HAL
open science

A comparative study between 2D and Splitting numerical schemes for non linear two dimensionnal hyperbolic PDE in the frame of generalized functions

Olivier Jouannelle

To cite this version:

Olivier Jouannelle. A comparative study between 2D and Splitting numerical schemes for non linear two dimensionnal hyperbolic PDE in the frame of generalized functions. Mathématiques [math]. Université des Antilles et de la Guyane, 2010. Français. NNT : . tel-01487366v2

HAL Id: tel-01487366

https://hal.science/tel-01487366v2

Submitted on 16 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HAL
archives-ouvertes.fr

A comparative study between 2D and Splitting numerical schemes for non linear two dimensionnal hyperbolic PDE in the frame of generalized functions

Olivier Jouannelle

To cite this version:

Olivier Jouannelle. A comparative study between 2D and Splitting numerical schemes for non linear two dimensionnal hyperbolic PDE in the frame of generalized functions. Mathématiques [math]. Université des Antilles et de la Guyane, 2010. Français. <tel-01487366>

HAL Id: tel-01487366

https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01487366

Submitted on 15 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES ANTILLES-GUYANE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DES ANTILLES-GUYANE

Spécialité : **MATHEMATIQUES APPLIQUEES**

par

Olivier JOUANNELLE

Une étude comparative entre des schémas numériques 2D et splitting pour des e.d.p hyperboliques non linéaires bidimensionnelles dans le cadre des fonctions généralisées

Soutenue le 26 Janvier 2010

M. Alain-Yves LEROUX	Rapporteur	Professeur à l'Université de Bordeaux 1

Jury

M. Jean-Paul CHEHAB	Rapporteur	Professeur à l'Université d'Amiens
M. Antoine DELCROIX	Directeur de Thèse	Professeur à l'IUFM de Guadeloupe
M. Jacques LAMINIE	Examinateur	Professeur à l'Université des Antilles-Guyane
M. Alex MERIL	Examinateur	Professeur à l'Université des Antilles-Guyane
M. Dimitris SCARPALEZOS	Examinateur	Maître de Conférence à l'Université Paris 7

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur Alex Méril de l'Université des Antilles-Guyane qui fut mon premier directeur de thèse et qui fut à l'origine de ce sujet.

Il m'a accordé sa confiance en me proposant ce sujet original et enrichissant. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude d'avoir accepté d'être examinateur au sein du jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur Antoine Delcroix de l'IUFM de Guadeloupe d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse, d'avoir dirigé avec patience et dévouement ce travail, de m'avoir constamment soutenu de ses conseils vigilants et de ses précieux encouragements et d'avoir été si disponible.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs Jean-Paul Chehab de l'Université d'Amiens et Alain-Yves Leroux de l'Université de Bordeaux 1, qui me font l'honneur de participer au jury de cette thèse et ont accepté la lourde tâche de rapporteurs. Je leur exprime toute ma reconnaissance et ma respectueuse considération.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Jacques Laminie de l'Université des Antilles-Guyane et Monsieur Dimitris Scarpalézos, Maître de Conférences à l'Université Paris 7, qui me font l'honneur d'être examinateurs au sein du jury. Je leur exprime toute ma reconnaissance et ma respectueuse considération.

Je remercie l'Ecole Doctorale de l'UAG, et en particulier Madame la Rectrice Jacqueline Abaul, sa Directrice, pour m'avoir permis d'achever ce travail dans de bonnes conditions. Je lui exprime toute ma reconnaissance et ma respectueuse considération.

Je remercie mes collègues et amis Daniel Mont-Louis Calixte et Patrick Alexandrine pour leur aide précieuce et leur regard critique.

Je remercie vivement mon ami Hassan Chaoui, Docteur en Microélectronique à l'Université Paris 6 pour ses encouragements et son aide précieuse tout au long de cette thèse.

A mes parents Alain et Jacqueline

A mon frère David, à ma soeur Caroline

A mon Fils Alexis, à ma fille Nora

A ma femme Myriam

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Cadre théorique : rappels et compléments sur la théorie des fonctions généralisées simplifiées **7**

2.1 Rappels sur l'algèbre des fonctions généralisées simplifiées 8

2.1.1 Définition de l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$ 8

2.1.2 Constantes généralisées 9

2.1.3 L'association dans $\mathcal{G}_S(\Omega)$ 9

2.1.4 Restriction et support d'une fonction généralisée 10

2.1.5 Définition de l'algèbre $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$ 11

2.1.6 Le préfaisceau $\mathcal{G}_{\overline{\Omega}}$ 13

2.2 Fonctions généralisées de Heaviside et de Dirac dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ 14

2.3 Produit tensoriel 16

3 Problème de Riemann linéaire : existence de solutions généralisées faibles **27**

3.1 Enoncé du problème 27

3.2 Solutions généralisées faibles 29

3.2.1 Recherche de solutions de type produit de Heaviside 29

3.2.2 Recherche d'une solution bloquée à l'origine 34

3.2.3 Recherche de solutions présentant deux discontinuités avec valeur intermédiaire 35

4 Schémas numériques de type Godunov et tests numériques dans le cas linéaire **44**

4.1 Construction des schémas numériques de type Godunov 44

4.1.1 Cadre général 44
4.1.2 Etude détaillée du cas 1 : $a^n_{i,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i-1,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'-1} \leq 0$. 46
4.1.3 Les autres cas 47
4.2 Construction des schémas numériques par Splitting et comparaisons 55
4.2.1 Construction des schémas par Splitting 56
4.2.2 Remarques sur les differences entre la méthode 2D et la méthode par Splitting 60
4.3 Tests numériques 61
4.4 Interprétation des résultats et calcul de la complexité des deux méthodes . 107
4.4.1 Interprétation 107
4.4.2 Analyse de la complexité de la méthode par Splitting et de la méthode 2D. 108
4.5 Stabilité des schémas numériques 2D 110

5 Schémas numériques de type Godunov et tests numériques dans le cas non linéaire 111
5.1 Construction des schémas numériques de type Godunov 113
5.1.1 Cadre et notations 113
5.1.2 Schémas numériques 2D 115
5.1.3 Schémas numériques par Splitting 124
5.1.4 Remarques sur les differences entre la méthode 2D et la méthode par Splitting 128
5.2 Comparaison des schémas numériques 2D et Splitting par les tests numériques 129
5.3 Interprétation des résultats et calcul de la complexité des deux méthodes . 149
5.3.1 Interprétation 149
5.3.2 Analyse de la complexité de la méthode par Splitting et de la méthode 2D. 150
5.4 Stabilité des schémas numériques 2D 152

6 Bibliographie 155

7 Annexe 158

8 Perspectives et théorème d'existence de solution forte "presque partout" 159

Chapitre 1

Introduction

Ce travail est principalement consacré au développement de schémas numériques de type Godunov "2D" pour l'équation de transport non linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,y,t) + b(x,y,t)\frac{\partial g(u)}{\partial y}(x,y,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

complétée de la condition initiale :

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

où :

- les fonctions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ et $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$, mais peuvent être discontinues,
- les fonctions f et g sont lisses et monotones,
- la fonction $\{(x,y) \to u_0(x,y)\}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où les fonctions a, b et u_0 présentent des sauts et s'écrivent sous la forme de produit tensoriels de fonctions de type Heaviside (ceci sera explicité dans le chapitre 2) et à la recherche et au calcul numérique de solutions faibles (dans un sens précisé au chapitre 3) présentant elles-mêmes ce type de singularité. Par exemple, les solutions cherchées peuvent être de la forme

$$H = H_1 \otimes H_2 = [(x,y) \to (H_{1,\varepsilon} \otimes H_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$$

où H_1 et H_2 sont deux fonctions de type Heaviside (dans un sens précisé ultérieurement) ou posséder des formes plus complexes, comme être une somme de fonctions du type précédent.

En dimension un en espace, le problème de Riemann et la construction des schémas ont été traité par Bernard [3,4] et Remaki [24]. En dimension deux en espace, il est usuel d'utiliser un *splitting* explicité dans [24, 28, 29], ce qui conduit à la résolution de deux problèmes de Riemann mono dimensionnels. Un certain nombre de résultats existent, concernant le traitement direct du problème bidimensionnel, par exemple ceux de Wagner et de Zhang et Zheng [30, 31] dont la résolution du problème de Riemann 2D pour des lois de conservation fait état de référence. Plusieurs choses y sont décrites :

- Le problème de Riemann pour une loi à deux variables,
- certains résultats comme l'existence d'une solution faible,
- la notion d'entropie à la Krushkov (incontournable dans les lois de conservation),
- les conditions de Rankine-Hugoniot dont on se servira pour la résolution du problème de Riemann 2D.

Notons, cependant, que la résolution de l'équation initiale, même dans le cadre linéaire ($f(u) = g(u) = u$) fait apparaître des produits de distributions, essentiellement celui de fonctions de Heaviside par des masses de Dirac, qui peuvent ne pas avoir de sens en théorie des distributions, en fonction de la position respective des fronts d'ondes de ces distributions. Pour nous affranchir de cette difficulté, nous avons choisi de développer la partie théorique de ce travail dans le cadre de la théorie des fonctions généralisées simplifiées de J.-F. Colombeau. En effet, l'espace des distributions s'injecte naturellement dans les algèbres simplifiés de J.-F. Colombeau permettant ainsi d'écrire l'ensemble des produits requis "sans prendre de précaution particulières". De plus, une égalité faible au sein de cette algèbre permet de développer le concept de solution faible qui nous est nécessaire.

Nous commençons ce travail (chapitre 2) par les rappels minimaux, nécessaires à la suite du travail, sur la théorie des fonctions généralisées simplifiées de J.-F. Colombeau.

Pour pouvoir construire ultérieurement des solutions faibles s'écrivant grosso modo comme produits tensoriels de fonctions de Heaviside, nous développons le concept de produit tensoriel dans le cadre des algèbres simplifiés de J.-F. Colombeau $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$ où $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$([**?**]). Dans notre cas $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^i \times [0; +\infty[\ i = 1, 2$.

Un des résultats clés (pour déterminer les solutions faibles cherchés) donne des conditions suffisantes pour que lorsqu'une somme de fonctions généralisées particulières est associée à 0, chacune des fonctions généralisées est nulle. C'est la :

Proposition 24. Soient H_1 et H_2 des fonctions de Heaviside de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentants respectifs $H_{1,\varepsilon}$ et $H_{2,\varepsilon}$. On considère les fonctions généralisées f et g de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[)$ définies par

$$f : \left[(x,y,t) \to KH'_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0,+\infty[)}$$
$$g : \left[(x,y,t) \to K'H_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0,+\infty[)}$$

où $(c_1, c_2, K, K') \in \mathbb{R}^4$.
On suppose que $f + g \approx 0$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[)$, alors $K = 0 \quad et \quad K' = 0$.

Dans le chapitre 3, nous définissons le concepte de "solutions généralisées faibles" dans $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$. Nous utilisons ensuite les résultats théoriques (notamment la proposition 24) et une extension des techniques introduites par S. Bernard et Remaki pour démontrer l'existence de solutions faibles du type cherché, dans le cas linéaire. On note que le passage de la dimension 1 des travaux cités au cas de la dimension 2 étudiée ici introduit une plus grande complexité, en raison de la propagation des discontinuités dans deux directions (comme dans l'exemple donné ci dessus.) Nous nous bornons, dans ce chapitre à présenter les cas exactement nécessaires à la construction des chémas de type Godunov.

Comme déjà indiqué, on résout usuellement le problème de Riemann en deux dimensions (problème 2D) par une méthode de splitting. La méthode de splitting consiste à décomposer l'équation bidimensionnelle en deux sous équations mono dimensionnelles qui se traitent chacune de façon identique. Si les résultats numériques sont reconnus comme très fiables, la méthode même du splitting n'est pas sans susciter des critiques sur le plan de la rigueur mathématique (considérer que si une somme de termes est nulle chaque terme est nul est à la base du splitting). A l'aide de l'étude faite au chapitre 3, nous développons ici des schémas numériques de Godunov en dimension 2 (chapitre 4). Cependant le solveur bibimensionnel en espace (qui s'écrit sous forme de produit tensoriel de fonctions de type Heaviside) utilisé lors de la résolution du problème de Riemann 2D n'a pas été justifié de façon théorique, nous le validons par des test numériques, qui comparent les résultats obtenus par ces schémas et ceux de la méthode du splitting.

Les tests réalisés montrent que les schémas numériques 2D sont aussi fiables que ceux par Splitting, mais aussi beaucoup plus simples dans leur écriture. En effet, ils n'ont pas de termes en r d'ordre deux comme ceux de la méthode par Splitting, où r est un paramètre

lié à la variation temporelle Δt et au pas h par la relation $\Delta t = rh$. Enfin nous disposons d'un résultat de stabilité pour la norme L^∞ pour les schémas numériques 2D.

De plus, nous montrons que les mêmes schémas peuvent être construits dans le cas non linéaire (chapitre 5). Les tests montrent que dans ce cas également, les schémas numériques 2D sont aussi fiables que ceux par splitting, avec le même gain dans leurs écriture que dans le cas linéaire. Un résultat de stabilité pour la norme L^∞ est également établi pour les schémas numériques 2D.

Chapitre 2

Cadre théorique : rappels et compléments sur la théorie des fonctions généralisées simplifiées

Dans les problèmes mathématiques issus du domaine de la mécanique des milieux continus, une onde de choc dont on néglige l'épaisseur peut être représentée par une fonction discontinue telle que la fonction de Heaviside. Malheureusement cette représentation mathématiques des variations très brutales de grandeurs physiques comme c'est le cas des modèles écrits sous forme non conservative fait apparaître des produits de distributions, comme celui d'une fonction de Heaviside par une masse de Dirac. En plongeant les distributions dans une algèbre différentielle, J-F Colombeau a introduit un outil permettant d'écrire ces produits sans condition restrictive. Nous commençons ce chapitre par des rappels sur l'algèbre des fonctions généralisées simplifiées et ses propriétés, mais pour être en adéquation avec notre problème, nous prolongeons la définition classique de Colombeau sur $\overline{\Omega}$, l'adhérence de Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$(Pour de plus amples détails, on peut se référer à [5, 8, 9,10,11,20,22]. Nous le poursuivons par des compléments sur les fonctions généralisées de Dirac et de Heaviside. Enfin, dans une section consacrée au produit tensoriel, nous introduisons notre outil principal, démontrons des résultats relatif au comportement de l'égalité faible vis-à-vis de ce produit tensoriel et les propositions annoncées dans l'introduction.

2.1 Rappels sur l'algèbre des fonctions généralisées simplifiées

2.1.1 Définition de l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons :

$$\mathcal{E}_S(\Omega) = C^\infty(\Omega)^{]0,1]}.$$

Définissons :

$$\mathcal{E}_{M,S}(\Omega) = \left\{ R_\varepsilon \in \mathcal{E}_S(\Omega) \,/\, \forall K \subset\subset \Omega,\, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, \exists q \in \mathbb{N} \ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha R_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{-q}),\ \varepsilon \to 0 \right\},$$

$$\mathcal{N}_S(\Omega) = \left\{ R_\varepsilon \in \mathcal{E}_S(\Omega) \,/\, \forall K \subset\subset \Omega,\, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, \forall m \in \mathbb{N} \ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha R_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{m}),\ \varepsilon \to 0 \right\}.$$

Proposition 1 *L'ensemble $\mathcal{E}_S(\Omega)$ est une algèbre, $\mathcal{E}_{M,S}(\Omega)$ forme une sous algèbre de $\mathcal{E}_S(\Omega)$ et $\mathcal{N}_S(\Omega)$ est un idéal de $\mathcal{E}_{M,S}(\Omega)$.*

Ces propriétés justifient la définition suivante.

Définition 2 *L'algèbre des fonctions généralisées simplifiées (de Colombeau) est l'espace quotient*

$$\mathcal{G}_S(\Omega) = \frac{\mathcal{E}_{M,S}(\Omega)}{\mathcal{N}_S(\Omega)}.$$

Proprietés 3

a) L'algèbre $C^\infty(\Omega)$ s'injecte dans $\mathcal{G}_S(\Omega)$. Plus précisément, l'application

$$\sigma : C^\infty(\Omega) \to \mathcal{G}_S(\Omega), \quad f \mapsto R_\varepsilon + \mathcal{N}_S(\Omega)$$

avec $R_\varepsilon(\cdot) = f(\cdot)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, est un homomorphisme injectif d'algèbre.

b) Il existe une injection (non canonique) de l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans l'espace des fonctions généralisées simplifiées $\mathcal{G}_S(\Omega)$.

Voici comment on peut construire une telle injection. Posons :

$$K_\varepsilon = \{x \in \Omega \,/\, d(x, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) \geq \varepsilon \ \text{ et } \ d(x,0) \leq 1/\varepsilon\}.$$

Considérons $(k_\varepsilon) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^{]0,1]}$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, $0 \leq k_\varepsilon \leq 1$, $k_\varepsilon \equiv 1$ dans K_ε.(Par exemple, $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ peut être obtenue par convolution de la fonction caractéristique de $K_{\varepsilon/2}$ avec

des fonctions tests $(\varphi_\varepsilon) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^{]0,1]}$ dont le support décroît suffisament rapidement vers zéro. Soit $\mathfrak{X} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \mathfrak{X} \leq 1$, $\mathfrak{X} \equiv 1$ dans $\overline{B(0,1)}$, $\mathfrak{X} \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2)$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\displaystyle\int \rho(x)dx = 1$ telle que $\displaystyle\int x^m \rho(x)dx = 0$. Posons, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $m \in \mathbb{N}^n \backslash \{0\}$,

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x.\varepsilon^{-1}) \ ; \quad \theta_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x)\mathfrak{X}(|\ln \varepsilon|\, x) \text{ et } \theta_1(x) = 1,$$

L'application

$$i_A : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{G}_S(\Omega) \ \ T \longmapsto ((k_\varepsilon T) * \theta_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}_S(\Omega)$$

est un homomorphisme injectif d'espaces vectoriels. De plus, $i_A \big|_{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sigma$. (Pour de plus amples détails, on peut consulter l'article [11].)

Théorème 4 *Un élément R_ε de $\mathcal{E}_{M,S}(\Omega)$ appartient aussi à $\mathcal{N}_S(\Omega)$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall K \subset\subset \Omega, \ \forall m \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in K} |R_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^m), \ \varepsilon \to 0.$$

Preuve : voir [22].

2.1.2 Constantes généralisées

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, posons :

$$\varepsilon_{M,S} = \left\{ R_\varepsilon \in \mathbb{K}^{]0;1]} \ / \ \exists p \in \mathbb{N} \quad |R_\varepsilon| = O(\varepsilon^{-p}), \ \varepsilon \to 0 \right\},$$
$$\mathcal{I}_S = \{ R_\varepsilon \in \varepsilon_{M,S} \ / \ \forall m \in \mathbb{N} \quad |R_\varepsilon| = O(\varepsilon^m), \ \varepsilon \to 0 \}.$$

Comme ci dessus, $\varepsilon_{M,S}$ est une sous algèbre de $\mathbb{R}^{]0;1]}$ et $\mathcal{I}_S$ est un idéal de $\varepsilon_{M,S}$.

Définition 5 *L'anneau des constantes (réelles) généralisée est l'anneau quotient :*

$$\overline{\mathbb{K}} = \frac{\varepsilon_{M,S}}{\mathcal{I}_S}.$$

On vérifie sans peine que $\mathcal{G}_S(\Omega)$.est une algèbre sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1.3 L'association dans $\mathcal{G}_S(\Omega)$

A coté de l'égalité algébrique dans $\mathcal{G}_S(\Omega)$, on introduit une égalité plus faible appelée association notée $\approx$.

Définition 6 *On dit que $\overline{Z} \in \overline{\mathbb{R}}$ admet un nombre réel associé $Z \in \mathbb{R}$ si il existe un représentant (arbitraire) R_ε de $\overline{Z}$ tel que $\lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon = Z$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition 7 *On dit que deux fonctions généralisées $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_S(\Omega)$ sont associées l'une à l'autre si :*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left[R_{1,\varepsilon}(x) - R_{2,\varepsilon}(x)\right] \phi(x) dx = 0$$

où $R_{1,\varepsilon},\ R_{2,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{M,S}(\Omega)$ sont des représentants respectifs de $G_1,\ G_2$.
On note $G_1 \approx G_2$.

Remarque 8 *L'association n'est pas cohérente avec la multiplication, mais l'est avec la dérivation.*

Définition 9 *Considérons $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. On dit qu'une fonction généralisées $G \in \mathcal{G}_S(\Omega)$ admet la distribution T comme aspect macroscopique s'il existe un représentant R_ε de G tel que :*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} R_\varepsilon(x) \phi(x) dx = \langle T, \phi \rangle .$$

Remarque 10 *La différence avec l'association vient du fait qu'il n'y a pas l'inclusion canonique $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{G}_S(\Omega)$, $i_A(T)$ est un élément bien défini de $\mathcal{G}_S(\Omega)$ quoique non canoniquement associé à T.*
En considérant l'inclusion $\mathcal{G}_S(\Omega)$ dans $\mathcal{G}(\Omega)$, alors G admet T comme aspect macroscopique si et seulement si $G \approx T$ (T étant un élément bien défini de $\mathcal{G}(\Omega)$).

2.1.4 Restriction et support d'une fonction généralisée

On rappelle que $\mathcal{G}_S(\cdot)$ forme un *faisceau d'algèbres* sur $\mathbb{R}^n$. En particulier soit $R \in \mathcal{G}(\Omega)$. Rappelons que :

- pour un ouvert Ω' inclus dans Ω et $R \in \mathcal{G}(\Omega)$, la *restriction* de R à Ω' est définie par $R|_{\mathcal{G}(\Omega')} = [R_\varepsilon(\cdot)|_{\Omega'}]_{\mathcal{G}(\Omega')}$ où $R_\varepsilon(\cdot)$ est un représentant quelconque de R ;
- le *support* de R est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert de Ω sur lequel R est nulle.

2.1.5 Définition de l'algèbre $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \left\{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ f_{|\Omega} \in C^\infty(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N},\ \forall x \in \partial\Omega,\ \lim_{y \to x,\ y \in \Omega} \mathcal{D}^{(\alpha)} f(y) = \mathcal{D}^{(\alpha)} f(x) \right\}$$

$$\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega}) = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})^{]0,1]} \,/\, \forall K \Subset \overline{\Omega},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \exists q \in \mathbb{N}\ \sup_{x \in K} \left| \mathcal{D}^{(\alpha)} u_\varepsilon(x) \right| = O(\varepsilon^{-q}),\ \varepsilon \to 0 \right\}$$

$$\mathcal{N}_S(\overline{\Omega}) = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})^{]0,1]} \,/\, \forall K \Subset \overline{\Omega},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall m \in \mathbb{N}\ \sup_{x \in K} \left| \mathcal{D}^{(\alpha)} u_\varepsilon(x) \right| = O(\varepsilon^{m}),\ \varepsilon \to 0 \right\}$$

Proposition 11 *L'ensemble $C^\infty(\overline{\Omega})^{]0,1]}$ est une algèbre, $\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega})$ forme une sous algèbre de $C^\infty(\overline{\Omega})^{]0,1]}$ et $\mathcal{N}_S(\overline{\Omega})$ est un idéal de $\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega})$.*

Ces propriétés justifient la définition suivante.

Définition 12 *L'algèbre des fonctions généralisées simplifiées (de Colombeau) prolongé à $\overline{\Omega}$ est l'espace quotient*

$$\mathcal{G}_S(\overline{\Omega}) = \frac{\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega})}{\mathcal{N}_S(\overline{\Omega})}.$$

Dans le but de définir une égalié faible au sein de $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$, nous introduisons quelques définitions auxilliaires.

Definition 13 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.Pour la fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, la définition du support est la définition classique*

$$Supp f = \overline{\left\{ x \in \overline{\Omega},\ f(x) \neq 0 \right\}}$$

où l'adhérence dépend de la topologie de $\overline{\Omega}$ induite par celle de $\mathbb{R}^n$. Nous définissons l'espace des fonctions de $C^\infty(\overline{\Omega})$ à supports compacts

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})\ /\ Supp\varphi\ compact \Subset \overline{\Omega}\ /\ \forall \alpha \in \mathbb{N}\ \ \mathcal{D}^{(\alpha)} \varphi_{|\partial\overline{\Omega}} = 0 \right\}$$

et pour tout compact $K \Subset \overline{\Omega}$

$$\mathcal{D}_K(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\ /\ Supp\varphi \subset K\ \right\}$$

De façon naturelle, la topologie sur $C^\infty(\overline{\Omega})$ est celle définie par les semi-normes $(p_{k,K})_{K \Subset \overline{\Omega}, k \in \mathbb{N}}$ où

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \ni f \to p_{k,K}(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq k} \left| \mathcal{D}^{(\alpha)} f(x) \right|$$

L'espace $\mathcal{D}_K(\overline{\Omega})$ est muni de la topologie induite par celle de $C^\infty(\overline{\Omega})$ et comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \underset{K \Subset \overline{\Omega}}{\cup} \mathcal{D}_K(\overline{\Omega})$, nous définissons sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, la topologie limite inductive de celle de $\mathcal{D}_K(\overline{\Omega})$. Soit l'injection canonique $i_K : \mathcal{D}_K(\overline{\Omega}) \to \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, T fonction $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est continue pour la topologie de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ si et seulement si pout tout $K \Subset \overline{\Omega}$, la fonction $T_K = T \circ i_K$ est continue pour la topologie de $\mathcal{D}_K(\overline{\Omega})$. Ceci nous amène à la définition(inhabituelle) suivante de $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$.

Definition 14 *Nous définissons $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions linéaires de $\mathcal{D}^*(\overline{\Omega})$ continues pour la topologie de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$*

$$\mathcal{D}^*(\overline{\Omega}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \mathbb{C})$$

$$\mathcal{D}'(\overline{\Omega}) = \left\{T \in \mathcal{D}^*(\overline{\Omega}) \ / \ \forall K \Subset \overline{\Omega},\ \exists C > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\overline{\Omega}) : \ \ |\langle T, \varphi \rangle| \leq C p_{k,K}(\varphi)\right\}$$

Definition 15 *On définit la topologie faible $*$ sur $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$(Nous n'avons pas la certitude que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ soit réflexif).Quelque soit $T_0 \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$, une base de voisinages faible $*$ de T_0 est formée par les ouverts faible $*$ de la forme*

$$\left\{T \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega}) / \ |\langle T - T_0, \varphi_i \rangle| < \varepsilon,\ \forall i \in I\right\}$$

où $\varepsilon > 0$, I est fini et $\varphi_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. La convergence faible $*$ est caractérisée par

$$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\overline{\Omega}) \Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \ \textit{dans}\ \mathbb{C}$$

Remark 16 *$C^\infty(\overline{\Omega})$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ puisque pour tout $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, pour tout $K \Subset \overline{\Omega}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\overline{\Omega})$*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq |K| \underset{x \in K}{Sup} |f(x)| \underset{x \in K}{Sup} |\varphi(x)| \leq C p_{0,K}(\varphi).$$

De part la définition, les éléments de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ainsi que leurs dérivées successives s'annulent sur la frontière ($\forall \alpha \in \mathbb{N} \quad \mathcal{D}^{(\alpha)}\varphi_{|\partial\overline{\Omega}} = 0$), par conséquent les opérations dans $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ sont similaires à celles dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, plus particulièrement la dérivation

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \left\langle \mathcal{D}^{(\alpha)} T, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \mathcal{D}^{(\alpha)} \varphi \right\rangle$$

Definition 17 *On dit que $u_1, u_2 \in \mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$ sont associées si et seulement si :*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\overline{\Omega}} \left[u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x)\right] \phi(x) dx = 0$$

où $u_{1,\varepsilon},\ u_{2,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega})$ *sont les représentants respectifs de* $u_1,\ u_2$*, c'est-à-dire*

$$u_{1,\varepsilon} - u_{2,\varepsilon} \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\overline{\Omega}).$$

On note $u_1 \approx u_2$*.*

Definition 18 *On dit que* $u_1 \in \mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$ *est associé à la distribution* $T_1 \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ *si et seulement si :*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\overline{\Omega}} u_{1,\varepsilon}(x)\phi(x)dx = \langle T_1, \phi \rangle$$

où $u_{1,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega})$ *est un représentant de* u_1*, c'est-à-dire*

$$u_{1,\varepsilon} - T_1 \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\overline{\Omega}).$$

On note $u_1 \approx T_1$*.*

Remark 19 *La définition de l'association ne dépend pas des réprésentants de* u_1 *et* u_2 *car si* $i_\varepsilon \in \mathcal{N}_S(\overline{\Omega})$ *alors*

$$\forall m \in \mathbb{N}\ ,\ \left| \int_{\overline{\Omega}} i_\varepsilon(x)\phi(x)dx \right| = O(\varepsilon^m),\ \varepsilon \to 0$$

ce qui conclut.

Remark 20 *L'association n'est pas compatible avec le produit, mais l'est avec la dérivation.*

2.1.6 Le préfaisceau $\mathcal{G}_{\overline{\Omega}}$

Definition 21 *Classiquement* $\mathcal{G}$ *représente un faisceau sur* $\mathbb{R}^n$ *de l'algèbre des fonctions généralisées de Colombeau ([?]).*

Nous définissons

$$\mathcal{G}_{\overline{\Omega}}(\mathcal{O}) := \frac{\mathcal{E}_{\overline{\Omega},M}(\mathcal{O})}{\mathcal{N}_{\overline{\Omega}}(\mathcal{O})}.$$

avec

$$\mathcal{E}_{\overline{\Omega},M}(\mathcal{O}) = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{O})^{]0,1]} \,/\, \forall K \Subset \overline{\Omega},\ \forall k \in \mathbb{N}_0^n,\ \exists q \in \mathbb{N} \quad p_{k,K}(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^{-q}),\ \varepsilon \to 0 \right\}$$

$$\mathcal{N}_{\overline{\Omega}}(\mathcal{O}) = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{O})^{]0,1]} \,/\, \forall K \Subset \overline{\Omega},\ \forall k \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall m \in \mathbb{N} \quad p_{k,K}(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^{m}),\ \varepsilon \to 0 \right\}.$$

Nous savons [?] que $\mathcal{G}_{\overline{\Omega}}$ est un préfaisceau des $(\mathcal{C}, \varepsilon, \mathcal{P})$-algèbres engendrée par la famille $((\varepsilon))_\varepsilon$ avec le principe de localisation en plus. D'après [?], quand $\mathcal{O}$ est ouvert dans $\overline{\Omega}$, le support de $u \in \mathcal{G}_{\overline{\Omega}}(\mathcal{O})$ peut être défini comme le complémentaire dans $\mathcal{O}$ de l'ouvert

$$\mathcal{O}_{\mathcal{G}_{\overline{\Omega}}}(u) = \left\{x \in \mathcal{O} / \ \exists V \in \mathcal{V}_x \quad u_{|V} = 0\right\}$$

où $\mathcal{V}_x$ est l'ensemble de tous les voisinages de x dans $\mathcal{O}$. De plus, grace au principe de localisation, $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_{\overline{\Omega}}}(u)$ est aussi l'union de tous les ouverts et le plus grand sur lequel u s'annule.

2.2 Fonctions généralisées de Heaviside et de Dirac dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$

Nous rappelons et complétons les notions introduites dans [Bernard].

Définition 22 *Une fonction généralisée H dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ est appelée fonction généralisée de Heaviside si elle a un représentant $H_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,S}(\mathbb{R})$ tel qu'il existe une fonction $A(\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^{]0;1]}$ avec $lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = 0$ et :*
1) $\forall \varepsilon \in]0;1], \quad H_\varepsilon|_{]-\infty;-A(\varepsilon)]} = 0,$
2) $\forall \varepsilon \in]0;1], \quad H_\varepsilon|_{[A(\varepsilon);+\infty[} = 1,$
3) $\sup_{\varepsilon \in]0;1], x \in \mathbb{R}} |H_\varepsilon(x)| < +\infty.$

Définition 23 *Une fonction généralisée de Dirac sur $\mathbb{R}$ est un élément δ de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ dont un représentant $\delta_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,S}(\mathbb{R})$ vérifie : il existe $A(\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^{]0;1]}$ avec $lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = 0$ et :*
1) $\forall \varepsilon \in]0;1], \quad \delta_\varepsilon|_{\mathbb{R} \setminus [-A(\varepsilon);A(\varepsilon)]} = 0,$
2) $\forall \varepsilon \in]0;1], \int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x) dx = 1,$
3) $\sup_{\varepsilon \in]0;1]} \int_{\mathbb{R}} |\delta_\varepsilon(x)| \, dx < +\infty.$

Proposition 24
(a) Toutes les fonctions généralisées de Heaviside (resp. Dirac) sont associées entre elles.
(b) Toute dérivée de fonction généralisée de Heaviside est associée à une fonction généralisée de Dirac (et d'après le (a) à toutes).

Preuve

(a) Soient H_1 et H_2 deux Heaviside généralisés de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentants respectifs $H_{1,\varepsilon}$ et $H_{2,\varepsilon}$ vérifiant les conditions de la définition 22. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il existe $A(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}} (H_{1,\varepsilon}(x) - H_{2,\varepsilon}(x))\, \varphi(x)dx = \int_{-\mathbb{A}(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} (H_{1,\varepsilon}(x) - H_{2,\varepsilon}(x))\, \varphi(x)dx.$$

Posons $M_i = \sup_{\varepsilon\in]0;1],\ x\in\mathbb{R}} |H_{i,\varepsilon}(x)|$ $(i = 1, 2)$. On a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (H_{1,\varepsilon}(x) - H_{2,\varepsilon}(x))\, \varphi(x)dx \right| \leq (M_1 + M_2)\, \|\varphi\|_\infty\, A(\varepsilon)$$

ce qui conclut.

Soient δ_1 et δ_2 deux Dirac généralisés de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentants respectifs $\delta_{1,\varepsilon}$ et $\delta_{2,\varepsilon}$ vérifiant les conditions de la définition 23. Posons, pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, $H_{1,\varepsilon} = \int_{-\infty}^{x} \delta_{1,\varepsilon}(t)dt$ et $H_{2,\varepsilon} = \int_{-\infty}^{x} \delta_{2,\varepsilon}(t)dt$. Il est clair que $H_{1,\varepsilon}$ et $H_{2,\varepsilon}$ appartiennent à $\mathcal{E}_{M,S}(\mathbb{R})$ et vérifient les propriétés 1), 2) et 3) de la définition 22. Donc $H_1 = [H_{1,\varepsilon}]$ ainsi que $H_2 = [H_{2,\varepsilon}]$ sont des Heavisides généralisés. On sait que tous les Heavisides généralisés sont associés. Ainsi H_1 est associé à H_2, et par compatibilité de l'association avec la dérivation, $H_1' = \left[H_{1,\varepsilon}'\right] = [\delta_{1,\varepsilon}] = \delta_1$ est associé à $H_2' = \left[H_{2,\varepsilon}'\right] = [\delta_{2,\varepsilon}] = \delta_2$.

(b)Soit δ un Dirac généralisé de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentant δ_ε vérifiant les conditions de la définition 23 et soit H un Heaviside généralisé de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentant H_ε vérifiant les conditions de la définition 22

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en utilisant le théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\delta_\varepsilon(x) - H_\varepsilon'(x))\varphi(x)dx &= \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} (\delta_\varepsilon(x) - H_\varepsilon'(x))dx \\ &\quad + \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} x\varphi'(\theta x)(\delta_\varepsilon(x) - H_\varepsilon'(x))dx\end{aligned}$$

avec $0 < \theta < 1$ et $A(\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^{]0;1]}$ qui tend vers 0 quand ε tend vers 0. Des hypothèses, nous avons immédiatement

$$\varphi(0) \int_{\mathbb{R}} (\delta_\varepsilon(x) - H_\varepsilon'(x))dx = 0$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} (\delta_\varepsilon(x) - H_\varepsilon'(x))\varphi(x)dx \right| &= \left| \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} x\varphi'(\theta x)(\delta_\varepsilon(x) - H_\varepsilon'(x))dx \right| \\ &\leq A(\varepsilon) \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi'(x)\right| \underbrace{\left[\int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx + \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} \left|H_\varepsilon'(x)\right| dx \right]}_{<+\infty \text{ d'après les hypothèses}}\end{aligned}$$

Or le membre de gauche de cette inégalité tend vers 0 quand ε tend vers 0, ce qui conclut la démonstration.

Proposition 25 *Toutes les fonctions généralisées de Heaviside (resp. Dirac) ont pour support* $\mathbb{R}_+$ *(resp.* $\{0\}$*).*

Preuve : Soit H une *fonction généralisée de Heaviside de représentant* H_ε vérifiant les conditions 1), 2), 3) de la définition 23 pour $A(\varepsilon)$. Pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{R}_-^*$, on a $H_\varepsilon \equiv 0$ sur K pour epsilon assez petit. Ainsi $H|_{\mathbb{R}_-^*} = \left[H_\varepsilon|_{\mathbb{R}_-^*}\right] = 0$. Donc $\operatorname{supp} H \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, il est clair que, pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \cap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing$, on a $H|_U \neq 0$. Donc l'ouvert d'annulation de H, égal à $\mathbb{R}\backslash \operatorname{supp} H$, est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} H$. D'où $\operatorname{supp} H = \mathbb{R}_+$.

La preuve est analogue pour les fonctions généralisées de Dirac.■

2.3 Produit tensoriel

Le but de cette partie est de définir le produit tensoriel de fonctions généralisées. Pour cela, commençons par quelques rappels sur le produit tensoriel des fonctions classiques. Pour plus de détails, on peut consulter [12, 26].

Definition 26 *Soient* Ω *et* Ω' *deux ouverts respectivement de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^q$*. Soient* f *et* g *deux fonctions complexes continues définies respectivement sur* Ω *et* Ω'*. On appelle produit tensoriel de* f *et de* g*, noté* $f \otimes g$*, la fonction* $\{(x,y) \mapsto f(x)g(y)\}$*.*

Proposition 27 *Si* f *est de classe* C^∞ *sur* Ω *et* g *de classe* C^∞ *sur* Ω'*, alors* $f \otimes g$ *est de classe* C^∞ *sur* $\Omega \times \Omega'$ *et l'on a :*

a) $D^{(\alpha,\beta)}(f \otimes g) = D^{(\alpha)}f \otimes D^{(\beta)}g$ *avec* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $\beta \in \mathbb{N}^q$*.*

b) $\operatorname{supp}(f \otimes g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$*.*

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(\Omega')$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega \times \Omega')$ engendré par les fonctions de la forme $f \otimes g$, avec $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{D}(\Omega')$.

Proposition 28 *Pour tout* $k \in \overline{\mathbb{N}}$*,* $\mathcal{D}(\Omega)\otimes\mathcal{D}(\Omega')$ *est séquentiellement dense dans* $\mathcal{D}^k(\Omega\times\Omega')$ *(espace des fonctions appartenant à* $C^k(\Omega \times \Omega')$ *à support compact).*

Preuve : voir [12,26].

On va maintenant définir le produit tensoriel de deux fonctions généralisées. Comme ce ne sont pas des fonctions usuelles, on doit montrer que la définition du produit tensoriel de deux fonctions généralisées ne dépend pas des représentants de ces fonctions.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $u_1 \in \mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$ (resp. $u_2 \in \mathcal{G}_S(\overline{\Omega'})$), $u_{1,\varepsilon}$ et $\underline{u}_{1,\varepsilon}$ deux représentants de u_1 dans $\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega})$(resp. $u_{2,\varepsilon}$ et $\underline{u}_{2,\varepsilon}$ deux représentants de u_2 dans $\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega'})$).

1) On montre d'abord aisément que $T_\varepsilon = u_{1,\varepsilon} \otimes u_{2,\varepsilon}$ ou $U_\varepsilon = \underline{u}_{1,\varepsilon} \otimes \underline{u}_{2,\varepsilon}$ appartiennent tous deux à $\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega'})$.

En effet le produit tensoriel de deux familles de fonctions modérées est une famille de fonctions modérées puisqu'un opérateur de dérivation appliquée au produit tensoriel se scinde en produit de deux opérateurs de dérivation (d'où la majoration cherchée).

2) On montre facilement aussi que $R_\varepsilon = u_{1,\varepsilon} \otimes u_{2,\varepsilon} - \underline{u}_{1,\varepsilon} \otimes \underline{u}_{2,\varepsilon} \in \mathcal{N}_S(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega'})$.

Tout d'abord $R_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega'})$ par stabilité de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_{M,S}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega'})$ par la différence.De plus :

$$R_\varepsilon = u_{2,\varepsilon} \otimes (u_{1,\varepsilon} - \underline{u}_{1,\varepsilon}) + \underline{u}_{1,\varepsilon} \otimes (u_{2,\varepsilon} - \underline{u}_{2,\varepsilon})$$

où $u_{1,\varepsilon} - \underline{u}_{1,\varepsilon} \in \mathcal{N}_S(\overline{\Omega})$ et $u_{2,\varepsilon} - \underline{u}_{2,\varepsilon} \in \mathcal{N}_S(\overline{\Omega'})$. Ainsi, R_ε est une somme de deux termes dont le premier, par exemple, est le produit tensoriel d'une famille de fonctions modérées par une famille de fonctions de l'idéal $\mathcal{N}_S(\overline{\Omega})$. Là encore, comme précédement, la majoration cherchée est immédiate.

Ainsi $[u_{1,\varepsilon} \otimes u_{2,\varepsilon}]_{\mathcal{G}_S(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega'})}$ définit une fonction généralisée ne dépendant que de u_1 et u_2 et non de leurs représentants. On notera $u_1 \otimes u_2 = [u_{1,\varepsilon} \otimes u_{2,\varepsilon}]_{\mathcal{G}_S(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega'})}$ appelée **produit tensoriel** de u_1 et u_2.

Proposition 29 *Avec les notations précédentes on a* $\operatorname{supp}(u_1 \otimes u_2) \subset \operatorname{supp} u_1 \times \operatorname{supp} u_2$.

Preuve.– Soit $O = \Omega \times \Omega' \backslash \operatorname{supp} u_1 \times \operatorname{supp} u_2$. Pour tout $(x, y) \in O$, il existe un voisinage ouvert de (x, y) de la forme $U \times V$ tel que $U \subset \Omega \backslash \operatorname{supp} u_1$ ou $V \subset \Omega' \backslash \operatorname{supp} u_2$. Supposons, par exemple, $U \subset \Omega \backslash \operatorname{supp} u_1$. On a alors $u_1|_U = 0$, donc $u_{1,\varepsilon}|_U \in \mathcal{N}_S(U)$. D'après un raisonnement analogue à celui ci-dessus, on en déduit que $u_{1,\varepsilon} \otimes u_{2,\varepsilon} \in \mathcal{N}_S(U \times V)$ et donc que $u_1 \otimes u_2|_{U\times V} = 0$. D'après la propriété de recollement, il en résulte que $u_1 \otimes u_2|_O = 0$ et donc que $\operatorname{supp}(u_1 \otimes u_2) \subset \operatorname{supp} u_1 \times \operatorname{supp} u_2$.■

Proposition 30 *Soient Y et H des fonctions de Heaviside généralisées de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentants respectifs Y_ε et H_ε.*

a) Le support de la fonction généralisée $[(x,t) \to H_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ est l'ensemble :

$$\Pi_c = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;+\infty[\ / \ x - ct \geq 0\}.$$

b) Le support de la fonction généralisée $[(x,t) \to H'_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ est l'ensemble :

$$\Gamma_c = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;+\infty[\ / \ x - ct = 0\}.$$

Preuve.– Les propriétés a) et b) se montrent de manière analogue à la proposition 25.

Proposition 31 *Avec les notations de la proposition 30, on a*

a) Pour $c > 0$, la fonction généralisée $[(x,t) \to H_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ est nulle dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^*_- \times [0;+\infty[)$.

b) Pour $c > 0$, la fonction généralisée $[(x,t) \to H'_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ est nulle dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^*_- \times [0;+\infty[)$ et pour $c < 0$ la fonction généralisée $[(x,t) \to H'_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ est nulle dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^*_+ \times [0;+\infty[)$.

c) Pour $c < 0$, la fonction généralisée $[(x,t) \to Y_\varepsilon(x)H'_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ est nulle dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^* \times [0;+\infty[)$.

d) Pour $c > 0$, $[(x,t) \to Y_\varepsilon(x)H'_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} = [(x,t) \to H'_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^* \times [0;+\infty[)$.

e) Pour $c > 0$, $[(x,t) \to Y_\varepsilon(x)H_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} = [(x,t) \to H_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^* \times [0;+\infty[)$.

Preuve

a)En effet, si $c > 0$, $\mathbb{R}^*_- \times [0;+\infty[$ est ouvert dans $\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times [0;+\infty[$ de telle sorte que

$$\mathbb{R}^*_- \times [0;+\infty[\cap \Pi_c = \varnothing$$

ainsi

$$[(x,t) \to H_\varepsilon(x-ct)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^*_- \times [0;+\infty[).$$

b) Ce cas se montre de façon similaire au a).

c) On pose

$$R = \big[(x,t) \to Y_\varepsilon(x)H'\varepsilon(x-ct)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$$

On peut écrire

$$R = \left[(x,t) \to (Y_\varepsilon \otimes 1_\varepsilon)\,(x,t) H'_\varepsilon(x-ct)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\left[(x,t) \to Y_\varepsilon \otimes 1_\varepsilon(x,t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} \subset \mathbb{R}_+ \times [0;+\infty[\\
&\operatorname{supp}\left[(x,t) \to H'_\varepsilon(x-ct)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} = \Gamma_c
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} R \subset\ & \operatorname{supp}\left[(x,t) \to Y_\varepsilon \otimes 1_\varepsilon(x,t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} \cap \operatorname{supp}\left[(x,t) \to H'_\varepsilon(x-ct)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} \\
& \subset \mathbb{R}_+ \times [0;+\infty[\cap \Gamma_c.
\end{aligned}$$

Si $c < 0$ alors $\mathbb{R}^* \times [0;+\infty[$ est ouvert dans $\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times [0;+\infty[$ de telle sorte que

$$\mathbb{R}^* \times [0;+\infty[\cap \mathbb{R}_+ \times [0;+\infty[\cap \Gamma_c = \varnothing$$

par conséquent

$$R = 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^* \times [0;+\infty[).$$

Le d) et le e) se montrent de façon similaire au c).■

Proposition 32 *Soient f, $g \in \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n)$, de représentants respectifs f_ε, g_ε et $h \in \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m)$ ayant pour représentant h_ε. On suppose les propriétés suivantes :*

(i) $f \approx g$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n)$

(ii) Pour tout $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]0,1] \ \int_K |h_\varepsilon(x)|\,dx \le A, \ \int_K |f_\varepsilon(x)|\,dx \le A, \ \int_K |g_\varepsilon(x)|\,dx \le A.$$

Alors on a $h \otimes f \approx h \otimes g$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{n+m})$.

Preuve.– Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Par densité séquentielle de $\mathcal{D}_\otimes(\mathbb{R}^{n+m})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, il existe une suite $(\psi_n)_n$ tel que $\psi_n = \sum_{k=1}^{N(n)} \xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ appartienne à $\mathcal{D}_\otimes(\mathbb{R}^{n+m})$ et $\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \varphi$ pour la topologie "limite inductive" de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Etape 1 : On montre le résultat pour $\psi_k^1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ de la forme $\xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ avec $(\xi_{ik}, \zeta_{jk}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. On pose $\psi_k^1 = \xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ à i, j, k fixés. On a :

$$\begin{aligned}\left|\iint_{\mathbb{R}^{n+m}} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, \psi_k^1(x,y) dxdy\right| \\ \leq \int_{\mathbb{R}^m} |h_\varepsilon(y)\zeta_{jk}(y)|\, dy \left|\int_{\mathbb{R}^n} [f_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)]\, \xi_{ik}(x) dx\right| \\ \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^m} |\zeta_{jk}(y)|\, A \left|\int_{\mathbb{R}^n} [f_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)]\, \xi_{ik}(x) dx\right|.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} \left|\int_{\mathbb{R}^n} [f_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)]\, \xi_{ik}(x) dx\right| = 0$ (puisque $f \approx g$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n)$), on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathbb{R}^{n+m}} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, \psi_k^1(x,y) dxdy = 0.$$

Etape 2 : On montre que le résultat est vrai pour les $\psi_n = \sum_{k=1}^{N(n)} \xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ finies. Par linéarité, du fait que si $\lim_{\varepsilon\to 0} A_i = 0$, alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^N A_i = 0$ pour toute somme finie, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}&\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha > 0,\ \exists \beta > 0, \forall \varepsilon, |\varepsilon| < \beta \\ &\qquad \Longrightarrow \left|\iint_{\mathbb{R}^{n+m}} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, \psi_n(x,y) dxdy\right| < \frac{\alpha}{2} \qquad (*).\end{aligned}$$

Etape 3 : On utilise le raisonnement de densité.

Il existe $K_1 \subset\subset \mathbb{R}^{n+m}$ et $N_{K_1} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{K_1}$, $\operatorname{supp} \psi_n \subset K_1$ et $\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \varphi$ au sens de la topologie de $\mathcal{D}_{K_1}(\mathbb{R}^{n+m})$ (on a bien entendu $\operatorname{supp} \varphi \subset K_1$).

On peut, de plus, choisir $K_1 = K_{1,x} \times K_{1,y}$ où $K_{1,x} \subset\subset \mathbb{R}^n$ et $K_{1,y} \subset\subset \mathbb{R}^m$. Par découpage, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left|\iint_{\mathbb{R}^{n+m}} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, \varphi(x,y) dxdy\right| \leq \\ &\qquad \underbrace{\left|\iint_{K_1} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, [\varphi(x,y) - \psi_{n_0}(x,y)]\, dxdy\right|}_{\text{(a)}} + \\ &\qquad\qquad \underbrace{\left|\iint_{K_1} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, \psi_{n_0}(x,y) dxdy\right|}_{\text{(b)}}\end{aligned}$$

On va majorer chaque quantité (a) et (b).

<u>(a) majorons</u> $\left|\iint_{K_1} [h_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x)]\, [\varphi(x,y) - \psi_{n_0}(x,y)]\, dxdy\right|$.

On a :

$$\iint_{K_1} |h_\varepsilon(y)|\,|f_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(x)|\,dxdy$$
$$\leq \int_{K_{1,y}} |h_\varepsilon(y)|\,dy \left(\int_{K_{1,x}} |f_\varepsilon(x)|\,dx + \int_{K_{1,x}} |g_\varepsilon(x)|\,dx\right)$$
$$\leq 2A^2 = M.$$

De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n = \varphi$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour n_0 fixé,

$$n_0 \geq \sup(N_0, N_{K_1}) \Longrightarrow \sup_{(x,y)\in K_1} |\varphi(x,y) - \psi_{n_0}(x,y)| < \frac{\alpha}{2M}$$

et $\operatorname{supp}\psi_{n_0} \subset K_1$, donc finalement, on a :

$$\left|\iint_{K_1} [h_\varepsilon(y)f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y)g_\varepsilon(x)]\,[\varphi(x,y)-\psi_{n_0}(x,y)]\,dxdy\right| \leq$$
$$\sup_{(x,y)\in K_1} |\varphi(x,y)-\psi_{n_0}(x,y)| \iint_{K_1} |h_\varepsilon(y)|\,|f_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(x)|\,dxdy < \frac{\alpha}{2M}M = \frac{\alpha}{2}.$$

<u>(b) majorons</u> $\underbrace{\left|\iint_{K_1} [h_\varepsilon(y)f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y)g_\varepsilon(x)]\,\psi_{n_0}(x,y)dxdy\right|}$.

