



CONTRIBUTION À LA THÉORIE D'UN GUIDE À ONDE DE TORSION POUR LA MESURE DE NIVEAU DE LIQUIDES COMPRESSIBLES

Anne Goubel-Lenoël

► To cite this version:

Anne Goubel-Lenoël. CONTRIBUTION À LA THÉORIE D'UN GUIDE À ONDE DE TORSION POUR LA MESURE DE NIVEAU DE LIQUIDES COMPRESSIBLES. Vibrations [physics.class-ph]. UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE AIX-MARSEILLE II, 1999. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-01487435⟩

HAL Id: tel-01487435

<https://hal.science/tel-01487435v1>

Submitted on 12 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE AIX-MARSEILLE II
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE DE MARSEILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE

Option : ACOUSTIQUE et VIBRATIONS

présentée et soutenue publiquement

par :

Anne GOUBEL-LENOËL

le :

8 octobre 1999

CONTRIBUTION À LA THÉORIE D'UN GUIDE À
ONDE DE TORSION POUR LA MESURE DE NIVEAU
DE LIQUIDES COMPRESSIBLES

Directeur de thèse : P.J.T. FILIPPI

JURY :

M. Robert PÉLISSIER	Président
M. Hervé LEMONNIER	Rapporteur
M. Anthony RAWLINS	Rapporteur
M. Patrick BOUCHARD	Examineur
M. Paul FILIPPI	Examineur
M. Christian LHUILLIER	Examineur

Merci !

✓ à **Monsieur Filippi**, mon directeur de thèse, sans qui cette thèse n'existerait pas, c'est évident. Que d'encouragements prononcés et de bonnes idées avancées !

Je n'oublierai pas votre grande disponibilité, y compris lors du congrès Euromech à Cargèse, lorsque, bien qu'étant co-organisateur, vous m'avez accordé du temps pour m'inviter à la terrasse d'un café (face à la mer, vous n'avez pas l'habitude de faire les choses à moitié !) pour relire un projet d'article.

Outre ma culture scientifique, vous avez également renforcé d'autres connaissances, en me faisant découvrir le Cap Corse (Damiani bien sûr !), la liqueur de myrte (désolée de ne pas vous avoir laissé l'occasion de boire mon verre ...).

✓ à **Monsieur Pélissier**, président du jury.

Je vous ai d'abord connu comme directeur de l'École Supérieure de Mécanique de Marseille, où j'ai pris goût à l'acoustique, et, grâce à votre accueil chaleureux, à votre belle région ...

✓ To **Mr Rawlins**, who has accepted to review my thesis, although it was written in French.

I also spent some nice time in Corsica with you and your wife, and will particularly remember the last dinner at the "Continental restaurant" in Cargèse.

✓ à **Monsieur Lemonnier**, mon second rapporteur.

Vous avez d'emblée manifesté votre intérêt pour le sujet de mon travail, et avez accepté de vous replonger dans des domaines tels que la mécanique des milieux continus, dont vos activités de thermohydraulicien vous avaient éloigné. Il me restera également le souvenir d'une présentation mouvementée de mes travaux de thèse à Grenoble ...

✓ à **Monsieur Bouchard**, examinateur, qui a réussi à trouver un tout petit trou dans son emploi du temps très chargé pour venir assister à ma soutenance, ce dont je lui suis très reconnaissante.


Merci pour votre sympathie.


✓ **aux membres du laboratoire de Systèmes de Mesures pour les Réacteurs**, où j'ai passé trois années dans un contexte agréable, en particulier : **Christian Lhuillier**, dit Lulu, ingénieur responsable de ma thèse, mon chauffeur, mon coach, mon fournisseur officiel en chocolat noir pour éviter les déprimés ; **Gilles Bignan**, chef de labo, fédérateur, dont la personnalité contribue largement à l'ambiance générale ; **Sofia Mariot**, secrétaire préférée, qui m'a patiemment appris grand nombre de démarches administratives ; **Jean-Luc Berton**, que j'ai sollicité de temps en temps ; **Raynald Desmarais**, dompteur d'oscilloscopes, auteur des photographies de l'annexe A ; **Jean-Louis Plantier**, responsable informatique ; **Cécile Riffard**, pour ses questions pertinentes et tous ses encouragements ; **Philippe Ducret**, qui s'est toujours rendu disponible ; **le papa exemplaire Christian Dominjon** et tous les autres ... dont **Mathieu Dancré**, collègue thésard, qui commença et finit sa thèse en même temps que moi, et partagea les mêmes problèmes et les mêmes joies ... Je tiens également à vous remercier **TOUS** (ou presque, j'ai les noms !) pour votre présence, qui m'a beaucoup touchée (et dopée ?) le 8 octobre. Un petit clin d'œil à **Claire Delprat** qui, lors de son stage de fin d'études, a commencé à envisager la suite de mon travail.

✓ **aux membres du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille**, particulièrement tous ceux de l'équipe PAPE conduite par la très efficace madame Habault ; Cédric Maury, toujours prêt à répondre à mes questions métaphysiques par téléphone ; mesdames Bonnet et Cattiaux.

✓ **à mesdames Mollet et Pallès**, de la documentation, toujours accueillantes et prêtes à aider.

✓ **à Damien**, mon petit mari.

Pour TOUT, et plus particulièrement, dans le cadre des remerciements de fin de thèse, pour la lecture  (ils assurent chez EDF !) que tu as faite de mon mémoire.

✓ **à la petite**  que nous avons découverte le 7 octobre 1999 vers 19h15, et qui, un jour, se reconnaîtra peut-être en lisant ces quelques lignes ...

✓ **à mes parents**, qui furent thésards avant moi.

Merci papa pour les conseils et l'aide d'un professeur des universités ;

Merci maman de m'avoir donné dès 1973 la possibilité de soutenir une thèse, la tienne, alors que j'avais (-5) mois !

✓ **à tous ceux que je n'ai pas cités et qui m'ont soutenue, et particulièrement ceux que je regretterai dès demain de ne pas avoir nommés ...**

Table des matières

Notations	1
Notations générales	1
Repères et coordonnées	1
Dérivées	2
Fonctions	2
Autres notations mathématiques	3
Notations relatives au guide d'ondes	5
Géométrie	5
Matériau	6
Notations de mécanique	6
Notations relatives au fluide	8
1 Avant-propos	11
1.1 Les Réacteurs à Eau Pressurisée	11
1.1.1 Principe de fonctionnement	11
1.1.2 Rôle de l'eau dans la cuve du réacteur	12
1.2 Les méthodes de mesure de niveau actuelles	13
1.2.1 Mesure de niveau par différence de pression	13
1.2.2 Mesure de niveau par sonde à transfert thermique	13
1.3 Recherche d'une méthode alternative de mesure de niveau	14
1.3.1 Choix d'une technique à valider au CEA	14
1.3.2 Mesure de niveau par sonde à onde de torsion	15
1.4 Objet de la thèse	16
2 Étude bibliographique et choix d'une démarche	17
2.1 Historique	17
2.2 Modélisation de H.H. Bau par une méthode énergétique	18
2.2.1 Calcul de la célérité apparente de l'onde	18
2.2.2 Application à la mesure de niveau	21
2.2.3 Optimisation de la sonde	22
2.2.4 Critique de la méthode	23
2.3 Étude bibliographique du cas où le fluide est visqueux	23
2.3.1 Méthode de Wang pour un guide de section circulaire	23
2.3.2 Méthode de Kim	26
2.3.3 Comparaison entre ces deux méthodes	27
2.3.4 Critiques	28

2.4	Études expérimentales avec des fluides diphasiques	28
2.4.1	Fluide à phases séparées	28
2.4.2	Écoulement de fluide diphasique	29
2.4.3	Eau avec bulles d'air	29
2.5	Conclusion de l'étude bibliographique	29
2.6	Nouvelles hypothèses liées au fluide	29
2.6.1	Compressibilité prise en compte	29
2.6.2	Viscosité négligée	30
2.6.3	Effets de l'écoulement négligés	30
2.6.4	Température supposée constante	31
2.7	Nouvelles hypothèses liées à la géométrie du guide d'ondes	31
2.7.1	Forme de la section transversale	31
2.7.2	Dimensions	32
2.8	Méthode de résolution	32
2.8.1	La méthode variationnelle	32
2.8.2	Les étapes de la modélisation	33
3	Étude de la torsion du guide d'ondes dans le vide	35
3.1	État de l'art	36
3.1.1	Modèle de B. de Saint-Venant	36
3.1.2	Modèle de A.D.S. Barr	38
3.1.3	Modèle de Gay et Boudet	38
3.1.4	Modèle de Muller	39
3.1.5	Conclusion de l'état de l'art et méthode de travail	39
3.2	Déplacement du guide sollicité en torsion	40
3.2.1	Composantes transversales du déplacement	40
3.2.2	Composante longitudinale du déplacement	41
3.2.3	Conclusion sur le déplacement	45
3.3	Énergies cinétique et de déformation du guide sollicité en torsion	45
3.3.1	Calcul de l'énergie cinétique	45
3.3.2	Calcul de l'énergie de déformation	48
3.4	Cas particulier de l'onde harmonique libre	50
3.4.1	Variation des énergies	50
3.4.2	Application du principe de Hamilton	51
3.4.3	Remarque sur les ordres de grandeur	52
3.5	Cas du guide d'ondes sollicité en torsion	53
3.5.1	Variation des énergies	53
3.5.2	Équation de la torsion du guide d'ondes dans le vide	54
3.6	Conclusion	55
4	Résolution du problème de Neumann extérieur dans le fluide	57
4.1	Démarche suivie	57
4.1.1	Cas du fluide occupant l'espace indéfini	57
4.1.2	Prise en compte de la surface du fluide	61
4.2	Calcul de la transformée de Fourier spatiale de la fonction de Green	62
4.2.1	Fonction de Green en champ libre	62

4.2.2	Calcul du champ diffracté	63
4.2.3	Transformée de Fourier spatiale de la fonction de Green	64
4.3	Transformée de Fourier spatiale de la pression	67
4.3.1	En tout point du fluide	67
4.3.2	À la surface du guide	68
4.4	Approximation “grandes longueurs d’ondes”	69
4.4.1	Démarche suivie	69
4.4.2	Approximation des fonctions de Mathieu	70
4.4.3	Calcul de la pression par transformée de Fourier spatiale inverse	73
4.4.4	Calcul de la charge fluide	74
4.5	Prise en compte de la surface libre	75
4.5.1	Calcul de la pression	75
4.5.2	Calcul de la charge fluide	76
4.6	Conclusion	76
5	Couplage entre le guide sollicité en torsion et le fluide compressible	77
5.1	Équation de torsion du guide immergé	77
5.1.1	Application du principe de Hamilton	77
5.1.2	Vitesse de phase apparente de l’onde de torsion	78
5.2	Analyse des termes de l’équation de torsion	79
5.2.1	Termes dus à la présence du fluide	79
5.2.2	Cas particulier du fluide incompressible	79
5.2.3	Comparaison avec les résultats de la littérature	80
5.3	Résolution de l’équation de torsion du guide partiellement immergé	82
5.3.1	Pertinence du choix d’une fréquence d’excitation moyenne	82
5.3.2	Système à résoudre	85
5.3.3	Résolution dans le domaine fréquentiel	86
5.3.4	Résolution dans le domaine temporel	90
5.3.5	Conclusion pour l’observation des signaux	91
5.4	Application : la mesure de niveau de fluides compressibles	92
5.4.1	Principe de la mesure de niveau	92
5.4.2	Exemple avec un fluide monphasique	93
5.4.3	Exemple avec un fluide diphasique	95
5.5	Conséquences de l’approximation “grandes longueurs d’ondes”	96
5.5.1	Domaine de validité des résultats obtenus	97
5.5.2	Problème de la surface libre	97
6	Conclusion	99

► ANNEXES

105

A	Présentation d’une maquette de sonde à onde de torsion	107
A.1	Le matériel	107
A.2	L’excitation de l’onde de torsion	108
A.3	Choix du mode de fonctionnement de la sonde	109

B Les coordonnées elliptiques	111
B.1 Le système des coordonnées elliptiques	111
B.1.1 Définition	111
B.1.2 Vecteurs de base	113
B.1.3 Coordonnées elliptiques d'un vecteur	114
B.2 Expression des opérateurs différentiels classiques	115
B.2.1 En coordonnées curvilignes orthogonales	115
B.2.2 Application aux coordonnées elliptiques	117
C Quelques résultats sur les fonctions de Bessel et de Neumann	119
C.1 Définition	119
C.2 Les dérivées	119
C.3 Approximation "grandes longueurs d'ondes"	120
D Les fonctions de Mathieu	123
D.1 Équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques	123
D.2 Équation de Mathieu et équation de Mathieu modifiée	124
D.3 Fonctions de Mathieu et fonctions de Mathieu modifiées	125
D.4 Développement en séries	126
D.4.1 Développement en séries de Fourier des fonctions de Mathieu	126
D.4.2 Écriture des fonctions de Mathieu modifiées	127
D.5 Quelques propriétés	127
D.5.1 Orthogonalité et normes	127
D.5.2 Wronskien	128
E Quelques rappels sur les transformées de Fourier	129
E.1 Définitions	129
E.1.1 Transformée de Fourier spatiale	129
E.1.2 Transformée de Fourier temporelle	129
E.1.3 Écriture générale	130
E.2 Propriétés	130
F La notion de distribution : présentation, propriétés	133
F.1 Définitions	133
F.2 Opérations sur les distributions	134
F.3 Transformée de Fourier	135
F.3.1 Définitions	135
F.3.2 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée	135
G Listing MATHEMATICA	137
 ► BIBLIOGRAPHIE	 149

Table des figures

1	Géométrie du guide d'ondes	5
2	Dimensions caractéristiques de l'ellipse	6
1.1	Réacteur à Eau Pressurisée	12
2.1	Sonde partiellement immergée	21
2.2	Mesure de niveau à l'aide de deux guides d'ondes	22
3.1	Géométrie du guide d'ondes	36
3.2	Torsion d'une section transversale	40
4.1	Guide d'ondes bafflé	58
4.2	Méthode des images	62
5.1	Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans de l'eau à $1,55 \cdot 10^7$ Pa et 325°C , en fonction de la fréquence d'excitation	81
5.2	Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans de l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique, en fonction de la fréquence d'excitation	83
5.3	Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans du diiodométhane, en fonction de la fréquence d'excitation	84
5.4	Guide d'ondes partiellement immergé dans un fluide compressible	85
5.5	Relation entre les pulsations de résonance ω_0 d'un barreau partiellement immergé et la proportion de guide immergée α_L	88
5.6	Représentation des ondes réfléchies une fois	89
5.7	Principe de la mesure de niveau par sonde à onde de torsion	92
5.8	Durée de propagation de l'onde de torsion dans un guide partiellement immergé dans du diiodométhane successivement considéré comme compressible et incompressible, en fonction de la proportion de longueur immergée.	94
5.9	α_L calculé à partir de la mesure de la durée de propagation de l'onde de torsion dans un guide partiellement immergé dans du diiodométhane	94
5.10	α_L calculé à partir de la mesure de la durée de propagation de l'onde de torsion dans un guide partiellement immergé dans un mélange contenant de l'eau et une densité donnée de bulles d'air de taille uniforme	96
A.1	Vue d'ensemble du dispositif expérimental	107

A.2	Vue de dessus de la sonde	108
A.3	Mode de fonctionnement de la sonde : transmission ou réflexion	109
B.1	Système des coordonnées elliptiques	112
B.2	Représentation graphique de l'angle η	113
B.3	Vecteurs de base en coordonnées elliptiques	114

**PLEASE BE AWARE THAT
ALL OF THE MISSING PAGES IN THIS DOCUMENT
WERE ORIGINALLY BLANK**

Notations

Notations générales

i	nombre complexe tel que $i^2 = -1$
\bar{z}	conjugué du complexe z
$ x , z $	valeur absolue du réel x , module du complexe z
$\bar{\mathbf{I}}$	tenseur identité
t	variable temps
t_1 et t_2	temps arbitraires ($t_1 < t_2$)
f	fréquence d'excitation
f_m	fréquence d'excitation moyenne (100 kHz)
$\omega = 2\pi f$	pulsation (ou fréquence angulaire)
$\omega_m = 2\pi f_m$	pulsation (ou fréquence angulaire) moyenne
k	nombre d'ondes
$\widehat{g}(Z)$	transformée de Fourier spatiale de la fonction $g(z)$
P_0	pression atmosphérique

Les *indices* s et f indiquent que la quantité se rapporte respectivement à la sonde ou au fluide. Par exemple, ρ_s est la masse volumique du guide d'ondes et ρ_f celle du fluide dans lequel il est plongé.

L'*exposant* \sim est utilisé pour préciser une dépendance temporelle harmonique. On note alors $\tilde{g} = \Re(g e^{-i\omega t})$.

Repères et coordonnées

Système cartésien

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	repère cartésien
(x_1, x_2, x_3)	coordonnées cartésiennes
(x_1', x_1)	axe des abscisses
(x_2', x_2)	axe des ordonnées

Autres systèmes

(ρ, φ, x_3)	coordonnées polaires
(ξ, η, z)	coordonnées elliptiques
$(\vec{a}_\xi, \vec{a}_\eta, \vec{a}_z)$	base elliptique
(u, v, w)	coordonnées curvilignes orthogonales

Remarque : $x_3 = z$

Dérivées

On note indifféremment :

$$u_{i,j}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \text{ ou } \partial_j u_i; \quad u_{i,jk} \text{ ou } \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}; \quad u_{i,t} \text{ ou } \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

Pour une fonction ne dépendant que d'une seule variable, on peut noter $f'(z) = \frac{df}{dz}$.

Par ailleurs, la dérivée normale $\partial_n p(M)$ est définie par le produit scalaire :

$$\partial_n p(M) = \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} p(M)$$

Fonctions

Log logarithme népérien

Fonctions vérifiant l'équation de Bessel (voir annexe C) :

$J_{\pm n}(z)$ solution de première espèce, fonction de Bessel

$N_n(z)$ solution de deuxième espèce, fonction de Neumann

$H_n^{(1)}(z)$ et $H_n^{(2)}(z)$ solutions de troisième espèce, fonctions de Hankel

Fonctions vérifiant l'équation de Mathieu

ou l'équation de Mathieu modifiée (voir annexe D) :

$S_m^e(kh, \cos \eta)$ f. de Mathieu de première espèce, d'ordre m , paire.

$S_m^o(kh, \cos \eta)$ f. de Mathieu de première espèce, d'ordre m , impaire.

$F_m^e(kh, \cos \eta)$ f. de Mathieu de deuxième espèce, d'ordre m , paire.

$F_m^o(kh, \cos \eta)$ f. de Mathieu de deuxième espèce, d'ordre m , impaire.

$J_m^e(kh, \text{ch } \xi)$ f. de Mathieu modifiée de première espèce, d'ordre m , paire.

$J_m^o(kh, \text{ch } \xi)$ f. de Mathieu modifiée de première espèce, d'ordre m , impaire.

$N_m^e(kh, \text{ch } \xi)$ f. de Mathieu modifiée de deuxième espèce, d'ordre m , paire.

$N_m^o(kh, \text{ch } \xi)$ f. de Mathieu modifiée de deuxième espèce, d'ordre m , impaire.

$H_m^e(kh, \text{ch } \xi)$ $J_m^e(kh, \text{ch } \xi) + i N_m^e(kh, \text{ch } \xi)$

$H_m^o(kh, \text{ch } \xi)$ $J_m^o(kh, \text{ch } \xi) + i N_m^o(kh, \text{ch } \xi)$

On utilise aussi :

$B_n^o(kh, m)$ coefficient du développement en série de Fourier de $S_m^o(kh, \cos \eta)$

$M_m^o(kh)$ norme de $S_m^o(kh, \cos \eta)$

$M_m^e(kh)$ norme de $S_m^e(kh, \cos \eta)$

Autres notations mathématiques

Symboles :

$u = \mathcal{O}(\epsilon)$ signifie que la fonction u s'annule comme ϵ , pour $\epsilon \rightarrow 0$

$u = o(\epsilon)$ signifie que u s'annule plus vite que ϵ

δ_i^j symbole de Kronecker : il vaut 1 si $i = j$, 0 sinon

$\delta(t - a)$ mesure de Dirac en $t = a$

γ constante d'Euler (définie par (C.13))

$\Re(z)$ partie réelle du complexe z

$\Im(z)$ partie imaginaire du complexe z

$f * g$ produit de convolution de f et g :

si f et g sont des fonctions, on a $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t - u) du$

Opérateurs :

Tr trace d'une matrice (somme des termes diagonaux)

Det déterminant d'une matrice

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ gradient du scalaire f

$\text{div } \vec{u}$ divergence du vecteur \vec{u}

$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}$ rotationnel du vecteur \vec{u}

Δ Laplacien

On utilise parfois l'écriture $\Delta_{(\xi, \eta)}$ pour préciser les coordonnées par rapport auxquelles on dérive.

Les distributions :

L'écriture avec un crochet de dualité (exemple : $f(\omega) = \langle f(t), e^{i\omega t} \rangle$) est fréquemment utilisée dans ce mémoire. On trouve, en annexe F, les *définitions* d'espaces vectoriels, de la notion de distribution, ainsi que les propriétés que l'on utilise. Notons que, pour éviter les confusions, on peut écrire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\eta', z')}$ pour préciser les variables d'intégration.

Notations relatives au guide d'ondes

Géométrie

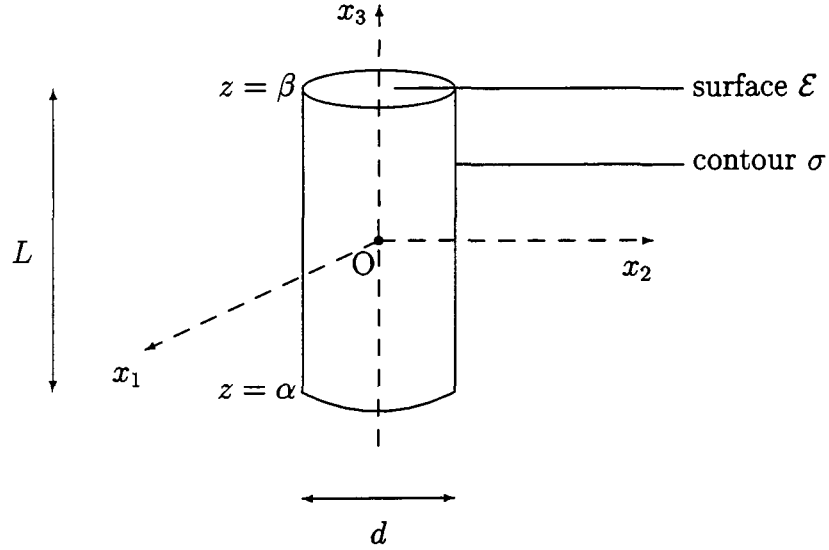


FIG. 1: Géométrie du guide d'ondes

L	longueur totale du guide
α_L	proportion de longueur de guide immergée
$l = \alpha_L L$	longueur de guide immergée
\mathcal{E}	surface transversale du guide (de contour s)
σ	contour du guide (frontière entre le guide et le fluide environnant)

Si le guide est de section elliptique, σ est décrit en coordonnées elliptiques par l'équation $\xi = \xi_0$, $\alpha \leq z \leq \beta$; s'il est circulaire, par $\rho = R$, $\alpha \leq z \leq \beta$ où R est le rayon du cercle.

Les constantes de la section :

d	ordre de grandeur de la section transversale
I_s	moment d'inertie de la section autour de l'axe ($O x_3$) (défini en (3.47) page 46)
J	constante de torsion (définie en (3.75) page 49)
P	inertie de gauchissement (définie en (3.48) page 46)

L'ellipse :

a	demi grand axe
b	demi petit axe
e	excentricité
h	demi-distance focale
ξ_0	coordonnée elliptique constante sur le contour de l'ellipse

Pour les applications numériques, on prendra $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m et $b = 10^{-3}$ m.

On rappelle que $a^2 = b^2 + h^2$ et $e = \frac{h}{a} = \frac{1}{\text{ch } \xi_0}$.

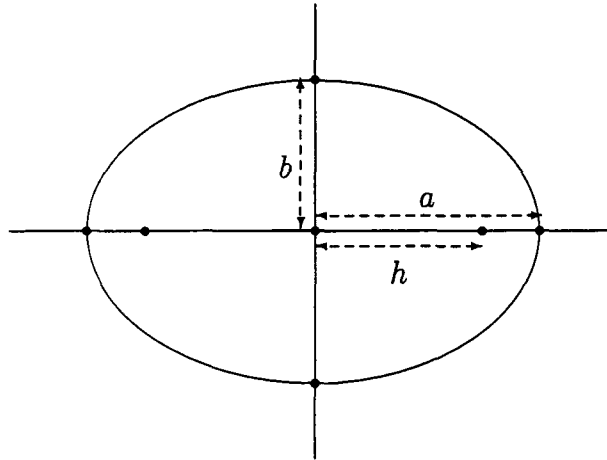


FIG. 2: Dimensions caractéristiques de l'ellipse

On utilisera aussi (chapitres 4 et 5) les constantes A et B définies par :

$$A = h^2 \frac{(e^{-2\xi_0} + 3e^{2\xi_0})}{192} \quad \text{et} \quad B = \frac{h^2}{192} \quad (1)$$

Matériau

- ρ_s masse volumique du guide
- λ, μ coefficients de Lamé
- E, ν module d'Young et coefficient de Poisson

Pour les applications numériques, on pourra choisir un guide en acier inoxydable : alors (voir [1] par exemple) $\rho_s = 7900 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 7,57 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ et $E = 19,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

On rappelle ici les relations entre les coefficients de Lamé, le module d'Young et le coefficient de Poisson (voir par exemple [2] p. 76) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{(\lambda + \mu)} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{array} \right. \quad (2)$$

Notations de mécanique

scalaires

- T énergie cinétique
- V énergie de déformation
- W travail des forces extérieures appliquées à un système
- R terme de rigidité de l'équation de torsion
- I terme d'inertie de l'équation de torsion

On ajoute parfois à R et I les indices v , fl_{comp} ou fl_{incomp} pour préciser l'équation de torsion à laquelle ils se rapportent (respectivement dans le vide, dans le fluide compressible, et dans le fluide incompressible).

vecteurs

\vec{u}	déplacement d'un point du guide
u_1, u_2, u_3	coordonnées cartésiennes de \vec{u}
u_ρ, u_ϕ, u_z	coordonnées polaires de \vec{u}
u_ξ, u_η, u_z	coordonnées elliptiques de \vec{u}
$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$	composante normale du déplacement

tenseurs

$\bar{\bar{U}}$	tenseur des déformations
$\bar{\bar{\sigma}}$	tenseur des contraintes

La torsion :

θ	angle de torsion
$\theta_{[\alpha, \beta]}(z)$	$= \theta(z)$ pour $\alpha \leq z \leq \beta$ $= 0$ sinon
ϕ	fonction de torsion
$\mathcal{M}(\omega)$	moment imposé pour générer la torsion
$m(t)$	transformée de Fourier inverse de $\mathcal{M}(\omega)$
W_1	travail dû au moment imposé pour générer la torsion

Notations d'acoustique :

	<u>durée de propagation de l'onde de torsion :</u>
Δt_0	dans le guide dans le vide
Δt_1	dans la partie du guide dans l'air
Δt_2	dans la partie immergée du guide
Δt	dans le guide partiellement immergé
	<u>vitesse de phase apparente de l'onde de torsion :</u>
c_0	dans le guide dans le vide
c	dans le guide immergé dans un fluide incompressible
$c(\omega)$	dans le guide immergé dans un fluide compressible
	<u>coefficient lié à l'amplitude d'une onde :</u>
\mathcal{R}_1	réfléchi à l'interface air/fluide
\mathcal{R}_2	réfléchi à l'extrémité du guide d'ondes
\mathcal{R}_{mn}	ayant subi plus d'une réflexion

Notations relatives au fluide

Ω	domaine occupé par le fluide
$M(\xi, \eta, z)$	point situé dans le fluide
$M'(\xi', \eta', z')$	point du fluide où est placée la source acoustique
$P(\xi_0, \eta', z')$	point de σ , à l'interface fluide/structure
ρ_f	masse volumique du fluide
ρ_a	masse volumique de l'air
ρ_e	masse volumique de l'eau
μ_f	viscosité dynamique du fluide
ν_f	viscosité cinématique du fluide
τ	dans un mélange diphasique, rapport entre le volume de gaz et le volume total (selon les auteurs, <i>taux de présence volumique</i> , <i>taux de vide</i>)

Notations de mécanique :

ϕ_f	potentiel des vitesses
$\vec{v}_f(v_{f1}, v_{f2})$	vitesse du fluide dans le plan (x_1, x_2)
I_f	inertie apparente du fluide de KIM [3] (voir (2.4))
$p(M)$	pression au point M
W_2	travail exercé par la pression du fluide à la surface du guide d'ondes

Notations d'acoustique :

$\tilde{\alpha}$	atténuation linéique de l'onde de torsion lorsque le fluide est visqueux
k_f $K_f^2 = k_f^2 - 4\pi^2 Z^2$	nombre d'ondes du fluide
λ_f	longueur d'onde dans le fluide
$c_f = \frac{\omega}{k_f}$	vitesse du son dans le fluide
c_e	vitesse du son dans l'eau
c_a	vitesse du son dans l'air
$\delta_{M'}(M)$ $= \delta_{\xi'}(\xi) \otimes \delta_{\eta'}(\eta) \otimes \delta_{z'}(z)$	mesure de Dirac au point M' en trois dimensions et en coordonnées elliptiques

$\mathcal{G}(M, M')$	fonction de Green de l'espace à trois dimensions
$G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta')$	fonction de Green de l'espace à deux dimensions pour un nombre d'ondes K_f
$G_{K_f}^o(\xi, \xi', \eta, \eta')$	partie impaire de $G_{K_f}(M, M')$
$G_{K_f}^e(\xi, \xi', \eta, \eta')$	partie paire de $G_{K_f}(M, M')$
$G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta')$	champ diffracté en dimension 2 pour un nombre d'ondes K_f
$G_{K_f}^I(M, M')$	rayonnement en espace indéfini de $\delta_{M'}(M)$ pour un nombre d'ondes K_f

Chapitre 1

Avant-propos

Ce chapitre replace le travail de thèse dans son contexte industriel : la recherche d'instrumentation alternative pour la cuve, et plus généralement pour les enceintes à eau sous pression (pressuriseur . . .) des Réacteurs à Eau Pressurisée. Il s'agit d'identifier et de développer une nouvelle méthode permettant de réaliser l'inventaire en eau dans les meilleures conditions possibles.

Après avoir brièvement présenté les Réacteurs à Eau Pressurisée et précisé le besoin de l'inventaire en eau en nous limitant au cas de la cuve, nous présentons différentes méthodes permettant de le réaliser, dont la méthode par sonde à onde de torsion, qui fait l'objet de cette thèse.

1.1 Les Réacteurs à Eau Pressurisée

Les documents de culture générale [4] et [5] constituent la source d'informations principalement utilisée pour la rédaction de ce paragraphe.

1.1.1 Principe de fonctionnement

Une centrale nucléaire produit de la vapeur à haute pression, dont la détente fait tourner la turbine, entraînant l'alternateur qui produit le courant électrique. La filière REP, Réacteurs à Eau Pressurisée, représente 57 % de l'énergie électronucléaire mondiale. En France, 57 réacteurs de ce type (unités de 900 ou 1300 MW électriques) fournissent aujourd'hui plus de 70 % de notre électricité.

Le REP est un réacteur à circuit de refroidissement fermé, dont les circuits d'échange thermique sont séparés (Figure 1.1) :

- ♦ dans le circuit de refroidissement *primaire*, de l'eau sous pression circule à travers le cœur du réacteur, lieu des réactions nucléaires : elle descend dans un espace annulaire ménagé entre le réacteur et la paroi interne de la cuve, remonte le long des éléments combustibles (uranium enrichi), et extrait, par convection, la chaleur produite par les fissions nucléaires.
- ♦ la chaleur est véhiculée vers les générateurs de vapeur dans lesquels l'eau d'un autre circuit séparé, dit *secondaire*, est portée à ébullition. La vapeur produite est ainsi acheminée à l'abri de toute contamination radioactive vers la turbine.

Pour assurer, malgré ce cycle indirect, des caractéristiques de la vapeur (pression et température) acceptables, il faut rechercher une température moyenne du fluide primaire aussi élevée que possible ($\simeq 320\text{ }^{\circ}\text{C}$), ce qui implique une pression également élevée ($1,55 \cdot 10^7\text{ Pa}$).

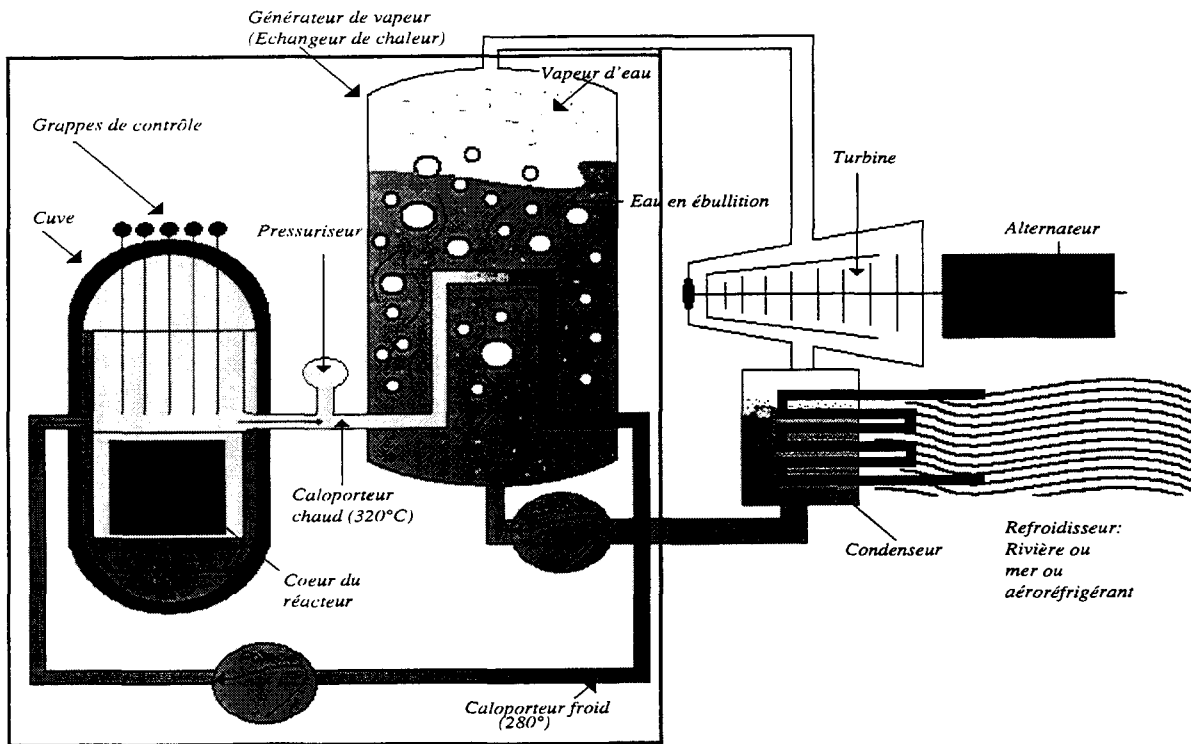


FIG. 1.1: Réacteur à Eau Pressurisée
d'après un document CEA

1.1.2 Rôle de l'eau dans la cuve du réacteur

La cuve d'un REP de 1300 MW est un récipient de plus de 13 m de haut et 4 m de diamètre, fermé par un couvercle. Totalement étanche, elle contient le cœur et l'eau primaire.

- ♦ **L'eau refroidit le cœur** : les fissions nucléaires produisent de la chaleur extraite par convection par l'eau qui circule dans la cuve.
- ♦ **L'eau permet de contrôler les lentes modifications de réactivité** : en effet, l'eau sert de modérateur de neutrons. Elle contient également du bore qui absorbe les neutrons. Cela permet de contrôler les lentes modifications de réactivité, y compris l'épuisement du combustible. Les autres variations de la réactivité sont contrôlées par les grappes de contrôle, qui sont constituées de faisceaux de crayons absorbants. Le matériau absorbant utilisé est le carbure de bore ou un alliage indium-argent-cadmium.

Ainsi, on comprend que le cœur du réacteur doit rester immergé. L'eau a donc un rôle primordial dans la sûreté du réacteur.

En situation normale, on contrôle que la cuve du réacteur est totalement remplie d'eau. En situation accidentelle, la quantité d'eau peut baisser. Citons l'exemple de la dépressurisation avec fuite, où, de plus, l'eau change d'état et un mélange diphasique d'eau et de bulles de vapeur d'eau apparaît. Le sommet du mélange d'eau et de vapeur représente le *niveau gonflé*. Afin de contrôler l'immersion du cœur, l'exploitant est également intéressé par la connaissance du *niveau tassé*, c'est-à-dire le niveau de liquide qui serait obtenu après repressurisation. On présente au paragraphe 1.2 l'instrumentation permettant de réaliser, sur les REP du parc nucléaire mondial actuel, l'inventaire en eau de la cuve.

1.2 Les méthodes de mesure de niveau actuellement en place sur les REP

Les *méthodes de mesure de niveau* permettent l'inventaire en eau de la cuve du réacteur, du pressuriseur, notamment. Les exemples présentés dans ce mémoire sont appliqués au cas de l'inventaire en eau de la cuve du réacteur, dont nous avons vu les enjeux précédemment.

1.2.1 Mesure de niveau par différence de pression

C'est la méthode de niveau la plus couramment employée dans les réacteurs à eau : elle équipe les réacteurs embarqués de TECHNICATOME, les Réacteurs à Eau Pressurisée du parc EDF et aux États-Unis ceux construits par BABCOCK & WILCOX et WESTINGHOUSE, ainsi que de nombreux réacteurs à eau bouillante.

On relie la mesure de la différence de pression entre le haut et le bas de la cuve au poids, et donc à la quantité, d'eau présente dans la cuve. Concrètement, ce système comporte deux prises de pression, en haut et en bas de la cuve, qui sont reliées aux deux extrémités d'un capteur à pression différentielle. On trouve dans [6] et [7] de nombreuses explications techniques sur l'utilisation de cette méthode dans les réacteurs.

On souhaite faire évoluer cette méthode pour les deux raisons principales suivantes : d'une part, elle nécessite une interprétation du signal plus complexe en milieu diphasique ; d'autre part, elle nécessite la traversée d'instrumentation en partie basse de la cuve.

1.2.2 Mesure de niveau par sonde à transfert thermique

Le principe de la sonde (décrite dans [8]) repose sur le fait que la capacité de refroidissement de l'eau liquide est supérieure à celle de sa vapeur. La sonde est constituée d'une paire de capteurs de température très proches l'un de l'autre, l'un des deux étant chauffé. Lorsque la sonde est située en phase vapeur, la différence de température entre les deux capteurs est notablement supérieure à ce qu'elle est lorsque la sonde est située en phase liquide ou dans un mélange de liquide et de vapeur (dont la capacité de refroidissement reste grande jusqu'à de forts taux de vide). L'analyse de la différence de température permet donc de détecter le passage d'une interface liquide-vapeur ou mélange-vapeur dans le cas diphasique.

Diverses variantes technologiques ont été proposées par FRAMATOME, TEC (Technology for Energy Corporation), JAERI (Japan Atomic Energy Research Institute),

COMBUSTION ENGINEERING et SIEMENS. Les plus qualifiées dans le contexte industriel des réacteurs à eau pressurisée sont celles de COMBUSTION ENGINEERING (les capteurs sont des thermocouples) et de SIEMENS (les capteurs sont des thermistances). Dans les deux cas, l'élément de chauffage est une résistance électrique.

Citons les principales contraintes de ces sondes intrusives :

- ♦ elles ne permettent pas une mesure continue de niveau, mais seulement une mesure ponctuelle. Leur nombre étant limité par les contraintes de traversée de la cuve, un choix judicieux des niveaux instrumentés doit être effectué.
- ♦ elles ne sont sensibles qu'au niveau gonflé. Pour pouvoir détecter un niveau tassé, elles doivent être installées dans un tube de tranquillisation et de tassage. Le comportement réel de ces tubes dans certaines conditions de fonctionnement du réacteur (pompes primaires en marche) peut soulever des interrogations.

1.3 Recherche d'une méthode alternative de mesure de niveau

On a expliqué précédemment qu'il est primordial d'avoir dans la cuve du réacteur une quantité d'eau suffisante pour assurer le refroidissement du cœur. Dans le cas contraire, les conséquences peuvent être graves, comme lors de l'accident de Three Mile Island (Pennsylvanie) en mars 1979, où le cœur du réacteur resta partiellement découvert pendant plusieurs heures, au cours desquelles le combustible fut fortement endommagé (voir [9] pour plus de détails sur l'accident et ses conséquences au niveau de la réglementation nucléaire aux États-Unis).

Pour connaître à tout moment l'inventaire en eau de la cuve, des recherches sont menées, visant la mise en place d'instrumentation alternative sur les REP.

