HAL
open science

Modélisation Fluide de Réseaux

Alexandra de Cecco

To cite this version:

Alexandra de Cecco. Modélisation Fluide de Réseaux. Modélisation et simulation. UNIVERSITE DE TOULOUSE; UT3, 2016. Français. NNT : . tel-01486585

HAL Id: tel-01486585

https://hal.science/tel-01486585v1

Submitted on 10 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *28/06/2016* **par :**

ALEXANDRA DE CECCO

Modélisation fluide de réseaux

JURY

CLAUDIA NEGULESCU	Directrice de thèse
GUILLAUME DUFOUR	Co-Directeur de thèse
LAURENT BOUDIN	Rapporteur
LUC MIEUSSENS	Examinateur
JUAN LOPEZ	Examinateur
JEAN-PIERRE RAYMOND	Examinateur

École doctorale et spécialité :
MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées
Unité de Recherche :
Équipe d'accueil ISAE-ONERA MOIS
Directeur(s) de Thèse :
Claudia NEGULESCU (directrice) et *Guillaume DUFOUR (encadrant)*
Rapporteurs :
Laurent BOUDIN et *Ansgar JÜNGEL*

RÉSUMÉ

Mes travaux de thèse ont consisté à développer des modèles mathématiques pour décrire la dynamique des flux de données dans des réseaux informatiques comprenant un grand volume de données, spécifiquement pour les réseaux de grilles de calcul et les réseaux avioniques de type AFDX. L'objectif est de réduire, par une modélisation adaptée, la complexité des simulations numériques. Si la modélisation des deux types de réseaux étudiés répond à des motivations spécifiques et a nécessité de développer deux modèles fluides distincts, la méthodologie suivie a été la même. Il s'agit, à partir d'une description particulaire de la dynamique du réseau, d'identifier les grandeurs caractéristiques du réseau. Leur hiérarchisation par ordre de grandeur permet de définir une limite asymptotique formelle et d'obtenir une description cinétique du réseau. On peut alors en déduire, via la méthode des moments, les modèles macroscopiques correspondants, sous forme de systèmes de lois de conservation. Nous avons travaillé pour chaque réseau avec une limite asymptotique spécifique. Le système fluide résultant a ensuite fait l'objet d'une étude mathématique démontrant le caractère bien posé de notre modèle. Par la suite, nous avons mis en œuvre des méthodes numériques de type volumes finis, qui ont permis de simuler nos modèles macroscopiques et de montrer que chacun a un comportement qualitatif conforme avec le réseau qu'il décrit. Une étude d'un réseau AFDX illustre comment ce type de méthode peut permette d'identifier les points faibles (i.e. de congestion) du réseau.

Afin de prendre en compte une palette plus large de comportements du réseau, nous avons cherché à prendre en compte le cas où certains paramètres de notre modélisation deviennent très petits, comme par exemple le temps de latence dans des réseaux hétérogènes. Dans ces circonstances, la condition CFL de stabilité liée aux schémas numériques classiques devient critique. Cela correspond en fait à une limite asymptotique singulière, pour laquelle les schémas classiques appliqués à nos modèles fluides ne sont plus efficaces. A partir de ce constat, nous nous sommes intéressés aux schémas dits "asymptotic preserving" (AP), dans l'objectif, à terme, d'obtenir un schéma numérique qui nous permette de simuler ce type de comportement limite du réseau. Les schémas AP permettent de discrétiser un problème qui présente une singularité à la limite. Pour cela, ils reformulent le problème singulier à l'asymptotique en tirant profit du"bon" problème limite afin d'obtenir un problème qui dégénère vers la bonne limite. Nous avons illustré cette technique AP dans un autre domaine de la physique qui fait couramment intervenir ce type de schéma : les plasmas de fusion, plus particulièrement lorsque les masses des particules sont fortement disparates et que le plasma est étudié dans la direction des lignes de champ. Le schéma que nous avons développé permet de faire la transition entre deux régimes électroniques : le régime électronique cinétique et le régime adiabatique fluide des électrons, donné par la relation de Boltzmann. L'efficacité du schéma est alors illustrée par des résultats numériques.

Mots clefs : modélisation fluide, limite asymptotique, réseau AFDX, grille de calcul, schémas AP, plasma de fusion.

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures i

Liste des tableaux v

Introduction 1

PARTIE I
LA MODÉLISATION FLUIDE DE RÉSEAUX INFORMATIQUES 5

1 Décrire la dynamique d'un réseau informatique 7
I Notions générales sur les réseaux informatiques . . . 8
I.1 Protocoles de communication . . . 8
I.1.1 Standards de communication . . . 8
I.1.2 Exemples de protocoles de communication . . . 10
I.2 Structure d'un réseau . . . 10
I.2.1 Matériel physique . . . 10
I.2.2 Quelques topologies d'interconnexion . . . 11
I.3 Routage et commutation . . . 12
I.4 Performances d'un réseau . . . 13
I.4.1 Qualité de service . . . 13
I.4.2 Critères d'évaluation des performances d'un réseau . . . 13
II Les grilles de calcul . . . 14
II.1 Les réseaux de grilles informatiques . . . 15
II.2 Les grilles de calcul . . . 16
III Les réseaux AFDX . . . 18
III.1 Les réseaux avioniques . . . 18
III.2 La structure d'un réseau AFDX . . . 18
III.2.1 Notion de *virtual link* . . . 19
III.2.2 Les commutateurs d'un réseau AFDX . . . 20
IV Modélisation des performances d'un réseau informatique . . . 21
IV.1 Méthode de calcul réseau . . . 21
IV.2 Méthode des files d'attente fluides . . . 23
IV.3 Une approche mathématique de la modélisation fluide . . . 24
IV.3.1 Introduction à la modélisation mathématique . . . 25
IV.3.2 La modélisation fluide de réseaux par l'analyse asymptotique . . . 27

2 Modélisation fluide des grilles de calcul **29**
I Modélisation particulaire d'une grille de calcul 30
I.1 Description d'un réseau de grille de calcul 30
I.2 Description particulaire des tâches 31
I.2.1 Décision de déplacer une tâche 31
I.2.2 Définition du temps d'attente d'une tâche 32
II Obtention de l'équation cinétique 33
II.1 Définition de la densité de probabilité 33
II.2 Evolution de la densité de probabilité 34
II.3 Limite asymptotique 37
II.4 Etude de l'équation cinétique 41
III Analyse mathématique du modèle fluide 42
III.1 Obtention du système d'équations de conservation 42
III.2 Equivalence cinétique / fluide sous hypothèse de fermeture 43
III.3 Etude d'existence et d'unicité 44
IV Conclusion et perspectives 49

3 Modélisation fluide des réseaux AFDX **51**
I Description particulaire d'un réseau AFDX 52
I.1 Modélisation du réseau AFDX 52
I.1.1 Description du réseau AFDX 52
I.1.2 Notion de flot 53
I.2 Description particulaire des trames 54
I.3 Evolution en temps des paramètres des trames : 56
II Obtention de l'équation cinétique 58
II.1 Définition de la densité de probabilité 58
II.2 Limite asymptotique 59
III Modèle fluide 61
III.1 Définition des moments 61
III.2 Système fluide 63
IV Analyse mathématique du modèle fluide 66
IV.1 Analyse mathématique dans un commutateur 66
IV.2 Analyse mathématique dans un flot 72
V Extensions du modèle / Conclusion 74
V.1 Introduction de différents niveaux de priorité 74
V.2 D'autres limites asymptotiques possibles 77

PARTIE II
SIMULATIONS NUMÉRIQUES DES DEUX MODÈLES FLUIDES **79**

4 Simulations numériques pour un réseau de grille de calcul **81**
I Approximation par volumes finis 82
I.1 Discrétisation 82
I.2 Forme semi-discrétisée 82
I.3 Discrétisation temporelle 84
II Simulations numériques 85

II.1 Premier cas test . . . 85
II.1.1 Résultats numériques . . . 86
II.1.2 Etude de convergence . . . 89
II.1.3 Variation du paramètre $\mathscr{T}$ . . . 91
II.2 Second cas test . . . 93
Conclusion . . . 98

5 Simulations numériques pour un réseau AFDX 99
I Approximation par volumes finis . . . 100
I.1 Discrétisation . . . 100
I.2 Forme semi-discrétisée . . . 101
I.3 Discrétisation temporelle . . . 103
II Simulation numérique . . . 104
II.1 Réseau AFDX considéré . . . 104
II.2 Premier jeu de paramètres . . . 107
II.3 Second jeu de paramètres . . . 110
II.4 Troisième jeu de paramètres . . . 115
II.5 Conclusion . . . 116

PARTIE III
CONSTRUCTION D'UN SCHÉMA AP POUR LES PLASMAS DE FUSION 117

6 Les plasmas de fusion, un problème multi-échelles 119
I Présentation des plasmas thermonucléaires . . . 120
I.1 Description d'un plasma . . . 120
I.2 Propriétés d'un plasma . . . 121
I.2.1 Ionisation/recombination d'un plasma . . . 121
I.2.2 La propriété de quasi-neutralité . . . 122
I.2.3 Classification des plasmas . . . 123
I.3 Principe de la fusion thermonucléaire . . . 125
I.3.1 Les réactions nucléaires . . . 125
I.3.2 La réaction de fusion . . . 126
I.3.3 Confinement magnétique . . . 127
II Modélisation mathématique d'un plasma . . . 129
II.1 Description particulaire . . . 129
II.2 Description cinétique . . . 130
II.3 Description fluide . . . 131
III Les problèmes multi-échelles . . . 132
III.1 Qu'est ce qu'un problème multi-échelles ? . . . 132
III.2 Les plasmas de fusion : un problème multi-échelles . . . 133
III.3 Solutions pour modéliser un problème multi-échelles . . . 135
IV Les schémas préservant l'asymptotique (schémas AP) . . . 136

7 Schéma AP pour plasmas de fusion **137**
I Le modèle cinétique et son adimensionnement 139
I.1 Obtention du modèle adimensionné 140
I.2 Les opérateurs de collisions 143
II Les modèles macroscopiques dans le régime des masses disparates 144
II.1 Le régime de dérive-diffusion des électrons 144
II.2 Le régime adiabatique pour les électrons 146
III Passage vers le régime les électrons boltzmanniens 147
III.1 Décomposition micro-macro 147
III.2 Reformulation AP et identification du problème limite 149
IV Discrétisation AP du modèle cinétique pour les électrons 151
IV.1 Discrétisation en temps du schéma $(KF)_\varepsilon$ 152
IV.2 Schéma préservant l'asymptotique 152
IV.3 Discrétisation en espace de $(AP)_{\varepsilon,\Delta t}$ 153
IV.4 Condition CFL de stabilité de l'équation microscopique 155
V Résultats numériques 157

Conclusion et perspectives **163**

Bibliographie **165**

TABLE DES FIGURES

1.1 Comparaison des modèles OSI et TCP/IP [1]. 9
1.2 Schémas des topologies de base d'un réseau [2]. 11
1.3 Schéma des temps de transmission, de propagation et de traitement de données [3]. . . 14
1.4 Photo d'un *cluster* basé au CERN [4]. 16
1.5 Carte de la grille de calcul Grid'5000 [5]. 17
1.6 Carte des centres de calcul interconnectés participant à la grille mondiale *Worldwide LHC Computing Grid*. 17
1.7 Commutateurs présents dans le réseau embarqué AFDX d'un Airbus A380. 18
1.8 Flux des *virtual link* [6]. 19
1.9 Dédoublement de trois *virtual link* notés VL1, VL2 et VL3, lors de la duplication de trames [7]. 20
1.10 Schéma des différentes quantités de données utilisées par la méthode de calcul réseau, exprimées en fonction du temps. 22
1.11 Schéma donnant les délais de bout en bout observés dans un réseau AFDX, l'indication du temps pire-cas de bout en bout et de la borne supérieure de ce temps, calculée par le calcul réseau [8]. 23
1.12 Schéma d'un réservoir de débit d'entrée Λ, de débit de sortie c, et contenant une quantité de fluide Q [9]. 23
1.13 Evolution des quantités de fluide dans un réservoir. 24

2.1 Graphe représentant $\rho(\cdot, x)$ en fonction de x, en posant $\rho_0(x) = 0$. 45
2.2 Définition de Ψ. 46

3.1 Cas d'un temps de latence L_k constant. 53
3.2 Schématisation des flots en cas de duplication de trames. 53
3.3 Segment [0,J] modélisant un flot de J commutateurs dans un *virtual link*. 55
3.4 Hypothèse dans le domaine $A1$: les caractéristiques X1 et X2 se coupent au point $(\hat{t}, \hat{P})$. 68
3.5 Hypothèse dans le domaine $A2$: les caractéristiques X1 et X2 se coupent au point $(\tilde{t}, \tilde{P})$. 69

4.1 Quantités fluides au temps $t = \Delta t$. 87
4.2 Quantités fluides au temps $t = 0.04$. 87
4.3 Quantités fluides au temps $t = 0.1160$. 88
4.4 Quantités fluides au temps $t = 0.2160$. 88
4.5 Quantités fluides au temps $t = 0.2960$. 89
4.6 Quantités fluides avec $\mathscr{T} = 3 \cdot 10^{-2}$. 91
4.7 Quantités fluides avec $\mathscr{T} = 3 \cdot 10^{-3}$. 92

4.8 ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe}, ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.0042$. 94
4.9 ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe}, ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.0504$. 95
4.10 ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe}, ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.1008$. 96
4.11 ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe}, ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.2058$. 96
4.12 ρ_3^{wait} au temps $t = 0.2058$. 97
4.13 ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe}, ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.4032$. 97
4.14 ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe}, ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.6258$. 98
4.15 ρ_3^{wait} au temps $t = 0.6258$. 98

5.1 Discrétisation d'un flot. 100
5.2 Discrétisation du commutateur $[j-1, j[$ d'un flot. 100
5.3 Schéma des points où sont évaluées les inconnues n^f, ρ^f, $(n\bar{a})^f$ (indiqués par des croix rouges) et les inconnues $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$ (indiqués par des croix noires) dans chaque cellule d'un commutateur placé en position $[j-1, j[$ d'un flot f, au temps t. 101
5.4 Schéma du *virtual link* $VL6$, avec les poids assignés (en rouge) à chaque commutateur, pour chaque flot traversant ce commutateur. 105
5.5 Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur, au temps $t^n = 1s$. 108
5.6 Quantités fluides dans les commutateurs S_{11} et S_{12} au cours du temps. 109
5.7 Schémas des flots 9, 10, 22 et 25. 109
5.8 Schéma du *virtual link* $VL10$ composé des flots 30, 31, 32, 34, 35. 110
5.9 Quantités fluides dans le flot 30 au temps $t^n = 1s$. 110
5.10 Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur, au temps $t^n = 0.01s$. 111
5.11 Schéma du flot 1. 111
5.12 Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 0.01s$. 111
5.13 Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur, au temps $t^n = 1s$. 112
5.14 Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 0.3s$. 112
5.15 Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 0.6s$. 113
5.16 $\bar{v}_i^n$ dans les commutateurs S_9 et S_{21} pour le flot 1 au temps $t^n = 0.6s$. 113
5.17 Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 1s$. 114
5.18 $\bar{v}_i^n$ dans les commutateurs S_9 et S_{21} pour le flot 1 au temps $t^n = 1s$. 114
5.19 Schéma du *virtual link* $VL1$, composé des flots 1 et 2. 114
5.20 Charge moyenne dans le commutateur S_{14} et S_{24} au cours du temps. 115
5.21 Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur aux temps $t^n = 0.01s$ et $t^n = 1s$. 115

6.1 Les différents états de la matière en fonction de la température [10]. 120
6.2 Exemple d'écrantage électrique. 123
6.3 Plasmas naturels : soleil, éclairs, aurore boréale. 124
6.4 Les différents plasmas en fonction de leur température (en Kelvin) et de leur densité d'électrons (en électrons par cm^3). 124
6.5 Graphe d'Aston représentant, pour chaque atome, son énergie de liaison moyenne par liaison en fonction de son nombre de nucléons. 125
6.6 Réaction de fission [10]. 126
6.7 Réaction de fusion [10]. 126
6.8 Dessin d'artiste du tokamak d'ITER [10]. 127
6.9 Trajectoire des ions et des électrons le long d'un champ magnétique [10]. 128

6.10 (a) : Schéma du courant toroïdal (dans les bobines encerclant le tore), du courant poloïdal (ou axial, au centre du tore), et du champ résultant qui suit la trajectoire d'une hélice. (b) : Trajectoire d'une particule chargée le long du champ résultant [10]. 128
6.11 Espace des phases [11]. 130
6.12 Echelles temporelles et spatiales des grandeurs caractéristiques d'un plasma de fusion [12].133
6.13 Rayons de Larmor de l'électron $\rho_{L,e}$ et de l'ion $\rho_{L,i}$ [10]. 134
6.14 Propriétés d'un schéma AP. 136

7.1 Captures de la fonction de distribution f à quatre instants (colonne de gauche), obtenues avec le schéma AP (7.52) avec $\varepsilon = 10^{-2}$. La colonne du milieu représente la densité de particules associée n, comparée avec la relation de Boltzmann (7.64), et la colonne de droite représente le flux de particules $q = nu$. 158
7.2 Convergence au cours du temps vers la relation de Boltzmann (7.64) de la solution du schéma AP et d'une solution de référence 'REF', pour $\varepsilon = 10^{-2}$. La solution de référence est obtenue à partir d'un solveur de l'équation Vlasov-GBK utilisant une discrétisation explicite *upwind* sur un maillage fin avec $N_x = 201$ et $N_v = 1001$. 159
7.3 Convergence au cours du temps de la solution du schéma AP vers la relation de Boltzmann (7.64) avec $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$. 159
7.4 Etat d'équilibre atteint au temps $t = 0.1$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$ avec le schéma explicite *upwind* (première ligne) et le schéma AP (seconde ligne). Remarquons que les fonctions de distributions $f(t = 0.1)$ s'accordent tandis que le schéma explicite renvoie un résultat erroné du flux d'électrons q. 160

LISTE DES TABLEAUX

4.1 Normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_1^{exe}(t,q)$. 90
4.2 Convergence des normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_1^{exe}(t,q)$. 90
4.3 Normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_2^{exe}(t,q)$. 90
4.4 Convergence des normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_2^{exe}(t,q)$. 90
4.5 Normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]\times[0,0.20]))$ de $e^{wait}(t,q,\theta)$. 90
4.6 Convergence des normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e^{wait}(t,q,\theta)$. 90

5.1 Liste des flots traversant chaque commutateur et le nombre de *virtual links* différents auxquels ces flots appartiennent. 105
5.2 Pour chaque flot f, indice du *virtual link* VLv auquel il appartient, indice de son *end-system* source, liste des indices des commutateurs qui sont traversés, dans l'ordre, par ce flot, ainsi que les poids associés à ces commutateurs dans ce flot, puis indice de son *end-system* destinataire. 106
5.3 Débits des commutateurs pour les sections II.2, II.3 et II.4. 116

7.1 Comparaison du schéma AP avec le solveur *upwind* explicite : erreurs L^∞ et L^2 par rapport à la relation de Boltzmann (7.64) à $t = 0.1$, conditionnement maximal au cours du temps de la matrice du système (juste pour schéma AP), norme L^∞ du flux de particules q^ε à $t = 0.1$ et le temps CPU normalisé. 161

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est de développer des modèles mathématiques pour décrire la dynamique des flux de données dans des réseaux informatiques comprenant un grand volume de données. Notre intention est de réduire la complexité des simulations numériques.

Ces dernières années, les besoins en capacité de calcul (utilisation de simulations numériques pour remplacer des mesures expérimentales coûteuses) et en capacité de stockage (*big data*) ont explosé. Les réseaux informatiques gèrent un volume de données qui croît de manière exponentielle. Par ailleurs, on constate l'apparition de réseaux embarqués de plus en plus complexes dans de nombreux secteurs industriels (aéronautique, robotique). Comprendre le comportement de tels réseaux, dans le but d'aider à leur conception, de garantir leur qualité de service ou bien d'optimiser leur comportement, passe par la modélisation de leur dynamique.

Or, simuler un grand volume de données, dont la dynamique évolue en temps court, pose des difficultés numériques. Dans ce contexte, nous cherchons à obtenir un modèle mathématique et numérique qui permette de réduire la complexité des simulations. Une telle approche ouvre des perspectives de simulation en temps rapide des réseaux, ce qui constituerait un outil précieux pour leur étude.

Il existe différentes méthodes permettant de décrire le comportement des flux de données dans les réseaux informatiques. Parmi elles, le "calcul réseau" est une méthode algébrique qui donne, entre autres, des bornes maximales pour le temps de traversée du réseau par les flux de données. Cette méthode a l'avantage de fournir des garanties de non dépassement sur ses résultats mais les bornes obtenues sont pessimistes. La méthode de files d'attente fluide repose quant à elles sur des équations aux dérivées partielles traduisant de manière empirique la conservation de la quantité de données dans le réseau. Elle permet de simuler la dynamique réelle des réseaux avec un coût faible mais laisse peu de place à des extensions.

Nous proposons ici une méthode pour décrire la dynamique des réseaux et ainsi enrichir les méthodes existantes. La modélisation fluide repose sur une approche systématique qui s'accompagne d'un formalisme mathématique rigoureux. Il s'agit d'une approche "en moyenne" qui, à partir d'une description de chaque message du réseau, permet d'obtenir un système d'équations sur le comportement global de la dynamique du réseau, ce système étant indépendant du nombre de messages présents dans le réseau. Cette approche permet d'utiliser des méthodes classiques de discrétisation des équations aux dérivées partielles pour obtenir des simulations rapides du comportement global d'un réseau comprenant une quantité importante de données.

Dans cette thèse, nous nous intéressons plus spécifiquement à deux types de réseaux informatiques qui font intervenir un grand volume de données : les grilles de calcul et les réseaux AFDX. Ces deux types de réseaux sont de natures différentes, ainsi que les exigences de qualité de service qui leur sont associées.

— Une grille de calcul est un réseau qui interconnecte des *clusters* de calcul. La mise en commun de ces ressources informatiques permet d'effectuer des calculs lourds, mais aussi de déplacer les calculs à accomplir entre des *clusters* situés partout dans le monde. L'étude de la dynamique de ce type de réseau permettrait d'optimiser le temps d'exécution des calculs et la consommation énergétique qu'ils engendrent. Nous avons pour cela cherché à modéliser l'évolution de la charge de calcul présente sur les *clusters*.

— Un réseau AFDX (Avionics Full DupleX) est un réseau embarqué avionique composé de commutateurs interconnectés. Il sert de support aux communications internes d'un avion. La qualité de service exigée afin de certifier un avion comporte des contraintes fortes. Il faut notamment garantir qu'aucune donnée ne sera perdue et donner une borne maximale pour le temps de traversée du réseau par les données. Ceci amène de nombreuses difficultés, dues au fait que le volume de données est très important. La méthode de calcul réseau est la méthode utilisée pour la certification de ces réseaux. Il s'agit d'une méthode de modélisation "pire-cas", qui fournit des bornes maximales sur les flux de données. Ses résultats sont pessimistes et leur utilisation a pour conséquence de sur-dimensionner le réseau. De plus, cette méthode ne décrit nullement la dynamique réelle du réseau. La méthode de modélisation fluide que nous proposons ici de mettre en œuvre ne permet pas de garantir un non dépassement des résultats fournis mais permet néanmoins de mieux comprendre les comportements sensibles qui peuvent s'y produire, et ainsi d'identifier les paramètres dimensionnant le pire temps de traversée. Nous nous sommes donc penchés sur la modélisation du transport des données dans un réseau AFDX.

La modélisation de ces réseaux répond donc à des motivations spécifiques et c'est pour cela que nous avons introduit deux modèles distincts qui décrivent leurs dynamiques respectives. Ces modèles fluides sont toutefois obtenus par la même approche. Il s'agit de partir d'une description particulaire de la dynamique du réseau. En identifiant les grandeurs caractéristiques du réseau, nous définissons une limite asymptotique formelle pour obtenir une description cinétique. Puis nous en déduisons des modèles macroscopiques par la méthode des moments. Nous avons travaillé avec une limite asymptotique spécifique, et le système fluide résultant a ensuite fait l'objet d'une étude mathématique démontrant le caractère bien posé de notre modèle. D'autres limites asymptotiques apparaissent toutefois possibles, chacune étant liée à un comportement particulier du réseau. Les méthodes numériques classiques de volumes finis mises en œuvre par la suite permettent de simuler nos modèles macroscopiques et de montrer que chacun a un comportement qualitatif conforme avec le réseau qu'il décrit.

Afin de prendre en compte une palette plus large de comportements du réseau, nous avons cherché à prendre en compte le cas où certains paramètres de notre modélisation deviennent très petits, comme par exemple le temps de latence dans des réseaux hétérogènes. A ce moment là, la condition CFL liée aux schémas numériques classiques devient critique. Cela correspond en fait à une limite asymptotique singulière, pour laquelle les schémas classiques appliqués à nos modèles fluides, ne sont plus efficaces. A partir de ce constat, nous nous sommes intéressés aux schémas dits "préservant l'asymptotique"(AP), ou *asymptotic preserving* dans l'objectif, à terme, d'obtenir un schéma numérique qui nous permette de simuler ce type de comportement limite du réseau. Les schémas AP permettent de discrétiser un problème qui présente une singularité à la limite. Pour cela, ils reformulent le problème singulier à l'asymptotique en tirant profit du "bon" problème limite afin d'obtenir un problème qui dégénère vers la bonne limite.

Dans notre cas, le “bon” problème limite n’ayant pas encore été identifié, nous avons décidé, en guise de préparation, de nous familariser avec cette technique AP dans un autre domaine de la physique qui fait couramment intervenir ce type de schéma : les plasmas de fusion. Nous avons travaillé à la construction d’un schéma AP effectuant la transition entre deux régimes électroniques : le régime cinétique et le régime adiabatique fluide, donné par la relation de Boltzmann. Cette partie nous permettra de mieux appréhender les techniques AP, pour ensuite pouvoir les utiliser sur nos modèles.

Le raisonnement décrit jusqu’ici dicte la trame de ce manuscrit, qui est structuré selon trois parties distinctes et organisé comme suit. La première partie détaille l’obtention des modèles mathématiques respectifs aux deux réseaux informatiques : les grilles de calcul et les réseaux AFDX. La seconde partie illustre le fonctionnement des deux modèles construits dans la partie précédente grâce à des simulations numériques. La troisième partie est consacrée à l’étude des schémas AP, dans le domaine d’application des plasmas de fusion.

Dans le chapitre 1, nous exposons les problématiques liées aux grilles de calcul ainsi qu’aux réseaux AFDX et expliquons pourquoi nous avons utilisé la méthode fluide pour y répondre. Dans un premier temps, nous présentons quelques notions générales des réseaux informatiques (Sect. I). Puis, nous nous focalisons sur les grilles de calcul et les réseaux AFDX et entrons davantage dans les détails sur leur fonctionnement, afin de spécifier les problèmes qui surgissent lors de leur étude (Sect. II et III). Nous présentons ensuite quelques unes des méthodes existantes qui permettent de modéliser les performances d’un réseau informatique. Nous décrivons finalement le principe de la modélisation fluide et expliquons en quoi elle est adaptée pour répondre aux problématiques détaillées dans les sections précédentes (Sect. IV).

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation des grilles de calcul. En premier lieu, nous présentons la description particulaire : nous décrivons la configuration de la grille de calcul et les paramètres pertinents permettant de décrire les tâches et leur dynamique (Sect. I). Pour obtenir l’équation cinétique régissant le comportement global des tâches dans le réseau, nous adimensionnons les grandeurs caractéristiques du réseau pendant un petit temps d’observation. Une limite asymptotique formelle nous permet d’obtenir l’équation cinétique régissant la dynamique de la densité de probabilité des tâches (Sect. II). Nous étudions ensuite le caractère bien posé du modèle fluide obtenu par la méthode des moments (Sect. III). Une prise en compte de comportements différents du réseau nous conduit à nous intéresser à une autre asymptotique, qui mène à la modélisation d’une grille de calcul qui optimise en temps réel les déplacements des tâches entre les *clusters* (Sect. IV).

Le chapitre 3 est consacré à la modélisation des réseaux AFDX. Nous y abordons tout d’abord la description particulaire des trames sur un réseau AFDX (Sect. I). Pour obtenir l’équation cinétique adimensionnée, nous décrivons le comportement des grandeurs caractéristiques du réseau pour une certaine asymptotique, puis appliquons un passage à la limite formel (Sect. II). Nous définissons le système fluide en introduisant les quantités macroscopiques, et nous obtenons les équations de conservation commandant la dynamique du réseau (Sect. III). Nous nous interrogeons ensuite sur le caractère bien posé du système fluide non linéaire obtenu (Sect. IV). En remarquant l’apparition d’un temps caractéristique supplémentaire lié à la vitesse de transfert et au temps de latence dans le réseau, nous explorons une asymptotique différente, qui consiste à considérer une vitesse de transfert très grande et un temps de latence très petit (Sect. V).

Le chapitre 4 est consacré à la discrétisation numérique et à la simulation du modèle

fluide obtenu pour les grilles de calcul dans le chapitre 2. Nous approximons le système fluide par une méthode classique de volumes finis (Sect. I). Nous illustrons ensuite nos résultats numériques en étudiant tout d'abord un cas test simple, pour lequel les solutions exactes sont faciles à trouver, afin d'étudier la convergence du schéma. Nous nous intéressons aussi au comportement du réseau lorsque nous faisons évoluer les grandeurs caractéristiques, de manière à modéliser un réseau avec un temps de décision instantanée. Un comportement plus complexe de la grille de calcul est ensuite étudié (Sect. II).

Le chapitre 5 est consacré à la simulation de la dynamique des réseaux AFDX étudiée dans le chapitre 3. Nous utilisons des méthodes de volumes finis afin de discrétiser le problème fluide et expliquons en particulier la méthode de calcul du temps d'attente et de la vitesse entre les commutateurs (Sect. I). Nous proposons ensuite une analyse d'un réseau complexe qui est étudié par un laboratoire d'Airbus, et dont la particularité est de mettre en œuvre des commutateurs aux performances hétérogènes. L'objectif est de montrer que notre modèle permet d'identifier les points critiques du réseau. Nous illustrons ensuite comment, en modifiant quelques paramètres liés aux performances des commutateurs, nous pouvons modifier la dynamique du réseau. En particulier, nous mettons en évidence que l'amélioration locale de performances n'améliore pas forcément la performance du réseau et peut simplement déplacer les points de congestion (Sect. II).

Le chapitre 6 traite des plasmas de fusion, explore leurs propriétés ainsi que les méthodes qui peuvent être mises en œuvre afin de les modéliser. Nous listons dans un premier temps les propriétés générales d'un plasma. Nous nous intéressons ensuite à un type de plasma artificiel : les plasmas de fusion. Nous présentons les principes de cette réaction nucléaire ainsi que ceux relatifs au confinement magnétique mis en place dans un tokamak (Sect. I). Par la suite, nous introduisons les différents modèles permettant de décrire le comportement d'un plasma de fusion et examinons les avantages et limites de chaque niveau de description : particulaire, cinétique ou fluide (Sect. II). Or, la modélisation d'un plasma est un problème multi-échelle. Nous expliquons les complications auxquelles nous sommes confrontés lorsque l'on tente de traiter un problème multi-échelle. Nous abordons ensuite les méthodes analytiques et numériques qui permettent d'y remédier (Sect. III). Parmi ces méthodes figure la méthode préservant l'asymptotique, que nous présentons plus en détails et qui sera le point clef de notre travail sur les plasmas de fusion (Sect. IV).

Le chapitre 7 explore la construction d'un schéma AP pour des plasmas de fusion, lorsque les masses des particules sont fortement disparates et que le plasma est étudié dans la direction des lignes de champ. Ce schéma doit permettre de faire la transition entre le régime électronique cinétique et le régime adiabatique fluide des électrons. Nous introduisons tout d'abord le modèle cinétique électron-ion ainsi que son adimensionnement (Sect. I). Puis nous abordons l'obtention de modèles macroscopiques correspondant aux deux équations cinétiques adimensionnées (Sect. II). Grâce à une décomposition micro-macro, nous reformulons l'équation cinétique adimensionnée pour les électrons (Sect. III). Nous présentons par la suite un schéma AP pour la résolution de la dynamique électronique dans le régime cinétique ainsi que dans le régime adiabatique (Sect. IV). Enfin, nous exposons les résultats numériques (Sect. V).

Dans notre conclusion, nous détaillons les perspectives qui s'ouvrent à l'issue de cette thèse, en particulier l'application des schémas AP aux modèles fluides que nous avons construits.

Partie I

La modélisation fluide de réseaux informatiques

CHAPITRE 1

DÉCRIRE LA DYNAMIQUE D'UN RÉSEAU INFORMATIQUE : DES COMPOSANTS À LA MODÉLISATION FLUIDE.

Sommaire

I Notions générales sur les réseaux informatiques . . . 8
- I.1 Protocoles de communication . . . 8
- I.2 Structure d'un réseau . . . 10
- I.3 Routage et commutation . . . 12
- I.4 Performances d'un réseau . . . 13

II Les grilles de calcul . . . 14
- II.1 Les réseaux de grilles informatiques . . . 15
- II.2 Les grilles de calcul . . . 16

III Les réseaux AFDX . . . 18
- III.1 Les réseaux avioniques . . . 18
- III.2 La structure d'un réseau AFDX . . . 18

IV Modélisation des performances d'un réseau informatique . . . 21
- IV.1 Méthode de calcul réseau . . . 21
- IV.2 Méthode des files d'attente fluides . . . 23
- IV.3 Une approche mathématique de la modélisation fluide . . . 24

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'expliquer les problématiques liées aux grilles de calcul ainsi qu'aux réseaux AFDX et pourquoi nous avons utilisé la méthodologie fluide afin d'y répondre.

Dans un premier temps, nous présentons quelques notions générales des réseaux informatiques, notamment celles qui permettent de distinguer les réseaux entre eux (Sect. I). Ainsi, lorsque nous présentons finalement les grilles de calcul et les réseaux AFDX, nous entrons davantage dans les détails sur leur fonctionnement et expliquons les problèmes qui surgissent lors de l'étude générale de leurs performances (Sect. II et III). Nous présentons par la suite quelques unes des méthodes qui permettent de simuler les performances d'un réseau informatique. Nous expliquons alors le principe de la méthode de modélisation fluide et pourquoi elle est adaptée pour répondre aux problématiques détaillées dans les sections précédentes (Sect. IV).

I NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES RÉSEAUX INFORMATIQUES

Cette section est une brève introduction sur les notions importantes rencontrées lorsque l'on s'intéresse aux réseaux informatiques.

Un réseau informatique est un réseau de télécommunication qui permet le transport rapide d'informations entre des équipements terminaux. Ces terminaux peuvent être des ordinateurs, des tablettes ou des serveurs, qui envoient et reçoivent de l'information. Les terminaux sont reliés par des lignes de communication. Afin de maintenir, d'orienter ou de contrôler le transport de données, il existe des équipements que l'on appelle nœuds intérieurs. Chaque nœud a une fonction bien précise (I.2.1).

Depuis le terminal de départ, les données sont envoyées avec une "en-tête", c'est-à-dire une information de contrôle qui sert à orienter les données dans le réseau pour l'envoyer à l'endroit voulu et aussi à vérifier *a posteriori* qu'il n'y a pas eu d'erreur dans le transfert. Chaque donnée est ainsi acheminée sur les lignes de communication et transite de nœud en nœud jusqu'à arriver au terminal destinataire.

Il existe de nombreuses manières de classifier les types de réseaux informatiques. Nous en évoquons quelques unes dans cette section. Nous abordons en premier lieu les protocoles de communication, c'est-à-dire les règles mises en places au sein d'un réseau pour que les différents terminaux et nœuds intérieurs aient un langage commun. A titre d'exemple, nous évoquons brièvement le modèle OSI et citons les protocoles Ethernet et IP (Sect. I.1). Les réseaux informatiques peuvent aussi être répartis selon leur topologie, qui représente la façon dont les lignes de communications sont reliées grâce aux nœuds. Nous détaillons quelques unes des topologies existantes, en présentant les équipements les plus utilisés en tant que nœuds (Sect. I.2). Par la suite, nous détaillons le transport de l'information dans un réseau. Nous évoquons le routage et la commutation, processus qui permettent de transporter les données correctement vers leur destination, mais aussi d'optimiser le chemin emprunté (Sect. I.3). Finalement, nous évoquons les performances d'un réseau, analysées par le biais de sa qualité de service et donnons quelques exemples des grandeurs caractéristiques d'un réseau qui permettent d'évaluer cette qualité de service (Sect. I.4).

I.1 Protocoles de communication

I.1.1 Standards de communication

Puisque les réseaux ont été créés afin de réaliser simplement et rapidement l'échange d'informations entre des terminaux, il a fallu normaliser le fonctionnement de ces réseaux, c'est-à-dire créer des règles de communication entre tous les équipements d'un même réseau ou de réseaux distincts. Ces règles sont décrites par des protocoles de communications et régissent par exemple la façon d'envoyer ou de recevoir de l'information. Il s'agit d'un langage commun à tous les équipements d'un même réseau.

Afin d'établir des protocoles de communication entre les différents équipements (nœuds et terminaux) d'un même réseau, le fonctionnement du réseau est subdivisé en "couches". Il existe différents modèles proposant chacun une subdivision. Les plus utilisés sont le modèle OSI (*Open System Interconnexion*) et le modèle TCP/IP (voir Figure 1.1).

Chaque couche d'un modèle donné représente une catégorie de problème que l'on peut rencontrer dans un réseau. Un protocole de communication est établi entre les couches similaires de chacun des équipements souhaitant communiquer. La plupart des réseaux sup-

portent ainsi des hiérarchies de protocoles : chaque couche fournit à la couche supérieure une garantie que le travail qui lui a été confié a été réalisé sans erreur et isole donc la couche supérieure des détails des protocoles utilisés dans les couches inférieures. Listons brièvement les fonctions que remplit chacune des couches du modèle OSI.

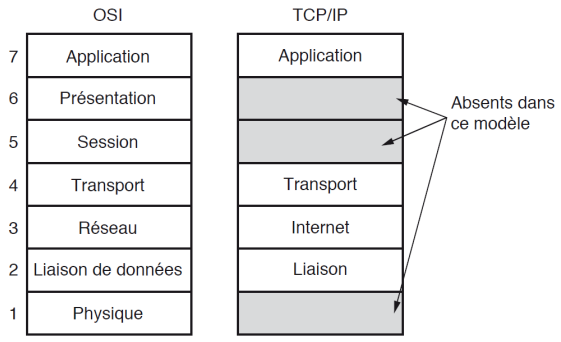


FIGURE 1.1 – Comparaison des modèles OSI et TCP/IP [1].

— La couche 1 (ou couche Physique) concerne les supports physiques, c'est-à-dire les problèmes strictement matériels d'un réseau, tels que le matériel physique, les types de lignes de communication utilisées pour la transmission des signaux sous forme binaire. Sur cette couche, le bit représente l'unité de mesure des informations échangées.

— La couche 2 (ou couche Liaison de données) porte sur la manière par laquelle un terminal est identifié sur un réseau physique. Est associée la notion d'adressage physique. En effet, chaque terminal souhaitant accéder a un réseau possède une carte réseau. Celle-ci a un identifiant unique au monde, son adresse MAC (*Media Access Control*). Cette couche du réseau ajoute l'adresse MAC des terminaux source et destinataire à l'"en-tête" de chacune des données : cet ensemble constitue une trame, l'unité de mesure des informations échangées sur cette couche.

— La couche 3 (ou couche Réseau) s'occupe de trouver un chemin pour acheminer une donnée entre deux terminaux. Elle détermine le parcours des données et met en place un autre type d'adressage : l'adresse IP (*Internet Protocol*). En effet, l'adresse MAC permet identifier un terminal au sein d'un réseau local, mais lorsqu'il s'agit de communiquer dans un réseau mondial par exemple, une adresse IP est assignée au terminal. Il s'agit d'une adresse dynamique qui peut être modifiée, et qui est attribuée à chaque terminal connecté à un réseau utilisant l'*Internet Protocol*. Cette couche insère entre autres les adresses IP des terminaux source et destinataire dans l'"en-tête". Avec la donnée à transmettre, cela constitue un paquet, l'unité de mesure des informations échangées sur cette couche.

— La couche 4 (couche Transport) concerne la communication directe entre le terminal source et le terminal destinataire. Cette notion s'appelle connexion de bout en bout. Cette couche concerne le contrôle des flux de données ainsi que la qualité de service, que nous évoquons avec plus de détails par la suite (Sect. I.4.1).

— La couche 5 (couche Session) porte sur la transmission des données de programmes à programmes.

— La couche 6 (couche Présentation) concerne les échanges d'informations entre les applications.

— La couche 7 (couche Application) concerne les communications entre les applications.

Les quatre premières couches sont fournies par un système d'exploitation tandis que les trois dernières sont tournées vers les applications. Dans le modèle TCP/IP, par exemple, nous pouvons voir (Fig. 1.1) que ces trois dernières couches ne sont pas distinguées les unes des autres.

Dans cette étude en vue de modéliser des réseaux informatiques, les données auxquelles nous nous intéressons sont liées à différentes couches. Ce que nous allons modéliser est le transport des données, tout en prenant en compte le comportement du système d'exploitation ou des applications, qui constituent nos données de départ afin de bien définir notre espace des phases.

I.1.2 Exemples de protocoles de communication

Citons deux exemples de protocoles de communication parmi les plus connus et utilisés.

— Le protocole Ethernet est un protocole de la couche 2 du modèle OSI. Il est utilisé dans les réseaux locaux mettant en œuvre de la commutation. Il existe divers types de trames Ethernet, chacun définissant la structure standardisée d'une trame. Un réseau AFDX fait intervenir ce protocole. Il s'agit d'un réseau Ethernet.

— Le protocole IP, pour *Internet Protocol*, es utilisé pour les grands réseaux. Il fait partie de la famille de protocoles TCP/IP (avec le protocole TCP, ou *Transmission Control Protocol*) et correspond à la couche 2 du modèle TCP/IP (et 3 du modèle OSI). Il existe plusieurs versions de ce protocole.

Nous nous pencherons, par la suite, sur les protocoles de communication permettant de palier aux problèmes liés à la dynamique des données. Nous nous intéresserons à la commutation, au routage, et aux protocoles de communication qui régissent le transport des données et les interactions entre les terminaux afin d'assurer ce transport (Sect. I.3).

I.2 Structure d'un réseau

Nous introduisons maintenant les équipements que l'on trouve généralement dans un réseau, pour ensuite présenter les topologies qui permettent de les relier.

I.2.1 Matériel physique

— Les supports de communication d'un réseau, c'est-à-dire le matériel constituant les lignes de communication, sont composés de câbles électriques, de fibre optique ou peuvent simplement être des ondes radios.

— Les nœuds intérieurs sont des équipements électroniques d'interconnexion. Ils sont capables de créer, de recevoir ou de transmettre l'information le long des lignes de communication. On trouve notamment

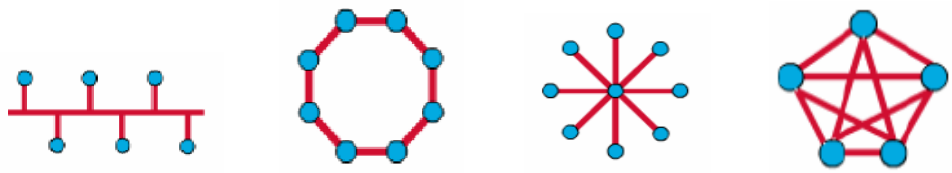
- Un répéteur est un équipement Ethernet, c'est-à-dire qui fonctionne selon un protocole de communication Ethernet (Sect. I.1.2). Il reçoit un signal, le débarrasse du bruit et le renvoie à une puissance plus importante.
- Un concentrateur (ou *hub*) est un équipement Ethernet qui peut se comprendre comme un répéteur avec plusieurs ports de sortie. Il répète les données reçues sur un de ses ports sur tous ses autres ports.

- Un commutateur (ou *switch*) est un équipement avec plusieurs ports, qui reçoit de l'information, la filtre, puis la renvoie. C'est un équipement de la couche 2. Il se distingue d'un concentrateur car il renvoie l'information seulement vers le port correspondant au chemin voulu, et non sur l'ensemble de ses ports. Il fait cela en examinant les adresses des terminaux source et destinataire et grâce à une table dite de routage. Nous reviendrons sur la notion de routage par la suite (Sect. I.3).
- Un routeur est un équipement lié à l'Internet. Il est connecté à plusieurs réseaux en même temps et peut envoyer l'information de l'un à l'autre. Il peut par exemple servir à interconnecter des réseaux pour former des inter-réseaux. Tout comme un commutateur, il renvoie l'information dans la direction désirée, en fonction des adresses des terminaux source et destination lues.

Ces équipements possèdent une mémoire tampon, ou *buffer*, qui leur permet de stocker les données reçues au fur et à mesure, pour ne pas les perdre dans le cas où elles arriveraient plus rapidement qu'il n'est capable de les réémettre.

I.2.2 Quelques topologies d'interconnexion

La topologie physique d'un réseau câblé représente le réseau du point de vue de l'emplacement des matériels. Nous présentons ici quelques unes des principales topologies physiques, qui sont illustrées sur la figure 1.2.



(a) Bus (b) Anneau (c) Etoile (d) Maille

FIGURE 1.2 – Schémas des topologies de base d'un réseau [2].

— La topologie en bus est l'organisation la plus simple d'un réseau. Tous les terminaux sont reliés à une même ligne de transmission par l'intermédiaire d'un câble. Le mot bus désigne cette ligne physique qui relie les terminaux. Cette topologie a pour avantage d'être facile à mettre en œuvre et de fonctionner simplement. En revanche, elle est vulnérable car si l'une des connexions est défectueuse, l'ensemble du réseau en est affecté.

— Dans une topologie en anneau, chaque terminal est connecté à son voisin, à la façon d'un bus sauf que le dernier terminal est connecté au premier. Il présente les mêmes inconvénients qu'un bus.

— Dans une topologie en étoile, les terminaux du réseau sont reliés à un concentrateur. Celui-ci assure la communication entre les différentes branches de l'étoile. Contrairement à un réseau construit sur une topologie en bus, ce type de réseau est peu vulnérable : une connexion défectueuse ne paralyse pas le reste du réseau. Cependant, le point névralgique de ce réseau est le concentrateur, car sans lui plus aucune communication n'est possible entre les terminaux du réseau .

— Une topologie maillée est une évolution de la topologie en étoile où chaque terminal est relié à tous les autres. L'inconvénient est le nombre de liaisons nécessaires qui devient élevé lorsque le nombre de terminaux augmente.

Remarque 1.1. *On distingue deux types de technologies de transmission pour les réseaux : les réseau à diffusion (en anglais,* point-to-multipoint *ou* broadcast*) et les réseaux point-à-point (en anglais,* point-to-point*). Dans un réseau à diffusion, un seul canal de transmission est partagé par tous les terminaux : les données sont reçues par tous les terminaux. À la réception de la donnée, chaque terminal lit le champ mentionnant l'adresse du terminal destinataire, procède au traitement de la donnée si elle reconnaît sa propre adresse, ou l'ignore dans le cas contraire. Dans un réseau point-à-point, chaque ligne de communication connecte deux nœuds et la donnée est émise seulement sur le chemin qui convient. Les topologies possibles pour un réseau à diffusion sont par exemple le bus ou l'anneau, tandis que pour les réseaux point-à-point, on retrouve une topologie maillée ou en étoile.*

La topologie du réseau à modéliser va affecter les notions de position et de transport que nous allons utiliser dans nos modèles. En effet, dans un réseau qui présente une topologie de type bus ou anneau, l'existence d'un seul lien de transmission nous permet d'utiliser la notion classique de transport (Chap. 3). Dans un réseau présentant une topologie de type étoile ou maille, la notion d'éloignement entre les nœuds est absente. Il n'existe en effet pas de notion d'avancée dans le réseau comme on pourrait le voir dans un réseau en bus et cela affectera notre manière de modéliser la position (Chap. 2).

I.3 Routage et commutation

Dans cette section, nous détaillons davantage les processus de transport de données au sein des réseaux informatiques, c'est-à-dire le fait de choisir un chemin plutôt qu'un autre afin d'acheminer des données. Nous nous intéressons donc seulement aux réseaux à diffusion point-à-point. L'emploi de routeurs ou de commutateurs est dépendant du type de réseau considéré. Ainsi, un commutateur est plutôt utilisé afin de raccorder plusieurs terminaux dans un réseau local de type Ethernet, tandis qu'un routeur est présent dans les réseaux qui utilisent le protocole IP pour assurer l'interconnexion de plusieurs réseaux.

Un réseau local point-à-point utilise un commutateur afin de transmettre les données vers leur destination. Pour cela, un commutateur lit l'adresse MAC du terminal destinataire dans l'"en-tête" et, grâce à une table de commutation, en déduit le port sur lequel la donnée doit être renvoyée.

Le rôle du routage, utilisé dans les grands réseaux, est plus délicat : il s'agit de choisir un chemin parmi plusieurs. Une table de routage donne au routeur les différents chemins disponibles jusqu'au terminal destinataire. Le choix des nœuds empruntés pour transmettre les données est un problème complexe si l'on souhaite exploiter au maximum les performances des équipements afin de contrôler les flux de données dans le réseau. En contrepartie, la souplesse augmente : si un chemin se retrouve coupé ou fortement congestionné, la donnée peut en emprunter un autre.

Afin de choisir le chemin opportun, le routeur prend en compte des informations en plus de l'adresse du destinataire, comme par exemple la charge du réseau. Notons qu'une table de routage peut être fixe ou dynamique. Une table de routage dynamique "apprend" tout au long de la vie du réseau, tandis qu'une table de routage fixe est établie dès le début. Elle a l'avantage

d'avoir une réponse systématique et donc rapide, et l'inconvénient de ne pas pouvoir s'adapter en fonction du comportement des réseaux auxquels elle est connectée.

Pour résumer, la commutation consiste à émettre la donnée sur le port qui convient, tandis que le routage consiste à déterminer le chemin le plus adapté pour atteindre la destination.

Les mots routeur et commutateur sont donc trompeurs. En effet, un commutateur peut faire du routage et un routeur commute en plus de router. Il ne s'agit donc pas de choisir un processus plutôt qu'un autre. Une information reçue sur un routeur ou un commutateur est toujours réémise vers le bon port : il y a donc toujours commutation. Le choix d'un chemin préférentiel, qui peut varier en fonction de l'état du réseau, n'est par contre pas obligatoire : le routage n'est pas automatique.

Ces deux processus font souvent intervenir des protocoles de communication pour vérifier que leur fonctionnement est correct. Ainsi, la commutation est souvent accompagnée d'un protocole de réservation des ressources : avant d'émettre la donnée vers le bon chemin, un signal est envoyé "en reconnaissance" vers le terminal de destination. Cette opération permet de réserver, dans les nœuds du réseau, les ressources nécessaires pour accueillir la donnée lorsqu'elle est finalement émise. Nous verrons aussi par la suite que le protocole AFDX permet de garantir une bande passante aux flux de données, notamment grâce au contrôle des commutateurs (Sect. III.2). Ce protocole de communication permet d'éviter une possible congestion du réseau et fait partie des nombreux protocoles existants qui permettent de garantir une qualité de service.

I.4 Performances d'un réseau

I.4.1 Qualité de service

Les performances d'un réseau informatique sont généralement évaluées par sa qualité de service. Celle-ci reflète la capacité du réseau à véhiculer dans de bonnes conditions un trafic donné, en évaluant sa disponibilité, son débit, ses délais de transmission, son taux de perte de paquets, etc.

A chaque type de réseau sont associées des performances spécifiques attendues. En effet, la qualité de service d'un réseau répond aux attentes spécifiques liées aux propriétés particulières de chaque réseau (local, grandes distances, sans fils, etc).

Nous verrons plus tard que les performances attendues d'un réseau peuvent essentiellement être classées en deux catégories : les "performances pire-cas" et les "performances en moyenne" (Sect. IV). La première catégorie réuni les réseaux pour lesquels on souhaite garantir des performances minimales. C'est par exemple le cas des réseaux AFDX, qui doivent être certifiés et exigent donc des garanties qualitatives sur les caractéristiques temporelles du réseau. A l'inverse, les performances moyennes sont associés à des réseaux sans exigences quantitatives.

I.4.2 Critères d'évaluation des performances d'un réseau

Pour estimer la qualité de service d'un réseau, il existe différents indicateurs, tels que le débit, les délais de transmission ou bien les taux d'erreurs. Nous évoquons ici quelques unes de ces grandeurs caractéristiques d'un réseau.

— Un débit s'exprime en bits par secondes (bit/s). On parle de débit nominal pour évoquer la vitesse de transmission du câble. Le débit utile représente le débit nominal auquel est retiré le débit de la liaison affecté au contrôle. Par exemple, le débit nominal d'un réseau Ethernet

est de 10 000 Mbits/s mais évolue de plus en plus vers 1 Gbit/s. Un réseau AFDX, qui est une variante d'un réseau Ethernet, transmet donc une grande quantité de données.

— Les différents délais caractéristiques d'un réseau sont exprimés en secondes.

- La durée de transmission D_t est le temps que met le terminal de départ pour envoyer la totalité de l'information. Il dépend de la quantité de données Q ainsi que du débit D selon la formule $D_t = \frac{Q}{D}$.
- Le délai de propagation, noté D_p, dépend de l'éloignement L, des délais dus aux nœuds intérieurs D_i et à la vitesse de propagation dans la liaison V. Alors, $D_p = \frac{L}{V} + \sum_i D_i$.

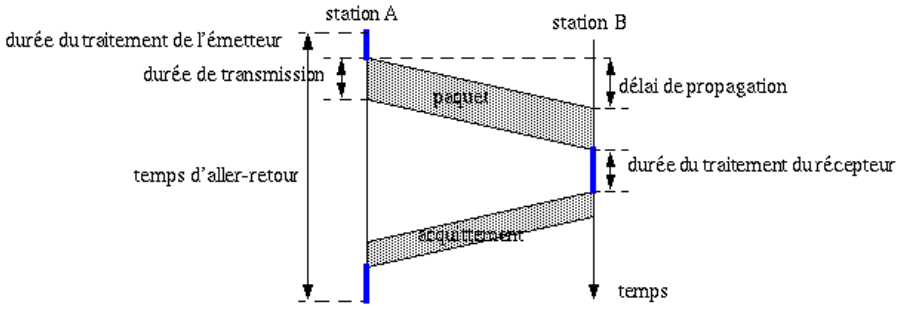


FIGURE 1.3 – Schéma des temps de transmission, de propagation et de traitement de données [3].

- Le temps aller-retour comprend ces temps de transmission et de propagation, auquel s'ajoutent le temps de traitement par le terminal destinataire ainsi que le temps d'acquittement, qui désigne le temps d'envoyer et de transmettre un accusé de réception au terminal source. La figure 1.3 schématise ces délais entre deux terminaux, notés A et B.

Il existe différentes mesures des taux d'erreurs. Nous n'entrerons pas dans les détails à leur propos. Nous souhaitons seulement donner un ordre de grandeur de ces grandeurs caractéristiques. Un réseau local d'une étendue de 1 km, avec un débit d'environ 10 Gbits/s et un temps aller retour de 1 ms, a un taux d'erreur de l'ordre de 10^{-12}. Un inter-réseau de 10 000 km, avec un débit classique de 100 Mbits/s, un délai de 100 ms, présente un taux d'erreur un peu plus élevé, de l'ordre de 10^{-8}. Les taux d'erreur, que ce soit dans des réseaux locaux ou très étendus, ont donc un ordre de grandeur très petit.

Nous présentons maintenant les deux types de réseau étudiés dans ce manuscrit : les grilles de calcul (Sect. II) et les réseaux AFDX (Sect. III).

II LES GRILLES DE CALCUL

Dans cette section, nous présentons les grilles de calcul. Dans une première partie, nous introduisons les réseaux de grilles informatiques et expliquons leurs spécificités par rapport à d'autres systèmes distribués (Sect. II.1). Par la suite, nous expliquons de manière plus détaillée ce qu'est une grille de calcul (Sect. II.2).

II.1 Les réseaux de grilles informatiques

La consommation énergétique mondiale liée aux centres de données (serveurs, centres de stockage, équipements réseaux et de télécommunications) augmente sans cesse. Entre 2000 et 2005, l'électricité utilisée par les centres de données dans le monde a doublé [13] et de 2005 à 2010, elle a augmenté de 56% [14]. De plus, les besoins en puissance de calcul augmentent de façon très importante avec l'essor des simulations numériques, que ce soit pour les besoins de l'industrie afin de s'épargner le coût de tests grandeur nature, ou qu'il s'agisse de simuler des comportements encore incompris dans le cadre académique. Il existe donc de forts besoins en puissance de stockage ainsi qu'en puissance de calcul. Afin d'y répondre, différents types de supercalculateurs et de systèmes distribués ont fait leur apparition.

Une grille informatique est un système distribué. Ce terme se définit dans le sens opposé à un système centralisé : il s'agit d'un ensemble constitué de terminaux autonomes qui sont connectés via un réseau.

Le nom de grille informatique (*grid computing*) provient du terme anglais *grid*, utilisé en premier dans le terme *electric grid*, ou grille électrique. Le principe des grilles informatiques est en effet inspiré du principe des grilles électriques : le réseau doit être capable d'offrir à l'utilisateur les ressources dont il a besoin, via une interface simple, et sans l'impliquer dans la complexité du réseau. L'utilisateur doit ainsi pouvoir varier sa consommation sans prévenir et la grille doit s'adapter et donc être capable de réquisitionner une grande quantité de ressources rapidement.

Ainsi, un réseau de grille informatique se veut très flexible et capable de fournir une capacité de stockage ou de calcul à la demande. Pour accomplir cela, les réseaux de grilles informatiques ont tiré profit du fait que les réseaux du monde entier sont inter-connectés, notamment grâce à Internet. La structure d'une grille peut en effet traverser plusieurs réseaux différents. Une des spécificités d'un réseau de grille informatique est qu'il est possible d'avoir un éloignement géographique très important entre ses différents terminaux.

Une autre de ses spécificités repose sur sa grande flexibilité car l'ensemble des terminaux peut être hétérogène. La puissance de calcul ou de stockage d'une grille peut être distribuée entre des ordinateurs, des *clusters*, serveurs, etc. Et chaque terminal peut par exemple fonctionner sur un système d'exploitation différent. La possibilité de pouvoir relier des terminaux du monde entier sur lesquels sont imposées peu de contraintes est l'avantage principal d'un réseau de grille informatique.

Or, un réseau de grille informatique n'est puissant que si le nombre de terminaux interconnectés est grand : c'est la mise en commun qui crée sa puissance. Participer à une grille doit donc pouvoir être simple. Pour cela, les terminaux d'une grille sont tous indépendants et n'importe quel terminal peut entrer ou sortir de la grille comme il l'entend.

Comparons le pour cela à un autre système distribué, qui permet de mettre en commun des ressources : le *cluster*. Un *cluster* est composé de nombreux ordinateurs ou serveurs reliés par un réseau afin de ne plus former qu'un seul ordinateur virtuel, dont la puissance de stockage et de calcul est phénoménale (Fig. 1.4). Une des différences notables avec une grille est qu'une fois le *cluster* formé, chaque ordinateur ou serveur perd son indépendance et sa capacité de décision. Ils doivent donc tous être standardisés pour pouvoir fonctionner ensemble comme un seul terminal.

FIGURE 1.4 – Photo d'un *cluster* basé au CERN [4].

Une grille informatique est le réseau distribué le plus général possible : c'est la somme de ses parties. Ainsi, pour assurer une bonne qualité de service à une grille, chacun de ses terminaux doit garantir une certaine qualité de service. Considérons un réseau de grille informatique reliant uniquement des *clusters*, c'est-à-dire un système distribué flexible (la grille) composé de sous-systèmes distribués peu flexibles (les *clusters*). La qualité de service des *clusters* se reflète alors sur toute la grille.

Afin de gérer la grille tout en laissant son indépendance à chaque composant de la grille, un intergiciel (ou *middleware*) est mis en place. Il peut être vu comme le système d'exploitation de la grille. Il est chargé par exemple de gérer les calculs, aussi appelées tâches : les soumettre, les planifier, les ordonnancer. Il se charge aussi de la gestion des données, telles que le stockage et les transferts.

La mutualisation des ressources recherchée avec les réseaux de grilles informatiques sert différents objectifs. Chacun de ces objectifs a donné lieu à un type de grille informatique.

— La grille d'information, comme par exemple les moteurs de recherche comme Google, permet le partage de l'information à travers un réseau.

— La grille de stockage stocke des données externalisées entre plusieurs serveurs.

— La grille de calcul, qui met en commun la puissance de calcul de plusieurs terminaux comme des ordinateurs ou des *clusters*. C'est ce système qui nous intéresse et que nous détaillons dans la suite de cette section.

II.2 Les grilles de calcul

L'avantage d'une grille de calcul par rapport à un autre réseau qui présente une grande puissance de calcul repose dans son coût, autant matériel que d'utilisation (consommation énergétique principalement). Les supercalculateurs ainsi que les *clusters* sont des équipements matériels qui coûtent cher [15]. A l'inverse, une grille de calcul exploite les ressources informatiques qui sont déjà à disposition mais qui ne sont pas exploitées au maximum de leurs performances. Elle ne nécessite donc aucun achat de matériel. Concernant les coûts de consommation, les *clusters* et supercalculateurs consomment énormément de ressources et sont généralement couplés à un coûteux système de refroidissement. Une grille met quant à elle à profit les ordinateurs allumés qui, sans elle, auraient vu leurs puissance de calcul non-utilisée et leur consommation énergétique gaspillée. De plus, le fait de pouvoir exploiter des équipements géographiquement éloignés permet à une grille d'optimiser la consommation énergétique. Comme par exemple en exploitant les équipements placés dans les zones où il fait nuit.

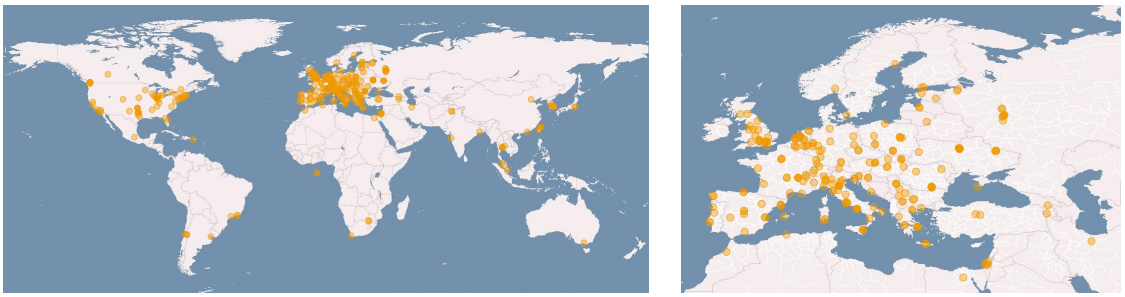
Ces dernières années, de grands projets de grilles de calcul se sont développés. Il en existe plusieurs types.

— Les grilles de calcul privées, restreintes d'accès, par exemple au sein d'une entreprise.

— Les grilles de calcul de recherche nationales, comme Grid'5000 (Figure 1.5) en France, récupèrent les ressources informatiques inutilisées pour former un terminal virtuel hétérogène. C'est une pratique courante des laboratoires, actuellement utilisée pour la recherche expérimentale sur le calcul parallèle.

FIGURE 1.5 – Carte de la grille de calcul Grid'5000 [5].

— Les grilles de calcul dites de projet, comme le *Worldwide LHC Computing Grid*, la plus grande grille du monde, coordonnée par le CERN (Centre d'Etude et de Recherche Nucléaire) et qui pourvoit une énorme puissance de calcul afin de stocker, distribuer et analyser les données générées par le *Large Hadron Collider* (LHC). Il s'agit d'un projet européen réunissant 21 institutions de 15 pays différents, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.6. Il réunit des grilles internationales et régionales plus petites [16]. Cette grille traite jusqu'à 1 pétabit (c'est-à-dire 10^{15} bits) par an.



(a) Carte mondiale

(b) Carte zoomée sur l'Europe

FIGURE 1.6 – Carte des centres de calcul interconnectés participant à la grille mondiale *Worldwide LHC Computing Grid*.

Pour résumer, les grilles de calcul sont une généralisation du calcul distribué. Lorsqu'une grille de calcul réunit la puissance inutilisée d'ordinateurs hétérogènes, la grille de calcul est une solution bon marché pour faire du calcul de haute performance, mais elle ne permet pas de garantir une qualité de service. Lorsqu'elle réunit des *clusters*, elle devient un supercalculateur, capable de garantir une forte qualité de service. Dans ce second cas, être capable de déplacer les tâches à exécuter vers l'autre bout du monde représente une bonne opportunité pour consommer moins d'énergie.

III LES RÉSEAUX AFDX

Dans cette section, nous introduisons les réseaux AFDX. Nous présentons tout d'abord les principales caractéristiques des systèmes embarqués avioniques ainsi que les enjeux qui ont amené à concevoir cette nouvelle architecture pour ces réseaux (Sect. III.1). Ensuite, nous présentons les réseaux AFDX et nous insistons sur la notion importante de lien virtuel (ou *virtual link*) et sur les caractéristiques des commutateurs d'un tel réseau (Sect. III.2).

III.1 Les réseaux avioniques

Les architectures des réseaux embarqués avioniques n'ont cessées d'évoluer en complexité ces dernières années. Une étude a établit que la complexité des systèmes avioniques double tous les 5 ans [17]. Les améliorations des systèmes embarqués avioniques ont pourtant des inconvénients : ils augmentent le nombre de composants et le nombre de câbles les reliant, et ce poids représente un coût non négligeable. De plus, le système avionique représente 30% du coût de construction d'un avion [18]. Cela entraîne aussi une augmentation des coûts de développement et de maintenance. Il a donc été nécessaire de faire évoluer l'architecture de ces systèmes, ce qui a conduit à se tourner vers la conception de systèmes plus modulaires.

Avant l'introduction des réseaux AFDX, la majorité des systèmes embarqués avioniques fonctionnaient selon un standard aéronautique décrivant un bus de communication de données. Au fur et à mesure de l'introduction de nouvelles fonctionnalités dans le système, le nombre de câbles a atteint une taille critique. L'Airbus A380 n'aurait tout simplement pas pu être créé sans l'invention d'une nouvelle architecture de système embarqué. L'idée était de concevoir un réseau Ethernet commuté, c'est-à-dire un réseau local de transmission de données faisant intervenir des commutateurs, et ayant donc une topologie de type étoile.

III.2 La structure d'un réseau AFDX

Un réseau AFDX (*Avionics Full DupleX switched Ethernet*) est constitué d'équipements (calculateurs, capteurs, actionneurs), chacun appartenant à un sous-système tel que le système du train d'atterrissage, les commandes de vol, la cabine,etc. Ces équipements sont reliés au réseau par l'intermédiaire de systèmes terminaux, ou *end-systems*, dont l'acronyme est ES. Il s'agit des nœuds terminaux du réseau, qui envoient et reçoivent les trames, c'est-à-dire les données accolées d'une "en-tête".

FIGURE 1.7 – Commutateurs présents dans le réseau embarqué AFDX d'un Airbus A380.

Ils sont reliés entre eux par des câbles et centralisés au niveau du cockpit, d'où proviennent les commandes. Des commutateurs jouent le rôle de nœuds intérieurs du réseau. Nous pouvons observer, sur la figure 1.7, les commutateurs présents dans un Airbus A380, le premier avion ayant intégré un réseau AFDX. A titre indicatif, cet avion comprends quatre cent kilomètres de câbles informatiques.

Ce système présente l'avantage d'utiliser du matériel et des outils de développement déjà existants (les commutateurs). De plus, ces composants matériels sont fiables et faciles à maintenir. Néanmoins, ce système avionique doit respecter des contraintes temps-réel, incontournables pour que les autorités certifient l'avion apte à voler. En effet, les problèmes qui pourraient se poser au sein d'un avion sont classés par les autorités en fonction de leur sévérité. Un dysfonctionnement du réseau avionique, comme par exemple une perte des communications, est classé comme catastrophique. Il s'agit du plus haut niveau de sévérité. Pour mitiger ces risques, les autorités imposent que les réseaux embarqués avioniques garantissent une certaine qualité de service. Une des contraintes imposées est de connaître le temps maximal mis par toute information pour traverser le réseau (appelé pire temps de bout en bout). Par exemple, le temps maximal autorisé pour transférer une trame est de 100 millisecondes. Ainsi, il faut être capable d'estimer les performances du réseau dans le cadre "pire cas". Une autre de ces contraintes est de garantir l'absence de perte de trames par congestion.

Cependant, le réseau AFDX met en œuvre de nombreux commutateurs. Mais l'usage de commutateurs dans une architecture ne comporte pas de mécanismes permettant de garantir une qualité de service requise. Afin d'éviter les collisions entre les trames, le réseau est câblé avec des lignes de communication qui opèrent selon le mode *Full-Duplex*, c'est-à-dire des bus bidirectionnels. Ainsi, les données ne se croisent pas et il n'y a pas de collision possible dans les lignes de communication. Ceci a un autre avantage majeur : une amélioration très nette du débit dans un réseau AFDX, qui est d'environ 100 Mbps (millions de bits par seconde). De plus, pour maîtriser les flux, il faut pouvoir les prévoir. Les tables de commutation des commutateurs sont donc imposées statiques, c'est-à-dire déjà établies avant le décollage. Il est ensuite nécessaire de maîtriser les flux, afin qu'ils n'entrent pas en compétition pour l'utilisation des ressources des commutateurs et engendrent des congestions, voire des pertes de trames, ce qui n'est pas admissible dans un réseau avionique. Pour cela, le concept de *virtual link* a été développé.

III.2.1 Notion de *virtual link*

Pour permettre la ségrégation des différents flux de données, un niveau d'abstraction est institué : le *virtual link*, ou lien virtuel dont l'acronyme est VL. Il constitue un canal de communication virtuel qui relie les *end-systems*, comme schématisé sur la figure 1.8.

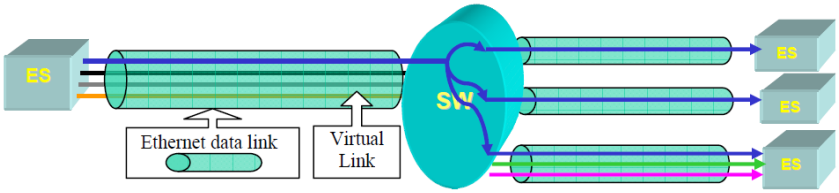


FIGURE 1.8 – Flux des *virtual link* [6].

