conséquent, $\cos(\phi_2 - \phi_1) < 0$, F_{B2} devient positif et les deux bulles se repoussent. Ici encore, on peut fournir une explication plus imagée du phénomène. Dans la fenêtre de fréquence en question, les deux bulles oscillent en opposition de phase. Comme sur la figure 4.8(b), décomposons une oscillation complète en ses deux demi-périodes constitutives. Durant la demi-période pour laquelle la bulle 2 ressent une surpression positive, la force est répulsive puisqu'elle suit la direction opposée

3. Ceci est vrai dans le cadre de l'approximation des bulles proches $k_0 d_{12} \ll 1$

au gradient de champ. Inversement, pendant la seconde demi-période, la force est de nature attractive. Or, compte tenu du déphasage entre les deux bulles, le volume de la bulle 2 sera maximum durant la première demi-période et minimum pendant la seconde. Une fois moyennée temporellement, la force résultante est donc de nature répulsive.

4.4 Observation expérimentale de la force secondaire

Les manifestations expérimentales de la force secondaire ont souvent été rapportées comme des effets parasitant les expériences consacrées aux forces primaires [49] ou à la cavitation ultrasonore [50–52]. Si les observations des comportements attractifs ont été abondamment décrites dans la littérature [53–55], le cas de la répulsion, bien qu’ayant suscité l’intérêt des théoriciens [56–63], reste assez peu documenté du point de vue expérimental [64, 65].

Dans cette partie, on propose une illustration expérimentale des résultats précédents. On s’intéressera, pour cela, à la trajectoire d’une bulle insonifiée alors qu’elle se trouve au voisinage d’une bulle fixe. Un certain nombre de difficultés peuvent alors se présenter. Tout d’abord, il faut parvenir à isoler deux bulles ce qui n’est jamais une chose aisée. Il convient, par ailleurs, de contrôler la distance d_{12} , de manière à assurer la validité de l’approximation des bulles proches ainsi que la prévalence de la force secondaire. Enfin, l’observation étant généralement réalisée dans un plan déterminé, l’expérimentateur ne peut accéder à la composante hors-plan du déplacement ce qui peut s’avérer problématique pour l’analyse quantitative.

4.4.1 Dispositif expérimental et description du problème

Nous présentons ici la solution vers laquelle nous avons convergé afin de dépasser les limitations évoquées plus haut. Le dispositif est constitué de deux cuves imbriquées ; la plus petite contenant un fluide à seuil tandis que la plus grande est remplie d’eau. La séparation est assurée par une membrane fine (mylar) de $3 \mu\text{m}$ d’épaisseur qui, par conséquent, n’introduit pas de rupture d’impédance entre les deux milieux. La bulle 1 est injectée directement dans le fluide à seuil au moyen d’un capillaire. La contrainte seuil étant supérieure à la poussée d’Archimède, la bulle demeure piégée à l’endroit de l’injection permettant ainsi de limiter l’étude à la trajectoire de la bulle 2. Cette dernière est injectée directement dans l’eau au moyen d’un deuxième capillaire situé sous la membrane fine. Elle s’élève alors sous l’effet de la poussée d’Archimède jusqu’à rencontrer la membrane. La vitesse de son déplacement le long de la membrane peut être contrôlée en modifiant l’angle θ de la petite cuve par rapport à l’horizontale. Le dispositif est reporté en figure 4.9. On fixe l’origine de l’axe des temps à l’instant de l’injection. À partir de $t = t_1$, la trajectoire est enregistrée à une cadence de 150 images par seconde. On note x' et y' les directions génératrices du plan du film de mylar, x' étant alignée à la pente de la membrane et y' étant orthogonale à x' . En l’absence d’insonification, on observe un mouvement rectiligne uniforme de la bulle selon x' . De même, on note H la distance séparant les centres respectifs des bulles lorsque la bulle mobile est située à la verticale de la bulle piégée. Dans la situation la plus simple pour laquelle la bulle piégée est en contact avec le film souple, on a $H = a_1 + a_2$. Le champ ultrasonore est appliqué par le biais d’un transducteur (Panametrics X1021) centré à 30 kHz et directement couplé au réservoir d’eau, entre les instants t_2 et t_3 . La figure 4.9(c) détaille les forces en présence. L’équilibre des forces met en jeu la poussée d’Archimède $\mathbf{\Pi}$, la réaction du film \mathbf{R} et la traînée visqueuse \mathbf{F}_v . Lorsque l’on

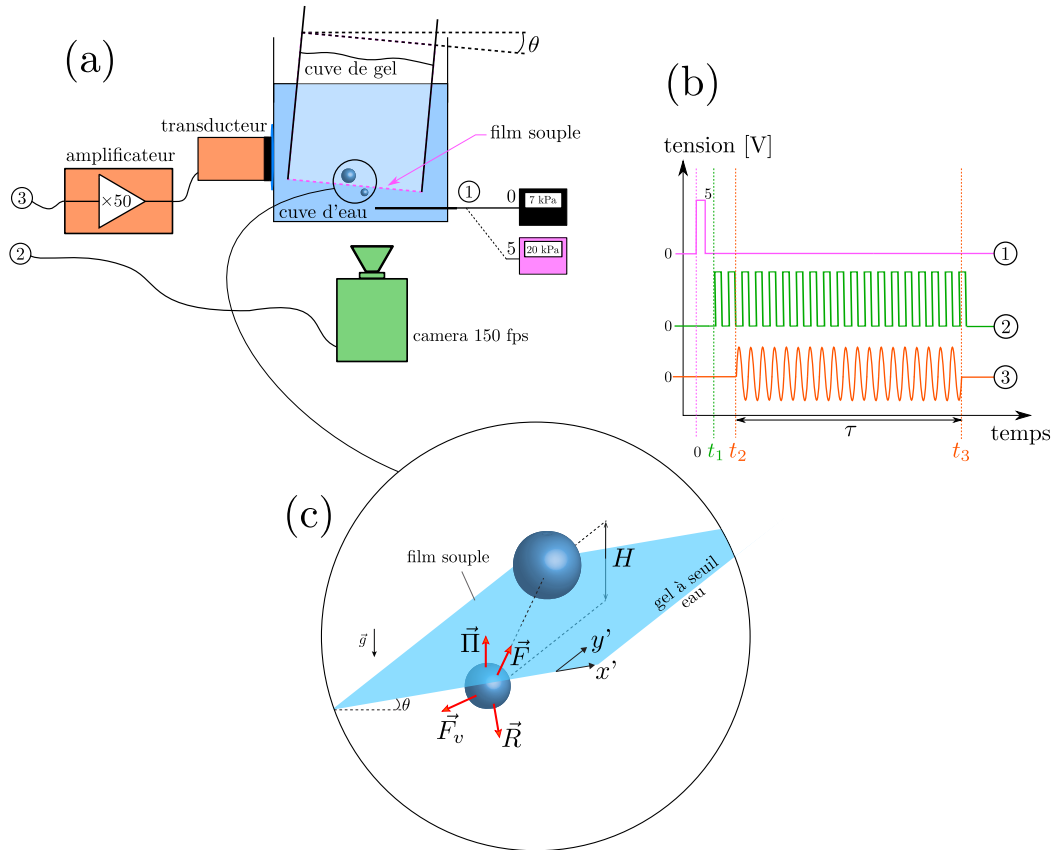


FIGURE 4.9 – (a) Schéma représentant le dispositif expérimental. (b) Tension appliquées au niveau de l’injecteur (1), de la synchronisation de la caméra (2) et du système amplificateur-transducteur (3). (c) Agrandi de la zone d’intérêt et représentation des forces qui s’exercent entre t_2 et t_3 .

applique le champ ultrasonore, on peut rajouter la force de Bjerknes secondaire, notée \mathbf{F} , orientée selon la direction reliant les centres des deux bulles. Notons finalement que le système de cuves imbriquées est dimensionné de manière à éviter les résonances de type Fabry-Pérot et ce sur l’ensemble de la gamme de fréquence [10-20] kHz.

4.4.2 Calibration de la traînée

Dans un premier temps, il nous faut étudier le déplacement de la bulle mobile en l’absence d’insonification. En effet, le mouvement d’un objet sphérique au contact d’une paroi ne constitue pas un problème trivial d’autant plus que le nombre de Reynolds est ici de l’ordre de 1 et que la nature du contact dynamique entre la bulle et la membrane (roulement/glisement) n’est pas claire. On se propose de se limiter au cas des déplacements lents et de considérer une force de traînée de la forme $\mathbf{F}_\eta = -\beta\mathbf{v}$ avec β à déterminer. L’équilibre des forces s’écrit $\mathbf{\Pi} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_\eta = \mathbf{0}$. La projection de cette identité sur la direction $(0x)$ donne $\Pi \sin \theta = \beta v$. En tenant compte de l’effet de

projection, on peut relier la vitesse réelle à la vitesse mesurée à la caméra : $v_m = v \cos \theta$. On attend donc une vitesse mesurée de la forme suivante :

$$v_m = \frac{\Pi}{2\beta} \sin 2\theta.$$

On reporte, sur la figure 4.10, les évolutions temporelles de la vitesse enregistrées pour différentes valeurs de θ . L'accord avec la droite d'ajustement valide la formule postulée et on peut extraire $\beta = \frac{\Pi}{2k}$, avec $k = 4.6 \times 10^{-3}$ m/s le coefficient directeur de la droite d'ajustement. En remplaçant la poussée d'Archimède par sa valeur $\Pi = 4\pi\rho_0ga_2^3/3$,

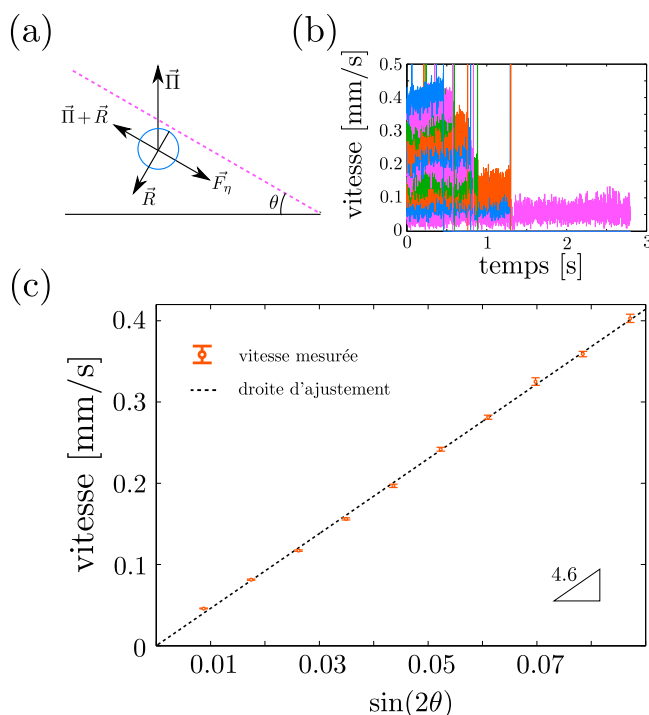


FIGURE 4.10 – Calibration expérimentale de la traînée. (a) Représentation de l'équilibre des forces en l'absence d'insonification. (b) Mesure de la vitesse instantanée pour différentes valeurs de θ . (c) Évolution de la vitesse mesurée v_m en fonction de θ et droite d'ajustement.

on obtient $\beta = 7 \times 10^{-6}$ kg.s $^{-1}$.