1.3.1 Choix d'une technique à valider au CEA

Après la température, la pression et le débit, le niveau est un des paramètres les plus étroitement surveillés en milieu industriel. Toute une panoplie de techniques existent et l'auteur de [10] en présente une revue récente destinée à orienter les industriels. Concernant l'application à l'instrumentation des réacteurs à eau pressurisée, la plupart des techniques ne sont pas applicables : les techniques intrusives posent le problème des contraintes d'accès, de tenue en température et en pression, de tenue aux rayonnements d'origine nucléaire . . . Les techniques non intrusives se heurtent également à des problèmes technologiques, principalement parce que la conception de la cuve et de ses éléments internes leur masque presque toujours le niveau à mesurer. Par ailleurs, le comportement demandé en milieu diphasique empêche l'utilisation d'un certain nombre de dispositifs.

Le Département d'Études des Réacteurs du CEA a concentré ses efforts sur deux types de méthodes appartenant à ses domaines de compétences :

- ♦ des méthodes nucléaires non intrusives fondées sur l'absorption et la spectrométrie gamma (voir [11] par exemple). Sur les branches chaudes, un dispositif comportant une source de césium 137 et une chambre de détection à ionisation collimatée permettrait de mesurer le taux de vide, via l'atténuation des photons gamma, qui est

plus élevée dans l'eau que dans la vapeur. Pour la mesure dans la cuve, la source de rayonnement gamma pourrait être le cœur du réacteur. Cette méthode nécessite des adaptations liées à la non constance du cœur en tant que source et à la possibilité de sources secondaires (produits de fissions en cas de rupture de gaines de combustible). Enfin, une autre voie consisterait à compter les photons gamma issus des collisions de neutrons lents avec l'acier de la cuve, le transport neutronique dans la cuve étant un reflet de l'état du fluide. Le problème rencontré est alors que les signaux attendus sont trop faibles pour qu'on puisse les interpréter.

- ♦ une méthode acoustique intrusive, utilisant une sonde à onde de torsion, qui fait l'objet de la thèse, et sur laquelle nous revenons au paragraphe suivant.

1.3.2 Mesure de niveau par sonde à onde de torsion

Le principe de cette sonde a été initialement développé aux États-Unis, dans le but de mesurer des niveaux dans des réacteurs à eau pressurisée. Il s'agit d'une technique qui exploite la variation de la célérité d'une onde de torsion dans un barreau métallique non axisymétrique en fonction des caractéristiques du milieu environnant. En effet, quand l'onde de torsion traverse la tige immergée, l'interface fluide/solide est alternativement accélérée et décélérée, et deux mécanismes de *couplage* entraînent le mouvement du fluide :

- ♦ si la section transversale de la sonde n'est pas circulaire, le mouvement de la surface solide entraîne l'existence d'une composante normale de la vitesse, qui va générer un champ de vitesse dans le fluide ;
- ♦ de plus vient s'ajouter, lorsque le fluide est visqueux, une force de frottement.

En mesurant la vitesse et l'atténuation de l'onde de torsion, on peut obtenir des informations sur différentes propriétés rhéologiques du fluide environnant (masse volumique, viscosité), ou sur des caractéristiques qui lui sont corrélées : niveau du liquide par exemple.

En annexe A, nous présentons un prototype d'appareil dont l'utilisation est fondée sur ce principe.

Antérieurement à cette thèse, des travaux visant à exploiter les possibilités de cette technique ont déjà été réalisés :

- ♦ le comportement de la sonde a été modélisé pour un fluide environnant monophasique et incompressible. La sonde est dans ce cas sensible à la masse volumique du fluide, ce qui permet de l'exploiter pour effectuer une mesure de niveau de l'interface séparant deux fluides ;
- ♦ des expériences ont mis en évidence un comportement satisfaisant en conditions eau/air à température ambiante et pression atmosphérique, quand les phases fluides sont séparées, mais la présence de petites bulles d'air perturbe le comportement de la sonde ;
- ♦ des fonctionnements en conditions de diphasique eau-vapeur ont été expérimentés, dans des conditions de température et de pression inférieures à celles de la cuve d'un réacteur à eau pressurisée : suivi de la variation de la masse volumique du fluide au cours d'une fuite avec dépressurisation à partir des conditions initiales de

5,4 10^6 Pa et 257°C [12], expérience de mesure de niveau dans un pressuriseur à basse température [8], expérience de mesure de niveau à basse température (105°C et 128°C) dans un bouilleur [13].

1.4 Objet de la thèse

Dans le cadre de la recherche d'instrumentation alternative permettant l'inventaire en eau de la cuve des réacteurs, l'étude d'une technique par sonde à onde de torsion a été entreprise au CEA. Ce travail de thèse vise à améliorer les modélisations existantes, dont les hypothèses (fluide environnant monophasique et incompressible) sont trop restrictives pour une utilisation future dans les conditions de fonctionnement d'un REP.

Chapitre 2

Étude bibliographique et choix d'une démarche

Nous commençons par dresser un inventaire des travaux réalisés sur le thème de la sonde à onde de torsion. Nous nous intéressons ensuite aux principaux *développements théoriques* qui ont permis de modéliser son fonctionnement. Nous passons également en revue les résultats existants sur l'utilisation de la sonde en *milieu diphasique*.

Nous poursuivons en présentant d'abord les hypothèses, puis la démarche, qui sont appliquées au cours des chapitres suivants pour conduire à un nouveau modèle de la sonde à onde de torsion.

Afin d'uniformiser l'écriture des résultats de la littérature, nous adoptons les notations définies au début de ce mémoire. La tige élastique est un cylindre d'axe $(O x_3)$, de longueur L et de section transversale uniforme.

2.1 Historique

L'idée qu'une onde ultrasonore se propageant dans une structure solide peut permettre de caractériser le milieu dans lequel le solide se trouve n'est pas neuve. En effet, dès 1945, des expériences montraient qu'une onde de Rayleigh était amortie si on posait un doigt sur le solide ; la transmission d'ondes longitudinales a aussi été expérimentée (voir les travaux de FIRESTONE et LING [14] relatés dans [15]).

LYNNWORTH, de la société PANAMETRICS, a été le premier à utiliser la technique de la sonde à onde de torsion [16] [17]. À partir d'expériences, des relations entre la vitesse de propagation de l'onde dans la sonde immergée et la masse volumique du fluide environnant ont été établies. En 1979, ARAVE [12] écrit un article dans lequel il relate des expériences faites en milieu diphasique.

Aucune théorie n'a été présentée avant 1986, date à laquelle BAU [18] expose ses travaux, fondés sur des considérations énergétiques. En 1987, WANG [19] présente une thèse dans laquelle l'effet de la viscosité du fluide est pris en compte (la théorie est reprise dans [20]). En 1989, KIM [3] soutient une thèse, dont l'intérêt principal est la recherche d'une amélioration de la sensibilité de la sonde, grâce à la recherche d'une section transversale optimale. Il y synthétise aussi les travaux précédents de BAU [18], WANG [19], KIM et BAU [21]... D'autre part, KIM et BAU [22] publient en 1991 un article

sur l'amélioration de la sensibilité obtenue en utilisant une sonde de section transversale circulaire, dont le rayon varie périodiquement en fonction de la coordonnée z sur son axe. En 1993, un article de KIM *et al.* [15] présente des applications en milieu fluide diphasique : il s'agit de fluides à phases séparées, et de liquides à masse volumique variable. On ne trouve ensuite plus de travaux de ces auteurs sur le sujet.

En 1996, un article de FRIESEL [23] propose des améliorations permettant d'éviter le calcul de certaines constantes, et prend en compte les effets de la température. Fin 1998, SMIT et SMITH [24] proposent un mode opératoire différent (génération d'une onde continue au lieu de trains d'ondes) permettant d'utiliser des guides d'ondes de section plus importante que jusqu'à présent. Cependant, l'application visée se restreint à la détermination de la masse volumique des liquides.

2.2 Modélisation de H.H. Bau par une méthode énergétique

H.H. BAU [18] a été le premier à publier un article sur la théorie de la sonde à onde de torsion. Ses résultats ont été repris par KIM [3] dans sa thèse, et c'est sur ce dernier document, plus complet, que nous nous sommes appuyés pour rédiger ce paragraphe.

2.2.1 Calcul de la célérité apparente de l'onde

Les hypothèses

Le fluide est supposé :

- ♦ monphasique
- ♦ incompressible
- ♦ non visqueux
- ♦ au repos, à l'exception du mouvement dû au passage de l'onde dans le guide. Cette dernière hypothèse n'est pas limitante. En effet, on peut montrer que l'effet d'un écoulement externe est nul. KIM en fait la démonstration dans [3], p. 77-83.

De plus, il n'y a pas de dissipation d'énergie.

Les énergies mises en jeu

Soit θ l'angle de torsion. KIM [3] choisit d'écrire l'équation régissant le mouvement de la tige (en l'absence de fluide extérieur) de la façon suivante :

$$\mu J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \rho_s I_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

où μ est le second coefficient de Lamé du matériau de la tige, ρ_s sa masse volumique, J est une constante appelée *constante de torsion* qui ne dépend que de la géométrie de la section du guide, (μJ est la rigidité de torsion), et I_s est le moment d'inertie de la section transversale de la tige autour de l'axe (Ox_3).

Il écrit ensuite :

♦ l'énergie de déformation de la tige :

$$V_s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \mu J \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \quad (2.2)$$

♦ son énergie cinétique :

$$T_s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_s I_s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx_3 \quad (2.3)$$

♦ pour le fluide mis en mouvement par le passage de l'onde dans le guide (avec les hypothèses d'absence de viscosité et de mouvement plan), il pose, *par analogie* :

$$T_f = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_f I_f \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx_3 \quad (2.4)$$

en appelant I_f *inertie apparente du fluide*, qu'il faudra déterminer. On présente plus loin le résultat obtenu pour une section elliptique.

La vitesse apparente de l'onde

KIM écrit ensuite que "d'après les équations (2.2) à (2.4)", il vient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \quad (2.5)$$

où :

$$c = \sqrt{\frac{\mu J}{\rho_s I_s + \rho_f I_f}} \quad (2.6)$$

On reconnaît l'équation d'une onde se propageant selon x_3 avec une célérité apparente c . (2.6) est l'équation qui met en évidence l'influence du fluide sur la propagation de l'onde dans la tige. Dans cette équation, J et I_s dépendent de la géométrie de la section de la tige (on les calcule au chapitre 3). ρ_s et μ dépendent du matériau de la tige, et sont donc connus. (2.6) peut donc nous permettre de déterminer ρ_f , à condition de savoir exprimer I_f . C'est l'objet du paragraphe suivant.

Calcul de I_f

Pour les raisons que nous évoquerons au paragraphe 2.7.1, le cas qui nous intéresse est celui où la section transversale de la tige est elliptique.

Pour calculer I_f , on va chercher l'expression exacte de l'énergie cinétique T_f du fluide, puis en déduire I_f en écrivant $T_f = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_f I_f \Omega_r^2 dx_3$, avec $\Omega_r = \frac{\partial \theta}{\partial t}$. En supposant que

la torsion de la tige métallique induit un mouvement plan du fluide, dans le plan (x_1, x_2) , l'énergie cinétique du fluide de vitesse $\vec{v}_f(v_{f1}, v_{f2})$ s'écrit classiquement :

$$\begin{aligned} T_f &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{2} \rho_f \iint v_f^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{2} \rho_f \iint (v_{f1}^2 + v_{f2}^2) dx_1 dx_2 \right) dx_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Or v_{f1} et v_{f2} sont reliés au potentiel des vitesses ϕ_f par :

$$v_{f1} = \frac{\partial \phi_f}{\partial x_1}, \quad v_{f2} = \frac{\partial \phi_f}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

d'où :

$$T_f = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{2} \rho_f \iint \left\{ \left(\frac{\partial \phi_f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_f}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 \right) dx_3 \quad (2.9)$$

KIM reprend le potentiel des vitesses calculé par LAMB ([25], §72). Mais LAMB ne traite pas exactement le même problème : il s'agit bien d'un cylindre de section transversale elliptique immergé dans un fluide initialement au repos, mais c'est la *rotation* du cylindre autour de son axe (et non sa torsion) qui va engendrer un mouvement du fluide. Ω_r est supposée indépendante de la variable longitudinale z . Cependant, l'auteur affirme que le problème du mouvement d'un fluide dans ou autour d'un cylindre en rotation est dans une certaine mesure mathématiquement identique à celui de la torsion d'une barre uniforme. Cette approximation nécessiterait des explications supplémentaires.

LAMB montre qu'alors :

$$T_f = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{16} \pi \rho_f (a^2 - b^2)^2 \Omega_r^2 dx_3 \quad (2.10)$$

où a et b sont respectivement les demi grand axe et demi petit axe de l'ellipse.

D'où, en comparant (2.4) et (2.10) :

$$I_f = \frac{1}{8} \pi (a^2 - b^2)^2 \quad (2.11)$$

Dans le cas où la section transversale de la sonde est elliptique, on connaît maintenant, grâce à (2.6) et (2.11), la relation entre la vitesse apparente de l'onde et la masse volumique du fluide.

Remarques :

- ♦ MILNE-THOMSON [26], §9.65, obtient le même résultat pour T_f en considérant aussi un cylindre en rotation, mais par une méthode différente : il calcule le potentiel pour une section circulaire, et en déduit celui d'une section elliptique par une transformation conforme de Joukowski (sur les transformations conformes, voir [27] au §6.3.).

- ♦ Le cas d'une *section transversale circulaire* correspond au cas particulier où $a = b$. Alors $I_f = 0$ et $I_s = J$, d'où $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$, *vitesse de propagation dans le vide*. On retrouve le résultat connu : si la section du guide est circulaire, la vitesse de propagation de l'onde dans le guide n'est pas perturbée par la présence d'un fluide non visqueux autour de ce guide.

2.2.2 Application à la mesure de niveau

On s'intéresse ici au cas où la sonde n'est que partiellement plongée dans le fluide. Soit l , $l < L$, la longueur de tige immergée (Figure 2.1).

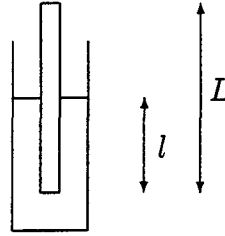


FIG. 2.1: Sonde partiellement immergée

Si on connaît la masse volumique du fluide :

- ♦ soit Δt_0 la durée de propagation de l'onde lorsque le guide est dans le vide, qu'on utilise comme approximation de la durée de propagation lorsqu'il est entièrement dans l'air. Dans ce cas, $I_f = 0$, $c = c_0 = \sqrt{\frac{\mu J}{\rho_s I_s}}$, et $\Delta t_0 = \frac{L}{c_0}$;
- ♦ soit Δt la durée de propagation lorsque le guide est partiellement immergé, alors $\Delta t = \frac{L-l}{c_0} + \frac{l}{c}$.

Il vient :

$$\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t_0} = \frac{l}{L} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s}} - 1 \right) \simeq \frac{1}{2} \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s} \frac{l}{L} \quad (2.12)$$

où l'approximation correspond au premier terme de la série de Taylor.

Lorsque ρ_f est connue, on peut donc calculer l :

$$l \simeq 2L \frac{\rho_s I_s}{\rho_f I_f} \frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t_0} \quad (2.13)$$

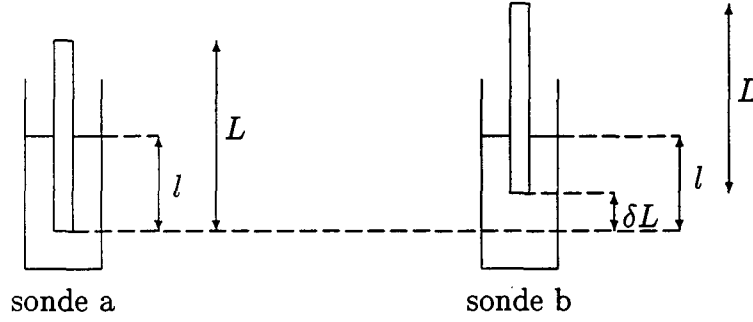


FIG. 2.2: Mesure de niveau à l'aide de deux guides d'ondes

Si on ne connaît ni la masse volumique ni le niveau du fluide :

La méthode ([3], p. 89) consiste à utiliser deux guides d'onde de même géométrie et du même matériau, le second guide étant situé à une distance δL plus haut que le premier (Figure 2.2).

L'écriture des deux temps de propagation comme en (2.12) permet de calculer les deux inconnues : en effet, soient Δt_a et Δt_b les durées de propagation dans les sondes a et b respectivement. D'après (2.12), on peut écrire :

$$\frac{\Delta t_a - \Delta t_0}{\Delta t_0} \simeq \frac{1}{2} \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s} \frac{l}{L} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t_b - \Delta t_0}{\Delta t_0} \simeq \frac{1}{2} \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s} \frac{l - \delta L}{L} \quad (2.14)$$

d'où :

$$\frac{\Delta t_a - \Delta t_0}{\Delta t_0} - \frac{\Delta t_b - \Delta t_0}{\Delta t_0} \simeq \frac{1}{2} \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s} \frac{\delta L}{L} \quad (2.15)$$

Cette équation permet de déterminer ρ_f .

De plus, en utilisant la première équation de (2.14) et (2.15), on écrit :

$$\frac{\Delta t_a - \Delta t_0}{\Delta t_0} \simeq \frac{l}{\delta L} \left(\frac{\Delta t_a - \Delta t_0}{\Delta t_0} - \frac{\Delta t_b - \Delta t_0}{\Delta t_0} \right) \quad (2.16)$$

Cette équation permet de déterminer l .

2.2.3 Optimisation de la sonde

Soit c_0 la vitesse de propagation de l'onde lorsque la tige est dans le vide, et c la vitesse de propagation équivalente de l'onde lorsque la tige est immergée. Alors, d'après (2.6) :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s}}} \quad (2.17)$$

ρ_s et ρ_f étant fixés pour un matériau et un fluide donnés, on ne peut intervenir que sur le rapport $\frac{I_f}{I_s}$. On montre (paragraphe 3.3.1) que pour une section elliptique,

$I_s = \frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2)$. Donc :

$$\frac{I_f}{I_s} = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)^2}{2 \frac{a}{b} \left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)} \quad (2.18)$$

On maximise donc $\frac{I_f}{I_s}$ en augmentant $\frac{a}{b}$. Cependant il y a des limites à cette augmentation : d'une part, le guide doit être suffisamment résistant pour ne pas casser, et on ne doit donc pas trop diminuer b . D'autre part, a doit rester faible devant la longueur d'onde pour qu'on puisse négliger la dispersion.

Il existe d'autres façons d'augmenter $\frac{I_f}{I_s}$: confiner le guide en l'enfermant dans un tube coaxial (voir annexe de [20]), utiliser un guide creux (résultats moyennement convaincants, voir [3]), une tige filetée [22], ou encore utiliser des guides de formes plus compliquées [21]. Dans [12], ARAVE propose des formes hydrodynamiques particulières pour une utilisation de la sonde en écoulement (choix d'un bon profil et d'un angle d'attaque).

2.2.4 Critique de la méthode

La méthode énergétique du paragraphe 2.2 présente deux inconvénients majeurs :

- ♦ Elle paraît difficilement généralisable au cas d'un fluide moins idéal. En particulier, on ne saurait exprimer I_f pour un fluide compressible, voire diphasique, De plus, pour calculer I_f , on assimile la torsion à une rotation : qu'est-ce qui justifie cette hypothèse ?

- ♦ Sa mise en œuvre n'est pas détaillée :

On comprend que, pour obtenir (2.6), une méthode de variation des énergies est utilisée. Les différentes étapes ne sont pas présentées, en particulier les conditions aux limites ne sont pas exposées.

On constate également que le fluide environnant apporte une inertie additionnelle au système, mais pas de raideur ajoutée.

2.3 Étude bibliographique du cas où le fluide est visqueux

2.3.1 Méthode de Wang pour un guide de section circulaire

On considère maintenant une tige de section circulaire, dont le rayon R est supposé petit devant la longueur L . On se place en coordonnées cylindriques classiques (ρ, φ, x_3) . On notera \vec{u} le déplacement de la tige, et μ_f la viscosité du fluide. Au cours de ce paragraphe uniquement, pour ne pas alourdir les notations, la vitesse du fluide est notée \vec{v} et non \vec{v}_f .

Hypothèses :

- ♦ Le fluide a une masse volumique et une viscosité constantes ;
- ♦ La déformation de la barre est suffisamment faible pour négliger les termes non linéaires ;
- ♦ Le problème est axisymétrique : les quantités sont indépendantes de φ ;
- ♦ Il n'y a pas de glissement à l'interface fluide/solide.

Modélisation :

- ♦ Équation d'équilibre dynamique du guide :

$$\rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div} \vec{\sigma} \quad (2.19)$$

où $\vec{\sigma}$ est le tenseur des contraintes. La relation entre contraintes et déformations dans un milieu homogène et isotrope doué d'élasticité linéaire s'écrit : $\vec{\sigma} = \lambda \text{Tr} \vec{U} \vec{\bar{I}} + 2 \mu \vec{U}$, où $\vec{\bar{I}}$ est le tenseur identité et \vec{U} le tenseur des déformations ($U_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$).

- ♦ Équations pour le fluide :

Pour un fluide visqueux incompressible de masse volumique constante, on peut écrire les équations suivantes (voir [28]) :

- conservation de la masse : $\text{div} \vec{v} = 0$
- mouvement du fluide (équation de Navier-Stokes) :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \mu_f \Delta \vec{v} \quad (2.20)$$

où p est la pression dans le fluide.

→ le tenseur des contraintes s'écrit : $\vec{\sigma} = -p \vec{\bar{I}} + 2 \mu_f \vec{V}$, où \vec{V} est le tenseur des taux de déformation, de composantes $V_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i})$.

- ♦ Conditions aux limites :

On écrit la continuité de la contrainte normale et de la vitesse à l'interface fluide/solide, et on écrit que la déformation de la barre est finie en $\rho = 0$, et la vitesse du fluide finie en $\rho = \infty$.

- ♦ Système à résoudre :

Après soustraction des équations ci-dessus écrites à l'état stationnaire, application des hypothèses (linéarisation, indépendance en φ), on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho_s} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2} \right), \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x_3^2} \right), \quad R \leq \rho < \infty \quad (2.22)$$

$$\mu_f \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right), \quad \rho = R \quad (2.23)$$

$$v_\varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}, \quad \rho = R \quad (2.24)$$

$$u_\varphi \text{ fini}, \quad \rho = 0 \quad (2.25)$$

$$v_\varphi \text{ finie}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

On change ensuite d'unités, en utilisant les variables réduites :

$$C_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}, \quad L_0 = R, \quad T_0 = \frac{L_0}{C_0}, \quad \rho_0 = \rho_s$$

et en posant $\rho^* = \frac{\rho_f}{\rho_s}$ et $Re = \frac{\rho_f R \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}}{\mu_f}$,

pour finalement obtenir :

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x_3^2} \right), \quad 1 \leq \rho < \infty \quad (2.28)$$

$$\frac{\rho^*}{Re} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho} \right) = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}, \quad \rho = 1 \quad (2.29)$$

$$v_\varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}, \quad \rho = 1 \quad (2.30)$$

$$u_\varphi \text{ fini}, \quad \rho = 0 \quad (2.31)$$

$$v_\varphi \text{ finie}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (2.32)$$

Notons que, dans la définition de Re , au lieu d'utiliser comme échelle des vitesses la vitesse du fluide, nous avons choisi ici C_0 : Re représente donc un nombre de Reynolds basé sur la vitesse de propagation de l'onde de torsion dans le guide immergé, et non sur le mouvement du fluide.

♦ Résolution :

On va chercher u_φ et v_φ de la forme :

$$\begin{aligned} u_\varphi(\rho, x_3, t) &= U(\rho) e^{-\tilde{\alpha} x_3 + i k(x_3 - ct)} \\ v_\varphi(\rho, x_3, t) &= V(\rho) e^{-\tilde{\alpha} x_3 + i k(x_3 - ct)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $\tilde{\alpha}$ représente l'atténuation de l'onde.

On réécrit alors les équations (2.27) à (2.32), et on obtient un problème aux valeurs propres :

$$U''' + \frac{1}{\rho} U' + [k^2 c^2 + (-\tilde{\alpha} + i k)^2 - \frac{1}{\rho^2}] U = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (2.34)$$

$$V'' + \frac{1}{\rho} V' + [i k c Re + (-\tilde{\alpha} + i k)^2 - \frac{1}{\rho^2}] V = 0, \quad 1 \leq \rho \leq \infty \quad (2.35)$$

$$U' - \frac{1}{\rho} U = \frac{\rho^*}{Re} (V' - \frac{V}{\rho}), \quad \rho = 1 \quad (2.36)$$

$$-i k U = V, \quad \rho = 1 \quad (2.37)$$

$$U \text{ fini}, \quad \rho = 0 \quad (2.38)$$

$$V \text{ finie}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (2.39)$$

qui permet d'obtenir c et $\tilde{\alpha}$ en fonction de ρ^* et μ_f (ou Re).

Les équations étant compliquées, on ne peut obtenir de solution générale analytique. C'est pourquoi WANG a procédé numériquement. Cependant, il propose aussi une méthode asymptotique, valable lorsque la viscosité est faible (il est amené à utiliser le fait que $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ est petit), qu'il a validée en comparant les résultats obtenus avec ceux de la méthode numérique. L'avantage est qu'elle permet d'obtenir des résultats explicites :

$$c = 1 - \frac{1}{\sqrt{Re}} \rho^* \sqrt{\frac{2}{k}} + \frac{1}{Re} \frac{\rho^{*2}}{k} + \frac{1}{Re\sqrt{Re}} \sqrt{2k} \left[\rho^{*3} \left(\frac{k^2}{72} - \frac{1}{3} + \frac{7}{4k^2} \right) + \rho^{*2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{k^2} \right) + \rho^* \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8k^2} \right) \right] + o\left(\frac{1}{Re^2}\right) \quad (2.40)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \rho^* \sqrt{2k} + \frac{1}{Re} \frac{(k^2 - 9)\rho^{*2} + 9\rho^*}{3} + \frac{1}{Re\sqrt{Re}} \sqrt{2k} \left[\rho^{*3} \left(\frac{k^3}{72} - k + \frac{9}{4k} \right) + \rho^{*2} \left(\frac{k}{2} - \frac{3}{k} \right) + \rho^* \left(\frac{k}{2} + \frac{3}{8k} \right) \right] + o\left(\frac{1}{Re^2}\right) \quad (2.41)$$

Résultats :

Finalement, WANG donne quelques résultats qui montrent que les effets de la viscosité sont très faibles, et conclut en écrivant : *l'effet visqueux peut être négligé à coup sûr*. D'après ses expériences, la viscosité fait toujours baisser la vitesse de l'onde de torsion de moins de 1 %.

2.3.2 Méthode de Kim

KIM écrit que l'inertie du fluide I_f est la somme de deux contributions :

- ♦ $I_{f,nv}$, contribution non visqueuse, de la forme $C_1 I_s$, avec C_1 constante du guide. $I_{f,nv}$ n'existe que pour un guide de section non circulaire ;

- ♦ $I_{f,v}$, contribution visqueuse, s'écrit : $C_2 \sqrt{\frac{\mu_f}{\omega d^2 \rho_f}}$, où $\omega = 2\pi f$, f fréquence de l'onde. C_2 est une constante géométrique déterminée par l'expérience, et d est une dimension caractéristique de la section transversale.

Or, d'après l'équation (2.12) :

$$\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t_0} = \frac{l}{L} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s}} - 1 \right) \simeq \frac{1}{2} \frac{\rho_f I_f}{\rho_s I_s} \quad (2.42)$$

donc :

$$\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t_0} = \frac{C_1}{2 \rho_s} \rho_f + \frac{C_2}{2 \rho_s d \sqrt{\omega}} \sqrt{\rho_f \mu_f} \quad (2.43)$$

En utilisant cette seule expression, on aurait deux inconnues, ρ_f et μ_f , pour une seule équation. Mais si on utilise un guide circulaire, seule $I_{f,v}$ intervient et donc $\sqrt{\rho_f \mu_f}$ peut être déterminé. En remplaçant ce terme par sa valeur dans (2.43), on peut alors obtenir ρ_f , et donc μ_f .

On peut donc déterminer viscosité et masse volumique d'un fluide à partir de *deux* mesures de durée de propagation d'ondes de torsion : pour l'une des deux mesures, on utilise un guide d'ondes de section *circulaire*, et pour l'autre mesure, on utilise un guide d'ondes de section *non circulaire*.

2.3.3 Comparaison entre ces deux méthodes

La méthode de WANG s'appliquant exclusivement pour un guide de section *circulaire* plongé dans un fluide *visqueux*, on va vérifier la cohérence entre les résultats de KIM et ceux de WANG dans ce cas. On supposera que la viscosité du fluide est faible, de façon à utiliser les résultats asymptotiques donnés par les équations (2.40) et (2.41), qui sont explicites et donc facilement exploitables.

Écrivons la vitesse de propagation de l'onde en utilisant les résultats de KIM (paragraphe 2.3.2) adaptés à ce cas. On applique l'équation (2.6) à un guide de section circulaire ($J = I_s$) et après changement d'unités (avec $C_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$ et $\rho^* = \frac{\rho_f}{\rho_s}$), on obtient :

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^* I_f}{I_s}}} \quad (2.44)$$

Or, d'après KIM :

$$I_f = C_2 \sqrt{\frac{\mu_f}{\omega R^2 \rho_f}} = C_2 \sqrt{\frac{\mu_f}{C_0 k R^2 \rho_f}} = \frac{C_2}{\sqrt{R}} \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{Re}} \quad (2.45)$$

d'où :

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_2}{\sqrt{R}} \frac{\rho^*}{I_s \sqrt{Re} \sqrt{k}}}} \quad (2.46)$$

Lorsque la viscosité est faible, Re est grand et un développement limité permet d'obtenir :

$$c = 1 - \frac{C_2}{2\sqrt{R}I_s} \frac{\rho^*}{\sqrt{k}\sqrt{Re}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \quad (2.47)$$

Or WANG a montré (équation (2.40)) que :

$$c = 1 - \sqrt{2} \frac{\rho^*}{\sqrt{k}\sqrt{Re}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \quad (2.48)$$

En prenant pour C_2 la valeur $2\sqrt{2}\sqrt{R}I_s$, on obtient bien la même évolution de c en fonction des paramètres fréquence, masse volumique et viscosité.

On a donc montré la cohérence entre les résultats de KIM et ceux de WANG, et évalué la valeur de la constante C_2 pour un guide de section circulaire.

2.3.4 Critiques

- ♦ KIM travaille à partir d'expériences. Étant intéressés par une modélisation plus rigoureuse, nous ne retiendrons pas sa démarche.
- ♦ L'application de la méthode de WANG à notre problème est difficile : nous ne voulons pas nous restreindre à une section transversale circulaire, ni à un fluide monophasique. Or, cette méthode paraît difficilement exploitable dans ces nouveaux cas : elle mènerait à des équations trop compliquées pour être résolues analytiquement.
- ♦ La démarche de WANG n'est pas assez commentée : u_z est-il toujours nul ? De plus, en écrivant u_φ et v_φ sous la forme (2.33), on ne présente pas les résultats qui prendraient en compte la réflexion de l'onde à l'extrémité du guide d'ondes.

2.4 Études expérimentales avec des fluides diphasiques

On trouve peu de littérature sur l'utilisation de la sonde en milieu fluide diphasique. Les références relatent majoritairement des expériences. En vue d'une utilisation ultérieure, on s'intéresse ici de plus près à celles pour lesquelles le milieu diphasique est - au moins approximativement - caractérisé (nombre et taille de bulles, rapport entre le volume de gaz et le volume total ...).

2.4.1 Fluide à phases séparées

L'article [15] est consacré à cette étude. Pour déterminer les masses volumiques, les auteurs proposent d'utiliser un guide fonctionnant dans trois zones superposées : liquide, mixte, vapeur, en utilisant les phases gazeuse et liquide comme zones de référence.

2.4.2 Écoulement de fluide diphasique

Dans [12], ARAVE présente les expériences réalisées dans différents types d'écoulements diphasiques (écoulements à bouchons, annulaire, à brouillard, à gouttelettes,... voir [29] pour plus de précisions sur la définition de ces écoulements). Pour expliquer la non-adéquation de tous les résultats obtenus, il met en question le piégeage des bulles dans les zones de recirculation autour de la sonde (lorsque la section de la sonde n'est pas choisie de façon à offrir peu de résistance à l'écoulement).

2.4.3 Eau avec bulles d'air

D'un point de vue qualitatif, des effets ont pu être observés [13]. Rien n'a été quantifié, et aucune étude théorique n'a été menée. Les résultats diffèrent en fonction de la taille des bulles :

- ♦ La présence de petites bulles (diamètre très inférieur au millimètre) se traduit par deux effets sur le signal de l'onde de torsion : d'une part, son amplitude diminue, et d'autre part, le temps de parcours change.

Notons que le rayon des bulles se situe dans la gamme des valeurs pour lesquelles les bulles peuvent entrer en résonance aux fréquences de signal utilisées.

- ♦ Les bulles plus grosses ont très peu d'influence sur le signal.

2.5 Conclusion de l'étude bibliographique

L'étude bibliographique que nous venons de réaliser a mis en évidence les limites des modélisations existantes. D'une part, le fluide dans lequel la sonde est immergée est incompressible, ce que nous considérons comme une hypothèse trop restrictive (voir § 2.6.1). Le cas d'autres liquides (avec bulles ...) a surtout été abordé expérimentalement. D'autre part, les théories ne sont pas suffisamment développées. Il manque en particulier des informations sur les hypothèses et la nature des méthodes utilisées.

Cependant, les résultats présentés sont intéressants : nous retiendrons en particulier l'expression de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide immergé dans un fluide incompressible, (2.6), que les auteurs ont validée expérimentalement, et sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Maintenant, présentons et justifions les hypothèses dont nous tirerons parti au cours des chapitres de modélisation. Expliquons ensuite les grandes lignes de la démarche qui est adoptée pour conduire à une nouvelle modélisation de la sonde à onde de torsion pour la mesure de niveau de fluides compressibles.

2.6 Nouvelles hypothèses liées au fluide

2.6.1 Compressibilité prise en compte

D'après l'étude bibliographique, le fonctionnement de la sonde à onde de torsion n'a été modélisé qu'en milieu fluide considéré *incompressible*. Or, dans les réacteurs à eau

pressurisée, le fluide peut devenir diphasique (voir chapitre 1) : la simple présence de bulles va alors à l'encontre de l'hypothèse d'incompressibilité, entre autres.

C'est la raison pour laquelle nous avons cherché à étendre la modélisation de la sonde à onde de torsion au cas où cette dernière est partiellement immergée dans un fluide *compressible*. Ceci implique en particulier la prise en compte d'un nouveau phénomène lié à la compressibilité : *le rayonnement acoustique dans le fluide*.

La prise en compte de la compressibilité est une étape vers la modélisation du dispositif pour une utilisation ultérieure en milieu diphasique.

2.6.2 Viscosité négligée

D'après WANG [19] (voir aussi le paragraphe 2.3), qui a isolé les effets de la viscosité en utilisant un guide d'ondes de section circulaire, la viscosité peut être négligée.

Quant à BAU [18], il justifie cette hypothèse par la faible épaisseur de la couche limite : celle-ci est plus petite que les dimensions de la section transversale du guide d'ondes. En effet, l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de $\sqrt{\frac{\nu_f}{2\pi f}}$, où ν_f est la viscosité cinématique du fluide et f la fréquence d'excitation de l'onde de torsion. Vérifions cette hypothèse sur les fluides que nous utiliserons pour nos simulations au chapitre 5, et lors d'expérimentations futures :

- ♦ pour l'eau à 20°C, $\nu_f = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (d'après [30]), ce qui donne, à une fréquence de 100 kHz, une épaisseur de couche limite de l'ordre de 10^{-6} m . Or le guide d'ondes de section elliptique a un grand axe de $6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. L'hypothèse est donc bien vérifiée ;
- ♦ pour le diiodométhane à 20°C, $\nu_f = 8,42 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ (donnée de la société MERCK), et l'épaisseur de la couche limite est encore de l'ordre de 10^{-6} m ;
- ♦ pour de l'eau aux conditions de fonctionnement des réacteurs à eau pressurisée, on a $\nu_f \simeq 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ (donnée tirée de [31] pour de l'eau à 325°C et $1,5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$), et donc l'épaisseur de couche limite est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Là encore, la viscosité serait donc négligeable.

Notons par ailleurs qu'en ce qui concerne l'acoustique des milieux diphasiques, nous pourrions facilement considérer la viscosité des fluides, par exemple en écrivant que la masse volumique ρ_f et la vitesse du son c_f sont des nombres complexes. Dans un premier temps, nous avons préféré simplifier le problème.

2.6.3 Effets de l'écoulement négligés

On pose cette hypothèse de façon à simplifier la résolution du problème.

Lorsque le fluide environnant est incompressible, KIM, dans [3] p. 77-83, démontre que les effets de l'écoulement sont effectivement nuls.

Par ailleurs, quelques expériences en milieu fluide diphasique vont en ce sens : ARAVE [12] montre que dans des mélanges eau/vapeur, les écoulements n'agissent presque jamais sur la propagation de l'onde. C'est le cas aussi pour des mélanges eau/air, lorsque les écoulements se font à des vitesses inférieures à 3 m/s. Il est tout de même plus prudent de choisir un guide d'ondes dont la forme offre peu de résistance à l'écoulement.

2.6.4 Température supposée constante

En réalité, il y a bien des différences de température entre le fond et le haut de la cuve des réacteurs à eau pressurisée. On considère alors que le matériau du guide d'ondes a un coefficient de Lamé μ (donnée dont dépendent les équations) qui varie peu avec la température.

2.7 Nouvelles hypothèses liées à la géométrie du guide d'ondes

La sonde est une tige cylindrique d'axe ($O x_3$), de longueur L et de section transversale uniforme (Figure 1 page 5).

2.7.1 Forme de la section transversale

Afin de faciliter la résolution du problème, on désire choisir une forme simple de section transversale. Celle-ci ne peut être circulaire : en effet, le passage d'une onde de torsion dans un guide cylindrique de section circulaire n'est pas affectée par le fluide environnant, sauf lorsque ce dernier est visqueux (voir [3]). Notre choix s'est finalement porté sur un guide cylindrique de section elliptique, pour les raisons suivantes :

- ♦ Des résultats existent : par exemple, SOKOLNIKOFF [32] a travaillé sur la torsion des barres minces de section elliptique. De plus, KIM [3], dans sa thèse sur les guides à ondes de torsion en milieu monphasique, note que dans un guide ayant une telle géométrie, l'onde de torsion se propage en étant bien sensible aux caractéristiques du fluide extérieur ;
- ♦ Ce type de guide peut être fabriqué par déformation d'un tube de section circulaire ;
- ♦ L'ellipse est une forme qui offre relativement peu de résistance à un écoulement (voir paragraphe 2.6.3) ;
- ♦ En acoustique, si on étudie un barreau relativement plat, c'est-à-dire si les hypothèses sur les longueurs d'ondes permettent d'assimiler sa section transversale à un segment, alors cette section peut être modélisée par une ellipse d'excentricité 1 (voir annexe B) ;
- ♦ Il est possible de pousser assez loin, *a priori*, les calculs analytiques : l'expression des conditions aux limites est facilitée, en particulier dans un système de coordonnées elliptiques. Or, dans le cadre d'une application future possible en Réacteur à Eau Pressurisée, on cherche des résultats analytiques, applicables facilement, pour connaître l'inventaire en eau en temps réel.

Nous utilisons donc le système de coordonnées adapté : coordonnées du cylindre elliptique (en trois dimensions), ou coordonnées elliptiques (dans le plan de la section transversale du cylindre). L'annexe B page 111 rappelle la définition des coordonnées elliptiques : rapport aux coordonnées cartésiennes, définition des vecteurs de base ... , et donne l'expression des opérateurs différentiels classiques (gradient, Laplacien ...) dans ce système de coordonnées.

2.7.2 Dimensions

Étant donné le contexte de l'application future de la méthode, des hypothèses supplémentaires peuvent être formulées :

- ♦ Les dimensions transversales du guide sont petites devant sa longueur. Pour les applications numériques, on choisira typiquement $L = 3$ m et, pour les demi grand axe et demi petit axe de l'ellipse, $a = 3$ mm et $b = 1$ mm.
- ♦ Les dimensions transversales du guide sont petites devant les longueurs d'onde λ_f dans le fluide. Soit f la fréquence de l'onde générée (environ 100 kHz pour notre application) et c_f la célérité du son dans le fluide. On a $\lambda_f = \frac{c_f}{f}$. Cela veut dire qu'on considère des fluides dans lesquels le son se propage à une célérité c_f telle que $c_f > d \times f$, où d est une dimension caractéristique de la section transversale du guide. Nous reviendrons plus loin sur ce choix et ses limites (voir paragraphe 5.5.1).