D'après (*) dans l'étape 2 pour $n = n_0$, (puisque $\operatorname{supp}\psi_{n_0} \subset K_1$) on a :

$$\forall\alpha > 0,\ \exists\beta > 0, \forall\varepsilon,\ |\varepsilon| < \beta \Longrightarrow$$
$$\left|\iint_{\mathbb{R}^{n+m}} [h_\varepsilon(y)f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y)g_\varepsilon(x)]\,\psi_{n_0}(x,y)dxdy\right| =$$
$$\left|\iint_{K_1} [h_\varepsilon(y)f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y)g_\varepsilon(x)]\,\psi_{n_0}(x,y)dxdy\right| < \frac{\alpha}{2}.$$

En appliquant les majorations (a) et (b), on obtient :

$$\forall\alpha > 0,\ \exists\beta > 0, \forall\varepsilon,\ |\varepsilon| < \beta$$
$$\Longrightarrow \left|\iint_{\mathbb{R}^{n+m}} [h_\varepsilon(y)f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(y)g_\varepsilon(x)]\,\varphi(x,y)dxdy\right| < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

ce qui conclut la preuve.■

Proposition 33 *Soient H_1 et H_2 des fonctions de Heaviside de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ ayant pour représentants respectifs $H_{1,\varepsilon}$ et $H_{2,\varepsilon}$. On considère les fonctions généralisées f et g de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[)$ définies par*

$$f : \left[(x,y,t) \to KH'_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0,+\infty[)}$$
$$g : \left[(x,y,t) \to K'H_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0,+\infty[)}$$

où $(c_1, c_2, K, K') \in \mathbb{R}^4$.

On suppose que $f + g \approx 0$ *dans* $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[)$, *alors* $K = 0$ *et* $K' = 0$.

Preuve : Par contraposée, on va supposer ici que $K' \neq 0$, (le cas $K \neq 0$ se traitant similairement) et montrons que $f + g$ n'est pas associé à 0. On pose :

$$F(\varepsilon) = K \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[} H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) \varphi(x, y, t) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t +$$
$$K' \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[} H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) \varphi(x, y, t) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[)$.

Par définition, il existe une fonction $A(\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^{]0;1]}$ telle que $\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = 0$, vérifiant :

$$H_{i,\varepsilon}(\xi - c_i t) = 0 \quad \text{for } \xi < c_i t - A(\varepsilon) \quad , \quad H_{i,\varepsilon}(\xi - c_i t) = 1 \quad \text{for } \xi > c_i t + A(\varepsilon) \qquad i = 1, 2.$$

(On a $\operatorname{supp} H_{i,\varepsilon}(\xi - c_i t) \subset \{(\xi, t) \ / \ \xi > c_i t - A(\varepsilon)\}$.)

Etape 1 : Construction de la fonction test.

Comme $\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = 0$, alors pour $\alpha_0 > 0$ fixé,

$$\exists \beta > 0, \forall \varepsilon \in]0; \beta] \Longrightarrow A(\varepsilon) < \alpha_0.$$

Fixons $C = [t_0, t_1]$ compact de $[0, +\infty[$. Soit φ_C une fonction C^∞ positive à support compact C telle que $\varphi_C|_{\overset{\circ}{C}} > 0$. Soit A un segment de $\mathbb{R}$ inclus dans$]\sup_{t \in C}(c_1 t) + \alpha_0; +\infty[=]c_1 t_1 + \alpha_0; +\infty[$. Soit φ_A une fonction C^∞ à support A telle que $\varphi_A|_{\overset{\circ}{A}} > 0$. Soit enfin B un segment de $\mathbb{R}$ tel que $[\inf_{t \in C}(c_2 t) - \alpha_0; \sup_{t \in C}(c_2 t) + \alpha_0] = [c_2 t_0 - \alpha_0; c_2 t_1 + \alpha_0]$ soit inclus dans B. Soit φ_B une fonction C^∞ à support compact B telle que $\varphi_B|_{\overset{\circ}{B}} > 0$.

On peut remarquer que :

$$\int_D \varphi_D(s) ds > 0, \text{ pour } D = A, \ B, C.$$

On pose $\varphi(x, y, t) = \varphi_A(x)\varphi_B(y)\varphi_C(t)$.La fonction φ est donc une fonction C^∞ comme produit tensoriel de fonctions C^∞ et à support compact inclus dans le compact $A \times B \times C$.

Etape 2 : Simplification de l'expression de $F(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in]0; \beta]$.

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[} H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) \varphi(x, y, t) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t =$$
$$\int_{\mathbb{R}^2 \times C} H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) \varphi(x, y, t) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \qquad (*)$$

car $\text{supp}\varphi_C = C$. On a :

$$\text{supp}\, H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) \subset \{(x,t) \in \mathbb{R} \times C \,/\, x \in [c_1 t - A(\varepsilon); c_1 t + A(\varepsilon)]\} \ .$$

De plus, pour tout $t \in C$, on a :

$$A \subset \left]\sup_{t\in C}(c_1 t) + \alpha_0, +\infty\right[\subset]c_1 t + A(\varepsilon); +\infty[\qquad \text{car} \quad c_1 t + A(\varepsilon) < \sup_{t\in C}(c_1 t) + \alpha_0,$$

pour tout $\varepsilon \in]0;\beta]$. Donc :

$$\text{supp}(\varphi_A \otimes 1_{]0;+\infty[}) \cap \left(\text{supp}\left\{(x,t) \to H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\right\} \cap \mathbb{R} \times C\right) = \varnothing$$

Ainsi

$$H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\varphi(x,y,t)\big|_{\mathbb{R}^2 \times C} = 0,$$

et donc, pour tout $\varepsilon \in]0;\beta]$,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times C} H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\varphi(x,y,t) dxdydt = 0$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in]0;\beta]$, il vient :

$$K' \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[} H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\varphi(x,y,t) dxdydt = 0.$$

Etape 3 : Nouvelle simplification de l'expression de $F(\varepsilon)$

D'après l'étape précédente, on a, pour tout $\varepsilon \in]0;\beta]$,

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= K' \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[} H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\varphi(x,y,t)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ &= K' \int_C \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_A(x) H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\varphi_B(y) dy\right)\varphi_C(t) dt. \end{aligned}$$

puisque $\text{supp}\varphi_C = C$ Mais, d'une part :

$$\text{supp}\,(\varphi_A \otimes 1_{]0;+\infty[}) \cap \text{supp}\,(\{(x,t) \to H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\} \cap \mathbb{R} \times C) = A \times C,$$

avec $\{(x,t) \to H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\}|_{A\times C} = 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} &\text{supp}\,(\varphi_B \otimes 1_{]0;+\infty[}) \cap \left(\text{supp}\left\{(y,t) \to H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right\} \cap \mathbb{R} \times C\right) \\ &\qquad\qquad \subset \{(y,t) \in \mathbb{R} \times C \diagup y \in [c_2 t - A(\varepsilon); c_2 t + A(\varepsilon)]\}\,. \end{aligned}$$

Donc :

$$F(\varepsilon) = K' \int_A \varphi_A(x) dx \int_C \left(\int_{[c_2 t - A(\varepsilon); c_2 t + A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\varphi_B(y) dy\right)\varphi_C(t) dt.$$

Etape 4 : Calcul de $\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon)$

On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\varphi_B(y)dy = \varphi_B(c_2t) \tag{2.1}$$

En effet

$$\left|\int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\varphi_B(y)dy - \varphi_B(c_2t)\right|$$

$$= \left|\int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\left(\varphi_B(y)-\varphi_B(c_2t)\right)dy\right| \quad \text{puisque} \int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t) = 1$$

$$\leq \underset{y\in[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]}{Sup} |\varphi_B(y)-\varphi_B(c_2t)| \underbrace{\int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} \left|H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right| dy}_{\text{borné indépendamment de } \varepsilon}$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand ε tend vers0 puisque la fonction φ_B est continue en c_2t, ce qui conclut (2.1).

Par un argument de convergence uniforme et utilisant l'égalité (2.1), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_C \left(\int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\varphi_B(y)dy\right)\varphi_C(t)dt = \int_C \varphi_B(c_2t)\varphi_C(t)dt, \tag{2.2}$$

puisque

$$\left|\left(\int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\varphi_B(y)dy\right)\varphi_C(t)\right|$$

$$\leq \underset{t\in C}{Sup}|\varphi_C(t)| \underset{y\in B}{Sup}|\varphi_B(y)| \int_{[c_2t-A(\varepsilon);c_2t+A(\varepsilon)]} \left|H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right| dy < +\infty$$

et C est compact.

Finalement, en utilisant l'égalité (2.2), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon) = K'\int_A \varphi_A(x)dx \int_C \varphi_B(c_2t)\varphi_C(t)dt \neq 0.$$

et donc $f+g$ n'est pas associé à 0. Ceci conclut la preuve de la proposition 33.■

Proposition 34 *Soient f et $g \in \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n)$ ayant pour représentants respectifs f_ε et g_ε. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times I; \mathbb{R}^n)$ où I est un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que :*

(i) Pour tout $t \in I$, $\{x \to f(\phi(x,t))\} \approx \{x \to g(\phi(x,t))\}$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n)$,

(i) Pour tout $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in I, \forall \varepsilon \in]0,1] \int_K |f_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dx < A, \quad \int_K |g_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dx < A,$$

Alors les fonctions généralisées $\{(x,t) \to f(\phi(x,t))\}$ et $\{(x,t) \to g(\phi(x,t))\}$ sont associées dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n \times I)$.

Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times I)$. Par densité séquentielle de $\mathcal{D}_{\otimes}(\mathbb{R}^n \times I)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times I)$, il existe une suite $(\psi_n)_n$ telle que $\psi_n = \sum_{K=1}^{N(n)} \xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ appartienne à $\mathcal{D}_{\otimes}(\mathbb{R}^n \times I)$ et $\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \varphi$ pour la topologie limite inductive de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times I)$.

Posons $h = f - g$ et $H_\varepsilon(\phi(x,t)) = f_\varepsilon(\phi(x,t)) - g_\varepsilon(\phi(x,t))$. Il est évident que :

$$\forall K \subset\subset \mathbb{R}^n,\ \exists A' \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in I,\ \forall \varepsilon \in]0,1] \int_K |H_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dx < 2A = A'.$$

De même :

$$\forall K \subset\subset \mathbb{R}^n \times I, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon \in]0,1] \int_K |H_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dxdt < B,$$

En effet, pour tout $K \subset\subset \mathbb{R}^n \times I$, il existe $K_x \subset\subset \mathbb{R}^n$, il existe $K_t \subset\subset I$ tel que $K \subset K_x \times K_t$. Par conséquent :

$$\int_K |f_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dxdt \leq \int_{K_t} \left(\int_{K_x} |f_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dx \right) dt < A\, |K_t| = B'.$$

De même, $\int_K |g_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dxdt < B'$ d'où $\int_K |H_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dxdt < 2B' = B$.

Etape 1 : On montre le résultat pour $\psi_k^1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times I)$ de la forme $\xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ avec $(\xi_{ik}, \zeta_{jk}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(I)$.

On pose $\psi_k^1 = \xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ à i, j, k fixés. Ecrivons :

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times I} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_k^1(x,t)dxdt = \int_I F_\varepsilon(t)dt \text{ où } F_\varepsilon(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(\phi(x,t))\xi_{ik}(x)dx \right) \zeta_{jk}(t).$$

Pour tout $t \in I$, on a :

$$\{x \to h(\phi(x,t))\} \approx 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n),$$

par conséquent, pour tout $t \in I$, $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(t) = 0$.

La famille de fonctions $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0;1]}$ est intégrable sur I. De plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(t)| &\leq \sup_{t\in I} |\zeta_{jk}(t)| \sup_{x\in \mathrm{supp}(\xi_{ik})} |\xi_{ik}(x)| \int_{\mathrm{supp}(\xi_{ik})} |H_\varepsilon(\phi(x,t))|\, dx \\ &\leq A' \sup_{t\in I} |\zeta_{jk}(t)| \sup_{x\in \mathrm{supp}(\xi_{ik})} |\xi_{ik}(x)| = C. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_I F_\varepsilon(t)dt = 0, \text{ donc } \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathbb{R}^n \times I} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_k^1(x,t)dxdt = 0.$$

Etape 2 : Le résultat est vrai pour les sommes $\psi_n = \sum_{K=1}^{N(n)} \xi_{ik} \otimes \zeta_{jk}$ finies par linéarité. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha > 0,\ \exists \beta > 0,\ \forall \varepsilon,\ |\varepsilon| < \beta \Longrightarrow \left| \iint_{\mathbb{R}^n \times I} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_n(x,t)dxdt \right| < \frac{\alpha}{2} \quad (***)$$

Etape 3 : On utilise le raisonnement de densité.

Il existe $N_{K_1} \in \mathbb{N}$ et $K_1 \subset\subset \mathbb{R}^n \times I$ tel que pour tout $n \geq N_{K_1}$, $\operatorname{supp} \psi_n \subset K_1$ et $\lim_{n \to +\infty} \psi_n = \varphi$ au sens de la topologie de $\mathcal{D}_{K_1}(\mathbb{R}^n \times I)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K_1$.

On peut choisir $K_1 = K_{1,x} \times K_{1,t}$ où $K_{1,x} \subset \mathbb{R}^n$ et $K_{1,t} \subset I$. Par découpage, on obtient :

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^n \times I} H_\varepsilon(\phi(x,t))\varphi(x,t)dxdt \right| \leq \underbrace{\left| \iint_{K_1} H_\varepsilon(\phi(x,t)) \left[\varphi(x,t) - \psi_{n_0}(x,t)\right] dxdt \right|}_{(a)} + \underbrace{\left| \iint_{K_1} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_{n_0}(x,t)dxdt \right|}_{(b)}$$

.On va majorer chaque quantité (a) et (b).

<u>a) majorons</u> $\left| \iint_{K_1} H_\varepsilon(\phi(x,t)) \left[\varphi(x,t) - \psi_{n_0}(x,t)\right] dxdt \right|$.

Du fait que $\lim_{n \to +\infty} \psi_n = \varphi$, pour tout $\alpha > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour n_0 fixé,

$$n_0 \geq \sup(N_0, N_{K_1}) \Longrightarrow \sup_{(x,t) \in K_1} |\varphi(x,t) - \psi_{n_0}(x,t)| < \frac{\alpha}{2B},$$

et $\operatorname{supp} \psi_{n_0} \subset K_1$. Par conséquent,

$$\left| \iint_{K_1} H_\varepsilon(\phi(x,t)) \left[\varphi(x,t) - \psi_{n_0}(x,t)\right] dxdt \right| \leq \sup_{(x,t) \in K_1} |\varphi(x,t) - \psi_{n_0}(x,t)| \iint_{K_1} |H_\varepsilon(\phi(x,t))| \, dxdt < \frac{\alpha}{2B} B = \frac{\alpha}{2}.$$

<u>b) majorons</u> $\left| \iint_{K_1} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_{n_0}(x,t)dxdt \right|$.

D'après (***) dans l'étape 2 pour $n = n_0$, on a (puisque $\operatorname{supp} \psi_{n_0} \subset K_1$) :

$$\forall \alpha > 0\ \ \exists \beta > 0, \forall \varepsilon,\ |\varepsilon| < \beta \Longrightarrow \left| \iint_{\mathbb{R}^n \times I} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_{n_0}(x,t)dxdt \right| = \left| \iint_{K_1} H_\varepsilon(\phi(x,t))\psi_{n_0}(x,t)dxdt \right| < \frac{\alpha}{2}.$$

Donc finalement, en utilisant les majorations (a) et (b), il vient :

$$\forall \alpha > 0\ \ \exists\ \beta > 0, \forall \varepsilon,\ |\varepsilon| < \beta \Longrightarrow \left| \iint_{\mathbb{R}^n \times I} H_\varepsilon(\phi(x,t))\varphi(x,t)dxdt \right| < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

soit donc, $\{(x,t) \to h(\phi(x,t))\} \approx 0$ dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^n \times I)$, ce qui conclut la preuve de la proposition 34.■

Chapitre 3

Problème de Riemann linéaire : existence de solutions généralisées faibles

3.1 Enoncé du problème

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'existence de solutions généralisées faibles pour l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) + b(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,t) = 0 \qquad \text{pour } t > 0$$

complétée de la condition initiale :

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

avec les fonctions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ et $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$, mais pouvant être discontinues et la fonction $\{(x,y) \to u_0(x,y)\} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Nous présentons dans ce qui suit la résolution du problème de Riemann 2D via l'extension des techniques utilisées par S.Bernard et L.Remaki [3, 4, 24], en utilisant les outils de type produit tensoriel de fonctions généralisées de Heaviside.

Plus précisement, le problème "prototypique" auquel on s'intéresse est celui de données

initiales du type :

$$u_0(x,y) = \begin{cases} u_1 & x>0 \;\; y>0 \\ u_2 & x<0 \;\; y>0 \\ u_3 & x<0 \;\; y<0 \\ u_4 & x>0 \;\; y<0 \end{cases}$$

avec des coefficients du type :

$$a(x,y,t) = \begin{cases} a_1 & x>0 \;\; y>0 \\ a_2 & x<0 \;\; y>0 \\ a_3 & x<0 \;\; y<0 \\ a_4 & x>0 \;\; y<0 \end{cases} \quad ; \quad b(x,y,t) = \begin{cases} b_1 & x>0 \;\; y>0 \\ b_2 & x<0 \;\; y>0 \\ b_3 & x<0 \;\; y<0 \\ b_4 & x>0 \;\; y<0 \end{cases}$$

où les u_i, a_i et b_i $(i = 1,2,3,4)$ sont des constantes réelles.

On a choisi, dans ce qui suit, de traiter plus particuièrement le cas :

$$u_1 = u_d \ , \ u_2 = u_3 = u_4 = u_g$$

$$a_1 = a_d \ , \ a_2 = a_3 = a_4 = a_g \ \ ; \ \ b_1 = b_d \ , \ b_2 = b_3 = b_4 = b_g$$

Les coefficients et les données sont discontinus le long des demi-droites $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^+$. Le plan est séparé en deux domaines $Q_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et son complémentaire $Q_2 = \mathbb{R}^2 \backslash Q_1$. (On introduira parfois $Q_1' = \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}^{+,*}$.) Le choix de ce cas est justifié parce qu'il introduit des discontiuités "selon les deux directions", ce qui présente un caractère inédit par rapport aux travaux de S. Bernard et Remaki. Les autres cas se traiteraient de façon analogue.

On a donc à résoudre le problème de Riemann 2D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[) \tag{1}$$

avec comme condition initiale et comme coefficients :

$$\begin{cases} u_0 = [(x,y) \to u_g + \Delta u L_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}, & \Delta u = u_d - u_g \\ a = [(x,y) \to a_g + \Delta a Y_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}, & \Delta a = a_d - a_g \\ b = [(x,y) \to b_g + \Delta b Z_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}, & \Delta b = b_d - b_g \end{cases} \tag{*}$$

où $a_d, a_g, u_d, u_g, b_d, b_g$ sont des constantes réèlles arbitraires, $L = [(x,y) \to L_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$, $Y = [(x,y) \to Y_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$ et $Z = [(x,y) \to Z_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$ des fonctions généralisées

définies comme suit :

$$\begin{aligned} L = L_1 \otimes L_2 &= [(x,y) \to (L_{1,\varepsilon} \otimes L_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} \\ Y = Y_1 \otimes Y_2 &= [(x,y) \to (Y_{1,\varepsilon} \otimes Y_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} \\ Z = Z_1 \otimes Z_2 &= [(x,y) \to (Z_{1,\varepsilon} \otimes Z_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$Y_1, Y_2, L_1, L_2, Z_1, Z_2$ étant des fonctions généralisées de Heaviside usuelles de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

Notation 35 *On conviendra par la suite d'écrire*

$$[(x,y) \to (H_\varepsilon \otimes P_\varepsilon)(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} = [(x,y) \to H_\varepsilon(x)\, P_\varepsilon(y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$$

.

Definition 36 *Pour toute équation homogène $F(u) = 0$ dans $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$(P) avec $F : \mathcal{G}_S(\overline{\Omega}) \to \mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$ et $u \in \mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$, on appelle "solution faible du problème (P) toute solution u de l'équation $F(u) \approx 0$ dans $\mathcal{G}_S(\overline{\Omega})$.*

3.2 Solutions généralisées faibles

Nous cherchons des solutions :

- de type produit tensoriel de fonctions de Heaviside présentant, à t fixé, une discontinuité selon $x = c_1 t$ et une selon $y = c_2 t$ dans le plan des (x, y) (dites solution à une discontinuité, par analogie avec le cas unidimensionnel),
- de type somme de deux produits tensoriel de fonctions Heaviside présentant, à t fixé, dans le plan des (x, y) d'une part une discontinuité selon $x = c_1 t$ et une selon $x = c_1' t$ et d'autre part une selon $y = c_2 t$ et une selon $x = c_{21}' t$ (dites solution à deux discontinuités, par analogie avec le cas unidimensionnel).

  Ces choix sont justifiés par la construction des schémas numériques au chapitre 5.

3.2.1 Recherche de solutions de type produit de Heaviside

Nous cherchons une solution de la forme :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g) H_\varepsilon(x - c_1 t, y - c_2 t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} \tag{3.2}$$

où c_1, c_2 sont les vitesses de propagation respectivement suivant les axes des x et des y, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$et $H = [(x,y) \to H_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$ une fonction généralisée de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)$ définie ainsi :

$$H = H_1 \otimes H_2 = [(x,y) \to (H_{1,\varepsilon} \otimes H_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$$

où H_1 et H_2 sont des fonctions généralisées de Heaviside usuelles.

Introduisons dans un premier temps quelques lemmes très utiles pour la suite.

Lemme 37 *Dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$, on a pour $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$*

$$\left[(x,y,t) \to Y_\varepsilon(x,y) H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} =$$
$$\left[(x,y,t) \to H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty}$$
$$\left[(x,y,t) \to Z_\varepsilon(x,y) H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} =$$
$$\left[(x,y,t) \to H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty}$$

Preuve : Justifions la première égalité, la seconde étant similaire.Grace à la proposition 31, on a :

$$\left[(x,t) \mapsto Y_{1,\varepsilon}(x) H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times [0+\infty[)} = \left[(x,t) \mapsto H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times [0+\infty[)}$$
$$[(y,t) \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times [0+\infty[)} = [(y,t) \mapsto H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times [0+\infty[)} .$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^* \times [0 + \infty[)$ .Par conséquent, on a :

$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_{1,\varepsilon}(x) H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} = \left[(x,y,t) \mapsto H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)}$$
$$[(x,y,t) \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} = [(x,y,t) \mapsto H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$, en faisant le produit dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$, on conclut.■

Lemme 38 *Dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$, on a pour $c_1 < 0$ et $c_2 < 0$*

$$\left[(x,y,t) \to Y_\varepsilon(x,y) H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} = 0 \ ,$$
$$\left[(x,y,t) \to Z_\varepsilon(x,y) H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t) H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} = 0.$$

Preuve : Grace à la proposition 31, on a :

$$\left[(x,t) \mapsto Y_{1,\varepsilon}(x) H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times [0+\infty[)} = 0 \ ,$$
$$\left[(y,t) \mapsto Z_{2,\varepsilon}(y) H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times [0+\infty[)} = 0$$

dans $\mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}^* \times [0+\infty[\right)$ .Par conséquent

$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_{1,\varepsilon}(x) H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0$$
$$\left[(x,y,t) \mapsto Z_{2,\varepsilon}(y) H'_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0 \ \text{ in } \mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[).$$

ce qui conclut.■

Lemme 39 *Dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$, on a pour $c_1 > 0$ et $c_2 < 0$*

$$\left[(x,y,t) \to Y_\varepsilon(x,y) H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$
$$= \left[(x,y,t) \to Y_{2,\varepsilon}(y) H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$
$$\left[(x,y,t) \to Z_\varepsilon(x,y) H_{1,\varepsilon}(x-c_1 t)\, H'_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0.$$

Preuve : En effet, grace à la proposition 31, on a :

$$\left[(x,t) \mapsto Y_{1,\varepsilon}(x) H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0+\infty[)} = \left[(x,t) \mapsto H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0+\infty[)}$$
$$\left[(y,t) \mapsto Z_{2,\varepsilon}(y) H'_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0+\infty[)} = 0$$

dans $\mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}^* \times [0+\infty[\right)$. Ainsi,

$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_{1,\varepsilon}(x) H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = \left[(x,y,t) \mapsto H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$
$$\left[(x,y,t) \mapsto Z_{2,\varepsilon}(y) H'_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$, ce qui conclut.■

Lemme 40 *Dans $\mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[\right)$, on a pour $c_1 > 0$ et $c_2 < 0$*

$$\left[(x,y,t) \mapsto H'_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0$$
$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y) H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$
$$= \left[(x,y,t) \mapsto H'_{1,\varepsilon}(x-c_1 t) H_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

Preuve : Comme $c_2 < 0$, on a $(\mathbb{R}_*^+ \times [0;+\infty[) \cap \Gamma_{c_2} = \varnothing$, alors

$$\left[(y,t) \mapsto H'_{2,\varepsilon}(y-c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0;+\infty[)} = 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^+ \times [0;+\infty[\right),$$

ce qui conclut la première égalité. La seconde égalité vient du fait que

$$\left[y \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R})} = 1 \ \text{ dans } \ \mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^+\right),$$

donc

$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 1 \quad \text{dans } \ \mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[\right),$$

ce qui conclut.■

Lemme 41 $[(x,y,t) \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0$ *dans* $\mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^- \times [0;+\infty[\right)$

Preuve : On remarque que

$$[y \mapsto Y_{2,\varepsilon}(y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R})} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^-\right),$$

ce qui conclut la preuve.■

Ceci induit la proposition suivante,

Proposition 42 *a) Pour $a_d > 0$ et $b_d > 0$, l'équation (1) a une solution faible de la forme :*

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x - a_d t, y - b_d t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$.

b) Pour $a_g < 0$ et $b_g < 0$, l'équation (1) a une solution faible de la forme :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x - a_g t, y - b_g t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$.

c) Pour $b_g < 0$, l'équation (1) a une solution faible de la forme :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x - a_d t, y - b_g t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0+\infty[\right)$ et de la forme :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x - a_g t, y - b_g t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S\left(((\mathbb{R}^*)^2 \diagdown (\mathbb{R}_*^+)^2) \times [0+\infty[\right)$.

Preuve :

En injectant u de la forme (3.2) dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned}\big[(x,y,t) \mapsto -c_1(u_d-u_g)H'_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H_{2,\varepsilon}(y-c_2t) - c_2(u_d-u_g)H_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t) + \\ (u_d-u_g)H'_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\left(a_g + \Delta a Y_\varepsilon(x,y)\right) + \\ (u_d-u_g)H_{1,\varepsilon}(x-c_1t)H'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\left(b_g + \Delta b Z_\varepsilon(x,y)\right)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0 \quad (**)\end{aligned}$$

puisque, $u_d - u_g \neq 0$, on a

$$\big[(x,y,t) \mapsto (a_g - c_1)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) + (b_g - c_2)H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)$$
$$+\Delta a Y_\varepsilon(x,y)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) + \Delta b Z_\varepsilon(x,y)H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)\, H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0 \tag{3.3}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$.

a) A partir du lemme 37 et de la relation (3.3), on a :

$$\big[(x,y,t) \mapsto (a_d - c_1)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) + (b_d - c_2)H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$. Grace à la proposition 33, on a :

$$c_1 = a_d \text{ et } c_2 = b_d.$$

ce qui conclut.■

b) En utilisant le lemme 38 et la relation (3.3), on obtient :

$$\big[(x,y,t) \mapsto)(a_g - c_1)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) + (b_g - c_2)H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$. Grace à la proposition 33, on obtient :

$$c_1 = a_g \text{ et } \ c_2 = b_g.$$

ce qui conclut.■

c) A partir du lemme 39, la relation (3.3) devient :

$$\big[(x,y,t) \mapsto (a_g - c_1)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) + (b_g - c_2)H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)$$
$$+\Delta a Y_{2,\varepsilon}(y)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0 \text{ in } \mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[). \tag{3.4}$$

En faisant intervenir les supports dans la relation précédente, on a deux cas à considérer :

Dans un premier temps dans $(\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[$.

Grace au lemme 40, la relation (3.4) devient dans $\mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[\right)$:

$$\big[(x,y,t) \mapsto (a_d - c_1)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[\right).$$

puisque $\big[(x,y,t) \mapsto H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$ n'est pas associé à 0 dans $\mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[\right)$, alors

$$c_1 = a_d.$$

Dans un deuxième temps dans $((\mathbb{R}^*)^2 \diagdown (\mathbb{R}_*^+)^2) \times [0;+\infty[$.

On remarque que dans $\mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}^* \times [0;+\infty[\right)$, la relation (3.4) devient l'égalité faible triviale $0 \approx 0$.

En utilisant le lemme 41 à la relation (3.4), on obtient :

$$\left[(x,y,t) \mapsto (a_g - c_1)H'_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H_{2,\varepsilon}(y - c_2 t) + (b_g - c_2)H_{1,\varepsilon}(x - c_1 t)H'_{2,\varepsilon}(y - c_2 t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} \approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^- \times [0;+\infty[)$. On applique la proposition 33, et donc

$$c_1 = a_g \quad \text{et} \quad c_2 = b_g$$

.

Nous avons démontré que pour $b_g < 0$, une solution faible de l'équation (1) est :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x - a_d t, y - b_g t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} \text{ dans } \mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[\right)$$

et

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x - a_g t, y - b_g t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)} \text{ dans } \mathcal{G}_S(((\mathbb{R}^*)^2 \diagdown (\mathbb{R}_*^+)^2) \times [0;+\infty[).$$

ce qui conclut le c).■

3.2.2 Recherche d'une solution bloquée à l'origine

Nous cherchons une solution qui à l'instant t est de la forme :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (u_d - u_g)H_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)}$$

où $H = [(x,y) \to H_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$ est une fonction généralisée de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)$ définie ainsi :

$$H = H_1 \otimes H_2 = [(x,y) \to (H_{1,\varepsilon} \otimes H_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$$

où H_1 et H_2 sont des fonctions généralisées de Heaviside usuelles.

En remplaçant u dans (1), on obtient :

$$\left[(x,y,t) \to (u_d - u_g)H'_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}(y)\left(a_g + \Delta a Y_\varepsilon(x,y)\right) + (u_d - u_g)H_{1,\varepsilon}(x)H'_{2,\varepsilon}(y)\left(b_g + \Delta b Z_\varepsilon(x,y)\right)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)} \approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)$. Comme $u_d - u_g \neq 0$, on peut simplifier par ce terme. D'où :

$$\left[(x,y,t) \to \left(a_g + \Delta a Y_\varepsilon(x,y)\right)H'_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}(y) + \left(b_g + \Delta b Z_\varepsilon(x,y)\right)H_{1,\varepsilon}(x)H'_{2,\varepsilon}(y)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)} \approx 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3).$$

Soit :

$$\boxed{\left[(x,y,t) \to (a_g + \Delta a Y_\varepsilon(x,y))H'_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}(y)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)} = \left[(x,y,t) \to -(b_g + \Delta b Z_\varepsilon(x,y))H_{1,\varepsilon}(x)H'_{2,\varepsilon}(y)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3}}$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)$.

3.2.3 Recherche de solutions présentant deux discontinuités avec valeur intermédiaire

Nous cherchons une solution de l'équation (1) qui à l'instant t est de la forme :

$$u = \left[(x,y,t) \to u_g + (\lambda - u_g)H_\varepsilon(x - c_1't, y - c_2't) + (u_d - \lambda)K_\varepsilon(x - c_1t, y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \tag{3.5}$$

où c_1, c_2, c_1', c_2' sont les conditions de saut, $(c_1, c_2, c_1', c_2') \in \mathbb{R}^4$, λ la valeur intermédiaire, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $H = [(x,y) \to H_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$, $K = [(x,y) \to K_\varepsilon(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$ des fonctions généralisées de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)$ définies comme suit :

$$H = H_1 \otimes H_2 = [(x,y) \to (H_{1,\varepsilon} \otimes H_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$$
$$K = K_1 \otimes K_2 = [(x,y) \to (K_{1,\varepsilon} \otimes K_{2,\varepsilon})(x,y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}$$

Introduisons dans un premier temps quelques lemmes très utiles pour la suite.

Lemme 43 *Dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$,on a pour $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_1' < 0$ et $c_2' < 0$*

$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_\varepsilon(x,y)H_{1,\varepsilon}'(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}(y - c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0,$$
$$\left[(x,y,t) \mapsto Z_\varepsilon(x,y)H_{1,\varepsilon}(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y - c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0,$$

$$\left[(x,y,t) \mapsto Y_\varepsilon(x,y)K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = \left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

$$\left[(x,y,t) \mapsto Z_\varepsilon(x,y)K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = \left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

La preuve est similaire à celle du lemme 37 et du lemme 38.

Lemme 44 *Dans $\mathcal{G}_S(((\mathbb{R}^*)^2 \setminus (\mathbb{R}_*^+)^2) \times [0;+\infty[)$, on a pour $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$*

$$\left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0$$
$$\left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0.$$

Preuve : On se place dans $\mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}^* \times [0;+\infty[$, le cas $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_*^- \times [0;+\infty[$ étant similaire par symétrie. Comme $c_1 > 0$, $(\mathbb{R}_*^- \times [0;+\infty[) \cap \Gamma_{c_1} = \varnothing$ et $(\mathbb{R}_*^- \times [0;+\infty[) \cap \Pi_{c_1} = \varnothing$, alors :

$$[(x,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0+\infty[)} = \left[(x,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0+\infty[)} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^- \times [0;+\infty[\right),$$

ce qui conclut.■

Lemme 45 *Dans* $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}_*^+)^2) \times [0;+\infty[)$, *on a pour* $c_1' < 0$ *et* $c_2' < 0$

$$\left[(x,y,t) \mapsto H_{1,\varepsilon}'(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}(y - c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0$$
$$\left[(x,y,t) \mapsto H_{1,\varepsilon}(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y - c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0.$$

Preuve : En effet pour $i = 1, 2$, comme $c_i' < 0$, $(\mathbb{R}_*^+ \times [0;+\infty[) \cap \Gamma_{c_i'} = \varnothing$ alors

$$\left[(u,t) \mapsto H_{i,\varepsilon}'(u - c_i't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times[0+\infty[)} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}_*^+ \times [0;+\infty[\right)$$

ce qui conclut.■

Lemme 46 (i) *On a :*

$$Y_1L_1' \approx A_1L_1' \approx A_1K_1'$$
$$Z_2L_2' \approx A_2L_2' \approx A_2K_2'$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$ *avec*

$$A_1 = [A_{1,\varepsilon}]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R})} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y_{1,\varepsilon}(x)L_{1,\varepsilon}'(x)dx\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R})}$$
$$A_2 = [A_{2,\varepsilon}]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R})} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Z_{2,\varepsilon}(y)L_{2,\varepsilon}'(y)dy\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R})}.$$

(ii) *On a :*

$$Z_1L_1 \approx L_1 \approx K_1$$
$$Y_2L_2 \approx L_2 \approx K_2$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

Preuve : (i) Pour l'association $Y_1L_1' \approx A_1L_1'$, on doit montrer que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}(Y_{1,\varepsilon}(x) - A_{1,\varepsilon})L_{1,\varepsilon}'(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Comme $|Y_{1,\varepsilon}(x)|$ et $\int_{\mathbb{R}}\left|L_{1,\varepsilon}'(x)\right|dx$ sont bornés indépendamment de ε, on a

$$|A_{1,\varepsilon}| \leq \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}\,|Y_{1,\varepsilon}(x)|\int_{\mathbb{R}}\left|L_{1,\varepsilon}'(x)\right|dx \leq M$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} (Y_{1,\varepsilon}(x) - A_{1,\varepsilon}) L'_{1,\varepsilon}(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} (Y_{1,\varepsilon}(x) - A_{1,\varepsilon}) L'_{1,\varepsilon}(x)dx \tag{3.6}$$

$$+ \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} x\varphi'(\theta x)(Y_{1,\varepsilon}(x) - A_{1,\varepsilon}) L'_{1,\varepsilon}(x)dx \tag{3.7}$$

avec $0 < \theta < 1$ et $A(\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^{]0;1]}$ qui tend vers 0 quand ε tend vers 0. Des hypothèses, on a immédiatement

$$\int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} (Y_{1,\varepsilon}(x) - A_{1,\varepsilon}) L'_{1,\varepsilon}(x)dx = 0$$

puisque $A_{1,\varepsilon}$ est une constante et

$$\int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} L'_{1,\varepsilon}(x)dx = 1.$$

De plus, la valeur absolue du second terme du second membre de l'égalité(3.6) est majorée par :

$$A(\varepsilon) \left(\underset{x\in\mathbb{R}}{Sup} |Y_{1,\varepsilon}(x)| + M \right) \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi'(x)\right| \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} \left|L'_{1,\varepsilon}(x)\right| dx$$

qui tend vers 0 quand ε tend vers 0, ce qui conclut. ■

Pour l'association $A_1 L'_1 \approx A_1 K'_1$, on doit montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} (L'_{1,\varepsilon}(x) - K'_{1,\varepsilon}(x)) A_{1,\varepsilon}\varphi(x)dx = 0.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} (L'_{1,\varepsilon}(x) - K'_{1,\varepsilon}(x)) A_{1,\varepsilon}\varphi(x)dx = \varphi(0) \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} (L'_{1,\varepsilon}(x) - K'_{1,\varepsilon}(x)) A_{1,\varepsilon}\varphi(x)dx \tag{3.8}$$

$$+ \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} x\varphi'(\theta x)(L'_{1,\varepsilon}(x) - K'_{1,\varepsilon}(x)) A_{1,\varepsilon}dx \tag{3.9}$$

Des hypothèses, on a immédiatement

$$\int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} (L'_{1,\varepsilon}(x) - K'_{1,\varepsilon}(x)) A_{1,\varepsilon}dx = 0.$$

De plus, la valeur absolue du second terme du second membre de l'égalité (3.8) est majorée par :

$$A(\varepsilon) M \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi'(x)\right| \left(\int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} \left|L'_{1,\varepsilon}(x)\right| dx + \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} \left|K'_{1,\varepsilon}(x)\right| dx \right)$$

qui tend vers 0 quand ε tend vers 0, ce qui conclut. ■

ii) Ces associations sont évidentes.

Lemme 47 *Dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times [0;+\infty[)$, Pour $c_1 > 0$, $c_1' < 0$, $c_2 > 0$, $c_2' > 0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left[(x,y,t) \to Y_\varepsilon(x,y)H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0,\\
&\left[(x,y,t) \to Z_\varepsilon(x,y)H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} =\\
&\qquad\qquad \left[(x,y,t) \mapsto Z_{1,\varepsilon}(x)H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}\\
&\left[(x,y,t) \mapsto Y_\varepsilon(x,y)K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} =\\
&\qquad\qquad \left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}\\
&\left[(x,y,t) \mapsto Z_\varepsilon(x,y)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} =\\
&\qquad\qquad \left[\ (x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}.
\end{aligned}$$

Lemme 48 *Dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}_*^+ \times [0;+\infty[)$ pour $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, on a*

$$\begin{aligned}
[(x,y,t) \to Z_{1,\varepsilon}(x)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} &= 0\\
\left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} &= 0\\
\left[(x,y,t) \mapsto K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} &= 0
\end{aligned}$$

Lemme 49 *Dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[)$, pour $c_1' < 0$, $c_2' > 0$, on a :*

$$\begin{aligned}
[(x,y,t) \to Z_{1,\varepsilon}(x)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} &= 1 \quad et\\
\left[(x,y,t) \to H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} &= 0.
\end{aligned}$$

Ceci induit la proposition suivante,

Proposition 50 *a) Pour $a_g < 0$, $b_g < 0$, $a_d > 0$ et $b_d > 0$, l'équation (1) a une solution faible de la forme :*

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (\lambda - u_g)H_\varepsilon(x-a_gt, y-b_gt) + (u_d-\lambda)K_\varepsilon(x-a_dt, y-b_dt)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$ où $\lambda = u_d - A\Delta u$, $A \in]0;1[$.

b)Pour $a_g < 0$, $a_d > 0$ et $b_d > 0$, l'équation(1) a une solution faible de la forme :

$$u = [(x,y,t) \to u_g + (\lambda - u_g)H_\varepsilon(x-a_gt, y-b_dt) + (u_d-\lambda)K_\varepsilon(x-a_dt, y-b_dt)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2 \times [0;+\infty[)$ où $\lambda = u_d - A\Delta u$, $A \in]0;1[$

Preuve :

En injectant u de la forme (3.5) dans l'équation (1), on obtient :

$$\big[(x,y,t) \to -c_1'(\lambda-u_g)H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't) - c_2'(\lambda-u_g)H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't) -$$
$$c_1'(u_d-\lambda)K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t) - c_2(u_d-\lambda)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t) +$$
$$(a_g+\Delta aY_\varepsilon(x,y))\big((\lambda-u_g)H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't) + (u_d-\lambda)K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\big) +$$
$$(b_g+\Delta bZ_\varepsilon(x,y))\big((\lambda-u_g)H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't) + (u_d-\lambda)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t)\big)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0$$

Après factorisation, on a :

$$\big[(x,y,t) \mapsto (\lambda-u_g)(a_g-c_1')H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't) + (\lambda-u_g)(b_g-c_2')H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't) +$$
$$(u_d-\lambda)(a_g-c_1)K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t) + (u_d-\lambda)(b_g-c_2)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t) +$$
$$\Delta a(\lambda-u_g)Y_\varepsilon(x,y)H_{1,\epsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't) + \Delta a(u_d-\lambda)Y_\varepsilon(x,y)K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t) +$$
$$\Delta b(\lambda-u_g)Z_\varepsilon(x,y)H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't) + \Delta b(u_d-\lambda)Z_\varepsilon(x,y)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}$$
$$\approx 0 \quad (3.10)$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2\times[0;+\infty[)$.

a) Grace au lemme 43 et à la relation (3.10), on a :

$$\big[(x,y,t) \mapsto (\lambda-u_g)(a_g-c_1')H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't) + (\lambda-u_g)(b_g-c_2')H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't)$$
$$+(u_d-\lambda)(a_d-c_1)K_{1,\varepsilon}'(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t) + (u_d-\lambda)(b_d-c_2)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y-c_2t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0$$
$$(3.1$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2\times[0;+\infty[)$.

Dans un premier temps, on se place dans $(\mathbb{R}^*)^2\diagdown(\mathbb{R}_*^+)^2)\times[0;+\infty[$

Grace au lemme 44, la relation (3.11) devient, puisque $\lambda-u_g\neq 0$,

$$\big[(x,y,t) \mapsto (a_g-c_1')H_{1,\varepsilon}'(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}(y-c_2't) + (b_g-c_2')H_{1,\varepsilon}(x-c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y-c_2't)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S(((\mathbb{R}^*)^2\diagdown(\mathbb{R}_*^+)^2)\times[0;+\infty[)$. Grace à la proposition 33, on a :

$$c_1' = a_g \text{ et } \ c_2' = b_g.$$

Dans un deuxième temps, on se place dans $(\mathbb{R}_*^+)^2)\times[0;+\infty[$

Grace au lemme 45, la relation (3.11) devient, puisque $u_d - \lambda \neq 0$:

$$\big[(x,y,t) \mapsto (a_d - c_1')K_{1,\varepsilon}'(x - c_1't)K_{2,\varepsilon}(y - c_2t) + (b_d - c_2)K_{1,\varepsilon}(x - c_1't)K_{2,\varepsilon}'(y - c_2t)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}_*^+)^2) \times [0;+\infty[)$. On applique la proposition 33, on obtient :

$$c_1 = a_d \ \text{ and } \ c_2 = b_d.$$

Nous allons maintenant déterminer la valeur de λ.

Ecrivons la relation (3.10) en $t = 0$, on a :

$$\begin{aligned}&\big[(x,y) \mapsto -a_g(\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}'(x)H_{2,\varepsilon}(y) - b_g(\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}'(y) - a_d(u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}'(x)K_{2,\varepsilon}(y)\\ &-b_d(u_d-\lambda)K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}'(y)+(a_g + \Delta aY_\varepsilon(x,y))\big((\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}'(x)H_{2,\varepsilon}(y) + (u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}'(x)K_{2,\varepsilon}(y)\big)\\ &+(b_g + \Delta bZ_\varepsilon(x,y))\big((\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}'(y) + (u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}'(y)\big)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} \approx 0 \qquad (3.12)\end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2)$.

Pour $t = 0$, nous avons aussi en utilisant la donnée (*) et u de la forme (3.5)

$$\begin{aligned}&[(x,y) \to u_g + (\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}(y) + (u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}(y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} =\\ &\qquad [(x,y) \to u_g + \Delta uL_{1,\varepsilon}(x)L_{2,\varepsilon}(y)]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

en dérivant par rapport à x et y séparément, on obtient

$$\begin{aligned}&\big[(x,y) \to (\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}'(x)H_{2,\varepsilon}(y) + (u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}'(x)K_{2,\varepsilon}(y)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} = \big[(x,y) \to \Delta uL_{1,\varepsilon}'(x)L_{2,\varepsilon}(y)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}\\ &\qquad\qquad (3.13)\\ &\big[(x,y) \to (\lambda - u_g)H_{1,\varepsilon}(x)H_{2,\varepsilon}'(y) + (u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}'(y)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} = \big[(x,y) \to \Delta uL_{1,\varepsilon}(x)L_{2,\varepsilon}'(y)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

En utilisant les égalités (3.13), la relation (3.12) devient

$$\begin{aligned}&\big[(x,y) \mapsto -\Delta a(u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}'(x)K_{2,\varepsilon}(y) - \Delta b(u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}'(y) + \Delta a\Delta uY_{1,\varepsilon}(x)Y_{2,\varepsilon}(y)\\ &\qquad L_{1,\varepsilon}'(x)L_{2,\varepsilon}(y) + \Delta b\Delta uZ_{1,\varepsilon}(x)Z_{2,\varepsilon}(y)L_{1,\varepsilon}(x)L_{2,\varepsilon}'(y)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} \approx 0 \qquad (3.14)\end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2)$.

Grace à la proposition 32 et au lemme 46, la relation (3.14) devient :

$$\begin{aligned}&\big[(x,y) \mapsto -\Delta a(u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}'(x)K_{2,\varepsilon}(y) - \Delta b(u_d - \lambda)K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}'(y) + \Delta a\Delta uA_1K_{1,\varepsilon}'(x)K_{2,\varepsilon}(y)\\ &\qquad\qquad +\Delta b\Delta uA_2K_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}'(y)\big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)} \approx 0\end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2)$.

Ainsi :

$$\left[(x,y)\mapsto(-\Delta a(u_d-\lambda)+\Delta a\Delta u A_1)K'_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}(y)+(-\Delta b(u_d-\lambda)+\Delta b\Delta u A_2)K_{1,\varepsilon}(x)K'_{2,\varepsilon}(y)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2)}\approx 0$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Big[(x,y,t)\mapsto&(-\Delta a(u_d-\lambda)+\Delta a\Delta u A_1)K'_{1,\varepsilon}(x)K_{2,\varepsilon}(y)\\&+(-\Delta b(u_d-\lambda)+\Delta b\Delta u A_2)K_{1,\varepsilon}(x)K'_{2,\varepsilon}(y)\Big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}\approx 0\end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^*)^2\times[0;+\infty[)$.Grace à la proposition 33, on obtient

$$\lambda=u_d-A_1\Delta u \quad\text{and}\quad \lambda=u_d-A_2\Delta u.$$

On choisit $\lambda=u_d-A\Delta u$ où A appartient à $]0;1[$ pour que λ soit compris entre u_g et u_d ce qui semble plus raisonnable d'un point de vue physique, ce qui conclut la preuve du a).■

Remarque 51 *Ceci a permis la construction des schémas de Godunov (cas 1,8,9,16) décrit dans le chapitre 4.*

b) Les méthodes sont celles employées dans le a).

Le report dans la relation (3.10) des égalités du lemme (47) permettent de la simplifier en :

$$\begin{aligned}\Big[(x,y,t)\mapsto&(\lambda-u_g)(a_g-c'_1)H'_{1,\varepsilon}(x-c'_1t)H_{2,\varepsilon}(y-c'_2t)+\\&((\lambda-u_g)(b_g-c'_2)+\Delta b(\lambda-u_g)Z_{1,\varepsilon}(x))H_{1,\varepsilon}(x-c'_1t)H'_{2,\varepsilon}(y-c'_2t)+\\&(u_d-\lambda)(a_d-c_1)K'_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K_{2,\varepsilon}(y-c_2t)+(u_d-\lambda)(b_d-c_2)K_{1,\varepsilon}(x-c_1t)K'_{2,\varepsilon}(y-c_2t)\Big]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}\approx 0\end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)$.

<u>1er étape</u> : Etude sur $\mathbb{R}^2\diagdown(\mathbb{R}^+)^2$

Sur $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-_*\times[0;+\infty[)$, on obtient une relation triviale. On travaille donc sur donc $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+_*\times[0;+\infty[)$.

En utilisant le lemme (48), la relation (**??**) devient

$$\left[(x,y,t)\mapsto(\lambda-u_g)(a_g-c'_1)H'_{1,\varepsilon}(x-c'_1t)H_{2,\varepsilon}(y-c'_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)}\approx 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^-_*\times\mathbb{R}^+_*\times[0;+\infty[).$$

Comme $\lambda - u_g \neq 0$, il vient

$$\left[(x,y,t) \to (a_g - c_1')H_{1,\varepsilon}'(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}(y - c_2't)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R}_*^-\times\mathbb{R}_*^+\times[0;+\infty[).$$

Or $H_{1,\varepsilon}^{'}(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}(y - c_2't)$ n'est pas associé à 0, donc

$$c_1' = a_g$$

.

<u>2ème étape</u> : Etude sur $(\mathbb{R}^+)^2$

En utilisant le lemme(49) dans la relation (**??**), il vient donc :

$$\left[(x,y,t) \mapsto (\lambda - u_g)(b_d - c_2')H_{1,\varepsilon}(x - c_1't)H_{2,\varepsilon}'(y - c_2't) + (u_d - \lambda)(a_d - c_1)K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)\right.$$
$$\left. K_{2,\varepsilon}(y - c_2t) + (u_d - \lambda)(b_d - c_2)K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}^{'}(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S((\mathbb{R}_*^+)^2\times[0;+\infty[).$$

Or $c_2' = b_d$ donc :

$$\left[(x,y,t) \mapsto (u_d - \lambda)(a_d - c_1)K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}(y - c_2t)+\right.$$
$$\left.(u_d - \lambda)(b_d - c_2)K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[).$$

Comme $u_d - \lambda \neq 0$, il vient, dans $\mathcal{G}_S((\mathbb{R}_*^+)^2 \times [0;+\infty[)$:

$$\left[(x,y,t) \mapsto (a_d - c_1)K_{1,\varepsilon}'(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}(y - c_2t) + (b_d - c_2)K_{1,\varepsilon}(x - c_1t)K_{2,\varepsilon}'(y - c_2t)\right]_{\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times[0;+\infty[)} \approx 0.$$

On applique la proposition 33, pour obtenir

$$c_1 = a_d \quad \text{et} \quad c_2 = b_d$$

.