4.4.3 Observation des deux régimes et validation de l'approximation des bulles proches

On applique désormais une excitation monochromatique aux bornes de l'amplificateur entre les instants t_2 et t_3 , en s'assurant qu'à $t = t_2$ la bulle 1 est suffisamment proche de la bulle 2 de manière à pouvoir postuler l'approximation de bulles proches discutée plus haut. Dans cette partie, on considère deux bulles de tailles sensiblement

différentes : $a_1 = 200 \mu\text{m}$ et $a_2 = 115 \mu\text{m}$. Le rapport des rayons a_1/a_2 est donc ici de 1,74. Les résonances de Minnaert correspondantes se situent respectivement à $f_{M1} = 15 \text{ kHz}$ et $f_{M2} = 25 \text{ kHz}$. Dans un premier temps, on excite à $f = 14 \text{ kHz}$. Cette fréquence se trouve à l'extérieur de l'intervalle $[f_{M1}; f_{M2}]$. Par conséquent, on s'attend à ce que les deux bulles oscillent en phase et la force prévue par la formule (4.19) est attractive. La trajectoire observée, et représentée en 4.11(a), est conforme à nos attentes puisque la bulle 2 se rapproche de la bulle 1 pendant toute la phase d'insonification. Les axes définis par l'image de la caméra sont notés x et y .

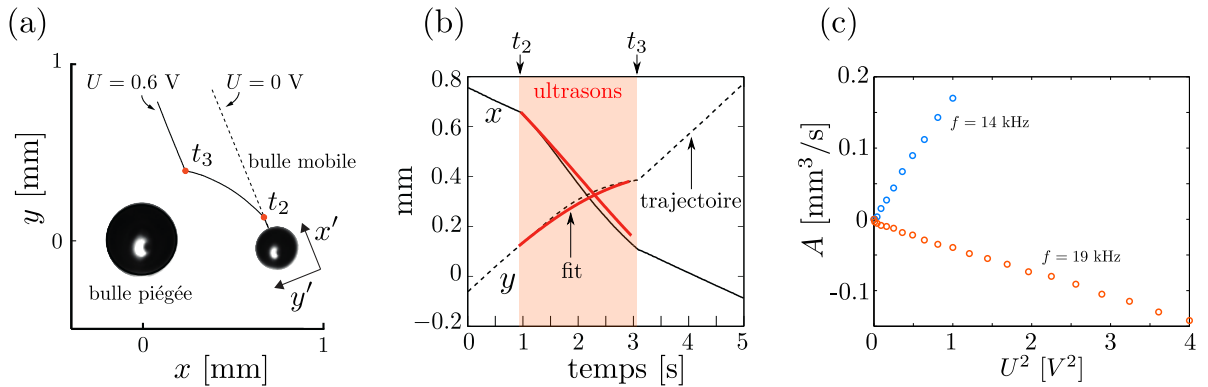


FIGURE 4.11 – (a) Trajectoire obtenue pour $a_1 = 200 \mu\text{m}$ et $a_2 = 115 \mu\text{m}$ à $f = 14 \text{ kHz}$ et pour $U = 0.6 \text{ V}$ (trait plein). À titre de comparaison, on superpose la trajectoire enregistrée sans insonification (traits pointillés). (b) x et y en fonction du temps pour la trajectoire à $f = 14 \text{ kHz}$ (traits noirs) et trajectoire théorique obtenue en retenant le préfacteur A donnant le meilleur accord (trait rouge). (c) Valeur du préfacteur A donnant le meilleur accord pour $f = 14 \text{ kHz}$ (cercles bleus) et $f = 19 \text{ kHz}$ (cercles rouges) en fonction du carré de la tension appliquée à l'amplificateur.

Puisqu'on dispose d'une formule analytique pour la force secondaire, rien ne nous empêche d'écrire l'équilibre des forces pendant la phase d'insonification. Afin de soulager le lecteur, on introduit le préfacteur $\alpha = 2\pi\rho\omega^2 a_{10}^2 a_{20}^2 \text{re}(\xi_{10}\xi_{20}^*)$ de manière à écrire $F_{B2} = -\alpha/d^2$. En projetant le bilan des forces sur le plan de la paroi, on obtient donc :

$$-\alpha \frac{x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'}}{(x'^2 + y'^2 + H^2)^{3/2}} + \Pi \sin \theta \mathbf{e}_{x'} - \beta \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

En injectant l'expression de la vitesse en régime permanent en absence d'insonification $\Pi \sin \theta = \beta v_0$ et en introduisant le préfacteur réduit $A = \alpha/\beta$, on a :

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{e}_{x'} - A \frac{x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'}}{(x'^2 + y'^2 + H^2)^{3/2}}. \quad (4.22)$$

La calibration du transducteur en champ proche constitue une tâche particulièrement fastidieuse et peu reproductible. On traitera donc A comme un paramètre ajustable que l'on déterminera en ajustant la trajectoire théorique sur la trajectoire expérimentale. Pour ce faire, on calcule itérativement, à partir du point $\{x(t_2), y(t_2)\}$, l'ensemble

des positions successives de la bulle mobile et le nouveau vecteur vitesse qui en découle. On considère donc implicitement A comme étant indépendant de la position. Cette hypothèse peut être discutée dans le cas de la répulsion puisque la condition de prédominance de la force secondaire sur la force primaire exige que la distance interbulle reste faible. Dans les cas litigieux, on pourra toujours limiter l'algorithme de comparaison aux premiers instants de la trajectoire puisque la position d'application du son $\{x(t_2), y(t_2)\}$ a été choisie de manière à assurer cette condition. Un exemple de comparaison entre les trajectoires numérique et expérimentale a été reporté sur la figure 4.11(b). Le choix de A porte sur la comparaison avec les données expérimentales pour chacune des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. On peut alors s'intéresser à l'évolution de la valeur retenue pour A lorsque l'on modifie la fréquence et la tension appliquée au niveau de l'amplificateur. Les résultats reproduits en figure 4.11(c) montrent l'existence de deux régimes. On mesure, en effet, un préfacteur positif à $f = 14$ kHz et négatif à $f = 19$ kHz. Cette deuxième fréquence est bien située à l'intérieur de l'intervalle $[f_{M1}; f_{M2}]$ pour laquelle le modèle prévoit une force répulsive.

4.4.4 Influence du couplage

On considère désormais le cas de deux bulles de rayons plus semblables, $a_1 = 240 \mu\text{m}$ et $a_2 = 185 \mu\text{m}$, si bien qu'on a $a_1/a_2 = 1,30$. En conséquence, les deux fréquences de résonance associées seront également voisines. L'approche qui consistait à assimiler nos bulles à deux résonateurs indépendants n'est plus adaptée car elles sont désormais susceptibles de se coupler. Les deux bulles diffuseront efficacement de manière simultanée et des séquences de diffusion multiple particulièrement longues peuvent être impliquées. En particulier, chaque bulle peut être amenée à s'influencer elle-même au travers de boucle de diffusion avec sa voisine. On ne peut plus décrire le système comme précédemment. Il faut se représenter un système à deux niveaux, l'un monopolaire à basse fréquence et l'autre dipolaire à haute fréquence. La dégénérescence entre ces deux niveaux découle directement du processus de diffusion multiple dont il faudra donc tenir compte. En pratique, la démonstration qui mène à la formule (4.19) reste valable à condition de considérer les pressions corrigées p_{10}^c et p_{20}^c à la place des pressions balistiques p_{10} et p_{20} . Le calcul des pressions corrigées est analogue à celui présenté en partie 1.3. On inverse la matrice S du problème :

$$\begin{pmatrix} p_{10}^c \\ p_{20}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4\pi f_2(\omega)G_0(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ -4\pi f_1(\omega)G_0(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_{10} \\ p_{20} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

où $G_0(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ est la fonction de Green monochromatique en espace libre entre les points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . Grâce à l'équation (4.14), on en déduit les amplitudes d'oscillations ξ_{10}^c et ξ_{20}^c , qui remplaceront ξ_{10} et ξ_{20} dans (4.19). La figure 4.12 permet de comparer les valeurs de A obtenues expérimentalement avec la prédiction fournie par la formule (4.19) avec et sans l'effet de la diffusion multiple. Ces résultats confirment l'importance de la diffusion multiple dans le comportement du couple de bulles. Comme prévu, on ne peut plus distinguer les trois régimes définis par les deux résonances. En revanche, on observe bien les modes monopolaire et dipolaire du système couplé qui se

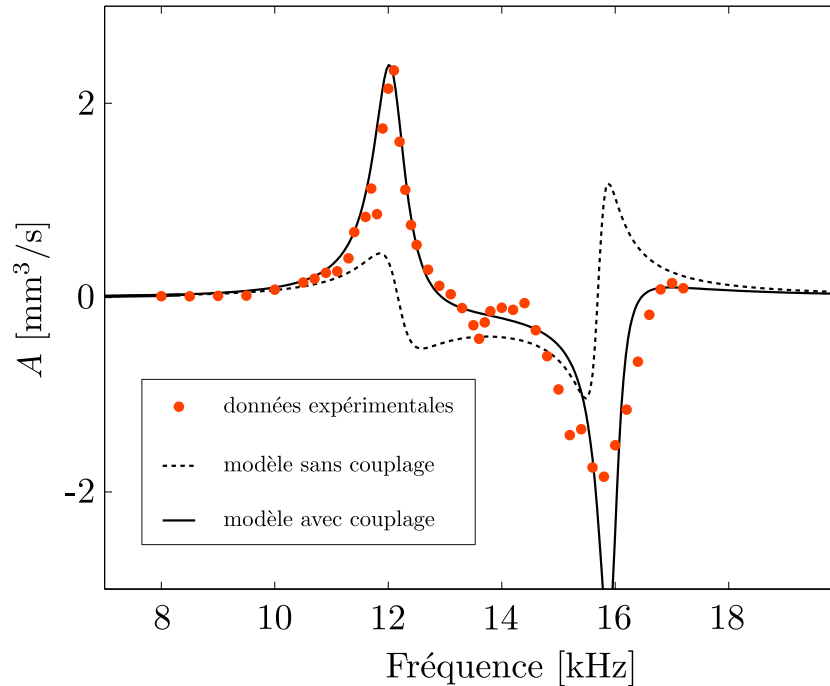


FIGURE 4.12 – Tracé de $A = \alpha/\beta$ en fonction de la fréquence. Les cercles représentent les résultats expérimentaux, les traits pointillés le modèle sans couplage et le trait plein le modèle avec couplage. Ici pour des bulles de rayon $a_1 = 240 \mu\text{m}$ et $a_2 = 185 \mu\text{m}$ et donc un rapport $a_1/a_2 = 1,30$

caractérisent respectivement par une nature attractive et répulsive de la force secondaire. À $f = 12 \text{ kHz}$ par exemple, le mode monopolaire est prédominant et on mesure $A = 2 \text{ mm}^3/\text{s}$. La force secondaire associée est d'amplitude $F_{B2} = 14 \text{ nN}$. Ces résultats illustrent également les limites de l'hypothèse, émise dans la partie précédente, quant à l'indépendance de A vis-à-vis de la distance interbulle d . On anticipe, en effet, que l'influence du couplage se fera d'autant plus sentir que les bulles s'approcheront. Quantitativement, c'est la présence de la fonction de Green dans l'expression de la pression corrigée (équation (4.23)) qui nous a permis d'introduire la dépendance de A en d .