2.8 Méthode de résolution

2.8.1 La méthode variationnelle

Nous allons aborder le problème dynamique en termes énergétiques. Nous emploierons une méthode variationnelle, en appliquant le principe de Hamilton, qu'on énonce ainsi (voir par exemple [33] p. 166) :

Soit \tilde{T} l'énergie cinétique totale du système, et \tilde{V} son énergie potentielle de déformation. On forme alors l'intégrale $\int (\tilde{T} - \tilde{V}) dt$, prise pour t entre des valeurs initiale et finale fixées t_1 et t_2 , en supposant que seul le déplacement \tilde{u} varie, et que ses valeurs en t_1 et t_2 sont données. Soit alors la variation $\delta \int (\tilde{T} - \tilde{V}) dt$. On note $\delta \tilde{W}$ le travail des forces extérieures dû à une variation du déplacement. Alors le principe de Hamilton s'exprime par l'équation :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{T} - \tilde{V}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{W} dt = 0 \quad (2.49)$$

La méthode variationnelle est classiquement mise en œuvre de la façon suivante (voir [34] p. 18-22) :

- ♦ On choisit un déplacement \tilde{u} qui satisfait les conditions aux limites données ;

- ♦ On peut alors écrire $\tilde{T}(\vec{u})$ et $\tilde{W}(\vec{u})$. On exprime en fonction de \vec{u} les contraintes et déformations du système, ce qui permet d'écrire $\tilde{V}(\vec{u})$;
- ♦ On calcule $\delta \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{T} - \tilde{V}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{W} dt$ en se donnant un accroissement virtuel $\delta \vec{u}$ satisfaisant les conditions aux limites, dont les conditions en t_1 et t_2 :

$$\delta \vec{u} = 0 \quad \text{pour } t = t_1 \quad \text{et } t = t_2 \quad (2.50)$$

- ♦ L'écriture de (2.49) permet d'obtenir l'équation du mouvement vérifiée par \vec{u} .

2.8.2 Les étapes de la modélisation

Pour des raisons de simplicité, on décide d'aborder le problème en considérant une dépendance temporelle harmonique. Lorsqu'il est nécessaire de le préciser, on note \tilde{g} une fonction dépendant du temps, et $\tilde{g} = \Re(g e^{-i\omega t})$. Le principe de Hamilton (2.49) s'écrit alors, en intégrant sur un nombre entier de périodes :

$$\delta(T - V + W) = 0 \quad (2.51)$$

Le système mécanique considéré est la sonde à onde de torsion. T et V sont donc respectivement ses énergies cinétique T_s et de déformation V_s . Les forces extérieures qui lui sont appliquées sont de deux natures : d'une part, pour générer l'onde, on impose un moment de torsion à une extrémité de la sonde. D'autre part, le fluide environnant exerce une pression à la surface de cette sonde. Les travaux correspondants sont notés respectivement W_1 et W_2 , avec $W = W_1 + W_2$.

De plus, nous recherchons, non pas l'équation du mouvement vérifiée par \vec{u} , mais l'équation, appelée *équation de torsion*, vérifiée par l'angle de torsion θ (dont \vec{u} dépend). La méthode variationnelle est appliquée à notre problème de la façon suivante :

- ♦ Nous étudions la torsion du guide d'ondes dans le vide, pour obtenir une approximation de T_s et V_s en fonction de θ , l'angle de torsion (chapitre 3) ;
- ♦ Nous résolvons le problème de Neumann extérieur pour l'équation de Helmholtz dans le fluide compressible, afin d'obtenir l'expression de la pression exercée par le fluide sur la surface du guide. On traite à ce moment là un problème idéalisé, en prolongeant le guide par un baffle rigide. Nous en déduisons $W_2(\theta)$ (chapitre 4) ;
- ♦ Nous appliquons (2.51), de façon à obtenir une approximation de l'équation de torsion et de la vitesse de phase de l'onde de torsion (chapitre 5).

Nous sommes alors en mesure d'utiliser les résultats obtenus pour mesurer la longueur de sonde immergée : nous présentons cette application, ainsi que les résultats de quelques simulations.

Chapitre 3

Étude de la torsion du guide d'ondes dans le vide

Nous abordons ici la torsion du guide d'ondes *dans le vide* : aucun phénomène de couplage ou de dissipation n'est pris en compte pour le moment. Le but est en effet d'obtenir les expressions de T_s et V_s , énergies cinétique et de déformation de la sonde, qui interviennent dans le principe de Hamilton (2.51) et permettent d'obtenir l'équation de la torsion du système.

De nombreux auteurs se sont intéressés à la torsion des poutres. Leurs travaux diffèrent en ce qu'ils présentent des théories plus ou moins complexes : par exemple, ils ne considèrent pas tous les effets du gauchissement, la distorsion, ... STEPHEN [35], en 1985, et KIM, dans sa thèse [3] en 1989, ont recensé des articles sur la torsion. Cependant, aucune de ces deux revues n'explique la méthode d'obtention des équations : elles se limitent à leur énoncé. Or, on aimerait construire un modèle à partir des hypothèses propres à notre problème.

Dans un premier temps, nous présentons un état de l'art des différentes théories de la torsion, de la plus simple à celle qui considère le plus grand nombre de paramètres physiques. Dans un second temps, nous élaborons notre modèle : nous établissons les expressions des composantes du déplacement du guide sollicité en torsion, et les expressions de T_s et V_s qui en résultent. Cela nous permet également d'écrire l'équation de la torsion du guide d'ondes dans le vide.

Géométrie de la poutre : on sollicite en torsion un cylindre (Figure 3.1) :

- ♦ d'axe (Ox_3) ;
- ♦ de section transversale uniforme occupant le domaine \mathcal{E} ;
- ♦ de contour σ ;
- ♦ de dimension transversale d petite devant la dimension longitudinale L ;
- ♦ de matériau homogène et élastique.

Le cylindre occupe le domaine défini par : $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ et $\alpha \leq x_3 \leq \beta$. Aucune hypothèse n'est faite *a priori* sur la forme de \mathcal{E} . Cependant, pour les raisons évoquées au paragraphe 2.7.1, on présentera les résultats de calculs pour une section elliptique.

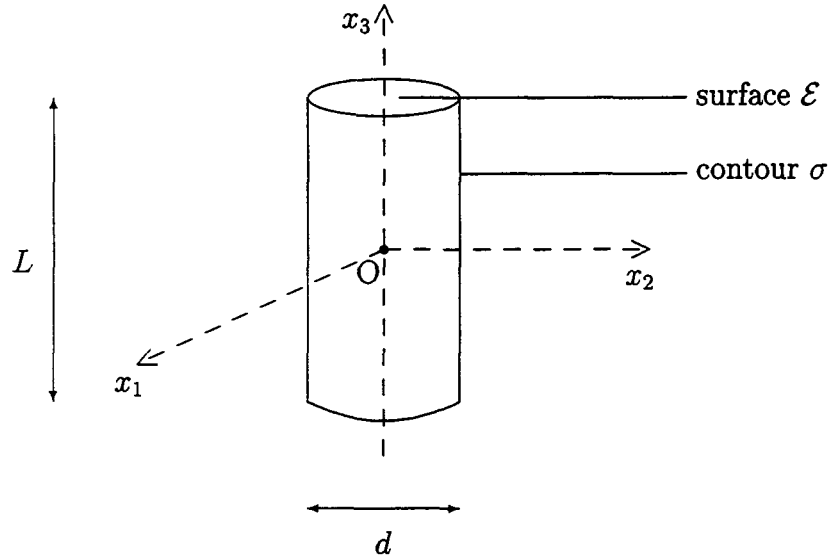


FIG. 3.1: Géométrie du guide d'ondes

On rappelle que l'angle de torsion est noté θ , ou $\tilde{\theta}$ lorsqu'on spécifie une dépendance temporelle harmonique. Dans ce dernier cas, on note $\tilde{\theta} = \Re(\theta e^{-i\omega t})$.

3.1 État de l'art

Nous présentons ici différents modèles utilisés pour décrire la torsion de poutres de section transversale quelconque, en insistant sur les hypothèses à la base de ces modèles. On donne, lorsque cela est possible, les équations de la torsion (équations différentielles vérifiées par l'angle de torsion θ) qu'elles permettent d'obtenir et les domaines de validité des résultats.

3.1.1 Modèle de B. de Saint-Venant

B. DE SAINT-VENANT [36], en 1849, ne prend en compte que les contraintes de cisaillement et les forces d'inertie *qui agissent dans le plan de la section transversale*. Il propose l'écriture suivante du déplacement $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ de la poutre :

$$\begin{cases} u_1 = -x_2 \theta(x_3, t) \\ u_2 = x_1 \theta(x_3, t) \\ u_3 = \phi(x_1, x_2) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_3, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\phi(x_1, x_2)$ est appelée *fonction de torsion*.

Ainsi, au cours de la déformation décrite par (3.1), chaque section droite de la poutre tourne autour de l'axe (Ox_3) et cesse en même temps d'être plane.

B. DE SAINT-VENANT écrit l'équation de la torsion de la façon suivante :

$$\mu J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \rho_s I_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

Le matériau a pour masse volumique ρ_s et pour second coefficient de Lamé μ . I_s est le moment d'inertie autour de l'axe (Ox_3) de la section transversale du cylindre, et J est une constante (appelée constante de torsion) qui dépend de la forme de la section.

Deux auteurs ont travaillé avec les mêmes hypothèses sur la forme du déplacement, tout en affinant la théorie pour introduire des effets de gauchissement :

- ♦ A.E.H. LOVE [33], en 1944, propose une correction pour ajouter à la théorie de SAINT-VENANT l'influence de *l'inertie longitudinale*. Il s'agit d'un effet de gauchissement qui apparaît dans les problèmes de vibrations de torsion de sections transversales non circulaires.

Il obtient l'équation de la torsion suivante :

$$\mu J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \rho_s I_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho_s P \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_3^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

où P , l'inertie de gauchissement, est une constante qui dépend de la forme de la section transversale.

- ♦ La *contrainte longitudinale* est un autre effet de gauchissement, que J.M. GERE [37] considère, en 1954, tout en négligeant l'inertie longitudinale.

Son équation de la torsion est alors :

$$\mu J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \rho_s I_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - E P \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_3^4} = 0 \quad (3.4)$$

E est le module d'Young du matériau.

Remarques :

- ♦ Les résultats prédits par la théorie de B. DE SAINT-VENANT sont :
 - ♦ exacts uniquement pour le mode fondamental de propagation d'ondes de torsion dans une tige circulaire uniforme;
 - ♦ une approximation raisonnable pour de grandes longueurs d'ondes (d'après les expériences de A.D.S. BARR [38] réalisées à l'aide de poutres de section rectangulaire de largeur $2b$, les résultats de B. DE SAINT-VENANT sont bons tant que $\frac{b}{\lambda} \ll 0,01$).
- ♦ Les résultats auxquels A.E.H. LOVE parvient sont bons pour les sections dont la forme n'est pas trop allongée (aucune dimension n'est très supérieure à l'autre), par exemple un carré, ou encore une ellipse de faible excentricité. Sinon, ils sont en désaccord avec l'expérience.

3.1.2 Modèle de A.D.S. Barr

A.D.S. BARR [38], en 1962, considère contraintes ET inertie longitudinales.

Il suppose que la section transversale de la poutre est telle que torsion et flexion ne sont pas couplées.

Selon lui, le comportement véritable de la poutre se situe quelque part entre les deux corrections proposées par A.E.H. LOVE et J.M. GERE. Pour obtenir une équation prenant en compte les deux effets du gauchissement, il s'appuie sur une autre hypothèse quant à la forme du déplacement de la poutre :

$$\begin{cases} u_1 = -x_2 \theta(x_3, t) \\ u_2 = x_1 \theta(x_3, t) \\ u_3 = \phi(x_1, x_2) \alpha(x_3, t) \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\alpha(z, t)$ est appelée fonction de déplacement longitudinal.

Il obtient une équation de la torsion de la forme :

$$\begin{aligned} \eta^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_3^4} - \left(\frac{\rho_s}{\mu} + \frac{\eta^2 \rho_s}{E} \right) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_3^2 \partial t^2} - \frac{\kappa (1 - \kappa) \mu}{\Upsilon^2 E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \\ + \frac{(1 - \kappa) \rho_s}{\Upsilon^2 E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\rho_s^2}{E \mu} \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

où η est un coefficient numérique déterminé expérimentalement, et κ et Υ sont des constantes qui dépendent de la forme de la section transversale.

Des expériences (voir [38]) ont été menées sur des poutres de section rectangulaire. Elles ont montré une bonne adéquation avec la théorie de A.D.S. BARR : en particulier, la nature dispersive des ondes de torsion est bien prise en compte.

3.1.3 Modèle de Gay et Boudet

D. GAY et R. BOUDET [39], en 1980, prennent en considération, en plus, le fait que la section peut se déformer dans son propre plan. Pour ce faire, ils introduisent $\vec{\eta}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, *gauchissement complémentaire*, et $\xi(x_3, t)$, *paramètre de gauchissement*, dans les équations de définition du déplacement, qui prennent alors la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1 = -x_2 \theta(x_3, t) + \eta_1 \\ u_2 = x_1 \theta(x_3, t) + \eta_2 \\ u_3 = \phi(x_1, x_2) \xi(x_3, t) + \eta_3 \end{cases} \quad (3.7)$$

L'équation de la torsion est de la forme :

$$\begin{aligned}
 & E P \left(1 + k_\phi \frac{J}{I_s - J} \right) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_3^4} - \rho_s P \left(1 + k_\phi \frac{J}{I_s - J} + k_\phi \frac{E I_s}{\mu (I_s - J)} \right) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x_3^2 \partial t^2} \\
 & + \rho_s^2 k_\phi \frac{I_s P}{\mu (I_s - J)} \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} - \mu J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + \rho_s I_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

où k_ϕ est un coefficient de cisaillement pour un gauchissement non uniforme, dont la détermination nécessite la résolution d'un problème aux limites.

3.1.4 Modèle de Muller

MULLER [40] ajoute une autre précision aux théories précédentes : le gauchissement n'est pas identique quelle que soit la section droite de la poutre. Il définit $d(x_3, t)$, *taux de glissement dans les directions x_1 et x_2* , et obtient la forme suivante du déplacement, qui autorise la distorsion de la section transversale dans son propre plan :

$$\begin{cases} u_1 = x_2 \left(d(x_3, t) - \theta(x_3, t) \right) \\ u_2 = x_1 \left(d(x_3, t) + \theta(x_3, t) \right) \\ u_3 = \phi(x_1, x_2) \alpha(x_3, t) \end{cases} \quad (3.9)$$

L'angle de torsion θ est alors solution du système suivant :

$$\begin{cases} \left[\frac{\mu}{\rho_s} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\theta + C_1 d) - \frac{\mu}{\rho_s} (1 - C_3) \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} = 0 \\ \left[\frac{\mu}{\rho_s} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4 \frac{\mu}{\rho_s} C_2^2 \right] d + C_1 \left[\frac{\mu}{\rho_s} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \theta - C_1 \frac{\mu}{\rho_s} \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{P}{I_s} \left[\frac{E}{\rho_s} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho_s} \frac{C_2^2 (1 - C_3)}{C_4} \right] \alpha + \frac{\mu}{\rho_s} (1 - C_3) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + C_1 \frac{\mu}{\rho_s} \frac{\partial d}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

où C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont des constantes qui dépendent de la forme géométrique de la section transversale.

3.1.5 Conclusion de l'état de l'art et méthode de travail

Nous venons de passer en revue différents modèles décrivant la torsion d'une poutre de section transversale quelconque. Nous avons commencé par le modèle de B. DE SAINT-VENANT, qui obtient l'équation de la torsion la plus simple, et avons poursuivi en présentant des modèles plus complexes, où des paramètres tels que la contrainte longitudinale, le gauchissement, ... sont pris en compte. Cependant, tous ces modèles sont fondés sur une écriture supposée du déplacement, dont la pertinence est vérifiée par l'expérience.

Dans le cadre de l'étude de la sonde à onde de torsion, nous procédons différemment : il s'agit d'établir l'écriture du déplacement à partir d'hypothèses adaptées au problème. Cela nous permet de calculer les énergies cinétique et de déformation du guide d'ondes. Nous recherchons ensuite l'équation de torsion dans le cas particulier de l'onde harmonique libre : en l'étudiant, nous simplifions l'écriture des énergies. Nous traitons finalement le cas du guide d'ondes sollicité en torsion : écriture des énergies (qu'on réutilisera au chapitre 5 lorsqu'on appliquera le principe de conservation de l'énergie au guide immergé), et de l'équation différentielle vérifiée par l'angle de torsion θ .

On suppose que :

- ♦ de *petites* déformations résultent de la torsion du guide d'ondes, de façon à considérer la torsion d'une section transversale comme une rotation ;
- ♦ les longueurs d'onde dans le guide sont bien plus grandes que les dimensions de la section transversale. Par conséquent, l'angle de torsion θ ne dépend que de x_3 ;
- ♦ la dimension transversale caractéristique du guide est petite devant sa longueur. Ainsi, en suivant l'argumentation proposée par LANDAU et LIFCHITZ [41] p. 93, les forces extérieures agissant sur la surface σ du guide sont petites devant les forces intérieures dues à la torsion : on peut écrire sur σ une condition de contrainte nulle.

3.2 Déplacement du guide sollicité en torsion

En nous inspirant des résultats justifiés par LANDAU et LIFCHITZ [41], nous allons d'abord établir l'expression des composantes du déplacement du guide.

3.2.1 Composantes transversales du déplacement

Plaçons-nous dans une section transversale, et cherchons à établir, dans un premier temps, les expressions de u_1 et u_2 , composantes selon x_1 et x_2 du déplacement, en fonction de l'angle de torsion θ .

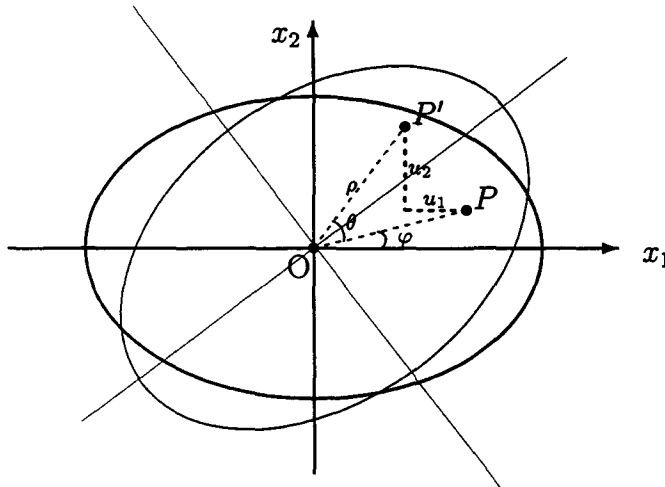


FIG. 3.2: Torsion d'une section transversale

D'après l'hypothèse de petites déformations, la torsion d'une section transversale est essentiellement une rotation, les autres composantes du déplacement étant du second

ordre. Soit $P(x_1, x_2)$ un point de la section avant déformation. Après déformation, la section a donc tourné (Figure 3.2), et ce point occupe une nouvelle position, $P'(x_1 + u_1, x_2 + u_2)$.

On utilise l'écriture en coordonnées polaires pour évaluer u_1 et u_2 .

$$P \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad P' \begin{cases} x_1 + u_1 = \rho \cos(\varphi + \theta) \\ x_2 + u_2 = \rho \sin(\varphi + \theta) \end{cases} \quad (3.11)$$

d'où :

$$\begin{cases} u_1 = \rho [\cos(\varphi + \theta) - \cos \varphi] \\ u_2 = \rho [\sin(\varphi + \theta) - \sin \varphi] \end{cases} \quad (3.12)$$

En développant les fonctions trigonométriques, on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = x_1(\cos \theta - 1) - x_2 \sin \theta \\ u_2 = x_2(\cos \theta - 1) + x_1 \sin \theta \end{cases} \quad (3.13)$$

θ étant petit, on écrit ensuite un développement limité de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ au premier ordre autour de $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \sin \theta &= \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalement :

$$\begin{cases} u_1 = -x_2 \theta + \mathcal{O}(\theta^2) \\ u_2 = x_1 \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \end{cases} \quad (3.15)$$

En appliquant la relation (B.12) entre les coordonnées cartésiennes et elliptiques d'un vecteur, on obtient l'approximation correspondante pour les composantes transversales du déplacement en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} u_\xi \simeq \frac{h \cos \eta \sin \eta}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \theta \\ u_\eta \simeq \frac{h \cosh \xi \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \theta \end{cases} \quad (3.16)$$

L'obtention de u_3 (ou u_z), qui nécessite plus de calculs, fait l'objet du paragraphe suivant. Elle résulte de l'écriture de la condition de contrainte nulle sur σ .

3.2.2 Composante longitudinale du déplacement

Calcul du tenseur des contraintes

On l'écrit en utilisant des résultats classiques de la mécanique des milieux continus, au sujet desquels on peut trouver davantage d'explications dans les cours de P. GERMAIN [42] par exemple.

En se plaçant dans le cadre de l'élasticité linéaire, un élément U_{ij} du tenseur des déformations $\bar{\bar{U}}$ s'écrit en fonction des composantes u_i du déplacement \vec{u} :

$$U_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.17)$$

où $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. En introduisant les composantes transversales du déplacement (3.15) dans (3.17), on obtient :

$$\bar{\bar{U}} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(-x_2 \theta_{,3} + u_{3,1}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_1 \theta_{,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(-x_2 \theta_{,3} + u_{3,1}) & \frac{1}{2}(x_1 \theta_{,3} + u_{3,2}) & u_{3,3} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Or, d'après la loi de comportement de Hooke d'un milieu homogène isotrope doué d'élasticité linéaire, les éléments σ_{ij} du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ s'écrivent en fonction de ceux du tenseur des déformations $\bar{\bar{U}}$:

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{Tr } \bar{\bar{U}} \delta_i^j + 2 \mu U_{ij} \quad (3.19)$$

où

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.20)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé, et $\text{Tr } \bar{\bar{U}}$ désigne la trace du tenseur $\bar{\bar{U}}$ d'ordre 2.

Finalement, en reportant (3.18) dans (3.19), il vient :

$$\bar{\bar{\sigma}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda u_{3,3} & 0 & \mu(-x_2 \theta_{,3} + u_{3,1}) \\ 0 & \lambda u_{3,3} & \mu(x_1 \theta_{,3} + u_{3,2}) \\ \mu(-x_2 \theta_{,3} + u_{3,1}) & \mu(x_1 \theta_{,3} + u_{3,2}) & (\lambda + 2\mu) u_{3,3} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Conséquence de la condition de contrainte nulle sur σ

La dimension transversale d étant très petite devant la longueur L , les forces extérieures agissant sur le contour de la poutre sont faibles devant les forces internes qui apparaissent lors de la déformation de torsion. Elles peuvent donc être considérées comme nulles pour la détermination des conditions aux limites ([41] p. 93). Ainsi, *sur le contour de la poutre* :

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad (3.22)$$

où $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ est une normale au contour, dirigée vers l'extérieur. Dans notre cas, l'axe (Ox_3) étant l'axe du cylindre, $n_3 = 0$. D'où :

$$\begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = 0 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

En remplaçant les termes σ_{ij} par leurs valeurs calculées en (3.21), on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda u_{3,3} n_1 = 0 \\ \lambda u_{3,3} n_2 = 0 \\ \mu (-x_2 \theta_{,3} + u_{3,1}) n_1 + \mu (x_1 \theta_{,3} + u_{3,2}) n_2 = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Les deux premières équations donnent la même condition $u_{3,3} = 0$. Finalement, en première approximation, on a sur le contour :

$$\begin{cases} u_{3,3} = 0 \\ (-x_2 \theta_{,3} + u_{3,1}) n_1 + (x_1 \theta_{,3} + u_{3,2}) n_2 = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

La première égalité de (3.25) permet d'écrire :

$$u_3 = C \phi(x_1, x_2) \quad (3.26)$$

où C ne dépend pas de x_3 . En introduisant ce résultat dans la seconde équation de (3.25), on obtient que, sur σ :

$$(x_2 n_1 - x_1 n_2) \theta_{,3} = C (\phi_{,1} n_1 + \phi_{,2} n_2) \quad (3.27)$$

On en déduit que $\theta_{,3}$ ne dépend pas de x_3 . Sans perte de généralité, on peut choisir :

$$\theta_{,3} = C \quad (3.28)$$

Finalement, sur σ :

$$u_3 = \phi(x_1, x_2) \theta_{,3} \quad (3.29)$$

et ϕ , appelée *fonction de torsion*, vérifie, sur σ :

$$\phi_{,1} n_1 + \phi_{,2} n_2 = x_2 n_1 - x_1 n_2 \quad (3.30)$$

De (3.29), il résulte que, à l'intérieur du guide, u_3 est de la forme :

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1, x_2) \theta_{,3} + v_3(x_1, x_2, x_3) \quad (3.31)$$

où :

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{sur } \sigma \quad (3.32)$$

On utilise ensuite l'hypothèse que les dimensions transversales du guide sont petites devant sa longueur L pour développer v_3 en série de Taylor :

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = v_3(0, 0, x_3) + x_1 v_{3,1}(0, 0, x_3) + x_2 v_{3,2}(0, 0, x_3) + \dots \quad (3.33)$$

La condition (3.32) donne alors :

$$v_3(0, 0, x_3) = 0 \quad (3.34)$$

et, en première approximation :

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (3.35)$$

Finalement, l'expression (3.29) de u_3 est donc valable partout dans le guide d'ondes.

La fonction de torsion ϕ

♦ D'après (3.30), on a, sur le contour σ :

$$(-x_2 + \phi_{,1}) n_1 + (x_1 + \phi_{,2}) n_2 = 0 \quad (3.36)$$

ce qui nous donne une première condition sur ϕ .

Remarque : cette condition s'écrit également :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{n} = x_2 n_1 - x_1 n_2 \quad (3.37)$$

Il s'agit d'une condition de Neumann.

♦ Par ailleurs, on écrit l'équation d'équilibre de la poutre (voir [41]). Nous choisissons d'écrire une condition d'équilibre *statique* car on va considérer des variations temporelles lentes :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.38)$$

d'où :

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (3.39)$$

En reportant (3.28) et (3.29) dans l'expression (3.21) de la matrice des contraintes, l'égalité précédente s'écrit :

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.40)$$

➡ En résumé, ϕ est solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ (-x_2 + \phi_{,1}) n_1 + (x_1 + \phi_{,2}) n_2 = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \sigma \quad (3.41)$$

Pour une section elliptique de demi grand axe a et demi petit axe b , on a (SOKOLNIKOFF [32] §36) :

$$\phi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 \quad (3.42)$$

Remarque : on montre facilement que la fonction de torsion (3.42) vérifie le système (3.41). Pour la condition aux limites de (3.41), on prend $\vec{n} = \vec{a}_\xi$, dont les composantes sont calculées en annexe B (équation (B.7)).

3.2.3 Conclusion sur le déplacement

D'après tout ce qui précède, les composantes u_i du déplacement de la poutre soumise à une déformation de torsion s'écrivent, en première approximation :

$$\begin{cases} u_1 \simeq -x_2 \theta \\ u_2 \simeq x_1 \theta \\ u_3 \simeq \phi(x_1, x_2) \theta_{,3} \end{cases} \quad (3.43)$$

où $\phi(x_1, x_2)$ est la fonction de torsion définie par (3.41), qui ne dépend que de la géométrie de la section transversale de la poutre.

Finalement, les composantes obtenues pour le déplacement sont les mêmes que celles de la théorie de SAINT-VENANT (équation (3.1)). On a donc montré que les hypothèses propres à notre problème nous permettent d'utiliser la mise en équations la plus simple de la torsion.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'équation de la torsion qu'elles permettent d'obtenir. Pour ce faire, nous appliquons le principe de Hamilton énoncé en 2.8.1. Il nous faut donc d'abord calculer les énergies cinétique et de déformation du guide.

3.3 Énergies cinétique et de déformation du guide sollicité en torsion

On rappelle que le guide occupe le domaine défini par : $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ et $\alpha \leq x_3 \leq \beta$.

3.3.1 Calcul de l'énergie cinétique

Calcul de \tilde{T}_s

On suppose ici une dépendance temporelle harmonique. La quantité physique correspondant à l'angle de torsion s'écrit alors $\tilde{\theta}$ où $\tilde{\theta} = \Re(\theta e^{-i\omega t})$.

Connaissant le déplacement du guide en torsion, on calcule la vitesse correspondante. On dérive (3.43) par rapport au temps :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1,t} \simeq -x_2 \tilde{\theta}_{,t} \\ \tilde{u}_{2,t} \simeq x_1 \tilde{\theta}_{,t} \\ \tilde{u}_{3,t} \simeq \phi(x_1, x_2) \tilde{\theta}_{,3t} \end{cases} \quad (3.44)$$

Or par définition :

$$\tilde{T}_s = \iiint_{x_3 \mathcal{E}} \left[\frac{1}{2} \rho_s (\tilde{u}_{1,t}^2 + \tilde{u}_{2,t}^2 + \tilde{u}_{3,t}^2) \right] d\mathcal{E} dx_3 \quad (3.45)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s &\simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s \left[\iint_{\mathcal{E}} (x_1^2 + x_2^2) d\mathcal{E} \right] \tilde{\theta}_{,t}^2 dx_3 \\ &\quad + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s \left[\iint_{\mathcal{E}} \phi^2(x_1, x_2) d\mathcal{E} \right] \tilde{\theta}_{,3t}^2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.46)$$

On pose alors

$$I_s = \iint_{\mathcal{E}} (x_1^2 + x_2^2) d\mathcal{E} \quad (3.47)$$

et

$$P = \iint_{\mathcal{E}} \phi^2(x_1, x_2) d\mathcal{E} \quad (3.48)$$

I_s est le *moment d'inertie* de la section transversale de la poutre autour de l'axe (Ox_3) ;
 P est appelée *inertie de gauchissement*.

On obtient finalement :

$$\tilde{T}_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \tilde{\theta}_{,t}^2 dx_3 + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \tilde{\theta}_{,3t}^2 dx_3 \quad (3.49)$$

On peut calculer I_s et P pour une section elliptique. On obtient I_s par un simple changement de variables, et P en utilisant l'expression (3.42) de la fonction de torsion ϕ :

$$\begin{aligned} I_s &= \iint_{\mathcal{E}} (x_1^2 + x_2^2) d\mathcal{E} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (a^2 r^2 \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \varphi) a b r dr d\varphi \\ &= \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$P = \frac{\pi a^3 b^3 (a^2 - b^2)^2}{24 (a^2 + b^2)^2} \quad (3.51)$$

Calcul de T_s

Pour appliquer le principe de Hamilton tel qu'il est écrit en (2.51), on a besoin de connaître T_s , énergie cinétique exprimée en fonction de θ , où $\tilde{\theta} = \Re(\theta e^{-i\omega t})$.

Pour ce faire, d'après (3.49), il nous faut écrire $(\Re(-i\omega\theta e^{-i\omega t}))^2$ et $(\Re(-i\omega\theta_{,3} e^{-i\omega t}))^2$.

On décompose θ en :

$$\theta = \Re(\theta) + i \Im(\theta) \quad (3.52)$$

Alors :

$$\theta e^{-i\omega t} = (\Re(\theta) + i \Im(\theta))(\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (3.53)$$

et :

$$\begin{aligned} -i\omega\theta e^{-i\omega t} &= (\Im(\theta)\omega \cos \omega t - \Re(\theta)\omega \sin \omega t) \\ &\quad - i(\Re(\theta)\omega \cos \omega t + \Im(\theta)\omega \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s &\simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \left((\Im(\theta))^2 \cos^2 \omega t + (\Re(\theta))^2 \sin^2 \omega t \right. \\ &\quad \left. - 2 \Re(\theta) \Im(\theta) \cos \omega t \sin \omega t \right) dx_3 \\ &\quad + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \omega^2 \left((\Im(\theta_{,3}))^2 \cos^2 \omega t + (\Re(\theta_{,3}))^2 \sin^2 \omega t \right. \\ &\quad \left. - 2 \Re(\theta_{,3}) \Im(\theta_{,3}) \cos \omega t \sin \omega t \right) dx_3 \end{aligned} \quad (3.55)$$

En intégrant sur une période (ce qui est équivalent à prendre la moyenne sur un nombre entier de périodes), il vient :

$$\begin{aligned} T_s &\simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \left((\Im(\theta))^2 + (\Re(\theta))^2 \right) dx_3 \\ &\quad + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \omega^2 \left((\Im(\theta_{,3}))^2 + (\Re(\theta_{,3}))^2 \right) dx_3 \end{aligned} \quad (3.56)$$

c'est-à-dire :

$$T_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \theta \bar{\theta} dx_3 + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \omega^2 \theta_{,3} \bar{\theta}_{,3} dx_3 \quad (3.57)$$

où $\bar{\theta}$ est le complexe conjugué de θ .

Dans notre cas, θ est une fonction réelle, donc :

$$T_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \theta^2 dx_3 + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \omega^2 \theta_{,3}^2 dx_3 \quad (3.58)$$

3.3.2 Calcul de l'énergie de déformation

En mécanique des milieux continus, l'énergie de déformation (sur une période) V_s s'écrit classiquement, en fonction des tenseurs des déformations $\bar{\bar{U}}$ et des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$:

$$V_s = \int_{x_3} \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{2} \sigma_{ij} U_{ij} d\mathcal{E} dx_3 \quad (3.59)$$

Or, en utilisant (3.18) et (3.43), on obtient :

$$\bar{\bar{U}} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} (-x_2 \theta_{,3} + \phi_{,1} \theta_{,3}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (x_1 \theta_{,3} + \phi_{,2} \theta_{,3}) \\ \frac{1}{2} (-x_2 \theta_{,3} + \phi_{,1} \theta_{,3}) & \frac{1}{2} (x_1 \theta_{,3} + \phi_{,2} \theta_{,3}) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

et en reportant (3.43) dans (3.21), il vient :

$$\bar{\bar{\sigma}} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu (-x_2 \theta_{,3} + \phi_{,1} \theta_{,3}) \\ 0 & 0 & \mu (x_1 \theta_{,3} + \phi_{,2} \theta_{,3}) \\ \mu (-x_2 \theta_{,3} + \phi_{,1} \theta_{,3}) & \mu (x_1 \theta_{,3} + \phi_{,2} \theta_{,3}) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

D'où :

$$V_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \mu \theta_{,3}^2 \left[\int_{\mathcal{E}} (x_1^2 + x_2^2 + \phi_{,1}^2 + \phi_{,2}^2 + 2 x_1 \phi_{,2} - 2 x_2 \phi_{,1}) d\mathcal{E} \right] dx_3 \quad (3.62)$$

Pour simplifier cette expression, démontrons la relation utilisée par A.E.H. LOVE ([33] p. 313) :

$$\iint_{\mathcal{E}} (\phi_{,1}^2 + \phi_{,2}^2) d\mathcal{E} = \iint_{\mathcal{E}} (x_2 \phi_{,1} - x_1 \phi_{,2}) d\mathcal{E} \quad (3.63)$$

En effet, appliquons la formule (voir par exemple [43] p. 112) :

$$\text{div}(\phi \vec{a}) = \phi \text{div} \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{a} \quad (3.64)$$

au vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$.

Comme $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \Delta \phi$, il vient :

$$\text{div}(\phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \phi \Delta \phi + (\overrightarrow{\text{grad}} \phi)^2 \quad (3.65)$$

Or, d'après (3.41), $\Delta\phi = 0$. D'où :

$$\iint_{\mathcal{E}} (\overrightarrow{\text{grad}} \phi)^2 d\mathcal{E} = \iint_{\mathcal{E}} \text{div}(\phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi) d\mathcal{E} \quad (3.66)$$

On applique ensuite le théorème de Green-Ostrogradski (voir par exemple [43] p. 121) :

$$\iint_{\mathcal{E}} \text{div}(\phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi) d\mathcal{E} = \int_s \phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{n} ds \quad (3.67)$$

où s est le contour de \mathcal{E} . D'où :

$$\iint_{\mathcal{E}} (\overrightarrow{\text{grad}} \phi)^2 d\mathcal{E} = \int_s \phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{n} ds \quad (3.68)$$

Or, d'après (3.37), $\overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{n} = x_2 n_1 - x_1 n_2$. Donc :

$$\iint_{\mathcal{E}} (\overrightarrow{\text{grad}} \phi)^2 d\mathcal{E} = \int_s \phi (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \quad (3.69)$$

On reconnaît au second membre de (3.69) une écriture du type $\int_s \vec{A} \cdot \vec{n} ds$, où :

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} \phi x_2 \\ -\phi x_1 \end{vmatrix} \quad (3.70)$$

Or, toujours d'après le théorème de Green-Ostrogradski,

$$\int_s \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\mathcal{E}} \text{div} \vec{A} d\mathcal{E} \quad (3.71)$$

Calculons alors $\text{div} \vec{A}$:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial(\phi x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(-\phi x_1)}{\partial x_2} = \phi_{,1} x_2 - \phi_{,2} x_1 \quad (3.72)$$

D'où :

$$\iint_{\mathcal{E}} (\overrightarrow{\text{grad}} \phi)^2 d\mathcal{E} = \iint_{\mathcal{E}} (\phi_{,1} x_2 - \phi_{,2} x_1) d\mathcal{E} \quad (3.73)$$

qui est une autre façon d'écrire (3.63).

En introduisant (3.63) dans (3.62), il vient :

$$V_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \mu \theta_{,3}^2 \left[\iint_{\mathcal{E}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \phi_{,2} - x_2 \phi_{,1}) d\mathcal{E} \right] dx_3 \quad (3.74)$$

On met ainsi en valeur la constante de torsion définie classiquement par :

$$J = \iint_{\mathcal{E}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \phi_{,2} - x_2 \phi_{,1}) d\mathcal{E} \quad (3.75)$$

Finalement :

$$V_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \mu J \theta_{,3}^2 dx_3 \quad (3.76)$$

En utilisant l'expression (3.42) de la fonction de torsion ainsi qu'un changement de variables, on calcule facilement la constante J d'une section elliptique :

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (3.77)$$

3.4 Cas particulier de l'onde harmonique libre

Disposant des expressions des énergies cinétique et de déformation du guide, nous sommes maintenant en mesure d'obtenir l'équation différentielle en θ régissant le mouvement du système, en utilisant le principe de conservation de l'énergie de Hamilton.

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas de l'onde harmonique libre, qui présente l'avantage d'être simple à traiter : en effet, les frontières du guide ne reçoivent ni ne perdent aucune énergie.

3.4.1 Variation des énergies

Énergie de déformation

D'après (3.76),

$$V_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \mu J \theta_{,3}^2 dx_3 \quad (3.78)$$

donc :

$$\delta V_s \simeq \int_{x_3} \mu J \theta_{,3} \delta \theta_{,3} dx_3 \quad (3.79)$$

On procède ensuite à une intégration par parties :

$$\int_{x_3} \mu J \theta_{,3} \delta \theta_{,3} dx_3 = \left[\mu J \theta_{,3} \delta \theta \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{x_3} \mu J \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \quad (3.80)$$

Le terme $\mu J \theta_{,3}$ représente un moment : aucune énergie n'étant reçue ou perdue aux extrémités, ce terme est donc nul en $x_3 = \alpha$ et $x_3 = \beta$. D'où :

$$\delta V_s \simeq - \int_{x_3} \mu J \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \quad (3.81)$$

Énergie cinétique

D'après (3.58) :

$$T_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \theta^2 dx_3 + \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \omega^2 \theta_{,3}^2 dx_3 \quad (3.82)$$

On va calculer la variation de chacun des termes du membre de droite :

♦ Premier terme :

$$\delta \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \theta^2 dx_3 = \int_{x_3} \rho_s I_s \omega^2 \theta \delta \theta dx_3 \quad (3.83)$$

♦ Deuxième terme :

Une intégration par parties est nécessaire. Comme il n'y a pas de transfert d'énergie aux extrémités, le terme tout intégré s'annule.

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s P \omega^2 \theta_{,3}^2 dx_3 &= \int_{x_3} \rho_s P \omega^2 \theta_{,3} \delta \theta_{,3} dx_3 \\ &= \left[\rho_s P \omega^2 \theta_{,3} \delta \theta \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{x_3} \rho_s P \omega^2 \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \\ &= - \int_{x_3} \rho_s P \omega^2 \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \end{aligned} \quad (3.84)$$

➡ Finalement la variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\delta T_s \simeq \int_{x_3} \rho_s I_s \omega^2 \theta \delta \theta dx_3 - \int_{x_3} \rho_s P \omega^2 \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \quad (3.85)$$

3.4.2 Application du principe de Hamilton

On va appliquer ici le principe de Hamilton au guide, de la façon annoncée en 2.8.2. Celui-ci étant pour le moment dans le vide, $W_2 = 0$, $T = T_s$ et $V = V_s$. L'onde étant libre, on a aussi $W_1 = 0$. Par conséquent, on va écrire :

$$\delta (T_s - V_s) = 0 \quad (3.86)$$

En utilisant (3.81) et (3.85), il vient :

$$\int_{x_3} (\rho_s I_s \omega^2 \theta - \rho_s P \omega^2 \theta_{,33} + \mu J \theta_{,33}) \delta \theta dx_3 = 0 \quad (3.87)$$

Ceci doit être vrai quel que soit $\delta \theta$, donc :

$$\mu J \theta_{,33} + \rho_s I_s \omega^2 \theta - \rho_s P \omega^2 \theta_{,33} = 0 \quad (3.88)$$

Remarque : nous obtenons ici l'équation de la torsion (3.3) de LOVE.