Comme dans le a), en reportant la solution $u(x,y,t)$ dans l'équation (1), on obtient une relation triviale. On détermine alors λ par la même méthode qu'en a), ce qui conclut le b).

■

Remarque 52 *Ceci a permis la construction des schémas de Godunov <u>(cas 3,11,6,10,7,15,2,14)</u> décrit dans le chapitre 4.*

Remarque 53 *Les cas suivants :*

<u>cas 3</u> : $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_1' > 0$, $c_2' > 0$,

<u>cas 4</u> : $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, $c_1' < 0$, $c_2' < 0$,

<u>cas 5</u> : $c_1 c_1' > 0$ et $c_2 c_2' > 0$ et $c_1 c_2 < 0$,

peuvent être réduits au cas d'une solution présentant une seule discontinuité traitée précédemment, à savoir :

<u>cas 3</u> : $c_1 > 0$, $c_2 > 0$,$c_1' > 0$, $c_2' > 0$ correspond à la recherche d'une solution avec propagation dans le quadrant $x > 0$ et $y > 0$ avec $c_1 > 0$, $c_2 > 0$,

<u>cas 4</u> : $c_1 < 0$, $c_2 < 0$,$c_1' < 0$, $c_2' < 0$ correspond à la recherche d'une solution avec propagation suivant les x et y négatifs, avec $c_1 > 0$, $c_2 > 0$,

<u>cas 5</u> : $c_1 c_1' > 0$ et $c_2 c_2' > 0$ et $c_1 c_2 < 0$ correspond à la recherche de solutions avec propagation "mixte", avec ($c_1 > 0$ et $c_2 < 0$) ou ($c_1 < 0$ et $c_2 > 0$).

Chapitre 4

Schémas numériques de type Godunov et tests numériques dans le cas linéaire

4.1 Construction des schémas numériques de type Godunov

4.1.1 Cadre général

On cherche à construire des schémas numériques de type Godunov associés à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) + b(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,t) \approx 0 \qquad (1)$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$, avec comme condition initiale et comme coefficients :

$$\begin{cases} u_0(x,y) = u_g + \Delta u L(x,y) & \Delta u = u_d - u_g \\ a(x,y,t) = a_g + \Delta a Y(x,y) & \Delta a = a_d - a_g \\ b(x,y,t) = b_g + \Delta b Z(x,y) & \Delta b = b_d - b_g \end{cases}$$

où $a_d, a_g, u_d, u_g, b_d, b_g$ sont des constantes réèlles arbitraires, L, Y et Z des fonctions généralisées définies comme suit :

$$L(x,y) = (L_1 \otimes L_2)(x,y) \ ; \quad Y(x,y) = (Y_1 \otimes Y_2)(x,y) \ ; \quad Z(x,y) = (Z_1 \otimes Z_2)(x,y)$$

les $Y_1, Y_2, L_1, L_2, Z_1, Z_2$ étant des fonctions généralisées de Heaviside usuelles de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

Soit $h > 0$ et $\Delta t = rh$ avec $r > 0$ à fixer.

On discrétise l'axe des X, Y en posant :

$$I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}\right[\text{ (où } x_i = ih,\ i \in \mathbb{Z}) \ ;\ I_{i'} = \left[y_{i'-\frac{1}{2}}; y_{i'+\frac{1}{2}}\right[\text{ (où } y_{i'} = i'h,\ i' \in \mathbb{Z})$$

et l'axe des t en posant :

$$J_n = [t_n; t_{n+1}[\text{ où } t_n = n\Delta t,\ n \in \mathbb{N}.$$

On cherche une approximation $u^n_{i,i'}$ de la solution du problème (1) au point $(x_i, y_{i'})$ à l'instant t_n.

On note $u_{h,h}$ la fonction pas qui est égale à $u^n_{i,i'}$ sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons :

$$a^n_{i,i'} = \frac{1}{rh^3} \int_{I_i} \int_{I_{i'}} \int_{J_n} a(x, y, t) dxdydt \ ;\ b^n_{i,i'} = \int_{I_i} \int_{I_{i'}} \int_{J_n} b(x, y, t) dxdydt.$$

Notons $a_{h,h}$ la fonction pas qui est égale à $a^n_{i,i'}$ sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et notons de façon similaire $b_{h,h}$ la fonction pas qui est égale à $b^n_{i,i'}$ sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour construire la suite $u^n_{i,i'}$, on procède comme suit. Soit :

$$u^0_{i,i'} = \frac{1}{h^2} \int_{I_i} \int_{I_{i'}} u_0(x, y) dxdy.$$

Supposons connu $u^n_{i,i'}$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, on résout le problème de Riemann avec les données :

$$\begin{aligned}
a(x, y, t) &= a^n_{i-1,i'} + (a^n_{i,i'} - a^n_{i-1,i'}) Y_1(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= a^n_{i,i'-1} + (a^n_{i,i'} - a^n_{i,i'-1}) Y_2(y - y_{i'-\frac{1}{2}}) \\
&= a^n_{i,i'} + (a^n_{i+1,i'} - a^n_{i,i'}) Y_3(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\
&= a^n_{i,i'} + (a^n_{i,i'+1} - a^n_{i,i'}) Y_4(y - y_{i'+\frac{1}{2}}) \, ;
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
b(x, y, t) &= b^n_{i-1,i'} + (b^n_{i,i'} - b^n_{i-1,i'}) Z_1(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= b^n_{i,i'-1} + (b^n_{i,i'} - b^n_{i,i'-1}) Z_2(y - y_{i'-\frac{1}{2}}) \\
&= b^n_{i,i'} + (b^n_{i+1,i'} - b^n_{i,i'}) Z_3(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\
&= b^n_{i,i'} + (b^n_{i,i'+1} - b^n_{i,i'}) Z_4(y - y_{i'+\frac{1}{2}}) \, ;
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} u^n(x,y) &= u^n_{i-1,i'} + (u^n_{i,i'} - u^n_{i-1,i'})L_1(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= u^n_{i,i'-1} + (u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'-1})L_2(y - y_{i'-\frac{1}{2}}) \\ &= u^n_{i,i'} + (u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'})L_3(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &= u^n_{i,i'} + (u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'})L_4(y - y_{i'+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

où Y_i, Z_i et L_i $(1 \leq i \leq 4)$ sont des fonctions généralisées de Heaviside usuelles. On résout :

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y \approx 0 \\ u(.,.,t_n) = u^n \end{cases}$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+_*)$. On pose :

$$u^{n+1}_{i,i'} = \frac{1}{h^2}\int_{I_i}\int_{I_{i'}} u(x,y,t_{n+1})dxdy.$$

Nous avons 16 cas possibles selon les signes de $a^n_{i-1,i'}$, $a^n_{i,i'}$, $a^n_{i+1,i'}$, $b^n_{i,i'}$, $b^n_{i,i'-1}$ et $b^n_{i,i'+1}$. Nous allons développer en détail un des cas et plus briévement les suivants, qui reposent sur le même principe

4.1.2 Etude détaillée du cas 1 : $a^n_{i,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i-1,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'-1} \leq 0$

Nous avons vu lors de la résolution du problème de Riemann au chapitre précédent que si $a_d > 0$, $a_g < 0$, $b_d > 0$ et $b_g < 0$, alors l'équation (1) possède une solution de la forme

$$u(x,y,t) = u_g + (\lambda - u_g)H(x - a_g t, y - b_g t) + (u_d - \lambda)K(x - a_d t, y - b_d t)$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times]0;+\infty[)$ obtenue en prenant $\lambda = (1-A)u_d + Au_g$, $A \in]0;1[$. En projetant cette solution sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$, on obtient une approximation de la solution de l'équation (1) de la forme :

$$(h^2 - ra_d h^2 - rb_d h^2)u_d + ra_d h^2 \lambda + rb_d h^2 \lambda,$$

soit donc, après simplification par h^2, de la forme :

$$(1 - ra_d - rb_d)u_d + ra_d \lambda + rb_d \lambda.$$

En conclusion, si $a_d > 0$, $a_g < 0$, $b_d > 0$ et $b_g < 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

$$(1 - ra_d - rb_d)u_d + ra_d \lambda + rb_d \lambda.$$

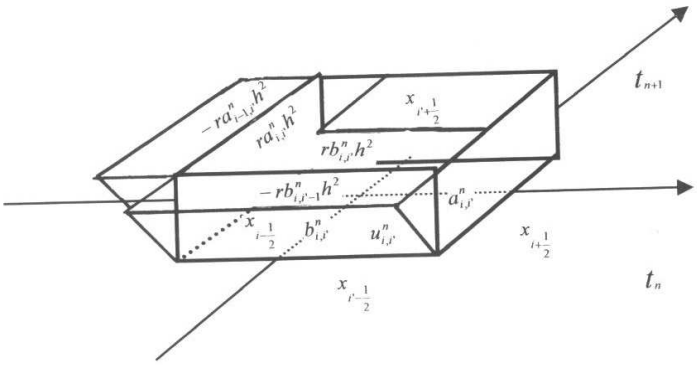
Ceci permet d'écrire le <u>cas 1</u> ($a^n_{i,i'} \geq 0$ $b^n_{i,i'} \geq 0$ $a^n_{i-1,i'} \leq 0$ $b^n_{i,i'-1} \leq 0$.) On a :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$, $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$.

Ainsi donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$



4.1.3 Les autres cas

Cas 2 : $a^n_{i,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i-1,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'-1} \geq 0$.– De la même façon que précédemment, si $a_d > 0$, $a_g < 0$, $b_d > 0$ et $b_g > 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

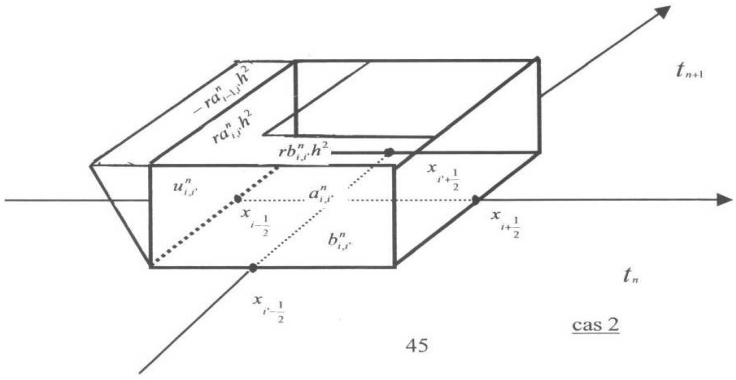
$$(1 - ra_d - rb_d)u_d + ra_d\lambda + rb_d u_g,$$

ce qui permet d'écrire :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$, soit donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$



Cas 3 : $a^n_{i,i'} \geq 0,\ b^n_{i,i'} \geq 0,\ a^n_{i-1,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'-1} \geq 0.-$ De la même façon que précédemment, si $a_d > 0$, $a_g > 0$, $b_d > 0$ et $b_g < 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

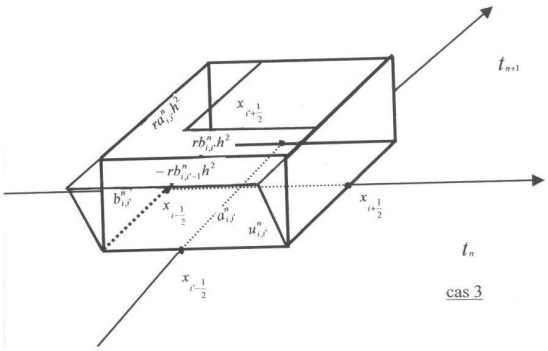
$$(1 - ra_d - rb_d)u_d + ra_d u_g + rb_d \lambda.$$

On a donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} + rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$, soit donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})$$



Cas 4 : $a^n_{i,i'} \geq 0,\ b^n_{i,i'} \geq 0,\ a^n_{i-1,i'} \geq 0,\ b^n_{i,i'-1} \geq 0.-$ Si $a_d > 0$, $a_g > 0$, $b_d > 0$ et $b_g > 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

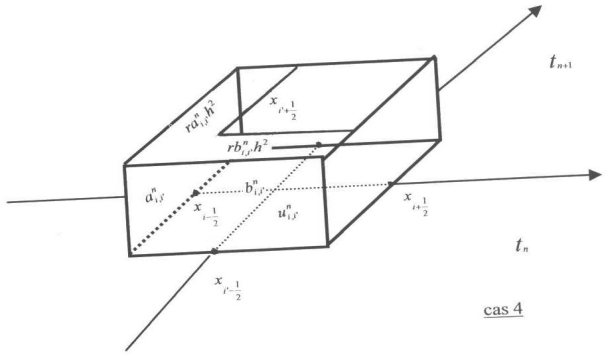
$$(1 - ra_d - rb_d)u_d + ra_d u_g + rb_d u_g.$$

On a alors :

$$u_{i,i'}^{n+1} = (1 - ra_{i,i'}^n - rb_{i,i'}^n)u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n u_{i-1,i'}^n + rb_{i,i'}^n u_{i,i'-1}^n.$$

D'où l'on déduit :

$$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n).$$

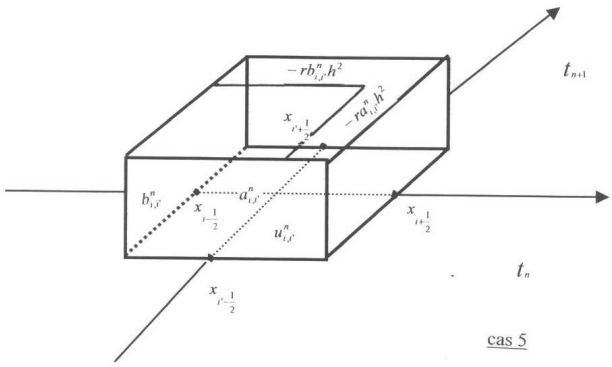


Cas 5 : $a_{i,i'}^n \leq 0$ $b_{i,i'}^n \leq 0$ $a_{i+1,i'}^n \leq 0$ $b_{i,i'+1}^n \leq 0$.– Si $a_d < 0$, $a_g < 0$, $b_d < 0$ et $b_g < 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

$$(1 + ra_g + rb_g)u_g - ra_g u_d - rb_g u_d.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= (1 + ra_{i,i'}^n + rb_{i,i'}^n)u_{i,i'}^n - ra_{i,i'}^n u_{i+1,i'}^n - rb_{i,i'}^n u_{i,i'+1}^n \\ &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n) + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i,i'+1}^n). \end{aligned}$$



Cas 6 : $a^n_{i,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'} \leq 0,\ a^n_{i+1,i'} \geq 0,\ b^n_{i,i'+1} \leq 0.-$ Si $a_d > 0$, $a_g < 0$, $b_d < 0$ et $b_g < 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

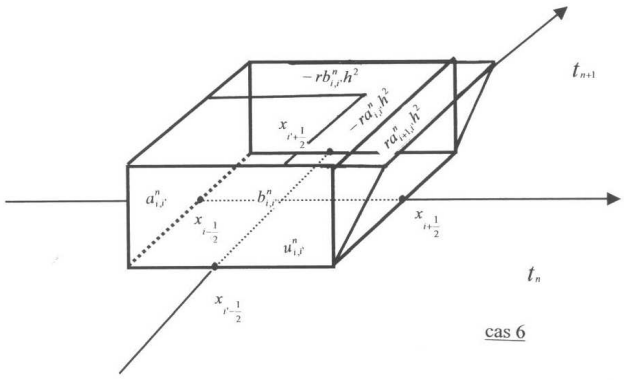
$$(1 + ra_g + rb_g)u_g - ra_g\lambda - rb_g u_d.$$

ce qui permet d'écrire :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'}u^n_{i,i'+1}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$ avec $A^n_{i+1,i'} \in]0;1[$, soit donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$



Cas 7 : $a^n_{i,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'} \leq 0,\ a^n_{i+1,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'+1} \geq 0.-$ Si $a_d < 0$, $a_g < 0$, $b_d > 0$ et $b_g < 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

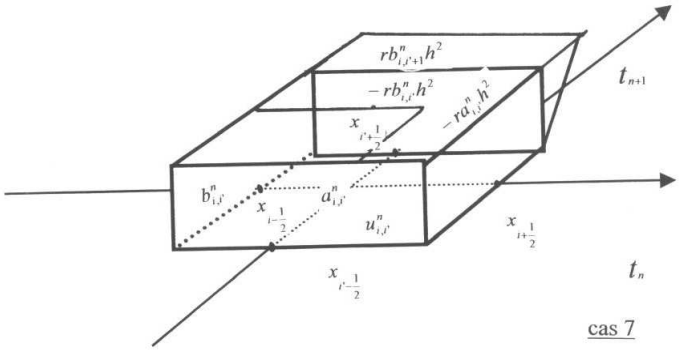
$$(1 + ra_g + rb_g)u_g - ra_g u_d - rb_g\lambda.$$

Ceci qui permet d'écrire :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}u^n_{i+1,i'} - rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$, soit donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}).$$



Cas 8 : $a^n_{i,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'} \leq 0,\ a^n_{i+1,i'} \geq 0,\ b^n_{i,i'+1} \geq 0.-$ Si $a_d > 0$, $a_g < 0$, $b_d > 0$ et $b_g < 0$, la projection de la solution de l'équation (1) sur la surface parallélépipèdique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$ est de la forme :

$$(1 + ra_g + rb_g)u_g - ra_g\lambda - rb_g\lambda.$$

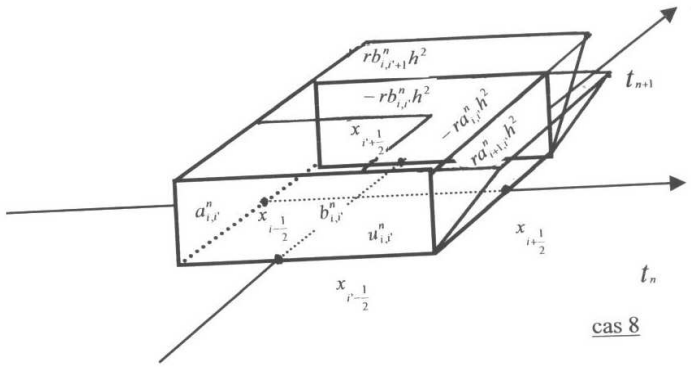
On a donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$ et $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i+1,i'}, A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$.

Il vient donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + \\ ra^n_{i,i'}A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}).$$



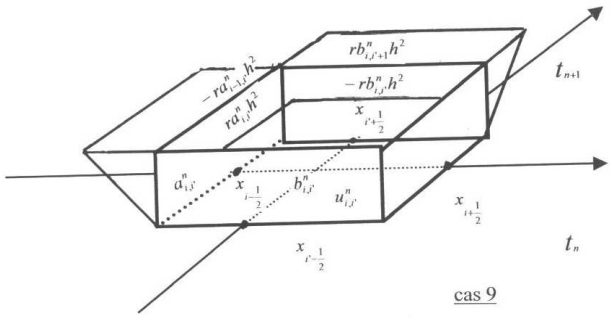
Résultats pour les cas 9 à 16 Par des raisonnements analogues, on obtient tous les autres schémas, du cas 9 au cas 16

Cas 9 : $a^n_{i,i'} \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \leq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \geq 0.-$ On obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$, $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i,i'}, A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$. Il vient donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$

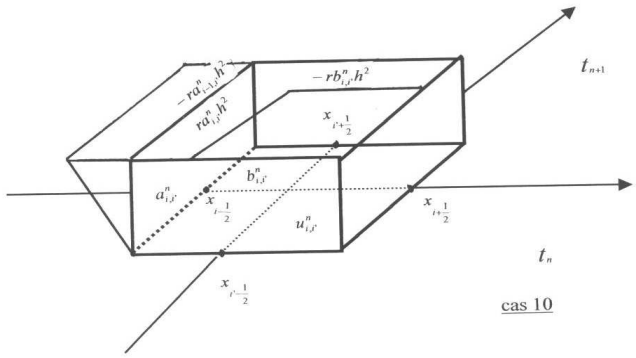


Cas 10 : $a^n_{i,i'} \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \leq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \leq 0.-$ On obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'}u^n_{i,i'+1}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$, soit donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$

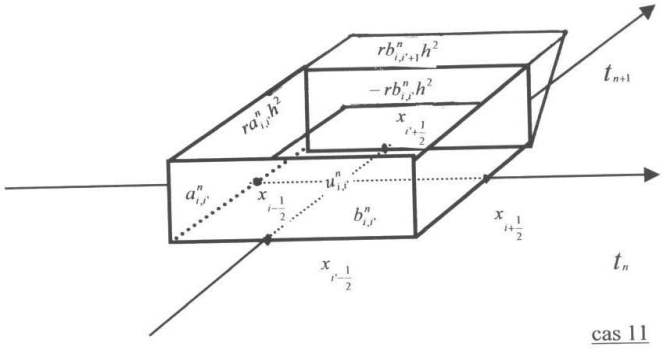


Cas 11 : $a^n_{i,i'} \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \geq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \geq 0.-$ On obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} - rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

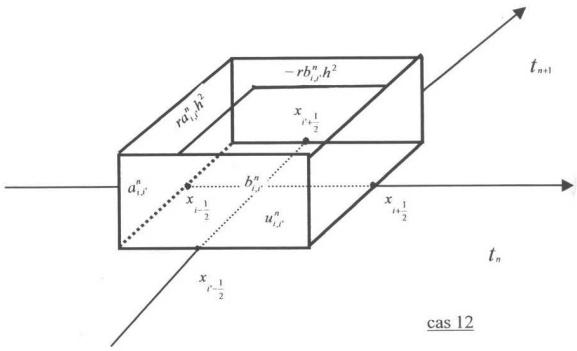
avec $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$, soit donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$



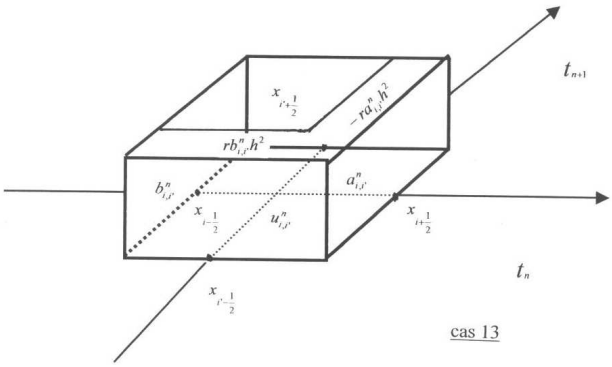
Cas 12 : $a^n_{i,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'} \leq 0$, $a^n_{i-1,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'+1} \leq 0$.– On obtient :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} &= (1 - ra^n_{i,i'} + rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} - rb^n_{i,i'}u^n_{i,i'+1} \\ &= u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$



Cas 13 : $a^n_{i,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i+1,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'-1} \geq 0$.– On obtient :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} &= (1 + ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}u^n_{i+1,i'} + rb^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1} \\ &= u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}). \end{aligned}$$

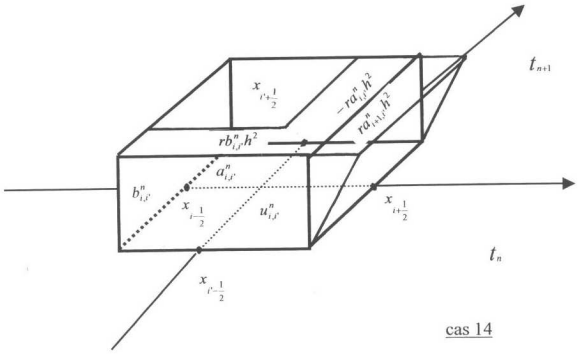


Cas 14 : $a^n_{i,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i+1,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'-1} \geq 0$.– On obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$ où $A^n_{i+1,i'} \in]0;1[$. D'où :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})$$

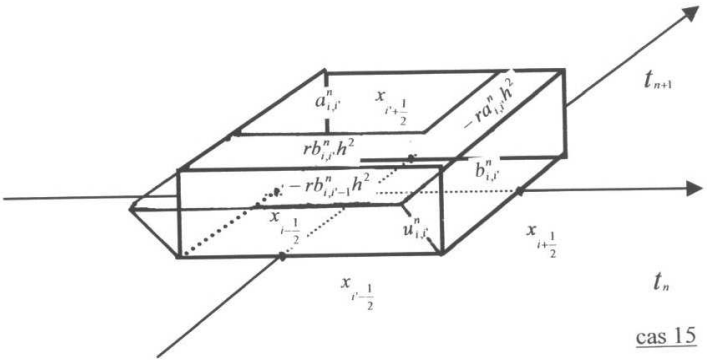


Cas 15 : $a^n_{i,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i+1,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'-1} \leq 0$.– On obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}u^n_{i+1,i'} + rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$. Ainsi :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$

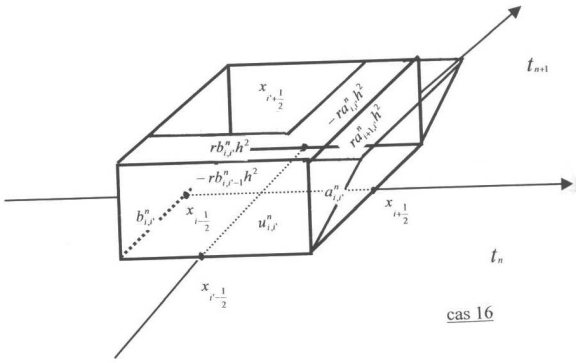


Cas 16 : $a^n_{i,i'} \leq 0$, $b^n_{i,i'} \geq 0$, $a^n_{i+1,i'} \geq 0$, $b^n_{i,i'-1} \leq 0$.– On obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} - rb^n_{i,i'})u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'}\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'}\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$ et $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'}u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'}$, $A^n_{i+1,i'} \in]0;1[$. D'où :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$



4.2 Construction des schémas numériques par Splitting et comparaisons

Les schémas numériques construits précédemment ne peuvent être considérés comme *a priori* validés du fait que les solveurs de Riemann utilisés n'ont pas été justifiés. Nous allons faire cette validation en comparant les résultats obtenus avec ces schémas numériques de Godunov "2D" construits précédemment avec ceux obtenus par une méthode de Spiltting.

Nous allons commencé par construire les schémas par Splitting puis analyser les différences entre les deux types de schémas avant de procéder aux tests numériques.

Pour celà, nous utiliserons donc les résultats numériques dévellopés par Séverine Bernard dans sa thèse[3,4], dont nous faisons un bref rappel.

Le travail de Séverine Bernard consiste en la recherche et au calcul numérique de solutions faibles (au sens des fonctions généralisées) de l'équation de transport non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(x,t)\frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

complétée de la condition initiale : $u(x,0) = u_0(x)$ où la fonction $\{(x,t) \to a(x,t)\}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, mais peut être discontinue, la fonction f est lisse et la fonction $\{x \to u_0(x)\}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.

Dans un premier temps, un rappel sur les outils utilisés, à savoir les espaces de fonctions généralisées, est fait, notamment des résultats théoriques sur les fonctions généralisées de Heaviside.

Dans un deuxième temps, grâce à ces résultats théoriques, on résout le problème de Riemann 1D à l'aide d'un solveur s'écrivant comme fonctions type Heaviside afin d'obtenir les solutions faibles.

Enfin, ces solutions faibles permettent alors la construction des schémas numériques de type Godunov 1D,que nous utiliserons pour la construction des schémas numériques par Splitting dans ce chapitre 4 ainsi qu'au chapitre 5.

4.2.1 Construction des schémas par Splitting

Cadre général

On considère l'équation (1) exposée précédemment

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) + b(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,t) \approx 0 \quad (1)$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$, avec comme condition initiale et comme coefficients :

$$\begin{cases} u_0(x,y) = u_g + \Delta u L(x,y) & \Delta u = u_d - u_g \\ a(x,y,t) = a_g + \Delta a Y(x,y) & \Delta a = a_d - a_g \\ b(x,y,t) = b_g + \Delta b Z(x,y) & \Delta b = b_d - b_g \end{cases}$$

où $a_d, a_g, u_d, u_g, b_d, b_g$ sont des constantes arbitraires, L, Y et Z des fonctions généralisées construites comme précédemment :

$$L(x,y) = (L_1 \otimes L_2)(x,y) \quad Y(x,y) = (Y_1 \otimes Y_2)(x,y) \quad Z(x,y) = (Z_1 \otimes Z_2)(x,y)$$

et $Y_1, Y_2, L_1, L_2, Z_1, Z_2$ sont des fonctions généralisées de Heaviside usuelles de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

On utilise une méthode explicite de directions alternées qui consiste à décomposer l'équation bidimensionnelle en deux sous équations mono dimensionnelles qui se traitent chacune de façon identique. (Pour de plus amples détails sur le splitting, on peut se référer à [24,28, 29].) On considère donc les splitting de direction :

Suivant la direction des x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0 \quad \text{dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+) \quad (a)$$

Suivant la direction des y

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial y} \approx 0 \quad \text{dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+) \quad (b)$$

La méthode comporte trois étapes (dont les deux premières ont été décrites par Bernard [3, 4] et Remaki [24]).

Première étape : On approche l'équation (a) par des schémas numériques qui permettent de calculer $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$ en fonction de $u_{i,i'}^n$.

Deuxième étape : On approche l'équation (b) par les mêmes schémas numériques mais qui calculent $u_{i,i'}^{n+1}$ en fonction de $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$.

Troisième étape : On injecte les expressions de $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$ obtenues dans la première étape dans l'expression de $u_{i,i'}^{n+1}$ obtenue dans la deuxième étape, et l'on obtient $u_{i,i'}^{n+1}$ en fonction de $u_{i,i'}^n$.

Description des schémas

1) Première étape.– Nous avons à distinguer **4 cas** repris dans le tableau suivant :

Cas à considérer	Valeur de $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$
a) $a_{i,i'}^n \geq 0,\ a_{i-1,i'}^n \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n)$
b) $a_{i,i'}^n \geq 0,\ a_{i-1,i'}^n \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n)$
c) $a_{i,i'}^n \leq 0,\ a_{i+1,i'}^n \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n)$
d) $a_{i,i'}^n \leq 0,\ a_{i+1,i'}^n \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(1 - A_{i+1,i'}^n)(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n)$

2) Deuxième étape.– Nous devons également distinguer **4 cas**, selon le tableau suivant :

Cas à considérer	Valeur de $u_{i,i'}^{n+1}$
a) $b_{i,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'-1}^n \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}})$
b) $b_{i,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'-1}^n \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + rb_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}})$
c) $b_{i,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'+1}^n \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'+1}^{n+\frac{1}{2}})$
d) $b_{i,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'+1}^n \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + rb_{i,i'}^n(1 - A_{i+1,i'}^n)(u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'+1}^{n+\frac{1}{2}})$

3) Troisième étape.– Nous avons 16 cas possibles selon les signes de $a_{i-1,i'}^n$, $a_{i,i'}^n$, $a_{i+1,i'}^n$, $b_{i,i'}^n$, $b_{i,i'-1}^n$ et $b_{i,i'+1}^n$.

<u>Cas 1</u> : $a_{i,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'}^n \geq 0,\ a_{i-1,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'-1}^n \leq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n) \\ &\quad + r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'-1}^n A_{i,i'}^n A_{i,i'-1}^n(u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n A_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n). \end{aligned}$$

<u>Cas 2</u> : $a_{i,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'}^n \geq 0,\ a_{i-1,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'-1}^n \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n) \\ &\quad + r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'-1}^n A_{i,i'-1}^n(u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n). \end{aligned}$$

<u>Cas 3</u> : $a_{i,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'}^n \geq 0,\ a_{i-1,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'-1}^n \leq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n) \\ &\quad + r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'-1}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n). \end{aligned}$$

<u>Cas 4</u> : $a_{i,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'}^n \geq 0,\ a_{i-1,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'-1}^n \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n) \\ &\quad + r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'-1}^n(u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n). \end{aligned}$$

<u>Cas 5</u> : $a_{i,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'}^n \leq 0,\ a_{i+1,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'+1}^n \leq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n) + rb_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i,i'+1}^n) \\ &\quad + r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'+1}^n(u_{i,i'+1}^n - u_{i+1,i'+1}^n). \end{aligned}$$

<u>Cas 6</u> : $a_{i,i'}^n \leq 0,\ b_{i,i'}^n \leq 0,\ a_{i+1,i'}^n \geq 0,\ b_{i,i'+1}^n \leq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} &= u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n A_{i+1,i'}^n(u_{i+1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + ra_{i,i'}^n(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n) \\ &\quad + r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n(1 - A_{i+1,i'}^n)(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'+1}^n(1 - A_{i+1,i'+1}^n)(u_{i,i'+1}^n - u_{i+1,i'+1}^n). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 7}}$: $a^n_{i,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'} \le 0,\ \ a^n_{i+1,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \ge 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'+1}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i+1,i'+1}).$$

$\underline{\text{Cas 8}}$: $a^n_{i,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'} \le 0,\ \ a^n_{i+1,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \ge 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + ra^n_{i,i'}A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'+1}(1 - A^n_{i,i'+1})(1 - A^n_{i+1,i'+1})(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i+1,i'+1}).$$

$\underline{\text{Cas 9}}$: $a^n_{i,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'} \le 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \ge 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'+1}A^n_{i,i'+1}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}).$$

$\underline{\text{Cas 10}}$: $a^n_{i,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'} \le 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \le 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'+1}A^n_{i,i'+1}(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}).$$

$\underline{\text{Cas 11}}$: $a^n_{i,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'} \le 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \ge 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'+1}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}).$$

$\underline{\text{Cas 12}}$: $a^n_{i,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'} \le 0,\ \ a^n_{i-1,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'+1} \le 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'+1}(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}).$$

$\underline{\text{Cas 13}}$: $a^n_{i,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'} \ge 0,\ \ a^n_{i+1,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'-1} \ge 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'-1}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}).$$

$\underline{\text{Cas 14}}$: $a^n_{i,i'} \le 0,\ \ b^n_{i,i'} \ge 0,\ \ a^n_{i+1,i'} \ge 0,\ \ b^n_{i,i'-1} \ge 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'-1}(1 - A^n_{i+1,i'-1})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}).$$

Cas 15 : $a^n_{i,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'} \geq 0,\ a^n_{i+1,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'-1} \leq 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'-1}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}).$$

Cas 16 $a^n_{i,i'} \leq 0,\ b^n_{i,i'} \geq 0,\ a^n_{i+1,i'} \geq 0,\ b^n_{i,i'-1} \leq 0$

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})$$
$$+ r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'-1}A^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'-1})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) - r^2 b^n_{i,i'}a^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}).$$

4.2.2 Remarques sur les differences entre la méthode 2D et la méthode par Splitting

Différences dans le principe de construction

La méthode par Splitting (directions alternées), comme il a été rappelé plus haut, consiste à décomposer notre équation bidimensionnelle en deux sous-équations monodimensionnelles qui se traitent chacune de façon identique. La méthode par Splitting consiste donc à résoudre deux problèmes de Riemann monodimensionnel alors que la méthode 2D consiste à résoudre un problème de Riemann bidimentionnel.

Dans le cas de la méthode par Splitting, le solveur constitué de Heaviside généralisés est de dimension un en espace, alors que dans la méthode 2D, le solveur utilisé est de dimension deux en espace, utilisant des produits tensoriels de Heavisides généralisées.

Remarque 54 *Sur le plan théorique, la résolution du problème de Riemann diffère, les calculs pour la méthode par Splitting se font dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}\times\,]0;+\infty[)$, les calculs pour la méthode 2D se font dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2\times\,]0;+\infty[)$.*

Différences dans les expressions

Cette différence dans le principe de construction débouche surtout sur une différence des schémas numériques obtenus, que nous allons expliciter sur le cas 1 : $a^n_{i,i'} \geq 0\ \ b^n_{i,i'} \geq 0$ $a^n_{i-1,i'} \leq 0\ \ b^n_{i,i'-1} \leq 0$.

– **Par la méthode 2D**, on obtient le schéma numérique suivant

$$u^{n+1}_{i,i'} = \underbrace{u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})}_{\mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r}),\ \text{polynôme en } r \text{ de degré } 1}$$

– **Par la méthode par Splitting**, on obtient le schéma numérique suivant

$$u_{i,i'}^{n+1} = \underbrace{u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n A_{i,i'}^n (u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n)}_{\text{On reconnaît } \mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r}), \text{ polynôme en } r \text{ de degré } 1} +$$

$$\underbrace{r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'-1}^n A_{i,i'}^n A_{i,i'-1}^n (u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) - r^2 b_{i,i'}^n a_{i,i'}^n A_{i,i'}^n A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n)}_{\mathbf{Q}_{SP}(\mathbf{r}^2), \text{ terme uniquement en } r^2}$$

Remarque 55 *Ces constats sont vrais pour chacun des 16 cas de schémas numériques, comme on le constate sur les expressions obtenues.*

En conclusion pour chacun des 16 cas de schémas numériques, par **la méthode 2D**, on obtient des schémas numériques de la forme

$$u_{i,i'}^{n+1} = \mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r})$$

où $\mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r})$ est un polynôme en r de degré 1. Par **la méthode par Splitting**, on obtient des schémas numériques de la forme

$$u_{i,i'}^{n+1} = \mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_{SP}(\mathbf{r}^2)$$

où $\mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r})$ est le polynôme en r de degré 1 obtenu ci-dessus par la méthode 2D et $\mathbf{Q}_{SP}(\mathbf{r}^2)$, un polynôme uniquement en r^2.

4.3 Tests numériques

Nous allons tester les schémas numériques selon les signes de a_g, a_d, b_g et b_d, afin de retrouver les differents cas, puis nous allons vérifier une certaine proximité des résultats concernant les comparaisons des tests en vue de valider les schémas numériques.

Dans un premier temps, nous allons tester les schémas numériques pour le problème de Riemann, et retrouver les différentes solutions correspondant aux différents cas. On choisit $A = 0,5$.

Les résultats (à t fixé) sont illustré par :

1) $a_g < 0$, $a_d > 0$, $b_g < 0$ et $b_d > 0$: cas de la double zone intermédiaire suivant les directions x et y. (Cas 1, 8, 9, 16)

2) $a_g < 0$, $a_d > 0$, $b_g > 0$ et $b_d > 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction x et discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant la direction y. (Cas 2, 14)

3) $a_g < 0$, $a_d < 0$, $b_g > 0$ et $b_d > 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant la direction x et vers la "droite" suivant la direction y. (Cas 13)

4) $a_g < 0$, $a_d < 0$, $b_g < 0$ et $b_d > 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction y et discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant la direction x. (Cas 7, 15)

5) $a_g < 0$, $a_d > 0$, $b_g < 0$ et $b_d < 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction x et discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant la direction y. (Cas 6, 10)

6) $a_g > 0$, $a_d > 0$, $b_g > 0$ et $b_d > 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant les directions x et y. (Cas 4)

7) $a_g < 0$, $a_d < 0$, $b_g < 0$ et $b_d < 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant les directions x et y. (Cas 5)

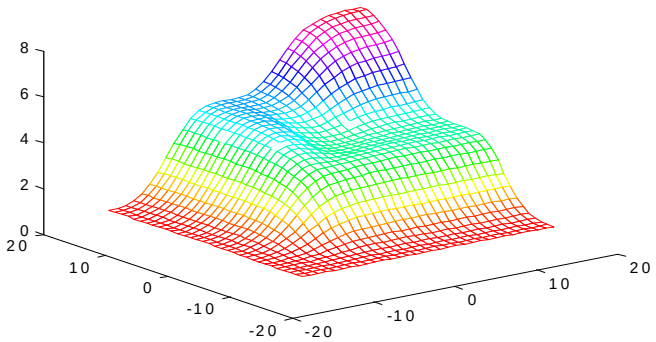
8) $a_g > 0$, $a_d < 0$, $b_g > 0$ et $b_d < 0$: phénomène de blocage en $t = 0$.

9) $a_g > 0$, $a_d > 0$, $b_g < 0$ et $b_d > 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction y et discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant la direction x. (Cas 3, 11)

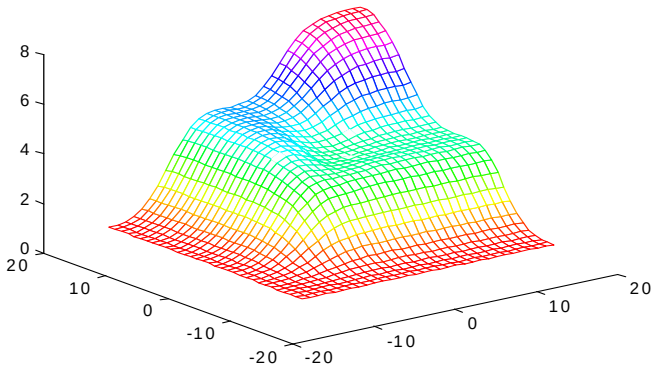
10) $a_g > 0$, $a_d > 0$, $b_g < 0$ et $b_d < 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant la direction x et vers la "gauche" suivant la direction y. (Cas 12)

a_g<0, a_d>0, b_g<0 et b_d>0

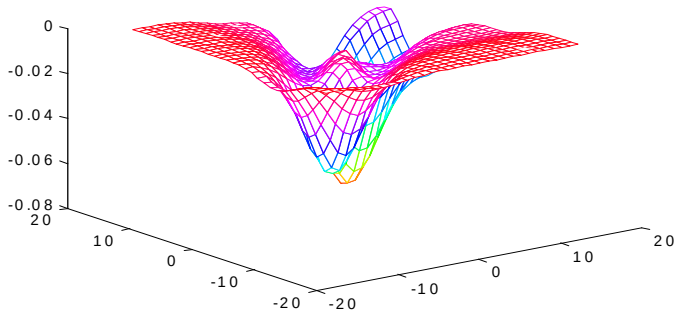
(Cas de la double zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des x et des y)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



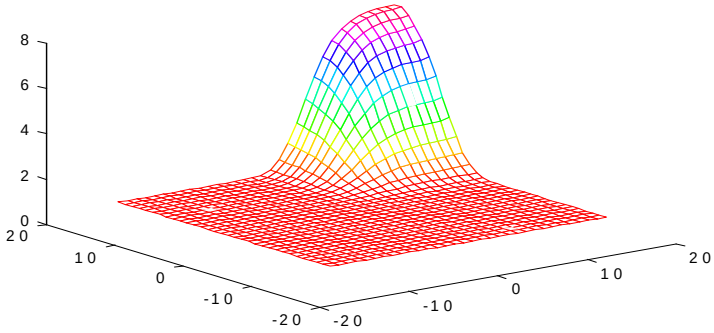
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



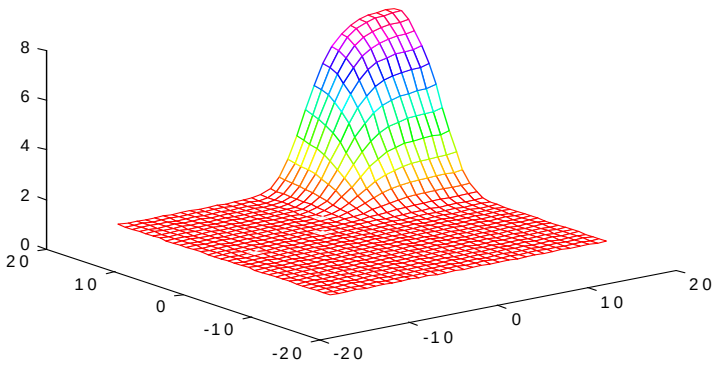
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g>0, a_d>0, b_g>0 et b_d>0

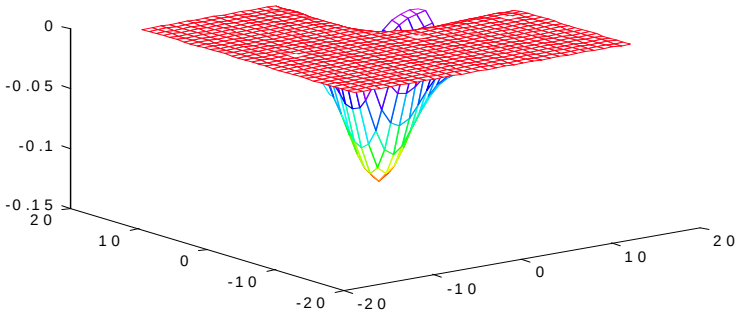
(Discontinuité de u_0 se propageant dans le quadrant x>0 et y>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



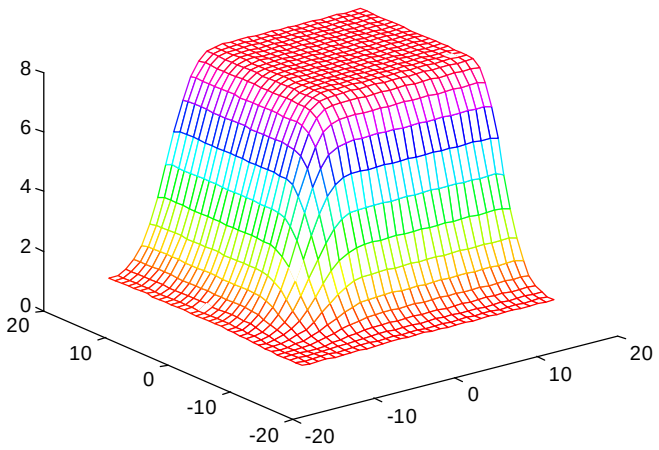
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



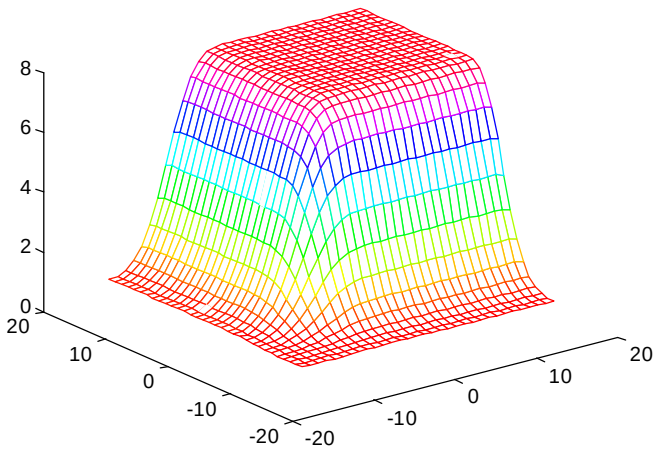
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g<0, a_d<0, b_g<0 et b_d<0

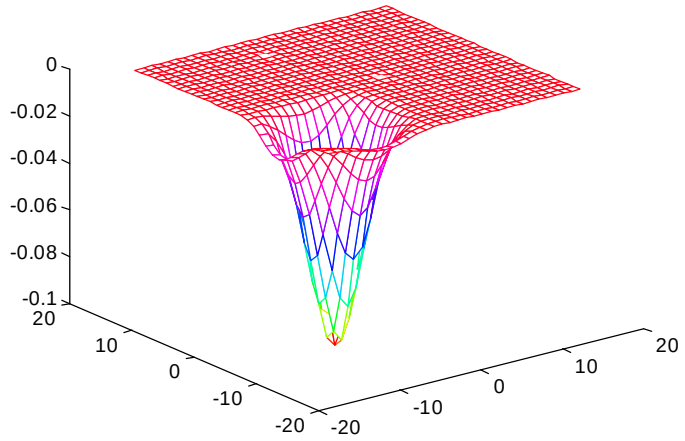
(Discontinuité de u_0 se propageant dans le quadrant x<0 et y<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



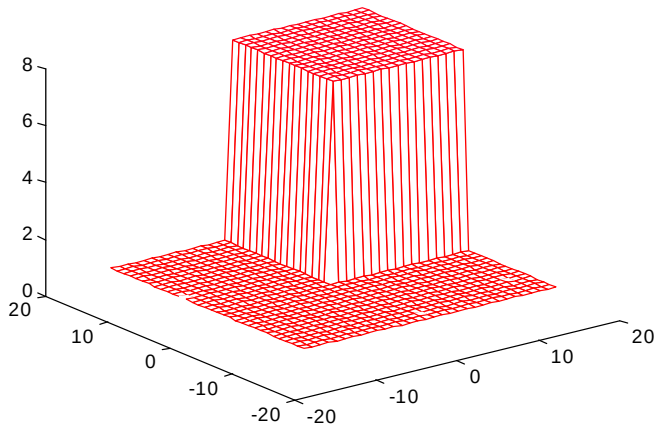
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



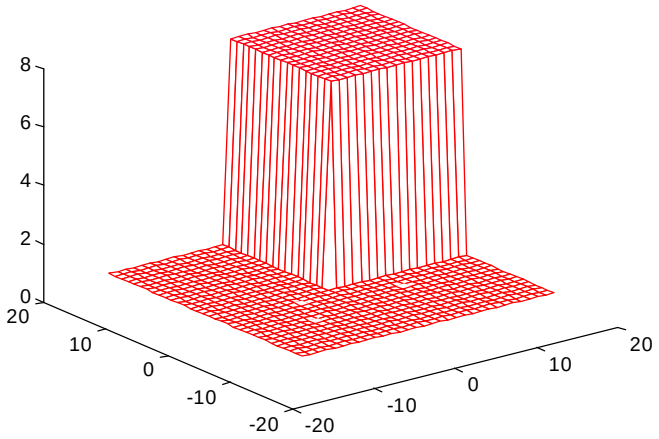
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g>0, a_d<0, b_g>0 et b_d<0

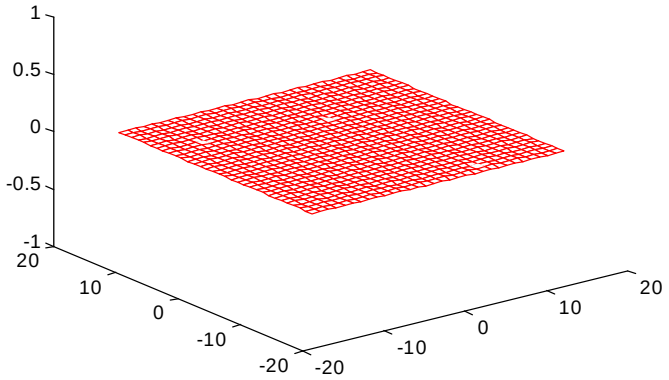
(Phénomène de blocage)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting

