



HAL
open science

Contrôle par le musicien des régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres

Lionel Velut

► **To cite this version:**

Lionel Velut. Contrôle par le musicien des régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres: Modélisation physique, mesure, analyse du système dynamique. Acoustique [physics.class-ph]. AMU - Aix Marseille Université, 2016. Français. NNT: . tel-01475123

HAL Id: tel-01475123

<https://hal.science/tel-01475123>

Submitted on 23 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

ECOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGENIEUR

Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique

UFR Sciences

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET D'ACOUSTIQUE - UPR CNRS 7051

Thèse

présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité : Acoustique

Contrôle par le musicien des régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres

Modélisation et mesures acoustiques, analyse du système dynamique

Lionel VELUT

Soutenance le 19/12/2016 devant le jury :

José ANTUNES	Principal Researcher, ITN, Sacavém, Portugal	Rapporteur
Jean-François PETIOT	Professeur, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
Murray CAMPBELL	Professor, University of Edimburgh, Scotland	Examineur
Vincent FREOUR	Research Engineer, Yamaha, Iwata, Japan	Examineur
Christophe VERGEZ	Directeur de Recherche CNRS, LMA, Marseille	Directeur de thèse
Joël GILBERT	Directeur de Recherche CNRS, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
Marthe CURTIT	Ingénieur de recherches, ITEM, Le Mans	Invitée

Une nation s'éteint quand elle ne réagit
plus aux fanfares ; la décadence est la
mort de la trompette

E.M. Cioran

Remerciements

Ce premier temps de recherche aurait été bien moins agréable et constructif sans les nombreuses personnes que j'ai côtoyé pendant ces trois années, et que je tiens à remercier ici.

Mes premiers remerciements vont, tout naturellement, au duo de choc qui a encadré ma thèse. Merci Christophe pour ton immense disponibilité au quotidien pour tes thésards, pour l'équilibre entre tes conseils avisés et l'autonomie appréciable que tu m'as laissée. Sans oublier ta bienveillance précieuse dans les périodes de "coup de mou", et les nombreuses discussions amicales, musicales (et souvent cuivrées). Merci également à Joël pour ton co-encadrement efficace et agréable, que le recul offert par la distance entre Le Mans et Marseille a encore enrichi. Les fréquentes visioconférences, et les éditions des "24h de l'acoustique musicale du Mans", ont été de précieux jalons dans la progression de mes travaux. Cette direction de thèse à deux échelles a été un cadre exceptionnel pour mon apprentissage de la recherche. Il semble que vous voudriez réitérer le co-encadrement entre le Mans et Marseille... c'est tout le mal que je peux souhaiter à un futur doctorant motivé par les cuivres!

Je remercie également José Antunes et Jean-François Petiot d'avoir accepté de rapporter cette thèse, ainsi que Murray Campbell, Marthe Curtit et Vincent Fréour. Merci à vous tous pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail, et pour vos remarques pertinentes qui nourrissent ma réflexion pour la suite.

D'autres membres du LMA ont apporté leur expertise et leurs conseils à mon travail. Merci à Fabrice pour la "hotline" attentive et patiente lors de ma prise en main de MOREESC, et les discussions sur les modèles physiques. Merci à Patrick pour tout le travail réalisé sur la trompette instrumentée, en particulier les codes de mesure. Merci à Vincent Long et Olivier Pot, cette trompette instrumentée aurait été bien moins fiable sans votre ingéniosité pour y fixer des capteurs. Merci à mes cobayes (pardon, on dit "sujets expérimentaux") : Marc, Christophe, Boris, Victor et Joshua à la trompette, Maxime au trombone, pour leur patience et leur bienveillance pendant qu'on leur demandait des exercices étranges sur un instrument bardé de capteur. Merci à Philippe les dépannages en traitement du signal, à Jean pour les discussions enrichissantes. Merci à Mithra pour ton remarquable travail de stage, sans lequel les doublements de période et autres subtilités de ce modèle physique n'auraient peut-être pas émergé. Des remerciements particuliers à Pierre, bien sûr pour ta précieuse assistance dans la prise en main de MANLAB, mais aussi pour les quintes justes (à roulettes) et autres échanges de calembours de haut vol partagés dans ce bureau, salutaires moments de détente et de créativité. Merci enfin à tous les ingénieurs, techniciens et administratifs, toujours prêts à nous aider pour améliorer notre cadre de travail.

J'en profite pour saluer ceux que la thèse ou les post-doc ont fait passer par l'acoustique instrumentale marseillaise : Soizic, Alexis, Whitney, Jean-Baptiste, Kuriijn, Louis... et tous les stagiaires qui sont passés par là : Louis (bis), Alexandrine, Tom... Plus généralement, toutes les personnes avec que j'ai côtoyées au LMA, le temps d'une -ou plusieurs- discussions musicales ou scientifiques, autour d'un café.

Faire de la science c'est bien... La faire sortir des labos, en faire comprendre les rouages à des jeunes et des moins jeunes, c'est tout aussi crucial. Merci à Hannah et Isabelle, de la cellule "Culture

Scientifique et Technique" d'AMU pour les ateliers avec des scolaires, les souks et caravanes des sciences qui furent de très belles expériences et de bons moments.

Ma formation musicale n'est évidemment pas étrangère à mon sujet de thèse : je remercie tous mes professeurs de musique, chefs d'orchestre et autres mentors d'avoir su m'accompagner dans mon apprentissage de la musique et de la trompette. Merci en particulier à Jean-Christophe Banaszak qui m'a "passé le virus" de l'acoustique, et fait prendre conscience que science et musique avaient beaucoup à se dire.

Parce que 3 ans de thèse ne sont pas composés que de recherche et de sommeil, d'autres personnes doivent figurer dans ces remerciements. Un merci immense, bien sûr, à mes parents, mes frères, ma famille en général, qui m'a toujours soutenue, voire poussée aux moments opportuns de ma vie : dans mes études, dans la musique indissociable de mon sujet de recherche... En parlant de musique, remerciements pyro-équestres aux copains fanfarons. Ça a été des belles respirations de répéter et jouer avec vous à Marseille et ailleurs, de se lancer ensemble (avec succès!) dans des projets de fous et d'en soutenir d'autres. Merci aussi à tous les amis de bal folks, de Marseille et d'ailleurs, en particulier aux durs du noyau : Rémy, Céline, Charly, Johanna, Angélique, Laure, Gaëlle, Marine, Hervé, Mathilde, Christophe, Aurélie, Mylène... et toute la famille de la Dar. Merci aussi aux amis que j'ai pu rencontrer en bal, avec qui la connexion fut belle, par la musique, la danse, ou les deux... bien trop nombreux pour être tous cités. Une pensée particulière pour Louise, pour la danse, la musique, et tout ce que tu m'apportes. Enfin, merci aux vélorutionnaires, der'Ailleurs et autres cyclistes marseillais (et en particulier à Juju qui m'y a amené) pour ces belles échappées à vélo.

Enfin, merci à Théobromine et Caféine pour le soutien moral et psychique durant ces trois années, notamment la rédaction.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	10
I Modélisation des instruments de la famille des cuivres	16
1 État de l'art	18
1.1 Fonctionnement des cuivres	18
1.2 Modèle général d'instrument entretenu	20
1.3 Le résonateur : le corps de l'instrument	21
1.4 L'excitateur : les lèvres	22
2 Modèle retenu	25
2.1 Résonateur	25
2.2 Excitateur	26
2.3 Modèle complet	27
3 Choix des paramètres	29
II Outils mis en œuvre	32
4 La simulation temporelle	34
4.1 Présentation de la méthode	34
4.2 Application aux instruments à vents : la bibliothèque MOREESC	34
5 L'analyse de stabilité linéaire	36
5.1 Présentation	36
5.2 Recherche de la solution d'équilibre	36
5.3 Linéarisation du modèle	37
5.4 Utilisation de la méthode	38
5.5 Analyse de la Fonction de Transfert Boucle Ouverte	38
5.6 Limitations de l'ASL	39
6 Continuation numérique avec Manlab	40
6.1 Principe de l'équilibrage harmonique	41
6.2 Méthode Asymptotique Numérique	41
6.3 Stabilité des branches calculées	43
6.4 Mise en forme du modèle physique de cuivre	43
6.4.1 Adimensionnement	44
6.4.2 Régularisation, mise sous forme quadratique	45
6.4.3 Stabilité	45

6.5	Utilisation de MANLAB	46
6.5.1	Initialisation	46
7	Développement d'instruments instrumentés	48
7.1	Choix des paramètres mesurés	49
7.2	Conception et étalonnage des capteurs	49
7.3	Chaîne d'acquisition	53
III	Production du son	55
8	Jeu classique du trombone	57
	Introduction	57
8.1	Régimes 2 à 8 du trombone	59
8.1.1	Analyse de stabilité linéaire de la solution d'équilibre	59
8.1.2	Régimes périodiques	62
8.1.3	Régimes quasi-périodiques	68
8.1.4	Conclusion	70
8.2	Premier régime	70
8.2.1	Note pédale	71
8.2.2	Note Fantôme	74
8.2.3	Doublements de période	76
8.2.4	Conclusion	77
9	Jeu avec une sourdine	79
9.1	Introduction	81
9.2	Tools	81
9.3	Results	86
9.4	Conclusions	90
9.5	Acknowledgements	91
10	Jeu multiphonique	92
10.1	Introduction	94
10.2	Tools	95
10.3	Results	99
10.4	Conclusions	109
IV	Paramètres de contrôle du jeu : l'exemple de la trompette	112
11	Contrôle de l'instrument par un musicien	114
11.1	Pression dans la bouche et débit d'air	114
11.2	Fréquences de jeu et résonances acoustiques	117
11.3	Pitch-bending	118
11.4	Conclusion	120
12	Plages de valeurs des paramètres de jeu	122
12.1	Protocole de mesure	122
12.2	Pression dans la bouche	123
12.3	Amplitude de la pression dans l'embouchure	125
12.4	Force d'appui sur l'embouchure	126
12.5	Conclusion	129

Conclusions et perspectives	133
Bibliographie	147
Annexes	149
A Fonction de transfert en pression entre l'embouchure et l'extérieur d'un trombone	149
B Calcul de la solution d'équilibre	151
C Calcul de la matrice jacobienne du système a l'équilibre	153
D Calcul de l'admittance acoustique linéarisée de l'excitateur	156
E Elements de calcul pour la Méthode Asymptotique Numérique	158
E.1 Principe	158
E.2 Systèmes linéaires en cascade	158
E.3 Taille du pas	160
E.4 Itération	161
E.5 Correction éventuelle	161
F Éléments de calculs : Stabilité des branches périodiques	162
F.1 Dérivées de F_{2k-1}	162
F.2 Dérivées de F_{2k}	164
F.3 Dérivées de F_{2N_m+1}	164
F.4 Dérivées de F_{2N_m+2}	164
G Étalonnage des capteurs	166
G.1 Pression dans la bouche et l'embouchure	166
G.2 Pistons	168
G.3 Force d'appui sur l'embouchure	168
H Article : Linear Stability Analysis	170
H.1 Abstract	170
H.2 Introduction	170
H.3 Tools	171
H.3.1 Brass instrument model	171
H.3.2 Choice of lip parameters	175
H.3.3 Stability of the equilibrium solution	176
H.3.4 Time-domain simulation	177
H.4 Results	178
H.4.1 Linear Stability Analysis	178
H.4.2 Exact match between simulation and LSA	179
H.4.3 Unforeseen behaviours	182
H.4.4 Open-loop transfer function	186
H.5 Lowest regime of oscillation	187
H.5.1 The Trombone "pedal note"	187
H.5.2 A Saxhorn "ghost note" ?	189
H.5.3 Shifting of the lowest resonance peak of the input impedances	191
H.6 Conclusions	191
Appendix H1	193
Appendix H2	193

Introduction générale

Maitriser un instrument de musique pour l'utiliser comme moyen d'expression artistique nécessite plusieurs années de travail assidu de la part de l'aspirant musicien. Le contrôle du comportement de l'instrument de musique par les actions de l'instrumentiste est un processus au long cours, qui se poursuit et s'affine par une pratique régulière, jusqu'à ce que le lien entre l'intention artistique et le résultat musical soit ressenti comme naturel. En d'autres termes, l'interaction avec l'instrument est un geste expert qui, une fois acquis, permet au musicien de libérer un maximum son esprit des contingences de son instrument, au profit de son expression artistique.

Pour un scientifique s'intéressant à la manière dont le son est produit dans un instrument de musique, observer et analyser le jeu du musicien est d'un grand intérêt. Le geste du musicien donne des indications sur les éléments ayant un rôle dans la production sonore et sur les paramètres utilisés par le musicien pour modifier le son obtenu. Un des objectifs de l'acoustique musicale est d'expliquer les mécanismes qui, à partir des paramètres de contrôle du musicien, produisent le son désiré. Pour cela, un outil précieux est la modélisation physique des instruments de musique, qui vise à reproduire les phénomènes physiques par lesquels le son est généré. Pour expliquer ces phénomènes, l'analyse du jeu du musicien est d'une grande importance. D'une part, elle met en évidence les éléments responsables de la production du son, qu'il faudra prendre en compte dans le modèle. D'autre part, elle caractérise le résultat obtenu par un musicien pour un jeu de paramètres de contrôle donné. L'objectif de la modélisation est de reproduire convenablement le résultat qu'un musicien obtient avec un jeu de paramètres donné.

La famille des instruments à vent de la famille des cuivres regroupe les instruments pour lesquels le son provient de la vibration des lèvres. Elle regroupe les instruments d'orchestre européens : trompettes, trombones, tubas, saxhorns, cors, etc., les trompes et cors militaires et de chasse, mais aussi des instruments anciens ou antiques tels que le cornet à bouquin, le serpent, l'ophicléide, le buccin, le carnyx... ou encore des instruments traditionnels comme les conques, le chophar juif ou le didgeridoo des aborigènes australiens. Le mécanisme de production du son dans ces instruments présente une spécificité, partagée avec la voix [Flanagan, 1972, Ruty et al., 2007] : la production de l'oscillation repose directement sur un élément anatomique du musicien, en l'occurrence ses lèvres. Cette particularité affecte beaucoup la manière dont le musicien contrôle son instrument. Outre son action sur les éventuels trous latéraux, coulisses ou pistons modifiant les caractéristiques acoustiques de l'instrument, un cuivriste¹ peut modifier les caractéristiques mécaniques de ses lèvres, notamment par l'action du masque musculaire². Grâce au contrôle de la respiration (partagé avec les autres instrumentistes à vent) et à ce contrôle sur les lèvres, un cuivriste peut choisir entre de multiples régimes d'oscillation d'un même instrument sans modifier le doigté³ [Campbell and Greated, 1994]. Ces contrôles permettent aussi, dans une certaine mesure,

-
1. Ce terme sera utilisé pour désigner un musicien jouant un instrument de la famille des cuivres.
 2. Les musiciens désignent par ce terme l'ensemble des muscles du visage agissant sur les lèvres.
 3. Le "doigté" d'un cuivre désigne les pistons enfoncés ou non par le musicien.

de modifier continûment la fréquence de jeu au voisinage d'une note. La figure 1 illustre ces possibilités dans le cas de la trompette : la figure 1a) représente le spectrogramme de 7 notes différentes d'un arpège, correspondant à 7 régimes périodiques distincts (appelés "registres" dans la suite du document), jouées par un trompettiste, et la figure 1b) est le spectrogramme d'un "pitch bend", exercice où le musicien fait varier la fréquence d'une note au voisinage d'un des registres de l'instrument. Dans les deux cas, aucun piston de la trompette n'est enfoncé, le contrôle vient *a priori* uniquement du masque et de la respiration du trompettiste.

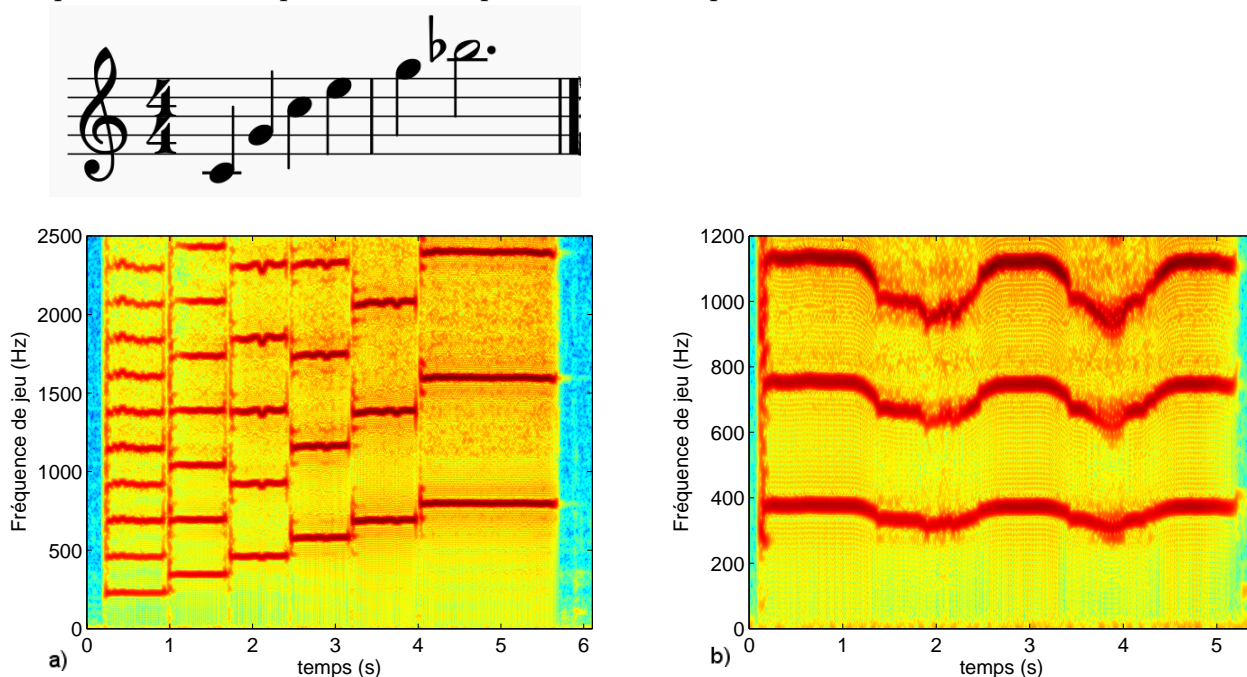


FIGURE 1 – Fig.a). Spectrogramme d'un arpège de *Do3* à *Sib4* joué sur une trompette en *Sib*, tous pistons levés. Les notes jouées sont indiquées dans la partition au-dessus. Chaque note correspond à un registre de l'instrument. Fig.b). Spectrogramme d'un *Sol3* dont la fréquence de jeu a été "courbée" (pitch bend) par le musicien, sans toucher aux pistons.

Des régimes autres que périodiques sont aussi susceptibles d'apparaître [Kergomard, 1997], parmi lesquels une solution stationnaire, également appelé solution d'équilibre (régime "silencieux" où le musicien souffle dans son instrument sans que ses lèvres n'entrent en vibration). Des oscillations quasi-périodiques, correspondant à des sons "roulants" généralement indésirables dans le cadre de la musique classique occidentale, peuvent aussi émerger.

Les travaux présentés dans cette thèse visent à mieux comprendre l'émergence des différents régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres, en fonction des paramètres de contrôle utilisés par le musicien. Cette recherche s'appuie principalement sur l'étude d'un modèle physique d'instrument, qui reproduit les phénomènes impliqués dans la production du son. Trois méthodes d'analyse sont utilisées pour apprécier la capacité du modèle retenu à reproduire les différents régimes observés expérimentalement sur des instruments de la famille des cuivres : l'analyse de stabilité linéaire (ASL), la simulation temporelle, et la continuation numérique. Cette approche analytique est complétée par une étude expérimentale, portant sur la mesure de plusieurs paramètres de contrôle utilisés par des trompettistes pour jouer différents registres de leur instrument. Les comportements du modèle et les résultats expérimentaux se complètent et sont confrontés aussi souvent que possible.