3.4.3 Remarque sur les ordres de grandeur

Cherchons θ sous la forme : $A e^{i k_p x_3}$. Cela nous donne pour (3.88) :

$$-\mu J k_p^2 + \rho_s P k_p^2 \omega^2 + \rho_s I_s \omega^2 = 0 \quad (3.89)$$

d'où :

$$k_p^2 = \frac{\rho_s I_s \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} \quad (3.90)$$

Dans le cas où l'inertie de gauchissement P est négligée, θ est de la forme $A e^{i k x_3}$ avec :

$$k^2 = \frac{\rho_s I_s \omega^2}{\mu J} \quad (3.91)$$

Donc :

$$\left(\frac{k_p}{k}\right)^2 = \frac{\mu J}{\mu J - \rho_s P \omega^2} = 1 + \frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} \quad (3.92)$$

En vue de simplifications éventuelles des équations, on cherche à savoir pour quelles fréquences $\frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2}$ est négligeable.

En utilisant un guide en acier inoxydable (données numériques page 6), on obtient les résultats suivants :

$$\frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} < 0,01 \quad \Rightarrow \quad f < 85 \text{ kHz}$$

$$\frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} < 0,02 \quad \Rightarrow \quad f < 120 \text{ kHz}$$

$$\frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} < 0,03 \Rightarrow f < 146 \text{ kHz}$$

$$\frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} < 0,04 \Rightarrow f < 167 \text{ kHz}$$

$$\frac{\rho_s P \omega^2}{\mu J - \rho_s P \omega^2} < 0,05 \Rightarrow f < 186 \text{ kHz}$$

Par la suite, dans la mesure où on va travailler à des fréquences proches de 100 kHz, il semble donc tout à fait justifié de négliger le terme d'énergie cinétique de gauchissement dans (3.49). Dans ce cas, l'équation de la torsion (3.88) devient :

$$\mu J \theta_{,33} + \rho_s I_s \omega^2 \theta = 0 \quad (3.93)$$

On retrouve logiquement l'équation de la torsion de B. DE SAINT-VENANT, qui, on l'a vu au paragraphe 3.1.1, est une approximation de l'équation de la torsion de LOVE lorsque l'inertie de gauchissement est négligée.

Notre étude nous a donc finalement conduit vers une modélisation simple de la torsion : la géométrie du guide et la fréquence de l'onde de torsion nous ont permis de négliger les effets de gauchissement ou de distorsion des modèles les plus complexes (GAY et BOUDET, MULLER, ...).

3.5 Cas du guide d'ondes sollicité en torsion

Cette fois, on génère une onde en $x_3 = \beta$ en appliquant un moment de torsion.

Afin d'obtenir l'équation de la torsion du guide d'ondes dans le vide, nous adoptons la même démarche qu'au paragraphe 3.4 pour l'onde harmonique libre : calcul des variations d'énergie, puis application du principe de Hamilton.

3.5.1 Variation des énergies

Énergie cinétique

On est dans le cas où on peut négliger le second terme de (3.58), ce qui nous permet d'écrire :

$$T_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \rho_s I_s \omega^2 \theta^2 dx_3 \quad (3.94)$$

Donc :

$$\delta T_s \simeq \int_{x_3} \rho_s I_s \omega^2 \theta \delta \theta dx_3 \quad (3.95)$$

Énergie de déformation

D'après (3.76),

$$V_s \simeq \int_{x_3} \frac{1}{2} \mu J \theta_{,3}^2 dx_3 \quad (3.96)$$

En procédant de même qu'en 3.4.1, on obtient :

$$\delta V_s \simeq \left[\mu J \theta_{,3} \delta \theta \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{x_3} \mu J \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \quad (3.97)$$

On écrit ensuite des conditions aux limites. On considère que le guide a :

- ♦ une extrémité libre en $x_3 = \alpha$, donc $\mu J \theta_{,3} = 0$ en $x_3 = \alpha$;
- ♦ une extrémité, en $x_3 = \beta$, où on impose un moment, donc $\mu J \theta_{,3} \neq 0$ en $x_3 = \beta$.

On obtient finalement :

$$\delta V_s \simeq \mu J \theta_{,3}(\beta) \delta \theta(\beta) - \int_{x_3} \mu J \theta_{,33} \delta \theta dx_3 \quad (3.98)$$

3.5.2 Équation de la torsion du guide d'ondes dans le vide

Nous avons maintenant tous les éléments pour appliquer le principe de Hamilton de la façon annoncée en 2.8.2. Contrairement au cas de l'onde libre où on avait $\delta W_1 = 0$, il nous faut ici prendre en compte le moment de torsion appliqué en $x_3 = \beta$. Soit \mathcal{M} ce moment, qui dépend de la fréquence (sa transformée de Fourier est notée $m(t)$). Alors :

$$\delta W_1 = \mathcal{M}(\beta) \delta \theta(\beta) \quad (3.99)$$

En appliquant (2.51) avec les expressions (3.95) de δT_s , (3.98) de δV_s et (3.99) de δW_1 , il vient :

$$\int_{x_3} (\mu J \theta_{,33} + \rho_s I_s \omega^2 \theta) \delta \theta dx_3 + \left(\mathcal{M}(\beta) - \mu J \theta_{,3}(\beta) \right) \delta \theta(\beta) = 0 \quad (3.100)$$

donc :

$$\begin{cases} \mu J \theta_{,33} + \rho_s I_s \omega^2 \theta = 0 & \text{pour } \alpha \leq x_3 \leq \beta \\ \mu J \theta_{,3}(\beta) = \mathcal{M}(\beta) \end{cases} \quad (3.101)$$

La première équation de (3.101) est l'équation de la torsion du guide d'ondes dans le vide.

3.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons établi des résultats sur la torsion du guide d'ondes dans le vide : dans les conditions de notre étude (élasticité linéaire, dimension transversale du guide petite devant sa dimension longitudinale, ...), nous connaissons maintenant l'expression du déplacement, et des énergies cinétique et de déformation du guide. Cela nous a permis d'obtenir l'équation de la torsion du guide dans le vide.

Or, dans le contexte d'une utilisation pour la mesure de niveau, la sonde sera immergée dans un fluide compressible : la torsion du guide induit alors des mouvements dans le fluide. Il en est question au chapitre suivant.

Chapitre 4

Résolution du problème de Neumann extérieur dans le fluide

Nous nous intéressons maintenant au fluide dans lequel la sonde est immergée. L'objectif est d'exprimer la pression qu'il exerce sur la surface du guide d'ondes, et d'en déduire le travail élémentaire δW_2 des forces extérieures au système mécanique que constitue le guide d'ondes. Le fluide étant compressible, nous devons prendre en compte le rayonnement acoustique. Par conséquent, nous cherchons à résoudre le problème de Neumann extérieur lié à l'équation de Helmholtz dans le fluide, et écrivons la pression grâce à sa représentation de Green. La transformée de Fourier spatiale est utilisée, et, pour obtenir une expression analytique de la pression, une approximation "grandes longueurs d'ondes" est réalisée. Le calcul de δW_2 est alors possible.

Comme annoncé au paragraphe 2.7.1, nous considérons un guide de section elliptique, et utilisons le système de coordonnées approprié : les coordonnées elliptiques.

Pour des commodités d'écriture, nous faisons appel à la théorie des distributions de L. Schwartz : nous rappelons en annexe E les définitions et propriétés dont il est question dans ce mémoire.

4.1 Démarche suivie

Nous allons d'abord nous intéresser au problème pour un fluide occupant l'espace indéfini. Ensuite, puisque le but final est la mesure de niveau, il nous faudra considérer qu'un guide d'ondes peut n'être que partiellement immergé : dans ce cas, le fluide n'occupe plus qu'un demi-espace, avec une surface libre sur laquelle la pression acoustique est nulle.

4.1.1 Cas du fluide occupant l'espace indéfini

Pour faciliter la résolution du problème, le guide d'ondes est supposé bafflé (Figure 4.1).

Énoncé du problème de Neumann extérieur

σ ($\xi = \xi_0$, $\alpha \leq z \leq \beta$) est la frontière du cylindre elliptique, ($\xi = \xi_0$, $(z < \alpha) \cup (z > \beta)$) la frontière de son baffle, et Ω est le milieu extérieur, occupé par le fluide. En un point P

à la frontière du guide (ou de son baffle), soit \vec{n} le vecteur unitaire normal à σ et dirigé vers l'intérieur du guide (ou de son baffle).

Les mouvements dépendent harmoniquement du temps ($e^{-i\omega t}$).

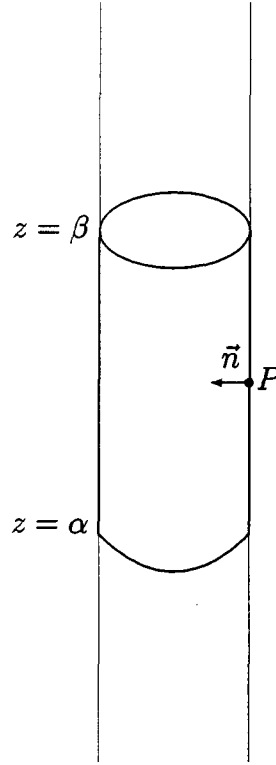


FIG. 4.1: Guide d'ondes bafflé

Soit $p(M)$ la pression acoustique en un point $M(\xi, \eta, z)$ du fluide. Elle doit vérifier :

$$\begin{aligned} (\Delta + k_f^2) p(M) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \partial_n p(M) &= \rho_f \omega^2 u_n && \text{pour } \xi = \xi_0, \alpha \leq z \leq \beta \\ &= 0 && \text{pour } \xi = \xi_0, (z < \alpha) \cup (z > \beta) \end{aligned} \tag{4.1}$$

et le principe d'absorption limite.

La première équation de (4.1) est l'équation de propagation dans le fluide (on fait l'hypothèse de petites perturbations). k_f est le nombre d'ondes dans le fluide.

La seconde exprime la condition aux limites qui résulte de la conservation de la quantité de mouvement à la surface du guide et de son baffle. u_n est le déplacement normal du guide en torsion.

Le principe d'absorption limite est une façon de satisfaire le principe de conservation de l'énergie. Soit ϵ un paramètre positif et p_ϵ l'unique solution bornée correspondant au nombre d'ondes $k_\epsilon = k_f(1 + i\epsilon)$. Alors pour un nombre d'ondes réel k_f , la solution qui satisfait le principe de conservation de l'énergie est la limite, pour $\epsilon \rightarrow 0$, de p_ϵ (voir par exemple [44] §3.2.1).

La fonction de Green

On détermine p à l'aide de sa représentation de Green. Ceci nécessite la connaissance de la fonction de Green du problème de Neumann extérieur pour l'équation de Helmholtz, que l'on définit ici. Soit $\delta_{M'}(M)$ la mesure de Dirac au point $M'(\xi', \eta', z')$. On cherche la fonction de Green \mathcal{G} vérifiant le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} (\Delta_{(\xi, \eta, z)} + k_f^2) \mathcal{G}(M, M') &= \delta_{M'}(M) & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \mathcal{G} &= 0 & \text{pour } \xi = \xi_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ainsi que le principe d'absorption limite.

$\Delta_{(\xi, \eta, z)}$ est le Laplacien calculé en dérivant par rapport aux trois coordonnées ξ , η et z du point M .

La seconde équation de (4.2) traduit le fait que la paroi du guide (et de son baffle) est rigide.

La transformée de Fourier spatiale du problème

Prenons la transformée de Fourier spatiale par rapport à la variable z de (4.2), définie, en utilisant la notation de L. Schwartz (voir annexe F) :

$$\widehat{f}(Z) = \langle f(z), e^{-2i\pi z Z} \rangle \quad (4.3)$$

La première équation de (4.2) s'écrit :

$$\Delta_{(\xi, \eta, z)} \mathcal{G}(\xi, \xi', \eta, \eta', z, z') + k_f^2 \mathcal{G}(\xi, \xi', \eta, \eta', z, z') = \delta_{\xi'}(\xi) \otimes \delta_{\eta'}(\eta) \otimes \delta_{z'}(z) \quad (4.4)$$

D'où sa transformée de Fourier (on trouvera en annexe E les résultats sur la transformée de Fourier utilisés dans ce mémoire) :

$$\Delta_{(\xi, \eta)} \widehat{\mathcal{G}}(\xi, \xi', \eta, \eta', Z, z') + K_f^2 \widehat{\mathcal{G}}(\xi, \xi', \eta, \eta', Z, z') = e^{-2i\pi Z z'} \delta_{\xi'}(\xi) \otimes \delta_{\eta'}(\eta) \quad (4.5)$$

où on a posé :

$$K_f^2 = k_f^2 - 4\pi^2 Z^2 \quad (4.6)$$

On choisit $K_f > 0$ si $K_f^2 > 0$ et $\Im(K_f) > 0$ sinon.

Alors on peut écrire :

$$\widehat{\mathcal{G}}(\xi, \xi', \eta, \eta', Z, z') = e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') \quad (4.7)$$

ou encore :

$$\langle \mathcal{G}(\xi, \xi', \eta, \eta', z, z'), e^{-2i\pi z Z} \rangle = e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') \quad (4.8)$$

où $G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta')$ est défini comme la solution bornée à l'infini de :

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi, \eta)} G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') + K_f^2 G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') = \delta_{\xi'}(\xi) \otimes \delta_{\eta'}(\eta) & \text{dans } \Omega \\ \partial_n G_{K_f} = 0 & \text{pour } \xi = \xi_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

On ramène ainsi le problème initial (4.2) en trois dimensions à un problème, (4.9), en deux dimensions.

Écrivons maintenant :

$$G_{K_f} = G_{K_f}^I + G_{K_f}^D \quad (4.10)$$

où :

- ♦ $G_{K_f}^I$ est la fonction de Green en champ libre, qui vérifie :

$$(\Delta_{(\xi, \eta)} + K_f^2) G_{K_f}^I(\xi, \xi', \eta, \eta') = \delta_{\xi'}(\xi) \otimes \delta_{\eta'}(\eta) \quad (4.11)$$

- ♦ $G_{K_f}^D$ est le champ diffracté. Il est solution de l'équation de Helmholtz homogène, que l'on détermine, sachant qu'il faut de plus répondre aux exigences suivantes :
 - ♦ Pour que G_{K_f} soit bornée à l'infini, $G_{K_f}^D$ doit être borné à l'infini.
 - ♦ $G_{K_f} = G_{K_f}^I + G_{K_f}^D$ doit vérifier la condition aux limites de (4.9) : $\partial_n G_{K_f} = 0$ pour $\xi = \xi_0$.

La représentation de Green de la pression

La représentation de Green de la pression $p(M)$ en un point M du fluide s'écrit classiquement (voir [44] p. 81-84) :

$$p(M) = \iint_{\sigma} \left[p(P) \partial_n \mathcal{G}(M, P) - \mathcal{G}(M, P) \partial_n p(P) \right] d\sigma(P) \quad (4.12)$$

Or, d'après (4.2), \mathcal{G} vérifie $\partial_n \mathcal{G} = 0$ sur σ , d'où :

$$p(M) = - \iint_{\sigma} \mathcal{G}(M, P) \partial_n p(P) d\sigma(P) \quad (4.13)$$

Par la suite, nous l'écrirons en utilisant la notation des distributions de L. Schwartz :

$$p(M) = - \langle \mathcal{G}(M, P), \partial_n p(P) \delta_{\sigma}(P) \rangle \quad (4.14)$$

où :

$$\forall \phi \in \mathcal{D} \quad \langle \phi, \partial_n p(P) \delta_{\sigma}(P) \rangle = \iint_{\sigma} \phi \partial_n p(P) d\sigma \quad (4.15)$$

En coordonnées elliptiques, (4.14) s'écrit :

$$p(\xi, \eta, z) = - \int_{\eta', z'} \mathcal{G}(\xi, \xi_0, \eta, \eta', z, z') \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_\sigma(\xi_0, \eta', z') > \quad (4.16)$$

où $\int_{\eta', z'} >$ indique que les variables d'intégration du produit de dualité sont η' et z' .

Or, d'après ce qui précède, on s'intéresse à la transformée de Fourier spatiale de cette expression. En utilisant successivement (4.3), (4.16) et (4.7), il vient :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\xi, \eta, Z) &= \int_z p(\xi, \eta, z) e^{-2i\pi z Z} > \\ &= - \int_{\eta', z', z} \mathcal{G}(\xi, \xi_0, \eta, \eta', z, z') \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_\sigma(\xi_0, \eta', z') e^{-2i\pi z Z} > \\ &= - \int_{\eta', z'} \hat{\mathcal{G}}(\xi, \xi_0, \eta, \eta', Z, z') \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_\sigma(\xi_0, \eta', z') > \\ &= - \int_{\eta', z'} e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta') \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_\sigma(\xi_0, \eta', z') > \end{aligned} \quad (4.17)$$

p est ensuite calculé par transformée de Fourier spatiale inverse de l'expression obtenue à partir de (4.17). Pour que le résultat soit analytique, une approximation "grandes longueurs d'onde" est adoptée.

Le travail de la pression

On calcule finalement le travail élémentaire effectué par la charge fluide sur le contour du guide d'ondes :

$$\delta W_2 = \iint_{\sigma} p \vec{n} \cdot \delta \vec{u} d\sigma \quad (4.18)$$

à l'aide des résultats obtenus précédemment.

4.1.2 Prise en compte de la surface du fluide

Jusqu'à présent, on considérait que le guide d'ondes était plongé dans un fluide infini. Nous allons maintenant nous affranchir de cette hypothèse, en prenant en compte l'interface entre le fluide et l'air, surface sur laquelle la pression doit être nulle.

On choisit de modéliser le problème par une méthode d'images (Figure 4.2). On place la surface libre en $z = 0$. Si le guide occupe le domaine où $\alpha \leq z \leq \beta$, de contour σ_1 , on s'intéresse aussi à son image, qui occupe le domaine où $-\beta \leq z \leq -\alpha$, de contour σ_2 . On reprend le problème énoncé en 4.1.1 avec $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. La modélisation telle qu'elle a été choisie ici permet de ne pas recalculer la fonction de Green associée au problème. C'est bien la fonction de Green du problème sans surface libre. Seule une équation pour la pression change : la seconde équation de (4.1) devient :

$$\begin{aligned} \partial_n p(\xi, \eta, z) = & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \omega^2 u_n(\eta, z) & \text{pour } \xi = \xi_0, \quad \alpha \leq z \leq \beta \\ -\rho_f \omega^2 u_n(\eta, -z) & \text{pour } \xi = \xi_0, \quad -\beta \leq z \leq -\alpha \\ 0 & \text{pour } \xi = \xi_0, \quad (z < \alpha) \cup (\beta < z < -\beta) \cup (z > -\alpha) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.19)$$

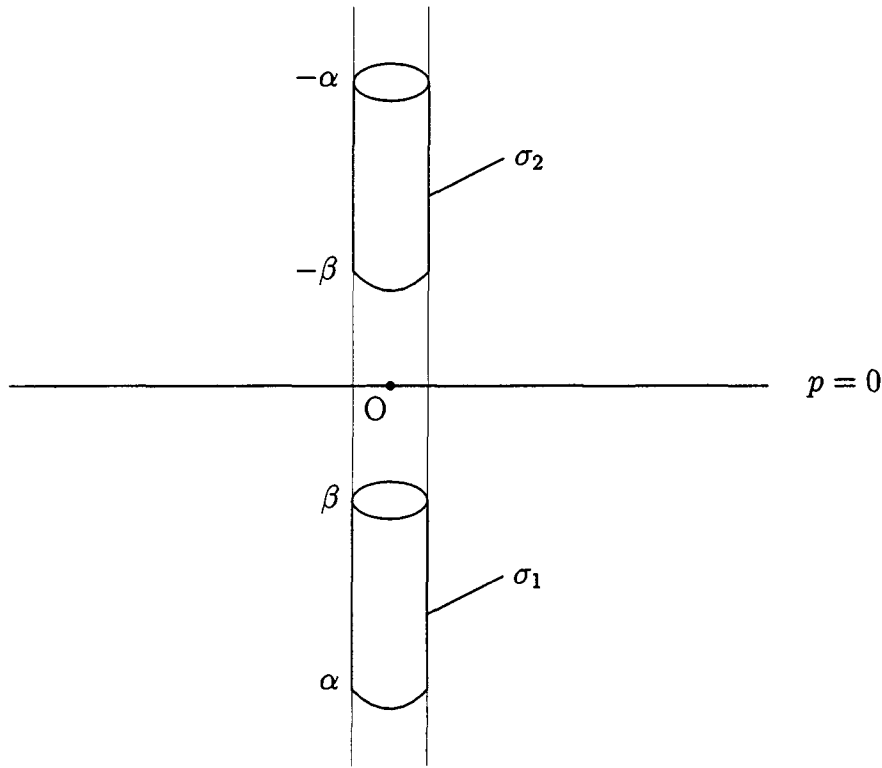


FIG. 4.2: Méthode des images

Alors (4.17) devient :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\xi, \eta, Z) = & - \left\langle e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta', z'}, \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_{\sigma_1}(\xi_0, \eta', z') \right\rangle \\ & - \left\langle e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta', z'}, \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_{\sigma_2}(\xi_0, \eta', z') \right\rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le problème sera traité au paragraphe 4.5. On s'intéresse avant au cas du fluide infini, qui nous permet, entre autres, de calculer la fonction de Green.

4.2 Calcul de la transformée de Fourier spatiale de la fonction de Green

Dans ce paragraphe, nous développons les différentes étapes permettant d'obtenir la transformée de Fourier spatiale de la fonction de Green définie par :

$$\hat{\mathcal{G}}(\xi, \xi', \eta, \eta', Z, z') = e^{-2i\pi z Z} \left(G_{K_f}^I(\xi, \xi', \eta, \eta') + G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta') \right) \quad (4.21)$$

4.2.1 Fonction de Green en champ libre

$G_{K_f}^I(\xi, \xi', \eta, \eta')$, rayonnement en espace indéfini d'une source ponctuelle unitaire et isotrope placée au point $M'(\xi', \eta')$, s'écrit en coordonnées elliptiques en fonction des fonc-

tions de Mathieu et des fonctions de Mathieu modifiées ([45] p. 1421) :

$$\begin{aligned}
 & G_{K_f}^I(\xi, \xi', \eta, \eta') \\
 &= -i \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') \right\} \\
 &\text{pour } \xi < \xi' \\
 &= -i \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) \right\} \\
 &\text{pour } \xi' < \xi
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.2.2 Calcul du champ diffracté

On rappelle que $G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta')$ vérifie :

- ♦ l'équation de Helmholtz homogène ;
 - ♦ une condition aux limites non homogène, pour avoir $\partial_n G_{K_f}^I + \partial_n G_{K_f}^D = 0$ en $\xi = \xi_0$.
- et reste bornée à l'infini.

Nous cherchons donc $G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta')$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta') = \\
 & \sum_{m=0}^{\infty} a_m^o(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} a_m^e(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

et nous calculons les coefficients a_m^o et a_m^e de façon à vérifier la condition aux limites, qui s'écrit en coordonnées elliptiques :

$$\partial_\xi G_{K_f}^I(\xi, \xi', \eta, \eta') + \partial_\xi G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta') = 0 \quad \text{en } \xi = \xi_0 \tag{4.24}$$

ce qui donne, en dérivant (4.22) prise pour $\xi < \xi'$ et (4.23) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -i \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') \right. \\
& \quad \left. + a_m^e(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) \right\} \\
& + \left\{ -i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} a_m^o(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) \right\} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Les fonctions $S_m^e(K_f h, \cos \eta')$ et $S_m^o(K_f h, \cos \eta')$ étant orthogonales (voir (D.21)), dans (4.25), le coefficient de chacune d'entre elles est nul. Il vient :

$$\begin{cases} a_m^e(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') \\ = i \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) \frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi')}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \quad \forall m \\ \\ a_m^o(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') \\ = i \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) \frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi')}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \quad \forall m \geq 1 \\ \\ a_0^o(K_f h, \text{ch } \xi', \cos \eta') = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

$G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta')$ est donc entièrement déterminé.

4.2.3 Transformée de Fourier spatiale de la fonction de Green

On peut maintenant calculer $G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') = G_{K_f}^I(\xi, \xi', \eta, \eta') + G_{K_f}^D(\xi, \xi', \eta, \eta')$ à l'aide de (4.22), (4.23) et (4.26). On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 & G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') \\
 &= i \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') \right. \\
 &\quad \left(\frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') \\
 &\quad \left. \left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \right\} \\
 &\text{pour } \xi < \xi'
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 &= i \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) \right. \\
 &\quad \left(\frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) \\
 &\quad \left. \left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \right\} \\
 &\text{pour } \xi' < \xi
 \end{aligned}$$

On peut séparer les parties paire et impaire de $G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta')$ en écrivant :

$$G_{K_f}(\xi, \xi', \eta, \eta') = G_{K_f}^e(\xi, \xi', \eta, \eta') + G_{K_f}^o(\xi, \xi', \eta, \eta') \tag{4.28}$$

où, pour $\xi < \xi'$:

$$\begin{aligned}
 & G_{K_f}^e(\xi, \xi', \eta, \eta') = \\
 & i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') \\
 & \left(\frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
G_{K_f}^o(\xi, \xi', \eta, \eta') = \\
i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') \\
\left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

et, pour $\xi' < \xi$:

$$\begin{aligned}
G_{K_f}^e(\xi, \xi', \eta, \eta') = \\
i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) \\
\left(\frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
G_{K_f}^o(\xi, \xi', \eta, \eta') = \\
i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) \\
\left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Finalement, d'après (4.7) et (4.27), il vient :

$$\begin{aligned}
& \widehat{G}(\xi, \xi', \eta, \eta', Z, z') \\
&= e^{-2i\pi Z z'} \left(G_{K_f}^e(M, M') + G_{K_f}^o(M, M') \right) \\
&= i e^{-2i\pi Z z'} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') \right. \\
&\quad \left(\frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') \\
&\quad \left. \left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \right\} \\
&\text{pour } \xi < \xi'
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
&= i e^{-2i\pi Z z'} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m^e(K_f h, \cos \eta')}{M_m^e(K_f h)} S_m^e(K_f h, \cos \eta) H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi) \right. \\
&\quad \left(\frac{H_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') J_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^e(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{e'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi) \\
&\quad \left. \left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi') H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) \right\} \\
&\text{pour } \xi' < \xi
\end{aligned}$$

4.3 Transformée de Fourier spatiale de la pression

4.3.1 En tout point du fluide

D'après l'équation (4.17),

$$\hat{p}(\xi, \eta, Z) = - \langle e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta', z'}, \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_\sigma(\xi_0, \eta', z') \rangle \quad (4.34)$$

Or, d'après (4.1),

$$\partial_n p(\xi_0, \eta', z') = \begin{cases} \rho_f \omega^2 u_n(\xi_0, \eta', z') & \text{pour } \alpha \leq z' \leq \beta \\ 0 & \text{pour } (z' < \alpha) \cup (z' > \beta) \end{cases} \quad (4.35)$$

où $u_n(\xi_0, \eta', z')$ est le déplacement normal du guide en torsion. D'après l'étude de la torsion au chapitre 3, on a, pour $\alpha \leq z' \leq \beta$ (voir équation (3.16)) :

$$u_n(\xi_0, \eta', z') = -u_{\xi_0}(\xi_0, \eta', z') \simeq -\frac{h \cos \eta' \sin \eta'}{\sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta'}} \theta(z') \quad (4.36)$$

De plus, en coordonnées elliptiques, d'après (B.24), on a :

$$d\sigma(\xi_0, \eta', z') = h \sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta'} d\eta' dz' \quad (4.37)$$

Donc (4.34) devient :

$$\begin{aligned}
\hat{p}(\xi, \eta, Z) &\simeq \langle e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta', z'}, \rho_f \omega^2 h^2 \cos \eta' \sin \eta' \theta_{[\alpha, \beta]}(z') \rangle \\
&\simeq \rho_f \omega^2 h^2 \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) \langle G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta'}, \cos \eta' \sin \eta' \rangle
\end{aligned} \quad (4.38)$$

où :

$$\theta_{[\alpha, \beta]}(z) = \begin{cases} \theta(z) & \text{pour } \alpha \leq z \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.39)$$

$\eta' \rightarrow \cos \eta' \sin \eta'$ étant une fonction impaire de η' , seuls les termes impairs de l'expression de $G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')$ contribuent. D'après (4.28), on obtient finalement :

$$\widehat{p}(\xi, \eta, Z) \simeq \rho_f \omega^2 h^2 \widehat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) < G_{K_f}^o(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta'} , \cos \eta' \sin \eta' > \quad (4.40)$$

où $G_{K_f}^o(\xi, \xi_0, \eta, \eta')$ est défini par (4.32).

4.3.2 À la surface du guide

Sur le contour σ , on a $\xi = \xi_0$. Nous allons donc maintenant chercher $\widehat{p}(\xi_0, \eta, Z)$. Pour ce faire, d'après (4.40), il suffit d'exprimer $G_{K_f}^o(\xi_0, \eta, \eta')$. Écrivons donc $\xi' = \xi_0$ et $\xi = \xi_0$ dans (4.32) :

$$\begin{aligned} G_{K_f}^o(\xi_0, \eta, \eta') = & \\ i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) & \\ \left(\frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) J_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) - J_m^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \right) & \end{aligned} \quad (4.41)$$

On reconnaît au numérateur de (4.41) une quantité qui fait intervenir le Wronskien de deux fonctions de Mathieu modifiées (voir D.5.2 sur le Wronskien), qui vaut $-i$. Donc :

$$G_{K_f}^o(\xi_0, \eta, \eta') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta')}{M_m^o(K_f h)} S_m^o(K_f h, \cos \eta) \frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \quad (4.42)$$

Reportons ce résultat dans (4.40). Il vient :

$$\begin{aligned} \widehat{p}(\xi_0, \eta, Z) \simeq \rho_f \omega^2 h^2 \widehat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) & \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{S_m^o(K_f h, \cos \eta)}{M_m^o(K_f h)} \frac{H_m^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_m^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} < S_m^o(K_f h, \cos \eta')_{\eta'} , \cos \eta' \sin \eta' > \right) & \end{aligned} \quad (4.43)$$

Cette expression peut être simplifiée. En effet, les fonctions de Mathieu impaires de première espèce se développent en séries de Fourier de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S_{2m}^o(K_f h, \cos \eta') &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}^o(K_f h, 2m) \sin(2n\eta') \\ S_{2m+1}^o(K_f h, \cos \eta') &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}^o(K_f h, 2m+1) \sin((2n+1)\eta') \end{aligned} \quad (4.44)$$

Or $I = \int_0^{2\pi} \sin(n\eta') \cos \eta' \sin \eta' d\eta'$ se calcule aisément :

$$I = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos((n-2)\eta') d\eta' - \int_0^{2\pi} \cos((n+2)\eta') d\eta' \right\} = \frac{\pi}{2} \delta_n^2 \quad (4.45)$$

Finalement, on obtient pour \widehat{p} :

$$\widehat{p}(\xi_0, \eta, Z) \simeq \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^2}{2} \widehat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{2m}^o(K_f h, \cos \eta)}{M_{2m}^o(K_f h)} \frac{H_{2m}^o(K_f h, \operatorname{ch} \xi_0)}{H_{2m}^{o'}(K_f h, \operatorname{ch} \xi_0)} B_2^o(K_f h, 2m) \quad (4.46)$$

À ce stade là, on aimerait simplifier l’écriture de \widehat{p} . Cela nous permettrait de *poursuivre les calculs analytiques*. Nous pourrions alors obtenir $p(\xi_0, \eta, z)$ par transformée de Fourier inverse, et en déduire l’expression recherchée de la charge fluide à la surface du guide. Cela nous permettrait aussi, après application du principe de conservation de l’énergie de Hamilton, de comparer avec les résultats obtenus dans le cas plus simple d’un fluide incompressible (résultats de la littérature).

Pour ce faire, on considère des fluides dans lesquels le son se propage à une célérité c_f telle que $c_f \gg d \times f$, où d est une dimension caractéristique de la section transversale du guide, typiquement inférieure à $6 \cdot 10^{-3}$ m, et f est la fréquence de l’onde de torsion, typiquement 100 kHz. Alors les longueurs d’ondes λ_f dans le fluide sont grandes devant d . On va pouvoir écrire $k_f h \rightarrow 0$, où $k_f = \frac{2\pi}{\lambda_f}$ et h est la demi-distance focale de l’ellipse. C’est l’approximation “grandes longueurs d’ondes”.

4.4 Approximation “grandes longueurs d’ondes”

Présentons les étapes qui, dans le cadre de l’hypothèse “grandes longueurs d’ondes”, permettent d’atteindre le but fixé au début de ce chapitre : le calcul d’une approximation de δW_2 , travail élémentaire de la charge fluide à la surface du guide d’ondes.

4.4.1 Démarche suivie

On réalise l’approximation “grandes longueurs d’ondes” sur \widehat{p} , pour obtenir une expression dont on calculera facilement la transformée de Fourier spatiale inverse p .

Justification de l’approximation

Nous allons développer \widehat{p} en série de puissances de $K_f h$, en écrivant que $K_f h \rightarrow 0$. Or, on a $k_f h \rightarrow 0$ et $(K_f h)^2 = (k_f h)^2 - 4\pi^2 h^2 Z^2$. Dans la mesure où on intégrera ensuite \widehat{p} en Z pour prendre la transformée de Fourier spatiale inverse, on va supposer que le résultat est au moins une série asymptotique.

Mise en œuvre sur \hat{p}

D'après (4.46),

$$\hat{p}(\xi_0, \eta, Z) \simeq \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^2}{2} \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{2m}^o(K_f h, \cos \eta)}{M_{2m}^o(K_f h)} \frac{H_{2m}^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_{2m}^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} B_2^o(K_f h, 2m) \quad (4.47)$$

Pour $K_f h \rightarrow 0$, toutes les fonctions qui interviennent dans la série sont développables en séries de Taylor ou de Laurent par rapport à $K_f h$. Dans le cadre de notre étude, on cherche une approximation de \hat{p} en prenant en compte les termes jusqu'à l'ordre 2 en $K_f h$: en effet, à l'ordre 0, K_f n'intervient plus, donc k_f non plus, et la compressibilité du fluide n'est plus prise en compte. De plus, on verra qu'il n'y a pas de terme d'ordre 1. Le terme correspondant à $m = 1$ de la série (4.47) est suffisant : pour m plus grand, l'approximation des différentes fonctions conduit à des développements dont les termes de plus bas degré sont en $(K_f h)^4$ minimum. Par conséquent, on s'intéresse ici à l'approximation de :

$$\frac{S_2^o(K_f h, \cos \eta)}{M_2^o(K_f h)} \frac{H_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} B_2^o(K_f h, 2) \quad (4.48)$$

Les développements de $S_2^o(K_f h, \cos \eta)$, $M_2^o(K_f h)$ et $B_2^o(K_f h, 2)$ pour $K_f h$ petit sont donnés dans la littérature ([45] p. 1413 par exemple). En revanche, il nous faut calculer celui de :

$$\frac{H_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} = \frac{J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) + i N_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{J_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) + i N_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)} \quad (4.49)$$

On utilise le développement de $J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$, $N_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$, $J_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)$ et $N_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)$ en fonction des fonctions de Bessel et de Neumann, dont l'approximation pour $K_f h \rightarrow 0$ est donnée dans la littérature. Remarquons que, pour éviter les confusions de notations, J_n et N_n désignent des fonctions de Bessel ou Neumann alors que J_n^o et N_n^o désignent des fonctions de Mathieu modifiées (impaires).

Afin de vérifier nos calculs, nous avons utilisé le logiciel MATHEMATICA. L'annexe G présente notre listing et les résultats obtenus.

4.4.2 Approximation des fonctions de Mathieu

Résultats liés aux fonctions de Mathieu

On écrit les développements en présentant seulement les termes qui interviennent dans le calcul de \hat{p} . Ces résultats sont tirés de [45] p. 1413.

$$S_2^o(K_f h, \cos \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{(K_f h)^2}{48} \right) \sin(2\eta) - \left(\frac{(K_f h)^2}{96} \right) \sin(4\eta) + \mathcal{O}(K_f h)^4$$

$$M_2^o(K_f h) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{(K_f h)^2}{12} \right) + \mathcal{O}(K_f h)^4 \quad (4.50)$$

$$B_2^o(K_f h, 2) = \frac{1}{2} + \frac{(K_f h)^2}{48} + \mathcal{O}(K_f h)^4$$

$$J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$$

On utilise le développement en série de fonctions de Bessel tiré de [45] p. 1568-1573 (voir aussi le paragraphe D.4.2) :

$$J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{B_2^o} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_{2n}^o \left[J_{n-1} \left(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0} \right) J_{n+1} \left(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0} \right) - J_{n+1} \left(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0} \right) J_{n-1} \left(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0} \right) \right] \quad (4.51)$$

En étudiant les ordres de grandeur, on montre que le premier terme de la série suffit. On va donc chercher l’approximation de :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[J_0 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0} \right) J_2 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0} \right) - J_2 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0} \right) J_0 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0} \right) \right] \quad (4.52)$$

En utilisant les développements établis en annexe C, on obtient après calculs :

$$J_0 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0} \right) J_2 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0} \right) = \frac{e^{2\xi_0} (K_f h)^2}{32} + \left(-\frac{1}{512} - \frac{e^{4\xi_0}}{1536} \right) (K_f h)^4 + \mathcal{O}(K_f h)^6 \quad (4.53)$$

et :

$$J_2 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0} \right) J_0 \left(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0} \right) = \frac{(K_f h)^2}{32 e^{2\xi_0}} + \left(-\frac{1}{512} - \frac{1}{1536 e^{4\xi_0}} \right) (K_f h)^4 + \mathcal{O}(K_f h)^6 \quad (4.54)$$

Finalement,

$$J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2\xi_0} - e^{-2\xi_0})}{32} (K_f h)^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{4\xi_0} - e^{-4\xi_0})}{1536} (K_f h)^4 + \mathcal{O}(K_f h)^5 \quad (4.55)$$

$$N_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$$

De même que pour $J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$, on utilise le développement en série de fonctions de Bessel et Neumann tiré de [45] p. 1568-1573 (voir aussi le paragraphe D.4.2), et on obtient :

$$N_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{B_2^o} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_{2n}^o [J_{n-1}(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0}) N_{n+1}(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0}) - J_{n+1}(\frac{1}{2} K_f h e^{-\xi_0}) N_{n-1}(\frac{1}{2} K_f h e^{\xi_0})] \quad (4.56)$$

Nous passons ici sur le détail des calculs, que le lecteur passionné peut trouver en annexe G. Les premiers termes de la série permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} N_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0) &= \frac{-8 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{e^{2\xi_0} (K_f h)^2} - \frac{-1 + 3e^{4\xi_0}}{3\sqrt{2\pi} e^{4\xi_0}} + \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-6\xi_0}}{768} + \right. \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-2\xi_0}}{96} \left(2 - 3\gamma + 3\text{Log}(2) - 3\text{Log}\left(\frac{e^{\xi_0}}{2}\right) - 3\text{Log}(K_f h) \right) \\ &\left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{2\xi_0}}{128} \left(3 - 4\gamma + 4\text{Log}(2) - 4\text{Log}\left(\frac{e^{\xi_0}}{2}\right) - 4\text{Log}(K_f h) \right) \right] (K_f h)^2 \\ &+ \mathcal{O}(K_f h)^3 \end{aligned} \quad (4.57)$$

$J_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)$

On connaît l'expression de $J_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$ en fonction des fonctions de Bessel. Pour connaître l'expression de sa dérivée, on utilise la relation de récurrence tirée de [46] (voir (C.2)) :

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) \quad (4.58)$$

et la règle des dérivations de fonctions composées. Par exemple :

$$\left(J_n\left(\frac{K_f h}{2} e^{\xi_0}\right) \right)'(\xi_0) = \frac{K_f h}{2} e^{\xi_0} J_n'\left(\frac{K_f h}{2} e^{\xi_0}\right) \quad (4.59)$$

On est donc en mesure de dériver (4.51).

Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} J_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) &= \\ &\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2\xi_0} + e^{-2\xi_0})}{16} (K_f h)^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{4\xi_0} + e^{-4\xi_0})}{384} (K_f h)^4 + \mathcal{O}(K_f h)^5 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$N_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)$

La façon de procéder est la même que pour $J_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0)$: on utilise le développement en série de fonctions de Bessel et Neumann de $N_2^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)$, que l'on dérive en

utilisant la relation de récurrence (C.2). Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}
 N_2^{o'}(K_f h, \text{ch } \xi_0) &= \frac{16 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{e^{2\xi_0} (K_f h)^2} - \frac{2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{3 e^{4\xi_0}} + \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-6\xi_0}}{128} + \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-2\xi_0}}{96} \left(-7 + 6\gamma + 6 \text{Log}(K_f h) + \text{Log}\left(\frac{e^{\xi_0}}{2}\right) - \text{Log}(2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{2\xi_0}}{64} \left(-1 + 4\gamma + 4 \text{Log}(K_f h) + \text{Log}\left(\frac{e^{\xi_0}}{2}\right) - \text{Log}(2) \right) \right] (K_f h)^2 \\
 &\quad + \mathcal{O}(K_f h)^3
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

4.4.3 Calcul de la pression par transformée de Fourier spatiale inverse

Disposant des développements en puissances de $K_f h$ de toutes les fonctions nécessaires à l’obtention de l’approximation “grandes longueurs d’ondes” de \hat{p} , on calcule facilement cette dernière. Finalement, la transformée de Fourier spatiale de la pression à la surface du guide s’écrit, pour $K_f h$ petit :

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(\xi_0, \eta, Z) &\simeq -\rho_f \omega^2 h^2 \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{(e^{-2\xi_0} + 3e^{2\xi_0})}{192} (K_f h)^2 \right) \sin(2\eta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(K_f h)^2}{192} \sin(4\eta) \right\} + \mathcal{O}(K_f h)^4
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Nous allons maintenant pouvoir calculer la transformée de Fourier spatiale inverse de (4.62) pour obtenir la pression à la surface du guide.