4.4.5 Un cas de couplage extrême

Que se passe-t-il lorsque l'on renforce encore le couplage ? On se propose de reproduire l'expérience pour un couple de bulles de rayons $a_1 = 151 \mu\text{m}$ et $a_2 = 127 \mu\text{m}$. Le rapport a_1/a_2 est désormais de 1,19. On s'attend donc à ce que le couplage soit d'autant plus efficace. Pour le vérifier, on procède de la manière suivante. Alors que les deux bulles sont situées à une distance $d = 1 \text{ mm}$ et que l'interface eau/gel est à l'horizontale ($\theta = 0$) de manière à assurer l'immobilité des deux bulles, on insonifie à la fréquence $f = 25,5 \text{ kHz}$, c'est-à-dire légèrement au delà de f_{M2} . Comme le montre

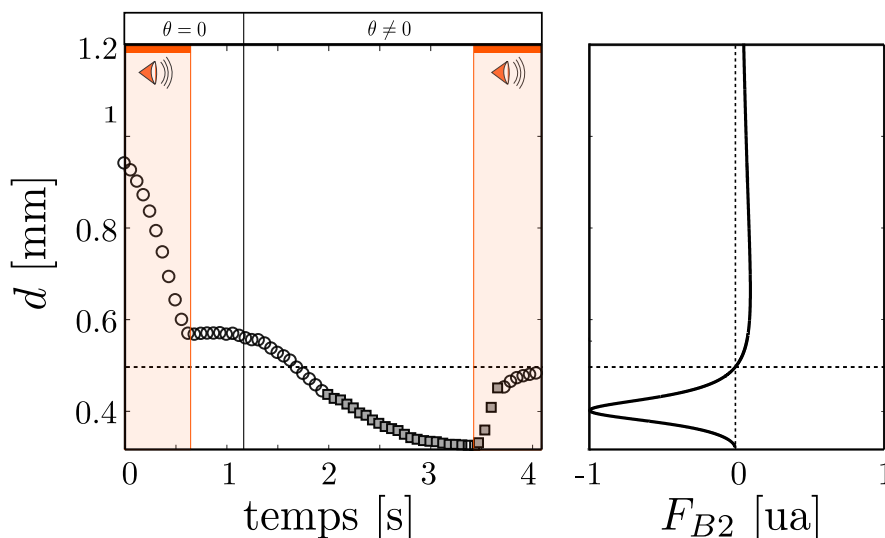


FIGURE 4.13 – Mesure de la distance interbulle d en fonction du temps (à gauche) et tracé théorique de la force secondaire en fonction de la distance d en utilisant la formule tenant compte du couplage. Ici on a injecté un couple de bulles de rayons $a_1 = 151 \mu\text{m}$ et $a_2 = 127 \mu\text{m}$ et on a donc un rapport $a_1/a_2 = 1,19$. Les symboles carrés représentent les positions pour lesquelles l’acquisition de la trajectoire a due être effectuée à la main du fait de la superposition des deux bulles dans le champ de la caméra.

l’enregistrement de la trajectoire, reporté en figure 4.13, la distance d décroît alors pendant toute la durée d’application des ultrasons. La force est donc attractive. On incline alors la cuve de gel ($\theta \neq 0$) de telle façon que la bulle mobile se rapproche de la bulle fixe sous le seul effet de la poussée d’Archimède. Lorsqu’elles sont à hauteur l’une de l’autre, on insonifie de nouveau l’échantillon, toujours à $f = 25,5 \text{ kHz}$. Curieusement, les deux bulles s’écartent alors supposant un changement de signe de la force. Le tracé théorique de la force calculée en tenant compte de la diffusion multiple vient confirmer notre observation. Non seulement on observe bien une distance de changement de signe pour la force secondaire mais celle-ci semble également coïncider avec la distance d’équilibre constatée pour la deuxième phase d’insonification. Si on n’observe pas cet équilibre durant la première phase, cela semble essentiellement attribuable à une durée trop brève d’application des ultrasons.

On peut interpréter le changement de signe à l’aide d’arguments qualitatifs. Lorsque la distance d diminue, le mode dipolaire devient plus difficile à exciter puisque le champ varie moins à l’échelle des deux bulles. Réciproquement, il rayonne plus difficilement et son facteur de qualité augmente. Le mode dipolaire devient donc plus piqué : la gamme de fréquences concernée par le comportement répulsif se resserre. Une autre conséquence de la diminution de d est le déplacement du mode dipolaire vers les hautes fréquences. Quand d diminue, le mode dipolaire force la phase à varier sur des

petites échelles générant ainsi des fréquences spatiales élevées. L'énergie associée au mode augmente de même que sa fréquence propre. Or, la fréquence que l'on a choisie est légèrement supérieure à la résonance de la plus petite bulle f_{M2} . En rapprochant les deux bulles, le mode dipolaire est donc susceptible de se décaler vers les hautes fréquences dépassant ainsi f_{M2} pour finalement atteindre la fréquence d'insonification.

Le fait que la fréquence des modes propres dépende de la distance interbulle a déjà été introduit dans un certain nombre de travaux théoriques [56, 60–62]. Cependant, le cas du couplage extrême n'a, à notre connaissance, n'a donné lieu qu'à un seul développement expérimental par le passé. Barbat [65] a ainsi observé que deux bulles mobiles de tailles semblables ($a_1 = 146 \mu\text{m}$, $a_2 = 137 \mu\text{m}$ et donc $a_1/a_2 = 1,07$) excitées au voisinage de leur résonance décrivaient des trajectoires cycliques composées d'une succession de phases d'attraction et de répulsion. Dans leur cas, l'absence de position d'équilibre peut être attribuée aux déformations de la surface des bulles qui sont susceptibles d'apparaître dans le cas de déplacements rapides et qui introduisent alors une dissymétrie entre les phases d'attraction et de répulsion.

4.5 Forces de Bjerknes étendues

La distinction entre force primaire et secondaire est généralement assez équivoque. Tout est une question de structure du champ. Pourtant on peut se poser la question de la dénomination à adopter lorsqu'un objet est soumis à un champ diffusé par un plus grand nombre de voisins. La figure 4.14 illustre le problème. Si l'approximation

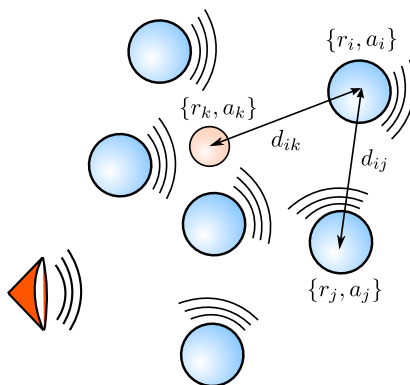


FIGURE 4.14 – Un échantillon de n bulles réparties aléatoirement est soumis à un champ extérieur. On s'intéresse au champ ressenti en \mathbf{r}_k par la bulle mobile de rayon a_k .

des bulles proches subsiste, le gradient de champ n'est pas nécessairement contraint aux directions reliant les diffuseurs et on ne peut plus aisément distinguer les régimes d'attraction et de répulsion. Du point de vue applicatif, cette configuration est prometteuse puisqu'elle permet d'envisager des comportements plus sophistiqués. Dans cette partie, nous présentons deux exemples de manipulation d'une bulle au moyen des forces générées par un grand nombre de bulles fixes.

4.5.1 Expression de la force étendue

Pour retrouver l'expression de la force dans le cas général, on suppose une source ponctuelle placée en \mathbf{r}_0 émettant un champ monochromatique à la pulsation ω . La bulle k , appartenant à un tirage aléatoire de n objets, est repérée par sa position et son rayon $\{\mathbf{r}_k, a_k\}$ comme sur la figure 4.14. La pression ressentie en un point r est obtenue en appliquant la formule établie en partie 1.2.1.3 :

$$p(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + {}^t\mathcal{G}^{\text{out}}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{P}^{\text{inc}} \quad (4.24)$$

avec

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -4\pi f_j(\omega)G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le champ ressenti par la bulle $\{\mathbf{r}_k, a_k\}$ n'est pas exactement $p(\mathbf{r}_k)$ puisqu'il faut retirer le champ diffusé par la bulle k elle-même. On introduit donc le vecteur $\mathcal{G}_k^{\text{out}}$ dont la

k^{ième} coordonnée vaut 0 :

$$\mathcal{G}_{k,i}^{\text{out}} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = k \\ 4\pi f_i G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) & \text{if } i \neq k. \end{cases}$$

Le champ, au niveau de la bulle k , s'écrit alors :

$$p_k(\mathbf{r}_k) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + {}^t\mathcal{G}_k^{\text{out}} \mathcal{S}^{-1} \mathcal{P}^{\text{inc}}. \quad (4.25)$$

Attention, si la force ne dépend pas du champ émis par la bulle mobile, celle-ci intervient quand même par l'intermédiaire des séquences de diffusion multiple. D'ailleurs, la matrice \mathcal{S} n'a pas été modifiée. D'après la définition générale de l'équation (4.4), la force instantanée ressentie par cette bulle peut donc s'écrire :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B},k} = - \iiint_{V_k} \mathbf{grad}(p_k)_{\mathbf{r}_k} dV \quad (4.26)$$

Dans un premier temps, on se propose de faire l'hypothèse d'un nuage faiblement concentré. Dans ces conditions, la longueur d'onde effective λ_{eff} reste grande devant a_k . On peut donc à nouveau sortir le gradient de l'intégrale.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B},k} = -V_k \mathbf{grad}(p_k)_{\mathbf{r}_k} \quad (4.27)$$

Le formalisme monochromatique nous autorise à écrire le volume de la bulle comme précédemment :

$$V_k = V_{k,0} (1 + 3x_{0,k} e^{-i\omega t}) \quad (4.28)$$

à l'ordre 1 en $x_{0,k}$ qui représente l'amplitude relative des oscillations, $x_{0,k} = \xi_{0,k}/a_{0,k}$ avec, comme on l'a vu en (4.8),

$$x_{0,k} = \frac{p_{0,k}}{\rho_0 a_{0,k}^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega} \quad (4.29)$$

En remarquant qu'ici, $p_{0,k} e^{-i\omega t} = p_k(\mathbf{r}_k)$, on obtient une première expression de la force :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B},k} = -V_{k,0} \left[1 + \frac{3}{\rho_0 a_{0,k}^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega} p_k(\mathbf{r}_k) \right] \mathbf{grad}(p_k)_{\mathbf{r}_k} \quad (4.30)$$

Enfin, on passe à la moyenne temporelle sur une période (ce qui a pour effet de supprimer la composante constante dans les crochets) et on remplace $V_{k,0}$ par son expression pour finalement obtenir :

$$\langle \mathbf{F}_{\mathbf{B},k} \rangle_T = - \frac{2\pi a_{k,0} / \rho_0}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega} \text{Re} [p_k \mathbf{grad}(p_k)^*]_{\mathbf{r}_k} \quad (4.31)$$

4.5.2 Le trio de bulles

La première configuration qui nous intéressera est aussi la plus simple ; à savoir un tirage de $n = 3$ bulles. Pour que l'interprétation reste simple, on se limite au cas d'une unique bulle mobile. Nous avons donc réalisé la même expérience que précédemment en injectant deux bulles de tailles différentes $a_1 = 173 \mu\text{m}$ et $a_2 = 215 \mu\text{m}$ respectivement aux positions $x_1 = -1 \text{ mm}$ et $x_2 = 1.4 \text{ mm}$ dans la cuve contenant le fluide à seuil. La bulle mobile, de rayon $a_m = 150 \mu\text{m}$ est injectée directement dans l'eau et est amenée à la côte $x_m = 0$. La distance verticale entre le plan passant par le centre des bulles piégées et celui dans lequel se déplace la bulle mobile vaut $H = 400 \mu\text{m}$. On