Les commutateurs passent un contrat de trafic avec le réseau : ils réservent une bande passante à chaque *virtual link* les traversant et filtrent le trafic pour s'assurer que ce contrat est respecté. Ainsi, chaque *Virtual Link* est indépendant des autres. Pour éviter la congestion d'un *virtual link* dans un commutateur, une taille maximale de trame L_{max} est imposée, ainsi qu'un temps minimum entre deux envois de trames consécutifs : le BAG (*Bandwidth Allocation Gap*). De ces contraintes, nous pouvons déduire la bande passante maximale d'un *virtual link*, égale à L_{max}/BAG.

III.2.2 Les commutateurs d'un réseau AFDX

La commutation se déroule comme suit : le commutateur lit, dans l'"en-tête" de la trame, le numéro du *virtual link* sur lequel cette trame transite ainsi que l'adresse MAC de son *end-system* destinataire. Sa table de commutation (statique) lui indique alors sur quel port renvoyer la trame. En fonction du *virtual link* d'appartenance de cette trame, le commutateur s'assure que la bande passante réservée à ce *virtual link* est respectée. La réservation de bande-passante pour chaque *virtual link* empêche donc la compétition des flux de données entre eux.

Nous avons mentionné que les problèmes qui pourraient se poser dans les réseaux avioniques sont considérés par les autorités comme les plus critiques. Néanmoins, les données liées au pilotage de l'avion sont évidemment plus critiques que celles de l'écran tactile du passager placé au siège 7H. Des niveaux de priorités sont donc mis en place. Pour rendre cela possible, chaque commutateur possède deux mémoires tampons, une dédiée aux données critiques et une aux données non critiques. Les données de priorités différentes ayant été séparées, chaque mémoire tampon fonctionne selon le principe FIFO qui est l'acronyme de *First In, First Out*, c'est-à-dire premier entré, premier sorti.

Evoquons rapidement la façon dont le réseau et les commutateurs gèrent les duplications des trames, c'est-à-dire le cas d'une trame envoyée à plusieurs *end-systems* destinataires distincts. Lorsque les chemins des différents exemplaires de cette trame se séparent, le réseau AFDX duplique la donnée. Chaque copie emprunte alors un itinéraire différent pour arriver à son *end-system* destinataire (Figure 1.9). Ce protocole est mis en place afin d'éviter de surcharger le réseau .

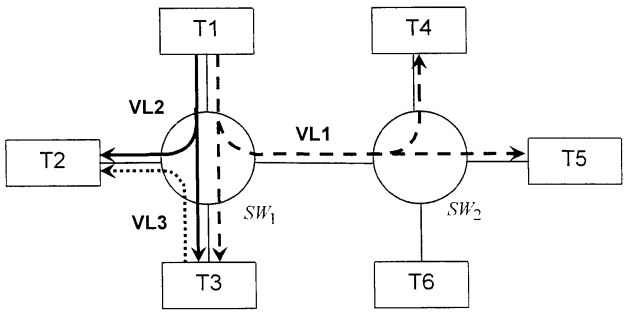


FIGURE 1.9 – Dédoublement de trois *virtual link* notés VL1, VL2 et VL3, lors de la duplication de trames [7].

Pour résumer, modéliser un réseau AFDX présente plusieurs difficultés. La quantité de

données qui transite n'est pas gigantesque, si nous comparons avec une grille de calcul, mais le débit de données est grand. Si nous ajoutons les exigences en matière de qualité de service, nous pouvons parler de problème complexe. Etre capable de diminuer la complexité associée de ce type de réseau nous permettrait d'obtenir des simulations en temps rapides, dans le but de mieux comprendre les comportements critiques qui peuvent s'y produire.

IV MODÉLISATION DES PERFORMANCES D'UN RÉSEAU INFORMATIQUE

La croissance des grands réseaux de télécommunication comme les grilles de calcul ou internet, mais aussi l'apparition de réseaux complexes dans les systèmes embarqués comme les réseaux AFDX, posent des problèmes divers, qui peuvent surgir à différents stades de la "vie" d'un réseau. La modélisation des performances d'un réseau a donc des objectifs divers :

— Elle peut contribuer à la conception du réseau, c'est-à-dire permettre de mieux appréhender le réseau, par exemple pour la validation *a priori* de ses performances.

— Elle peut servir lors du développement du réseau, avec le dimensionnement des éléments du réseau par exemple. Dans le cas d'un réseau AFDX, la modélisation peut aider à dimensionner la taille des mémoires tampons pour minimiser le risque de congestion.

— La modélisation peut aussi contribuer à l'optimisation des performances du réseau à l'utilisation, et ainsi améliorer sa qualité de service. Pour reprendre le cas d'un réseau AFDX, il peut s'agir par exemple d'améliorer la majoration du temps de parcours d'une trame d'un bout à l'autre du réseau.

L'évolution permanente de réseaux informatiques d'une grande complexité et/ou mettant en jeu d'importantes quantités de données a conduit à faire évoluer les outils pouvant en faciliter l'étude.

Puisque les réseaux et les critères de qualité de service qui leurs sont associés sont très variés, il n'existe pas de méthode systématique pour construire un modèle. Nous pouvons cependant classer les méthodes en deux catégories selon l'approche qu'elles ont de l'étude des performances : l'approche "pire-cas" ou l'approche "en moyenne".

— L'approche "pire-cas" regroupe des méthodes qui sont surtout utilisées afin de certifier les réseaux : il s'agit de garantir des performances minimales au réseau. Leur principal avantage est de modéliser le comportement du réseau et ce, quel que soit le trafic. La conséquence de cette approche est l'obtention de résultats pessimistes qui mènent à surdimensionner les réseaux. Citons comme exemple la méthodes du calcul réseau, dont nous parlerons dans la première partie de cette section.

— L'approche "en moyenne" considère au contraire que les comportements extrêmes dans un réseau sont rares et regroupe donc des méthodes cherchant plutôt à évaluer les performances moyennes, c'est-à-dire les comportements les plus fréquents. On trouve ici la méthode de files d'attentes fluides, que nous évoquons en seconde partie de cette section.

IV.1 Méthode de calcul réseau

Le calcul réseau ou *network calculus*, est une méthode déterministe. Il s'agit de la méthode la plus utilisée pour borner les temps de traversée dans un réseau. Son principe est basé

sur des résultats de Cruz [19, 20] et de Chang [21] qui ont été enrichis plus tard par d'autres auteurs, tels que Le Boudec [22] et Thirian [23]. C'est la méthode qui a été utilisée afin de certifier l'A380. Il s'agit donc d'une approche de modélisation des performances "pire cas" d'un réseau.

Le calcul réseau modélise les flux de données (les *virtual links* dans le cas d'un réseau AFDX) par des fonctions cumulatives notés $A(t)$ qui représentent le nombre de bits émis par le flux de données pendant l'intervalle $[0, t[$. Chaque élément du réseau (un commutateur par exemple) est modélisé par une fonction cumulative d'arrivée $R(t)$ et une fonction cumulative de sortie $R^*(t)$, qui représentent respectivement les flux d'entrée et de sortie de cet élément. La figure 1.10 résume ces définitions, ainsi que celles qui suivent.

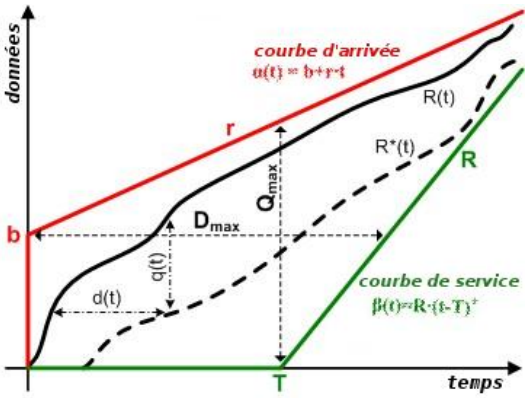


FIGURE 1.10 – Schéma des différentes quantités de données utilisées par la méthode de calcul réseau, exprimées en fonction du temps.

A partir de ces quantités, le retard virtuel $d(t)$ est alors défini, afin de désigner le temps mis par un bit entré dans l'élément au temps t pour le traverser. L'arriéré $q(t)$ représente le nombre de bits présents dans l'élément au temps t.

La théorie se base sur des données qui sont en général fournies par le constructeur des composants : les courbes d'arrivées et de service. A chaque élément du réseau est associé une courbe d'arrivée appelée $\alpha(t)$, ainsi qu'une courbe de service notée $\beta(t)$. La courbe d'arrivée fixe une limite supérieure à la quantité de données pouvant être déplacée par une ligne de communication pendant un temps t, c'est-à-dire contraint la quantité maximale de données pouvant rentrer dans l'élément pendant une période t. La courbe de service fixe une limite inférieure à la quantité d'information pouvant être traitée par un élément du réseau durant une période de temps donnée.

Une algèbre spécifique, appelée algèbre Min-Plus, permet de démontrer qu'il existe une borne supérieure de la mémoire tampon Q_{max} nécessaire pour éviter toute perte, et une borne supérieure du temps de bout en bout D_{max}. Cette algèbre Min-Plus a été développée car elle facilite les calculs lorsque l'on compose les éléments entre eux (en série, en parallèle, etc). Le calcul réseau montre que ces bornes sont atteintes pour un réseau comprenant un seul élément mais ne sera jamais atteinte dans le cas d'un réseau à plusieurs éléments.

Ainsi, le calcul réseau est une méthode assez générale, flexible et s'appuyant sur des résultats algébriques forts mais, dans un réseau très complexe tel qu'un réseau AFDX, ses résultats sont pessimistes, comme schématisé sur la figure 1.11. Le lecteur intéressé pourra lire [24].

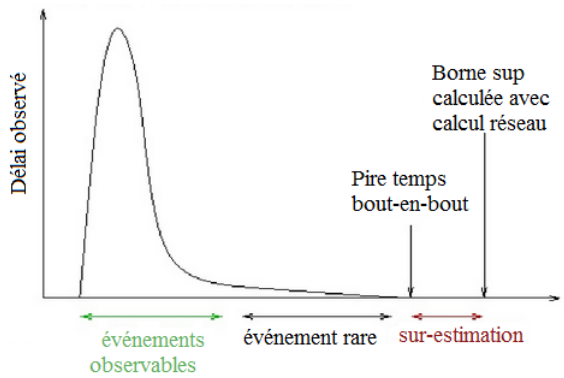


FIGURE 1.11 – Schéma donnant les délais de bout en bout observés dans un réseau AFDX, l'indication du temps pire-cas de bout en bout et de la borne supérieure de ce temps, calculée par le calcul réseau [8].

IV.2 Méthode des files d'attente fluides

La modélisation en files d'attente fluides de réseaux est une méthode déterministe, destinée à estimer les performances "en moyenne" d'un réseau. Elle a été développée vers le début des années 2000, en réponse au développement des grands réseaux et à la croissance exponentielle des données à gérer, phénomène qui s'annonçait durable. Cette méthode a été développée dans le but de mieux comprendre le comportement de grands réseaux comprenant un important trafic, comme par exemple les réseaux IP [25, 26].

Cette méthode décrit le comportement des réseaux de manière déterministe en utilisant des équations continues. Mais contrairement aux modélisations déterministes qui considèrent le mouvement individuel de chacune des trames d'un réseau, l'unité discrète est ici un fluide qui s'écoule dans le réseau. Chaque nœud du réseau, comme par exemple un commutateur, est modélisé par une file d'attente fluide. Il est désigné par le terme réservoir et est schématisé comme le montre la figure 1.12.

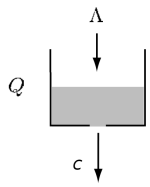


FIGURE 1.12 – Schéma d'un réservoir de débit d'entrée Λ, de débit de sortie c, et contenant une quantité de fluide Q [9].

Certaines informations sont nécessaires à la définition d'une file d'attente. On associe à chaque file d'attente fluide (ou réservoir) un débit d'arrivée $\Lambda(t) \in [0, +\infty)$ et un débit maximal de sortie c. Alors, le taux d'arrivée du fluide, c'est-à-dire le volume fluide qui arrive dans le réservoir pendant l'intervalle $[0, t]$ est donné par

$$A(t) = \int_0^t \Lambda(s)\, ds.$$

On peut en déduire le niveau du réservoir $Q(t)$, c'est-à-dire la quantité de fluide se trouvant dans le réservoir au temps t

$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t (\Lambda(s) - c)\, ds.$$

Si l'on considère la probabilité $p(t)$ que la mémoire tampon perde des données, l'évolution du niveau du réservoir est alors donnée par l'équation différentielle

$$\frac{dQ(t)}{dt} = A(t)\left[1 - p(t)\right] - D(t),$$

où $D(t)$ représente le taux de sortie du réservoir, égal au débit maximal de sortie c dès que $Q(t) > 0$. La figure 1.13 illustre les résultats obtenus dans le cas d'un réseau comprenant un seul réservoir, de paramètres son taux d'arrivée $\Lambda(t)$, et son taux de départ $D(t)$. La quantité de fluide $Q(t)$ présent dans le réservoir est déduite [27]. Cette méthode de files d'attente fluides permet aussi d'obtenir des estimations des performances pour lesquelles on ne dispose pas de résultats analytiques, comme les délais de bout en bout et la taille des mémoires tampons.

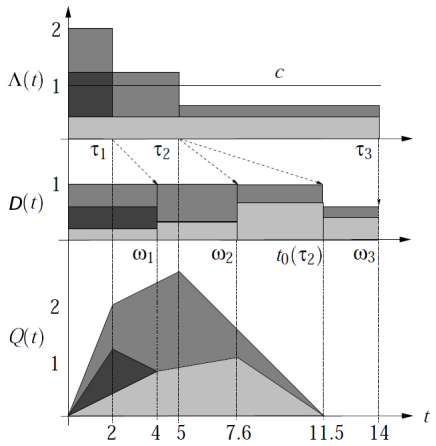


FIGURE 1.13 – Evolution des quantités de fluide dans un réservoir.

Cette méthode s'avère plus efficace qu'une modélisation déterministe des trames : elle entraîne un gain considérable sur le coût des simulations numériques, d'autant plus lorsqu'il s'agit de réseaux qui font intervenir une grande quantité de données. Néanmoins, cette technique a des inconvénients majeurs : les équations différentielles qui régissent le comportement du fluide au cours du temps manquent de formalisme et il est difficile d'adapter cette technique dès lors que le réseau est légèrement modifié.

Nous allons nous inspirer de cette modélisation et des avantages qu'elle présente quant à la vitesse de simulation des performances des grands réseaux. Par ailleurs, nous allons la combiner avec un formalisme mathématique. Notre objectif est donc de développer une méthode de modélisation fluide des réseaux informatiques par l'analyse asymptotique.

IV.3 Une approche mathématique de la modélisation fluide

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la modélisation mathématique et au formalisme qui lui est associé. Nous introduisons pour cela une hiérarchie de modèles : particulaire, cinétique, et fluide (Sect. IV.3.1). Nous expliquons ensuite comment la modélisation au

niveau de description fluide peut faciliter l'estimation des performances des réseaux informatiques, et plus précisément des grilles de calcul et des réseaux AFDX (Sect. IV.3.2).

IV.3.1 Introduction à la modélisation mathématique

Modéliser mathématiquement un phénomène physique, chimique, biologique, etc, signifie traduire ce phénomène complexe en termes mathématiques et doit répondre aux deux exigences suivantes :

— Obtenir un modèle aussi fidèle que possible. En effet, la modélisation mathématique est mise en œuvre dans le but de mieux comprendre le fonctionnement réel et les mécanismes fondamentaux sous-jacents le régissant, ce qui demande de s'approcher au plus près du comportement réel. Elle présente l'avantage, lorsque l'on est capable de garantir sa précision, d'épargner des tests "grandeur nature" très coûteux.

— Mais souvent, essayer de rendre un modèle trop fidèle à la réalité augmente sa complexité et pénalise le coût de sa simulation numérique. La seconde exigence est donc d'obtenir un modèle que l'on peut simuler avec un coût numérique acceptable.

Ainsi, le défi de la modélisation mathématique réside dans le fait de répondre à ces deux problèmes contradictoires, c'est-à-dire de trouver un compromis entre la précision et le coût de simulation du modèle. Pour cela, il existe trois niveaux de description mathématique.

— Le niveau de description le plus précis est le niveau de description particulaire, aussi appelé description microscopique. Il décrit chacune des particules du système individuellement. Il peut s'agir de particules élémentaires comme des électrons ou des ions, mais aussi de cellules appartenant à un organisme biologique, de poissons d'un banc de poisson, ou encore de voitures dans la circulation automobile. Nous modélisons dans cette thèse des données informatiques.

  Chacune des particules des N particules du système considéré est décrite par des paramètres. Soit les paramètres $p_i(t) \in \mathbb{R}^3$ et $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ qui décrivent la dynamique de la particule i, avec $i \in \{1, .., N\}$. Il peut par exemple s'agit de la position et la vitesse. Alors, la dynamique de la particule i est modélisée par le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = f(t, p, q), \\ \dfrac{dq_i}{dt} = g(t, p, q). \end{cases}$$

  Ce niveau de description est principalement utilisé lorsque l'on s'intéresse à un problème peu connu. En effet, si le nombre de particules N intervenant dans le phénomène est grand, ce niveau de description présente un coût numérique excessivement élevé.

— Le niveau de description cinétique, aussi appelée description mésoscopique, est moins précis que la description particulaire. Il est utilisé lorsque le nombre de particules N est grand et que décrire toutes les particules du système n'est pas envisageable car trop coûteux. On introduit pour cela une fonction de densité de probabilité des particules, notée $f(t, p, q)$ où $(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ représente l'espace des phases. Si nous reprenons l'exemple donné lors de la présentation du niveau particulaire, alors la densité de probabilité de particules s'exprime

par

$$f(t,p,q) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{p_i(t)=p}\,\delta_{q_i(t)=q}\,.$$

Cette densité de probabilité compte la proportion de particules présentes au temps t avec les paramètres p et q. L'équation qui régit l'évolution de f au cours du temps s'appelle équation cinétique. On obtient donc une seule équation pour décrire la dynamique globale des particules. Le coût de simulation est donc significativement moindre que pour la description particulaire, car la modélisation est maintenant indépendante du nombre de particules N. Ce niveau de description est cependant moins précis, moins fidèle à la réalité que le niveau de description microscopique. C'est pour cela qu'il est avantageux d'utiliser cette méthode seulement lorsque N est grand.

Afin d'obtenir une équation cinétique à partir de la description particulaire, il convient d'étudier le comportement global de la densité de probabilité dans l'espace des phases, traduit par cette équation cinétique. Pour ce faire, il faut en premier lieu obtenir un modèle adimensionné du système que l'on étudie . Le but de l'adimensionnement est d'obtenir une équation cinétique sans dimension qui reflète les différentes échelles de temps ou d'espace entrant en jeu dans la dynamique du modèle. Le principe de l'adimensionnement est le suivant :

- On distingue tout d'abord les grandeurs caractéristiques spatiales ou temporelles du système étudié. Nous les notons ici $\bar{x}$ et $\bar{t}$.
- On utilise alors ces grandeurs caractéristiques comme grandeurs de référence et l'on exprime toutes les variables en fonction de ces grandeurs via les changements de variables $x = \bar{x}x'$ et $t = \bar{t}t'$.
- L'équation obtenue sur les nouvelles variables x' et t' s'appelle équation adimensionnée : elle fait intervenir des paramètres sans dimension. Ces paramètres expriment des rapport entre les échelles de référence choisies et les échelles auxquelles les phénomènes physiques ont lieu. On peut ainsi déterminer quels termes sont déterminants dans le comportement du modèle et quels termes peuvent être négligés.

Une fois l'adimensionnement effectué, nous obtenons une équation dans laquelle peut être insérée n'importe quelle valeur de $\bar{x}$ et $\bar{t}$ car chaque paramètre est dimensionné par rapport à ces grandeurs caractéristiques. Nous pouvons donc appliquer à l'équation cinétique adimensionnée la limite asymptotique que l'on souhaite étudier.

— Le niveau de description le plus global est appelé description macroscopique, ou description fluide. Ce niveau de description porte sur les moments de la densité de probabilité, comme par exemple sa densité, sa quantité de mouvement, etc. Il est obtenu en utilisant la méthode des moments pour aboutir à un système d'équations macroscopiques, chaque équation décrivant la dynamique d'un moment. Ce type de problème a été très étudié, notamment dans le domaine de la mécanique des fluides, d'où le nom d'équations fluides. Il s'accompagne ainsi d'une littérature abondante, notamment de théorèmes permettant d'étudier le caractère bien posé du système d'équations obtenus. Le lien entre le niveau cinétique et le niveau fluide a été abondamment étudié [28–30]. Il existe aussi de nombreux résultats empiriques qui donnent des lois d'état et permettent ainsi de fermer le système mais aussi de simplifier les calculs. Ce niveau de description présente le grand avantage de fournir des équations indépendantes du nombre de particules considérée et qui peuvent

donc donner lieu à des simulations numériques encore moins coûteuses que la description cinétique, car on a réduit l'espace des phases.

La modélisation fluide permet donc une description globale d'un comportement "moyen". Elle résulte en une économie considérable du point de vue du volume de calcul, surtout lorsqu'il s'agit de modéliser des réseaux qui font intervenir un grand nombre de données. En effet, les équations fluides obtenues peuvent être simulées à l'aide de techniques de discrétisation classiques, à un coût indépendant du nombre de trames ou de tâches considérées. De plus, le formalisme mathématique sur lequel elle se base en fait une méthode très flexible, pouvant s'appliquer à un panel de phénomènes très large. Notons que cette approche fluide ne permet pas d'obtenir des résultats précis et ne peut garantir par exemple que la valeur d'une variable ne sera jamais dépassée.

IV.3.2 La modélisation fluide de réseaux par l'analyse asymptotique

La modélisation des performances d'un réseau informatique a des objectifs différents en fonction de la qualité de service que l'on cherche à garantir à ce réseau. Les modèles que nous construisons sont donc différents.

Un réseau informatique de type grille de calcul fait un grand nombre de calculs en parallèle en mettant en commun la puissance de différents terminaux interconnectés par une topologie maillée. Notre objectif est de modéliser une grille de calcul du même type que la grille de calcul du CERN en définissant la position pour les calculs à effectuer. Un tel réseau est modélisé afin, par exemple, de mieux comprendre son comportement et d'aider à l'optimisation de ses performances. L'objectif de notre modèle fluide est de pouvoir modéliser la dynamique de la charge des *clusters*, dans le but d'évaluer la politique de répartition des tâches, avec pour objectif de minimiser la consommation énergétique tout en maintenant un temps de calcul acceptable.

La quantité de données sur un réseau AFDX est bien moins importante que sur une grille de calcul. Néanmoins, les débit sont très rapides et les exigences en matière de qualité de service sont fortes. La modélisation des performances de ce type de réseau doit pouvoir fournir des valeurs précises. Nous avons déjà évoqué la méthode de calcul réseau, qui permet d'obtenir des bornes supérieures pour borner ces valeurs, quelque soit le comportement du réseau. Mais les bornes fournies sont souvent bien plus larges que celles observées lors d'un fonctionnement nominal, ce qui en fait une méthode pessimiste, qui conduit à sur-dimensionner le réseau. De plus, cette méthode ne donne qu'une très faible visibilité sur les réelles performances d'un réseau AFDX, les comportements du réseau qui conduisent aux scénarios les plus nuisibles sont en effet très rares. Notre approche n'est pas d'essayer d'améliorer les résultats obtenus par le calcul réseau. Nous souhaitons réduire la complexité du problème en utilise la méthode de modélisation fluide. Des simulations en temps rapide, nous permettraient de mieux comprendre les comportements "en moyenne" du réseau et peut-être comprendre ceux qui entrainent une criticité. L'objectif est donc de partir d'une description particulaire du transport des flux de données le long du réseau, pour obtenir un modèle fluide modélisant la charge des mémoires tampons.

L'idée de construire, pour les réseaux informatiques, des modèles fluides obtenus grâce à l'analyse asymptotique a déjà été explorée. Il s'agissait, dans ces travaux, de créer des modèles fluides modélisant la dynamique des grilles de calcul [31] ainsi que des réseaux AFDX [32]. Les travaux exposés dans ce manuscrit s'inscrivent à la suite de ce travail.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION FLUIDE DES GRILLES DE CALCUL

Sommaire

I Modélisation particulaire d'une grille de calcul 30
- I.1 Description d'un réseau de grille de calcul 30
- I.2 Description particulaire des tâches 31

II Obtention de l'équation cinétique 33
- II.1 Définition de la densité de probabilité 33
- II.2 Evolution de la densité de probabilité 34
- II.3 Limite asymptotique 37
- II.4 Etude de l'équation cinétique 41

III Analyse mathématique du modèle fluide 42
- III.1 Obtention du système d'équations de conservation 42
- III.2 Equivalence cinétique / fluide sous hypothèse de fermeture 43
- III.3 Etude d'existence et d'unicité 44

IV Conclusion et perspectives 49

Dans ce chapitre, nous nous consacrons à la modélisation de la dynamique des grilles de calcul telles que nous les avons présentés au chapitre 1, en utilisant la méthode de modélisation fluide.

Dans un premier temps, nous effectuons la modélisation particulaire des tâches dans une grille de calcul. Pour cela, nous décrivons la configuration de la grille de calcul, choisissons les paramètres pertinents permettant de décrire les *clusters* et les tâches qui s'exécutent dessus. Afin que la description particulaire des tâches soit complète, nous modélisons l'évolution en temps des paramètres qui caractérisent les tâches et décidons comment sont prises les décisions de déplacer les tâches vers un autre *cluster* (Sect. I). Nous utilisons par la suite la description particulaire des tâches afin d'obtenir l'équation cinétique régissant leur comportement global dans le réseau. Pour cela, nous introduisons une densité de probabilité des tâches dans chaque *cluster*. Nous décrivons ensuite tous ses comportements possibles pendant un petit temps d'observation, que nous faisons ensuite tendre vers zéro afin d'obtenir un "instantané" du comportement global des tâches sur les *clusters*. Pour cela, nous dimensionnons les grandeurs caractéristiques du réseau par rapport à ce temps d'observation et appliquons un

passage à la limite formel. Nous obtenons ainsi l'équation cinétique. En séparant la densité de probabilité entre la densité de probabilité des tâches en exécution et celle des tâches en déplacement vers un *cluster*, nous obtenons une équation de conservation sur chacune de ces inconnues (Sect. II). Puis, nous vérifions le caractère bien posé de notre modèle (Sect. III). La démonstration du temps d'existence d'une solution fluide fait apparaître un temps caractéristique qui définit le temps d'optimisation du réseau. Afin d'intégrer à notre modèle la modélisation de réseaux hétérogènes, nous nous sommes intéressés à une autre asymptotique que celle choisie précédemment, permettant la modélisation d'une grille qui optimise en temps réel les déplacements des tâches entre les *clusters* (Sect. IV).

I MODÉLISATION PARTICULAIRE D'UNE GRILLE DE CALCUL

I.1 Description d'un réseau de grille de calcul

Les réseaux de grilles de calcul ont déjà été évoqués (Chap. 1-Sect. II). Nous rappelons ici qu'il s'agit d'un système distribué capable de mettre en commun la puissance de calcul de nombreux terminaux éloignés géographiquement, en tirant partie de leur inter-connexion grâce à l'existence de réseaux à grandes échelles. La particularité d'une grille de calcul est sa grande flexibilité : chaque équipement est indépendant et tous peuvent être hétérogènes. Pour la modélisation dans laquelle nous nous lançons, nous considérons le cas d'une grille de calcul dont le nombre de nœuds est fixé égal à C et chacun de ces nœuds est un *cluster*. Nous considérons donc une grille de calcul qui contient un nombre fini C de *clusters* inter-connectés, que l'on note C_j, avec $j \in \{1,..,C\}$. La grille est gérée par un intergiciel (ou *middleware*) qui décide sur quel *cluster* chaque tâche s'exécute et, le cas échéant, transfère les tâches vers un autre *cluster* dans un souci d'économie énergétique ou d'amélioration du temps d'exécution. Cette flexibilité peut permettre, en choisissant judicieusement le *cluster* sur lequel chaque tâche s'exécute, d'optimiser les coûts matériel et énergétique du fonctionnement des grilles de calcul. Comme nous l'avons expliqué dans la présentation de cette méthode (Chap. 1-Sect. IV.3), la modélisation fluide appliquée à une grille de grande ampleur - à titre d'exemple, la grille du CERN traite environ deux millions de tâches par jour - peut permettre de capturer l'essentiel de son comportement avec un coût numérique faible. Chaque *cluster* C_j est identifié par :

— son indice de performance $v_j \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire la vitesse à laquelle il effectue les calculs,

— sa consommation énergétique par unité de temps $Z_j(t,q) \in \mathbb{R}^+$, qui dépend du temps t ainsi que de la charge du *cluster*. Elle pourrait aussi dépendre du nombre de processeurs utilisés par le *cluster*,

— son coût de fonctionnement $C_j(t) \in \mathbb{R}^+$, comme par exemple le coût de location du matériel,

— son nombre de processeurs $\pi_j \in \mathbb{N}^*$,

— le nombre maximal de tâches $T_j \in \mathbb{N}^*$ que le *cluster* peut exécuter en parallèle,

Dans le cadre de notre modèle, nous ne prendrons pas en compte le nombre de processeurs de chaque *cluster*. De plus, nous définissons les temps de transfert entre chacun des *clusters* interconnectés de la grille. Nous définissons la matrice des temps de transferts $(\tau_{jk})_{j,k\in\{1,..,C\}}$ avec $\tau_{jk} \in \mathbb{R}^+$ le temps de transfert entre les *clusters* C_j et C_k. Nous avons $\tau_{jj} = 0$ et supposons que $\tau_{jk} = \tau_{kj}$.

I.2 Description particulaire des tâches

Nous considérons un nombre N de tâches, notées J_i, avec $i \in \{1,..,N\}$, qui s'exécutent sur la grille. Chaque tâche est décrite par :

— sa taille $s_i \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire la taille mémoire nécessaire pour la stocker sur un *cluster*,

— $q_i(t) \in \mathbb{R}_+^*$, la charge de données restante à exécuter,

— sa position $P_i(t) \in \{C_1,..,C_C\}$, c'est-à-dire le *cluster* sur lequel la tâche s'exécute à l'instant t,

— $p_i \in \mathbb{N}^*$, le nombre minimum de processeurs nécessaire pour exécuter la tâche,

— l'âge de la tâche $a_i(t) \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire depuis combien de temps elle est dans la grille,

— son temps d'attente $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$, que nous introduisons par la suite pour faciliter la construction de notre modèle lorsqu'une tâche est transférée vers un autre *cluster*.

Pour l'instant, les paramètres s_i et p_i ne sont pas pris en compte. Ainsi, les temps de transferts entre les *clusters* ne dépendent pas de la taille des tâches à déplacer et nous pouvons supposer qu'ils sont connus *a priori*.

Maintenant que les variables qui définissent chaque tâche ont été introduites, nous nous intéressons aux critères du problème de minimisation qui va déterminer si une tâche est déplacée ou pas.

I.2.1 Décision de déplacer une tâche

La décision de déplacer une tâche du *cluster* où elle se trouve à un instant donné vers un autre *cluster* peut dépendre de plusieurs critères. Par exemple le temps d'exécution restant pour finir l'exécution de la tâche, la consommation d'énergie associée, le coût d'utilisation du matériel, etc. Nous considérons que cette décision revient à une entité que l'on suppose extérieure à notre modélisation et qui nous fournit sa décision de déplacer (ou non) les tâches. Cette décision est cohérente avec le fonctionnement de l'intergiciel qui opère en tant que système d'exploitation de la grille et décide de ces déplacements.

Pour faire le choix de déplacer une tâche, l'intergiciel se base sur l'estimation d'une fonction de coût. Les critères qu'il prend en compte sont : coût matériel, le coût de la consommation énergétique et le temps de calcul. Chacun de ces critères peut être défini avec les paramètres que nous avons défini sur les tâches et les *clusters*. Par exemple, le temps restant d'exécution d'une tâche J_i qui est en exécution au temps t sur le *cluster* $P_i(t) = C_j$ et qui, après avoir été testée par l'entité, se trouve sur le *cluster* C_k, avec $k = j$ ou $k \neq j$, est défini par :

$$t^{exe}(q_i(t), P_i(t) = C_j, C_k) = \frac{q_i(t)}{v_k} + \tau_{jk}\,,\ \forall j,\, k \in \{1,..,C\}\,.$$

Ou bien la consommation d'énergie nécessaire pour finir d'exécuter cette tâche, et que nous pouvons définir par :

$$K^{exe}(q_i(t), C_k) = \int_0^{\frac{q_i(t)}{v_k}} Z_k(t,q)\,dt\,,\ \forall j,\, k \in \{1,..,C\}\,.$$

Nous définissons maintenant la fonctionnelle $K(q_i(t), C_k)$ que l'on souhaite minimiser, et qui fait intervenir ces deux critères contradictoires :

$$K(q_i(t), C_k) = c_t\, t^{exe}(q_i(t), C_j, C_k) + c_e\, K^{exe}(q_i(t), C_k)\,,$$

avec les poids c_t et $c_e \in \mathbb{R}^+$ tels que $c_t + c_e = 1$.

La tâche est alors transférée vers un *cluster* qui permet de minimiser cette fonction de coût, que nous notons C_{k^*}. Ainsi,

$$K(q_i(t), C_{k^*}) = \min_k \left\{ K(q_i(t), C_k)\,,\, k \in \{1,..,C\} \right\}.$$

Ce *cluster* C_{k^*} peut être le *cluster* sur lequel la tâche se trouve déjà ($P_i(t) = C_{k^*}$). De plus, $k^* \in \{1,..,C\}$ n'est pas forcément unique. Dans ce cas, le premier *cluster* C_{k^*} trouvé qui minimise la fonction de coût est arbitrairement choisi. Ce choix n'a pas d'incidence tant que les *clusters* ne sont pas saturés.

Une fonction de décision Dec est associée à la fonction de coût telle que

$$Dec(t, q_i(t), P_i(t), P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i(t) \neq C_{k^*} \text{ et } P = C_{k^*}\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Ainsi, l'intergiciel est pensé comme une boîte noire qui renvoie le résultat de la fonction de décision pour chaque tâche : 1 si la tâche doit être déplacée vers un *cluster* optimal, et 0 sinon.

Nous introduisons τ_{pr}, le temps mis pour minimiser la fonction de coût associée à une tâche et renvoyer le résultat de la fonction de décision Dec, ce que nous appelons "tester une tâche". Puisque toutes les tâches sont supposées de même taille, la durée de ce test est la même pour chaque tâche. Nous supposons que l'intergiciel teste les tâches les unes après les autres. Nous associons un numéro $\alpha_i \in \{1,..,N\}$ à chacune d'elle, qui détermine dans quel ordre chacune est testée. Il faut donc un temps $\alpha_i \tau_{pr}$ pour qu'une décision soit prise pour la tâche J_i. Nous supposons de plus que lorsque la charge d'une tâche est très faible, cette tâche n'est jamais déplacée : la fonction de Dec est toujours égale à zéro.

I.2.2 Définition du temps d'attente d'une tâche

La position d'une tâche est décrite par le *cluster* sur lequel elle se trouve. Le transfert d'une tâche entre deux *clusters* pose donc problème. En effet, d'après notre choix de modélisation jusqu'ici, une tâche ne peut se trouver entre deux *clusters*. Remarquons maintenant que dans une grille de calcul, l'intergiciel, en plus de décider des déplacements, réserve les ressources d'espace nécessaires à ces déplacements dans les *clusters* d'arrivée, et ceci aussitôt sa décision prise.

Ainsi, afin de modéliser une tâche J_i qui est déplacée d'un *cluster* de départ C_j vers un *cluster* d'arrivée C_k, nous pouvons supposer qu'aussitôt la décision prise de la déplacer, elle arrive instantanément dans C_k. Nous introduisons néanmoins un temps d'attente de la tâche avant son exécution dans C_k, noté $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$, afin de représenter le temps de transfert entre les deux *clusters*.

Ainsi, $\theta_i(t) = \tau_{jk}$ au moment t où la tâche arrive sur C_k, puis ce temps décroit à la vitesse 1. Tant que ce temps d'attente n'est pas écoulé, nous dirons que la tâches est en attente, c'est-à-dire elle ne s'exécute pas sur C_k, et sa charge $q_i(t)$ reste constante, puisque les tâches en attente représentent en réalité des tâches en cours de transfert. Dès que $\theta_i(t) \leq 0$, la tâche J_i reprend son exécution. Son temps d'attente ne décroit plus et sa charge diminue proportionnellement à l'indice de performance du *cluster* C_k sur lequel elle se trouve désormais. Ainsi, l'évolution en temps de la charge et du temps d'attente est donnée par les équations suivantes :

$$q_i'(t) = -\nu_{P_i(t)}\, \mathbb{1}_{q_i(t)>0}\, \mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0}\,, \tag{2.1}$$

$$\theta_i'(t) = -\mathbb{1}_{\theta_i(t)>0} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \tau_{jk}\, Dec(t, q_i(t), C_j, C_k)\, \delta_{\theta_i(t)=0}\,, \tag{2.2}$$

Ainsi, $\theta_i(t)$ et $q_i(t)$ n'évoluent jamais en même temps.

Remarque 2.1. *Notons que, de par son domaine de définition, $\theta_i(t)$ peut être négative. Cependant, ce ne sera jamais le cas. Ce choix d'un domaine de définition ouvert pour θ est exclusivement technique et facilitera les calculs par la suite, lorsque les équations cinétiques sont définies au sens des distributions. En conséquence, lorsqu'une tâche s'exécute, nous avons en réalité $\theta_i(t) = 0$.*

Remarque 2.2. *Notons que lorsqu'une tâche est en attente sur un* cluster*, elle n'est pas testée pour savoir si elle sera déplacée ou pas. Ainsi, seulement les tâches en exécution dans un* cluster *pourront être déplacées, ce qui est cohérent puisque les tâches en attente ne sont pas réellement "sur" ce* cluster.

II Obtention de l'équation cinétique

Dans cette section, nous souhaitons utiliser la description particulaire des tâches afin de définir l'équation cinétique régissant la dynamique globale des tâches. Pour cela, nous introduisons une densité de probabilité sur chaque *cluster* (Sect. II.1). Afin d'étudier l'évolution de la densité de probabilité, nous utilisons la description particulaire et étudions tous les comportements possibles des tâches, plus particulièrement de ses paramètres pendant un petit temps d'observation (Sect. II.2). Nous dimensionnons ensuite les grandeurs caractéristiques des tâches dans la grille par rapport cette durée d'observation et effectuons la limite asymptotique, ce qui revient à réunir tous les comportements observables des tâches et à prendre un instantanée de toute cette activité, que l'on rassemble dans l'évolution de la densité de probabilité des tâches : l'équation cinétique (Sect. II.3). Vient ensuite l'étude mathématique de cette équation (Sect. II.4).

II.1 Définition de la densité de probabilité

Afin de décrire le comportement global des tâches dans la grille de calcul sans avoir à étudier chacune d'elles individuellement, nous introduisons la densité de probabilité des tâches, que nous notons f. Il s'agit du vecteur des densités de probabilités des tâches sur chacun des *clusters* de la grille de calcul, f^j :

$$f(t, P, q, \theta) = \left(f^j(t, q, \theta)\, \delta_{P=C_j}\right)_{j\in\{1,..,C\}}$$

avec

$$f^j(t, q, \theta) = \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1\\P_i(t)=C_j}}^{N_j} \delta_{q=q_i(t)}\, \delta_{\theta=\theta_i(t)}\,.$$

N_j représente le nombre de tâches dans le *cluster* C_j. Ainsi, $\displaystyle\int_{q,\theta} f^j = \frac{N_j}{T_j}$. Ce ratio représente le taux de remplissage du *cluster* C_j.

La densité de probabilité des tâches sur le *cluster* C_j est fonction du temps t et de l'espace des phases (q, θ). Elle compte à chaque temps t le nombre de tâches présentes dans

C_j qui ont une charge q et un temps d'attente θ. Pour le formuler de manière différente, $f^j(t,q,\theta)dq\,d\theta$ exprime la probabilité de trouver une tâche du *cluster* C_j dans le petit élément de volume $dq\,d\theta$ au temps t.

II.2 Evolution de la densité de probabilité

Soit $\varepsilon > 0$ un petit temps d'observation. Nous allons étudier les variations de f^j entre les temps t et $t+\varepsilon$ au sens des distributions. Pour cela, nous définissons $\phi^j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*)_q \otimes \mathscr{D}(\mathbb{R})_\theta$, avec $j \in \{1,..,C\}$, un ensemble de fonctions test tensorisées, chacune étant relative à un *cluster*. La fonction test associée à la totalité de la grille est l'addition des fonctions test sur chaque *cluster* :

$$\Phi(P,q,\theta) = \sum_{j=1}^{C} \phi^j(q,\theta)\,\mathbb{1}_{P=C_j}\,.$$

Alors, en testant f^j contre une fonction test, nous obtenons

$$\left\langle f^j(t)\,,\phi^j\right\rangle = \frac{1}{T_j}\sum_{\substack{i=1\\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} \phi^j\left(q_i(t),\theta_i(t)\right).$$

Afin d'étudier tous les comportements possibles de la densité de probabilité sur le *cluster* C_j pendant le temps ε, nous nous intéressons aux comportements des tâches décrit par la description particulaire, notamment à l'évolution de leurs paramètres pendant cette période. L'ensemble des comportements possibles d'une tâche peut se classer en deux catégories : soit la tâche est déplacée vers un autre *cluster* entre le temps t et le temps $t+\varepsilon$, soit elle ne l'est pas. Chacun de ces deux scénarios, respectivement dénotés A et B dans la formule (2.3), sera étudié en détail.

$$\begin{aligned}\left\langle f^j(t+\varepsilon)-f^j(t),\phi^j\right\rangle &= \frac{1}{T_j}\left\{\sum_{\substack{i=1\\ P_i(t+\varepsilon)=P_i(t)\\ =C_j}}^{N_j} + \sum_{\substack{i=1\\ P_i(t+\varepsilon)\neq P_i(t)}}^{N_j}\right\}\phi^j\left(q_i(t+\varepsilon),\theta_i(t+\varepsilon)\right)-\phi^j\left(q_i(t),\theta_i(t)\right)\\ &= A+B\,.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Listons tous les comportements possibles des tâches sur le *cluster* C_j en l'absence de déplacement. Nous les nommons $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ et $A5$.

— Les tâches s'exécutent du temps t au temps $t+\varepsilon$, alors

$$A1 = \frac{1}{T_j}\sum_{\substack{i=1\\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} -\varepsilon\, v_j\,\partial_q\phi^j(q_i(t),\theta_i(t))\,\mathbb{1}_{q_i(t)>v_j\varepsilon}\,\mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0} + \mathscr{O}(\varepsilon^2)\,.$$

— Les tâches sont en attente du temps t au temps $t+\varepsilon$, ainsi,

$$A2 = \frac{1}{T_j}\sum_{\substack{i=1\\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} -\varepsilon\,\partial_\theta\phi^j(q_i(t),\theta_i(t))\,\mathbb{1}_{q_i(t)>0}\,\mathbb{1}_{\theta_i(t)>\varepsilon} + \mathscr{O}(\varepsilon^2)\,.$$

— Les tâches sont en attente au temps t jusqu'au temps $t+\theta_i(t)$, puis reprennent leur exécution jusqu'au temps $t+\varepsilon$, donc

$$A3 = \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} - v_j\ (\varepsilon-\theta_i(t))\ \partial_q \phi^j(q_i(t),0)\ \mathbb{1}_{0<\theta_i(t)\leq\varepsilon}\ \mathbb{1}_{q_i(t)>v_j(\varepsilon-\theta_i(t))}$$
$$- \theta_i(t)\ \partial_\theta \phi^j(q_i(t),\theta_i(t))\ \mathbb{1}_{0<\theta_i(t)\leq\varepsilon}\ \mathbb{1}_{q_i(t)>v_j(\varepsilon-\theta_i(t))} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

— Les tâches s'exécutent au temps t et finissent leur exécution avant le temps $t+\varepsilon$.

$$A4 = \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} -\phi^j(q_i(t),\theta_i(t))\ \mathbb{1}_{q_i(t)\leq v_j\varepsilon}\ \mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0}.$$

— Les tâches sont en attente au temps t, jusqu'au temps $t+\theta_i(t)$, puis reprennent leur exécution et finissent leur exécution avant le temps $t+\varepsilon$.

$$A5 = \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} -\phi^j(q_i(t),\theta_i(t))\ \mathbb{1}_{q_i(t)\leq v_j(\varepsilon-\theta_i(t))}\ \mathbb{1}_{0<\theta_i(t)\leq\varepsilon}.$$

En regroupant le tout, et en notant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit de dualité sur $\mathbb{R}_q^+ \times \mathbb{R}_\theta$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
A &= A1 + A2 + A3 + A4 + A5 \\
&= -v_j\ \varepsilon\ \langle f^j(t)\,,\, \partial_q\ \phi^j\ \mathbb{1}_{q>v_j\varepsilon}\ \mathbb{1}_{\theta\leq 0}\rangle \\
&- \varepsilon\ \langle f^j(t)\,,\, \partial_\theta\ \phi^j\ \mathbb{1}_{q>0}\ \mathbb{1}_{\theta>\varepsilon}\rangle \\
&- v_j\ \langle(\varepsilon-\theta)\ f^j(t)\,,\, \partial_q\ \phi^j(q,0)\ \mathbb{1}_{0\leq\theta\leq\varepsilon}\ \mathbb{1}_{q>v_j(\varepsilon+\theta)}\rangle \\
&- \langle\theta\ f^j(t)\,,\, \partial_\theta\ \phi^j\ \mathbb{1}_{0<\theta\leq\varepsilon}\ \mathbb{1}_{q_i(t)>v_j(\varepsilon+\theta)}\rangle \\
&- \langle f^j(t)\,,\, \phi^j\ \mathbb{1}_{q\leq v_j\varepsilon}\ \mathbb{1}_{\theta\leq 0}\rangle \\
&- \langle f^j(t)\,,\, \phi^j\ \mathbb{1}_{q\leq v_j(\varepsilon-\theta)}\ \mathbb{1}_{0<\theta\leq\varepsilon}\rangle \\
&+ \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Remarque 2.3. *Nous pouvons remarquer que, si nous avions effectué une approximation en temps du terme A, nous aurions fait apparaître les dérivées partielles en q et θ de la densité de probabilité :*

$$A = \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} \varepsilon \left(\theta_i'(t)\ \partial_\theta\ \phi^j(q_i(t),\theta_i(t)) + q_i'(t)\ \partial_q\ \phi^j(q_i(t),\theta_i(t))\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

avec $q_i'(t)$ et $\theta_i'(t)$ définis selon les définitions (2.1) et (2.2). Cette approximation rejoint le résultat l'équation (2.4), qui comporte néanmoins davantage de précisions. Les termes $A1$ et $A2$ nous permettent de retrouver les définitions de $\theta_i'(t)$ et $q_i'(t)$. Les autres termes nous permettent d'avoir plus de détails sur le comportement lorsqu'il y a un passage entre l'attente et l'exécution, avec notamment le terme $A3$, qui fait apparaître une dérivée sur la charge q lorsque $\theta_i(t) \in [0,\varepsilon]$.

Quant au terme B, qui désigne des tâches qui sont déplacées entre le temps t et le temps $t+\varepsilon$, nous imposons quelques hypothèses avant de l'étudier. Tout d'abord, afin de seulement étudier le comportement des tâches qui ont été déplacées, nous imposons

$$\varepsilon < \min_{j,k\ j\neq k} \tau_{jk},$$

pour ne pas se ramener aux comportements déjà mentionnés dans le terme A, de tâches ayant été déplacées et ayant fini leur temps d'attente pendant l'intervalle ε. Le critère

$$\alpha_i \tau_{pr} \leq \varepsilon, \forall i \in \{1,..,N\},$$

est lui aussi imposé, puisqu'une tâche doit avoir été testée entre les instants t et $t+\varepsilon$ pour qu'il y ait eu décision de la déplacer. Sous ces hypothèses, deux cas se présentent :

— Les tâches arrivent sur C_j depuis d'autres *clusters* entre les temps t et $t+\varepsilon$.

— Les tâches quittent C_j entre les temps t et $t+\varepsilon$ pour être déplacées vers d'autres *clusters*.

Nous numérotons $B1$ et $B2$ ces deux cas de figure et notons C_k, avec $k \neq j$, les *clusters* d'où proviennent les tâches ou vers lesquels elles sont déplacées. Alors

$$B = B1 + B2 = \frac{1}{T_j}\left[\sum_{\substack{i=1\\ P_i(t+\varepsilon)=C_j\neq P_i(t)=C_k}}^{N_j} \phi^j\left(q_i(t+\varepsilon),\theta_i(t+\varepsilon)\right) - \sum_{\substack{i=1\\ P_i(t)=C_j\neq P_i(t+\varepsilon)=C_k}}^{N_j} \phi^j\left(q_i(t),\theta_i(t)\right)\right].$$

Le terme $B1$ exprime la densité de probabilité des tâches qui arrivent sur le *cluster* C_j au temps $t+\alpha_i\tau_{pr}$ depuis les *clusters* C_k, et qui ont un temps d'attente égal à τ_{kj} au moment de leur arrivée. On remarque que ce terme peut aussi s'écrire comme la somme des densités f^k qui ont quitté les *clusters* C_k. Ainsi,

$$B1 = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j\\ P_i(t+\varepsilon)=C_j}}^{C} \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1\\ P_i(t)=C_k\\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_j} \phi^j\left(q_i(t)-\upsilon_k\alpha_i\tau_{pr},\tau_{kj}-(\varepsilon-\alpha_i\tau_{pr})\right)\mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0}\,\mathbb{1}_{q_i(t)>\upsilon_k\varepsilon}$$
$$\mathbb{1}_{Dec(t+\alpha_i\tau_{pr},q_i(t)-\upsilon_k\alpha_i\tau_{pr},k,j)=1}.$$

D'une manière similaire au comportement lors du passage entre l'attente et l'exécution, où le terme $A3$ décrit une variation de la charge lorsque $\theta_i(t) \in [0,\varepsilon]$ c'est à dire lorsque la tâche est en attente, au moment du passage entre le *cluster* C_k et le *cluster* C_j, nous reformulons $B1$ afin que les quantités qui partent des *clusters* C_k en exécution aient une variation de leur temps d'attente. Ceci nous permet de souligner la conservation des quantités déplacées. Nous effectuons une approximation au premier ordre du terme $B1$ au point $(q_i(t),\tau_{kj})$ et obtenons

$$\begin{aligned} B1 = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j}\frac{1}{T_k} \sum_{\substack{i=1\\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_k} &\Big[\phi^j\left(q_i(t),\tau_{kj}\right) - \upsilon_k\alpha_i\tau_{pr}\,\partial_q\,\phi^j\left(q_i(t),\tau_{kj}\right) \\ &-(\varepsilon-\alpha_i\tau_{pr})\,\partial_\theta\,\phi^j\left(q_i(t),\tau_{kj}\right)\Big]\,\mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0}\,\mathbb{1}_{q_i(t)>\upsilon_k\varepsilon}\,\mathbb{1}_{Dec(t+\alpha_i\tau_{pr},q_i(t)-\upsilon_k\alpha_i\tau_{pr},k,j)=1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ecrivons maintenant le terme $B2$ qui exprime les tâches quittant le *cluster* C_j :

$$B2 = -\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{C} \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1\\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_j} \phi^j\left(q_i(t),\theta_i(t)\right)\mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0}\,\mathbb{1}_{q_i(t)>\upsilon_j\varepsilon}\,\mathbb{1}_{Dec(t+\alpha_i\tau_{pr},q_i(t)-\upsilon_j\alpha_i\tau_{pr},j,k)=1}. \tag{2.6}$$

Nous obtenons alors l'équation qui regroupe tous les comportements possibles des tâches sur le *cluster* C_j

$$\left\langle f^j(t+\varepsilon) - f^j(t), \phi^j \right\rangle = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + B1 + B2. \tag{2.7}$$

II.3 Limite asymptotique

Nous avons étudié les variations de f^j pendant un temps d'observation ε. Nous nous intéressons dans cette partie à la manière dont cette densité de probabilité se comporte lorsque nous faisons tendre cette durée vers zéro. Avant d'effectuer cette limite, nous allons dimensionner les grandeurs caractéristiques par rapport à ε afin de décrire un comportement particulier des tâches dans la grille de calcul à l'asymptotique $\varepsilon \to 0$.

Nous voulons retenir le comportement qui nous permet d'observer des transferts entre les *clusters*. Ainsi, nous voulons que la grille ait le temps de tester de nombreuses tâches durant le temps ε, quelle que soit la valeur de ε. Nous supposons donc que le temps nécessaire pour tester une tâche est très inférieur à ε :

$$\tau_{pr} << \varepsilon.$$

Cependant, nous ne souhaitons pas que la grille teste l'ensemble des tâches pendant le temps ε. Cela s'apparenterait à une entité prenant des décisions instantanées (Sect. IV). Nous nous intéressons plutôt à un comportement du réseau où le temps nécessaire pour tester l'ensemble des tâches du réseau $\mathscr{T} = N\tau_{pr}$ est constant. Nous imposons donc

$$\mathscr{T} = \mathscr{O}(1).$$

Propriété 2.1. *Nous adoptons l'asymptotique suivante :*

$$\tau_{pr} = \varepsilon^2 << \varepsilon << \mathscr{T} = \mathscr{O}(1).$$

Remarque 2.4. *La première chose à noter est que ce choix d'asymptotique implique que le nombre total de tâches dans la grille $N = \mathscr{O}\left(1/\varepsilon^2\right)$. Faire tendre ε vers zéro revient donc aussi à appliquer la limite $N \to \infty$. Pour cela, nous écrirons dorénavant les densités de probabilité $f = f_N$ et $f^j = f_N^j$ pour faire apparaître cette dépendance.*

De la même manière, puisque $N = \sum_{j=1}^{C} N_j$ et que le nombre C de clusters *est fini, $N_j \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty$. Ainsi, le ratio N_j/N demeure borné, $\forall j \in \{1,..,C\}$.*

De plus, nous pouvons dimensionner le nombre de tâches testées dans l'ensemble de la grille pendant l'intervalle de temps ε, défini par

$$N_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\tau_{pr}} = \mathscr{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) >> 1.$$

Ce nombre tend donc vers l'infini à l'asymptotique $\varepsilon \to 0$ mais reste tout de même bien inférieur à N (ceci revient aussi à dire d'une façon différente que l'ensemble des tâches n'est pas testé pendant ε) puisque la proportion de tâches testées sur l'ensemble de la grille est égale à

$$\frac{N_\varepsilon}{N} = \frac{\varepsilon}{\mathscr{T}} = \mathscr{O}(\varepsilon). \tag{2.8}$$

Si nous nous intéressons aux tâches appartenant seulement au cluster C_j*, nous supposons tout d'abord que toutes les tâches sont indépendantes et identiquement réparties. Alors le nombre de tâches de la grille ayant été testées pendant le temps ε et appartenant à C_j est égal à*

$$\frac{N_j}{N} N_\varepsilon = N_j \frac{\varepsilon}{\mathscr{T}} = \mathscr{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) >> 1.$$

Et la proportion de tâches testées dans chaque cluster *pendant le temps d'observation est la même que la proportion de tâches testées dans l'ensemble de la grille pendant la même durée.*

Au delà de ces déductions sur le comportement des tâches, tirées de notre choix d'asymptotique, nous allons néanmoins imposer une ultime condition : nous devons nous assurer que le *cluster* ne présente pas de trop-plein lors du passage à la limite asymptotique. Pour cela, nous imposons que

$$\int_{q,\theta} f^j = \frac{N_j}{T_j} = \mathscr{O}(1)\,.$$

Cette condition nous assure aussi les taux de remplissage ne deviennent pas négligeables lors du passage à la limite asymptotique.

Lemme 2.2. ***Passage à la limite formelle*** $\varepsilon \to 0$ ***(et*** $N \to +\infty$***).***
L'équation cinétique régissant l'évolution de la densité de probabilité dans chaque cluster C_j*, avec $j = \{1,..,C\}$, pour tout temps $t > 0$ est donnée au sens de $\left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)\right)_q \otimes \left(\mathscr{D}'(\mathbb{R})\right)_\theta$ par :*

$$\begin{aligned}\partial_t f^j(t) - \mathbb{1}_{\theta\le 0}\, v_j\, \partial_q f^j(t) - \mathbb{1}_{\theta>0}\, \partial_\theta f^j(t) = &-\frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} f^j(t)\, \mathbb{1}_{\theta\le 0}\, Dec(j,k) \\ &+ \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j} \langle f^k(t)\, Dec(k,j)\,,\, \mathbb{1}_{\theta\le 0}\rangle_\theta\, \delta_{\theta=\tau_{kj}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Démonstration. Afin d'obtenir l'équation cinétique qui régit la dynamique de la densité de probabilité f_N^j lors du passage à la limite asymptotique $\varepsilon \to 0$, nous allons diviser l'équation (2.7) par ε et lui appliquer la limite $\varepsilon \to 0$ de manière formelle. Nous avons vu dans la remarque 2.4 que faire tendre $\varepsilon \to 0$ revient, avec le choix d'asymptotique imposé à la Propriété 2.1, à considérer $N \to \infty$. Dans la suite de cette preuve, nous utilisons donc ces deux limites sans distinction.

Nous supposons que $f_N^j \underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} f^j$ au sens faible-*.

— Appliquons tout d'abord la limite au terme A donné par l'équation (2.4), et qui modélise le comportement des tâches ne subissant pas de déplacement.

  Nous nous intéressons tout d'abord au passage à la limite pour le terme $A3$. Nous pouvons remarquer que $\frac{1}{T_j}\sum_{i=1}^{N_j} \mathbb{1}_{0\le\theta_i(t)\le\varepsilon} \underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} \mathscr{O}(\varepsilon)$ d'après (2.8), donc $\frac{1}{\varepsilon} A3 \underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} 0$.

  En ce qui concerne le terme $A4$, il disparait car $supp\, \phi^j \subset \mathbb{R}_+^* \otimes \mathbb{R}$.

  Pour traiter le terme $A5$, nous nous souvenons que lorsque la charge d'une tâche est très faible, la fonction de décision Dec est toujours égale à zéro. Ainsi, $\exists \eta > 0$ tel que $Dec(t, q \le \eta) = 0$. Ainsi, le terme $A5$ représente un comportement qui n'arrive jamais : il est nul.

Nous obtenons

$$\frac{1}{\varepsilon} A \underset{\substack{N\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} -v_j \langle f^j(t), \partial_q \phi^j \mathbb{1}_{q\geq 0} \mathbb{1}_{\theta\leq 0}\rangle - \langle f^j, \partial_\theta \phi^j \mathbb{1}_{q\geq 0} \mathbb{1}_{\theta>0}\rangle .$$

— Avant d'effectuer le passage à la limite sur les termes $B1$ et $B2$ donnés par les formules (2.5) et (2.6) et représentant un déplacement entre des *clusters*, nous remarquons que le critère $\alpha_i \tau_{pr} \leq \varepsilon$ amène $\alpha_i \tau_{pr} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ et le terme $B1$ se trouve réduit à

$$B1 = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j} \frac{1}{T_k} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_k} \phi^j\left(q_i(t), \tau_{kj}\right) \mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0} \mathbb{1}_{q_i(t)>v_k\varepsilon} \mathbb{1}_{Dec(t+\alpha_i\tau_{pr}, q_i(t)-v_k\alpha_i\tau_{pr}, k, j)=1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) .$$

La difficulté dans le calcul de la limite formelle pour le terme B est de déterminer, sur un *cluster* donné, le nombre de tâches qui sont déplacées. En effet, la fonction Dec dépend des caractéristiques de chaque tâche se trouvant dans ce *cluster* et il nous est impossible de savoir si lesquelles sont déplacées. Afin de contourner ce problème, nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse. *Supposons que $Dec^{-1}\{1\}$ est un ouvert.*

Cette hypothèse est valide dès que la fonction coût est continue. Ainsi, cette hypothèse traduit le fait qu'il y a doit y avoir un intérêt à faire un déplacement : le gain, du point de vue de la minimisation de la fonction coût, doit être strictement positif. Ainsi, il existe un petit intervalle sur lequel Dec est constant. Nous notons I l'intervalle d'appartenance de q correspondant. Grâce à cette hypothèse, Dec ne dépend plus que des caractéristiques des tâches et non plus du numéro i des tâches.

Il s'agit maintenant d'appliquer la limite $\varepsilon \to 0$ sur le terme $\frac{1}{T_k} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_k} \phi^j\left(q_i(t), \theta_i(t)\right)$ lorsque $Dec(t, q_i(t), k, j) = 1$. Alors les tâches qui sont déplacées lorsque $\varepsilon \to 0$ sont celles qui sont testées, c'est-à-dire qui vérifient la condition $\alpha_i \tau_{pr} \leq \varepsilon$. Nous avons vu que la proportion de tâches de C_j qui sont testées pour déplacement pendant le temps ε est égal à $\frac{\varepsilon}{\mathcal{T}}$. Alors, nous obtenons la limite faible-*

$$\frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon \\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} \delta_{q=q_i(t)} \delta_{\theta=\theta_i(t)} \underset{\substack{N\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} \frac{\varepsilon}{\mathcal{T}} f^j .$$

Alors, pour $supp\, \phi^j \subset I \otimes \mathbb{R}$, le passage à la limite pour le terme $B2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} B2 = &-\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{C} \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_j} \phi^j\left(q_i(t), \theta_i(t)\right) \mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0} \mathbb{1}_{q_i(t)>v_j\varepsilon} \mathbb{1}_{Dec(t+\alpha_i\tau_{pr}, q_i(t)-v_j\alpha_i\tau_{pr}, j, k)=1} \\ &\underset{\substack{N\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{C} \frac{\varepsilon}{\mathcal{T}} \langle f^j(t), \phi^j \mathbb{1}_{\theta\leq 0} \mathbb{1}_{q>0}\rangle \mathbb{1}_{Dec(t,q,j,k)=1} . \end{aligned}$$

Pour le terme $B1$, nous voulons exprimer les quantités présentes sur le *cluster* C_j au temps $t+\alpha_i\tau_{pr}^+$ en fonction des quantités présentes dans les *clusters* C_k, avec $k \neq j$, juste avant leur déplacement (au temps $t+\alpha_i\tau_{pr}^-$). Afin de décrire le saut du temps d'attente, qui passe instantanément de $\theta_i(t) \leq 0$ à $\theta_i(t) = \tau_{kj}$, nous utilisons le fait que les variables q et θ n'évoluent pas en même temps, raison pour laquelle la fonction test ϕ^j a été choisie tensorielle. Nous posons

$$\phi^j(q,\theta) = \left(\phi_q^j \otimes \phi_\theta^j\right)(q,\theta) \in \left(\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*)\right)_q \otimes (\mathscr{D}(\mathbb{R}))_\theta \,,\ \forall j = \{1,..,C\}\,.$$

et introduisons la notation $\langle .,. \rangle_\theta$ pour désigner le produit de dualité sur $\mathbb{R}_\theta$.

Cette astuce nous permet d'exprimer la quantité en attente comme une quantité en exécution à laquelle on ajoute un temps d'attente. Ainsi, si $supp\,\phi_q \subset I$,

$$\begin{aligned}
B1 &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j}\left(\frac{1}{T_k}\sum_{\substack{i=1\\ \alpha_i\tau_{pr}\leq\varepsilon}}^{N_k} \phi_q^j\left(q_i(t)\right)\mathbb{1}_{\theta_i(t)\leq 0}\,\mathbb{1}_{q_i(t)>v_k\varepsilon}\,\mathbb{1}_{Dec(t+\alpha_i\tau_{pr},q_i(t)-v_k\alpha_i\tau_{pr},k,j)=1}\right)\phi_\theta^j\left(\tau_{kj}\right) + \mathscr{O}(\varepsilon^2)\\
&\underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j}\frac{\varepsilon}{\mathscr{T}}\langle f^k(t)\,\mathbb{1}_{q>0}\,\mathbb{1}_{Dec(t,q,k,j)=1}\,,\,\phi_q^j\otimes\mathbb{1}_{\theta\leq 0}\rangle\,\phi_\theta^j\left(\tau_{kj}\right)\\
&\underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j}\frac{\varepsilon}{\mathscr{T}}\langle\langle f^k(t)\,\mathbb{1}_{q>0}\,\mathbb{1}_{Dec(t,q,k,j)=1}\,,\,\mathbb{1}_{\theta\leq 0}\rangle_\theta,\phi_q^j\otimes\phi_\theta^j(\tau_{kj})\rangle\,.
\end{aligned}$$

Si nous introduisons la notation $Dec(j,k)$ pour simplifier l'expression $\mathbb{1}_{Dec(t,q,j,k)=1}$, nous obtenons la limite formelle pour les termes $B1$ et $B2$:

$$\frac{1}{\varepsilon}B1 \underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\frac{T_k}{T_j}\,\langle\,\langle f^k(t)\,Dec(k,j),\mathbb{1}_{\theta\leq 0}\,\mathbb{1}_{q>0}\rangle_\theta\,\delta_{\theta=\tau_{kj}},\phi^j\rangle\,,$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon}B2 \underset{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} -\frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\langle f^j(t),\phi^j\,\mathbb{1}_{\theta\leq 0}\,\mathbb{1}_{q>0}\rangle\,Dec(j,k)\,,$$

qui permettent d'établir l'équation cinétique (2.9).

□

Remarque 2.5. *Dans l'équation cinétique* (2.9)*, le terme source qui représente les tâches migrant vers un autre* cluster *(que C_j) est négatif et le terme source qui décrit les tâches se déplaçant vers le* cluster *C_j depuis d'autres* clusters *est positif. Remarquons que ces deux termes représentent des quantités similaires, et ceci malgré le ratio $\frac{T_k}{T_j}$ qui apparaît devant le terme qui modélise les tâches quittant C_k et arrivant sur C_j. Ce ratio exprime les constantes de normalisation des densités de probabilités impliquées.*

II.4 Etude de l'équation cinétique

Comme nous l'avons déjà mentionné, les évolutions sur les variables q et θ sont disjointes. Alors, nous allons décomposer la densité de probabilité f^j comme

$$f^j(t,q,\theta) = \rho_j^{exe}(t,q)\,\delta_{\theta=0} + \rho_j^{wait}(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0} + \rho_j^{garb}(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta<0}, \tag{2.10}$$

avec les fonctions ρ_j^{exe} (tâches en exécution), ρ_j^{wait} (tâches en attente) et ρ_j^{garb} définies par :

$$\rho_j^{exe}(t,q) = f^j(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta=0}, \quad \rho_j^{wait}(t,q,\theta) = f^j(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0}, \quad \rho_j^{garb}(t,q,\theta) = f^j(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta<0}.$$

Remarque 2.6. *Nous remarquons que, puisque l'évolution en θ cesse dès que θ est négatif, ρ^{garb} est seulement pris en compte dans le but de conserver notre modèle le plus général possible. Cependant, il sera utile par la suite, puisqu'il permet de travailler sur un domaine de définition ouvert de θ.*

Nous allons tout de suite voir que l'intérêt d'introduire cette décomposition de f^j repose sur le fait que chacune des fonctions restreintes, conserve sa régularité pour tout temps t.

Lemme 2.3. ***Caractérisation des solutions de l'équation cinétique***
Nous supposons que $f^j(t=0,q,\theta)$ se décompose selon la relation (2.10) avec

$$\rho_j^{exe}(t=0,q) \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*), \rho_j^{wait}(t=0,q,\theta) \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*) \text{ et } \rho_j^{garb}(t=0,q,\theta) \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*).$$

Alors, les solutions dans $\left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)\right)_q \otimes \left(\mathscr{D}'(\mathbb{R})\right)_\theta$ de l'équation cinétique (2.9) au temps $t>0$ peuvent toujours se décomposer selon la relation (2.10), avec

$$\rho_j^{wait}(t,q,\theta) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)) \text{ et } \rho_j^{garb}(t,q,\theta) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*)).$$

Démonstration. Nous allons montrer qu'aucune singularité en θ n'apparaît lors de l'évolution en temps de ρ_j^{wait} et ρ_j^{garb}. Pour cela, nous cherchons l'expression vérifiée par ρ_j^{wait} et ρ_j^{garb} au temps $t>0$. En testant l'équation cinétique (2.9) contre une fonction test ϕ^j avec $supp\,\phi^j \subset \left(\mathbb{R}_+^*\right)_q \otimes \left(\mathbb{R}_-^*\right)_\theta$, nous obtenons

$$\langle \partial_t f^j(t), \phi^j\rangle = \langle \partial_t \rho^{garb}(t), \phi^j\rangle$$

avec

$$\rho_j^{garb}(t,q,\theta) = \rho_j^{garb}(0,q+v_j t,\theta) - \int_0^t \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \rho_j^{garb}(s,q+v_j(t-s),\theta)\,Dec(s,q+v_j(t-s),j,k)\,ds. \tag{2.11}$$

En testant l'équation cinétique (2.9) contre une fonction test ϕ^j avec $supp\,\phi^j \subset \left(\mathbb{R}_+^*\right)_q \otimes \left(\mathbb{R}_+^*\right)_\theta$, nous obtenons

$$\langle \partial_t f^j(t), \phi^j\rangle = \langle \partial_t \rho_j^{wait}(t), \phi^j\rangle$$

avec

$$\rho_j^{wait}(t,q,\theta) = \rho_j^{wait}(0,q,\theta+t) + \int_0^t \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j} \int_{\theta\leq 0} f^k(s,q,\theta+t-s)\,Dec(s,q,k,j)\,d\theta\,\delta_{\theta+t-s=\tau_{kj}}\,ds.$$

Puisque les conditions initiales sont supposées régulières, les quantités ρ_j^{exe}, ρ_j^{wait} et ρ_j^{garb} sont régulières au temps $t>0$. □

Nous avons jusqu'à présent gardé le formalisme le plus général possible en conservant la quantité ρ^{garb}. Nous précisons maintenant la forme de f^j en remarquant que, si nous supposons que $\rho_j^{garb}(0,\cdot,\cdot) = 0$ dans l'équation (2.11), alors $\rho_j^{garb}(t,\cdot,\cdot) = 0$ pour $t > 0$.

Nous pouvons alors appliquer le Lemme 2.3 avec $\rho_j^{garb}(0,\cdot,\cdot) = 0$. Alors, la solution de l'équation cinétique se décompose, si elle existe, selon :

$$f^j(t,q,\theta) = \rho_j^{exe}(t,q)\,\delta_{\theta=0} + \rho_j^{wait}(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0}. \tag{2.12}$$

avec les fonctions ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait} définies par

$$\rho_j^{exe}(t,q) = \langle f^j(t,q,\theta), \mathbb{1}_{\theta\leq 0}\rangle \text{ et } \rho_j^{wait}(t,q,\theta) = f^j(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0}.$$

III ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE FLUIDE

Nous étudions dans cette section le système fluide vérifié par ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait} pour tout $j \in \{1,..,C\}$. Nous allons montrer que le modèle fluide obtenu est bien posé, et en déduirons que l'équation cinétique admet une unique solution.