Un modèle physique d'instrument de musique est un système d'équations modélisant les phénomènes physiques qui ont lieu au sein des différents éléments de l'instrument étudié. L'objectif est que le modèle reproduise de manière satisfaisante les comportements que l'on souhaite étudier. Il existe aujourd'hui des modèles pour la plupart des familles d'instruments de musique [Campbell and Greated, 1994, Chaigne and Kergomard, 2008]. Les cuivres font partie des instruments auto-oscillants entretenus, au même titre que les autres instruments à vent et les instruments à cordes frottées. Ces instruments sont capables de produire une oscillation à partir d'une source d'énergie quasi-statique, variant lentement dans le temps par rapport aux échelles de temps de l'acoustique. Dans le cas des cuivres, la pression dans la bouche, fournie par le système respiratoire du musicien, est transformée en oscillation de la pression dans l'instrument, dont une partie est rayonnée. La modélisation de ce phénomène de production d'une auto-oscillation à partir d'un signal quasi-statique, qui est à la base de la production du son, nécessite la prise en compte d'éléments non linéaires dans le modèle. Les travaux historiques de Helmholtz [von Helmholtz, 1877] ont montré qu'un système bouclé était bien adapté à la modélisation d'instruments entretenus. C'est l'approche la plus généralement retenue dans les études sur la physique des instruments de la famille des cuivres, qui sont classiquement décrits par le couplage non linéaire d'un oscillateur et d'un résonateur [Elliott and Bowsher, 1982, Campbell, 2004]. Le modèle étudié dans cette thèse s'inscrit dans cette lignée.

Le parti pris de cette thèse est l'utilisation d'un modèle aussi simple que possible. L'objectif est de déterminer dans quelle mesure ce modèle, relativement simple, est capable de reproduire les comportements observés lors du jeu instrumental. Suivant cette logique, les lèvres sont modélisées par un oscillateur linéaire à un degré de liberté, tels que ceux décrits dans [Elliott and Bowsher, 1982, Fletcher, 1993]. La propagation dans l'instrument est supposée linéaire, ce qui écarte d'emblée la reproduction de sons à fort niveau impliquant le phénomène de cuivrage [Hirschberg et al., 1996]. Ce terme désigne une modification du timbre de l'instrument apparaissant quand un cuivriste joue fort, et implique des pressions dans l'instrument dont l'ordre de grandeur atteint le dixième de la pression atmosphérique normale. La modélisation de tels phénomènes nécessiterait la prise en compte de phénomènes de propagation non linéaire d'ondes de pression. Toujours dans un but de simplicité du modèle, le couplage entre les lèvres et le conduit vocal — mis en évidence dans [Chen et al., 2011, Fréour et al., 2010] par exemple — n'est pas pris en compte, ce qui se traduit par une pression dans la bouche constante. Le modèle de cuivre obtenu appartient à la famille des systèmes dynamiques non linéaires. Cette catégorie regroupe de nombreux modèles reproduisant des phénomènes pourtant très différents les uns des autres, allant des phénomènes climatiques aux asservissements mécaniques industriels en passant par l'évolution de réactions chimiques. De nombreux outils et méthodes mathématiques ont été développés pour analyser le comportement de systèmes de ce type, dont certains peuvent apporter des informations pertinentes sur les régimes d'oscillation du modèle de cuivre étudié ici.

La première approche utilisée est l'analyse de stabilité linéaire (ASL). Elle consiste à étudier la stabilité de la solution stationnaire du modèle étudié à l'aide d'une linéarisation du système au voisinage de cette solution stationnaire. Cette méthode classique de l'étude des systèmes dynamiques non linéaires [Nayfeh and Balachandran, 1995, Bergé et al., 1995], est assez largement utilisée en acoustique musicale, notamment pour l'étude des instruments à vent depuis les travaux précurseurs de [Wilson and Beavers, 1974] sur les bois à anche simple. La méthode a largement été utilisée pour les cuivres [Fletcher and Rossing, 1998, Cullen et al., 2000], les instruments de la famille des flûtes [Auvray et al., 2012, Terrien et al., 2014], ainsi que les instruments à cordes frottées [Inácio and Antunes, 2007, Debut et al., 2012]. La détermination, par cette méthode, des seuils d'instabilité de la solution stationnaire permet de déterminer rapidement les plages de

paramètres pour lesquels une auto-oscillation est susceptible d'émerger. Plus généralement, cette méthode au coût de calcul très faible permet de calculer quelques informations sur les solutions émergentes, notamment le registre⁴ de l'instrument portant l'oscillation et le temps nécessaire à l'établissement de l'oscillation. Cependant, beaucoup de caractéristiques de l'oscillation obtenue — forme d'onde, fréquence, stabilité — ne peuvent être déterminées par l'étude d'un modèle linéarisé.

Pour en savoir plus sur le régime obtenu, un autre outil classique d'étude des systèmes dynamiques non linéaires est mis en œuvre : la simulation temporelle, s'appuyant sur la résolution des équations non linéaires du système par un schéma numérique. Cette méthode a largement été utilisée en acoustique musicale, pour la simulation d'instruments entretenus de tout type : cordes frottées [Inácio et al., 2008], flûtes [Terrien, 2013], bois à anche de roseau [McIntyre et al., 1983] et cuivres [Adachi and Sato, 1996]. Cette approche fournit une forme d'onde simulée de toutes les variables du système donné quel que soit le type de régime stable obtenu, ce qui permet d'obtenir toutes les caractéristiques de l'oscillation et du régime transitoire qui la précède pour un jeu de paramètres donnés. Une limitation majeure est la forte sensibilité du système physique aux conditions initiales qui, en cas de coexistence de plusieurs régimes stables, déterminent la solution vers laquelle le système converge. Dans le cas de l'étude d'un instrument de musique, cela peut faire croire à tort que le modèle ne reproduit pas un régime d'oscillation de l'instrument simplement parce que les conditions initiales menant au régime observé expérimentalement sont difficiles à déterminer. D'autre part, cette méthode ne peut converger que vers des solutions stables.

Le troisième outil utilisé permet la continuation des branches des solutions périodiques d'un système dynamique en fonction d'un paramètre choisi par l'utilisateur, appelé paramètre de continuation. L'approche retenue est celle de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) qui décompose la branche solution en tronçons, chaque tronçon étant approché par une série entière d'ordre élevé [Cochelin et al., 2007]. Cet outil, couplé à l'équilibrage harmonique, est appliqué dans ce travail à la continuation de branches de solutions périodiques. La méthode de Hill [Lazarus and Thomas, 2010] est implémentée dans cet outil et donne la stabilité des solutions calculées. La continuation de branches de solutions périodiques d'un instrument à anche simple a été réalisée récemment par [Karkar, 2012], grâce à l'outil MANLAB utilisé ici [Cochelin and Vergez, 2009]. Couplé au calcul du domaine de stabilité des branches continuées, cet outil donne une vision très globale du fonctionnement du système étudié. En particulier, la coexistence de solutions pour un jeu de paramètres donné, et l'évolution de leur stabilité respective en fonction du paramètre de continuation permettent de mieux comprendre les changements de régime du système.

Cette étude théorique d'un modèle physique d'instrument à l'aide de trois méthodes d'analyse est complétée par une étude expérimentale du jeu du trompette. Il n'existe qu'assez peu de précédents à une campagne de mesure simultanée de plusieurs paramètres de jeu sur des cuivristes, que ce soit sur des trompettistes [Bianco, 2012] ou des trombonistes [Bouhuys, 1968, Fréour, 2013]. L'étude menée ici prend la forme de la mesure simultanée de paramètres de contrôle utilisés par le musicien et de variables décrivant le comportement de la trompette. Une trompette instrumentée, dont le développement avait été commencé dans deux stages de Master 2 [Velut, 2012] et [David-Sivelle, 2013], est utilisée pour réaliser des mesures. Le choix des paramètres et variables mesurées est guidé par un compromis entre, d'une part, la volonté de mesurer les mêmes paramètres et variables que les entrées et sorties du modèle étudié par ailleurs pour faciliter

4. Le n^{eme} registre d'un instrument à vent est un terme musical qui désigne l'oscillation périodique sur son n^{eme} mode de résonance acoustique.

la comparaison des résultats et, d'autre part, les limitations technologiques qui interdisent, au moins pour l'instant, de mesurer certains paramètres pendant le jeu du musicien sans perturber très fortement ce jeu. Le choix de paramètres et la conception de la trompette instrumentée ont été orientés par la volonté de ne pas modifier la géométrie intérieure de l'instrument, et d'entraver le moins possible le trompettiste par rapport à une situation de pratique musicale habituelle.

Le document est organisé comme suit. La première partie (chapitres 1 à 3) explique le processus de modélisation physique d'un instrument de la famille des cuivres. Après un état de l'art sur les modèles physique existants au chapitre 1, on détaille le modèle physique de cuivre retenu et la logique qui a présidé à ces choix au chapitre 2. La détermination des paramètres utilisés pour ce modèle a demandé une recherche bibliographique décrite au chapitre 3. La seconde partie de la thèse (chapitres 4 à 7) décrit le développement des différents outils utilisés pour étudier le contrôle des régimes d'oscillation dans les cuivres. La conception et la réalisation de ces outils adaptés au modèle de cuivre a représenté une grosse partie du travail réalisé. La méthode de simulation numérique adaptée au modèle de cuivre retenu est détaillée au chapitre 4. Elle est basée sur le code MOREESC développé par Fabrice Silva durant sa thèse [Silva, 2009] qui est optimisé pour la simulation temporelle de modèles d'instrument à anche simple ou de cuivre. Le chapitre 5 détaille le développement par nos soins d'un code d'analyse de stabilité linéaire adapté au modèle de cuivre retenu. L'outil de continuation numérique des solutions périodiques du modèle et de calcul de stabilité de ces solutions est présenté dans le chapitre 6. Le travail réalisé consiste à l'adaptation de notre modèle de cuivre au logiciel MANLAB dans la version proposée par Sami Karkar durant sa thèse [Karkar, 2012]. Les deux parties suivantes de la thèse proposent l'utilisation de ces outils pour appréhender les différents régimes d'oscillations rencontrés dans les instruments de la famille des cuivres, et en particulier le trombone ténor, le saxhorn baryton et la trompette *Sib*. Bien que la troisième partie (chapitres 8 à 10) traite plus spécifiquement des résultats obtenus en analysant le modèle physique et la quatrième analyse les résultats de mesure sur trompette instrumentée, les résultats de ces deux approches théorique et expérimentale sont confrontés autant que possible. La troisième partie approfondit, à l'aide des méthodes d'analyses développées, différents comportements du modèle, les mettant en regard avec des comportements connus des instruments de la famille des cuivres. Le chapitre 8⁵ utilise les différentes méthodes d'analyse du modèle pour déterminer dans quelle mesure celui-ci reproduit certains comportements du trombone. Différents cas sont abordés : jeu "normal" de sons périodiques sur la tessiture de l'instrument, émission de sons quasi-périodiques, jeu de plusieurs registres... Des phénomènes plus particuliers du trombone tels que la note pédale et les doublements de période sont également étudiés. Le chapitre 9⁶ analyse le comportement du modèle lorsqu'il est paramétré pour prendre en compte l'usage d'une sourdine sèche dans un trombone, et en particulier l'influence sur la note pédale. Le chapitre 10⁷ se propose de reproduire et d'étudier les sons multiphoniques du trombone par un forçage du même modèle auto-oscillant de cuivre. Enfin, la quatrième partie de cette thèse (chapitres 11 et 12) présente les résultats de mesures à la trompette instrumentée. Le chapitre 11 détaille l'évolution de certains paramètres de contrôle quand un musicien joue, à différentes nuances, sur les différents registres de la trompette. L'évolution des paramètres durant un pitch bend est également étudiée. Le chapitre 12 propose une cartographie des valeurs de pression dans la bouche et de force d'appui sur l'embouchure qu'utilisent plusieurs trompettistes pour jouer les différents registres couvrant la tessiture de l'instrument et en faire varier la nuance.

5. La majeure partie du contenu du chapitre 8 est repris dans la publication [Velut et al., 2016c]

6. Le chapitre 9 est la copie conforme de la publication "Physical modelling of trombone mutes, the pedal note issue" de Velut, Vergez et Gilbert [Velut et al., 2016b]

7. Le chapitre 10 est la copie conforme de la publication "Measurements and time-domain simulations of multiphonics in the trombone" de Velut, Vergez et Gilbert [Velut et al., 2016a]

Le corps du document est complété par 8 annexes :

- L'annexe A décrit la mesure de la fonction de transfert entre la pression dans l'embouchure d'un trombone et le son rayonné dans l'axe du pavillon. Cette fonction de transfert permet la simulation de la pression rayonnée par le trombone.
- L'annexe B détaille le calcul de la solution d'équilibre du modèle de cuivre étudié.
- L'annexe C présente le calcul de la matrice jacobienne du système en sa solution d'équilibre, qui est utilisée dans le chapitre 5.
- L'annexe D contient des éléments de calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) du modèle, dont l'analyse est présentée au paragraphe 5.5.
- L'annexe E donne des éléments de calcul utiles à la compréhension de la Méthode Asymptotique Numérique. Elle complète le chapitre 6.
- L'annexe F détaille le calcul des éléments de la matrice de Hill, utilisée pour le calcul de la stabilité des solutions périodiques dans le paragraphe 6.3.
- L'annexe H reproduit l'article [Velut et al., 2016c], soumis à *Acta Acustica united with Acustica*, dont les résultats sont repris au chapitre 8.

Première partie

Modélisation des instruments de la famille des cuivres

Introduction

Cette première partie traite de la modélisation d'instruments à vent de la famille des cuivres. Un des objectifs principaux de cette thèse est de déterminer la capacité du modèle choisi dans ce chapitre à reproduire le comportement des instruments qu'il modélise. Le premier chapitre propose une explication du fonctionnement des cuivres, et présente l'état de l'art de la modélisation des cuivres par un modèle physique d'instrument de musique auto-entretenu. Le chapitre 2 présente en détail le modèle retenu et étudié dans cette thèse. Le chapitre 3 détaille la manière dont les paramètres de contrôle de ce modèle ont été choisis.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Fonctionnement des cuivres

La famille des instruments de musique à vent de type cuivres est caractérisée par le fait que l'élément mécanique entrant en vibration est constitué des lèvres de l'instrumentiste. Le mécanisme qui permet la mise en oscillation des lèvres par l'expiration du musicien peut se décrire, de façon simplifiée, comme suit : l'expiration du musicien crée une surpression dans sa bouche. Cette surpression exerce une force sur les lèvres. Soumises à la résultante entre cette force, leur élasticité et leur inertie, les lèvres s'écartent. Cela élargit le canal entre les lèvres, modifiant l'écoulement de l'air entre la bouche et l'embouchure de l'instrument. Cette modification de l'écoulement provoque une perturbation de la pression dans l'embouchure. Cette perturbation se propage dans la colonne d'air contenue dans le tube de l'instrument, et subit les effets des modes de résonance de cette colonne d'air. Le pavillon rayonne une petite partie de cette perturbation de pression, très principalement les composantes à hautes fréquences. Le reste de la perturbation est réfléchi principalement au niveau du pavillon, et revient dans l'embouchure. La surpression arrivant dans l'embouchure exerce une force qui tend alors à fermer les lèvres et, dans le cas où les cycles successifs contribuent à amplifier le mouvement des lèvres et les oscillations de pression pour conduire à un régime périodique, le cycle recommence. La superposition des ondes aller et retour génère une onde stationnaire dans l'instrument. Les pertes d'énergies dues à l'amortissement des lèvres ou dans la colonne d'air et au rayonnement par le pavillon sont compensées par l'énergie apportée au système par l'expiration du musicien. Ce mécanisme est d'autant plus efficace que les caractéristiques vibratoires des lèvres favorisent leur oscillation à la fréquence de jeu [Farkas, 1962].

Durant son apprentissage, le musicien apprend à ajuster ces caractéristiques en utilisant le contrôle musculaire des lèvres. Cela fait partie des paramètres qui lui permettent de sélectionner le mode de résonance acoustique de l'instrument sur lequel il souhaite jouer, c'est à dire choisir la note qu'il souhaite émettre. La fréquence de la note émise dépend de la fréquence du mode acoustique sélectionné, mais aussi des caractéristiques des lèvres, notamment leur fréquence de résonance mécanique. Cela se traduit par une fréquence d'oscillation assez proche de la résonance acoustique. Le cuivriste peut faire varier cette fréquence de jeu autour de la fréquence de résonance du mode acoustique mis en œuvre, dans un intervalle qui dépend à la fois de l'instrument et de la maîtrise technique du musicien.

Les instruments modernes sont conçus pour que, sans toucher aux pistons ou à la coulisse, un musicien puisse jouer les notes d'une série quasi harmonique, uniquement en contrôlant ses lèvres et son souffle. Les instruments naturels tels que la trompette de cavalerie sont limités à ces notes. Concrètement, cela se traduit par des instruments dont les fréquences de résonance acoustique

suivent, autant que possible, une série harmonique. Afin de jouer des notes intermédiaires, les facteurs d'instrument ont inventé des moyens de modifier ces fréquences de résonance : la coulisse de la sacqueboute, puis du trombone, permet d'allonger directement le tube. Les trous latéraux ou les clés des cuivres anciens tels que le cornet à bouquin, le serpent ou l'ophicléide, modifient également le résonateur. Plus récemment inventés, les pistons ajoutent une dérivation dans le trajet de l'air, abaissant ainsi les fréquences de résonance en allongeant le tuyau [Herbert and Wallace, 1997].



FIGURE 1.1 – Groupe de musiciens comportant principalement des cuivres modernes. De gauche à droite : saxhorn, trombone, sousaphone, trompette.

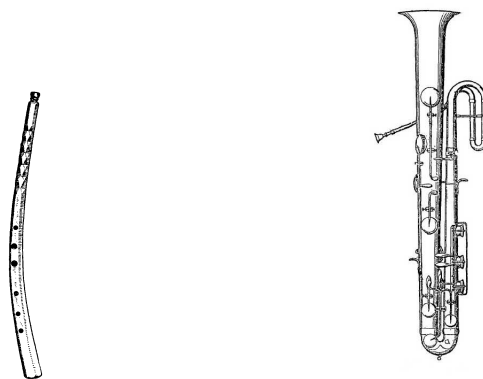


FIGURE 1.2 – Exemple de cuivres à trous latéraux et à clés, le cornet à bouquin (gauche) et l'ophicléide (droite). Ces instruments sont rarement utilisés aujourd'hui. Source : Wikimedia commons.

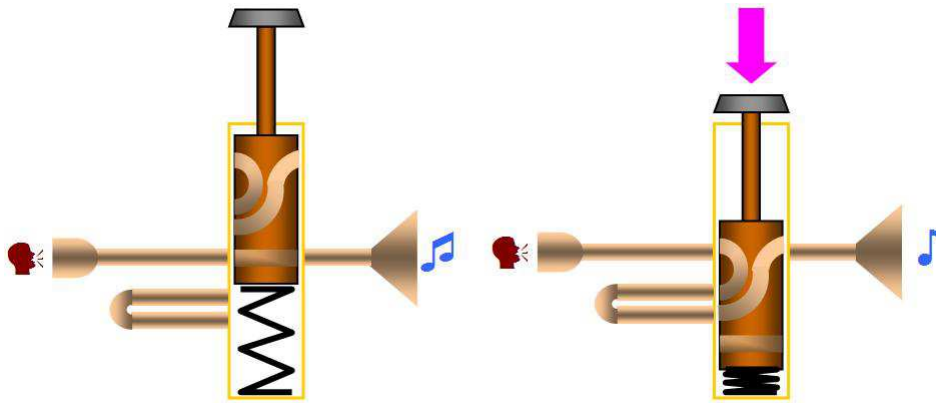


FIGURE 1.3 – schéma de principe d'un piston. L'appui sur le piston fait descendre le cylindre et insère une dérivation dans le circuit d'air, ce qui l'allonge et abaisse ses résonances acoustiques. Source : Wikimedia commons.