Rappelons que $K_f^2 = k_f^2 - 4\pi^2 Z^2$ et simplifions l’écriture de $\hat{p}(\xi_0, \eta, Z)$ en posant :

$$A = h^2 \frac{(e^{-2\xi_0} + 3e^{2\xi_0})}{192} \quad \text{et} \quad B = \frac{h^2}{192} \tag{4.63}$$

constantes qui ne dépendent que de la forme de la section transversale du guide d’ondes. Alors :

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(\xi_0, \eta, Z) &\simeq -\rho_f \omega^2 h^2 \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) \left\{ \left(\left(\frac{1}{4} + A k_f^2 \right) \sin(2\eta) - B k_f^2 \sin(4\eta) \right) \right. \\
 &\quad \left. - 4\pi^2 Z^2 \left(A \sin(2\eta) - B \sin(4\eta) \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

et :

$$\begin{aligned}
 p(\xi_0, \eta, z) &= \langle \hat{p}(\xi_0, \eta, Z), e^{2i\pi z Z} \rangle \\
 &\simeq -\rho_f \omega^2 h^2 \left(\left(\frac{1}{4} + A k_f^2 \right) \sin(2\eta) - B k_f^2 \sin(4\eta) \right) \langle \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z), e^{2i\pi z Z} \rangle \\
 &\quad - \rho_f \omega^2 h^2 \left(A \sin(2\eta) - B \sin(4\eta) \right) \langle -4\pi^2 Z^2 \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z), e^{2i\pi z Z} \rangle
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier rappelées en annexe E, il vient :

$$p(\xi_0, \eta, z) \simeq -\rho_f \omega^2 h^2 \left\{ \left(\frac{1}{4} + A k_f^2 \right) \sin(2\eta) - B k_f^2 \sin(4\eta) \right\} \theta_{[\alpha, \beta]}(z) \\ + \left(A \sin(2\eta) - B \sin(4\eta) \right) \frac{\partial^2 \theta_{[\alpha, \beta]}}{\partial z^2} \right\} \quad (4.66)$$

où A et B sont les constantes définies par (4.63).

4.4.4 Calcul de la charge fluide

Le travail effectué par la charge fluide lors d'une rotation élémentaire $\delta\theta$ du barreau s'écrit :

$$\delta W_2 = \iint_{\sigma} p \vec{n} \cdot \delta \vec{u} \\ = - \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{2\pi} p(\xi_0, \eta, z) \delta u_{\xi_0} h \sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta} d\eta dz \quad (4.67)$$

où $p(\xi_0, \eta, z)$ est la pression du fluide à la surface du guide, \vec{n} est le vecteur unitaire normal à σ en $P(\xi_0, \eta, z)$ et $\delta \vec{u}$ est le déplacement dû à la torsion du guide ($\delta \vec{u} = \delta u_{\xi_0} \vec{a}_{\xi} + \delta u_{\eta} \vec{a}_{\eta} + \delta u_z \vec{a}_z$; et $\vec{n} \cdot \delta \vec{u} = -\delta u_{\xi_0}$).

D'après (3.16) on a :

$$\delta u_{\xi_0} \simeq \frac{h \cos \eta \sin \eta}{\sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta}} \delta \theta_{[\alpha, \beta]}(z) \quad (4.68)$$

Donc :

$$\delta W_2 \simeq - \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{2\pi} p(\xi_0, \eta, z) h^2 \cos \eta \sin \eta \delta \theta(z) d\eta dz \quad (4.69)$$

En poursuivant les calculs à l'aide de (4.66), il vient :

$$\delta W_2 \simeq \int_{\alpha}^{\beta} \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^4}{2} \left\{ \theta(z) \left(\frac{1}{4} + A k_f^2 \right) + A \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right\} \delta \theta dz \quad (4.70)$$

où $A = h^2 \frac{(e^{-2\xi_0} + 3e^{2\xi_0})}{192}$.

4.5 Prise en compte de la surface libre

Les calculs sont menés de la même façon qu'aux paragraphes précédents pour rechercher la transformée de Fourier spatiale inverse de la pression et la charge du fluide. On change seulement les données du problème : dorénavant, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

D'après (4.20) :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\xi, \eta, Z) = & - \langle e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta', z'}, \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_{\sigma_1}(\xi_0, \eta', z') \rangle \\ & - \langle e^{-2i\pi Z z'} G_{K_f}(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta', z'}, \partial_n p(\xi_0, \eta', z') \delta_{\sigma_2}(\xi_0, \eta', z') \rangle \end{aligned} \quad (4.71)$$

avec, d'après (4.19) et (3.16) :

$$\partial_n p(\xi_0, \eta', z') \simeq \begin{cases} -\rho_f h \omega^2 \frac{\cos \eta' \sin \eta'}{\sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta'}} \theta(z') & \text{sur } \sigma_1 \\ \rho_f h \omega^2 \frac{\cos \eta' \sin \eta'}{\sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta'}} \theta(-z') & \text{sur } \sigma_2 \end{cases} \quad (4.72)$$

4.5.1 Calcul de la pression

Transformée de Fourier spatiale de la pression

En suivant le raisonnement du paragraphe 4.3, (4.40) devient :

$$\hat{p}(\xi, \eta, Z) \simeq \rho_f \omega^2 h^2 \langle G_{K_f}^o(\xi, \xi_0, \eta, \eta')_{\eta'}, \cos \eta' \sin \eta' \rangle \left(\hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) - \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(-Z) \right) \quad (4.73)$$

Il vient, à la surface du guide (voir (4.46)) :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\xi_0, \eta, Z) \simeq & \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^2}{2} \left(\hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) - \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(-Z) \right) \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{2m}^o(K_f h, \cos \eta)}{M_{2m}^o(K_f h)} \frac{H_{2m}^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_{2m}'(K_f h, \text{ch } \xi_0)} B_2^o(K_f h, 2m) \end{aligned} \quad (4.74)$$

et, en faisant l'approximation "grandes longueurs d'ondes" on a, d'après (4.62) :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\xi_0, \eta, Z) \simeq & -\rho_f \omega^2 h^2 \left(\hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) - \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(-Z) \right) \\ & \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{(e^{-2\xi_0} + 3e^{2\xi_0})}{192} (K_f h)^2 \right) \sin(2\eta) - \frac{(K_f h)^2}{192} \sin(4\eta) \right\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Expression de la pression

De (4.75), on déduit l'approximation "grandes longueurs d'ondes" de la pression à la surface du guide d'ondes, en calculant la transformée de Fourier spatiale inverse de cette expression. On procède de même qu'au paragraphe 4.4.3. Il vient :

$$p(\xi_0, \eta, z) \simeq -\rho_f \omega^2 h^2 \left\{ \left(\frac{1}{4} + A k_f^2 \sin(2\eta) - B k_f^2 \sin(4\eta) \right) \left(\theta_{[\alpha, \beta]}(z) - \theta_{[\alpha, \beta]}(-z) \right) + \left(A \sin(2\eta) - B \sin(4\eta) \right) \left(\frac{\partial^2 \theta_{[\alpha, \beta]}(z)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \theta_{[\alpha, \beta]}(-z)}{\partial z^2} \right) \right\} \quad (4.76)$$

Remarque : excepté le cas où $z = 0$ pour lequel $p = 0$, on n'a jamais en même temps $\theta_{[\alpha, \beta]}(z) \neq 0$ et $\theta_{[\alpha, \beta]}(-z) \neq 0$ lorsque le guide est totalement immergé.

4.5.2 Calcul de la charge fluide

Calculons

$$\delta W_2 = \iint_{\sigma_1} p \vec{n} \cdot \delta \vec{u} \, d\sigma_1 \quad (4.77)$$

$\alpha \leq z \leq \beta$ donc $\theta_{[\alpha, \beta]}(-z) = 0$. On retrouve donc le résultat (4.70) :

$$\delta W_2 \simeq \int_{\alpha}^{\beta} \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^4}{2} \left\{ \theta(z) \left(\frac{1}{4} + A k_f^2 \right) + A \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right\} \delta \theta \, dz \quad (4.78)$$

Conclusion : telle que l'approximation est effectuée, on ne voit pas l'influence de la surface libre.

4.6 Conclusion

Après avoir écrit δT_s , δV_s et δW_1 au chapitre 3, nous venons d'établir l'expression de δW_2 , et possédons donc tous les éléments nécessaires à l'application du principe de Hamilton (2.51), qui réalise le couplage, étudié au chapitre suivant, entre le guide d'ondes et le fluide compressible environnant.

Chapitre 5

Couplage entre le guide sollicité en torsion et le fluide compressible

Dans un premier temps, nous présentons les derniers développements théoriques du modèle.

Nous appliquons d'abord le principe de Hamilton pour obtenir l'équation de la torsion du guide immergé. Nous en déduisons l'expression de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans un fluide compressible.

En comparant l'équation de la torsion obtenue avec celle du guide dans le vide (obtenue au chapitre 3), nous mettons en évidence l'influence du fluide sur les caractéristiques mécaniques du système. Nous pouvons également isoler les termes dus à la compressibilité du fluide.

Nous résolvons ensuite l'équation de torsion pour un guide partiellement immergé : cela nous permet de conclure quant à l'observabilité des ondes réfléchies à l'interface air/fluide et à l'extrémité du guide d'ondes.

Dans un second temps, nous nous intéressons à l'*application* des résultats que nous avons obtenus : une méthode de mesure de niveau est proposée. Quelques simulations sont réalisées, qui montrent la pertinence des termes correctifs dus à la prise en compte de la compressibilité dans notre modèle.

Nous concluons en présentant les limites, liées à l'approximation "grandes longueurs d'ondes", de notre modèle.

5.1 Équation de torsion du guide immergé

5.1.1 Application du principe de Hamilton

On rappelle que, dans le contexte de notre problème, le principe de Hamilton s'écrit (voir paragraphe 2.8.2) :

$$\delta(T_s - V_s + W_1 + W_2) = 0 \quad (5.1)$$

où :

- ♦ T_s est l'énergie cinétique du guide d'ondes sollicité en torsion ;
- ♦ V_s est son énergie de déformation ;
- ♦ $W_1 + W_2$ représente le travail des forces extérieures qui lui sont appliquées :
 - ♦ W_1 est dû au moment de torsion appliqué en $z = \beta$ pour générer l'onde de torsion ;
 - ♦ W_2 représente la charge du fluide sur le guide.

En étudiant la torsion du guide d'ondes au chapitre 3, nous avons obtenu les approximations (3.95) de δT_s et (3.98) de δV_s . δW_1 est donné par (3.99) et le calcul de δW_2 faisait l'objet du chapitre 4. Une approximation en est donnée par (4.70).

Nous avons donc tous les éléments nécessaires pour appliquer (5.1). On obtient :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\mu J \theta_{,zz} + \rho_s I_s \omega^2 \theta(z) + \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^4}{2} \left\{ \theta(z) \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega^2}{c_f^2} \right) + A \theta_{,zz} \right\} \right) \delta \theta \, dz + \left(\mathcal{M}(\beta) - \mu J \theta_{,z}(\beta) \right) \delta \theta(\beta) = 0 \quad (5.2)$$

où A est la constante géométrique définie en (4.63) : $A = h^2 \frac{(e^{-2\xi_0} + 3e^{2\xi_0})}{192}$.

Ceci doit être valable quelle que soit la rotation élémentaire $\delta \theta$ du barreau. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mu J + \rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2} \right) \theta_{,zz} + \left(\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega^2}{c_f^2} \right) \right) \omega^2 \theta(z) = 0 \\ \text{pour } \alpha \leq z \leq \beta \\ \mu J \theta_{,z}(\beta) = \mathcal{M}(\beta) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

La première équation de (5.3) est l'équation de la torsion du guide, lorsqu'il est immergé dans un fluide compressible.

5.1.2 Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion

L'équation de torsion de (5.3) est de la forme :

$$\theta_{,zz} + \frac{\omega^2}{c^2(\omega)} \theta(z) = 0 \quad (5.4)$$

avec :

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu J + \rho_f A \frac{\pi h^4}{2} \omega^2}{\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega^2}{c_f^2} \right)}} \quad (5.5)$$

$c(\omega)$ est la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion qui se propage dans le guide immergé dans un fluide compressible.

5.2 Analyse des termes de l'équation de torsion

5.2.1 Termes dus à la présence du fluide

Comparons l'équation de la torsion de la structure chargée par le fluide (5.3) avec celle qui correspond pour la structure dans le vide. Sous nos hypothèses, il s'agit de l'équation obtenue au chapitre 3 (équation (3.101)) :

$$\mu J \theta_{,zz} + \rho_s I_s \omega^2 \theta(z) = 0 \quad (5.6)$$

(5.3) et (5.6) s'écrivent sous la forme :

$$R \theta_{,zz} + I \omega^2 \theta(z) = 0 \quad (5.7)$$

où R fait intervenir la rigidité du système, et I son inertie.

En utilisant les indices v et fl_{comp} , lorsque la structure est respectivement dans le vide ou immergée dans le fluide compressible, on a :

$$\begin{aligned} R_v &= \mu J & R_{fl_{comp}} &= \mu J + \rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2} \\ I_v &= \rho_s I_s & I_{fl_{comp}} &= \rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega^2}{c_f^2} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

d'où :

$$\begin{aligned} R_{fl_{comp}} &= R_v + \rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2} \\ I_{fl_{comp}} &= I_v + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega^2}{c_f^2} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

On met ainsi en évidence des termes de *rigidité* et d'*inertie additionnelles*, dus à la charge du fluide compressible sur le système.

5.2.2 Cas particulier du fluide incompressible

On peut traiter le cas du fluide incompressible comme étant un cas limite du fluide compressible, pour lequel $k_f \rightarrow 0$, ou encore $c_f \rightarrow \infty$ (l'équation de propagation de (4.1) se ramène alors à l'équation de Laplace $\Delta p(M) = 0$).

Dans ce cas, l'équation de la torsion (5.3) devient :

$$\left(\mu J + \rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2} \right) \theta_{,zz} + \left(\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{8} \right) \omega^2 \theta(z) = 0 \quad (5.10)$$

que l'on peut écrire :

$$R_{fl_{inc}} \theta_{,zz} + I_{fl_{inc}} \omega^2 \theta(z) = 0 \quad (5.11)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 R_{fl_{inc}} &= \mu J + \rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2} \\
 &= R_v + \rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2} \\
 I_{fl_{inc}} &= \rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{8} \\
 &= I_v + \rho_f \frac{\pi h^4}{8}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Comparons (5.9) et (5.12) :

- ♦ $R_{fl_{comp}} = R_{fl_{inc}}$: que le fluide soit compressible ou non, la rigidité due à la charge fluide s'écrit de la même façon.
- ♦ $I_{fl_{comp}} = I_{fl_{inc}} + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} A \frac{\omega^2}{c_f^2}$: quand le fluide est compressible, l'inertie ajoutée est plus grande que lorsqu'il est incompressible. Le terme supplémentaire dépend de la fréquence.

5.2.3 Comparaison avec les résultats de la littérature

L'équation de torsion

Comme on l'a vu au chapitre 2, le comportement de la sonde à onde de torsion n'avait été modélisé jusqu'à présent que dans le cas où le fluide environnant était incompressible. Comparons donc (5.12) au résultat obtenu par les autres auteurs, dont par exemple KIM [3], pour qui (voir page 19) :

$$\begin{cases} R = \mu J = R_v \\ I = \rho_s I_s + \rho_f I_f \end{cases} \tag{5.13}$$

- ♦ Inertie ajoutée :

Le terme d'inertie de (5.12) peut s'écrire $\rho_s I_s + \rho_f I_f$, où $I_f = \frac{\pi h^4}{8}$ est l'*inertie équivalente* de KIM [3] dans le cas où la section transversale du guide d'ondes est elliptique. Les résultats concordent donc.

- ♦ Raideur ajoutée :

Dans la littérature, aucune mention n'est faite d'une raideur ajoutée : le fluide n'introduirait que de l'inertie. Physiquement, ce résultat ne semble pourtant pas évident. Pour éclairer cette différence avec notre modélisation du problème, deux explications sont possibles :

- ♦ une approximation moins fine lors de la mise en équation du problème par KIM [3]
- ♦ l'ordre de grandeur du terme additionnel : négliger $\rho_f \omega^2 A \frac{\pi h^4}{2}$ devant μJ revient à écrire :

$$\rho_f \lll \frac{2\mu J}{\omega^2 \pi h^4 A} \tag{5.14}$$

Pour une onde de torsion générée à une fréquence de 100 kHz dans un guide en acier inoxydable (données numériques page 6) de section elliptique pour laquelle $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m et $b = 10^{-3}$ m, (5.14) s'écrit :

$$\rho_f \lll 59\,737 \text{ kg/m}^3 \quad (5.15)$$

Cette condition est vérifiée pour tous les liquides avec lesquels nous travaillons par la suite : pour l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique, $\rho_f = 1\,000 \text{ kg/m}^3$; pour l'eau de la cuve des réacteurs à eau pressurisée, $\rho_f = 662 \text{ kg/m}^3$ [31]; pour le diiodométhane, $\rho_f = 3\,324 \text{ kg/m}^3$ [47].

La vitesse de phase apparente

Dans le cas d'un fluide environnant incompressible, on avait (voir chapitre 2) :

$$c = \sqrt{\frac{\mu J}{\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{8}}} \quad (5.16)$$

Comparons maintenant (5.5) et (5.16), afin d'évaluer les effets de la compressibilité du fluide sur la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion.

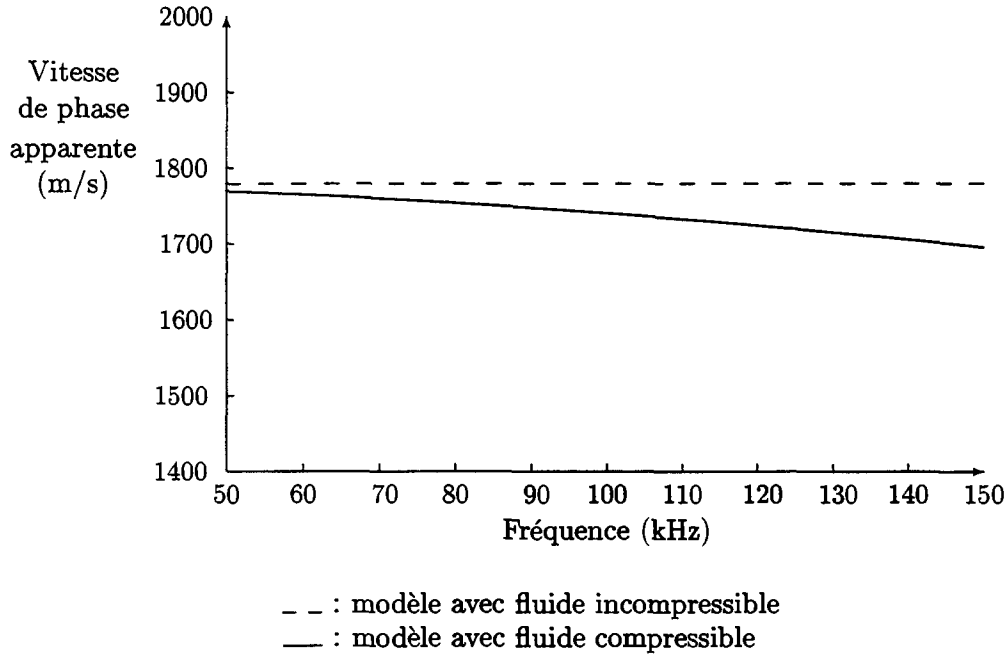


FIG. 5.1: Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans de l'eau à $1,55 \cdot 10^7$ Pa et 325°C, en fonction de la fréquence d'excitation

La figure 5.1 présente les résultats de la simulation suivante : on génère une onde de torsion dans un barreau en acier inoxydable (les valeurs numériques de μ et ρ_s sont données page 6), de section elliptique pour laquelle $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m et $b = 10^{-3}$ m, plongé dans de l'eau

aux conditions de la cuve d'un réacteur à eau pressurisée : la pression étant de $1,55 \cdot 10^7$ Pa et la température de 325°C , on a $\rho_f = 662 \text{ kg/m}^3$ d'après [31] et $c_f = 783 \text{ m/s}$ d'après [1]. On calcule la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion en fonction de la fréquence d'excitation, dans le cas où l'eau est considérée comme incompressible en utilisant la formule (5.16), et dans le cas où la compressibilité est prise en compte par le modèle en utilisant la formule (5.5). Dans ces conditions, la simulation présentée sur la figure 5.1 montre que la correction apportée par notre modèle sur la vitesse de phase apparente atteint 4,7 % à 150 kHz.

On chiffrera, lors de l'application à la mesure de niveau au paragraphe 5.4, les répercussions de cette correction sur le temps de propagation du signal et la mesure de longueur de sonde immergée.

5.3 Résolution de l'équation de torsion du guide partiellement immergé

5.3.1 Pertinence du choix d'une fréquence d'excitation moyenne

Il a déjà été précisé plusieurs fois dans ce mémoire que l'onde de torsion est générée à une fréquence d'excitation située dans une bande de fréquences étroite, autour de 100 kHz. Or, pour résoudre facilement (5.4), on aimerait pouvoir écrire :

$$c(\omega) \simeq c(\omega_m) \quad (5.17)$$

de façon à obtenir une équation de propagation plus facile à résoudre. Dans ce paragraphe, nous étudions les variations de la vitesse de phase apparente en fonction de la fréquence, autour de $f_m = 100 \text{ kHz}$. Pour les différents fluides environnants que nous utilisons par la suite, nous vérifions que :

- ♦ $c(\omega)$ varie peu dans une gamme de fréquences autour de $f_m = 100 \text{ kHz}$;
- ♦ le développement en série de Taylor de $c(\omega)$ autour de $\omega = \omega_m$,

$$c(\omega) = c(\omega_m) + (\omega - \omega_m) c'(\omega_m) + \frac{(\omega - \omega_m)^2}{2} c''(\omega_m) + \dots \quad (5.18)$$

peut être réduit à son premier terme : $c(\omega) \simeq c(\omega_m)$. Pour ce faire, on vérifie que :

$$\left| (\omega - \omega_m) \frac{c'(\omega_m)}{c(\omega_m)} \right| \ll 1 \quad (5.19)$$

Posons $c(\omega) = \sqrt{F(\omega)}$ avec, d'après (5.5),

$$F(\omega) = \frac{\mu J + \rho_f A \frac{\pi h^4}{2} \omega^2}{\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega^2}{c_f^2} \right)} \quad (5.20)$$

Alors :

$$|c'(\omega_m)| = \frac{|F'(\omega_m)|}{2c(\omega_m)} \quad (5.21)$$

avec :

$$F'(\omega_m) = \frac{\rho_f A \pi h^4 \omega_m}{\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega_m^2}{c_f^2} \right)} - \frac{\rho_f \pi h^4 A \frac{\omega_m}{c_f^2} (\mu J + \rho_f A \frac{\pi h^4}{2} \omega_m^2)}{\left(\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega_m^2}{c_f^2} \right) \right)^2} \quad (5.22)$$

On est donc amené à vérifier que :

$$\omega \ll \omega_m + \frac{2c^2(\omega_m)}{|F'(\omega_m)|} \quad (5.23)$$

Passons maintenant en revue les différents fluides qui seront utilisés par la suite (pour les simulations du paragraphe 5.4, et expérimentalement au Laboratoire de Systèmes de Mesures pour les Réacteurs). Les simulations présentées ici sont réalisées dans les mêmes conditions que précédemment : on considère toujours qu'une onde de torsion est générée dans un barreau en acier inoxydable de section elliptique. Les données numériques ne changent pas (voir page 81).

Pour l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique :

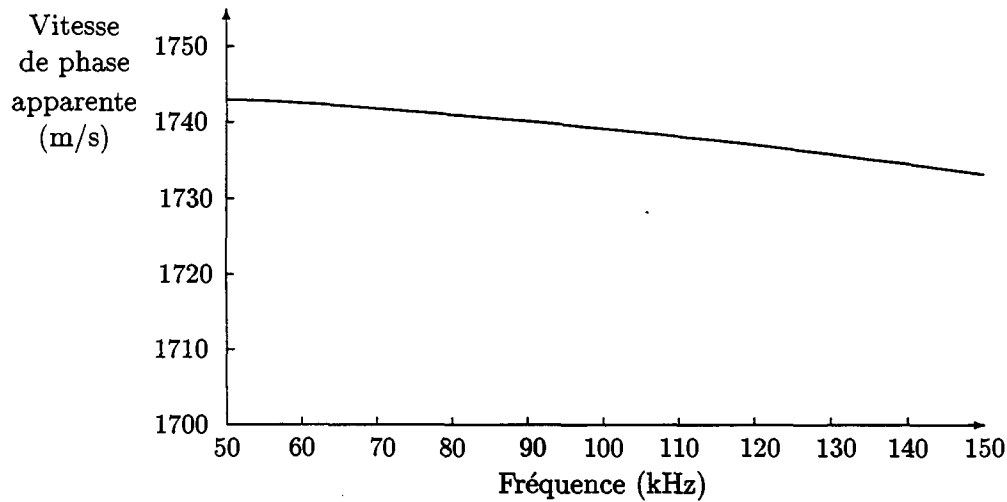


FIG. 5.2: Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans de l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique, en fonction de la fréquence d'excitation

La figure 5.2 montre que $c(\omega)$ varie dans des proportions qui paraissent suffisamment faibles autour de 100 kHz. Appliquons (5.23) au cas où le fluide environnant est de l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique. On obtient la condition :

$$f \ll 17\,700 \text{ kHz} \quad (5.24)$$

qui est largement vérifiée, puisque la fréquence de l'onde de torsion, autour de 100 kHz, est donc environ 177 fois plus petite.

Pour l'eau aux conditions de fonctionnement du réacteur à eau pressurisée :

Sur la figure 5.1 apparaît la dépendance en fréquence de la vitesse de phase apparente dans le cas où le fluide environnant est de l'eau aux conditions de fonctionnement du réacteur à eau pressurisée. En appliquant (5.23) à ce cas, on obtient la condition :

$$f \ll 2\,548 \text{ kHz} \quad (5.25)$$

qui est bien vérifiée.

Pour le diiodométhane :

Le diiodométhane, de formule chimique CH_2I_2 , a pour masse volumique $\rho_f = 3\,324 \text{ kg/m}^3$ et la célérité du son dans ce liquide est de $c_f = 973 \text{ m/s}$ [47].

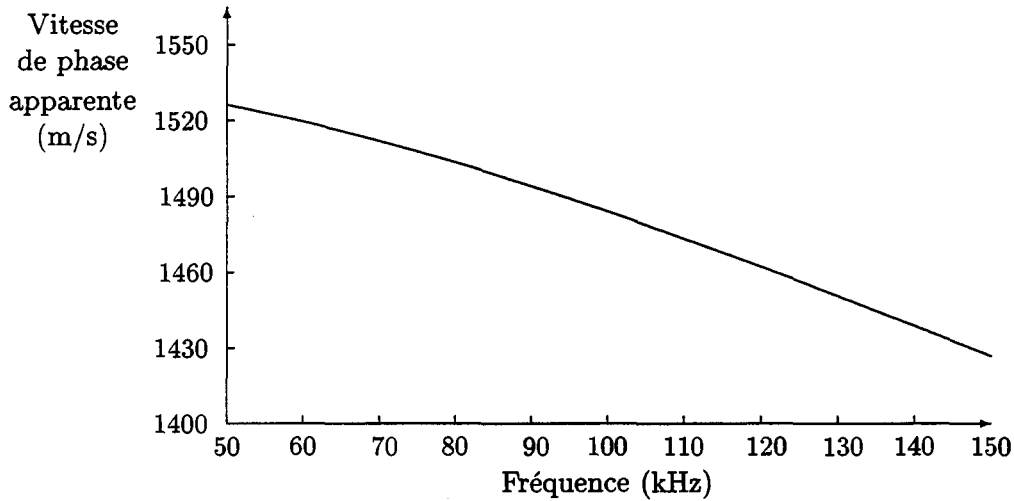


FIG. 5.3: Vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans un guide d'ondes immergé dans du diiodométhane, en fonction de la fréquence d'excitation

La figure 5.3 montre que $c(\omega)$ varie dans des proportions qui paraissent raisonnables autour de 100 kHz. Appliquons (5.23) au cas où le fluide environnant est le diiodométhane. On obtient la condition :

$$f \ll 1\,528 \text{ kHz} \quad (5.26)$$

qui, bien que laissant moins de marge que pour les cas précédents, est toujours vérifiée.

Conclusion

L'étude précédente conduit à la conclusion qu'on peut écrire :

$$c(\omega) \simeq c(\omega_m) \quad (5.27)$$

pour tous les fluides que nous considérons par la suite, avec

$$\omega_m = 2\pi f_m \quad \text{et} \quad f_m = 100 \text{ kHz} \quad (5.28)$$

Posons alors :

$$c_m = c(\omega_m) \quad (5.29)$$

Par la suite, on écrit donc, au lieu de (5.4) :

$$\theta_{,zz} + \frac{\omega^2}{c_m^2} \theta(z) = 0 \quad \text{pour } \alpha \leq z \leq \beta \quad (5.30)$$

L'équation de torsion se ramène donc à une équation de Helmholtz à coefficients constants.

5.3.2 Système à résoudre

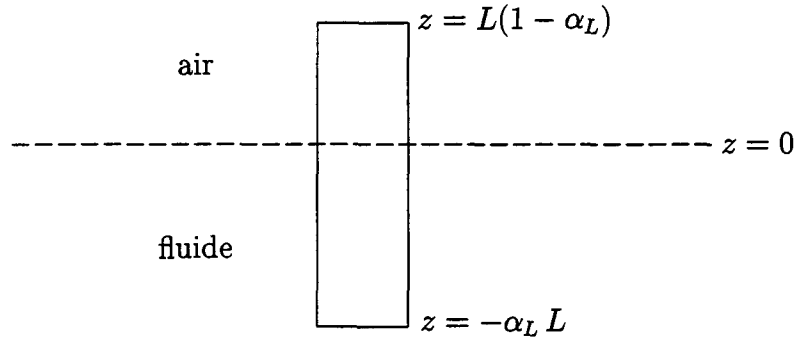


FIG. 5.4: Guide d'ondes partiellement immergé dans un fluide compressible

Considérons un guide de longueur L , dont une partie seulement, de longueur $\alpha_L L$, est immergée dans un fluide compressible (Figure 5.4).

Soient θ^0 et θ^1 les angles de torsion dans les parties du guide d'ondes respectivement dans le vide (et par approximation dans l'air), et dans le fluide compressible. Rappelons les équations de propagation dans chacun des milieux :

♦ d'après (3.101), θ^0 vérifie : $\theta_{,zz}^0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \theta^0(z) = 0$ avec $c_0^2 = \frac{\mu J}{\rho_s I_s}$;

♦ d'après (5.30), θ^1 vérifie : $\theta_{,zz}^1 + \frac{\omega^2}{c_m^2} \theta^1(z) = 0$, où c_m est donné par (5.29).

Afin de résoudre ces deux équations, nous avons besoin de quatre conditions aux limites. Écrivons les conditions sur $\theta_{,z}$ imposées aux extrémités du guide d'ondes :

- ♦ en $z = L(1 - \alpha_L)$, un moment est imposé pour générer l'onde de torsion, et d'après (5.3) on a : $\theta_{,z}^0(L(1 - \alpha_L)) = \frac{\mathcal{M}(\omega)}{\mu J}$
- ♦ en $z = -\alpha_L L$, l'extrémité est libre. On a alors : $\theta_{,z}^1(-\alpha_L L) = 0$

Les deux dernières conditions nécessaires à la détermination des angles de torsion sont données par les conditions de continuité en $z = 0$:

- ♦ $\theta^0(0) = \theta^1(0)$
- ♦ $\theta_{,z}^0(0) = \theta_{,z}^1(0)$

En résumé, on cherche les solutions $\theta^0(z)$ et $\theta^1(z)$ du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_{,zz}^0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \theta^0(z) = 0 & 0 \leq z \leq L(1 - \alpha_L) \\ \theta_{,zz}^1 + \frac{\omega^2}{c_m^2} \theta^1(z) = 0 & -\alpha_L L \leq z \leq 0 \\ \theta_{,z}^0(L(1 - \alpha_L)) = \frac{\mathcal{M}(\omega)}{\mu J} \\ \theta_{,z}^1(-\alpha_L L) = 0 \\ \theta^0(0) = \theta^1(0) \\ \theta_{,z}^0(0) = \theta_{,z}^1(0) \end{array} \right. \quad (5.31)$$

5.3.3 Résolution dans le domaine fréquentiel

Solution générale

On cherche la solution de (5.31) en écrivant $\theta^0(z)$ sous une forme qui mette en évidence le moment imposé à l'extrémité du guide d'ondes :

$$\theta^0(z) = \frac{-\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} e^{\frac{-i\omega}{c_0}(z-L(1-\alpha_L))} + \alpha^0 e^{\frac{-i\omega}{c_0}z} + \beta^0 e^{\frac{i\omega}{c_0}z} \quad (5.32)$$

$\theta^1(z)$ s'écrit sous la forme :

$$\theta^1(z) = \alpha^1 e^{\frac{-i\omega}{c_m}z} + \beta^1 e^{\frac{i\omega}{c_m}z} \quad (5.33)$$

On détermine les quatre coefficients α^0 , β^0 , α^1 et β^1 grâce aux quatre dernières conditions de (5.31). Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \alpha^0 &= \frac{\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} e^{\frac{3i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} \frac{c_m(1 + e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L}) + c_0(1 - e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L})}{D} \\
 \beta^0 &= \frac{\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} \frac{c_m(1 + e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L}) + c_0(1 - e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L})}{D} \\
 \alpha^1 &= \frac{2 \mathcal{M}(\omega) c_0 c_m}{\mu J i \omega} \frac{e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L}}{D} \\
 \beta^1 &= \frac{2 \mathcal{M}(\omega) c_0 c_m}{\mu J i \omega} \frac{e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)}}{D}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

où :

$$D = c_0(1 + e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)})(1 - e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L}) - c_m(1 - e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)})(1 + e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L}) \tag{5.35}$$

Remarque : en mettant en facteur $e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{-i\omega}{c_m} \alpha_L L}$, on obtient cette autre écriture de D :

$$\begin{aligned}
 D &= 4 e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{-i\omega}{c_m} \alpha_L L} \\
 &\left(c_0 \cos\left(\frac{\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)\right) \sin\left(\frac{\omega}{c_m} \alpha_L L\right) + c_m \sin\left(\frac{\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)\right) \cos\left(\frac{\omega}{c_m} \alpha_L L\right) \right)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Il est alors possible d'étudier les fréquences de résonance du barreau partiellement immergé, c'est-à-dire les fréquences qui annulent D , en fonction de la proportion de guide immergée, α_L . Cela pourrait nous amener à considérer le protocole expérimental suivant, pour la mesure de niveau : détermination expérimentale d'une suite de fréquences de résonances du barreau, dont on déduirait une information sur le niveau de fluide environnant.

Par exemple, autour de $f = 100$ kHz, une simulation correspondant à un barreau en acier inoxydable de section elliptique avec $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m, $b = 10^{-3}$ m, $L = 3$ m donne la relation présentée sur la figure 5.5 entre les pulsations ω_0 telles que $D(\omega_0) = 0$ et la proportion de guide immergée α_L .

Écriture simplifiée de la solution à l'extrémité du guide

En $z = L(1 - \alpha_L)$, où on observe le signal, on a :

$$\theta^0[L(1 - \alpha_L)] = \frac{-\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} + \alpha^0 e^{-\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + \beta^0 e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} \tag{5.37}$$

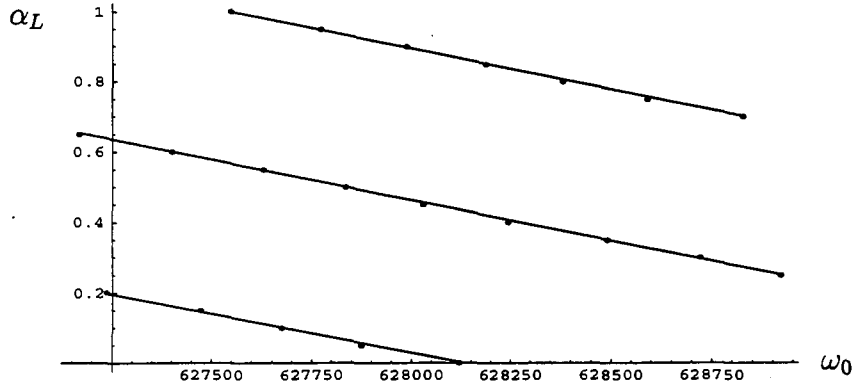


FIG. 5.5: Relation entre les pulsations de résonance ω_0 d'un barreau partiellement immergé et la proportion de guide immergée α_L

Le terme $\frac{-\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega}$ est dû au moment imposé en $z = L(1 - \alpha_L)$ pour générer la torsion.

En $z = L(1 - \alpha_L)$, on va également observer des ondes qui auront subi une ou plusieurs réflexions à l'interface air/fluide en $z = 0$ et/ou à l'extrémité $z = -\alpha_L L$. Elles s'écrivent en fonction des composantes principales suivantes :

- ♦ $e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)}$ (pour un aller/retour dans l'air)
- ♦ $e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L}$ (pour un aller/retour dans le fluide compressible)

Afin de les mettre en évidence, calculons le terme $\alpha^0 e^{-\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + \beta^0 e^{\frac{i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)}$ de (5.37). D'après (5.34), on a :

$$\begin{aligned} \theta^0[L(1 - \alpha_L)] \\ = \frac{2\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} \left(\frac{1}{2} + e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} \frac{c_m(1 + e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L}) + c_0(1 - e^{\frac{-2i\omega}{c_m} \alpha_L L})}{D} \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

où D est donné par (5.35).

Simplifions cette écriture, en posant :

$$c_+ = c_m + c_0 \quad \text{et} \quad c_- = c_m - c_0 \quad (5.39)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \theta^0[L(1 - \alpha_L)] \\ = \frac{2\mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{c_- e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + c_+ e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L}}{c_- e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + c_+ e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} - c_+ - c_- e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L}} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

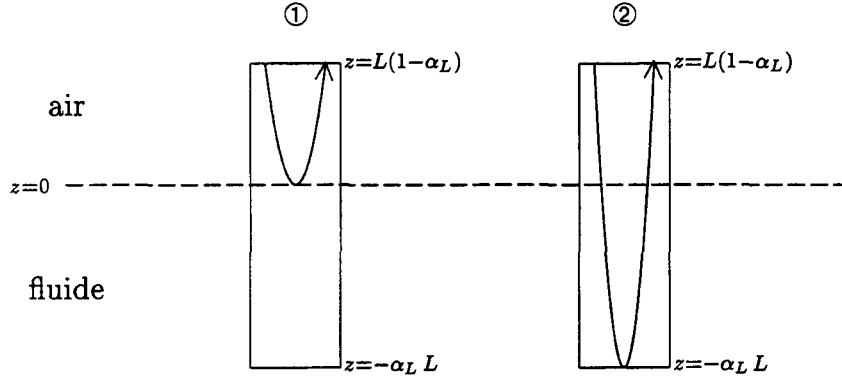


FIG. 5.6: Représentation des ondes réfléchies une fois

Maintenant, intéressons-nous particulièrement aux ondes réfléchies une fois, soit à l'interface air/fluide en $z = 0$ (cas ① de la figure 5.6), soit à l'extrémité $z = -\alpha_L L$ du guide d'ondes (cas ② de la figure 5.6). Afin d'obtenir l'écriture de $\theta^0[L(1 - \alpha_L)]$ qui met en évidence ces réflexions, cherchons à écrire (5.40) sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta^0[L(1 - \alpha_L)] = & \frac{2 \mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} \left(\frac{1}{2} + \mathcal{R}_1 e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + \mathcal{R}_2 e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} \right. \\ & \left. + \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} e^{\frac{2m i \omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2n i \omega}{c_m} \alpha_L L} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

\mathcal{R}_1 représente, au facteur $\left| \frac{2 \mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} \right|$ près, l'amplitude de l'onde du cas ① de la figure 5.6 ; \mathcal{R}_2 représente, au même facteur près, celle de l'onde du cas ② de la figure 5.6 ; enfin, \mathcal{R}_{mn} , celle d'une onde qui a subi plus d'une réflexion avant de pouvoir être observée en $z = L(1 - \alpha_L)$.

De la comparaison de (5.40) et (5.41), il vient :

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_1 e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + \mathcal{R}_2 e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} + \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} e^{\frac{2m i \omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2n i \omega}{c_m} \alpha_L L} \\ & = \frac{c_- e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + c_+ e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L}}{c_- e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} + c_+ e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} - c_+ - c_- e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

En réduisant au même dénominateur et en procédant par identification, on détermine :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{-c_-}{c_+} = \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{c_-^2 - c_+^2}{c_+^2} = -\frac{4 c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} \quad (5.43)$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \theta^0[L(1 - \alpha_L)] \\ &= \frac{2 \mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} - \frac{4 c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} e^{\frac{2mi\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2ni\omega}{c_m} \alpha_L L} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

C'est l'écriture de l'angle de torsion en $z = L(1 - \alpha_L)$, dans le domaine fréquentiel.