III.1 Obtention du système d'équations de conservation

Nous calculons tout d'abord le système d'équations vérifié par ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait}. Pour cela, nous utilisons les fonctions tests tensorisées $\phi^j \in \left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)\right)_q \otimes \left(\mathscr{D}'(\mathbb{R})\right)_\theta$ telles que

$$\phi^j(q,\theta) = \phi^{exe}(q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta\leq 0} + \phi^{wait}(q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0} \tag{2.13}$$

En testant l'équation cinétique (2.9) contre ϕ^j avec, successivement $\phi^{wait}(\cdot,\theta > 0) = 0$ puis $\phi^{exe}(\cdot,\theta \leq 0) = 0$, nous obtenons, au sens des distributions, $\forall j \in \{1,..,C\}$

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j^{exe}(t,q) - v_j \partial_q \rho_j^{exe}(t,q) = \rho_j^{wait}(\theta = 0^+) - S_j^{exe}(t,q), \\ \partial_t \rho_j^{wait}(t,q,\theta) - \partial_\theta \rho_j^{wait}(t,q,\theta) = S_j^{wait}(t,q,\theta), \end{cases} \tag{2.14}$$

avec

$$S_j^{exe}(t,q) = \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{k\neq j} \rho_j^{exe}(t,q)\, Dec(j,k), \tag{2.15}$$

et

$$S_j^{wait}(t,q,\theta) = \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{k\neq j} \frac{T_k}{T_j}\, \rho_k^{exe}(t,q)\, Dec(k,j)\, \delta_{\theta=\tau_{kj}}. \tag{2.16}$$

Remarque 2.7. *Signalons ici que parler de modèle fluide pour désigner le système d'équations vérifié par ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait} est un abus de langage. Il s'agit plutôt d'une restriction du problème cinétique.*

La première équation de (2.14) est écrite au sens de $\left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)\right)_q$ et représente l'évolution de la charge des tâches en exécution, puisqu'il s'agit tout simplement d'une équation d'advection en q, avec des termes sources représentant l'addition des tâches ayant fini leur temps d'attente et recommençant leur exécution ainsi que la soustraction des tâches étant déplacées vers un autre *cluster*.

Quant à la seconde équation de (2.14), elle est comprise au sens de $\left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)\right)_q \otimes \left(\mathscr{D}'(\mathbb{R})\right)_\theta$ et modélise l'évolution des tâches en attente par une équation d'advection en θ avec un terme source d'addition des tâches provenant d'un autre *cluster*. Ce terme source est exactement le "symétrique" que le terme source qui a été compté en négatif dans l'équation sur ρ_j^{exe}.

Remarque 2.8. *Remarquons maintenant que nous aurions pu introduire des paramètres supplémentaires pour caractériser les tâches, mais que cela n'aurait pas enrichi le modèle et l'aurait, au contraire, alourdi. En effet, prenons en compte des paramètres supplémentaires :*

— $s_i \in \mathbb{R}^+$ *la taille d'une tâche,*

— $p_i \in \mathbb{N}^*$ *le nombre de processeurs nécessaires à l'exécution de la tâche* J_i*,*

— $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ *l'âge de la tâche, c'est-à-dire le temps écoulé depuis de début de son exécution.*

Ces paramètres évoluent avec le temps selon

$$a_i'(t) = 1\,,\ s_i'(t) = 0\,,\ p_i'(t) = 0\,.$$

Alors, si nous notons $x = (a, p, s)$ *nous obtenons l'équation cinétique suivante, au sens des distributions*

$$\begin{cases} (\partial_t \rho_j^{exe} - v_j \partial_q \rho_j^{exe} + \partial_a \rho_j^{exe})(t,q,x) = \rho_j^{wait}(t,q,\theta = 0^+, x) - S_j^{exe}(t,q,x), \\ (\partial_t \rho_j^{wait} - \partial_\theta \rho_j^{wait} + \partial_a \rho_j^{wait})(t,q,\theta,x) = S_j^{wait}(t,q,\theta,x). \end{cases}$$

Afin d'obtenir les équations fluides sur les moments des fonctions de distributions ρ_j^{exe} *et* ρ_j^{wait}*, nous introduisons les moments suivants :*

$$n_j^{exe/wait} = \int_x \rho_j^{exe/wait}\, dx,$$

$$\bar{\alpha}_j n_j^{exe/wait} = \int_x \alpha\, \rho_j^{exe/wait},\ \textit{for}\ \alpha = \{a, p, s\},$$

avec $n_j^{exe/wait}$ *la densité de tâches ,* $(n_j \bar{a}_j)^{exe/wait}$ *l'âge moyen des tâches,* $(n_j \bar{s}_j)^{exe/wait}$ *la taille moyenne des tâches,* $(n_j \bar{p}_j)^{exe/wait}$ *le nombre moyen de processeurs nécessaires aux tâches, pour les tâches en exécution ainsi que pour les tâches en attente. Nous remarquons que* $\rho_j^{exe/wait}(t,q,x) = n_j^{exe/wait}(t,q)\, \delta_{p=\bar{p}_j}\, \delta_{a=\bar{a}_j}\, \delta_{s=\bar{s}_j}$ *et ainsi, excepté pour un terme additionel traduisant le transport de l'âge des tâches, qui ne nous intéresse pas dans notre modélisation, le système macroscopique obtenu avec les paramètres supplémentaires est le même que le système (2.14). Ce sera donc (2.14), qui comprend seulement les paramètres essentiels à notre modèle, que nous étudierons, et ceci jusqu'à la fin de ce chapitre.*

III.2 Equivalence cinétique / fluide sous hypothèse de fermeture

Afin de prouver l'existence de solutions au système fluide (2.14), nous utilisons un théorème de Jabin [33], que nous remanions afin de l'appliquer à notre modèle. Le théorème de cet article démontre l'équivalence entre l'existence d'une solution à l'équation cinétique, sous une hypothèse dite de fermeture, et l'existence de solutions au système fluide obtenu à partir des moments de cette densité de probabilité.

Nous posons les conditions initiales suivantes :

$$f(0,\cdot,\cdot) = f_0\,, \quad \rho_j^{exe}(0,\cdot) = \rho_{j,0}^{exe}\ \text{et}\ \rho_j^{wait}(0,\cdot,\cdot) = \rho_{j,0}^{wait}\,. \tag{2.17}$$

Lemme 2.4. ***Equivalence cinétique / fluide sous hypothèse de fermeture***
Il est équivalent d'affirmer que ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait}, munies des conditions initiales données par (2.17), sont solutions du système fluide (2.14), dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)_q$ et $\left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^*)\right)_q \otimes \left(\mathscr{D}'(\mathbb{R})\right)_\theta$ respectivement, et de dire que f^j écrit sous la forme (2.12) est solution de l'équation cinétique (2.9) avec sa condition initiale qui vérifie aussi l'hypothèse de fermeture (2.12).

Démonstration. Nous prouvons cette équivalence en deux étapes.

— Supposons tout d'abord que ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait}, munies de leurs conditions initiales, sont solutions du système fluide (2.14) et que

$$f^j(0,q,\theta) = \rho_j^{exe}(0,q)\,\delta_{\theta=0} + \rho^{wait}(0,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0}\,. \tag{2.18}$$

Montrons que cela implique que la solution de l'équation cinétique (2.9) s'écrit selon la décomposition (2.12). Puisque $\rho_j^{garb}(0,\cdot,\cdot) = 0$ et que l'on a (2.18), nous pouvons appliquer le Lemme 2.3 de caractérisation des solutions de l'équation cinétique. Nous en déduisons directement que la solution de l'équation cinétique est la densité de probabilité qui s'écrit à tout temps $t > 0$ sous la forme

$$f^j(t,q,\theta) = \rho_j^{exe}(t,q)\,\delta_{\theta=0} + \rho_j^{wait}(t,q,\theta)\,\mathbb{1}_{\theta>0}\,.$$

— Afin de prouver l'implication dans l'autre sens, nous écrivons l'équation cinétique au sens des distributions avec les fonctions tests définies par la formule (2.13) et remplaçons f^j par l'hypothèse de fermeture. Alors, en testant cette équation contre ϕ^j avec, successivement $\phi^{exe}(\cdot,\theta \le 0) = 0$ puis $\phi^{wait}(\cdot,\theta > 0) = 0$, nous obtenons que ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait} sont solutions du système fluide (2.14).

□

III.3 Etude d'existence et d'unicité

Le système fluide (2.14) est non linéaire à cause de la fonction de décision Dec. En effet, la fonction de coût à minimiser avant chaque prise de décision peut être dépendante de la consommation d'énergie du *cluster* $Z_j(t,q)$, qui dépend de la charge totale du *cluster*, c'est-à-dire de l'ensemble des tâches en exécution ainsi qu'en attente.

Si $\rho_j^{exe} \in B^{exe}$ et $\rho_j^{wait} \in B^{wait}$, $\forall j \in \{1,..,C\}$, alors (2.14) existe au sens des distributions, avec ces espaces définis par

$$B^{exe} = \mathbb{L}^\infty\left([0,T], \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*)_q\right) \cap F_q \quad et \quad B^{wait} = \mathbb{L}^\infty\left([0,T], \mathbb{W}^{1,\infty}\left(\mathbb{R}_+^*\right)_q \times \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R})_\theta\right) \cap F_\theta$$

avec

$$F_x = \left\{ f \,|\, \forall x, \exists y \text{ tel que } \lim_{\eta \to 0^+} f(x+\eta) = y \right\}.$$

Nous introduisons les vecteurs ρ^{exe} et ρ^{wait} tels que $\rho^{exe} = (\rho_j^{exe})_{j\in\{1,..,C\}} \in (B^{exe})^C$ et $\rho^{wait} = (\rho_j^{wait})_{j\in\{1,..,C\}} \in \left(B^{wait}\right)^C$. De plus , nous définissons la norme de ρ^{exe} telle que

$$\|\rho^{exe}\|_{exe} = \sum_{j=1}^{C} T_j \,\|\rho_j^{exe}\|_{B^{exe}}\,.$$

Propriété 2.5. ***Etude d'un problème modèle***
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\rho \in B = \mathbb{L}^\infty([0,T], \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}))$. Nous considérons le problème

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) - \partial_x \rho(t,x) = S(t)\,\delta_{x=a}\,, & \forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x)\,, & \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors, la solution $\rho(t,x) \in B \cap \{$limite à doite en $x\}$ existe et est donnée par

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \rho_0(x+t) & ,\ si\ x < a-t\ ou\ si\ x \geq a\,, \\ \rho_0(x+t) + S(x+t-a) & ,\ si\ a-t \leq x < a\,, \end{cases} \tag{2.19}$$

à condition que $S(x+t-a)$ admette une limite à droite.

Démonstration. Il s'agit d'une équation de transport de vitesse négative. En effectuant le changement d'inconnue $v(\tau,\xi) = \rho(t,x)$, avec $\begin{cases} \tau = t \\ \xi = x+t\,, \end{cases}$ nous nous ramenons à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{d\tau}(\tau,\xi) = S(\tau)\,\delta_{\xi-\tau=a}\,, \\ v(0,\xi) = \rho_0(\xi)\,. \end{cases}$$

Donc

$$\rho(t,x) = \rho_0(\xi) + \int_0^t S(s)\,\delta_{s=(x+t)-a}\,ds\,.$$

Si nous imposons que $S(x+t-a)$ admette une limite à droite, nous obtenons la solution (2.19), illustrée par la figure 2.1.

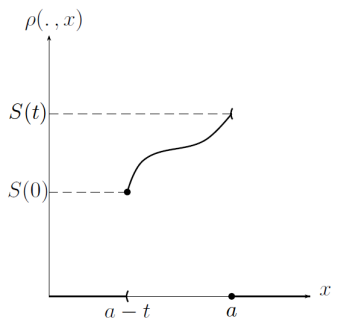


FIGURE 2.1 – Graphe représentant $\rho(\cdot,x)$ en fonction de x, en posant $\rho_0(x) = 0$.

□

Théorème 2.6. ***Existence et unicité des solutions fluides***
Soient les fonctions $\rho_j^{exe} \in B^{exe}$ et $\rho_j^{wait} \in B^{wait}$ qui vérifient le système (2.14) pour tout $j \in \{1,..,C\}$, avec $\rho_j^{exe}(0,q) = \rho_{j,0}^{exe}(q)$ et $\rho^{wait}(0,q,\theta) = \rho_{j,0}^{wait}(q,\theta)$. Alors il existe une unique solution ρ^{exe} et ρ^{wait} à ce système pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. L'idée de cette preuve est d'appliquer un théorème de point fixe. Nous définissons l'application $\Psi : \rho^{exe(l)} \to \rho^{exe(l+1)}$ avec $\rho^{exe(l)} \in (B^{exe})^C$ et $\rho^{wait(l)} \in (B^{wait})^C$ les éléments de la l-ième itération, solutions des équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j^{exe(l+1)}(t,q) - v_j\,\partial_q \rho_j^{exe(l+1)}(t,q) = \rho_j^{wait(l)}(t,q,\theta=0^+) - S_j^{exe(l+1)}(t,q)\,, & \text{(2.20a)} \\ \partial_t \rho_j^{wait(l)}(t,q,\theta) - \partial_\theta \rho_j^{wait(l)}(t,q,\theta) = S_j^{wait(l)}(t,q,\theta)\,, & \text{(2.20b)} \end{cases}$$

avec

$$S_j^{exe(l+1)}(t,q) = \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \rho_j^{exe(l+1)}(t,q)\, Dec(j,k)\,, \tag{2.21}$$

et

$$S_j^{wait(l)}(t,q,\theta) = \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j}\, \rho_k^{exe(l)}(t,q)\, Dec(k,j)\, \delta_{\theta=\tau_{kj}}\,. \tag{2.22}$$

Nous accompagnons ces équations de conditions initiales : à chaque itération $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\rho^{exe(l)}(0,q) = \rho_0^{exe}(q) = \left(\rho_{j,0}^{exe}(q)\right)_{j\in\{1,..,C\}}\,,\ \forall q \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

$$\rho^{wait(l)}(0,q,\theta) = \rho_0^{wait}(q,\theta) = \left(\rho_{j,0}^{wait}(q,\theta)\right)_{j\in\{1,..,C\}}\,,\ \forall (q,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\,.$$

La première partie de la preuve consiste à obtenir une expression explicite de $\rho^{exe(l+1)}$ dépendant seulement des quantités des itérations précédentes. Pour cela, $\rho_j^{exe(l)}$ est injecté dans la formule (2.22) donnant $S_j^{wait(l)}$, dans le but de résoudre l'équation (2.20b). Pour cela, nous utilisons la Propriété 2.5 donnant la solution du problème modèle. Le résultat $\rho_j^{wait(l)}$, à condition qu'il admette une limite en $\theta = 0^+$, peut alors être inséré dans l'équation (2.20a) pour enfin trouver la solution $\rho_j^{exe(l+1)}$ de cette équation de transport classique. Ce cheminement est schématisé sur la figure 2.2.

$$\begin{tikzcd}
\rho^{exe(l)} \arrow[r] & S^{wait(l)} \arrow[r] & \rho^{wait(l)} \arrow[r] & \rho^{wait(l)}(\theta = 0^+) \arrow[dll, "l \leftarrow l+1"] \\
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.2 – Définition de Ψ.

Nous pouvons utiliser le problème modèle énoncé à la Propriété 2.5 et nous obtenons la solution de l'équation (2.20b)

$$\rho_j^{wait(l)}(t,q,\theta) = \begin{cases} \rho_{j,0}^{wait}(q,\theta+t) & \text{si } \theta < \tau_{kj} - t \text{ ou si } \theta \geq \tau_{kj}\,, \\ \rho_{j,0}^{wait}(q,\theta+t) + \dfrac{1}{\mathscr{T}} \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \dfrac{T_k}{T_j}\, \rho_k^{exe(l)}(\theta+t-\tau_{kj},q)\, \mathbb{1}_{Dec(\theta+t-\tau_{kj},q,k,j)=1}\,, & \\ & \text{si } \tau_{kj} - t \leq \theta < \tau_{kj}\,, \end{cases}$$

à condition que le second membre de l'équation (2.20b) admette une limite à droite en temps au point $\theta + t - \tau_{kj}$, c'est-à-dire que $\rho_k^{exe(l)}$ admette une limite à droite en temps. Or, $\rho_k^{exe(l)}$ vérifie l'équation (2.20a) et donc $\rho_k^{exe(l)} = \rho_{k,0}^{exe}(q + v_k(\theta + t - \tau_{kj}))$. Et puisque $\rho_{0,k} \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*) \cap F_q$, la condition est respectée.

Nous pouvons en déduire le terme $\rho_j^{wait(l)}(t,q,\theta = 0^+)$:

$$\rho_j^{wait(l)}(t,q,0^+) = \begin{cases} \rho_{j,0}^{wait}(q,t)\,, & \text{si } t < \tau_{kj}\,, \\ \rho_{j,0}^{wait}(q,t) + \dfrac{1}{\mathscr{T}} \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \dfrac{T_k}{T_j}\, \rho_k^{exe(l)}(t-\tau_{kj},q) \mathbb{1}_{Dec(t-\tau_{kj},q,k,j)=1}\,, & \text{si } t \geq \tau_{kj}\,. \end{cases}$$

Ce terme exprime le fait que pour qu'une tâche ait fini son temps d'attente à l'instant t, elle était soit en attente au temps initial (si $t < \tau_{kj}$), soit elle a été déplacée au temps $t - \tau_{kj} \geq 0$. En injectant cette expression dans l'équation (2.20a) et en résolvant cette équation, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\rho_j^{exe(l+1)}(t,q) &= \rho_{j,0}^{exe}(q) \\
&+ \int_0^t \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{k\neq j} \frac{T_k}{T_j} \rho_k^{exe(l)}(s-\tau_{kj}, q+v_j(t-s))\, \mathbb{1}_{Dec(s-\tau_{kj},q+v_j(t-s),k,j)=1}\, ds \\
&+ \int_0^t \rho_{j,0}^{wait}(q+v_j(t-s), s)\, ds \\
&- \int_0^t \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{k\neq j} \rho_j^{exe(l+1)}(s, q+v_j(t-s))\, \mathbb{1}_{Dec(s,q+v_j(t-s),j,k)=1}\, ds.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Afin d'appliquer le théorème de point fixe, nous introduisons les vecteurs $\mu_j^{exe(l)} \in B^{exe}$ et $\mu_j^{wait(l)} \in B^{wait}$ solutions du système fluide (2.20a)-(2.20b) pour tout $j \in \{1,..,C\}$ et munies des mêmes conditions initiales que $\rho_j^{exe(l)}$ et $\rho_j^{wait(l)}$: à chaque itération $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu^{exe(l)}(0,q) = \rho_0^{exe}(q) \text{ et } \mu^{wait(l)}(0,q,\theta) = \rho_0^{wait}(q,\theta)\,,\ \forall (q,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Dans l'objectif d'utiliser le lemme de Grönwall, nous remarquons que $|\rho_j^{exe(l+1)} - \mu_j^{exe(l+1)}|$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
|\rho_j^{exe(l+1)}(t,q) - \mu_j^{exe(l+1)}(t,q)| &= \chi(t,q) - \int_0^t \psi(s,q) \left(\rho_j^{exe(l+1)}(s,q) - \mu_j^{exe(l+1)}(s,q)\right) ds \\
&\leq |\chi(t,q)| + \int_0^t |\psi(s,q)|\, |\rho_j^{exe(l+1)}(s,q) - \mu_j^{exe(l+1)}(s,q)|\, ds
\end{aligned}$$

avec

$$\chi(t,q) = \int_0^t \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{k\neq j} \frac{T_k}{T_j} \left(\rho_k^{exe(l)} - \mu_k^{exe(l)}\right)(s-\tau_{kj}, q+v_j(t-s))\, \mathbb{1}_{Dec(s-\tau_{kj},q+v_j(t-s),k,j)=1}\, ds,$$

et

$$\psi(s,q) = \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{k\neq j} \mathbb{1}_{Dec(s,q+v_j(t-s),j,k)=1}.$$

Les fonctions $|\chi|$ et $|\psi|$ sont des fonctions positives et puisque $\rho_j^{exe} \in B^{exe}$ et $\rho_j^{wait} \in B^{wait}$, $\forall j \in \{1,..,C\}$, elles sont bornées. Nous appliquons l'inégalité de Grönwall et obtenons une expression explicite des quantités à l'itération $l+1$ en fonction de celles à l'itération l, donnée par

$$|\rho_j^{exe(l+1)}(t,q) - \mu_j^{exe(l+1)}(t,q)| \leq |\chi(t,q)| + \int_0^t |\chi(s,q)|\, |\psi(s,q)|\, \exp\left(\int_s^t |\psi(u)|\, du\right) ds.$$

En majorant cette expression, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\rho_j^{exe(l+1)} - \mu_j^{exe(l+1)}\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T])_t, \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)_q)} &\leq \frac{1}{C-1} \sum_{k\neq j} \frac{T_k}{T_j} \|\rho_k^{exe(l)} - \mu_k^{exe(l)}\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T])_t, \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)_q)} \\
&\left(-1 + \exp\left(\frac{T(C-1)}{\mathscr{T}}\right)\right).
\end{aligned}$$

En prenant la dérivée partielle en q de l'équation (2.23) et en suivant le même raisonnement, nous obtenons

$$T_j \, \|\rho_j^{exe(l+1)} - \mu_j^{exe(l+1)}\|_{B^{exe}} \leq \frac{1}{C-1} \sum_{k \neq j} T_k \, \|\rho_k^{exe(l)} - \mu_k^{exe(l)}\|_{B^{exe}} \left(-1 + \exp\left(\frac{T\,(C-1)}{\mathscr{T}}\right)\right)$$

Et puisque

$$\|\rho^{exe(l+1)} - \mu^{exe(l+1)}\|_{exe} = \sum_{j=1}^{C} T_j \, \|\rho_j^{exe(l+1)} - \mu_j^{exe(l+1)}\|_{B^{exe}} \,,$$

nous pouvons finalement écrire

$$\|\rho^{exe(l+1)} - \mu^{exe(l+1)}\|_{exe} \leq \frac{C}{C-1} \|\rho^{exe(l)} - \mu^{exe(l)}\|_{exe} \left(-1 + \exp\left(\frac{T\,(C-1)}{\mathscr{T}}\right)\right).$$

Donc ψ est une contraction si

$$T \leq \frac{\mathscr{T}}{C-1} \ln\left(\frac{2C-1}{C}\right) = T_{max}\,.$$

De plus, le coefficient de la contraction T_{max} montre que le temps d'existence décroit lorsque le nombre de *clusters* C augmente. Nous remarquons aussi que le temps d'existence d'une solution augmente lorsque $\mathscr{T}$ augmente. Ceci se comprend facilement lorsque si nous réalisons que la proportion de tâches déplacées après chaque décision est de l'ordre de $1/\mathscr{T}$. Les quantités en exécution perdent donc une proportion de tâches moins importante lorsque $\mathscr{T}$ augmente, ce qui lui assure une régularité plus grande. Ainsi, la valeur T_{max} du temps d'existence de la solution est liée à l'asymptotique choisie à la Propriété 2.1.

Afin d'étendre l'existence d'une solution au delà du temps T_{max}, nous appliquons une nouvelle itération. Pour cela, nous modifions les conditions initiales :

$$\rho_j^{exe(l+1)}(T,\cdot) = \mu_j^{exe(l+1)}(T,\cdot) = \rho_{j,0}^{exe}\,,$$

et

$$\rho_j^{wait(l+1)}(T,\cdot,\cdot) = \rho_j^{wait(l)}(T,\cdot,\cdot)\,, \qquad \mu_j^{wait(l+1)}(T,\cdot,\cdot) = \mu_j^{wait(l)}(T,\cdot,\cdot)\,.$$

Ainsi, nous obtenons l'existence d'une solution sur l'intervalle $[T, 2T]$ sous la condition $T \leq T_{max}$. En répétant encore et encore les itérations, nous obtenons existence d'une unique solution pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$. □

Théorème 2.7. ***Existence et unicité de la solution cinétique sous hypothèse de fermeture***
Soient ρ^{exe} et ρ^{wait} définis tels que $\rho_j^{exe} \in B^{exe}$ et $\rho_j^{wait} \in B^{wait}$ vérifient le système d'équations fluides (2.14) $\forall\, j \in \{1,..,C\}$, avec les conditions initiales $\rho_j^{exe}(0,q) = \rho_{j,0}(q)$ et $\rho_j^{wait}(0,q,\theta) = 0$. Supposons que $f^j(t=0,q,\theta)$ se décompose selon l'hypothèse de fermeture (2.10). Alors il existe une unique solution à l'équation cinétique qui se décompose selon l'hypothèse de fermeture, pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Les hypothèses sur la densité de probabilité permettent d'appliquer le Lemme 2.3 de caractérisation des solutions cinétiques. Alors, à chaque temps, la solution f se décompose selon l'hypothèse de fermeture. De plus, les hypothèses de ce théorème permettent d'appliquer le Théorème 2.6 et de montrer l'unicité des solutions ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait}. Et puisque la densité de probabilité, qui se décompose selon l'hypothèse de fermeture, se définit de manière unique selon ses moments, eux même uniques, l'unicité de la solution cinétique, écrite selon la décomposition, est prouvée. □

IV CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons construit dans ce chapitre un modèle permettant de décrire la dynamique dans une grille de calcul. Nous avons montré que le modèle fluide obtenu était cohérent en étudiant son caractère bien posé.

Afin d'éprouver un peu plus notre modèle, il serait intéressant d'explorer une limite asymptotique qui décrit le cas d'une grille de calcul qui s'optimise instantanément. Il s'agirait alors d'adopter l'asymptotique suivante :

$$\varepsilon^2 = \tau_{pr} << \varepsilon \text{ et } \mathscr{T} = o(\varepsilon).$$

Nous considérions jusqu'à présent une grille de calcul avec un grand nombre de tâches s'effectuant en parallèle. Cette nouvelle asymptotique équivaut à considérer en plus que le temps d'observation est très supérieur au temps mis par l'intergiciel pour tester l'entièreté du réseau. Il s'agit de considérer que les tâches ont une charge importante et d'observer en temps long l'évolution des charges du réseau ainsi que l'optimisation du temps de calcul et de la consommation énergétique.

Néanmoins, nous avions remarqué lors de la démonstration du Théorème 2.6, que le temps d'existence de la solution est lié à $\mathscr{T}$. Pour l'étude de cette asymptotique, nous avons donc existence d'une solution en temps très court. Nous explorerons ce cas de figure dans le chapitre 4 lors des simulations numériques.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION FLUIDE DES RÉSEAUX AFDX

Sommaire

I Description particulaire d'un réseau AFDX . . . 52
- I.1 Modélisation du réseau AFDX . . . 52
- I.2 Description particulaire des trames . . . 54
- I.3 Evolution en temps des paramètres des trames : . . . 56

II Obtention de l'équation cinétique . . . 58
- II.1 Définition de la densité de probabilité . . . 58
- II.2 Limite asymptotique . . . 59

III Modèle fluide . . . 61
- III.1 Définition des moments . . . 61
- III.2 Système fluide . . . 63

IV Analyse mathématique du modèle fluide . . . 66
- IV.1 Analyse mathématique dans un commutateur . . . 66
- IV.2 Analyse mathématique dans un flot . . . 72

V Extensions du modèle / Conclusion . . . 74
- V.1 Introduction de différents niveaux de priorité . . . 74
- V.2 D'autres limites asymptotiques possibles . . . 77

Ce chapitre est consacré à la modélisation de la dynamique des réseaux AFDX qui ont été introduits dans le chapitre 1, en utilisant la méthode de modélisation fluide.

Nous nous intéressons en premier lieu à la description particulaire des trames dans un réseau AFDX. Nous définissons la configuration du réseau AFDX et aux paramètres des trames transitant dans le réseau (Sect. I). Par la suite, nous souhaitons capturer la dynamique globale des trames. Nous introduisons pour cela des densités de probabilité sur le réseau. Afin d'obtenir l'équation cinétique adimensionnée, nous décrivons le comportement des grandeurs caractéristiques du réseau pour une certaine asymptotique puis appliquons un passage à la limite formel (Sect. II). Puis, nous définissons le système fluide : nous introduisons les quantités macroscopiques en calculant les moments de la densité de probabilité et obtenons les équations de conservation commandant leur dynamique (Sect. III). Nous étudions ensuite le caractère bien posé du système fluide non linéaire obtenu (Sect. IV). Pour finir, nous explorons

de possibles extensions de notre modèle, notamment des niveaux de priorités différents entre les trames, un moment d'ordre deux sur l'âge des trames et envisageons d'élargir la gamme de comportements pris en compte par notre modèle via une autre limite asymptotique (Sect. V).

I DESCRIPTION PARTICULAIRE D'UN RÉSEAU AFDX

I.1 Modélisation du réseau AFDX

I.1.1 Description du réseau AFDX

Le réseau AFDX que nous allons étudier est composé d'un nombre fini M de commutateurs, que nous notons S_k, $k \in \{1,..,M\}$. Nous avons déjà présenté les commutateurs d'un réseau AFDX (Chap. 1-Sect. III.2.2). Rappelons ici les points importants. Les commutateurs sont traversés par des *virtual links* dans lesquels transitent des trames. Ils ont la fonction simple d'orienter les trames vers leur destination. Pour cela, chaque commutateur consulte l'en-tête de la trame, qui comprend entre autres les adresses MAC des *end-systems* source et destination ainsi que le numéro du *virtual link* dans lequel la trame évolue. Le commutateur possède une table de commutation statique qui lui permet de savoir où vers où orienter la trame, en sachant d'où elle vient et où elle va. La tâche des commutateurs dans un réseau AFDX consiste aussi à isoler les *virtual links* les uns des autres. Pour cela, il affecte à chaque *virtual link* une bande passante maximale et vérifie que cette contrainte est respectée.

Contrairement aux commutateurs d'un réseau AFDX qui possèdent deux mémoires tampons afin de traiter deux niveaux de priorités différents, nous supposons ici qu'un commutateur S_k possède une seule mémoire tampon.

Nous décrivons chaque commutateur S_k par les paramètres suivants :

— sa bande passante maximale $D_k = D_k^v \in \mathbb{R}_+^*$ pour un *virtual link* VL_v donné. Nous omettrons par la suite l'indice lié aux *virtual links* car tout l'intérêt de leur existence est de pouvoir les traiter indépendamment les uns des autres.

— sa charge $C_k(t) \in \mathbb{N}$, qui renseigne sur la quantité totale de trames présentes dans sa mémoire tampon au temps t,

— sa taille mémoire $T_k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire la quantité maximale de trames que sa mémoire tampon peut contenir,

— son temps de latence à l'émission $L_k \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire l'intervalle de temps entre l'émission de deux trames. Nous le considérons constant pour chaque commutateur pour simplifier la modélisation mais normalement, ce temps représente le BAG (*Bandwidth Allocation Gap*), auquel est soustrait le temps d'émission de la trame. Prendre un temps de latence L_k constant équivaut donc à faire l'hypothèse que toutes les trames ont la même taille, comme schématisé sur la figure 3.1. Ces choix sont cohérents avec le comportement d'un réseau AFDX. En effet, afin d'imposer un BAG dans un réseau AFDX, dans le but de garantir une bande passante minimale, il faut imposer une taille maximale pour les trames (Chap. 1-Sect. III.2.1).

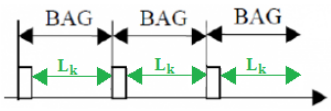


FIGURE 3.1 – Cas d'un temps de latence L_k constant.

Précisons également qu'en accord avec le fonctionnement des commutateurs d'un réseau AFDX, la file d'attente dans les mémoires tampons est gérée par la méthode FIFO (*First In-First Out*) et que le chemin suivi par chaque trame dans le réseau est considéré connu *a priori*, puisque les tables de commutation sont statiques.

I.1.2 Notion de flot

Soit un nombre fini V de *virtual links*, notés VL_v avec $v \in \{1,..,V\}$. Afin de prendre en compte la notion de duplication de trames déjà abordée (Chap. 1-Sect. III.2.2), où la donnée est dupliquée lorsque les chemins de chacune de ses copies se séparent, nous introduisons la notion de flot. Dans le cas d'une trame dupliquée, nous introduisons un flot correspondant à chaque copie de cette trame. Il y a donc autant de flots que de destinataires différents de la trame et la réunion des flots de toutes les copies constitue le *virtual link*. Nous considérons un nombre fini F de flots, notés f avec $f \in \{1,..,F\}$.

Pourtant, considérer plusieurs flots sur la portion de chemin commune à toutes les copies d'une même trame ne correspond pas à la réalité du réseau, qui évite la surcharge en prenant en compte la duplication de trames. Afin de rester cohérent, nous introduisons des poids pour chaque flot, notés w_f. Sur les chemins que les flots n'ont pas en commun, ce poids est fixé égal à 1. Par contre, lorsque plusieurs flots partagent le même chemin, le poids total de 1 est partagé également entre ces flots. Le poids d'un flot sur chaque partie d'un *virtual link* dépend donc de combien d'autres flots la traversent. Nous notons le poids d'un flot f par $w_f = \{w_f^j, j \in \{1,..,J\}\}$, où J est le nombre total de commutateurs qu'il traverse. Notons que la valeur de J varie selon les flots. Prenons tout de suite un exemple pour illustrer cette notion de flot.

Exemple 3.1. *Soit un réseau comprenant 3* end-systems *: un émetteur E_1, deux récepteurs R_1 et R_2, ainsi que deux commutateurs S_1 et S_2. Une trame est envoyée par E_1 dans ce réseau, schématisé par la figure 3.2, et nous souhaitons transmettre une copie de cette trame à chaque récepteur. Deux flots différents empruntent donc le même chemin $E_1 \rightarrow S_1$ et divergent ensuite : $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow R_1$ pour une copie (et son flot) et $S_1 \rightarrow R_2$ pour l'autre (et son flot).*

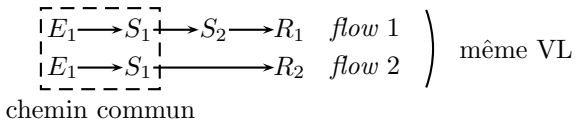


FIGURE 3.2 – Schématisation des flots en cas de duplication de trames.

Ne pas imposer de poids sur les deux flots reviendrait à considérer que la charge du réseau sur $E_1 \rightarrow S_1$ est égale à 2. Nous imposons donc $w_1^1 = w_2^1 = 1/2$ sur le commutateur commun S_1 et un poids $w_1^2 = 1$ sur le commutateur S_2 pour le flot 1.

Remarque 3.1. *L'introduction de ces poids permet de conserver la masse de données totale : si nous considérons l'ensemble des commutateurs S_k d'un réseau, avec $k = \{1,..,K\}$, alors*

$$\sum_{f=1}^{F_v} \sum_{\substack{k=1 \\ S_k \in f}}^{K} w_f^k = \sum_{v=1}^{V} \sum_{\substack{k=1 \\ S_k \in VL_v}} 1 .$$

Ainsi, pour un virtual link *donné, si nous additionnons l'ensemble des poids des flots traversant chaque commutateur, nous obtenons toujours* 1*. Pour illustrer ce résultat, reprenons l'exemple précédent.*

Exemple 3.2. *Pour le réseau illustré par la figure 3.2, nous avons*

$$\sum_{f=1}^{2} \sum_{\substack{k=1 \\ S_k \in f}}^{2} w_f^k = \left(w_1^1 + w_1^2\right) + \left(w_2^1\right) = 2 = \sum_{\substack{k=1 \\ S_k \in VL}}^{2} 1 .$$

Remarque 3.2. *Puisque les chemins des trames sont connus* a priori*, il en découle que les poids sont aussi connus* a priori*. Nous considérons qu'ils sont pris en compte dans la charge de chaque mémoire tampon $C_j(t)$. Nous pourrons alors traiter chaque flot séparément au sein d'un même* virtual link*, leur interdépendance étant implicitement prise en compte dans le calcul de charge du commutateur considéré.*

Puisque les *virtual links* peuvent être traités indépendamment les uns des autres, nous allons nous concentrer sur la modélisation d'un seul *virtual link* : VL_v. La modélisation de la totalité du réseau, c'est-à-dire de l'ensemble des *virtual links* reviendra à appliquer la modélisation qui nous allons construire sur VL_v sur tous les VL_v avec $v \in \{1,..,V\}$. Nous notons F_v le nombre (fini) total de flots dans ce *virtual link*.

I.2 Description particulaire des trames

Nous considérons, sur le réseau AFDX un nombre N de trames, notées t_i, avec $i \in \{1,..,N\}$. Puisque notre objectif est de mettre en place une méthode fluide, N est amené à être grand. Nous définissons chaque trame par les paramètres suivants :

— sa taille $s_i \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire la place mémoire qu'elle occupe,

— son âge $a_i(t) \in \mathbb{R}^+$, correspondant au temps total passé dans le réseau,

— sa priorité $p_i \in \{\pi_1, \pi_2\}$, qui détermine si la trame peut passer devant des trames de priorité inférieure : les trames possédant une priorité $p_i = \pi_1$ sont prioritaires,

— son *virtual link* d'appartenance $VL_i \in \{VL_1,..,VL_V\}$.

La taille, la priorité ainsi que le *virtual link* d'appartenance d'une trame sont invariants au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} s_i = \frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt} VL_i = 0 ,$$

et l'âge d'une trame croit en même temps que le temps :

$$a_i'(t) = 1 .$$

Nous avons déjà évoqué la modélisation des performances d'un réseau par files d'attentes fluides (Chap. 1-Sect. IV.2). Cette méthode de modélisation modélise des commutateurs

fluides comme des réservoirs dans lesquels le fluide arrive et ressort. Ici, notre approche sera différente. En effet, nous définissons la position d'une trame comme continue le long d'un flot et souhaitons modéliser le transport des trames le long des commutateurs. Nous représentons alors chaque commutateur comme un segment de longueur arbitraire 1. Nous faisons également l'hypothèse que les temps de transferts entre chaque commutateur sont inclus dans les temps de latence L_k. Alors, un flot comprenant J commutateurs est représenté par un segment $[0, J]$ dont les extrémités sont les *end-systems* émetteur (E) et le récepteur (R), comme schématisé sur la figure 3.3.

Contrairement à la modélisation des grilles de calcul, où la position était discrète (sur un *cluster* ou un autre) et notée $P_i(t) = C_j$ (Chap. 2), nous notons ici la présence d'une trame t_i dans le commutateur S_j, du flot f par $P_{i,f}(t) \in [j-1, j[$. Cette notation explicite la dépendance de la position vis-à-vis du flot dans lequel elle se définit.

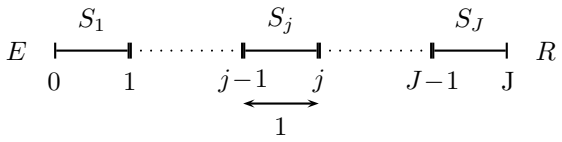


FIGURE 3.3 – Segment [0,J] modélisant un flot de J commutateurs dans un *virtual link*.

Remarque 3.3. *Remarquons que les notations adoptées pour la position d'une trame sont relatives au flot auquel elle appartient. Par abus de notation, les commutateurs sont dorénavant considérés relativement à leur position dans le flot que nous étudions, ce qui diffère donc des notations prises à la partie I.1.1 qui considéraient chaque commutateur S_k, avec $k \in \{1,..,K\}$ fixé dans tout le réseau.*

Cette notation relative, qui porte sur les indices j, avec $j \in \{1,..,J\}$ et J le nombre total de commutateurs traversés par chaque flot, se reflètera aussi sur les paramètres des commutateurs. Ainsi, lorsque nous notons D_j ou $C_j(t)$, cela signifie la bande passante et la charge du commutateur correspondant aux positions dans $[j-1, j[$ dans le flot f étudié.

Maintenant que nous avons défini la position d'une trame dans un flot donné, nous lui associons une vitesse $P'_{i,f}(t) = v_i(t, P_{i,f}(t))$. Elle est égale au ratio de la distance restante à parcourir par la trame dans la mémoire tampon par le temps d'attente restant avant qu'elle soit émise :

$$v_i(t, P_{i,f}(t)) := \frac{j - P_{i,f}(t)}{\theta_i(t, P_{i,f}(t))} \mathbb{1}_{P_{i,f}(t) \in [j-1, j[}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.4. *Nous remarquons ici que cette définition s'écrit en réalité*

$$v_i(t, P_{i,f}(t)) := \frac{j - P_{i,f}(t)}{\theta_i(t, P_{i,f}(t))} \mathbb{1}_{P_{i,f}(t) \in [j-1, j[} \mathbb{1}_{P_{i,f}(t) \in f}.$$

Néanmoins, la notation de la vitesse, qui fait apparaître la dépendance vis-à-vis du flot f, nous permet d'alléger les notations en considérant l'indicatrice $\mathbb{1}_{P_{i,f}(t) \in f}$ comme sous-entendue. Nous intégrons cette simplification des notations dans les définitions et calculs suivants.

Le temps d'attente d'une trame $\theta_i(t, P_{i,f}(t))$ dans la mémoire tampon d'un commutateur est exactement le temps restant pour émettre chacune des trames qui sont devant elle

dans la file d'attente, auquel s'ajoute le temps de latence entre chacun de ces envois. Afin de modéliser ce temps d'attente, il nous faut prendre en compte le nombre des trames présentes devant t_i dans la mémoire tampon et donc considérer tous les flots du *virtual link* VL_v qui traversent ce commutateur. Le temps d'attente dans un commutateur donné est donc le même pour tous les flots qui le traverse. Cependant, de par la notion de position $P_{i,f}(t) \in [j-1, j[$ avec $j \in \{1,.,J\}$ et J variable en fonction du flot étudié, $\theta_i(t, P_{i,f}(t))$ est définie sur chaque flot. Cette remarque vaut aussi pour la vitesse d'une trame.

Le temps d'attente d'une trame t_i présente dans la mémoire tampon d'un commutateur $[j-1, j[$ et un flot f donné, avec $f \in \{1,..,F_v\}$, est égal à la somme des temps d'émission et de latence de toutes les trames t_k se trouvant devant elle, dans tous les flots qui traversent ce commutateur. Les quantités sont pondérées par le poids de chacun de ces flots w_f^j. Ainsi, le temps d'attente s'écrit

$$\theta_i\left(t, P_{i,f}(t)\right) := \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{s_k}{D_j} + L_j \right) \mathbb{1}_{P_{k,f}(t) \in]P_{i,f}(t), j[} \right] \mathbb{1}_{P_{i,f}(t) \in [j-1, j[}. \tag{3.2}$$

Remarque 3.5. *Un commutateur qui se trouve en position $[j-1, j[$ dans le flot f donné n'a pas forcément la même position dans les autres flots qui le traversent : nous rappelons que $j \in \{1,..,J\}$ varie en fonction du flot traversé.*

Remarque 3.6. *Nous pouvons identifier dans cette définition le terme qui représente le nombre de trames entre une position P donnée dans $[j-1, j[$ et la fin de ce commutateur, c'est-à-dire j. Nous le notons $C_j(t, P)$. Il se définit par*

$$C_j(t, P) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{P_{k,f}(t) \in]P, j[} \right) \mathbb{1}_{P \in [j-1, j[}.$$

Dans le cas où toutes les trames ont la même taille s, le temps d'attente de la trame t_i peut s'écrire plus simplement en utilisant cette notation :

$$\theta_i\left(t, P_{i,f}(t)\right) = \sum_{j=1}^{J} C_j(t, P_{i,f}(t)) \left(\frac{s}{D_j} + L_j \right) \mathbb{1}_{P_{i,f}(t) \in [j-1, j[}. \tag{3.3}$$

I.3 Evolution en temps des paramètres des trames :

Une telle définition du temps d'attente d'une trame permet de déduire l'évolution de ce temps le long de la trajectoire de la trame : avec une décroissance linéaire le long de chaque commutateur et la présence d'un saut lors de l'entrée dans un commutateur :

$$\frac{d}{dt}[\theta_i(t, P_{i,f}(t))] = -1 + \theta_j^{ref}(t)\ \delta_{\theta_i(t, P_{i,f}(t))=0}. \tag{3.4}$$

La valeur de ce saut à l'entrée du commutateur $[j-1, j[$, notée $\theta_j^{ref}(t)$, est définie par

$$\theta_j^{ref}(t) := \theta_i(t, P_{i,f}(t))\ \delta_{P_{i,f}(t)=(j-1)^+}. \tag{3.5}$$

et correspond à la multiplication de la charge totale $C_j(t)$ dans le commutateur au moment t de l'arrivée de la trame, par le temps d'envoi de chacune de ces trames.

Remarque 3.7. *Ainsi, le temps d'attente d'une trame t_i dans un commutateur est égal à $\theta_j^{ref}(t)$ lorsque $P_{i,f}(t) = (j-1)^+$ et égal à 0 lorsque $P_{i,f}(t) = j^-$. En reprenant l'hypothèse de trames ayant toutes la même taille s, nous obtenons :*

$$\theta_i\left(t,(j-1)^+\right) = \theta_j^{ref}(t) = C_j(t)\left(\frac{s}{D_j} + L_j\right)$$

et

$$\theta_i\left(t,j^-\right) = 0.$$

Remarque 3.8. *Les définitions (3.4) et (3.5) impliquent l' équivalence entre $\theta_i(t,P_{i,f}(t)) = 0$ et $P_{i,f}(t) = j^-$, $\forall j \in \{1,..,J\}$.*

De l'équation différentielle (3.4) exprimant l'évolution du temps d'attente, nous pouvons déduire le lemme suivant.

Lemme 3.1. *L'évolution en temps de la vitesse $v_i(t)$ d'une trame le long d'un commutateur est nulle. Ainsi, la vitesse d'une trame est constante le long de chaque commutateur. Dans un flot, elle est donc constante par morceaux avec des discontinuités aux jonctions entre les commutateurs.*

Démonstration. Supposons $P_{i,f}(t) \in [j-1, j[$, avec $j \in \{1,..,J\}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[v_i(t,P_{i,f}(t))\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{j-P_{i,f}(t)}{\theta_i(t,P_{i,f}(t))}\right)\\ &= \left(-P'_{i,f}(t)\,\theta_i(t,P_{i,f}(t)) + \left(j-P_{i,f}(t)\right)\frac{d}{dt}\left[\theta_i(t,P_{i,f}(t))\right]\right)\frac{1}{\theta_i(t,P_{i,f}(t))^2}.\end{aligned}$$

Nous concluons la démonstration en utilisant les équations (3.1) et (3.4), prises à l'intérieur d'un commutateur, et obtenons :

$$\frac{d}{dt}\left[v_i(t,P_{i,f}(t))\right] = 0.$$

□

Remarque 3.9. *Si nous supposons que toutes les trames ont même taille s et utilisons la définition du temps d'attente (3.3), nous pouvons en déduire l'évolution en temps de la quantité de charge devant la trame t_i, à l'intérieur d'un commutateur :*

$$\frac{d}{dt}[C_j(t,P_{i,f}(t))] = -\frac{1}{\tau_j},$$

avec $\tau_j = \dfrac{s}{D_j} + L_j$ qui représente le temps mis par le commutateur $[j-1, j[$ pour émettre chaque trame. Le nombre de trames (pondéré, car la charge prend en compte les poids des flots) devant t_i dans le commutateur décroit donc à une vitesse égale au nombre de trames émises par le commutateur par unité de temps.

II OBTENTION DE L'ÉQUATION CINÉTIQUE

II.1 Définition de la densité de probabilité

Afin de décrire le comportement des trames dans le réseau AFDX sans avoir à étudier l'évolution des paramètres de chaque trame individuellement, nous introduisons une densité de probabilité normalisée des trames sur le réseau. Elle dépend du temps, de l'âge $a \in \mathbb{R}^+$, du temps d'attente $\theta \in \mathbb{R}^+$, de la taille $s \in \mathbb{R}^+$ et du *virtual link* d'appartenance des trames. Et compte à chaque temps t le nombre de trames présentes dans le réseau ayant un âge égal à a, un temps d'attente égal à θ, une taille égal à s et un *virtual link* d'appartenance égal à VL. Nous normalisons en divisant par le nombre total de trames dans le réseau.

$$g(t,a,\theta,s,VL) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{a=a_i(t)}\, \delta_{\theta=\theta_i(t,P_{i,f}(t))}\, \delta_{s=s_i}\, \delta_{VL=VL_i}\,.$$

En restreignant cette densité de probabilité à un seul *virtual link*, nous définissons une densité de probabilité pour chaque *virtual link*. Soit $(g^v)_{v\in\{1,..,V\}}$ un ensemble de densités de probabilité des trames sur les *virtual links*, définies telles que , $\forall v \in \{1,..,V\}$,

$$g^v(t,a,\theta,s)\, \delta_{VL=VL_v} = g(t,a,\theta,s,VL)\,.$$

En d'autres termes, nous obtenons

$$g^v(t,a,\theta,s) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{a=a_i(t)}\, \delta_{\theta=\theta_i(t,P_{i,f}(t))}\, \delta_{s=s_i}\, \mathbb{1}_{f\in VL_v}\,,$$

ainsi qu'une densité de probabilité spécifique à chacun des flots de ce *virtual link* VL_v. Nous définissons alors une famille de densités de probabilité des trames spécifique à chacun des flots de ce *virtual link*, notée $(g^f)_{f\in\{1,..,F_v\}}$ et définie telle que

$$g^f(t,P,a,\theta,s) = \frac{N}{T_f}\, g(t,a,\theta,s,VL)\, \delta_{P\in f/f\in VL} = \frac{N}{T_f}\, g^v(t,a,\theta,s)\, \delta_{P\in f/f\in VL_v}.$$

avec $T_f = \sum_{\substack{j=1\\ [j-1,j]\in f}}^{J} T_j$ la capacité maximale que peut contenir l'ensemble des commutateurs du flot f. Alors nous considérons

$$g^f(t,P,a,\theta,s) = \frac{1}{T_f}\sum_{i=1}^{T_f} \delta_{a=a_i(t)}\, \delta_{\theta=\theta_i(t,P_{i,f}(t))}\, \delta_{s=s_i}\, \mathbb{1}_{P\in f/f\in VL_v}\,.$$

Remarque 3.10. *D'après cette définition et la remarque 3.1, nous remarquons qu'il n'y a pas d'échange directs de trames entre les flots : les flots ne partagent pas de trames. Le couplage entre les flots intervient au niveau de la variable θ_j^{ref}. Nous travaillons donc dorénavant seulement avec les densités de probabilité des trames sur les flots.*

Nous définissons une fonction test $\phi \in \mathscr{D}([0,J]_P \times \mathbb{R}_a^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \times \mathbb{R}_s^+)$. Alors

$$\langle \partial_t g^f(t), \phi\rangle = -\langle g^f(t), v\,\partial_P \Phi\rangle - \langle g^f(t), \partial_a \phi\rangle - \langle g^f(t), \frac{d}{dt}\,[\theta(t,P(t))]\,\partial_\theta \phi\rangle\,.$$

II.2 Limite asymptotique

Nous souhaitons maintenant utiliser la description particulaire de chaque trame pour définir l'équation cinétique adimensionnée vérifiée par g^f. Nous introduisons dans ce but un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et posons le changement de variable $t = \hat{t}\, t'$, avec t' le temps adimensionné, c'est-à-dire le temps d'observation du réseau et $\hat{t}$ la grandeur caractéristique en temps. Afin d'adimensionner l'équation vérifiée par g^f, la première étape est de décider comment se comportent les grandeurs caractéristiques du réseau pendant ce temps d'observation.

— Tout d'abord, nous posons que le temps d'observation t' du réseau est du même ordre que le temps de vidage des commutateurs. Nous imposons alors le changement de variable

$$\theta_j^{ref}(t) = \hat{t}\theta_j^{ref'}(t'),\ \forall j \in \{1,..,J\},$$

avec $\theta_j^{ref'}(t') = \theta'_j(t', P(t'))\, \delta_{P(t')=j-1}$ le temps d'attente adimensionné.

— Cependant, nous ne souhaitons pas qu'une mémoire tampon ait le temps de se vider entièrement pendant ce temps d'observation. Ce comportement traduirait une évolution des files d'attente à l'intérieur de chaque commutateur trop rapide pour pouvoir l'observer et équivaudrait à l'émission instantanée des trames d'un commutateur. Pour cela, nous posons

$$\hat{t} = \mathcal{O}(1),\ \forall j \in \{1,..,J\}.$$

— En revanche, nous voulons pouvoir observer le déplacement des trames dans un commutateur, c'est-à-dire voir la file d'attente avancer. Nous effectuons le changement de variable

$$\tau_j = \hat{\tau}\, \tau'_j,\ \text{avec}\ \tau_j = \frac{s_i}{D_j} + L_j,\ \forall i \in \{1,..,C_j(t)\},$$

et posons donc le temps caractéristique d'émission d'une trame négligeable devant le temps caractéristique d'observation du réseau :

$$\hat{\tau} = \varepsilon << \hat{t} = \mathcal{O}(1),\ \forall j \in \{1,..,J\}.$$

— Si nous adimensionnons la charge des mémoires tampons $C_j(t) = \hat{C}_j\, C'_j(t)$, $\forall j \in \{1,..,J\}$, alors nous obtenons la relation

$$\hat{C}_j = \frac{C_j(t)}{C'_j(t)} = \frac{\tau'_j}{\tau_j} = \frac{1}{\hat{\tau}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \forall t,\ \forall j \in \{1,..,J\}.$$

Et puisque nous avons $\theta_j^{ref}(t) = \theta_j^{ref'}(t')$, nous en déduisons que

$$\theta_j^{ref'}(t') = C'_j(t')\,\tau'_j,\ \forall j \in \{1,..,J\}.$$

— Nous imposons ici que la capacité maximale d'une mémoire tampon T_j devienne également grande lorsque la charge adimensionnée des mémoires tampons devient grande. Pour cela, nous fixons le taux de remplissage d'une mémoire tampon, afin qu'il reste inchangé à l'asymptotique. Ce taux est noté $\alpha_j \in \mathbb{R}^*$, $\forall j \in \{1,..,J\}$. Ainsi, en notant $T_f = \sum_{\substack{j=1 \\ [j-1,j[\in f}}^{J} T_j$

$$\frac{C_j(t)}{T_f} = \alpha_j,\ \forall t',\ \forall j \in \{1,..,J\},$$

ce qui implique que

$$\hat{C}_j = T_f \text{ et } C'_j(t') = \alpha_j .$$

— En adoptant la notation $\tau'_j = \dfrac{s_i}{D'_j} + L'_j$, $\forall i \in \{1,..,C_j(t)\}$, nous déduisons l'adimensionnement des débits et temps de latence

$$D_j = T_f D'_j , \qquad \text{et } L_j = \frac{1}{T_f} L'_j .$$

Cet adimensionnement effectué, nous pouvons faire la remarque suivante.

Remarque 3.11. *Puisque, à t fixé, $N = \sum_{j=1}^{J} C_j(t)$ et que le nombre de commutateurs J est fini, nous pouvons en déduire que*

$$N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \text{ et } T_j = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \forall j \in \{1,..,J\} .$$

Ainsi, lorsque nous passerons par la suite à la limite $\varepsilon \to 0$, nous effectuerons aussi la limite $N \to +\infty$.

L'adimensionement des variables v, a et θ s'écrit donc

$$v(t,P(t)) = \bar{v}\, v'(t',P(t')) , \; a(t) = \bar{a}\, a'(t') \text{ et } \theta(t,P(t)) = \bar{\theta}\, \theta'(t',P(t'))$$

avec v', a' et θ' les variables adimensionnées et avec les grandeurs caractéristiques prises telles que

$$\bar{v} = \bar{a} = \bar{\theta} = \hat{t} .$$

Afin de faire apparaître la dépendance de g vis-à-vis de ε (car g dépend de $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$), nous notons $g^f = g^f_\varepsilon$. Nous pouvons maintenant écrire l'évolution de la densité de probabilité adimensionnée, en tenant compte de cette notation.

$$\langle \partial_{t'} g^f_\varepsilon(t'), \phi\rangle = -\langle g^f_\varepsilon(t'),\, v'(t',P)\, \partial_P \phi\rangle - \langle g^f_\varepsilon(t'), \partial_{a'}\phi\rangle - \langle g^f_\varepsilon(t'), \frac{d}{dt'}\left[\theta'(t',P(t'))\right] \partial_{\theta'}\phi\rangle . \quad (3.6)$$

Lemme 3.2. ***Passage à la limite formelle*** $\varepsilon \to 0$ ***(et*** $N \to +\infty$***).***
Supposons que $g^f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} g$ au sens faible $-*$. Alors, la densité de probabilité a la forme particulière

$$g(t',P,a',\theta',s) = \tilde{g}(t',P,a',s)\, \delta_{\theta'=\bar{\theta}(t',P)} ,$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(t',P) = \sum_{f=1}^{F_v} w^j_f \sum_{j=1}^{J} \Bigg[&\frac{1}{D'_j}\left(\int_P^j \int_{a',\theta',s} s\, g(t',x,a',\theta',s)\, da'\, d\theta'\, ds\, dx\right) \mathbb{1}_{P\in[j-1,j[} \\ &+ L'_j \left(\int_P^j \int_{a',\theta',s} g(t',x,a',\theta',s)\, da'\, d\theta'\, ds\, dx\right) \mathbb{1}_{P\in[j-1,j[}\Bigg] ,\end{aligned} \quad (3.7)$$

et

$$v'(t',P(t')) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{j-P}{\bar{\theta}(t',P)} \mathbb{1}_{P\in[j-1,j[} = \bar{v}(t',P) .$$

De plus, $\tilde{g}$ vérifie l'équation cinétique suivante, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_{t'} \times [0,J]_P \times \mathbb{R}'^+_a \times \mathbb{R}^+_s)$,

$$\partial_{t'}\tilde{g}(t',P,a',s) + \partial_P\left(\bar{v}(t',P)\, \tilde{g}(t',P,a',s)\right) + \partial_{a'}\tilde{g}(t',P,a',s) = 0 . \quad (3.8)$$

Remarque 3.12. *Nous avons $\theta(t,P(t)) = \theta'(t',P(t'))$. Nous utilisons la définition particulaire du temps d'attente donnée par (3.2). Alors*

$$\theta_i\left(t',P_{i,f}(t')\right) = \frac{1}{T_f}\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{s_k}{D'_j}+L'_j\right)\mathbb{1}_{P_{k,f}(t')\in]P_i(t'),j[}\right]\mathbb{1}_{P_{i,f}(t')\in[j-1,j[}.$$

Quand $\varepsilon \to 0$, alors $N \to \infty$, et puisque g_ε^f est la densité de probabilité des trames appartenant au flot f, nous avons, $\forall i$,

$$\frac{1}{T_f}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{P_{k,f}(t')\in]P_{i,f}(t'),j[} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{P_{i,f}(t')}^{j}\int_{a',\theta',s} g_\varepsilon^f(t',P,a',\theta',s)\,da'\,d\theta'\,ds\,dP.$$

D'où

$$\theta'_i\left(t',P_{i,f}(t')\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left[\int_{P_{i,f}(t')}^{j}\int_{a',\theta',s}\left(\frac{s}{D'_j}+L'_j\right) g_\varepsilon^f(t',P,a',\theta',s)\,da'\,d\theta'\,ds\,dP\right]\mathbb{1}_{P_{i,f}(t')\in[j-1,j[}.$$

Si nous définissons

$$\bar{\theta}(t,P_{i,f}(t)) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left[\int_{P_{i,f}(t')}^{j}\int_{a',\theta',s}\left(\frac{s}{D'_j}+L'_j\right) g(t',P,a',\theta',s)\,da'\,d\theta'\,ds\,dP\right]\mathbb{1}_{P_{i,f}(t')\in[j-1,j[},$$

nous pouvons alors écrire que $\theta'_i\left(t',P_{i,f}(t')\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \bar{\theta}(t,P_{i,f}(t))$ au sens faible-. Ainsi,*

$$\begin{aligned}\langle g_\varepsilon^f(t'),\phi\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi(P_{i,f}(t'),a'_i(t'),\theta'_i(t',P_{i,f}(t')),s_i)\,\mathbb{1}_{P_{i,f}(t')\in f/f\in VL_v}\\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \langle g(t'),\phi\rangle = \langle \tilde{g}(t')\,\delta_{\theta'(t',P)=\bar{\theta}(t',P)},\phi\rangle\end{aligned}$$

A partir de maintenant, nous omettons les 'primes' sur les variables adimensionnées pour alléger les notations, mais gardons tout de même l'indice f sur la position afin de ne pas oublier cette dépendance de la position, qui est toujours définie sur un flot donné. Nous notons donc la position P_f.

III MODÈLE FLUIDE

III.1 Définition des moments

Les moments de la densité de probabilité sont définis pour chaque flot f avec $f \in \{1,..,F_v\}$. La densité de trames n^f, la taille moyenne des trames (ou densité de quantité de trames) ρ^f et l'âge moyen des trames $(n\bar{a})^f$ sont définis grâce aux définitions suivantes :

$$n^f(t,P_f) = \int_{a,s}\tilde{g}(t,P_f,a,s)\,da\,ds, \tag{3.9}$$

$$\rho^f(t,P_f) = \int_{a,s} s\,\tilde{g}(t,P_f,a,s)\,da\,ds, \tag{3.10}$$

$$(n\bar{a})^f(t,P_f) = \int_{a,s} a\,\tilde{g}(t,P_f,a,s)\,da\,ds,. \tag{3.11}$$

Remarque 3.13. *S'il n'y a pas de variation sur la taille des trames, ce qui est très courant pour des réseau AFDX, alors* $\rho^f(t,P) = n^f(t,P)\,s$. *Ici, nous gardons possible la variation sur la taille des trames, et donc* $\rho^f(t,P) = n^f(t,P)\,\bar{s}^f$, *avec* $\bar{s}^f$ *la taille moyenne des trames dans le flot* f.

Le temps d'attente moyen des trames dans une mémoire tampon peut alors être réécrit en injectant ces définitions des moments dans (3.7). Il vient

$$\bar{\theta}(t,P_f) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left[\left(\int_{P_f}^{j} \frac{1}{D_j} \rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x)\, dx \right) \mathbb{1}_{P_f \in [j-1,j[} \right] \tag{3.12}$$

ainsi que la vitesse moyenne des trames dans un commutateur et la position associées :

$$\bar{v}(t,P_f) = \frac{j-P_f}{\bar{\theta}(t,P_f)} \mathbb{1}_{P_f \in [j-1,j[}, \text{ avec } P_f(t) = \int_0^t \bar{v}(w,P_f(w))\, dw. \tag{3.13}$$

Avant d'exprimer les équations d'évolution correspondant aux dynamiques de n^f, ρ^f et $(n\bar{a})^f$, nous étudions le comportement de la vitesse à la sortie d'un commutateur $[j-1,j[$ donné. En effet, lorsque $P_f \to j$, la vitesse est définie comme le ratio de deux fonctions tendant vers zéro.

Lemme 3.3. *Supposons que* n^f *et* $\rho^f \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1,j[\right)\right)$, $\forall j \in \{1,..,J\}$.
Alors,

$$\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\frac{1}{D_j} (\rho^f \bar{v})(t,j^-) + L_j\, (n^f \bar{v})(t,j^-) \right) = 1. \tag{3.14}$$

Démonstration. Soit $\eta > 0$. Nous étudions $\bar{v}(t,j-\eta)$ avec $\eta \to 0^+$.

$$\bar{v}(t,j-\eta) = \frac{\eta}{\bar{\theta}(t,j-\eta)} = \frac{\eta}{\displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \int_{j-\eta}^{j} \left(\frac{1}{D_j} \rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x) \right) dx}.$$

D'après l'hypothèse de régularité sur n^f et ρ^f, le temps d'attente moyen et donc la vitesse moyenne sont assez régulières au voisinage de la position $P = j$ pour étudier leur comportement au voisinage de $P_f = j^-$. Pour cela, nous définissons $\eta > 0$ et étudions $\bar{v}(t,j-\eta)$ avec $\eta \to 0^+$. Ce qui donne

$$\bar{v}(t,j-\eta) \underset{\eta \to 0^+}{\to} \frac{1}{\displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\frac{1}{D_j} \rho^f(t,j^-) + L_j n^f(t,j^-) \right)}.$$

□

Remarque 3.14. *Si nous nous intéressons au flux sortant d'un commutateur, le flux de trames sortant est égal au débit maximal* D_j *de ce commutateur, auquel est retirée la partie correspondant aux trames qui ne sont pas sorties pendant le temps de latence.*

En multipliant (3.14) *par* D_j, *nous obtenons une relation entre le flux de trames d'un* virtual link *sortant d'un commutateur et son débit "physique"* D_j *:*

$$\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j (\rho^f \bar{v})(t,j^-) = D_j - \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j D_j L_j (n^f \bar{v})(t,j^-).$$

Le comportement des commutateurs dans notre modèle est donc cohérent avec un commutateur dont la vitesse d'émission est maximale tant que le commutateur n'est pas vide. En conséquence, la vitesse définie par (3.13) *est bornée lorsque* $P_f \to j$ *quand* $n^f > 0$.

III.2 Système fluide

Afin d'obtenir les équation fluides vérifiées par n^f, ρ^f et $(n\bar{a})^f$, il suffit de tester successivement (3.8) contre $\phi \equiv \{1, s, a\}$. En intégrant ces trois équations sur s, a et θ, nous aboutissons aux équations fluides recherchées sur les variables macroscopiques n^f, ρ^f et $\bar{a}^f$. Le système fluide décrivant la dynamique des trames dans un commutateur est donc décrit, dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^+ \times [0, J])$, par le système

$$\begin{cases} \partial_t n^f + \partial_{P_f}(n^f \bar{v}) = 0\,, \\ \partial_t \rho^f + \partial_{P_f}(\rho^f \bar{v}) = 0\,, \\ \partial_t (n\bar{a})^f + \partial_{P_f}\left(\bar{v}\,(n\bar{a})^f\right) = n^f\,, \\ \bar{\theta}(t, P_f) = \displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left(\int_{P_f}^{j} \frac{1}{D_j} \rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x)\, dx \right) \mathbb{1}_{P_f \in [j-1, j[}\,, \\ \bar{v}(t, P_f) = \dfrac{j - P_f}{\bar{\theta}(t, P_f)} \mathbb{1}_{P_f \in [j-1, j[}\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

Ce système d'équations est non linéaire. En effet, les quantités n^f, ρ^f et $\bar{v}$ sont couplées via le temps d'attente dans un commutateur : la vitesse moyenne $\bar{v}$ dans un commutateur dépend de la charge de ce commutateur, c'est-à-dire des quantités n^f et ρ^f de tous les flots le traversant, qui se propagent elles mêmes à la vitesse $\bar{v}$.

Nous posons n^f, ρ^f, $(n\bar{a})^f$, $\bar{\theta}$ et $\bar{v} \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1, j[\right)\right)$, $\forall j \in \{1, .., J\}$. Les conditions initiales qui leur sont associées sont notées :

$$n^f(0,\cdot) = n_0\,,\ \rho^f(0,\cdot) = \rho_0\,,\ \bar{v}(0,\cdot) = \bar{v}_0\,,\ \bar{\theta}(0,\cdot) = \bar{\theta}_0\,,\ \bar{a}^f(0,\cdot) = \bar{a}_0\,. \tag{3.16}$$

Les conditions au bord (du commutateur $[j-1, j[$, avec $j \in \{1, .., J\}$) sont notées

$$n^f(\cdot, (j-1)^+) = n^{in},\ \rho^f(\cdot, (j-1)^+) = \rho^{in},\ \bar{v}(\cdot, (j-1)^+) = \bar{v}^{in},\ \bar{\theta}(\cdot, (j-1)^+) = \bar{\theta}^{in},\ \bar{a}^f(\cdot, (j-1)^+) = \bar{a}^{in}. \tag{3.17}$$

De plus, nous introduisons n^{min} et ρ^{min} des constantes positives. Et posons

$$\bar{\theta}^{min}(P_f) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} (j - P_f) \left(\frac{1}{D_j} \rho^{min} + L_j\, n^{min} \right) \mathbb{1}_{P_f \in [j-1, j[}$$

Cherchons maintenant les équations de conservation vérifiées par $\bar{\theta}(t, P_f)$ et $\bar{v}(t, P_f)$.

Lemme 3.4. *Soient* n^f, $\rho^f \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1, j[\right)\right)$, $\forall j \in \{1, .., J\}$. *Alors, tant que* $\bar{\theta} > 0$, *les équations de conservation relatives au temps d'attente moyen* $\bar{\theta}$ *et à la vitesse moyenne* $\bar{v}(t, P)$ *des trames dans un commutateur* $[j-1, j[$, $j \in \{1, .., J\}$ *sont données au sens des distributions par les équations*

$$\partial_t \bar{\theta} + \bar{v}\, \partial_{P_f} \bar{\theta} = -1 \quad \textit{et} \quad \partial_t \bar{v} + \bar{v}\, \partial_{P_f} \bar{v} = 0\,.$$

Démonstration.