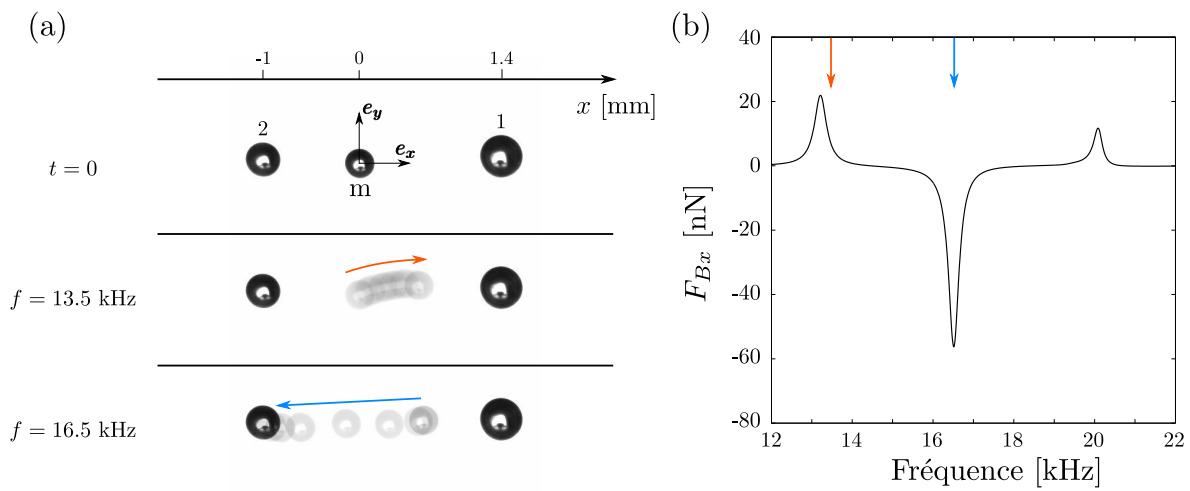


FIGURE 4.15 – (a) Trajectoires obtenues après insonification à 13.5 puis 16.5 kHz. (b) Force ressentie par la bulle mobile à $t = 0$ pour une surpression appliquée $p_0 = 20 \text{ Pa}$.

applique ensuite les ultrasons aux fréquences $f_{M2} = 13.5 \text{ kHz}$ puis $f_{M1} = 16.5 \text{ kHz}$. Les trajectoires obtenues sont représentées sur la figure 4.15(a). La bulle mobile est attirée vers la bulle 1 dans un premier temps puis vers la bulle 2. Le tracé de la projection F_{Bx} de la force sur e_x , telle que calculée via la relation (4.31), corrobore les résultats expérimentaux (voir figure 4.15). Notons que le tracé théorique correspond à la position $x_m(t = 0) = 0$. Aussi, il fait apparaître trois pics indépendants pour la force secondaire. Ceci suppose que la diffusion multiple joue un rôle modeste dans cette configuration.

4.5.3 Manipulation à deux dimensions : le cas du trio de bulles

À la lumière de nos derniers résultats, on peut envisager le cas de la manipulation à deux dimensions. Tout se passe, en effet, comme si on disposait de deux pôles qui, à condition de bien maîtriser la fréquence de travail ainsi que les effets du couplage, peuvent alternativement exhiber un comportement attractif ou répulsif. Dans le cas

général pour lequel le trio de bulles n'est pas aligné, il n'y a donc plus de raison de se limiter au cadre de la manipulation unidimensionnelle. La condition évoquée n'est pourtant pas des moindres. À moins de contraindre le mouvement à une région bien précise de l'espace, il subsiste une probabilité pour que les trois bulles s'alignent, ce qui aurait pour effet de confiner de nouveau la bulle mobile dans une seule dimension. Dans l'intérêt de la généralité de la méthode, il convient donc de briser la symétrie. On pourrait, par exemple, piéger une troisième bulle dans le réservoir de fluide à seuil. Mais on souhaite conserver une configuration extrêmement simple ; on se propose donc d'utiliser la source comme degré de liberté supplémentaire. La bulle mobile étant notamment réceptive au gradient du champ, il suffit pour cela que le champ balistique ne soit pas homogène dans le plan (xOy) . Ceci suppose donc que la direction de l'insonification ne soit pas alignée avec l'axe (Oz) . À moins que l'on utilise une source ponctuelle, auquel cas, il nous suffit de la placer suffisamment proche de la bulle mobile pour garantir la non-planéité des fronts d'onde. C'est la seconde solution que nous adopterons dans la suite.

Les résultats présentés ici se trouvent encore à l'état de développements numériques. Nous nourrissons toutefois l'espoir qu'ils puissent être transcrits expérimentalement dans le futur.

Considérons dans un premier temps un tirage aléatoire de deux bulles piégées dans le plan $z = 0$. On place une troisième bulle, mobile, en $\{x_m(t = 0) = 0; y_m(t = 0) = 0\}$. Pour être dans des conditions comparables à celles de l'expérience, on laisse la place pour un film de mylar virtuel en fixant $z_m(t) = -H = -(a_m + \max(a_1, a_2))$. En particulier, ici on a $a_1 = 52 \mu\text{m}$, $a_2 = 50 \mu\text{m}$ et $a_m = 80 \mu\text{m}$. Dans le cadre de la simulation, la source est ponctuelle et on la place suffisamment proche $\{0; 0; 3\text{mm}\}$ pour pouvoir profiter du gradient qu'elle génère comme discuté plus haut. Une vue de dessus de la configuration de départ est représentée sur la figure 4.16(a). Pour cette disposition, on trace la force ressentie en $\{x_m(t = 0) = 0; y_m(t = 0) = 0\}$, projetée sur les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y , en fonction de la fréquence (figure 4.16(b)). On peut facilement trouver 3 fréquences $f = f_1, f_2$ et f_3 pour lesquelles on attend des orientations très différentes. Par exemple, pour f_1 , F_{Bx} et F_{By} sont toutes deux négatives tandis que pour $f = f_2$, on a $F_{Bx} < 0$ et $F_{By} > 0$. Enfin, lorsque $f = f_3$, $F_{Bx} > 0$ tandis que $F_{By} < 0$. Pour mieux s'en convaincre, on peut se référer à la figure 4.16(c) sur laquelle on a reporté les cartes de champ (codé en couleur) ainsi que les cartes des résultantes \mathbf{F}_B (flèches) obtenues via l'équation (4.31). La flèche centrale, en blanc, donne l'orientation pour la bulle mobile m . La bonne nouvelle c'est que, pour une position donnée, on dispose d'une grande variété d'orientations possibles. On peut donc construire un algorithme récursif qui choisit, pour chaque position successive, la fréquence à imposer afin d'adapter la trajectoire en temps réel. Pour calculer ces positions, il faut convertir la force de Bjerknes en vitesse instantanée en postulant, comme précédemment, l'équilibre avec la traînée visqueuse $F_\eta = -\beta\mathbf{v}$. En supposant le coefficient β comme linéairement dépendant du rayon de la bulle mobile, on peut réutiliser la valeur calculée en (4.4.2) à condition de modifier la formule comme suit :

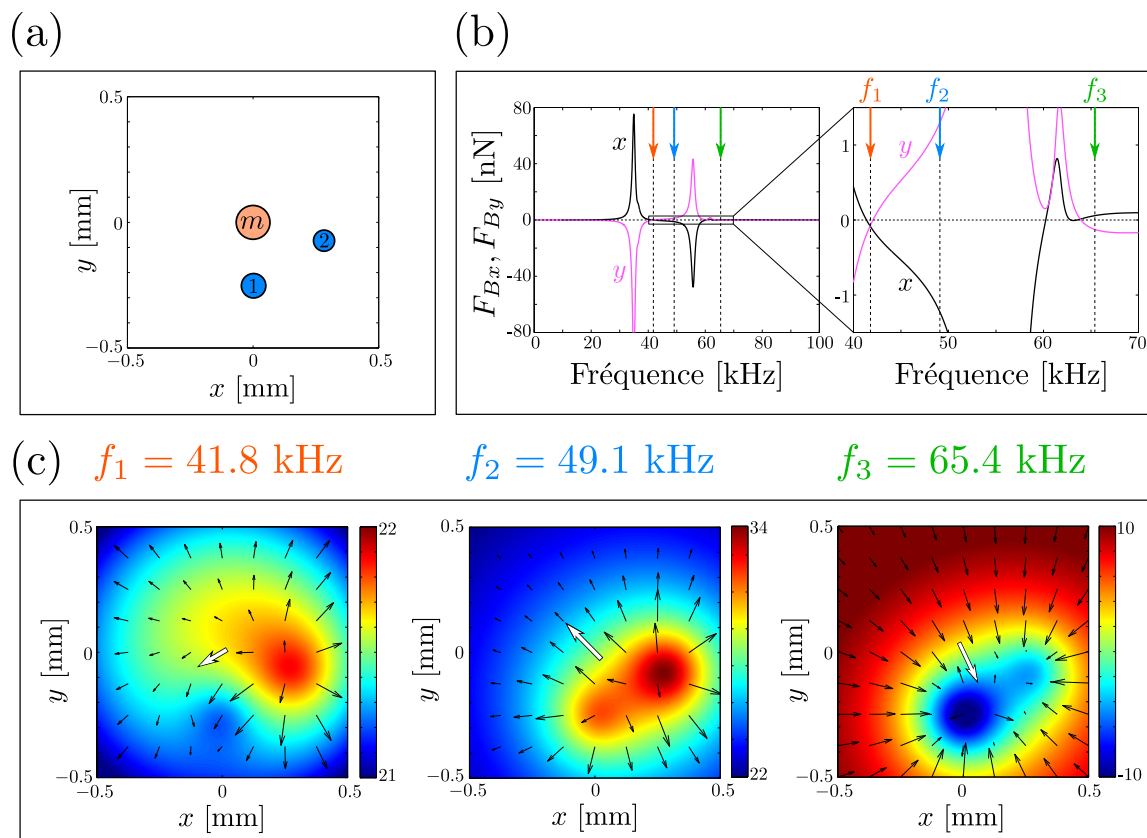


FIGURE 4.16 – (a) Disposition du trio de bulles à $t = 0$. (b) Projections F_{Bx} et F_{By} de la force ressentie par la bulle mobile à $t = 0$ pour une surpression appliquée de $p_0 = 10$ Pa par une source ponctuelle placée à 3 mm. (c) Cartes du champ et de la force (flèches) pour les trois fréquences suivantes : $f_1 = 41.8$ kHz, $f_2 = 49.1$ kHz et $f_3 = 65.4$ kHz. La source est ponctuelle et placée en $\{x_s = 0; y_s = 0; z_s = 3\text{mm}\}$.