1.2 Modèle général d'instrument entretenu

On cherche ici un modèle qui reproduise le fonctionnement physique de l'instrument : l'objectif n'est pas de synthétiser des sons musicaux en temps réel mais de modéliser la dynamique des éléments constitutifs de l'instrument. Les modèles proposés n'ont, en général, pas de solution explicite, une des rares exceptions étant le modèle de clarinette sans dynamique d'anche ni perte dans le résonateur [Maganza et al., 1986, Almeida et al., 2015]. La recherche de solutions approchées permet d'appréhender le fonctionnement de ces instruments.

Les bases de la modélisation physique des vents ont été posées dès le XIX^{eme} siècle par Hermann von Helmholtz [von Helmholtz, 1877] qui, le premier, propose une modélisation par un système bouclé, constitué d'un excitateur et d'un résonateur couplés. Ce modèle est applicable à tous les instruments dits "entretenus", où l'excitateur apporte constamment de l'énergie au résonateur durant l'oscillation. C'est le cas des vents et des cordes frottées. Il n'est en revanche pas adapté aux instruments tels que les percussions et les cordes pincées ou frappées où l'apport d'énergie est ponctuel au début du son, après quoi les deux éléments sont découplés et seul le résonateur vibre.

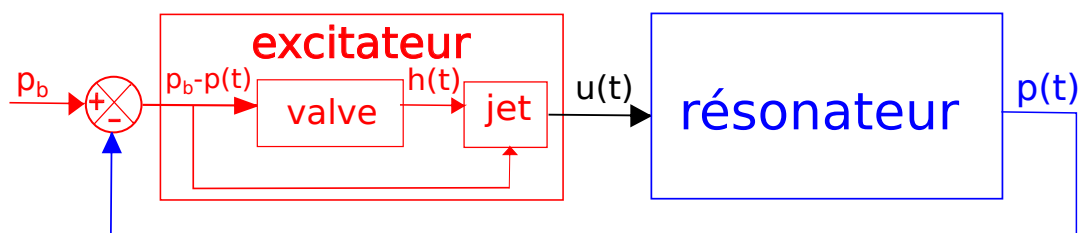


FIGURE 1.4 – Schéma-bloc représentant un modèle bouclé d'instrument entretenu. Le résonateur acoustique du système est constitué de la colonne d'air contenue dans le corps de l'instrument. L'excitateur est composé des lèvres du musicien (valve) et du jet passant entre les lèvres qui couple la valve et le résonateur.

La figure 1.4 ci-dessus représente un modèle bouclé de ce type, pour un instrument de la famille des cuivres. Les éléments de ce schéma sont détaillés ci-après.

1.3 Le résonateur : le corps de l'instrument

Dans le cas des instruments à vent, et notamment des cuivres, le résonateur est constitué par la colonne d'air contenue dans le corps de l'instrument. Les longueurs d'ondes des plus hautes notes atteintes par les cuivres aigus sont décimétriques, ce qui est nettement supérieur au diamètre typique d'un tube d'instrument (quelques dizaines de millimètres pour les cuivres à grosse perce). A l'exception du pavillon, la propagation peut être considérée comme unidimensionnelle en ondes planes. Le tube de l'instrument forme un guide d'onde, dans lequel une onde stationnaire se forme. Un exemple de perce d'un trombone est présenté en fig. 1.6.

La perce de l'instrument, c'est à dire sa géométrie interne, a une influence prépondérante sur les propriétés acoustiques du résonateur, et donc sur le signal de pression à l'intérieur de l'instrument :

- Les modes de résonance acoustique de la colonne d'air sont liés à cette perce. Ils déterminent la forme de l'onde stationnaire qui s'y établit. Il est possible de calculer les modes de résonance d'un tuyau de section variable [Chaigne and Kergomard, 2008]. Les fréquences de résonance de ces modes peuvent aussi être déterminés par la mesure de l'impédance d'entrée de l'instrument [Macaluso and Dalmont, 2011], ou de sa fonction de réflexion.
- La forme de la colonne d'air permet également d'estimer la propension de l'instrument à "cuivrer", en calculant le paramètre appelé "cuivrabilité" ou "brassiness". Le "cuivrage" désigne un enrichissement de l'instrument qui intervient sur certains cuivres quand le musicien joue suffisamment fort. Il est dû à une propagation non linéaire de l'onde de pression dans la colonne d'air, menant éventuellement à un régime d'ondes de choc [Hirschberg et al., 1996, Myers et al., 2012].

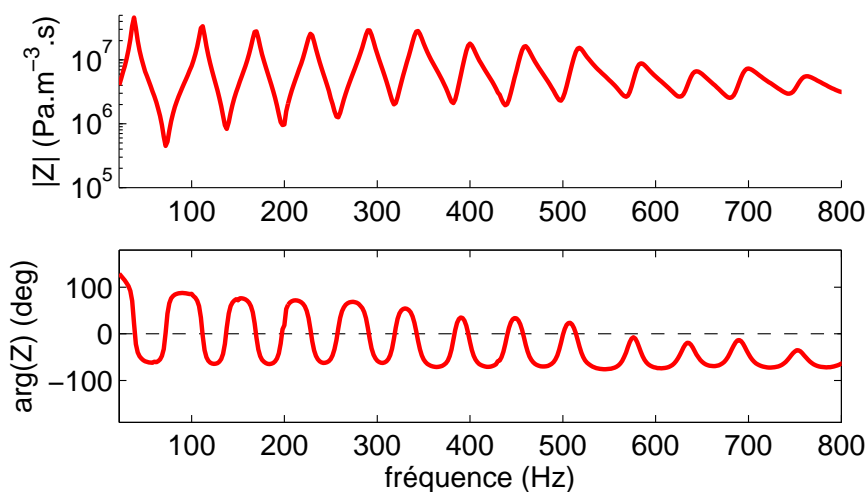


FIGURE 1.5 – Impédance d'entrée typique d'un trombone. La figure 1.6 illustre la perce du trombone mesurée

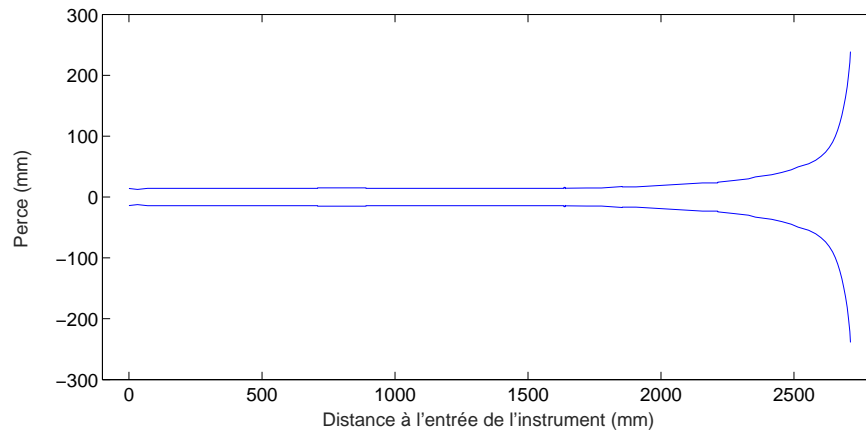


FIGURE 1.6 – Perce du trombone dont l'impédance est représentée en fig. 1.5.

Les vibrations de la paroi du tube, et notamment du pavillon, contribuent, de façon mineure, aux caractéristiques acoustiques du résonateur [Gautier et al., 2013].

1.4 L'excitateur : les lèvres

L'énergie rentrant dans l'instrument est amenée par l'air expiré par le musicien, via l'écoulement d'air passant entre ses lèvres. Le débit de cet écoulement dépend à la fois de la section du canal et de la différence de pression de part et d'autre des lèvres, c'est à dire la différence entre la pression dans la bouche et la pression dans l'embouchure.

La section du canal entre les lèvres dépend de la différence de pression entre bouche et entrée de l'instrument $\delta p = p_b - p$. Historiquement, c'est Helmholtz qui, le premier, modélise le comportement des lèvres, ou de "l'anche lippale", comme une valve contrôlée en pression [von Helmholtz, 1877]. Ce modèle d'anches a ensuite été largement étudié par Henri Bouasse [Bouasse, 1986]. La résultante des forces de pression qui s'exercent sur les différentes surfaces internes et externes des lèvres contribue à augmenter ou diminuer la section de l'ouverture. Cette influence des forces de pression varie en fonction de la géométrie, des caractéristiques mécaniques et des degrés de liberté qui leur sont attribués.

Les anches en roseau des bois et les anches lippales présentent des similitudes de comportement, qui se retrouvent dans leur modélisation. Du fait de ces ressemblances, plusieurs recherches ont porté simultanément sur ces deux types d'anches. Helmholtz [von Helmholtz, 1877] distingue deux types d'anche. L'anche "en dedans" (*inward-striking* dans la littérature anglophone, parfois notée $(-,+)$) tend à se fermer quand la pression dans la bouche augmente par rapport à celle à l'entrée du résonateur. L'anche "en dehors" (*outward-striking* ou $(+,-)$) a le comportement inverse, et s'ouvre quand la différence de pression entre bouche et entrée de l'instrument augmente [Bouasse, 1986]. Dans les deux cas, l'anche est représentée par un oscillateur à un degré de liberté. A ces deux modèles, Fletcher [Fletcher, 1993] ajoute un troisième type de valve à un degré de liberté, qu'il note $(+,+)$ qui tend à s'ouvrir quand l'une ou l'autre des pressions dans la bouche ou à l'entrée du résonateur augmente. Ce dernier type d'anche est parfois qualifiée de "porte coulissante", ou *sliding door* dans la littérature anglophone. Ces modèles de valve lippale, en particulier le modèle "en-dehors", permettent de reproduire un certain nombre de situations de jeu des cuivres, et ont été utilisées dans de nombreuses publications [Adachi and Sato, 1995, Cullen et al., 2000, Campbell, 2004, Silva et al., 2007, Petiot and Gilbert, 2013].

Cependant, certaines limites théoriques les empêchent de reproduire la totalité des comportements des instruments : en particulier, pour remplir la condition de régénération [Elliott and Bowsher, 1982, Campbell, 2004] au seuil d'oscillation, un modèle avec une anche en-dehors ne pourra osciller qu'au-dessus de la fréquence de résonance du mode acoustique auquel il est couplé ; respectivement, un modèle avec une anche en-dedans ne peut jouer au seuil qu'à une fréquence inférieure à cette résonance. Or, un cuivre joué par un musicien ou par une bouche artificielle est capable d'émettre des sons à une fréquence supérieure ou inférieure à cette fréquence de résonance [Yoshikawa, 1995, Chen and Weinreich, 1996, Newton et al., 2008]. Le "buzz", oscillation des lèvres hors de toute embouchure d'instrument, ne peut pas non plus être reproduit par un modèle de lèvres à un degré de liberté. Pour reproduire ces comportements, des modèles plus complexes de lèvres ont été utilisés, comportant deux degrés de liberté [Adachi and Sato, 1996, Richards, 2003, Newton, 2009] éventuellement avec deux masses [Lopez et al., 2006]. Des réponses mécaniques de lèvres naturelles (Fig. 1.7a) et artificielles (Fig. 1.7b) ont été effectuées, en mesurant le déplacement des lèvres concernées sous l'effet d'une pression oscillante [Cullen et al., 2000, Newton et al., 2008]. Ces mesures mettent en évidence deux résonances, nécessitant deux degrés de liberté pour être modélisés. De plus, ils reproduisent des phénomènes inaccessibles aux modèles à une masse. Cependant, il est très difficile de déterminer une valeur justifiable pour autant de paramètres, tandis que des modèles plus simples mais ne reproduisant que certaines situations de jeu sont moins complexes à régler.

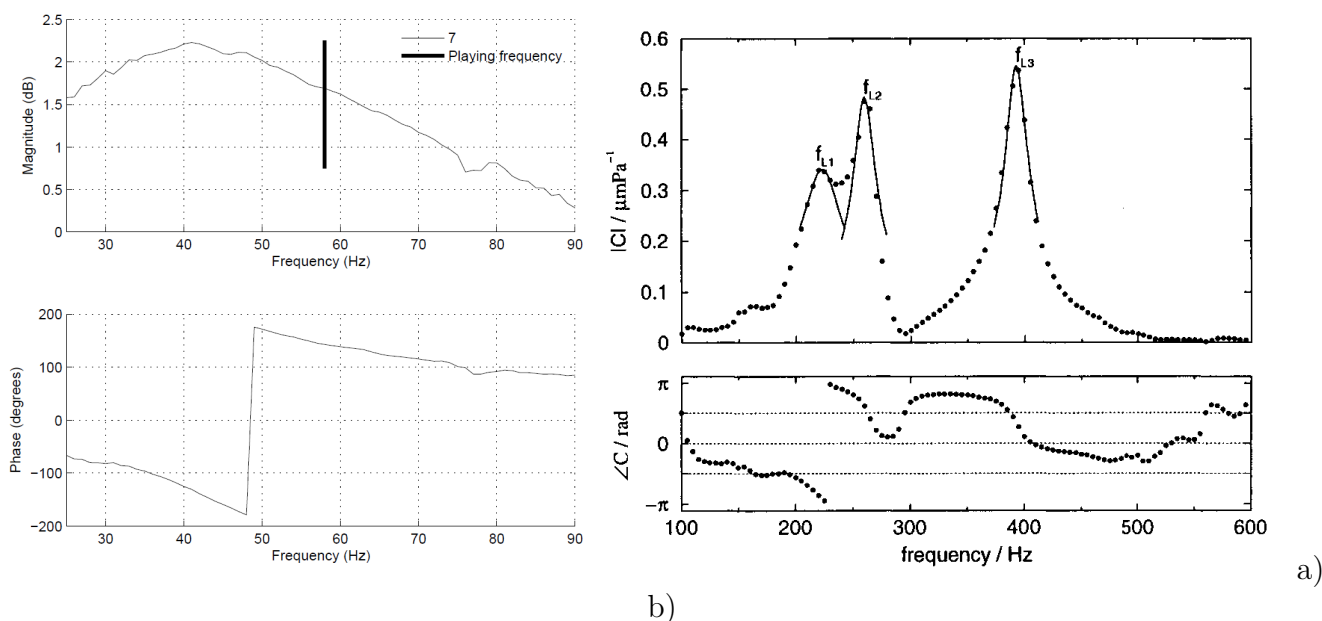


FIGURE 1.7 – Mesures du déplacement de lèvres soumises à une pression oscillante. (a) lèvres humaines, Extrait de [Newton, 2009, p.112]. (b) lèvres artificielles, extrait de [Cullen et al., 2000].

Le débit du jet d'air passant entre les lèvres dépend à la fois de la différence de pression entre la bouche et l'instrument, et de la section du canal entre les lèvres ; cette section dépend elle-même du comportement de la valve qui est également gouverné par cette différence de pression. La jonction entre les lèvres et l'embouchure est considérée comme étanche, donc le débit moyen traversant les lèvres est égal au débit moyen traversant l'instrument.

Une relation liant débit, pression et ouverture a été construite par Backus et Hundley [Backus and Hundley, 1971] pour les cuivres, mais avec une prise en compte critiquable du caractère turbulent de l'écoulement dans l'embouchure. Wilson&Beavers proposent une expression pour la clarinette [Wilson and Beavers, 1974]. Elliott et Bowsher [Elliott and Bowsher, 1982] aboutissent à la même équation, cette fois appliquée aux cuivres. Le jet est considéré comme laminaire dans le canal entre les lèvres, et turbulent dans l'embouchure, sans récupération de pression. Elle est depuis largement utilisée, autant dans les études portant sur les instruments à anche [Dalmont et al., 1995, Bergeot et al., 2013, Silva et al., 2008] que celles sur les cuivres [Fletcher, 1993, Adachi and Sato, 1995, Lopez et al., 2006, Bromage et al., 2010].

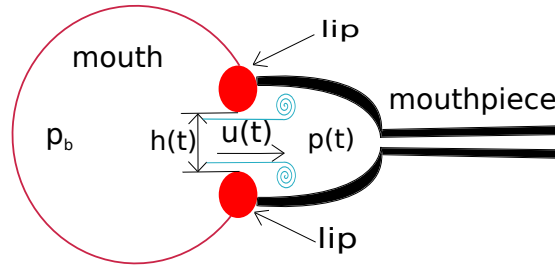


FIGURE 1.8 – Schéma de la bouche du musicien et de l'embouchure de l'instrument. La bouche (à gauche) est une cavité soumise à une pression p_b . Les lèvres (ellipses rouges) assurent la jonction étanche entre bouche et embouchure. La hauteur entre les lèvres est notée $h(t)$ (m), le débit du jet d'air entre les lèvres $u(t)$ ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) et la pression dans l'embouchure est $p(t)$ (Pa). L'écoulement est considéré comme laminaire entre les lèvres (ellipses rouges) et devient turbulent à son entrée dans la cuvette de l'embouchure.

Chapitre 2

Modèle retenu

Le modèle retenu pour les travaux de recherche décrits dans cette thèse est composé d'un résonateur modélisé par son impédance d'entrée, couplé à un exciteur modélisé par une valve à un degré de liberté "en-dehors". Le couplage non linéaire entre la valve et le résonateur est celui issu de [Eliott and Bowsler, 1982]. L'ensemble forme un système qui peut générer des oscillations auto-entretenues sous les bonnes conditions.

2.1 Résonateur

Dans l'intégralité de cette thèse, la propagation acoustique dans la colonne d'air constituant l'instrument est considérée linéaire : cette approximation se justifie car les niveaux sonores étudiés sont modérés : dans la plupart des cas, la pression d'alimentation est proche du seuil d'oscillation (valeur minimale de pression dans la bouche à partir de laquelle l'auto-oscillation émerge de la solution d'équilibre). La composante non linéaire de la propagation dans l'instrument est donc négligeable [Myers et al., 2012]. Sous cette hypothèse de propagation linéaire en ondes planes, le résonateur est entièrement caractérisé par son impédance d'entrée Z qui est définie dans le domaine fréquentiel comme le rapport de la pression $P(\omega)$ à l'entrée de l'instrument divisée par le débit $U(\omega)$ à l'entrée de l'instrument :

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)}. \quad (2.1)$$

Cette grandeur complexe donne des informations sur les modes de résonance acoustique : les fréquences de résonance acoustique du résonateur sont définies ici par les maxima du module de Z [Eveno, 2012].

Les modèles de résonateurs utilisés ici sont issus de mesures de cette impédance d'entrée, grâce au capteur décrit dans [Macaluso and Dalmont, 2011]. On a ainsi mesuré, entre autres, les impédances d'entrée d'un trombone ténor, et celle d'un saxhorn baryton. Ces impédances mesurées sont projetées sur la base des modes du résonateur [Chaigne and Kergomard, 2008, p.178] : ceci permet ensuite de décomposer la pression en une somme de contributions modales. Une impédance peut donc s'écrire sous la forme d'une somme de modes complexes :

$$Z(\omega) = Z_c \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \left[\frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right], \quad (2.2)$$

où les C_n et s_n sont les résidus et les pôles de chaque mode respectivement, et N_m le nombre de modes complexes utilisés pour approximer l'impédance, ce qui revient au nombre de modes acous-

tiques de l'instrument pris en compte. $Z_c = \frac{\rho \cdot c}{\pi \cdot r^2}$ est l'impédance caractéristique de l'instrument : ρ est la densité de l'air, c la célérité du son dans l'air, et r le rayon d'entrée de l'instrument. L'approximation de la mesure par une somme de modes présentée dans l'eq. (2.2) est optimisée par un algorithme de moindres carrés.