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\theta}(t,P_f(t))\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left(\frac{1}{D_j}\int_{P_f(t)}^{j}\rho^f(t,x)\,dx + L_j\int_{P_f(t)}^{j} n^f(t,x)\,dx\right)\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\right]$$
$$= \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left[\frac{1}{D_j}\left(\int_{P_f(t)}^{j}\partial_t\rho^f(t,x)\,dx - (\rho^f\bar{v})(t,P_f)\right)\right.$$
$$\left.+L_j\left(\int_{P_f(t)}^{j}\partial_t n^f(t,x)\,dx - (n^f\bar{v})(t,P_f)\right)\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\right]$$

En utilisant les équations fluides vérifiées par n^f et ρ^f,

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\theta}(t,P_f(t))\right] = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j\left(-\frac{1}{D_j}(\rho^f\bar{v})(t,j) - L_j(n^f\bar{v})(t,j)\right)\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}$$

Puis nous nous servons de (3.14),

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\theta}(t,P_f(t))\right] = -1\,.$$

Quant à trouver l'équation vérifiée par la vitesse moyenne $\bar{v}$, les relations suivantes

$$\partial_t\bar{\theta} = -\frac{\bar{\theta}}{\bar{v}}\partial_t\bar{v} \qquad \text{et} \qquad \partial_{P_f}\bar{\theta} = -\frac{1}{\bar{v}} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{v}}\partial_{P_f}\bar{v},$$

nous permettent d'obtenir, puisque $\bar{\theta} > 0$,

$$\partial_t\bar{v} = -\frac{\bar{v}}{\bar{\theta}}\partial_t\bar{\theta} = -\frac{\bar{v}}{\bar{\theta}}\left(-1 - \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{\theta}\right) = -\bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{v}\,.$$

□

Lemme 3.5. ***Equivalence entre les systèmes fluides*** (3.15) ***et*** (3.18)
Soient n^f, ρ^f, $\bar{v}$, $\bar{\theta}$ et $\bar{a}^f \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1,j[\right)\right)$, $\forall j \in \{1,..,J\}$. De plus, supposons que $n^f(t,P_f) \geq n^{min}$ et $\rho^f(t,P_f) \geq \rho^{min}$, $\forall (t,P_f) \in \mathbb{R}^+ \times [j-1,j]$. Alors le système (3.15) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \partial_t n^f + \partial_{P_f}(n^f\bar{v}) = 0\,, \\ \partial_t\rho^f + \partial_{P_f}(\rho^f\bar{v}) = 0\,, \\ \partial_t\bar{a}^f + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{a}^f = 1\,, \\ \partial_t\bar{\theta} + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{\theta} = -1\,, \\ \partial_t\bar{v} + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{v} = 0\,, \end{cases} \tag{3.18}$$

avec les conditions initiales données, $\forall P_f \in [j-1,j[$, par

$$\bar{v}_0(P_f) = \frac{j-P_f}{\bar{\theta}_0(P_f)} \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_0(P_f) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left(\int_{P_f}^{j}\frac{1}{D_j}\rho_0(x) + L_j\,n_0(x)\,dx\right)\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\,, \tag{3.19}$$

avec n_0, $\rho_0 \in \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1,j[)$. Et les conditions limites données, $\forall t \geq 0$, par

$$\bar{v}^{in}(t) = \frac{1}{\bar{\theta}^{in}(t)} \quad \text{et} \quad \bar{\theta}^{in}(t) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j\left[\int_0^t\left(\frac{1}{D_j}\psi(s) + L_j\,\chi(s)\right)ds + \int_{j-1}^{\mathscr{P}(t)}\left(\frac{1}{D_j}\rho_0(y) + L_j\,n_0(y)\right)dy\right]. \tag{3.20}$$

Où les fonctions $\chi, \psi \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ *représentent les flux sortants du commutateur précédent* $[j-2, j-1[$, *avec* $j \in \{2,..,J\}$, *et sont définies par :*

$$\chi = (n^f \bar{v})(\cdot, (j-1)^-), \quad \psi = (\rho^f \bar{v})(\cdot, (j-1)^-), \tag{3.21}$$

et où $\mathscr{P}(t)$ *est défini par* $\mathscr{P}(t) + t\,\bar{v}_0(\mathscr{P}(t)) = j$.

Remarque 3.15. *Les flux sortants du commutateur* $[j-2, j-1[$, *avec* $j \in \{2,..,J\}$, *sont exactement les flux entrants dans le commutateur* $[j-1, j[$, *avec* $j \in \{1,..,J\}$. *Ainsi,*

$$\chi = n^{in}\bar{v}^{in}, \quad \psi = \rho^{in}\bar{v}^{in}.$$

Démonstration. Nous allons montrer l'équivalence en deux étapes.

— Montrons que si nous avons le système (3.15), alors nous avons aussi le système (3.18), muni des conditions limites (3.20).

Puisque n^f et ρ^f sont supposées suffisamment régulières et que les conditions $n^f(t,P_f) \geq n^{min}$ et $\rho^f(t,P_f) \geq \rho^{min}$ nous assurent que $\bar{\theta}(t,P_f) \geq \bar{\theta}^{min}(P_f) > 0$, $\forall (t,P_f) \in \mathbb{R}^+ \times [j-1,j]$, le lemme 3.4 peut être appliqué pour obtenir les équations de transport vérifiées par $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$. Alors, $\bar{v}$ vérifie l'équation de Burgers et est constant le long de ses caractéristiques. Alors, ρ^f et n^f se transportent le long de ces caractéristiques et vérifient donc des équations de transport de coefficient $\bar{v}$. Pour obtenir l'équation sur $\bar{a}^f$, nous remarquons que

$$\begin{cases} \partial_t n^f + \partial_{P_f}(n^f \bar{v}) = 0 \\ \partial_t (n\bar{a})^f + \partial_{P_f}\left(\bar{v}\,(n\bar{a})^f\right) = n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_t n^f + \partial_{P_f}(n^f \bar{v}) = 0 \\ \partial_t \bar{a}^f + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{a}^f = 1 \end{cases}$$

Pour retrouver les conditions limites, les définitions de la vitesse et du temps d'attente moyens données dans le système (3.15) nous permettent d'écrire

$$\bar{v}^{in}(t) = \frac{1}{\bar{\theta}^{in}(t)} \quad \text{avec} \quad \bar{\theta}^{in}(t) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \int_{j-1}^{j} \left(\frac{1}{D_j}\rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x)\right) dx.$$

Or, les quantités $\rho^f(t,x)$ et $n^f(t,x)$, présentes dans la mémoire tampon $[j-1, j[$ au temps t peuvent être ramenées à leurs conditions initiales ou aux flux entrants dans le commutateur.

En effet, si ces quantités étaient présentes dans la mémoire tampon au temps initial (c'est-à-dire si $j-1+t\bar{v}_0(j-1) \leq x \leq j$), alors comme $\rho^f(t,x)$ et $n^f(t,x)$ vérifient des équations de transport de coefficient $\bar{v}$, nous pouvons écrire

$$\int_{j-1+t\bar{v}_0(j-1)}^{j} \left(\frac{1}{D_j}\rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x)\right) dx = \int_{j-1}^{\mathscr{P}(t)} \left(\frac{1}{D_j}\rho_0(y) + L_j\, n_0(y)\right) dy,$$

avec $\mathscr{P}(t)$ défini par $\mathscr{P}(t) + t\,\bar{v}_0(\mathscr{P}(t)) = j$.

Au contraire, si ces quantités n'étaient pas présentes dans la mémoire tampon au temps initial, c'est-à-dire si $j-1 \leq x \leq j-1+t\bar{v}_0(j-1)$, c'est qu'elles y sont rentrées pendant l'intervalle de temps $]0,t]$, en quantités que nous pouvons connaître grâce à la valeur des flux qui sont entrés dans le commutateur. Ainsi, nous pouvons ramener ces quantités aux temps $s \in]0,t]$ où les caractéristiques, étant au point (t,x), croisent la droite $P = \{j-1\}$, c'est-à-dire lorsque $x - (t-s)\bar{v}(s,(j-1)^+) = j-1$. Nous définissons alors l'application ξ :

$s = t - \dfrac{x-(j-1)}{\bar{v}(t,x)} \longrightarrow x = j-1+(t-s)\,\bar{v}(s,(j-1)^+)$. Alors, puisque $n\bar{v}(t,(j-1)^+)) = \psi(t)$ et $\rho\,\bar{v}(t,(j-1)^+)) = \chi(t)$, nous avons

$$\int_{j-1}^{j-1+t\bar{v}_0(j-1)} \left(\frac{1}{D_j}\rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x)\right) dx = \int_{\xi(t)}^{\xi(0)} \left(\frac{1}{D_j}\rho(t,x) + L_j\, n(t,x)\right) dx$$
$$= \int_0^t \left(\frac{1}{D_j}\chi(s) + L_j\,\psi(s)\right) ds.$$

Nous trouvons la condition limite pour $\bar{\theta}$:

$$\bar{\theta}^{in}(t) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left[\int_0^t \left(\frac{1}{D_j}\psi(s) + L_j\,\chi(s)\right) ds + \int_{j-1}^{\mathscr{P}(t)} \left(\frac{1}{D_j}\rho_0(y) + L_j\, n_0(y)\right) dy\right].$$

— Montrons que si nous avons le système (3.18), munies des conditions limites (3.20), alors nous avons aussi le système (3.15).

Si $\bar{v}$ vérifie l'équation de Burgers, alors il est constant le long de ses caractéristiques et $\bar{v}(t,P_f)$ est égal soit à ses conditions initiales, soit à ses conditions limites. Nous avons vu précédemment que ces deux conditions peuvent être exprimées via les quantités ρ_0 et n_0 ou les flux χ et ψ. En utilisant les équations de transport vérifiées par ρ^f et n^f, nous ramenons les quantités ρ^f et n^f au temps t et retrouvons les définitions de $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$ du système (3.15).

□

Remarque 3.16. *Pour obtenir le système fluide dans l'ensemble d'un flot, il suffit de reprendre la démonstration du lemme 3.4 en prenant en compte le terme de saut $\theta_j^{ref}(t)$ du temps d'attente dans l'équation (3.4).*

IV ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE FLUIDE

Dans cette section, nous allons maintenant étudier si le problème fluide (3.15) est bien posé. Pour cela, nous procédons en deux étapes. Tout d'abord nous montrons l'existence de solutions uniques à ce système fluide à l'intérieur d'un commutateur (Sect. IV.1). Dans un second temps, nous montrons cela sur tout le flot (Sect. IV.2).

IV.1 Analyse mathématique dans un commutateur

Notre objectif dans cette partie est de montrer l'existence d'une unique solution au système (3.15) dans un commutateur $[j-1, j[$, avec $j \in \{1,..,J\}$. Avec le lemme d'équivalence 3.5, nous avons montré l'équivalence entre les systèmes (3.15) et (3.18), lorsque ce dernier est accompagné de conditions initiales et limites adaptées. Plutôt que de montrer l'existence du premier système fluide couplé, où la vitesse moyenne s'exprime en fonction de n^f et de ρ^f, le lemme d'équivalence nous a permis d'obtenir une équation régissant la dynamique de $\bar{v}$.

Afin de montrer le caractère bien posé de notre modèle, nous allons étudier l'existence de solutions pour ce second système. Nous allons utiliser la méthode des caractéristiques afin d'étudier l'existence de solutions pour $\bar{v}$. Une fois l'existence de $\bar{v}$ obtenue, nous en déduirons

l'existence de solutions aux équations de conservations régissant la dynamique de n^f et de ρ^f. Montrer l'existence et l'unicité des quantités $\bar{a}^f$ et $\bar{\theta}$ ne présentera pas de difficulté supplémentaire. Ceci fait, nous utiliserons le résultat du lemme 3.5 pour conclure sur le caractère bien posé du système fluide original (3.15).

Le lemme suivant montre l'existence d'une unique solution à l'équation sur $\bar{v}(t, P_f)$ lorsque $(t, P) \in [j-1, j[\times[0, T]$.

Lemme 3.6. ***Existence d'une solution $\bar{v}$ dans un commutateur***
Soit l'équation

$$\partial_t \bar{v} + \bar{v}\,\partial_{P_f} \bar{v} = 0\,, \tag{3.22}$$

munies des conditions initiales et limites définies par les formules (3.19) et (3.20). Afin de garantir la régularité de ces conditions, nous supposons que $n^f(\cdot, P_f)$, $\rho^f(\cdot, P_f) \in \mathbb{W}^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^+\right)$, que n_0, $\rho_0 \in \mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1, j[\right)$, $\forall j \in \{1,..J\}$ et que χ, $\psi \in \mathbb{W}^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^+\right)$. De plus, nous supposons que $n^f(t, P_f) \geq n^{min}$ et $\rho^f(t, P_f) \geq \rho^{min}$, $\forall (t, P_f) \in \mathbb{R}^+ \times [j-1, j]$ et qu'il existe χ^{min} et ψ^{min} des constantes positives telles que $\chi^f(t) \geq \chi^{min}$ et $\psi^f(t) \geq \psi^{min}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Alors, $\exists T > 0$ tel qu'il existe une unique solution $\bar{v}(t, P_f) \in \mathbb{L}^\infty\left([0, T], \mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1, j[\right)\right)$, $\forall j \in \{1,..J\}$ à l'équation (3.22).

Démonstration. Les caractéristiques relatives à $\bar{v}$ sont des droites définies par

$$\frac{dX}{dt} = \bar{v}(t, X(t)) \text{ avec } t \in [0, T]\,, \tag{3.23}$$

avec les conditions initiales donnée par

$$X(0, 0, P_0) = P_0 \text{ avec } P_0 \in [j-1, j[\,,$$

et les conditions limites

$$X(\tau, \tau, j-1) = j-1 \text{ avec } \tau \in [0, t[\,.$$

L'objectif de cette preuve est de montrer que ces droites caractéristiques ne se croisent pas à l'intérieur du commutateur $[j-1, 1[$ considéré. Pour cela, nous distinguons deux domaines distincts dans l'ensemble $A = \left\{(t, P_f) \in [0, T] \times [j-1, j[\right\}$ avec T le temps d'attente total dans ce commutateur, défini par $X(T, 0, j-1) = j$. Ces domaines sont définis par :

— $A1 = \left\{(t, P_f) \in [0, T] \times [j-1, j[\,/\, P_f \geq X(t, 0, j-1)\right\}$. Ce domaine concerne les trames présentes dans la mémoire tampon au temps initial $t = 0$.

— $A2 = \left\{(t, P_f) \in [0, T] \times [j-1, j[\,/\, P_f \leq X(t, 0, j-1)\right\}$. Dans ce domaine, nous connaissons les flux entrants en $j-1$, pour les trames qui sont entrées dans le commutateur après le temps initial.

L'absence de croisement entre les caractéristiques de chacun de ces domaines nous permettra de conclure sur l'existence de solutions à l'équation de Burgers. Pour cela, nous résoudrons le problème séparément selon les ensembles introduits précédemment.

— Démonstration dans $A1$:

Pour cela, nous posons deux droites caractéristiques qui ont un pied de caractéristique (et appartenant donc à $A1$). Nous les notons $X1$ et $X2$. Elles sont définies par

$$\begin{cases} \dfrac{dX1}{dt} = \bar{v}(t, X1(t)), \\ X1(0, 0, P1) = P1\,, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{dX2}{dt} = \bar{v}(t, X2(t)), \\ X2(0, 0, P2) = P2\,. \end{cases}$$

Nous posons $j-1 \leq P1 < P2 < j$.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que ces caractéristiques se croisent au point $(\hat{t}, \hat{P}) \in A1$, comme représenté sur la figure 3.4.

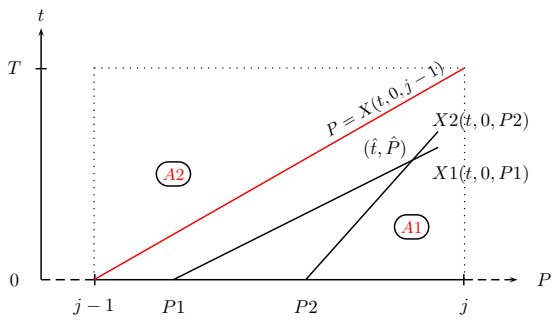


FIGURE 3.4 – Hypothèse dans le domaine $A1$: les caractéristiques X1 et X2 se coupent au point $(\hat{t}, \hat{P})$.

D'après les définitions de ces caractéristiques et puisque $\bar{v}$ est constante le long de chacune d'elles sur $[0, \hat{t}]$,

$$X1(\hat{t}, 0, P1) = P1 + \bar{v}_0(P1)\,\hat{t} = \hat{P} = P2 + \bar{v}_0(P2)\,\hat{t} = X2(\hat{t}, 0, P2)\,,$$

et

$$\hat{t} = \frac{P2 - P1}{\bar{v}_0(P1) - \bar{v}_0(P2)}\,.$$

En utilisant la définition de la vitesse moyenne (3.13) et en remarquant que les temps d'attente aux points P1 et P2 peuvent être exprimés l'un par rapport à l'autre en posant $\bar{\theta}_0(P2) = \bar{\theta}_0(P1) - \alpha$ avec $\alpha = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left(\int_{P1}^{P2} \frac{1}{Dj}\, \rho_0(x) + L_j\, n_0(x)\, dx \right) \mathbb{1}_{P1,P2 \in [j-1,j[}$, nous obtenons la relation

$$\bar{v}_0(P1) - \bar{v}_0(P2) = \frac{P2 - P1}{\bar{\theta}_0(P2)} - \frac{\alpha\,(j - P1)}{\bar{\theta}_0(P1)\,\bar{\theta}_0(P2)}\,.$$

Or, $\alpha \geq 0$ donc $\bar{v}_0(P1) - \bar{v}_0(P2) \leq \dfrac{P2 - P1}{\bar{\theta}_0(P2)}$. En reportant cette inégalité dans l'expression de $\hat{t}$ puis de $\hat{P}$, nous montrons que

$$\hat{P} = P2 + \bar{v}_0(P2)\,\hat{t} \geq P2 + \bar{v}_0(P2)\,\bar{\theta}_0(P2) \geq j.$$

Nous arrivons à un résultat incohérent avec l'hypothèse $\hat{P} < j$ et pouvons donc conclure que les droites caractéristiques de $\bar{v}$ ne se croisent pas dans le domaine $A1$. Nous pouvons alors en déduire qu'il existe un unique $\mathscr{P}(t)$, $\forall\, t \in [0, T]$.

— Démonstration dans $A2$:

La seconde étape de cette démonstration consiste à montrer que des chocs ne peuvent avoir lieu entre les caractéristiques appartenant au domaine $A2$. Nous raisonnons encore par l'absurde en supposant deux droites caractéristiques $X1$ et $X2$ qui se coupent au point $(\tilde{t}, \tilde{P}) \in A2$ et qui sont définies par

$$\begin{cases} \dfrac{dX1}{dt} = \bar{v}(t, X1(t)), \\ X1(\tau_1, \tau_1, j-1) = j-1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{dX2}{dt} = \bar{v}(t, X2(t)), \\ X2(\tau_2, \tau_2, j-1) = j-1, \end{cases}$$

avec $\tau_i \in]0, t[$, $i \in \{1,2\}$ le temps où la caractéristique X_i coupe la droite $P_f = \{j-1\}$, et avec $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < T$. La figure 3.5 schématise ces hypothèses.

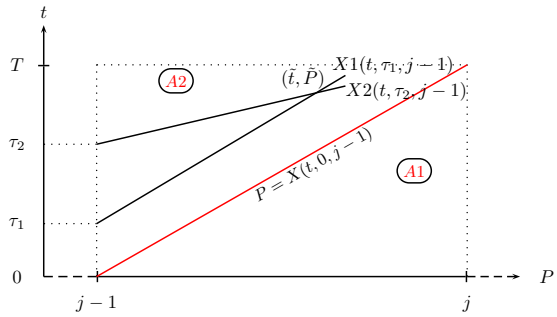


FIGURE 3.5 – Hypothèse dans le domaine $A2$: les caractéristiques X1 et X2 se coupent au point $(\tilde{t}, \tilde{P})$.

En utilisant les définitions des caractéristiques et le fait que $\bar{v}$ est constant le long de ses caractéristiques, nous obtenons

$$X1(\tilde{t}, \tau_1, j-1) = j-1 + \bar{v}(\tau_1, j-1)\,(\hat{t} - \tau_1) = \hat{P} = j-1 + \bar{v}(\tau_2, j-1)\,(\hat{t} - \tau_2) = X2(\hat{t}, \tau_2, j-1)\,.$$

Donc

$$\tilde{t} = \frac{\tau_1\,\bar{v}(\tau_1, j-1) - \tau_2\,\bar{v}(\tau_2, j-1)}{\bar{v}(\tau_1, j-1) - \bar{v}(\tau_2, j-1)} = \tau_1 + \frac{(\tau_1 - \tau_2)\,\bar{v}(\tau_2, j-1)}{\bar{\theta}(\tau_1, j-1) - \bar{\theta}(\tau_2, j-1)}\,.$$

Nous utilisons les conditions limites de $\bar{\theta}(\tau_i, j-1)$, avec $i \in \{1,2\}$:

$$\bar{\theta}(\tau_i, j-1) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left[\int_0^{\tau_i} \left(\frac{1}{D_j}\,\chi(s) + L_j\,\psi(s) \right) ds + \int_{j-1}^{\mathscr{P}(\tau_i)} \left(\frac{1}{D_j}\,\rho_0(y) + L_j\,n_0(y) \right) dy \right].$$

avec $\mathscr{P}(\tau_i)$ défini par $\mathscr{P}(\tau_i) + \tau_i\,\bar{v}_0(\mathscr{P}(\tau_i)) = j$.
Nous pouvons maintenant calculer $\bar{\theta}(\tau_1, j-1) - \bar{\theta}(\tau_2, j-1)$.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\tau_1, j-1) - \bar{\theta}(\tau_2, j-1) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \Bigg[& \left\{ \int_0^{\tau_1} - \int_0^{\tau_2} \right\} \left(\frac{1}{D_j}\,\psi(s) + L_j\,\chi(s) \right) ds \\ & + \left\{ \int_{j-1}^{\mathscr{P}(\tau_1)} - \int_{j-1}^{\mathscr{P}(\tau_2)} \right\} \left(\frac{1}{D_j}\,\rho_0(y) + L_j\,n_0(y) \right) dy \Bigg]. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que les caractéristiques qui passent par les points $\mathscr{P}(\tau_1)$ et $\mathscr{P}(\tau_2)$ appartiennent au domaine $A1$. Elles ne se coupent donc pas, comme démontré dans la première partie de cette démonstration. Et puisque $\tau_2 > \tau_1$, il vient $\mathscr{P}(\tau_2) < \mathscr{P}(\tau_1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\tau_1, j-1) - \bar{\theta}(\tau_2, j-1) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \Bigg[& - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{1}{D_j}\,\psi(s) + L_j\,\chi(s) \right) ds \\ & + \int_{\mathscr{P}(\tau_2)}^{\mathscr{P}(\tau_1)} \left(\frac{1}{D_j}\,\rho_0(y) + L_j\,n_0(y) \right) dy \Bigg]. \end{aligned}$$

Nous remarquons alors que le second terme peut être reformulé comme le flux quittant le commutateur entre les temps τ_1 et τ_2 :

$$\int_{\mathscr{P}(\tau_2)}^{\mathscr{P}(\tau_1)} \left(\frac{1}{D_j} \rho_0(y) + L_j\, n_0(y) \right) dy = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{1}{D_j} (\rho^f \bar{v})(s, j^-) + L_j\, (n^f \bar{v})(s, j^-) \right) ds.$$

Nous reconnaissons dans le terme de droite la relation (3.14). Alors,

$$\bar{\theta}(\tau_1, j-1) - \bar{\theta}(\tau_2, j-1) \leq \tau_2 - \tau_1,$$

et nous en concluons que

$$\tilde{t} = \tau_1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\bar{\theta}(\tau_2, j-1) - \bar{\theta}(\tau_1, j-1)} \bar{\theta}(\tau_1, j-1) \geq \tau_1 + \bar{\theta}(\tau_1, j-1) = T.$$

Nous arrivons à un résultat incompatible avec l'hypothèse $\tilde{t} < T$ et concluons sur l'absence de choc entre les droites caractéristiques de $\bar{v}$ dans le domaine $A2$.

Nous avons montré l'existence d'une unique solution $\bar{v} \in \mathbb{L}^\infty\big([0,T], \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1, j[)\big)$ à l'intérieur d'un commutateur. □

Remarque 3.17. *Remarquons que le temps caractéristique d'existence T d'une solution est exactement le temps total d'attente dans le commutateur* $\dfrac{1}{\bar{v}(t, j-1)} = \bar{\theta}^j_{ref}(t) \geq \bar{\theta}^{min} > 0$.

Nous en déduisons l'existence des solutions n^f et ρ^f à leurs équations de conservation respectives.

Lemme 3.7. ***Existence de solutions n^f et ρ^f dans un commutateur***
Soient T le temps d'existence du lemme 3.6 et $\bar{v}(t, P_f) \in \mathbb{L}^\infty\big([0,T], \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1, j[)\big)$. Nous considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t n^f + \partial_{P_f}(n^f \bar{v}) = 0, \\ \partial_t \rho^f + \partial_{P_f}(\rho^f \bar{v}) = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

muni des conditions initiales $n_0, \rho_0 \in \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1, j[)$, $\forall j \in \{1, ..J\}$ et des conditions limites n^{in} et $\rho^{in} \in \mathbb{W}^{1,\infty}([0,T])$. De plus, nous supposons que $n^f(t, P_f) \geq n^{min}$ et $\rho^f(t, P_f) \geq \rho^{min}$, $\forall (t, P_f) \in \mathbb{R}^+ \times [j-1, j]$. Alors, les solutions n^f, $\rho^f \in \mathbb{L}^\infty\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1, j[)\big)$ au système (3.24) existent et sont uniques.

Démonstration. Puisque que $\bar{v}$ existe et est assez régulière, nous pouvons définir les caractéristiques relatives à n^f et ρ^f.

$$\frac{dX}{dt} = \bar{v}(t, X(t)) \text{ pour } t \in [0, T].$$

Nous définissons le pied de la caractéristique

$$X(0, 0, P_0) = P_0 \text{ avec } P_0 \in [j-1, j[.$$

Puisque $\bar{v} > 0$, nous définissons la condition limite

$$X(\tau, \tau, j-1) = j-1 \text{ avec } \tau \in [0, t[.$$

Si nous utilisons les conditions initiales, c'est-à-dire si $P_f = X(t,0,P_0) \geq X(t,0,j-1)$, nous obtenons

$$n^f(t,P_f) = n_0(P_0)\ \exp\left(-\int_0^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,0,P_0))\,ds\right),$$
$$\rho^f(t,P_f) = \rho_0(P_0)\ \exp\left(-\int_0^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,0,P_0))\,ds\right).$$

Si nous utilisons les conditions limites, c'est-à-dire si $P_f = X(t,\tau,j-1) \leq X(t,0,j-1)$, nous obtenons

$$n^f(t,P_f) = n^{in}(\tau)\ \exp\left(-\int_\tau^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,\tau,j-1))\,ds\right),$$
$$\rho^f(t,P_f) = \rho^{in}(\tau)\ \exp\left(-\int_\tau^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,\tau,j-1))\,ds\right).$$

Il existe donc une unique solution (n^f,ρ^f) au système (3.24) pour $t \in [0,T]$ et $P_f \in [j-1,j[$. De plus, n^f et $\rho^f \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{W}^{1,\infty}\left([j-1,j[\right)\right)$. □

Remarque 3.18. *Remarquons ici qu'à la suite de ce théorème, et grâce au fait que $n^f(t,P_f) \geq n^{min}$ et $\rho^f(t,P_f) \geq \rho^{min}$, $\forall (t,P_f) \in \mathbb{R}^+ \times [j-1,j]$, nous pouvons tirer un principe du maximum pour $1/n^f$ et $1/\rho^f$. Alors*

— *si $P_f = X(t,0,P_0) \geq X(t,0,j-1)$,*

$$\frac{1}{n^f(t,P_f)} \leq \frac{1}{n^{min}}\ \exp\left(\int_0^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,0,P_0))\,ds\right),$$
$$\frac{1}{\rho^f(t,P_f)} \leq \frac{1}{\rho^{min}}\ \exp\left(\int_0^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,0,P_0))\,ds\right).$$

— *si $P_f = X(t,\tau,j-1) \leq X(t,0,j-1)$,*

$$\frac{1}{n^f(t,P_f)} \leq \frac{1}{n^{min}}\ \exp\left(\int_\tau^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,\tau,j-1))\,ds\right),$$
$$\frac{1}{\rho^f(t,P_f)} \leq \frac{1}{\rho^{min}}\ \exp\left(\int_\tau^t \partial_{P_f}\bar{v}(s,X(s,\tau,j-1))\,ds\right).$$

De plus, dans le cas où $\bar{v}$ est plus régulier que supposé dans l'énoncé du théorème, il est alors possible d'alors obtenir une estimation plus fine pour $1/n^f$ et $1/\rho^f$, en majorant la divergence de la vitesse.

A partir de ces deux lemmes, nous pouvons conclure à l'existence, à l'intérieur de chaque commutateur, de solutions n^f, ρ^f et $\bar{v}$ au système fluide (3.18).

Théorème 3.8. ***Existence de solutions n^f, ρ^f et $\bar{v}$ à l'intérieur d'un commutateur***
Soit le système fluide

$$\begin{cases} \partial_t n^f + \partial_{P_f}(n^f\bar{v}) = 0, \\ \partial_t \rho^f + \partial_{P_f}(\rho^f\bar{v}) = 0, \\ \partial_t \bar{a}^f + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{a}^f = 1, \\ \partial_t \bar{\theta} + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{\theta} = -1, \\ \partial_t \bar{v} + \bar{v}\,\partial_{P_f}\bar{v} = 0, \end{cases}$$

muni des conditions initiales n_0, $\bar{v}_0$, $\rho_0 \in \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1,j[)$ *qui vérifient* (3.19) *et* $\bar{a}_0 \in \mathbb{W}^{1,\infty}([j-1,j[)$, *et des conditions initiales* $\bar{a}^{in}$, n^{in}, $\rho^{in} \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ *et* $\bar{v}^{in} \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ *qui vérifie* (3.20). *Supposons les flux entrants* χ, $\psi \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ *qui vérifient* (3.21). *De plus, nous supposons* $n^f(t,P_f) \geq n^{min}$, $\rho^f(t,P_f) \geq \rho^{min}$, $\forall (t,P_f) \in \mathbb{R}^+ \times [j-1,j]$ *et qu'il existe* χ^{min} *et* ψ^{min} *des constantes positives telles que* $\chi^f(t) \geq \chi^{min}$ *et* $\psi^f(t) \geq \psi^{min}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. *Alors il existe une unique solution* n^f, ρ^f, $\bar{v}$, $\bar{\theta}$, $\bar{a}^f$ *à ce système, pour tout* $P_f \in [j-1,j[$, *avec* $j \in \{1,..,J\}$, *et tout* $t \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. En combinant les résultats des lemmes 3.6 et 3.7, nous pouvons dire qu'il existe une unique solution fluide, dans $[0,T] \times [j-1,1[$, avec $T = \bar{\theta}^j_{ref}(t) \geq \bar{\theta}^{min} > 0$, au système (3.18), muni des conditions initiales (3.19) et des conditions limites (3.20). Afin de démontrer l'existence d'une solution pour $t \in \mathbb{R}^+$, nous prolongeons en temps le domaine $A = \{(t,P_f) \in [0,T] \times [j-1,j[\}$. Nous introduisons le domaine $B = \{(t,P_f) \in [T,2T] \times [j-1,j[\}$. Il est possible, pour ce domaine aussi, d'effectuer la même décomposition en deux domaines distincts de part et d'autre de la droite caractéristique $P_f = X(t,T,j-1)$. Et nous démontrons de la même manière qu'il existe un unique $\bar{v}$ (et donc n^f et ρ^f) dans B, et donc dans $A \cup B$. Puisque $T \geq \bar{\theta}^{min} > 0$, alors nous pouvons répéter ce processus indéfiniment. Pour conclure, il existe une unique solution au système (3.18) lorsque $P_f \in [j-1,j[$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. □

D'après le lemme d'équivalence 3.5, nous pouvons en déduire l'existence d'une unique solution au système fluide original (3.15).

IV.2 Analyse mathématique dans un flot

Lorsque $P_f \in [0,J]$, la vitesse $\bar{v}$ est continue par morceaux avec des discontinuités aux points $P_f = \{j\}$ avec $j \in \{1,..,J\}$. Ainsi, les caractéristiques ne peuvent être définies sur l'ensemble du flot au sens habituel. Le problème des équations de transport à coefficient discontinu a donné lieu à plusieurs publications de la part de Bouchut et James [34, 35], et d'auteurs comme Poupaud et Rascle [36].

Une des seules conditions qui doit être vérifiée pour pouvoir appliquer ces résultats est que la vitesse soit lipschitzienne à droite, c'est-à-dire que $\partial_{P_f}\bar{v} \leq \alpha(t)$ dans $\mathbb{R}^*_+ \times [0,J]$, avec $\alpha \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^*_+)$, ce que nous avons puisque nous avons supposé dans l'ensemble de ce chapitre que $\bar{v}(t,P_f) \in \mathbb{W}^{1,\infty}([0,J])$.

Le principe de ces articles repose sur la construction de caractéristiques généralisées, définies aussi aux points de discontinuités. En approximant la vitesse discontinue par une vitesse plus régulière aux points de discontinuités, appelée représentant canonique, on obtient l'existence d'une solution unique, au sens des distributions. Si la vitesse est discontinue par morceaux, alors le représentant canonique peut être trouvé explicitement. Notons que l'approximation de la vitesse en un point de discontinuité dépend des signes des vitesses de part et d'autre de la discontinuité. Tous les cas sont traités dans les articles, notamment le cas d'un choc et d'une détente.

Nous formulons le théorème qui montre l'existence d'une solution au sens des distributions lorsque la vitesse discontinue a été approximée par une autre vitesse, que nous notons $\hat{v}(t,P_f)$. Notre cas n'est pas des plus compliqué puisque les vitesses de part et d'autre des discontinuités $P_f = \{j\}$, avec $j \in \{1,..,J\}$, ont le même signe. Il ne se produit donc ni de compression des caractéristiques, ni de détente. Ainsi, pour construire une approximation de la vitesse $\bar{v}$ sur l'ensemble du flot, il nous suffit de mettre bout-à-bout les solutions construites sur chaque commutateur.

Donnons ici le résultat de Bouchut et James que nous allons appliquer.

Lemme 3.9. ***Existence d'une solution à une équation de transport à vitesse continue par morceaux.*** *Soit* $\mu \in \mathscr{C}([0,T], \mathscr{M}_{loc}([0,J]) - \sigma(\mathscr{M}_{loc}([0,J]), \mathscr{C}_C([0,J])))$ *solution de l'équation*

$$\partial_t \mu + \partial_x (a\,\mu) = 0\,,$$

avec la vitesse $a \in \mathbb{L}^\infty(]0,T[\times[0,J])$ *bornée mais possiblement discontinue. Alors nous pouvons construire le représentant canonique* $\hat{a}$*, donné par*

$$\hat{a} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{X(t+\varepsilon, t, x) - x}{\varepsilon}\,.$$

Il existe alors une unique solution dans $\mathscr{D}'(]0,T[\times[0,J])$ *au problème*

$$\partial_t \mu + \partial_P (\hat{a}\,\mu) = 0\,.$$

Théorème 3.10. ***Existence et unicité de solutions fluides dans un flot.***
Soit le système fluide (3.18) muni des conditions initiales (3.16). Alors il existe une unique solution à ce système, au sens des distributions, lorsque la vitesse est approximée par $\hat{v}$*, définie par :*

$$\hat{v}(t, P_f) = \bar{v}(t, P_f^+),\ si\ P_f \in \bigcup_{j=1}^{J} [j-1, j[\,. \tag{3.25}$$

Démonstration. Nous avons montré dans le théorème 3.8 que $\bar{v}$ est suffisamment régulier pour appliquer le résultat de Bouchut et James énoncé au lemme 3.9. La vitesse $\bar{v}$ est donc bien définie dans tout le flot lorsqu'elle est approximée par $\hat{v}$. Nous obtenons donc l'existence et l'unicité de la vitesse moyenne des trames sur l'ensemble du flot. Nous pouvons alors en déduire l'existence et l'unicité de n^f, ρ^f, $\bar{a}^f$ et $\bar{\theta}$ sur l'ensemble du flot. □

Afin de montrer l'existence d'une solution à l'équation cinétique, nous procédons comme au chapitre 2, en adaptant un théorème de Jabin [33] afin d'établir une relation d'équivalence entre l'existence d'une solution au problème fluide et l'existence d'une solution cinétique, et cela à la condition que g vérifie une relation de fermeture.

Lemme 3.11. ***Equivalence cinétique / fluide sous condition de fermeture***
Il est équivalent d'affirmer que n^f, $\rho^f = \bar{s}^f\, n^f$ *et* $\bar{a}^f$*, munies de conditions initiales* n_0, $\rho_0 = \bar{s}_0\, n_0$ *et* $\bar{a}_0$*, sont solutions du système fluide (3.15), et de dire toute fonction* $\tilde{g}$ *vérifiant la relation*

$$\tilde{g}(0, P_f, a, s) = n_0(P_f)\, \delta_{a=\bar{a}_0(P_f)}\, \delta_{s=\bar{s}_0(P_f)}\,,$$

et qui se décompose $\forall\, t$ *sous la forme*

$$\tilde{g}(t, P_f, a, s) = n^f(t, P_f)\, \delta_{a=\bar{a}(t,P_f)}\, \delta_{s=\bar{s}}\,. \tag{3.26}$$

est solution de l'équation cinétique (3.8), avec $\bar{v}$ *dans cette équation défini par* $\bar{v} = \dfrac{j-P}{\bar{\theta}(t,P)} \mathbb{1}_{P\in[j-1,j[}$.

Démonstration. De la même façon qu'au lemme 2.4 du chapitre 2, nous démontrons cette équivalence en prouvant que les deux implications sont vraies.

— Si $\tilde{g}$ vérifie l'hypothèse de fermeture (3.26) au temps $t = 0$, il suffit de montrer que l'hypothèse de fermeture, une fois insérée dans le terme de gauche de l'équation cinétique, permet de retrouver que celui-ci est nul. Pour cela, nous utilisons l'existence de n^f, ρ^f, $\bar{a}^f$ et le fait que n^f vérifie l'équation fluide.

— Afin de prouver l'implication dans l'autre sens, nous écrivons $\tilde{g}$ selon la relation de fermeture dans l'équation cinétique et prenons une fonction test respectivement égale à $\phi \equiv \{1, s, a\}$. Alors, en testant cette équation contre ϕ, nous obtenons les équations fluides vérifiées par n^f, ρ^f et $\bar{a}^f$. □

Théorème 3.12. ***Existence et unicité de solutions à l'équation cinétique.***
Soit le système fluide couplé (3.15) vérifié par les quantités n^f, $\rho^f = \bar{s}^f n^f$, $\bar{a}^f$, $\bar{\theta}$, avec $\bar{v}$ approximée par $\hat{v}$ donnée par (3.25), sur l'ensemble du flot. Alors il existe une unique solution $\tilde{g}$ à l'équation cinétique (3.8) qui se décompose selon la condition de fermeture (3.26).

Démonstration. Les hypothèses sur les quantités fluides nous permettent d'appliquer le théorème d'existence et d'unicité des solutions fluides. Le lemme 3.11 permet de conclure. □

V EXTENSIONS DU MODÈLE / CONCLUSION

Nous avons construit, dans ce chapitre, un modèle permettant de décrire la dynamique d'un réseau AFDX. Nous avons montré que ce modèle macroscopique était cohérent en étudiant son caractère bien posé. Nous présentons dans la partie suivante des pistes d'extension de notre modèle, avec l'introduction de niveaux de priorités. Nous évoquons aussi rapidement une autre limite asymptotique envisageable.

V.1 Introduction de différents niveaux de priorité

Nous avons introduit en début de chapitre la priorité d'une trame $p_i \in \{\pi_1, \pi_2\}$, où π_1 est la priorité la plus élevée des deux. Nous allons maintenant prendre en compte ce paramètre. Pour cela, il convient, au niveau particulaire, d'introduire un temps d'attente spécifique à chacun des deux niveaux de priorité.

Si la trame t_i est prioritaire, c'est-à-dire $p_i = \pi_1$, les seules trames qui sont émises par le commutateur avant t_i sont celles qui ont même priorité et qui sont arrivées dans la mémoire tampon avant elle. En revanche, si la trame t_i n'est pas prioritaire ($p_i = \pi_2$), elle doit attendre avant d'être émise que soient envoyées :

— les trames de priorité π_2 qui sont arrivées avant elle dans la mémoire tampon,

— l'ensemble des trames de priorité π_1 se trouvant dans la mémoire tampon au temps t,

— les trames de priorité π_1 qui arriveront dans le commutateur après le temps t, mais avant que t_i ne soient émise par le commutateur.

Nous allons donc considérer des temps d'attentes particulaires différentes selon la priorité des trames. Nous notons le temps d'attente $\theta_i^{\pi_1}(t, P_{i,f}(t))$ si $p_i = \pi_1$ et $\theta_i^{\pi_2}(t, P_{i,f}(t))$ si $p_i = \pi_2$. Nous définissons le temps d'attente d'une trame de priorité $p_i = \pi_1$ par

$$\theta_i^{\pi_1}\left(t, P_{i,f}(t)\right) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{s_k}{D_j} + L_j \right) \delta_{p_k=\pi_1} \mathbb{1}_{P_{k,f}(t)\in]P_{i,f}(t), j[} \right] \mathbb{1}_{P_{i,f}(t)\in[j-1,j[}.$$

et celui d'une trame de priorité $p_i = \pi_2$ par

$$\theta_i^{\pi_2}\left(t, P_{i,f}(t)\right) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{s_k}{D_j} + L_j \right) \left(\delta_{p_k=\pi_1} \mathbb{1}_{P_{k,f}(t)\in[j-1,j[} + \delta_{p_k=\pi_2} \mathbb{1}_{P_{k,f}(t)\in]P_{i,f}(t),j[} \right) \right] \mathbb{1}_{P_{i,f}(t)\in[j-1,j[}.$$

La vitesse particulaire associée à ces temps d'attente est donnée par

$$v_i\left(t, P_{i,f}(t)\right) = \frac{j - P_{i,f}(t)}{\theta_i^{\pi}(t, P_{i,f}(t))} \delta_{p_i=\pi} \mathbb{1}_{P_{i,f}(t)\in[j-1,j[}, \qquad \text{pour } \pi = \{\pi_1, \pi_2\}.$$

Ainsi, la vitesse des trames prioritaires est supérieure à celle des non-prioritaires. Il est donc possible que des trames non-prioritaires se fassent dépasser dans la mémoire tampon, et voient alors leur temps d'attente modifié.

Le comportement des trames non prioritaires sera donc dépendant ce celui des trames prioritaires. Pour cela, nous définissons tout d'abord le modèle pour les trames particulaires. Il reprend en grande partie ce qui a déjà été fait dans ce chapitre. L'évolution en temps du temps d'attente particulaires des trames prioritaires est inchangée par rapport à celle obtenue en début de chapitre :

$$\frac{d}{dt}[\theta_i^{\pi_1}(t, P_{i,f}(t))] = -1 + \theta_j^{ref,\pi_1}(t)\ \delta_{\theta_i^{\pi_1}(t,P_{i,f}(t))=0},$$

avec la valeur de ce saut à l'entrée du commutateur $[j-1, j[$, notée $\theta_j^{ref}(t)$, est définie de la même manière que précédemment

$$\theta_j^{ref,\pi}(t) = \theta_i^{\pi}(t, P_{i,f}(t))\ \delta_{P_{i,f}(t)=j-1}, \qquad \text{pour } \pi = \{\pi_1, \pi_2\}.$$

Nous pouvons alors définir une densité de probabilité des trames prioritaires, notée g^{π_1}. Elle est définie par

$$g^{\pi_1}(t, P_f, a, \theta, s) = \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^{T_f} \delta_{a=a_i(t)}\, \delta_{\theta=\theta_i^{\pi_1}(t,P_{i,f}(t))}\, \delta_{s=s_i}\, \delta_{p_i=\pi_1}\, \mathbb{1}_{P_f\in f/f\in VL_v},$$

avec $T_f = \sum_{\substack{j=1 \\ [j-1,j[\in f}}^{J} T_j$ la capacité maximale que peut contenir l'ensemble des commutateurs du flot f. Nous obtenons les équations cinétiques sur g^{π_1} de la même manière que précédemment : nous considérons le choix de dimensionnement des grandeurs caractéristiques temporelles inchangé (Sect. II.2). En ce qui concerne le passage à la limite formel, nous obtenons, au sens faible-*,

$$g^{\varepsilon,\pi_1}(t, P_f, a, \theta, s) \to g^{\pi_1}(t, P_f, a, \theta, s) = \tilde{g}^{\pi_1}(t, P_f, a, s)\, \delta_{\theta=\bar{\theta}^{\pi_1}(t,P)},$$

avec le temps d'attente moyen des trames prioritaire défini par

$$\bar{\theta}^{\pi_1}(t, P_f) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J} \left[\int_{P_f}^{j} \int_{a,s} \left(\frac{s}{D_j} + L_j \right) \tilde{g}^{\pi_1}(t, x, a, s)\, da\, ds\, dx \right] \mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[},$$

Nous allons maintenant utiliser l'évolution du temps d'attente moyen des trames prioritaires pour définir l'évolution du temps d'attente particulaire pour les trames non prioritaires

$$\frac{d}{dt}[\theta_i^{\pi_2}(t, P_{i,f}(t))] = -1 + \frac{d}{dt}[\bar{\theta}^{\pi_1}(t, P_{i,f}(t))] + \theta_j^{ref,\pi_2}(t)\ \delta_{\theta_i^{\pi_2}(t,P_{i,f}(t))=0}.$$

Nous pouvons maintenant définir la densité de probabilité g^{π_2} :

$$g^{\pi_2}(t,P_f,a,\theta,s) = \frac{1}{T_f}\sum_{i=1}^{T_f} \delta_{a=a_i(t)}\,\delta_{\theta=\theta_i^{\pi_2}(t,P_{i,f}(t))}\,\delta_{s=s_i}\,\delta_{p_i=\pi_2}\,\mathbb{1}_{P_f\in f/f\in VL_v}\,.$$

Les deux densités de probabilités g^{π_1} et g^{π_2} sont couplées par le terme de charge totale des mémoires tampons $C_j(t)$. En ce qui concerne le passage à la limite formel, nous obtenons, au sens faible-*,

$$g^{\varepsilon,\pi_2}(t,P_f,a,\theta,s) \to g^{\pi_2}(t,P_f,a,\theta,s) = \tilde{g}^{\pi_2}(t,P_f,a,s)\,\delta_{\theta=\bar{\theta}^{\pi_1}(t,j-1)+\bar{\theta}^{\pi_2}(t,P_f)}\,,$$

avec le temps d'attente moyen des trames non prioritaires qui peut être défini en fonction de celui des trames prioritaires. Il est défini par

$$\begin{aligned}\bar{\theta}^{\pi_1}(t,j-1)+\bar{\theta}^{\pi_2}(t,P_f) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\Bigg[&\int_{j-1}^{j}\int_{a,s}\left(\frac{s}{D_j}+L_j\right)\tilde{g}^{\pi_1}(t,x,a,s)\,da\,ds\,dx\\ &+\left\{\int_{P_f}^{j}\int_{a,s}\left(\frac{s}{D_j}+L_j\right)\tilde{g}^{\pi_2}(t,x,a,s)\,da\,ds\,dx\right\}\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\Bigg]\,.\end{aligned}$$

Alors, dans chaque commutateur, les équations cinétiques sont données au sens des distributions par

$$\begin{cases}\partial_t\tilde{g}^{\pi_1}(t,P_f,a,s)+\partial_{P_f}\left(\bar{v}^{\pi_1}(t,P_f)\,\tilde{g}^{\pi_1}(t,P_f,a,s)\right)+\partial_a\tilde{g}^{\pi_1}(t,P_f,a,s)=0\,,\\ \partial_t\tilde{g}^{\pi_2}(t,P_f,a,s)+\partial_{P_f}\left(\bar{v}^{\pi_2}(t,P)\,\tilde{g}^{\pi_2}(t,P_f,a,s)\right)+\partial_a\tilde{g}^{\pi_2}(t,P_f,a,s)=0\,.\end{cases}$$

avec

$$\bar{v}^{\pi_1}(t,P_f) = \frac{j-P_f}{\bar{\theta}^{\pi_1}(t,P_f)}\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[} \text{ et } \bar{v}^{\pi_2}(t,P_f) = \frac{j-P_f}{\bar{\theta}^{\pi_1}(t,j-1)+\bar{\theta}^{\pi_1}(P,j-1)}\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\,.$$

Nous définissons maintenant les moments de $\tilde{g}^{\pi_i}$ avec $\pi=\{\pi_1,\pi_2\}$ pour chaque flot.

$$n^{\pi}(t,P_f) = \int_{a,s}\tilde{g}^{\pi}(t,P_f,a,\theta,s)\,da\,ds\,,$$

$$\rho^{\pi}(t,P_f) = \int_{a,\theta,s} s\,g^{\pi}(t,P_f,a,s)\,da\,ds\,,$$

$$(n\bar{a})^{\pi}(t,P_f) = \int_{a,\theta,s} a\,g^{\pi}(t,P_f,a,s)\,da\,ds\,.$$

Les temps d'attente et vitesses moyennes des trames dans une mémoire tampon peuvent alors être réécrites en utilisant ces définitions des moments. Nous notons

$$\bar{\theta}^{\pi}(t,P_f) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \sum_{j=1}^{J}\left[\int_{P_f}^{j}\left(\frac{1}{D_j}\rho^{\pi}(t,x)+L_j\,n^{\pi}(t,x)\right)dx\right]\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\,,\ \text{pour } \pi\in\{\pi_1,\pi_2\}\,.$$

Alors les vitesses associées aux trames prioritaires et non prioritaires sont données par

$$\bar{v}^{\pi_1}(t,P_f) = \frac{j-P_f}{\bar{\theta}^{\pi_1}(t,P_f)}\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[} \text{ et } \bar{v}^{\pi_2}(t,P_f) = \frac{j-P_f}{\bar{\theta}^{\pi_1}(t,j-1)+\bar{\theta}^{\pi_2}(t,P_f)}\mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}\,.$$

La méthode des moments nous permet d'obtenir deux systèmes de lois de conservation dans $\mathscr{D}'([0,T]\times[0,J])$. En ce qui concerne les trames prioritaires, le système fluide obtenu est le même que (3.15), vérifié ici pour les moments n^{π_1}, ρ^{π_1}, $\bar{a}^{\pi_1}$, $\bar{\theta}^{\pi_1}$ et $\bar{v}^{\pi_1}$. En ce qui concerne les moments relatifs aux quantités non prioritaires, ils nécessiteront une analyse spécifique.

V.2 D'autres limites asymptotiques possibles

Afin d'éprouver un peu plus notre modèle, il serait intéressant de s'intéresser à d'autre limites asymptotiques que celle donnée précédemment (Sect. II.2), où nous avions choisi le temps d'observation du réseau du même ordre que le temps de vidage d'un commutateur $\theta_j^{ref}(t)$, c'est à dire le temps moyen de transit pour une trame dans un commutateur.

Le temps de transit dans un commutateur comprend deux types de périodes : les temps d'émission des trames et les temps de latence. Elles correspondent à deux temps caractéristiques : la capacité maximale d'un commutateur, multipliée par le temps d'émission d'un message : $T_f \frac{s}{D_j}$, et la capacité maximale d'un commutateur, multipliée par le temps de latence de celui-ci : $T_f L_j$. Il serait intéressant de considérer des ordres de grandeurs différents pour ces deux temps caractéristiques, c'est à dire les cas $T_f \frac{s}{D_j} << T_f L_j$ et $T_f \frac{s}{D_j} >> T_f L_j$.

Afin de pousser plus loin la description macroscopique, nous pourrions considérer ces deux temps caractéristiques (c'est-à-dire un temps de traversée des commutateurs) négligeables devant le temps d'observation du réseau : $\theta_j^{ref}(t) = o(1)$. A condition que le nombre de commutateurs du réseau soit grand, le temps d'observation du réseau équivaudrait alors au temps de traversée de l'ensemble du réseau. La notion de position le long de chaque flot s'avèrerait alors inadaptée, au profit d'une vision plus globale du réseau, le long de chaque *virtual link*.

Partie II

Simulations numériques des deux modèles fluides

CHAPITRE 4

SIMULATIONS NUMÉRIQUES POUR UN RÉSEAU DE GRILLE DE CALCUL

Sommaire

I Approximation par volumes finis . . . 82

I.1 Discrétisation . . . 82

I.2 Forme semi-discrétisée . . . 82

I.3 Discrétisation temporelle . . . 84

II Simulations numériques . . . 85

II.1 Premier cas test . . . 85

II.2 Second cas test . . . 93

Conclusion . . . 98

Dans ce chapitre, nous simulons la dynamique d'un réseau de grille de calcul, en utilisant le modèle développé dans le chapitre 2. Dans un premier temps, nous approximons le système fluide par une méthode classique de volumes finis (Sect. I). Ensuite, nous illustrons nos résultats numériques par l'étude de deux cas tests. En premier lieu, nous étudions un cas test simple, pour lequel les solutions exactes sont faciles à trouver, afin d'étudier la convergence du schéma. Nous nous intéressons aussi au comportement du réseau lorsque nous faisons évoluer ses paramètres, de manière à modéliser un réseau avec un temps de décision instantanée. Un cas test reflétant un comportement plus complexe est ensuite étudié (Sect. II).

Soit une grille de calcul comprenant des *clusters*, notés C_j avec $j \in \{1,..,C\}$, sur lesquels sont définies les quantités fluides ρ_j^{exe} et ρ_j^{wait}. Ces quantités décrivent le nombre de tâches dans le *cluster* C_j qui sont en exécution et en attente. Nous avons montré que nous pouvons modéliser la dynamique au sein d'une grille de calcul en utilisant la modélisation fluide et avons établi le système fluide suivant pour chaque *cluster* C_j :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j^{exe}(t,q) - v_j \, \partial_q \rho_j^{exe}(t,q) = S_j^{exe}(t,q), & \text{(4.1a)} \\ \partial_t \rho_j^{wait}(t,q,\theta) - \partial_\theta \rho_j^{wait}(t,q,\theta) = S_j^{wait}(t,q,\theta), & \text{(4.1b)} \end{cases}$$

avec les termes sources S_j^{exe} et S_j^{wait} définis par

$$S_j^{exe}(t,q) = \rho_j^{wait}(t,q,\theta=0^+) - \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \rho_j^{exe}(t,q)\, Dec(j,k),$$

et

$$S_j^{wait}(t,q,\theta) = \frac{1}{\mathscr{T}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \frac{T_k}{T_j}\, \rho_k^{exe}(t,q)\, Dec(k,j)\, \delta_{\theta=\tau_{kj}}.$$

Nous avons montré qu'il existait une unique solution à ce système. Nous pouvons donc le discrétiser en utilisant des schémas de volumes finis, afin de simuler la dynamique sous jacente à ces équations.

I APPROXIMATION PAR VOLUMES FINIS

I.1 Discrétisation

Nous allons tout d'abord discrétiser les espaces des phases respectifs de ces deux équations. Pour cela, nous choisissons les domaines de définitions $q \in [0, q_{max}]$ et $\theta \in [0, \theta_{max}]$, où q_{max} est choisi en supposant un temps d'exécution maximal et un débit maximal dans la grille, et θ_{max} est défini tel que $\theta_{max} = \max_{j,k\in\{1,..,C\}} \tau_{jk}$.

Le domaine de définition de q est subdivisé en N_q cellules de longueurs uniformes égales à $\Delta q = q_{max}/N_q$. Les N_q+1 points de discrétisation sont notés $q_{i-1/2} = (i-1)\Delta q$ avec $i \in \{1,..,N_q+1\}$. Alors $0 = q_{1/2} < q_{3/2} < ... < q_{Nq-1/2} < q_{N_q+1/2} = q_{max}$. Les cellules sont notées Q_i et sont telles que $Q_i = [q_{i-1/2}, q_{i+1/2}]$, avec $\bigcup_{i=1}^{Nq} Q_i = [0, q_{max}]$.

La variable θ est discrétisée de manière similaire : nous subdivisons $[0, \theta_{max}]$ en N_θ cellules, notées $\Theta_m = [\theta_{m-1/2}, \theta_{m+1/2}]$ avec $\theta_{m-1/2} = (m-1)\Delta\theta$, pour $m \in \{1,..,N_\theta+1\}$. Le pas du maillage est donné par $\Delta\theta = \theta_{max}/N_\theta$. Alors $0 = \theta_{1/2} < \theta_{3/2} < ... < \theta_{N_\theta-1/2} < \theta_{N_\theta+1/2} = \theta_{max}$.

Nous posons T la borne maximale temporelle et introduisons une discrétisation de $[0, T]$ en N_t intervalles. Les points de discrétisation sont notés $t^n = n \times \Delta t$, avec $n \in \{0,..,N_t\}$ et le pas de temps défini par $\Delta t = T/N_t$.

I.2 Forme semi-discrétisée

Afin de mettre en place la méthode de volumes finis, l'inconnue ρ_j^{exe} aux points milieux $q_i = \left(q_{i+1/2} + q_{i-1/2}\right)/2$ est approximée, sur chaque *cluster* C_j, avec $j \in \{1,..,J\}$, par sa valeur moyenne sur la cellule $Q_i = [q_{i-1/2}, q_{i+1/2}]$. Nous notons $\rho_{j,i}^{exe}(t)$ l'approximation de la valeur moyenne de $\rho_j^{exe}(t,q)$ sur Q_i au temps t :

$$\rho_{j,i}^{exe}(t) \simeq \frac{1}{\Delta q} \int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \rho_j^{exe}(t,q)\, dq.$$

D'une manière similaire, l'inconnue ρ_j^{wait} aux points milieux des pavés $Q_i \times \Theta_m$, c'est-à-dire aux points (q_i, θ_m), avec $q_i = \left(q_{i+1/2} + q_{i-1/2}\right)/2$ et $\theta_m = (\theta_{m-1/2} + \theta_{m+1/2})/2$, est approximée,

sur chaque *cluster* C_j, par sa valeur moyenne sur sur le pavé $Q_i \times \Theta_m$. Nous notons $\rho^{wait}_{j,i,m}(t)$ l'approximation de la valeur moyenne de $\rho^{wait}_j(t,q,\theta)$ sur ce pavé au temps t :

$$\rho^{wait}_{j,i,m}(t) \simeq \frac{1}{\Delta q\,\Delta\theta}\int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}}\int_{\theta_{m-1/2}}^{\theta_{m-1/2}} \rho^{wait}_j(t,q,\theta)\,dq\,d\theta.$$

Nous définissons maintenant les flux de tâches qui entrent et sortent de chaque cellule Q_i et Θ_m dans le *cluster* C_j. L'équation (4.1a) est une équation de transport en dimension un : dans le *cluster* C_j, la quantité ρ^{exe}_j est transportée au cours du temps le long de l'axe $\{q\,,\,q \in [0,q_{max}]\}$ à la vitesse $-v_j < 0$. Ainsi, le flux de tâches qui passent par le point $q_{i+1/2}$ au temps t ne passe que dans un sens : c'est le flux qui sort de la cellule $Q_{i+1} = [q_{i+1/2}, q_{i+3/2}]$ et entre dans la cellule $Q_i = [q_{i-1/2}, q_{i+1/2}]$ à cet instant. Nous choisissons pour cela de prendre un flux décentré. A l'ordre un, nous approchons donc le flux

$$F^{exe}_j(t,q_{i+1/2}) = -v_j\,\rho^{exe}_j(t,q_{i+1/2})\,,$$

par le flux numérique

$$\mathscr{F}^{exe}_{j,i+1/2}(t) = -v_j\,\rho^{exe}_{j,i+1}(t)\,.$$

Nous définissons de façon similaire le flux des tâches en attente dans le *cluster* C_j. L'équation (4.1b) est une équation de conservation dans un espace des phases en deux dimensions. Elle exprime le transport des tâches le long de l'axe $\{\theta\,,\,\theta \in [0,\theta_{max}]\}$ à la vitesse -1, laissant la charge q inchangée. Le flux de tâches qui entre et sort de la cellule $Q_i \times \Theta_m$ se produit donc aux interfaces des $\theta_{m\pm1/2}$. Ici aussi, nous prenons un flux décentré à l'ordre un et approchons donc le flux

$$F^{wait}_j(t,q_i,\theta_{m+1/2}) = -\frac{1}{\Delta q}\int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \rho^{wait}_j(t,q,\theta_{m+1/2})\,dq\,.$$

par

$$\mathscr{F}^{wait}_{j,i,m+1/2}(t) = -\rho^{wait}_{j,i,m+1}(t)\,.$$

Pour obtenir les équations semi-discrétisées vérifiées par $\rho^{exe}_{j,i}(t)$ et $\rho^{wait}_{j,i,m}(t)$, nous intégrons (4.1a) sur la cellule Q_i et (4.1b) sur $Q_i \times \Theta_m$ et les divisons respectivement par Δq et $\Delta q \times \Delta\theta$. Nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\rho^{exe}_{j,i}(t) + \dfrac{1}{\Delta q}\left[\mathscr{F}^{exe}_{j,i+1/2}(t) - \mathscr{F}^{exe}_{j,i-1/2}(t)\right] = S^{exe}_{j,i}(t)\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\rho^{wait}_{j,i,m}(t) + \dfrac{1}{\Delta\theta}\left[\mathscr{F}^{wait}_{j,i,m+1/2}(t) - \mathscr{F}^{wait}_{j,i,m-1/2}(t)\right] = S^{wait}_{j,i,m}(t)\,, \end{cases}$$

avec $S^{exe}_{j,i}(t)$ et $S^{wait}_{j,i,m}(t)$ les approximations des termes sources respectifs données par

$$\begin{aligned} S^{exe}_{j,i}(t) &\simeq \frac{1}{\Delta q}\int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \left(\rho^{wait}_j(t,q,\theta=0^+) - S^{exe}_j(t,q)\right)dq\,, \\ &\simeq -\mathscr{F}^{wait}_{j,i,1/2}(t) - \frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\frac{1}{\Delta q}\int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \rho^{exe}_j(t,q)\,\mathbb{1}_{Dec(t,q,j,k)=1}\,dq\,, \end{aligned}$$

et

$$S^{wait}_{j,i,m}(t) \simeq \frac{1}{\Delta q\,\Delta\theta}\int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}}\int_{\theta_{m-1/2}}^{\theta_{m-1/2}} S^{wait}_{j}(t,q,\theta)\,dq\,d\theta\,,$$
$$\simeq \frac{1}{\Delta q\Delta\theta}\int_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\frac{T_k}{T_j}\,\rho^{exe}_k(t,q)\,\mathbb{1}_{Dec(t,q,k,j)=1}\,dq\int_{\theta_{m-1/2}}^{\theta_{m-1/2}}\delta_{\theta=\tau_{kj}}\,d\theta\,.$$

En supposant que Dec est constant sur $]q_{i-1/2}, q_{i+1/2}[$, nous pouvons écrire

$$S^{exe}_{j,i}(t) \simeq -\mathscr{F}^{wait}_{j,i,1/2}(t) - \frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\rho^{exe}_{j,i}(t)\,\mathbb{1}_{Dec(t,q_i,j,k)=1}\,,$$

et

$$S^{wait}_{j,i,m}(t) \simeq \frac{1}{\mathscr{T}\,\Delta\theta}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\frac{T_k}{T_j}\,\rho^{exe}_{k,i}(t)\,\mathbb{1}_{Dec(t,q_i,k,j)=1}\,\delta_{\theta_m=\tau_{kj}}\,.$$

I.3 Discrétisation temporelle

Afin de traiter séparément le terme de transport et le terme source de chacune des équations du système, nous mettons en œuvre un *splitting* de Lie [37]. Il s'agit d'une méthode d'ordre 1 en temps qui consiste à traiter chaque itération en temps en deux étapes. Détaillons ici ces étapes, qui seront appliquées dans chaque *cluster* C_j, avec $j \in \{1,..,J\}$.

— Etape 1 : Résolution des équations de transport sans les termes sources, pendant un temps Δt

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\rho^{exe}_{j,i}(t) + \dfrac{1}{\Delta q}\left[\mathscr{F}^{exe}_{j,i+1/2}(t) - \mathscr{F}^{exe}_{j,i-1/2}(t)\right] = 0\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\rho^{wait}_{j,i,m}(t) + \dfrac{1}{\Delta\theta}\left[\mathscr{F}^{wait}_{j,i,m+1/2}(t) - \mathscr{F}^{wait}_{j,i,m-1/2}(t)\right] = 0\,,\end{cases}$$

Les solutions de ces équations sont notées $\tilde{\rho}^{exe}_{j,i}(t)$ et $\tilde{\rho}^{wait}_{j,i,m}(t)$.

— Etape 2 : Les solutions trouvées à la première étape sont injectées dans l'équation différentielle ordinaire prenant en compte le terme source, qui est résolue sur un intervalle de temps Δt :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\rho^{exe}_{j,i}(t) = \tilde{S}^{exe}_{j,i}(t)\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\rho^{wait}_{j,i,m}(t) = \tilde{S}^{wait}_{j,i,m}(t)\,,\end{cases}$$

avec les termes sources $\tilde{S}^{exe}_{j,i}(t)$ et $\tilde{S}^{wait}_{j,i,m}(t)$ définis par

$$\tilde{S}^{exe}_{j,i}(t) = \tilde{\rho}^{wait}_{j,i,1/2}(t) - \frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\tilde{\rho}^{exe}_{j,i}(t)\,\mathbb{1}_{Dec(t,q_i,j,k)=1}\,,$$

et

$$\tilde{S}^{wait}_{j,i,m}(t) = \frac{1}{\mathscr{T}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C}\frac{T_k}{T_j}\,\tilde{\rho}^{exe}_{k,i}(t)\,\mathbb{1}_{Dec(t,q_i,k,j)=1}\,\delta_{\theta_m=\tau_{kj}}\,.$$

Nous obtenons alors les solutions du système global au temps $t+\Delta t$.

Nous notons

$$\rho_{j,i}^{exe,n} = \rho_{j,i}^{exe}(t^n)\,, \quad \rho_{j,i,m}^{wait,n} = \rho_{j,i,m}^{wait}(t^n)\,, \tilde{\rho}_{j,i}^{exe,n} = \tilde{\rho}_{j,i}^{exe}(t^n)\,, \quad \tilde{\rho}_{j,i,m}^{wait,n} = \tilde{\rho}_{j,i,m}^{wait}(t^n)\,.$$

Nous adoptons la même notation pour les flux ainsi que pour les termes sources :

$$\mathscr{F}_{j,i\pm1/2}^{exe,n} = \mathscr{F}_{j,i\pm1/2}^{exe}(t^n)\,, \quad \mathscr{F}_{j,i\pm1/2}^{wait,n} = \mathscr{F}_{j,i\pm1/2}^{wait}(t^n)\,, \quad S_{j,i}^{exe,n} = S_{j,i}^{exe}(t^n)\,, \quad S_{j,i,m}^{wait,n} = S_{j,i,m}^{wait}(t^n)\,.$$

Les dérivées en temps sont discrétisées par un schéma d'Euler du premier ordre. La discrétisation finale du système d'équations de conservations s'écrit alors, pour tout $j \in \{1,..,C\}$,

— Etape 1 :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{j,i}^{exe,n+1} - \rho_{j,i}^{exe,n}\Delta t + \dfrac{1}{\Delta q}\left[\mathscr{F}_{j,i+1/2}^{exe,n} - \mathscr{F}_{j,i-1/2}^{exe,n}\right] = 0\,, \\ \dfrac{\tilde{\rho}_{j,i,m}^{wait,n+1} - \rho_{j,i,m}^{wait,n}}{\Delta t} + \dfrac{1}{\Delta\theta}\left[\mathscr{F}_{j,i,m+1/2}^{wait,n} - \mathscr{F}_{j,i,m-1/2}^{wait,n}\right] = 0\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

— Etape 2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_{j,i}^{exe,n+1} - \tilde{\rho}_{j,i}^{exe,n+1}}{\Delta t} = \tilde{S}_{j,i}^{exe,n} = -\tilde{\rho}_{j,i,1/2}^{wait,n+1}(t) - \dfrac{1}{\mathscr{T}}\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \tilde{\rho}_{j,i}^{exe,n+1}\,\mathbb{1}_{Dec(t^{n+1},q_i,j,k)=1}\,, \\ \dfrac{\rho_{j,i,m}^{wait,n+1} - \tilde{\rho}_{j,i,m}^{wait,n+1}}{\Delta t} = \tilde{S}_{j,i}^{wait,n} = \dfrac{1}{\mathscr{T}\,\Delta\theta}\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{C} \dfrac{T_k}{T_j}\,\tilde{\rho}_{k,i}^{exe,n+1}\,\mathbb{1}_{Dec(t^{n+1},q_i,k,j)=1}\,\delta_{\theta_m=\tau_{kj}}\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

La condition CFL de stabilité en norme $\mathbb{L}^\infty$ qui émerge du système discrétisé (4.5)-(4.6) s'écrit

$$\Delta t \leq \min\left\{\frac{\Delta q}{\max_{j\in\{1,..,J\}} v_j}, \Delta\theta, \mathscr{T}\right\}. \tag{4.7}$$

II SIMULATIONS NUMÉRIQUES

II.1 Premier cas test

Afin de tester notre modèle, nous choisissons un cas test simple pour lequel nous pouvons calculer la solution exacte ainsi que les conditions de déplacement des tâches. Nous étudions un réseau composé de deux *clusters*, que nous notons C_1 et C_2 et nous intéressons à un comportement particulier de cette grille : nous voulons observer des déplacements de C_1 vers C_2. Nous utilisons une fonctionnelle simple, qui dépend seulement du temps restant d'exécution. Nous posons

$$K(q_i, C_k) = t^{exe}(q_i, C_j, C_k), \text{ avec } t^{exe}(q_i, C_j, C_k) = \frac{q_i}{v_k} + \tau_{jk}\,,$$

et choisissons les indices de performance $v_1 = 1$ et $v_2 = 2$ et un temps de transferts entre les deux *clusters* égal à $\tau_{12} = 0.2$. Nous posons aussi $\mathscr{T} = 0.3$, le temps mis pour tester la totalité des tâches. Ainsi, il y a un déplacement du *cluster* 1 vers le *cluster* 2 seulement si $\frac{q_i(t)}{2} + 0.2 < q_i(t)$, c'est-à-dire si $q_i(t) > 0.4$. Si $q_i(t) \leq 0.4$, le temps de transfert est trop important par rapport au le temps d'exécution qui pourrait être gagné. Avec ce choix de paramètres, la condition $Dec(1,2) = \mathbb{1}_{Dec(t,q,1,2)=1}$ est équivalente à $\mathbb{1}_{q>\tilde{q}}$ avec $\tilde{q} = 0.4$ tandis que $Dec(2,1) = \mathbb{1}_{Dec(t,q,2,1)=1} = 0$. Pour plus de simplicité, nous posons $T_1 = T_2$.