$F_\eta = -\beta \frac{a_m}{a_{\text{ref}}} \mathbf{v}$ avec $a_{\text{ref}} = 115 \mu\text{m}$. On obtient alors la vitesse de la bulle m :

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{\beta \rho_0} \frac{2\pi a_{\text{ref}}}{(\omega^2 - \omega_M^2) + i\Gamma\omega} \text{Re}[p_k \mathbf{grad}(p_k)^*]_{\mathbf{r}_k} \quad (4.32)$$

De l'expression de la vitesse à un instant donné, on peut déduire la position suivante de la bulle mobile en discrétisant sa trajectoire. Il faut alors être attentif au pas de temps $\Delta t = t(k+1) - t(k)$ choisi pour l'itération puisque, en raison du couplage, le champ $G_m(\omega, \mathbf{r}_m, \mathbf{r}_0)$ est susceptible d'évoluer rapidement. On choisit donc Δt suffisamment petit pour que le déplacement reste petit devant a_m . Il faut tout de même veiller à ce que Δt reste plus grand que la période du signal de façon à ce que la formule moyennée de la force de Bjerknes ait encore un sens. Cette condition n'est pas difficile à satisfaire puisqu'avec $a_m = 80 \mu\text{m}$, la période à résonance est de $T = 27 \mu\text{s}$. Pour chaque nouvelle position calculée, il faut appliquer de nouveau l'algorithme de diffusion multiple pour obtenir la nouvelle valeur de $G_m(\omega, \mathbf{r}_m, \mathbf{r}_0)$. Comme le montre la figure 4.17, la

méthode nous permet de contrôler précisément la trajectoire de la bulle mobile dans les deux dimensions du déplacement. On note l'existence de positions pour lesquelles la trajectoire n'est pas parfaitement reconstruite. On peut l'expliquer par l'absence de mode en adéquation avec la vitesse recherchée, auquel cas l'algorithme choisit la fréquence donnant l'orientation la "moins mauvaise". On peut également fixer la vitesse de la bulle (ici $v_0 = 20 \mu\text{m/s}$) en amplifiant le signal d'insonification par $\sqrt{\frac{v_0}{|\mathbf{v}_m|}}$. Ainsi, la source ponctuelle émet une excitation de la forme :

$$p(t) = p_0 \sqrt{\frac{v_0}{|\mathbf{v}_m(k)|}} \sin(\omega(k)t) \quad (4.33)$$

avec $t \in [t(k); t(k+1)]$. Le signal temporel utilisé pour ce tirage est tracé en fi-

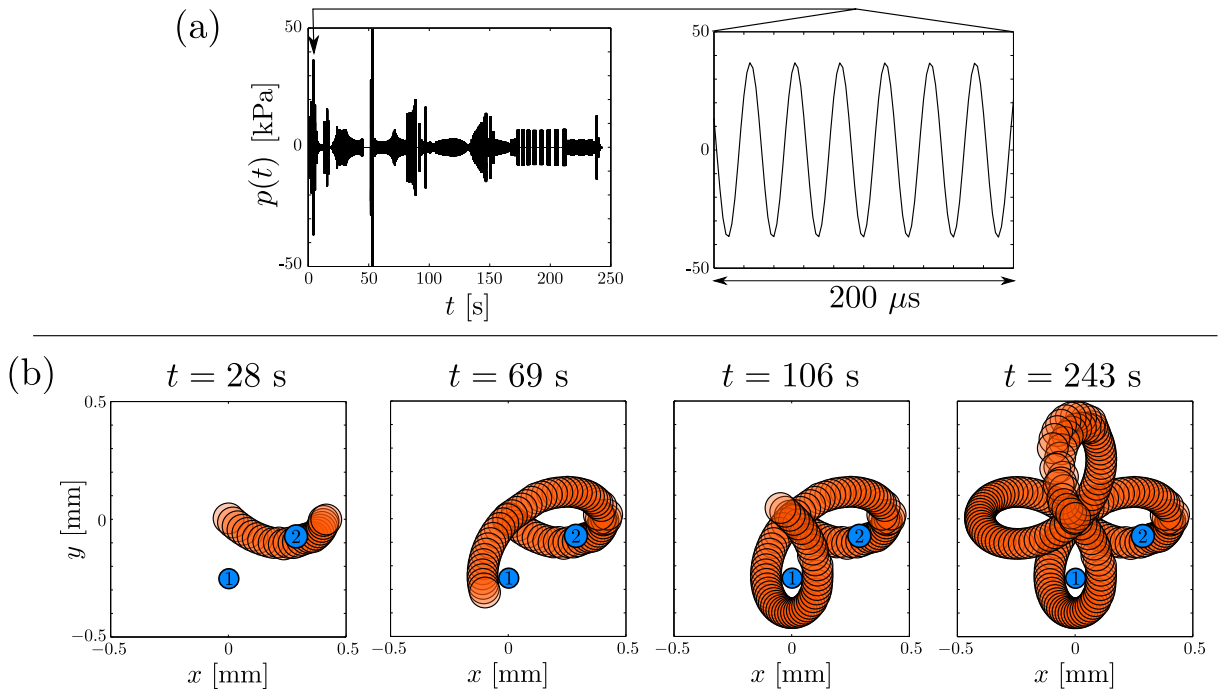


FIGURE 4.17 – (a) Signal temporel émis au niveau de la source ponctuelle et zoom sur une durée de $200 \mu\text{s}$. (b) Positions successives superposées pour des instants différents.

gure 4.17(a). L'amplitude nécessaire pour maintenir la vitesse $v_0 = 20 \mu\text{m/s}$ reste inférieure à 50 kPa , ce qui paraît raisonnable et le pas de temps moyen vaut $\langle \Delta t \rangle = 1.22 \text{ s}$. La bulle parcourt donc $24 \mu\text{m}$ pendant $\langle \Delta t \rangle$, ce qui semble en accord avec la condition de non-décorrélation du champ. Enfin, la fréquence de travail étant limitée à 100 kHz , le signal oscillera au minimum 122000 fois pendant $\langle \Delta t \rangle$. Il est donc cohérent d'utiliser l'expression moyennée de la force de Bjerknes.

4.5.4 Manipulation simultanée de plusieurs bulles mobiles

Les forces de Bjerknes secondaires, qu'elles exploitent ou non la diffusion multiple, se distinguent par leurs performances en terme de résolution. En effet, on a vu au travers des exemples précédents que la trajectoire ainsi que les éventuelles positions d'équilibre d'une bulle peuvent être contrôlées à des échelles bien inférieures à celle de la longueur d'onde. Les forces primaires, en revanche, souffrent de l'homogénéité du champ sur des distances bien supérieures à la taille d'une bulle, ce qui rend délicat le contrôle de la position de piégeage. Un autre critère qui milite en faveur de l'utilisation du champ diffus est celui de la sélectivité. Là encore, difficile d'envisager manipuler différemment deux bulles voisines à l'aide d'un champ stationnaire. En revanche, on a vu que, lorsque la diffusion multiple intervient, le comportement de la force secondaire pouvait changer brutalement et ce sur des échelles spatiales infimes. Remémorens-nous par exemple le cas des deux bulles couplées du paragraphe 4.4.5. En déplaçant légèrement la bulle mobile, ce qui avait pour effet de modifier le couplage, on observait la transition d'un comportement attractif à un comportement répulsif. Pourrait-on donc envisager contrôler efficacement les trajectoires de deux bulles mobiles simultanément ? Dans ce cas de figure, le problème ne se résume malheureusement plus à trouver la fréquence qui engendre la bonne orientation pour la force. Non seulement l'orientation doit être simultanément optimisée pour les deux positions de bulles mobiles, mais il faut ajouter à cela la problématique de la vitesse de déplacement. En effet, ayant trouvé une fréquence adéquate, rien ne garantit que la force s'exerçant sur une bulle soit du même ordre de grandeur que celle s'exerçant sur l'autre ; auquel cas une seule d'entre elles se déplacerait efficacement. La nécessité de concilier autant de conditions nous pousse à nous tourner vers une configuration qui puisse exploiter un plus grand nombre de degrés de liberté. Or, la diffusion multiple constitue généralement un excellent générateur de degrés de liberté puisqu'elle introduit une grande diversité de modes de vibrations. De plus, comme on l'a évoqué au chapitre II, les milieux multiplement diffusants permettent également d'ajuster localement la longueur d'onde effective. En particulier, pour des concentrations suffisantes on peut créer des variations spatiales de champ extrêmement rapides en comparaison de la longueur d'onde dans l'eau à la même fréquence. On peut ainsi induire une décorrélation rapide du champ et deux bulles placées à deux endroits différents pourront aisément être soumises à des déplacements indépendants. Aussi, nous considérons à présent un tirage aléatoire d'un nuage constitué de $N = 108$ bulles piégées dans le fluide à seuil en dessous duquel deux bulles de rayons respectifs $a_{m1} = 70 \mu\text{m}$ et $a_{m2} = 80 \mu\text{m}$ sont libres de se mouvoir dans l'eau. On procède comme précédemment en ajoutant le problème de la concordance des déplacements. En résumé, on sélectionne une fréquence (1) en vérifiant qu'elle fournit la bonne direction pour les déplacements ; (2) en adaptant le rapport v_{m1}/v_{m2} au rapport des distances respectives à parcourir par chacune des bulles sur le pas de temps considéré. On reporte, sur la figure 4.18(a), les cartes de champ G_{m1} (à gauche) et G_{m2} (à droite) ainsi que les cartes de vitesses obtenues en utilisant la formule (4.32) pour G_{m1} (à gauche) et pour G_{m2} (à droite). Notons que dans les deux cas les deux bulles mobiles participent à la diffusion multiple au travers

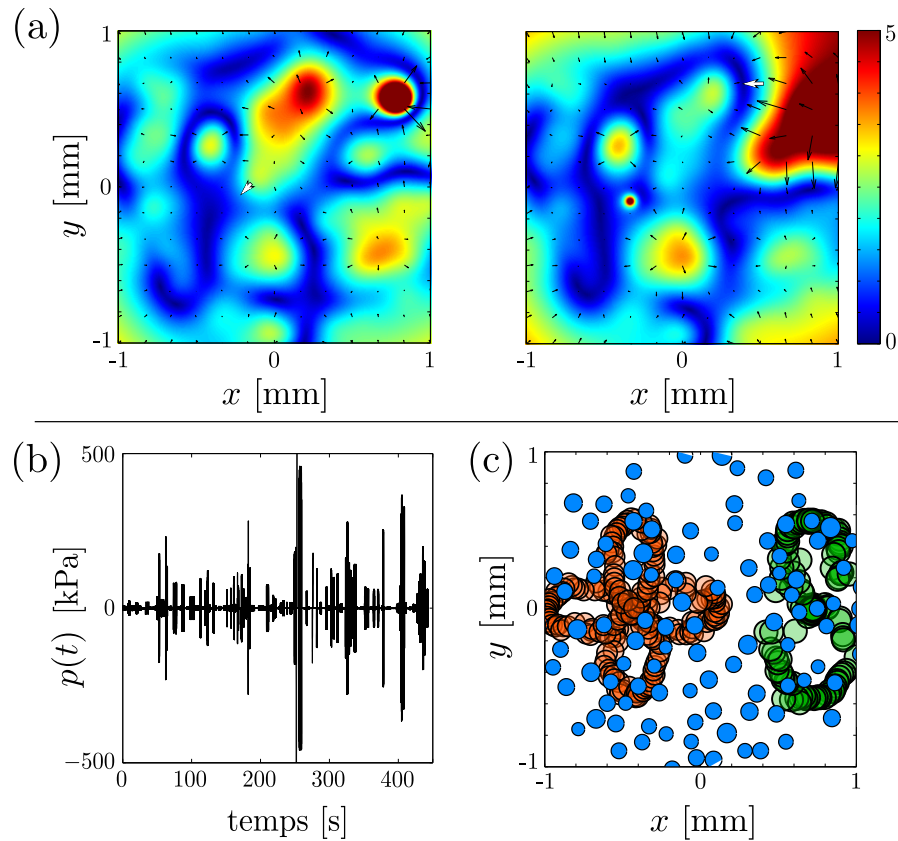


FIGURE 4.18 – (a) Cartes de champ et vecteurs vitesses à $f = 40$ kHz pour la bulle 1 (gauche) et la bulle 2 (droite). Les vecteurs vitesses situés au voisinage de la bulle d'intérêt sont blancs. (b) Signal temporel utilisé. (c) Trajectoires obtenues par superposition d'images.

de la matrice S dont la taille est ici de 110×110 . La décorrelation spatiale du champ introduite par le milieu multiplement diffusant saute au yeux, en particulier lorsque l'on compare ces résultats à ceux de la figure 4.16. L'algorithme retourne un signal temporel (figure 4.18(b)) ainsi que la trajectoire qui lui est associée (figure 4.18(c)). La tentative est à nouveau concluante puisque les deux bulles décrivent simultanément des trajectoires indépendantes sur un domaine spatial d'extension infime devant la longueur d'onde dans l'eau.