5.3.4 Résolution dans le domaine temporel

Afin d'établir l'expression de $\theta^0[L(1 - \alpha_L), t]$, on va calculer la transformée de Fourier temporelle inverse de (5.44).

Remarquons d'abord que (5.44) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \theta^0[L(1 - \alpha_L), \omega] \\ &= \frac{2 \mathcal{M}(\omega) c_0}{\mu J i \omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} - \frac{4 c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} e^{\frac{2mi\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2ni\omega}{c_m} \alpha_L L} \right) \\ &= \frac{2 c_0}{\mu J} \frac{1}{i \omega} \mathcal{M}(\omega) F(\omega) \end{aligned} \quad (5.45)$$

où :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2} + \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} - \frac{4 c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L} \\ & \quad + \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} e^{\frac{2mi\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2ni\omega}{c_m} \alpha_L L} \end{aligned} \quad (5.46)$$

En utilisant deux propriétés de la transformée de Fourier - transformée de Fourier d'un produit de convolution et transformée de Fourier d'une primitive (annexe E) - on a :

$$\theta^0[L(1 - \alpha_L), t] = \frac{2 c_0}{\mu J} \int [m * f](t) dt \quad (5.47)$$

où $*$ désigne le produit de convolution, $m(t)$ et $f(t)$ sont respectivement les transformées de Fourier temporelles inverses de $\mathcal{M}(\omega)$ et $F(\omega)$.

Calculons $f(t) = \frac{1}{2\pi} \langle F(\omega), e^{-i\omega t} \rangle$:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \langle \frac{1}{2}, e^{-i\omega t} \rangle + \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} \langle e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)}, e^{-i\omega t} \rangle \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} \langle e^{\frac{2i\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2i\omega}{c_m} \alpha_L L}, e^{-i\omega t} \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} \langle e^{\frac{2mi\omega}{c_0} L(1-\alpha_L)} e^{\frac{2ni\omega}{c_m} \alpha_L L}, e^{-i\omega t} \rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \delta(t) - 2\pi \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} \delta\left(t - \frac{2L(1-\alpha_L)}{c_0}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi \frac{4c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} \delta\left(t - \left(\frac{2L(1-\alpha_L)}{c_0} + \frac{2\alpha_L L}{c_m}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - 2\pi \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} \delta\left(t - \left(\frac{2mL(1-\alpha_L)}{c_0} + \frac{2n\alpha_L L}{c_m}\right)\right) \right\} \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{-1}{2} \delta(t) - \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} \delta\left(t - \frac{2L(1-\alpha_L)}{c_0}\right) \\
 &\quad + \frac{4c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} \delta\left(t - \left(\frac{2L(1-\alpha_L)}{c_0} + \frac{2\alpha_L L}{c_m}\right)\right) \\
 &\quad - \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} \delta\left(t - \left(\frac{2mL(1-\alpha_L)}{c_0} + \frac{2n\alpha_L L}{c_m}\right)\right) \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

et, d'après (5.47) :

$$\begin{aligned}
 \theta^0[L(1-\alpha_L), t] &= \frac{2c_0}{\mu J} \int \left[\frac{-1}{2} m(t) - \frac{c_0 - c_m}{c_0 + c_m} m\left(t - \frac{2L(1-\alpha_L)}{c_0}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4c_m c_0}{(c_m + c_0)^2} m\left(t - \left(\frac{2L(1-\alpha_L)}{c_0} + \frac{2\alpha_L L}{c_m}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{m,n} \mathcal{R}_{mn} m\left(t - \left(\frac{2mL(1-\alpha_L)}{c_0} + \frac{2n\alpha_L L}{c_m}\right)\right) \right] dt \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

5.3.5 Conclusion pour l'observation des signaux

En comparant les valeurs absolues de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 donnés par (5.43), on peut savoir, parmi les deux ondes réfléchies une fois (ondes représentées sur la figure 5.6), quelle est celle que l'on va le mieux observer.

	eau 20°C, 10 ⁵ Pa	eau 325°C, 1,55 10 ⁷ Pa	diiodométhane
\mathcal{R}_1	3,28 10 ⁻²	1,87 10 ⁻²	1,1 10 ⁻¹
\mathcal{R}_2	0,999	≈ 1	0,987

En effet, l'onde qui subit sa première réflexion à l'extrémité du guide d'ondes a une amplitude *beaucoup plus importante*, quel que soit le liquide considéré. C'est celle que nous prenons en compte lors de l'utilisation de la sonde à onde de torsion pour la mesure de niveau (abordée au paragraphe suivant). Ce résultat est donc satisfaisant, surtout en vue des expérimentations que nous pensons réaliser prochainement au Laboratoire de Systèmes de Mesures pour les Réacteurs.

5.4 Application : la mesure de niveau de fluides compressibles

5.4.1 Principe de la mesure de niveau

Le principe de la mesure de niveau est présenté sur la figure 5.7 : l'inconnue α_L est déterminée grâce à la mesure du temps de propagation Δt , par une formule obtenue d'après les résultats précédents sur la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion dans le fluide.

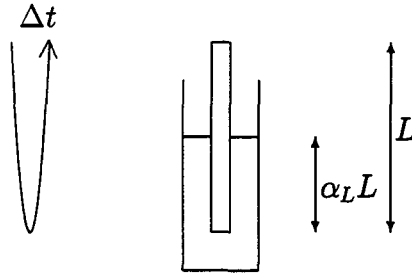


FIG. 5.7: Principe de la mesure de niveau par sonde à onde de torsion

On décompose le temps de propagation Δt en $\Delta t = 2(\Delta t_1 + \Delta t_2)$, où Δt_1 est le temps de propagation dans la première partie de la sonde (de longueur $L(1 - \alpha_L)$), et Δt_2 le temps de propagation dans la partie immergée de la sonde (de longueur $\alpha_L L$).

On rappelle que c_0 est la vitesse de phase de l'onde lorsque la sonde est dans le vide, qu'on utilise comme approximation de la vitesse de phase apparente dans l'air :

$$c_0 = \sqrt{\frac{\mu J}{\rho_s I_s}} \quad (5.51)$$

et c_m est la vitesse de phase apparente de l'onde lorsque la sonde est immergée dans le fluide compressible, obtenue grâce à la formule (5.5) et en prenant en compte les remarques (5.27) à (5.29) :

$$c_m = \sqrt{\frac{\mu J + \rho_f A \frac{\pi h^4}{2} \omega_m^2}{\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{2} \left(\frac{1}{4} + A \frac{\omega_m^2}{c_f^2} \right)}} \quad (5.52)$$

où $\omega_m = 2\pi f_m$ avec $f_m = 100$ kHz.

Par suite, Δt s'écrit :

$$\Delta t = 2 \left(\frac{L(1 - \alpha_L)}{c_0} + \frac{\alpha_L L}{c_m} \right) \quad (5.53)$$

d'où la formule donnant la portion de sonde immergée :

$$\alpha_L = \frac{c_m}{c_0 - c_m} \left(\frac{\Delta t c_0}{2L} - 1 \right) \quad (5.54)$$

Remarque : la façon de procéder ne diffère pas selon que le fluide soit considéré comme compressible ou incompressible. Seule l'expression de la vitesse de phase apparente de l'onde dans le fluide change. Pour un fluide incompressible, les expressions (5.53) et (5.54) doivent être écrites en remplaçant c_m par c donné par la formule (5.16).

5.4.2 Exemple avec un fluide monophasique

Afin de mettre en valeur l'amélioration proposée par notre modèle qui prend en compte la compressibilité du fluide, nous avons réalisé différentes simulations, en choisissant des fluides pour lesquels la différence entre le cas où la compressibilité est prise en compte et celui où elle ne l'est pas est significative. Parmi les différents fluides qui répondaient à ce critère, nous avons choisi le diiodométhane ($\rho_f = 3324$ kg/m³, $c_f = 973$ m/s), qui pourrait être utilisé sans danger sur une maquette au laboratoire.

Les simulations présentées ci-dessous ont été réalisées en considérant un guide d'ondes ayant les mêmes caractéristiques que précédemment (voir page 81), de longueur $L = 3$ m.

La figure 5.8 montre les variations de la durée de propagation de l'onde en fonction de α_L . La correction apportée par notre modèle atteint 4 % lorsque le guide est complètement immergé.

La figure 5.9 met en valeur la pertinence des termes correctifs pour l'application à la mesure de niveau. En effet, on calcule α_L à partir de la mesure simulée d'une durée de propagation, et on compare les résultats entre le cas où la compressibilité du diiodométhane est prise en compte et le cas où elle ne l'est pas : par exemple, les termes additionnels corrigent de près de 19 % la valeur de α_L déduite d'une durée de propagation mesurée de 3,85 ms.

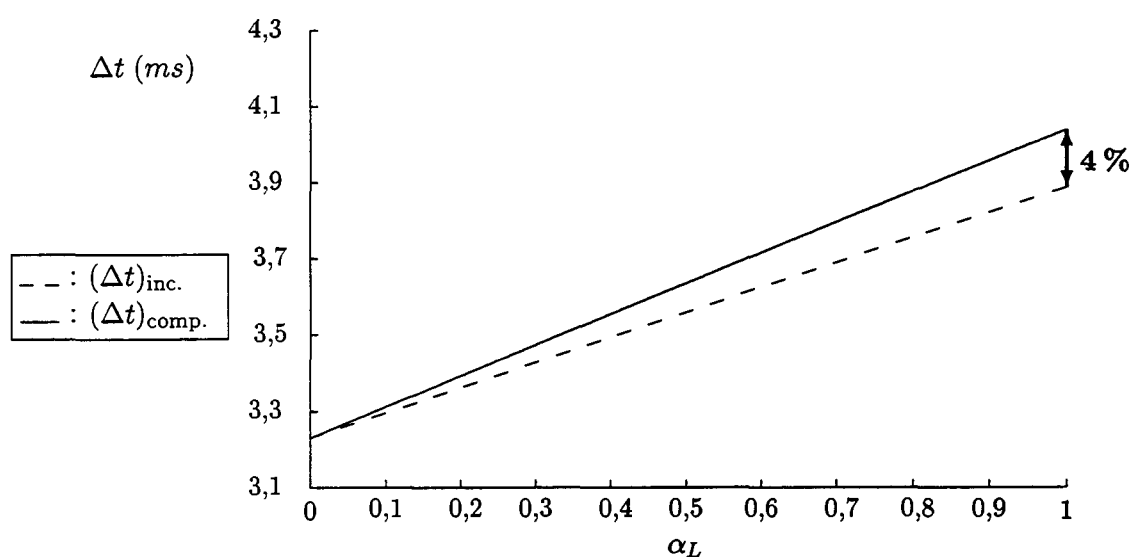


FIG. 5.8: Durée de propagation de l'onde de torsion dans un guide partiellement immergé dans du diiodométhane successivement considéré comme compressible et incompressible, en fonction de la proportion de longueur immergée.

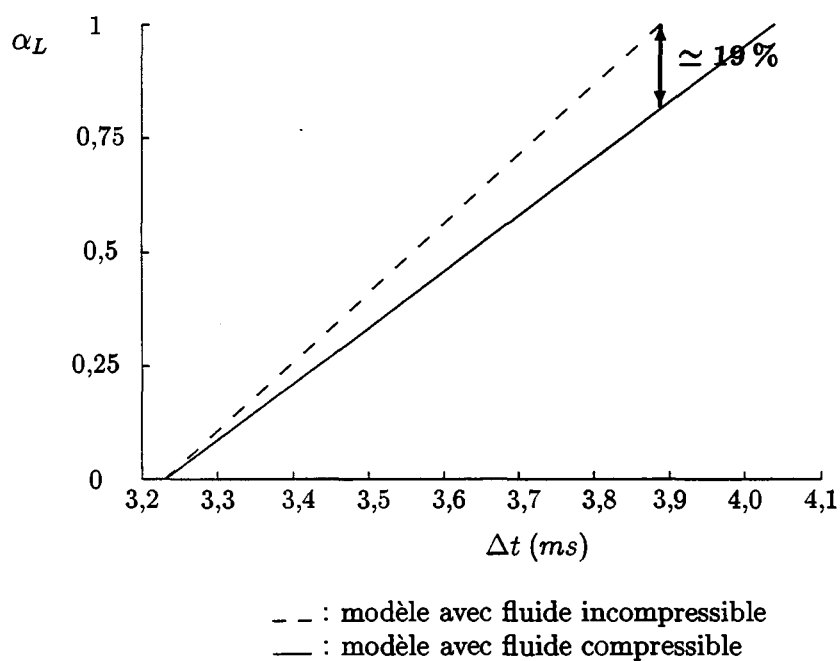


FIG. 5.9: α_L calculé à partir de la mesure de la durée de propagation de l'onde de torsion dans un guide partiellement immergé dans du diiodométhane

5.4.3 Exemple avec un fluide diphasique

Ce travail de thèse a permis d'inclure la compressibilité du fluide environnant dans la modélisation du fonctionnement du guide d'ondes. Cela n'était pas nécessaire pour une utilisation dans de l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique, mais le devient si on désire se servir de la sonde pour mesurer des niveaux en réacteur à eau pressurisée, où le fluide environnant peut devenir diphasique. En effet, la présence de bulles introduit une forte compressibilité.

Or, la prise en compte de la compressibilité nous a conduit à une nouvelle expression de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion dans le guide :

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu J + \rho_f A \frac{\pi h^4}{2} \omega^2}{\rho_s I_s + \rho_f \frac{\pi h^4}{8} + \frac{\rho_f}{c_f^2} \frac{\pi h^4}{2} A \omega^2}} \quad (5.55)$$

L'utilisation de la sonde en milieu diphasique est donc possible si on est capable d'exprimer ρ_f et c_f dans ce type de milieu. De manière générale, ces quantités dépendent de la taille, du nombre et de la forme des bulles, de la fréquence d'excitation de l'onde ...

Pour donner une première idée des résultats que l'on peut obtenir avec un fluide diphasique, nous avons choisi le modèle très simple présenté par P. ARZELIES dans [48]. Nous considérons un mélange contenant de l'eau et une densité donnée de bulles d'air de taille uniforme, de rayon suffisamment petit (typiquement inférieur à 500 μm), de façon à pouvoir caractériser un milieu diphasique homogène équivalent, avec une masse volumique et une compressibilité adéquates. Supposons de plus que la fréquence de résonance des bulles est beaucoup plus grande que la fréquence de l'onde de torsion (100 kHz), pour considérer qu'il y a équilibre thermodynamique entre les bulles et le liquide. Nous pouvons alors définir les grandeurs thermodynamiques du mélange en fonction de celles de ces constituants et du rapport τ entre le volume des bulles et le volume total du mélange :

$$\rho_f = \tau \rho_a + (1 - \tau) \rho_e \quad (5.56)$$

$$\chi_f = \tau \chi_a + (1 - \tau) \chi_e$$

ρ_e et ρ_a sont respectivement les masses volumiques de l'eau et de l'air, χ_e et χ_a respectivement les compressibilités de l'eau et de l'air.

Or, en milieu homogène (voir par exemple [44], chapitre 1, p.15) :

$$c_f^2 = \frac{1}{\rho_f \chi_f} \quad (5.57)$$

En considérant que $\rho_a \ll \rho_e$, $\chi_e \ll \chi_a$ et que le phénomène est adiabatique, il vient :

$$c_f = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 - \tau)^2}{c_e^2} + \frac{\tau^2}{c_a^2} + \frac{\tau(1 - \tau)\rho_e}{\gamma P_0}}} \quad (5.58)$$

où $\gamma = 1,4$ est le rapport des chaleurs spécifiques et $P_0 = 101\,300$ Pa est la pression atmosphérique.

La figure 5.10 représente les résultats du calcul de α_L à partir de la durée de propagation simulée de l'onde de torsion dans le guide immergé dans le mélange. Les données numériques sont $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$, $\rho_e = 998$ kg/m³, $\rho_a = 1,3$ kg/m³. On met en évidence une différence de 47 % entre α_L obtenu en considérant le mélange comme incompressible et α_L obtenu grâce à notre modèle, pour une durée de propagation de l'onde de torsion de 3,43 ms.

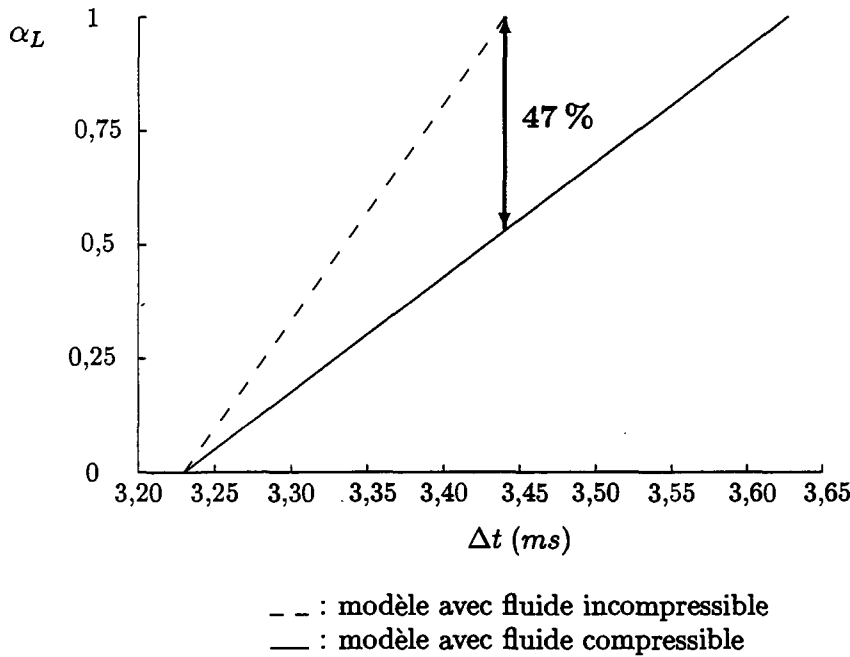


FIG. 5.10: α_L calculé à partir de la mesure de la durée de propagation de l'onde de torsion dans un guide partiellement immergé dans un mélange contenant de l'eau et une densité donnée de bulles d'air de taille uniforme

5.5 Conséquences de l'approximation "grandes longueurs d'ondes"

Revenons maintenant sur un point particulier de notre modélisation, qui *limite* sa validité : l'approximation "grandes longueurs d'ondes" (prise en compte à partir du paragraphe 4.4 où elle est réalisée) présente l'avantage de conduire à des expressions analytiques, mais restreint aussi le choix du fluide environnant. De plus, elle ne permet pas de prendre en compte la surface entre l'air et le fluide dans le modèle.

5.5.1 Domaine de validité des résultats obtenus

L'approximation “grandes longueurs d'ondes” restreint la validité de la modélisation de la sonde à onde de torsion, en imposant que la célérité du son dans le fluide environnant soit supérieure à $d \times f$ (voir page 69), où d est une dimension caractéristique de la section transversale de la sonde et f est la fréquence d'excitation de l'onde de torsion. Dans le cadre de notre étude, $d \simeq 6 \cdot 10^{-3}$ m et $f = 100$ kHz : on doit donc s'assurer que $c_f \gg 600$ m/s. Cette condition est bien vérifiée dans le cas où le fluide environnant est de l'eau à 20°C et à la pression atmosphérique, car alors $c_f \simeq 1500$ m/s. Elle est déjà plus contestable pour l'eau à 325°C et $1,5 \cdot 10^7$ Pa, où $c_f \simeq 783$ m/s, cas qui correspond pourtant aux conditions de fonctionnement en réacteur à eau pressurisée.

Rappelons la raison pour laquelle nous avons effectué cette approximation : nous devons résoudre le problème du calcul de $p(\xi_0, \eta, z)$, transformée de Fourier inverse de l'expression suivante (voir page 69) :

$$\hat{p}(\xi_0, \eta, Z) \simeq \rho_f \omega^2 \frac{\pi h^2}{2} \hat{\theta}_{[\alpha, \beta]}(Z) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{2m}^o(K_f h, \cos \eta)}{M_{2m}^o(K_f h)} \frac{H_{2m}^o(K_f h, \text{ch } \xi_0)}{H_{2m}^o{}'(K_f h, \text{ch } \xi_0)} B_2^o(K_f h, 2m) \quad (5.59)$$

Cette opération aurait pu être réalisée *numériquement*, sans restreindre la validité de la modélisation. Cependant, au cours de cette thèse, nous avons toujours cherché des expressions *analytiques* des résultats : en effet, ces dernières permettent une bonne compréhension des phénomènes mis en jeu. Par exemple, nous avons obtenu une formule de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion (équation (5.5)) qui nous a permis de mettre en évidence les termes dus à la compressibilité du fluide environnant.

5.5.2 Problème de la surface libre

Telle que l'approximation “grandes longueurs d'ondes” est réalisée, la présence de la surface entre le fluide et l'air n'a aucune influence sur les résultats (voir paragraphe 4.5). Ici encore, une résolution numérique nous permettrait d'être plus précis. Cependant, l'objectif fixé d'obtenir une expression analytique ne serait pas atteint.

Nous avons tenté sans succès une autre méthode de résolution, consistant en l'approximation du champ diffracté seul. Mais même sans prendre en compte la surface libre, on aboutit à une impasse. Expliquons en effet cette démarche. On écrit :

$$p(\xi_0, \eta, z) = p^I(\xi_0, \eta, z) + p^D(\xi_0, \eta, z) \quad (5.60)$$

Cette décomposition est liée à la décomposition de la fonction de Green en une partie en champ libre et une partie due à la diffraction (voir page 60).

- ♦ $p^D(\xi_0, \eta, z)$ est calculé à l'aide de l'approximation “grandes longueurs d'ondes” de $\hat{p}^D(\xi_0, \eta, Z)$ de la même manière que $p(\xi_0, \eta, z)$ est calculé à partir de $\hat{p}(\xi_0, \eta, Z)$ au paragraphe 4.4. Tous calculs faits, on obtient une expression similaire à celle

obtenue pour $p(\xi_0, \eta, z)$ au paragraphe 4.4.3 :

$$p^D(\xi_0, \eta, z) = -\frac{\rho_f \omega^2 h^2}{8} \left\{ \theta_{[\alpha, \beta]}(z) \left\{ (1 + e^{-4\xi_0} + A' k_f^2) \sin(2\eta) - B' k_f^2 \sin(4\eta) \right\} + \frac{\partial^2 \theta_{[\alpha, \beta]}}{\partial z^2} \left\{ A' \sin(2\eta) - B' \sin(4\eta) \right\} \right\} \quad (5.61)$$

où :

$$A' = h^2 \frac{3e^{-2\xi_0} + 2e^{2\xi_0} - e^{-6\xi_0}}{24} \quad \text{et} \quad B' = h^2 \frac{1 + e^{-4\xi_0}}{48} \quad (5.62)$$

Ce résultat nous satisfait, mais le problème se pose à l'étape suivante.

♦ pour calculer $p^I(\xi_0, \eta, z)$, on écrit que :

$$\mathcal{G}^I(\xi_0, \eta, \eta', z, z') = \frac{-e^{-ik_f \rho(\xi_0, \eta, \eta', z, z')}}{4\pi \rho(\xi_0, \eta, \eta', z, z')} \quad (5.63)$$

En poursuivant les calculs, on obtient :

$$p^I(\xi_0, \eta, z) = -\rho_f \omega^2 h^2 \int_{\alpha}^{\beta} \theta(z') \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik_f \rho(\xi_0, \eta, \eta', z, z')}}{4\pi \rho(\xi_0, \eta, \eta', z, z')} \cos \eta' \sin \eta' d\eta' dz' \quad (5.64)$$

qu'on n'a pas réussi à calculer sans recours aux méthodes numériques.

Chapitre 6

Conclusion

Contexte

Afin de renforcer l'instrumentation existante pour la mesure de niveau d'eau dans les enceintes pressurisées des REP, Réacteurs à Eau Pressurisée, le Département d'Études des Réacteurs du Commissariat à l'Énergie Atomique s'intéresse à une méthode acoustique utilisant une sonde à onde de torsion. Il s'agit d'une technique qui exploite la variation de la célérité d'une onde de torsion dans un barreau métallique non axisymétrique en fonction des caractéristiques du milieu environnant. Antérieurement à cette thèse, des modélisations ont été établies pour une sonde plongée dans un fluide monophasique et considéré incompressible. Cependant, en situation accidentelle, dépressurisation avec fuite par exemple, le fluide peut devenir diphasique, et la présence de bulles introduit une forte compressibilité. Dans ce cas, des expériences ont montré que la présence de bulles perturbait le comportement de la sonde. C'est pourquoi nous avons développé un nouveau modèle du fonctionnement de la sonde, prenant en compte la compressibilité du fluide environnant. Nous nous sommes intéressés à l'application de cette technique pour la mesure de niveau d'eau dans les cuves des REP, où il est indispensable que le cœur reste immergé.

État de l'art

Nous avons d'abord dressé un inventaire des travaux réalisés sur le thème de la sonde à onde de torsion, en insistant sur les formulations théoriques. Tous les développements réalisés avant ce travail de thèse supposent que le fluide environnant est monophasique et incompressible, et les méthodes exposées présentent l'inconvénient majeur d'être difficilement généralisables à des fluides moins idéaux. Cependant, les résultats obtenus ont retenu notre attention : en particulier, différents auteurs ont obtenu une expression de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion se propageant dans le guide d'ondes

immergé dans un fluide incompressible.

Hypothèses

Notre souci étant de bien comprendre les phénomènes physiques qui entrent en jeu et de poursuivre les investigations le plus loin possible analytiquement, nous avons posé certaines hypothèses simplificatrices. En particulier, la sonde est un cylindre de section transversale elliptique (nous utilisons donc les coordonnées elliptiques), dont les dimensions sont petites devant la longueur du guide et devant les longueurs d'ondes dans le fluide. Les effets de l'écoulement du fluide et sa viscosité sont négligés, ainsi que les variations de température.

Méthode

Le problème a été abordé en termes de variations d'énergie. Nous avons considéré le système mécanique constitué par la sonde, et avons écrit le principe de Hamilton, qui relie les variations d'énergies cinétique et potentielle du système au travail élémentaire exercé par les forces extérieures agissant sur ce système, dans notre cas de deux natures : la charge du fluide à la surface du guide d'ondes, et le travail dû au moment imposé pour générer la torsion.

Étude de la torsion du guide d'ondes

Afin d'obtenir les expressions des énergies cinétique et de déformation de la sonde, l'étude de la torsion du guide d'ondes a été entreprise. Un état de l'art nous a permis de passer en revue différentes écritures de l'équation différentielle vérifiée par l'angle de torsion, ou équation de torsion, en fonction des paramètres physiques considérés : gauchissement, distorsion . . . Nous avons ensuite établi un modèle à partir des hypothèses propres à notre problème. Utilisant des résultats de mécanique des milieux continus, nous avons écrit les équations d'élasticité du guide, nous permettant d'exprimer les composantes du déplacement du guide sollicité en torsion, son énergie cinétique, son énergie de déformation. Nous avons également établi l'équation de torsion du guide dans le vide. L'étude du cas de l'onde harmonique libre nous a permis de constater que l'inertie de gauchissement était négligeable, donc de simplifier cette équation, pour finalement obtenir celle du modèle le plus simple, celui de B. DE SAINT-VENANT.

Calcul de la charge fluide

Il nous restait alors à calculer le travail des forces extérieures appliquées au guide d'ondes. Nous nous sommes donc intéressés au fluide environnant, pour évaluer la charge qu'il exerce à la surface du guide. Dans la mesure où il a été supposé compressible, il nous a fallu prendre en compte le rayonnement acoustique lié à la torsion du guide.

Dans un premier temps, nous avons considéré que le fluide occupait un espace indéfini, et nous avons écrit le problème de Neumann lié à l'équation de Helmholtz dans le fluide. Pour simplifier la résolution du problème, le guide a été supposé bafflé. La démarche a alors consisté à calculer la fonction de Green pour exprimer la pression par sa représentation de Green. Nous avons travaillé à l'aide des transformées de Fourier spatiales de ces quantités. La fonction de Green est la somme de deux contributions : l'une en champ libre, l'autre prenant en compte la diffraction par le guide d'ondes. La transformée de Fourier spatiale de la pression à la surface du guide s'exprime en fonction des fonctions de Mathieu, et sa transformée de Fourier spatiale inverse ne peut être calculée analytiquement. Privilégiant l'obtention d'une expression analytique approchée plutôt qu'un résultat numérique exact, nous avons réalisé une approximation "grandes longueurs d'ondes", utilisant l'hypothèse selon laquelle les longueurs d'ondes dans le fluide sont grandes devant les dimensions transversales du guide d'ondes. Pour ce faire, nous avons développé les fonctions de Mathieu en séries de Laurent et de Taylor, et avons obtenu une expression de la transformée de Fourier spatiale de la pression, dont nous avons facilement calculé la transformée de Fourier spatiale inverse. Nous en avons déduit le travail exercé par la pression à la surface du guide.

Dans un second temps, le but final étant la mesure de niveau, il nous a fallu considérer qu'un guide d'ondes peut n'être que partiellement immergé : dans ce cas, le fluide n'occupe plus qu'un demi-espace, avec une surface libre sur laquelle la pression acoustique est nulle. Une méthode d'images a été employée, mais l'approximation "grandes longueurs d'ondes" telle qu'elle est réalisée conduit aux mêmes résultats que lorsque le fluide occupe un espace indéfini.

Obtention du nouveau modèle

Nous connaissions alors tous les termes nécessaires pour appliquer le principe de Hamilton, ce qui nous a permis d'obtenir l'équation de torsion du guide d'ondes immergé dans un fluide compressible, et l'expression de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion. En comparant l'équation de torsion avec celle que nous avons obtenue pour le guide d'ondes dans le vide, nous avons mis en évidence l'influence du fluide : il apporte une inertie

et une raideur supplémentaire. Nous avons vérifié que lorsque le fluide était incompressible, nous retrouvions les résultats de la littérature. De plus, nous avons isolé les termes dus à la prise en compte de la compressibilité. Ces derniers s'expriment en fonction des caractéristiques géométriques de la section transversale du guide d'ondes (demi-distance focale et excentricité de l'ellipse), de la fréquence d'excitation de l'onde de torsion, de la masse volumique du fluide et de la vitesse de propagation du son dans le fluide.

Application à la mesure de niveau - Simulations

Finalement, nous avons appliqué les résultats que nous venions d'obtenir au cas pratique de la mesure de niveau : la relation entre le temps mis par l'onde pour réaliser un aller/retour dans le guide et la proportion de guide immergée fait intervenir la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion dans la partie immergée du guide.

Nous avons ensuite réalisé quelques simulations de calcul de la proportion de guide immergée à partir de la donnée de temps de propagation. Pour certains fluides comme le diiodométhane, la différence entre le cas où la compressibilité est prise en compte et celui où elle ne l'est pas peut atteindre près de 19%. Nous présentons également un exemple avec un modèle très simple de fluide diphasique, pour lequel cette différence atteint 47%.

Perspectives

Dans la mesure où nous avons mis en évidence l'importance de la prise en compte de la compressibilité dans le modèle, nous aimerions maintenant préciser nos résultats théoriques en étudiant l'acoustique des milieux diphasiques. Une étude bibliographique devrait permettre de détailler, dans la formule de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion, les expressions de la masse volumique du fluide et de la vitesse de propagation du son dans le fluide en fonction du nombre et de la taille des bulles, du rapport entre le volume des bulles et le volume total ...

De plus, nous avons présenté dans ce mémoire des résultats analytiques approchés, nous donnant la possibilité d'analyser les quantités physiques mises en jeu, pour la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion par exemple. Il pourrait maintenant être intéressant de s'intéresser à une résolution numérique du problème : cela nous permettrait d'une part, de considérer des guides d'ondes de section transversale quelconque (recours possible à des méthodes d'éléments finis), et d'autre part, d'effectuer des calculs de transformées de Fourier sans avoir recours à l'approximation "grandes longueurs d'ondes", qui, on l'a vu, restreint la validité du modèle.

Par ailleurs, le Laboratoire de Systèmes de Mesures sur les Réacteurs du CEA de

Cadarache dispose d'une maquette de sonde à onde de torsion construite par la société PANAMETRICS. Nous envisageons de l'utiliser prochainement pour tester les résultats théoriques que nous venons d'obtenir.

De plus, l'exploitation de la mesure des fréquences de résonance pourrait se révéler très fructueuse : elles contiennent non seulement une information sur le niveau, mais également des informations pouvant très vraisemblablement permettre la détermination des caractéristiques mécaniques du fluide extérieur (par exemple le taux de bulles).

ANNEXES

Annexe A

Présentation d'une maquette de sonde à onde de torsion

Le Laboratoire de Systèmes de Mesures pour les Réacteurs dispose d'une maquette de démonstration, construite par la société PANAMETRICS. Nous la présentons ici, dans le but d'expliquer le principe de fonctionnement d'une sonde à onde de torsion.

A.1 Le matériel

Le matériel utilisé se compose de trois éléments (Figure A.1) :

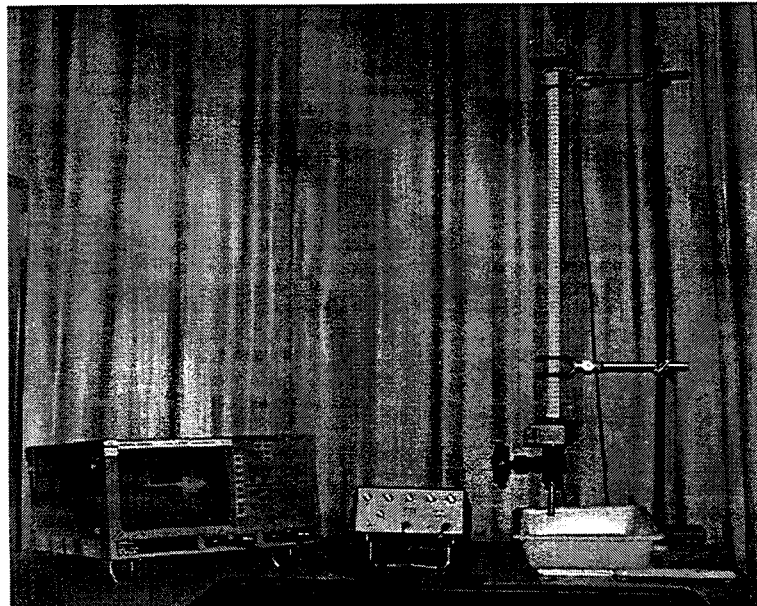


FIG. A.1: Vue d'ensemble du dispositif expérimental

- ♦ le guide d'ondes en acier inoxydable, de longueur 760 mm. Sa section transversale est en forme de losange de 6 mm sur 2 mm. Il est logé dans une éprouvette cylindrique en plexiglass, de diamètre intérieur 25 mm, que l'on peut remplir de fluide ;

- ♦ un émetteur/récepteur PANAMETRICS, qui émet une impulsion électrique et amplifie les signaux reçus ;
- ♦ un oscilloscope numérique, permettant d'analyser les signaux reçus.

Avec cette maquette, on met en évidence expérimentalement une relation entre le niveau de fluide dans l'éprouvette, l , que l'on fait varier, et le temps de propagation de l'onde de torsion dans la sonde, Δt correspondant, que l'on mesure à l'oscilloscope.

A.2 L'excitation de l'onde de torsion

L'excitation de l'onde de torsion est réalisée en attaquant les bords opposés de la section du guide par des ondes d'extension-compression (déplacement longitudinal) synchrones et en phase, véhiculées dans des tiges cylindriques. Ces dernières sont excitées par des capteurs magnétostrictifs placés dans des boîtiers situés derrière la traversée de paroi (Figure A.2). Ces capteurs transforment le signal électrique envoyé par l'émetteur en un signal mécanique véhiculé par les tiges cylindriques. Chaque extrémité de la sonde est soudée à de telles tiges.

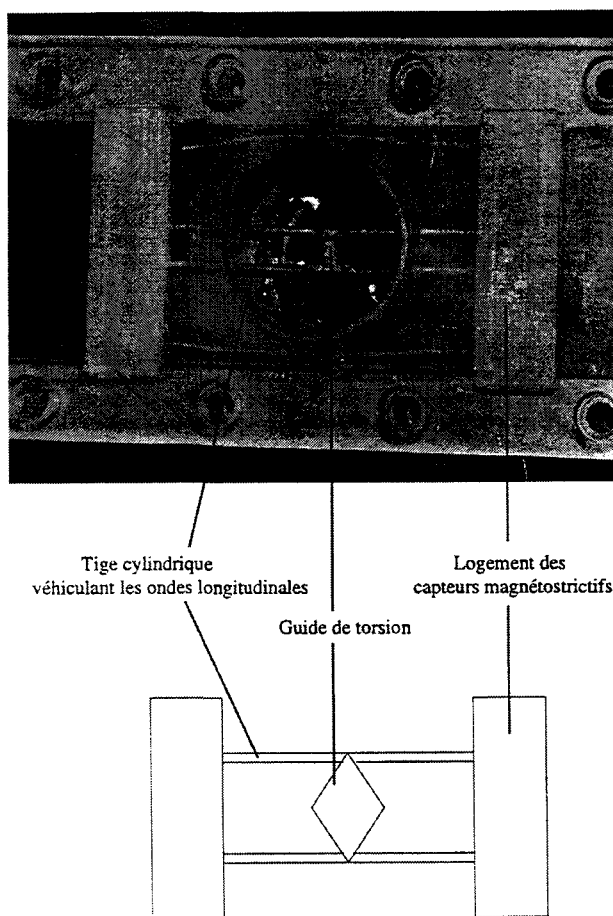


FIG. A.2: Vue de dessus de la sonde

A.3 Choix du mode de fonctionnement de la sonde

Notons que, puisque chaque extrémité de la sonde comporte un jeu de transducteurs, la sonde peut fonctionner selon deux modes (Figure A.3) :

- ♦ en réflexion, l'onde parcourant alors un aller/retour dans le guide. C'est le cas étudié lors des simulations numériques dont les résultats sont présentés dans ce mémoire ;
- ♦ en transmission, entre les deux extrémités du guide (donc avec émission et réflexion sur deux capteurs différents).

L'utilisation en transmission permet de travailler avec de meilleurs rapports signal/bruit ;

L'utilisation en réflexion permet une meilleure sensibilité $\frac{\Delta t}{\Delta l}$, avec Δt variation du temps de propagation et Δl variation du niveau de liquide à mesurer.

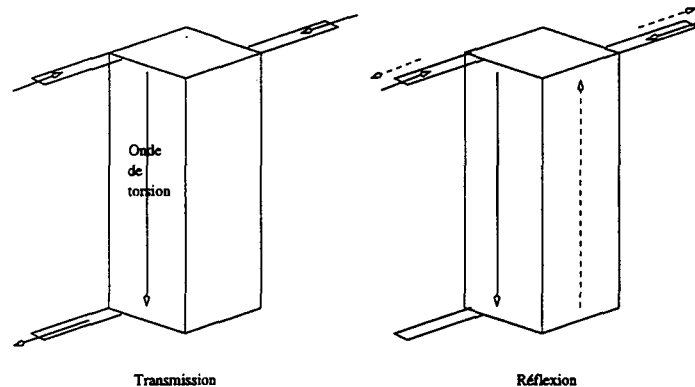


FIG. A.3: Mode de fonctionnement de la sonde : transmission ou réflexion

Annexe B

Les coordonnées elliptiques

Nous introduisons le système des coordonnées elliptiques. Après quelques définitions, nous nous intéressons à l'expression des opérateurs différentiels classiques (gradient, Laplacien ...) dans ce système de coordonnées.

Les coordonnées elliptiques sont présentées dans divers ouvrages. On retiendra celui de McLACHLAN [49] sur les fonctions de Mathieu. L'expression des opérateurs différentiels est calculée selon la méthode présentée par ANGOT [43].

B.1 Le système des coordonnées elliptiques

On travaille ici en deux dimensions, et on introduit les coordonnées elliptiques (ξ, η) . Pour élargir aux trois dimensions, il faut ajouter la troisième coordonnée z ($z = x_3$), et le vecteur de base $\vec{a}_z = \vec{k}$ le long de l'axe du cylindre. On parle alors de coordonnées du cylindre elliptique.

B.1.1 Définition

Écrivons $x_1 + i x_2 = h \operatorname{ch}(\xi + i \eta)$. Cette écriture complexe sert pour écrire facilement certaines équations classiques - équation de propagation par exemple - en coordonnées elliptiques. En égalant parties réelle et imaginaire, on obtient la relation entre les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et les coordonnées elliptiques (ξ, η) :

$$\begin{cases} x_1 = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ x_2 = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Alors :

$$\frac{x_1^2}{h^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{x_2^2}{h^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1 \quad (\text{B.2})$$

et :

$$\frac{x_1^2}{h^2 \cos^2 \eta} - \frac{x_2^2}{h^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (\text{B.3})$$

(B.2) représente une famille d'ellipses homofocales de grands axes $2a = 2h \operatorname{ch} \xi$ et de petits axes $2b = 2h \operatorname{sh} \xi$, les foyers communs étant les points $x_1 = \pm h, x_2 = 0$.