Les équations fluides qui régissent les inconnues sont donc données par

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1^{exe}(t,q) - v_1\, \partial_q \rho_j^{exe}(t,q) = \rho_1^{wait}(\theta = 0^+) - \dfrac{1}{\mathscr{T}}\, \rho_1^{exe}(t,q)\, \mathbb{1}_{q>\tilde{q}}\,, \\ \partial_t \rho_1^{wait}(t,q,\theta) - \partial_\theta \rho_1^{wait}(t,q,\theta) = 0\,, \\ \rho_1^{exe}(0,.) = \rho_{2,0}^{exe}\,, \\ \rho_1^{wait}(0,.,.) = \rho_{2,0}^{wait}\,, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t \rho_2^{exe}(t,q) - v_2\, \partial_q \rho_2^{exe}(t,q) = \rho_2^{wait}(\theta = 0^+)\,, \\ \partial_t \rho_2^{wait}(t,q,\theta) - \partial_\theta \rho_2^{wait}(t,q,\theta) = \dfrac{1}{\mathscr{T}}\, \rho_1^{exe}(t,q)\, \mathbb{1}_{q>\tilde{q}}\, \delta_{\theta=\tau_{12}}\,, \\ \rho_2^{exe}(0,.) = \rho_{2,0}^{exe}\,, \\ \rho_2^{wait}(0,.,.) = \rho_{2,0}^{wait}\,. \end{cases}$$

Les conditions initiales sont données par les fonctions régulières suivantes :

$$\rho_{1,0}^{exe}(q) = \rho_{2,0}^{exe}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \exp\left(-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ avec } \mu = 0,5 \text{ et } \sigma = 0.1\,.$$

et

$$\rho_{1,0}^{wait}(q,\theta) = \rho_{2,0}^{wait}(q,\theta) = 0\,.$$

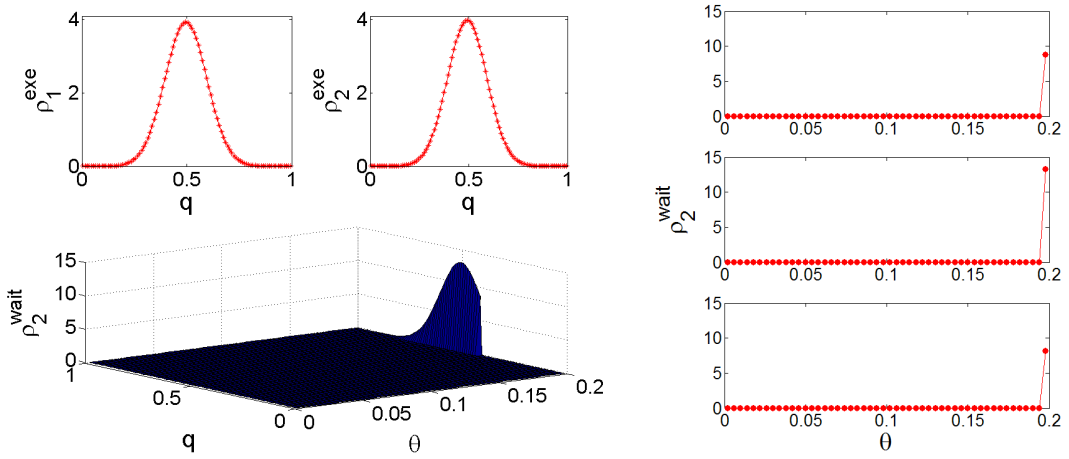
Ces deux systèmes fluides sont discrétisés en appliquant le *splitting* de Lie, donné dans le cas général par le schéma numérique (4.5)-(4.6).

II.1.1 Résultats numériques

Nous posons $q \in [0,1]$ et, puisque $\tau_{12} = 0.2$, nous limitons le domaine de définition du temps d'attente à $\theta \in [0,0.2]$. Nous posons $N_q = 100$ et $N_\theta = 50$. Ainsi, $\Delta q = 10^{-2}$, $\Delta\theta = 4 \cdot 10^{-3}$. De plus, nous posons $t \in [0,0.75]$ et $\Delta t = 4 \cdot 10^{-3}$, qui respecte la condition CFL (4.7).

Pour ce cas test, nous ne représentons pas la densité de tâches dans le *cluster* C_1, puisqu'elle est nulle et le cas test a été construit afin qu'elle le reste. Les résultats sont affichés sous la forme suivante : les densité de tâches en exécution seront tracées en fonction de q. Les densités de tâches en attente sont représentées en fonction de leur charge q et de leur temps d'attente θ. Nous complètons parfois l'information avec des graphes représentant l'évolution de la densité en fonction de θ, avec un niveau de charge fixé.

Au temps $t = \Delta t$ (figure 4.1), les courbes représentant ρ_1^{exe} et ρ_2^{exe} avancent : les tâches se sont exécutées pendant le temps Δt, donc leur charge diminue, à part pour ceux déplacés dans C_2. Nous pouvons observer qu'une partie des tâches en exécution dans C_1 ont été déplacés vers C_2 (dans une proportion égale à $\dfrac{\Delta t}{\mathscr{T}}\rho_2$), et ils apparaissant en attente dans C_2 -dans l'exacte même proportion- avec un temps d'attente égal à $\tau_{12} = 0.2$.

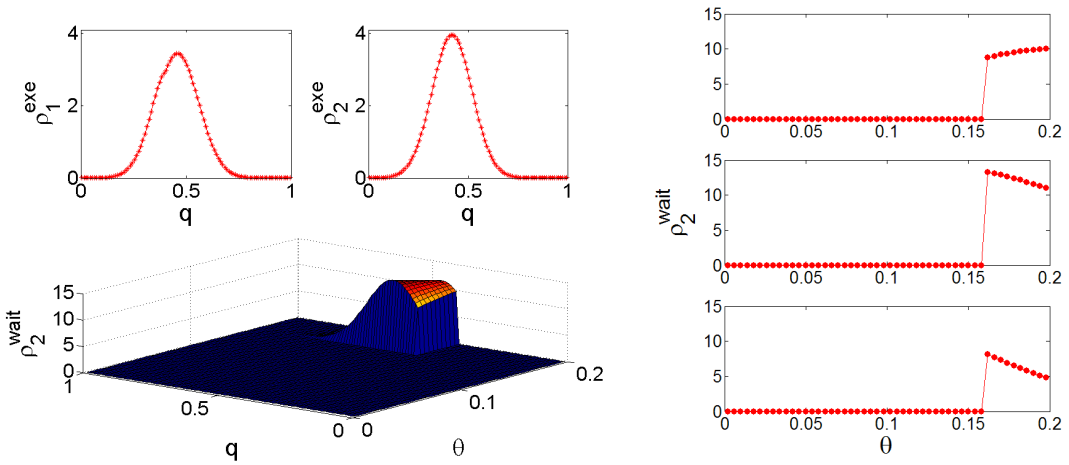


(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait}.

(b) ρ_2^{wait} pour $q = 0.405$ (haut), $q = 0.495$ (milieu), $q = 0.595$ (bas).

FIGURE 4.1 – Quantités fluides au temps $t = \Delta t$.

Par la suite, à chaque pas de temps, cette même proportion de tâches continue à être déplacée en attente vers C_2, pour les tâches dont la charge est supérieure à $\tilde{q}$. Les tâches restantes dans C_1 s'exécutent, leur charge diminue et la courbe est donc transportée vers la gauche. Pour le *cluster* 2, la courbe de ρ_2^{exe} se transporte aussi vers la gauche mais sans amortissement et deux fois plus rapidement. La courbe de ρ_2^{wait} représente elle aussi une équation de transport en θ : les tâches arrivant de C_1 avec une attente égale à τ_{12} voient leur temps d'attente diminuer- avec, à chaque pas de temps, l'addition en $\theta = \tau_{12}$ de nouvelles tâches déplacées. La figure 4.2 illustre ce comportement au temps $t = 0.04$.



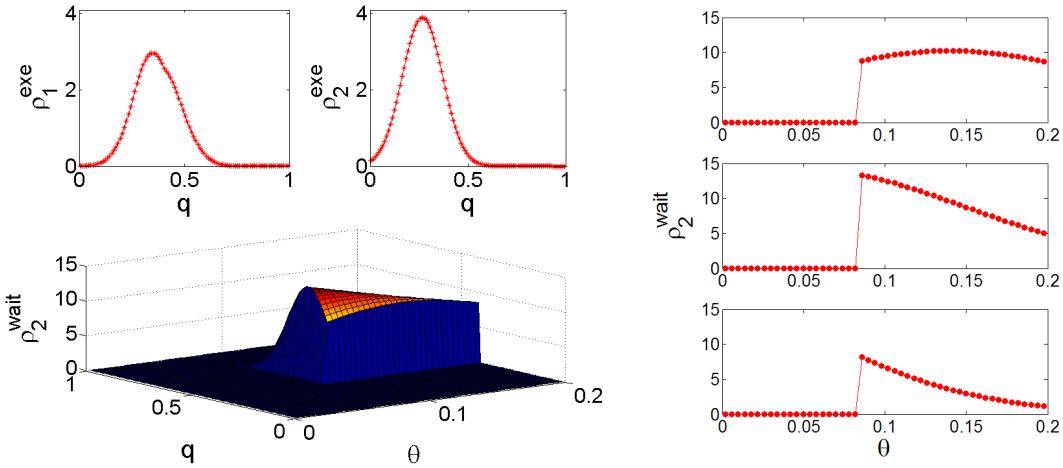
(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait}.

(b) ρ_2^{wait} pour $q = 0.405$ (haut), $q = 0.495$ (milieu), $q = 0.595$ (bas).

FIGURE 4.2 – Quantités fluides au temps $t = 0.04$.

A partir du moment où des tâches dans C_1 vérifient $q \leq \tilde{q} = 0.4$, elles ne se déplacent plus vers le *cluster* 2. Nous pouvons l'observer sur les figures 4.2 et 4.3 : nous percevons encore

un amortissement pour les tâches dont la charge est strictement supérieure à $\tilde{q} = 0.4$ mais seulement un transport vers la gauche pour les autres.

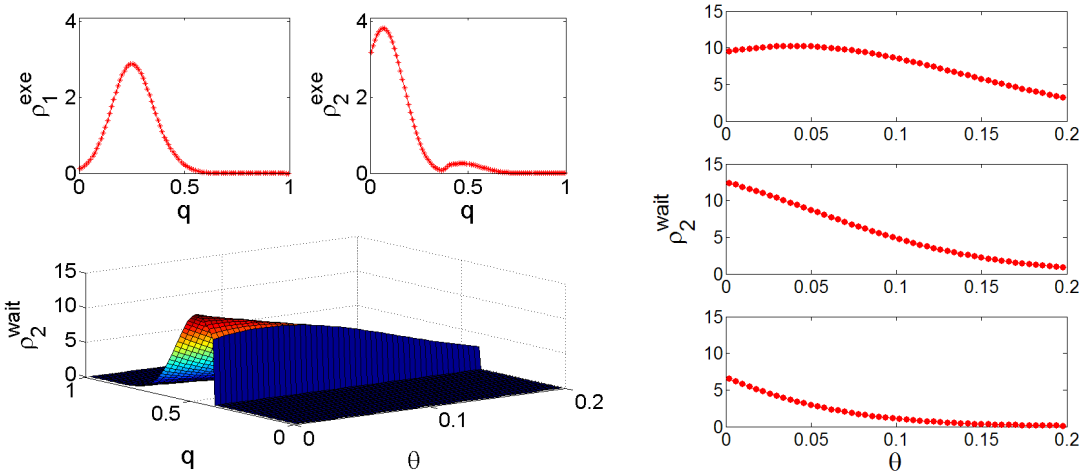


(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait}.

(b) ρ_2^{wait} pour $q = 0.405$ (haut), $q = 0.495$ (milieu), $q = 0.595$ (bas).

FIGURE 4.3 – Quantités fluides au temps $t = 0.1160$.

A partir du temps $t = \tau_{12} + \Delta t = 0.2040$, le temps d'attente des premières tâches déplacées au temps $t = \Delta t$ devient nul. A partir de cet instant, la courbe représentant ρ_2^{exe} traduit un transport avec terme source positif. Nous voyons ces tâches apparaître -avec la même charge que celles qu'ils avaient lorsqu'ils ont quitté C_1- sur le graphe de ρ_2^{exe}, en petites quantités sur la figure 4.4 mais bien mieux lorsque les quantités sont plus nombreuses à avoir fini leur attente, comme au temps $t = 0.3450$ (Fig. 4.5).



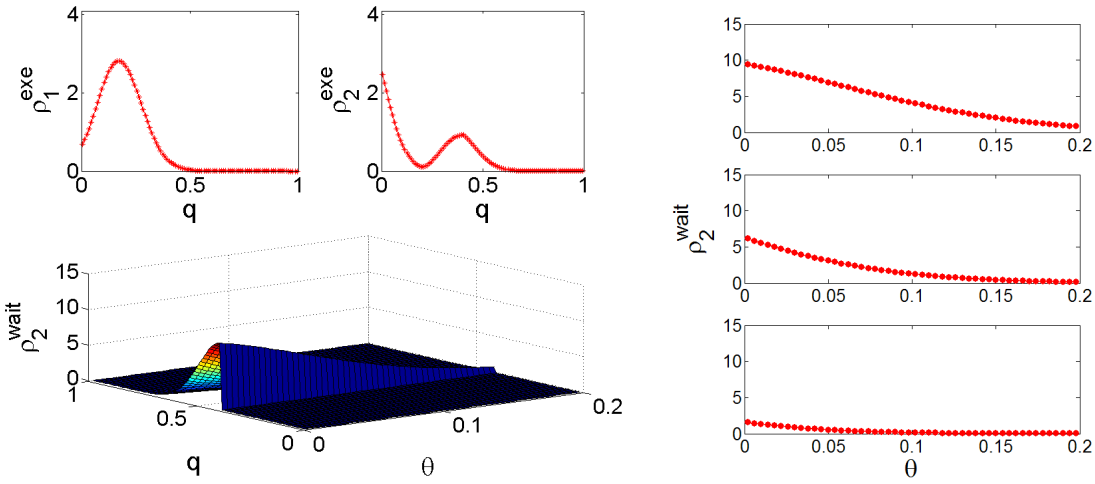
(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait}.

(b) ρ_2^{wait} pour $q = 0.405$ (haut), $q = 0.495$ (milieu), $q = 0.595$ (bas).

FIGURE 4.4 – Quantités fluides au temps $t = 0.2160$.

Par la suite, le *cluster* 1 continue à envoyer des tâches vers C_2 lorsque $q > \tilde{q}$, jusqu'à

ce que $\rho_1^{exe}(t,q) = 0$. Alors, à partir de cet instant, toutes les tâches présentes dans le *cluster* 1 finissent de s'exécuter dans ce *cluster* et le *cluster* 2 ne reçoit plus de nouvelles tâches. Le graphe de ρ_2^{wait} se transporte donc jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune tâche en attente. Ainsi, le graphe de ρ_2^{exe} n'aura plus d'arrivées de la part de ρ_2^{wait} et se transportera donc jusqu'à ce que la totalité des tâches se soient exécutée.



(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait}.

(b) ρ_2^{wait} pour $q = 0.405$ (haut), $q = 0.495$ (milieu), $q = 0.595$ (bas).

FIGURE 4.5 – Quantités fluides au temps $t = 0.2960$.

Remarquons que, s'il n'y avait pas de déplacements entre les *clusters*, le temps de vidage du réseau aurait été égal à 1. Avec les déplacements, le *cluster* 2 est vide à partir du temps $t = 0.9$, et dans le *cluster* 1, il ne reste plus que la traîne de la gaussienne, dûe à la diffusion.

II.1.2 Etude de convergence

Afin d'étudier la convergence du schéma numérique (4.5)-(4.6), nous calculons l'erreur commise par notre schéma par rapport à la solution exacte du problème continu, puis calculons ses normes. Nous étudions tout d'abord la solution exacte pour les quantités du *cluster* 1, c'est-à-dire la solution du système (4.8).

Nous obtenons $\rho_1^{wait}(t,q,\theta) = \rho_{1,0}^{wait}(q,\theta+t) = 0$. L'équation sur ρ_1^{exe} peut alors être résolue simplement, et nous obtenons

$$\rho_1^{exe}(t,q) = \begin{cases} \rho_{1,0}^{exe}(q+v_1 t), & \text{si } q \le \tilde{q} \text{ et } q + v_1 t \le \tilde{q}, \\ \exp\left(-\dfrac{t}{\mathscr{T}}\right) \rho_{1,0}^{exe}(q+v_1 t), & \text{si } q > \tilde{q}, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{\mathscr{T}}\left(t - \dfrac{\tilde{q}-q}{v_1}\right)\right) \rho_{1,0}^{exe}(q+v_1 t), & \text{si } q \le \tilde{q} \text{ et } q + v_1 t > \tilde{q}. \end{cases}$$

Puisque la quantité de tâches qui est déplacée de C_1 vers C_2 est maintenant connue, nous résolvons l'équation sur ρ_2^{wait}. En utilisant la propriété 2.5 (Chap.2), nous obtenons

$$\rho_2^{wait}(t,q,\theta) = \frac{1}{\mathscr{T}}\left[\exp\left(-\left(\frac{\theta+t-\tau_{12}}{\mathscr{T}}\right)\right) \rho_{1,0}^{exe}(q+v_1(\theta+t-\tau_{12}))\right] \mathbb{1}_{q>\tilde{q}}\, \mathbb{1}_{\theta\in[\tau_{12}-t,\tau_{12}[}.$$

	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$
$N_q=100$	$5.568\cdot10^{-2}$	$1.110\cdot10^{-1}$	$3.685\cdot10^{-1}$
$N_q=200$	$2.936\cdot10^{-2}$	$5.873\cdot10^{-2}$	$1.942\cdot10^{-1}$
$N_q=400$	$1.520\cdot10^{-2}$	$3.040\cdot10^{-2}$	$1.0010\cdot10^{-1}$
$N_q=500$	$1.227\cdot10^{-2}$	$2.458\cdot10^{-2}$	$8.740\cdot10^{-2}$
$N_q=1000$	$6.267\cdot10^{-3}$	$1.270\cdot10^{-2}$	$5.833\cdot10^{-2}$
$N_q=2000$	$3.184\cdot10^{-3}$	$6.592\cdot10^{-3}$	$3.952\cdot10^{-2}$

TABLE 4.1 – Normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_1^{exe}(t,q)$.

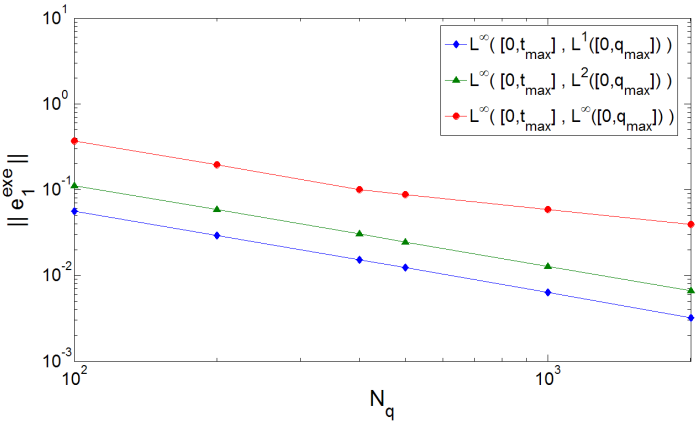


TABLE 4.2 – Convergence des normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_1^{exe}(t,q)$.

	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$
$N_q=100$	$3.949\cdot10^{-2}$	$5.960\cdot10^{-2}$	$1.857\cdot10^{-1}$
$N_q=200$	$2.012\cdot10^{-2}$	$3.046\cdot10^{-2}$	$9.646\cdot10^{-2}$
$N_q=400$	$1.015\cdot10^{-2}$	$1.542\cdot10^{-2}$	$4.919\cdot10^{-2}$
$N_q=500$	$8.132\cdot10^{-3}$	$1.237\cdot10^{-2}$	$3.951\cdot10^{-2}$
$N_q=1000$	$4.080\cdot10^{-3}$	$6.215\cdot10^{-3}$	$2.063\cdot10^{-2}$
$N_q=2000$	$2.043\cdot10^{-3}$	$3.116\cdot10^{-3}$	$1.325\cdot10^{-2}$

TABLE 4.3 – Normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_2^{exe}(t,q)$.

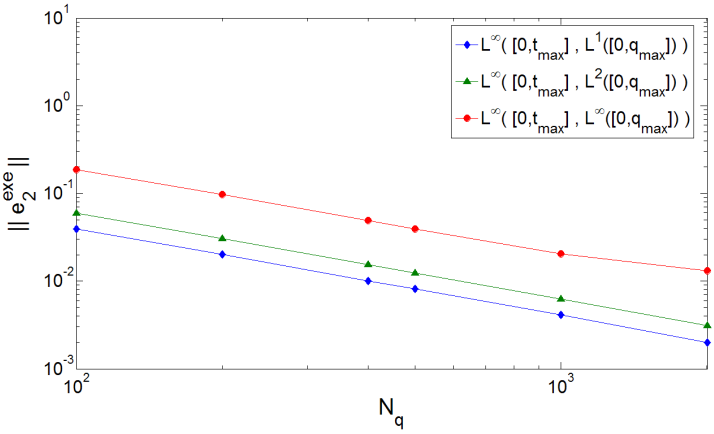


TABLE 4.4 – Convergence des normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e_2^{exe}(t,q)$.

	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$
$N_q=100$, $N_\theta=50$	$1.277\cdot10^{-2}$	$6.793\cdot10^{-2}$	$5.408\cdot10^{-1}$
$N_q=200$, $N_\theta=100$	$6.372\cdot10^{-3}$	$3.401\cdot10^{-2}$	$2.702\cdot10^{-1}$
$N_q=400$, $N_\theta=200$	$3.183\cdot10^{-3}$	$1.702\cdot10^{-2}$	$1.350\cdot10^{-1}$
$N_q=500$, $N_\theta=250$	$2.546\cdot10^{-3}$	$1.361\cdot10^{-2}$	$1.079\cdot10^{-1}$
$N_q=1000$, $N_\theta=500$	$1.272\cdot10^{-3}$	$6.809\cdot10^{-3}$	$5.395\cdot10^{-2}$
$N_q=2000$, $N_\theta=1000$	$6.361\cdot10^{-4}$	$3.405\cdot10^{-3}$	$2.697\cdot10^{-2}$

TABLE 4.5 – Normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]\times[0,0.20]))$ de $e^{wait}(t,q,\theta)$.

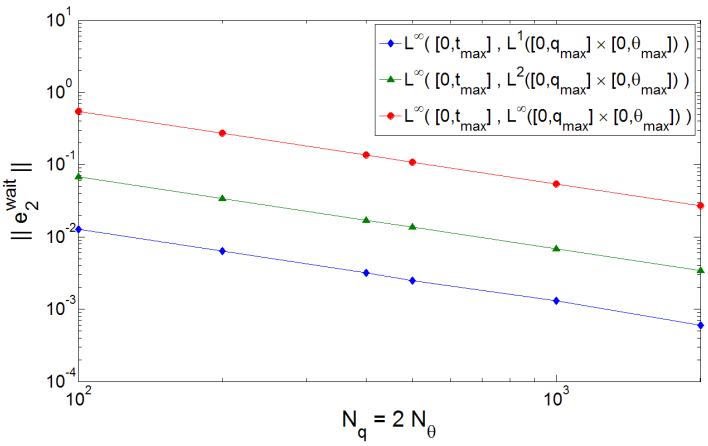


TABLE 4.6 – Convergence des normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ de $e^{wait}(t,q,\theta)$.

Et finalement, nous en déduisons

$$\rho_2^{exe}(t,q) = \rho_{2,0}^{exe}(q+v_2 t) + \int_{\tau_{12}}^{t} \frac{1}{\mathscr{T}} \exp\left(-\left(\frac{s-\tau_{12}}{\mathscr{T}}\right)\right) \rho_{1,0}^{exe}(q+v_2(t-s)+v_1(s-\tau_{12}))\, \mathbb{1}_{q+v_2(t-s)>\tilde{q}}\, ds.$$

Nous nous intéressons maintenant aux erreurs

$$e_1^{exe}(t^n,q_i) = \rho_{1,i}^{exe,n} - \rho_1^{exe}(t^n,q_i)\,, \quad e_2^{exe}(t^n,q_i) = \rho_{2,i}^{exe,n} - \rho_2^{exe}(t^n,q_i)\,,$$

et

$$e^{wait}(t^n,q_i,\theta_m) = \rho_{2,i,m}^{exe,n} - \rho_2^{exe}(t^n,q_i,\theta_m)\,.$$

Nous calculons les normes de ces erreurs et observons à quelle vitesse elles décroissent lorsque le maillage $(\Delta q, \Delta\theta)$ est raffiné. Ainsi, nous pourrons montrer numériquement que le schéma numérique converge, et montrer à quelle vitesse.

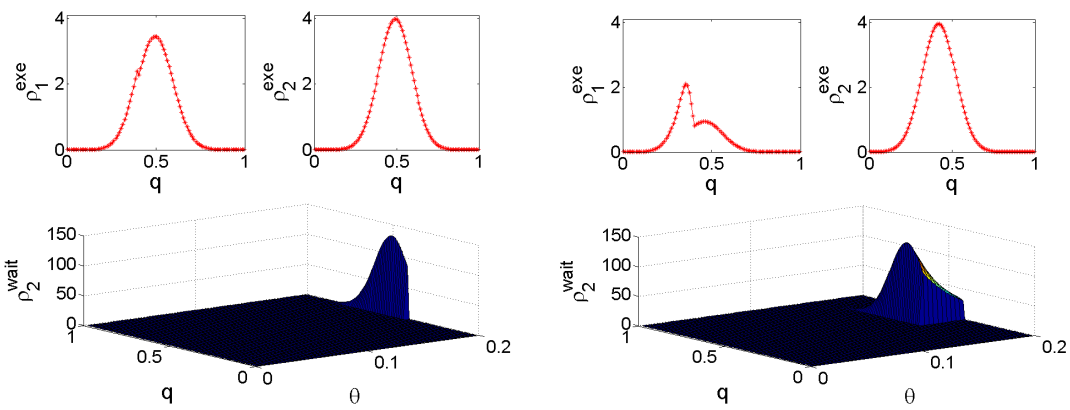
Nous prenons différentes valeurs de Δq et $\Delta\theta$, et pour chaque maillage donné, calculons les normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]))$ des erreurs commises sur les quantités en exécution e_1^{exe} et e_2^{exe} et les normes $\mathbb{L}^\infty([0,0.75],\mathbb{L}^p([0,1]\times[0,0.2]))$ des erreurs commises sur la quantité e^{wait} en attente sur le *cluster* 2, avec $p = 1,2,\infty$. Les tableaux 4.1, 4.3 et 4.5 détaillent les résultats, qui sont tracés sur les figures 4.2, 4.4 et 4.6. Le maillage adopté est noté dans les tableaux de résultats et le pas de temps est pris égal à $\Delta t = \Delta_\theta$, et respecte la condition CFL (4.7).

II.1.3 Variation du paramètre $\mathscr{T}$

Nous allons ici nous intéresser au comportement de notre modèle numérique lorsque $\mathscr{T}$ diminue, c'est-à-dire lorsque le temps pour tester l'ensemble du réseau est petit.

Nous travaillons avec le même cas test que précédemment, c'est-à-dire un réseau de 2 *clusters*, avec des déplacements seulement du *cluster* 1 vers le *cluster* 2. Soient $q \in [0,1]$ discrétisé en $N_q = 100$ mailles et $\theta \in [0,0.2]$ divisé en $N_\theta = 50$ cellules. Au paragraphe précédent, nous considérions $\mathscr{T} = 0.3$, pour la même discrétisation de l'espace des phases. Le pas de temps était alors défini par le maillage en θ : $\Delta t = 4\cdot 10^{-3}$.

Nous prenons ici $\mathscr{T} = 3\cdot 10^{-2}$. Le pas de temps est alors défini par $\Delta t = 4\cdot 10^{-3} = \Delta\theta$. Nous pouvons observer les quantités fluides après une itération à la figure 4.6.



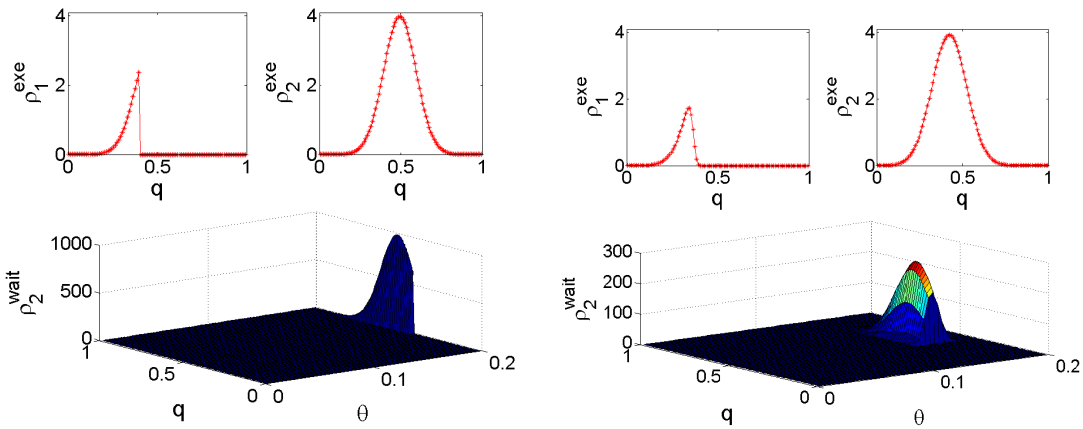
(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait} au temps $t = \Delta t$.

(b) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait} au temps $t = 0.04$.

FIGURE 4.6 – Quantités fluides avec $\mathscr{T} = 3\cdot 10^{-2}$.

La première observation est que les quantités déplacées sont plus importantes. En effet, l'amplitude maximale de ρ_2^{wait} dans le paragraphe précédent était environ égale à 15 (figure 4.2). Ici, nous avons multiplié $\mathscr{T}$ par 10 et obtenons une amplitude maximale pour ρ_2^{wait} de 150 (figure 4.6(b)). Puisque nous avons conservé la condition $\Delta t = \Delta\theta$, la discontinuité de ρ_2^{wait} se propage correctement. Nous pouvons néaanmoins remarquer, notamment sur la figure 4.6(a), l'apparition d'une discontinuité pour la quantité ρ_1^{exe} car la quantité de tâches qui a été déplacées lors d'une seule itération est trop importante. En effet, dans le cas test précédent, la proportion de tâches déplacée à chaque pas de temps était petite et pour toute charge pour laquelle les tâches devaient être déplacées, la courbe subissait un léger amortissement. En effet, de part le transport de la distribution des tâches en exécution, la quantité ρ_1^{exe} se trouvant au point $\tilde{q}$ n'était jamais la même. L'apparition d'une irrégularité, dans ce cas, pour la quantité ρ_1^{exe}, ne provient nullement du fait que $\mathscr{T}$ est grand, mais du fait que la proportion de tâches déplacée à chaque pas de temps, c'est-à-dire $\frac{\Delta t}{\mathscr{T}}\rho_1^{exe}$, est grande : nous nous plaçons ici dans des conditions qui ne sont pas compatibles avec l'asymptotique choisie dans le chapitre 2, à savoir $\Delta t << \mathscr{T}$.

Si nous prenons $\mathscr{T} = 3\cdot 10^{-3}$, le pas de temps est alors défini par $\Delta t = 3\cdot 10^{-3} = \mathscr{T}$, afin de respecter la condition CFL (4.7). Observons le comportement des quantités fluides aux temps $t = \Delta t$ et $\Delta t = 0.039$ sur les figures 4.7(a) et (b). La première chose que nous remarquons, c'est que nous n'avons pas le temps d'observer grand chose en ce qui concerne le déplacement des tâches. En effet, $\mathscr{T}$ modélise ici un réseau qui s'optimise instantanément, puisqu'il teste la totalité des tâches pendant le temps Δt. Pour observer les déplacements lorsque $\mathscr{T}$ est petit, nous devrions nous replacer dans le contexte de l'asymptotique : $\Delta t << \mathscr{T}$, c'est-à-dire un pas de temps très petit.



(a) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait} au temps $t = \Delta t$.

(b) ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} et ρ_2^{wait} au temps $t = 0.039$.

FIGURE 4.7 – Quantités fluides avec $\mathscr{T} = 3\cdot 10^{-3}$.

Un autre problème surgit lorsque $\mathscr{T}$ est petit : puisque la condition CFL (4.7) dépend de $\mathscr{T}$, le pas de temps est déterminé par $\mathscr{T}$ dès que $\mathscr{T} < \min\left\{\frac{\Delta q}{\max_j v_j}, \Delta\theta\right\}$. Ainsi, si nous observons la figure 4.7(b), nous pouvons observer qu'il se produit beaucoup de diffusion, puisque $\Delta t = \mathscr{T} < \Delta\theta$. Au temps Δt, l'amplitude de ρ_2^{wait} est environ égale à 1000, et 10 itérations plus tard, de seulement 250.

Nous avons donc, lorsque $\mathscr{T}$ est très petit, plusieurs comportements différents, qui n'agissent pas à la même échelle. Le transport en θ des quantités en attente exige Δt proche de $\Delta\theta$, afin d'évideter la diffusion des quantités en attente. De plus, pour pouvoir observer le déplacement des tâches entre les *clusters*, nous voulons $\Delta t << \mathscr{T}$. Pour y remédier, il faudrait étudier une autre asymptotique, qui nous permettrait de ne pas avoir à réduire le pas de temps en même temps que $\mathscr{T}$ (Chap. 2-Sect. IV).

II.2 Second cas test

Nous allons maintenant étudier un réseau de trois *clusters* notés C_1, C_2 et C_3. Nous souhaitons illustrer un comportement de la grille plus complexe que celui du premier cas test. Pour cela, nous prenons une fonctionnelle dépendant du temps restant d'exécution de la tâche t^{exe} ainsi que de la consommation énergétique K_e du *cluster* C_k. Rappelons que selon la décision de l'intergiciel, le tâche est déplacée ou non , et C_k peut être ou ne pas être le *cluster* de départ, ici noté C_j.

$$K(q_i, C_k) = t^{exe}(q_i, C_j, C_k) + K_e(q_i, C_k)\,, \text{ avec } K_e(q_i, C_k) = \int_0^{\frac{q_i}{v_k}} Z_k(t)\, dt\,.$$

Le temps restant d'exécution est défini par

$$t^{exe}(q_i(t), C_j, C_k) = \frac{q_i(t)}{v_k} + \tau_{jk}\,,\ \forall j,\, k \in \{1,..,C\}\,.$$

Nous choisissons une consommation d'énergie $Z_k(t)$ au temps t comme dépendante linéairement de la charge du *cluster* à l'instant t :

$$Z_k(t) = c_k \left(\int_q \rho_k^{exe}(t,q)\, dq + \int_{q,\theta} \rho_k^{wait}(t,q,\theta)\, dq\, d\theta \right),$$

où $c_k \in \mathbb{R}_+^*$ est un coefficient représentant le rendement énergétique du *cluster*.

Afin d'obtenir un comportement plus complexe du réseau, nous souhaitons visualiser une sorte d'"aller retour" des tâches entre deux *clusters* : un *cluster* étant très efficace en matière de performance de calcul va accueillir de nombreuses tâches. Ainsi, sa charge va beaucoup augmenter et il deviendra alors moins avantageux, le terme de consommation énergétique prenant alors le pas dans le calcul de la fonctionnelle. Les tâches se déplaceront alors vers un autre *cluster*, moins performant en termes de puissance de calcul, mais plus performant au niveau de sa consommation énergétique. De plus, en jouant sur les temps de déplacement entre les *clusters*, il serait intéressant d'observer des décisions de déplacement qui soient différentes dans un *cluster* selon le niveau de charge des taches.

Nous souhaitons imposer le déplacement aux tâches de C_1 et "interdire" le déplacement des *clusters* 2 et 3 vers C_1. Pour cela, nous fixons $v_1 = 0.5$ et $c_1 = 10.$ et imposons des *clusters* C_2 et C_3 bien plus performants et consommant moins. Nous choisissons C_3 un peu plus performant que C_2 : $v_2 = 2$, $v_3 = 3$ et C_2 qui consomme un peu moins que C_3 : $c_2 = 5$, $c_3 = 6$.

Afin d'observer des décisions de déplacement différentes en fonction des niveaux de charge, nous prenons les temps de transfert suivants :

— Afin de déplacer vers C_3 les tâches ayant une charge importante, nous posons $\tau_{13} = 0.9$.

— Afin que le passage entre C_1 et C_2 ne soit pas trop coûteux, même pour des tâches de charge peu importante, nous posons $\tau_{12} = 0.4$.

— Les *clusters* C_2 et C_3 ont des indices de performances et des consommations énergétiques proches. Afin de pas observer des vas et vients incessants de quantités faibles, nous imposons $\tau_{23} = \tau_{32} = 1.05$. Ainsi, si nous observons un déplacement dans un sens ou l'autre, il faudrait une grande différence de charge entre ces deux *clusters*.

Afin de bien distinguer les mouvements d'un *cluster* à l'autre, nous posons le temps mis pour tester la totalité des tâches un peu plus petit que pour le premier cas test : $\mathscr{T} = 0.15$. Ainsi, la proportion déplacée à chaque itération est plus grande car le nombre de trames testée est plus grande. De plus, un $\mathscr{T}$ plus petit signifie une grille de calcul plus réactive. Il nous fait adopter un pas de temps Δt qui nous permette à la fois d'observer ce qu'il se passe dans le réseau, et à la fois de conserver une certaine régularité dans nos simulations. Pour cela, nous adoptons un pas de temps $\Delta t = \Delta\theta$. Nous nous assurons lors du choix de la discrétisation que la condition CFL (4.7) est vérifiée. Nous choisissons $q \in [0,1]$ et $\theta \in [0,1.05]$, que nous divisons respectivement en $N_q = 50$ et $N_\theta = 250$ mailles homogènes. Ainsi, $\Delta q = 1/N_q = 2\cdot 10^{-2}$ et $\Delta\theta = 1.05/N_\theta = 4.2\cdot 10^{-3}$. De plus, $t \in [0,10]$ et nous discrétisons ce domaine en pas de temps $\Delta t = 4.2\cdot 10^{-3} = \Delta\theta$.

Pour plus de simplicité, nous posons $T_1 = T_2 = T_3$. Nous fixons les conditions initiales régulières suivantes :

$$\rho_{1,0}^{exe}(q) = \rho_{2,0}^{exe}(q) = \rho_{3,0}^{exe}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ avec } \mu = 0,65 \text{ et } \sigma = 0.1\,.$$

et

$$\rho_{1,0}^{wait}(q,\theta) = \rho_{2,0}^{wait}(q,\theta) = \rho_{3,0}^{wait}(q,\theta) = 0\,.$$

Pour ce cas test, les graphes sont agencés de la façon suivante : les courbes du haut représentent les densités de tâches en exécution ρ_1^{exe} (à gauche), ρ_2^{exe} (au milieu), ρ_3^{exe} (à droite) en fonction de la charge q à un temps donné. Les graphes situés en bas représentent les densité de tâches en attente dans les *clusters* 2 et 3 : ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} en fonction de la charge q et du temps d'attente θ au même temps. La densité de tâches en attente dans le *cluster* 1 est nulle au temps initial et nous avons paramétré le cas test afin de prévenir tout dépacement vers ce *cluster*.

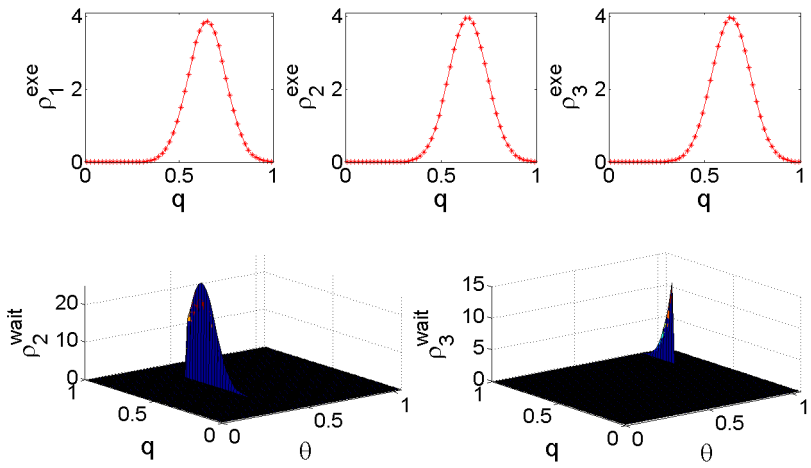


FIGURE 4.8 – ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} , ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.0042$.

Au temps $t = \Delta t$, nous pouvons voir à la figure 4.8 qu'une partie des tâches en exécution dans C_1 ont été déplacés vers C_2 et une partie des tâches de C_1 a aussi été déplacée vers C_3. Ces quantités apparaissent en attente dans les *clusters* 2 et 3, avec des temps d'attente respectifs égaux à $\tau_{12} = 0.5$ et $\tau_{13} = 0.9$. Le temps de transfert de C_1 vers C_3 est plus important que le transfert vers C_2 et la consommation énergétique de C_3 est plus importante que celle de C_2. Ainsi, seules des tâches avec une charge importante se sont déplacée du *cluster* 1 au *cluster* 3. Quant aux tâches de C_1 dont la charge est plus faible, il était plus avantageux d'aller dans C_2, car C_2 consomme moins que C_3 et le temps de transfert est moindre.

S'écoule ensuite un temps pendant lequel les tâches du *cluster* C_1 continuent à être déplacées vers les *clusters* C_2 et C_3 à chaque pas de temps. Nous avons déjà noté qu'il est plus avantageux de se déplacer du *cluster* C_1 vers le *cluster* C_3 seulement pour les tâches qui ont une charge importante. Or, la quantité du *cluster* C_1 qui n'est pas déplacée voit sa charge diminuer au cours du temps. Ainsi, les tâches de charge importante sont de moins en moins nombreuses, ce qui explique, et nous pouvons le remarquer sur la figure 4.9, que la quantité déplacée vers le *cluster* 3 diminue. Ajoutons aussi que, puisque nous déplaçons à chaque itération la proportion $\frac{\Delta t}{\mathscr{T}}\rho_1^{exe}$, nous pourrons observer le transport de la quantité ρ_1^{exe} au cours du temps au travers des arrivées en attente successives dans les *clusters* 2 et 3 (Fig. 4.11).

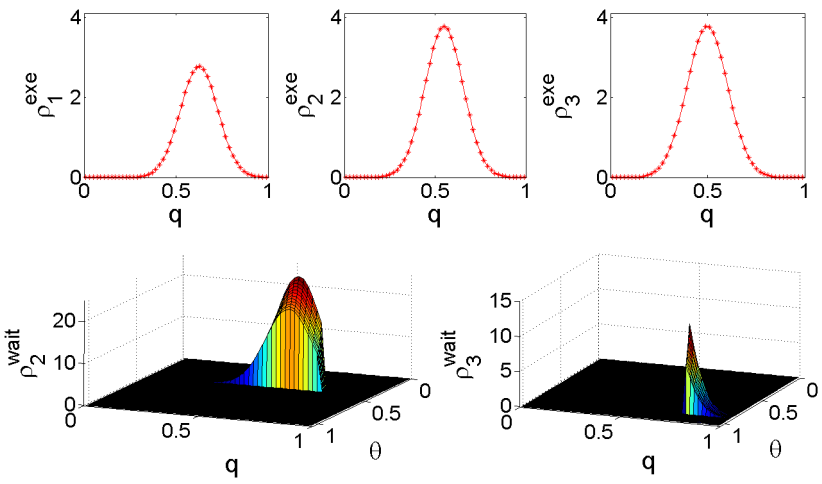


FIGURE 4.9 – ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} , ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.0504$.

Au fur et à mesure des déplacements des tâches vers les *clusters* 2 et 3, la charge de ces deux *clusters* augmente, surtout celle du *cluster* 2. Alors, la charge 2 va commencer à envoyer des tâches sur le *cluster* 3. Sa consommation énergétique est légèrement supérieure à celle du *cluster* 3, mais le temps de transport entre ces deux *clusters* est important : $\tau_{23} = 1.05$. Alors, ce ne sont que les tâches de ρ_2^{exe} aux niveaux de charge les plus importants qui sont déplacées. Au fur et à mesure de cette augmentation de la charge du *cluster* 2, il devient avantageux de se déplacer vers C_3 pour des tâches d'une charge de plus en plus faible. Sur la figure 4.10, nous pouvons observer ce comportement au temps $t = 0.1008$.

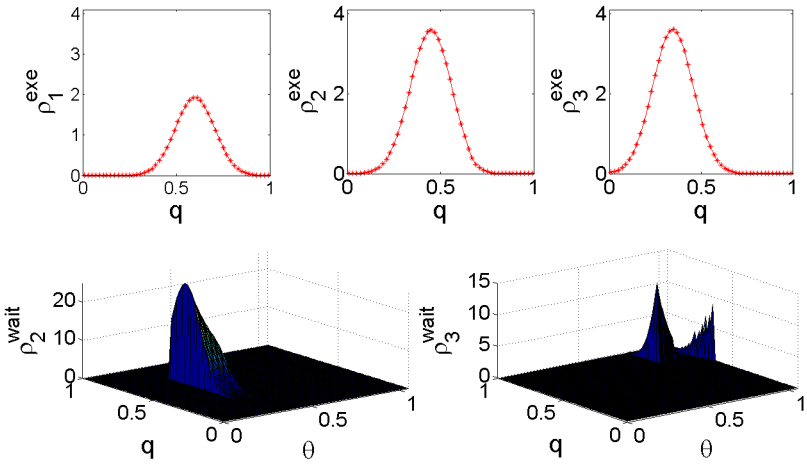


FIGURE 4.10 – ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} , ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.1008$.

Les *clusters* 2 et 3 continuent à recevoir des tâches provenant du *cluster* 1. Puisque les déplacements du cluster 1 au cluster 3 ne sont avantageux que pour des charges importantes, et que la distribution des tâches dans le *cluster* 1 se transportée peu à peu, presque plus aucune tâche ne se déplace vers le *cluster* 3. Nous pouvons observer sur la figure 4.11, que la quantité qui arrive depuis C_1 en attente dans C_2 au temps $t = 0.2058$, a exactement la même forme que la quantité $\frac{\Delta t}{\mathcal{T}}\rho_1^{exe}$, pour l'ensemble des $q \in [0,1]$. Nous pouvons aussi remarquer la forme de la distribution ρ_2^{exe} : la traîne de la maxwellienne qui correspond aux tâches aux charges les plus élevées, s'est entièrement déplacée vers le *cluster* 3.

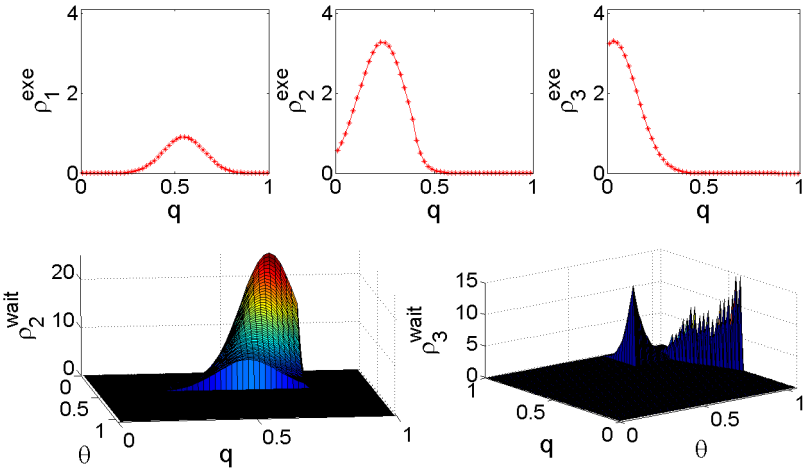


FIGURE 4.11 – ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} , ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.2058$.

Sur la figure 4.12, nous voyons avec plus de détails que la quantité de tâches déplacées depuis le *cluster* 1 avec un temps d'attente $\tau_{13} = 0.9$ est presque nulle. Nous remarquons aussi l'évolution des quantités de tâches arrivées depuis le *cluster* 2 avec un temps d'attente égal à $\tau_{23} = 1.05$. Ici aussi nous pouvons apprécier l'avantage de prendre $\Delta t = \Delta\theta$, en observant à quel point ρ_3^{wait} est irrégulière.

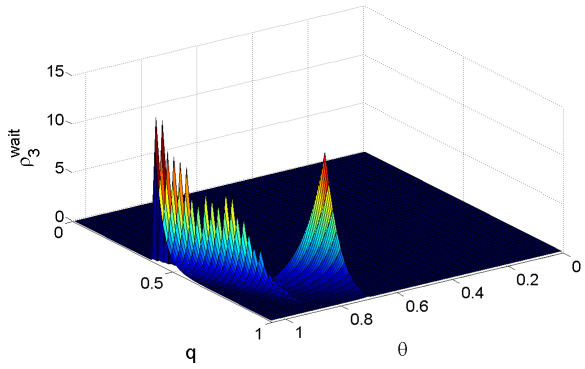


FIGURE 4.12 – ρ_3^{wait} au temps $t = 0.2058$.

Au temps où les tâches du *cluster* 2 reprennent leur exécution, la charge du *cluster* 3 a fortement diminué tandis que la charge du *cluster* 2 est encore importante. En effet, la totalité de ses tâches en exécution de C_3 a fini de s'exécuter, dû au fait que l'équation régissant le transport de ρ_3^{exe} avance à vitesse $v_3 = 3.0$, alors que $v_2 = 2.0$. Nous savons que seules les tâches en exécution sont testées pour déplacement. Alors, les tâches en attente dans le *cluster* 2 qui reprennent leur exécution sont déplacées vers le *cluster* 3. Ainsi, les tâches ayant été déplacées du *cluster* 1 vers le *cluster* 2 au temps Δt retournent donc en exécution au temps $t = 0.3990$, et au temps $t = 0.3990 + \Delta t = 0.4032$, elles sont déplacées vers le *cluster* 3 avec un temps d'attente égal à $\tau_{23} = 1.05$. Quant aux tâches s'exécutant sur le *cluster* 1, elles continuent à être envoyées sur le *cluster* 2, même si leur charge (et leur quantité) est petite. Toutes ces observations peuvent être faites en observant la figure 4.13.

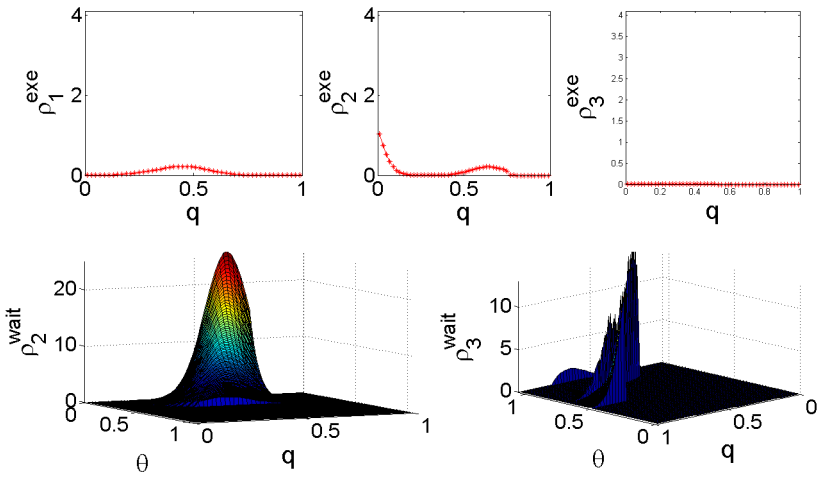


FIGURE 4.13 – ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} , ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.4032$.

Par la suite, le transport de ρ_2^{exe} ainsi que le fait que la charge du *cluster* 3 augmente, font que les déplacements de C_2 vers C_3 se tarissent, puis cessent. A partir du temps $t = 0.6258$ (Fig. 4.15 et 4.14) et jusqu'au temps final, nous n'observons plus que des déplacements du *cluster* 1 vers le *cluster* 2.

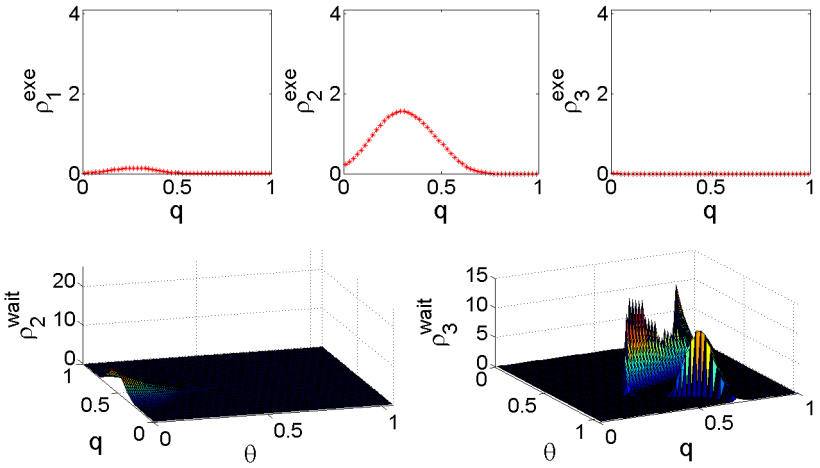


FIGURE 4.14 – ρ_1^{exe}, ρ_2^{exe} , ρ_3^{exe}, ρ_2^{wait} et ρ_3^{wait} au temps $t = 0.6258$.

Puisque les temps de transferts vers le *cluster* 3 sont très importants, l'ensemble des tâches déplacées est encore en attente au temps $t = 0.6258$. Sur la figure 4.15, nous pouvons visualiser l'ensemble des déplacements vers C_3 que nous avons détaillé jusqu'à présent, c'est-à-dire entre le temps initial et le temps $t = 0.6258$.

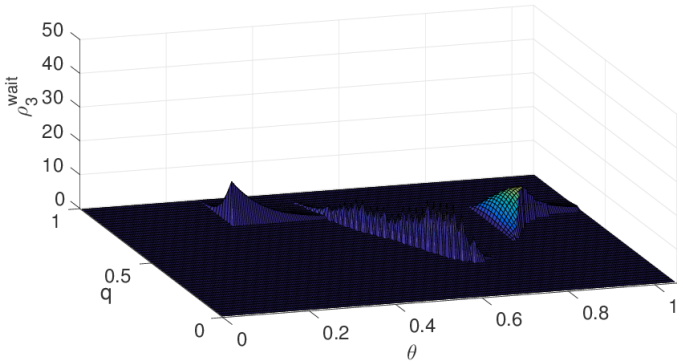


FIGURE 4.15 – ρ_3^{wait} au temps $t = 0.6258$.

CONCLUSION

Nous avons utilisé une discrétisation par volumes finis des équations fluides relatives au modèle construit au chapitre 3. Nous avons illustré, sur un cas test simple, la convergence de ce schéma numérique. Nous avons ensuite montré, sur un cas test faisant intervenir un comportement plus compliqué, que notre modèle a un comportement cohérent avec la dynamique d'une grille de calcul. Il serait intéressant de l'appliquer sur une grille de calcul existante, comme la grille Grid'5000.

Nous avons aussi illustré le comportement de notre modèle dans le cas d'un temps de latence qui devient petit. Nous avons observé que son comportement devenait singulier, ce qui nous a poussé dans la suite de cette thèse, à étudier les techniques permettant de discrétiser les modèles multi-échelles (Partie III).

CHAPITRE 5

SIMULATIONS NUMÉRIQUES POUR UN RÉSEAU AFDX

Sommaire

I Approximation par volumes finis 100

I.1 Discrétisation 100

I.2 Forme semi-discrétisée 101

I.3 Discrétisation temporelle 103

II Simulation numérique 104

II.1 Réseau AFDX considéré 104

II.2 Premier jeu de paramètres 107

II.3 Second jeu de paramètres 110

II.4 Troisième jeu de paramètres 115

II.5 Conclusion 116

Dans ce chapitre, nous simulons numériquement un réseau AFDX, selon la modélisation développée dans le chapitre 3. Nous approximons tout d'abord le système fluide par une méthode classique de volumes finis (Sect. I), et illustrons par la suite le comportement d'un réseau AFDX complexe utilisé dans l'industrie (Sect. II).

En premier lieu, rappelons les notations adoptées au chapitre 3. Nous considérons un réseau AFDX constitué d'un nombre V de *virtual links* VL_v avec $v \in \{1,..,V\}$, qui traversent les commutateurs du réseau. Chaque *virtual link* VL_v est traversé par des flots f, avec $f \in \{1,..,F_v\}$, et chaque flot f traverse une succession de commutateurs S_j, avec $j \in \{1,..,J\}$ et J variable selon le flot. Sur chacun de ces flots, des quantités fluides n^f, ρ^f, $\bar{a}^f$, $\bar{\theta}$ et $\bar{v}$ ont été définies. Ces quantités décrivent la densité (ou nombre moyen), la taille moyenne, l'âge moyen, le temps d'attente moyen et la vitesse moyenne des trames présentes dans un flot f donné. De plus, elles sont pondérées par des poids assignés à chaque commutateur à l'intérieur d'un flot. Nous avons montré dans le chapitre 3 que nous pouvons modéliser un réseau AFDX avec le système fluide suivant, défini pour chaque commutateur placé à la position $[j-1, j[$ dans un flot f :

$$
\begin{cases}
\partial_t n^f + \partial_{P_f}\left(n^f \bar{v}\right) = 0, & \text{(5.1a)}\\
\partial_t \rho^f) + \partial_{P_f}\left(\rho^f \bar{v}\right) = 0, & \text{(5.1b)}\\
\partial_t (n\bar{a})^f + \partial_{P_f}\left(\bar{v}\,(n\bar{a})^f\right) = n^f, & \text{(5.1c)}\\
\bar{\theta}(t,P_f) = \displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\int_{P_f}^{j} \frac{1}{D_j}\,\rho^f(t,x) + L_j\, n^f(t,x)\,dx\right) \mathbb{1}_{P_f\in[j-1,j[}, & \text{(5.1d)}\\
\bar{v}(t,P) = \dfrac{j-P}{\bar{\theta}(t,P)}\,\mathbb{1}_{P\in[j-1,j[}. & \text{(5.1e)}
\end{cases}
$$

De plus, nous avons montré que ce modèle fluide est bien posé et nous allons maintenant discrétiser ces équations de conservation en utilisant une méthode de volumes finis.

I APPROXIMATION PAR VOLUMES FINIS

I.1 Discrétisation

Nous discrétisons les domaines de définition des variables spatiale et temporelle. Pour cela, nous posons $P_f \in [0,J] = \bigcup_{j=1}^{J} [j-1,j[$ et T la borne maximale temporelle. Nous subdivisons chaque commutateur, de longueur 1, en N_P cellules de longueur $\Delta P = 1/N_P$. Ainsi, chaque flot est composé de $J\times N_P$ cellules uniformes. Les $J\times N_P+1$ points de discrétisation du flot f sont notés $P_{i-1/2} = (i-1)\Delta P$ avec $i\in\{1,J\times N_P+1\}$. Alors $0 = P_{1/2} < P_{3/2} < \ldots < P_{J\times N_P-1/2} < P_{J\times N_P+1/2} = J$. Les cellules qui discrétisent la variable de position dans un flot sont notées C_i, avec $i\in\{1,..,J\times N_P\}$ et sont telles que $C_i = [P_{i-1/2}, P_{i+1/2}]$, avec $\bigcup_{i=1}^{J\times N_P} C_i = [0,J]$. La figure 5.1 schématise cette discrétisation.

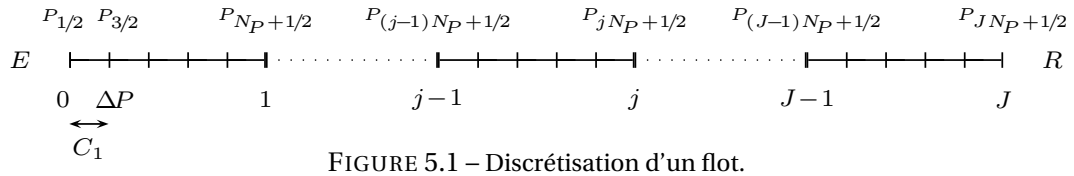


FIGURE 5.1 – Discrétisation d'un flot.

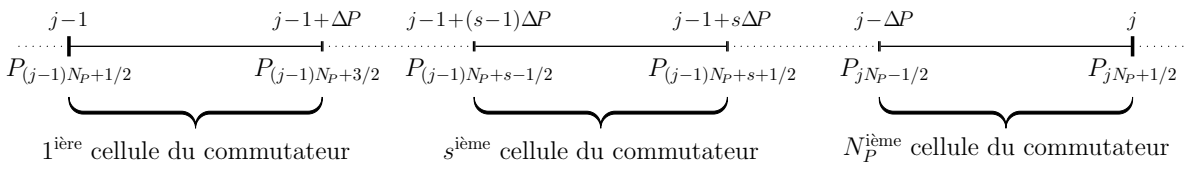


FIGURE 5.2 – Discrétisation du commutateur $[j-1,j[$ d'un flot.

Les N_P cellules qui subdivisent le j-ième commutateur sont désignées par les C_i avec $i\in\{(j-1)\times N_P+1,..,j\times N_P\}$ et $\bigcup_{i=(j-1)\times N_P+1}^{j\times N_P} C_i = [j-1,j]$. Les N_P+1 points de discrétisation de ce commutateur sont notés $j-1 = P_{(j-1)\times N_P+1/2} < \ldots < P_{j\times N_P+1/2} = j$ et sont schématisés sur la figure 5.2. Les points de discrétisation délimitant les entrées et sorties des commutateurs sont donc les $P_{k+1/2}$, avec $k = (j-1)\times N_P$ et $j\in\{1,..,J+1\}$. Les points milieux des cellules C_i sont notés $P_i = (P_{i-1/2}+P_{i+1/2})/2$.

Nous introduisons une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en N_t intervalles. Les points de discrétisation sont notés $t^n = n \times \Delta t$, $n \in \{0, .., N_t\}$ où le pas de temps est donné par $\Delta t = T / N_t$.

I.2 Forme semi-discrétisée

Afin de mettre en place la méthode de volumes finis, les inconnues sur chaque flot f et sur chaque commutateur S_j, avec $j \in \{1, .., J\}$, sont approximées par leur valeur moyenne sur chaque cellule du maillage. Nous introduisons $n_i(t)$, $\rho_i(t)$ et $\bar{a}_i(t)$, les valeurs moyennes respectives de n^f, ρ^f et de $(n\bar{a})^f$ sur la cellule C_i au temps t. Elles sont définies par

$$n_i(t) \simeq \frac{1}{\Delta P} \int_{P_{i-1/2}}^{P_{i+1/2}} n^f(t, P_f)\, dP_f\,, \quad \rho_i(t) \simeq \frac{1}{\Delta P} \int_{P_{i-1/2}}^{P_{i+1/2}} \rho^f(t, P_f)\, dP_f\,,$$

$$(n\bar{a})_i(t) \simeq \frac{1}{\Delta P} \int_{P_{i-1/2}}^{P_{i+1/2}} (n\bar{a})^f(t, P_f)\, dP_f\,.$$

Le temps d'attente moyen des trames ainsi que leur vitesse moyenne sont donnés par leurs définitions exactes respectives (5.1d) et (5.1e). Nous les calculons, non pas aux points milieux des cellules, mais aux points de discrétisation à gauche de chaque cellule. Ainsi, au temps t et sur la cellule $C_i = [P_{i-1/2}, P_{i+1/2}]$, nous nous intéressons à $\bar{\theta}(t, P_{i-1/2})$ et à $\bar{v}(t, P_{i-1/2})$, que nous notons respectivement $\bar{\theta}_{i-1/2}(t)$ et $\bar{v}_{i-1/2}(t)$. Nous discrétisons l'intégrale définissant le temps d'attente grâce à la méthode des rectangles. Ainsi, dans le commutateur $[j-1, j[$, c'est-à-dire lorsque $P_{i-1/2} \in \{P_{(j-1)\times N_P+1/2}, .., P_{j\times N_P-1/2}\}$, nous posons

$$\bar{\theta}_{i-1/2}(t) = \sum_{f=1}^{F_v} w_f^j\, \Delta P \sum_{l=i}^{j\times N_P} \left(\frac{1}{D_j} \rho_l(t) + L_j\, n_l(t) \right) \mathbb{1}_{P_{i-1/2} \in \{P_{(j-1)\times N_P+1/2}, .., P_{j\times N_P-1/2}\}} \tag{5.2}$$

et

$$\bar{v}_{i-1/2}(t) = \frac{j - P_{i-1/2}}{\bar{\theta}_{i-1/2}(t)}\, \mathbb{1}_{P_{i-1/2} \in \{P_{(j-1)\times N_P+1/2}, .., P_{j\times N_P-1/2}\}}\,. \tag{5.3}$$

Rappelons que les inconnues n^f, ρ^f, $(n\bar{a})^f$ sont relatives à chaque flot : leur calcul s'effectue sur chacun des flots, en les parcourant chacun de commutateur en commutateur et en évaluant leurs valeurs aux points milieux de discrétisation. Ces points sont marquées d'une croix rouge sur la figure 5.3. Par contre, les inconnues $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$ sont relatives aux commutateurs : elles somment les densités n^f et ρ^f sur l'ensemble des flots qui traversent chaque commutateur. Lorsque nous nous intéressons à un commutateur donné, les valeurs de $\bar{v}$ et de $\bar{\theta}$ sont donc communes à tous les flots le traversant.

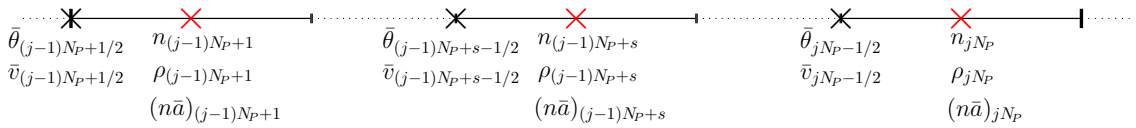


FIGURE 5.3 – Schéma des points où sont évaluées les inconnues n^f, ρ^f, $(n\bar{a})^f$ (indiqués par des croix rouges) et les inconnues $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$ (indiqués par des croix noires) dans chaque cellule d'un commutateur placé en position $[j-1, j[$ d'un flot f, au temps t.

En ce qui concerne les flux relatifs à chaque équation de conservation du système fluide, nous différencions leur calcul lorsqu'il s'agit d'un flux à l'intérieur d'un commutateur ou d'un flux d'entrée ou de sortie d'un commutateur. Les flux à l'intérieur de chaque commutateur sont donnés par

$$F(t,P_{i+1/2}) = n\bar{v}(t,P_{i+1/2})\,,\ G(t,P_{i+1/2}) = \rho\,\bar{v}(t,P_{i+1/2})\,,\ H(t,P_{i+1/2}) = \bar{v}(t,P_{i+1/2})\,n\bar{a}(t,P_{i+1/2})\,.$$

Et puisque $\bar{v} \geq 0$, nous approchons ces flux par les flux numériques suivants :

$$\mathscr{F}_{i+1/2}(t) = n_i(t)\,\bar{v}_{i+1/2}(t)\,,\quad \mathscr{G}_{i+1/2}(t) = \rho_i(t)\,\bar{v}_{i+1/2}(t)\,,\quad \mathscr{H}_{i+1/2}(t) = (n\bar{a})_i(t)\,\bar{v}_{i+1/2}(t)\,, \tag{5.4}$$

pour $i \in \{\{1,..,J \times N_P + 1\}$ et $i \neq (j-1) \times N_P$, avec $j \in \{1,..,J+1\}$ c'est-à-dire pour tous les flux, hormis ceux à l'entrée ou la sortie d'un commutateur.

Les flux en entrée et en sortie d'un commutateur peuvent être traités de manière différentes s'il s'agit des flux à l'entrée d'un flot et des flux entre deux commutateurs. Les flux en entrée de chaque flot sont donnés par les flux de densité sortant de l'*end-system* source de ce flot, notés $(n\,\bar{v})_{ES}$ et $\left(\rho\,\bar{v}\right)_{ES}$. Ainsi,

$$\mathscr{F}_{1/2}(t) = (n\,\bar{v})_{ES}\,,\quad \mathscr{G}_{1/2}(t) = \left(\rho\,\bar{v}\right)_{ES}\,,\quad \mathscr{H}_{1/2}(t) = 0\,. \tag{5.5}$$

Pour déterminer les flux entre deux commutateurs dans un flot donné, nous utilisons la relation (3.14) établie au chapitre 3. Ainsi, lorsque $i = (j-1) \times N_P$, avec $j \in \{2,..,J\}$, la vitesse de sortie d'un commutateur est égale à

$$\bar{v}_{i+1/2}(t) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\frac{1}{D_j}\rho_i(t) + L_j n_i(t)\right)}\,.$$

Evidemment, cette vitesse de sortie du commutateur $[j-1, j[$ est différente de la vitesse en entrée du commutateur $[j, j+1[$, qui est donnée par la définition (5.3). Néanmoins, les flux entre deux commutateurs sont égaux de part et d'autre de l'interface et nous les posons égaux à

$$\mathscr{F}_{i+1/2}(t) = \frac{n_i(t)}{\displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\frac{1}{D_j}\rho_i(t) + L_j n_i(t)\right)}\,,\quad \mathscr{G}_{i+1/2}(t) = \frac{\rho_i(t)}{\displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\frac{1}{D_j}\rho_i(t) + L_j n_i(t)\right)}\,,$$

$$\mathscr{H}_{i+1/2}(t) = \frac{(n\bar{a})_i(t)}{\displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j \left(\frac{1}{D_j}\rho_i(t) + L_j n_i(t)\right)}\,. \tag{5.6}$$

Remarque 5.1. *Puisque les flux sont égaux de part et d'autre de l'interface entre les commutateurs, et que la vitesse est discontinue en ces points, nous y observerons un saut des quantités n^f et ρ^f.*

Nous intégrons ensuite les équations de conservation (5.1a), (5.1b) et (5.1c) sur les cellules C_i et divisons les relations obtenues par ΔP. Nous obtenons le système d'équations semi-discrétisées,valable sur chaque flot, à l'intérieur de chaque commutateur, c'est-à-dire pour

$i \in \{(j-1) \times N_P + 1, .., j \times N_P\}$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} n_i(t) + \dfrac{1}{\Delta P} [\mathscr{F}_{i+1/2}(t) - \mathscr{F}_{i-1/2}(t)] = 0, \\ \dfrac{d}{dt} \rho_i(t) + \dfrac{1}{\Delta P} [\mathscr{G}_{i+1/2}(t) - \mathscr{G}_{i-1/2}(t)] = 0, \\ \dfrac{d}{dt} (n\bar{a})_i(t) + \dfrac{1}{\Delta P} [\mathscr{H}_{i+1/2}(t) - \mathscr{H}_{i-1/2}(t)] = n_i(t). \end{cases} \tag{5.7}$$

I.3 Discrétisation temporelle

Nous notons $n_i^n = n_i(t^n)$, $\rho_i^n = \rho_i(t^n)$, $(n\bar{a})_i^n = (n\bar{a})_i(t^n)$, $\bar{\theta}_{i\pm1/2}^n = \bar{\theta}_{i\pm1/2}(t^n)$ et $\bar{v}_{i\pm1/2}^n = \bar{v}_{i\pm1/2}(t^n)$, et adoptons la même notation pour les flux : $\mathscr{F}_{i\pm1/2}^n = \mathscr{F}_{i\pm1/2}(t^n)$, $\mathscr{G}_{i\pm1/2}^n = \mathscr{G}_{i\pm1/2}(t^n)$ et $\mathscr{H}_{i\pm1/2}^n = \mathscr{H}_{i\pm1/2}(t^n)$. Les dérivées en temps sont discrétisées par un schéma d'Euler du premier ordre.