4.5.5 Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à décrire la mobilité de bulles placées dans un champ ultrasonore. Du fait de la forte compressibilité de l'air, la pression de radiation qu'elles ressentent peut devenir substantielle. On peut ainsi envisager les piéger voire les déplacer. En modifiant localement la structure du champ acoustique du fait de leur caractère diffusant, elles peuvent également être utilisées comme des sources secondaires et induire une force importante sur leurs voisines. Nous avons ainsi pu procéder à la caractérisation expérimentale de la force de Bjerknes secondaire dans le cas où une bulle, piégée, sert d'actuateur tandis qu'une seconde bulle, mobile, est déplacée. Nous avons également proposé une démonstration de l'influence du couplage qui intervient lorsque les deux bulles sont de dimensions comparables. En augmentant le nombre de bulles piégées, on peut mettre à profit les effets de couplage et disposer d'une grande variété de degrés de liberté temporels. Nous avons ainsi pu exploiter des gammes de fréquences élargies et améliorer les performances de la manipulation. Les illustrations sont, pour l'instant, essentiellement numériques. Toutefois, nous envisageons une transposition expérimentale de la méthode pour le futur. De ce point de vue, la diffusion multiple représente à la fois une aubaine et une difficulté puisque, si elle permet l'accès à un grand nombre de degrés de liberté, elle introduit également un couplage entre les bulles mobiles et piégées. Ce couplage est d'ailleurs illustré par la figure 4.18(a) qui montre que les cartes de champ obtenues pour une même fréquence peuvent nettement différer selon que l'on considère le champ diffusé par une bulle mobile ou par l'autre. Par conséquent, l'apprentissage du champ doit être reproduit pour chaque position de nos bulles. Pour éviter ce travail rébarbative, l'expérimentateur dispose de deux solutions. La première consiste à écarter les bulles piégées des bulles mobiles en jouant sur la position du film horizontal de manière à amoindrir l'influence du couplage⁴. L'apprentissage pourra alors être réalisé en amont de l'injection des bulles mobiles et leurs positions successives ne devraient pas affecter le champ outre mesure. Mais l'échelle des variations spatiales des modes augmente puisque la propagation agit comme un filtre pour les nombres d'onde les plus élevés. Il faut alors accepter de n'avoir accès qu'à des trajectoires plus simples ou de plus grande envergure. La seconde solution consiste à utiliser l'outil simulation pour prévoir le champ à chaque position. Mais cela suppose de déterminer précisément les tailles et positions de chaque objet ce qui n'est pas une tâche aisée. On peut aussi se poser la question de la tolérance des trajectoires vis-à-vis d'une potentielle erreur de mesure. Pour ce faire, il nous faudra, à l'avenir, étudier les conséquences de l'introduction d'un bruit gaussien dans la distribution des positions et des tailles des bulles piégées.

4. La figure 1.10 montre que la diffusion multiple entre en jeu pour des distances typiquement inférieures à 3 mm.

Bibliographie

- [1] Lord Rayleigh. VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(200) :94–98, 1917.
- [2] M. S. Plesset. The dynamics of cavitation bubbles. *Journal of Applied Mechanics*, 16 :277–282, 1949.
- [3] M. S. Longuet-Higgins. Viscous streaming from an oscillating spherical bubble. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 454, pages 725–742. The Royal Society, 1998.
- [4] P. Marmottant and S. Hilgenfeldt. Controlled vesicle deformation and lysis by single oscillating bubbles. *Nature*, 423(6936) :153–156, 2003.
- [5] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1881.
- [6] A. Bartoli. Il calorico raggiante e il secondo principio di termodinamica. *Il Nuovo Cimento (1877-1894)*, 15(1) :193–202, 1884.
- [7] H. T. Eddy. Radiant heat an exception to the second law of thermodynamics. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 20(112) :334–343, 1882.
- [8] Lord Rayleigh. XXXIV. On the pressure of vibrations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 3(15) :338–346, 1902.
- [9] Lord Rayleigh. XLII. On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the virial theorem. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10(57) :364–374, 1905.
- [10] Rayleigh Lord. *The theory of sound*, vol. 2, 1945.
- [11] P. Biquard. Les ondes ultra-sonores. *Revue d'Acoustique*, 1(93) :1, 1932.
- [12] G. Hertz and H. Mende. Der schallstrahlungsdruck in flüssigkeiten. *Zeitschrift für Physik*, 114(5-6) :354–367, 1939.
- [13] L. Bergmann. Der ultraschall. 1954. *Beranek, L.*
- [14] T. Hasegawa and K. Yosioka. Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 46(5B) :1139–1143, 1969.
- [15] T. Hasegawa and K. Yosioka. Acoustic radiation force on fused silica spheres, and intensity determination. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 58(3) :581–585, 1975.
- [16] C. H. Allen and I. Rudnick. A powerful high frequency siren. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 19(5) :857–865, 1947.
- [17] L. A. Crum. Tensile strength of water. 1979.
- [18] E. H. Trinh, P. L. Marston, and J. L. Robey. Acoustic measurement of the surface tension of levitated drops. *Journal of colloid and interface science*, 124(1) :95–103, 1988.

-
- [19] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Physical Review Letters*, 24(4) :156, 1970.
- [20] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*, 11(5) :288–290, 1986.
- [21] G. Sagué, E. Vetsch, W. Alt, D. Meschede, and A. Rauschenbeutel. Cold-atom physics using ultrathin optical fibers : Light-induced dipole forces and surface interactions. *Physical Review Letters*, 99(16) :163602, 2007.
- [22] E. Vetsch, D. Reitz, G. Sagué, R. Schmidt, S. T. Dawkins, and A. Rauschenbeutel. Optical interface created by laser-cooled atoms trapped in the evanescent field surrounding an optical nanofiber. *Physical Review Letters*, 104(20) :203603, 2010.
- [23] D. Reitz, C. Sayrin, R. Mitsch, P. Schneeweiss, and A. Rauschenbeutel. Coherence properties of nanofiber-trapped cesium atoms. *Physical Review Letters*, 110(24) :243603, 2013.
- [24] M. P. MacDonald, G. C. Spalding, and K. Dholakia. Microfluidic sorting in an optical lattice. *Nature*, 426(6965) :421–424, 2003.
- [25] K. Ladavac, K. Kasza, and D. G. Grier. Sorting mesoscopic objects with periodic potential landscapes : optical fractionation. *Physical Review E*, 70(1) :010901, 2004.
- [26] K. Xiao and D. G. Grier. Multidimensional optical fractionation of colloidal particles with holographic verification. *Physical Review Letters*, 104(2) :028302, 2010.
- [27] D. Baresch, J. L. Thomas, and R. Marchiano. Observation of a single-beam gradient force acoustical trap for elastic particles : acoustical tweezers. *Physical Review Letters*, 116(2) :024301, 2016.
- [28] V. F. K. Bjerknes. Fields of force. 1906.
- [29] V. Bjerknes. *Die Kraftfelder*. Number 28. F. Vieweg, 1909.
- [30] D. E. Goldman and G. R. Ringo. Determination of pressure nodes in liquids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 21(3) :270–270, 1949.
- [31] F. G. Blake Jr. Bjerknes forces in stationary sound fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 21(5) :551–551, 1949.
- [32] M. Kornfeld and L. Suvorov. On the destructive action of cavitation. *Journal of Applied Physics*, 15(6) :495–506, 1944.
- [33] L. Landau and Lifshitz E. Course of theoretical physics. *Course of Theoretical Physics*, 6, 1959.
- [34] L. V. King. On the acoustic radiation pressure on spheres. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 147, pages 212–240. The Royal Society, 1934.
- [35] L. P. Gor’Kov. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. In *Soviet Physics Doklady*, volume 6, page 773, 1962.

-
- [36] K. Yosioka and Y. Kawasima. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acta Acustica united with Acustica*, 5(3) :167–173, 1955.
- [37] T. G. Leighton, A. J. Walton, and M. J. W. Pickworth. Primary Bjerknes forces. *European Journal of Physics*, 11(1) :47, 1990.
- [38] R. W. Boyle. Ultrasonic stationary waves. *Nature*, 120 :476–477, 1927.
- [39] F. Lloyd Hopwood. Ultrasonics : Some properties of inaudible sound. *Nature*, 128 :748–751, 1931.
- [40] G. W. Willard. Ultrasonically induced cavitation in water : A step-by-step process. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25(4) :669–686, 1953.
- [41] W. L. Nyborg, A. Rogers, and D. E. Hughes. Cavitation streamers and surface wave phenomena. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33(11) :1672–1672, 1961.
- [42] T. B. Benjamin. Surface effects in non-spherical motions of small cavities. *Cavitation in*, 1964.
- [43] A. Eller. Force on a bubble in a standing acoustic wave. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 43(1) :170–171, 1968.
- [44] L. A. Crum and A. I. Eller. Motion of bubbles in a stationary sound field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 48(1B) :181–189, 1970.
- [45] R. K. Gould. Simple method for calibrating small omnidirectional hydrophones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 43(5) :1185–1186, 1968.
- [46] D. Rabaud, P. Thibault, J. P. Raven, O. Hugon, E. Lacot, and P. Marmottant. Manipulation of confined bubbles in a thin microchannel : Drag and acoustic Bjerknes forces. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23(4) :042003, 2011.
- [47] T. Laurell, F. Petersson, and A. Nilsson. Chip integrated strategies for acoustic separation and manipulation of cells and particles. *Chemical Society Reviews*, 36(3) :492–506, 2007.
- [48] S. B. Q. Tran, P. Marmottant, and P. Thibault. Fast acoustic tweezers for the two-dimensional manipulation of individual particles in microfluidic channels. *Applied Physics Letters*, 101(11) :114103, 2012.
- [49] M. A. H. Weiser, R. E. Apfel, and E. A. Neppiras. Interparticle forces on red cells in a standing wave field. *Acta Acustica united with Acustica*, 56(2) :114–119, 1984.
- [50] R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C. D. Ohl, and W. Lauterborn. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Physical review E*, 56(3) :2924, 1997.
- [51] U. Parlitz, C. Scheffczyk, I. Akhatov, and W. Lauterborn. Structure formation in cavitation bubble fields. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(10) :1881–1891, 1995.
- [52] I. Akhatov, U. Parlitz, and W. Lauterborn. Pattern formation in acoustic cavitation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(6) :3627–3635, 1994.