(B.3) représente une famille d'hyperboles homofocales.

Les deux familles de coniques se coupent de façon orthogonale (Figure B.1), et chaque intersection correspond à un point défini par les coordonnées (B.1). À tout couple (x_1, x_2) correspond un et un seul couple (ξ, η) .

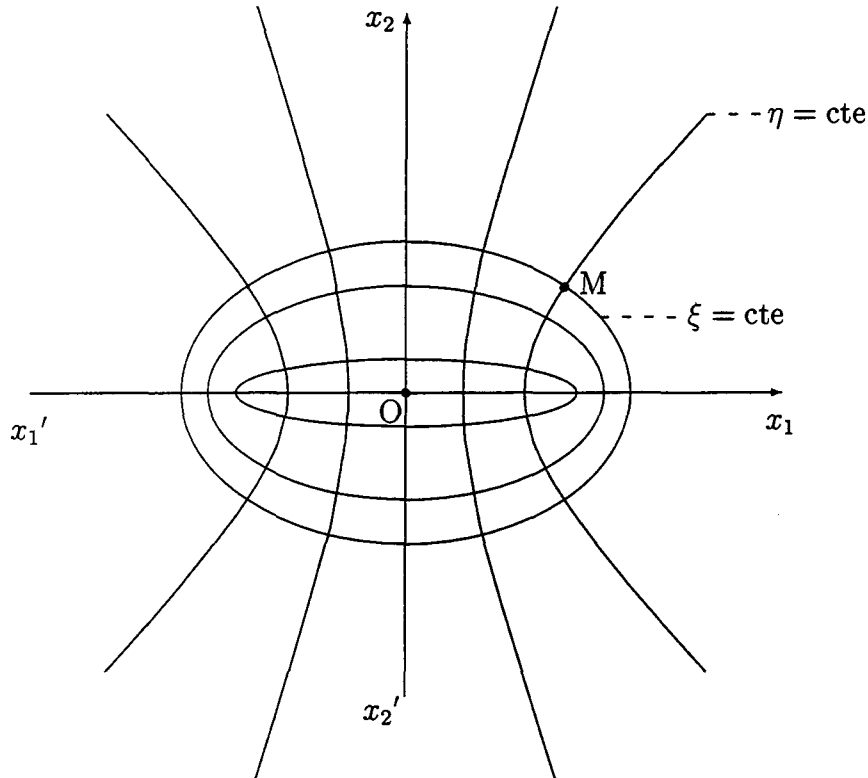


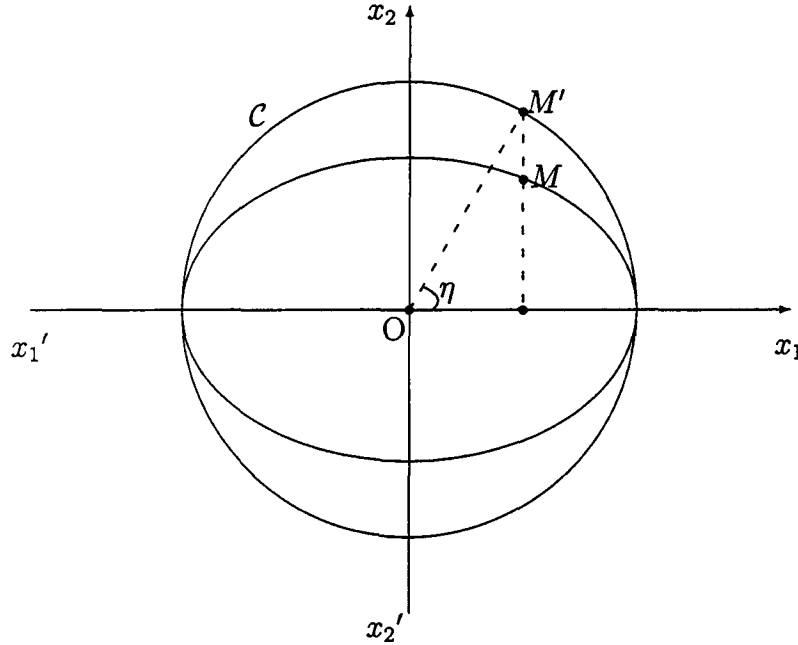
FIG. B.1: Système des coordonnées elliptiques

L'angle η

Il varie de 0 à 2π pour faire le tour de l'ellipse. Sa représentation graphique est donnée sur la figure B.2 : soit $M(\xi, \eta)$ un point et soit \mathcal{C} le cercle circonscrit à l'ellipse sur laquelle M se trouve. Soit M' le point de \mathcal{C} de même abscisse que M . Alors η est l'angle (Ox_1, OM') : c'est la seconde coordonnée polaire de M' .

Cas particuliers :

- ♦ $\eta = 0$: d'après (B.1), lorsque ξ varie, on décrit la demi-droite $[Ox_1)$.
- ♦ $\eta = \frac{\pi}{2}$: de même, on montre qu'on décrit la demi-droite $[Ox_2)$.
- ♦ $\eta = \pi$: on décrit $[Ox_1')$.
- ♦ $\eta = \frac{3\pi}{2}$: on décrit $[Ox_2')$.

FIG. B.2: Représentation graphique de l'angle η

La coordonnée ξ

ξ varie avec l'excentricité de l'ellipse : soit e cette excentricité, alors :

$$h = a e \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{\text{ch } \xi} \quad (\text{B.4})$$

Cas limites

- ♦ Si $e \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow 0$), alors $a \rightarrow h$: ainsi, l'ellipse dégénère en un segment de largeur $2h$.
- ♦ Avec a constant, si $e \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow \infty$), l'ellipse devient un cercle de rayon a . Comme $h = a e$, $h \rightarrow 0$, les foyers fusionnent à l'origine du repère.

De plus, $h \text{ch } \xi \rightarrow h \text{sh } \xi \rightarrow a$. Finalement, si $e \rightarrow 0$ et $\eta \rightarrow \varphi$, on retrouve les coordonnées polaires.

B.1.2 Vecteurs de base

En un point M , les deux vecteurs de base \vec{a}_η et \vec{a}_ξ sont portés respectivement par les tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole qui lui est orthogonale (Figure B.3).

On utilise ici des résultats classiques d'analyse tensorielle (voir par exemple la présen-

tation de [50], au chapitre : *Vector and tensor fields*). Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, alors :

$$\vec{a}_\xi = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right\|^{-1} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{a}_\eta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right\|^{-1} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.6})$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{a}_\xi = \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \xi \vec{i} + \sin \eta \operatorname{ch} \xi \vec{j}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{a}_\eta = \frac{-\operatorname{ch} \xi \sin \eta \vec{i} + \operatorname{sh} \xi \cos \eta \vec{j}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} \quad (\text{B.8})$$

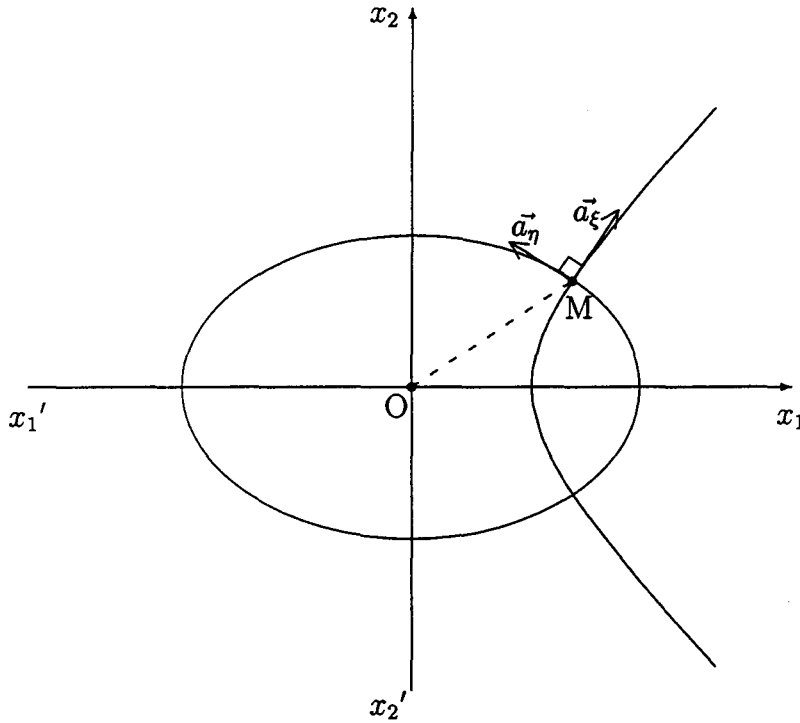


FIG. B.3: Vecteurs de base en coordonnées elliptiques

B.1.3 Coordonnées elliptiques d'un vecteur

Soit \vec{A} un vecteur. On désire connaître ses coordonnées elliptiques A_ξ et A_η en fonction de ses coordonnées cartésiennes A_1 et A_2 .

On écrit :

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} = A_\xi \vec{a}_\xi + A_\eta \vec{a}_\eta \quad (\text{B.9})$$

D'après les expressions (B.7) de \vec{a}_ξ et (B.8) de \vec{a}_η , (B.9) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} \\ &= \left(\frac{\cos \eta \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\xi - \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\eta \right) \vec{i} \\ &+ \left(\frac{\sin \eta \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\xi - \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\eta \right) \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Par identification :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\xi - \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\eta \\ A_2 = \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\xi + \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} A_\eta \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

En inversant ce système, on obtient, tous calculs faits :

$$\begin{cases} A_\xi = \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \xi A_1 + \sin \eta \operatorname{ch} \xi A_2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} \\ A_\eta = \frac{-\sin \eta \operatorname{ch} \xi A_1 + \cos \eta \operatorname{sh} \xi A_2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

B.2 Expression des opérateurs différentiels classiques

On a vu précédemment que le système de coordonnées elliptiques était un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Pour ce type de système, ANGOT [43], par exemple, calcule les opérateurs différentiels classiques. Nous appliquons les résultats qu'il obtient pour calculer l'expression des gradient, rotationnel, divergence et Laplacien en coordonnées elliptiques.

B.2.1 En coordonnées curvilignes orthogonales

Soit (x_1, x_2, x_3) le système de coordonnées cartésiennes, et (u, v, w) celui des coordonnées curvilignes orthogonales. Alors l'élément de longueur qui s'écrivait en coordonnées cartésiennes :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (\text{B.13})$$

s'écrit :

$$ds^2 = l_1^2 du^2 + l_2^2 dv^2 + l_3^2 dw^2 \quad (\text{B.14})$$

avec :

$$\begin{aligned} l_1^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 \\ l_2^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 \\ l_3^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial w}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

l_1 , l_2 et l_3 sont appelées *unités de longueur locales* (ou encore *facteurs d'échelle*).

Soit V un scalaire et $\vec{A}(A_u, A_v, A_w)$ un vecteur. On peut ensuite démontrer l'écriture des opérateurs différentiels suivants (voir [43]) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{cases} \frac{1}{l_1} \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{1}{l_2} \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{1}{l_3} \frac{\partial V}{\partial w} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{l_2 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (l_3 A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (l_2 A_v) \right\} \\ \frac{1}{l_1 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (l_1 A_u) - \frac{\partial}{\partial u} (l_3 A_w) \right\} \\ \frac{1}{l_1 l_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (l_2 A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (l_1 A_u) \right\} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (l_2 l_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (l_3 l_1 A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (l_1 l_2 A_w) \right\} \quad (\text{B.18})$$

$$\Delta V = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l_2 l_3}{l_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l_3 l_1}{l_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{l_1 l_2}{l_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right\} \quad (\text{B.19})$$

D'autre part, on utilise la définition suivante du laplacien d'un vecteur :

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \quad (\text{B.20})$$

B.2.2 Application aux coordonnées elliptiques

Unités de longueurs locales

On a :

$$\begin{cases} x_1 = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ x_2 = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

On applique (B.15) et on trouve les unités de longueur suivantes :

$$\begin{cases} l_1^2 = h^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \\ l_2^2 = h^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \\ l_3^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Dans la suite de cette annexe, on notera toujours :

$$\Delta = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \quad (\text{B.23})$$

Il vient :

$$l_1 = l_2 = h \Delta \quad \text{et} \quad l_3 = 1 \quad (\text{B.24})$$

Opérateurs différentiels

En remplaçant l_1 , l_2 , et l_3 par leurs valeurs (B.24) dans les équations (B.16) à (B.19), et en poursuivant les calculs, on trouve les expressions suivantes des opérateurs différentiels elliptiques :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = \begin{cases} \frac{1}{h\Delta} \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{1}{h\Delta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{h\Delta} \frac{\partial A_z}{\partial \eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\xi}{\partial z} - \frac{1}{h\Delta} \frac{\partial A_z}{\partial \xi} \\ \frac{1}{h\Delta^3} (\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi A_\eta - \sin \eta \cos \eta A_\xi) + \frac{1}{h\Delta} \left(\frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} \right) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} = & \frac{1}{h\Delta^3} \left(\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi A_\xi + \sin \eta \cos \eta A_\eta \right) \\ & + \frac{1}{h\Delta} \left(\frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\Delta V = \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{B.28})$$

De plus, en utilisant les résultats précédents et en appliquant (B.20), on obtient :

$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{2 \cos \eta \sin \eta}{\Delta^2} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{2 \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi}{\Delta^2} \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \right. \\ \quad \left. - \frac{\cos^2 \eta \sin^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{sh}^2 \xi}{\Delta^4} A_\xi + \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial z^2} \\ \\ \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{2 \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi}{\Delta^2} \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} - \frac{2 \cos \eta \sin \eta}{\Delta^2} \frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} \right. \\ \quad \left. - \frac{\cos^2 \eta \sin^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{sh}^2 \xi}{\Delta^4} A_\eta + \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial z^2} \\ \\ \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

Annexe C

Quelques résultats sur les fonctions de Bessel et de Neumann

Les résultats énoncés ici sont ceux auxquels nous avons recours dans ce mémoire. On en trouve de nombreux autres dans le livre de M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN [46], dont le chapitre 9 de F.W.J. OLIVER est consacré aux fonctions de Bessel.

C.1 Définition

On appelle *équation de Bessel* l'équation différentielle :

$$\frac{d\Phi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\Phi}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \Phi = 0 \quad (\text{C.1})$$

Elle admet des solutions :

- ♦ de première espèce, $J_{\pm n}(z)$, les fonctions de Bessel ;
- ♦ de deuxième espèce, $N_n(z)$, les fonctions de Neumann ;
- ♦ de troisième espèce, $H_n^{(1)}(z)$ et $H_n^{(2)}(z)$, les fonctions de Hankel.

C.2 Les dérivées

Soit Φ toute solution ou combinaison linéaire de solutions de l'équation (C.1). Alors Φ vérifie la relation de récurrence :

$$\Phi_{n-1}(z) - \Phi_{n+1}(z) = 2\Phi_n'(z) \quad (\text{C.2})$$

C.3 Approximation “grandes longueurs d’ondes”

Les fonctions de Bessel d’indice entier se développent en séries de la façon suivante ([46] p. 360) :

$$J_n(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{C.3})$$

Dans le cadre de l’approximation “grandes longueurs d’ondes” du paragraphe 4.4, on s’intéresse aux fonctions de Bessel de type $J_n(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0})$, où $K_f h$ est petit. De (C.3), on déduit les développements limités suivants :

$$J_0\left(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0}\right) = 1 - \frac{(K_f h)^2}{16 e^{2\epsilon_0}} + \frac{(K_f h)^4}{1024 e^{4\epsilon_0}} - \frac{(K_f h)^6}{147456 e^{6\epsilon_0}} + \mathcal{O}(K_f h)^8 \quad (\text{C.4})$$

$$J_1\left(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0}\right) = \frac{(K_f h)}{4 e^{\epsilon_0}} - \frac{(K_f h)^3}{128 e^{3\epsilon_0}} + \frac{(K_f h)^5}{12288 e^{5\epsilon_0}} + \mathcal{O}(K_f h)^7 \quad (\text{C.5})$$

$$J_2\left(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0}\right) = \frac{(K_f h)^2}{32 e^{2\epsilon_0}} - \frac{(K_f h)^4}{1536 e^{4\epsilon_0}} + \frac{(K_f h)^6}{196608 e^{6\epsilon_0}} + \mathcal{O}(K_f h)^8 \quad (\text{C.6})$$

$$J_3\left(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0}\right) = \frac{(K_f h)^3}{384 e^{3\epsilon_0}} - \frac{(K_f h)^5}{24576 e^{5\epsilon_0}} + \frac{(K_f h)^7}{3932160 e^{7\epsilon_0}} + \mathcal{O}(K_f h)^8 \quad (\text{C.7})$$

$$J_4\left(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0}\right) = \frac{(K_f h)^4}{6144 e^{4\epsilon_0}} - \frac{(K_f h)^6}{491520 e^{6\epsilon_0}} + \mathcal{O}((K_f h))^8 \quad (\text{C.8})$$

$$J_5\left(\frac{1}{2}K_f h e^{-\epsilon_0}\right) = \frac{(K_f h)^5}{122880 e^{5\epsilon_0}} - \frac{(K_f h)^7}{11796480 e^{7\epsilon_0}} + \mathcal{O}(K_f h)^8 \quad (\text{C.9})$$

Par ailleurs, les fonctions de Neumann se développent ainsi ([46] p. 360) :

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Log}\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right\} J_0(z) \quad (\text{C.10})$$

$$+ \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^3}{(3!)^2} - \dots \right\}$$

$$N_n(z) = -\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}z^2\right)^k + \frac{2}{\pi} \text{Log}\left(\frac{1}{2}z\right) J_n(z) \quad (\text{C.11})$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!}$$

où $\Psi(n)$ est la fonction Psi qui, lorsque n est un entier, est définie par :

$$\Psi(1) = -\gamma \quad \Psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \quad (C.12)$$

et γ est la constante d’Euler qui vaut :

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} - \text{Log } m \right] \\ &= 0,5772156649... \end{aligned} \quad (C.13)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} N_0\left(\frac{1}{2}K_f h e^{\xi_0}\right) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma - \text{Log}(2) + \text{Log}\left(\frac{e^{\xi_0}}{2}\right) + \text{Log}(K_f h) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(K_f h)^2 \\ N_1\left(\frac{1}{2}K_f h e^{\xi_0}\right) &= \frac{-4}{e^{\xi_0} \pi (K_f h)} \\ &\quad + \frac{e^{\xi_0}}{2\pi} \left(\frac{-1+2\gamma}{2} - \text{Log}(2) + \text{Log}\left(\frac{e^{\xi_0}}{2}\right) + \text{Log}(K_f h) \right) (K_f h) \\ &\quad + \mathcal{O}(K_f h)^3 \\ N_2\left(\frac{1}{2}K_f h e^{\xi_0}\right) &= \frac{-16}{e^{2\xi_0} \pi (K_f h)^2} - \frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(K_f h)^2 \\ N_3\left(\frac{1}{2}K_f h e^{\xi_0}\right) &= \frac{-128}{e^{3\xi_0} \pi (K_f h)^3} - \frac{4}{e^{\xi_0} \pi (K_f h)} - \frac{e^{\xi_0} (K_f h)}{8\pi} + \mathcal{O}(K_f h)^3 \\ N_4\left(\frac{1}{2}K_f h e^{\xi_0}\right) &= \frac{-1536}{e^{4\xi_0} \pi (K_f h)^4} - \frac{32}{e^{2\xi_0} \pi (K_f h)^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{2\xi_0} (K_f h)^2}{96\pi} \\ &\quad + \mathcal{O}(K_f h)^4 \\ N_5\left(\frac{1}{2}K_f h e^{\xi_0}\right) &= \frac{-24576}{e^{5\xi_0} \pi (K_f h)^5} - \frac{384}{e^{3\xi_0} \pi (K_f h)^3} - \frac{4}{e^{\xi_0} \pi (K_f h)} \\ &\quad - \frac{e^{\xi_0} (K_f h)}{24\pi} + \mathcal{O}(K_f h)^3 \end{aligned} \quad (C.14)$$

Annexe D

Les fonctions de Mathieu

Ici encore, nous ne présentons que les résultats que nous utilisons dans ce mémoire. On trouve de plus amples développements dans la littérature, notamment dans [49] et dans un ouvrage plus récent, [51], entièrement consacrés à ces fonctions.

Pour le paragraphe D.3, nous nous sommes particulièrement inspirés de [52], où les auteurs s'intéressent à l'équation d'ondes en coordonnées elliptiques, et présentent clairement et succinctement les fonctions nécessaires à sa résolution : les fonctions de Mathieu. Les résultats du paragraphe D.4 sont majoritairement tirés de [45].

D.1 Équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques

On rappelle que :

$$\begin{cases} x_1 = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ x_2 = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Utilisons la notation complexe :

$$\begin{cases} z = x_1 + i x_2 \\ \bar{z} = x_1 - i x_2 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

alors :

$$z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{et} \quad 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{D.3})$$

De plus, (D.1) et (D.2) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} z = h \operatorname{ch} E \\ \bar{z} = h \operatorname{ch} \bar{E} \end{cases} \quad \text{où} \quad E = \xi + i \eta \quad (\text{D.4})$$

Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h \operatorname{sh} E} \frac{\partial}{\partial E} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{h \operatorname{sh} \bar{E}} \frac{\partial}{\partial \bar{E}} \quad (\text{D.5})$$

et :

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{h^2 \operatorname{sh} E \operatorname{sh} \bar{E}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{D.6})$$

Or :

$$\operatorname{sh} E \operatorname{sh} \bar{E} = \operatorname{sh} (\xi + i \eta) \operatorname{sh} (\xi - i \eta) = \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta \quad (\text{D.7})$$

On obtient finalement, en utilisant (D.3) et (D.6) :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{h^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{D.8})$$

Donc l'équation de Helmholtz s'écrit en coordonnées elliptiques :

$$\frac{1}{h^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) + k^2 \phi = 0 \quad (\text{D.9})$$

D.2 Équation de Mathieu et équation de Mathieu modifiée

Pour résoudre (D.9), on utilise une méthode de séparation de variables. On pose :

$$\phi(\xi, \eta) = \phi_\xi(\xi) \phi_\eta(\eta) \quad (\text{D.10})$$

d'où, en reportant dans (D.9) :

$$\frac{\phi_\xi''}{\phi_\xi} + k^2 h^2 \operatorname{ch}^2 \xi = k^2 h^2 \cos^2 \eta - \frac{\phi_\eta''}{\phi_\eta} \quad (\text{D.11})$$

Le premier membre de (D.11) ne dépend que de ξ , et son second membre de dépend que de η . Par conséquent, on pose qu'ils sont égaux à une constante $\tilde{\gamma}$. Alors (D.11) nous permet d'écrire :

$$\phi_\eta'' + (\tilde{\gamma} - k^2 h^2 \cos^2 \eta) \phi_\eta = 0 \quad (\text{D.12})$$

et :

$$\phi_\xi'' - (\tilde{\gamma} - k^2 h^2 \operatorname{ch}^2 \xi) \phi_\xi = 0 \quad (\text{D.13})$$

(D.12) est appelée *équation de Mathieu*. Si on remplace ξ par $i\xi$ dans (D.13), on obtient (D.12). Par conséquent, (D.13) est appelée *équation de Mathieu modifiée*.

D.3 Fonctions de Mathieu et fonctions de Mathieu modifiées

Les solutions de (D.12) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi_\eta(\eta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ a_m^e S_m^e(kh, \cos \eta) + b_m^e F_m^e(kh, \cos \eta) \right\} \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m^e, \quad m = 0, 1, \dots \\ \phi_\eta(\eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m^o S_m^o(kh, \cos \eta) + b_m^o F_m^o(kh, \cos \eta) \right\} \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m^o, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{D.14}$$

$S_m^e(kh, \cos \eta)$ et $S_m^o(kh, \cos \eta)$ sont les fonctions de Mathieu de première espèce et d'ordre m , respectivement paires et impaires. Ce sont des fonctions périodiques, de période π ou 2π , selon que m est pair ou impair.

$F_m^e(kh, \cos \eta)$ et $F_m^o(kh, \cos \eta)$ sont les fonctions de Mathieu de deuxième espèce et d'ordre m . Ces fonctions ne sont pas périodiques.

Les solutions de (D.13) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi_\xi(\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ c_m^e J_m^e(kh, \operatorname{ch} \xi) + d_m^e N_m^e(kh, \operatorname{ch} \xi) \right\} \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m^e, \quad m = 0, 1, \dots \\ \phi_\xi(\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m^o J_m^o(kh, \operatorname{ch} \xi) + d_m^o N_m^o(kh, \operatorname{ch} \xi) \right\} \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m^o, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{D.15}$$

$J_m^e(kh, \operatorname{ch} \xi)$ et $J_m^o(kh, \operatorname{ch} \xi)$ sont les fonctions de Mathieu modifiées de première espèce et d'ordre m , respectivement paires et impaires. Ce sont des fonctions périodiques, de période $i\pi$ ou $i2\pi$, selon que m est pair ou impair.

$N_m^e(kh, \operatorname{ch} \xi)$ et $N_m^o(kh, \operatorname{ch} \xi)$ sont les fonctions de Mathieu modifiées de deuxième espèce et d'ordre m . Ces fonctions ne sont pas périodiques.

On peut poser :

$$\begin{aligned}H_m^e &= J_m^e + i N_m^e \\ H_m^o &= J_m^o + i N_m^o\end{aligned}\tag{D.16}$$

D.4 Développement en séries

D.4.1 Développement en séries de Fourier des fonctions de Mathieu

Les fonctions de Mathieu périodiques sont de 4 types différents. Leurs développements en séries de Fourier s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 S_{2m}^e(kh, \cos \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^e(kh, 2m) \cos(2n \eta) \\
 S_{2m+1}^e(kh, \cos \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}^e(kh, 2m+1) \cos((2n+1) \eta) \\
 S_{2m}^o(kh, \cos \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}^o(kh, 2m) \sin(2n \eta) \\
 S_{2m+1}^o(kh, \cos \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}^o(kh, 2m+1) \sin((2n+1) \eta)
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Lorsque kh est petit, on peut calculer les premiers coefficients de ces séries ([45] p. 1413) :

$$\begin{aligned}
 S_0^e(kh, \cos \eta) &= \left(1 + \frac{(kh)^2}{8} + \frac{7(kh)^4}{512}\right) - \left(\frac{(kh)^2}{8} + \frac{(kh)^4}{64}\right) \cos(2\eta) \\
 &\quad + \frac{(kh)^4}{512} \cos(4\eta) - \dots \\
 S_1^o(kh, \cos \eta) &= \left(1 + \frac{3(kh)^2}{32} + \frac{13(kh)^4}{3072}\right) \sin \eta - \left(\frac{(kh)^2}{32} + \frac{(kh)^4}{512}\right) \sin(3\eta) \\
 &\quad + \frac{(kh)^4}{3072} \sin(5\eta) - \dots \\
 S_1^e(kh, \cos \eta) &= \left(1 + \frac{(kh)^2}{32} + \frac{5(kh)^4}{3072}\right) \cos \eta - \left(\frac{(kh)^2}{32} + \frac{(kh)^4}{512}\right) \cos(3\eta) \\
 &\quad + \frac{(kh)^4}{3072} \cos(5\eta) - \dots \\
 S_2^o(kh, \cos \eta) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{48} + \frac{23(kh)^4}{36864}\right) \sin(2\eta) - \left(\frac{(kh)^2}{96} + \frac{(kh)^4}{2304}\right) \sin(4\eta) \\
 &\quad + \frac{(kh)^4}{12288} \sin(6\eta) - \dots
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

D.4.2 Écriture des fonctions de Mathieu modifiées

On peut développer les fonctions de Mathieu modifiées en séries à l'aide des fonctions de Bessel et Neumann présentées en annexe C. Plusieurs formes existent (voir le résumé de [45] p. 1568-1573). Citons les formes que nous utilisons, en raison de leur convergence :

$$J_{2m}^o(kh, \text{ch } \xi) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{B_2^o} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^o [J_{n-1}(\frac{1}{2}kh e^{-\xi}) J_{n+1}(\frac{1}{2}kh e^{\xi}) - J_{n+1}(\frac{1}{2}kh e^{-\xi}) J_{n-1}(\frac{1}{2}kh e^{\xi})] \quad (\text{D.19})$$

$$N_{2m}^o(kh, \text{ch } \xi) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{B_2^o} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^o [J_{n-1}(\frac{1}{2}kh e^{-\xi}) N_{n+1}(\frac{1}{2}kh e^{\xi}) - J_{n+1}(\frac{1}{2}kh e^{-\xi}) N_{n-1}(\frac{1}{2}kh e^{\xi})] \quad (\text{D.20})$$

D.5 Quelques propriétés

D.5.1 Orthogonalité et normes

Les fonctions de Mathieu vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} S_m^o(kh, \cos \eta) S_n^e(kh, \cos \eta) d\eta &= 0 \quad \forall(m, n) \\ \int_0^{2\pi} S_m^o(kh, \cos \eta) S_n^o(kh, \cos \eta) d\eta &= \delta_m^n M_m^o(kh) \\ \int_0^{2\pi} S_m^e(kh, \cos \eta) S_n^e(kh, \cos \eta) d\eta &= \delta_m^n M_m^e(kh) \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Lorsque kh est petit, on peut calculer les premiers termes des normes ([45] p. 1413) :

$$\begin{aligned} M_0^e(kh) &= \pi \left(2 + \frac{1}{2}(kh)^2 + \frac{13}{128}(kh)^4 + \dots \right) \\ M_1^o(kh) &= \pi \left(1 + \frac{3}{16}(kh)^2 + \frac{7}{384}(kh)^4 + \dots \right) \\ M_1^e(kh) &= \pi \left(1 + \frac{1}{16}(kh)^2 + \frac{1}{192}(kh)^4 + \dots \right) \\ M_2^o(kh) &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{12}(kh)^2 + \frac{43}{9216}(kh)^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

D.5.2 Wronskien

Définition

On définit le Wronskien de deux solutions y_1 et y_2 d'une équation homogène $\mathcal{L}(y) = 0$ par la quantité :

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (\text{D.23})$$

Wronskien de fonctions de Mathieu modifiées

Le Wronskien mettant en jeu une solution de première espèce et la solution correspondante de seconde espèce vaut 1 :

$$\Delta(J_m^e, N_m^e) = 1 \quad \Delta(J_m^o, N_m^o) = 1 \quad (\text{D.24})$$

Calculons alors $\Delta(H_m^o, J_m^o)$ (H_m^o est défini par (D.16)) :

$$\begin{aligned} H_m^o J_m^{o'} - J_m^o H_m^{o'} &= (J_m^o + i N_m^o) J_m^{o'} - J_m^o (J_m^{o'} + i N_m^{o'}) \\ &= i (N_m^o J_m^{o'} - J_m^o N_m^{o'}) \\ &= -i \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Annexe E

Quelques rappels sur les transformées de Fourier

E.1 Définitions

ATTENTION : dans cette annexe, on utilise des intégrales pour écrire les transformées de Fourier. Dans le cas où les fonctions f ou X seraient telles que ces intégrales ne convergent pas, il faudrait prendre ces écritures au sens des distributions (voir annexe F).

E.1.1 Transformée de Fourier spatiale

On convient de définir la transformée de Fourier $\hat{f}(Z)$ de la fonction $f(z)$ par :

$$\hat{f}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-2i\pi z Z} dz \quad (\text{E.1})$$

La formule d'inversion est alors :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(Z) e^{2i\pi z Z} dZ \quad (\text{E.2})$$

E.1.2 Transformée de Fourier temporelle

En acoustique, on a plutôt l'habitude de dire que tout signal temporel $X(t)$ peut être décomposé en intégrale de Fourier :

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{E.3})$$

$X(\omega)$ est la transformée de Fourier temporelle de $X(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{E.4})$$

E.1.3 Écriture générale

Afin d'énoncer les propriétés de la transformée de Fourier de façon à ce qu'elles soient valables pour chacune des deux transformées de Fourier définies ci-dessus, on adopte les écritures générales suivantes (x représente z ou t , et X représente Z ou ω) :

♦ Pour la transformée de Fourier directe :

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-icXx} dx \quad (\text{E.5})$$

♦ Pour la transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \frac{|c|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(X) e^{icXx} dX \quad (\text{E.6})$$

Ainsi, dans le cas de la transformée de Fourier spatiale, on aura :

$$c = 2\pi \quad (\text{E.7})$$

et pour la transformée de Fourier temporelle :

$$c = -1 \quad (\text{E.8})$$

E.2 Propriétés

On énonce ici les propriétés dont on se sert dans ce mémoire. Dans [53], R. PETIT donne plus de propriétés, et explique comment les démontrer.

♦ Transformée de Fourier, dérivation et intégration :

Fonction	Transformée de Fourier
$f(x)$	$F(X)$
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$-c^2 X^2 F(X)$

Fonction	Transformée de Fourier
$f(x)$	$F(X)$
$\int f(x) dx$	$\frac{1}{icX} F(X)$

♦ Transformée d'une fonction constante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm icxX} dx = \frac{2\pi}{c} \delta(X) \quad (\text{E.9})$$

($\delta(X)$ est la distribution de Dirac)

♦ Transformée de Fourier et translation :

Fonction	Transformée de Fourier
$f(x)$	$F(X)$
$f(x - x_0)$	$e^{-icx_0 X} F(X)$

♦ Produit et produit de convolution :

Soient \hat{f} et \hat{g} les transformées de Fourier des fonctions f et g respectivement. Alors :

- Le produit $f \times g$ a pour transformée de Fourier le produit de convolution $\hat{f} * \hat{g}$.
- Le produit de convolution $f * g$ a pour transformée de Fourier le produit $\hat{f} \times \hat{g}$.

Annexe F

La notion de distribution : présentation, propriétés

Nous présentons les notions de base indispensables à la compréhension de l'écriture et de l'utilisation des distributions de L. Schwartz. Pour plus de développements, le lecteur peut se reporter aux chapitres I à III du livre de R. PETIT [53], dont nous avons extrait toutes les informations qui suivent.

F.1 Définitions

♦ **Espace fonctionnel \mathcal{F}** : ensemble de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire tel que toute combinaison linéaire de deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 appartenant à \mathcal{F} appartienne aussi à \mathcal{F} .

♦ **Fonctionnelle** : une fonctionnelle T est une application de \mathcal{F} dans le corps des complexes \mathbb{C} . Le nombre $T(\phi)$ associé à la fonction ϕ par la fonctionnelle T est noté $\langle T, \phi \rangle$, d'après la notation de L. Schwartz.

Exemples de fonctionnelles :

\mathcal{F} est l'ensemble des fonctions dérivables et $\langle T, \phi \rangle = \phi'(2)$

\mathcal{F} est l'ensemble des fonctions continues et $\langle T, \phi \rangle = [\phi(0)]^2$

♦ **L'intégration selon Lebesgue** est une fonctionnelle qui, à tout élément d'un certain ensemble de fonctions (les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, ou *sommables*), associe un nombre noté : $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Les fonctions sommables sont des fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle.

♦ **Fonction localement sommable** : une fonction $f(x)$ est dite localement sommable si elle est sommable pour tout intervalle borné.

♦ **Support** : on appelle support d'une fonction ϕ le plus petit ensemble fermé en dehors duquel ϕ est nulle.

♦ L'espace \mathcal{D} est l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables à support borné.

♦ Les distributions de L. Schwartz sont des fonctionnelles linéaires continues sur \mathcal{D} . À toute fonction $f(x)$ localement sommable, on peut associer une distribution T_f définie par :

$$\forall \phi(x) \in \mathcal{D}, \quad \langle T_f, \phi \rangle = \int f(x) \phi(x) dx \quad (\text{F.1})$$

Par abus de langage, on dit couramment que les fonctions localement sommables sont des distributions et on écrit :

$$\forall \phi(x) \in \mathcal{D}, \quad \langle f(x), \phi(x) \rangle = \int f(x) \phi(x) dx \quad (\text{F.2})$$

♦ Les distributions singulières :

Dans \mathbb{R}^3 , la distribution de Dirac notée δ ou $\delta(x, y, z)$ est définie par :

$$\forall \phi(x, y, z) \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta(x, y, z), \phi(x, y, z) \rangle = \phi(0, 0, 0) \quad (\text{F.3})$$

De même, si σ est une surface, on notera :

$$\langle \delta_\sigma, \phi \rangle = \iint_\sigma \phi d\sigma \quad (\text{F.4})$$

Remarque : pour éviter les confusions, lorsqu'on utilise des fonctions de plusieurs variables, on précise parfois, sous la virgule du crochet, les variables par rapport auxquelles on intègre. Par exemple :

$$\langle \delta_{\sigma, x, y}, \phi \rangle = \iint_\sigma \phi(x, y) dx dy \quad (\text{F.5})$$

F.2 Opérations sur les distributions

♦ Dérivation : la dérivée d'une distribution T est la distribution T' définie par :

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle \quad (\text{F.6})$$

♦ Produit d'une distribution T par une fonction α indéfiniment dérivable :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle \quad (\text{F.7})$$

F.3 Transformée de Fourier

Dans ce mémoire, nous utilisons la transformée de Fourier d'une distribution T . En utilisant la notation (F.1) des distributions de L. Schwartz, il semble naturel d'écrire ainsi la transformée de Fourier :

$$F(X) = \langle f(x), e^{-icxX} \rangle \quad (\text{F.8})$$

Voyons quelles sont les conditions dans lesquelles on peut écrire cette relation.

F.3.1 Définitions

♦ **L'espace E** est l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables à support quelconque.

♦ **L'espace S** est l'espace vectoriel des fonctions de variable réelle indéfiniment dérivables "à décroissance rapide". De façon plus précise, on dit que $\phi(x) \in S$ si :

- sa dérivée $m^{\text{ième}}$, $\phi^{(m)}(x)$, existe quel que soit m entier positif;
- quels que soient les entiers positifs ou nuls p et m , $x^p \phi^{(m)}$ est bornée. Autrement dit, $\phi(x)$ et chacune de ses dérivées tendent plus rapidement vers zéro que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

♦ **Une distribution tempérée** est une distribution prolongeable par une forme linéaire continue sur S . On note S' l'espace des distributions tempérées.

F.3.2 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Cas général

Si $T \in S'$, sa transformée de Fourier est la distribution tempérée notée \hat{T} et définie par :

$$\forall \phi \in S, \quad \langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \quad (\text{F.9})$$

Cas particulier des distributions à support borné

Si de plus T est à support borné, sa transformée de Fourier est une fonction $\hat{T}(\sigma)$ définie par :

$$\hat{T}(\sigma) = \langle T(x), e^{-ic\sigma x} \rangle \quad (\text{F.10})$$

Ce crochet en x a toujours un sens car $e^{-ic\sigma x} \in E$.

Annexe G

Listing MATHEMATICA

Le listing qui suit détaille les premières étapes du calcul, par le logiciel MATHEMATICA, de l'approximation “grandes longueurs d'ondes” de $\hat{p}(\xi_0, \eta, Z)$, transformée de Fourier de la pression exercée par le fluide à la surface du guide d'ondes. La démarche et les résultats sont présentés au paragraphe 4.4.

Nous laissons volontairement apparaître quelques développements supplémentaires (calcul de termes de trop grand degré, résultats intermédiaires) qui nous ont permis de vérifier toutes les étapes de notre calcul.

Précisions :

- ♦ MATHEMATICA désigne par “EulerGamma” la constante d'Euler que nous avons appelée γ et qui est définie par (C.13);
- ♦ “HsurHprime” est l'approximation “grandes longueurs d'ondes” de l'expression (4.49), et “Fraction” celle de (4.48).