Afin de résoudre le système semi-discrétisé (5.2)-(5.3)-(5.7) à chaque itération en temps, nous allons procéder de la manière suivante : nous initialisons les quantités n_i^0, ρ_i^0 et $(n\bar{a})_i^0$, $\forall i \in \{1, .., J \times N_P\}$ et en déduisons $\bar{\theta}_{i-1/2}^0$ et $\bar{v}_{i-1/2}^0$, $\forall i \in \{1, .., J \times N_P + 1\}$.

Remarque 5.2. *Pour effectuer l'itération en temps suivante, le calcul du temps d'attente moyen et de la vitesse moyenne aux interfaces entre les commutateurs, c'est-à-dire $\bar{v}_k^{n+1}$ et $\bar{\theta}_k^{n+1}$ pour $k = (j-1) \times N_P + 1/2$, avec $j \in \{2, .., J-1\}$, n'est pas nécessaire. En effet, nous avons uniquement besoin de la valeur des flux entrants en ces points, valeurs données par les flux sortants.*

— Nous cherchons tout d'abord, pour chaque flot f, les solutions n_i^{n+1}, ρ_i^{n+1} et $(n\bar{a})_i^{n+1}$ des équations de conservation. Ainsi, pour $i \in \{1, .., J \times N_P\}$, nous résolvons

$$\begin{cases} n_i^{n+1} = n_i^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta P} \left[\mathscr{F}_{i+1/2}^n - \mathscr{F}_{i-1/2}^n\right], \\ \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta P} \left[\mathscr{G}_{i+1/2}^n - \mathscr{G}_{i-1/2}^n\right], \\ (n\bar{a})_i^{n+1} = (n\bar{a})_i^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta P} \left[\mathscr{H}_{i+1/2}^n - \mathscr{H}_{i-1/2}^n\right] + \Delta t\, n_i^{n+1}. \end{cases}$$

- Les flux entrants dans chaque flot $\mathscr{F}_{1/2}^n$, $\mathscr{G}_{1/2}^n$ et $\mathscr{H}_{1/2}^n$ sont donnés par les relations (5.5).
- Les flux entrants dans chaque commutateur, c'est-à-dire $\mathscr{F}_{i+1/2}^n$, $\mathscr{G}_{i+1/2}^n$ et $\mathscr{H}_{i+1/2}^n$ lorsque $i = (j-1) \times N_P$, avec $j \in \{2, .., J\}$, sont donnés par les relations analytiques (5.6).
- A l'intérieur de chaque commutateur, les flux sont donnés, pour $i \in \{(j-1) \times N_P + 1, .., j \times N_P - 1\}$, et $j \in \{1, .., J\}$, par (5.4).

— Nous cherchons ensuite, à l'intérieur de chaque commutateur, les inconnues $\bar{\theta}_{i+1/2}^{n+1}$ et $\bar{v}_{i+1/2}^{n+1}$, pour $i \in \{(j-1) \times N_P + 1, .., j \times N_P - 1\}$, et $j \in \{1, .., J\}$, solutions de

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{i+1/2}^{n+1} = \displaystyle\sum_{f=1}^{F_v} w_f^j\, \Delta P \sum_{l=i+1}^{j \times N_P} \left(\frac{1}{D_j} \rho_l^{n+1} + L_j\, n_l^{n+1}\right), \\ \bar{v}_{i+1/2}^{n+1} = \dfrac{j - P_{i+1/2}}{\bar{\theta}_{i+1/2}^{n+1}}, \end{cases}$$

La condition CFL de stabilité associée à ces équations est

$$\Delta t \leq \frac{\Delta P}{\max_{f,\, i \in \{1,..,N \times J+1\}} \bar{v}_{i-1/2}}.$$

II SIMULATION NUMÉRIQUE

Dans cette section, nous illustrons le comportement de notre modèle et présentons les résultats numériques obtenus avec un réseau AFDX utilisé par Airbus. Nous expliquons tout d'abord la configuration de ce réseau (Sect. II.1). Par la suite, nous influons sur les paramètres des commutateurs : nous testons trois différents jeux de paramètres et observons comment ces changements se répercutent sur le comportement du réseau (Sect. II.2,II.3 et II.4). Ces paramètres sont résumés dans le tableau 5.3, à la fin de ce chapitre.

II.1 Réseau AFDX considéré

Nous allons travailler sur une portion de réseau AFDX qui est utilisée pour faire des tests de mesure de temps de traversée dans un laboratoire d'Airbus. Seule l'architecture du réseau a été conservée, les paramètres des commutateurs et des *end-systems* ont été normalisés par rapport aux valeurs réelles utilisées dans l'industrie. Notre analyse sera donc qualitative. Ce réseau, pour cause de contraintes de certification, est sur-dimensionné. Il n'y a donc pas d'intérêt ici à effectuer des comparaisons de temps de traversée. Ce qui nous intéresse est d'utiliser notre modèle fluide afin d'identifier les possibles points faibles du réseau.

Nous allons travailler sur un réseau hétérogène, où les performances des commutateurs sont disparates. Certains ont un débit de 100 Mbits/s et d'autres de 1 Gbit/s. Tout au long de ce cas test, nous allons influer sur les paramètres de performance des commutateurs. Ce réseau comprend :

— 10 *virtual links* que nous notons $VL\,v$ avec $v \in \{1,..,10\}$,

— 35 flots, notés flot f, avec $f \in \{1,..,35\}$,

— 22 *end-systems* que nous notons $ES\,s$, avec $s \in \{1,..,22\}$,

— 24 commutateurs, que nous notons S_k, avec $k \in \{1,..,24\}$.

La table 5.1 donne la liste des flots qui traversent chaque commutateur, ainsi que le nombre de *virtual links* différents composant ces flots. La table 5.2 désigne, pour chaque flot, son *virtual link* d'appartenance, la succession de commutateurs qu'il traverse entre ses *end-system* source et destinataire. De plus, les poids de chaque commutateur sont supposés connus *a priori* pour chaque flot et sont mentionnés dans ce tableau.

Rappelons que les poids sont notés w_f^j afin de désigner le poids du j-ième commutateur traversé par le flot f. Nous avons introduit les flots dans le chapitre 2 afin de prendre en compte le cas de la duplication de trames. Dans ce cas, chaque *virtual link* a un *end-system* source mais plusieurs *end-systems* destinataires. A l'intérieur de ce *virtual link*, il y a autant de flots que d'*end-systems* destinataires. Pour prendre un exemple, nous considérons le *virtual link* $VL6$, que nous avons schématisé sur la figure 5.4.

Indice du commutateur S_k	Liste des indices des flots traversant S_k	Nombre de *virtual links* traversant S_k
1	19, 30	2
2	28	1
3	1, 2, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 33	3
4	17,23	4
5	7, 8, 9, 10, 13 14, 15 , 16, 17, 18, 24	3
6	18	1
7	34	1
8	4, 35	2
9	1, 2, 4, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 25, 28, 31, 32	9
10	12	1
11	9, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35	3
12	10, 22	2
13	13	1
14	2, 5, 26, 28, 29	4
15	3, 14, 21	3
16	6, 29	2
17	4, 5, 6, 11, 15	3
18	25, 26, 27, 32	2
19	11, 12, 16, 27	3
20	8	1
21	1, 2, 4, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 25, 28, 31, 32	9
22	20	1
23	3, 7, 31	3
24	1	1

TABLE 5.1 – Liste des flots traversant chaque commutateur et le nombre de *virtual links* différents auxquels ces flots appartiennent.

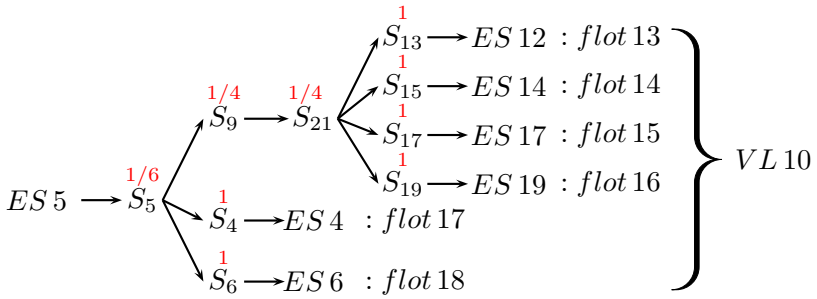


FIGURE 5.4 – Schéma du *virtual link* $VL6$, avec les poids assignés (en rouge) à chaque commutateur, pour chaque flot traversant ce commutateur.

Ce *virtual link* a un *end-system*, noté $ES5$, et six *end-sytems* destinataires. Ainsi, il est constitué de six flots. Un réseau AFDX, lorsqu'il s'agit d'envoyer une trame depuis un *end-system* source vers plusieurs *end-systems*, duplique la trame au moment où les chemins se séparent. Ainsi, nous considérons plusieurs flots transitant par le même commutateur et leur associons à chacun un poids égal, dont l'addition est égale à un, ceci afin de ne pas surcharger le réseau. Sur la figure 5.4, les six flots transitent par le premier commutateur, noté S_5. Ainsi, le

Indice du flot $f \in VLv$	Indice de VLv	Indice du ESs source	Indices des commutateurs S_k	Poids de ces commutateurs	Indice du ESs dest.
1	1	3	3 , 9 , 21 , 24	1/2, 1/2, 1/2, 1	22
2			3 , 9 , 21 , 14	1/2, 1/2, 1/2, 1	13
2	3	14	15, 23	1, 1	21
4	3	16	17, 21, 9, 8	1/3, 1, 1, 1	8
5			17, 14	1/3, 1	13
6			17, 16	1/3, 1	15
7	4	5	5, 9, 21, 23	1/4, 1/2, 1/2, 1	21
8			5, 9, 21, 20	1/4, 1/2, 1/2, 1	19
9			5, 11	1/4, 1	10
10			5, 12	1/4, 1	11
11	5	18	19, 17	1/2, 1	16
12			19, 21, 9, 10	1/2, 1, 1, 1	9
13	6	5	5, 9, 21, 13	1/6, 1/4, 1/4, 1	12
14			5, 9, 21, 15	1/6, 1/4, 1/4, 1	14
15			5, 9, 21, 17	1/6, 1/4, 1/4, 1	16
16			5, 9, 21, 19	1/6, 1/4, 1/4, 1	18
17			5, 4	1/6, 1	4
18			5, 6	1/6, 1	6
19	7	3	3, 1	1/6, 1	1
20			3, 9, 21, 22	1/6, 1/2, 1/2, 1	20
21			3, 9, 21, 15	1/6, 1/2, 1/2, 1	14
22			3, 12	1/6, 1	11
23			3, 4	1/6, 1	4
24			3, 5	1/6, 1	5
25	8	17	18, 21, 9, 11	1/3, 1, 1, 1	10
26			18, 24	1/3, 1	13
27			18, 19	1/3, 1	18
28	9	13	14, 21, 9, 2	1/2, 1, 1, 1	2
29			14, 16	1/2, 1	15
30	10	10	11, 1	1/6, 1	1
31			11, 9, 21, 23	1/6, 1/2, 1/2, 1	21
32			11, 9, 21, 18	1/6, 1/2, 1/2, 1	17
33			11, 3	1/6, 1	3
34			11, 7	1/6, 1	7
35			11, 8	1/6, 1	8

TABLE 5.2 – Pour chaque flot f, indice du *virtual link* VLv auquel il appartient, indice de son *end-system* source, liste des indices des commutateurs qui sont traversés, dans l'ordre, par ce flot, ainsi que les poids associés à ces commutateurs dans ce flot, puis indice de son *end-system* destinataire.

poids de ce commutateur pour chacun de ces six flots est égal à 1/6. Les poids des flots 13, 14, 15, 16, 17 et 18 dans le commutateur S_5, le premier commutateur qu'ils traversent, se notent donc $w^1_{13} = w^1_{14} = w^1_{15} = w^1_{16} = w^1_{17} = w^1_{18} = 1/6$.

Au temps initial $t = 0$, nous considérons un réseau vide de trames. Les *end-systems* sources émettent ensuite des trames en continu, c'est-à-dire à chaque itération en temps. Ce comportement ne reflète pas le fonctionnement réel d'un réseau AFDX mais va nous permettre d'observer les points d'accumulation de données dans le réseau. L'envoi des données depuis les *end-systems* s'effectue à un débit de 1 Gbit/s et avec une densité qui équivaut à charger le réseau à 5% (par rapport à un débit de 1 Gbit/s). Ainsi, à chaque itération en temps, les *end-systems* sources envoient $\Delta t \times 5/100$ Gbits. La taille des trames est considérée fixe et tous les commutateurs ont un temps de latence fixé à $L_j = 10^{-4}s$.

Le nombre de cellules dans chaque commutateur est pris égal à $N_P = 10$ et le pas de temps à

$$\Delta t = \frac{\Delta P}{2 * \max_{f,\, i \in \{1,..,N \times J+1\}} \bar{v}_{i-1/2}}.$$

Puisque le réseau est considéré vide au temps initial, et que $\bar{v}$ n'est pas définie formellement dans le cas d'une densité nulle (ou elle serait infinie), nous imposons dans ce cas $\bar{v} = 1/L_j$, ce qui est cohérent avec le comportement qu'aurait une trame arrivant dans un commutateur vide. Alors, dans ce cas,

$$\Delta t = \frac{\Delta P\, L_j}{2} = 5 \cdot 10^{-6} s.$$

Nous prenons un temps d'observation du réseau fixé à 1 seconde.

Durant ce cas test, nous illustrons le comportement du réseau grâce aux quantité fluides déjà introduites, et qui sont définies dans chaque flot. Puisque la taille des trames est fixe, nous nous intéressons seulement à ρ^n_i, $\bar{a}^n_i$ et $\bar{v}^n_{i-1/2}$. Nous introduisons deux variables supplémentaires qui sont, elles, définies pour chaque commutateur : la charge moyenne $C_k(t^n)$ et l'âge moyen $\bar{A}_k(t^n)$ dans le commutateur S_k, avec $k \in \{1,..,24\}$. Il s'agit, à chaque temps, de considérer l'ensemble des flots transitant par S_k, et pour chacun de ces flots, d'additionner toutes les charges ρ^n_i et les âges moyens $\bar{a}^n_i$ présents sur ce commutateur, quantités pondérées par le poids associé à ce commutateur pour chaque flot. Ainsi,

$$C_k(t^n) = \sum_f w^j_f \left(\sum_{i=1}^{N_P} \rho^n_i \, \mathbb{1}_{C_i \in [j-1,j[} \right) \mathbb{1}_{S_k = [j-1,j[\in f},$$

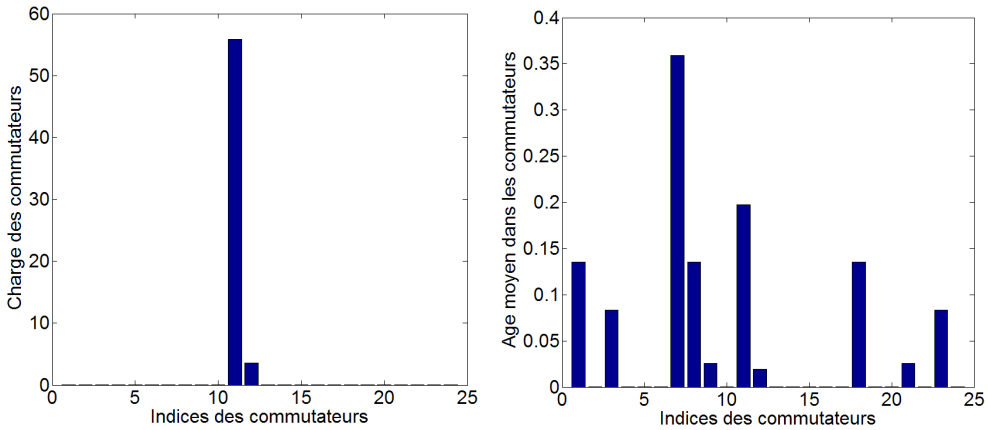
et

$$\bar{A}_k(t^n) = \sum_f w^j_f \left(\sum_{i=1}^{N_P} \bar{a}^n_i \, \mathbb{1}_{C_i \in [j-1,j[} \right) \mathbb{1}_{S_k = [j-1,j[\in f}.$$

II.2 Premier jeu de paramètres

Pour ce premier jeu de paramètres, nous paramétrons le débit de l'ensemble des commutateurs tel que spécifié dans le tableau 5.3 : les commutateurs ont tous un débit de 1 Gbit/s, excepté les commutateurs S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22} et S_{24}, qui ont un débit de 100 Mbits/s.

La figure 5.5 représente la charge moyenne et l'âge moyen dans l'ensemble des commutateurs du réseau au temps $t^n = 1s$.



(a) $C_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$. (b) $\bar{A}_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$.

FIGURE 5.5 – Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur, au temps $t^n = 1s$.

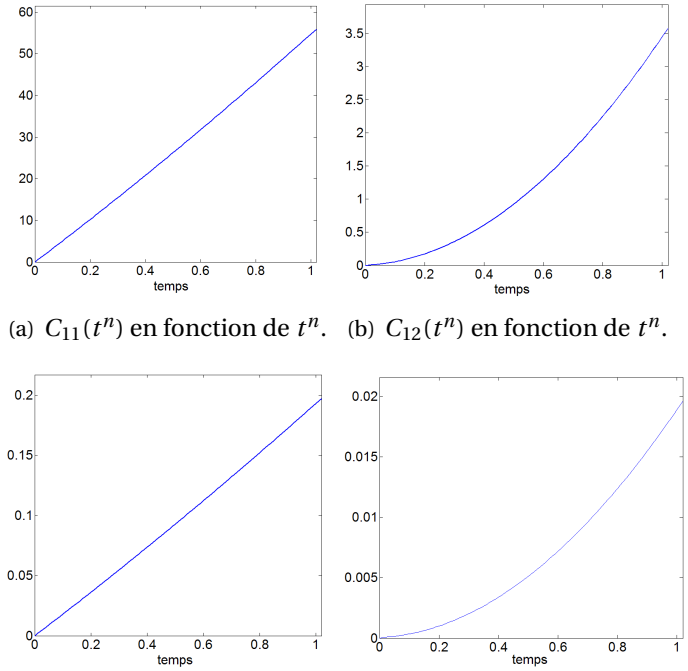
Nous observons une charge élevée dans les commutateurs S_{11} et S_{12}, et un âge moyen élevé dans les commutateurs S_1, S_3, S_7, S_8, S_9, S_{11}, S_{12}, S_{18}, S_{21} et S_{23}. Pour mieux comprendre les causes de l'accumulation de trames dans les commutateurs S_{11} et S_{12}, nous remarquons qu'ils font partie des commutateurs ayant un débit moindre, de 100 Mbits/s. Or, en nous référant au tableau 5.1, nous observons que parmi les commutateurs dont le débit est moindre, seuls les commutateurs S_{11} et S_{12} sont traversés par plus d'un *virtual link*. En effet, les commutateurs S_{10}, S_{13}, S_{22} et S_{24} sont chacun traversés par un seul flot.

— Le commutateur S_{11} est traversé par 8 flots : le flot 9 de poids 1, le flot 25 de poids 1, et les flots 30, 31, 32, 33, 34, 35 qui constituent le *virtual link* $VL10$ et ont donc un poids total égal à 1.

— Le commutateur S_{12} est traversé par 2 flots : le flot 10 et le flot 22, chacun de poids égal à 1.

Rappelons qu'à chaque pas de temps, chaque flot est chargé par son *end-system* source d'une quantité de données (pondérée par les poids) équivalente à 5% de ce que peut envoyer un commutateur au débit de 1 Gbit/s. Ainsi, sur une période de $1s$, chaque *end-system* source envoie 50 Mbits, c'est-à-dire 50% de ce que peuvent envoyer les commutateurs S_{11} et S_{12}, sans prendre en compte leur temps de latence. Ainsi, entre le temps initial et le temps d'observation $t = 1s$, les commutateurs S_{11} et S_{12} ont reçu respectivement 150 et 100 Mbits. Leur débit est de 100 Mbits/s, et si nous considérons qu'il faut en réalité un temps plus important pour émettre cette quantité de données, compte tenu des temps de latence, les trop plein de charge observés pour ces deux commutateurs s'expliquent. Ainsi, ces deux commutateurs reçoivent trop de données par rapport à la quantité que leur débit leur permet d'émettre, ce qui explique leur congestion.

Si nous observons l'évolution de la charge moyenne et de l'âge moyen dans les commutateurs S_{11} et S_{12} au cours du temps, nous observons cette accumulation de charge (Fig. 5.6). La file d'attente dans ces deux commutateurs grandit au fur et à mesure que le temps passe, et le temps passé dans ces commutateurs par les trames -et donc leur âge moyen $\bar{a}$- augmente aussi avec le temps. Nous remarquons aussi que le commutateur S_{12}, puisqu'il reçoit moins de données, en accumule moins et a donc une densité et un âge moyen moins grands que ceux du commutateur S_{11}.



(a) $C_{11}(t^n)$ en fonction de t^n. (b) $C_{12}(t^n)$ en fonction de t^n.

(c) $\bar{A}_{11}(t^n)$ en fonction de t^n. (d) $\bar{A}_{12}(t^n)$ en fonction de t^n.

FIGURE 5.6 – Quantités fluides dans les commutateurs S_{11} et S_{12} au cours du temps.

Nous allons maintenant expliquer l'âge moyen que nous avons constaté élevé dans les commutateurs, à la figure 5.5(b). Nous allons voir qu'il s'agit en fait d'une conséquence de la congestion du commutateur 11. Pour cela, nous étudions les flots qui passent par les commutateurs S_{11} et S_{12}. En observant le tableau 5.2, nous recensons tout d'abord quatre flots (9, 10, 22 et 25) qui passent par un de ces commutateurs mais leur configuration est telle que la congestion n'a aucune conséquence : le commutateur congestionné est le dernier dans chacun de ces flots et n'est suivi par aucun autre commutateur. Nous pouvons l'observer sur la figure 5.7.

$$ES\,5 \longrightarrow S_5 \longrightarrow S_{11} \longrightarrow ES\,10$$

(a) Schéma du flot 9.

$$ES\,5 \longrightarrow S_5 \longrightarrow S_{12} \longrightarrow ES\,11$$

(b) Schéma du flot 10.

$$ES\,3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_{12} \longrightarrow ES\,14$$

(c) Schéma du flot 22.

$$ES\,17 \longrightarrow S_{18} \longrightarrow S_{21} \longrightarrow S_9 \longrightarrow S_{11} \longrightarrow ES\,10$$

(d) Schéma du flot 25.

FIGURE 5.7 – Schémas des flots 9, 10, 22 et 25.

Le *virtual link* $VL10$ réunit 6 flots : les flots 30, 31, 32, 33, 34, et 35. Comme nous pouvons observer sur la figure 5.8, le commutateur S_{11} est le premier commutateur traversé par l'ensemble de ces flots. Or, les 8 commutateurs qui se situent après ce commutateur dans ce *virtual link* sont exactement les commutateurs qui présentent un âge moyen important sur la

figure 5.5.

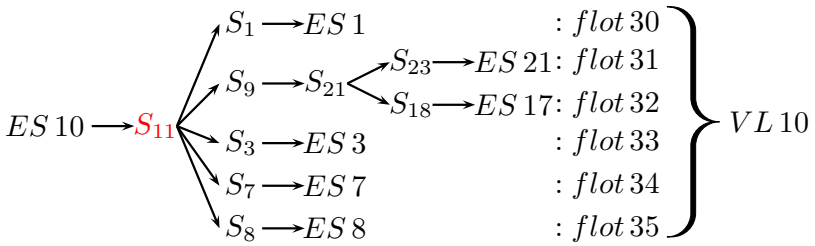
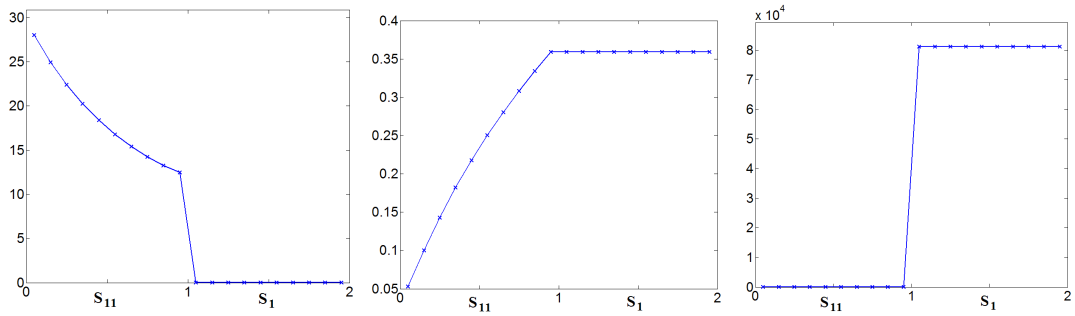


FIGURE 5.8 – Schéma du *virtual link* $VL10$ composé des flots 30, 31, 32, 34, 35.

Observons, au temps $t^n = 1s$, le comportement de ρ_i^n, $\bar{a}_i^n$ et $\bar{v}_{i-1/2}^n$ dans un flot congestionné. Sur la figure 5.9, nous observons ces variables dans le flot 30, qui traverse les commutateurs S_{11} puis S_1. Dans ce premier commutateur, nous pouvons observer la charge importante, qui induit une vitesse faible, et donc un âge moyen élevé. Dès que les trames quittent ce commutateur, nous remarquons un saut vitesse, et donc en densité. Le saut en vitesse est dû au débit du second commutateur, 10 fois plus rapide. Puisque la propagation de la densité dans ce commutateur est beaucoup plus rapide, l'âge moyen à la sortie du flot 30 correspond presque à celui observé à la sortie du commutateur S_{11}.



(a) ρ_i^n dans le flot 30. (b) $\bar{a}_i^n$ dans le flot 30. (c) $\bar{v}_i^n$ dans le flot 30.

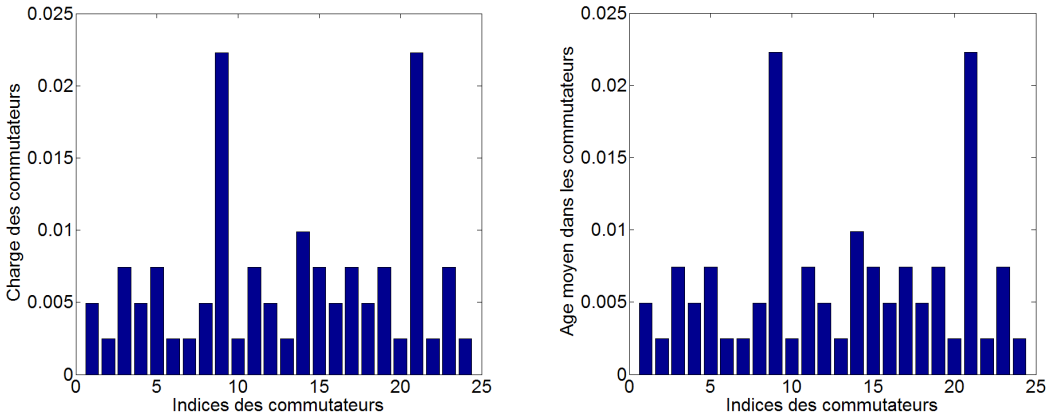
FIGURE 5.9 – Quantités fluides dans le flot 30 au temps $t^n = 1s$.

Afin de dissiper l'accumulation de charge, nous adoptons un nouveau jeu de paramètres.

II.3 Second jeu de paramètres

Nous modifions les paramètres liés aux performances des commutateurs S_{11} et S_{12}. Pour cela, nous posons leurs débits égaux à 1 Gbit/s. L'ensemble des débits utilisés pour cette section est résumé à la fin de ce chapitre, dans le tableau 5.3.

Nous représentons, sur la figure 5.10, la charge et l'âge moyen des trames au temps $t = 0.01s$. Nous n'observons plus d'accumulation de charge dans les commutateurs S_{11} et S_{12}, mais deux commutateurs (S_9 et S_{21}) présentent une charge et un âge moyen plus importants que les autres.



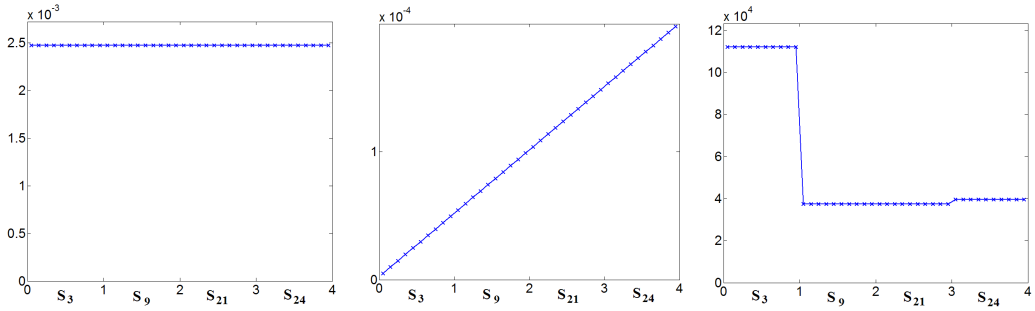
(a) $C_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$. (b) $\bar{A}_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$.

FIGURE 5.10 – Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur, au temps $t^n = 0.01s$.

Néanmoins, si nous observons les quantités fluides dans ces deux commutateurs, nous remarquons qu'ils ne constituent pas des points critiques du réseau. Le flot 1, dont la configuration est donnée par le schéma 5.11, traverse ces deux commutateurs. La figure 5.12 représente les quantités fluides ρ_i, $\bar{a}_i$ et $\bar{v}_{i-1/2}$ au temps $t^n = 0.01s$ dans ce flot. Nous observons une vitesse certes plus faible pour ces deux commutateurs -puisque leurs charges sont plus importantes- mais suffisante pour qu'il n'y ait pas d'accumulation de charge. Ainsi, l'âge moyen le long de tout le flot 1 est linéaire, sans discontinuité entre les commutateurs. Il passe donc le même temps dans l'ensemble des commutateurs qu'il traverse.

$$ES\,3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_9 \longrightarrow S_{21} \longrightarrow S_{24} \longrightarrow ES\,22$$

FIGURE 5.11 – Schéma du flot 1.

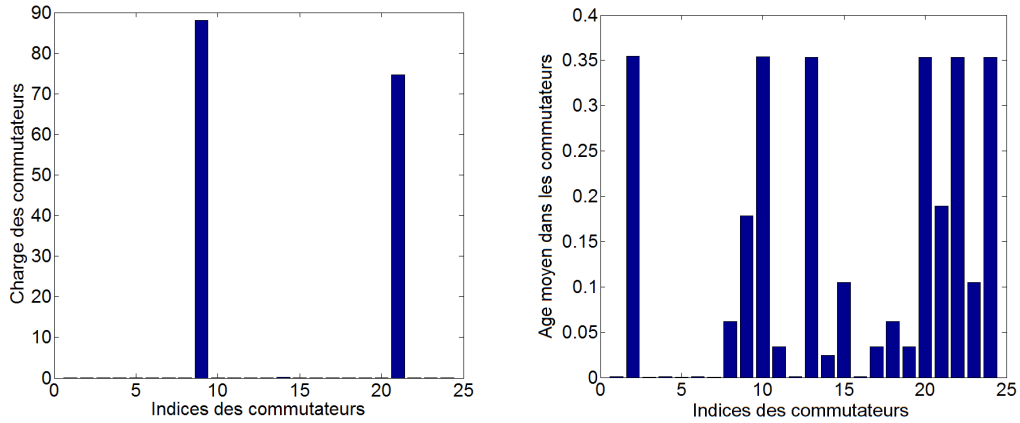


(a) ρ_i^n dans le flot 1. (b) $\bar{a}_i^n$ dans le flot 1. (c) $\bar{v}_i^n$ dans le flot 1.

FIGURE 5.12 – Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 0.01s$.

Nous laissons ensuite les données évoluer dans le réseau jusqu'au temps $t = 1s$ et constatons, sur la figure 5.13, que ces deux commutateurs sont devenus congestionnés. De plus, nous observons que l'âge moyen dans plusieurs commutateurs est important. En étudiant les flots

qui traversent les commutateurs S_9 et S_{21}, nous notons qu'il s'agit des commutateurs qui sont placés après ces deux commutateurs congestionnés.

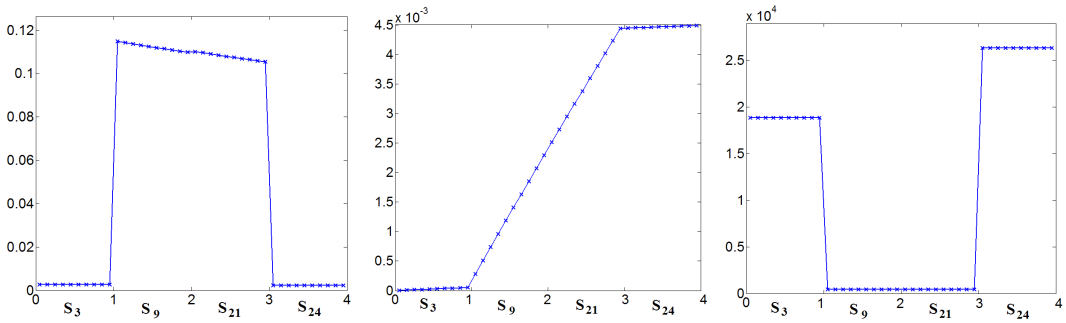


(a) $C_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$. (b) $\bar{A}_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$.

FIGURE 5.13 – Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur, au temps $t^n = 1s$.

Notons que la propagation de cette hausse de l'âge moyen affecte les commutateurs placés en aval de manière inégale. En effet, un commutateur qui est traversé par un seul flot et qui est placé en aval des commutateurs S_9 et S_{21} affecte un poids de valeur 1 à ce flot. Il est alors plus sensible que les commutateurs qui sont aussi traversés par des flots non affectés par la congestion. Nous pouvons nous en rendre compte en observant l'âge moyen des commutateurs 2, 10 13, 20, 22 et 24, qui sont traversés par un seul flot, sur la figure 5.13.

Afin d'expliquer la congestion, nous consultons la table 5.1 et notons que seize flots, faisant partie de neuf *virtual links* différents, traversent ces deux commutateurs. Il s'agit donc d'un point névralgique du réseau. Puisque neuf *virtual links* différents traversent ces deux commutateurs, l'addition des poids de tous les flots traversant S_9 et S_{21} est égale à neuf. Il y a donc 9×50 Mbits/s qui ont été envoyés vers ces deux commutateurs entre le temps initial et l'instant où nous observons le réseau. Pour comprendre le comportement du réseau, nous observons le comportement de ρ_i^n, $\bar{a}_i^n$ et de $\bar{v}_{i-1/2}^n$ dans le flot 1, à différents instants.



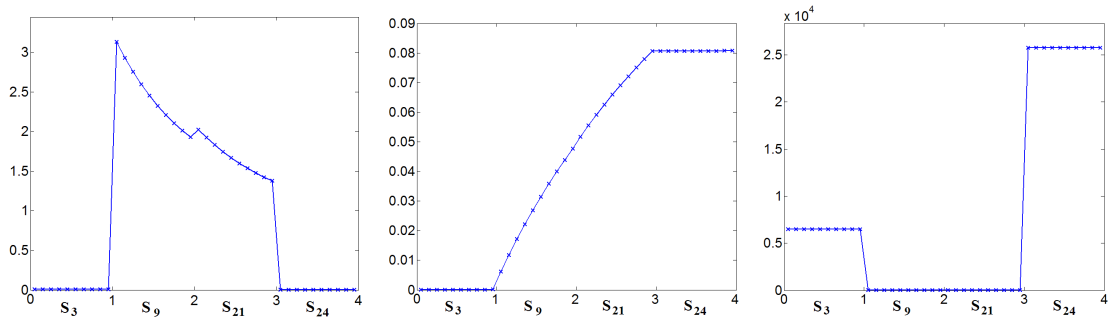
(a) ρ_i^n dans le flot 1. (b) $\bar{a}_i^n$ dans le flot 1. (c) $\bar{v}_i^n$ dans le flot 1.

FIGURE 5.14 – Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 0.3s$.

Au temps $t = 0.01s$, la charge déjà importante des commutateurs S_9 et S_{21} assurait

néanmoins une vitesse suffisante pour permettre à l'ensemble des seize flots de transiter sans congestion. Entre les temps $t = 0.01s$ et le temps $t = 0.3s$, cette charge plus importante que les autres, même si non critique, a imposé une vitesse plus faible, ce qui a ralentit la sortie des trames de ces commutateurs. La vitesse, sans cesse réduite, a été suffisante pour envoyer la charge, sans cesse grandissante, jusqu'à ce que la charge devienne trop importante pour que la vitesse qu'elle engendre soit suffisante pour traiter l'ensemble des flots. La charge a alors commencé à s'accumuler, ce qui a encore fait diminuer la vitesse. Sur la figure 5.14, nous pouvons remarquer le début de l'accumulation de charge les deux commutateurs, accompagnée d'une vitesse faible ainsi que d'un âge moyen grandissant.

Au temps $t = 0.6s$, l'arrivée incessante de nouvelles trames et la faible vitesse dans les commutateurs S_9 et S_{21} explique la pente de plus en plus raide de la courbe représentant la densité, à la figure 5.15. De plus, nous pouvons voir que l'âge moyen n'est plus linéaire le long de ces commutateurs : la vitesse en entrée de ces commutateurs est plus faible que la vitesse à leur sortie, puisque la file d'attente ne cesse de grandir. Ainsi, les trames en entrée du commutateur passent davantage de temps dans le flot que les trames qui sont y arrivées plus tôt.



(a) ρ_i^n dans le flot 1. (b) $\bar{a}_i^n$ dans le flot 1. (c) $\bar{v}_i^n$ dans le flot 1.

FIGURE 5.15 – Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 0.6s$.

Si nous observons la vitesse pour ces deux commutateurs, à la figure 5.16, nous pouvons observer la différence de vitesse entre l'entrée et la sortie de commutateurs S_9 et S_{21}. De plus, nous constatons que la vitesse dans le commutateur S_{21} est plus importante puisque ce commutateur est moins chargé, ce qui explique le saut de la courbe de densité entre ces deux commutateurs.

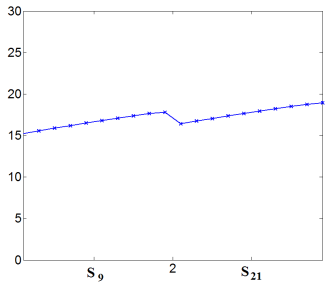
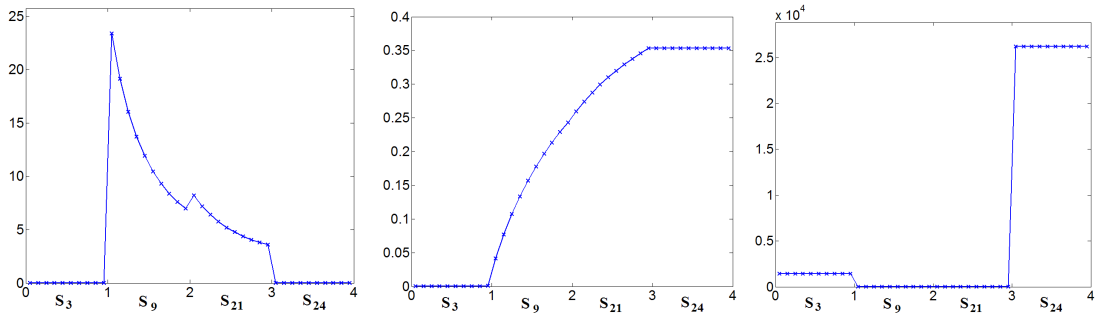


FIGURE 5.16 – $\bar{v}_i^n$ dans les commutateurs S_9 et S_{21} pour le flot 1 au temps $t^n = 0.6s$.

Au temps $t = 1s$ nous remarquons, sur la figure 5.17, que le phénomène de raidisse-

ment de la courbe en densité s'est aggravé et que la courbe représentant $\bar{a}_i^n$ a aussi une pente plus importante. De plus, nous remarquons que l'âge moyen passé dans le commutateur S_9 est maintenant bien plus important que dans S_{21}.



(a) ρ_i^n dans le flot 1. (b) $\bar{a}_i^n$ dans le flot 1. (c) $\bar{v}_i^n$ dans le flot 1.

FIGURE 5.17 – Quantités fluides dans le flot 1 au temps $t^n = 1s$.

Au temps $t = 1s$, la vitesse dans les commutateurs S_9 et S_{21} est devenue très faible, comme le montre la figure 5.18. De plus, la différence de vitesse entre l'entrée et la sortie de ces deux commutateurs explique l'allure concave de la courbe de l'âge moyen 5.17(b).

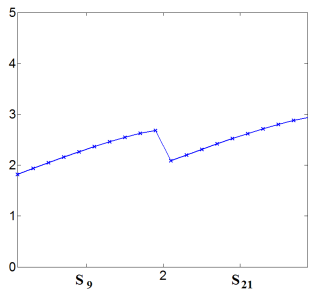


FIGURE 5.18 – $\bar{v}_i^n$ dans les commutateurs S_9 et S_{21} pour le flot 1 au temps $t^n = 1s$.

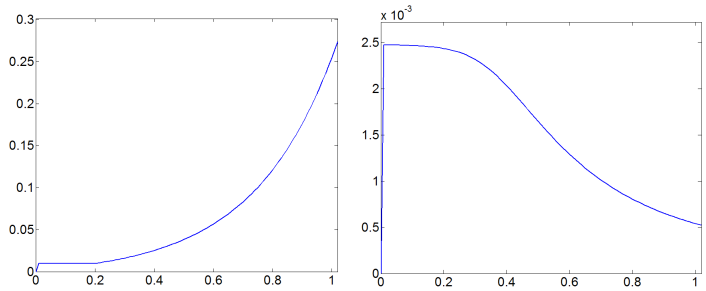
Nous allons ici nous intéresser au comportement de commutateurs placés en aval de ces commutateurs congestionnés. Nous avons déjà remarqué l'augmentation de leur âge moyen. Nous observons ici l'évolution de leur charge moyenne. Nous observons les commutateurs S_{24} et S_{24} dans le *virtual link* $VL1$. Celui-ci est composé des flots 1 et 2 et est schématisé à la figure 5.19.

$$\begin{array}{lll} ES\,3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_9 \longrightarrow S_{21} \nearrow S_{24} \longrightarrow ES\,22 & flot\ 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow S_{14} \longrightarrow ES\,13 & flot\ 2 \end{array}$$

FIGURE 5.19 – Schéma du *virtual link* $VL1$, composé des flots 1 et 2.

Comme nous le constatons sur la figure 5.20, la charge dans ces deux commutateurs n'évolue pas de la même manière au cours du temps. Nous pouvons tout d'abord remarquer que la charge dans le commutateur S_{24} diminue au cours du temps. Puisque ce commutateur

est uniquement traversé par le flot 1, cela signifie que le flux sortant du commutateur S_{21} dans ce flot diminue au cours du temps. Or, le flux sortant du commutateur S_{21} est constant pour l'ensemble des flots le traversant, ce qui implique que le flux sortant de ce commutateur augmente au cours du temps pour d'autres flots le traversant. C'est ce que nous observons sur la figure 5.20(a), qui représente l'évolution de la charge dans le commutateur S_{14}. Ce phénomène s'explique par le fait que nous n'avons pas imposé de priorités entre les flots.



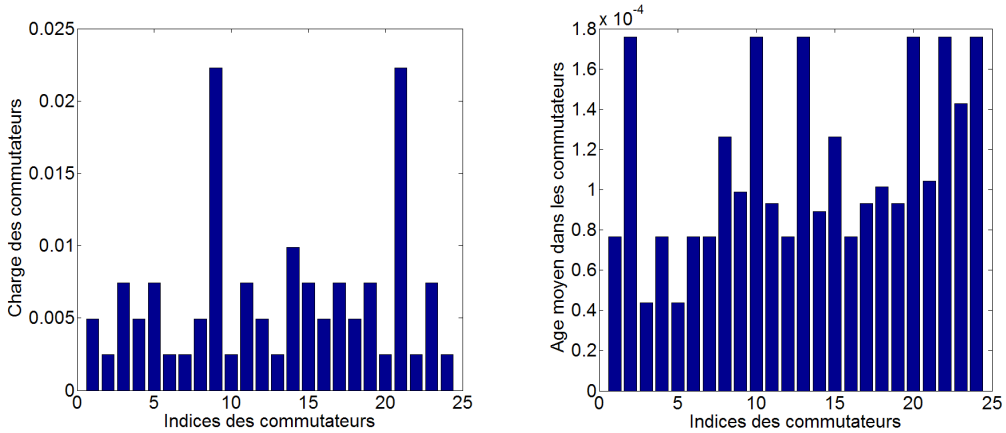
(a) $C_{14}(t^n)$ en fonction de t^n. (b) $C_{24}(t^n)$ en fonction de t^n.

FIGURE 5.20 – Charge moyenne dans le commutateur S_{14} et S_{24} au cours du temps.

Le changement de paramètres que nous avons effectué n'a fait que déplacer la congestion. L'amélioration locale des performances des commutateurs ne garantit donc pas une amélioration de la qualité de service du réseau. Nous allons de nouveau modifier les paramètres des commutateurs congestionnés.

II.4 Troisième jeu de paramètres

Nous changeons le débit des commutateurs S_9 et S_{21} de 1 Gbit/s à 10 Gbits/s. La figure 5.21 représente la charge et l'âge moyen des trames au temps $t^n = 0.01s$ mais aussi au temps $t^n = 1s$. Ainsi, les commutateurs S_9 et S_{21} sont toujours remplis davantage que les autres commutateurs, mais ils ne sont plus critiques sur cet horizon de temps.



(a) $C_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$. (b) Age moyen $\bar{A}_k(t^n)$, $\forall k \in \{1,..,24\}$.

FIGURE 5.21 – Charge moyenne et âge moyen dans chaque commutateur aux temps $t^n = 0.01s$ et $t^n = 1s$.

II.5 Conclusion

En modifiant seulement le débit des commutateurs, nous avons réussi à obtenir un réseau non critique dans le cas d'*end-systems* sources envoyant des données en continu. Il y a cependant d'autres paramètres sur lesquels nous pourrions d'influer afin de modifier la dynamique du réseau, et possiblement l'améliorer : les temps de latence par exemple. Des niveaux de priorité pourraient aussi être mis en oeuvre et pourraient prévenir le comportement que nous avons observé à la figure 5.20 où les flots influent les uns sur les autres. La modification de la topologie du réseau est aussi une possibilité.

Indice du commutateur	Valeur de son débit pour le jeu de paramètres		
	premier	second	troisième
1	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
2	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
3	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
4	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
5	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
6	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
7	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
8	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
9	1 Gbit/s	1 Gbit/s	10 Gbits/s
10	100 Mbits/s	100 Mbits/s	100 Mbits/s
11	100 Mbits/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
12	100 Mbits/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
13	100 Mbits/s	100 Mbits/s	100 Mbits/s
14	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
15	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
16	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
17	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
18	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
19	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
20	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
21	1 Gbit/s	1 Gbit/s	10 Gbits/s
22	100 Mbits/s	100 Mbits/s	100 Mbits/s
23	1 Gbit/s	1 Gbit/s	1 Gbit/s
24	100 Mbits/s	100 Mbits/s	100 Mbits/s

TABLE 5.3 – Débits des commutateurs pour les sections II.2, II.3 et II.4.

Partie III

Construction d'un schéma AP pour les plasmas de fusion

CHAPITRE 6

LES PLASMAS DE FUSION, UN PROBLÈME MULTI-ÉCHELLES

Sommaire

I Présentation des plasmas thermonucléaires 120
- I.1 Description d'un plasma 120
- I.2 Propriétés d'un plasma 121
- I.3 Principe de la fusion thermonucléaire 125

II Modélisation mathématique d'un plasma 129
- II.1 Description particulaire 129
- II.2 Description cinétique 130
- II.3 Description fluide 131

III Les problèmes multi-échelles 132
- III.1 Qu'est ce qu'un problème multi-échelles ? 132
- III.2 Les plasmas de fusion : un problème multi-échelles 133
- III.3 Solutions pour modéliser un problème multi-échelles 135

IV Les schémas préservant l'asymptotique (schémas AP) 136

Ce chapitre traite des plasmas de fusion, explore leurs propriétés ainsi que les méthodes qui peuvent être mises en œuvre afin de les modéliser.

Nous expliquons tout d'abord ce qu'est un plasma thermonucléaire. Pour cela, nous introduisons tout d'abord les propriétés générales d'un plasma. Cet état de la matière contient un nombre important de particules chargées qui à la fois génèrent un champ électromagnétique, et à la fois sont influencées par lui. De ce fait, le comportement d'un plasma est très différent des comportements que l'on peut observer dans les autres états de la matière. Nous évoquons notamment les notions de quasi-neutralité et d'écrantage électronique et les différents types de plasmas existants. Nous nous intéressons ensuite à un type de plasma artificiel : les plasmas de fusion, ou thermonucléaires. Nous présentons pour cela les principes de cette réaction nucléaire ainsi que du confinement magnétique mis en place dans un tokamak, en prenant comme exemple le projet ITER. Le comportement d'un plasma de fusion en présence d'un champ magnétique est abordé, et nous évoquons la notion d'anisotropie du comportement des particules ainsi que le mouvement cyclotronique (Sect. I).

La modélisation du comportement d'un plasma de fusion est obtenue grâce au couplage des champs électromagnétiques et du mouvement des particules chargées. Nous listons les différents modèles permettant de décrire ce système couplé et examine les avantages et limites de chaque niveau de description : particulaire, cinétique ou fluide (Sect. II).

Or, la modélisation d'un plasma se caractérise par des grandeurs caractéristiques très hétérogènes, d'ordres de grandeur assez disparates, qui ne peuvent être décrites avec un seul niveau de description. Ce type de problème s'appelle un problème multi-échelle. Nous expliquons les complications auxquelles nous sommes confrontés lorsque l'on tente de traiter un problème multi-échelle. Nous abordons ensuite les méthodes analytiques et numériques existantes qui permettent d'y remédier (Sect. III).

Parmi ces méthodes répondant à la problématique multi-échelles figure la méthode préservant l'asymptotique, que nous présenterons et qui sera le point clef de notre travail sur les plasmas de fusion (Sect. IV). .

I PRÉSENTATION DES PLASMAS THERMONUCLÉAIRES

I.1 Description d'un plasma

Le plasma est la matière la plus commune de l'univers : il constitue 99% de l'univers visible. Sur Terre, nous sommes entourés de matière "ordinaire" : les états de la matière généralement rencontrés sur terre sont solide, liquide ou gazeux. En chauffant un solide, on obtient un liquide qui lui même, en étant chauffé, devient un gaz. Sir William Crookes, un physicien anglais, identifia en 1879 ce quatrième état de la matière et c'est en 1927 que le physicien américain Irving Langmuir utilisa le terme plasma pour la première fois afin de définir un gaz contenant des particules chargées [38], obtenu en apportant de l'énergie à un gaz. Cet apport d'énergie permet d'arracher des électrons à des atomes et fait ainsi apparaître des particules chargées : les électrons libres, c'est-à-dire qui ne sont plus liés à des atomes (voir la figure 6.1) ainsi que les ions, qui ont perdu un ou des électrons.

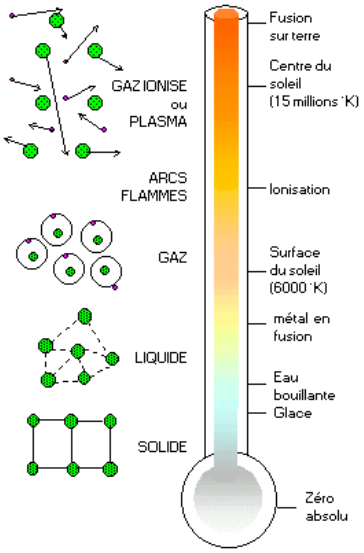


FIGURE 6.1 – Les différents états de la matière en fonction de la température [10].

La nécessité d'un apport d'une quantité importante d'énergie afin de créer un plasma en fait un milieu instable et peu propice à un état d'équilibre thermodynamique. Ceci implique que l'étude du comportement des plasmas est assez complexe, en raison des multiples phénomènes qu'il fait intervenir, comme par exemple le couplage dynamique des particules et des champs électromagnétiques, les ondes ou encore les turbulences. On trouvera plus d'information dans les ouvrages [39–41]. Nous allons détailler ici quelques unes des propriétés des plasmas.

I.2 Propriétés d'un plasma

I.2.1 Ionisation/recombination d'un plasma

Bien qu'un plasma soit aussi appelé gaz ionisé, son comportement diffère complètement du comportement d'un gaz neutre, de par la présence de particules chargées. Dans un gaz neutre, chaque particule est dans son état fondamental et contient un nombre égal de charges positives et négatives : les charges positives du noyau sont entourées d'un nombre égal d'électrons négativement chargés ; les particules sont électriquement neutres. Ainsi, un gaz neutre ne conduit pas l'électricité : il est considéré comme un isolant parfait car il ne contient aucune particule chargée libre. En comparaison, les interactions entre les particules chargées d'un plasma créent des champs électromagnétiques qui en font un milieu très conducteur.

Il existe différentes manières d'obtenir un plasma, toutes impliquant un apport d'énergie très grand afin de faire apparaître un nombre suffisant de particules chargées dans le gaz. Ce processus s'appelle ionisation.

— Une première façon d'ioniser un gaz est de provoquer une "avalanche électronique". Dans un gaz contenant ne serait-ce qu'une seule charge libre, l'application d'un champ électrique peut suffire à l'accélérer. En effet, un électron est près de 1800 fois plus léger qu'un proton ou qu'un neutron. Il est donc beaucoup plus réactif que n'importe quel ion lorsque soumis à un champ électrique, ce qui augmente la probabilité de collisions. Une collision entre un atome et un électron arrache un électron à cet atome selon la réaction

$$atome + e^- \rightarrow ion + 2e^- .$$

L'électron émis peut à son tour être accéléré par le champ électrique et entrer en collision avec un autre atome. D'où le terme d'avalanche électronique.

— Les plasmas thermiques sont créés en soumettant un gaz à des températures très élevées. Les électrons des couches extérieures des atomes, *i.e.* liés à l'atome par le minimum d'énergie, sont arrachés lors de collisions des atomes entre eux.

— Le processus de photoionisation consiste à projeter un photon contre un atome. Si l'énergie du photon est assez élevée, alors on réussit à extraire l'électron pour lequel l'énergie de liaison est la plus faible.

Le degré d'ionisation d'un plasma est noté $\alpha = \frac{n}{n+n_0}$, avec n et n_0 représentant respectivement le nombre de particules chargées et le nombre de particules neutres par unité de volume. Il exprime donc la proportion d'atomes qui ont perdu des électrons. La valeur de ce paramètre est comprise entre 0 et 1 : lorsque $\alpha \sim 1$, on parle de plasma fortement ionisé. En revanche, lorsque $\alpha << 1$, le plasma est dit faiblement ionisé. Plus le degré d'ionisation est grand, plus le plasma conduit l'électricité.

Lorsqu'un électron passe au voisinage d'un ion positif, les forces électriques attractives tendent à rassembler ces particules de signes opposés, pour former un atome neutre ou un ion moins chargé. On appelle ce phénomène la recombination. Si trop peu d'énergie est apportée à un plasma, les particules chargées ont tendance à aller vers le niveau de moindre énergie et les électrons se recombinent pour former un gaz neutre.

Un plasma de fusion utilise une quantité importante d'énergie, pour ioniser le gaz afin de créer le plasma tout d'abord, et puis pour apporter assez d'énergie au plasma pour le maintenir et empêcher la recombination. Pour cela, elle utilise toute sorte de procédés d'ionisation, plusieurs à la fois, pour être efficace.

I.2.2 La propriété de quasi-neutralité

Puisque le phénomène d'ionisation conserve la quantité de charge, le plasma est un milieu macroscopiquement (électriquement) neutre. Néanmoins, le plasma conduit l'électricité et n'est donc pas neutre au niveau microscopique. Un plasma est dit quasi-neutre. La quasi-neutralité est une propriété centrale à la compréhension du comportement d'un plasma. Elle découle du fait que les interactions à longue portée entre les particules prédominent sur les interactions à courte portée.

Un milieu à comportement collectif

Les différentes forces d'interactions qui entrent en jeu parmi les particules chargées sont de trois types :

— Les forces nucléaires sont des forces de liaison entre les nucléons (neutrons et protons) et les électrons qui permettent aux atomes de conserver leur cohésion. Elles sont de courte portée. Les liaisons qui doivent être cassées afin d'arracher un électron à un atome font partie de cette catégorie.

— Les forces collisionnelles sont les forces de contact lorsque deux particules entrent en collision. Elles sont donc évidemment de (très) courte portée.

— Les forces de Coulomb s'exercent entre les particules chargées : les ions et électrons. Chaque particule chargée attire les particules de charge opposée et repousse celles de même signe. Cette force, inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux charges considérées est une force de longue portée.

Le nombre de particules chargées dans un plasma est grand, comme le montre la figure 6.4. Ainsi, chaque particule chargée est entourée d'un nuage de nombreuses particules de signe majoritairement opposé au sien. Son comportement est influencé par l'ensemble de ces charges, qui sont à leur tour soumises aux champs de leurs charges voisines. Le comportement du plasma est, de proche en proche, collectif. Plus le nombre d'interactions qui entre en jeu est important, plus le comportement est collectif.

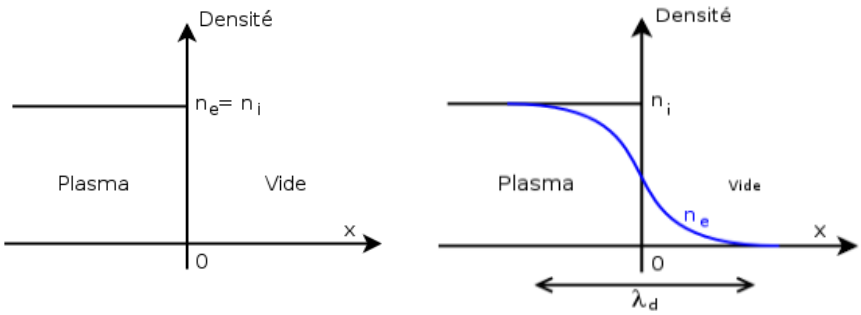
Le nuage de particules qui entourent et influencent chaque particule est modélisé par une sphère, appelée sphère de Debye et dont le rayon est égal à la longueur de Debye λ_D. Chaque particule est soumise aux forces de Coulomb crées par les particules se situant dans sa sphère de Debye et exerce son influence en retour sur ces particules. On dit que c'est sa sphère d'influence. Evidemment, chaque particules est en mouvement constant et les sphères de Debye sont donc dynamiques et se recouvrent les unes les autres. Dans un plasma, le nombre moyen de particules dans la sphère de Debye est grand.

Par contre, si l'on observe les effets de la force de Coulomb d'une particule sur les particules situées au delà de la distance λ_D, celle-ci est nulle car la multitude de particules dans sa sphère d'influence agit comme un écran. La longueur de Debye est donc la distance au delà de laquelle la force de Coulomb de cette particule est "masquée" : on appelle ce phénomène l'écrantage.

Une illustration de la quasi-neutralité : le phénomène d'écrantage

Nous utilisons un exemple simple d'écrantage électrique afin de mieux illustrer la propriété de quasi-neutralité. Nous nous plaçons dans un repère unidimensionnel d'axe x, avec $x \in \mathbb{R}$ et considérons au temps $t = 0$ un plasma globalement neutre à l'équilibre thermodynamique pour $x < 0$ et du vide en $x > 0$.

La densité d'ions, considérés lourds et donc supposés au repos car très peu réactifs. A $t > 0$, une partie des électrons, qui très énergétiques, s'éloigne vers la région $x > 0$. Cette séparation de charges crée alors un champ électrique et la force de Coulomb empêche les électrons de s'éloigner plus que la distance λ_D : les ions rappellent les électrons.



(a) $t = 0$ (b) $t > 0$

FIGURE 6.2 – Exemple d'écrantage électrique.

Cet exemple illustre bien le fait qu'un plasma est quasi-neutre : on a la neutralité du plasma ($n_i = n_e$) au delà de la longueur de Debye. La forte agitation thermique des électrons les éloigne des ions, tandis que la force coulombienne les attire vers eux s'ils s'éloignent à une distance supérieure à la longueur de Debye. L'écrantage électronique repose sur cet équilibre et est exprimé par une distribution spécifique des particules que l'on peut observer sur la figure, appelée distribution de Boltzmann et qui est donnée par la relation de Boltzmann, que nous aborderons dans le chapitre 7.

I.2.3 Classification des plasmas

Il est possible de classer les plasmas en différentes catégories.

— Plasmas naturels / artificiels :
On distingue tout d'abord les plasmas naturels des plasmas artificiels (ou de laboratoire). Les plasmas naturels constituent par exemple le soleil, les étoiles, les éclairs, les aurores boréales ou bien le vent solaire, tandis que les plasmas artificiels sont présents dans les tubes néons, les télévisions plasma, ou encore lors de la réaction de fusion nucléaire.

(a) (b) (c)

FIGURE 6.3 – Plasmas naturels : soleil, éclairs, aurore boréale.

— Plasmas chauds / froids :
En physique des plasmas, l'énergie cinétique des électrons ou des ions est mesurée par leur température, via la relation $E \sim k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann. Ainsi, la température des particules permet de répartir les plasmas en deux catégories : les plasmas chauds et les plasmas froids.

Les plasmas froids sont caractérisés par des taux d'ionisation très faibles, ainsi $\alpha << 1$ et dont la température est modérée (jusqu'à 10^4 K), comparativement aux plasmas chauds. Les plasmas froids réunissent une grande variété de régimes. Lorsque la pression est faible, le nombre de collision est faible et les transferts d'énergie entre les particules lourdes et légères sont très faibles. On a donc $T_i << T_e$ et le plasma n'est pas en état d'équilibre thermodynamique. En revanche, lorsque la pression augmente, le taux de collisions et les températures des espèces légères et lourdes s'égalisent : les plasmas sont à l'équilibre thermodynamique. Les plasmas froids sont utilisés dans l'industrie, par exemple pour la propulsion spatiale ou l'éclairage basse consommation.

Les plasmas chauds sont aussi appelés plasmas thermiques. Ils sont caractérisés par une totale ionisation $\alpha_i \sim 1$ et par la relation $T_i \sim T_e$, température pouvant atteindre plusieurs millions de degrés. Il s'agit de plasmas denses et on retrouve dans cette catégorie les plasmas de fusion ou le plasma qui constitue le soleil.

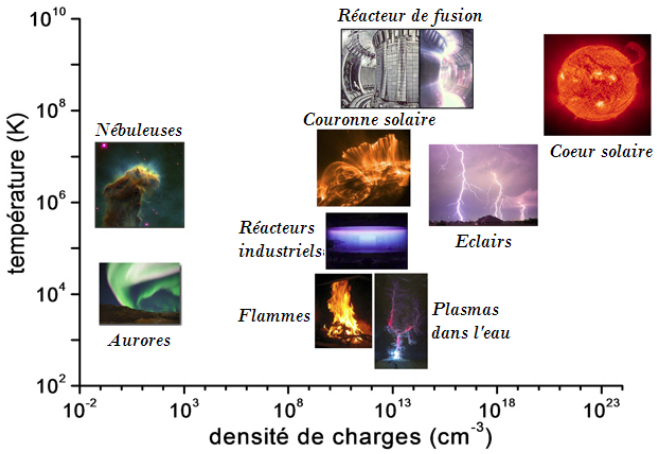


FIGURE 6.4 – Les différents plasmas en fonction de leur température (en Kelvin) et de leur densité d'électrons (en électrons par cm^3).

— Plasmas collisionnels / non-collisionnels :
Un plasma collisionnel est un plasma où les collisions entre les particules sont très fréquentes. La quantité de collision est mesurée grâce au libre parcours moyen, c'est à dire la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions. Les plasmas collisionnels sont en équilibre thermodynamique local. Cet équilibre est décrit par la relation de Boltzmann, qui décrit la répartition des particules en fonction de la température locale.

A l'inverse, les collisions dans un plasma non collisionnel sont si rares qu'elles peuvent être négligées.

I.3 Principe de la fusion thermonucléaire

I.3.1 Les réactions nucléaires

Les réactions nucléaires de fusion et de fission sont des réactions de transformation : elles modifient la composition des noyaux des atomes sur lesquels la réaction opère. L'énergie nucléaire résulte du fait que le réarrangement des protons et neutrons conduit à ce que la masse totale des atomes résultant de la réaction devient inférieure à la masse des atomes initiaux.

En effet, la fission ainsi que la fusion nucléaire s'appuient sur le principe fondamental de la relativité d'Einstein qui décrit l'équivalence entre la matière et l'énergie. Ceci signifie que le réarrangement interne des nucléons (les neutrons et les protons du noyau) ayant lieu lors de ces réactions se traduit par une perte de la masse globale m. En conséquence, une quantité d'énergie E est émise selon la célèbre formule $E = mc^2$, c'est dans la récupération de cette énergie que réside l'intérêt porté à ces réactions.

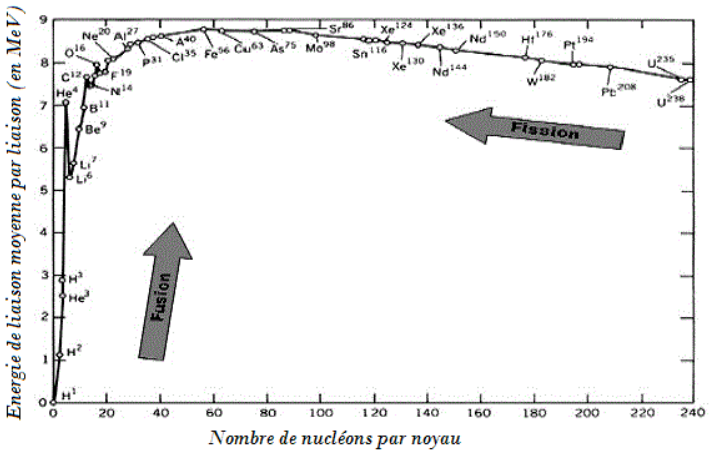


FIGURE 6.5 – Graphe d'Aston représentant, pour chaque atome, son énergie de liaison moyenne par liaison en fonction de son nombre de nucléons.

Cette émission d'énergie et ce défaut de masse proviennent de la différence d'énergie de liaison entre les noyaux initiaux et résultants. La force de liaison est la force de cohésion qui lie les nucléons à l'intérieur du noyau. Elle n'est pas proportionnelle au nombre de nucléons présents dans le noyau. Le graphe d'Aston, reproduit dans la figure 6.5 donne l'énergie de liaison moyenne par nucléon dans chaque atome en fonction de son nombre de nucléons.

On remarque un maximum pour les atomes ni trop légers ni trop lourds. Ces atomes ont une énergie de liaison plus forte et sont donc plus stables.

Les réactions nucléaires consistent à transformer des atomes avec une faible énergie de liaison pour obtenir des atomes ayant une cohésion plus importante, afin que l'énergie excédentaire soient émise et puisse être récupérée.

La réaction de fission est celle mise en œuvre dans les centrales électriques actuelles. Elle consiste, comme schématisé dans la figure 6.6, à propulser un neutron contre un atome lourd comme par exemple l'uranium 235. Cette réaction entraine l'obtention de deux noyaux plus légers et d'énergie de liaison par nucléon plus importante, comme par exemple le krypton et le baryum, ainsi que l'émission d'une énergie de 200 MeV. La réaction de fission de l'uranium 235 s'écrit

$$U^{235} + n \rightarrow Kr^{93} + Ba^{140} + 2,5n + 200MeV.$$

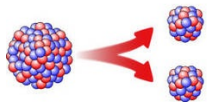


FIGURE 6.6 – Réaction de fission [10].

I.3.2 La réaction de fusion

La réaction de fusion, aussi appelée fusion thermonucléaire, fait quant à elle intervenir la collision entre deux noyaux légers afin d'obtenir un noyau résultant plus lourd avec une plus grande cohésion, ainsi que l'émission d'énergie (voir la figure 6.7). Il s'agit de la réaction à l'origine du rayonnement du soleil. Les conditions nécessaires pour pouvoir reproduire une réaction de fusion sur terre sont extrêmes : le plasma de fusion doit avoir une température d'environ 150 millions de degrés celsius pour que la barrière coulombienne répulsive entre deux noyaux puisse être surmontée. Pour cela, il faut aussi que la densité de particules chargées dans le plasma soit très élevée.

Toutes les réactions de fusion ne se produisent pas avec la même probabilité. La réaction de fusion entre le deutérium, noté H^2 et le tritium, qui s'écrit H^3, est la réaction qui a le plus de probabilité de se produire. Cette réaction s'écrit

$$H^2 + H^3 \rightarrow He^4 + n + 17.6MeV.$$

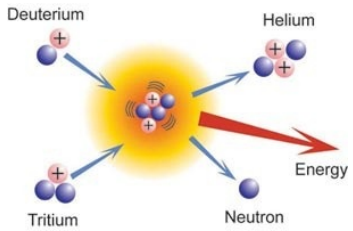


FIGURE 6.7 – Réaction de fusion [10].

La réaction de fusion est considérablement étudiée depuis de nombreuses années car elle pourrait permettre de fournir une quantité immense d'énergie. En effet, la fission fait intervenir 235 nucléons et permet l'émission de 200 MeV, c'est-à-dire 0.8 MeV par nucléon. La

réaction de fission implique quant à elle seulement 5 nucléons pour une émission de 17.6 MeV, soit 3.5 MeV par nucléon. Rapporté au nombre de nucléons impliqués dans chaque réaction, la fusion dégage donc plus de quatre fois plus d'énergie que la fission.

Un réacteur de fusion qui ferait intervenir cette réaction présenterait de nombreux avantages par rapport à nos méthodes actuelles de production d'énergie. Tout d'abord, les ressources nécessaires à cette réaction de fusion peuvent être obtenus en quantité quasiment illimitée. En effet, le deutérium et le tritium sont deux isotopes de l'hydrogène, c'est-à-dire qu'ils possèdent le même nombre de protons que l'hydrogène (un) mais pas le même nombre de neutrons (le deutérium a un neutron et le tritium en a deux). Le premier de ces isotopes est présent à l'état naturel dans l'eau et le second peut être produit industriellement sans difficultés. Ensuite, la réaction de fusion est sécurisée car ce processus ne comprends pas de réaction en chaine que l'on ne saurait arrêter, comme dans le cas de la fission. De plus, le moindre contact avec le monde extérieur arrêterait la réaction instantanément. Et finalement, le processus est relativement propre vis à vis des déchets qu'il produit. En effet, et comme nous l'avons dit, le deutérium ne pose aucun problème. Par contre, le tritium est radioactif mais pendant une période courte d'une dizaine d'années environ.