-
- [53] L. A. Crum. Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(6) :1363–1370, 1975.
- [54] V. F. Kazantsev. The motion of gaseous bubbles in a liquid under the influence of bjerknes forces arising in an acoustic field. In *Soviet Physics Doklady*, volume 4, page 1250, 1960.
- [55] J. Jiao, Y. He, S. E. Kentish, M. Ashokkumar, R. Manasseh, and J. Lee. Experimental and theoretical analysis of secondary bjerknes forces between two bubbles in a standing wave. *Ultrasonics*, 58 :35–42, 2015.
- [56] E. A. Zabolotskaya. Interaction of gas-bubbles in a sound field. *Soviet Physics Acoustics-USSR*, 30(5) :365–368, 1984.
- [57] X. Zheng and R. E. Apfel. Acoustic interaction forces between two fluid spheres in an acoustic field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4) :2218–2226, 1995.
- [58] A. A. Doinikov and S. T. Zavtrak. On the mutual interaction of two gas bubbles in a sound field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 7(8) :1923–1930, 1995.
- [59] A. A. Doinikov. Influence of neighboring bubbles on the primary bjerknes force acting on a small cavitation bubble in a strong acoustic field. *Physical Review E*, 62(5) :7516, 2000.
- [60] M. Ida. Eigenfrequencies of two mutually interacting gas bubbles in an acoustic field. *arXiv preprint physics/0108067*, 2001.
- [61] A. A. Doinikov. Acoustic radiation interparticle forces in a compressible fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 444 :1–21, 2001.
- [62] M. Ida. Alternative interpretation of the sign reversal of secondary bjerknes force acting between two pulsating gas bubbles. *Physical Review E*, 67(5) :056617, 2003.
- [63] Y. Zhang and S. Li. The secondary bjerknes force between two gas bubbles under dual-frequency acoustic excitation. *Ultrasonics Sonochemistry*, 29 :129–145, 2016.
- [64] K. Yoshida, T. Fujikawa, and Y. Watanabe. Experimental investigation on reversal of secondary bjerknes force between two bubbles in ultrasonic standing wave. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(1) :135–144, 2011.
- [65] T. Barbat, N. Ashgriz, and C. S. Liu. Dynamics of two interacting bubbles in an acoustic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 389 :137–168, 1999.

Conclusion

Utiliser des bulles d'air pour manipuler le son ou utiliser le son pour manipuler des bulles d'air : tel a été le fil conducteur de nos travaux. D'une part, nous avons utilisé la capacité des bulles à diffuser efficacement les ultrasons, même pour des longueurs d'onde excédant largement leur taille, afin de concevoir des systèmes qui offrent des propriétés de transmission acoustique originales. D'autre part, nous avons cherché à exploiter la force qu'une bulle exerce, à la faveur d'une sollicitation acoustique, sur une seconde bulle voisine de façon à manipuler la trajectoire de cette dernière.

Une partie importante de cette thèse a donc été consacrée à l'étude de la propagation acoustique au sein de milieux bulleux et à son exploitation. Nous avons choisi d'aborder ce sujet par une double approche numérique et expérimentale. Cela fait maintenant près d'un siècle que les approches de type milieux effectifs sont privilégiées. Pourtant, leur domaine de validité fait encore débat, en particulier au voisinage de la résonance des bulles. On peut tout particulièrement mentionner l'approximation utilisée par Foldy et consistant à négliger les séquences de diffusion en "boucle". Pour notre part, nous avons commencé par bâtir un code de calcul fondé sur la théorie de la diffusion multiple (en anglais MST pour *Multiple Scattering Theory*) qui présente l'avantage de fournir la solution exacte de l'équation de propagation, tant au sein du milieu qu'à l'extérieur de celui-ci. Nous avons ainsi pu étudier la validité de quelques unes des théories de milieux effectifs habituellement utilisées, en particulier pour des échantillons présentant des fractions volumiques de l'ordre du pourcent. Nous sommes parvenus à la conclusion que l'accord était plutôt meilleur que celui auquel on pouvait s'attendre en se fondant sur les critères trouvés dans la littérature. Pour de telles concentrations, l'erreur commise en faisant abstraction de la condition de non-interpénétration entre bulles voisines semble d'ailleurs plus importante que celle liée à la non prise en compte de la contribution des boucles de diffusion.

Au-delà de notre volonté de chercher le meilleur mode de description possible, nous

nous sommes posé la question du degré de contrôle que l'on peut acquérir sur la propagation. En particulier, nous avons mené une expérience numérique de retournement temporel au sein d'un nuage de bulles. Nos résultats montrent qu'il est possible d'y focaliser une onde acoustique avec une résolution bien plus fine que celle que l'on obtiendrait dans l'eau y compris pour le régime des très basses fréquences dans lequel les modes résonants n'interviennent pas. La largeur de la tache focale obtenue peut alors être prédite à partir des modèles de milieux effectifs.

Pourtant ces derniers, en particulier le modèle de Foldy, trouvent leur limite lorsque les bulles du nuage se couplent via la diffusion multiple. Ceci-dit, le couplage peut être exploité pour aboutir à des propriétés intéressantes.

En particulier, nous avons pu concevoir numériquement des métamatériaux bulleux présentant un indice de réfraction négatif. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps au cas d'un milieu désordonné, mais spatialement corrélé aux courtes distances. Nous avons notamment montré qu'un échantillon constitué de paires de bulles réparties de façon désordonnée peut réfracter négativement les ultrasons ; le comportement dispersif d'un tel milieu est convenablement prédit par l'approche de Waterman et Truell. Dans une deuxième approche, nous avons cherché à exploiter des effets cristallins, propres aux cristaux phononiques, mais à des fréquences bien plus basses que celles auxquelles apparaissent les effets de Bragg. Nous avons ainsi pu réaliser une méta-lentille numérique permettant de focaliser efficacement le champ provenant d'une source ponctuelle. Dans ce cas de figure, c'est l'utilisation d'une périodicité particulière, celle du diamant, qui, combinée à la résonance basse fréquence des bulles, permet d'optimiser les effets de couplage et d'ouvrir une bande négative.

Nous espérons que ces prédictions trouveront un prolongement expérimental. Une première tentative de réalisation d'une lentille plate consistant en un tel « diamant de bulles » s'est avérée infructueuse en raison de la forte dissipation introduite par le PDMS disponible au laboratoire. L'utilisation du rhéomètre haute fréquence que nous avons conçu pendant cette thèse devrait permettre la poursuite de la quête d'un élastomère moins dissipatif. Pour ce qui concerne l'échantillon désordonné de paires de bulles, une mise en œuvre expérimentale est prévue dans un futur proche à partir de techniques d'encapsulation empruntées à la microfluidique qui permettent la réalisation d'échantillons sans faire appel à une matrice hôte visco-élastique.

Un second type de cristal, beaucoup plus simple à réaliser, a retenu notre attention : le plan de bulles à maille carrée. La possibilité de prédire analytiquement ses propriétés de transmission nous a conduits à étudier deux applications possibles : la première à la détermination des paramètres rhéologiques des élastomères à haute fréquence ; la seconde à la conception de revêtements anéchoïques très efficaces pour l'acoustique sous marine. Des développements sont actuellement envisagés en ce sens puisqu'une nouvelle thèse est sur le point de débiter au laboratoire en partenariat avec Thalès Underwater Systems à Sophia Antipolis. L'enjeu principal consistera à améliorer la robustesse du phénomène de superabsorption vis-à-vis des conditions

d'immersion. La variation de la pression en fonction de la profondeur d'immersion de l'objet à masquer est en effet susceptible d'affecter la condition de couplage critique. D'autres travaux sont en cours, en partenariat avec l'université du Manitoba, pour apprendre à maîtriser la rupture d'impédance entre l'eau et l'élastomère. Enfin, des développements sont également envisagés dans le contexte de l'isolation phonique en partenariat avec l'entreprise Saint Gobain.

Finalement, si la mobilité naturelle des bulles peut s'avérer décourageante du point de vue de l'expérimentateur désireux de réaliser des échantillons contrôlés, elle peut néanmoins constituer une richesse supplémentaire qu'il serait regrettable de ne pas exploiter. À cet égard, nous avons montré la possibilité de contrôler la trajectoire de bulles en exploitant les forces qui s'exercent entre bulles soumises à un champ acoustique : les forces de Bjerknes secondaires. L'idée est de tirer parti du champ diffusé par une bulle piégée, de façon à générer des forces attractives ou répulsives très intenses dans son voisinage immédiat. Nous avons généralisé la notion de force de Bjerknes secondaire au cas où la bulle piégée est remplacée par une assemblée de bulles. Celle-ci fournit un nombre de degrés de liberté tel qu'il devient possible de créer pour une, ou plusieurs bulles simultanément, une infinie variété de trajectoires possibles. Un certain nombre de développements sont d'ores et déjà envisagés. Tout d'abord, la validation expérimentale de l'algorithme de manipulation que nous avons conçu constitue un objectif prioritaire. Par ailleurs, l'intégration du dispositif de manipulation de trajectoires au sein d'une cellule microfluidique pourrait être envisagée à terme. L'idée serait de fonctionnaliser les bulles via l'emploi d'agents de surface pour en faire des vecteurs d'information biocompatibles, peu onéreux et faciles à produire.

Appendices

 Extraction des paramètres effectifs

A.1 Méthode 1D

Une version plus détaillée de la démonstration ainsi qu'une discussion sur le rôle de l'épaisseur e a été proposée par Fokin *et al*¹. On se place dans la situation de la

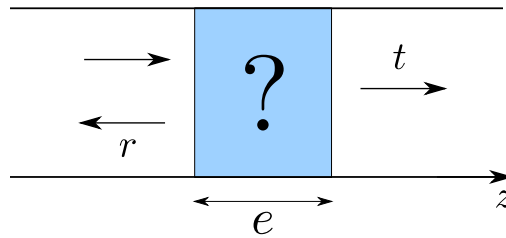


FIGURE A.1 – Une tranche 1D de paramètres effectifs ρ_{eff} et χ_{eff} inconnus est soumise à une onde plane. On mesure les coefficients en transmission et en réflexion.

figure A.1. La propagation ne se fait que suivant l'axe (Oz). Un milieu homogène de densité ρ_{eff} , de compressibilité χ_{eff} et d'épaisseur e est insonifié avec une onde plane incidente se propageant dans l'eau (ρ_0, χ_0). Les impédances associées sont $Z_{\text{eff}} = \sqrt{\rho_{\text{eff}}/\chi_{\text{eff}}}$ et $Z_0 = \sqrt{\rho_0/\chi_0}$. Les coefficients de réflexion et de transmission vérifient :

$$r = \frac{Z_{\text{eff}}^2 - Z_0^2}{Z_0^2 + Z_{\text{eff}}^2 + 2iZ_0Z_{\text{eff}} \cot(k_{\text{eff}}e/2)} \quad (\text{A.1})$$

1. Fokin, V., Ambati, M., Sun, C., & Zhang, X. (2007). Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials. *Physical review B*, 76(14), 144302.

et

$$t = \frac{1 + r}{\cos(k_{\text{eff}}e/2) - \frac{Z_{\text{eff}}}{Z_0}i \sin(k_{\text{eff}}e/2)} \quad (\text{A.2})$$

En définissant le rapport des impédances $x = Z_{\text{eff}}/Z_0$, on peut réécrire les équations précédentes sous la forme :

$$r = \frac{\tan(k_{\text{eff}}e) \left(\frac{1}{x} - x\right) i}{2 - \tan(k_{\text{eff}}e) \left(\frac{1}{x} - x\right) i} \quad (\text{A.3})$$

et

$$t = \frac{2}{\cos(k_{\text{eff}}e) \left[2 - \tan(k_{\text{eff}}e) \left(\frac{1}{x} - x\right) i\right]} \quad (\text{A.4})$$

Puis, en combinant (A.3) et (A.4) :

$$\cos(k_{\text{eff}}e) = \frac{1 - r^2 + t^2}{2t} = X \quad (\text{A.5})$$

et

$$\frac{1}{x} + x = \frac{2i}{\tan(k_{\text{eff}}e)} \left[\frac{1}{t \cos(k_{\text{eff}}e)} - 1 \right] = Y. \quad (\text{A.6})$$

Après résolution, on obtient :

$$k_{\text{eff}} = \pm \frac{\cos^{-1}(X) + 2\pi m}{e} \quad (\text{A.7})$$

et

$$Z_{\text{eff}} = Z_0 \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4}}{2} \quad (\text{A.8})$$

Ce système dispose de plusieurs solutions. En particulier, la fonction \cos^{-1} est discontinue et on repère chacune de ses branches par l'entier m . Notons que l'indétermination de signe est la même pour les deux équations. On peut donc évacuer les solutions qui correspondent à une partie imaginaire négative pour k_{eff} . Cela reviendrait à amplifier l'onde cohérente ce qui ne peut se faire sans injecter de l'énergie dans le système (matériau actif).