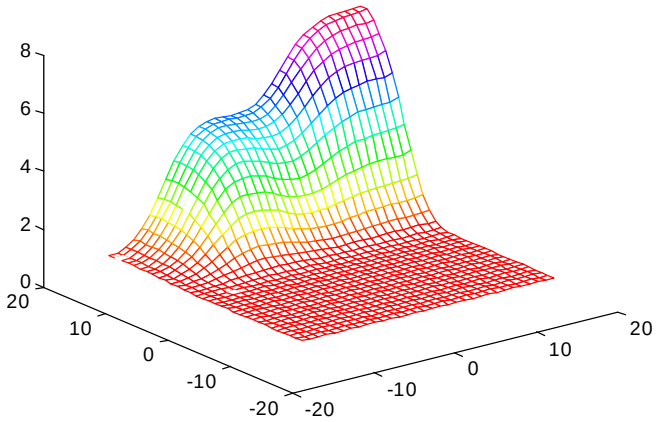


Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

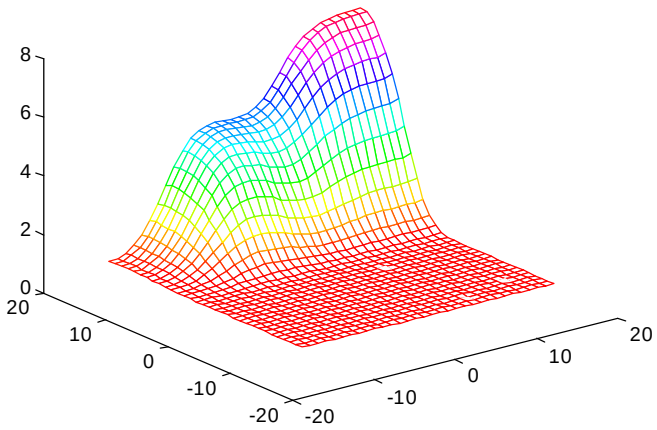
a_g>0, a_d>0, b_g<0 et b_d>0

(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des y et disconti-

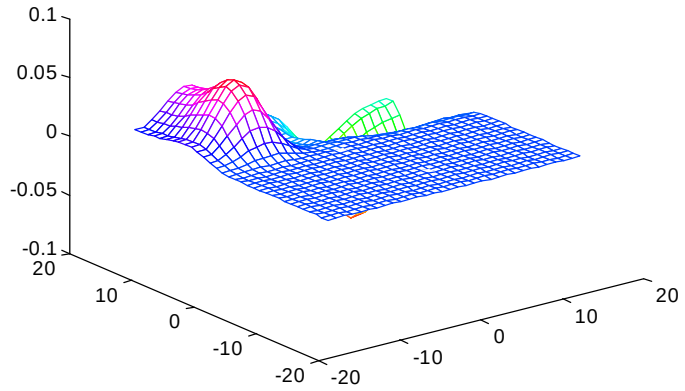
nuité de u_0 se propageant suivant la direction des x>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



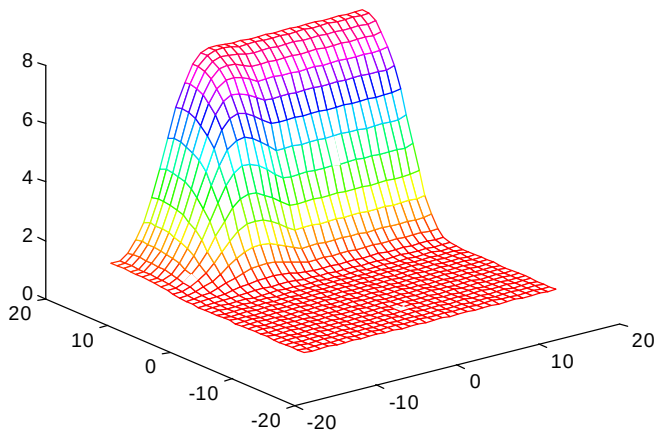
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



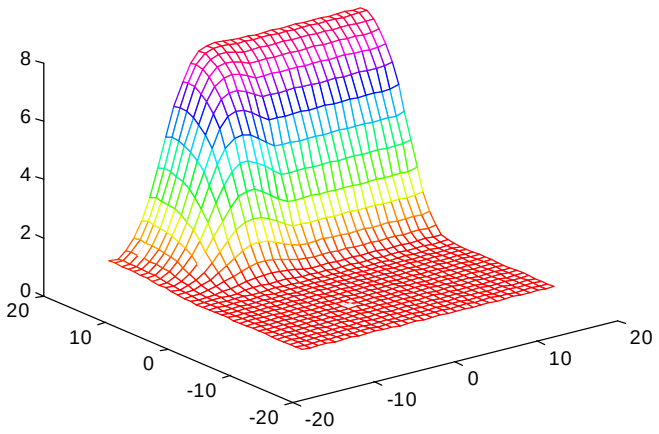
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g>0, a_d>0, b_g<0 et b_d<0

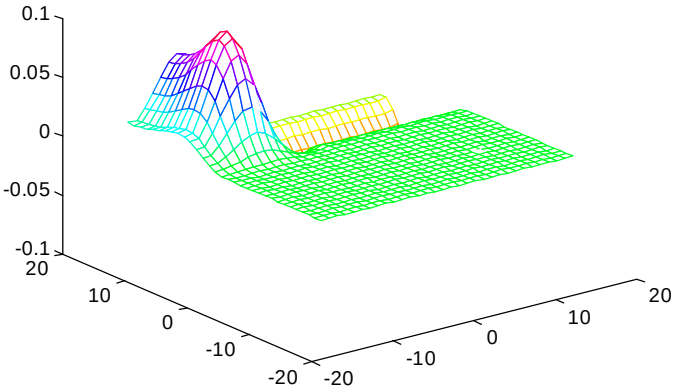
(Discontinuité de u_0 se propageant dans le quadrant x>0 et y<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting

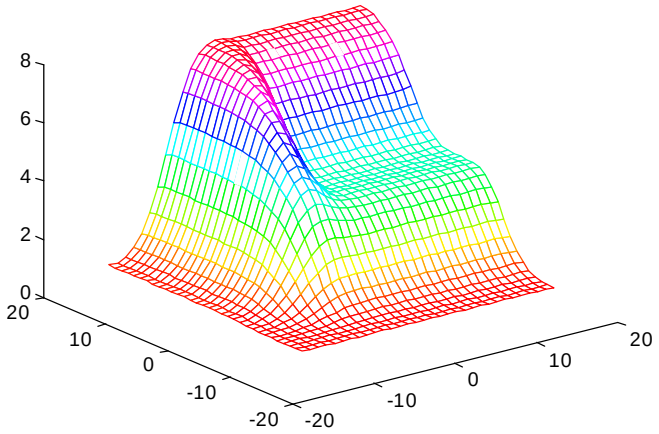


Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

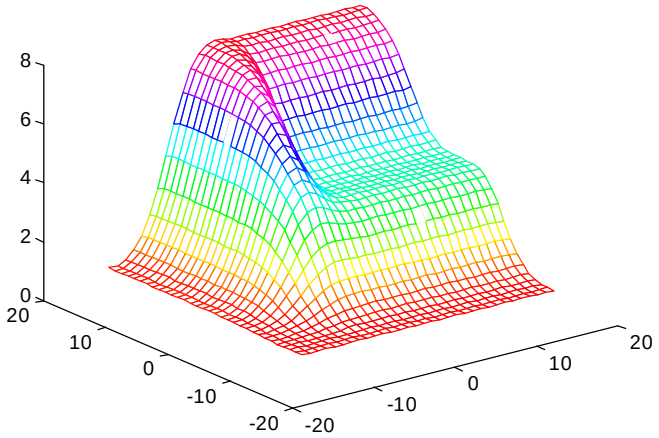
a_g<0, a_d>0, b_g<0 et b_d<0

(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des x et disconti-

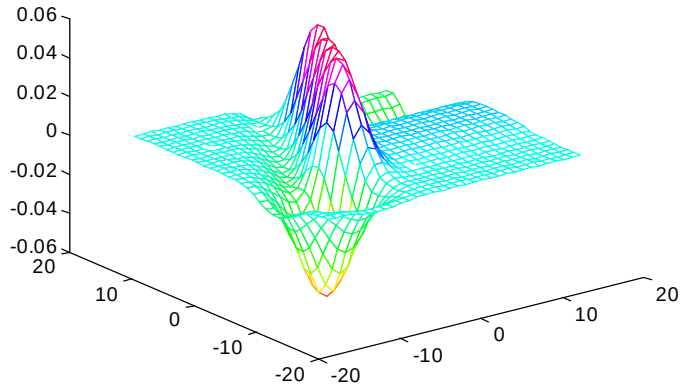
nuité de u_0 se propageant suivant la direction des y<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



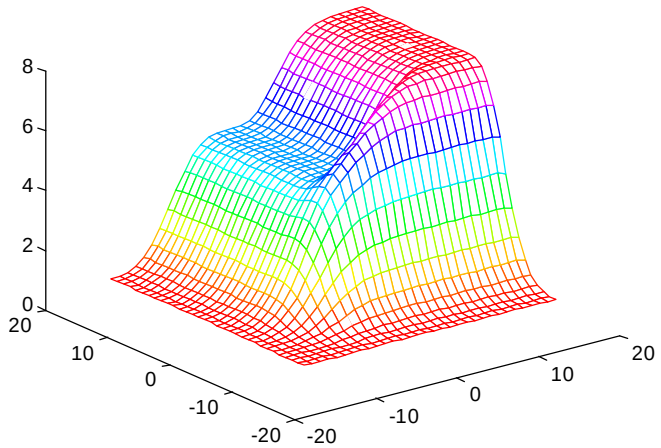
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



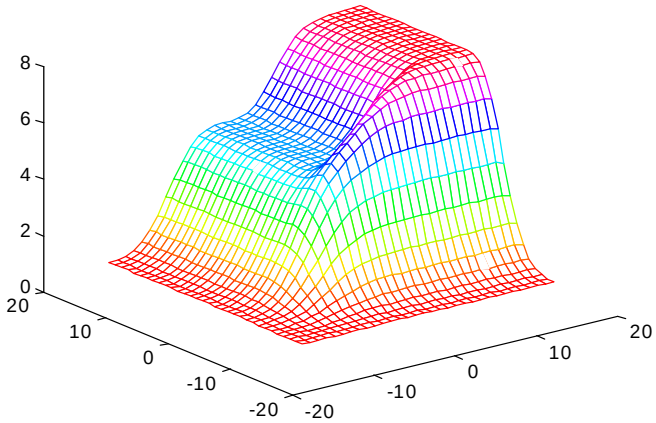
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g<0, a_d<0, b_g<0 et b_d>0

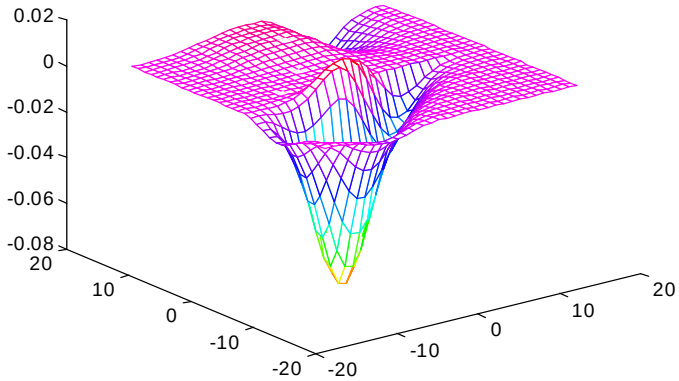
(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des y et discontinuité de u_0 se propageant suivant la direction des x<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



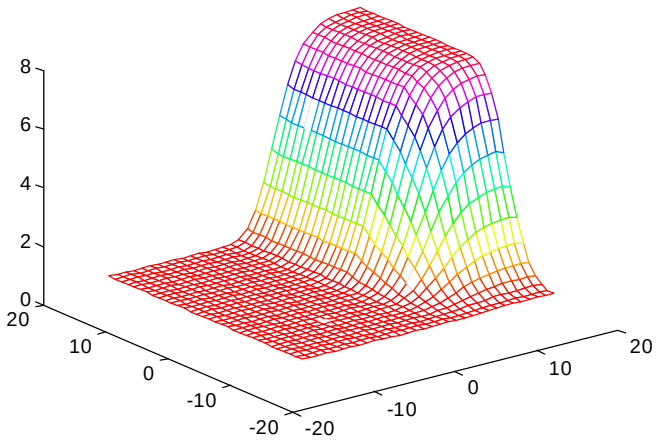
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



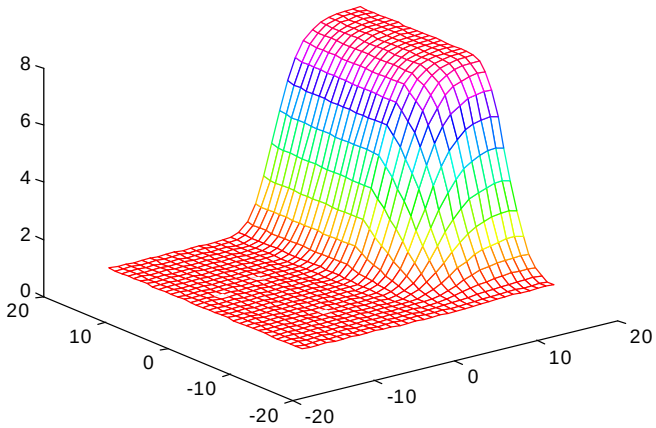
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g<0, a_d<0, b_g>0 et b_d>0

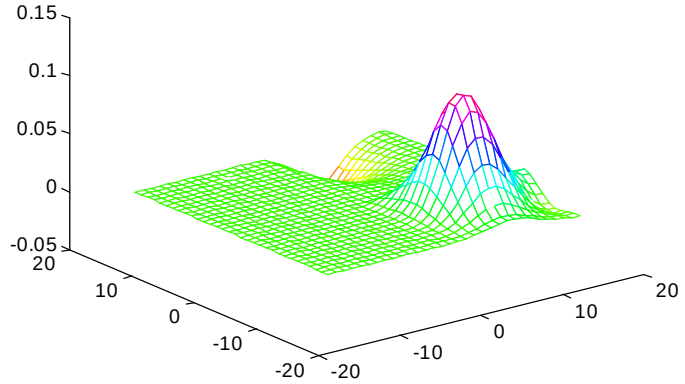
(Discontinuité de u_0 se propageant suivant la direction des x<0 et y>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



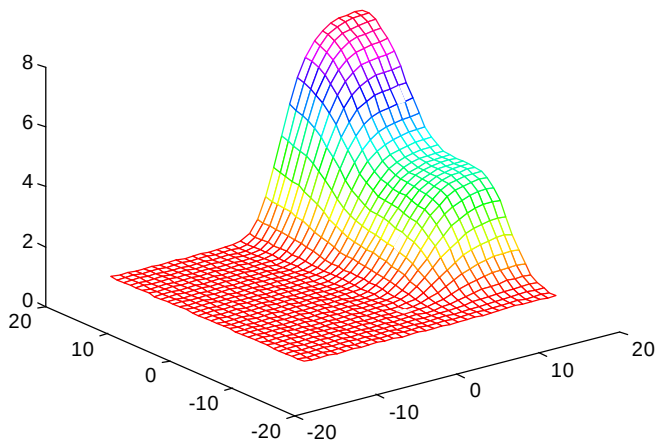
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



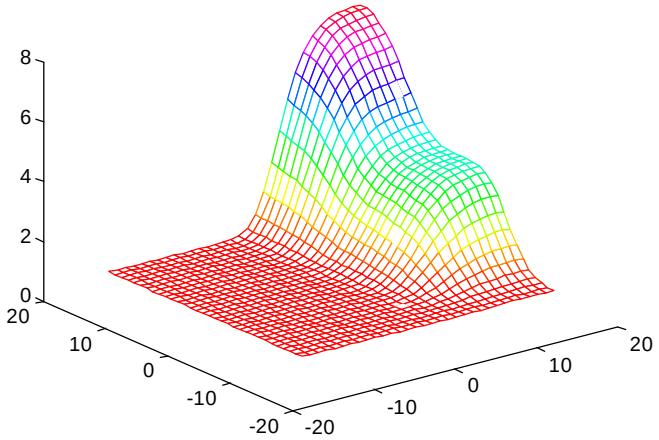
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

a_g<0, a_d>0, b_g>0 et b_d>0

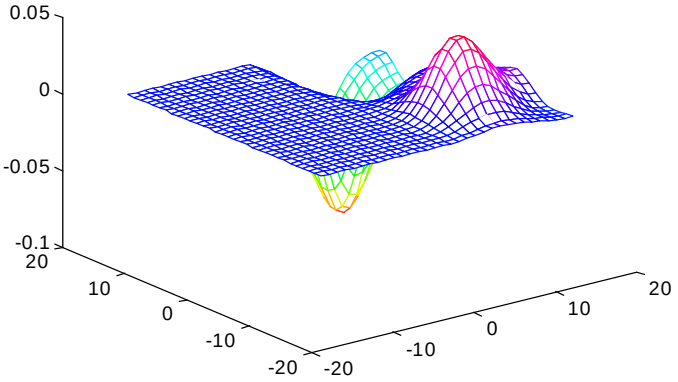
(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des x et discontinuité de u_0 se propageant suivant la direction des y>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

Maintenant, nous allons effectuer les tests numériques en faisant varier u_g, u_d ainsi que les coéfficients a_g, a_d, b_g et b_d, à pas h constant, afin de voir si les résultats restent conformes aux prédictions.

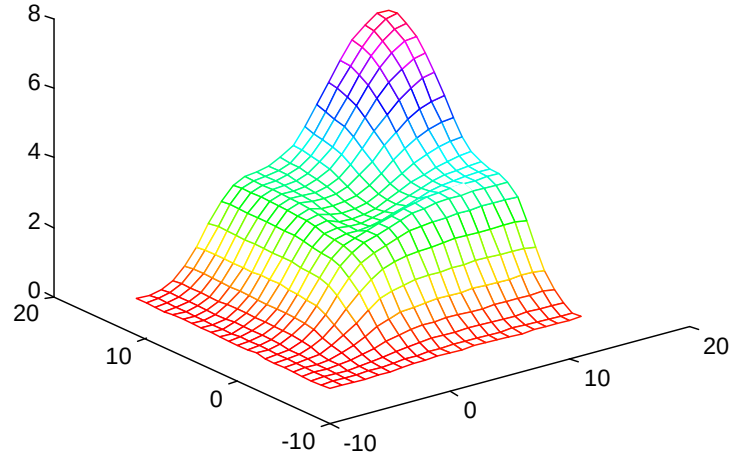
Nous allons uniquement tester **le cas** $a_g < 0$**,** $a_d > 0$**,** $b_g < 0$ **et** $b_d > 0$, les autres cas se testant de façon similaires.

$$\boxed{\textbf{cas } \mathrm{a}_g{<}0,\ \mathrm{a}_d{>}0,\ \mathrm{b}_g{<}0 \textbf{ et } \mathrm{b}_d{>}0}$$

Les tests qui suivent sont tous effectués à pas constant $h = 0,15$.

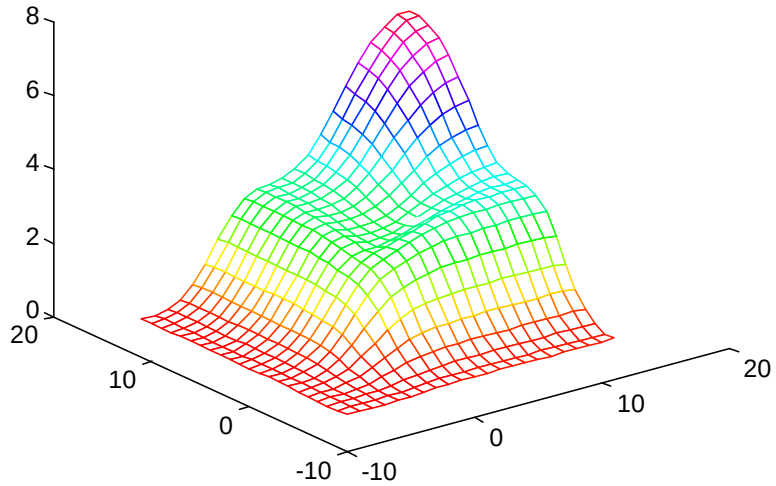
1^{er}cas) $u_g < u_d$

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = 1$**,** $u_d = 8$**,** $a_g = -0,75$**,** $a_d = 0,85$**,** $b_g = -0,65$ **et** $b_d = 0,95$



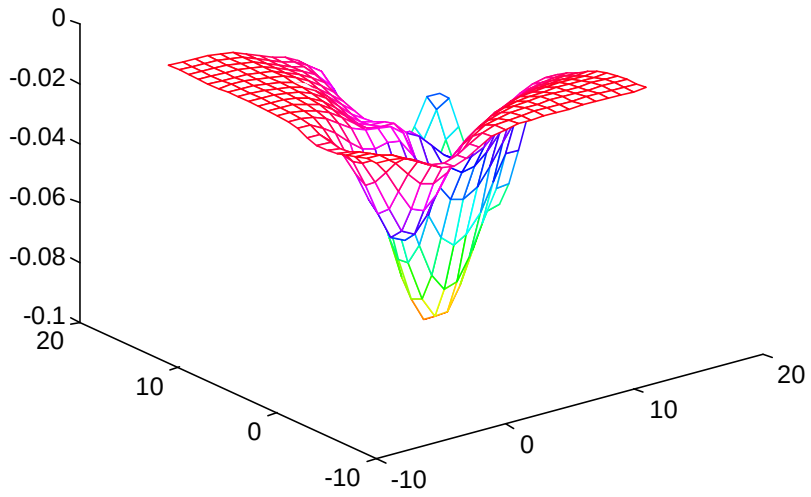
(4.1)

La figure 4.1 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.2)

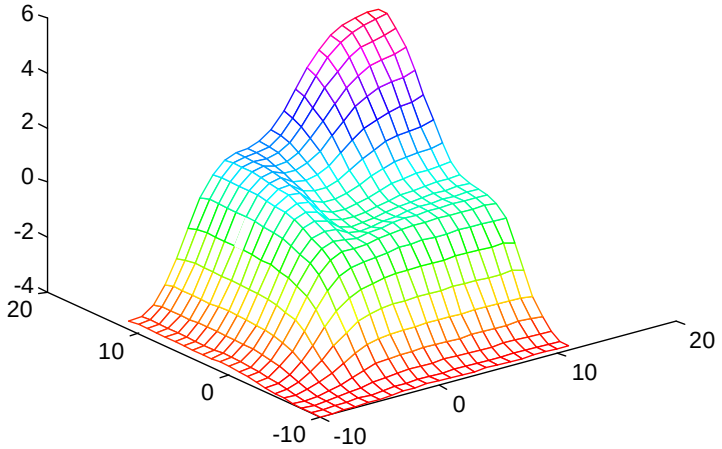
La figure 4.2 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.3)

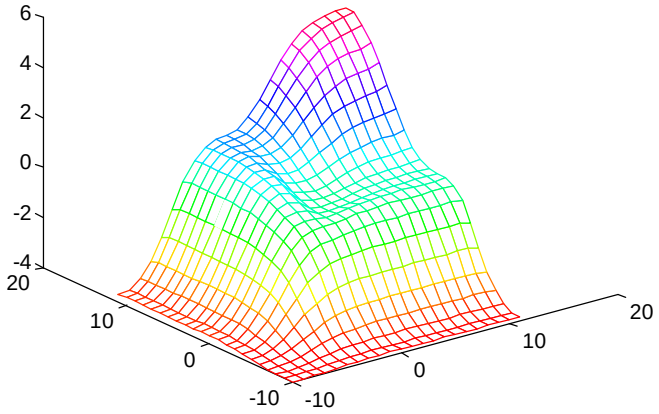
La figure 4.3 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = -4$**,** $u_d = 6$**,** $a_g = -0,85$**,** $a_d = 0,75$**,** $b_g = -0,95$ **et** $b_d = 0,85$



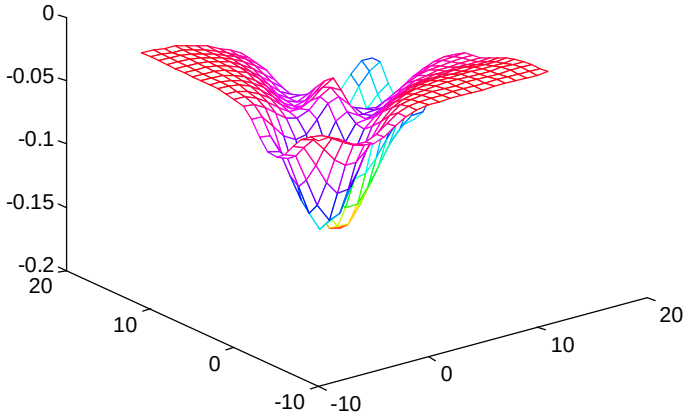
(4.4)

La figure 4.4 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.5)

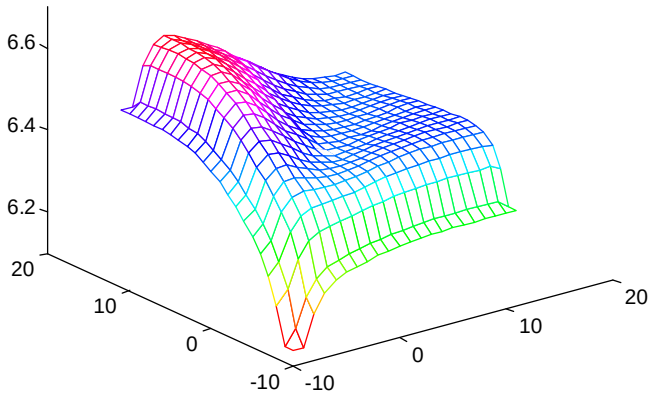
La figure 4.5 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.6)

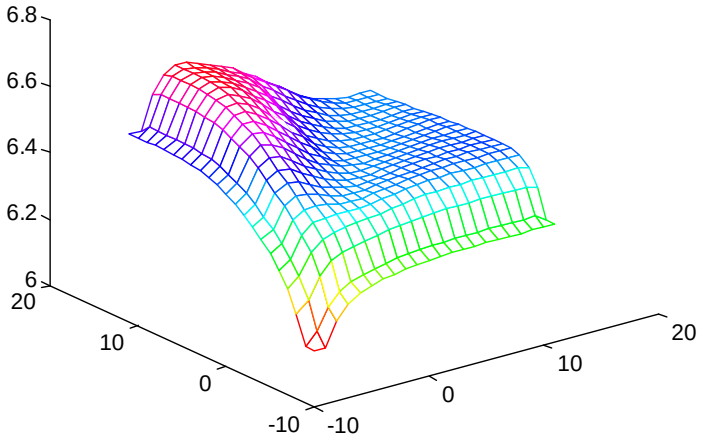
La figure 4.6 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = 5$**,** $u_d = 9$**,** $a_g = -2$**,** $a_d = 3$**,** $b_g = -3,5$ **et** $b_d = 2,5$



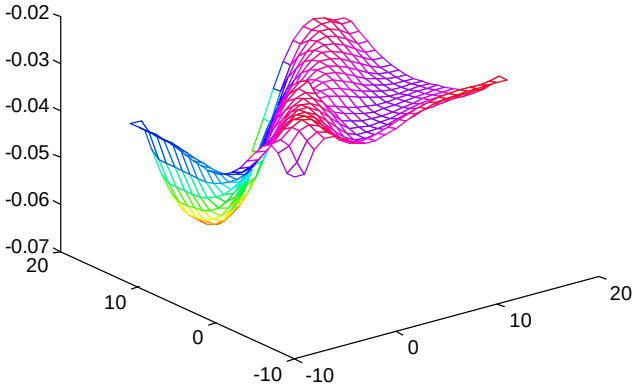
(4.7)

La figure 4.7 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.8)

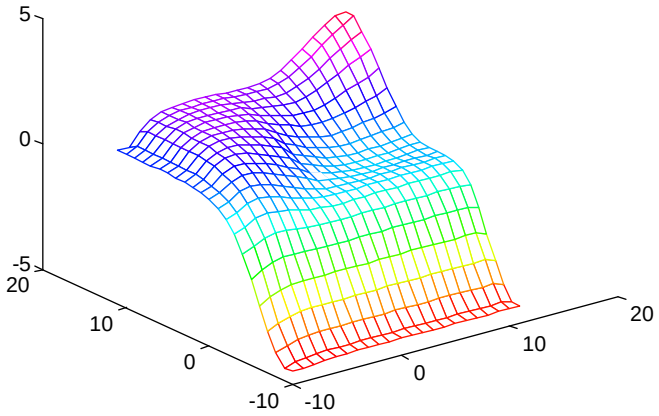
La figure 4.8 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.9)

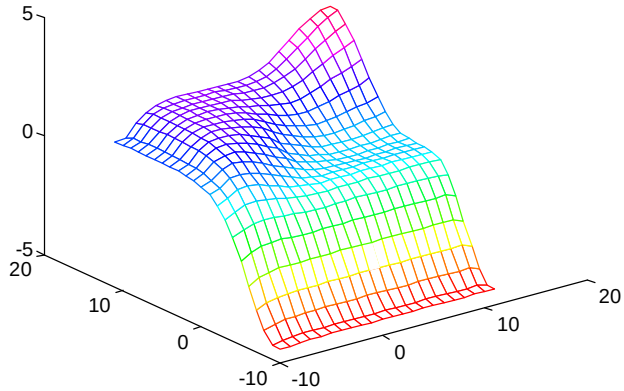
La figure 4.9 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = -5$**,** $u_d = 4$**,** $a_g = -1$**,** $a_d = 1,5$**,** $b_g = -2$ **et** $b_d = 1,75$



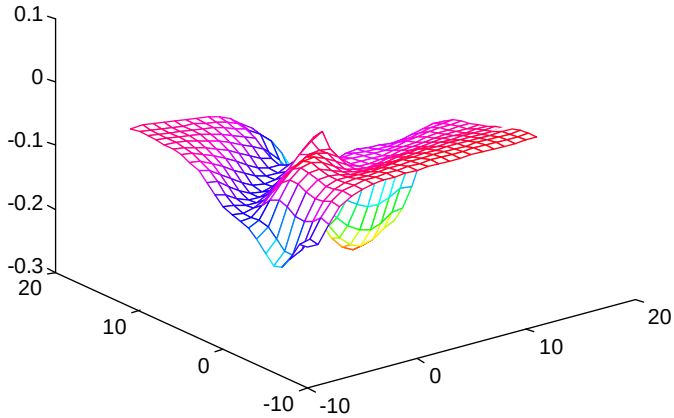
(4.10)

La figure 4.10 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.11)

La figure 4.11 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting

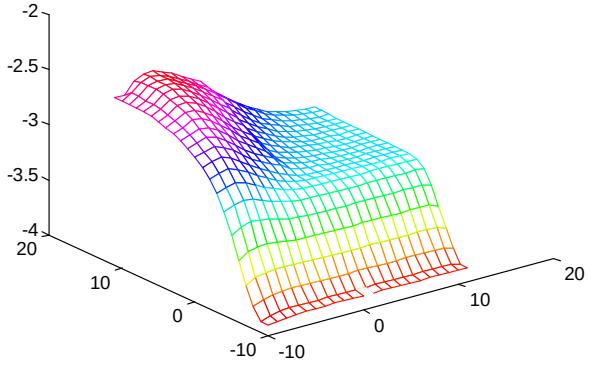


(4.12)

La figure 4.12 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

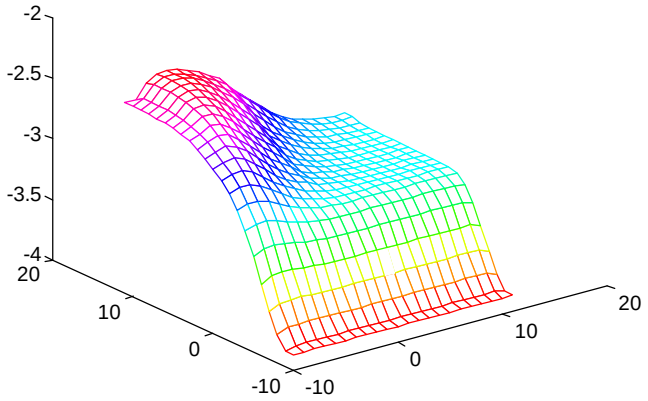
Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = -4$**,** $u_d = -1$**,** $a_g =$

$-1,5$**,** $a_d = 2$**,** $b_g = -2,5$ **et** $b_d = 1,75$



(4.13)

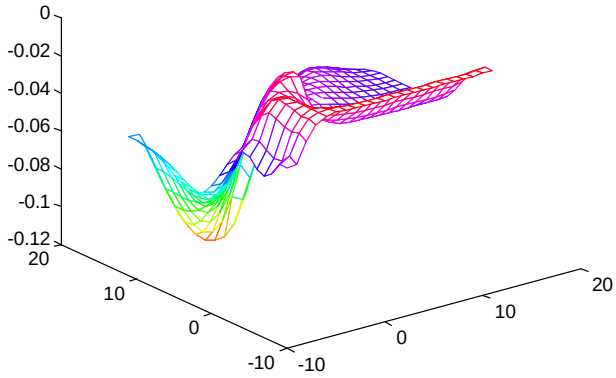
La figure 4.13 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.14)

La figure 4.14 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par

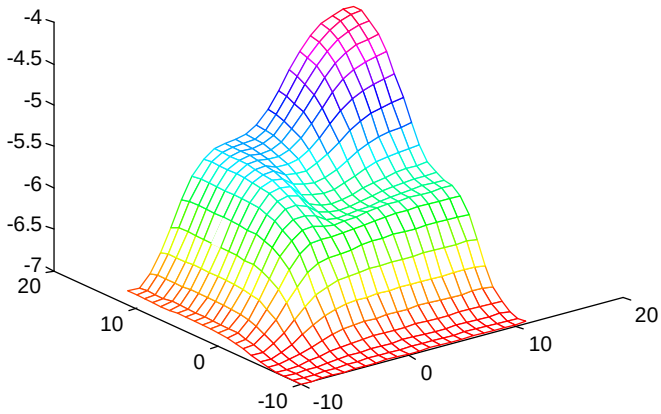
Splitting



(4.15)

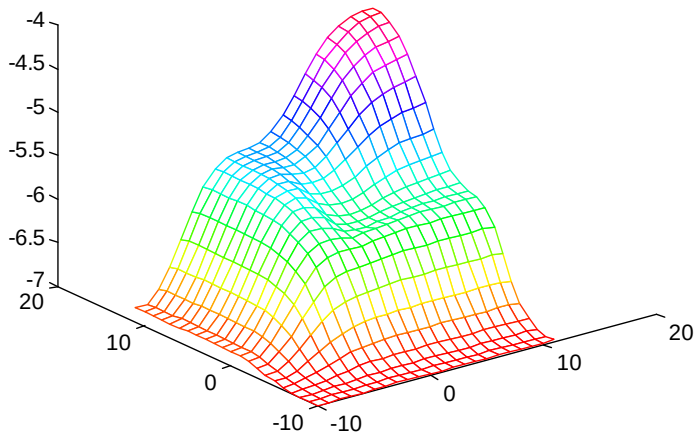
La figure 4.15 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = -7$**,** $u_d = -4$**,** $a_g = -0,65$**,** $a_d = 0,85$**,** $b_g = -0,95$ **et** $b_d = 0,75$



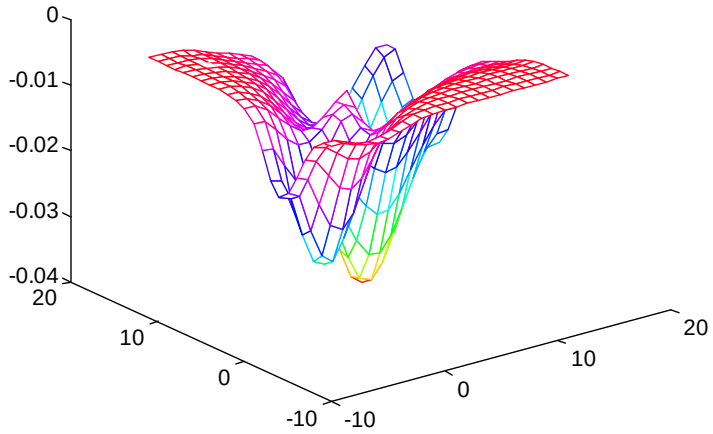
(4.16)

La figure 4.16 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.17)

La figure 4.17 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting

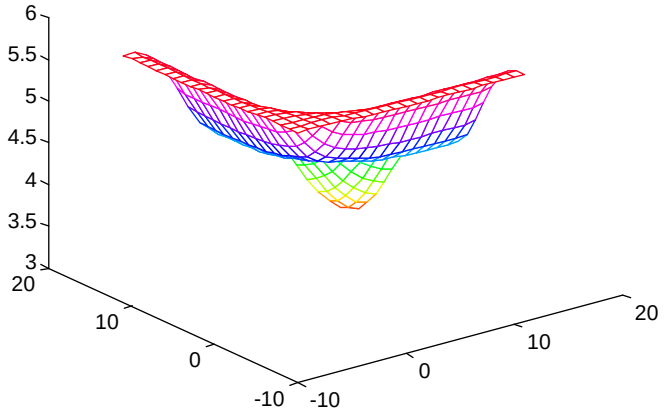


(4.18)

La figure 4.18 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

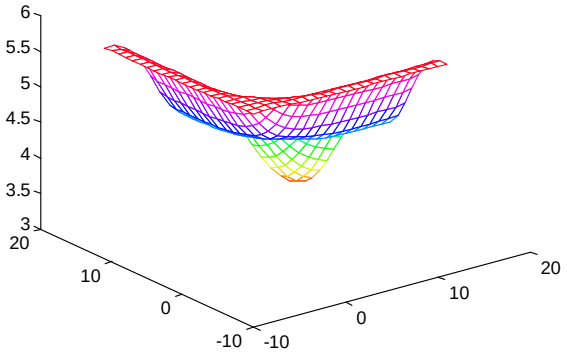
<u>$2^{\text{ème}}$cas) $u_g > u_d$</u>

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = 6$**,** $u_d = 3$**,** $a_g = -0,65$**,** $a_d = 0,95$**,** $b_g = -0,75$ **et** $b_d = 0,85$



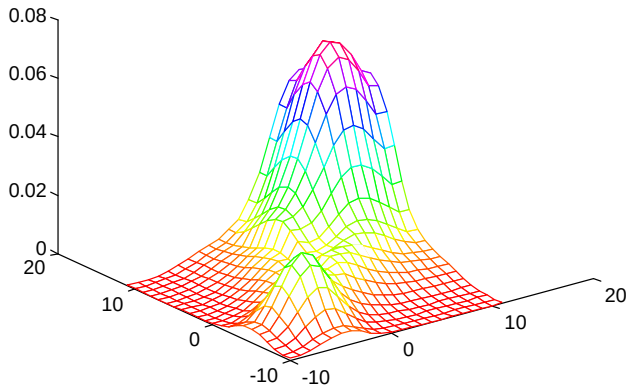
(4.19)

La figure 4.19 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.20)

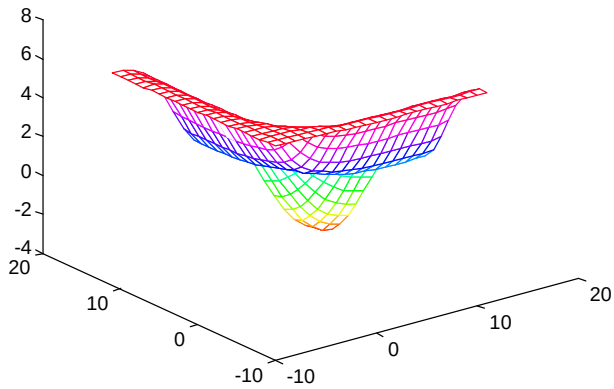
La figure 4.20 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.21)

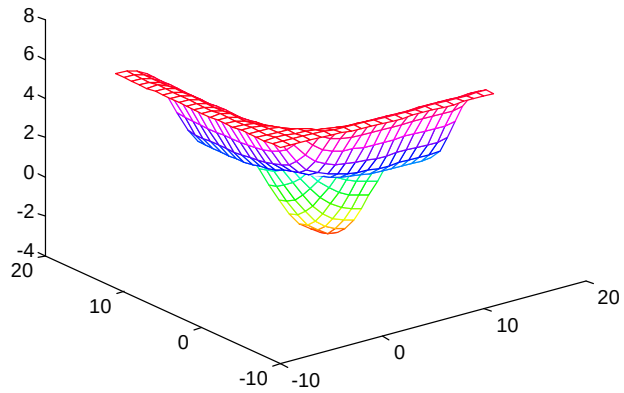
La figure 4.21 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = 7$**,** $u_d = -5$**,** $a_g = -0,75$**,** $a_d = 0,95$**,** $b_g = -0,65$ **et** $b_d = 0,85$



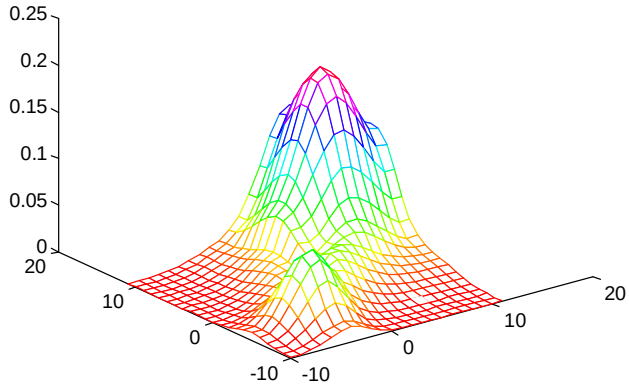
(4.22)

La figure 4.22 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.23)

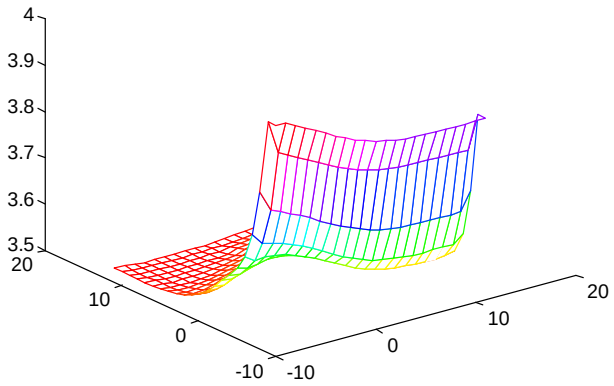
La figure 4.23 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.24)

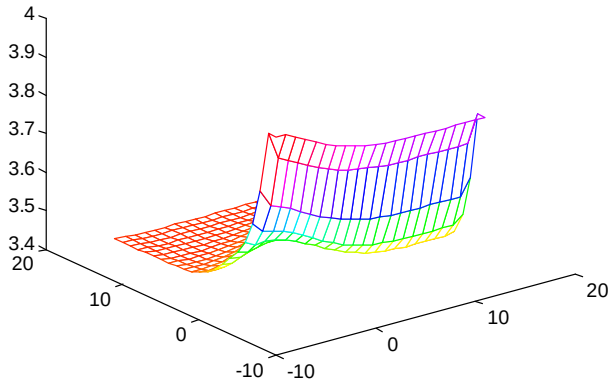
La figure 4.24 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = 5$**,** $u_d = 2$**,** $a_g = -2$**,** $a_d = 1,5$**,** $b_g = -3$ **et** $b_d = 2,5$



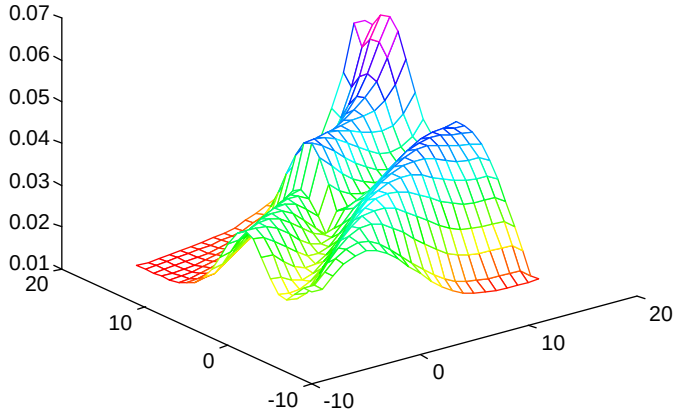
(4.25)

La figure 4.25 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.26)

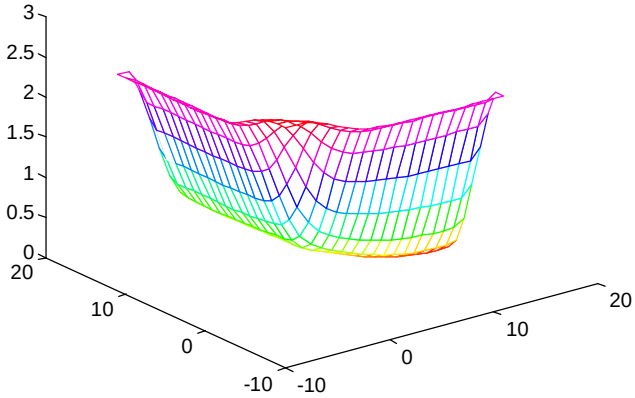
La figure 4.26 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.27)

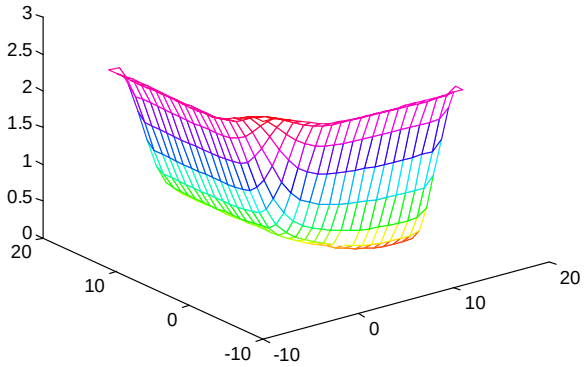
La figure 4.27 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = 3$**,** $u_d = -4$**,** $a_g = -1$**,** $a_d = 1,5$**,** $b_g = -1,5$ **et** $b_d = 2,5$



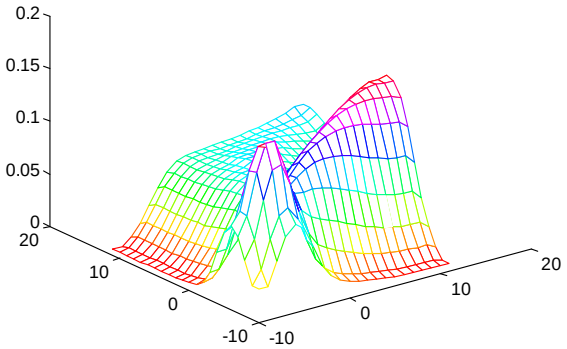
(4.28)

La figure 4.28 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.29)

La figure 4.29 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting

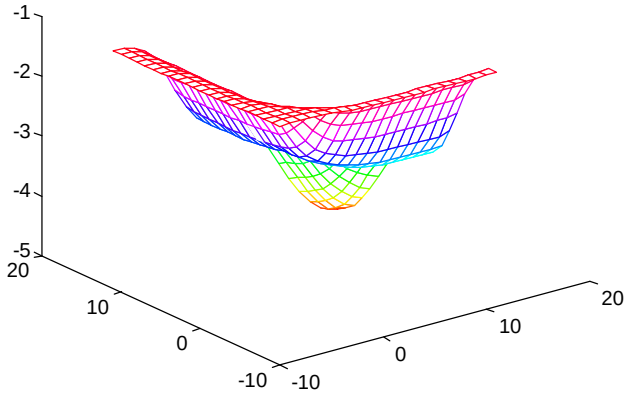


(4.30)

La figure 4.30 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

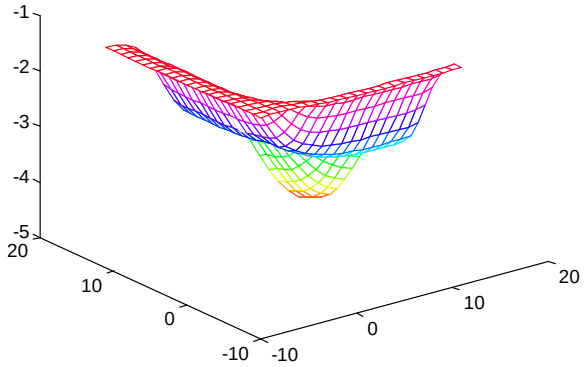
Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = -1$**,** $u_d = -5$**,** $a_g =$

$-0,8$**,** $a_d = 0,75$**,** $b_g = -0,65$ **et** $b_d = 0,9$



(4.31)

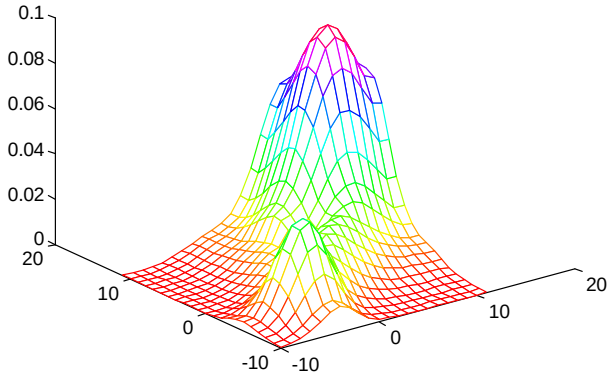
La figure 4.31 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.32)

La figure 4.32 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par

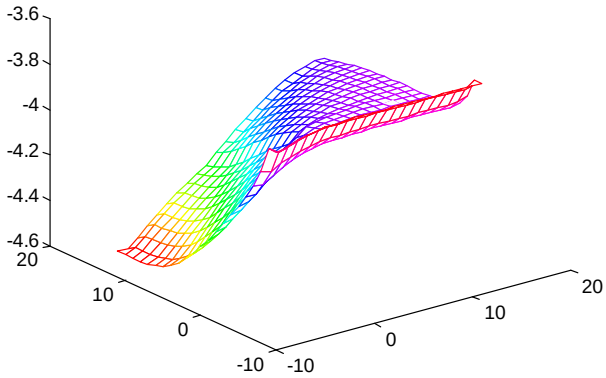
Splitting



(4.33)

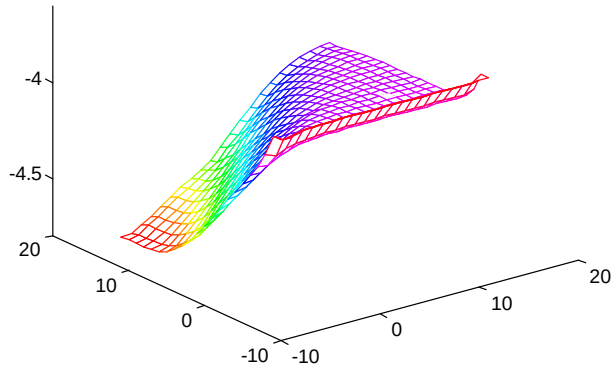
La figure 4.33 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Les tests qui suivent sont effectués pour les valeurs $u_g = -2$**,** $u_d = -7$**,** $a_g = -2,5$**,** $a_d = 3$**,** $b_g = -3,5$ **et** $b_d = 2,75$



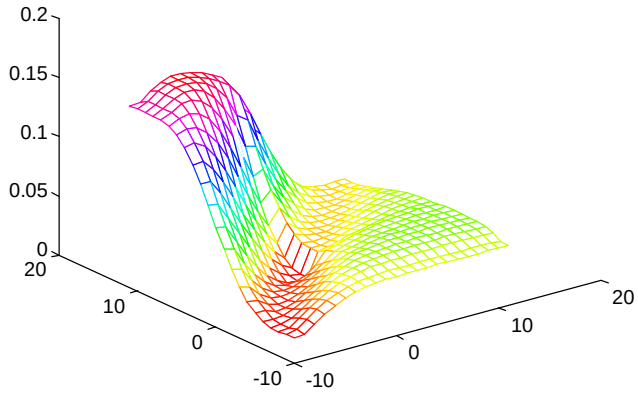
(4.34)

La figure 4.34 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.35)

La figure 4.35 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.36)

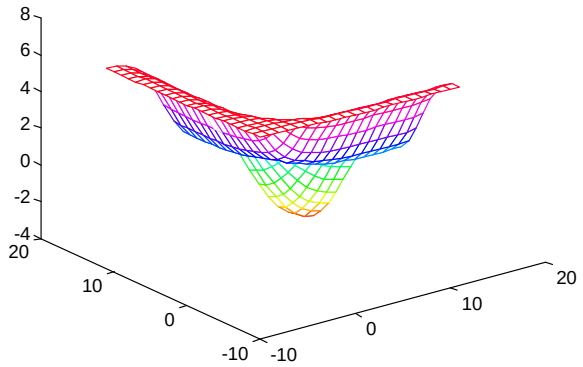
La figure 4.36 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Maintenant, on va effectuer les tests en faisant varier uniquement le pas afin de voir l'influence du maillage sur les tests.