Les intérêts que présente la fusion nucléaire pour la production industrielle d'énergie sont donc évidents, autant d'un point de vue énergétique qu'environnemental. Sa mise en œuvre n'a pourtant rien d'aisée. Différents types de problèmes émergent lorsque l'on s'intéresse aux plasmas de fusion. Le premier de ces problèmes est l'apport d'énergie qu'il faut emmener au plasma afin que les conditions optimales aux réactions de fusion soient réunies : la température du plasma ainsi que sa densité de particules chargée. Il s'agit ensuite de savoir comment un tel plasma peut être confiné du reste du monde. En effet, un plasma censé reproduire une énergie du même ordre de grandeur que celle du soleil ne peut interagir avec le monde extérieur.

I.3.3 Confinement magnétique

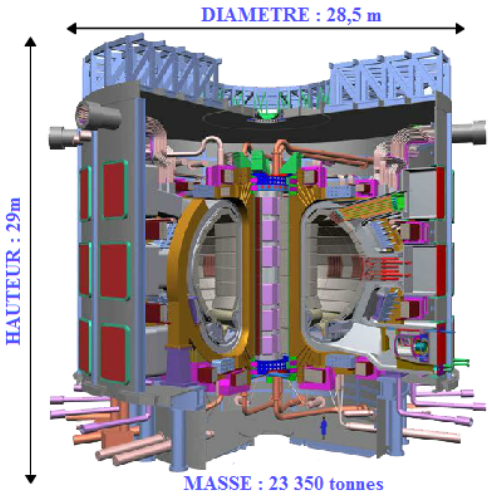


FIGURE 6.8 – Dessin d'artiste du tokamak d'ITER [10].

Il est évidemment impossible d'utiliser un matériau afin de contenir un plasma de fusion. Plusieurs méthodes de confinement du plasma sont à l'étude, comme le confinement électrostatique ou le confinement inertiel. Notre étude se concentrera sur le confinement magnétique. Nous utilisons l'exemple du projet ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*). Ce projet de recherche pharaonique, comme nous pouvons le constater sur la figure 6.8, ambitionne de construire un réacteur capable de produire de l'énergie dès 2025.

Intéressons nous maintenant au comportement des particules chargées dans un plasma dans le cas d'un confinement magnétique. En présence d'un fort champ magnétique, un plasma est anisotrope, c'est-à-dire que son comportement est très différent si on l'observe dans une direction parallèle aux lignes de champ ou transversalement à celles ci. En effet, en présence d'un champ magnétique, les particules chargées adoptent des trajectoires préférentielles : elles suivent un mouvement hélicoïdal autour des lignes de champ, comme illustré par la figure 6.9. Ce mouvement est aussi appelé mouvement cyclotronique. Puisque les ions et les électrons ont des charges opposées, leurs trajectoires ont des sens opposés.

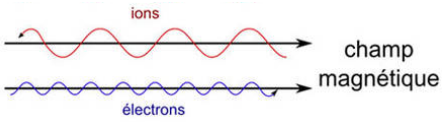
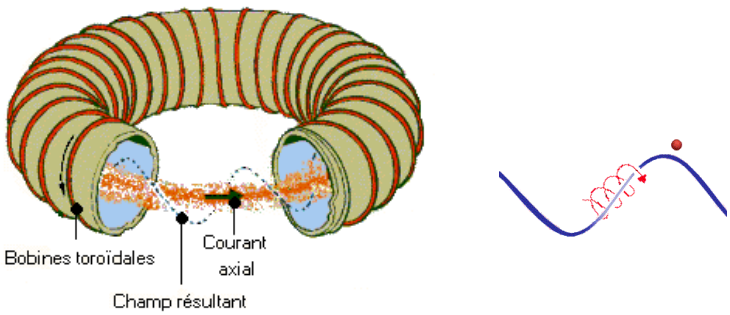


FIGURE 6.9 – Trajectoire des ions et des électrons le long d'un champ magnétique [10].

Le dispositif de confinement magnétique est mis en place dans un tokamak (tore), destiné à contenir le plasma. Afin de maintenir le plasma, très chaud, loin des parois du tokamak, on place des bobines autour du tokamak dans lesquelles on fait circuler un courant afin de générer un champ magnétique très fort. Un courant circulant dans les bobines toroïdales (voir la figure 6.10 (a)) génère un champ magnétique toroïdal. De plus, un courant poloïdal, appliqué au cœur du plasma, a le double objectif de chauffer le plasma et de produire un champ magnétique poloïdal. La combinaison des champs toroïdal et poloïdal résulte en des lignes de champs magnétiques en forme d'hélice à l'intérieur du plasma, autour desquelles les particules adoptent le mouvement cyclotronique défini plus tôt, comme représenté sur la figure 6.10 (b).



(a) (b)

FIGURE 6.10 – (a) : Schéma du courant toroïdal (dans les bobines encerclant le tore), du courant poloïdal (ou axial, au centre du tore), et du champ résultant qui suit la trajectoire d'une hélice. (b) : Trajectoire d'une particule chargée le long du champ résultant [10].

II MODÉLISATION MATHÉMATIQUE D'UN PLASMA

La physique des plasmas par confinement magnétique fait donc intervenir un couplage entre le mouvement des particules chargées et les champs électromagnétiques présents dans le plasma. En effet, ces champs sont influencés par les particules chargées et leur mouvement, dont les trajectoires sont en retour affectées par les champs. Ainsi, pour décrire le comportement de particules chargées dans un plasma à confinement magnétique, il convient de coupler les équations de Maxwell qui fournissent les champs électromagnétiques (E, B), avec les équations d'évolution décrivant le mouvement des particules.

Les équations de Maxwell dans un plasma s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\,, \\ \nabla \cdot B = 0\,, \\ \nabla \wedge E = -\partial_t B\,, \\ \nabla \wedge B = \mu_0\, j + \dfrac{1}{c^2}\partial_t E\,, \end{cases}$$

avec ρ la densité de charge, j la densité de courant, ε_0 et μ_0 respectivement la permittivité et la perméabilité dans le vide, et la vitesse de la lumière donnée par $c = \left(\varepsilon_0\,\mu_0\right)^{-1/2}$. Si le champ magnétique B est nul, alors les équations de Maxwell sont remplacées par l'équation de Poisson

$$-\,\varepsilon_0\,\Delta\Phi = \rho\,,$$

où Φ est le potentiel électrique. Il est lié au champ électrique par la relation $E = -\nabla\Phi$.

De nombreux modèles mathématiques permettent de décrire le comportement des électrons et des ions dans un plasma. Comme nous l'avons déjà dit, ces modèles peuvent être regroupés selon leur niveau de description (Chap.1). Pour plus de détails sur ces différents modèles, le lecteur pourra se référer à [30, 42–44].

II.1 Description particulaire

Le premier niveau de description est le niveau particulaire. On le qualifie aussi de microscopique car il consiste à décrire systématiquement chacune des particules du système considéré. Les équations du mouvement d'une particule i, avec $i \in \{1,..,N\}$ et N le nombre total de particules, sont déduites de la deuxième loi de Newton et s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i\,, \\ m_i\dfrac{dv_i}{dt} = F_i\,, \end{cases}$$

avec $x_i(t)$ la position de la particule, $v_i(t)$ sa vitesse, m_i sa masse. $F_i(t,x,v)$ représente la force qui s'exerce sur la particule i, c'est-à-dire la force de Lorentz. Nous notons $E_j(t,x)$ et $B_j(t,x)$ les champs électromagnétiques microscopiques créés par la particule j à l'instant t et au point x. Alors, la force de Lorentz ressentie par la particule i s'écrit

$$F_i(t,x,v) = F_i(t,x_1,..,x_N,v_1,..,v_N) = e_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left[E_j(t,x_i) + v_i \wedge B_j(t,x_i)\right],$$

où e_i représente la charge élémentaire, $e_i = \pm e$ selon s'il s'agit d'un électron ou d'un ion. En d'autres termes, la force de Lorentz qui s'exerce sur la particule se trouvant au point x_i est crée par les champs électromagnétiques de toutes les autres particules. Cette équation permet de coupler les équations de Maxwell avec les équations du mouvement des particules.

Ce niveau de description est très précis. Mais lorsque le nombre de particules présentes dans un système est très grand, comme c'est le cas dans un plasma (c'est d'ailleurs une des conditions pour que le plasma existe), la simulation numérique n'est pas possible à mettre en œuvre, car beaucoup trop coûteuse. A titre d'exemple, le nombre d'électrons dans le tokamak du projet ITER est d'environ 10^{21} par m^3.

II.2 Description cinétique

Le niveau de description suivant est la description cinétique. Pour chaque espèce α de particule chargée, $\alpha = e$ représentant un électron et $\alpha = i$ un ion, on associe une fonction de distribution notée $f_\alpha(t, x, v)$. Elle est fonction du temps $t > 0$ et de l'espace des phases $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Il s'agit d'une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, où x représente la position , v la vitesse. Comme illustré par la figure 6.11, $f_\alpha(t, x, v)dx\,dv$ dénombre les particules α dans le petit élément de volume $dx\,dv$, centré autour du point (x, v) au temps t.

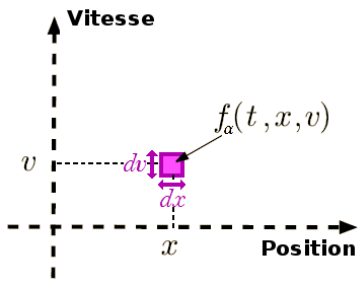


FIGURE 6.11 – Espace des phases [11].

Il existe plusieurs équations cinétiques qui permettent de modéliser le mouvement global de particules soumises à une force (ici les forces électromagnétiques). Citons les équations cinétiques de Vlasov, de Boltzmann, de Fokker-Plank, ou de BGK [29, 45–47]. Ces équations se différencient par la manière de décrire les collisions entre les particules. Dans le cas de particules d'un plasma, les équations cinétiques (une par espèce α) sont couplées via la force de Lorentz $(E + v \wedge B)$ aux équations de Maxwell pour le calcul des champs électromagnétiques moyens (E, B).

L'équation de Boltzmann est une des plus utilisée dans la théorie des gaz et s'écrit

$$\partial_t f_\alpha + v \cdot \nabla_x f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f_\alpha = Q(f_\alpha).$$

Cette équation exprime le fait que les particules vont se mouvoir dans l'espace des phases (x, v) via le champ vectoriel $(v, \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(E + v \wedge B))$. Le terme $Q(f_\alpha)$ représente l'opérateur de collision. Il décrit les collisions entre les particules de même nature (collision intra-espèces) ou de nature différente (collision inter-espèces).

En utilisant le niveau de description cinétique, on perd évidemment de l'information sur le comportement des particules. En effet, on ne discerne plus les particules les unes des autres,

ce qui a l'avantage d'obtenir une description plus globale qui comporte beaucoup moins d'inconnues que dans la description particulaire. Toutefois, la dimension de l'espace des phases reste grande : l'espace des phases est de dimension 6. Ainsi, bien que l'on ait réussi à réduire le modèle mathématique à une ou deux équations, son implémentation demande aussi un certain coût numérique.

II.3 Description fluide

C'est dans la description fluide, aussi appelée macroscopique, qu'intervient le niveau de description le plus simplifié et global, mais fatalement aussi le plus éloigné de la réalité du phénomène physique. La description fluide est un système de plusieurs équations portant chacune sur un moment de f_α. Calculer un moment de la fonction de distribution revient à en tirer des informations moyennées sur la vitesse des particules. Ainsi, les moments de $f_\alpha(t,x,v)$ ne sont fonction que du temps et de la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^3$. Citons par exemple n_α la densité de particules α, $(nu)_\alpha$ leur quantité de mouvement moyenne, W_α leur énergie moyenne, définies par

$$\begin{aligned}
n_\alpha(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(t,x,v)\,dv\,,\\
n_\alpha u_\alpha(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^3} v\, f_\alpha(t,x,v)\,dv\,,\\
W_\alpha(t,x) &= \frac{m_\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_\alpha(t,x,v)\,dv\,.
\end{aligned}$$

Comme exemple, $n(t,x)\,dx$ représente le nombre de particules dans le volume dx autour du point x au temps t.

Puisque les quantités fluides sont les moments de la fonction de distribution, on obtient les équations fluides en prenant les moments de l'équation cinétique. Le système fluide s'écrit

$$\begin{cases}
\partial_t n_\alpha + \nabla\cdot(n_\alpha u_\alpha) = 0\,,\\
m_\alpha\, n_\alpha\,[\partial_t u_\alpha + (u_\alpha\cdot\nabla)u_\alpha] = -\nabla p_\alpha + n_\alpha e_\alpha(E + u_\alpha\wedge B) - \nabla\cdot\Pi_\alpha\,,\\
\dfrac{3}{2} n_\alpha k_B\,[\partial_t T_\alpha + (u_\alpha\cdot\nabla)T_\alpha] + p_\alpha\nabla\cdot n_\alpha = -\nabla\cdot q_\alpha - \Pi_\alpha : \nabla u_\alpha\,,
\end{cases}$$

où T_α représente la température moyenne des particules α et est définie telle que

$$\frac{3}{2} n_\alpha k_B T_\alpha = W_\alpha - \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha |u_\alpha|^2 = \frac{m_\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}} |v-u_\alpha|^2 f_\alpha(t,x,v)\,dv\,.$$

Le terme p_α représente la pression scalaire, Π_α le tenseur des contraintes visqueuses et $q_\alpha = \frac{m_\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |v-u|^2\,(v-u)\,f_\alpha(t,x,v)\,dv$ le flux de chaleur. Afin de fermer ce système, on impose par exemple l'équation d'état des gaz parfaits donnée par $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha$, la loi de Fourier $q_\alpha = -\kappa\nabla T_\alpha$, avec κ le coefficient de conductivité thermique. On suppose aussi que la viscosité est négligeable, ce qui se traduit par $\nabla\cdot\Pi_\alpha = 0$ et $\Pi_\alpha : \nabla u_\alpha = 0$. Ici aussi le système est couplé aux équations de Maxwell sur les champs électromagnétiques moyens (E,B).

Décrire un système au niveau fluide fait aussi perdre de l'information sur la réalité du phénomène physique. Il s'agit d'une concession afin de se placer dans un niveau de description plus global, où les inconnues sont des quantités macroscopiques observables.

Il existe de nombreux modèles fluides simplifiés, chacun traduisant un comportement bien particulier du plasma.

— Le modèle d'Euler-Poisson [48] s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0\,, \\ \partial_t (nu) + \nabla \cdot (nu \otimes u) + \nabla p(n) = n \nabla \Phi\,, \\ \partial_t W + \nabla \cdot (Wu + nu) = 0\,, \\ -\lambda_D^2 \Delta \Phi = 1 - n\,. \end{cases}$$

Ce modèle fluide se place dans le cas électrostatique, *i.e.* $B = 0$, ce qui permet de remplacer les équations de Maxwell par l'équation de Poisson. On suppose aussi qu'il s'agit d'un problème à une espèce, en considérant seulement le comportement des électrons dans le plasma. On considère donc $n_e = n$ et $n_i = 1$ constant. La pression est considérée comme fonction de la densité : $p(n) = n^\gamma$, avec $\gamma = 1$ pour le cas isotherme et $\gamma > 1$ pour le cas adiabatique.

— Un autre modèle très utilisé est le système d'Euler dans le régime d'un nombre de Mach petit [49]. Le nombre de Mach, noté M, est une grandeur sans dimension qui exprime le *ratio* de la vitesse caractéristique du fluide par la vitesse du son dans ce fluide. Ici, un nombre de Mach petit exprime donc un fluide dans lequel le flux d'électrons a une vitesse faible. En considérant seulement le mouvement des électrons dans un milieu isotherme, la dynamique est régit par les équations d'Euler compressibles

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0\,, \\ \partial_t (nu) + \nabla \cdot (nu \otimes u) + \dfrac{1}{M} \nabla p(n) = 0\,. \end{cases}$$

Lorsque l'on étudie la solution limite de ce système $M \to 0$, on obtient les équations d'Euler incompressibles.

III LES PROBLÈMES MULTI-ÉCHELLES

III.1 Qu'est ce qu'un problème multi-échelles ?

Un problème multi-échelles désigne un phénomène physique qui ne peut être décrit avec un seul des niveaux de description cités ci-dessus, où ignorer la nature particulaire du phénomène entraine une erreur de modélisation inacceptable. Il est difficile d'essayer de résumer ce qui rend un problème multi-échelles car il s'agit de problèmes variés. On peut cependant essayer de les diviser en deux types différents.

— Le premier type de problème est dit hétérogène. Il s'agit de modéliser des phénomènes très localisés, comme des singularités, des effets de bord ou des chocs. Prenons comme exemple une fissure qui se crée dans un matériau. Afin de modéliser l'endroit où la fissure s'ouvre, on ne peut utiliser la description macroscopique, il faut nécessairement revenir au mécanisme particulaire de rupture des liaisons entre les atomes. Ainsi un problème hétérogène fait intervenir des comportements émergeant au niveau macroscopique qui sont si intrinsèquement liés aux comportements microscopiques que le passage au niveau de description supérieur fait perdre de l'information cruciale.

— Pour le second type de problèmes multi-échelles, plusieurs échelles coexistent partout dans le domaine spatial et temporel. A partir de là, il est difficile de les modéliser au niveau macroscopique, soit parce que le comportement macroscopique n'est pas bien compris, soit parce que bien que le comportement macroscopique soit compris, il n'existe pas de loi de fermeture. Les plasmas de fusion font partie de ce type de problème. Nous expliquons pourquoi dans la partie III.2.

Ces problèmes ne peuvent donc pas être modélisés de façon satisfaisante en utilisant la modélisation macroscopique. Pour ces deux types de problèmes, la solution est d'utiliser plusieurs niveaux de description. Leur traitement analytique et numérique nécessite une approche spécifique à chaque type de problème. Pour le cas présentant une singularité localisée, on décrit le domaine autour de la singularité grâce à un modèle microscopique et coûteux tandis que le reste du domaine est décrit grâce à l'approche macoscopique. Pour le second type de problème, on a besoin du niveau microscopique dans la totalité du domaine afin de compléter la description macroscopique, insuffisante.

La solution d'adopter une description exclusivement particulaire, même si précise, n'est évidemment pas réaliste du point de vue des coûts numériques. Ainsi, l'objectif de la modélisation multi-échelles est de construire des méthodes analytiques ou numériques qui combinent les description microscopique et macroscopique. On ne l'utilisera donc qu'avec parcimonie, là où la description macroscopique n'est soit pas connue, soit pas précise. On cherche en quelques sortes à profiter des avantages des deux niveaux de description : la précision du microscopique et la simplicité et l'efficacité du macroscopique.

III.2 Les plasmas de fusion : un problème multi-échelles

Un plasma de fusion est un des problèmes multi-échelles les plus complexes. Nous le comprenons aisément lorsque l'on s'intéresse à ses grandeurs caractéristiques, résumées sur la figure 6.12.

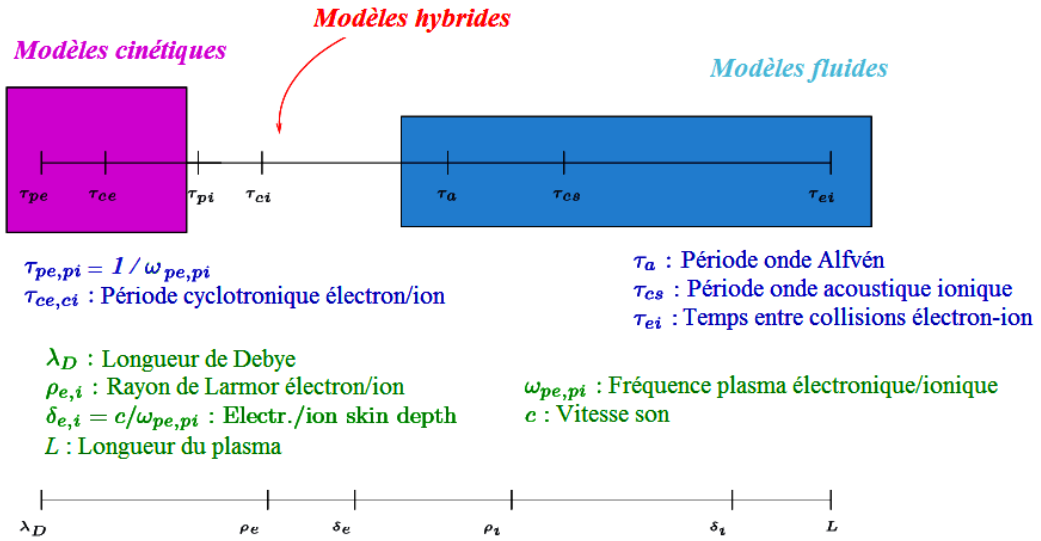


FIGURE 6.12 – Echelles temporelles et spatiales des grandeurs caractéristiques d'un plasma de fusion [12].

Détaillons tout d'abord les différentes longueurs caractéristiques d'un plasma confiné magnétiquement.

— λ_D représente la longueur de Debye électronique, nous l'avons évoquée dans la partie I de présentation des plasmas. C'est l'ordre de grandeur spatial au delà duquel on obtient neutralité du plasma.

— $\rho_{L,e}$ et $\rho_{L,i}$ sont respectivement les rayons de Larmor de l'électron et de l'ion, aussi appelé rayons cyclotroniques. Nous avons vu qu'en présence d'un champ magnétique, les particules chargées adoptent un mouvement en forme d'hélice, appelé cyclotronique. Ces deux grandeurs représentent les rayons associés à ce mouvement en forme d'hélice et sont schématisées sur la figure 6.13. On remarque que $\rho_{L,e} < \rho_{L,i}$.

— L représente la longueur caractéristique du tokamak.

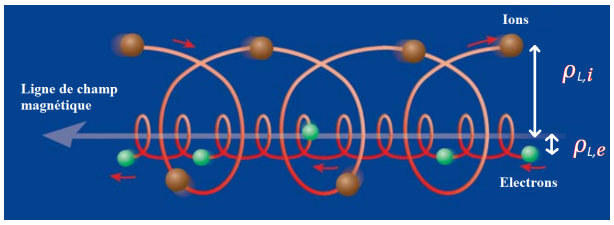


FIGURE 6.13 – Rayons de Larmor de l'électron $\rho_{L,e}$ et de l'ion $\rho_{L,i}$ [10].

Ainsi, les longueurs caractéristiques d'un plasma sont très hétérogènes. Nous avons déjà noté, en évoquant le principe de quasi-neutralité, que la condition $\lambda_D << L$ permettait d'avoir la neutralité macroscopique. L'autre disparité apparente est le fait que les ions et les électrons aient une masses très dissemblables. Ils réagissent alors très différemment aux champs créés par leur présence.

Listons maintenant les différents temps caractéristiques d'un plasma :

— En cas d'introduction d'une charge dans un plasma, l'équilibre maintenu par l'écrantage électronique est perturbé et il faut un temps d'un ordre de grandeur égal à $1/\omega_{pe}$, avec ω_{pe} la fréquence plasma électronique, pour revenir à l'équilibre. On peut penser ce temps caractéristique comme l'équivalent temporel de la longueur de Debye.

— τ_{ce} et τ_{ci} sont les périodes cyclotroniques respectives de l'électron et de l'ion. Ces périodes représentent les temps que met chaque type de charge pour compléter un tour de rayons respectifs leurs rayons de Larmor. On observe que $\tau_{ce} < \tau_{ci}$

— τ_{ei} est le temps moyen passé par un électron avant qu'il subisse une collision avec un ion.

D'autres grandeurs caractéristiques temporelles sont relatives aux ondes d'un plasma. Un plasma étant un milieu très conducteur, des ondes de nature diverses peuvent s'y propager. Les ondes acoustiques, Alfvén, ou les ondes de dérive sont des exemples de telles ondes. Elles sont de nature électrostatiques ou électromagnétiques.

— τ_a est la période des ondes Alfvén.

— τ_{cs} est la période des ondes acoustiques ioniques.

Les différences d'ordres de grandeurs entre les périodes cyclotroniques des électrons et des ions proviennent aussi de leur grande différence de masse. Les électrons sont beaucoup plus mobiles et "réceptifs" aux changements des champs dans le plasma. C'est pour cela qu'ils s'adaptent plus vite que les ions en cas de perte d'équilibre.

III.3 Solutions pour modéliser un problème multi-échelles

Tous ces problèmes multi-échelles se modélisent mathématiquement à travers un ou plusieurs paramètres $\varepsilon \in (0,1]$ adimensionnés que l'on retrouve dans les équations. Ces paramètres sont en quelques sortes "responsable" du comportement multi-échelle du problème. Ils représentent en général un ratio entre une échelle microscopique et uneéchelle macroscopique. Ainsi, suivant le niveau l'échelle d'observation que l'on souhaite prendre en compte dans la modélisation, on influera sur la valeur de ce paramètre ε, qui lui même donnera plus ou moins d'importante aux termes traduisant les dynamiques microscopiques.

La première question qui se pose quant à l'étude de tels problèmes est comment coupler deux niveaux de description. En particulier, une des préoccupations majeures dans les problèmes multi-échelles est l'étude de ce qui se passe lorsque $\varepsilon \to 0$. Prenons comme exemple le cas du système d'Euler avec petit nombre de Mach ε donné en exemple dans le paragraphe II.3. Lorsque $\varepsilon \to 0$, on montre que le problème limite est décrit par les équations d'Euler-Poisson incompressibles. Ainsi, la nature mathématique du système change à la limite. La principale difficulté repose alors dans le fait que la simulation de tels problèmes doit pouvoir reproduire le même comportement asymptotique.

Une autre préoccupation à laquelle une modélisation multi-échelles doit pouvoir répondre concerne la discrétisation adoptée pour la simulation du problème. En effet, lorsque ε est très petit, alors la condition de stabilité implique d'adopter des pas de discrétisation en temps et en espace de l'ordre de ε, ce qui devient trop coûteux pour $\varepsilon << 1$.

Il existe plusieurs méthodes permettant d'étudier de tels problèmes, elles peuvent être analytiques ou numériques. Nous en citons quelques unes. Pour plus de détails, on peut consulter [50, 51].

— La méthode d'homogénéisation s'applique aux problèmes hétérogènes. Elle consiste à homogénéiser les grandeurs caractéristiques sur l'ensemble du domaine microscopique. Ainsi, on peut moyenner les quantités microscopiques et résoudre le problème macroscopique obtenu.

— La méthode de décomposition de domaines est adaptée aux problèmes où ε est hétérogène en espace. Elle décompose l'espace en zones distinctes suivant le niveau de description souhaité et résout ensuite l'équation microscopique ou macroscopique selon la zone. Le problème multi-échelles est relégué aux interfaces de chacun de ces domaines.

— La méthode de raffinement de maillage adaptatif est une méthode numérique itérative qui adapte la taille du maillage au cours des itérations. Elle consiste à raffiner progressivement et sélectivement un maillage macroscopique choisi initialement. Pour cela, la méthode nécessite d'avoir une estimation *a priori* de la solution. On calcule alors, pour chaque itération, l'erreur commise sur chaque maille et on raffine les mailles sur laquelle l'erreur est trop importante. Elle est surtout adaptée aux problèmes hétérogènes.

— Les schémas préservant l'asymptotique, aussi appelés schémas AP (*Asymptotic Preserving*) reformulent le problème singulier à l'asymptotique en un problème régulier afin de pouvoir le discrétiser dans tout l'espace des phases, quelque soit la valeur de ε.

Dans la partie suivante, nous détaillons le principe des modèles préservant l'asymptotique.

IV LES SCHÉMAS PRÉSERVANT L'ASYMPTOTIQUE (SCHÉMAS AP)

Un schéma AP permet de discrétiser un problème multi-échelle P^ε qui présente une singularité à l'asymptotique, de manière à récupérer au niveau discret le bon problème limite lorsque $\varepsilon \to 0$. En fait, un schéma AP permet de discrétiser P^ε, à la fois lorsque $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ et lorsque $\varepsilon << 1$, et ceci sans coût numérique supplémentaire, *i.e.* le choix du maillage est indépendant de ε. Cette méthode a été introduite pour la première fois par S. Jin dans [52].

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_h^\varepsilon \arrow[r, "\varepsilon \to 0"] \arrow[d, "h \downarrow 0"'] & \mathcal{P}_h^0 \arrow[d, "h \downarrow 0"] \\
\mathcal{P}^\varepsilon \arrow[r, "\varepsilon \to 0"'] & \mathcal{P}^0
\end{tikzcd}$$

FIGURE 6.14 – Propriétés d'un schéma AP.

Détaillons son principe, expliqué schématiquement par la figure 6.14. Il s'agit, à partir d'un problème P^ε singulier à l'asymptotique $\varepsilon \to 0$, de construire un schéma numérique P_h^ε qui soit stable quelle que soit la valeur de $\varepsilon \in [0,1]$. C'est-à-dire que lorsque $\varepsilon \to 0$ et pour un maillage fixé ($h > 0$), P_h^ε doit tendre vers P_h^0, la discrétisation du problème limite continu P^0. Bien entendu, ε exprime un changement d'échelle et donc $\varepsilon = 0$ n'a pas beaucoup de sens vis à vis du phénomène physique à décrire. On s'intéresse tout particulièrement à l'asymptotique du problème multi-échelle car le problème limite simplifie grandement la modélisation : il ne prend plus en compte ε et ne fait plus intervenir que des quantités macroscopiques, prenant en compte les quantités microscopiques sous forme de quantités moyennées. La caractéristique d'un schéma AP est d'être uniformément stable par rapport à ε. Ceci permettrait, par exemple dans le cas d'équations de type transport, de s'affranchir d'une condition de type CFL $\Delta t = \mathcal{O}(\Delta x \varepsilon)$. On obtiendrait alors une condition de stabilité indépendante de ε : $\Delta t = \mathcal{O}(\Delta x)$.

Pour mettre en œuvre une telle méthode, on cherche une reformulation analytique équivalente à P^ε et qui soit régulière à l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. Cette reformulation intègre à la fois le problème multi-échelle P^ε et son problème limite P^0. L'objectif est que quelle que soit la valeur de ε, la même stratégie numérique permette de traiter les deux régimes à la fois, même s'ils sont de nature mathématique différente.

Comme pour tout schéma numérique, P_h^ε et P_h^0 doivent évidemment répondre au critère de consistance. Ainsi, lorsque le pas h tend vers 0, ces schémas numériques convergent vers les problèmes continus qu'il discrétisent respectivement, P^ε et P^0.

Il existe de nombreux schémas AP. En effet, un schéma respectant les principes juste énoncés n'est pas unique et il est possible d'en construire plusieurs répondant au même problème.

CHAPITRE 7

SCHÉMA AP POUR PLASMAS DE FUSION

Ce chapitre est le résultat d'une collaboration avec C. Negulescu, F. Deluzet et S. Possanner

Sommaire

I Le modèle cinétique et son adimensionnement 139
- I.1 Obtention du modèle adimensionné 140
- I.2 Les opérateurs de collisions 143

II Les modèles macroscopiques dans le régime des masses disparates 144
- II.1 Le régime de dérive-diffusion des électrons 144
- II.2 Le régime adiabatique pour les électrons 146

III Passage vers le régime les électrons boltzmanniens 147
- III.1 Décomposition micro-macro 147
- III.2 Reformulation AP et identification du problème limite 149

IV Discrétisation AP du modèle cinétique pour les électrons 151
- IV.1 Discrétisation en temps du schéma $(KF)_\varepsilon$ 152
- IV.2 Schéma préservant l'asymptotique 152
- IV.3 Discrétisation en espace de $(AP)_{\varepsilon,\Delta t}$ 153
- IV.4 Condition CFL de stabilité de l'équation microscopique 155

V Résultats numériques 157

La modélisation cinétique d'un plasma de fusion permet de décrire les différents phénomènes pouvant s'y produire avec suffisamment de précision, comme par exemple les instabilités dues aux gradients de température des ions, aussi appelées ITG (*Ion Temperature Gradient*). Une des difficultés majeures d'une telle modélisation provient du fait que le ratio des masses des particules $\delta := m_e/m_i \approx 10^{-4}$ est faible. Lorsque l'on considère un plasma de fusion typique, avec des températures électroniques et ioniques similaires, ceci entraîne une vitesse thermique électronique très supérieure à celle des ions. Ainsi, $v_{th,e}/v_{th,i} = 1/\sqrt{\delta} \approx 10^2$, ce qui mène à des problèmes de discrétisation. En effet, une discrétisation standard des deux équations cinétiques (électronique et ionique) implique une contrainte sur le pas de temps, d'autant plus restrictive que la vitesse thermique électronique est grande puisque la condition de stabilité impose $v_{th,e}\Delta t \leq \Delta x$. Or, dans de nombreux cas, le phénomène macroscopique étudié évolue selon une échelle de temps liée à la dynamique des ions. L'objectif doit donc être de

construire un schéma capable de décrire de façon précise le comportement physique ionique, sans pour autant avoir à “suivre” le mouvement rapide des électrons.

Cela a été étudié dans la littérature par des travaux mettant en œuvre des stratégies hybrides [53–55], qui ont décrit les ions lents et lourds grâce à une équation cinétique et les électrons rapides et légers avec un système fluide (appelé système des électrons adiabatique, ou relation de Boltzmann), en faisant l'hypothèse que les électrons ont une inertie nulle ($m_e \to 0$). L'obtention de cette relation de Boltzmann suppose aussi que la viscosité des électrons est nulle le long des lignes de champs magnétiques, ce qui conduit à la relation

$$\nabla_{||} p_e = -q\, n_e \mathbf{E}_{||}\,, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi\,.$$

Ces égalités traduisent le fait que le gradient de pression et les forces électrostatiques, s'appliquant sur les électrons parallèlement aux lignes de champ magnétique, sont en équilibre. De plus, la rapide conduction thermique le long de la direction parallèle assure que $\nabla_{||} T_e \sim 0$. En le combinant à l'équation d'état $p_e = n_e\, k_B\, T_e$, nous obtenons

$$n_e(t,\mathbf{x}) = c(t,\mathbf{x}_\perp)\, \exp\left(\frac{q\,\phi(t,\mathbf{x})}{k_B\, T_e(t,\mathbf{x}_\perp)}\right), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_\perp, \mathbf{x}_{||}) \in \mathbb{R}^3\,,\ \ t \in \mathbb{R}^+\,. \tag{7.1}$$

Cette égalité est appelée relation de Boltzmann ou réponse adiabatique. Elle relie la densité électronique et le potentiel électronique. Les fonctions $c(t,\mathbf{x}_\perp)$ and $T_e(t,\mathbf{x}_\perp)$ sont déterminées grâce à des équations de transport, munies de conditions initiales et limites. Elles ne dépendent cependant pas de la coordonnée parallèle $\mathbf{x}_{||}$. Une fois c and T_e connus, l'équation (7.1) est ensuite injectée dans l'équation de Poisson, puis couplée à un modèle mathématique décrivant la dynamique des ions (fluide ou cinétique). Cette stratégie est fréquemment utilisée dans la simulation de plasmas de fusion [53–55] car elle amène une grande réduction du coût numérique.

L'équation (7.1) est une bonne approximation de la densté électronique d'un plasma de fusion car le ratio des masses électron-ion est petit . Cependant, il existe tout de même certaines situations pour lesquelles les électrons boltzmanniens ne représentent pas une approximation adaptée. Comme par exemple le cas des bords du plasma, les régions appelées gaine et pré-gaine. Cette question a déjà été abordée rapidement avec l'exemple sur l'écrantage électronique : la distribution des électrons est appelée la gaine électronique et nous avons vu qu'elle est d'une taille de l'ordre de grandeur de la longueur de Debye (Chap. 6-Sect. I.2.2).

Ainsi, il est recommandé dans ces régions d'utiliser un modèle cinétique pour les électrons et d'utiliser la réponse adiabatique dans le reste du domaine, là où elle donne des résultats suffisamment précis. Devant cette difficulté, notre étude porte sur la construction d'un schéma numérique capable de décrire les deux régimes des l'électron : le régime cinétique non-adiabatique ainsi que le régime adiabatique boltzmannien. Cette méthode serait une alternative aux techniques qui traitent les problèmes multi-échelles hétérogènes (Chap. 6- Sect. III.3), telle que la décomposition de domaine. Nous allons introduire un petit paramètre ε qui sera responsable du passage vers la limite adiabatique et, lorsque $\varepsilon \to 0$, utiliser des techniques préservant l'asymptotique (techniques AP) [48, 56, 57] afin de conserver au niveau discret le passage entre les régimes cinétique et adiabatique. En effet, comme nous l'avons expliqué, les schémas AP permettent d'utiliser un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx indépendants de ε et donc adaptés au phénomène que l'on souhaite modéliser, ce qui explique tout leur intérêt du point de vue du coût numérique (Chap. 6- Sect. IV).

Dans un premier temps, nous introduisons le modèle cinétique électron-ion ainsi que son adimensionnement (Sect. I). Nous abordons ensuite l'obtention de modèles macroscopiques correspondant aux deux équations cinétiques adimensionnées (Sect. II). Puis, nous effectuons une reformulation de l'équation cinétique adimensionnée pour les électrons grâce à une décomposition micro-macro (Sect. III). Par la suite, nous présentons un schéma AP pour la résolution de la dynamique électronique dans le régime cinétique ainsi que dans le régime adiabatique (Sect. IV). Enfin, nous présentons les résultats numériques (Sect. V).

I LE MODÈLE CINÉTIQUE ET SON ADIMENSIONNEMENT

Nous partons d'un modèle cinétique décrivant les deux espèces de particules (ions-électrons) sur un espace des phases 1D1V dans un plasma non magnétisé et isotherme. Ce choix de modèle peut se justifier en disant que l'on considère le plasma évoluant dans un bain d'une température donnée, et qui se propage le long des lignes de champ magnétiques. Ce modèle est très simplifié mais conserve tout de même les difficultés numériques que l'on peut rencontrer dans un plasma plus physique 3D3V fortement magnétisé aux températures variables (la limite 3D adiabatique a été étudiée dans [58]). Notre démarche est de mieux comprendre les difficultés qui peuvent surgir lors de la construction d'un schéma AP pour la limite adiabatique.

Notre point de départ est le système suivant, donné par des équations de Boltzmann unidimensionnelles pour les deux espèces de particules chargées (les ions et les électrons)

$$\begin{cases} \partial_t f_i + v\,\partial_x f_i + \dfrac{q}{m_i} E\,\partial_v f_i = Q_{ii}(f_i) + Q_{ie}(f_i, f_e) \\ \partial_t f_e + v\,\partial_x f_e - \dfrac{q}{m_e} E\,\partial_v f_e = Q_{ee}(f_e) + Q_{ei}(f_e, f_i)\,, \end{cases} \tag{7.2}$$

couplé à l'équation de Poisson pour le calcul du potentiel électrostatique

$$-\partial_{xx}\phi = \frac{q}{\epsilon_0}(n_i - n_e)\,, \quad E = -\partial_x \phi\,, \tag{7.3}$$

où $f_{i,e}$ représentent les fonctions de distributions des particules, q la charge élémentaire, ϵ_0 la permittivité du vide, $m_{e,i}$ les masses respectives des électrons et des ions et $n_{e,i}$ les densités électroniques, respectivement ioniques, définies par

$$n_{e,i}(t,x) := \int_{\mathbb{R}} f_{e,i}(t,x,v)\,dv. \tag{7.4}$$

La quantité de mouvement des particules sont définie par

$$(n_{e,i}\,u_{e,i})(t,x) := \int_{\mathbb{R}} v\,f_{e,i}(t,x,v)\,dv. \tag{7.5}$$

Nous n'avons pas encore besoin de définir la forme des opérateurs de collision de manière plus précise. Ceci sera fait plus tard. Nous imposons néanmoins les propriétés de conservation de la masse et de la quantité de mouvement que vérifient les opérateurs inter et intra-espèces, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} Q_{kl}(v)\,dv = 0\,, \quad \forall k,l \in \{i,e\}\,, \tag{7.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}} Q_{ee}(v)\,m_e\,v\,dv = \int_{\mathbb{R}} Q_{ii}(v)\,m_i\,v\,dv = 0\,, \qquad \mathscr{S}_{ei} + \mathscr{S}_{ie} = 0\,, \tag{7.7}$$

avec les termes de frottement définis comme

$$\mathscr{S}_{ei} := \int_{\mathbb{R}} Q_{ei}(v)\, m_e\, v\, dv\,, \qquad \mathscr{S}_{ie} := \int_{\mathbb{R}} Q_{ie}(v)\, m_i\, v\, dv\,.$$

Afin de simplifier cette étude, nous avons supposé que les particules évoluent dans un bain de température donnée égale à T ($T_e = T_i = T$), si bien que la propriété de conservation de l'énergie des opérateurs de collisions n'est pas satisfaite.

I.1 Obtention du modèle adimensionné

Nous allons maintenant étudier la forme sans dimension du modèle cinétique. Cette opération devrait nous permettre d'identifier les paramètres pertinents et donc de décrire les différents régimes asymptotiques d'un plasma. Nous résumons ici les échelles caractéristiques de notre problème.

— Masses disparates (paramètre : δ) :

$$\delta := \frac{m_e}{m_i}.$$

— Echelle microscopique des vitesses thermiques :

$$\bar{v}_e := v_{th,e} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}\,, \qquad \bar{v}_i := v_{th,i} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_i}} = \sqrt{\delta}\, \bar{v}_e.$$

— Echelles microscopique de temps et de longueur :

$$\tau_c := \tau_{ii} \quad \text{(temps écoulé entre deux collisions ioniques)}\,,$$

$$l_c := \bar{v}_i\, \tau_c \quad \text{(temps de libre parcours moyen entre deux collisions ioniques)}\,.$$

— Echelle macroscopique de vitesse (paramètre : nombre de Mach ionique M) :

$$\bar{u}_i = \bar{u}_e = \bar{u} \quad \text{(vitesses macroscopiques caractéristiques)}\,, \tag{7.8a}$$

$$\frac{\bar{u}}{\bar{v}_i} =: M \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{u}}{\bar{v}_e} = \sqrt{\delta}\, M\,. \tag{7.8b}$$

— Echelle de longueur macroscopique (paramètre : nombre de Knudsen ionique κ) :

$$\bar{x} = L \quad \text{(distance du phénomène observé)}\,, \qquad \frac{l_c}{\bar{x}} =: \kappa\,.$$

— Echelle macroscopique de temps :

$$\bar{t} := \frac{\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{1}{\kappa M}\, \tau_c \quad \text{(temps d'observation)}\,.$$

— Echelle des forces électriques :

$$\bar{E} = \frac{k_B\, T}{\bar{x}\, q} = \frac{\bar{v}_i^2\, m_i}{q\bar{x}} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\phi} = \frac{k_B\, T}{q}\,.$$

— Opérateurs de collisions, fonctions de distribution :

$$\bar{n}_i = \bar{n}_e = \bar{n}\,, \qquad \bar{f}_e := \frac{\bar{n}}{\bar{v}_e}\,, \quad \bar{f}_i := \frac{\bar{n}}{\bar{v}_i}\,, \tag{7.9}$$

$$\bar{Q}_{ee} = \bar{\nu}_{ee}\bar{f}_e\,, \qquad \bar{Q}_{ii} = \bar{\nu}_{ii}\bar{f}_i\,, \qquad \bar{Q}_{ei} = \bar{\nu}_{ei}\bar{f}_e\,, \qquad \bar{Q}_{ie} = \bar{\nu}_{ie}\bar{f}_i\,. \tag{7.10}$$

— Fréquences de collision $\bar{\nu}_{kl}$ [59] et les périodes de collisions correspondantes $\tau_{kl} = 1/\bar{\nu}_{kl}$:

$$\bar{\nu}_{ii} = \sqrt{\delta}\,\bar{\nu}_{ee}\,, \quad \bar{\nu}_{ie} = \delta\,\bar{\nu}_{ei}\,, \quad \bar{\nu}_{ie} = \sqrt{\delta}\bar{\nu}_{ii}\,, \quad \bar{\nu}_{ee} = \bar{\nu}_{ei}\,, \tag{7.11}$$

$$\tau_{ee} = \tau_{ei} = \sqrt{\delta}\,\tau_c\,, \quad \tau_{ie} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\tau_c\,. \tag{7.12}$$

— Longueur de Debye ionique (paramètre λ) :

$$\lambda_D := \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{\bar{n}\,q^2}} = \frac{v_{th,i}}{\omega_p}\,, \qquad \omega_p := \sqrt{\frac{\bar{n}\,q^2}{\epsilon_0\,m_i}} \quad \text{(fréquence plasma)}\,,$$

$$\lambda := \frac{\lambda_D}{\bar{x}} = \frac{v_{th,i}}{\bar{x}}\frac{1}{\omega_p} = \kappa\,\frac{1}{\omega_p\,\tau_c}\,.$$

Avec l'objectif d'adimensionner le système cinétique, nous appliquons le changement de variables suivant à (7.2)-(7.3) :

$$t = \bar{t}\,t'\,, \qquad x = \bar{x}\,x'\,, \qquad v = \bar{v}_{e,i}\,v'\,, \qquad f_{e,i}(t,x,v) = \bar{f}_{e,i}\,f'_{e,i}(t',x',v')\,,$$

$$E(t,x) = \bar{E}\,E'(t',x')\,, \qquad Q_{kl}(f_k,f_l) = \bar{Q}_{kl}\,Q'_{kl}(f'_k,f'_l)\,, \tag{7.13}$$

et obtenons le modèle cinétique adimensionné

$$\begin{cases} \partial_{t'} f'_i + \dfrac{1}{M}\,v'\partial_{x'} f'_i + \dfrac{1}{M}\,E'\,\partial_{v'} f'_i = \dfrac{1}{\kappa M}\left[Q'_{ii}(f'_i) + \sqrt{\delta}\,Q'_{ie}(f'_i,f'_e)\right] \\ \partial_{t'} f'_e + \dfrac{1}{\sqrt{\delta}M}\,v'\partial_{x'} f'_e - \dfrac{1}{\sqrt{\delta}M}\,E'\,\partial_{v'} f'_e = \dfrac{1}{\kappa\sqrt{\delta}M}\left[Q'_{ee}(f'_e) + Q'_{ei}(f'_e,f'_i)\right]\,, \end{cases} \tag{7.14}$$

couplé à l'équation de Poisson

$$-\lambda^2\,\partial_{xx}\phi' = n'_i - n'_e\,, \qquad E' = -\partial_x\phi'\,, \qquad n'_{e,i} = \int_{\mathbb{R}} f'_{e,i}\,dv'\,. \tag{7.15}$$

Les opérateurs de collision adimensionnés satisfont les lois de conservations adimensionnées

$$\int_{\mathbb{R}} Q'_{kl}(v')\,dv' = 0\,, \quad \forall\,k,l \in \{i,e\}\,, \tag{7.16}$$

$$\int_{\mathbb{R}} Q'_{ee}(v')\,v'\,dv' = \int_{\mathbb{R}} Q'_{ii}(v')\,v'\,dv' = 0\,, \qquad \mathscr{S}'_{ei} + \sqrt{\delta}\,\mathscr{S}'_{ie} = 0\,, \tag{7.17}$$

avec les termes de friction donnés par

$$\mathscr{S}'_{ei} := \int_{\mathbb{R}} Q'_{ei}(v')\,v'\,dv'\,, \qquad \mathscr{S}'_{ie} := \int_{\mathbb{R}} Q'_{ie}(v')\,v'\,dv'\,.$$

Les premiers moments adimensionnés des fonction de distribution s'écrivent :

$$M\, n_i' u_i' = \int_{\mathbb{R}} v' f_i'(v')\, dv', \qquad \sqrt{\delta} M\, n_e' u_e' = \int_{\mathbb{R}} v' f_e'(v')\, dv'. \tag{7.18}$$

$$\mathbb{P}_e' = \int_{\mathbb{R}^d} (\sqrt{\varepsilon}\, u_e' - v') \otimes (\sqrt{\varepsilon}\, u_e' - v')\, f_e'(t', x', v')\, dv'.$$

Plusieurs échelles de temps apparaissent dans le système adimensionné (7.14). L'échelle de temps globale est évidemment déterminée par le nombre de Mach M. Il est aussi évident que la dynamique des électrons est plus rapide que celle des ions d'un facteur $1/\sqrt{\delta}$. Ceci justifie le traitement adiabatique des électrons lorsque $\delta \to 0$ formellement. De plus, nous remarquons que les différents opérateurs de collisions n'opèrent pas sur la même échelle de temps. Tout d'abord, dû au faible ratio des masses δ, le terme de collision électron-ion est négligeable lors du processus de relaxation des ions vers leur équilibre thermodynamique. Ensuite, les opérateurs de collision Q_{ee} et Q_{ei} opèrent à la même échelle de temps et contribuent donc ensemble à la relaxation thermodynamique des électrons. Enfin, nous pouvons remarquer que les ions relaxent plus lentement que les électrons d'un facteur $\sqrt{\delta} = \sqrt{m_e/m_i}$ vers leurs équilibres respectifs, si bien que les équations fluides électroniques sont établies avant les équations hydrodynamiques des ions.

A partir de ce modèle adimensionné très général, nous pouvons retrouver les limites asymptotiques connues dans la littérature, en fixant tous les paramètres sauf un. Lorsque $\lambda \to 0$, nous obtenons la limite quasi-neutre [60, 61], lorsque $\kappa \to 0$ la limite hydrodynamique [29, 30, 44], lorsque $M \to 0$ la limite asymptotique en temps long [62, 63], et lorsque $\delta \to 0$ la limite asymptotique de faible masse [64]. La limite que nous souhaitons étudier est appelée la limite adiabatique. Dans [58], les électrons sont considérés de masse faible, sans inertie, et collisionnels afin de passer du régime cinétique au régime électronique boltzmannien. Nous souhaitons obtenir le même type de situation et pour cela supposons

$$M \sim 1, \qquad \delta \sim \varepsilon, \qquad \kappa \sim \sqrt{\varepsilon}, \tag{7.19}$$

où $\varepsilon \in [0, 1]$ est le paramètre asymptotique qui tend vers zéro.

Remarque 7.1. *Le ratio des masses δ est en réalité fixé. La limite $\varepsilon \to 0$ doit plutôt être vue comme une astuce mathématique, une approximation. L'étude de cette limite permettant tout d'abord de mieux comprendre les différences entre les comportements des ions et des électrons mais aussi de construire des schémas numériques efficaces pour les régimes où $\varepsilon << 1$.*

Les principales raisons pour les choix de l'asymptotique (7.19) peuvent être résumées par les arguments suivants.

— Forte collisionalité :
  Même si les plasmas de tokamak sont faiblement collisionnels, notre choix vient du fait que les modèles fluides restent encore moins coûteux (en temps et en mémoire) que les modèles cinétiques. Cependant, il existe des situations (ou des régions dans le tokamak) où les modèles fluides mènent à des résultats erronés, forçant alors à revenir vers des modèles cinétiques plus précis. Notre but est donc de construire un schéma capable d'alterner automatiquement entre le régime fluide et le régime cinétique, et ceci par le biais du paramètre

κ lié aux collisions. Il faut aussi noter que, même dans un plasma faiblement collisionnel, les collisions peuvent générer des effets importants sur des temps longs. Nous ne pouvons donc pas les négliger.

— Régime électronique sans inertie :
Comme nous l'avons expliqué, les phénomènes que l'on souhaite observer ont lieu à des échelles de temps relatives aux ions. Avec un objectif de performance, nous voudrions donc suivre la dynamique ionique, contraint par le pas de temps $v_{th,i}\,\Delta t \leq \Delta x$, sans avoir à résoudre l'évolution rapide des électrons qui est contrainte par le pas de temps très restreint $v_{th,e}\,\Delta t = v_{th,i}\,\Delta t/\sqrt{\delta} \leq \Delta x$. C'est pour cette raison que nous posons artificiellement $M \sim 1$ et faisons tendre $\varepsilon \to 0$, en gardant à l'esprit que le ratio des masses est fixé en réalité et que nous faisons cela pour obtenir des résultats pour Δt indépendant de ε. Nous pourrions ausi obtenir la limite adiabatique en prenant $M \sim \varepsilon$ et δ fixé. Cependant, cette limite ne nous permettrait pas de séparer les ions des électrons et a déjà été l'objet d'études [65] concernant le régime d'un nombre de Mach petit.

— Propriété de préservation de l'asymptotique (AP) :
Considérer le système adimensionné (7.14) avec $M \sim 1$ et $\sqrt{\delta} \sim 10^{-2}$ pourrait nous amener à penser que la limite $\delta = \varepsilon \to 0$ est purement académique et présente peu d'intérêt pratique. Ceci est pourtant faux car le nombre de Mach dans un tokamak peut être faible dans certaines régions, si bien que le produit $\sqrt{\delta}M$ est assez petit pour engendrer des difficultés numériques, comme un mauvais conditionnement du système linéaire ou des singularités numériques. Le schéma AP que nous allons construire évite de tels problèmes et est capable de traiter chaque régime efficacement et précisément, sans adapter le maillage.

I.2 Les opérateurs de collisions

Nous nous intéressons maintenant aux opérateurs de collisions et à leurs adimensionnements respectifs. Le choix d'un opérateur de collision est important afin de décrire correctement le processus de collision ainsi que la relaxation vers l'équilibre thermodynamique. La partie précédente n'apporte pas de contraintes quant à la forme que doivent prendre les opérateurs, si ce n'est que les règles de conservations doivent être respectées.

Plusieurs opérateurs de collision ont été introduits dans la littérature, chacun décrivant différents processus de collision et variant en complexité, comme par exemple l'opérateur de Boltzmann, l'opérateur de Fokker-Planck ou l'opérateur de Landau [43, 45, 66]. Nous décidons de choisir un opérateur assez simple qui vérifie néanmoins les même propriétés de conservation, d'inégalités d'entropie et admet le même équilibre thermodynamique que les opérateurs plus complexes, est facile à traiter numériquement. Ceci nous pousse à adopter l'opérateur de collisions BGK. Ces opérateurs inter et intra-espèces sont donnés par [67]

$$Q_{ee,ii}(f_{e,i}) := \nu_{ee,ii}\,(\mathcal{M}^{e,i}_{n_{e,i},u_{e,i},T} - f_{e,i})\,, \tag{7.20a}$$

$$Q_{ei}(f_e, f_i) := \nu_{ei}\,(\mathcal{M}^{e}_{n_e,u_i,T} - f_e)\,, \quad Q_{ie}(f_i, f_e) := \nu_{ie}\,(\mathcal{M}^{i}_{n_i,u_e,T} - f_i)\,, \tag{7.20b}$$

où $\nu_{kl} = \bar{\nu}_{kl}\,\nu'_{kl}$ ont été évoquées plus tôt et représentent les fréquences de relaxation des fonctions de distributions vers l'équilibre thermodynamique avant et après le adimensionnement. L'équilibre thermodynamique est décrit par la maxwellienne

$$\mathcal{M}^{s}_{n_{e,i},u_{e,i},T}(t,x,v) = n_{e,i}(t,x)\left(\frac{m_s}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-m_s\,\frac{|v-u_{e,i}(t,x)|^2}{2k_B T}\right).$$

Ici, k_B est la constante de Boltzmann, les ions et les électrons sont supposés évoluer dans un bain thermique d'une température donnée $T > 0$ et $n_{e,i}$ et $u_{e,i}$ représentent les densité et vitesses macroscopiques des particules définies par les équations respectives (7.4) et (7.5). Remarquons ici l'indice $s \in \{e, i\}$ utilisé pour la notation de la maxwellienne $\mathscr{M}^s$ et qui permet de spécifier la masse de la particule qu'il convient d'utiliser, notamment pour les opérateurs de collision inter-espèces. Pour avoir les propriétés classiques de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de ces opérateurs de collisions, nous devons imposer

$$m_i n_i \nu_{ie} = m_e n_e \nu_{ei}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad n'_i \nu'_{ie} = n'_e \nu'_{ei}\,.$$

A partir des hypothèses (7.9) and (7.11) effectuées sur les densités et les fréquences de collision caractéristiques, que nous appliquons afin d'adimensionner les opérateurs de collisions (7.20), nous obtenons $Q_{kl}(f_k, f_l) = \bar{\nu}_{kl}\, \bar{f}_k\, Q'_{kl}(f'_k, f'_l)$, avec

$$Q'_{ee}(f'_e) := \nu'_{ee}\,(\mathscr{M}_{n'_e,\sqrt{\delta}\,M\,u'_e} - f'_e) = \nu'_{ee}\left(\frac{n'_e}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{|v' - \sqrt{\delta}\,M\,u'_e|^2}{2}\right) - f'_e\right), \tag{7.21a}$$

$$Q'_{ii}(f'_i) := \nu'_{ii}\,(\mathscr{M}_{n'_i,M\,u'_i} - f'_i) = \nu'_{ii}\left(\frac{n'_i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{|v' - M\,u'_i|^2}{2}\right) - f'_i\right), \tag{7.21b}$$

$$Q'_{ei}(f'_e, f'_i) := \nu'_{ei}\,(\mathscr{M}_{n'_e,\sqrt{\delta}\,M\,u'_i} - f'_e) = \nu'_{ei}\left(\frac{n'_e}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{|v' - \sqrt{\delta}\,M\,u'_i|^2}{2}\right) - f'_e\right), \tag{7.21c}$$

$$Q'_{ie}(f'_i, f'_e) := \nu'_{ie}\,(\mathscr{M}_{n'_i,M\,u'_e} - f'_i) = \nu'_{ie}\left(\frac{n'_i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{|v' - M\,u'_e|^2}{2}\right) - f'_i\right). \tag{7.21d}$$

Les moments des fonctions de distributions adimensionnés $n'_{e,i}$ et $u'_{e,i}$ sont donnés par les équations (7.15) et (7.18).

II LES MODÈLES MACROSCOPIQUES DANS LE RÉGIME DES MASSES DISPARATES

II.1 Le régime de dérive-diffusion des électrons

Avant de s'intéresser à la limite adiabatique des électrons, nous nous intéressons au modèle macroscopique ion/électron résultant de l'application de l'asymptotique (7.19) au système cinétique adimensionné (7.14), c'est-à-dire

$$\begin{cases} \partial_t f_i^\varepsilon + v\,\partial_x f_i^\varepsilon + E^\varepsilon\,\partial_v f_i^\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[Q_{ii}(f_i^\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,Q_{ie}(f_i^\varepsilon, f_e^\varepsilon)\right], \\ \partial_t f_e^\varepsilon + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,v\,\partial_x f_e^\varepsilon - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,E^\varepsilon\,\partial_v f_e^\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}\left[Q_{ee}^{(\varepsilon)}(f_e^\varepsilon) + Q_{ei}^{(\varepsilon)}(f_e^\varepsilon, f_i^\varepsilon)\right], \end{cases} \tag{7.22}$$

couplé à l'équation de Poisson

$$-\lambda^2\,\partial_{xx}\phi^\varepsilon = n_i^\varepsilon - n_e^\varepsilon\,, \qquad E^\varepsilon = -\partial_x\phi^\varepsilon\,. \tag{7.23}$$

Notre but est d'identifier le système ion/électron limite lorsque le petit paramètre de perturbation ε tend vers zéro. Cette limite est dite limite "macroscopique" puisque $\sqrt{\varepsilon}$ désigne le

nombre de Knudsen. Pour une raison de simplicité de notation, les primes sont omis. Les opérateurs de collisions dans leur forme adimensionnée, s'écrivent

$$Q_{ii} = \nu_{ii}\left(\frac{n_i^\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-u_i^\varepsilon)^2}{2}\right) - f_i^\varepsilon\right), \quad Q_{ee}^{(\varepsilon)} = \nu_{ee}\left(\frac{n_e^\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-\sqrt{\varepsilon}u_e^\varepsilon)^2}{2}\right) - f_e^\varepsilon\right), \tag{7.24a}$$

$$Q_{ie} = \nu_{ie}\left(\frac{n_i^\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-u_e^\varepsilon)^2}{2}\right) - f_i^\varepsilon\right), \quad Q_{ei}^{(\varepsilon)} = \nu_{ei}\left(\frac{n_e^\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-\sqrt{\varepsilon}u_i^\varepsilon)^2}{2}\right) - f_e^\varepsilon\right). \tag{7.24b}$$

Les opérateurs de collisions des électrons $Q_{ee}^{(\varepsilon)}$ et $Q_{ei}^{(\varepsilon)}$ dépendent explicitement du paramètre ε dans l'exponentielle. Il vient de notre choix d'échelles pour les vitesses macroscopique (7.8). Dans de nombreuses applications, la longueur de Debye adimensionnée λ tendra vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet, $\lambda = \kappa \frac{1}{\omega_p \tau_c}$ avec ω_p la fréquence plasma ionique. Cependant, nous ne nous intéressons pas à cette limite quasi-neutre ici mais plutôt à la limite adiabatique.

La limite $\varepsilon \to 0$ de l'équation cinétique régissant la dynamique des ions est la limite hydrodynamique standard. En effet, f_i^ε tends vers une fonction appartenant au noyau de l'opérateur dominant Q_{ii}, c'est-à-dire $f_i^0 = \mathscr{M}_{n_i^0, u_i^0}$, où les moments de la maxwellienne sont solutions du modèle hydrodynamique

$$(\text{ion-}HD) \quad \begin{cases} \partial_t n_i^0 + \partial_x(n_i^0\, u_i^0) = 0, \\ \partial_t(n_i^0\, u_i^0) + \partial_x(n_i^0\,(u_i^0)^2) + \partial_x\, p_i^0 - E^0\, n_i^0 = \mathscr{S}_{ie}^0, \end{cases} \tag{7.25}$$

avec le terme de friction $\mathscr{S}_{ie}^0 = \nu_{ie} n_i^0 (u_e^0 - u_i^0)$ et de pression défini par

$$p_i^\varepsilon(t,x) := \int_{\mathbb{R}} (v-u_i^\varepsilon)^2\, f_i^\varepsilon(t,x,v)\, dv,$$

menant, lorsque $\varepsilon \to 0$, à la loi d'état $p_i^0 = n_i^0$. Le problème limite (7.25) est un système macroscopique ionique, couplé au système régissant la dynamique des électrons via la vitesse moyenne u_e^0 dans le terme $\mathscr{S}_{ie}^0$, ainsi que via le champ électrique E^0, obtenu avec l'équation de Poisson. Cette limite hydrodynamique $\varepsilon \to 0$ a déjà été beaucoup étudiée ; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à la liste non exhaustive de références [29, 30, 44, 68–70].

Pour identifier la limite $\varepsilon \to 0$ de l'équation cinétique dans (7.22), nous observons que, pour une fonction de distribution ionique donnée f_i et en utilisant (7.24), nous avons

$$\ker\left\{Q_{ee}^{(0)}(f_e) + Q_{ei}^{(0)}(f_e, f_i)\right\} = \{\mathscr{M}_{n_e^0,0}\,,\ n_e^0 \in \mathbb{R}\},$$

signifiant que la limite $\varepsilon \to 0$ de la fonction de distribution électronique f_e^ε est une maxwellienne de vitesse moyenne nulle $f_e^0 = \mathscr{M}_{n_e^0,0}$, où l'évolution de la densité $n_e^0(t,x)$ doit encore être établie. Pour cela, nous prenons les moments de l'équation cinétique électronique dans (7.22) et, en utilisant (7.18), nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t n_e^\varepsilon + \partial_x(n_e^\varepsilon\, u_e^\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(n_e^\varepsilon\, u_e^\varepsilon) + \partial_x(n_e^\varepsilon\,(u_e^\varepsilon)^2) + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x\, p_e^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} E^\varepsilon\, n_e^\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}\mathscr{S}_{ei}^\varepsilon, \end{cases} \tag{7.26}$$

avec le terme de friction $\mathscr{S}_{ei}^{\varepsilon} = \nu_{ei} n_e^{\varepsilon}(u_i^{\varepsilon} - u_e^{\varepsilon})$ et le terme de pression donné par

$$p_e^{\varepsilon}(t,x) := \int_{\mathbb{R}} (v - \sqrt{\varepsilon}\, u_e^{\varepsilon})^2 f_e^{\varepsilon}(t,x,v)\, dv. \tag{7.27}$$

Il s'ensuit de cette définition que $p_e^0 = n_e^0$; alors le régime limite $\varepsilon \to 0$ du système (7.26) est

$$(\text{électron-}DD) \begin{cases} \partial_t n_e^0 + \partial_x(n_e^0 u_e^0) = 0, \\ \partial_x n_e^0 + E^0 n_e^0 = \nu_{ei} n_e^0 (u_i^0 - u_e^0), \end{cases} \tag{7.28}$$

qui est le modèle de dérive-diffusion, couplé à la dynamique des ions par la vitesse moyenne u_i^0 ainsi que via le champ électrique E^0. Les équations cinétiques dans le régime de dérive-diffusion et leur analyse asymptotique ont aussi fait l'objet de nombreux travaux, comme par exemple [71–73]. Notons ici que les électrons à la limite ont atteint un équilibre plus macroscopique (DD-model) que les ions (HD-model), dû comme attendu, à leur faible masse ou, de manière équivalente, à leur plus grande vitesse thermique.

II.2 Le régime adiabatique pour les électrons

Le régime adiabatique des électrons est obtenu lorsque le terme de friction $\mathscr{S}_{ei}^{\varepsilon}$ est petit dans (7.26). Ce cas de figure pourrait par exemple se présenter lorsque le courant est faible, *i.e.* $u_i^{\varepsilon} - u_e^{\varepsilon} \sim \mathscr{O}(\sqrt{\varepsilon})$ si bien que le terme de friction $\mathscr{S}_{ie}^{\varepsilon}$ disparaîtrait à l'ordre principal dans (7.26). Le passage à la limite nous permet d'obtenir

$$\begin{cases} \partial_t n_e^0 + \partial_x(n_e^0 u_e^0) = 0 \\ \partial_x n_e^0 + E^0 n_e^0 = 0. \end{cases} \tag{7.29}$$

Nous pouvons récupérer la relation de Boltzmann depuis (7.29). Effectivement, pour $E^0 = -\partial_x \phi^0$ donné, la seconde équation du système (7.29) permet d'obtenir la relation entre la densité et le potentiel

$$n^0(t,x) = c(t)\, e^{\phi^0(t,x)}, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,L]. \tag{7.30}$$

Pour déterminer la constante $c(t)$, il suffit d'intégrer la première équation de (7.29) sur la variable périodique en espace x pour avoir

$$\partial_t \overline{n^0} = 0, \qquad \overline{n^0}(t) := \frac{1}{L}\int_0^L n^0(t,x)\, dx,$$

ce qui implique alors

$$\overline{n^0}(t) = \overline{n^0(0,\cdot)} = \overline{n_0^0},$$

nous permettant donc de connaître $c(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ dans la relation (7.30).

Si nous supposons des conditions limites périodiques, chose cohérente puisque nous considérons l'évolution d'un plasma le long des lignes de champs magnétique, ce système est alors mal posé. En effet, il n'est pas possible de déterminer la vitesse u_e^0. Ainsi, si nous utilisons des méthodes numériques standards afin de discrétiser l'équation cinétique électronique dans (7.22), les schémas ne seront pas stables lorsque $\varepsilon \to 0$. Les sections suivantes sont dédiées à l'étude détaillée de cette limite asymptotique adiabatique, et en particulier à la recherche d'une formulation préservant l'asymptotique.

III PASSAGE VERS LE RÉGIME LES ÉLECTRONS BOLTZMANNIENS

Afin d'étudier plus en détails la limite asymptotique adiabatique, nous négligeons les ions et débutons cette section par l'équation cinétique adimensionnée électronique

$$(K)_\varepsilon \quad \partial_t f_e^\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} v \partial_x f_e^\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E \partial_v f_e^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q_{ee}(f_e^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} [\mathcal{M}_{n_e^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} u_e^\varepsilon} - f_e^\varepsilon]. \tag{7.31}$$

Nous supposons le potentiel électrostatique $\phi(t,x)$ donné et $E = -\partial_x \phi$. Notre but est tout d'abord d'identifier le régime limite de (7.31) lorsque $\varepsilon \to 0$, en particulier afin de capturer le régime des électrons boltzmanniens. Dans un second temps, nous souhaitons construire un schéma numérique capable de résoudre cette équation cinétique, et ceci quel que soit le régime en ε. Afin de rendre les notations plus claires, nous omettons l'indice 'e' de la fonction de distribution ainsi que des quantités macroscopiques. De plus, nous posons $\nu_{ee} = 1$ pour simplifier.

Spécifions tout d'abord les conditions initiales et limites associées à l'équation cinétique (7.31). La variable temporelle t appartient à $\mathbb{R}^+$, la variable spatiale x à l'intervalle $[0, L]$ avec $L > 0$, et nous considérons des conditions limites périodiques en x, c'est-à-dire

$$\partial_x^k f(t,0,v) = \partial_x^k f(t,L,v), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \ \forall v \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7.32a}$$

La variable vitesse v est étudiée sur tout le domaine $\mathbb{R}$, avec la condition que

$$\lim_{v \to \pm\infty} f(t,x,v) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in [0,L]. \tag{7.32b}$$

Dans les simulations numériques, nous remplacerons le domaine de définition de la vitesse par $[v_{min}, v_{max}]$ en considérant par la suite un temps final de simulation $T > 0$ tels que, pour $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$ fixé, nous avons $f(t,x,v) = 0$ en dehors de l'espace des vitesses.

En ce qui concerne la condition initiale, nous partons d'une situation en accord avec le dimensionnement de l'équation (7.31), c'est-à-dire adaptée au régime considéré. Ainsi, la fonction de distribution des électrons est initialement donnée par

$$f^\varepsilon(0,x,v) = \mathcal{M}_{n_0^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} u_0^\varepsilon} + \varepsilon g_0^\varepsilon, \tag{7.33}$$

pour des fonctions n_0^ε, u_0^ε, g_0^ε données et bornées. Nous partons donc d'une distribution égale à l'équilibre maxwellien légèrement perturbé. Lorsque les données initiales sont bien préparées, comme dans ce cas, un schéma préservant l'asymptotique est appelé "AP faible".