(* 0. DEFINITIONS PREALABLES *)

(* Coefficients de Fourier de la fonction de Mathieu de première espèce,
d'ordre 2, impaire *)

$$B2 = (1/2) + (Kh^2/48) + (23 * Kh^4) / 36864$$

$$B4 = -((Kh^2/96) + (Kh^4/2304))$$

$$B6 = Kh^4 / 12288$$

$$\frac{1}{2} + \frac{Kh^2}{48} + \frac{23 Kh^4}{36864}$$

$$-\frac{Kh^2}{96} - \frac{Kh^4}{2304}$$

$$\frac{Kh^4}{12288}$$

(* I. EXPRESSION DES FONCTIONS DE BESSEL ET NEUMANN *)

(* Développement des fonctions de Bessel Jn pour Kh petit
en Kh/(2 e^ξ) *)

$$J0 = \text{Series}[\text{BesselJ}[0, Kh / (2 * E^\xi)], \{Kh, 0, 6\}]$$

$$J1 = \text{Series}[\text{BesselJ}[1, Kh / (2 * E^\xi)], \{Kh, 0, 6\}]$$

$$J2 = \text{Series}[\text{BesselJ}[2, Kh / (2 * E^\xi)], \{Kh, 0, 6\}]$$

$$J3 = \text{Series}[\text{BesselJ}[3, Kh / (2 * E^\xi)], \{Kh, 0, 6\}]$$

$$J4 = \text{Series}[\text{BesselJ}[4, Kh / (2 * E^\xi)], \{Kh, 0, 6\}]$$

$$J5 = \text{Series}[\text{BesselJ}[5, Kh / (2 * E^\xi)], \{Kh, 0, 6\}]$$

$$1 - \frac{1}{16} e^{-2\xi} Kh^2 + \frac{e^{-4\xi} Kh^4}{1024} - \frac{e^{-6\xi} Kh^6}{147456} + O[Kh]^7$$

$$\frac{e^{-\xi} Kh}{4} - \frac{1}{128} e^{-3\xi} Kh^3 + \frac{e^{-5\xi} Kh^5}{12288} + O[Kh]^7$$

$$\frac{1}{32} e^{-2\xi} Kh^2 - \frac{e^{-4\xi} Kh^4}{1536} + \frac{e^{-6\xi} Kh^6}{196608} + O[Kh]^8$$

$$\frac{1}{384} e^{-3\xi} Kh^3 - \frac{e^{-5\xi} Kh^5}{24576} + \frac{e^{-7\xi} Kh^7}{3932160} + O[Kh]^8$$

$$\frac{e^{-4\xi} Kh^4}{6144} - \frac{e^{-6\xi} Kh^6}{491520} + O[Kh]^8$$

$$\frac{e^{-5\xi} Kh^5}{122880} - \frac{e^{-7\xi} Kh^7}{11796480} + O[Kh]^8$$

(* Développement des fonctions de Bessel Jn pour Kh petit
en (Kh e^ξ)/2 *)

```

JOI = Series[BesselJ[0, (Kh + E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J1I = Series[BesselJ[1, (Kh + E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J2I = Series[BesselJ[2, (Kh + E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J3I = Series[BesselJ[3, (Kh + E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J4I = Series[BesselJ[4, (Kh + E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J5I = Series[BesselJ[5, (Kh + E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]

```

$$1 - \frac{1}{16} e^{2\xi} Kh^2 + \frac{e^{4\xi} Kh^4}{1024} - \frac{e^{6\xi} Kh^6}{147456} + \frac{e^{8\xi} Kh^8}{37748736} + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^\xi Kh}{4} - \frac{1}{128} e^{3\xi} Kh^3 + \frac{e^{5\xi} Kh^5}{12288} - \frac{e^{7\xi} Kh^7}{2359296} + O[Kh]^9$$

$$\frac{1}{32} e^{2\xi} Kh^2 - \frac{e^{4\xi} Kh^4}{1536} + \frac{e^{6\xi} Kh^6}{196608} - \frac{e^{8\xi} Kh^8}{47185920} + O[Kh]^{10}$$

$$\frac{1}{384} e^{3\xi} Kh^3 - \frac{e^{5\xi} Kh^5}{24576} + \frac{e^{7\xi} Kh^7}{3932160} - \frac{e^{9\xi} Kh^9}{1132462080} + O[Kh]^{10}$$

$$\frac{e^{4\xi} Kh^4}{6144} - \frac{e^{6\xi} Kh^6}{491520} + \frac{e^{8\xi} Kh^8}{94371840} + O[Kh]^{10}$$

$$\frac{e^{5\xi} Kh^5}{122880} - \frac{e^{7\xi} Kh^7}{11796480} + \frac{e^{9\xi} Kh^9}{2642411520} + O[Kh]^{10}$$

(* Développement des fonctions de Neumann Nn pour Kh petit en (Kh e^ξ) / 2 *)

```

N0 = Series[Bessely[0, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
N1 = Series[Bessely[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
N2 = Series[Bessely[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 6}]
N3 = Series[Bessely[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
N4 = Series[Bessely[4, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 10}]
N5 = Series[Bessely[5, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]

```

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 \left(-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] + \text{Log}[Kh] \right)}{\pi} \right) + \\
& \frac{1}{4} e^{2\xi} \left(\frac{2 - 2 \text{EulerGamma}}{4\pi} + \frac{\text{Log}[2] - \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] - \text{Log}[Kh]}{2\pi} \right) Kh^2 + O[Kh]^4 \\
& - \frac{4 e^{-\xi}}{\pi Kh} + \frac{1}{2} e^\xi \left(\frac{-1 + 2 \text{EulerGamma}}{2\pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right) Kh + O[Kh]^3 \\
& - \frac{16 e^{-2\xi}}{\pi Kh^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} e^{2\xi} \left(\frac{-\frac{3}{2} + 2 \text{EulerGamma}}{8\pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{4\pi} \right) Kh^2 + O[Kh]^4 \\
& - \frac{128 e^{-3\xi}}{\pi Kh^3} - \frac{4 e^{-\xi}}{\pi Kh} - \frac{e^\xi Kh}{8\pi} + \\
& \frac{1}{8} e^{3\xi} \left(\frac{-\frac{11}{6} + 2 \text{EulerGamma}}{48\pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{24\pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& - \frac{1536 e^{-4\xi}}{\pi Kh^4} - \frac{32 e^{-2\xi}}{\pi Kh^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{2\xi} Kh^2}{96\pi} + \\
& \frac{1}{16} e^{4\xi} \left(\frac{-\frac{25}{12} + 2 \text{EulerGamma}}{384\pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{192\pi} \right) Kh^4 + O[Kh]^6 \\
& - \frac{24576 e^{-5\xi}}{\pi Kh^5} - \frac{384 e^{-3\xi}}{\pi Kh^3} - \frac{4 e^{-\xi}}{\pi Kh} - \frac{e^\xi Kh}{24\pi} + O[Kh]^3
\end{aligned}$$

(* II. COMBINAISONS UTILES POUR LA SUITE *)

(* Pour le calcul de J02,

fonction de Mathieu modifiée de première espèce, d'ordre 2, impaire *)

```

J0J2I = Series[BesselJ[0, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J2J0I = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[0, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J1J3I = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J3J1I = Series[BesselJ[3, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J2J4I = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[4, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J4J2I = Series[BesselJ[4, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]

```

$$\frac{1}{32} e^{2\xi} Kh^2 + \left(-\frac{1}{512} - \frac{e^{4\xi}}{1536} \right) Kh^4 + \left(\frac{e^{-2\xi}}{32768} + \frac{e^{2\xi}}{24576} + \frac{e^{6\xi}}{196608} \right) Kh^6 +$$

$$\left(-\frac{1}{1572864} - \frac{e^{-4\xi}}{4718592} - \frac{e^{4\xi}}{3145728} - \frac{e^{8\xi}}{47185920} \right) Kh^8 + O[Kh]^9$$

$$\frac{1}{32} e^{-2\xi} Kh^2 + \left(-\frac{1}{512} - \frac{e^{-4\xi}}{1536} \right) Kh^4 + \left(\frac{e^{-6\xi}}{196608} + \frac{e^{-2\xi}}{24576} + \frac{e^{2\xi}}{32768} \right) Kh^6 +$$

$$\left(-\frac{1}{1572864} - \frac{e^{-8\xi}}{47185920} - \frac{e^{-4\xi}}{3145728} - \frac{e^{4\xi}}{4718592} \right) Kh^8 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{2\xi} Kh^4}{1536} + \left(-\frac{1}{49152} - \frac{e^{4\xi}}{98304} \right) Kh^6 + \left(\frac{e^{-2\xi}}{4718592} + \frac{e^{2\xi}}{3145728} + \frac{e^{6\xi}}{15728640} \right) Kh^8 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{-2\xi} Kh^4}{1536} + \left(-\frac{1}{49152} - \frac{e^{-4\xi}}{98304} \right) Kh^6 + \left(\frac{e^{-6\xi}}{15728640} + \frac{e^{-2\xi}}{3145728} + \frac{e^{2\xi}}{4718592} \right) Kh^8 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{2\xi} Kh^6}{196608} + \left(-\frac{1}{9437184} - \frac{e^{4\xi}}{15728640} \right) Kh^8 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{-2\xi} Kh^6}{196608} + \left(-\frac{1}{9437184} - \frac{e^{-4\xi}}{15728640} \right) Kh^8 + O[Kh]^9$$

(* Pour le calcul de N02,

fonction de Mathieu modifiée de deuxième espèce, d'ordre 2, impaire *)

$$\begin{aligned}
& J0N2 = \text{Series}[\text{BesselJ}[0, Kh / (2 * E^{\xi})] * \text{Bessely}[2, (Kh * E^{\xi}) / 2], \{Kh, 0, 4\}] \\
& J1N3 = \text{Series}[\text{BesselJ}[1, Kh / (2 * E^{\xi})] * \text{Bessely}[3, (Kh * E^{\xi}) / 2], \{Kh, 0, 4\}] \\
& J2N0 = \text{Series}[\text{BesselJ}[2, Kh / (2 * E^{\xi})] * \text{Bessely}[0, (Kh * E^{\xi}) / 2], \{Kh, 0, 4\}] \\
& J2N4 = \text{Series}[\text{BesselJ}[2, Kh / (2 * E^{\xi})] * \text{Bessely}[4, (Kh * E^{\xi}) / 2], \{Kh, 0, 4\}] \\
& J3N1 = \text{Series}[\text{BesselJ}[3, Kh / (2 * E^{\xi})] * \text{Bessely}[1, (Kh * E^{\xi}) / 2], \{Kh, 0, 4\}] \\
& J4N2 = \text{Series}[\text{BesselJ}[4, Kh / (2 * E^{\xi})] * \text{Bessely}[2, (Kh * E^{\xi}) / 2], \{Kh, 0, 4\}] \\
& -\frac{16 e^{-2 \xi}}{\pi Kh^2} + \left(-\frac{1}{\pi} + \frac{e^{-4 \xi}}{\pi} \right) + \\
& \left(-\frac{e^{-6 \xi}}{64 \pi} + \frac{e^{-2 \xi}}{16 \pi} + \frac{1}{4} e^{2 \xi} \left(\frac{-\frac{3}{2} + 2 \text{EulerGamma}}{8 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{4 \pi} \right) \right) Kh^2 + \\
& \left(\frac{e^{-8 \xi}}{9216 \pi} - \frac{e^{-4 \xi}}{1024 \pi} + \frac{1}{16} e^{4 \xi} \left(\frac{\frac{17}{6} - 2 \text{EulerGamma}}{96 \pi} + \frac{\text{Log}[2] - \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] - \text{Log}[Kh]}{48 \pi} \right) \right) + \\
& \frac{1}{64} \left(-\frac{-\frac{3}{2} + 2 \text{EulerGamma}}{8 \pi} - \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{4 \pi} \right) Kh^4 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{32 e^{-4 \xi}}{\pi Kh^2} + \left(\frac{e^{-6 \xi}}{\pi} - \frac{e^{-2 \xi}}{\pi} \right) + \left(-\frac{1}{32 \pi} - \frac{e^{-8 \xi}}{96 \pi} + \frac{e^{-4 \xi}}{32 \pi} \right) Kh^2 + \left(\frac{e^{-10 \xi}}{18432 \pi} - \frac{e^{-6 \xi}}{3072 \pi} + \frac{e^{-2 \xi}}{1024 \pi} + \right. \\
& \left. \frac{1}{32} e^{2 \xi} \left(\frac{-\frac{11}{6} + 2 \text{EulerGamma}}{48 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{24 \pi} \right) \right) Kh^4 + O[Kh]^5 \\
& \frac{1}{32} e^{-2 \xi} \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 (-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh])}{\pi} \right) Kh^2 + \\
& \left(\frac{1}{128} \left(\frac{2 - 2 \text{EulerGamma}}{4 \pi} + \frac{\text{Log}[2] - \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] - \text{Log}[Kh]}{2 \pi} \right) - \right. \\
& \left. \frac{e^{-4 \xi} \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 (-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh])}{\pi} \right)}{1536} \right) Kh^4 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{48 e^{-6 \xi}}{\pi Kh^2} + \left(\frac{e^{-8 \xi}}{\pi} - \frac{e^{-4 \xi}}{\pi} \right) + \left(-\frac{e^{-10 \xi}}{128 \pi} + \frac{e^{-6 \xi}}{48 \pi} - \frac{e^{-2 \xi}}{64 \pi} \right) Kh^2 + \\
& \left(-\frac{1}{3072 \pi} + \frac{e^{-12 \xi}}{30720 \pi} - \frac{e^{-8 \xi}}{6144 \pi} + \frac{e^{-4 \xi}}{3072 \pi} \right) Kh^4 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{e^{-4 \xi} Kh^2}{96 \pi} + \\
& \left(\frac{e^{-6 \xi}}{6144 \pi} + \frac{1}{768} e^{-2 \xi} \left(\frac{-1 + 2 \text{EulerGamma}}{2 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right) \right) Kh^4 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{e^{-6 \xi} Kh^2}{384 \pi} + \left(\frac{e^{-8 \xi}}{30720 \pi} - \frac{e^{-4 \xi}}{6144 \pi} \right) Kh^4 + O[Kh]^5
\end{aligned}$$

(* Pour le premier terme de la dérivée de J02, T1J02prime *)


```

J1J2I = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J2J1I = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J1J0I = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[0, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J0J1I = Series[BesselJ[0, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J0J3I = Series[BesselJ[0, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J3J0I = Series[BesselJ[3, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[0, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]

```

$$\frac{e^\xi Kh^3}{128} + \left(-\frac{e^{-\xi}}{4096} - \frac{e^{3\xi}}{6144} \right) Kh^5 + \left(\frac{e^{-3\xi}}{393216} + \frac{e^\xi}{196608} + \frac{e^{5\xi}}{786432} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{1}{128} e^{-\xi} Kh^3 + \left(-\frac{e^{-3\xi}}{6144} - \frac{e^\xi}{4096} \right) Kh^5 + \left(\frac{e^{-5\xi}}{786432} + \frac{e^{-\xi}}{196608} + \frac{e^{3\xi}}{393216} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{-\xi} Kh}{4} + \left(-\frac{1}{128} e^{-3\xi} - \frac{e^\xi}{64} \right) Kh^3 + \left(\frac{e^{-5\xi}}{12288} + \frac{e^{-\xi}}{2048} + \frac{e^{3\xi}}{4096} \right) Kh^5 +$$

$$\left(-\frac{e^{-7\xi}}{2359296} - \frac{e^{-3\xi}}{196608} - \frac{e^\xi}{131072} - \frac{e^{5\xi}}{589824} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^\xi Kh}{4} + \left(-\frac{e^{-\xi}}{64} - \frac{e^{3\xi}}{128} \right) Kh^3 + \left(\frac{e^{-3\xi}}{4096} + \frac{e^\xi}{2048} + \frac{e^{5\xi}}{12288} \right) Kh^5 +$$

$$\left(-\frac{e^{-5\xi}}{589824} - \frac{e^{-\xi}}{131072} - \frac{e^{3\xi}}{196608} - \frac{e^{7\xi}}{2359296} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{1}{384} e^{3\xi} Kh^3 + \left(-\frac{e^\xi}{6144} - \frac{e^{5\xi}}{24576} \right) Kh^5 + \left(\frac{e^{-\xi}}{393216} + \frac{e^{3\xi}}{393216} + \frac{e^{7\xi}}{3932160} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{1}{384} e^{-3\xi} Kh^3 + \left(-\frac{e^{-5\xi}}{24576} - \frac{e^{-\xi}}{6144} \right) Kh^5 + \left(\frac{e^{-7\xi}}{3932160} + \frac{e^{-3\xi}}{393216} + \frac{e^\xi}{393216} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

(* Pour le deuxième terme de J02prime, T2J02prime, en plus de ce qui précède *)

```

J2J3I = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J3J2I = Series[BesselJ[3, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J1J4I = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[4, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]
J4J1I = Series[BesselJ[4, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselJ[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 8}]

```

$$\frac{e^\xi Kh^5}{12288} + \left(-\frac{e^{-\xi}}{589824} - \frac{e^{3\xi}}{786432} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{-\xi} Kh^5}{12288} + \left(-\frac{e^{-3\xi}}{786432} - \frac{e^\xi}{589824} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{3\xi} Kh^5}{24576} + \left(-\frac{e^\xi}{786432} - \frac{e^{5\xi}}{1966080} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

$$\frac{e^{-3\xi} Kh^5}{24576} + \left(-\frac{e^{-5\xi}}{1966080} - \frac{e^{-\xi}}{786432} \right) Kh^7 + O[Kh]^9$$

(* Pour le premier terme de la dérivée de N02, T1N02prime *)

```

J1N2 = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselY[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J2N1 = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselY[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J1N0 = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselY[0, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J0N1 = Series[BesselJ[0, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselY[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J0N3 = Series[BesselJ[0, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselY[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J3N0 = Series[BesselJ[3, Kh / (2 * E^ξ)] * BesselY[0, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]

```

$$\begin{aligned}
& -\frac{4 e^{-3 \xi}}{\pi Kh} + \left(\frac{e^{-5 \xi}}{8 \pi} - \frac{e^{-\xi}}{4 \pi} \right) Kh + \\
& \left(-\frac{e^{-7 \xi}}{768 \pi} + \frac{e^{-3 \xi}}{128 \pi} + \frac{1}{16} e^{\xi} \left(\frac{-\frac{3}{2} + 2 \text{EulerGamma}}{8 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{4 \pi} \right) \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{e^{-3 \xi} Kh}{8 \pi} + \left(\frac{e^{-5 \xi}}{384 \pi} + \frac{1}{64} e^{-\xi} \left(\frac{-1 + 2 \text{EulerGamma}}{2 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right) \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& \frac{1}{4} e^{-\xi} \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 (-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh])}{\pi} \right) Kh + \\
& \left(\frac{1}{16} e^{\xi} \left(\frac{2 - 2 \text{EulerGamma}}{4 \pi} + \frac{\text{Log}[2] - \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] - \text{Log}[Kh]}{2 \pi} \right) - \right. \\
& \left. \frac{1}{128} e^{-3 \xi} \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 (-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh])}{\pi} \right) \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{4 e^{-\xi}}{\pi Kh} + \left(\frac{e^{-3 \xi}}{4 \pi} + \frac{1}{2} e^{\xi} \left(\frac{-1 + 2 \text{EulerGamma}}{2 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right) \right) Kh + \\
& \left(-\frac{e^{-5 \xi}}{256 \pi} + \frac{1}{8} e^{3 \xi} \left(\frac{\frac{5}{2} - 2 \text{EulerGamma}}{16 \pi} + \frac{\text{Log}[2] - \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] - \text{Log}[Kh]}{8 \pi} \right) - \right. \\
& \left. \frac{1}{32} e^{-\xi} \left(\frac{-1 + 2 \text{EulerGamma}}{2 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right) \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{128 e^{-3 \xi}}{\pi Kh^3} + \frac{8 e^{-5 \xi}}{\pi Kh} - \frac{4 e^{-\xi}}{\pi} + \left(-\frac{e^{-7 \xi}}{8 \pi} + \frac{e^{-3 \xi}}{4 \pi} - \frac{e^{\xi}}{8 \pi} \right) Kh + \\
& \left(\frac{e^{-9 \xi}}{1152 \pi} - \frac{e^{-5 \xi}}{256 \pi} + \frac{e^{-\xi}}{128 \pi} + \frac{1}{8} e^{3 \xi} \left(\frac{-\frac{11}{6} + 2 \text{EulerGamma}}{48 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{24 \pi} \right) \right) \\
& Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& \frac{1}{384} e^{-3 \xi} \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 (-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh])}{\pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5
\end{aligned}$$

(* Pour le deuxième terme de N02prime, T2N02prime, en plus de ce qui précède *)

```
J2N3 = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J3N2 = Series[BesselJ[3, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J1N4 = Series[BesselJ[1, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[4, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J4N1 = Series[BesselJ[4, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[1, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 6}]
```

$$\begin{aligned}
& -\frac{4 e^{-5 \xi}}{\pi Kh} + \left(\frac{e^{-7 \xi}}{12 \pi} - \frac{e^{-3 \xi}}{8 \pi} \right) Kh + \left(-\frac{e^{-9 \xi}}{1536 \pi} + \frac{e^{-5 \xi}}{384 \pi} - \frac{e^{-\xi}}{256 \pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{e^{-5 \xi} Kh}{24 \pi} + \left(\frac{e^{-7 \xi}}{1536 \pi} - \frac{e^{-3 \xi}}{384 \pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{384 e^{-5 \xi}}{\pi Kh^3} + \frac{\frac{12 e^{-7 \xi}}{\pi} - \frac{8 e^{-3 \xi}}{\pi}}{Kh} + \left(-\frac{e^{-9 \xi}}{8 \pi} + \frac{e^{-5 \xi}}{4 \pi} - \frac{e^{-\xi}}{8 \pi} \right) Kh + \\
& \left(\frac{e^{-11 \xi}}{1536 \pi} - \frac{e^{-7 \xi}}{384 \pi} + \frac{e^{-3 \xi}}{256 \pi} - \frac{e^{\xi}}{384 \pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{e^{-5 \xi} Kh^3}{1536 \pi} + \left(\frac{e^{-7 \xi}}{122880 \pi} + \frac{e^{-3 \xi} \left(\frac{-1+2 \text{EulerGamma}}{2 \pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right)}{12288} \right) Kh^5 + O[Kh]^7
\end{aligned}$$

(* Pour le troisième terme de N02prime, T3N02prime, en plus de ce qui précède *)

```
J2N5 = Series[BesselJ[2, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[5, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J3N4 = Series[BesselJ[3, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[4, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
J4N3 = Series[BesselJ[4, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[3, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 6}]
J5N2 = Series[BesselJ[5, Kh / (2 * E^ξ)] * Bessely[2, (Kh * E^ξ) / 2], {Kh, 0, 4}]
```

$$\begin{aligned}
& -\frac{768 e^{-7 \xi}}{\pi Kh^3} + \frac{\frac{16 e^{-9 \xi}}{\pi} - \frac{12 e^{-5 \xi}}{\pi}}{Kh} + \left(-\frac{e^{-11 \xi}}{8 \pi} + \frac{e^{-7 \xi}}{4 \pi} - \frac{e^{-3 \xi}}{8 \pi} \right) Kh + \\
& \left(\frac{e^{-13 \xi}}{1920 \pi} - \frac{e^{-9 \xi}}{512 \pi} + \frac{e^{-5 \xi}}{384 \pi} - \frac{e^{-\xi}}{768 \pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{4 e^{-7 \xi}}{\pi Kh} + \left(\frac{e^{-9 \xi}}{16 \pi} - \frac{e^{-5 \xi}}{12 \pi} \right) Kh + \left(-\frac{e^{-11 \xi}}{2560 \pi} + \frac{e^{-7 \xi}}{768 \pi} - \frac{e^{-3 \xi}}{768 \pi} \right) Kh^3 + O[Kh]^5 \\
& -\frac{e^{-7 \xi} Kh}{48 \pi} + \left(\frac{e^{-9 \xi}}{3840 \pi} - \frac{e^{-5 \xi}}{1536 \pi} \right) Kh^3 + \left(-\frac{e^{-11 \xi}}{737280 \pi} + \frac{e^{-7 \xi}}{122880 \pi} - \frac{e^{-3 \xi}}{49152 \pi} \right) Kh^5 + O[Kh]^7 \\
& -\frac{e^{-7 \xi} Kh^3}{7680 \pi} + O[Kh]^5
\end{aligned}$$

(* III. CALCUL DES FONCTIONS DE MATHIEU MODIFIEES *)

```
J02 = Series[(Sqrt[Pi / 2] / B2) *
  (B2 * (J0J2I - J2J0I) - B4 * (J1J3I - J3J1I) + B6 * (J2J4I - J4J2I)), {Kh, 0, 4}];
Simplify[
  J02]
```

$$\frac{1}{32} e^{-2 \xi} (-1 + e^{4 \xi}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} Kh^2 - \frac{(e^{-4 \xi} (-1 + e^{8 \xi}) \sqrt{\frac{\pi}{2}}) Kh^4}{1536} + O[Kh]^5$$

```
N02 = Series[(Sqrt[Pi/2]/B2)*(B2*(J0N2 - J2N0) - B4*(J1N3 - J3N1) + B6*(J2N4 - J4N2)),
{Kh, 0, 2}]; Simplify[N02]
```

$$-\frac{8 \left(e^{-2\xi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)}{Kh^2} + \frac{e^{-4\xi} (1 - 3 e^{4\xi})}{3 \sqrt{2\pi}} +$$

$$\frac{1}{384 \sqrt{2\pi}} \left(e^{-6\xi} \left(-1 + 16 e^{4\xi} - 18 e^{8\xi} - 24 e^{4\xi} \text{EulerGamma} + 24 e^{8\xi} \text{EulerGamma} + 24 e^{4\xi} \text{Log}[2] - \right. \right.$$

$$\left. \left. 24 e^{8\xi} \text{Log}[2] + 24 e^{4\xi} (-1 + e^{4\xi}) \text{Log}\left[\frac{e^\xi}{2}\right] + 24 e^{4\xi} (-1 + e^{4\xi}) \text{Log}[Kh] \right) Kh^2 \right) + O[Kh]^3$$

(* IV. CALCUL DES DERIVEES DES FONCTIONS DE MATHIEU MODIFIEES *)

(* J02prime*)

```
T1J02prime =
```

```
Series[Sqrt[Pi/2]*(Kh/2)*(E^(-xi)*J1J2I + E^xi*J2J1I + ((E^(-xi))/2)*J1J0I +
((E^xi)/2)*J0J1I - ((E^xi)/2)*J0J3I - ((E^(-xi))/2)*J3J0I), {Kh, 0, 4}]
```

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2\xi}}{8} + \frac{e^{2\xi}}{8} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} Kh^2 +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{64} - \frac{e^{-4\xi}}{768} - \frac{e^{4\xi}}{768} + \frac{1}{2} e^{-\xi} \left(-\frac{1}{128} e^{-3\xi} - \frac{e^\xi}{64} \right) + \frac{1}{2} e^\xi \left(-\frac{e^{-\xi}}{64} - \frac{e^{3\xi}}{128} \right) \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} Kh^4 + O[Kh]^5$$

```
T2J02prime = Series[-Sqrt[Pi/2]*(1/B2)*B4*
```

```
(Kh/4)*(-E^(-xi)*J0J3I - E^xi*J3J0I + E^xi*J1J2I + E^(-xi)*J2J1I +
E^(-xi)*J2J3I + E^xi*J3J2I - E^xi*J1J4I - E^(-xi)*J4J1I), {Kh, 0, 6}]
```

$$\frac{1}{192} \left(\frac{e^{-2\xi}}{192} + \frac{e^{2\xi}}{192} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} Kh^6 + O[Kh]^7$$

```
J02prime = T1J02prime + T2J02prime;
```

```
Simplify[J02prime]
```

$$\frac{1}{16} e^{-2\xi} (1 + e^{4\xi}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} Kh^2 - \frac{1}{384} \left(e^{-4\xi} (1 + e^{8\xi}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) Kh^4 + O[Kh]^5$$

(* N02prime*)

T1NO2prime =

Series[Sqrt[Pi/2] * (Kh/2) * (E^(-xi) * J1N2 + E^xi * J2N1 + ((E^(-xi))/2) * J1N0 + ((E^xi)/2) * J0N1 - ((E^xi)/2) * J0N3 - ((E^(-xi))/2) * J3N0), {Kh, 0, 2}]

$$\frac{16 e^{-2\xi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{Kh^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{\xi} \left(\frac{8 e^{-5\xi}}{\pi} - \frac{4 e^{-\xi}}{\pi} \right) - \frac{2}{\pi} - \frac{4 e^{-4\xi}}{\pi} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} +$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-\xi} \left(\frac{e^{-5\xi}}{8\pi} - \frac{e^{-\xi}}{4\pi} \right) - \frac{1}{2} e^{\xi} \left(-\frac{e^{-7\xi}}{8\pi} + \frac{e^{-3\xi}}{4\pi} - \frac{e^{\xi}}{8\pi} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{e^{-2\xi}}{8\pi} + \frac{1}{8} e^{-2\xi} \left(\frac{2 \text{EulerGamma}}{\pi} + \frac{2 (-\text{Log}[2] + \text{Log}[\frac{e^{\xi}}{2}] + \text{Log}[Kh])}{\pi} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} e^{\xi} \left(\frac{e^{-3\xi}}{4\pi} + \frac{1}{2} e^{\xi} \left(\frac{-1 + 2 \text{EulerGamma}}{2\pi} + \frac{-\text{Log}[2] + \text{Log}[\frac{e^{\xi}}{2}] + \text{Log}[Kh]}{\pi} \right) \right) \right) Kh^2 + O[Kh]^3$$

T2NO2prime =

Series[-Sqrt[Pi/2] * (1/B2) * B4 * (Kh/4) * (-E^(-xi) * J0N3 - E^xi * J3N0 + E^xi * J1N2 + E^(-xi) * J2N1 + E^(-xi) * J2N3 + E^xi * J3N2 - E^xi * J1N4 - E^(-xi) * J4N1), {Kh, 0, 2}]

$$\frac{4}{3} e^{-4\xi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} +$$

$$\left(2 \left(\frac{1}{384} \left(-e^{\xi} \left(\frac{12 e^{-7\xi}}{\pi} - \frac{8 e^{-3\xi}}{\pi} \right) + e^{-\xi} \left(-\frac{8 e^{-5\xi}}{\pi} + \frac{4 e^{-\xi}}{\pi} \right) - \frac{4 e^{-6\xi}}{\pi} - \frac{4 e^{-2\xi}}{\pi} \right) + \frac{e^{-4\xi}}{18\pi} \right) - \frac{e^{-4\xi}}{9\pi} \right)$$

$$\cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} Kh^2 + O[Kh]^3$$

T3NO2prime =

Series[Sqrt[Pi/2] * (1/B2) * B6 * (Kh/4) * (-E^(-xi) * J1N4 - E^xi * J4N1 + E^(-xi) * J3N4 + E^xi * J4N3 + E^xi * J2N3 + E^(-xi) * J3N2 - E^xi * J2N5 - E^(-xi) * J5N2), {Kh, 0, 2}]

$$\frac{3 e^{-6\xi} Kh^2}{64 \sqrt{2\pi}} + O[Kh]^3$$

NO2prime = T1NO2prime + T2NO2prime + T3NO2prime;

Simplify[NO2prime]

$$\frac{16 e^{-2\xi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{Kh^2} - \frac{2}{3} \left(e^{-4\xi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) +$$

$$\frac{1}{192 \sqrt{2\pi}} \left(e^{-6\xi} \left(3 - 28 e^{4\xi} - 6 e^{8\xi} + 24 e^{4\xi} \text{EulerGamma} + 24 e^{8\xi} \text{EulerGamma} - 24 e^{4\xi} \text{Log}[2] - \right. \right.$$

$$\left. \left. 24 e^{8\xi} \text{Log}[2] + 24 e^{4\xi} (1 + e^{4\xi}) \text{Log}\left[\frac{e^{\xi}}{2}\right] + 24 e^{4\xi} (1 + e^{4\xi}) \text{Log}[Kh] \right) Kh^2 \right) + O[Kh]^3$$

(* V. CALCUL DE L' APPROXIMATION DE LA FRACTION*)

(* terme intermédiaire, HsurHprime *)

```
HsurHprime = Series[(J02 + I * NO2) / (J02prime + I * NO2prime), {Kh, 0, 2}];
Simplify[HsurHprime]
```

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{96} (e^{-2\xi} (1 + 3 e^{4\xi})) Kh^2 + O[Kh]^3$$

```
(* enfin, la fraction *)
```

```
Fraction = Series[B2^2 * HsurHprime * 2 / (1 + (Kh^2 / 12) + (43 / 9216) * Kh^4), {Kh, 0, 2}];
Simplify[Fraction]
```

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{192} (e^{-2\xi} (1 + 3 e^{4\xi})) Kh^2 + O[Kh]^3$$

Bibliographie

- [1] LYNNWORTH, L.C. *Ultrasonic Measurements for Process Control : Theory, Techniques, Applications*. Academic Press, 1989.
- [2] MALECKI, I. *Physical Foundations of Technical Acoustics*. Pergamon Press, 1969.
- [3] KIM, J.O. *The interaction between stress waves transmitted in solid waveguides and adjacent media*. PhD thesis, Univ. of Pennsylvania, 1989.
- [4] BLANC, D. *Les Réacteurs Atomiques*. Que sais-je ? n° 2243 - Ed. PUF, 1986.
- [5] BÉBIN, J. and DURAND-SMET, R. *Réacteurs à eau ordinaire sous pression - Fiche B 3 100*. Techniques de l'ingénieur - Mécanique et Chaleur.
- [6] WELDON, T.P. and LYMAN, W. Void measurement in pressurized water reactors. In *24. ISA Power instrumentation symposium*, pages 121–127, Pittsburgh, PA, 1981.
- [7] HARDY, J.E. and MILLER, G.N. *Analysis of the Performance of the Westinghouse Reactor Vessel Level Indicating System for Tests at Semiscale*. Rapport NUREG/CR 2720, 10/1982.
- [8] TURNAGE, K.G., DAVIS, C.E., MCCULLOCH, R.W., ANDERSON, J.L., MILLER, G.N., and ROGERS, S.C. *Advanced Two-Phase Flow Instrumentation Program*. Rapport NUREG/CR 2007, 1980.
- [9] ANDERSON, J.L., HAGEN, E.W., and MORELOCK, T.C. *Summary of Inadequate Core Cooling Instrumentation for U.S. Nuclear Power Plants*. Rapport NUREG/CR 5374, 07/1990.
- [10] VIVARAT-PERRIN, M.-P. Les mesures de niveau. *Mesures*, 692 :93–100, 02/1997.
- [11] KODELI, I. and BIGNAN, G. Water level monitoring after shutdown using neutron and gamma flux measurements in PWR. *Annals of Nuclear Energy*, 24 :563–570, 1997.

- [12] ARAVE, A.E. Ultrasonic densitometer development. *NRC Instrumentation Review Group Meeting, Silver Spring, Maryland, July 24-26, 1979.*
- [13] LHUILLIER, C. and DUCRET, P. Mesure de niveau ou de densité en milieu diphasique par capteur à onde de torsion. In *Actes du 4^{ème} congrès d'acoustique de la S.F.A.*, pages 51-54, Marseille, April 1997.
- [14] FIRESTONE, F.A. and LING JR, D.S. Reflection and refraction of supersonic waves. *The Raybender*, page 7, 03/1945.
- [15] KIM, J.O., BAU, H.H., LIU, Y., LYNNWORTH, L.C., LYNNWORTH, S.A., HALL, K.A., JACOBSON, S.A., KORBA, J.A., MURPHY, R.J., STRAUCH, M.A., and KING, K.G. Torsional sensor applications in two-phase fluids. *IEEE. Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control*, 40(5) :563-574, 1993.
- [16] LYNNWORTH, L.C. Slow torsional wave sensor. In *Ultrasonics Symposium Proceedings IEEE #77 CH1264-ISV*, 1977.
- [17] United States Patent 4193291. *Slow torsional wave densitometer*. 18/03/1980.
- [18] BAU, H.H. Torsional wave sensor - A theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53(4) :846-848, 1986.
- [19] WANG, Y. *The effects of adjacent viscous fluid on the transmission of torsional stress waves in a solid waveguide*. PhD thesis, Univ. of Pennsylvania, 1987.
- [20] KIM, J.O., WANG, Y., and BAU, H.H. The effect of an adjacent viscous fluid on the transmission of torsional stress waves in a submerged waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(3) :1414-1422, 1991.
- [21] KIM, J.O. and BAU, H.H. On line, real-time densimeter - Theory and optimization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1) :432-439, 1989.
- [22] KIM, J.O. and BAU, H.H. Torsional stress waves in a circular cylinder with a modulated surface. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 58 :710-715, 1991.
- [23] FRIESEL, M.A. Proposed improvements for torsional wave measurements of density and viscosity. *Rev. Sci. Instrum.*, 67(4) :1574-1576, 1996.
- [24] SMIT, C.C.J. and SMITH, E.D. The analysis and results of a continuous wave ultrasonic densitometer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104(3) :1413-1417, 1998.

- [25] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Dover, New-York, 1945.
- [26] MILNE-THOMSON, L.M. *Theoretical Hydrodynamics*. Macmilan, London, 1968.
- [27] GERMAIN, P. *Mécanique, X. Tomes I et II*. Ellipses, 1986.
- [28] LANDAU, L. and LIFCHITZ, E. *Physique Théorique. Tome VI : Mécanique des fluides*. Éditions Mir, 1954.
- [29] MANDHANE, J.M., GREGORY, G.A., and AZIZ, K. A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 :537-553, 1974.
- [30] CANDEL, S. *Mécanique des Fluides*. Dunod, 1995.
- [31] SCHMIDT, E. *Properties of Water and Steam in SI Units*. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [32] SOKOLNIKOFF, I.S. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New-York, 1956.
- [33] LOVE, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New-York, 1944.
- [34] LESUEUR, C. *Rayonnement Acoustique des Structures*. Eyrolles, 1988.
- [35] STEPHEN, N.G. Comparison of dynamic torsion theories for beams of elliptical cross-section. *J. Sound. Vib.*, 100(1) :1-6, 1985.
- [36] SAINT-VENANT, B. DE. Mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques. *Comptes-rendus*, 28 :69-72, 1849.
- [37] GERE, J.M. Torsional vibrations of beams of thin-walled open section. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 21 :381-387, 1954.
- [38] BARR, A.D.S. Torsional waves in uniform rods of non-circular section. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 4(2) :127-135, 1962.
- [39] GAY, D. and BOUDET, R. A technical theory of dynamical torsion for beams of any cross-section shapes. *Journal of Mechanical Design*, 102 :627-632, 1980.
- [40] MULLER, P. Ondes de torsion dans les guides élastiques uniformes. *Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris-Série II*, 293 :533-536, 1981.

- [41] LANDAU, L. and LIFCHITZ, E. *Physique Théorique. Tome VII : Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, 1990.
- [42] GERMAIN, P. *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson, 1973.
- [43] ANGOT, A. *Compléments de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Électrotechnique et des Télécommunications*. Collection technique et scientifique du C.N.E.T., 1961.
- [44] FILIPPI, P., HABAUT, D., LEFEBVRE, J.P., and BERGASSOLI, A. *Acoustics : Basic Acoustics, Theory and Methods*. Academic Press, 1999.
- [45] MORSE, P.M. and FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [46] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, 1964.
- [47] GRIGORIEV, I.S. and MEILIKHOV, E.Z. *Handbook of Physical Quantities*. CRC Press, 1997.
- [48] ARZELIES, P. *Acoustique des bulles. Contribution à l'étude de la propagation en milieu diphasique liquide-bulles de gaz. Problème inverse, identification de paramètres décrivant le milieu*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 1981.
- [49] MCLACHLAN, N.W. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford University Press, 1947.
- [50] FOSTER, J. and NIGHTINGALE, J.D. *A Short Course in General Relativity*. Springer-Verlag, 1994.
- [51] MECHEL, F.P. *Mathieu Functions*. S. Hirzel Verlag, 1997.
- [52] HONG, K. and KIM, J. Natural mode analysis of hollow and annular elliptical cylindrical cavities. *J. Sound. Vib.*, 183(2) :327–351, 1995.
- [53] PETIT, R. *L'outil Mathématique*. Masson, 1991.

RÉSUMÉ : Afin de renforcer l'instrumentation existante pour la mesure de niveau d'eau dans des enceintes de Réacteurs à Eau Pressurisée, on s'intéresse à une méthode fondée sur l'étude de la propagation d'une onde de torsion dans un guide d'ondes immergé. Antérieurement à cette thèse, ce dispositif avait été modélisé dans le contexte particulier d'un fluide environnant monophasique et incompressible. Notre modèle permet d'utiliser la sonde à onde de torsion pour mesurer des niveaux de fluides compressibles, situation qui apparaît en configuration accidentelle lorsque le fluide environnant devient diphasique.

Nous considérons un guide d'ondes cylindrique de section elliptique, dont les dimensions transversales sont petites devant sa longueur et la longueur d'onde dans le fluide.

Nous écrivons d'abord les équations d'élasticité du guide. Ensuite, nous exprimons la pression exercée par le fluide à la surface du guide, et nous en calculons une approximation "grandes longueurs d'ondes". Nous appliquons finalement le principe de conservation de l'énergie de Hamilton pour obtenir une équation approchée du mouvement du guide d'ondes, et une expression de la vitesse de phase apparente de l'onde de torsion dans le guide immergé. Nous pouvons alors utiliser ces résultats pour la mesure de niveau. Quelques simulations sont réalisées, qui montrent la pertinence de la prise en compte de la compressibilité.

MOTS-CLÉS : Réacteur à Eau Pressurisée, mesure de niveau, guide à onde de torsion, interaction fluide/structure vibrante.

SUMMARY : In order to provide complementary means for measurement of water levels in pressurized vessels of nuclear reactors, the possibilities of an immersed torsional wave sensor are being looked into. It has already been modeled, considering an incompressible fluid. Yet, because the fluid can turn into a two-phase fluid, we have investigated how to extend the existing model. As a first step, we have taken into account the compressibility of the surrounding fluid.

We focus on a cylindrical waveguide with an elliptic cross-section. Its transverse dimensions are small compared with its length and the wavelengths in the fluid.

We start with the elasticity equations for the waveguide. Then, from the exact expression of the pressure exerted by the fluid on the waveguide boundary, a long wavelength approximation is obtained. We end by applying Hamilton's principle of energy conservation, which leads to an approximate equation governing the fluid-loaded waveguide motion, and to an expression of the apparent phase velocity of the torsional wave in the immersed waveguide. Finally, fluid level measurement is possible. Some simulations are made, highlighting the influence of the compressibility.

KEYWORDS : Pressurized Water Reactor, level measurement, torsional wave sensor, fluid/structure interaction.

DISCIPLINE : Mécanique, spécialité acoustique et vibrations

Travail réalisé au CEA cadarache, DER/SSAE/LSMR, 13108 St-Paul-lez-Durance Cedex