On se place toujours dans **le cas** $a_g < 0$**,** $a_d > 0$**,** $b_g < 0$ **et** $b_d > 0$, les autres cas se testant de façon similaires.

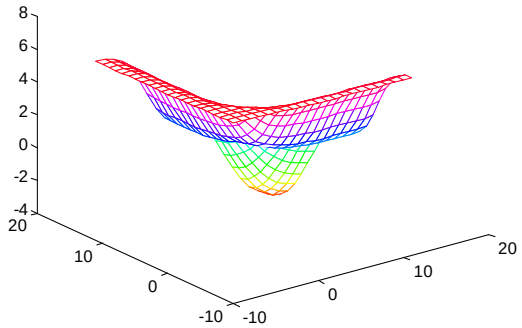
Les tests qui suivent sont tous effectués pour les valeurs $u_g = 7$**,** $u_d = -5$**,** $a_g = -0,75$**,** $a_d = 0,95$**,** $b_g = -0,65$ **et** $b_d = 0,85$, en faisant varier uniquement le pas afin de voir si le maillage a une influence sur les résultats obtenus.

$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}}$ $h = 0,15$



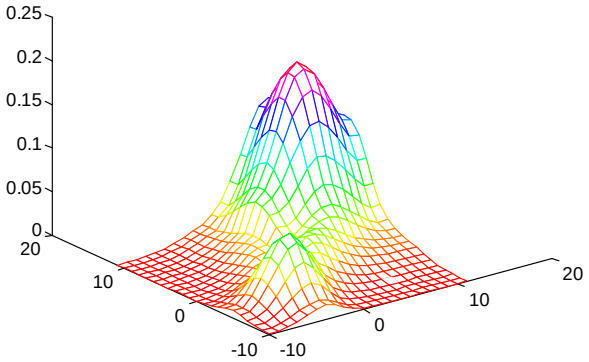
(4.37)

La figure 4.37 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.38)

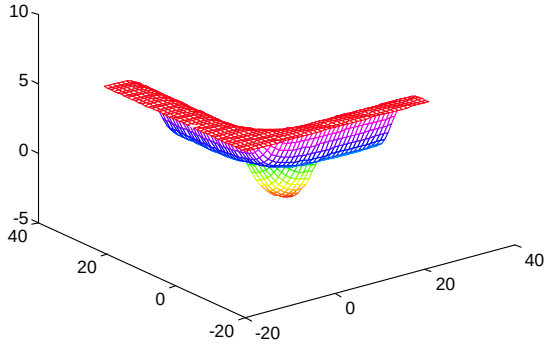
La figure 4.38 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.39)

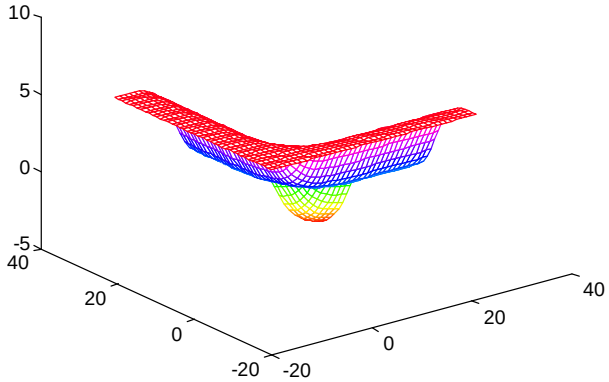
La figure 4.39 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> $h = 1,5/20 = 0,075$



(4.40)

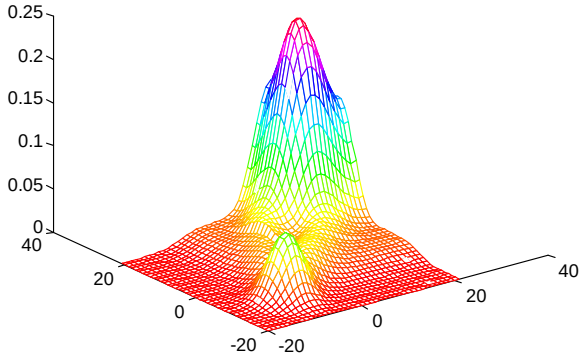
La figure 4.40 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.41)

La figure 4.41 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par

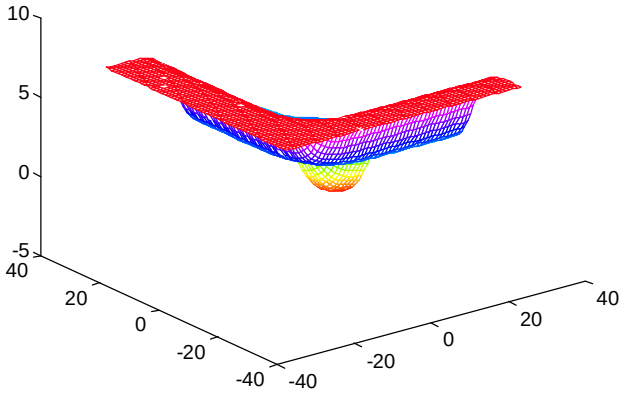
Splitting



(4.42)

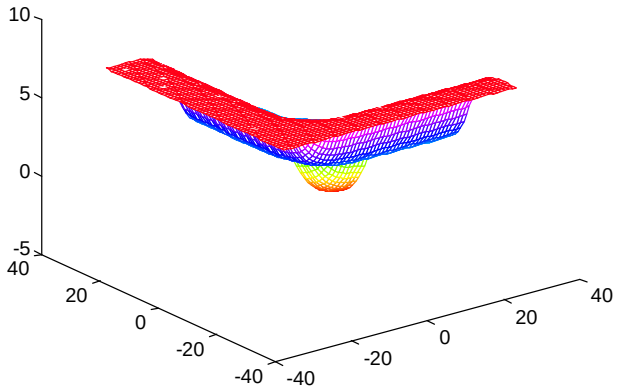
La figure 4.42 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

<u>3ème cas</u> $h = 1,5/30 = 0,05$



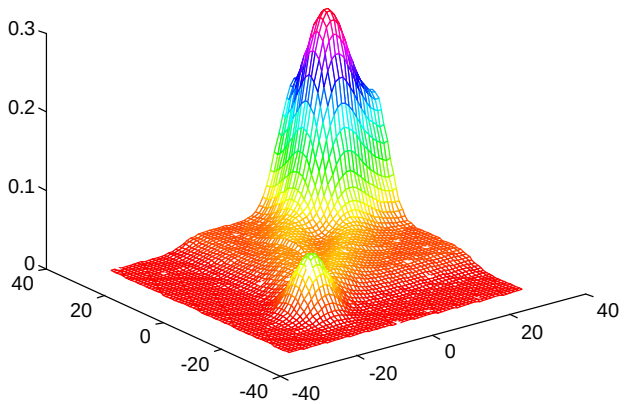
(4.43)

La figure 4.43 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.44)

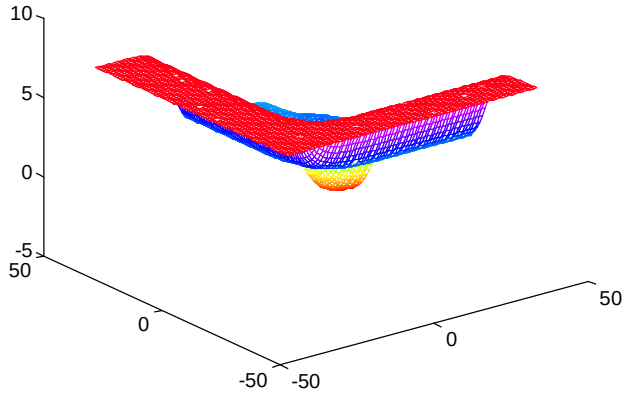
La figure 4.44 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.45)

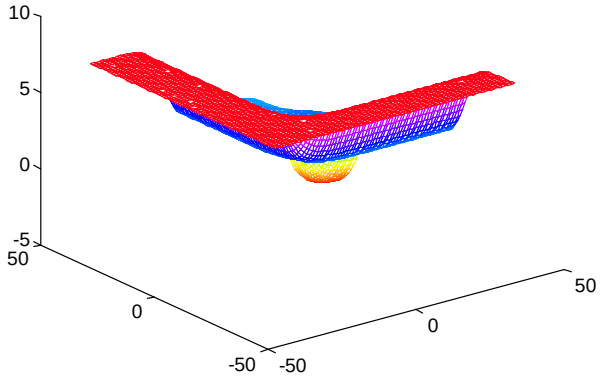
La figure 4.45 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

$\underline{4^{\text{ème}} \text{ cas}}$ $h = 1,5/40 = 0,0375$



(4.46)

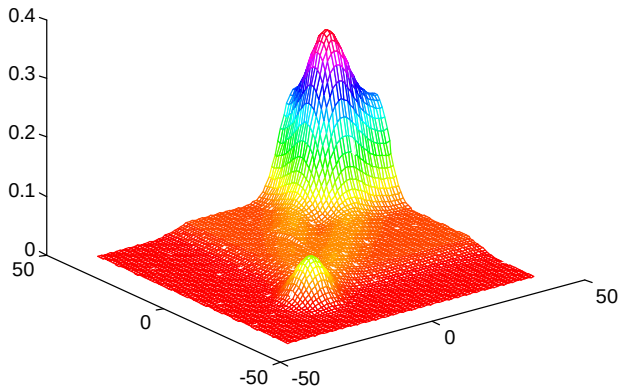
La figure 4.46 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.47)

La figure 4.47 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par

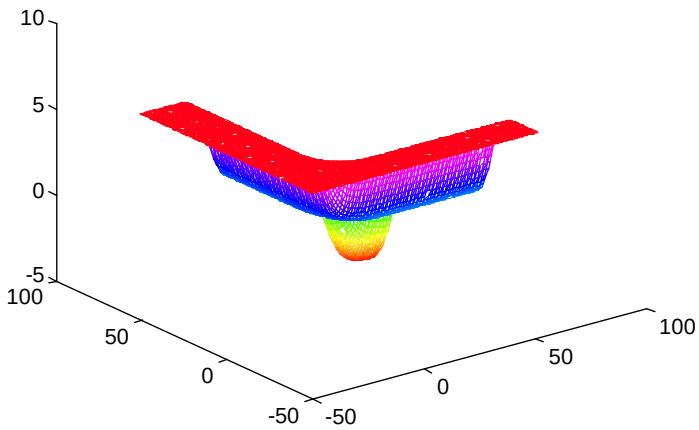
Splitting



(4.48)

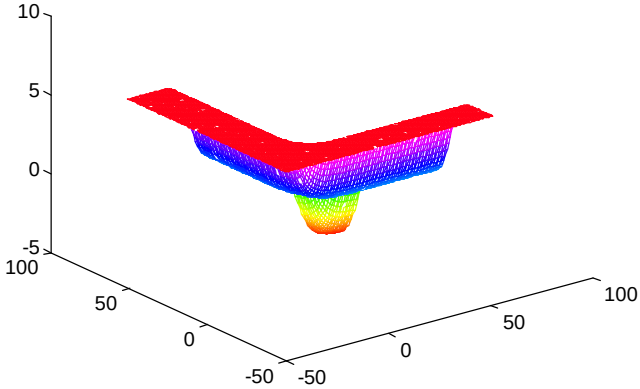
La figure 4.48 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

<u>$5^{\text{ème}}$ cas</u> $h = 1,5/50 = 0,03$



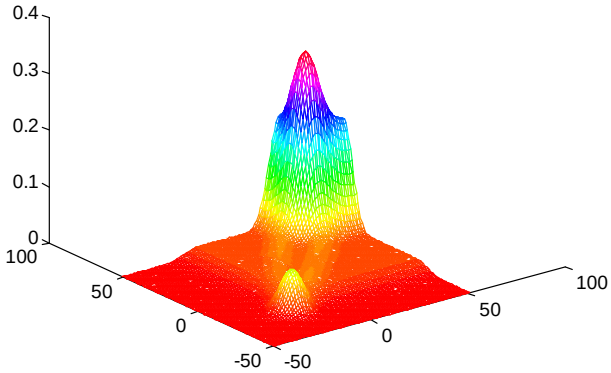
(4.49)

La figure 4.49 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.50)

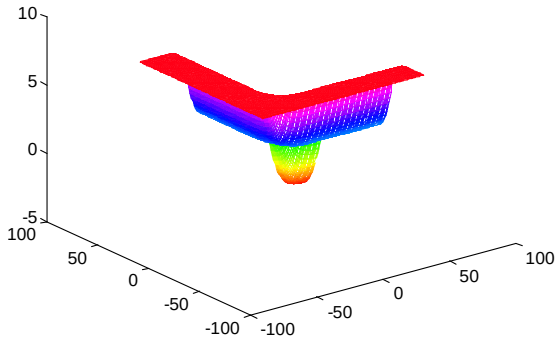
La figure 4.50 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.51)

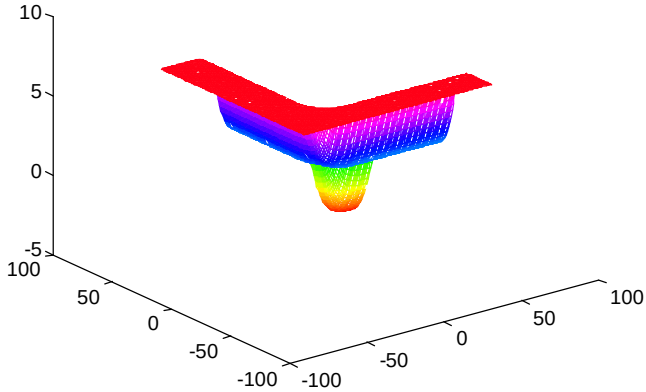
La figure 4.51 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

$\underline{6^{\text{ème}} \text{ cas}}$ $h = 1,5/60 = 0,025$



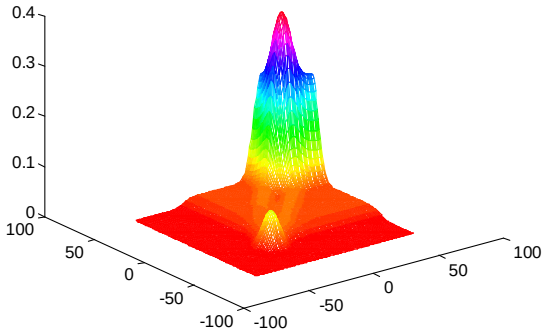
(4.52)

La figure 4.52 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.53)

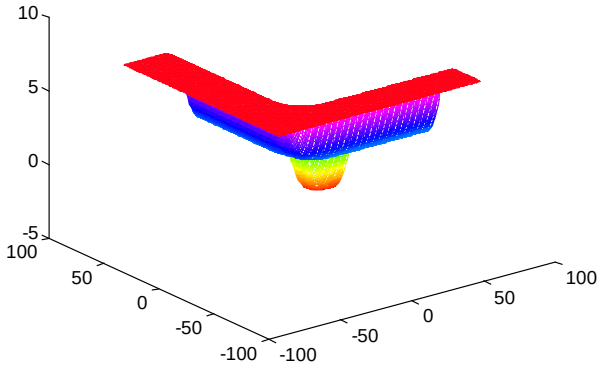
La figure 4.53 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.54)

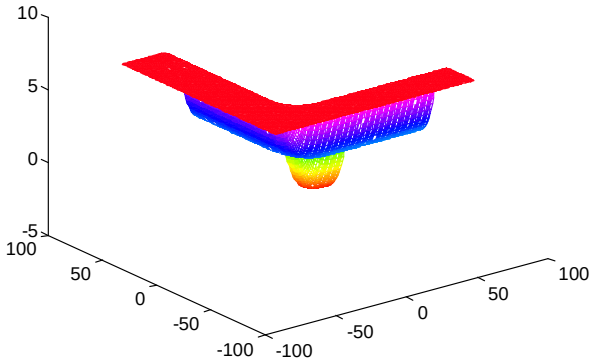
La figure 4.54 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

<u>$7^{\text{ème}}$ cas</u> $h = 1,5/70 \approx 0,02$



(4.55)

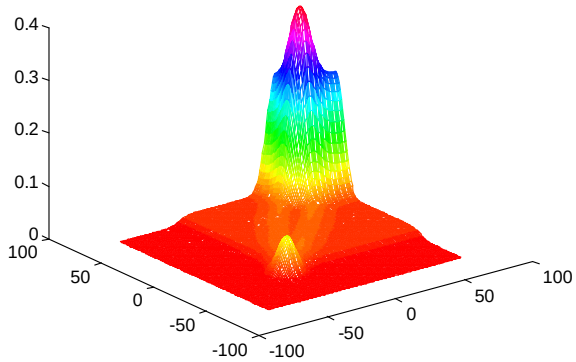
La figure 4.55 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.56)

La figure 4.56 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par

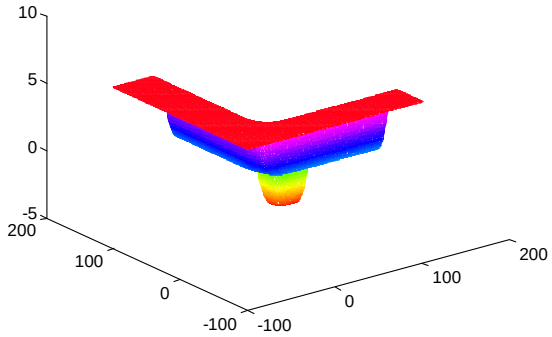
Splitting



(4.57)

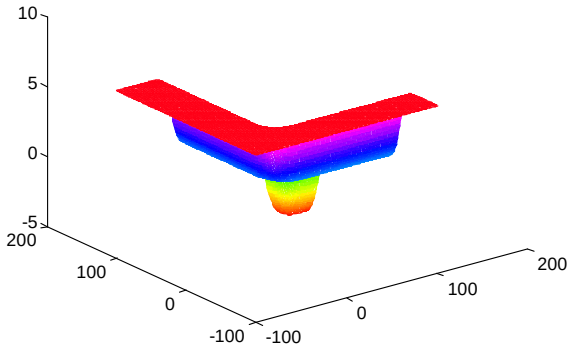
La figure 4.57 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

<u>$8^{\text{ème}}$ cas</u> $h = 1,5/100 = 0,015$



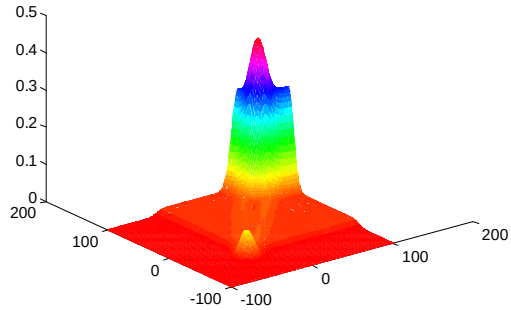
(4.58)

La figure 4.58 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.59)

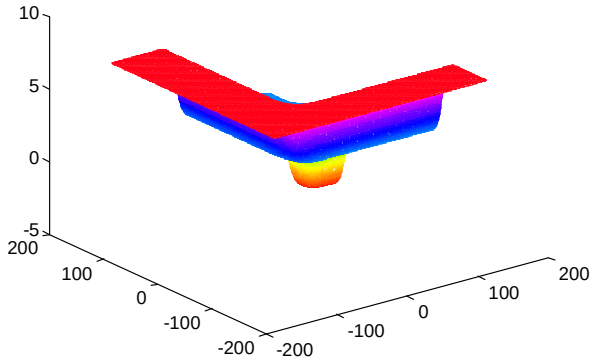
La figure 4.59 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.60)

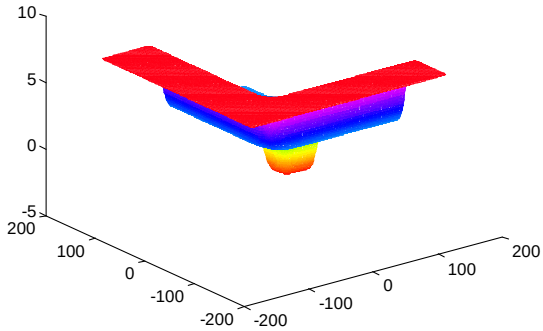
La figure 4.60 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

<u>$9^{\text{ème}}$ cas</u> $h = 1,5/150 = 0,01$



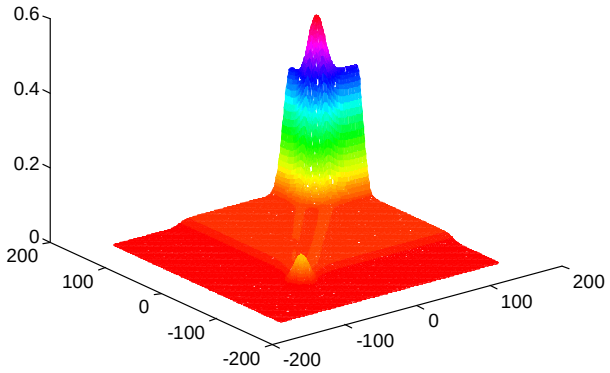
(4.61)

La figure 4.61 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(4.62)

La figure 4.62 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(4.63)

La figure 4.63 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Conclusion : Que l'on fasse varier les données initiales (u_g, u_d et les coefficients a_g, a_d, b_g et b_d) ou le pas h, les résultats numériques par les tests des schémas numériques 2D ainsi que ceux par Splitting s'accordent parfaitement comme en témoignent les figures 4.1 à 4.63.

Par conséquent, on en déduit que le choix du maillage n'altère en rien la concordance des résultats numériques obtenus par les tests des schémas numériques 2D ainsi que ceux par Splitting, comme en témoignent les figures 4.37 à 4.63, il semblerait même que lorsque le pas h diminue, l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting diminue comme en témoignent les figures 4.39, 4.42, 4.45, 4.48, 4.51, 4.54, 4.57, 4.60 et 4.63.

De plus, lorsque le pas h diminue, les formes arrondies des figures obtenues par les tests numériques des schémas numériques 2D, des schémas numériques par Splitting ainsi que de l'erreur entre ces deux schémas numériques deviennent moins arrondies, plus anguleuses, comme en témoignent les figures 4.37 à 4.63, ce qui laisse penser que lorsque le pas h diminue, il y a moins de diffusion numérique.

4.4 Interprétation des résultats et calcul de la complexité des deux méthodes

4.4.1 Interprétation

Lors de la résolution du problème de Riemann par la méthode 2D, l'écriture du solveur utilisé n'a pas été justifié de façon rigoureuse.

L'utilisation de la méthode par Splitting et surtout la comparaison avec la méthode 2D par les tests informatiques a pour but de valider ou au contraire de non valider le solveur utilisé pour la résolution du probléme de Riemann par la méthode 2D.

Nous allons considérer que les résultats sont concluants si et seulement si les figures obtenues par les tests des schémas numériques 2D ainsi que ceux par Splitting sont suffisament voisines.

Les croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting et les schémas numériques obtenus par la méthode 2D corroborent cette propriété, l'erreur diminuant lorsque le pas h diminue.

La comparaison par les tests entre la méthode 2D et la méthode par Splitting s'avère concluante.

Nous pouvons donc conclure que les schémas numériques obtenus par la méthode 2D sont aussi fiables que ceux obtenus par la méthode par Splitting, ce qui de plus, valide le solveur utilisé pour la résolution du probléme de Riemann par la méthode 2D.

La méthode 2D donne donc des résultats numériques fiables, et elle bénificie d'un cadre de résolution rigoureux, alors que la méthode par Splitting est basé sur le fait que si une somme de deux termes est nulle, alors chaque terme peut être considéré comme nulle (on scinde notre équation en deux sous-équations), ce qui d'un point de vue théorique est préjudiciable.

Par ailleurs, les schémas numériques obtenus par la méthode 2D sont plus simples dans leur écriture, ils n'ont pas de termes en r d'ordre deux comme ceux de la méthode par Splitting, de ce fait ils utilisent moins d'opérations élémentaires (addition et multiplication) que ceux obtenus par la méthode par Splitting, donc ils sont moins couteux.

La méthode 2D est donc moins coûteuse que la méthode par Splitting en temps d'exécution, donc plus rapide.

De plus, on verra dans ce même chapitre que les schémas numériques obtenus par la

méthode 2D sont stables pour la norme L^∞, alors que les schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting ne sont pas stables pour la norme L^∞.

4.4.2 Analyse de la complexité de la méthode par Splitting et de la méthode 2D.

La complexité d'un algorithme se mesure essentiellement en calculant le nombre d'opérations élémentaires utilisées pour traiter une donnée de taille n.

Les opérations élémentaires considérées sont :

1) Les **Tests** (les instructions de contrôle, les comparaisons....),

2) Les **affectations** (les initialisations....),

3) Les **opérations arithmétiques (additions, multiplications)** (calculs de sommes, de produits, incrémentations,...).

Le calcul de la complexité se fait suivant les règles suivantes :

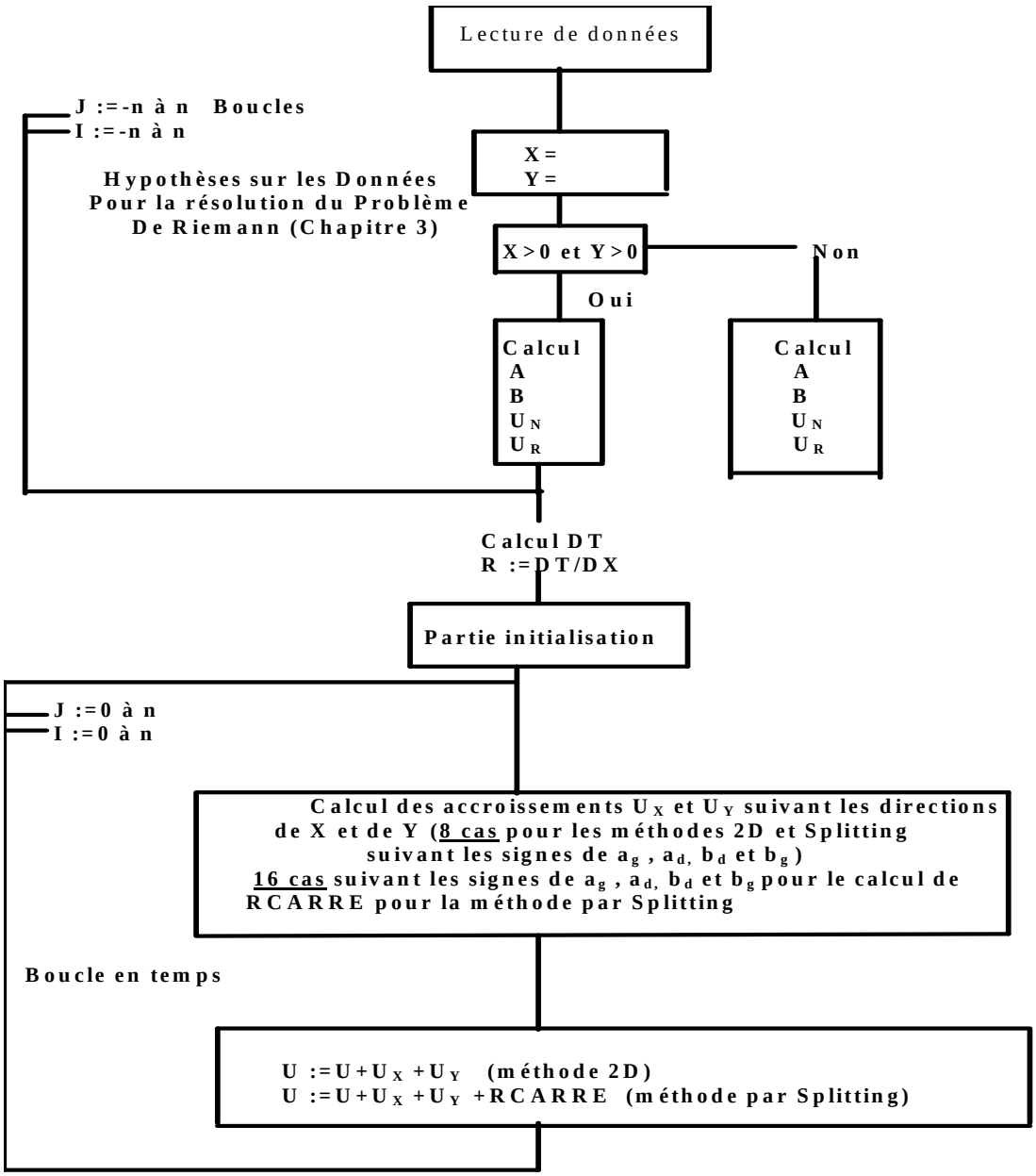
1) Le temps d'exécution (t.e) des opérations élémentaires nommées ci-dessus est considéré comme constant c.

2) Le temps d'exécution d'une séquence d'instructions est la somme des t.e des instructions qui la composent.

3) le temps d'exécution d'une boucle est égal à la somme du coût du test, du coût du corps de la boucle et du coût du test de sortie de boucle.

Nous allons présenter l'organigramme de la méthode 2D et de la méthode par Splitting afin de calculer la complexité de ces deux méthodes.

ORGANIGRAMME



On appelle $T_{2D}(n)$ la complexité de la méthode 2D et $T_{SP}(n)$ la complexité de la méthode par Splitting. On introduit les coûts suivants :

c_1 :coût d'un test, c_2 : coût d'une affectation, c_3 : coût d'une addition, c_4 : coût d'une multiplication, c_5 : coût d'une incrémentation.

On a alors

$$T_{2D}(n) = 23c_2 + \mathbf{C}n^2 \qquad \text{où } \mathbf{C} = 26c_1 + 49c_2 + 10c_3 + 28c_4 + 2c_5$$
$$T_{SP}(n) = 23c_2 + \mathbf{C}'n^2 \qquad \text{où } \mathbf{C}' = 42c_1 + 65c_2 + 59c_3 + 204c_4 + 3c_5$$

Ces deux méthodes ont une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$.

On remarque que pour des petites valeurs de n, comme $\mathbf{C} << \mathbf{C}'$, la méthode 2D est plus efficace que la méthode par Splitting, car nettement moins coûteuse.

4.5 Stabilité des schémas numériques 2D

Nous allons énoncer un résultat de stabilité des schémas numériques obtenus par la méthode 2D. Tout d'abord, nous allons préciser la condition de Courant -Fréderich-Levy dite condition CFL : vu que les fonctions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ et $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$, on a :

$$\exists r > 0 \diagup \sup_{(i,i')\in\mathbb{Z}^2} \left|a_{i,i'}^n\right| < \frac{1}{2r} et \sup_{(i,i')\in\mathbb{Z}^2} \left|b_{i,i'}^n\right| < \frac{1}{2r}.$$

Proposition 56 *On suppose que les fonctions* $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ *et* $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ *appartiennent à* $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$ *et que la fonction* $\{\ (x,y) \to u_0(x,y)\} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *alors le schéma numérique 2D est stable pour la norme* L^∞*, c'est-à-dire :*

$$\forall (i,i') \in \mathbb{Z}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{i,i'}^n\right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} ..$$

Nous ne démontrons pas ce résultat ici, car une proposition similaire sera établie au chapitre 5 dans le cadre de la stabilité des schémas numériques 2D pour le cas non linéaire.

Chapitre 5

Schémas numériques de type Godunov et tests numériques dans le cas non linéaire

On cherche à construire des schémas numériques de type Godunov associés à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial f(u(x,y,t))}{\partial x} + b(x,y,t)\frac{\partial g(u(x,y,t))}{\partial y} \approx 0 \qquad (2)$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$, où f et g sont monotones et appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R})$, avec comme condition initiale et comme coefficients :

$$\begin{cases} u_0(x,y) = u_g + \Delta u L(x,y) & \Delta u = u_d - u_g \\ a(x,y,t) = a_g + \Delta a Y(x,y) & \Delta a = a_d - a_g \\ b(x,y,t) = b_g + \Delta b Z(x,y) & \Delta b = b_d - b_g \end{cases}$$

Les $a_d, a_g, u_d, u_g, b_d, b_g$ sont des constantes réelles arbitraires, les L, Y et Z des fonctions généralisées définies comme suit

$$L(x,y) = (L_1 \otimes L_2)(x,y) \ ; \quad Y(x,y) = (Y_1 \otimes Y_2)(x,y) \ ; \quad Z(x,y) = (Z_1 \otimes Z_2)(x,y)$$

où $Y_1, Y_2, L_1, L_2, Z_1, Z_2$ sont des fonctions généralisées de Heaviside usuelles de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

Par analogie au cas linéaire, nous cherchons des approximations de la solutions u :

- de type produit tensoriel de fonctions de Heaviside présentant, à t fixé, une discontinuité selon $x = c_1 t$ et une selon $y = c_2 t$ dans le plan des (x,y) (dites solution à une discontinuité, par analogie avec le cas unidimensionnel),

– de type somme de deux produits tensoriels de fonctions Heaviside présentant, à t fixé, dans le plan des (x, y) d'une part une discontinuité selon $x = c_1 t$ et une selon $x = c_1' t$ et d'autre part une selon $y = c_2 t$ et une selon $x = c_2' t$ (dites solution à deux discontinuités, par analogie avec le cas unidimensionnel).

Dans la recherche de ces solutions, nous écrirons, chaque fois que nécessaire, $f(u)$ et $g(u)$ sous une forme analogue à celle de u.

Ces choix de forme d'approximations sont justifiés par la construction des schémas numériques dans ce même chapitre. Comme dans le cas linéaire, ces approximations dépendent du signe des vitesses de propagation suivant les axes des x et des y, ce qui nous amène à distinguer les cas suivants.

a) Sous l'hypothèse $a_d \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} > 0$ et $b_d \frac{g(u_d)-g(u_g)}{u_d-u_g} > 0$, l'approximation (au sens de l'association) de la solution est de la forme :

$$u(x, y, t) = u_g + (u_d - u_g) H(x - a_d \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t, y - b_d \frac{g(u_d) - g(u_g)}{u_d - u_g} t)$$

dans $\mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}^2 \times]0 + \infty[\right)$.

Cette forme est utilisée pour la construction du schéma numérique (<u>cas 4</u>) décrit dans ce même chapitre.

b) Sous l'hypothèse $a_g \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} < 0$ et $b_g \frac{g(u_d)-g(u_g)}{u_d-u_g} < 0$, l'approximation (au sens de l'association) de la solution est de la forme :

$$u(x, y, t) = u_g + (u_d - u_g) H(x - a_g \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t, y - b_g \frac{g(u_d) - g(u_g)}{u_d - u_g} t)$$

dans $\mathcal{G}_S\left(\mathbb{R}^2 \times]0 + \infty[\right)$.

Cette forme est utilisée pour le <u>cas 5</u> dans la construction du schéma numérique.

c) Pour $b_g \frac{g(u_d)-g(u_g)}{u_d-u_g} < 0$, l'approximation (au sens de l'association) de la solution est de la forme :

$$u(x, y, t) = u_g + (u_d - u_g) H(x - a_d \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t, y - b_g \frac{g(u_d) - g(u_g)}{u_d - u_g} t)$$

dans $\mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}_*^+)^2 \times]0 + \infty[\right)$ et :

$$u(x, y, t) = u_g + (u_d - u_g) H(x - a_g \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t, y - b_g \frac{g(u_d) - g(u_g)}{u_d - u_g} t)$$

dans $\mathcal{G}_S\left((\mathbb{R}^2 \diagdown (\mathbb{R}^+)^2) \times]0 + \infty[\right)$.

Cette forme est utilisée pour la construction du schéma numérique (cas 12,13).

d) Pour $a_g \frac{f(\lambda)-f(u_g)}{\lambda-u_g} < 0$, $b_g \frac{g(\lambda)-g(u_g)}{\lambda-u_g} < 0$, $a_d \frac{f(u_d)-f(\lambda)}{u_d-\lambda} > 0$ et $b_d \frac{g(u_d)-g(\lambda)}{u_d-\lambda} > 0$, l'approximation (au sens de l'association) de la solution est de la forme

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = u_g + (\lambda - u_g)H(x - a_g \frac{f(\lambda)-f(u_g)}{\lambda - u_g} t, y - b_g \frac{g(\lambda)-g(u_g)}{\lambda - u_g} t) \\ + (u_d - \lambda)K(x - a_d \frac{f(u_d)-f(\lambda)}{u_d - \lambda} t, y - b_d \frac{g(u_d)-g(\lambda)}{u_d - \lambda} t) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times]0;+\infty[)$ où $\lambda = u_d - A\Delta u$, $A \in]0;1[$.

Cette forme est utilisée pour la construction du schéma numérique (cas 1,8,9,16).

e) Pour $a_g \frac{f(\lambda)-f(u_g)}{\lambda-u_g} < 0$, $a_d \frac{f(u_d)-f(\lambda)}{u_d-\lambda} > 0$ et $b_d \frac{g(u_d)-g(\lambda)}{u_d-\lambda} > 0$, l'approximation (au sens de l'association) de la solution est de la forme :

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = u_g + (\lambda - u_g)H(x - a_g \frac{f(\lambda)-f(u_g)}{\lambda - u_g} t, y - b_d \frac{g(u_d)-g(\lambda)}{u_d - \lambda} t) \\ + (u_d - \lambda)K(x - a_d \frac{f(u_d)-f(\lambda)}{u_d - \lambda} t, y - b_d \frac{g(u_d)-g(\lambda)}{u_d - \lambda} t) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times]0;+\infty[)$ où $\lambda = u_d - A\Delta u$, $A \in]0;1[$.

Cette forme est utilisée pour la construction du schéma numérique (cas 3,11,6,10,7,15,2,14).

Ces formes, pour les approximations de solutions particulières se justifient (notamment en raison des hypothèses particulières faites pour les fonctions a et de b) de manière très proche aux propositions analogues présentées dans le cas linéaire 3.

5.1 Construction des schémas numériques de type Godunov

Ces schémas sont basés sur les approximations présentées dans les cas a) à e) exposés ci-dessus.

5.1.1 Cadre et notations

Soit $h > 0$ et $\Delta t = rh$ avec $r > 0$ à fixer. On discrétise l'axe des X, Y en posant :

$$I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}\right[\text{ où } x_i = ih \ \ (i \in \mathbb{Z}) \ , \ \ I_{i'} = \left[y_{i'-\frac{1}{2}}; y_{i'+\frac{1}{2}}\right[\text{ où } y_{i'} = i'h \ \ (i' \in \mathbb{Z})$$

et l'axe des t en posant :

$$J_n = [t_n; t_{n+1}[\text{ où } t_n = n\Delta t \quad (n \in \mathbb{N}) \, .$$

On cherche une approximation $u^n_{i,i'}$ de la solution du problème (2) au point $(x_i, y_{i'})$ à l'instant t_n.

Notons $u_{h,h}$ la fonction pas qui est égale à $u^n_{i,i'}$ sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$a^n_{i,i'} = \frac{1}{rh^3} \int_{I_i} \int_{I_{i'}} \int_{J_n} a(x, y, t) dxdydt \ , \ b^n_{i,i'} = \frac{1}{rh^3} \int_{I_i} \int_{I_{i'}} \int_{J_n} b(x, y, t) dxdydt.$$

Notons $a_{h,h}$ (resp. $b_{h,h}$) la fonction pas qui est égale à $a^n_{i,i'}$ (resp. $b^n_{i,i'}$) sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour construire la suite $u^n_{i,i'}$, on procède comme suit. Soit :

$$u^0_{i,i'} = \frac{1}{h^2} \int_{I_i} \int_{I_{i'}} u_0(x, y) dxdy.$$

Supposons connu $u^n_{i,i'}$, pour tout $(i, i') \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sur le parallélépipède $I_i \times I_{i'} \times J_n$, on résout le problème de Riemann (au sens de la recherche de solutions de la forme présentées dans les cas a) à e) ci-dessus) avec les données :

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}(x, y, t) &= a^n_{i-1,i'} + (a^n_{i,i'} - a^n_{i-1,i'}) Y_1(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= a^n_{i,i'-1} + (a^n_{i,i'} - a^n_{i,i'-1}) Y_2(y - y_{i'-\frac{1}{2}}) \\
&= a^n_{i,i'} + (a^n_{i+1,i'} - a^n_{i,i'}) Y_3(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\
&= a^n_{i,i'} + (a^n_{i,i'+1} - a^n_{i,i'}) Y_4(y - y_{i'+\frac{1}{2}}) \, ;
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}(x, y, t) &= b^n_{i-1,i'} + (b^n_{i,i'} - b^n_{i-1,i'}) Z_1(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= b^n_{i,i'-1} + (b^n_{i,i'} - b^n_{i,i'-1}) Z_2(y - y_{i'-\frac{1}{2}}) \\
&= b^n_{i,i'} + (b^n_{i+1,i'} - b^n_{i,i'}) Z_3(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\
&= b^n_{i,i'} + (b^n_{i,i'+1} - b^n_{i,i'}) Z_4(y - y_{i'+\frac{1}{2}}) \, ;
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^n(x, y) &= u^n_{i-1,i'} + (u^n_{i,i'} - u^n_{i-1,i'}) L_1(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= u^n_{i,i'-1} + (u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'-1}) L_2(y - y_{i'-\frac{1}{2}}) \\
&= u^n_{i,i'} + (u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) L_3(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\
&= u^n_{i,i'} + (u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}) L_4(y - y_{i'+\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

où Y_i, Z_i et L_i $(1 \leq i \leq 4)$ sont des fonctions généralisées de Heaviside usuelles.

Ainsi, on résout (au sens de la recherche de solutions sous la forme présentées dans les cas a) à e) ci-dessus) le problème

$$u_t + \widetilde{a}(f(u))_x + \widetilde{b}(g(u))_y \approx 0 \qquad u(.,.,t_n) = \widetilde{u}^n$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$. On pose, enfin

$$u_{i,i'}^{n+1} = \frac{1}{h^2} \int_{I_i} \int_{I_{i'}} u(x, y, t_{n+1}) dx dy.$$

Nous avons 16 cas possibles selon les signes de $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n)$, $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)$, $a_{i+1,i'}^n f\prime(u_{i+1,i'}^n)$, $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)$, $b_{i,i'-1}^n g\prime(u_{i,i'-1}^n)$ et $b_{i,i'+1}^n g\prime(u_{i,i'+1}^n)$. La construction des schémas numériques 2D se fait comme dans le cas linéaire, par projection de l'approximation de la solution faible généralisée (au sens de l'association) décrite dans les cas a) à e), sur la surface parallélépipédique $I_i \times I_{i'} \times \{t_{n+1}\}$.

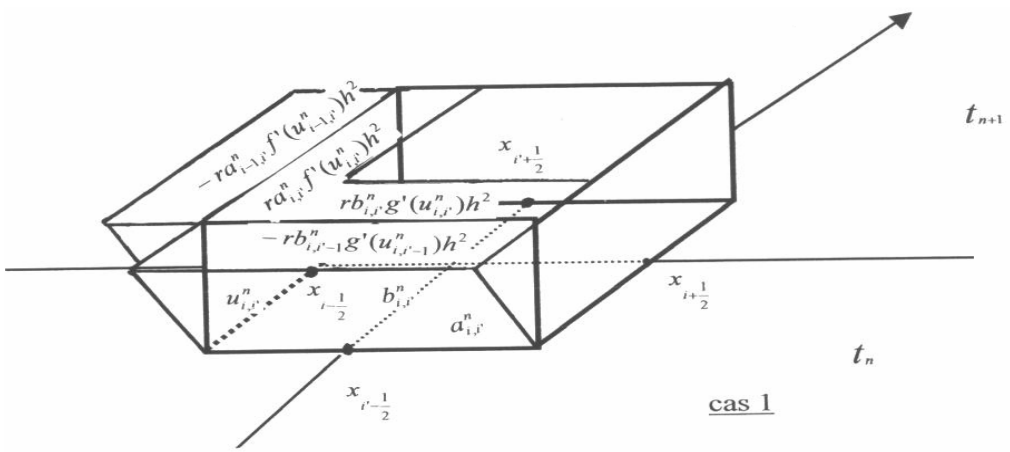
5.1.2 Schémas numériques 2D

Cas 1 : $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \leq 0$, $b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \leq 0$.– Par projection, on obtient :

$$u_{i,i'}^{n+1} = (1 - ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) - rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n))u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)\lambda_{i-\frac{1}{2},i'}^n + rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)\lambda_{i,i'-\frac{1}{2}}^n$$

avec $\lambda_{i-\frac{1}{2},i'}^n = A_{i,i'}^n u_{i-1,i'}^n + (1 - A_{i,i'}^n)u_{i,i'}^n$, $\lambda_{i,i'-\frac{1}{2}}^n = A_{i,i'}^n u_{i,i'-1}^n + (1 - A_{i,i'}^n)u_{i,i'}^n$ où $A_{i,i'}^n \in]0;1[$, soit donc :

$$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)A_{i,i'}^n(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)A_{i,i'}^n(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n).$$

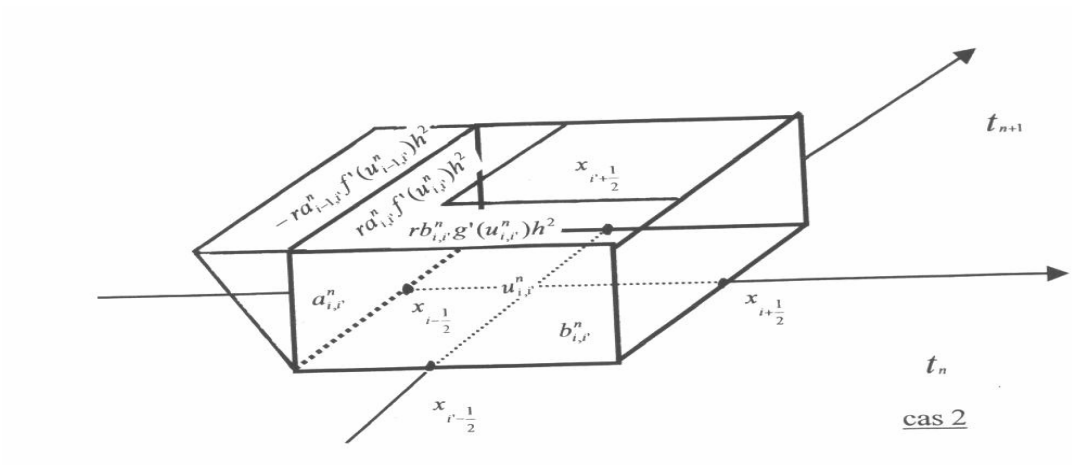


Cas 2 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'-1}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'} u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$. Donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$

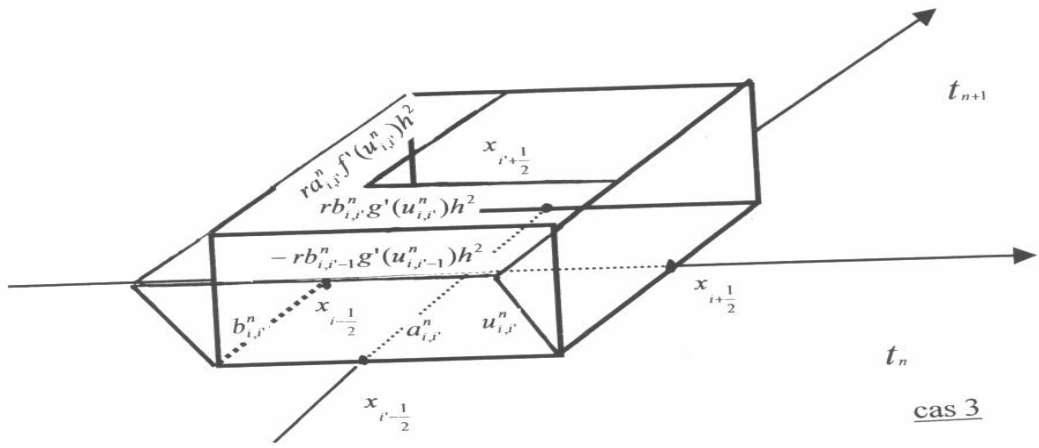


Cas 3 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})u^n_{i-1,i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

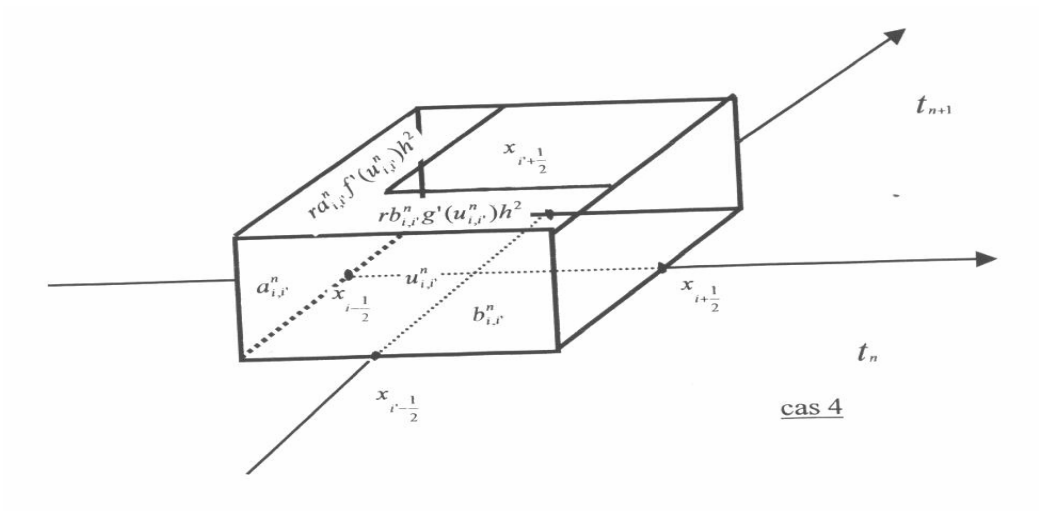
avec $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'} u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$. D'où :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$