A.2 Méthode 3D Sphérique

On se place dans la situation de la figure A.2. Un milieu homogène 3D à géométrie sphérique, de densité ρ_{eff} , de compressibilité χ_{eff} et de diamètre D est insonifié avec une onde de Bessel sphérique se propageant dans l'eau (ρ_0, χ_0). L'interaction entre l'onde incidente et la boule donne naissance à une onde transmise au sein de celle-ci ainsi qu'à une onde réfléchie en raison du contraste d'impédance régnant entre l'intérieur de la boule et l'espace libre. On raisonnera ici en terme de potentiel afin de simplifier l'utilisation des relations de continuité. On considère une onde incidente de la forme $\Phi_0(r) = j_0(k_0 r)$, r se référant à la distance au centre de la boule. On note

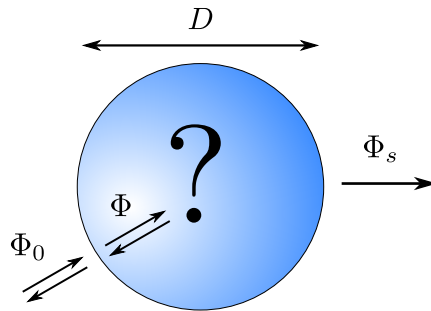


FIGURE A.2 – Diffusion de la fonction de Bessel monopolaire par une boule homogène.

k_{eff} le nombre d'onde à l'intérieur la boule. Le champ mesuré au sein de celle-ci s'écrit simplement

$$\Phi(r) = A_0 j_0(k_{\text{eff}} r) \quad \text{pour } r < D/2. \quad (\text{A.9})$$

A étant un coefficient *a priori* inconnu. Le champ diffusé doit respecter la causalité. Il s'écrit donc à l'aide d'une fonction de Hankel sphérique

$$\Phi_s(r) = B_0 h_0(k_0 r) \quad \text{pour } r > D/2. \quad (\text{A.10})$$

Du potentiel, on peut déduire les pression et la vitesse normale

$$\begin{aligned} v_r(r) &= i\omega \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ P(r) &= -\omega^2 \rho \Phi. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

qui sont continues à l'interface en $r = D/2$. On a donc aussi continuité de la grandeur

$$\frac{1}{\rho \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (\text{A.12})$$

qui nous permet de faire disparaître les A_0 et d'exprimer directement le coefficient du champ diffus :

$$B_0 = \frac{k_0 j_0'(k_0 D/2) - \alpha j_0(k_0 D/2)}{\alpha h_0(k_0 D/2) - k_0 h_0'(k_0 D/2)} \quad (\text{A.13})$$

où la notation ' correspond à la dérivation spatiale et où

$$\alpha = \frac{k_{\text{eff}} j_0'(k_{\text{eff}} D/2)}{j_0(k_{\text{eff}} D/2)}. \quad (\text{A.14})$$

De la mesure de B_0 , on peut donc extraire α qui contient toutes les informations sur ce que contient la sphère. En explicitant $j_0(k_{\text{eff}} D/2)$ et $j_0'(k_{\text{eff}} D/2)$, on obtient

$$\frac{k_{\text{eff}}}{\alpha + 2/D} = \tan(k_{\text{eff}} D/2). \quad (\text{A.15})$$

Cette équation est malheureusement insoluble analytiquement. La plupart du temps elle donne lieu à une résolution graphique. Dans notre cas, on utilisera l'approche numérique pour évaluer k . Remarquons que notre approche n'implique qu'une seule mesure là où l'approche 1D en nécessitait deux (transmission et réflexion). Cette méthode est particulièrement adaptée au cas des milieux bulleux pour lesquels c'est la compressibilité effective qui contient l'essentiel de l'information. Pour sonder la densité, il convient en effet d'utiliser une excitation dipolaire. Cela ne constitue pas une contrainte insurmontable puisque les harmoniques sphériques sont orthogonales. Le cas échéant, on peut donc procéder de la même manière en utilisant une excitation en $j_1(k_0 r)$.

B.1 Mise en évidence expérimentale du couplage dans le cadre de la superposition de deux plans de bulles

Le modèle de la transmission à travers un plan de bulle de la partie 3.1.1 rend compte de l'influence de la diffusion multiple (notamment par le biais du facteur de couplage \tilde{K} présenté dans le modèle). On propose ici une illustration expérimentale de son action en superposant deux plans de bulles identiques à celui utilisé dans la partie 3.1.2.1. Celui-ci était alors constitué d'inclusions cubiques de côté $a_{\text{cube}} = 590 \mu\text{m}$ et séparées par une distance $b = 2 \text{ mm}$. L'épaisseur de la couche contenant les bulles valait $e_1 = 1.2\text{mm}$ si bien qu'en appliquant les deux couches l'une contre l'autre, la distance entre les deux plans de bulles était 40 fois inférieure à la longueur d'onde à 30 kHz. La diffusion multiple agit à travers \tilde{K} . Or, \tilde{K} dépend de la distance entre plus proches voisines. Il paraît donc légitime de s'interroger sur une éventuelle influence de l'alignement entre les deux plans de bulles successifs. Nous essayons ici d'apporter une réponse en mesurant le coefficient de transmission à travers un unique plan de bulles (t_1) puis à travers une superposition de deux plans de bulles dans les cas où ceux-ci sont parfaitement alignés (t_2), décalés d'un demi paramètre de maille selon \mathbf{e}_x (t_2^x) ou encore décalés d'un demi paramètre de maille selon \mathbf{e}_x et selon \mathbf{e}_y (t_2^{xy}). Les mesures sont reportées sur la figure B.1. Sans surprise les doubles plans de bulles sont toujours plus occultant que le plan unique. Si l'on compare t_2 , t_2^x et t_2^{xy} on peut distinguer deux comportements correspondant à des gammes de fréquences différentes. Avant la résonance, il est difficile de trancher sur un potentiel effet de l'alignement puisque les mesures se superposent. En revanche, la région des hautes fréquences fait apparaître une distinction puisque la transmission semble diminuer à mesure que l'on décale les deux plans. On peut l'interpréter par le fait que le décalage

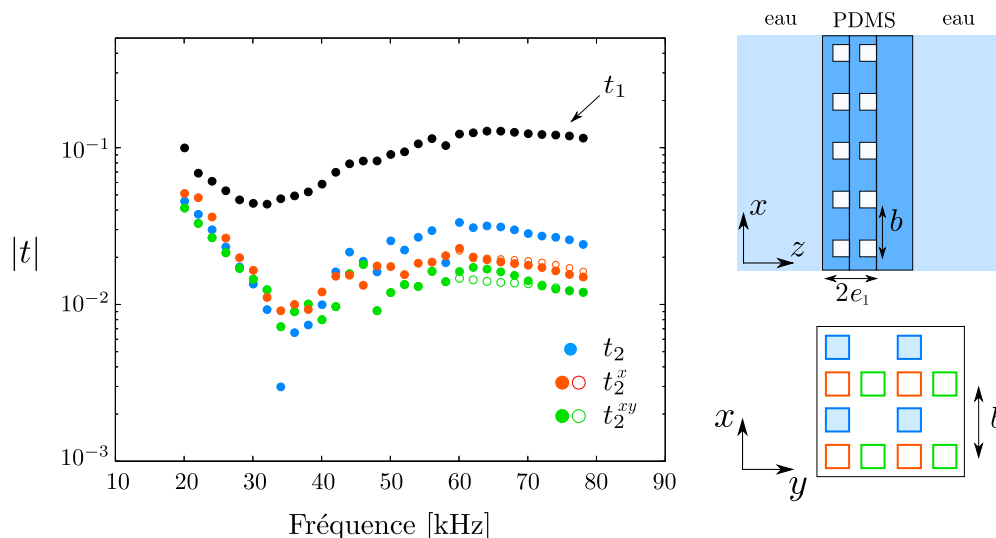


FIGURE B.1 – Coefficients de transmission mesurés expérimentalement pour un unique plan de bulles (t_1 en noir) et pour une superposition de deux plans de bulles alignés (t_2 en bleu), décalés de $b/2 = 1$ mm selon \mathbf{e}_x (t_2^x en rouge) ou encore décalés de b selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y (t_2^{xy} en vert). Les symboles creux se rapportent à des répliques expérimentales obtenues dans les mêmes conditions que pour les symboles pleins. Les encarts de droite schématisent les vues de côté et de face de l'échantillon. Les inclusions sont des cubes de côté $a = 590 \mu\text{m}$ et séparés d'une distance $b = 2$ mm. Le polymère utilisé ici est le RTV615.

se traduit par une augmentation de la distance entre plus proche voisins qui, comme on l'a vu, est un critère important lorsque l'on cherche à rendre compte des effets de couplages. Ces résultats sont encore au stade de développement et n'ont pas encore pu faire l'objet d'un approfondissement suffisant pour en tirer plus de conclusions. Mais ils vont tout de même dans le sens d'un rôle important joué par la diffusion multiple et *a fortiori* de la structure du plan de bulles. D'ailleurs, des observations similaires ont été obtenues dans le cadre de la thèse d'Alice Bretagne¹ en comparant les transmissions mesurées au travers d'un plan cristallin et d'un plan désordonné de même fraction volumique d'air et constitués de bulles identiques. Ces mesures avaient d'ailleurs également montré que la gamme de fréquence pour laquelle les mesures différaient notablement était la région située au-delà du creux de transmission. Notons que dans les expériences reportées ici, l'échantillon était fixé dans l'ouverture de l'écran occultant ce qui pourrait expliquer que les résultats soient légèrement différents de ce qui a été obtenu dans la configuration habituelle.

1. Bretagne, A. (2011).

Manipulation d'ondes ultrasonores en milieux complexes : filtrage, guidage et focalisation.
Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot-Paris VII.

B.2 Mise en évidence numérique du couplage dans le cadre de la superposition de deux plans de bulles

À titre de comparaison, nous donnons (figure B.2) également les résultats obtenus en simulation (méthode des éléments finis) pour une superposition de deux plans de bulles. Ces résultats ont de quoi nous rassurer quant à la validité de la tendance

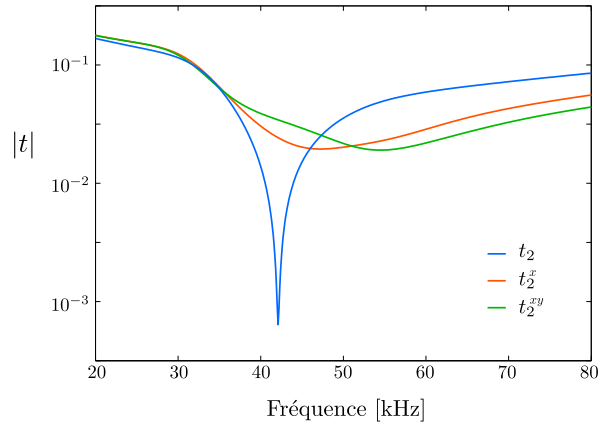


FIGURE B.2 – Coefficients de transmission simulés pour une superposition de deux plans de bulles alignés (t_2 en bleu), décalés de $b/2 = 1$ mm selon \mathbf{e}_x (t_2^x en rouge) ou encore décalés de b selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y (t_2^{xy} en vert). Les conditions sont les mêmes que pour la figure B.1.

observée expérimentalement puisque les trois types de superpositions exhibent des comportements très différents au-delà de la fréquence de résonance du plan.