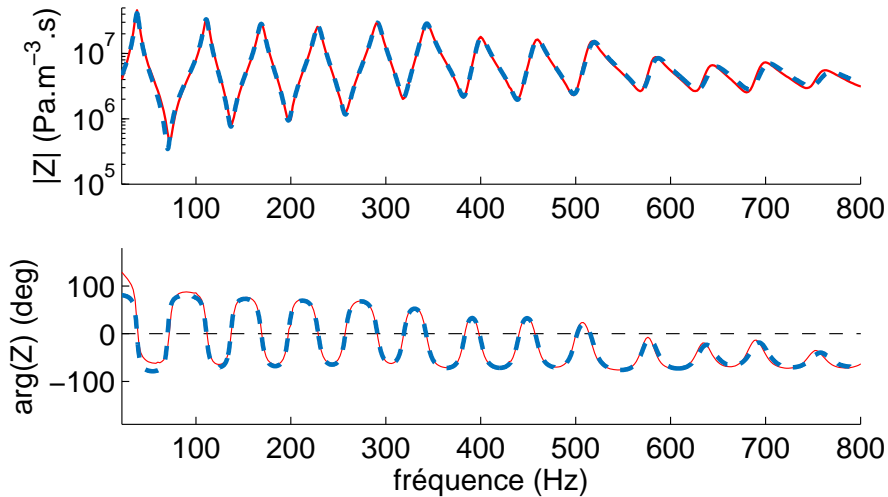


FIGURE 2.1 – Module (haut) et phase (bas) d'une impédance de trombone ténor. L'impédance mesurée est tracée en ligne pleine rouge, l'approximation par une somme de modes complexes Eq. (2.2) en ligne pointillée bleue.

La figure 2.1 illustre l'approximation satisfaisante réalisée par une somme de 18 modes complexes. Le capteur d'impédance étant d'une précision très limitée à basse fréquence, l'approximation de la somme de modes lisse cette mesure. La décomposition modale du résonateur permet de décomposer également la pression dans l'instrument $p(t)$ selon ses composantes modales p_n . La relation entre la pression et ses composantes modales complexes est [Silva et al., 2014] :

$$p(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n(t)]. \quad (2.3)$$

Dans le domaine temporel, l'équation (2.2) se traduit alors par N_m équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dp_n}{dt} = Z_c \cdot C_n \cdot u(t) + s_n \cdot p_n \quad \forall n \in [1 : N_m]. \quad (2.4)$$

2.2 Excitateur

La jonction entre le musicien et son instrument, entre la bouche et l'embouchure, est schématisée en figure 1.8. Le choix du modèle de valve s'est fait parmi les possibilités mentionnées en section 1.4. La modélisation retenue est celle d'une valve à un degré de liberté "en dehors". Si ce modèle à un degré de liberté ne reproduit pas l'intégralité des comportements observés expérimentalement, il permet néanmoins de reproduire la majorité des situations de jeu [Adachi and Sato, 1995, Cullen et al., 2000, Silva et al., 2007, Petiot and Gilbert, 2013]. Ce modèle impose une relation entre la hauteur entre les lèvres et la différence de pression de part et d'autre des lèvres qui s'écrit :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} + \omega_l^2 (h - h_0) = \frac{1}{\mu} (p_b - p(t)), \quad (2.5)$$

où $\omega_l = 2\pi f_l$ (rad \cdot s $^{-1}$) est la pulsation de résonance des lèvres (et f_l , en Hz est la fréquence de résonance ; Q_l le facteur de qualité des lèvres (l'inverse de leur amortissement mécanique) ; h_0 est la valeur au repos de $h(t)$; μ est la masse surfacique équivalent des lèvres (kg \cdot m $^{-2}$). Ces variables et paramètres sont reportées sur le schéma en figure 1.8.

Ce modèle de valve s'applique aux oscillations des lèvres de petite amplitude. Cependant, lorsque l'amplitude d'oscillation augmente, les lèvres peuvent entrer en contact [Martin, 1942, Bromage et al., 2010]. Dans ce cas, des forces de contact solide apparaissent. L'effet de ce contact peut être modélisé par une force de rappel élastique et une force dissipative apparaissant quand la distance des lèvres devient négative [Silva, 2009, p.118]. Ici, on se limitera à une force élastique $F(h)$, qui apparaît uniquement lorsque la distance entre les lèvres h devient négative. Le modèle s'écrit alors :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} + \omega_l^2(h - h_0) = \frac{1}{\mu}(p_b - p(t)) + F(h). \quad (2.6)$$

La force s'écrit $F(h) = K_F \cdot \omega_l^2 \cdot h \cdot \theta(-h)$ où $\theta(-h)$ est la distribution de Heaviside appliquée à $(-h)$, qui vaut 1 quand $h < 0$ et 0 sinon. K_F est un coefficient multiplicateur s'appliquant à la raideur des lèvres : $F(h)$ est une force de rappel élastique dont la raideur s'écrit $K_F \cdot \mu \cdot \omega_l^2$ conformément à [Silva, 2009, p.118].

Le débit d'air entre les lèvres $u(t)$, ou son pendant fréquentiel $U(\omega)$, couple l'anche lippale décrite par l'équation (2.6) et le résonateur défini par eq. (2.1). Ce débit peut être calculé en posant le théorème de Bernoulli. L'écoulement est considéré quasi-stationnaire et le fluide non visqueux. L'écoulement est turbulent dans la bouche : l'énergie cinétique du jet est dissipée sans récupération de pression [Hirschberg et al., 1990]. Sous l'hypothèse d'un fluide incompressible, la conservation de la masse indique que la vitesse de l'air dans la bouche est négligeable devant celle dans le canal formé par les lèvres. On obtient l'expression suivante pour le débit :

$$u(t) = W \cdot h \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{|p_b - p|} \cdot \text{sign}(p_b - p) \cdot \theta(h), \quad (2.7)$$

où ρ est la densité de l'air et W la largeur, supposée fixe, du canal de lèvres. Le débit est le produit de la vitesse dans le canal des lèvres, et de $W \cdot h(t)$ la section en m^2 de ce canal. $\theta(h)$ est la distribution de Heaviside, qui annule le débit quand les lèvres sont fermées.

Le modèle complet est donc composé d'une anche lippale décrite par l'eq. (2.6) et de la colonne d'air contenue dans la perce de l'instrument décrite par les eq. (2.3) et (2.4), couplés par le jet d'air entre les lèvres décrit par l'eq. (2.7).

2.3 Modèle complet

Les outils d'analyse de stabilité linéaire, de simulation numérique et de continuation numérique, présentés ci-après, sont formulés pour un problème sous forme canonique $X' = F(X)$. Les équations (2.3), (2.4), (2.6) et (2.7) sont regroupées dans un même système :

$$\begin{cases}
\frac{dp_n}{dt} = Z_c.C_n.u(t) + s_n.p_n \quad \forall n \in [1 : N_m] & (a) \\
p(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n(t)] & (b) \\
\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} - \omega_l^2(h - h_0) + \frac{1}{\mu}(p_b - p) + K_F.\omega_l^2.h.\theta(-h) & (c) \\
u(t) = W.h.\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{|p_b - p|} \cdot \text{sign}(p_b - p) \cdot \theta(h) & (d)
\end{cases} \quad (2.8)$$

L'équation (2.8)a) est écrite dans le domaine complexe : afin de permettre le traitement du problème par des solveurs réels, les parties réelle et imaginaire sont séparées [Silva, 2009, p.115] en $R_n = \Re(p_n)$ et $I_n = \Im(p_n)$. Dans les deux équations résultantes, $u(t)$ est remplacée par son expression donnée par l'équation (2.8)d) :

$$\begin{cases}
\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR_n}{dt} = \Re \left(s_n.p_n + Z_c.C_n.W.h.\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{|p_b - p|} \cdot \text{sign}(p_b - p) \cdot \theta(h) \right) & (a) \\ \frac{dI_n}{dt} = \Im \left(s_n.p_n + Z_c.C_n.W.h.\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{|p_b - p|} \cdot \text{sign}(p_b - p) \cdot \theta(h) \right) & (b) \end{array} \right\} \forall n \in [1 : N_m] \\
\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} - \omega_l^2(h - h_0) + \frac{1}{\mu}(p_b - p) + K_F.\omega_l^2.h.\theta(-h) & (c) \\
p(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n(t)] & (d)
\end{cases} \quad (2.9)$$

Le vecteur d'état X à $2N_m + 2$ composantes est défini par :

$$X = [R_1, I_1 \cdots R_{N_m}, I_{N_m}, h, \frac{dh}{dt}]. \quad (2.10)$$

Le système dynamique s'écrit, dans le formalisme d'état recherché, similaire à celui de [Silva et al., 2014] :

$$\frac{dX}{dt} = F(X) = \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Re \left(s_n.p_n + Z_c.C_n.W.h.\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{|p_b - p|} \cdot \text{sign}(p_b - p) \cdot \theta(h) \right) \\ \Im \left(s_n.p_n + Z_c.C_n.W.h.\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{|p_b - p|} \cdot \text{sign}(p_b - p) \cdot \theta(h) \right) \end{array} \right\} 1 \leq n \leq N_m \\ \frac{dh}{dt} \\ -\frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} - \omega_l^2(h - h_0) + \frac{1}{\mu}(p_b - p) + K_F.\omega_l^2.h.\theta(-h), \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

où $p(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n(t)]$.

Chapitre 3

Choix des paramètres

Le choix des valeurs des paramètres géométriques et mécaniques pour paramétrer le modèle d'anche lippale est une question complexe. Les lèvres des musiciens sont constituées de plusieurs couches de tissu biologique, et sont soumises à des efforts mécaniques qui influencent fortement leur comportement mécanique. Certaines études expérimentales ont mesuré l'admittance mécanique des lèvres (rapport entre vitesse et force appliquée) dans des conditions parfois très proches du jeu musical [Newton et al., 2008]. Cependant, malgré les précautions prises, ces mesures ne prennent pas en compte la réaction musculaire aux forces pendant le jeu. En particulier, la pression statique dans la bouche du musicien en train de jouer est très élevée et impose une force sur les lèvres : il est probable que les muscles contrôlant les lèvres réagissent spontanément à cette force, ce qui modifie les caractéristiques mécaniques des lèvres. L'approche par problèmes inverses, qui consisterait à paramétrer le modèle pour obtenir les résultats les plus proches possibles d'un musicien réel, ne donne pas des résultats pleinement satisfaisants pour cette situation [Hélie et al., 1999, d'Andréa Novel et al., 2010].

Une revue bibliographique a été menée sur un grand nombre d'études où des paramètres modaux étaient proposés pour modéliser les lèvres. Les études retenues sont principalement celles se basant sur des mesures, soit sur bouche artificielle, soit sur lèvres humaines. Les valeurs relevées sont collectées dans le tableau I. La dernière colonne indique la manière dont les valeurs sont obtenues. Dans le cas de publications proposant un modèle à deux degrés de liberté, seul le degré de liberté correspondant à une valve "en-dehors" est pris en compte. A l'exception de [Rodet and Vergez, 1996] et [Adachi and Sato, 1996] qui sont des paramètres de trompette, les paramètres sont estimés pour le jeu du trombone ou du saxhorn. [Elliott and Bowsher, 1982] propose des valeurs de paramètres mécaniques mesurés sur la joue du musicien ; [Cullen et al., 2000] propose les résultats de mesure effectuées sur des lèvres artificielles à trois degrés de contrainte différents, correspondant à trois notes grave, médium et aigüe. [Richards, 2003] et [Lopez et al., 2006] publient des mesures sur bouche artificielle également. [Gazengel et al., 2007] a pour objectif de déterminer le comportement d'une lèvre humaine appliquée contre une anche de saxophone, donc dans une position différente de celle d'un cuivriste. A nouveau les résultats sont donnés pour trois degrés de contrainte musculaire. Les valeurs de [Saneyoshi et al., 1987] viennent d'observations stroboscopiques de lèvres, mais aussi d'hypothèses jugées raisonnables par les auteurs. Pour illustration, [Rodet and Vergez, 1996, Adachi and Sato, 1996] proposent des valeurs pour la trompette, ajustés par essais et erreurs pour obtenir une simulation satisfaisante.

Référence	h_0 (mm)	W (mm)	f_l (Hz)	μ^{-1} (m^2kg^{-1})	Q_l	type de lèvres
[Eliott and Bowsher, 1982]	N/A	N/A	200	0.2	0.5	Joue et cou
[Cullen et al., 2000]						
Grave	0.63	18	189	0.07	10.5	Lèvres artificielles
Médium	0.53	12	203.5	0.11	6	
Aigu	0.44	11	222	0.09	9	
[Lopez et al., 2006]	0.2	30	162	0.03	5	artificielles
[Gazengel et al., 2007]						
Relâché	N/A	N/A	115.7	N/A	0.79	lèvre humaine saxophone
Moyen	N/A	N/A	479.9	N/A	0.46	
Tendu	N/A	N/A	1073	N/A	0.46	
[Newton et al., 2008]	N/A	N/A	32	N/A	1.2–1.8	humaines
[Richards, 2003]	0.5	7	162	0.19	3.7	artificielles
[Saneyoshi et al., 1987]	1.1 – 6.5	8 – 12	70-510	N/A	5	humaines
[Rodet and Vergez, 1996]	N/A	N/A	428.4	0.67	2.88	simulation
[Adachi and Sato, 1996]	1	7	60–700	variable	0.5–3	simulation

TABLEAU I – Revue des différentes valeurs proposées dans la littérature pour les paramètres de modèles de lèvres. Certains articles ne donnent pas les valeurs de certains paramètres (N/A). Pour les résultats concernant des modèles à 2 DDL, seul le mode "en-dehors" est pris en compte ici.

Les valeurs des paramètres géométriques W et h_0 restent dans les mêmes ordres de grandeur, de même que les masses surfaciques équivalentes μ . La valeur du facteur de qualité est plus variable, avec des valeurs nettement plus hautes pour des lèvres artificielles que pour des lèvres humaines. L'idée initiale était d'utiliser des valeurs aussi proches que possible de celles mesurées sur lèvres humaines. Cependant, les premiers résultats obtenus indiquent qu'un modèle paramétré avec ces valeurs (et notamment un facteur de qualité de $Q_l = 2$ ou 3) requiert une pression dans la bouche de l'ordre de 10^5 Pa, largement supérieure aux valeurs habituellement mesurées [Bouhuys, 1968, Fréour and Scavone, 2013] et inatteignables par le système respiratoire humain. Les valeurs de Q_l retenues sont plus proches de celles mesurées sur lèvres artificielles, et permettent d'obtenir une oscillation du modèle pour des valeurs de p_b crédibles.

Sauf mention contraire, tout au long du document, le modèle de lèvres est donc paramétré selon les valeurs du tableau II :

h_0 (m)	W (m)	$1/\mu$ (m^2kg^{-1})	Q_l
$5 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-3}$	0.11	7

TABLEAU II – Paramètres du modèle de lèvre utilisés dans cette thèse, sauf mention contraire.

La valeur de la fréquence de résonance des lèvres f_l varie largement selon la tension des lèvres du musicien : c'est l'un des paramètres de contrôle du modèle, et celui qui sera utilisé a priori.

Résumé de la partie I :

Le modèle de cuivre utilisé dans cette thèse associe classiquement une valve à un degré de liberté "en-dehors" à un résonateur linéaire. Il s'agit d'un système dynamique non linéaire bouclé, dont les solutions peuvent être stationnaires ou auto-oscillantes. Le résonateur est modélisé par l'impédance d'entrée de l'instrument étudié, approximée par une somme de modes complexes modélisant les résonances acoustiques de la colonne d'air contenue dans la perce de l'instrument. Cette représentation permet dans la suite de modifier les caractéristiques fréquentielles du résonateur. La valve lippale et le résonateur linéaire sont couplés non linéairement par le jet d'air s'écoulant entre les lèvres du musicien. Ce modèle est ré-écrit sous la forme d'un problème de Cauchy $\dot{X} = F(X)$ où X est le vecteur des inconnues dans le domaine temporel. Les paramètres géométriques et mécaniques des lèvres sont issus de la littérature, avec une attention particulière pour les résultats de mesures sur lèvres humaines ou artificielles.

Deuxième partie

Outils mis en œuvre

Introduction

Cette partie de la thèse présente les outils et méthodes mis en œuvre pour répondre aux questions posées sur le fonctionnement et le contrôle des instruments de musique. Tout d'abord, les trois approches utilisées pour analyser et comprendre le comportement du modèle présenté au chapitre 2 sont explicitées :

- La simulation temporelle par résolution numérique du système d'équations est présentée au chapitre 4. Nous utilisons pour cela MOREESC, un code développé par Fabrice Silva [Silva, 2009].
- L'Analyse de Stabilité Linéaire (ASL) dont le principe est détaillé au chapitre 5 et dont nous avons réalisé une implémentation complète adaptée au modèle de cuivres retenu.
- La représentation de solutions périodiques par équilibrage harmonique, leur continuation par Méthode Asymptotique Numérique et le calcul de leur stabilité sont présentés au chapitre 6. Inspiré du travail de Sami Karkar [Karkar, 2012], des développements originaux ont cependant dû être réalisés : il s'agit du premier modèle de cuivre étudié selon cette approche, et la méthode de Hill employée pour calculer la stabilité des solutions n'avait pas été utilisée dans [Karkar, 2012].
- La mesure de paramètres de jeu *in vivo* a nécessité la conception et le développement d'une trompette instrumentée, qui est également présentée au chapitre 7.

Chapitre 4

La simulation temporelle

4.1 Présentation de la méthode

Le modèle d'instrument de musique étudié peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre $\dot{X} = F(X,t)$, décrit par le système d'équations (2.11) (p. 28). Ce système comporte $(2.N_m + 2)$ équations et autant d'inconnues, où N_m est le nombre de modes utilisé pour modéliser l'impédance d'entrée de l'instrument. Les schémas numériques permettant de résoudre un problème de Cauchy de ce type ont été développés depuis les travaux originaux d'Euler en 1768 : depuis de nombreuses méthodes ont été développées [Shampine and Reichelt, 1997]. La résolution numérique est aujourd'hui l'un des outils les plus largement utilisés dans l'étude des systèmes non-linéaires. A partir d'un jeu de paramètres et d'un vecteur de conditions initiales, ces schémas de résolution fournissent une valeur de chaque variable d'état composant le vecteur X , à un pas de temps pouvant être fixé par l'utilisateur ou déterminé de façon adaptative par le schéma numérique choisi. Dans ce document, sauf mention contraire, le vecteur de conditions initiales est la solution d'équilibre du système pour le jeu de paramètres courants. à chaque pas de calcul, le solveur donne la valeur de h , \dot{h} et de chaque R_n et I_n , à partir desquelles on peut obtenir une valeur d'autres variables de sortie du modèle et notamment la pression dans l'embouchure $p(t)$.

4.2 Application aux instruments à vents : la bibliothèque MoReeSC

La résolution d'équations non linéaires par des schémas numériques est largement utilisée pour la simulation d'instruments de musique de toutes familles [McIntyre et al., 1983]. Des outils de simulation de modèles physiques ont été développés pour l'étude des instruments à cordes frottées [Inácio et al., 2008] ou basés sur le même principe [Inácio et al., 2006], des instruments de la famille des flûtes [Coltman, 1992], des vents à anche simple [Debut, 2004] ou des cuivres [Adachi and Sato, 1995].

Les simulations numériques réalisées dans cette thèse sont calculées avec MOREESC, une bibliothèque Python sous licence libre [MoReeSC, 2013]. Ce logiciel a été spécifiquement développé pour la simulation temporelle de modèles d'instruments à anche simple ou de la famille des cuivres dont le résonateur est représenté par une décomposition modale de l'impédance d'entrée. L'utilisateur peut faire varier les paramètres de l'excitateur et du résonateur pendant la durée de la simulation. A titre d'illustration, la figure 4.1 donne un exemple de formes d'onde des variables de sortie du modèle de cuivre simulées par MOREESC. Le lecteur désireux d'en savoir

plus sur cet outil de simulation pourra se rapporter à [Silva et al., 2014] et à la thèse de Fabrice Silva [Silva, 2009]. Toutes les résolutions numériques utilisent le solveur à pas de temps adaptatif LSODE [Radhakrishnan and Hindmarsh, 1993].