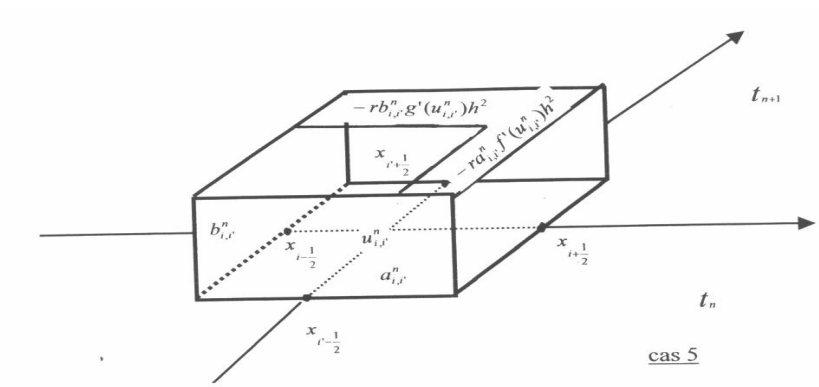
Cas 4 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} &= (1 - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})u^n_{i-1,i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'-1} \\ &= u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}). \end{aligned}$$



Cas 5 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} &= (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})u^n_{i+1,i'} - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'+1} \\ &= u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$

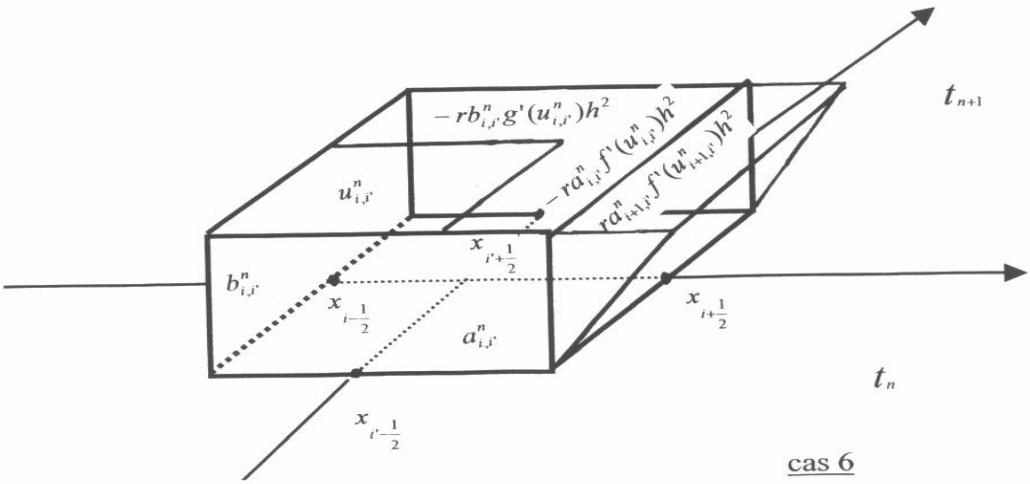


Cas 6 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'+1}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$ où $A^n_{i+1,i'} \in]0;1[$. Donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$

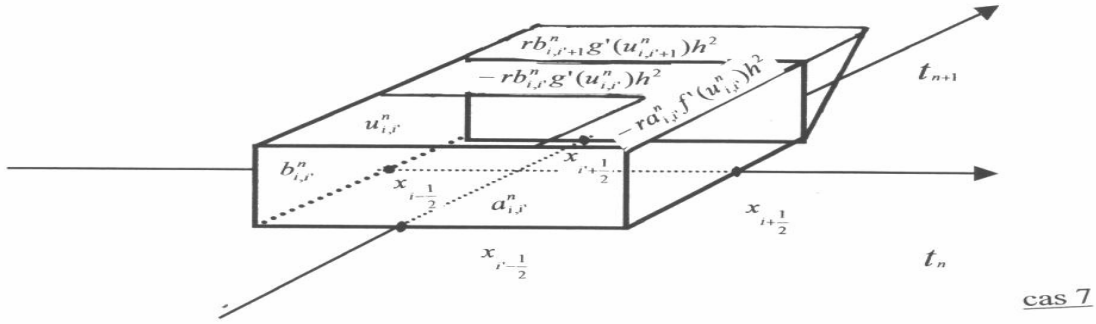


Cas 7 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})u^n_{i+1,i'} - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$. Donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}).$$

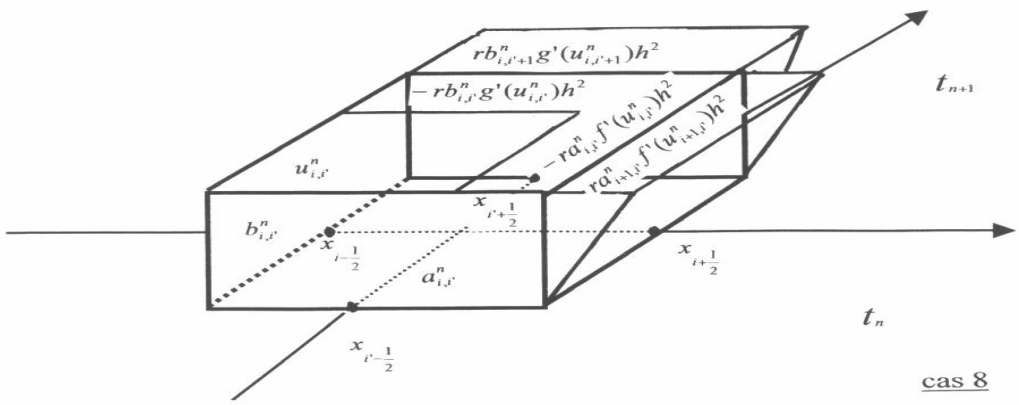


Cas 8 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$, $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i+1,i'}, A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$. Donc :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ &+ ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}). \end{aligned}$$

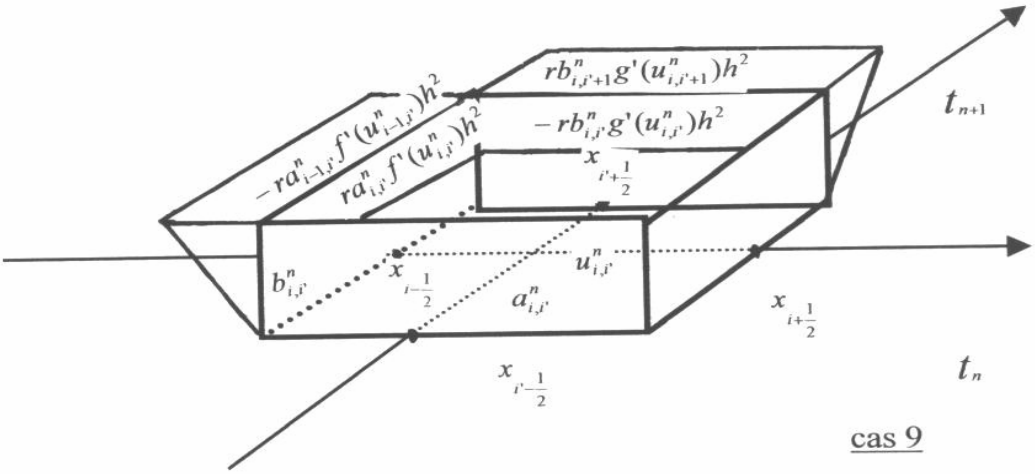


Cas 9 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'} u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$, $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i,i'}, A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$. Donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$

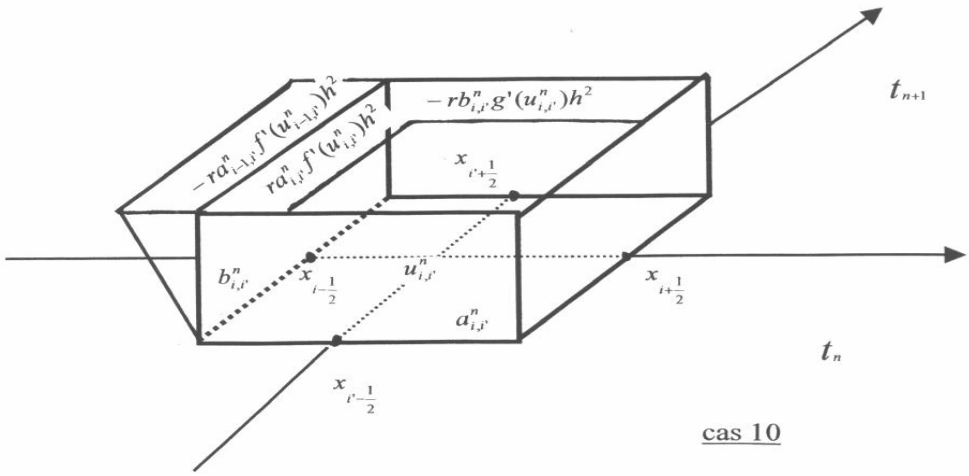


Cas 10 : $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i-1,i'}f'(u^n_{i-1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} - rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'+1}$$

avec $\lambda^n_{i-\frac{1}{2},i'} = A^n_{i,i'}u^n_{i-1,i'} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$. Donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$

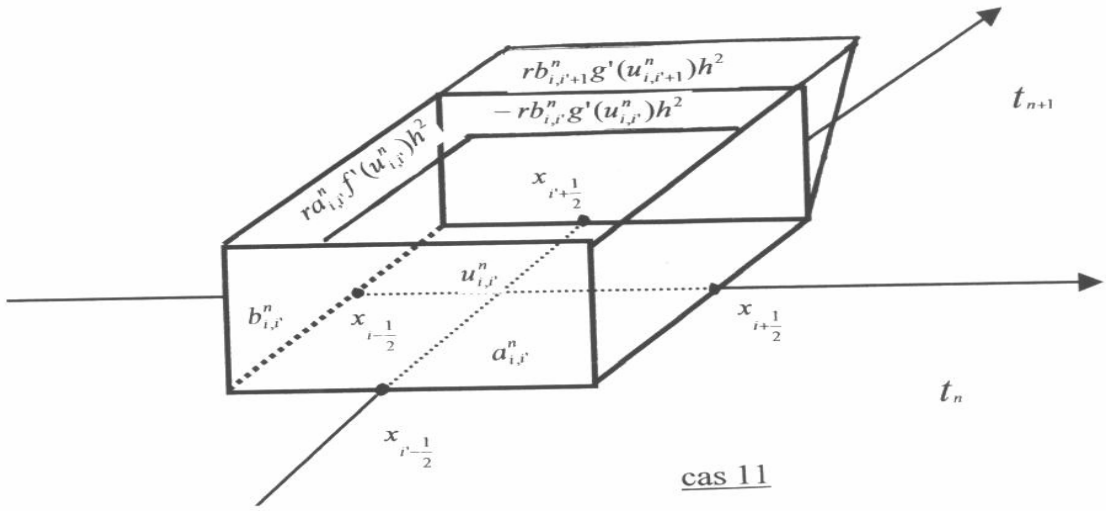


Cas 11 : $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad a^n_{i-1,i'}f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 - ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})u^n_{i-1,i'} - rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}}$$

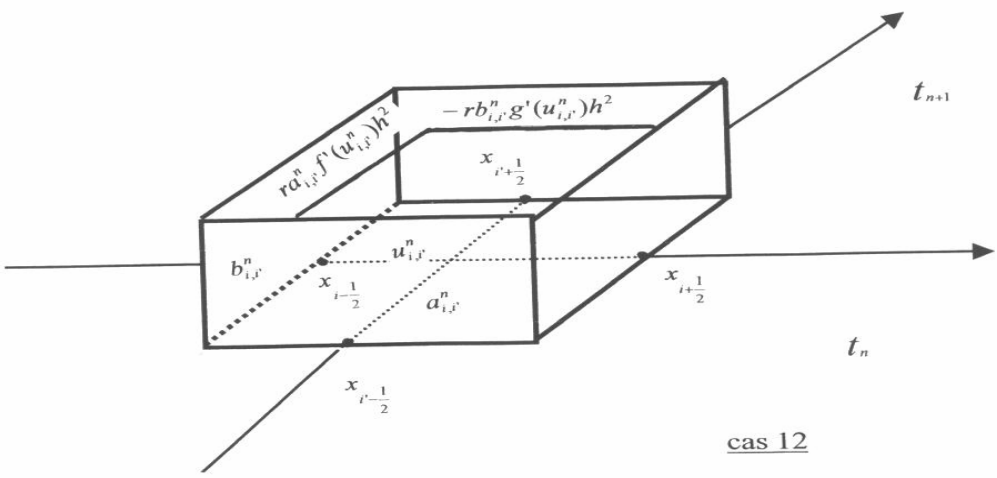
avec $\lambda^n_{i,i'+\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'+1}u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i,i'+1})u^n_{i,i'+1}$ où $A^n_{i,i'+1} \in]0;1[$. Donc :

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}).$$



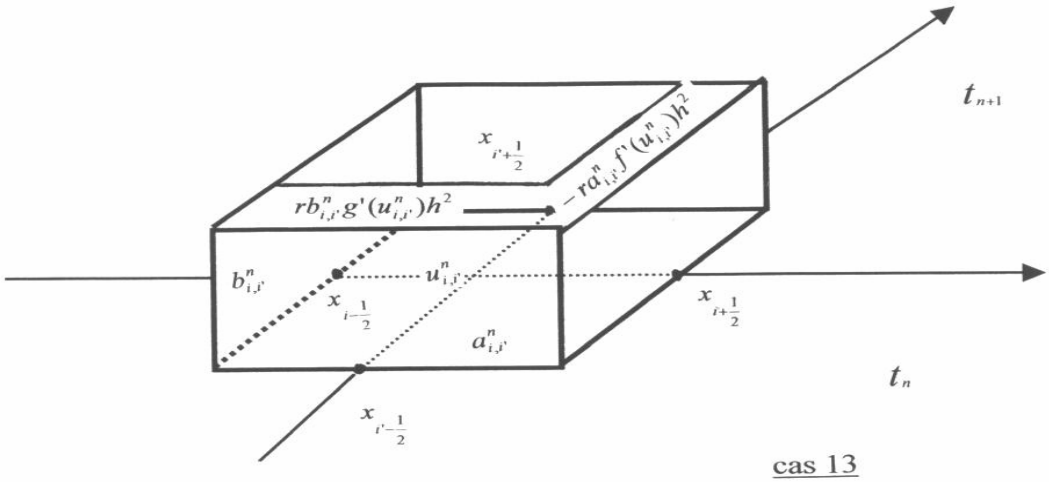
Cas 12 : $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \geq 0$, $b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0$, $a^n_{i-1,i'}f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0$, $b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0$.– Par projection, on obtient :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} &= (1 - ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})u^n_{i-1,i'} - rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'+1} \\ &= u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$



Cas 13 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} &= (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})u^n_{i+1,i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'-1} \\ &= u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}). \end{aligned}$$

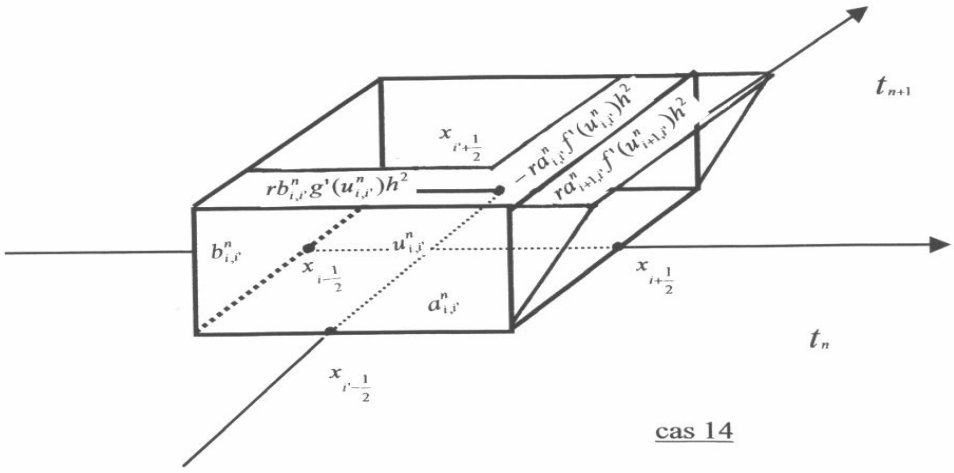


Cas 14 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})u^n_{i,i'-1}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$ où $A^n_{i+1,i'} \in]0;1[$. Donc

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$

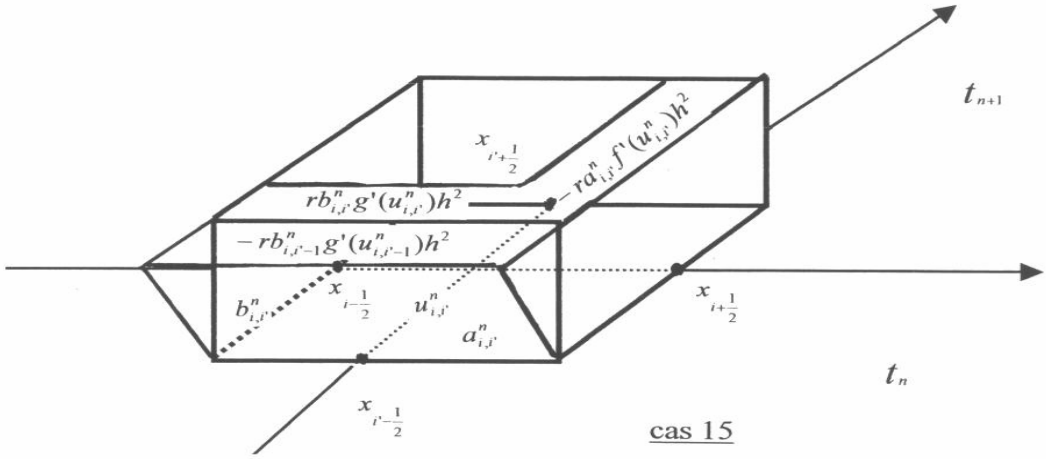


Cas 15 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})u^n_{i+1,i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'} u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'} \in]0;1[$. Donc

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$

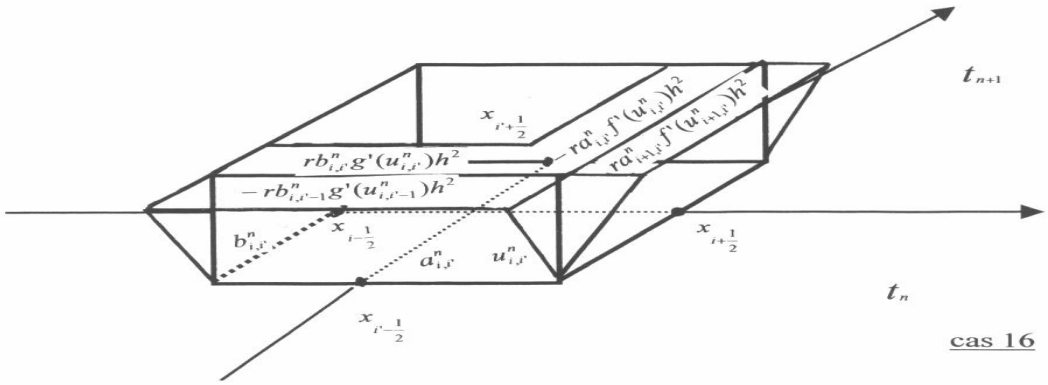


Cas 16 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0, \quad b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0, \quad a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0, \quad b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0.-$
Par projection, on obtient :

$$u^{n+1}_{i,i'} = (1 + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) - rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}))u^n_{i,i'} - ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda^n_{i+\frac{1}{2},i'} = A^n_{i+1,i'} u^n_{i,i'} + (1 - A^n_{i+1,i'})u^n_{i+1,i'}$, $\lambda^n_{i,i'-\frac{1}{2}} = A^n_{i,i'} u^n_{i,i'-1} + (1 - A^n_{i,i'})u^n_{i,i'}$ où $A^n_{i,i'}$, $A^n_{i+1,i'} \in]0;1[$. Donc

$$u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} + ra^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}).$$



5.1.3 Schémas numériques par Splitting

Cadre général

On considère l'équation (2) exposée précédemment :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial f(u(x,y,t))}{\partial x} + b(x,y,t)\frac{\partial g(u(x,y,t))}{\partial y} \approx 0 \qquad (2)$$

dans $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$, f et g appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$, avec comme condition initiale et comme coefficients : :

$$\begin{cases} u_0(x,y) = u_g + \Delta u L(x,y) & \Delta u = u_d - u_g \\ a(x,y,t) = a_g + \Delta a Y(x,y) & \Delta a = a_d - a_g \\ b(x,y,t) = b_g + \Delta b Z(x,y) & \Delta b = b_d - b_g \end{cases}$$

où $a_d, a_g, u_d, u_g, b_d, b_g$ sont des constantes réelles arbitraires, L, Y et Z des fonctions généralisées définies comme suit :

$$L(x,y) = (L_1 \otimes L_2)(x,y) \ ; \quad Y(x,y) = (Y_1 \otimes Y_2)(x,y) \ ; \quad Z(x,y) = (Z_1 \otimes Z_2)(x,y)$$

les $Y_1, Y_2, L_1, L_2, Z_1, Z_2$ étant des fonctions généralisées de Heaviside usuelles de $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

On utilise, comme dans le cas linéaire, une méthode explicite des directions alternées qui consiste à décomposer l'équation bidimensionnelle en les deux sous équations monodimensionnelles suivantes :

– <u>Suivant la direction des x</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+) \quad \text{(a)}$$

– <u>Suivant la direction des y</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \text{ dans } \mathcal{G}_S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+) \quad \text{(b)}$$

Comme dans le cas linéaire, on procède en trois étapes (on renvoie à Voir Bernard [3, 4] et Remaki [24] pour les deux premières) :

– Etape 1 : on approche l'équation (a) par des schémas numériques qui permettent de calculer $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$ en fonction de $u_{i,i'}^n$.

– Etape 2 : on approche l'équation (b) par les mêmes schémas numériques mais qui calculent $u_{i,i'}^{n+1}$ en fonction de $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$.

– Etape 3 : on injecte les expressions de $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$ obtenues dans la première étape dans l'-expression de $u_{i,i'}^{n+1}$ obtenue dans la deuxième étape, et l'on obtient $u_{i,i'}^{n+1}$ en fonction de $u_{i,i'}^n$.

Description des schémas

1) Première étape.– Nous avons à distinguer **4 cas** repris dans le tableau suivant :

Cas à considérer	Valeur de $u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}}$
a) $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + r a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)(u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n)$
b) $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + r a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n)$
c) $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \leq 0$, $a_{i+1,i'}^n f'(u_{i+1,i'}^n) \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + r a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n)$
d) $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \leq 0$ $a_{i+1,i'}^n f'(u_{i+1,i'}^n) \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,i'}^n + r a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)(1 - A_{i+1,i'}^n)(u_{i,i'}^n - u_{i+1,i'}^n)$

2) Deuxième étape.– Nous devons (symétriquement) à distinguer **4 cas**, selon le tableau suivant :

Cas à considérer	Valeur de $u_{i,i'}^{n+1}$
a) $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + r b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)(u_{i,i'-1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}})$
b) $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + r b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n (u_{i,i'-1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}})$
c) $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \leq 0$, $b_{i,i'+1}^n g'(u_{i,i'+1}^n) \leq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + r b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)(u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'+1}^{n+\frac{1}{2}})$
d) $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \leq 0$, $b_{i,i'+1}^n g'(u_{i,i'+1}^n) \geq 0$	$u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} + r b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)(1 - A_{i+1,i'}^n)(u_{i,i'}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,i'+1}^{n+\frac{1}{2}})$

3) Troisième étape.– Comme dans le cas linaire, nous avons 16 cas possibles selon les signes de $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n)$, $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)$, $a_{i+1,i'}^n f'(u_{i+1,i'}^n)$, $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)$, $b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n)$ et $b_{i,i'+1}^n g'(u_{i,i'+1}^n)$

<u>Cas 1</u> : $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \leq 0$, $b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \leq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^n &+ r a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + r b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n (u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n) \\ &+ r^2 b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) a_{i,i'-1}^n f'(u_{i,i'-1}^n) A_{i,i'}^n A_{i,i'-1}^n (u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) \\ &- r^2 b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n). \end{aligned}$$

<u>Cas 2</u> : $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \leq 0$, $b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{i,i'}^{n+1} = u_{i,i'}^n &+ r a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) + r b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)(u_{i,i'-1}^n - u_{i,i'}^n) \\ &+ r^2 b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) a_{i,i'-1}^n f'(u_{i,i'-1}^n) A_{i,i'-1}^n (u_{i-1,i'-1}^n - u_{i,i'-1}^n) - r^2 b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) A_{i,i'}^n (u_{i-1,i'}^n - u_{i,i'}^n) \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 3}}$: $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i-1,i'}f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'-1}g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}) \\ &+ r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'-1}f'(u^n_{i,i'-1})A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'-1} - u^n_{i,i'-1}) \\ &- r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 4}}$: $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i-1,i'}f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'-1}g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}) + \\ r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'-1}f'(u^n_{i,i'-1})(u^n_{i-1,i'-1} - u^n_{i,i'-1}) &- r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 5}}$: $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i+1,i'}f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + \\ r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) &- r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'+1}f'(u^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i+1,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 6}}$: $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i+1,i'}f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) \\ &+ rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) + r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) \\ &- r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'+1}f'(u^n_{i,i'+1})(1 - A^n_{i+1,i'+1})(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i+1,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 7}}$: $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i+1,i'}f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}) &+ r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) \\ &- r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'+1}f'(u^n_{i,i'+1})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i+1,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 8}}$: $a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i+1,i'}f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'+1}g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ &+ ra^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})A^n_{i+1,i'}(u^n_{i+1,i'} - u^n_{i,i'}) + rb^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})A^n_{i,i'+1}(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i,i'}) \\ &+ r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'}f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) \\ &- r^2b^n_{i,i'}g'(u^n_{i,i'})a^n_{i,i'+1}f'(u^n_{i,i'+1})(1 - A^n_{i,i'+1})(1 - A^n_{i+1,i'+1})(u^n_{i,i'+1} - u^n_{i+1,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 9}}$: $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) \\ &- r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'+1} f'(u^n_{i,i'+1}) A^n_{i,i'+1}(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 10}}$: $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) \\ &- r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'+1} f'(u^n_{i,i'+1}) A^n_{i,i'+1}(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$

Cas 11 : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) \\ &- r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'+1} f'(u^n_{i,i'+1})(1 - A^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 12}}$: $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'+1} g'(u^n_{i,i'+1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i,i'+1}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) - r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'+1} f'(u^n_{i,i'+1})(u^n_{i-1,i'+1} - u^n_{i,i'+1}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 13}}$: $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'-1} f'(u^n_{i,i'-1})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) - r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 14}}$: $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \geq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'-1} f'(u^n_{i,i'-1})(1 - A^n_{i+1,i'-1})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) \\ &- r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}). \end{aligned}$$

$\underline{\text{Cas 15}}$: $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'-1} f'(u^n_{i,i'-1}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) - r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}). \end{aligned}$$

<u>Cas 16</u> : $a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i+1,i'} f'(u^n_{i+1,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = u^n_{i,i'} &+ r a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'})(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'}) \\ &+ r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'-1} f'(u^n_{i,i'-1}) A^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'-1})(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i+1,i'-1}) \\ &- r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(1 - A^n_{i+1,i'})(u^n_{i,i'} - u^n_{i+1,i'}). \end{aligned}$$

5.1.4 Remarques sur les differences entre la méthode 2D et la méthode par Splitting

Les différences sont techniquement les mêmes que dans le cas linéaire à la fois dans le principe de construction et dans les expressions. Prenons l'exemple du <u>cas 1</u> ($a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) \geq 0,\ \ a^n_{i-1,i'} f'(u^n_{i-1,i'}) \leq 0,\ \ b^n_{i,i'-1} g'(u^n_{i,i'-1}) \leq 0$) afin de bien distinguer les différences au niveau de l'expression.

Par la méthode 2D, on obtient le schéma numérique suivant :

$$u^{n+1}_{i,i'} = \underbrace{u^n_{i,i'} + r\ a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})}_{\mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r}),\ \text{polynôme en } r \text{ de degré } 1}$$

Par la méthode par Splitting, on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{i,i'} = &\underbrace{u^n_{i,i'} + r\ a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'}) + r b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'}(u^n_{i,i'-1} - u^n_{i,i'})}_{\text{On reconnaît } \mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r}),\ \text{polynôme en } r \text{ de degré } 1} + \\ &\underline{r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'-1} f'(u^n_{i,i'-1}) A^n_{i,i'} A^n_{i,i'-1}(u^n_{i-1,i'-1} - u^n_{i,i'-1})} \\ &\underline{- r^2 b^n_{i,i'} g'(u^n_{i,i'}) a^n_{i,i'} f'(u^n_{i,i'}) A^n_{i,i'} A^n_{i,i'}(u^n_{i-1,i'} - u^n_{i,i'})} \end{aligned}$$

Le terme souligné $\mathbf{Q}_{SP}(\mathbf{r}^2)$ ne contient que des termes en r^2. Ces constats sont vrais pour chacun des <u>16 cas</u> de schémas numériques.

En conclusion pour chacun des <u>16 cas</u> de schémas numériques, par **la méthode 2D**, on obtient des schémas numériques de la forme

$$u^{n+1}_{i,i'} = \mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r})$$

où $\mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r})$ est un polynôme en r de degré 1. Par **la méthode par Splitting**, on obtient des schémas numériques de la forme

$$u^{n+1}_{i,i'} = \mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_{SP}(\mathbf{r}^2)$$

où $\mathbf{P}_{2D}(\mathbf{r})$ est le polynôme en r de degré 1 obtenu ci-dessus par la méthode 2D et $\mathbf{Q}_{SP}(\mathbf{r}^2)$, un monôme en r^2.

5.2 Comparaison des schémas numériques 2D et Splitting par les tests numériques

Nous allons tester les schémas numériques selon les signes de $a_g u_g$, $a_d u_d$, $b_g u_g$ et $b_d u_d$, afin de retrouver les differents cas, puis nous allons vérifier une certaine proximité des résultats concernant les comparaisons des tests en vue de valider les schémas numériques. Dans un premier temps, nous allons tester les schémas numériques pour le problème de Riemann, et retrouver les différentes solutions correspondant aux différents cas.

On choisit $A = 0,5$ et $f(u) = g(u) = 0,5u^2$ (on choisit f et g ni croissantes, ni décroissantes, régulières et non linéaire). Les résultats (à t fixé) sont illustrés par :

1) $a_g u_g < 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d > 0$: cas de la double zone intermédiaire suivant les directions x et y. (Cas 1, 8, 9, 16).

2) $a_g u_g < 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d > 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction x et discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant la direction y. (Cas 2, 14)

3) $a_g u_g < 0$, $a_d u_d < 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d > 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant la direction x et vers la "droite" suivant la direction y. (Cas 13)

4) $a_g u_g < 0$, $a_d u_d < 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d > 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction y et discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant la direction x. (Cas 7, 15)

5) $a_g u_g < 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d < 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction x et discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant la direction y. (Cas 6, 10)

6) $a_g u_g > 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d > 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant les directions x et y. (Cas 4)

7) $a_g u_g < 0$, $a_d u_d < 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d < 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "gauche" suivant les directions x et y. (Cas 5)

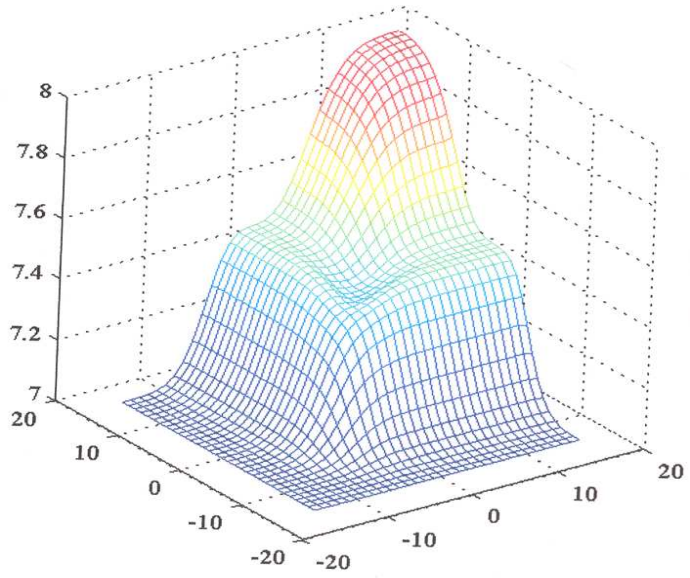
8) $a_g u_g > 0$, $a_d u_d < 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d < 0$: phénomène de blocage en $t = 0$.

9) $a_g u_g > 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d > 0$: cas de la zone intermédiaire suivant la direction y et discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant la direction x. (Cas 3, 11)

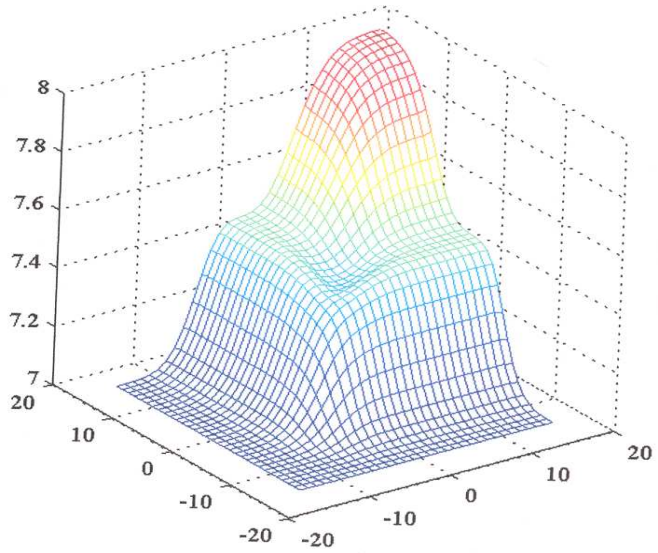
10) $a_g u_g > 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d < 0$: discontinuité de u_0 se propageant vers la "droite" suivant la direction x et vers la "gauche" suivant la direction y. (Cas 12)

$\mathbf{a_g u_g < 0}$, $\mathbf{a_d u_d > 0}$, $\mathbf{b_g u_g < 0}$ et $\mathbf{b_d u_d > 0}$

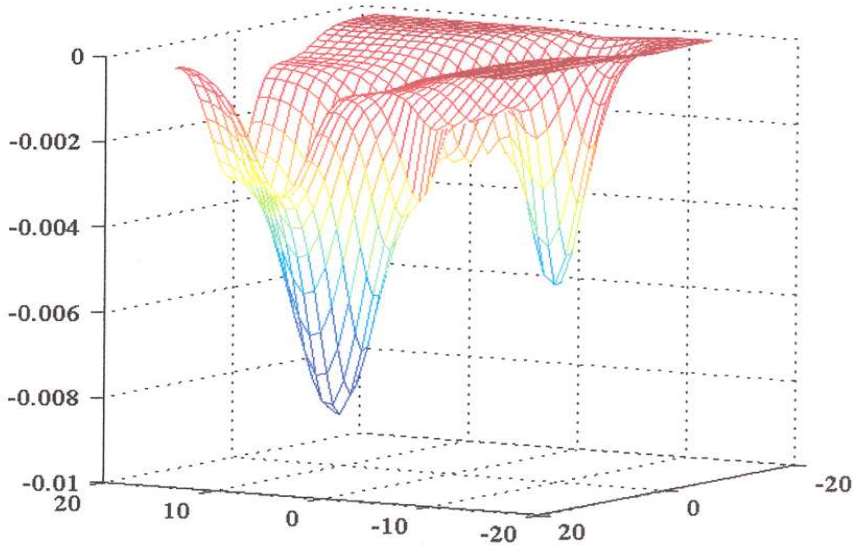
(Cas de la double zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des x et des y)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



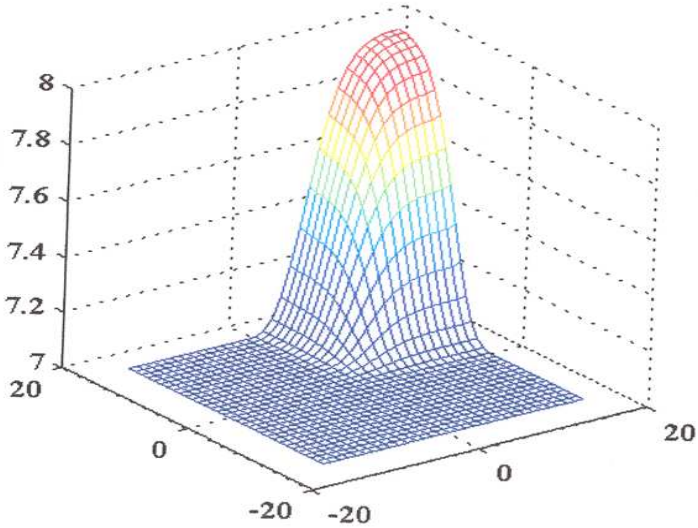
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



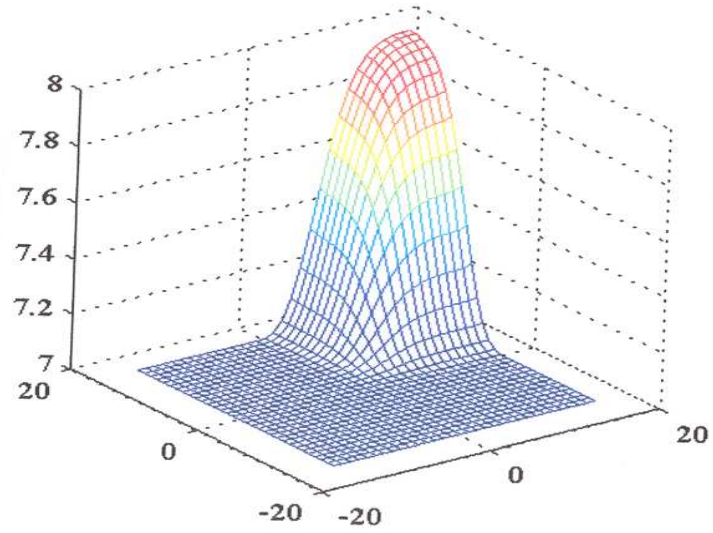
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$a_g u_g > 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d > 0$

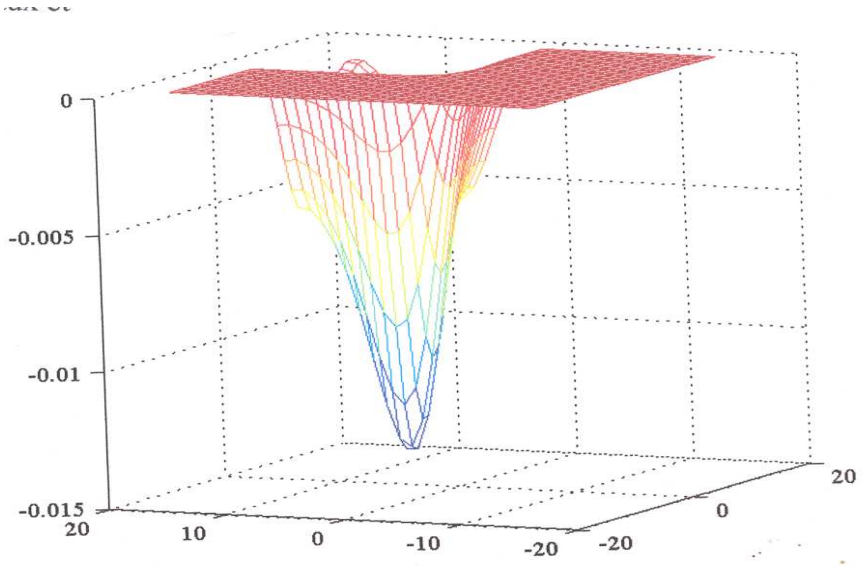
(Discontinuité de u_0 se propageant dans le quadrant x>0 et y>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



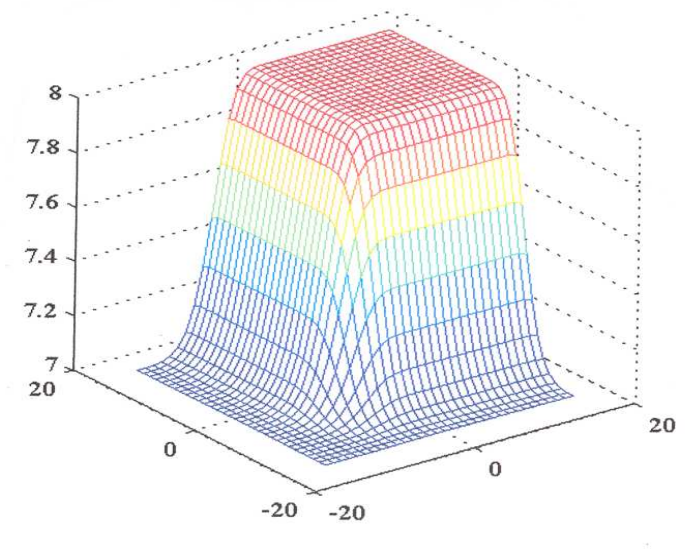
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



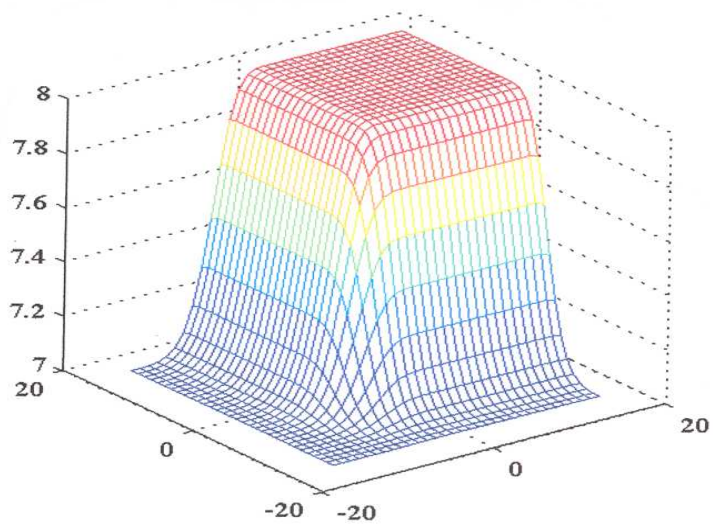
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$$\mathbf{a_g u_g < 0,\ a_d u_d < 0,\ b_g u_g < 0 \text{ et } b_d u_d < 0}$$

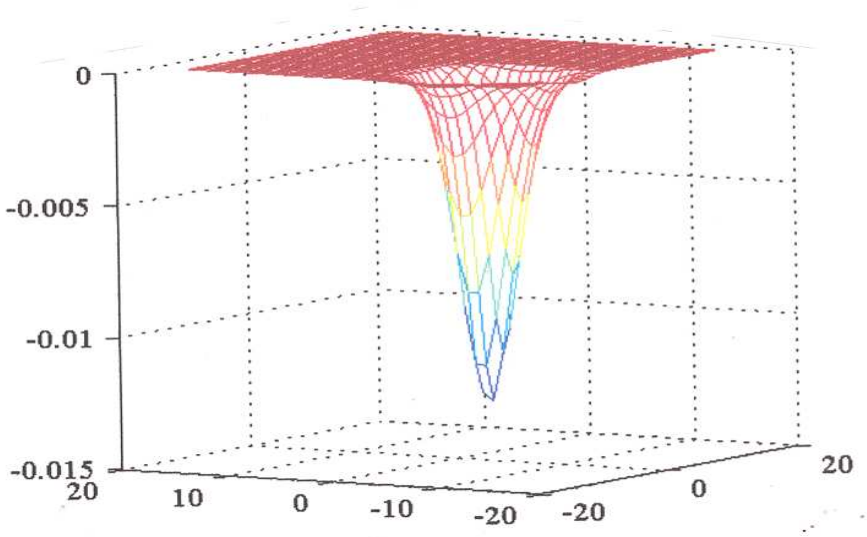
(Discontinuité de u_0 se propageant dans le quadrant x<0 et y<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



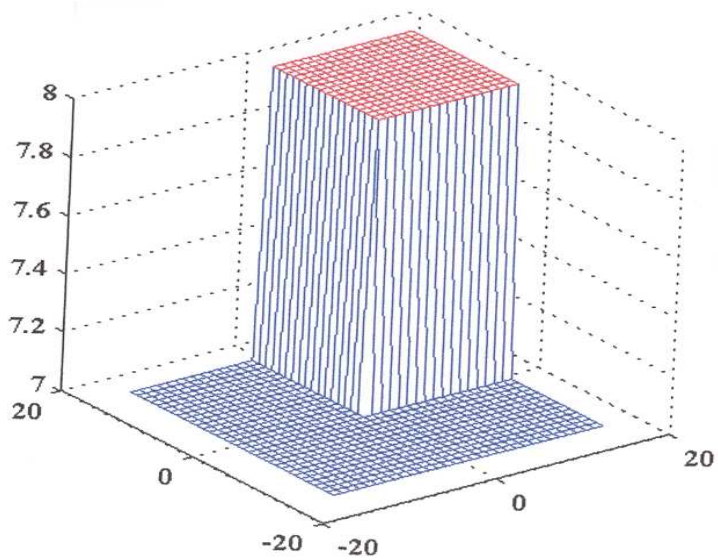
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



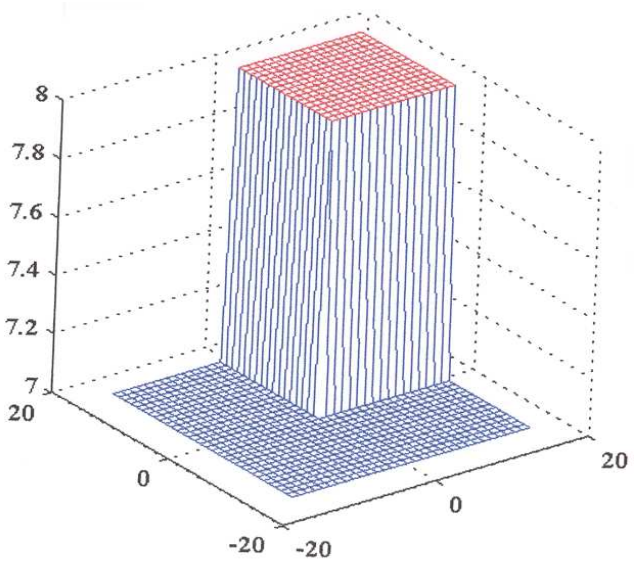
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$a_g u_g > 0$, $a_d u_d < 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d < 0$

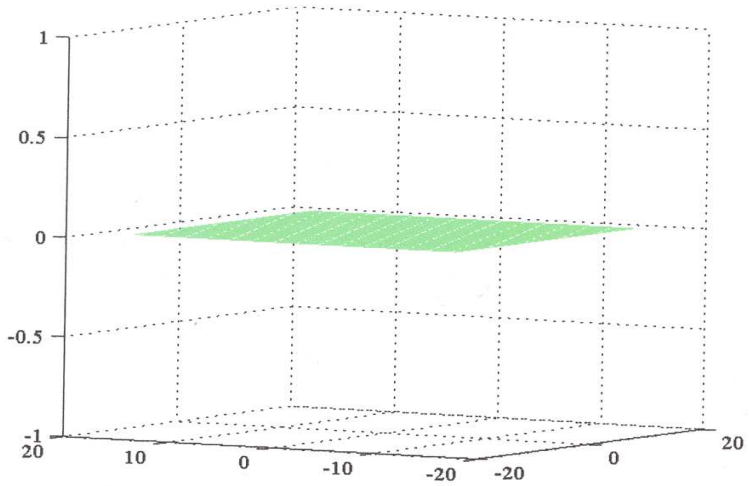
(Phénomène de blocage)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting

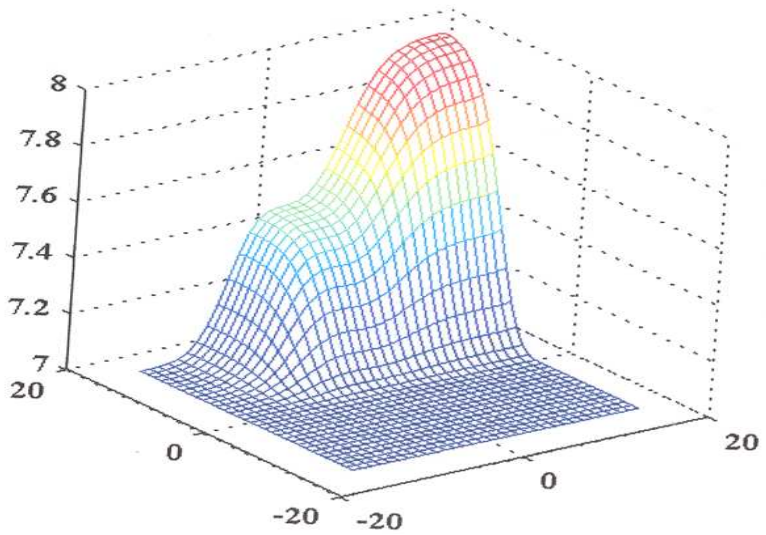


Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

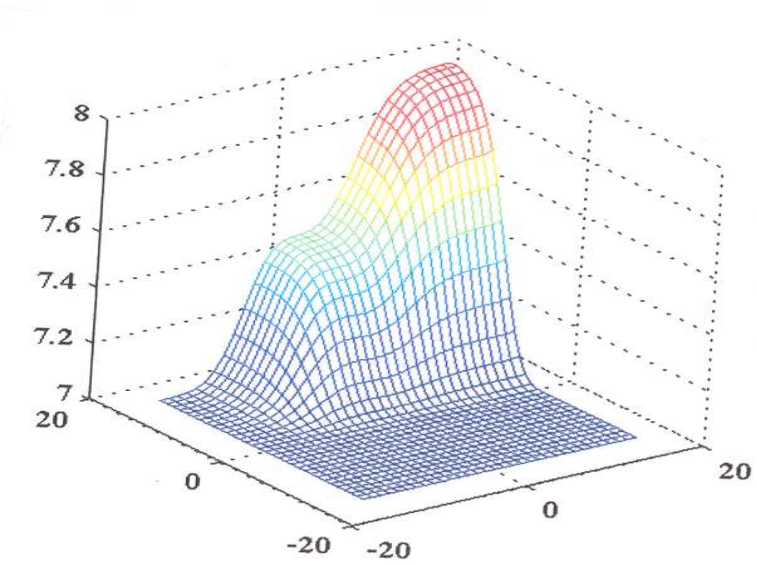
$a_g u_g > 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d > 0$

(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des y et disconti-

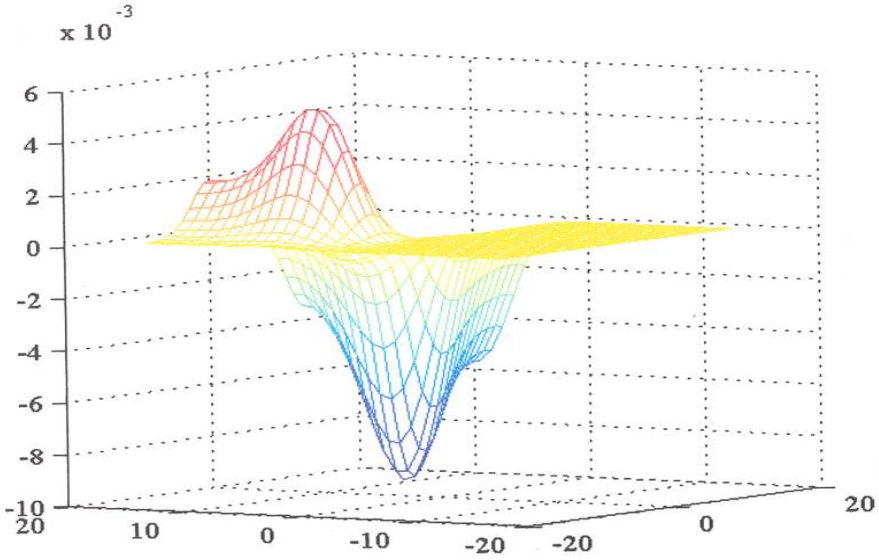
nuité de u_0 se propageant suivant la direction des x>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