III.1 Décomposition micro-macro

Afin d'identifier la limite asymptotique (7.31), nous commençons par faire l'Ansatz de Chapman-Enskog de la fonction de distribution

$$f^\varepsilon = \mathcal{M}(f^\varepsilon) + \varepsilon g^\varepsilon, \qquad \mathcal{M}(f^\varepsilon) = \mathcal{M}_{n^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} u^\varepsilon} := \frac{n^\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|v - \sqrt{\varepsilon} u^\varepsilon|^2}{2}\right). \tag{7.34}$$

Rappelons que les moments sont donnés par

$$n^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon(t,x,v)\, dv, \quad \sqrt{\varepsilon} n^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} v f^\varepsilon(t,x,v)\, dv,$$

ce qui nous permet de déduire les propriétés

$$\int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon(t,x,v)\,dv = \int_{\mathbb{R}} v\,g^\varepsilon(t,x,v)\,dv = 0\,.$$

En insérant cette décomposition dans (7.31), nous obtenons

$$\partial_t \mathcal{M}(f^\varepsilon) + \varepsilon\,\partial_t g^\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,v\,\partial_x \mathcal{M}(f^\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,v\,\partial_x g^\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,E^\varepsilon\,\partial_v \mathcal{M}(f^\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}E^\varepsilon\,\partial_v g^\varepsilon = -g^\varepsilon\,. \tag{7.35}$$

Afin de séparer la partie macroscopique de la partie microscopique de cette équation, nous allons utiliser une technique de projection déjà utilisée dans des travaux précédents, tels que [74–76]. Supposons pour un moment que f^ε et donc ses moments $(n^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\,u^\varepsilon)$ ainsi que la maxwellienne associée $\mathcal{M}_{n^\varepsilon,\sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon}$ soient fixés. Pour simplifier les notations nous désignons cette maxwellienne avec $\mathcal{M}$. De plus, nous notons $\Pi_{\mathcal{M}}$ la projection orthogonale au sens $L^2(\mathcal{M}^{-1}\,dv)$ sur l'espace

$$\mathcal{N}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}}) := \text{Span}\,\{\mathcal{M}\,,\,v\,\mathcal{M}\}\,,$$

le noyau de linéarisation $(\mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ de l'opérateur de collision BGK Q_{ee} autour de $\mathcal{M}$. Cet opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{N}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ est de la forme

$$\Pi_{\mathcal{M}}(h) = \left[\frac{n_\star}{n^\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\,u_\star\,(v - \sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon)\right]\mathcal{M}(f^\varepsilon)\,, \tag{7.36}$$

avec $(n^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\,u^\varepsilon)$ les moments de fonction de distribution f^ε donnée et fixée, et $(n_\star, \sqrt{\varepsilon}\,u_\star)$ les moments de la fonction h, définis comme

$$n_\star := \int_{\mathbb{R}} h\,dv\,, \quad \sqrt{\varepsilon}\,n^\varepsilon\,u_\star := \int_{\mathbb{R}} (v - \sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon)\,h\,dv\,.$$

Puisque l'opérateur de projection est défini, nous pouvons maintenant appliquer successivement $\Pi_{\mathcal{M}}$ puis $\mathbb{I} - \Pi_{\mathcal{M}}$ à (7.35), et ainsi séparer les parties macroscopiques et microscopiques de f^ε. C'est ainsi que nous obtenons le système couplé

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t g^\varepsilon + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\mathbb{I} - \Pi_{\mathcal{M}})\,(v\,\partial_x \mathcal{M}(f^\varepsilon)) + \sqrt{\varepsilon}\,(\mathbb{I} - \Pi_{\mathcal{M}})\,(v\,\partial_x g^\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}\,E^\varepsilon\,\partial_v\,g^\varepsilon = -g^\varepsilon\,, \\ \partial_t\,\mathcal{M}(f^\varepsilon) + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\Pi_{\mathcal{M}}(v\,\partial_x \mathcal{M}(f^\varepsilon)) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_{\mathcal{M}}(v\,\partial_x g^\varepsilon) - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E^\varepsilon\,\partial_v \mathcal{M}(f^\varepsilon) = 0\,. \end{cases} \tag{7.37}$$

Afin d'obtenir ce résultat, nous avons utilisé les propriétés de l'opérateur de projection suivantes :

$$\Pi_{\mathcal{M}}(\partial_t \mathcal{M}) = \partial_t \mathcal{M}\,, \qquad \Pi_{\mathcal{M}}(\partial_t g) = 0\,,$$

$$\Pi_{\mathcal{M}}(E^\varepsilon\,\partial_v \mathcal{M}) = E^\varepsilon\,\partial_v \mathcal{M}\,, \qquad \Pi_{\mathcal{M}}(E^\varepsilon\,\partial_v g) = 0\,.$$

$$(\mathbb{I} - \Pi_{\mathcal{M}^\varepsilon})\,(v\,\partial_x \mathcal{M}^\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\partial_x u^\varepsilon\,\left[(v - \sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon)^2 - 1\right]\mathcal{M}^\varepsilon\,,$$

$$\Pi_{\mathcal{M}^\varepsilon}(v\,\partial_x g) = \frac{v - \sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon}{n^\varepsilon}\,\partial_x\,\langle v^2\,g^\varepsilon\rangle\,\mathcal{M}^\varepsilon\,.$$

Pour plus de détails sur ces résultats, nous renvoyons le lecteur aux références [74–76].

Prenons maintenant les moments de la seconde équation de (7.37), en notant l'intégration en v simplement par $\langle\cdot\rangle := \int_{\mathbb{R}} \cdot \, dv$ et en observant que la pression définie par (7.27) satisfait $p^\varepsilon = n^\varepsilon + \varepsilon \langle v^2 g^\varepsilon \rangle$, menant à la reformulation micro-macro de l'équation cinétique (7.31),

$$(KF)_\varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t g^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\, v \partial_x g^\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} E^\varepsilon \partial_v g^\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} \dfrac{(v - \sqrt{\varepsilon} u^\varepsilon)}{n^\varepsilon} \partial_x \langle v^2 g^\varepsilon \rangle \mathcal{M}^\varepsilon \\ \qquad\qquad + \partial_x u^\varepsilon \left[(v - \sqrt{\varepsilon} u^\varepsilon)^2 - 1 \right] \mathcal{M}^\varepsilon = -g^\varepsilon , \\ \partial_t n^\varepsilon + \partial_x (n^\varepsilon u^\varepsilon) = 0 , \\ \partial_t (n^\varepsilon u^\varepsilon) + \partial_x (n^\varepsilon (u^\varepsilon)^2) + \dfrac{1}{\varepsilon} \partial_x n^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} E^\varepsilon n^\varepsilon + \partial_x \langle v^2 g^\varepsilon \rangle = 0 . \end{cases} \tag{7.38}$$

Il s'agit d'un système couplé, consistant en une équation cinétique microscopique pour g^ε et des équations de conservation régissant les quantités macroscopiques $(n^\varepsilon, u^\varepsilon)$. Ce modèle est complètement équivalent à l'équation cinétique (7.31) pour $\varepsilon > 0$, mais se comportera mieux à la limite $\varepsilon \to 0$, grâce à la décomposition micro-macro.

Remarquons ici que si nous considérons $E^\varepsilon \equiv 0$ and $g^\varepsilon \equiv 0$, le système (7.38) n'est autre que le système d'équations d'Euler isentropiques avec un faible nombre de Mach, étudié d'un point de vue numérique dans [49, 77, 78]. Ce système est donc une généralisation de ce modèle faible Mach puisqu'il inclut les effets cinétiques (pour des grandes valeurs de ε) ainsi que les effets du champ électrostatique. Nous présentons dans la section suivante une stratégie permettant de préserver l'asymptotique, utilisant toutefois des techniques différentes de celles employées dans les travaux cités précédemment.

III.2 Reformulation AP et identification du problème limite

Notre objectif est maintenant de contourner la singularité des équations fluides de (7.38) lorsque $\varepsilon \to 0$, que nous avions déjà évoquée à la partie II.2 en utilisant une projection et une technique micro-macro. Pour cela, nous étudions l'opérateur dominant de l'équation sur la quantité de mouvement dans (7.38) et introduisons une seconde décomposition micro-macro associée à cet opérateur dominant.

Nous notons tout d'abord $X_\sharp$ le sous-espace de l'espace de Banach X, comprenant les fonctions L-périodique sur la variable $x \in I := (0, L)$. La variable de temps $t \in \mathbb{R}^+$ sera considéré comme un paramètre dans le raisonnement qui suit. A partir de ces définitions, nous introduisons l'opérateur linéaire

$$\mathbb{L} : \mathcal{D}_\sharp \subset L^2_\sharp(I) \to L^2_\sharp(I) , \qquad \mathbb{L}(n) := \partial_x n + E\, n , \tag{7.39}$$

où $E = -\partial_x \phi$ est le champ électrique fixé, avec $\phi \in W^{1,\infty}(I)$, et le domaine de définition est donné par

$$\mathcal{D}_\sharp := \{ \xi \in L^2_\sharp(I) \ / \ \mathbb{L}(\xi) \in L^2_\sharp(I) \} .$$

L'opérateur $\mathbb{L}$ est l'opérateur dominant dans l'équation sur la quantité de mouvement du système (7.38) et doit être étudié afin de contourner la singularité de ce système lorsque $\varepsilon \to 0$.

Le noyau de $\mathbb{L}$ est donné par

$$\mathcal{G}_\mathbb{L} := \{ \xi \in \mathcal{D}_\sharp \ / \ \mathbb{L}(\xi) = 0 \} = \{ c\, e^\phi , \ c \in \mathbb{R} \} . \tag{7.40}$$

Nous définissons aussi le produit scalaire pondéré sur $L^2_\sharp(I)$

$$\langle \xi, \zeta \rangle_{\mathbb{L}} := \frac{1}{L} \int_0^L \xi \, \zeta \, e^{-2\phi} \, dx, \qquad \forall \xi, \zeta \in L^2_\sharp(I), \tag{7.41}$$

ce qui nous permet de décomposer l'espace de Hilbert $L^2_\sharp(I)$ tel que

$$L^2_\sharp(I) = \mathscr{G}_{\mathbb{L}} \oplus^{\perp} \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}}, \tag{7.42}$$

avec

$$\tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}} := \{\xi \in L^2_\sharp(I) \ / \ \langle \xi, \zeta \rangle_{\mathbb{L}} = 0 \quad \forall \zeta \in \mathscr{G}_{\mathbb{L}}\} = \{\xi \in L^2_\sharp(I) \ / \ \frac{1}{L} \int_0^L \xi \, e^{-\phi} \, dx = 0\},$$

c'est à dire les fonctions de moyenne (pondérée) nulle sur I. La décomposition (7.42) est associée à l'opérateur de projection orthogonal $\mathscr{P}_{\mathbb{L}}$, défini par

$$\mathscr{P}_{\mathbb{L}} : L^2_\sharp(I) \to \mathscr{G}_{\mathbb{L}}, \qquad \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(\xi) := \frac{1}{L} \int_0^L \xi \, e^{-\phi} \, dx \, e^{\phi}. \tag{7.43}$$

Nous pouvons maintenant écrire l'espace $\tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}}$ en utilisant la définition de l'opérateur de projection

$$\tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}} := \{\xi \in L^2_\sharp(I) \ / \ \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(\xi) = 0\} = \mathscr{G}_{\mathbb{L}}^{\perp}. \tag{7.44}$$

Par restriction, nous pouvons montrer que le domaine de définition de l'opérateur dominant $\mathbb{L}$ se décompose comme suit

$$\mathscr{D}_\sharp = \mathscr{G}_{\mathbb{L}} \oplus^{\perp} \mathscr{A}_{\mathbb{L}}, \tag{7.45}$$

où

$$\mathscr{A}_{\mathbb{L}} := \{\xi \in \mathscr{D}_\sharp \ / \ \langle \xi, \zeta \rangle_{\mathbb{L}} = 0 \quad \forall \zeta \in \mathscr{G}_{\mathbb{L}}\} = \{\xi \in \mathscr{D}_\sharp \ / \ \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(\xi) = 0\}. \tag{7.46}$$

A travers ces définitions, nous pouvons finalement déduire que l'opérateur dominant est linéaire et bijectif

$$\mathbb{L} : \mathscr{A}_{\mathbb{L}} \to \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}}, \qquad \mathbb{L}(n) := \partial_x n + E \, n, \tag{7.47}$$

ce qui signifie que le problème

$$\begin{cases} \partial_x \xi + E \, \xi = \Psi, \quad \forall x \in (0, L), \\ \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(\xi) = 0, \end{cases} \tag{7.48}$$

admet une unique solution $\xi \in \mathscr{A}_{\mathbb{L}}$ si et seulement si $\Psi \in \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}}$.

Reformulons maintenant le problème singulier (7.38) en utilisant la projection introduite précédemment. Nous introduisosn en particuluier la décomposition de la densité $n^\varepsilon = r^\varepsilon + \varepsilon s^\varepsilon$, avec r^ε la partie macroscopique définie par $r^\varepsilon := \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(n^\varepsilon)$. Ainsi, s^ε est l'unique solution de (7.48) avec le second membre donné par $\Psi = \frac{1}{\varepsilon}[\partial_x n^\varepsilon + E^\varepsilon \, n^\varepsilon] \in \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{L}}$. En insérant cette

décomposition dans (7.38), nous obtenons le système

$$
(AP)_\varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon\,\partial_t g^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,v\,\partial_x g^\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}E^\varepsilon\partial_v g^\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{(v-\sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon)}{n^\varepsilon}\,\partial_x\langle v^2 g^\varepsilon\rangle\,\mathscr{M}^\varepsilon \\ \qquad + \partial_x u^\varepsilon\left[(v-\sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon)^2-1\right]\mathscr{M}^\varepsilon = -g^\varepsilon\,, \\ \partial_t\,n^\varepsilon + \partial_x(n^\varepsilon\,u^\varepsilon) = 0\,, \\ \partial_t\,(n^\varepsilon\,u^\varepsilon) + \partial_x(n^\varepsilon(u^\varepsilon)^2) + \partial_x s^\varepsilon + E^\varepsilon\,s^\varepsilon + \partial_x\langle v^2\,g^\varepsilon\rangle = 0\,, \\ \partial_x n^\varepsilon + E^\varepsilon\,n^\varepsilon = \varepsilon\left(\partial_x s^\varepsilon + E^\varepsilon\,s^\varepsilon\right), \qquad \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(s^\varepsilon) = 0\,. \end{cases} \tag{7.49}
$$

Lorsque $\varepsilon > 0$, ce système est complètement équivalent au système cinétique original (7.31) et au système cinétique-fluide reformulé (7.38). L'avantage essentiel que présente cette reformulation est de capturer le système limite bien posé lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour déterminer la limite asymptotique de $(AP)_\varepsilon$, nous introduisons l'Ansatz $g^\varepsilon = g^0 + \sqrt{\varepsilon}g^1 + \cdots$ et identifions les termes de même ordre en ε dans l'équation cinétique de $(AP)_\varepsilon$. Nous obtenons ainsi

$$
g^0 = (1-v^2)\,\partial_x u^0\,\mathscr{M}_{n^0,0} \quad \Rightarrow \quad \langle v^2\,g^0\rangle = -2\,n^0\,\partial_x u^0\,.
$$

En utilisant cette information dans les équations fluides de (7.49), nous obtenons le modèle limite de $(AP)_\varepsilon$ en laissant ε tendre vers zéro, à savoir

$$
(L) \quad \begin{cases} \partial_t\,n^0 + \partial_x(n^0\,u^0) = 0 \\ \partial_t\,(n^0\,u^0) + \partial_x(n^0(u^0)^2) + \partial_x s^0 + E^0\,s^0 - 2\,\partial_x\left(n^0\,\partial_x u^0\right) = 0\,, \\ \partial_x n^0 + E^0\,n^0 = 0\,, \qquad \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(s^0) = 0\,. \end{cases} \tag{7.50}
$$

Ce système limite contient la relation de Boltzmann adiabatique, cachée dans la troisième équation (voir (7.30)), et permet aussi de calculer le flux de particules $n^0\,u^0$, chose que l'on ne pouvait pas faire avec le système mal posé (7.29). La présence de termes de viscosité dans l'équation sur la quantité de mouvement permettent d'obtenir des solutions régulières. Enfin, la contrainte $\mathscr{P}_{\mathbb{L}}(s^0) = 0$ garantit l'unicité de s_0, solution de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre dans (7.50). Le problème (L) sera donc appelé le modèle limite de l'équation cinétique $(K)_\varepsilon$, et nous introduisons dans la section suivante un schéma numérique pour $(K)_\varepsilon$, capable de capturer ce modèle limite pour $\varepsilon \to 0$.

IV Discrétisation AP du modèle cinétique pour les électrons

Dans cette section, nous présentons un schéma numérique pour le système Vlasov-BGK (7.31) qui donne une solution précise lorsque $\varepsilon = \mathscr{O}(1)$ et produit la solution asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire la solution du système (7.50). Ce schéma devrait nous permettre de choisir un pas de temps Δt indépendant de ε, et donc d'éviter les inconvénients des méthodes standards explicites. Nous présentons ici les semi-discrétisations en temps respectives de (7.38) et (7.49) et dans un second temps présentons la discrétisation en espace en utilisant la méthode des différences finies.

IV.1 Discrétisation en temps du schéma $(KF)_\varepsilon$

Afin de faciliter les notations, nous oublions les indices 'ε' dans les inconnues. Nous fixons le pas de temps $\Delta t > 0$ et notons $n^k, u^k, g^k, \mathscr{M}^k$ les approximations de $n(t^k,\cdot)$, $u(t^k,\cdot)$, $g(t^k,\cdot,\cdot)$, $\mathscr{M}(f(t^k,\cdot,\cdot))$ au temps $t^k = k\Delta t$, $k = 0,\cdots,K$ avec $K \in \mathbb{N}$. Alors, nous proposons la discrétisation en temps du premier ordre

$$
(KF)_{\varepsilon,\Delta t}\begin{cases}
\varepsilon\,\dfrac{g^{k+1}-g^k}{\Delta t} + \sqrt{\varepsilon}\,v\,\partial_x g^k - \sqrt{\varepsilon}E^k\partial_v g^k - \sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{(v-\sqrt{\varepsilon}u^k)}{n^k}\,\partial_x\langle v^2 g^k\rangle\,\mathscr{M}^k \\
\qquad\qquad + \partial_x u^k\left[(v-\sqrt{\varepsilon}u^k)^2 - 1\right]\mathscr{M}^k = -g^{k+1}, \\
\dfrac{n^{k+1}-n^k}{\Delta t} + \partial_x(n^{k+1}u^{k+1}) = 0, \\
\dfrac{n^{k+1}u^{k+1} - n^k u^k}{\Delta t} + \partial_x\left(n^k(u^k)^2\right) + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x n^{k+1} + \dfrac{1}{\varepsilon}E^k n^{k+1} + \partial_x\langle v^2 g^{k+1}\rangle = 0.
\end{cases} \tag{7.51}
$$

Le terme de droite de l'équation cinétique en g est implicite, et ceci permet le calcul de g^{k+1} pour tout $\varepsilon \geq 0$. La discrétisation en temps des lois de conservations macroscopiques est basée sur les arguments suivants :

a) les termes concernant le gradient de pression et la force électrostatique sont raides et donc pris implicites.

b) le terme de flux de particules de la seconde équation est aussi pris implicite. Nous expliquons ce choix par le fait que nous souhaitons récupérer la relation de Boltzmann à la limite $\varepsilon \to 0$: nous utiliserons la loi de conservation de la densité des particules afin d'obtenir des informations sur l'inconnue u^{k+1} et ainsi obtenir la relation de Boltzmann de la loi de conservation sur la quantité de mouvement.

Dans les sections suivantes, nous présentons une reformulation du système (7.51) qui préserve l'asymptotique.

IV.2 Schéma préservant l'asymptotique

Dans le cas continu, nous avons contourné la singularité à la limite $\varepsilon \to 0$ de l'équation sur la quantité de mouvement dans (7.38) en utilisant l'opérateur de projection $\mathscr{P}_{\mathbb{L}}$, et avons ainsi abouti au système (7.49). De la même manière, nous allons faire la semi-discrétisation en temps du système (7.51) en faisant intervenir cet opérateur de projection. Le système AP semi-discrétisé s'écrit donc

$$
(AP)_{\varepsilon,\Delta t}\begin{cases}
\varepsilon\,\dfrac{g^{k+1}-g^k}{\Delta t}+\sqrt{\varepsilon}\,v\,\partial_x g^k-\sqrt{\varepsilon}E^k\partial_v g^k-\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{(v-\sqrt{\varepsilon}u^k)}{n^k}\,\partial_x\langle v^2\,g^k\rangle\,\mathscr{M}^k \\
\qquad\qquad +\partial_x u^k\left[(v-\sqrt{\varepsilon}u^k)^2-1\right]\mathscr{M}^k=-g^{k+1}, \\
\dfrac{n^{k+1}-n^k}{\Delta t}+\partial_x(n^{k+1}u^{k+1})=0, \\
\dfrac{n^{k+1}\,u^{k+1}-n^k\,u^k}{\Delta t}+\partial_x\left(n^k(u^k)^2\right)+\partial_x s^{k+1}+E^k\,s^{k+1}+\partial_x\langle v^2\,g^{k+1}\rangle=0, \\
\partial_x n^{k+1}+E^k\,n^{k+1}=\varepsilon\left(\partial_x s^{k+1}+E^k\,s^{k+1}\right), \qquad \mathscr{P}_{\mathbb{L}}(s^{k+1})=0.
\end{cases} \tag{7.52}
$$

Il est facile de montrer qu'à la limite $\varepsilon \to 0$ et pour un paramètre de discrétisation en temps fixé $\Delta t > 0$, ce système mène à une semi-discrétisation de (L). C'est cette particulière propriété qui représente le principal avantage de notre reformulation AP, comparativement à des discrétisations temporelles standards de l'équation cinétique (7.31).

IV.3 Discrétisation en espace de $(AP)_{\varepsilon,\Delta t}$

L'équation cinétique pour les électrons (7.31) est définie pour $(t,x,v) \in \mathbb{R}^+ \times [0,L] \times \mathbb{R}$ avec les conditions limites (7.32). L'espace des vitesses sera réduit à $[v_{min}, v_{max}] \subset \mathbb{R}$ avec $v_{min} < 0 < v_{max}$. Nous définissons un maillage position-vitesse homogène via

$$
\Delta x=\frac{L}{N_x-1}, \qquad x_i:=(i-1)\Delta x, \qquad i\in\{1\dots N_x\}, \qquad N_x\in\mathbb{N},
$$

$$
\Delta v=\frac{v_{max}-v_{min}}{N_v-1}, \qquad v_j:=v_{min}+(j-1)\Delta v, \qquad j\in\{1\dots N_v\}, \qquad N_v\in\mathbb{N},
$$

et notons par $f_{i,j} := f(x_i, v_j)$, et en général $a_i := a(x_i)$ et $b_j := b(v_j)$. Nous imposons des conditions limites de type Dirichlet sur l'espace de vitesses, $f_{i,1} = f_{i,N_v} = 0\ \forall i$. La partie microscopique de l'équation cinétique, *i.e.* l'équation sur g, est discrétisé avec un simple schéma *upwind*. Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
&(v\partial_x g^k)_{i,j}\approx(v_-)_j\,\frac{g_{i+1,j}-g_{i,j}}{\Delta x}+(v_+)_j\,\frac{g_{i,j}-g_{i-1,j}}{\Delta x}, \\
&(v_-)_j=\min(0,v_j), \qquad (v_+)_j=\max(0,v_j),
\end{aligned} \tag{7.53}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&(-E^k\partial_v g^k)_{i,j}\approx(F_-)_i\,\frac{g_{i,j+1}-g_{i,j}}{\Delta v}+(F_+)_i\,\frac{g_{i,j}-g_{i,j-1}}{\Delta v}, \\
&(F_-)_i=\min(0,-E_i^k), \qquad (F_+)_i=\max(0,-E_i^k).
\end{aligned}
$$

Le moment d'ordre deux de g^k est approché via la méthode des trapèzes,

$$
\Theta_i^k:=\langle v^2 g^k\rangle_i\approx\frac{\Delta v}{2}\sum_{j=1}^{N_v-1}v_j\,g_{i,j}^k+\frac{\Delta v}{2}\sum_{j=2}^{N_v}v_j\,g_{i,j}^k.
$$

Des différences finies centrées sont utilisées pour les dérivées restantes de l'équation en g,

$$(\partial_x \Theta^k)_i \approx \frac{\Theta^k_{i+1} - \Theta^k_{i-1}}{2\Delta x}, \qquad (\partial_x u^k)_i \approx \frac{u^k_{i+1} - u^k_{i-1}}{2\Delta x}.$$

Nous rappelons que la maxwellienne pour les électrons s'écrit

$$\mathscr{M}^k_{i,j} = \frac{n^k_i}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(v_j - \sqrt{\varepsilon} u^k_i)^2}{2}\right). \tag{7.54}$$

La partie compliquée porte sur la discrétisation des lois de conservations macroscopiques de (7.52). Tout d'abord, la contrainte $\mathscr{P}_{\mathbb{L}}(s^{k+1}) = 0$ est implémentée via une méthode des multiplicateurs de Lagrange, *i.e.* nous ajoutons une inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ au système,

$$\partial_x n^{k+1} + E^k n^{k+1} = \varepsilon \left(\partial_x s^{k+1} + E^k s^{k+1}\right) + \lambda. \tag{7.55}$$

Cette inconnue supplémentaire nous amène à ajouter une équation au système linéaire sous la forme

$$\Delta x \sum_{i=1}^{N_x - 1} s^{k+1}_i e^{-\phi^k_i} = 0. \tag{7.56}$$

Appliquer la projection $\mathscr{P}_{\mathbb{L}}$ à l'équation (7.55) montre que $\lambda = 0$; ceci montre qu'introduire le multiplicateur de Lagrange ne change pas le solution du système (7.52). Deuxièmement, pour simplifier, nous écrivons le flux de particules avec $q^k_i := n^k_i u^k_i$. Une manière commode d'approcher les dérivées du premier ordre dans les équations fluides est d'utiliser des différences finies centrées aux points milieux $i + 1/2$. La partie macroscopique fluide de (7.52) est donc approchée par

$$\begin{cases} \dfrac{n^{k+1}_{i+1} - n^k_{i+1}}{2\Delta t} + \dfrac{n^{k+1}_i - n^k_i}{2\Delta t} + \dfrac{(q^{k+1}_{i+1} - q^{k+1}_i)}{\Delta x} + \dfrac{\mathscr{F}^k_{i+1} - \mathscr{F}^k_i}{\Delta x} = 0, \\[2ex] \dfrac{q^{k+1}_{i+1} - q^k_{i+1}}{2\Delta t} + \dfrac{q^{k+1}_i - q^k_i}{2\Delta t} + \dfrac{s^{k+1}_{i+1} - s^{k+1}_i}{\Delta x} + \dfrac{E^k_{i+1} s^{k+1}_{i+1} + E^k_i s^{k+1}_i}{2} + \dfrac{\mathscr{G}^k_{i+1} - \mathscr{G}^k_i}{\Delta x} = 0, \\[2ex] \dfrac{n^{k+1}_{i+1} - n^{k+1}_i}{\Delta x} + \dfrac{E^k_{i+1} n^{k+1}_{i+1} + E^k_i n^{k+1}_i}{2} = \varepsilon \left(\dfrac{s^{k+1}_{i+1} - s^{k+1}_i}{\Delta x} + \dfrac{E^k_{i+1} s^{k+1}_{i+1} + E^k_i s^{k+1}_i}{2} \right) + \lambda. \end{cases}$$

Ici, $\mathscr{F}^k_i$ et $\mathscr{G}^k_i$ représentent les flux de particules et de la quantité de mouvement avec un ajout de viscosité artificielle de type Rusanov [37], donnés aux points i du maillage par

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^k_i &:= -\frac{a_i}{4}(n^k_{i+1} - n^k_{i-1}), \\ \mathscr{G}^k_i &:= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{q^2}{n}\right)^k_{i+1} + 2\left(\frac{q^2}{n}\right)^k_i + \left(\frac{q^2}{n}\right)^k_{i-1}\right] + \frac{1}{4}(\Theta^k_{i+1} + 2\Theta^k_i + \Theta^k_{i-1}) - \frac{a_i}{4}(q^k_{i+1} - q^k_{i-1}), \end{aligned} \tag{7.57}$$

où $a_i = \max(|\frac{q^k_i}{n^k_i} + 1|, |\frac{q^k_i}{n^k_i} - 1|)$.

IV.4 Condition CFL de stabilité de l'équation microscopique

Nous allons maitenant chercher à expliquer pourquoi la discrétisation en temps choisie pour l'équation cinétique de (7.52) préserve la propriété AP. En particulier, pourquoi le pas de temps Δt peut être choisi indépendant un paramètre ε. Pour cela, nous allons étudier ici l'équation cinétique simplifiée

$$\partial_t g + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} v \partial_x g - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E \partial_v g = -\frac{1}{\varepsilon} g, \tag{7.58}$$

et la semi-discrétisation en temps

$$\frac{g^{k+1} - g^k}{\Delta t} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} v \partial_x g^k - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E^k \partial_v g^k = -\frac{1}{\varepsilon} g^{k+1}. \tag{7.59}$$

En ce qui concerne la discrétisation en espace, un simple schéma de Lax-Friedrich est suffisant pour ce que nous cherchons à montrer. Il s'écrit

$$\begin{aligned} g^{k+1}_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4}\left[g^k_{\alpha+1,\beta} + g^k_{\alpha-1,\beta} + g^k_{\alpha,\beta+1} + g^k_{\alpha,\beta-1}\right] - \frac{\Delta t\, v_\beta}{2\sqrt{\varepsilon}\Delta x}\left(g^k_{\alpha+1,\beta} - g^k_{\alpha-1,\beta}\right) \\ &\quad + \frac{\Delta t\, E^k_\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}\Delta v}\left(g^k_{\alpha,\beta+1} - g^k_{\alpha,\beta-1}\right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} g^{k+1}_{\alpha,\beta}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned}$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) g^{k+1}_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4}\left[g^k_{\alpha+1,\beta} + g^k_{\alpha-1,\beta} + g^k_{\alpha,\beta+1} + g^k_{\alpha,\beta-1}\right] - \frac{\Delta t\, v_\beta}{2\sqrt{\varepsilon}\Delta x}\left(g^k_{\alpha+1,\beta} - g^k_{\alpha-1,\beta}\right) \\ &\quad + \frac{\Delta t\, E^k_\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}\Delta v}\left(g^k_{\alpha,\beta+1} - g^k_{\alpha,\beta-1}\right). \end{aligned} \tag{7.60}$$

Le critère de stabilité de ce schéma est obtenu en utilisant la méthode de Von Neumann, qui est basée sur une analyse de Fourier et revient à montrer qu'il existe, sous certaines conditions, une constante $0 < \nu < 1$ telle que

$$||g^{k+1}||_2 \le \nu ||g^k||_2, \quad \text{avec} \quad ||g^k||_2 := \left(\Delta x \Delta v \sum_\alpha \sum_\beta |g^k_{\alpha,\beta}|^2\right)^{1/2}.$$

Cette estimation permet d'obtenir la stabilité du schéma.
Afin d'obtenir cette condition de stabilité, nous introduisons la fonction d'onde discrète

$$g^k_{\alpha,\beta} := e^{\mathbf{i} x_\alpha \xi} e^{\mathbf{i} v_\beta \eta} = e^{\mathbf{i}\alpha\Delta x \xi} e^{\mathbf{i}\beta\Delta v \eta}, \qquad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2, \tag{7.61}$$

dans le schéma aux différence finies (7.60) pour obtenir la relation de récurrence

$$g^{k+1}_{\alpha,\beta} = a(\xi,\eta)\, g^k_{\alpha,\beta}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2,$$

où $a(\xi,\eta)$ est appelé facteur d'amplification. Un schéma est dit stable lorsque $|a(\xi,\eta)| \le \nu < 1$ pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. Si le critère n'est pas respecté pour un (ξ,η), alors les composantes avec le nombre d'onde (ξ,η) seront amplifiées lors des itérations en temps, conduisant à une explosion du schéma.

Nous insérons (7.61) dans (7.60) et obtenons l'expression suivante pour le facteur d'amplification

$$a(\xi,\eta) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Delta t}\left\{\frac{1}{2}\left[\cos(\Delta x\,\xi)+\cos(\Delta v\,\eta)\right] - \mathbf{i}\frac{\Delta t\, v_\beta}{\Delta x\sqrt{\varepsilon}}\sin(\Delta x\,\xi) + \mathbf{i}\frac{\Delta t\, E_\alpha^k}{\Delta v\sqrt{\varepsilon}}\sin(\Delta v\,\eta)\right\}.$$

Alors, nous en déduisons l'estimation

$$|a(\xi,\eta)|^2 \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+\Delta t)^2}\left[\varepsilon\cos^2(\Delta x\,\xi) + 4\nu_{x,\beta}^2\sin^2(\Delta x\,\xi) + \varepsilon\cos^2(\Delta v\,\eta) + 4\nu_{v,\alpha}^2\sin^2(\Delta v\,\eta)\right],$$

avec

$$\nu_{x,\beta} := \frac{v_\beta\,\Delta t}{\Delta x}, \quad \nu_{v,\alpha} := \frac{E_\alpha^k\,\Delta t}{\Delta v}.$$

En adoptant les notations

$$\begin{aligned} \nu_x &:= \tfrac{v_M\,\Delta t}{\Delta x}, \qquad v_M := \max\{|v_{min}|,|v_{max}|\}, \\ \nu_v &:= \tfrac{E_M\,\Delta t}{\Delta v}, \qquad E_M := \max_{k\in\mathbb{N},\,\alpha\in\mathbb{Z}}\{|E_\alpha^k|\}, \end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$|a(\xi,\eta)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+\Delta t)^2}\left(\max\{\varepsilon, 4\,\nu_x^2\} + \max\{\varepsilon, 4\,\nu_v^2\}\right).$$

Nous pouvons remarquer de cette estimation de $|a(\xi,\eta)|^2$ que :

— Dans le régime adiabatique $\varepsilon \to 0$, nous avons $|a(\xi,\eta)|^2 \to_{\varepsilon\to 0} 0$ pour $\Delta t > 0$ fixé, ce qui signifie qu'aucune condition CFL n'est requise dans ce cas.

— Dans le régime cinétique $\varepsilon \to 1$, nous avons

$$|a(\xi,\eta)|^2 \leq \frac{1}{2(1+\Delta t)^2}\left(\max\{1, 4\,\nu_x^2\} + \max\{1, 4\,\nu_v^2\}\right),$$

et ceci conduit, pour $\varepsilon \sim 1$, au résultat standard de stabilité : la condition CFL qui permet d'obtenir $|a(\xi,\eta)| < 1$ est

$$\max\{|\nu_x|, |\nu_v|\} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \Delta t < \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\Delta x}{v_M}, \frac{\Delta v}{E_M}\right\};$$

— pour le régime intermédiaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon) \quad &:= \quad \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+\Delta t)^2}\left(\max\{\varepsilon, 4\,\nu_x^2\} + \max\{\varepsilon, 4\,\nu_v^2\}\right) \\ &= \quad \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon/\Delta t+1)^2}\left(\max\{\frac{\varepsilon}{(\Delta t)^2}, 4\,\frac{v_M^2}{(\Delta x)^2}\} + \max\{\frac{\varepsilon}{(\Delta t)^2}, 4\,\frac{E_M^2}{(\Delta v)^2}\}\right), \end{aligned}$$

et donc nous avons $|\theta(\varepsilon)| < 1$ si

$$\frac{4\varepsilon\, v_M^2/(\Delta x)^2}{(\varepsilon/\Delta t+1)^2} + \frac{4\varepsilon\, E_M^2/(\Delta v)^2}{(\varepsilon/\Delta t+1)^2} < 2,$$

ce qui nous conduit à la condition

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} > \sqrt{2\varepsilon\left(\frac{v_M^2}{(\Delta x)^2} + \frac{E_M^2}{(\Delta v)^2}\right)} - 1 =: \sqrt{\varepsilon}\,\gamma - 1. \tag{7.62}$$

Ainsi, le schéma (7.52) avec (7.53)-(7.57) est stable si la condition CFL suivante est satisfaite :

$$\Delta t < CFL * \min(\Delta t_F, \Delta t_K), \tag{7.63a}$$

où $CFL < 1$ et

$$\Delta t_F := \frac{\Delta x}{\max_i(a_i)}$$

$$\Delta t_K := \begin{cases} \Delta t_F & \text{si} \quad \sqrt{\varepsilon}\gamma^k - 1 \leq 0 \,, \\ \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}\gamma^k - 1} & \text{si} \quad \sqrt{\varepsilon}\gamma^k - 1 > 0 \,. \end{cases} \qquad \gamma^k := \sqrt{2\left(\frac{\max_j(v_j^2)}{(\Delta x)^2} + \frac{\max_i((E_i^k)^2)}{(\Delta v)^2}\right)}$$

Si $\varepsilon \to 0$ et Δx et Δv sont fixés, le nombre $\sqrt{\varepsilon}\gamma^k - 1$ devient négatif, et la condition CFL est alors indépendants de ε dans le régime adiabatique et correspond à la condition CFL fluide Δt_F.

V RÉSULTATS NUMÉRIQUES

L'objectif de cette section est d'étudier l'efficacité du schéma AP proposé, en particulier pour montrer numériquement la propriété AP lorsque $\varepsilon \to 0$. Les tests numériques ont été fait sur un domaine déterminé par $L = 1$, $v_{min} = -5$ et $v_{max} = 5$ et sur un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T = 0.1$. Nous avons posé un potentiel électrostatique donné, indépendant du temps,

$$\phi(x) = \cos(2\pi x) \qquad \Longrightarrow \qquad E^k(x) = -2\pi \sin(2\pi x) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La fonction de distribution initiale f_0 est une maxwellienne de vitesse moyenne nulle

$$f_0(x, v) = \frac{n_0(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right),$$

avec

$$n_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

et $\sigma = 0.05$. A l'échelle de temps ε, nous nous attendons à ce que la densité approche la relation de Boltzmann

$$n(t/\varepsilon \to \infty, x) = c\, e^{\phi(x)}, \qquad c = \frac{\int_0^1 n_0\, dx}{\int_0^1 e^{\phi}\, dx}. \tag{7.64}$$

Pour avoir une première idée de ce cas test, nous traçons dans la Figure 7.1 la solution obtenue avec le schéma AP (7.52) pour $\varepsilon = 10^{-2}$. Nous prenons $N_x = 51$ et $N_v = 251$ points de maillage dans les simulations. De la colonne du milieu, on distingue clairement la convergence en temps de la densité de particules vers la relation de Boltzmann (7.64). Le champ électrique est responsable de l'accélération asymétrique des électrons, vers la gauche pour $x < 0$ et vers la droite pour $x > 0$.

Afin de valider notre schéma AP, nous implémentons un schéma explicite *upwind* pour l'équation cinétique (7.31). Les solutions numériques obtenues avec ce schéma servent de référence pour le régime $\varepsilon \geq 10^{-6}$. Pour des valeurs plus petites de ε, le pas de temps du schéma explicite devient fortement contraignant et le schéma devient impraticable. La figure 7.2 représente la convergence de la densité au cours du temps vers la relation de Boltzmann (7.64)

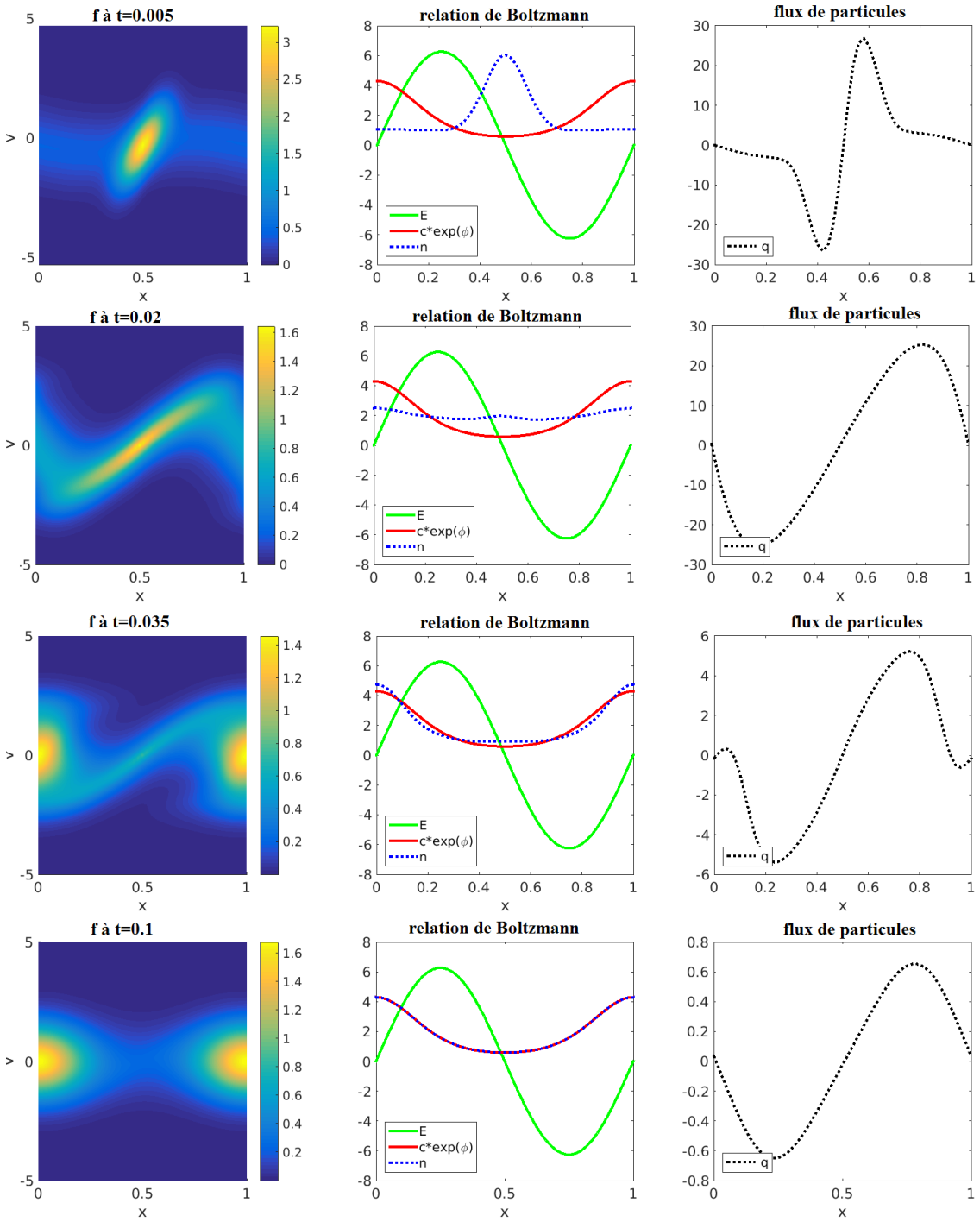


FIGURE 7.1 – Captures de la fonction de distribution f à quatre instants (colonne de gauche), obtenues avec le schéma AP (7.52) avec $\varepsilon = 10^{-2}$. La colonne du milieu représente la densité de particules associée n, comparée avec la relation de Boltzmann (7.64), et la colonne de droite représente le flux de particules $q = nu$.

pour les solutions obtenues avec les deux différents schémas : le schéma AP (7.52) et le solveur Vlasov-BGK explicite *upwind* (solution 'REF'). Pour cette comparaison, nous avons pris $\varepsilon = 10^{-2}$, afin que le solveur explicite puisse être simulé avec $N_x = 201$ and $N_v = 1001$. Ce résultat montre que le schéma AP permet d'obtenir des solutions cohérentes dans un régime où ε est relativement grand.

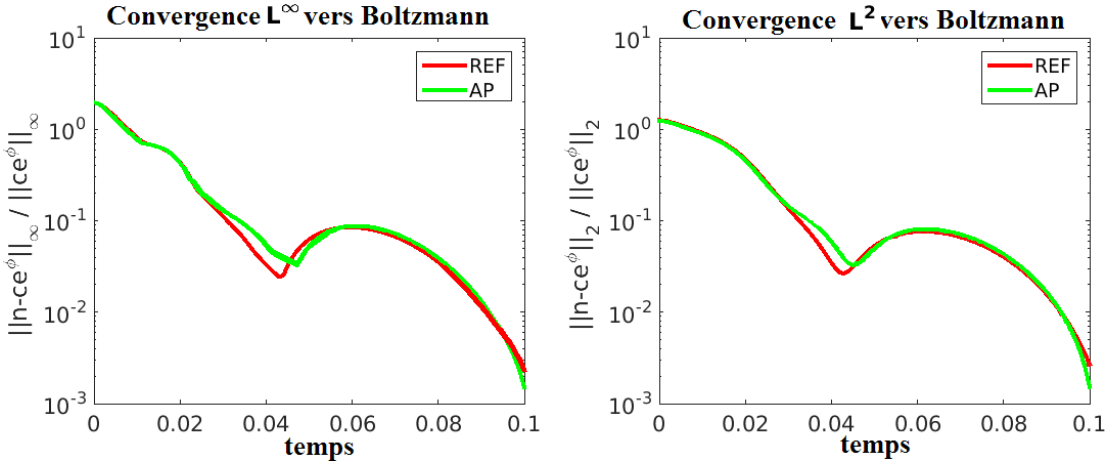


FIGURE 7.2 – Convergence au cours du temps vers la relation de Boltzmann (7.64) de la solution du schéma AP et d'une solution de référence 'REF', pour $\varepsilon = 10^{-2}$. La solution de référence est obtenue à partir d'un solveur de l'équation Vlasov-GBK utilisant une discrétisation explicite *upwind* sur un maillage fin avec $N_x = 201$ et $N_v = 1001$.

Que se passe t'il lorsque la valeur de ε diminue ? La Figure 7.3 montre la convergence vers la relation de Boltzmann au cours du temps pour différentes valeurs $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$, obtenues avec le schéma AP. Nous observons une convergence oscillante, dont la fréquence augmente quand ε diminue. La convergence est aussi plus rapide pour des petits ε, ce qui montre que ε est reliée à l'échelle de temps via le nombre de Mach. Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, l'état initial transite presque instantanément vers Boltzmann (couche limite à $t = 0$).

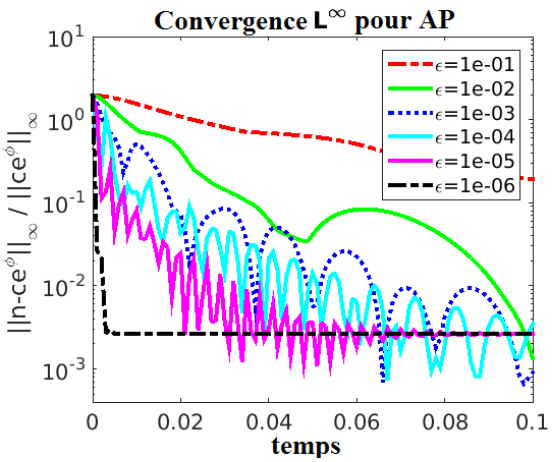


FIGURE 7.3 – Convergence au cours du temps de la solution du schéma AP vers la relation de Boltzmann (7.64) avec $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$.

Notre objectif suivant est de démontrer le caractère AP de notre schéma. Pour cela, nous traçons sur la Figure 7.4 les état d'équilibre de la fonction de distribution f au temps $t = 0.1$ ainsi que ses moments macroscopiques, obtenus avec le schéma AP ainsi qu'avec le solveur explicite *upwind*. Les deux schémas coïncident bien pour $f(t = 0.1)$ ainsi que pour la densité d'électrons $n(t = 0.1)$ qui est à l'équilibre boltzmannien. Cependant, le flux d'électrons $q(t = 0.1)$ diffère pour les deux schémas. En fait, le flux d'électrons n'est pas calculé par le solveur explicite. Celui-ci calcule f^k puis en déduit le flux d'électrons via

$$q^k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int v f^k dv.$$

Les erreurs numériques faites sur f^k sont ici divisées par $\sqrt{\varepsilon}$, et deviennent alors larges lorsque $\varepsilon \ll 1$. De plus, l'approximation de l'intégrale en v va entrainer des erreurs additionnelles, qui sont elles aussi amplifiées par la division par $\sqrt{\varepsilon}$. Ainsi, le calcul de q^k pour un ε petit n'est pas possible via une discrétisation standard de Vlasov. Le schéma AP considère par contre q comme une inconnue et permet d'obtenir la bonne solution à la limite asymptotique $\varepsilon \to 0$.

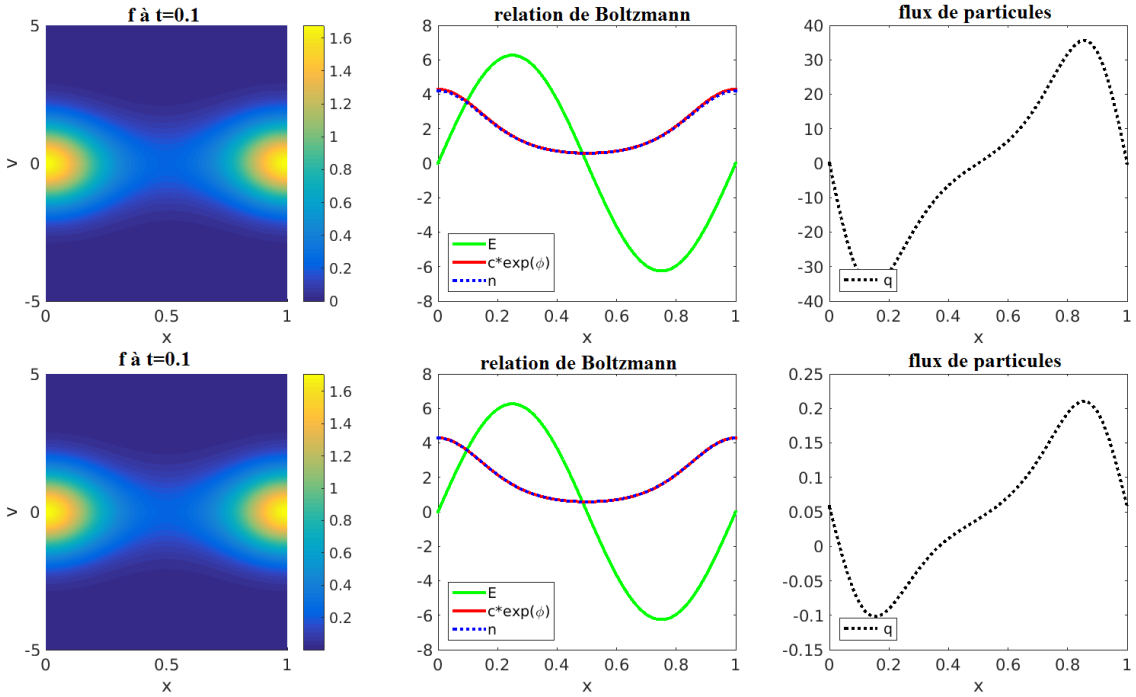


FIGURE 7.4 – Etat d'équilibre atteint au temps $t = 0.1$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$ avec le schéma explicite *upwind* (première ligne) et le schéma AP (seconde ligne). Remarquons que les fonctions de distributions $f(t = 0.1)$ s'accordent tandis que le schéma explicite renvoie un résultat erroné du flux d'électrons q.

Donnons d'autres arguments montrant que le solveur explicite n'est plus utilisable pour des petites valeurs de ε. Dans le tableau 7.1, nous comparons de manière quantitative, les deux schémas lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous remarquons plusieurs choses :

— A propos des erreurs L^∞ et L^2, nous avons déjà vu sur les Figures 7.2 et 7.3 que le système est très proche du régime adiabatique des électrons à $t = 0.1$ pour $\varepsilon \leq 10^{-2}$, ce qui se confirme ici lorsque $\varepsilon \to 0$.

— Concernant le temps CPU, le schéma AP devient plus efficace que le solveur lorsque $\varepsilon \leq 10^{-5}$. Remarquons en particulier la baisse soudaine du temps CPU pour le schéma AP lorsque $\varepsilon = 10^{-6}$; à partir de ce point, la condition CFL cinétique est relaxée, c.f. (7.63), car $\sqrt{\varepsilon}\gamma^k - 1$ devient négative et la condition CFL fluide est alors appliquée.

— Il est aussi important de remarquer le comportement du conditionnement pour le schéma AP. Le fait qu'il n'explose pas lorsque $\varepsilon \to 0$ est une caractéristique typique de la propriété AP : la singularité numérique a été évitée grâce à la reformulation effectuée pour le schéma AP.

— Finalement, remarquons l'augmentation des erreurs L^∞ et L^2 du solveur explicite lorsque $\varepsilon = 10^{-5}$, qui montrent que ce solveur n'est pas utilisable pour des petites valeurs de ε. Ceci est une indication du fait que la limite formelle $\varepsilon \to 0$ de l'équation cinétique (7.31) conduit à un problème mal posé.

Pour résumer, les tests numériques que nous avons effectués ont permis de démontrer le caractère AP de notre schéma, en particulier un conditionnement indépendant de ε, une condition CFL indépendante de ε, et la capacité de récupérer la relation de Boltzmann à la limite $\varepsilon \to 0$, pour des paramètres de discrétisation fixés Δt, Δx, Δv.

ε	erreur L^∞	erreur L^2	$\|\|q^\varepsilon(t=0.1)\|\|_\infty$	conditionnement($\times 10^7$)	temps CPU
upwind explicite					
10^{-0}	0.8865	0.9072	2.30	-	1.00
10^{-1}	0.2129	0.2269	2.13	-	3.22
10^{-2}	0.0217	0.0244	1.36	-	7.92
10^{-3}	0.0096	0.0105	3.62	-	25.41
10^{-4}	0.0087	0.0079	11.38	-	83.77
10^{-5}	0.0208	0.0191	35.64	-	255.17
AP					
10^{-0}	0.7553	0.8819	2.25	0.0002	2.02
10^{-1}	0.1916	0.1745	2.06	0.0007	5.35
10^{-2}	0.0013	0.0013	0.65	0.0148	15.80
10^{-3}	0.0009	0.0010	0.21	0.1000	46.04
10^{-4}	0.0035	0.0028	0.17	0.7918	118.15
10^{-5}	0.0027	0.0021	0.21	2.2951	110.18
10^{-6}	0.0026	0.0020	0.16	5.6453	2.14
10^{-7}	0.0026	0.0020	0.15	4.5821	1.87
10^{-8}	0.0026	0.0020	0.15	2.2940	1.83
$10^{-\infty}$	0.0026	0.0020	0.15	2.2940	1.82

TABLE 7.1 – Comparaison du schéma AP avec le solveur *upwind* explicite : erreurs L^∞ et L^2 par rapport à la relation de Boltzmann (7.64) à $t = 0.1$, conditionnement maximal au cours du temps de la matrice du système (juste pour schéma AP), norme L^∞ du flux de particules q^ε à $t = 0.1$ et le temps CPU normalisé.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous nous sommes donné pour objectif de fournir un cadre mathématique afin de modéliser la dynamique des flux de données dans les réseaux informatiques à partir d'équations de conservations. L'étude menée dans ce manuscrit montre qu'il est effectivement possible de définir une approche fluide basée sur une analyse asymptotique de modèles cinétiques ou microscopiques. Cette approche a été mise en application sur les thématiques des grilles de calcul et des réseaux AFDX.

Outre la possibilité de garantir l'aspect bien posé au sens mathématique de ces modèles, l'approche fluide nous a permis d'effectuer des simulations numériques pour illustrer le comportement de ces réseaux. Nous avons aussi identifié plusieurs régimes asymptotiques pour ces réseaux, qui donneraient lieu à des modèles distincts et décriraient des comportements spécifiques. Cependant, tous ces régimes ne peuvent être traités avec les méthodes numériques décrites dans les chapitres 4 et 5, car ils correspondent à des limites singulières. Il existe des techniques adaptées pour les traiter, comme les schémas *asymptotic preserving* (AP). Pour préparer la suite des travaux présentés dans ce manuscrit, nous avons étudié cette méthodologie AP dans le cadre d'une autre thématique, dans laquelle elle est couramment utilisée. Il restera toutefois à appliquer cette approche aux problèmes issus de la dynamique des réseaux.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ouvrent de nombreuses perspectives. Concernant l'amélioration de nos modèles, nous aimerions prendre en compte des comportements physiques plus complexes, comme par exemple l'apparition de niveaux de priorités, ou l'introduction d'un terme de dispersion, qui introduirait des vitesses aléatoires, avec des mémoires tampons qui ne respecteraient plus nécessairement l'ordre des messages (mémoires tampons FIFO). Ces changements modifieraient la nature mathématique des équations de conservation, qu'il faudrait alors réétudier. Concernant une amélioration des schémas numériques classiques utilisés pour simuler ces modèles, des schémas d'ordre plus élevé pourraient être mis en place pour limiter le nombre de cellules dans chaque mémoire tampon. Une parallélisation des calculs numériques pourrait également s'avérer efficace en raison de la nature parallèle des flots. Enfin, les résultats numériques que nous avons obtenu dans le cadre des réseaux AFDX pourraient être comparés avec un simulateur particulaire.

En ce qui concerne l'utilisation des schémas AP, qui reposent sur l'identification de la limite singulière du problème, il sera nécessaire de définir en premier lieu le modèle fluide limite, puis d'appliquer la méthodologie AP. Ce type de méthode pourrait être particulièrement adaptée pour la simulation de réseaux hétérogènes, comme par exemple la gestion simultanée d'équipements dont des performances (comme les temps de latence) présentent des ordres de grandeurs disparates.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. TANENBAUM AND D. WETHERALL. RÉSEAUX 5E ÉDITION. Pearson, 2011.

[2] T. L. NGUYEN. Cours sur les réseaux informatiques Université paris 12. http ://nguyen-tuanloc.online.fr/.

[3] B. COUSIN. COURS D'INTRODUCTION AUX RÉSEAUX INFORMATIQUES IRISA RENNES. https ://www.irisa.fr/prive/Bernard.Cousin/Enseignement/.

[4] CERN COMPUTING. http ://home.web.cern.ch/about/computing/.

[5] F. DESPREZ. Grid'5000 : Running a large instrument for parallel and distributed computing experiments. In IEEE CONFERENCE ON CLUSTER COMPUTING 2014, Madrid, September 22-26, 2014.

[6] H. CHARARA. *Évaluation des performances temps réel de réseaux embarqués avioniques.* THÈSE DE DOCTORAT, IRIT/ENSEEIHT, 2007.

[7] R. ANDREOLETTI AND F. MINOT. Method of routing virtual links in a frame-switching network with guaranteed determinism, July 19 2011. US Patent 7,983,195.

[8] M. BOYER, J. MIGGE AND M. FUMEY. PEGASE - a robust and efficient tool for worst-case network traversal time evaluation on AFDX. SAE TECHNICAL PAPER, 2011.

[9] D. ROS. *Etude de réseaux haut débit via la simulation de modèles fluides.* THÈSE DE DOCTORAT, INSA Rennes, 2000.

[10] INSTITUT DE RECHERCHE SUR LA FUSION PAR CONFINEMENT MAGNÉTIQUE (IRFM). http ://www-fusion-magnetique.cea.fr.

[11] P. DEGOND. Kinetic models. LECTURES AT SUMMER SCHOOL IN SORRENTO, September 2002.

[12] C. NEGULESCU. Modelling, simulation and mathematical analysis of magnetically confined plasmas. SUMMER SCHOOL "METHODS AND MODELS OF KINETIC THEORY", http ://www.math.univ-toulouse.fr/ cnegules/, 2012.

[13] J. KOOMEY. Worldwide electricity used in data centers. ENVIRONMENTAL RESEARCH LETTERS, 3(034008), 2008.

[14] J. KOOMEY. Growth in data center electricity use 2005 to 2010. ANALYTICS PRESS, 2011. http ://www.analyticspress.com/datacenters.html.

[15] P. MUZIO AND R. WALSH. Total life cycle cost comparison : Cray x1 and pentium 4 cluster. In CRAY USER GROUP 2003 PROCEEDINGS, Colombus, Ohio, May 12-16, 2003.

[16] CERN LHC COMPUTING GRID PROJECT. http ://lhcgrid.web.cern.ch/LHCgrid.

[17] P. CHANET AND V. CASSIGNEUL. How to control the increase in the complexity of civil aircraft on-board systems. In AGARD MEETING ON AEROSPACE SOFTWARE ENGINEERING FOR ADVANCED SYSTEMS ARCHITECTURES, may 1993.

[18] F. MARTIN. *Modélisation et évaluation de performances prévisionnelles d'architectures modulaires intégrées*. THÈSE DE DOCTORAT, ENSAE, 1999.

[19] R. CRUZ. A calculus for network delay, part I : Network element in isolation. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, 37(1) :114–131, 1991.

[20] R. CRUZ. A calculus for network delay, part II : Network analysis. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, 37(1) :132–141, 1991.

[21] C. S. CHANG. Stability queue length, and delay of deterministic and stochastic queuing networks. IEEE TRANS. AUTOMAT. CONTR., 39(5) :913–931, May 1994.

[22] J.-Y. LE BOUDEC. Application of network calculus to guaranteed service networks. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, 44 :1087–1096, May 1998.

[23] J.-Y. LE BOUDEC AND P. THIRAN. LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE. Springer-Verlag, 2002.

[24] M. BOYER, L. JOUHET AND A. BOUILLARD. Notations pour le calcul réseau. MODÉLISATION DES SYSTÈMES RÉACTIFS (JESA), 2009.

[25] M. MARSAN, M. GARETTO, P. GIACCONE, E. LEONARDI, E. SCHIATTARELLA AND A. TARELLO. Using partial differential equations to model TCP mice and elephants in large IP networks. IEEE/ACM TRANS. NETW., 13(6) :1289–1301, December 2005.

[26] P. TINNAKORNSRISUPHAP AND A. MAKOWSKI. On the behavior of ECN/RED gateways under a large number of TCP flows : Limit theorems. QUEUEING SYSTEMS, 52(4) :287–304, 2006.

[27] J. INCERA, R. MARIE, D. ROS AND G. RUBINO. Fluidsim : A tool to simulate fluid models of high-speed networks. In *Computer Performance Evaluation - Modelling Techniques and Tools*, volume 1786 of LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE, pages 230–246. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[28] F. BOUCHUT, F. GOLSE AND M. PULVIRENTI. KINETIC EQUATIONS AND ASYMPTOTIC THEORY. Elsevier, 2000.

[29] C. BARDOS, F. GOLSE AND D. LEVERMORE. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I formal derivations. JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS, 63(1-2) :323–344, 1991.

[30] F. GOLSE. THE BOLTZMANN EQUATION AND ITS HYDRODYNAMIC LIMITS. 2 :159–301, 2005.

[31] G. DA COSTA, G. DUFOUR AND D. SANCHEZ. Fluid modelling for energy saving in grid computing. In INTERNATIONAL CONFERENCE RENPAR'19, 2009.

[32] G. DUFOUR, G. DURRIEU AND C. MAUCLAIR. Modélisation fluide de réseaux. Technical report, ONERA Toulouse, 2009.

[33] P.-E. JABIN. Various levels of models for aerosols. MATH. MODELS METHODS APPL. SCI., 12 :903–920, 2002.

[34] F. BOUCHUT AND F. JAMES. One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients. NONLINEAR ANALYSIS, 32 :891–933, 1998.

[35] F. BOUCHUT, F. JAMES AND S. MANCINI. Uniqueness and weak stability for multi-dimensional transport equations with one-sided lipschitz coefficient. ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA-CLASSE DI SCIENZE, 4(1) :1–25, 2005.

[36] F. POUPAUD AND M. RASCLE. Measure solutions to the linear multi-dimensional transport equation with non-smooth coefficients. COMMUNICATIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 22(1-2) :225–267, 1997.

[37] R.J. LEVEQUE. FINITE VOLUME METHODS FOR HYPERBOLIC PROBLEMS, volume 31. Cambridge university press, 2002.

[38] I. LANGMUIR. Oscillations in ionized gases. PROC. NAT. ACAD. SCI. U.S., 14 :628, 1928.

[39] F. CHEN. INTRODUCTION TO PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED FUSION. Springer US, 1984.

[40] J.L. DELCROIX AND A. BERS. PHYSIQUE DES PLASMAS. InterEditions/CNRS Editions, 1994.

[41] J.D. CALLEN. FUNDAMENTALS OF PLASMA PHYSICS. University of Wisconsin, 2006.

[42] C. BESSE, P. DEGOND, F. DELUZET, J. CLAUDEL, G. GALLICE AND C. TESSIERAS. A model hierarchy for ionospheric plasma modeling. MATH. MODELS METH. APPL. SCI., 14 n°3 :393–415, 2004.

[43] C. CERCIGNANI, R. ILLNER AND M. PULVIRENTI. THE MATHEMATICAL THEORY OF DILUTE GASES. Springer-Verlag New York, 1994.

[44] P. DEGOND. MACROSCOPIC LIMITS OF THE BOLTZMANN EQUATION : A REVIEW IN MODELING AND COMPUTATIONAL METHODS FOR KINETIC EQUATIONS. *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology Series*, pages 3–57, 2003.

[45] C. CERCIGNANI. THE BOLTZMANN EQUATION AND ITS APPLICATIONS. Springer-Verlag New York, 1988.

[46] C. CERCIGNANI. RAREFIED GAZ DYNAMICS. Cambridge University Press, 2000.

[47] I. GALLAGHER, L. SAINT-RAYMOND AND B. TEXIER. FROM NEWTON TO BOLTZMANN : HARD SPHERES AND SHORT-RANGE POTENTIALS. European Mathematical Society, 2014.

[48] P. DEGOND. *Asymptotic-preserving Schemes for Fluid Models of Plasmas.* SUMMER SCHOOL CEMRACS MODÈLES NUMÉRIQUES POUR LA FUSION, Marseille, 2010. arXiv :1104.1869v1 [math-ph].

[49] F. CORDIER, P. DEGOND AND A. KUMBARO. An asymptotic-preserving all-speed scheme for the euler and navier–stokes equations. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 231(17) :5685–5704, 2012.

[50] W. E. AND B. ENGQUIST. Heterogeneous multiscale methods. COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS, pages 87–132, 2003.

[51] C. LE BRIS. SYSTÈMES MULTI-ÉCHELLES *Modélisation et simulation.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[52] SHI JIN. Efficient asymptotic-preserving (ap) schemes for some multiscale kinetic equations. SIAM JOURNAL ON SCIENTIFIC COMPUTING, 21 :441–454, 1999.

[53] K. L. CARTWRIGHT, J. P. VERBONCOEUR AND C. K. BIRDSALL. Nonlinear hybrid boltzmann particle-in-cell acceleration algorithm. PHYS. PLASMAS, 7(8) :3252–3264, 2000.

[54] Y. CHEN AND S. PARKER. A gyrokinetic ion zero electron inertia fluid electron model for turbulence simulations. PHYS. PLASMAS, 8(2) :441–446, 2001.

[55] D.T.K. KWOK. A hybrid boltzmann electrons and pic ions model for simulating transient state of partially ionized plasma. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 227(11) :5758–5777, 2008.

[56] S. JIN. Asymptotic preserving (AP) schemes for multiscale kinetic and hyperbolic equations : a review. RIVISTA DI MATEMATICA DELLA UNIVERSITA DI PARMA, 3 :177–216, 2012.

[57] C. NEGULESCU. Asymptotic-preserving schemes. modeling, simulation and mathematical analysis of magnetically confined plasmas. RIVISTA DI MATEMATICA DELLA UNIVERSITA DI PARMA, 4, 2013.

[58] C. NEGULESCU AND S. POSSANNER. Closure of the strongly-magnetized electron fluid equations in the adiabatic regime. SUBMITTED.

[59] H. GOEDBLOED AND S. POEDTS. PRINCIPLES OF MAGNETOHYDRODYNAMICS. Cambridge University Press, 2004.

[60] D. HAN-KWAN. Quasineutral limit of the vlasov-poisson system with massless electrons. COMMUNICATIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 36(8) :1385–1425, 2011.

[61] D. HAN-KWAN AND M. HAURAY. Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional vlasov-poisson equation. COMMUNICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS, 334(2) :1101–1152, 2015.

[62] F. BOUCHUT AND J. DOLBEAULT. On long time asymptotics of the vlasov-fokker-planck equation and of the vlasov-poisson-fokker-planck system with coulombic and newtonian potentials. DIFF. INT. EQ., 8 :487–514, 1995.

[63] L. DESVILLETTES AND J. DOLBEAULT. On long time asymptotics of the vlasov-poisson-boltzmann equation. COMMUNICATIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 16 :451–489, 1991.

[64] T. GOUDON AND A. JÜNGEL. Zero-mass-electron limits in hydrodynamic models for plasmas. APPL. MATH. LETTERS, 12 :75–79, 1999.

[65] F. DELUZET, M. OTTAVIANI AND S. POSSANNER. Asymptotic-preserving scheme for the euler-lorentz equations in the drift limit. submitted.

[66] C. VILLANI. A REVIEW OF MATHEMATICAL TOPICS IN COLLISIONAL KINETIC THEORY. Handbook of mathematical fluid mechanics, vol. I, 2002.

[67] NRL (NAVAL RESEARCH LABORATORY) PLASMA FORMULARY.

[68] F. CORON AND B. PERTHAME. Numerical passage from kinetic to fluid equations. SIAM JOURNAL ON NUMERICAL ANALYSIS, 28 :26–42, 1991.

[69] F. FILBET AND S. JIN. A class of asymptotic preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 229(20), 2010.

[70] F. FILBET AND S. JIN. An asymptotic preserving scheme for the es-bgk model of the boltzmann equation. JOURNAL OF SCIENTIFIC COMPUTING, 46(2) :204–224, 2011.

[71] A. JÜNGEL. *Transport Equations for Semiconductors* LECTURE NOTES IN PHYSICS, volume 773. Springer-Verlag Berlin, 2009.

[72] P.A. MARKOWICH, C.A. RINGHOFER AND C. SCHMEISER. SEMICONDUCTOR EQUATIONS. Springer-Verlag Wien, 1990.

[73] F. POUPAUD. Diffusion approximation of the linear semiconductor boltzmann equation : analysis of boundary layers. ASYMPTOTIC ANALYSIS, 4 :293–317, 1991.

[74] M. BENNOUNE, M. LEMOU AND L. MIEUSSENS. Uniformly stable numerical schemes for the boltzmann equation preserving the compressible navier-stokes asymptotics. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 227(8) :3781–3803, 2008.

[75] A. CRESTETTO, N. CROUSEILLES AND M. LEMOU. Micro-macro decomposition for vlasov-bgk equation using particles. KINETIC AND RELATED MODELS, 5 :787–816, 2012.

[76] N. CROUSEILLES AND M. LEMOU. An asymptotic preserving scheme based on a micro-macro decomposition for collisional vlasov equations : diffusion and high-field scaling limits. KINETIC AND RELATED MODELS, 4(2) :441–477, 2011.

[77] P. DEGOND AND M. TANG. All speed scheme for the low mach number limit of the isentropic euler equation. COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS, 10 :1–31, 2011.

[78] J. HAACK, S. JIN AND J.G. LIU. An all-speed asymptotic-preserving method for the isentropic euler and navier-stokes equation. COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS, 12 :955–980, 2012.