Cette bibliothèque propose aussi une simulation basique de la pression rayonnée par l'instrument, correspondant au son émis par l'instrument. Cette simulation repose sur la modélisation de l'impédance de rayonnement d'un cylindre sans pertes viscothermiques. Cette modélisation n'est pas adaptée au trombone qui présente une géométrie tout à fait différente. Pour les situations où la pression rayonnée est étudiée, la fonction de transfert entre la pression dans l'embouchure p et la pression rayonnée p_{ext} a été mesurée. La description de cette mesure figure en annexe A. Par la suite, le signal de pression dans l'embouchure simulé est filtré par cette fonction de transfert de type passe-haut, pour obtenir un signal p_{ext} simulé.

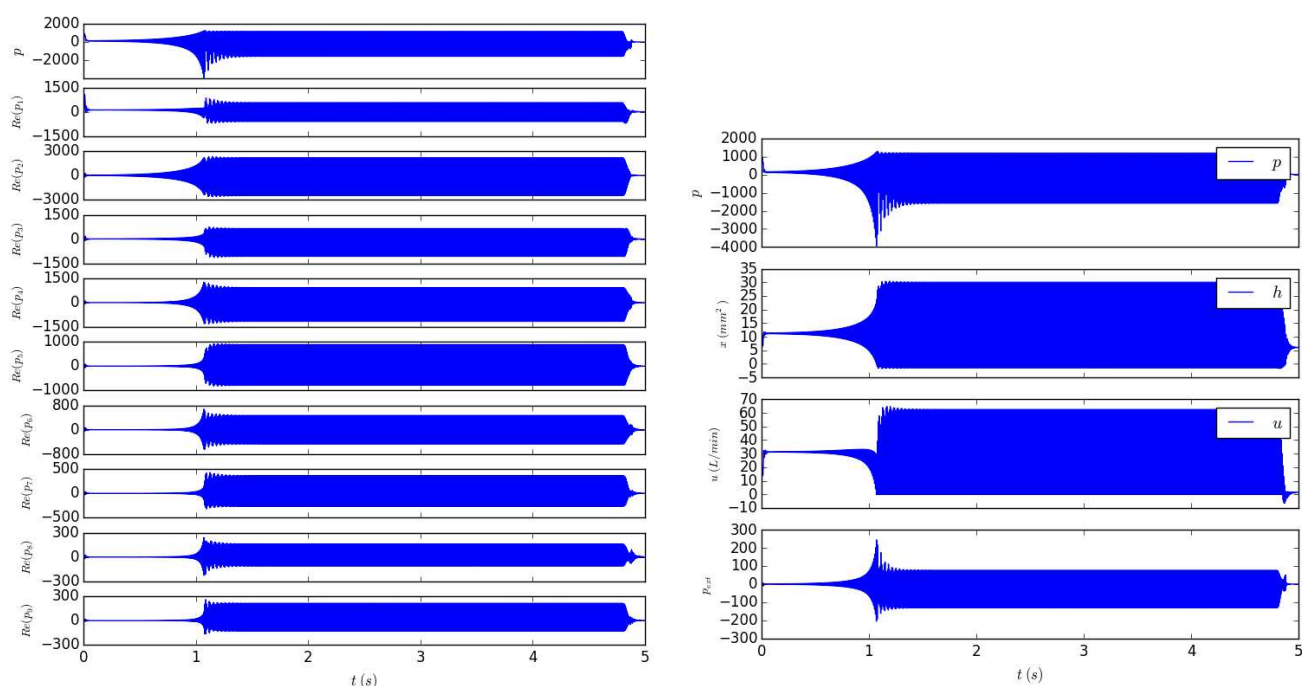


FIGURE 4.1 – Exemple de résultats d'une simulation. Le résultat consiste en un signal temporel simulé pour chacune des composantes modales de la pression (gauche), le signal de pression reconstitué, la hauteur du canal d'anche, le débit et la pression rayonnée. (droite). Les transitoires d'attaque et d'extinction des signaux sont visibles.

Chapitre 5

L'analyse de stabilité linéaire

5.1 Présentation

Il est possible d'obtenir des informations pertinentes sur un système dynamique en étudiant le comportement au voisinage de sa solution d'équilibre, ou solution stationnaire¹. Tout d'abord, la solution stationnaire est calculée pour un jeu de paramètres donnés. Puis le système est linéarisé au voisinage de cette solution. La stabilité linéaire de la solution d'équilibre peut alors être étudiée. Si l'équilibre est instable, cela implique l'existence d'une autre solution, qui peut être une oscillation périodique ou quasi-périodique, un régime chaotique, etc. Cette première approche d'analyse de stabilité linéaire est très classique dans l'étude des systèmes dynamiques [Bergé et al., 1995, Nayfeh and Balachandran, 1995, Seydel, 2009].

Dans le cadre de l'acoustique musicale, l'ASL a généralement pour objectif de détecter la valeur la plus faible de p_b provoquant l'instabilité de ce régime stationnaire. Dans l'hypothèse d'une bifurcation directe, cette valeur de pression notée p_{thresh} correspond au seuil à partir duquel le modèle admet potentiellement un régime d'oscillation auto-entretenu. Cette méthode a été utilisée pour les instruments de la famille des flûtes [Auvray et al., 2012, Terrien et al., 2014], les instruments à anche de type saxophone ou clarinette [Wilson and Beavers, 1974, Ricaud et al., 2009, Silva, 2009, Bergeot et al., 2013] ainsi que pour les cuivres [Elliott and Bowsher, 1982, Cullen et al., 2000, Silva et al., 2007, Velut et al., 2016c].

5.2 Recherche de la solution d'équilibre

La première étape consiste à calculer les valeurs à l'équilibre des variables du système, ce qui par définition revient à chercher la solution pour un système n'évoluant pas dans le temps. Par la suite, on appellera indifféremment cette solution *stationnaire*, *statique* ou à *l'équilibre*. Les valeurs des variables du système sont alors notées : $X_e, p_e, h_e...$

1. Pour un modèle d'instrument à vent, ce régime stationnaire correspond à la situation où le musicien souffle dans l'instrument sans provoquer d'oscillation.

Cette solution stationnaire correspond à la nullité de toute dérivée temporelle dans les équations du système (2.8) :

$$\begin{cases} p_n = -\frac{Z_c \cdot C_n}{s_n} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot W \cdot h_e \cdot \sqrt{p_b - p_e} \quad \forall n \in [1 : N_m] \\ h_e = h_0 + \frac{1}{\mu \omega_l^2} (p_b - p_e) \\ p_e = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n] \end{cases} \quad (5.1)$$

h_e étant nécessairement positif pour qu'il y ait un écoulement d'air dans l'instrument, il n'y a pas de force de contact entre les lèvres ($\theta(-h_e) = 0$). L'écoulement étant stationnaire de la bouche vers l'embouchure, $p_b > p_e$ ce qui permet de s'affranchir de la valeur absolue et de la fonction signe. Les détails des calculs permettant d'aboutir à la solution d'équilibre sont donnés dans l'annexe B. Ils donnent toutes les composantes du vecteur d'état à l'équilibre X_e .

5.3 Linéarisation du modèle

Le système (2.11) est ici linéarisé au voisinage de la solution d'équilibre X_e . La fonction linéarisée $\tilde{F}_{X_e}(X)$ s'écrit :

$$\tilde{F}_{X_e}(X) = F(X_e) + J_F(X_e) \cdot (X - X_e), \quad (5.2)$$

où $J_F(X) = [\frac{dF_i}{dX_j}]_{i,j}$ est la matrice jacobienne de la fonction F calculée en X_e . Le calcul de cette jacobienne est détaillé dans l'annexe C. Au voisinage de X_e , les solutions de ce système linéarisé sont sous la forme :

$$X(t) = X_e + \sum_{i=1}^{N_{eq}} U_i \cdot e^{\lambda_i t} = X_e + \sum_{i=1}^{N_{eq}} U_i \cdot e^{\Re(\lambda_i) t} \cdot e^{j \Im(\lambda_i) t}, \quad (5.3)$$

où les λ_i et U_i sont les valeurs propres et vecteurs propres respectifs de $J_F(X_e)$ et $N_{eq} = 2 \cdot N_m + 2$ est la dimension du vecteur X .

L'évolution temporelle de l'amplitude des signaux de la solution du système linéarisé dépend de l'exponentielle des parties réelles des valeurs propres de la jacobienne : ceci donne l'information recherchée sur la stabilité de la solution. Si aucune valeur propre n'a de partie réelle positive, une perturbation de la solution stationnaire décroît exponentiellement et tend rapidement vers zéro : le système revient à sa position d'équilibre, qui est donc stable. A l'opposé, s'il existe au moins une valeur propre λ_i à partie réelle positive, l'amplitude d'une perturbation croît exponentiellement selon cette solution linéarisée, et s'éloigne de l'équilibre ; ce qui est par définition un équilibre instable. Les valeurs propres de $J_F(X_e)$ sont soit réelles, soit complexes conjuguées : en pratique, la déstabilisation de la solution d'équilibre se caractérise par une paire de valeurs propres conjuguées dont la partie réelle devient positive.

Le calcul des valeurs propres de la jacobienne donne donc l'information de stabilité recherchée : une solution d'équilibre est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $J_F(X_e)$ ont une partie réelle négative. La pulsation des solutions du système linéarisé est donnée par $|\Im(\lambda_i)|$. Ceci donne une estimation de la pulsation de l'oscillation qui se développe dans le cas où la solution d'équilibre n'est pas stable.

5.4 Utilisation de la méthode

Dans le cadre de notre étude, l'ASL est utilisée pour détecter les seuils d'oscillation de l'instrument modélisé : tous les autres paramètres étant fixés, on cherche la valeur la plus faible de p_b qui résulte en une jacobienne ayant au moins une valeur propre à partie réelle positive (Fig. 5.1). Cette valeur est notée p_{thresh} et nommée indifféremment *seuil d'oscillation* ou *pression de seuil*. En pratique, ce seuil est détecté par une méthode de dichotomie. La fréquence d'oscillation du système correspondant à ce seuil d'oscillation est notée $f_{thresh} = ||Im(\lambda_i)/2\pi|$, où λ_i est la valeur propre dont la partie réelle devient positive pour $p_b > p_{thresh}$.

L'ASL est utilisée sur les instruments étudiés avec le jeu de paramètres indiqué dans le tableau II. Le calcul de p_{thresh} et f_{thresh} est lancé pour une plage de valeurs de f_l par incréments de 1 Hz, ce qui permet de suivre l'évolution de ces valeurs de seuil suivant le paramètre f_l qui varie largement selon la note jouée.

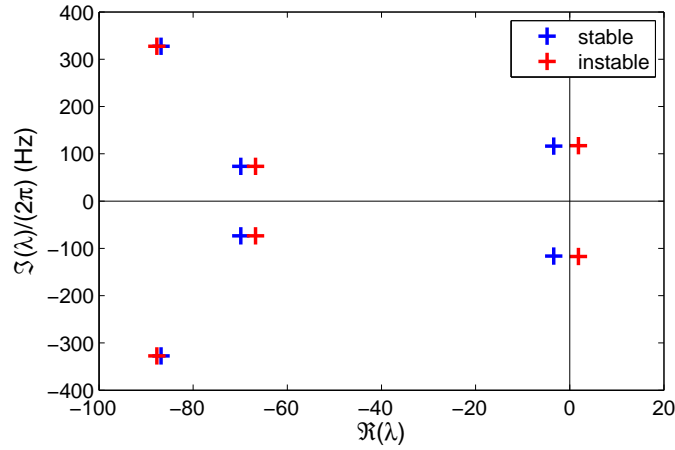


FIGURE 5.1 – Représentation de quelques valeurs propres de la jacobienne calculée sur la solution stationnaire, dans un cas où $p_b < p_{thresh}$ (bleu) et un cas $p_b > p_{thresh}$ (rouge). Lorsqu'une paire de valeurs propres traverse l'axe imaginaire, la solution d'équilibre devient instable.

5.5 Analyse de la Fonction de Transfert Boucle Ouverte

Une autre méthode d'analyse de stabilité linéaire peut être utilisée pour la détection d'une pression de seuil. Elle s'appuie sur l'étude de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) linéarisée \tilde{H}_{BO} du modèle d'instrument considéré. On note $Y_a = \frac{U(\omega)}{P(\omega)}$ l'admittance acoustique linéarisée de l'excitateur. Alors :

$$\tilde{H}_{BO} = Y_a(\omega).Z(\omega) \quad (5.4)$$

L'annexe D détaille les calculs de l'admittance linéarisée qui s'écrit :

$$Y_a = W.h_e \cdot \sqrt{\frac{2.\delta p_e}{\rho}} \left(-\frac{D(\omega)}{\mu.\omega_l^2.h_e} - \frac{1}{2.\delta p_e} \right), \quad (5.5)$$

où $\delta p_e = p_b - p_e$ est la valeur à l'équilibre de $\delta_p(t) = p_b - p(t)$.

Selon le critère de Barkhausen [Saneyoshi et al., 1987, Ferrand et al., 2010], chaque point tel que $Y_a(\omega).Z(\omega) = 1$ est un point de déstabilisation potentielle de la solution d'équilibre du système.

Rechercher les points de \tilde{H}_{BO} dont le module vaut 1 et dont la phase est nulle permet donc de détecter des seuils d'oscillation. Cette méthode permet de calculer si un jeu de paramètres donnés génère une — ou plusieurs — instabilités de la solution stationnaire. Cela permet de détecter p_{thresh} et f_{thresh} , qui sont respectivement la première valeur de p_b pour laquelle un point où $\tilde{H}_{BO} = 1$ existe, et l'abscisse de ce point. L'avantage principal de cette méthode est la possibilité de suivre l'évolution du diagramme de Bode de la FTBO selon le jeu de paramètres choisi : il est possible de visualiser les marges de gains et de phase sur une large plage de fréquences, et ainsi voir quelles situations s'approchent d'un point de déstabilisation.

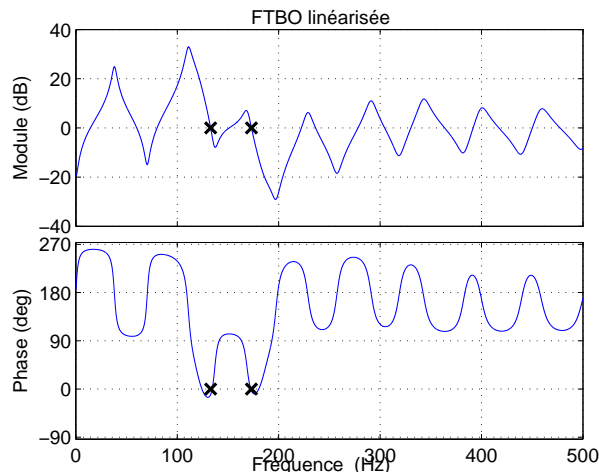


FIGURE 5.2 – Exemple d'un diagramme de Bode de la FTBO linéarisée du modèle de cuivre étudié. Les croix indiquent la position de deux points d'instabilité de la solution d'équilibre, ce qui indique deux oscillations potentielles, à deux fréquences distinctes.

5.6 Limitations de l'ASL

L'ASL est une méthode permettant d'avoir un aperçu du comportement du modèle, avec un temps de calcul de l'ordre de la minute pour une plage de f_l couvrant 500 Hz par pas de 1 Hz. Cependant, le domaine de validité de l'équation (5.3), est réduit au voisinage de la solution stationnaire. Dès que cette solution est instable ($p_b \geq p_{thresh}$), le système s'écarte de cet équilibre et le modèle linéarisé n'est plus valable. Dès lors, des éléments négligés par la linéarisation sont susceptibles d'agir sur toutes les caractéristiques de l'oscillation, notamment la fréquence d'oscillation qui peut être influencée par des non-linéarités et s'éloigner de f_{thresh} .

L'analyse de stabilité linéaire permet d'identifier les paramètres qui conduisent à l'apparition d'une solution autre que le régime stationnaire. Cependant cette méthode ne dit rien sur le type de la solution pour un jeu de paramètres donné : elle peut être un régime périodique, quasi-périodique, chaotique... L'ASL n'informe pas non plus sur la stabilité de la solution qui apparaît, sauf au voisinage de la perte de stabilité de la solution d'équilibre. Pour approfondir l'étude de cette solution, les résultats de l'ASL permettent alors d'initialiser la simulation temporelle avec des paramètres pertinents.

Chapitre 6

Continuation numérique avec Manlab

Introduction. Notion de continuation.

La simulation numérique et l'ASL, précédemment présentées aux chapitres 4 et 5, cherchent des solutions au modèle étudié pour un jeu de paramètres donné. La méthode Asymptotique Numérique (MAN) présentée dans ce chapitre est une méthode de continuation numérique, qui permet de suivre l'évolution d'une solution d'un système algébrique selon les valeurs du paramètre de continuation noté λ . On a ainsi accès à une branche de solutions plutôt qu'à un seul point de cette branche. Soit un système dynamique non linéaire sous forme canonique, dont on isole un paramètre λ :

$$\dot{X} = f(X, \lambda), \quad X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

dont on connaît une solution X_0 lorsque $\lambda = \lambda_0$. À moins de se trouver exactement sur une singularité, on déduit du théorème de la fonction implicite [Krauskopf et al., 2007] qu'il existe un continuum (une branche) de solutions dans un voisinage de (X_0, λ_0) , pour différentes valeurs de λ .

Les approches de la continuation de type prédicteur/correcteur sont les plus connues [Allgower and Georg, 2003]. En particulier, elles servent de base au logiciel AUTO, développé par E. Doedel depuis plus de 30 ans [E.J.Doedel, 1981], et aujourd'hui outil standard dans l'étude numérique des bifurcations [Doedel and Oldeman, 2009].

Cependant l'approche suivie pour réaliser la continuation des solutions périodiques du modèle de cuivre (présenté au chap. 2) repose sur l'utilisation du logiciel MANLAB¹, développé au LMA, qui utilise la Méthode Asymptotique Numérique (MAN, cf. chap. 6.2). La première version de cet outil a été créée par R. Arquier [Arquier et al., 2005]. Une seconde version, optimisant les temps de calcul, a été proposée par S. Karkar durant sa thèse [Karkar, 2012]. Il s'agit d'un programme pour Matlab, dotée d'une interface graphique permettant de construire de manière interactive le diagramme de bifurcation : calcul d'une ou plusieurs nouvelles branches, effacement, sauvegarde, visualisation de portions de branches, fonction de saut et méthode de branchement par perturbation.

Dans cette thèse, MANLAB est utilisé pour la continuation de solutions périodiques. Dans ce cas, le logiciel automatise la formulation d'un système dynamique dont les non-linéarités sont au pire quadratiques en un système algébrique, grâce à la méthode d'équilibrage harmonique (HBM) [Cochelin and Vergez, 2009]. La Méthode Asymptotique Numérique est alors utilisée pour la continuation des solutions de ce système algébrique. La mise en forme automatisée du problème d'équilibrage harmonique permet d'utiliser cette méthode avec un nombre d'harmoniques élevé, à

1. <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>

la condition que ce problème puisse être écrit sous la forme de l'équation (6.2) :

$$m(\dot{X}) = c_0 + \lambda \cdot c_1 + l_0(X) + \lambda \cdot l_1(X) + q(X, X), \quad (6.2)$$

où c_0 et c_1 sont des vecteurs constants de taille n , m , l_0 et l_1 des fonctions linéaires à valeurs dans \mathbb{R}^n et q une fonction bilinéaire à valeurs dans \mathbb{R}^n .