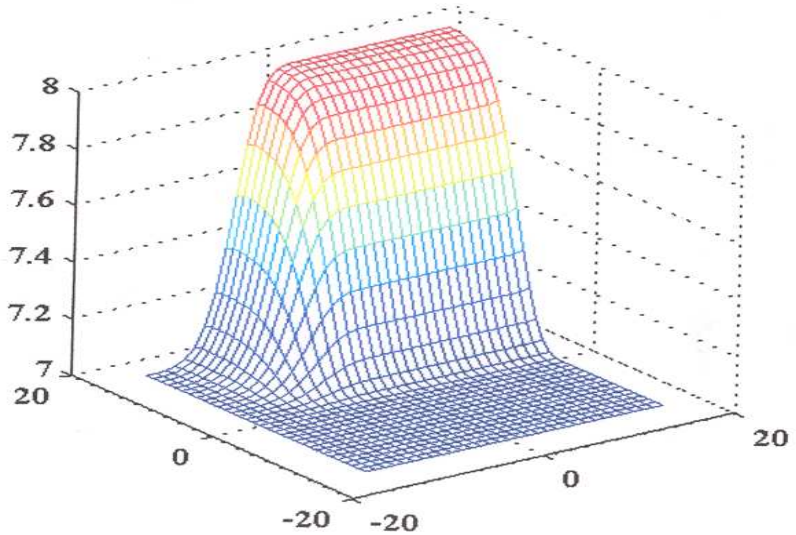
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



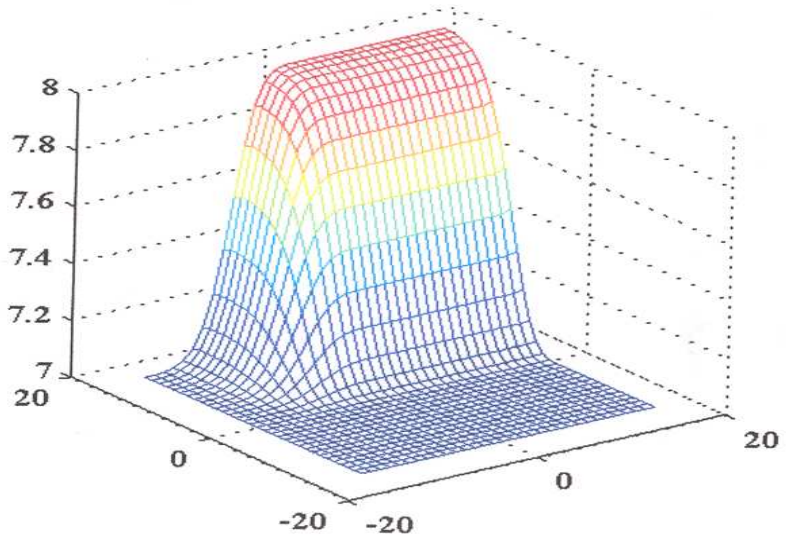
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$a_g u_g > 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d < 0$

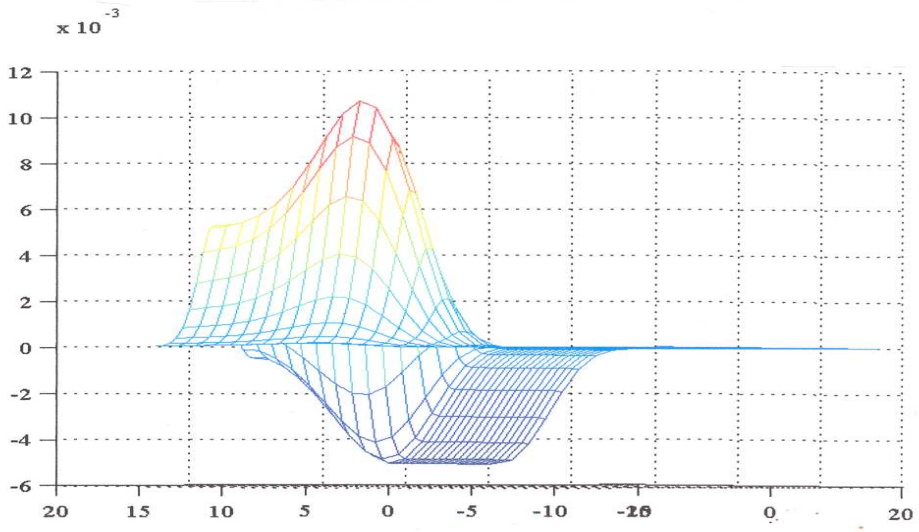
(Discontinuité de u_0 se propageant dans le quadrant $x>0$ et $y<0$)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting

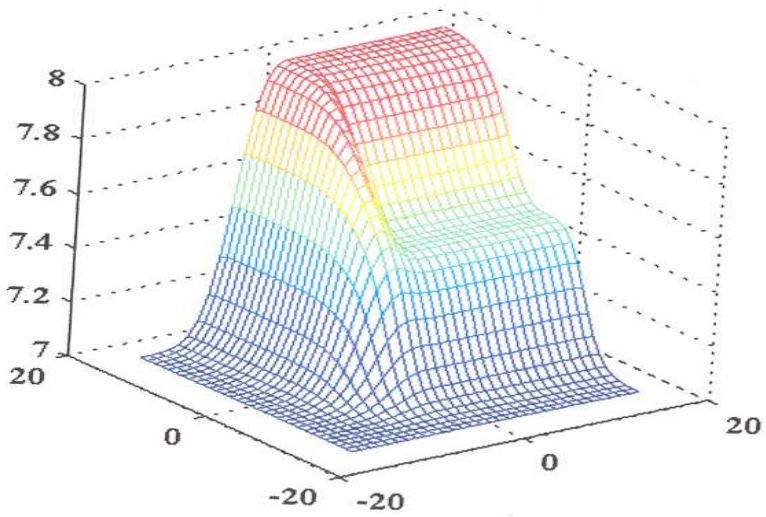


Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

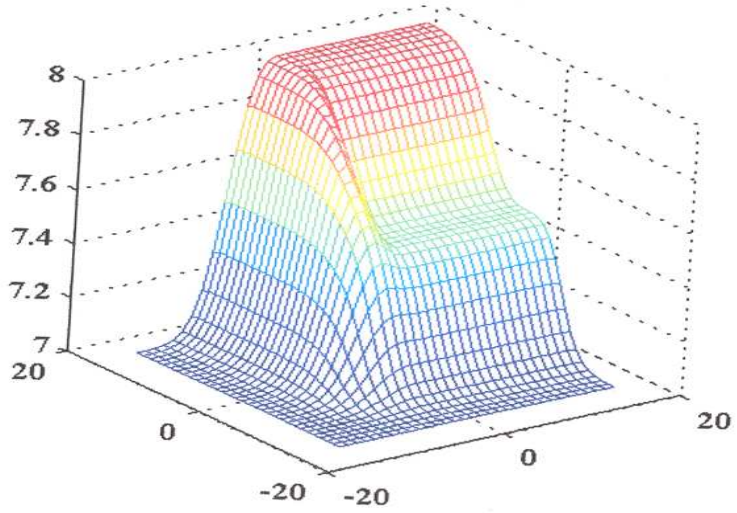
$a_g u_g < 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g < 0$ et $b_d u_d < 0$

(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des x et disconti-

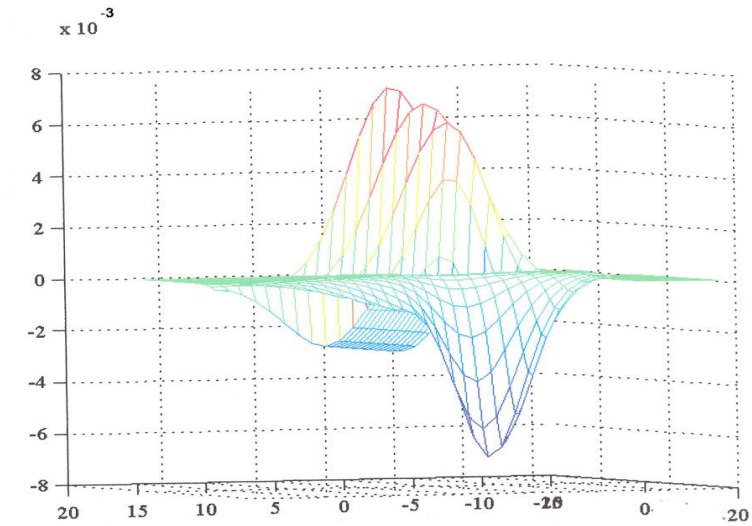
nuité de u_0 se propageant suivant la direction des y<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



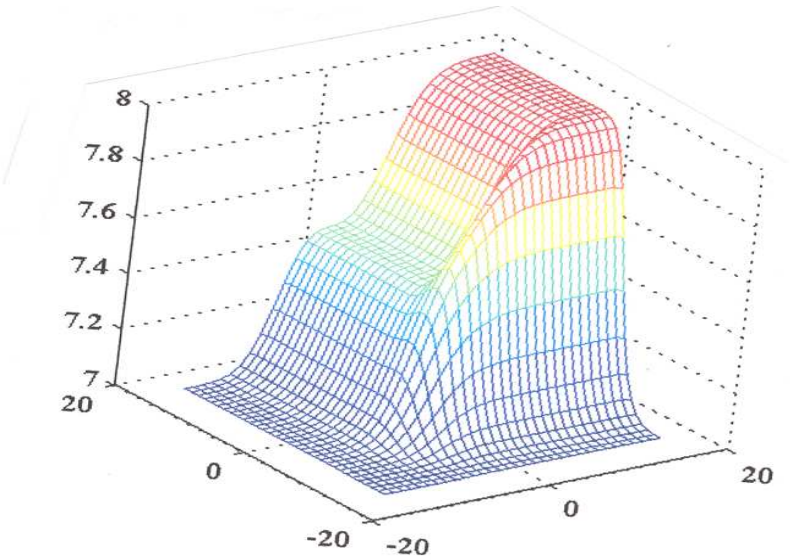
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



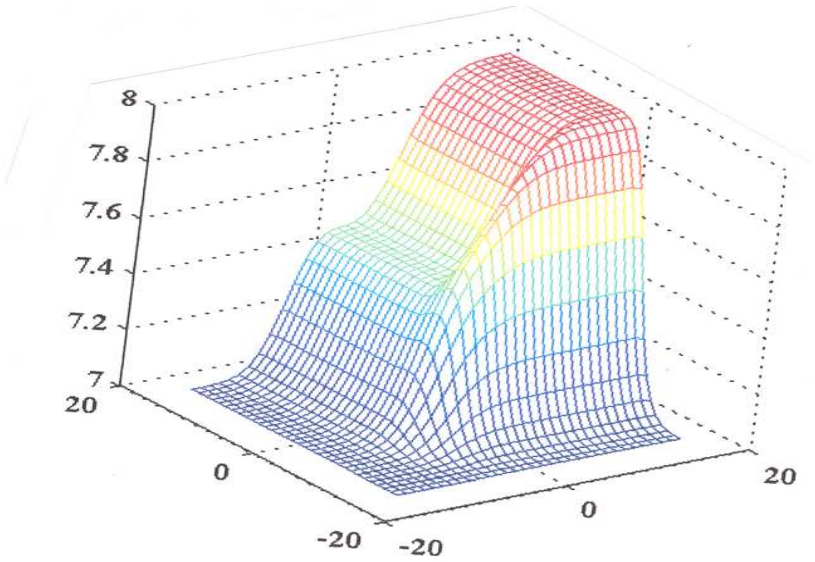
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$$\mathbf{a_g u_g<0,\ a_d u_d<0,\ b_g u_g<0 \text{ et } b_d u_d>0}$$

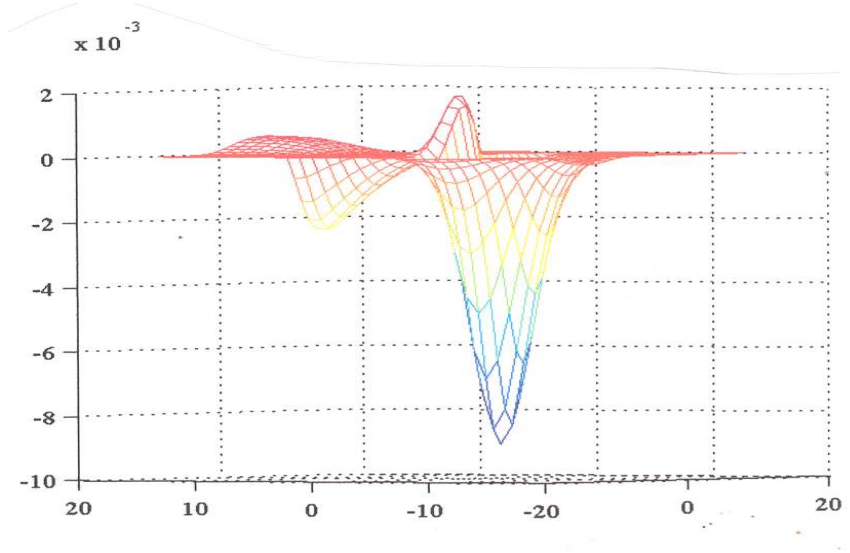
(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des y et discontinuité de u_0 se propageant suivant la direction des x<0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



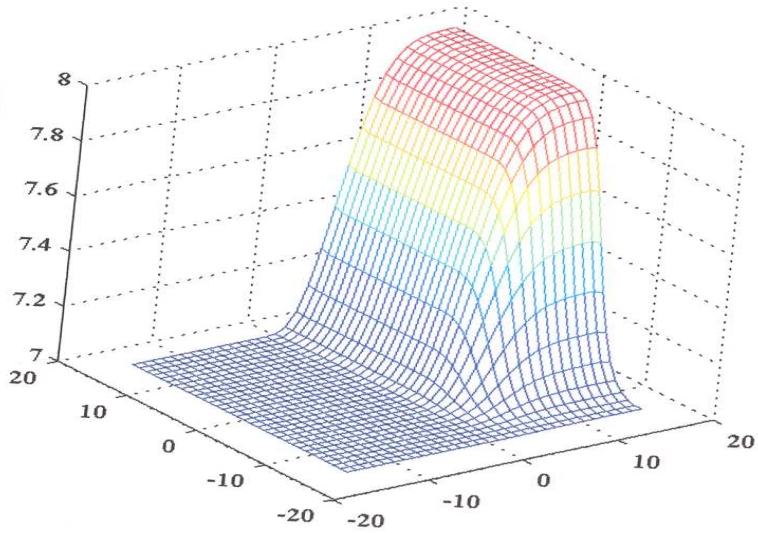
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



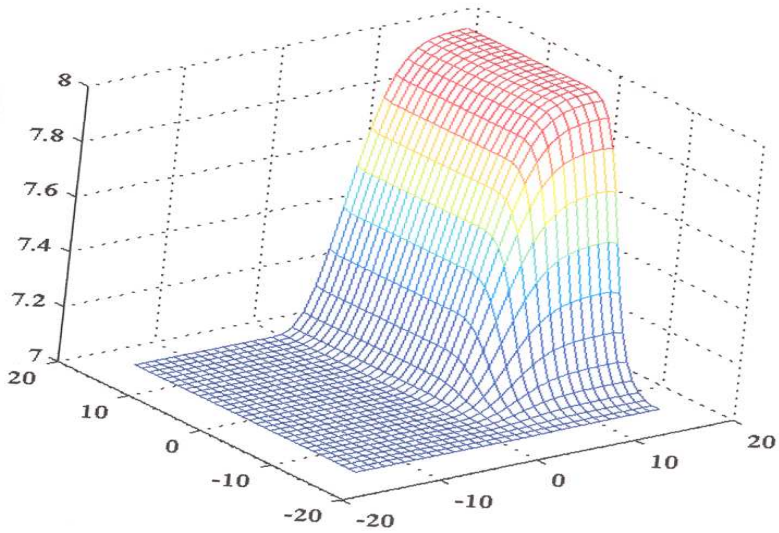
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$$\mathbf{a_g u_g < 0,\ a_d u_d < 0,\ b_g u_g > 0 \text{ et } b_d u_d > 0}$$

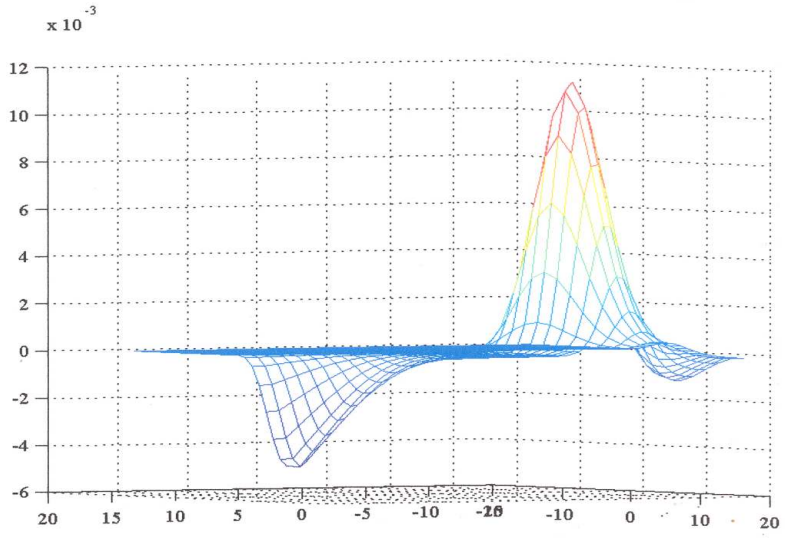
(Discontinuité de u_0 se propageant suivant la direction des x<0 et y>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



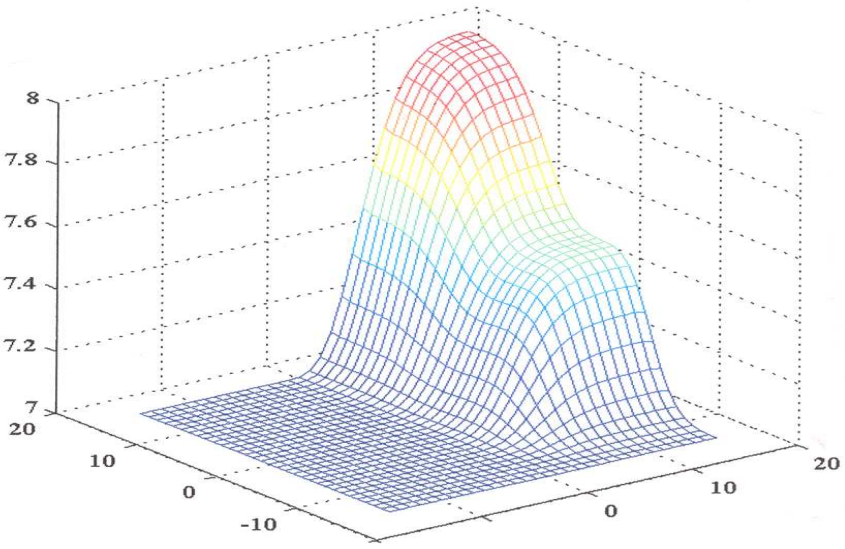
Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



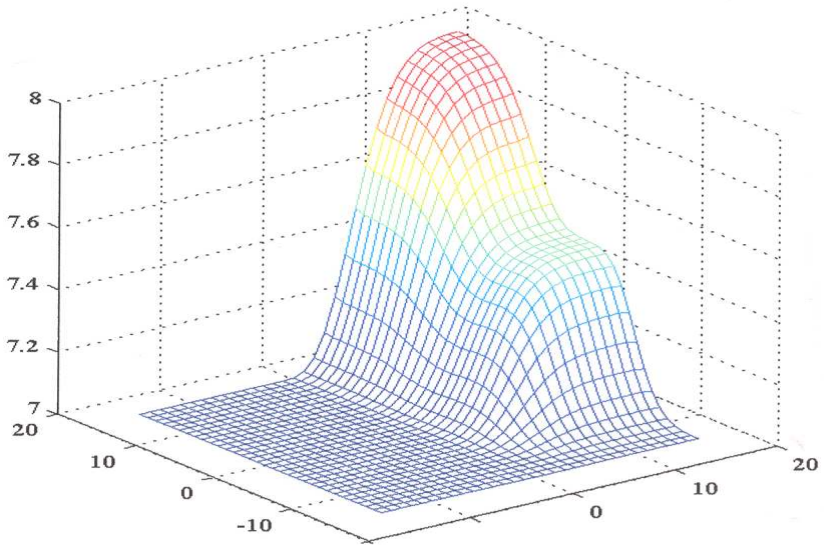
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

$a_g u_g < 0$, $a_d u_d > 0$, $b_g u_g > 0$ et $b_d u_d > 0$

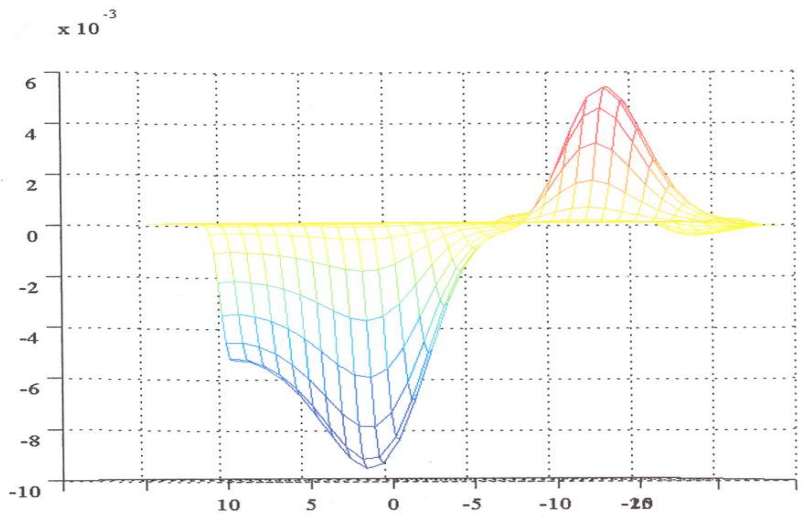
(Cas de la zone intermédiaire suivant la direction de l'axe des x et discontinuité de u_0 se propageant suivant la direction des y>0)



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques 2D



Tests numériques obtenus à partir des schémas numériques par Splitting



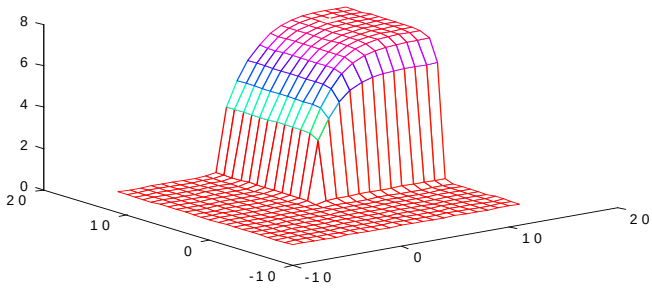
Croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques 2D et ceux par Splitting

Maintenant, comme dans le cas linéaire, nous allons effectuer les tests en faisant varier uniquement le pas h afin de voir l'influence du maillage sur les tests.

Nous ne testerons qu'un cas particulier qui correspond au cas $a_g f'(u_g) < 0$, $a_d f'(u_d) < 0$, $b_g g'(u_g) > 0$ et $b_d g'(u_d) > 0$, les autres cas se testant de façon similaire.

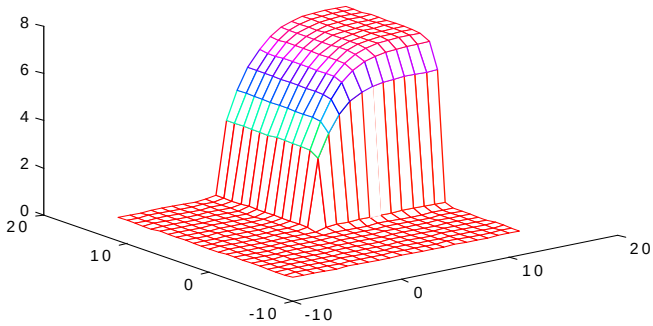
Les tests qui suivent sont tous effectués pour les valeurs $u_g = 1$**,** $u_d = 8$**,** $a_g = -0,75$**,** $a_d = -0,95$**,** $b_g = 0,65$**,** $b_d = 0,85$**,** $f(u) = 0,5u^2$ **et** $g(u) = \frac{1}{4}u^4$ en faisant varier uniquement le pas afin de voir si le maillage a une influence sur les résultats obtenus.

$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}}$ $h = 0,15$



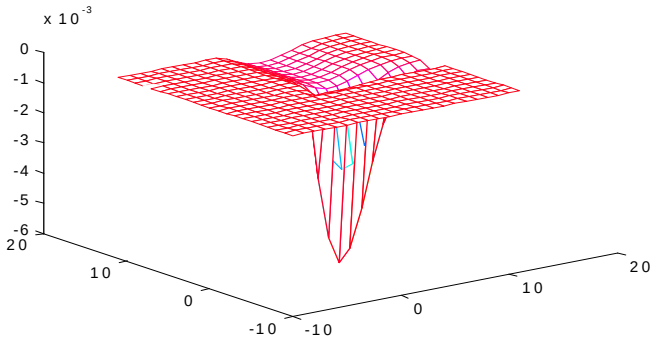
(5.1)

La figure 5.1 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(5.2)

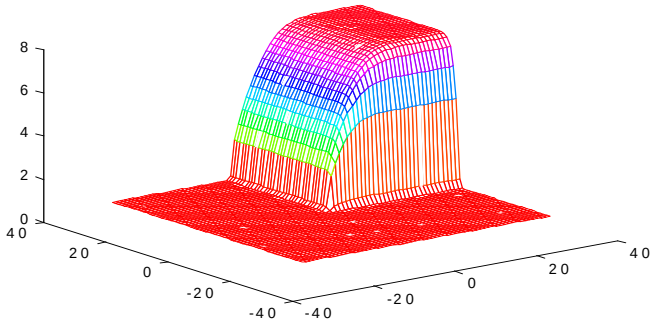
La figure 5.2 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(5.3)

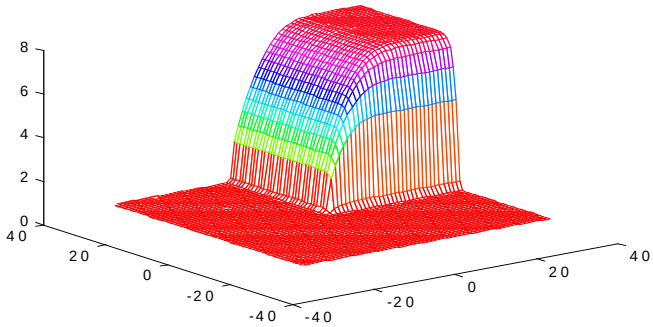
La figure 5.3 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas}}$ $h = 1,5/30 = 0,05$



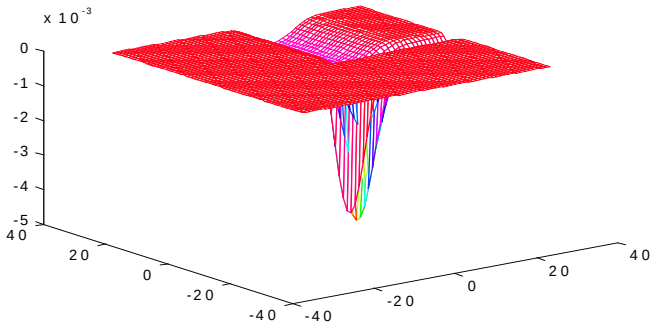
(5.4)

La figure 5.4 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(5.5)

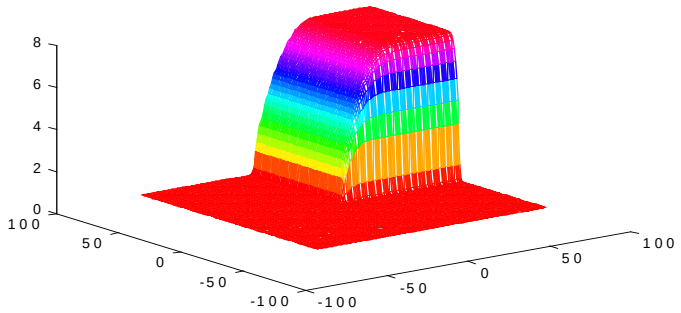
La figure 5.5 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(5.6)

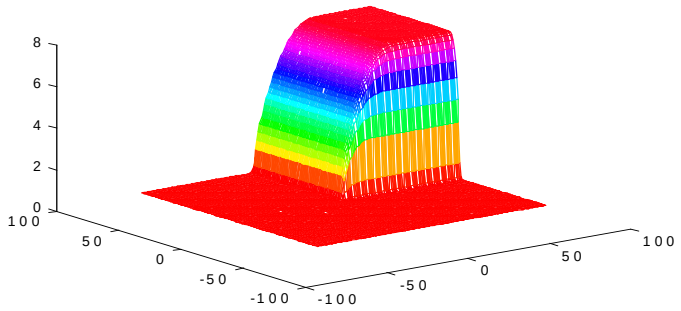
La figure 5.6 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

$\underline{3^{\text{ème}} \text{ cas}}$ $h = 1,5/70 \approx 0,02$



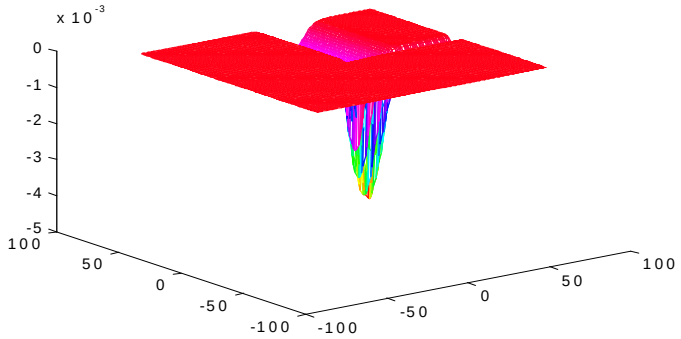
(5.7)

La figure 5.7 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(5.8)

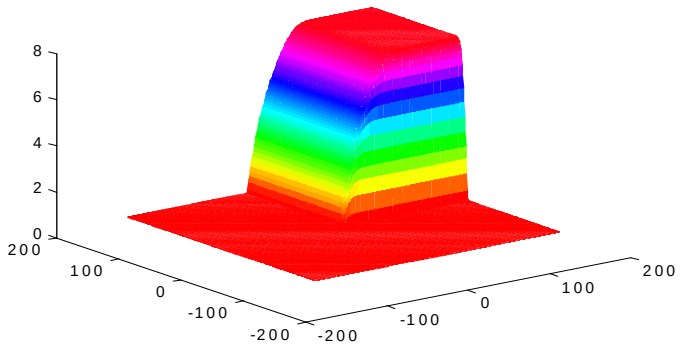
La figure 5.8 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(5.9)

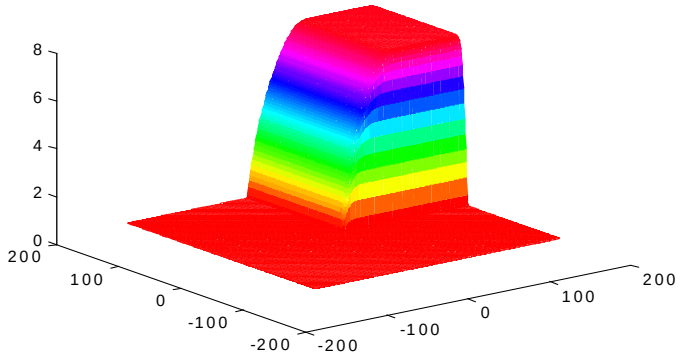
La figure 5.9 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

$\underline{4^{\text{ème}} \text{ cas}}$ $h = 1,5/150 \approx 0,01$



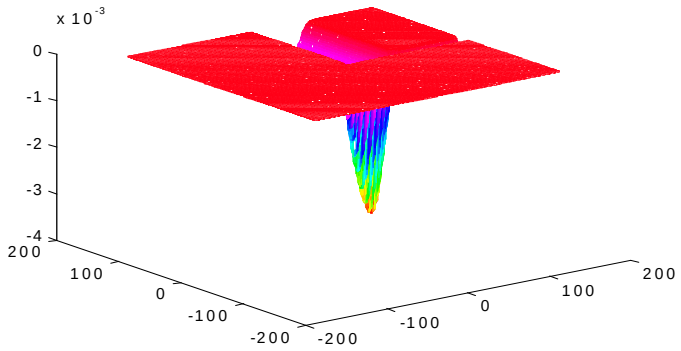
(5.10)

La figure 5.10 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode 2D



(5.11)

La figure 5.11 correspond au test des schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting



(5.12)

La figure 5.12 correspond à l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode 2D et ceux obtenus par Splitting

Conclusion : Lorsque le pas h diminue, l'erreur entre les schémas 2D et ceux par Splitting diminue, comme en témoignent les figures 5.3, 5.6, 5.9 et 5.12.

De plus, lorsque le pas h diminue, les figures données par les tests présentent moins d'arrondies, sont plus anguleuses, ce qui laisse penser que la diminution du pas entraine une diminution de diffusion numérique.

5.3 Interprétation des résultats et calcul de la complexité des deux méthodes

5.3.1 Interprétation

Comme dans le cas linéaire, seule une comparaison par les tests numériques entre schémas numériques 2D et schémas numériques par Splitting permet de valider les schémas numériques 2D.

Nous allons considérer que les résultats sont concluants si et seulement si les figures obtenues par les tests des schémas numériques 2D ainsi que ceux par Splitting sont suffisament voisines.

Les croquis représentant l'erreur entre les schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting et les schémas numériques obtenus par la méthode 2D corroborent cette propriété, l'erreur diminuant lorsque le pas h diminue.

De plus, il est à noter que le choix de $A = 0,5$ semble impliquer certains profils, comme ceux de la page 125, 126.

Page 123, 124, le blocage observé n'est pas réalisé par la solution exacte qui progresse en conservant des fronts raides (chocs), mais certainement par l'approximation faîte de la solution et donc du schéma.

Les paramètres A utilisés sont les mêmes pour les deux schémas numériques (2D et Splitting), ce qui contribue à ce que la différence entre ces deux schémas est faible.

La comparaison par les tests entre la méthode 2D et la méthode par Splitting s'avère concluante.

Nous pouvons donc conclure que les schémas numériques obtenus par la méthode 2D sont aussi fiables que ceux obtenus par la méthode par Splitting.

Par ailleurs, les schémas numériques obtenus par la méthode 2D sont plus simples dans leur écriture, ils n'ont pas de termes en r d'ordre deux comme ceux de la méthode par

Splitting, de ce fait ils utilisent moins d'opérations élémentaires (addition et multiplication) que ceux obtenus par la méthode par Splitting, donc ils sont moins couteux.

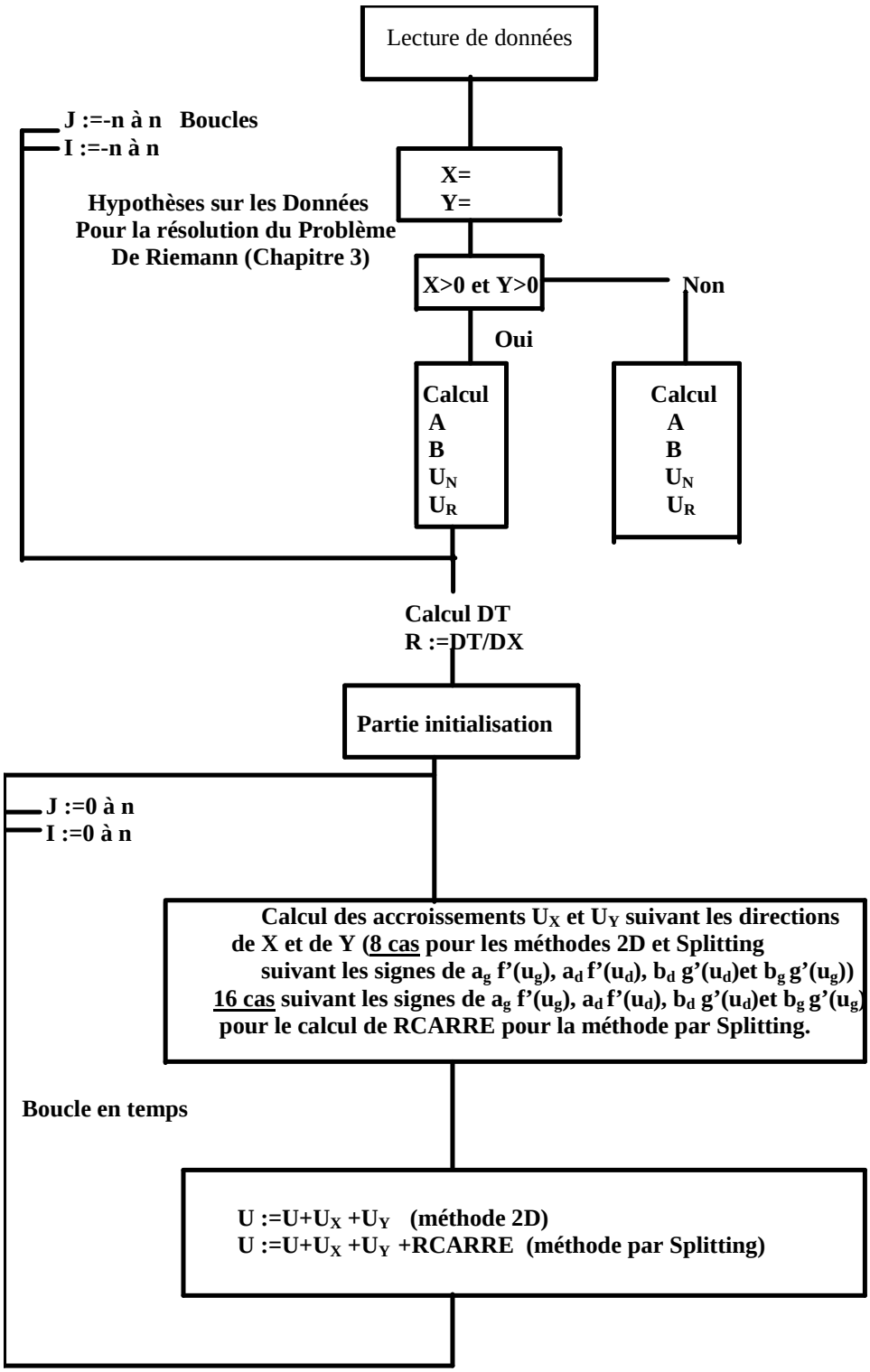
La méthode 2D est donc moins coûteuse que la méthode par Splitting en temps d'exécution, donc plus rapide.

De plus, on verra dans ce même chapitre que les schémas numériques obtenus par la méthode 2D sont stables pour la norme L^∞, alors que les schémas numériques obtenus par la méthode par Splitting ne sont pas stables pour la norme L^∞.

5.3.2 Analyse de la complexité de la méthode par Splitting et de la méthode 2D.

Nous allons présenter l'organigramme de la méthode 2D et de la méthode par Splitting afin de calculer la complexité de ces deux méthodes.

ORGANIGRAMME



On appelle $T_{2D}(n)$ la complexité de la méthode 2D et $T_{SP}(n)$ la complexité de la méthode par Splitting.

On introduit les coûts suivants :

c_1 :coût d'un test, c_2 : coût d'une affectation, c_3 : coût d'une addition, c_4 : coût d'une multiplication, c_5 : coût d'une incrémentation.

$$T_{2D}(n) = 25c_2 + \mathbf{C}n^2 \quad \text{où } \mathbf{C} = 26c_1 + 49c_2 + 10c_3 + 44c_4 + 2c_5$$
$$T_{SP}(n) = 25c_2 + \mathbf{C}'n^2 \quad \text{où } \mathbf{C}' = 42c_1 + 65c_2 + 59c_3 + 268c_4 + 3c_5$$

Comme dans le cas linéaire, ces deux méthodes ont une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$.

On remarque que pour des petites valeurs de n, comme $\mathbf{C} << \mathbf{C}'$, la méthode 2D est plus efficace que la méthode par Splitting, car nettement moins coûteuse.

Remarque 57 *Le gain en terme de coûts entre la méthode 2D et la méthode Splitting est encore plus important dans le cas non linéaire que dans le cas linéaire, ce qui induit que la méthode 2D est encore plus efficace dans le cas non linéaire que dans le cas linéaire.*

En effet, supposons que la différence en terme d'opérations élémentaires $+$ et $\times$ entre un schéma numérique 2D et celui par Splitting correspondant au même cas est de N opérations élémentaires dans le cas linéaire, elle est de N opérations élémentaires plus 2 multiplications dans le cas non linéaire, ce qui correspond à un gain en terme de coûts pour la méthode 2D de 32 multiplications (16 schémas numériques) dans le cas non linéaire par rapport au cas linéaire.

5.4 Stabilité des schémas numériques 2D

Nous allons énoncer un résultat de stabilité des schémas numériques obtenus par la méthode 2D. Tout d'abord, nous allons préciser la condition de Courant -Fréderich-Levy dite condition CFL : Vu que les fonctions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ et $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$ et que les fonctions f et g appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R})$ (f' et g' sont continues sur $\mathbb{R}$), on a :

$$\exists r > 0 \;/\; \sup_{(i,i')\in\mathbb{Z}^2} \left|a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)\right| < \frac{1}{2r} \text{ et } \sup_{(i,i')\in\mathbb{Z}^2} \left|b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)\right| < \frac{1}{2r}.$$

Proposition 58 *On suppose que les fonctions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ et $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$, que la fonction $\{\ (x,y) \to u_0(x,y)\} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et que les fonctions f et g appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R})$, alors le schéma numérique 2D est stable pour la*

norme L^∞, c'est-à-dire :

$$\forall (i,i') \in \mathbb{Z}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{i,i'}^n\right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} ..$$

Preuve de la proposition 58.– Nous allons montrer cette propriété par récurrence sur n comme dans [3]. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\begin{aligned}
A_{n,1} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ \ / \ \ a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0\,;\, a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \leq 0\right\} \\
A_{n,2} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ \ / \ \ a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0\,;\, a_{i-1,i'}^n f'(u_{i-1,i'}^n) \geq 0\right\} \\
A_{n,3} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ \ / \ a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \leq 0\,;\, a_{i+1,i'}^n f'(u_{i+1,i'}^n) \leq 0 \ \right\} \\
A_{n,4} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ \ / \ \ a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \leq 0\,;\, a_{i+1,i'}^n f'(u_{i+1,i'}^n) \geq 0\right\} \\
B_{n,1} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ / \ b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0\,;\, b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \leq 0\right\} \\
B_{n,2} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ / \ b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0\,;\, b_{i,i'-1}^n g'(u_{i,i'-1}^n) \geq 0 \ \right\} \\
B_{n,3} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ \ / \ \ b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \leq 0\,;\, b_{i,i'+1}^n g'(u_{i,i'+1}^n) \leq 0\right\} \\
B_{n,4} &= \left\{(i,i') \in \mathbb{Z}^2 \ / \ b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \leq 0\,;\, b_{i,i'+1}^n g'(u_{i,i'+1}^n) \geq 0 \ \right\}.
\end{aligned}$$

Initialisation

Lemme 59 *On a :*

$$\forall (i,i') \in \mathbb{Z}^2, \left|u_{i,i'}^0\right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve du lemme 59. On a :

$$\forall (i,i') \in \mathbb{Z}^2, \left|u_{i,i'}^0\right| = \left|\frac{1}{h^2}\int\limits_{I_i}\int\limits_{I_{i'}} u_0(x,y)dxdy\right| \leq \frac{1}{h^2}\int\limits_{I_i}\int\limits_{I_{i'}} |u_0(x,y)|\,dxdy \leq$$
$$\frac{1}{h^2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \times |I_i| \times |I_{i'}| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

vu que I_i et $I_{i'}$ sont de longueur h, ce qui conclut la preuve du lemme 59. ■

hérédité.– Supposons maintenant que la proposition 58 est vraie jusqu'au au rang n et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.

Il suffit de vérifier que l'on a, pour les <u>16 cas</u> de schémas numériques 2D, le

Lemme 60 *On a :*

$$\forall (i,i') \in A_{n,j} \cap B_{n,k} \ (j,k = 1..4), \left|u_{i,i'}^{n+1}\right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve du lemme 60.– On va traiter un seul des <u>16 cas</u>, les 15 autres se traitant de façon similaire. Si $(i,i') \in A_{n,1} \cap B_{n,1}$, alors :

$$u_{i,i'}^{n+1} = (1 - ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) - rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n))u_{i,i'}^n + ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n)\lambda_{i-\frac{1}{2},i'}^n + rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)\lambda_{i,i'-\frac{1}{2}}^n.$$

Or $(1 - ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) - rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)) > 0$ d'après la condition CFL, $a_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \geq 0$, $b_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \geq 0$ car $(i,i') \in A_{n,1} \cap B_{n,1}$, donc :

$$\left|u_{i,i'}^{n+1}\right| \leq (1 - ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) - rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)) \left|u_{i,i'}^n\right| + ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \left|\lambda_{i-\frac{1}{2},i'}^n\right| + rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \left|\lambda_{i,i'-\frac{1}{2}}^n\right|. \tag{5.13}$$

Or :

$$\left|\lambda_{i-\frac{1}{2},i'}^n\right| \leq \underbrace{A_{i,i'}^n \left|u_{i-1,i'}^n\right| + (1 - A_{i,i'}^n) \left|u_{i,i'}^n\right|}_{(A_{i,i'}^n > 0 \text{ et } (1 - A_{i,i'}^n) > 0 \text{ car } A_{i,i'}^n \in]0;1[)} \leq \underbrace{A_{i,i'}^n \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + (1 - A_{i,i'}^n) \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}_{\text{En appliquant l'hypothèse de récurrence}} \tag{5.14}$$

$$= \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$$

De même :

$$\left|\lambda_{i,i'-\frac{1}{2}}^n\right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.15}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité 5.13 ainsi que les inégalités 5.14 et 5.15, on obtient :

$$\left|u_{i,i'}^{n+1}\right| \leq \underbrace{(1 - ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) - rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n)) \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}_{\text{En appliquant l'hypothèse de récurrence}} + ra_{i,i'}^n f'(u_{i,i'}^n) \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + rb_{i,i'}^n g'(u_{i,i'}^n) \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} =$$

$$\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

ce qui conclut la preuve du lemme 60 et achève la démonstration de la proposition 58.■

Chapitre 6

Bibliographie

[1] **F. Berger** : "Méthodes numériques utilisant des multiplications de distributions, application à l'hydrodynamique, à l'élastoplasticité et aux écoulements bifluides", thèse, Lyon, 1992.

[2] **F. Berger** : "Méthodes numériques de résolution d'équation aux dérivées partielles non linéaires contenant des produits de distributions ; Hydrodynamique et Elastoplasticité", C.R. Acad. Sci. Paris, **316**, Série 1, 1993, 195–200.

[3] **S. Bernard** : "Etude de lois de conservation scalaire à coefficients discontinus dans l'espace des fonctions généralisées, puis à l'aide de la notion d'entropie", thèse, Guadeloupe, 1999.

[4] **S. Bernard, J.F. Colombeau, A. Méril, L. Remaki** : "Conservation law with discontinuous coefficients". J. Math. Anal. Appl. 258, 2001, 63–86.

[5] **H.A. Biagioni** : "A non linear theory of generalized functions" Lectures Notes in Mathématics **1421**, Springer-Verlag, 1990.

[6] **H.Brezis** : "Analyse Fonctionnelle : Théorie et applications", Masson, 1986.

[7] **J.J. Cauret, J.F. Colombeau, A.Y. Le Roux** : "Discontinuous generalized solutions of non linear non conservative hyperbolic equations", J. Math. Anal. Appl.**139**, 1989, 552–573.

[8] **J.F. Colombeau** : "New generalized functions and multiplications of distibutions", North-Holland, Amsterdam, Oxford, New-York, 1984.

[9] **J.F. Colombeau** : "Multiplication of distributions : a tool in mathematics numerical engineering and theoritical physics", Lectures Notes in Mathematics **1532**, Springer-Verlag,

1992.

[10] **J.F. Colombeau, A.Y. Le Roux** : "Numerical methods for hyperbolic systems in non conservative form using products of distributions", in R. Vichevetsky and R.S Stepelman (editors), advances in Computer methods for partial and differential equations VI, IMACS, North-Holland, 1987.

[11] **A. Delcroix** : "Remarks on the embedding of spaces of distributions into spaces of Colombeau generalized functions", Novi Sad J. Math. Vol.**35**(2), 2005, 27–40.

[12] **F..Demengel, G.Demengel** : "Mesures et Distribution, théorie et illustrations par les exemples", Ellipses, Paris, 2000.

[13] **E Godlewski, P.A Raviard** : "Hyperbolic systems of conservation laws" Mathématiques et applications, Ellipses, Paris, 1991.

[14] **E Godlewski, P.A Raviard** : "Numerical approximation of hyperbolics systems of conservation laws" Volume **118** of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1996.

[15] **S.K.Godunov** : "A difference Scheme for numerical computation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations", Math.Sbornik, **47(6)**, 1959, 271–306.

[16] **L. Hormander** : "Lectures on non linear hyperbolic differential equations", Mathématiques et Applications, **26**, SMAI, Springer-Verlag, Heidleberg, New-York, 1997.

[17] **P.D Lax** : "Hyperbolic Partial Differential Equations", Lectures Notes, American Mathematical Society / CIMS, 2006.

[18] **A.Y Le Roux** : "Approximation de quelques problèmes hyperboliques non linéaires", Thèse d'Etat, Université de Rennes, 1979.

[19] **Y. Mizohata** : "On the evolution Problems with finite propagation speed", 1975.

[20] **M. Oberguggenberger** : "Multiplication of distribution and application to partial differential equations" Pitmann Research Notes in mathematics **259,** Longman, Essex, 1992.

[21] **M. Oberguggenberger** : "Systèmes hyperboliques à coefficients discontinus : Solutions généralisées et une application à l'accoustique linéaire", C.R. Math. Rep. Acad.Sci. Canada, Volume, X, No.3, 1988.

[22] **M. Oberguggenberger, M. Grosser, G. Hormann, M. Kunzinger** : " Non linear theory of generalized functions", Chapman et Hall / CRC Research Notes Math., Vol. **401**, Boca Raton, 1999.

[23] **M. Oberguggenberger, L.Lafon :** "generalized solutions to symmetric hyperbolic systems with discontinuous coefficients : The multidimensional case", journal of Mathemat-

ical Analysis and Applications **160**, 1991, 93–106.

[24] **L. Remaki** : "Etude théorique et numérique d'équations quasi-linéaire scalaires à coefficients discontinus et accoustiques linéaire 2d", Thèse, Lyon, 1997.