La méthode d'équilibrage harmonique et le principe de la méthode asymptotique numérique sont décrits dans les paragraphes 6.1 et 6.2 respectivement. Puis la reformulation sous la forme de l'équation (6.2) du modèle de cuivre utilisé dans cette thèse est détaillée au paragraphe 6.4 ainsi que les développements nécessaires au calcul de la stabilité des solutions. Cette reformulation et ce calcul de stabilité n'ont jamais été faits pour les cuivres.

6.1 Principe de l'équilibrage harmonique

L'équilibrage harmonique est une méthode de Galerkin basée sur l'approximation de la solution par des séries de Fourier tronquées. Cette méthode d'analyse des systèmes dynamiques, dont le principe date de la première moitié du XX^{ème} siècle [Krylov and Bogoliuboff, 1947], a été largement développée à partir des années 60 pour l'étude de systèmes forcés ou auto-oscillants [Urabe, 1965, Stokes, 1972, Nakhla, 1976]. En acoustique musicale, elle est utilisée pour chercher les solutions périodiques de modèles physiques d'instruments de musique, notamment des modèles de clarinette [Gilbert et al., 1989, Farner et al., 2006, Cochelin and Vergez, 2009]. Elle consiste à chercher une solution périodique d'un système dynamique de la forme de l'équation (6.1) sous la forme de séries de Fourier d'ordre H :

$$X(t) = X_0 + \sum_{k=1}^H X_{c,k} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^H X_{s,k} \sin(k\omega t), \quad \text{où } X, X_0, X_{c,k}, X_{s,k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.3)$$

En remplaçant X par l'expression (6.3) dans l'équation (6.1), on obtient un système à $(2H + 1) \cdot n$ équations pour $(2H + 1) \cdot n + 2$ variables :

$$Y = [X_0, \{X_{c,k}, X_{s,k} \forall k \in [1, H]\}, \lambda, \omega]. \quad (6.4)$$

La recherche de solutions périodiques à ce système conduit à une infinité de solutions périodiques identiques à la phase près. Une équation supplémentaire, posant une condition arbitraire sur la phase, est donc nécessaire pour obtenir un système à $(2H + 1) \cdot n + 1$ équations et $(2H + 1) \cdot n + 2$ variables. Les solutions recherchées sont donc des branches, continuées selon le paramètre λ . Du fait de la finitude du nombre d'harmoniques H , les solutions obtenues sont approchées. Cependant, cette méthode étant automatisée dans MANLAB, les valeurs de H utilisées sont suffisamment élevées pour obtenir des solutions raisonnablement précises. Par exemple pour le modèle de cuivre, le nombre d'harmonique utilisé a atteint $H = 150$ dans les situations les plus exigeantes rencontrées.

6.2 Méthode Asymptotique Numérique

La présentation de la Méthode asymptotique numérique ci-après est largement inspirée du mémoire d'habilitation à diriger des recherches de Christophe Vergez [Vergez, 2010].

La méthode de continuation MAN que nous utilisons repose sur la recherche des branches de solutions sous la forme de séries entières en fonction d'un paramètre de chemin a :

$$Y = \sum_{i=0}^N a^i Y_i \quad Y, Y_i \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Le vecteur d'inconnues Y inclut le paramètre λ (comme c'est souvent le cas dans les techniques de continuation). Dans le cas de la continuation de solutions périodiques, Y est défini par l'équation (6.4). Le système à résoudre doit être mis sous forme algébrique :

$$\mathbf{R}(Y) = 0, \quad (6.6)$$

où Y a donc une composante de plus que le nombre d'équations de \mathbf{R} . La résolution de ce système est détaillée dans l'annexe E. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur les détails de ce calcul se reportera à [Karkar, 2012]. Tout l'intérêt est de pousser le calcul des séries à des ordres N élevés, ce qui fournit des représentations riches en information sur la branche. Ceci n'est possible que si le vecteur d'équation \mathbf{R} est écrit dans un formalisme simple et adapté. En particulier, lorsque \mathbf{R} est quadratique par rapport à Y , le calcul des séries est simple et efficace. C'est ce formalisme quadratique qui a été adapté dans MANLAB :

$$\mathbf{R}(Y) = \mathbf{L}\mathbf{0} + \mathbf{L}(Y) + \mathbf{Q}(Y,Y) = 0, \quad (6.7)$$

avec $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur résidu du système d'équations, $Y \in \mathbb{R}^{m+1}$ le vecteur inconnu, $\mathbf{L}\mathbf{0}$ un vecteur constant, \mathbf{L} un opérateur linéaire en Y , et \mathbf{Q} un opérateur bilinéaire en Y . Le formalisme de l'équation (6.7) n'est pas aussi restrictif qu'il semblerait au premier abord : grâce à des changements de variables astucieux ou à quelques aménagements supplémentaires [Cochelin and Vergez, 2009, Karkar et al., 2012] de nombreux problèmes de mécanique et de physique s'écrivent dans ce formalisme. Dans MANLAB, tout système dynamique mis sous la forme de l'Eq. (6.2) est reformulé automatiquement de manière à ce que la recherche de solutions périodiques par équilibrage harmonique s'écrive sous la forme de l'équation (6.7). On a alors $m = (2H+1)n+1$. L'intérêt d'utiliser la MAN, par rapport à d'autres méthodes de continuation [Krauskopf et al., 2007] est d'abord de profiter de sa grande robustesse [Cochelin et al., 2007]. De plus, la MAN apporte l'avantage par rapport aux méthodes plus classiques de type prédicteur-correcteur, de donner les solutions sous forme de développement en séries et d'avoir une sélection de longueur de pas automatique (cf. annexe E) . En effet à chaque développement en série est associé un domaine de validité (délimité par un a_{max}), et la continuation se fait de proche en proche, comme représenté sur la figure 6.1.

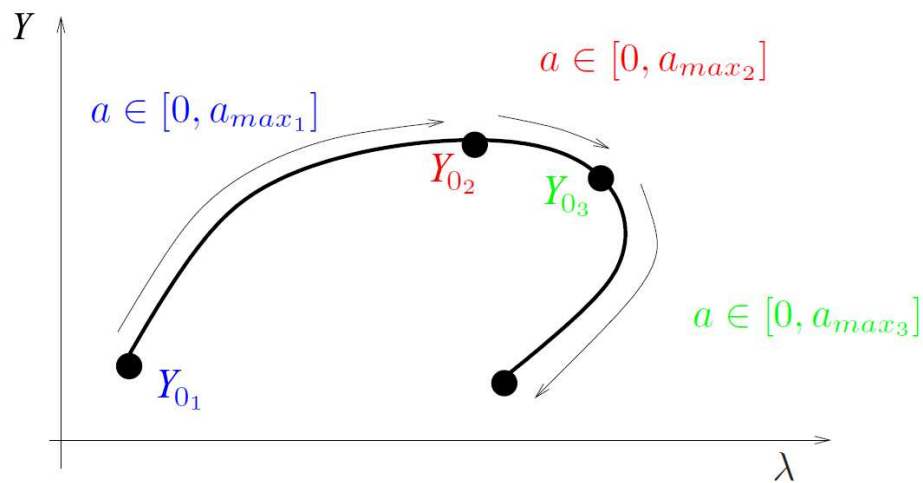


FIGURE 6.1 – Une branche est constituée de plusieurs tronçons qui correspondent chacun à un développement en série entière.

Cette particularité facilite grandement le passage des lieux à très forte courbure et permet donc de mettre en pratique la méthode de perturbation [Allgower and Georg, 2003], comme moyen de branchements aux points de bifurcations [Baguet and Cochelin, 2003, Cochelin, 2005].

6.3 Stabilité des branches calculées

La stabilité des solutions périodiques calculées à l'aide de MANLAB est estimée par une implémentation de la méthode de Hill, codée par O. Lazarus et A. Thomas et décrite dans [Lazarus and Thomas, 2010], qui n'est pas détaillée ici. Cette méthode s'appuie sur la théorie de la stabilité de Floquet [Bergé et al., 1995] et propose une résolution directement dans le domaine de Fourier. L'utilisation de la méthode de Hill telle que programmée par [Lazarus and Thomas, 2010] requiert de fournir la jacobienne $J_F(X)$ du sous-système composé des équations purement différentielles du système étudié (dont la taille est notée N_d). Cette jacobienne doit être exprimée sous la forme décrite dans l'équation (6.8) :

$$J_F(X) = J_0 + J_L(X) + J_Q(X, X), \quad (6.8)$$

où $J_0 \in \mathbb{R}^{N_d} \times \mathbb{R}^{N_d}$ est un opérateur constant, J_L un opérateur linéaire et J_Q un opérateur quadratique, tous trois à valeurs dans $\mathbb{R}^{N_d} \times \mathbb{R}^{N_d}$. En pratique, la formulation de l'équation (6.8) implique un effort conséquent, qui se traduit en particulier par l'ajout de quelques variables auxiliaires et équations au système sur lequel on utilise la méthode de continuation. Ce dernier aspect est détaillé au paragraphe 6.4.3.

6.4 Mise en forme du modèle physique de cuivre

L'utilisation de MANLAB pour la continuation des solutions périodiques d'un système est conditionnée à la mise de ce système sous la forme de l'Eq. (6.2). L'objectif est la continuation des solutions périodiques du modèle physique de cuivre utilisé selon la pression dans la bouche p_b . Ce système, décrit par le système (2.8) page 28, peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{h} = -\frac{\omega_l}{Q_l} \cdot \ddot{h} - \omega_l^2 [h(t) - h_0] + K_F \cdot \omega_l^2 \cdot h \cdot \theta(-h) + \frac{1}{\mu} [p_b - p(t)], \\ p(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re(p_n) \\ \dot{R}_n = \Re(Z_c \cdot C_n \cdot u(t) + s_n \cdot p_n(t)) \quad \forall n \in [1 : N_m] \\ \dot{I}_n = \Im(Z_c \cdot C_n \cdot u(t) + s_n \cdot p_n(t)) \quad \forall n \in [1 : N_m] \\ u(t) = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W \cdot \sqrt{|p_b - p(t)|} \cdot \text{sign}(p_b - p(t)) \cdot \theta(h) \\ v(t) = \sqrt{\frac{2|p_b - p(t)|}{\rho}} \cdot \text{sign}(p_b - p(t)) \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Le paramètre de continuation choisi est la pression dans la bouche p_b , soit γ après adimensionnement. L'objectif est donc de pouvoir écrire le système (6.9) sous la forme suivante :

$$m(\dot{X}) = c_0 + \gamma \cdot c_1 + l_0(X) + \gamma \cdot l_1(X) + q(X, X), \quad (6.10)$$

Quelques régularisations et l'ajout de quelques variables auxiliaires permettent de mettre le modèle sous la forme souhaitée (6.10). Ce travail est présenté aux paragraphes 6.4.1 et 6.4.2. Le modèle utilisé ici est très similaire au modèle d'instrument à anche simple utilisé dans [Karkar, 2012], une partie des calculs est donc inspirée de ce travail. En revanche, la méthode de Hill n'ayant pas été utilisée par [Karkar, 2012], les calculs sont originaux.

6.4.1 Adimensionnement

La première étape est l'adimensionnement du système à l'aide des variables suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{h(t)}{h_0} \\ P_M = \mu \cdot \omega_l^2 \cdot h_0 \\ \gamma = \frac{p_b}{P_M} \\ \tilde{p} = \frac{p(t)}{P_M} \\ \tilde{R}_n = \frac{R_n}{P_M} \\ \tilde{I}_n = \frac{I_n}{P_M} \\ \tilde{u} = u(t) \cdot \frac{Z_c}{P_M} \\ \tilde{v} = \frac{u(t)}{\sqrt{2 \cdot P_M / \rho}} \\ \zeta = Z_c h_0 W \sqrt{\frac{2}{\rho P_M}} \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Les distributions de Heaviside utilisées peuvent être écrites $\theta(x) = \frac{(|x|+x)}{2}$ et $\theta(-x) = \frac{(|x|-x)}{2}$. D'autre part, la variable $y = \frac{\dot{x}}{\omega_l}$ est introduite. Tous calculs faits, on aboutit au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{R}}_n = \Re(C_n \cdot \tilde{u} + s_n \cdot \tilde{p}_n) \quad \forall n \in [1 : N_m] \\ \dot{\tilde{I}}_n = \Im(C_n \cdot \tilde{u} + s_n \cdot \tilde{p}_n) \quad \forall n \in [1 : N_m] \\ \tilde{p} = 2 \sum_1^{N_m} \Re(\tilde{p}_n) \\ \tilde{u} = \zeta \cdot \frac{(|x|+x)}{2} \cdot \tilde{v} \\ \tilde{v} = \text{sign}(\gamma - \tilde{p}) \cdot \sqrt{|\gamma - \tilde{p}|} \\ \frac{1}{\omega_l} \dot{x} = y \\ \frac{1}{\omega_l} \dot{y} = 1 - x - \frac{1}{Q_l} \cdot y + \gamma - \tilde{p} + \frac{K_E}{2} \cdot \frac{(|x|-x)}{2} \end{array} \right. \quad (6.12)$$

6.4.2 Régularisation, mise sous forme quadratique

La non-linéarité présente dans l'expression de \tilde{v} doit être mise sous forme quadratique. Cependant, $|\tilde{v}|.\tilde{v} = |\gamma - \tilde{p}|.\text{sign}(\gamma - \tilde{p})$ ce qui donne une expression implicite de v :

$$\tilde{v}.|\tilde{v}| = \gamma - \tilde{p}. \quad (6.13)$$

Le système comporte alors deux valeurs absolues, $|x|$ et $|v|$ qu'il est nécessaire de régulariser à l'aide de fonctions hyperboliques. Cette régularisation engendre alors les variables auxiliaires suivantes $z \approx |v|$ et $s \approx |x|$ définies par :

$$\begin{cases} z^2 = \tilde{v}^2 + \epsilon_v \\ s^2 = x^2 + \epsilon_x \end{cases} \quad (6.14)$$

avec $0 < \epsilon_v \ll 1$ et $0 < \epsilon_x \ll 1$ les constantes de régularisation hyperbolique. Les résultats présentés dans cette thèse utilisent $\epsilon_v = 10^{-3}$ $\epsilon_x = 10^{-10}$. A noter que z et s ne sont définis qu'au signe près par (6.14). En pratique, il faut vérifier que les branches dont on fait la continuation sont bien celles sur lesquelles $z \geq 0$ et $s \geq 0$.

Le système peut alors être mis sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{R}}_n = \Re(C_n).\tilde{u} + \Re(s_n).\tilde{R}_k - \Im(s_n).\tilde{I}_k \quad \forall (n,k) \in [1, N_m]^2 \\ \dot{\tilde{I}}_n = \Im(C_n).\tilde{u} + \Im(s_n).\tilde{R}_k + \Re(s_n).\tilde{I}_k \quad \forall (n,k) \in [1, N_m]^2 \\ \frac{1}{\omega_l} \dot{x} = y \\ \frac{1}{\omega_l} \dot{y} = 1 - x(1 + \frac{K_F}{2}) - \frac{1}{Q_l} y + \gamma - \tilde{p} + \frac{K_F}{2}.s \\ 0 = \frac{\zeta(s+x)\tilde{v}}{2} - \tilde{u} \\ 0 = \tilde{p} - \gamma + \tilde{v}.z \\ 0 = \tilde{v}^2 + \epsilon - z^2 \\ 0 = x^2 + \epsilon - s^2 \\ 0 = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \tilde{R}_n - \tilde{p} \end{array} \right. \quad (6.15)$$

6.4.3 Stabilité

Le calcul de la stabilité des branches de solutions nécessite de calculer la matrice jacobienne du sous-système constitué des équations différentielles du modèle, décrit par l'Eq. (6.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{2k-1} = \dot{\tilde{R}}_n = \Re(C_n).\tilde{u} + \Re(s_n).\tilde{R}_k - \Im(s_n).\tilde{I}_k \quad \forall (n,k) \in [1, N_m]^2 \\ F_{2k} = \dot{\tilde{I}}_n = \Im(C_n).\tilde{u} + \Im(s_n).\tilde{R}_k + \Re(s_n).\tilde{I}_k \quad \forall (n,k) \in [1, N_m]^2 \\ F_{2N_m+1} = \frac{1}{\omega_l} \dot{x} = y \\ F_{2N_m+2} = \frac{1}{\omega_l} \dot{y} = 1 - x(1 + \frac{K_F}{2}) - \frac{1}{Q_l} y + \gamma - \tilde{p} + \frac{K_F}{2}.s \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Les détails de calcul des composantes de cette jacobienne sont donnés dans l'annexe F. L'expression de cette matrice sous la forme de l'équation (6.8) nécessite ici l'introduction de trois variables auxiliaires m , l et q définies telles que :

$$\begin{cases} m = \tilde{v}^2 + z^2 \\ l.m = \zeta.z.(x + s) \\ q.s = x \end{cases} \quad (6.17)$$

Le système complet qui est continué à l'aide de MANLAB est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{R}}_n = \Re(C_n).\tilde{u} + \Re(s_n).\tilde{R}_k - \Im(s_n).\tilde{I}_k \quad \forall (n,k) \in [1, N_m]^2 \\ \dot{\tilde{I}}_n = \Im(C_n).\tilde{u} + \Im(s_n).\tilde{R}_k + \Re(s_n).\tilde{I}_k \quad \forall (n,k) \in [1, N_m]^2 \\ \frac{1}{\omega_l} \dot{x} = y \\ \frac{1}{\omega_l} \dot{y} = 1 - x(1 + \frac{K_F}{2}) - \frac{1}{Q_l} y + \gamma - \tilde{p} + \frac{K_F}{2}.s \\ 0 = \frac{\zeta(s+x)\tilde{v}}{2} - \tilde{u} \\ 0 = \tilde{p} - \gamma + \tilde{v}.z \\ 0 = \tilde{v}^2 + \epsilon - z^2 \\ 0 = x^2 + \epsilon - s^2 \\ 0 = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \tilde{R}_n - \tilde{p} \\ 0 = \tilde{v}^2 + z^2 - m \\ 0 = \zeta.z.(x + s) - l.m \\ 0 = q.s - x \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Ce système compte $n = 2.N_m + 10$ équations, où N_m est le nombre de modes complexes utilisés pour approximer l'impédance d'entrée du résonateur. Le problème algébrique $R(U) = 0$ continué par la MAN compte alors $(2.H + 1) * n + 1$ équations.

6.5 Utilisation de Manlab

6.5.1 Initialisation

Le seuil de déstabilisation calculé par l'analyse de stabilité linéaire présentée au chapitre 5 donne le point de bifurcation entre la solution stationnaire et la solution périodique recherchée. La solution à l'équilibre X_e calculée pour $p_b = p_{thresh}$ est donc à la fois un point de la branche stationnaire et un point de la branche périodique dont l'amplitude d'oscillation est nulle. Ceci est mis à profit pour initialiser MANLAB. La solution stationnaire est calculée pour $\gamma = \gamma_{thresh}$ à l'aide de la méthode présentée dans l'annexe B². On obtient alors un vecteur X_e , de dimension n , solution d'équilibre

2. Le calcul de la solution d'équilibre présenté dans l'annexe est bien sûr adaptée au système courant (6.18).

du système (6.18). La valeur de la pulsation à la bifurcation est donnée par la fréquence au seuil f_{thresh} calculée par l'ASL. Le vecteur initial Y_{init} de la MAN, tel que défini dans l'équation (6.4), est alors :

$$Y_{init} = [X_e, \underbrace{0 \cdots 0}_{2 \cdot n \cdot H \text{ zeros}}, \gamma_{thresh}, 2 \cdot \pi \cdot f_{thresh}], \quad (6.19)$$

où H est le nombre d'harmoniques utilisé pour l'équilibrage harmonique. A l'exception de la composante stationnaire, de la valeur du paramètre γ et de la pulsation d'oscillation, toutes les composantes du vecteur d'initialisation sont nulles. Dans la pratique, ces composantes sont nulles sur la branche stationnaire et infinitésimales au démarrage de la branche périodique recherchée : ces composantes harmoniques sont donc initialisées à une valeur très faible (bruit numérique). L'algorithme correcteur intégré à MANLAB (cf. annexe E.5) normalement utilisé pour compenser les approximations inhérentes à la méthode numérique, est alors utilisé pour trouver un point de la solution recherchée à partir de ce vecteur.

Chapitre 7

Développement d'instruments instrumentés

La pratique d'un instrument de musique requiert un geste expert, dont la maîtrise demande plusieurs années d'apprentissage et de pratique assidue. Un trompettiste utilise simultanément plusieurs paramètres pour contrôler son instrument. Concernant ce contrôle de l'instrument, le discours des musiciens et les ouvrages de pédagogie musicale font ressortir plusieurs questions. En particulier :

- Les musiciens décrivent leur technique de jeu selon ce qu'ils ressentent et ce qu'ils pensent faire. Un exemple est la force d'appui entre lèvres et embouchure. La plupart des méthodes d'apprentissage des cuivres¹ incitent à limiter au strict minimum cette force. Les musiciens la décrivent généralement comme très faible voire inexistante, et ne varient que très peu quelle que soit la note. La comparaison avec des données mesurées permet d'estimer la précision de ce ressenti [Petiot, 2003].
- Selon le niveau de pratique (de l'amateur débutant au professionnel jouant quotidiennement plusieurs heures), la formation musicale, le style musical joué, les discours des musiciens peuvent être très différents. Mesurer objectivement les données permettrait à terme de déterminer s'il existe effectivement plusieurs techniques de jeu, si une technique peut être reliée à un type de son, etc. Cela permettrait également d'analyser comment la progression d'un musicien apprenant la trompette se traduit en termes de contrôle, avec de potentielles applications pour la pédagogie musicale.

Ces questionnements nous incitent à développer un outil pour mesurer ces paramètres de contrôle durant le jeu musical de différents musiciens. Par ailleurs, assez peu d'études expérimentales *in vivo* sur des cuivres ont été publiées, que ce soit au trombone [Bouhuys, 1968, Fréour et al., 2010, Fréour and Scavone, 2013] ou à la trompette [Barbenel, 1988, Petiot, 2003, Mayer and Bertsch, 2005, Bianco et al., 2012]. Le but est de développer un outil expérimental qui permette d'observer les différents régimes d'oscillation d'une trompette, en mesurant et en cartographiant des variables et des paramètres de jeu pertinents pour l'analyse de ces régimes.

Une trompette instrumentée est donc développée, qui permet de mesurer un certain nombre de paramètres durant le jeu tout en perturbant un minimum le musicien exécutant les exercices demandés. La trompette choisie est une Yamaha YTR 1335, instrument d'étude de moyenne gamme, très répandue chez les amateurs et un format d'embouchure très classique en Europe (1-1/2 C). Les détails sur l'étalonnage des différents capteurs sont donnés dans l'annexe G.

1. Notamment la *Grande méthode complète pour cornet à pistons et saxhorn* de J.B. Arban, 1864, ed. Carl Fisher, New York.

7.1 Choix des paramètres mesurés

Les paramètres de contrôle d'une trompette sont particulièrement nombreux : on peut citer notamment la respiration contrôlant la pression dans la bouche et influençant le débit d'air traversant l'instrument. Le musicien développe aussi un contrôle fin du masque musculaire, modifiant le comportement des lèvres, leur réponse mécanique, ainsi qu'un contrôle du conduit vocal — plis vocaux, géométrie de la bouche et de la trachée — et de ses résonances acoustiques qui sont parfois accordées pour certaines techniques musicales [Chen et al., 2012, Fréour and Scavone, 2013, Boutin et al., 2015, Fréour et al., 2015]. La géométrie de l'instrument peut également être modifiée par l'appui sur les pistons, ce qui ajoute une longueur de tube cylindrique à la colonne d'air. Mesurer la totalité des paramètres ci-dessus n'est pas techniquement réalisable : un choix est effectué parmi les valeurs à mesurer. Ce choix prend en compte le discours des musiciens afin de mesurer objectivement les paramètres qu'ils décrivent. Il prend aussi en compte les capacités techniques et l'objectif de mesure *in vivo* dans des conditions aussi proches que possible d'une pratique instrumentale normale, perturbant au minimum le musicien : cela exclut par exemple la mesure de la réponse mécanique des lèvres [Newton et al., 2008].

Selon ces critères, les paramètres suivants sont donc mesurés :

- La position de chacun des pistons ;
- Le débit moyen dans l'instrument ;
- La pression quasi-statique dans la bouche due à l'expiration du musicien ;
- La force d'appui des lèvres sur l'embouchure ;

En plus de ces paramètres, des variables de fonctionnement de l'instrument, qui décrivent la réaction de l'instrument au contrôle imposé, sont aussi mesurées :

- La pression acoustique à l'entrée de l'instrument, image de l'oscillation de la colonne d'air qu'il contient ;
- La conductivité électrique entre les lèvres, mesurées par Electrolabio-
graphe [Fréour and Scavone, 2013] : cette mesure donne la phase du mouvement des lèvres, à comparer avec les phases respectives des pressions dans la bouche et dans l'embouchure. C'est aussi une variable pauvre en harmoniques, pour laquelle le calcul de la fréquence instantanée est aisé ;
- La composante acoustique de la pression dans la bouche ;
- Le son rayonné par l'instrument, correspondant au son entendu par l'auditeur.

Ces grandeurs mesurées directement permettent de déduire d'autres paramètres indirectement. En particulier, la mesure simultanée des pressions acoustiques dans la bouche et l'embouchure donne des informations sur l'acoustique du conduit vocal, le rapport entre ces deux pressions étant égal au rapport entre les impédances d'entrée respectives de l'instrument et du conduit vocal [Chen et al., 2012, Fréour and Scavone, 2013].

7.2 Conception et étalonnage des capteurs

Le développement de la trompette instrumentée a été initié pendant deux stages, dont les rapports apportent plus de détails sur les choix et développements technologiques, qui seront ici brièvement décrits [Velut, 2012, David-Sivelle, 2013]. Les détails sur l'étalonnage et le réglage des divers capteurs sont consignés dans l'annexe G.

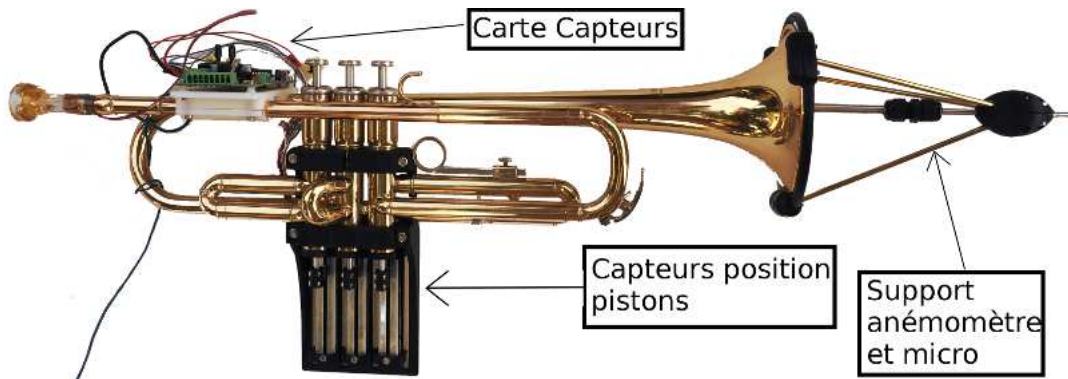


FIGURE 7.1 – Trompette instrumentée, équipée de ses capteurs : les capteurs de déplacement des pistons (sous les pistons) et le support du débitmètre et du micro champ externe (attaché au pavillon) sont visibles. La carte de conditionnement des capteurs de déplacement des pistons et du capteur de force de l'embouchure est également visible.

Pression dans la bouche et pression dans l'embouchure

La pression dans la bouche est mesurée par l'intermédiaire d'un tuyau capillaire passé entre les lèvres du musicien, choisi suffisamment fin pour minimiser la gêne. Le capteur en lui-même est un microphone miniature (Endevco 8510B-5) qui permet à la fois de mesurer la pression statique et les composantes acoustiques de la pression dans la bouche. Le raccordement entre le capillaire et le microphone est effectué à l'aide d'un embout en silicone. Le montage est représenté en figure 7.2.



FIGURE 7.2 – Montage des microphones miniatures Endevco. Le capteur est la partie métallique sur la gauche, le capillaire rouge entre soit dans un trou pratiqué dans la cuvette de l'embouchure, soit à la commissure des lèvres du trompettiste. Le tuyau en silicone transparent assure la jonction étanche.

L'assemblage du capillaire et de l'adaptateur forme un résonateur de Helmholtz ayant une fréquence de résonance d'environ 1 kHz, qui génère un filtrage fréquentiel sur les mesures effectuées. Afin de compenser cet effet, la fonction de transfert de cet adaptateur est mesurée : un filtrage par la fonction de transfert inverse permet alors d'annuler les effets de ce capillaire. Un dispositif identique est inséré sur le côté de la cuvette de l'embouchure, afin de mesurer la pression à l'entrée de l'instrument.

Position des pistons

L'appui sur un piston modifie la géométrie de la colonne d'air qui forme le résonateur de l'instrument. L'objectif est de connaître la position de chaque piston, qui se déplacent verticalement sur une longueur de 16 mm. Divers capteurs ont été utilisés pour cela, notamment dans le développement de trompettes augmentées [Thibodeau and Wanderley, 2013]. La solution retenue consiste à fixer un potentiomètre linéaire au-dessous de chaque piston. Afin de ne pas perturber le geste du musicien, des potentiomètres avec un frottement très faible ont été choisis; ils ont

cependant l'inconvénient d'être relativement encombrants. Un bâti noir fixé au bloc pistons, visible sur la figure 7.1, permet de garantir l'alignement entre potentiomètres et pistons.

D'autres solutions techniques ont préalablement été envisagées avant de retenir les potentiomètres linéaires :

- Des capteurs optiques où un phototransistor reçoit la lumière émise par une LED infrarouge et reflétée sur la partie mobile du piston. La lumière reflétée étant d'autant plus intense que cette partie mobile est proche du capteur. La course de ce type de capteur, limitée à quelques millimètres, est insuffisante pour les pistons.
- Les capteurs à effet Hall ont été envisagés, cependant aucun modèle ayant une dimension adaptée n'a été trouvé.
- La mesure de la force d'appui du doigt de l'instrumentiste par des capteurs de force résistifs (FSR) a été testée. Cependant, l'angle d'appui d'un musicien sur son piston n'est pas répétable et le diamètre des doigts des différents musiciens est variable : ces deux éléments ont des conséquences importantes sur le signal du capteur FSR, qui compromettent la répétabilité.

Force d'appui sur l'embouchure

La force d'appui sur l'embouchure est un des éléments naturellement cités par les trompettistes, notamment lorsqu'il s'agit d'évaluer la qualité de la technique : Les débutants tendent instinctivement à appuyer fortement leur embouchure contre leurs lèvres pour parer à un manque de contrôle musculaire. L'apprentissage de la trompette passe par la minimisation de la force entre lèvres et embouchure, qui est susceptible de provoquer des blessures.

L'embouchure est ici transformée en capteur de force longitudinale. La queue de l'embouchure est un tube très faiblement conique : le collage de 4 jauges de contrainte en pont de Wheatstone, illustré par la figure 7.3, permet de mesurer la déformation de l'embouchure contrainte entre les lèvres et l'instrument [J.L Le Goer, 1992]. Deux jauges sont collées parallèlement à l'embouchure, mesurant effectivement la déformation, quand deux autres sont perpendiculaires : elles complètent le pont de Wheatstone en se comportant comme des résistances simples. Le placement des quatre jauges au même endroit assure qu'elles sont à la même température, évitant la déviation thermique. Le choix d'une embouchure en matière synthétique, au détriment des modèles traditionnels en laiton, s'est imposé pour éviter de provoquer des court-circuits entre les conducteurs électriques des jauges collées dessus. Le choix s'est porté sur une embouchure plastique de marque Kelly 1 – 1/2C en polycarbonate, matériau isolant électrique. Le module d'Young de cette matière plastique étant environ 50 fois inférieur à celui du laiton, la déformation — donc le signal mesuré — est plus importante, à contrainte égale, que sur une embouchure métallique.

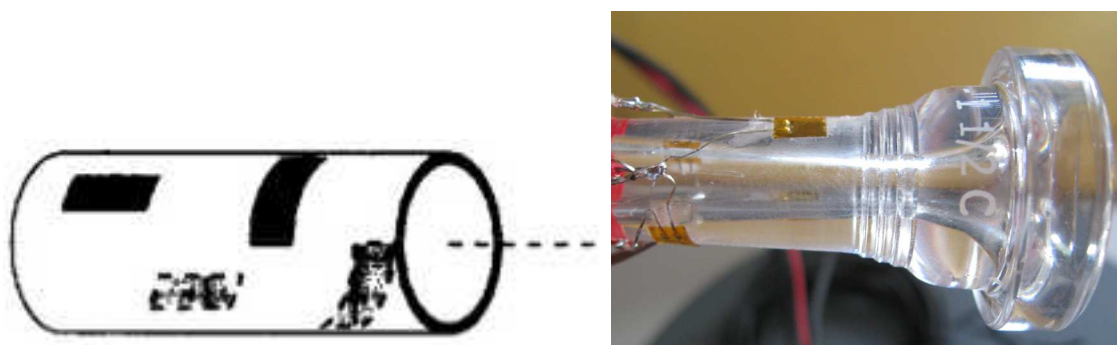


FIGURE 7.3 – Disposition des quatre jauges de contrainte sur la partie cylindrique de la queue de l'embouchure, et détail de 2 jauges collées sur l'embouchure plastique pendant le montage.

La dynamique du capteur de force ainsi constitué est de l'ordre de $500 \mu\text{V}$ pour la plage de force considérée ; le signal est fortement bruité et contient un offset. Le conditionneur de ce capteur consiste donc en un pré-amplificateur bas bruit de gain 1000 permettant de traiter le signal. Le signal recherché est quasi-stationnaire (mouvements musculaires humains), le bruit peut donc être supprimé par un simple filtrage passe-bas d'ordre 2, de fréquence de coupure 100 Hz. Le signal ainsi filtré est ensuite traité par un amplificateur soustracteur qui permet de supprimer l'offset et d'atteindre une plage de sortie de 5 volts, adaptée à la carte d'acquisition. La composante soustraite est réglable à l'aide d'un potentiomètre pour parer à une éventuelle variation de l'offset pendant la durée de vie du capteur.

D'autres capteurs ont été développés pour mesurer cette force longitudinale, en mesurant la déformation d'une pièce insérée entre l'embouchure et le reste de la trompette [Barbenel, 1988, Vergez, 2000, Mayer and Bertsch, 2005, Bianco et al., 2012] ou du bugle [Petiot, 2003], avec l'inconvénient de modifier la perce de l'instrument à l'entrée de la branche d'embouchure, ce qui est susceptible de modifier l'acoustique de l'instrument de manière non négligeable [Petiot et al., 2005].

Débit

Le débit d'air moyen traversant un cuivre est très faible : des mesures réalisées sur trombone [Bouhuys, 1968] et sur trompette [Fréour et al., 2010] indiquent un ordre de grandeur de 10^{-3} à $10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Les mesures citées ont été réalisées soit avec des méthodes de mesure du volume thoracique invasives pour le musicien (encaissement du musicien ou pléthysmographie opto-électronique) ou modifiant l'instrument (anémomètre à hélice dans la perce de l'instrument). La mesure de débits de cet ordre est habituellement réalisée à l'aide d'un anémomètre à fil chaud, mesurant la vitesse dans une section constante de l'instrument : selon le type d'écoulement, il est ensuite possible de calculer le débit. Cependant la thermo-anémométrie à fil chaud n'est pas compatible avec l'air expiré par un musicien, l'humidité contenue détruisant rapidement l'élément sensible du capteur. Un autre système de thermo-anémométrie, l'anémomètre à boule chaude, a donc été retenu. Ce système permet de mesurer des vitesses d'écoulement de l'ordre de $0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: cependant, le gain de robustesse par rapport à un fil chaud se traduit par un temps de réaction plus élevé. De ce fait, le capteur de vitesse choisi est le seul capteur ne permettant pas une mesure dans des conditions de jeu normal, la stabilisation de la vitesse mesurée prenant parfois plusieurs secondes. Le signal de l'anémomètre ne donne une valeur indicative de la vitesse que pour un régime établi joué suffisamment longtemps pour stabiliser la mesure.

L'anémomètre utilisé se présente sous la forme d'une canne de 6 mm de diamètre, insérée dans le pavillon (Fig. 7.1 et Fig. 7.5). Cette installation présente le double avantage de ne pas nécessiter de percer la trompette (installation réversible) et de minimiser la perturbation du flux en insérant le capteur à un endroit où la section du tube est environ 30 fois supérieure à la section du capteur.

Électrolabiographe

S'inspirant d'études déjà menées [Fréour and Scavone, 2013] on utilise un électrolabiographe (ELG) pour suivre le mouvement des lèvres. Ce capteur mesure la conductivité électrique entre les lèvres du musicien : la conductivité est d'autant plus élevée que la surface de lèvres en contact est importante. cela permet de repérer les moments d'ouverture et de fermeture maximale des lèvres, qui correspondent respectivement aux minima et maxima de leur conductivité : la phase de ce signal donne donc la phase de l'ouverture des lèvres [Hezard et al., 2014]. La conductivité étant influencée par l'humidité et la morphologie des lèvres, il semble difficile de relier la section

d'ouverture des lèvres à l'amplitude du signal ELG de façon fiable et répétable.

La mesure de conductivité est réalisée par un boîtier disponible dans le commerce (marque VoceVista) originellement conçu pour une mesure similaire sur les plis vocaux des chanteurs. Les électrodes d'origine, posées sur le larynx, sont ici remplacées par des électrodes situées sur le rebord de l'embouchure de la trompette (Fig. 7.4). Cette paire d'électrode est mise en parallèle avec une résistance évitant la saturation (la conductivité d'une paire de lèvres étant supérieure à celle du larynx). Cette résistance peut être adaptée à chaque musicien, pour optimiser l'amplitude du signal.



FIGURE 7.4 – Électrodes de l'ÉlectroLabioGraphe collées à l'embouchure : chaque contact en cuivre est en contact avec une lèvre du musicien. Les électrodes ont été plaquées à l'argent par la suite.

Pression rayonnée

Le son émis par la trompette est capté à l'aide d'un microphone B&K omnidirectionnel 1/2" (capsule 4133, préamplificateur 2669). Afin de minimiser le son réverbéré par la pièce dans le signal mesuré, le microphone est fixé au pavillon, à une distance légèrement supérieure au diamètre maximal de celui-ci 7.5. Ce dispositif maintient la distance et l'orientation du microphone constantes par rapport à l'instrument sans contraindre les mouvements du musicien.



FIGURE 7.5 – Support du microphone de mesure de la pression rayonnée (en bas) et de l'anémomètre (tige centrale rentrant dans le pavillon).

7.3 Chaîne d'acquisition

Les 9 voies de mesure sont enregistrées simultanément sur des modules d'acquisition National Instrument 9234 et 9215, avec une fréquence d'échantillonnage de 51200 Hz. Le pilotage et l'enregistrement de l'acquisition sont réalisées par un programme Simulink *ad hoc*.

Ce programme permet également d'afficher les valeurs instantanées des mesures en cours d'acquisition, sous formes de signaux temporels et du spectre de certaines valeurs.