[25] **E.E Rosinger** : "Generalized solutions of non linear partial differential equations" North-Holland, Amsterdam, Oxford, New-York, 1987.

[26] **L. Schwartz** : "théorie des distributions" Tomes 1 et 2, Hermann, 1959.

[27] **D. Serre** : "Systèmes de lois de conservations" Tomes 1 et 2, Fondations, Diderot Editeur, Arts et sciences, Paris, New-York, 1996.

[28] **J. Smoller** : "Schock waves and reaction diffusion equations" Springer-Verlag, New-York, Heidleberg, Berlin, 1983.

[29] **E.F Toro** : "Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics", Springer-Verlag, Berlin, Heidleberg, New-York, 1997.

[30] **D. H Wagner** : "The Riemann Problem in two space dimensions for a single conservation law", SIAM J. Math. Anal 14(3), 1983.

[31] **T. Zhang, Y. Zheng** : "Two dimensional Riemann Problem for a single conservation law", Transactions of the American Mathematical Society, Volume **312**(2), 1989.

Chapitre 7

Annexe

Caractéristiques du matériel utilisé

Pour effectuer les tests numériques, nous avons utilisé un ordinateur portable Toshiba ayant un disque dur de capacité 80 Go tournant à 5400 tours/min, un processeur Celeron, une capacité mémoire de 512 Méga Octets et comme système d'exploitation Windows XP.

Le programme permettant la mise en forme des tests numériques a été écrit dans le langage matlab à l'aide du logiciel matlab.

Chapitre 8

Perspectives et théorème d'existence de solution forte "presque partout"

- Elargir les tests numériques à d'autres configurations,
- Comparaison de la méthode 2D développée ici avec d'autres méthodes pour les équations hyperboliques,
- Etudier de manière plus poussée le cas non linéaire (choix des paramètres intervenants dans le schéma,...)

Quelques éléments sur un théorème d'existence de solution forte

Dans les années 80, Michael Oberguggenberger et L. Laffon ont développé un théorème d'existence et d'unicité d'une solution généralisée pour des systèmes hyperboliques linéaires $(n \times n)$ de type :

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{j=1}^{m} A_j(x,t)\partial_j u + B(x,t)u + F(x,t) \\ u(x,0) = G(x) \end{cases} \tag{O}$$

avec :

- A_j, $B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))$ et A_j est symétrique (id est A_j a un représentant qui est une matrice symétrique),
- $F \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))^n$, $G \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m))^n$.

Ce théorème est montré que sous des **hypothèses de constances à l'infini** de A_j, B.

Or : l'hypothèse de constance à l'infini n'est pas vérifiée dans le cadre du problème abordé ici, ou on dispose à la place d'une hypothèse "de constance par morceaux".

Théorème attendu

On suppose que A_j est une matrice symétrique et que $\frac{\partial A_j}{\partial x_K}$, B sont à croissance logarithmique globale $(K, j = 1.....m)$ et "constantes par morceaux". Alors le problème (O) a une solution unique généralisée simplifiée $u \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))^n$.

Eléments encore à préciser :

- Une bonne notion de "constance par morceaux",
- Un contrôle de la vitesse de propagation

  (Non seulement $\lambda(K)$ doit être finie, mais on doit savoir la majorer en fonction du petit paramètre ε),
- Cadre algébrique : changer d'échelle asymptotique (Scarpalèzos) ? $(C, \mathcal{E}, \mathcal{P})$-algèbres (Marti/Dévoué) ?

Ceci étant, dans la configuration du problème abordée ici, nous avons malgré tout un théorème d'existence de solution forte "presque partout", puisque la solution u à notre problème défini ci- dessus appartient à $(\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R})^n$ (où $\mathcal{O}$ sera explicité ultérieurement) et non pas à $(\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))^n$comme nous l'envisagions au départ.

On considére le problème de Cauchy pour un système hyperbolique linéaire $(n \times n)$.

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{j=1}^{m} A_j(x,t)\partial_j u + B(x,t)u + F(x,t) & \text{(O)} \\ u(x,0) = G(x) \end{cases}$$

$*F \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))^n$,

$*A_j$ et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))$ et A_j matrice symétrique(A_j a un représentant $a_j(\varepsilon) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{E}_{M,S}(\mathbb{R}^{m+1}))$ qui soit une matrice symétrique),

$*G \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m))^n$.

Hypothèse ensembliste (H)

Soient $\mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et $\mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ deux ouverts non bornés simplement connexe de $\mathbb{R}^m$ à frontière lisse, $\mathcal{O}_{2,\varepsilon}$ fermé non borné simplement connexe de $\mathbb{R}^m$ à frontière lisse, deux à deux disjoints, et formant une partition de $\mathbb{R}^m$.

On suppose que les ouverts $\mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et $\mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ sont décroissants pour ε tendant vers 0, c'est-à-dire :

Il existe $\eta > 0$, pour tout $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0;\eta[^2$, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $\mathcal{O}_{i,\varepsilon_2} \subset \mathcal{O}_{i,\varepsilon_1}$, $i = 1, 3$.

On suppose que l'ouvert $\mathcal{O}_{2,\varepsilon}$ est croissant pour ε tendant vers 0.

Il existe $\eta > 0$, pour tout $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0;\eta[^2$, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $\mathcal{O}_{2,\varepsilon_1} \subset \mathcal{O}_{2,\varepsilon_2}$.

On pose $\mathcal{O} = \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]} \mathcal{O}_{2,\varepsilon}$.

Enfin, géométriquement $\mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et $\mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ sont "de part et d'autre" de $\mathcal{O}_{2,\varepsilon}$, c'est-à-dire :

Pour tout $p_1 \in \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$, pour tout $p_3 \in \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$, le segment $[p_1; p_3] \cap \mathcal{O}_{2,\varepsilon} \neq \varnothing$ et réciproquement, pour tout $p_2 \in \mathcal{O}_{2,\varepsilon}$, il existe $p_1 \in \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$, il existe $p_3 \in \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ tels que $p_2 \in]p_1; p_3[$.

On va chercher à résoudre ce problème dans $(\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m / \mathcal{O}) \times \mathbb{R})^n$.

Pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, on considère la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) défini sur $\mathbb{R}^m \times [0;T]$

$$\begin{cases} \partial_t u(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} a_j(\varepsilon)\partial_j u(\varepsilon) + b(\varepsilon)u(\varepsilon) + f(\varepsilon) & \text{(O)} \\ u(\varepsilon, x, 0) = g(\varepsilon) \end{cases}$$

avec pour donnée initiale la fonction lisse $g(\varepsilon) \in (C^\infty(\mathbb{R}^m))^n$ et pour coefficients les fonctions lisses $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ appartenant à $\mathcal{M}_n(C^\infty(\mathbb{R}^m \times [0;T]))$ et $f(\varepsilon) \in (C^\infty(\mathbb{R}^m \times [0;T]))^n$.

On suppose que pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, les coefficients $\{a_j(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto a_j(\varepsilon, x, t)\}$ et $\{b(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto b(\varepsilon, x, t)\}$ sont constants pour $x \in \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et pour $x \in \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$.

Nous allons rappeler quelques définitions utiles pour la suite.

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Definition 61 *Un élément $V \in \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^l)$ est à croissance logarithmique globale si il admet un représentant $\nu(\varepsilon)$ ayant la propriété suivante :*

$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \exists \eta > 0$ *tel que* $\sup_{y \in \mathbb{R}^l} |\nu(\varepsilon, y)| \leq N \log\left(\frac{C}{\varepsilon}\right) \quad 0 < \varepsilon < \eta$

Definition 62 *On dit que la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) a une vitesse de propagation finie sur $\Omega \times [0;T]$ si et seulement si :*

Pour tout compact K de Ω, il existe un nombre fini $\lambda(K)$ (vitesse de propagation) tel que :

Pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, si le support de $g(\varepsilon)|_\Omega$ est inclus dans K, alors le support de la solution $u(\varepsilon)|_{\Omega \times [0;T]}$ est inclus dans $\bigcup_{\xi \in Supp(g(\varepsilon))} (\xi, 0) + C^+_{\lambda(K)}$ où $C^+_{\lambda(K)} = \{(x,t) \in \Omega \times [0;T] \,/\, |x| \leq \lambda(K)t\}$.

Proposition 63 *Si pour tout $\varepsilon \in]0;1]$ les coefficients $\{a_j(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto a_j(\varepsilon, x, t)\}$ et*

$\{b(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto b(\varepsilon, x, t)\}$ *sont constants pour* $x \in \Omega$, *alors la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) a une vitesse de propagation finie sur* $\Omega \times [0; T]$.

Preuve : (voir Mizohata [19]).

Lemma 64 *Pour tout* $\varepsilon \in]0; 1]$, *la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) a une vitesse de propagation finie sur l'union* $(\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \times [0; T]) \cup (\mathcal{O}_{3,\varepsilon} \times [0; T]) = (\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}) \times [0; T]$.*De plus cette vitesse de propagation est bornée pour epsilon tendant vers* 0.

Preuve : Soit ε quelconque fixé dans $]0; 1]$.

Pour tout compact $K_\varepsilon \subset\subset \mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ tel que $\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}} \subset K_\varepsilon$, il existe $K_{1,\varepsilon} \subset\subset \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et $K_{3,\varepsilon} \subset\subset \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ tels que $K_\varepsilon \subset K_{1,\varepsilon} \cup K_{3,\varepsilon}$ et tels que $\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon}} \subset K_{1,\varepsilon}$ et $\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{3,\varepsilon}} \subset K_{3,\varepsilon}$.

Du fait que pour tout $\varepsilon \in]0; 1]$, les coefficients $\{a_j(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto a_j(\varepsilon, x, t)\}$ et

$\{b(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto b(\varepsilon, x, t)\}$ sont constants pour $x \in \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et pour $x \in \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$, le système hyperbolique classique (O) a une vitesse de propagation finie sur $\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \times [0; T]$ et une vitesse de propagation finie sur $\mathcal{O}_{3,\varepsilon} \times [0; T]$, donc il existe $\lambda_1(K_{1,\varepsilon})$ et $\lambda_3(K_{3,\varepsilon})$ tels que :

$$\operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{i,\varepsilon} \times [0;T]} \subset \bigcup_{\xi \in \operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{i,\varepsilon}}} (\xi, 0) + C^+_{\lambda_i(K_{i,\varepsilon})} \qquad \text{i=1,3.}$$

où $C^+_{\lambda_i(K_{i,\varepsilon})} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0; T] \,/\, |x| \leq \lambda_i(K_{i,\varepsilon})t\}$ i=1,3.

Par conséquent, on obtient :

$$\operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{(\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}) \times [0;T]} \subset \bigcup_{\xi \in \operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}}} (\xi, 0) + C^+_{\lambda(K_\varepsilon)}$$

où $\lambda(K_\varepsilon) = \max(\lambda_1(K_{1,\varepsilon}),\, \lambda_3(K_{3,\varepsilon}))$ et $C^+_{\lambda(K_\varepsilon)} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0; T] \,/\, |x| \leq \lambda(K_\varepsilon)t\}$.

En conclusion, pour tout $\varepsilon \in]0; 1]$, la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) a une vitesse de propagation finie sur $(\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}) \times [0; T]$.

De plus chaque $\lambda_i(K_{i,\varepsilon})$ dépend d'un compact $K_{i,\varepsilon}$ i=1,3, mais comme sur ce compact les coefficients sont constants, chaque $\lambda_i(K_{i,\varepsilon})$ i=1,3 est bornée lorsque epsilon tend vers 0, de même pour $\lambda(K_\varepsilon) = \max(\lambda_1(K_{1,\varepsilon}),\, \lambda_3(K_{3,\varepsilon}))$.

Lemma 65 *Pour* ε *tendant vers* 0, *la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) a une vitesse de propagation finie sur* $(\mathbb{R}^m / \mathcal{O}) \times [0; T]$.

Preuve :

Soit K un compact quelconque de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})$.

D'après les hypothèses faîtes sur $\mathcal{O}_{2,\varepsilon}$ pour ε tendant vers 0, il existe $\varepsilon_0(K) \in]0;1]$ ($\varepsilon_0(K)$ suffisament petit) tel que pour tout $\varepsilon \in]0;\varepsilon_0(K)[\quad K \cap (\mathcal{O}_{2,\varepsilon}/\mathcal{O}) = \varnothing$, soit donc pour tout $\varepsilon \in]0;\varepsilon_0(K)[\;\; K \subset (\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon})$.

On suppose que pour tout $\varepsilon \in]0;\varepsilon_0(K)[$, $\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}} \subset K$ alors pour tout $\varepsilon \in]0;\varepsilon_0(K)[$, $\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon}} \subset K$.

D'après le lemme 64, il existe $\lambda_\varepsilon(K)$ (vitesse de propagation) tel que :

$$\text{Pour tout } \varepsilon \in]0;\varepsilon_0(K)[\quad \operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{(\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon})\times[0;T]} \subset \bigcup_{\xi\in\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon}}}(\xi,0) + C^+_{\lambda_\varepsilon(K)}$$

où $C^+_{\lambda_\varepsilon(K)} = \{(x,t) \in (\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon}) \times [0;T] \,/\, |x| \leq \lambda_\varepsilon(K)t\}$.

On sait d'après le lemme 64 que les $\lambda_\varepsilon(K)$ sont bornés pour tout ε dans un voisinage de 0,

$$\exists\, M(K) > 0,\ \exists\, \eta_0(K) > 0,\ \forall \varepsilon \in]0;\eta_0(K)[\,, \quad 0 \leq \lambda_\varepsilon(K) \leq M(K).$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[$ on a :

$$\operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{(\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon})\times[0;T]} \subset \bigcup_{\xi\in\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon}}}(\xi,0) + C^+_{\lambda_\varepsilon(K)} \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_\varepsilon(K) \leq M(K)$$

D'après les hypothèses, les ouverts $\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon}$ sont décroissants pour tout $\varepsilon \in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[$, alors on a :

$$\mathbb{R}^m/\mathcal{O} = \bigcup_{\varepsilon\in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[} (\mathcal{O}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{3,\varepsilon})$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[0;T]} &= \bigcup_{\varepsilon\in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[} (\operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{(\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon})\times[0;T]}) \\
&\subset \bigcup_{\varepsilon\in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[} \left(\bigcup_{\xi\in\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathcal{O}_{1,\varepsilon}\cup\mathcal{O}_{3,\varepsilon}}}(\xi,0) + C^+_{\lambda_\varepsilon(K)} \right) \\
&\subset \bigcup_{\xi\in\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}}}(\xi,0) + C^+_{\max\limits_{\varepsilon\in]0;\operatorname{Min}(\varepsilon_0(K),\eta_0(K))[}(\lambda_\varepsilon(K))=M(K)}
\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout compact K de $\mathbb{R}^m/\mathcal{O}$, il existe $\eta(K) > 0$, il existe $M(K)$ (vitesse de propagation) tel que :

$$\text{Pour tout } \varepsilon \in]0;\eta(K)[\,, \text{ si } \operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}} \subset K \text{ alors } \operatorname{Supp} u(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[0;T]} \subset \bigcup_{\xi\in\operatorname{Supp} g(\varepsilon)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}}}(\xi,0) + C^+_{M(K)}$$

où $C^+_{M(K)} = \{(x,t) \in (\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [0;T] \,/\, |x| \leq M(K)t\}$.

Pour ε tendant vers 0, la famille de systèmes hyperboliques classiques (O) a une vitesse de propagation finie sur $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [0;T]$.

Afin de simplifier la rédaction, on écrira dans la suite :

Pour tout compact K de $\mathbb{R}^m/\mathcal{O}$, il existe $\eta(K) > 0$, il existe $K_0(K)$ compact de $\mathbb{R}^m/\mathcal{O}$ tel que :

Pour tout $\varepsilon \in]0;\eta(K)[$, si Supp $g(\varepsilon)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}} \subset K$ alors Supp $u(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[0;T]} \subset K_0(K)\times[0;T]$.

En remontant le temps, c'est-à-dire en prenant $t \in [-T;0]$, les lemmes 64 et 65 sont toujours vrais, ce qui permet d'avoir les lemmes 64 et 65 pour tout $t \in [-T;T]$.

Ceci nous permet d'introduire le théorème d'existence et d'unicité suivant.

Theorem 66 *On considére le système hyperbolique linéaire (O) où A_j, B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))$, $F \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^{m+1}))^n$ et $G \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m))^n$.*

On suppose que A_j est une matrice symétrique et que $\frac{\partial A_j}{\partial x_K}$ ainsi que B sont à croissance logarithmique globale $(K, j = 1.....m)$.

On suppose l'hypothèse ensembliste (H) vérifiée.

On suppose que A_j et B ont respectivement un représentant $a_j(\varepsilon)$ et $b(\varepsilon)$ telque pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, $\{a_j(\varepsilon) : (\varepsilon,x,t) \longmapsto a_j(\varepsilon,x,t)\}$ et $\{b(\varepsilon) : (\varepsilon,x,t) \longmapsto b(\varepsilon,x,t)\}$ sont constants pour $x \in \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et pour $x \in \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$, alors le problème (O) a une solution unique généralisée simplifiée $u \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R})^n$.

Preuve :

<u>Existence d'une solution généralisée simplifiée $u \in (\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R})^n$.</u>

Soit U une solution classique lisse au système hyperbolique classique (O) où les matrices A_j, B et F sont aussi des fonctions lisses.

Rappelons le réultat suivant, utile pour la suite.

Lemma 67 *Soit $T > 0$ fixé. On suppose qu'il existe K compact de $\mathbb{R}^m$ tel que supp$(U|_{\mathbb{R}^m\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$ et supp$(F|_{\mathbb{R}^m\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$, alors on a l'estimation de l'énergie suivante :*

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq c(n)\left(2\|B\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\|\sum_{j=1}^m \partial_j A_j\right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1\right)\|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

$$+\|F(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \qquad \forall t \in [-T;T] \qquad (1)$$

où $c(n)$ n'est qu'une constante dépendant de n.

En intégrant (1) par rapport à t pour $t > 0$, on obtient :

$$\|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \int_0^t c(n) \left(2 \|B\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\| \sum_{j=1}^m \partial_j A_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1 \right)$$

$$\|U(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, d\tau + \int_0^t \|F(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, d\tau \qquad \forall t \in [-T;T]\,. \qquad (2)$$

Rappelons le résultat suivant, utile pour la suite.

<u>Lemme de Gronwall :</u>

Soit $\alpha : [t_0;t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et positive et u_0 constance positive. Si $0 \leq f(t) \leq u_0 + \int_0^t f(s)\alpha(s)ds$ alors $0 \leq f(t) \leq u_0 \exp\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)$.

On pose

$$f(t) = \|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)}\,,$$

$$\alpha(s) = c(n) \left(2 \|B\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\| \sum_{j=1}^m \partial_j A_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1 \right),$$

$$u_0 = \int_0^t \|F(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, d\tau.$$

On applique le lemme de Gronwall à (2) pour $t < T$ et on obtient :

$$\|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \int_0^t \|F(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, d\tau$$
$$\exp\left(\int_0^t c(n) \left(2 \|B\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\| \sum_{j=1}^m \partial_j A_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1 \right) ds \right),$$

soit donc

$$\|U(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \left(\|U(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \left| \int_0^t \|F(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, d\tau \right| \right)$$
$$\exp c(n)T \left(2 \|B\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\| \sum_{j=1}^m \partial_j A_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1 \right) \forall t \in [-T;T].$$

(3)

Dans un premier temps, on suppose que la condition initiale G est à support compact et que la projection du support de F sur l'hyperplan $\{t = 0\}$ est aussi compacte.

Soit $T > 0$ fixé, il existe $g(\varepsilon)$ et $f(\varepsilon)$ représentants respectifs de G et F vérifiant :

$$\exists K_0 \subset\subset \mathbb{R}^m,\ \forall \varepsilon \in]0;1]\,, \quad supp(g(\varepsilon)) \subset K_0 \ \text{ et } supp(\,f(\varepsilon)|_{\mathbb{R}^m\times[-T;T]}) \subset K_0 \times [-T;T]\,.$$

Soient $a_j(\varepsilon)$ et $b(\varepsilon)$ des représentants respectifs de A_j et B, telque pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, $\{a_j(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto a_j(\varepsilon, x, t)\}$ et $\{b(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \longmapsto b(\varepsilon, x, t)\}$ sont constants pour $x \in \mathcal{O}_{1,\varepsilon}$ et pour $x \in \mathcal{O}_{3,\varepsilon}$.

On construit une fonction $\{\ u(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \ \rightarrow\ u(\varepsilon, x, t)\}|_{]0,1]\times\mathbb{R}^{m+1}}$ tel que $u(\varepsilon)$ soit une solution lisse classique du système hyperbolique classique (O) dans $\mathbb{R}^m \times [-T;T]$ avec pour donnée initiale $g(\varepsilon)$ et pour coefficients $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ et $f(\varepsilon)$ définis comme suit :

$$\{g(\varepsilon) : (\varepsilon, x) \rightarrow g(\varepsilon, x)\}|_{]0,1]\times\mathbb{R}^m},\ \{\ a_j(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \ \rightarrow\ a_j(\varepsilon, x, t)\}|_{]0,1]\times\mathbb{R}^{m+1}}\,,$$
$$\{\ b(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \ \rightarrow\ b(\varepsilon, x, t)\}|_{]0,1]\times\mathbb{R}^{m+1}} \text{ et } \{\ f(\varepsilon) : (\varepsilon, x, t) \ \rightarrow\ f(\varepsilon, x, t)\}|_{]0,1]\times\mathbb{R}^{m+1}}.$$

Montrons que $u(\varepsilon) \in (\mathcal{E}_{M,S}((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$, alors sa classe U sera solution du problème linéaire (O) dans $(\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}))^n$.

D'après le lemme 65, le système hyperbolique classique (O) a une vitesse de propagation finie sur $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T;T]$ et puisque $supp(\,u(\varepsilon, ., 0)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}})$ est compact, il existe un compact K de $\mathbb{R}^m/\mathcal{O}$ (plus grand que K_0) tel que, pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, $supp(\,u(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$.

En conclusion, $supp(\,f(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$ et $supp(\,u(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$, on applique le lemme 67, $u(\varepsilon)$, $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ et $g(\varepsilon)$ vérifie l'estimation de l'énergie (1), puis par le lemme de Gronwall, l'inégalité (3).

$$\|u(\varepsilon, ., t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \leq \left(\|g(\varepsilon, .)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} + \left| \int_0^t \|f(\varepsilon, ., \tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})}\, d\tau \right| \right)$$
$$\exp\left(c(n)T \left(2\,\|b\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\| \sum_{j=1}^m \partial_j a_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1 \right) \right)$$
$$\forall t \in [-T;T]\,. \tag{4}$$

En appliquant le fait que $g(\varepsilon)$ et $f(\varepsilon)$ sont modérées et à support compacts par rapport à x inclus dans un compact indépendant de ε et que $\partial_K A_j$ et B sont à croissance logarithmique, alors on obtient :

a) $\|b\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} = \sup\limits_{(x,t)\in K\times[-T;T]} |b(\varepsilon, x, t)| \leq N_1 \log\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)$.

b) $\left\| \sum\limits_{j=1}^m \partial_j a_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} = \sup\limits_{(x,t)\in K\times[-T;T]} \left| \sum\limits_{j=1}^m \partial_j a_j(\varepsilon, x, t) \right| \leq \sum\limits_{j=1}^m \sup\limits_{(x,t)\in K\times[-T;T]} |\partial_j a_j(\varepsilon, x, t)|$
$\leq \sum\limits_{j=1}^m N_2 \log\left(\frac{C}{\varepsilon}\right) \leq m N_2 \log\left(\frac{C}{\varepsilon}\right) \leq M_1 \log\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)$.

c) $\|g(\varepsilon,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} = \int\limits_K |g(\varepsilon,x)|^2\,dx \leq |K| \sup\limits_{x\in K} |g(\varepsilon,x)|^2 \leq |K|\, C^2\varepsilon^{-2N_1} \leq C_1\varepsilon^{-N}$.

d) $\left|\int\limits_0^t \|f(\varepsilon,.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})}\,d\tau\right| \leq \sup\limits_{\tau\in[0;\,t]} \|f(\varepsilon,.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \int\limits_0^t d\tau \leq T \sup\limits_{\tau\in[0;\,t]} \int\limits_K |f(\varepsilon,x,\tau)|^2\,dx \leq$
$T\,|K| \sup\limits_{\tau\in[0;\,t]} \sup\limits_{x\in K} |f(\varepsilon,x,\tau)|^2 \leq T\,|K| \sup\limits_{(x,\tau)\in K\times[0,\,t]} |f(\varepsilon,x,\tau)|^2 \leq T\,|K|\, C^2\varepsilon^{-2N_2} \leq C_2T\ \varepsilon^{-N}$.
donc on obtient

$$\begin{aligned}\|u(\varepsilon,.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} &\leq \left(C_1\varepsilon^{-N} + C_2T\varepsilon^{-N}\right)\exp\left\{C_3T\ \left(1+N\log\left(\tfrac{C}{\varepsilon}\right)\right)\right\} \qquad (5)\\ &\leq C_4\varepsilon^{-N_1}.\end{aligned}$$

où N_1 et C_4 sont des constantes indépendantes de ε (on voit la nécessité de la croissance logarithmique).

Il reste à vérifier que $\partial^\alpha u(\varepsilon,x,t)$ où $\alpha\in\mathbb{N}^{m+1}$ vérifie une même estimation que précédemment.

a)On va procéder par récurrence sur l'ordre de dérivation par rapport à la variable x_K.

Pour toute solution U au problème (O), alors le vecteur V des dérivées successives de U par rapport à la variable x_K à l'ordre r $V = (\partial^{\alpha_1}U,\partial^{\alpha_2}U,.....,\partial^{\alpha_\nu}U)$ avec $|\alpha_i| = r$ est solution du système symétrique hyperbolique suivant (Il suffit de dériver l'équation (O) par rapport à la variable x_K à l'ordre r).

$$\partial_t V = \sum_{j=1}^m \widetilde{A_j}\partial_j V + \widetilde{B}\ V + R(V) \qquad \text{où } \widetilde{A_j} = \begin{pmatrix} A_j & 0 & 0 & .... & 0\\ 0 & A_j & . & . & .\\ 0 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & 0\\ 0 & .... & 0 & 0 & A_j\end{pmatrix}$$

est la matrice diagonale ($\nu m\times\nu m$) dont la diagonale comprend ν copies de A_j, $\widetilde{B}$ est la matrice ($\nu m\times\nu m$) construite à partir de B et de $\partial_K A_j$ $(K,j=1,....,m)$ et enfin $R(V)$ terme impliquant toutes les dérivées de U d'ordre plus petit que r.

Si par hypothèse de récurrence on a des estimations du type (5) pour tous les $\partial^\beta u(\varepsilon,x,t)$ par rapport à la variable x_K avec $|\beta|<r$, montrons que l'on obtient encore une estimation de type (5) pour tous les $\partial^\alpha u(\varepsilon,x,t)$ par rapport à la variable x_K avec $|\alpha| = r$.

En observons minutieusement la structure de $\widetilde{A_j}$ et $\widetilde{B}$ ainsi que les propriétés de modération de tous les coefficients impliqués, il suffit de remplacer dans l'estimation (3) F par $R(u(\varepsilon,x,t))$ et on obtient alors une estimation de type (5) pour tous les V solution du problème :

$$\partial_t V = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{A_j} \partial_j V + \widetilde{B}\ V + R(V)$$

Soit donc on obtient une estimation de type (5) pour tous les $\partial^\alpha u(\varepsilon, x, t)$ par rapport à la variable x_K avec $|\alpha| = r$. En effet, on rappelle que V est le vecteur des dérivées successives de n'importe quelle solution U au problème (O) par rapport à x_K à l'ordre r et que $u(\varepsilon, x, t)$ est justement une solution du problème (O).

On a donc montré par récurrence que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$, on a une inégalité du type $\left\|\partial^\alpha_{x_K} u(\varepsilon, ., t)\right\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-N}$.

b) Il reste à avoir une estimation de type (5) pour les dérivées successives de U par rapport à la variable t.

On a l'inégalité suivante :

$$\|\partial_t u(\varepsilon, ., t)\|^2_{L^2} \leq \left\|\sum_{j=1}^{m} a_j\right\|_{L^\infty} \|\partial_j u(\varepsilon, ., t)\|^2_{L^2} + \|b\|_{L^\infty} \|u(\varepsilon, ., t)\|^2_{L^2} + \|f(\varepsilon, ., t)\|^2_{L^2}$$

$\leq C_1\varepsilon^{-N} + C_2\varepsilon^{-N} + C_3\varepsilon^{-N} \leq C_5\varepsilon^{-N_1}$, d'après les conditions de modération des coefficients impliqués et de la modération des dérivées successives de $u(\varepsilon, x, t)$ par rapport à la variable x_K.

Maintenant si on dérive l'équation (O) par rapport à la variable x_K, alors on obtient de la même façon que précédemment une estimation de type (5) pour $\partial_t \partial_K u(\varepsilon, x, t)$, soit donc $\|\partial_t \partial_K u(\varepsilon, ., t)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-N}$.

Puis ensuite, on dérive l'équation (O) deux fois par rapport à la variable t, puis comme précédemment, on obtient une estimation de type (5) pour $\partial_t \partial_t u(\varepsilon, x, t)$, soit donc $\|\partial_t \partial_t u(\varepsilon, ., t)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-N}$, et l'on continue le processus ainsi indéfiniment et l'on obtient, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ une inégalité du type $\|\partial^\alpha_t u(\varepsilon, ., t)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-N}$.

En conclusion, on obtient :

$\forall T > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{m+1},\ \exists N_{T,\alpha} \in \mathbb{N},\ \exists C_{T,\alpha} > 0,\ \exists \eta_{T,\alpha} > 0,\ \forall \varepsilon \in \left]0; \eta_{T,\alpha}\right],\ \forall t \in [-T; T]\,,$

$\|\partial^\alpha u(\varepsilon, ., t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \leq C_{T,\alpha}\varepsilon^{-N_{T,\alpha}}$

Et donc, on obtient aussi une majoration pour la norme H_s de $u(\varepsilon, ., .)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$\forall T > 0,\ \forall s \in \mathbb{N},\ \exists N_{T,s} \in \mathbb{N},\ \exists C_{T,s} > 0,\ \exists \eta_{T,s} > 0,\ \forall \varepsilon \in \left]0; \eta_{T,s}\right],$

$$\|u(\varepsilon, ., .)\|_{H_s((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T])} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u(\varepsilon, ., .)\|^2_{L^2((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T])}\right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq s} \int_{-T}^{T} \|\partial^\alpha u(\varepsilon, ., t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})}\, dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq s} 2TC_{T,\alpha}^2 \varepsilon^{-2N_{T,\alpha}} \right)^{1/2} \leq C_{T,s}\varepsilon^{-N_{T,s}}.$$

Quelque soit Ω ouvert de classe C^1 borné de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$, il existe $T_0 > 0$ tel que $\Omega \subset (\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T_0; T_0]$, et donc

Quelque soit Ω ouvert de classe C^1 borné de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $N_{\Omega,T_0,s} \in \mathbb{N}$, il existe $C_{\Omega,T_0,s} > 0$, il existe $\eta_{\Omega,T_0,s} > 0$, pour tout $\varepsilon \in \,]0; \eta_{\Omega,T_0,s}]$, $\|u(\varepsilon,.,.)\|_{H_s(\Omega)} \leq \|u(\varepsilon,.,.)\|_{H_s((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T_0;T_0])} \leq C_{\Omega,T_0,s}\varepsilon^{-N_{\Omega,T_0,s}}$.

On va appliquer l'une des inégalités de Sobolev.

Corollary 68 *Dans ce qui suit, m, N et p sont des entiers naturels non nuls. Soit Ω ouvert de classe C^1 borné de $\mathbb{R}^N$. On supose que $m - N/p$ n'est pas entier et stictement positif, on pose $k = E(m - N/p)$.*

Il existe $C(\Omega, N, p) > 0$ tel que : $\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ où $|\alpha| \leq k$.

On applique le corollaire,

Quelque soit Ω ouvert de classe C^1 borné de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$, pour tout $s \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, $|\alpha| \leq E(s - (m+1)/2)$, il existe $N_{\Omega,T_0,s,\alpha} \in \mathbb{N}$, il existe $C_{\Omega,T_0,s,\alpha} > 0$, il existe $\eta_{\Omega,T_0,s,\alpha} > 0$, pour tout $\varepsilon \in \,]0; \eta_{\Omega,T_0,s,\alpha}]$, $\|\partial^\alpha u(\varepsilon,.,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega, m+1, 2)\|u(\varepsilon,.,.)\|_{H_s(\Omega)} \leq C(\Omega, m+1, 2)C_{\Omega,T_0,s}\varepsilon^{-N_{\Omega,T_0,s}} \leq C_{\Omega,T_0,s,\alpha}\varepsilon^{-N_{\Omega,T_0,s},\alpha}$.

Quelque soit K compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$, il existe $T_1 > 0$, il existe Ω_0 ouvert de classe C^1 borné de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$ tel que $K \subset \Omega_0 \subset (\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T_1; T_1]$, d'où

$\forall\ K \subset\subset (\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$, $\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, $|\alpha| \leq E(s - (m+1)/2)$, $\exists N_{\Omega_0,T_1,s,\alpha} \in \mathbb{N}$, $\exists C_{\Omega_0,T_1,s,\alpha} > 0$, $\exists \eta_{\Omega_0,T_1,s,\alpha} > 0$, $\forall \varepsilon \in \,]0; \eta_{\Omega_0,T_1,s,\alpha}]$, $\sup_{(x,t)\in K} |\partial^\alpha u(\varepsilon, x, t)| = \|\partial^\alpha u(\varepsilon,.,.)\|_{L^\infty(K)} \leq \|\partial^\alpha u(\varepsilon,.,.)\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq C_{\Omega_0,T_1,s,\alpha}\varepsilon^{-N_{\Omega_0,T_1,s},\alpha}$.

On en déduit donc que $u(\varepsilon)$ est modérée et sa classe U est solution du problème (O) dans $(\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}))^n$.

Maintenant si Fet G ne sont pas à support compact, on va procéder à un recollement. On choisit une partition de l'unité localement finie $\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\mathfrak{X}_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Soit $u_k(\varepsilon)$ solution classique lisse du système hyperbolique classique (O) dans $\mathbb{R}^m \times [-T; T]$ avec pour donnée initiale $\mathfrak{X}_k g(\varepsilon)$ et pour coefficients $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ et $\mathfrak{X}_k f(\varepsilon)$.

On se retrouve comme précédemment avec la donnée initiale $\mathfrak{X}_k g(\varepsilon)$ à support compact inclus dans un compact indépendant de ε, et $supp(\mathfrak{X}_k f(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]})$ inclus dans un compact $K \times [-T;T]$ où K est indépendant de ε, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k(\varepsilon)$ est modérée.

D'après le lemme 65, le système hyperbolique classique (O) a une vitesse de propagation finie sur $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T;T]$ et comme $supp(u_k(\varepsilon,.,0)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}})$ est compact, alors à $T > 0$ fixé, il existe un compact K de $\mathbb{R}^m$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, $supp(u_k(\varepsilon)) \cap ((\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T;T]) \subset K \times [-T;T]$.

Soit θ un ouvert relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]$, il existe des entiers naturels $k_1,..k_n$ tel que :

$$supp(u_k(\varepsilon)) \cap \theta \neq \varnothing \Leftrightarrow k \in \{k_1,..k_n\},$$

c'est-à-dire le support des $u_k(\varepsilon)$ intercepté avec la bande $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T;T]$ constitue une famille localement finie.

Posons $u'(\varepsilon,x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\varepsilon,x,t)$ (Il n'y a aucune raison de penser que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\varepsilon,x,t)$ est la solution $u(\varepsilon,x,t)$ du problème (O) construite précédemment).

$u'(\varepsilon)|_\theta = \sum_{i=1}^{n} u_{k_i}(\varepsilon)$ est modérée comme somme finie de modérées.

Par conséquent, pour tout $T > 0$, pour tout ouvert θ relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]$, $u'(\varepsilon)|_\theta \in (\mathcal{E}_{M,S}(\theta))^n$.

Or, pour tout ouvert θ relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}$, il existe $T' > 0$ tel que $\theta \subset (\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T';T']$, donc $u'(\varepsilon)|_\theta \in (\mathcal{E}_{M,S}(\theta))^n$ pour tout ouvert θ relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}$, soit donc $u'(\varepsilon) \in (\mathcal{E}_{M,S}((\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times \mathbb{R}))^n$.

Il est clair que $u'(\varepsilon)$ est solution du problème (O).

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \partial_t u_k(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} a_j(\varepsilon)\partial_j u_k(\varepsilon) + b(\varepsilon)u_k(\varepsilon) + \mathfrak{X}_k f(\varepsilon) \\ u_k(\varepsilon,.,0) = \mathfrak{X}_k g(\varepsilon) \end{cases} \qquad (*)$$

Avec les arguments de $\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ famille localement finie et partition localement finie, on peut écrire $u'(\varepsilon)|_\theta$, $f(\varepsilon)$ et $g(\varepsilon)$ avec la même famille finie, quitte à ajouter un nombre finie d'indices bien choisis, soit

$$u'(\varepsilon)|_\theta = \sum_{i=1}^{n} u_{k_i}(\varepsilon)$$
$$f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{k_i} f(\varepsilon)$$
$$g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{k_i} g(\varepsilon)$$

On en déduit à partir de (*),

$$\begin{cases} \partial_t \left(\sum_{i=1}^{n} u_{k_i}(\varepsilon)\right) = \sum_{j=1}^{m} a_j(\varepsilon)\partial_j \left(\sum_{i=1}^{n} u_{k_i}(\varepsilon)\right) + b(\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n} u_{k_i}(\varepsilon)\right) + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{k_i} f(\varepsilon) \\ \sum_{i=1}^{n} u_{k_i}(\varepsilon,.,0) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{k_i} g(\varepsilon) \end{cases}$$

Soit donc

$$\begin{cases} \partial_t\, u'(\varepsilon)|_\theta = \sum_{j=1}^{m} a_j(\varepsilon)\partial_j\, u'(\varepsilon)|_\theta + b(\varepsilon)\, u'(\varepsilon)|_\theta + f(\varepsilon) \\ u'(\varepsilon,.,0)|_\theta = g(\varepsilon) \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $T > 0$, pour tout ouvert θ relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]$, $u'(\varepsilon)|_\theta$ est solution classique lisse du problème (O) avec pour donnée initiale $g(\varepsilon)$ et pour coefficients $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ et $f(\varepsilon)$.

Or, pour tout ouvert θ relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}$, il existe $T' > 0$ tel que $\theta \subset (\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T';T']$, donc $u'(\varepsilon)|_\theta$ est solution classique lisse du problème (O) avec pour donnée initiale $g(\varepsilon)$ et pour coefficients $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ et $f(\varepsilon)$ pour tout ouvert θ relativement compact de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}$, soit donc $u'(\varepsilon)$ est solution classique lisse du problème (O) avec pour donnée initiale $g(\varepsilon)$ et pour coefficients $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ et $f(\varepsilon)$.

En conclusion, $u'(\varepsilon) \in (\mathcal{E}_{M,S}((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$ et est solution classique lisse du problème (O), donc sa classe U est solution du problème (O) dans $(\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$.

<u>Unicité de la solution généralisée simplifiée.</u>

Soient U_1 et U_2 deux solutions généralisées simplifiées au problème (O) et posons $W_0 = U_1 - U_2$ de représentant $w_0(\varepsilon)$.

Il est clair que $W_0 \in (\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$ et que W_0 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t W = \sum_{j=1}^{m} A_j(x,t)\partial_j W + B(x,t)W \\ W(x,0) = 0 \end{cases},$$

.

où A_j et B vérifient les hypothèses du théorème.

Pour $w_0(\varepsilon)$ représentant de W_0, pour $a_j(\varepsilon)$ et $b(\varepsilon)$ les représentants respectifs de A_j et B construits dans la première partie et vérifiant les hypothèses de constance et d'estimation logarithmique, il existe $d(\varepsilon) \in (\mathcal{N}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$ et $d_0(\varepsilon) \in (\mathcal{N}_S(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})^n$ tels que $w_0(\varepsilon)$ soit solution classique du problème

$$\begin{cases} \partial_t w = \sum_{j=1}^{m} a_j(\varepsilon)\partial_j w + b(\varepsilon)w + d(\varepsilon) \\ w(x,0) = d_0(\varepsilon,x) \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

dans $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T;T]$.

Dans un premier temps, on suppose que la condition initiale $d_0(\varepsilon)$ a un support compact indépendant de epsilon et que la projection du support de $d(\varepsilon)$sur l'hyperplan $\{t=0\}$ est incluse dans un compact indépendant de epsilon.

De façon similaire à ce qui a été fait pour la preuve de l'existence de la solution généralisée simplifiée, par le même argument de vitesse de propagation finie, comme $supp(\, w_0(\varepsilon,.,0)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}})$ est compact, à $T>0$ fixé, il existe un compact K de $\mathbb{R}^m/\mathcal{O}$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, $supp(\, d(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$ et $supp(\, w_0(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]}) \subset K \times [-T;T]$.

En conclusion, on applique le lemme 67, $w_0(\varepsilon)$, $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ et $d_0(\varepsilon)$ vérifie l'estimation de l'énergie (1), puis par le lemme de Gronwall, l'inégalité (3).

$$\|w_0(\varepsilon,.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \leq \left(\|d_0(\varepsilon,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} + \left| \int_0^t \|d(\varepsilon,.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})}\, d\tau \right| \right)$$
$$\exp\left(c(n)T \left(2\,\|b\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\| \sum_{j=1}^m \partial_j a_j \right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1 \right) \right)$$
$$\forall t \in [-T;T]. \qquad (6)$$

En utilisant les propriétés de modération et d'estimation logarithmique des coefficients $a_j(\varepsilon)$ et $b(\varepsilon)$ comme précédemment (voir a) et b)) et du fait que $d(\varepsilon) \in (\mathcal{N}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$ et $d_0(\varepsilon) \in (\mathcal{N}_S(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})^n$, alors :

a) $\left| \int_0^t \|d(\varepsilon,.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})}\, d\tau \right| \leq \sup_{\tau\in[0;\,t]} \|d(\varepsilon,.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \int_0^t d\tau \leq T \sup_{\tau\in[0;\,t]} \int_K |d(\varepsilon,x,\tau)|^2\, dx \leq$
$T\,|K| \sup_{\tau\in[0;\,t]} \sup_{x\in K} |d(\varepsilon,x,\tau)|^2 \leq T\,|K| \sup_{(x,\tau)\in K\times[0,\,t]} |d(\varepsilon,x,\tau)|^2 \leq T\,|K|\, C^2\varepsilon^{2N} \leq C_2 T\ \varepsilon^M$.

b) $\|d_0(\varepsilon,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} = \int_K |d_0(\varepsilon,x)|^2\, dx \leq |K| \sup_{x\in K} |d_0(\varepsilon,x)|^2 \leq |K|\, C^2\varepsilon^{2N_1} \leq C_1\varepsilon^N$.

On obtient immédiatement une estimation de la forme.

$$\|w_0(\varepsilon,.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \leq C\varepsilon^M \qquad -T \leq t \leq T \qquad (7).$$

où $M \in \mathbb{N}$ et ε petit.

A partir de là, par récurrence comme pour la preuve de l'existence de la solution généralisée simplifiée, pour tout $T>0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, on obtient une majoration de type (7) pour la norme $L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})$ de $\partial^\alpha w_0(\varepsilon,.,t)$, pour tout $t \in [-T;T]$, c'est-à-dire une majoration de type (7) pour la norme $H_s((\mathbb{R}^m/\mathcal{O}) \times [-T;T])$ de $w_0(\varepsilon,.,.)$, pour tout $s \in \mathbb{N}$, et en appliquant la même méthode que pour la preuve de l'existence de la solution généralisée

simplifiée, par le théorème d'injection continue de Sobolev, on obtient une majoration de type (7) pour la norme $L^\infty(K)$ de $\partial^\alpha w_0(\varepsilon,.,.)$, pour tout compact K de $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}$, soit donc $w_0(\varepsilon)\in(\mathcal{N}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$, et donc $W_0=U_1-U_2=0$ dans l'espace des fonctions généralisées simplifiées d'où l'unicité de la solution du problème (O).

Maintenant si $d_0(\varepsilon)$ et $d(\varepsilon)$ ne sont pas à support compact, on va procéder à un recollement. On choisit une partition de l'unité localement finie $\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\mathfrak{X}_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Soit $w_{0,k}(\varepsilon)$ solution classique lisse du problème (I) dans $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]$ avec pour donnée initiale $\mathfrak{X}_k d_0(\varepsilon)$ et pour coefficients $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ et $\mathfrak{X}_k d(\varepsilon)$.

On se retrouve comme précédemment avec la donnée initiale $\mathfrak{X}_k d_0(\varepsilon)$ à support compact inclus dans un compact indépendant de ε, et $supp(\mathfrak{X}_k d(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]})$ inclus dans un compact $K\times[-T;T]$ où K est indépendant de ε, donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $w_{0,k}(\varepsilon)\in(\mathcal{N}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$.

Par le même argument de vitesse de propagation finie que pour la preuve de l'existence de la solution généralisée simplifiée, le support des $w_{0,k}(\varepsilon)$ intercepté avec la bande $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]$ constitue une famille localement finie.

Posons $w(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{+\infty}w_{0,k}(\varepsilon)$ et comme dans la preuve de l'existence de la solution généralisée simplifiée, $w(\varepsilon)\in(\mathcal{N}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$ et est solution classique du problème (I).

Il reste à montrer que $w(\varepsilon)$ est un représentant de W_0.

Posons $v(\varepsilon)=w_0(\varepsilon)-w(\varepsilon)$.

Il est évident que $v(\varepsilon)$ est solution classique du problème suivant,

$$\begin{cases} \partial_t w=\sum_{j=1}^{m}a_j(\varepsilon)\partial_j w+b(\varepsilon)w+0 \\ w(x,0)=0 \end{cases}$$

dans $(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]$.

On se retrouve dans le cas où la condition intiale, la fonction $\{x\to 0\}$, a un support compact indépendant de epsilon et que la projection du support du coéfficient $\{(x,t)\to 0\}$ sur l'hyperplan $\{t=0\}$ est incluse dans un compact indépendant de epsilon. De façon similaire à ce qui a été fait pour la preuve de l'existence de la solution généralisée simplifiée, par le même argument de vitesse de propagation finie, comme $supp(v(\varepsilon,.,0)|_{\mathbb{R}^m/\mathcal{O}})$ est compact, à $T>0$ fixé, il existe un compact K de $\mathbb{R}^m/\mathcal{O}$ tel que, pour tout $\varepsilon\in]0;1]$, $supp(\{(x,t)\to 0\}|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]})\subset K\times[-T;T]$ et $supp(v(\varepsilon)|_{(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times[-T;T]})\subset K\times[-T;T]$.

En conclusion, on applique le lemme 67, $v(\varepsilon)$, $a_j(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $\{(x,t) \to 0\}$ et $\{x \to 0\}$ vérifie l'estimation de l'énergie (1), puis par le lemme de Gronwall, l'inégalité (3).

$$\|v(\varepsilon,.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} \leq (0+0) \exp\left(c(n)T\left(2\|b\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + \left\|\sum_{j=1}^m \partial_j a_j\right\|_{L^\infty(K\times[-T;T])} + 1\right)\right) \quad \forall t \in [-T;T]. \tag{8}$$

En conclusion, $\|v(\varepsilon,.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m/\mathcal{O})} = 0$, soit donc $v(\varepsilon) = 0$, d'où $w_0(\varepsilon) = w(\varepsilon)$.

Pour conclure, $w(\varepsilon) \in (\mathcal{N}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$ et sa classe W_0 est nulle dans $(\mathcal{G}_S((\mathbb{R}^m/\mathcal{O})\times\mathbb{R}))^n$, d'où l'unicité de la solution généralisée simplifiée du problème (O).

Résumé

Nous nous intéressons à la recherche et au calcul numérique de solutions faibles (au sens des fonctions généralisées) de l'équation de transport non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,y,t) + b(x,y,t)\frac{\partial g(u)}{\partial y}(x,y,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

complétée de la condition initiale : $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ où les fonctions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ et $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ (mais peuvent être discontinues), les fonctions f et g sont lisses et monotones, la fonction $\{(x,y) \to u_0(x,y)\}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Des rappels sur les fonctions généralisées nous permettent d'introduire leur produit tensoriel. Un des résultats clés (pour déterminer ultérieurement les solutions faibles cherchées) donne des conditions suffisantes pour que, lorsqu'une somme de fonctions généralisées (de type produit d'Heaviside ou de Dirac) est associée à 0, chacun des termes de la somme est nul. Grâce à ces résultats théoriques, on résout le problème de Riemann 2D à l'aide d'un solveur s'écrivant comme produit tensoriel de fonctions type Heaviside (ou comme somme de produit tensoriel de fonctions type Heaviside) afin d'obtenir les solutions faibles. Ces solutions faibles permettent la construction des schémas numériques de type Godunov 2D. Nous les validons par des test numériques comparant les résultats obtenus par ces schémas 2D et ceux de la méthode du splitting. Ces tests montrent que les schémas numériques 2D sont aussi fiables que ceux par splitting, alors qu'ils sont plus simples dans leur écriture. Une étude comparative plus complète entre les deux types de schémas numériques montre de plus que les schémas 2D sont nettement moins coûteux à la fois dans les cas linéaire et non linéaire et qu'ils sont stables pour la norme L^∞, contrairement aux schémas par splitting. Enfin des perspectives ainsi qu'un théoréme d'existence de solutions fortes "presque partout" pour des systèmes hyperboliques linéaires sont abordés.

Abstract

This work is devoted to the theoritical research and to the numerical calculus of weak solutions (in the sens of generalized functions) for the non linear transport equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,y,t) + b(x,y,t)\frac{\partial g(u)}{\partial y}(x,y,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

with the initial condition $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ where the functions $\{(x,y,t) \to a(x,y,t)\}$ and $\{(x,y,t) \to b(x,y,t)\}$ belong to $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ (but can be discontinuous), the functions f and g are smooth and monotonous, the function $\{(x,y) \to u_0(x,y)\}$ belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. We recall the necessary notions on nonlinear generalized functions for introducing their tensorial product. The main results (to determine the weak solutions) are sufficient conditions so that, when a sum of généralized functions (like Heaviside or Dirac products) is associated with zero, each terms of the sum is equal to zero. Thanks to these theoretical results, we can solve the Riemann problem with the help of a solver written like tensorial product of Heaviside functions (or like a sum of tensorial product of Heaviside functions) in order to obtain the weak solutions. These weak solutions allow to develop two dimensional numerical Godunov type schemes. Then, numerical tests are performed which give a comparison between the results obtained by these 2D schemes and the ones of the splitting method. These tests prove that the 2D numerical schemes are as reliable as the ones obtained by splitting. They are also more simple in their expression. Moreover, a more detailed comparative study of the two types of numerical schemes show that the 2D schemes are far less expensive in the linear case as well as in the non linear case. They are stable for the L^∞ norm, unlike the splitting schemes. At least some perspectives as well as an existence theorem of a strong solution "almost eveywhere" for linear hyberbolic systems are studied.