Résumé de la partie II :

Différents outils d'analyse sont présentés pour étudier le modèle de cuivre présenté au chapitre 2 :

- L'analyse de stabilité linéaire permet de calculer les seuils de déstabilisation de la solution stationnaire du système, et donne la fréquence de l'oscillation émergeant de cette déstabilisation. Cet outil a été entièrement développé dans le cadre de cette thèse. Le faible coût de calcul permet d'obtenir une vision du comportement du modèle au voisinage de sa solution d'équilibre sur une plage du paramètre f_l couvrant l'ensemble de la tessiture de l'instrument.
- La simulation temporelle résout numériquement les équations non linéaires du système pour un jeu de paramètres que l'utilisateur peut faire varier au cours de la simulation. Le résultat dépend des conditions initiales. Cette méthode ne permet de calculer que des solutions stables. Le code utilisé est MOREESC écrit par Fabrice Silva pendant sa thèse [Silva, 2009].
- La continuation numérique à l'aide de la Méthode Asymptotique Numérique permet de suivre l'évolution d'une solution périodique du problème selon un paramètre choisi, en l'occurrence la pression dans la bouche. La forme d'onde de chaque variable, la fréquence d'oscillation et la stabilité de la solution sont calculées pour toute valeur du paramètre de continuation. Inspiré du travail de Sami Karkar sur les instruments à anche simple [Karkar, 2012], l'écriture du modèle de cuivre sous la forme quadratique requise a été faite pendant cette thèse. Le calcul de la stabilité des solutions périodiques par la méthode de Hill est original.
- Une trompette instrumentée est également développée pour mesurer certains paramètres de jeu utilisés par les trompettistes et certaines variables décrivant le fonctionnement de l'instrument. L'outil permet la mesure simultanée de la pression statique dans la bouche, la force d'appui sur les lèvres, la phase du déplacement des lèvres en vibration, la position des pistons, la vitesse d'écoulement dans l'instrument dont on déduit le débit moyen, la pression acoustique dans l'embouchure, la pression acoustique dans la bouche et le son rayonné à l'extérieur du pavillon. Ce dispositif a été principalement conçu pendant mon stage de Master [Velut, 2012]. Le système d'acquisition a été amélioré pendant le stage d'Adrien David-Sivelle [David-Sivelle, 2013]. L'ensemble du système a ensuite été amélioré pendant cette thèse.

Troisième partie
Production du son

Introduction

Cette partie de la thèse s'attache à étudier différents régimes d'oscillation du modèle physique de cuivre présenté au chapitre 2. Les analyses sont essentiellement faites pour des paramètres de trombone, mais aussi parfois de saxhorn. Les aspects suivants sont abordés :

- La génération de régimes périodiques de différentes fréquences pour une impédance donnée, ce qui correspond au jeu typique des cuivres (chapitres 8.1 et 8.2).
- Dans le chapitre 8.2, des régimes "atypiques" sont explorés : La possibilité de provoquer une cascade sous-harmonique (succession de doublements de période, chap. 8.2.3), la génération de régimes quasi-périodiques lorsque la fréquence de résonance des lèvres s'écarte des valeurs habituelles, la production de la note pédale du trombone (chap. 8.2.1), et la production d'un régime périodique particulier sur le premier régime du saxhorn, que nous avons baptisé "nôte fantôme" (chap. 8.2.2)
- La modification de la production de la note pédale due à l'utilisation d'une sourdine sèche et la compensation de cette modification par une sourdine active développée par [Meurisse et al., 2015] (chap. 9).
- La production de multiphoniques par forçage du modèle auto-oscillant (chap.10).

Ces comportements du modèle sont étudiés par les différentes méthodes d'analyse présentées dans la partie II : l'Analyse de Stabilité Linéaire, la simulation numérique temporelle, et l'équilibrage harmonique couplé à la méthode de continuation MAN. Tous les comportements du modèle sont mis en perspective avec des comportements des cuivres connus par les musiciens, ou mis en évidence expérimentalement pendant la thèse.

Chapitre 8

Jeu classique du trombone

Introduction

Ce chapitre porte sur les divers régimes d'oscillation correspondant aux notes jouées avec un instrument de la famille des cuivres. Une partie des résultats de ce chapitre sont contenus dans l'article : *"How well can linear stability analysis predict the behaviour of an outward valve brass instrument model?"*, soumis à *Acta Acustica united with Acustica* (en cours de révision). Cet article est reproduit dans l'annexe H.

Les analyses sont menées sur le modèle physique présenté au chapitre 2 en utilisant principalement l'impédance d'entrée d'un trombone ténor (Antoine Courtois modèle T149) avec la coulisse en première position. Pour certaines situations, l'impédance d'un saxhorn baryton (Couesnon "Excelsior"), tous pistons levés, sera également utilisée. Ce saxhorn est un instrument de la famille des tubas joués sur la même tessiture qu'un trombone ténor. Ces deux impédances sont mesurées à l'aide du capteur décrit dans [Macaluso and Dalmont, 2011] et approximées par une somme de 18 modes complexes selon l'équation (2.2) et représentées dans la figure 8.1a). La figure 8.1b) représente l'écart en cents entre les fréquences de résonance des modes de chaque instrument et une série harmonique EFP). La fréquence fondamentale de cette série harmonique, calculée en fonction du 4^{ème} mode de chaque instrument vaut respectivement 57.2 Hz pour le trombone et 57.9 Hz pour le saxhorn.

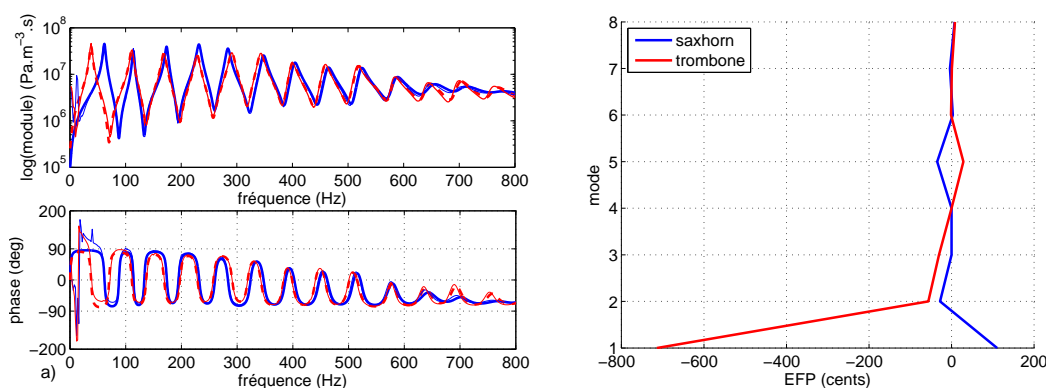


FIGURE 8.1 – Fig. (a) : Module (haut) et phase (bas) des impédances mesurées (ligne continue) d'un saxhorn baryton (bleu) et d'un trombone ténor (rouge), et de leurs approximations modales (pointillé). Fig.(b) : EFP de ces instruments, la référence est la 4^{ème} fréquence de résonance.

L'impédance du saxhorn (en bleu) présente des pics régulièrement espacés : les fréquences des modes de résonance acoustiques de cet instrument sont proches de la série harmonique, avec un EFP maximum de 110 cents (un demi-ton) pour le premier mode. En revanche, le premier

mode du trombone (courbe rouge) est fortement décalé vers les basses fréquences. Son écart à la série harmonique de référence atteint 714 cents, soit plus d'une quinte juste. Les premiers modes mis à part, ces deux instruments sont quasi harmoniques, à ± 35 cents près sur les modes 2 à 8 correspondant à la tessiture habituelle de ces instruments.

En règle générale, lorsqu'un cuivriste joue une note, sa fréquence de jeu est voisine de la fréquence de résonance acoustique de son instrument correspondant au registre joué, car il est plus facile de maintenir le système dynamique en oscillation au voisinage d'un des modes de résonance. Cela se vérifie par exemple sur la trompette, où la fréquence de jeu mesurée sur le musicien et ses harmoniques sont proches des pics de l'impédance de l'instrument, comme illustré par la figure 8.2 réalisée à l'aide de la trompette instrumentée (cf. chap. 7). Mais à ce titre, le premier registre du trombone montre une particularité. En effet, lorsqu'un tromboniste joue la note la plus grave de son instrument (appelée "note pédale"), la fréquence de la note émise est harmonique avec les notes qui sont émises quand on joue les notes correspondant aux modes supérieurs. Malgré la forte inharmonicité du premier mode avec les suivants, tout se passe comme si l'instrument avait des résonances harmoniques. L'explication généralement proposée pour ce phénomène de note pédale est la "coopération" des modes supérieurs pour soutenir l'auto-oscillation [Benade, 1976, p.405].

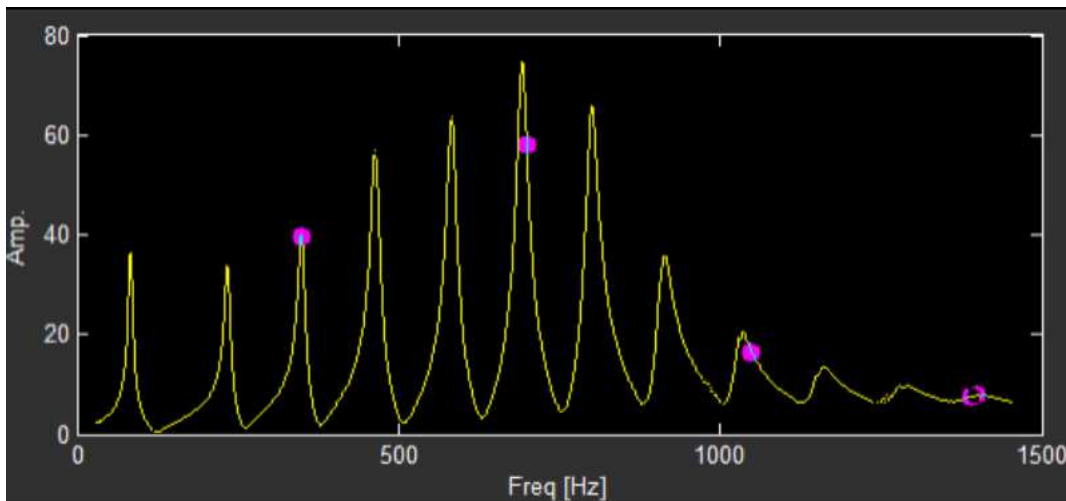


FIGURE 8.2 – Résultat de mesure d'un trompettiste jouant un *Sol4*. Les harmoniques de la fréquence de jeu (points magenta) sont proches des pics de l'impédance d'entrée de la trompette (jaune).

Le jeu qualifié ici de "classique" consiste à jouer des sons périodiques dont les fréquences suivent une série harmonique dont les fréquences sont proches de la gamme tempérée. Avec la coulisse en première position, un tromboniste joue une série de 7 notes allant du $B\flat_2$ au $B\flat_4$, correspondant aux registres 2 à 8, ainsi que le $B\flat_1$ pédale. Les mêmes notes sont jouées par un saxhorniste n'appuyant sur aucun piston de son instrument. Ce chapitre vise à déterminer dans quelle mesure le modèle présenté dans le chapitre 2 est capable de reproduire ce jeu "classique" du trombone. A travers la comparaison des résultats de l'ASL et des simulations temporelles, ce chapitre commence par étudier les registres 2 à 8 du modèle de trombone (paragraphe 8.1), avant de se focaliser sur le cas plus particulier de la note pédale du trombone, en comparaison avec le même mode sur un saxhorn qui servira d'instrument harmonique de référence (paragraphe 8.2).

8.1 Régimes 2 à 8 du trombone

8.1.1 Analyse de stabilité linéaire de la solution d'équilibre

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire du modèle de trombone, paramétré avec les valeurs du tableau II (page 30), sont présentés sur la figure 8.3. Le seuil d'oscillation p_{thresh} et la fréquence correspondante f_{thresh} sont calculés pour une plage de fréquence de résonance des lèvres allant de $f_l = 20$ Hz à 500 Hz, de manière à analyser les 8 premiers régimes, et représentés en Fig. 8.3a) et Fig. 8.3b) respectivement.

Les deux courbes de la figure 8.3 se décomposent sur 8 plages de f_l , répertoriées dans la seconde colonne du tableau I (page 61). Sur chaque plage, les courbes sont continues. Il n'y a aucune valeur sur l'intervalle $f_l = [64 : 71\text{Hz}]$: la solution statique y est inconditionnellement stable quelle que soit p_b .

La courbe de f_{thresh} décrit des paliers sur chacune de ces plages de f_l , chacun légèrement au-dessus de la fréquence d'un des modes de résonance acoustique $f_{ac,n}$ du résonateur. L'écart entre les valeurs de f_{thresh} et de $f_{ac,n}$ est plus marqué pour le premier mode : cela fera l'objet d'une étude spécifique sur la note pédale dans le chapitre 8.2.1. Au sein de chaque palier, f_{thresh} croît faiblement avec f_l . Sur chaque plage de f_l , parallèlement à ces paliers de fréquence, on retrouve qualitativement les résultats présentés dans [Silva et al., 2007] pour un modèle de cuivre à résonateur purement cylindrique : la pression de seuil p_{thresh} décrit des courbes en U, passant par un minimum pour chaque mode.

Le comportement observé par ASL est typique d'un modèle de cuivre avec une anche en-dehors [Cullen et al., 2000, Campbell, 2004] : chacune des plages de f_l est associée à un régime d'oscillation, principalement supporté par un mode de résonance acoustique du trombone. Les valeurs de f_{thresh} , systématiquement supérieures à $f_{ac,n}$ et à f_l (courbe au-dessus des lignes horizontales et de la bissectrice), satisfont à la condition de régénération de ce modèle au seuil [Elliott and Bowsher, 1982, Fletcher, 1993, Campbell, 2004]. Les fréquences d'oscillation obtenues sont globalement supérieures aux fréquences des notes de la gamme tempérée, que jouerait un musicien : c'est une limite connue du modèle de valve en-dehors [Silva et al., 2007, Chaigne and Kergomard, 2008].

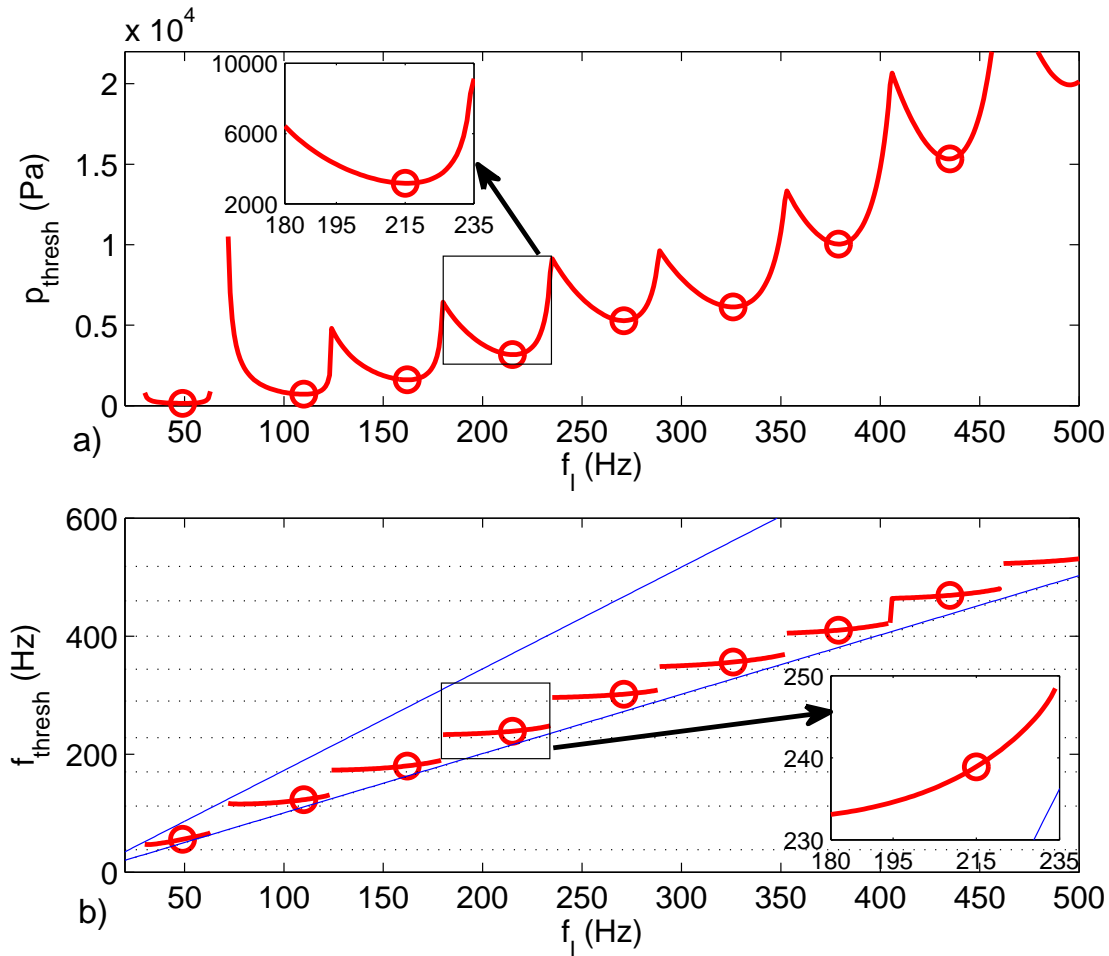


FIGURE 8.3 – Résultats de l’ASL appliquée au modèle de trombone, dont les paramètres sont ceux du tableau II page 30 : la figure (a) indique le seuil p_{thresh} de déstabilisation de la solution stationnaire, et la figure (b) la fréquence f_{thresh} correspondante, en fonction de la fréquence de résonance des lèvres f_l . Un zoom est effectué entre $f_l = 180$ Hz et 235 Hz (4^{ème} registre) sur chaque figure. Les lignes pointillées représentent les fréquences de résonance des modes acoustiques $f_{ac,n}$ et la bissectrice $f_{\text{thresh}} = f_l$. Les cercles indiquent les valeurs optimales p_{opt} et $f_{\text{thresh},n}^{\text{opt}}$, obtenues à la fréquence $f_l = f_{l,n}^{\text{opt}}$. Les bornes analytiques de f_{thresh} , définies par l’équation (8.1) pour un résonateur sans perte, sont tracées en bleu (la valeur minimale couvre la bissectrice).

L’analyse d’un modèle ne prenant pas en compte les pertes du résonateur donne un encadrement des valeurs de f_{thresh} [Silva et al., 2007], qui se traduit ici par :

$$\left(1 + \frac{1}{4Q_l^2}\right) \cdot f_l < f_{\text{thresh}} < \sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4Q_l^2}\right) \cdot f_l, \quad (8.1)$$

où Q_l est le facteur de qualité du modèle de lèvres. Les bornes inférieure et supérieure ainsi définies sont tracées (en bleu) sur la figure 8.3b), encadrant les valeurs de f_{thresh} sur toute la plage de f_l représentée. Malgré la prise en compte des pertes dans le modèle étudié ici, cette loi est vérifiée.

Jouer d’un cuivre est physiquement éprouvant : les musiciens cherchent donc à minimiser les efforts pour produire le son désiré. L’hypothèse formulée par exemple dans [Lopez et al., 2006], selon laquelle les musiciens choisissent la fréquence de résonance des lèvres permettant d’obtenir une pression de seuil minimale, pour un régime donné, est reprise ici. Cette valeur de f_l est notée $f_{l,n}^{\text{opt}}$ pour le mode (n). Les valeurs de p_{thresh} et f_{thresh} obtenues avec $f_{l,n}^{\text{opt}}$ sont notées respectivement

$p_{opt,n}$ et $f_{thresh,n}^{opt}$. Elles sont indiquées par les cercles rouges sur la figure 8.3 et reportées dans le tableau I. Les seuils d'oscillation p_{thresh} correspondent à la pression dans la bouche nécessaire pour jouer *pianissimo*. Les valeurs de $p_{opt,n}$, entre 500 Pa et 15 kPa, sont légèrement plus élevées que les valeurs expérimentales publiées dans [Bouhuys, 1968, Fréour and Scavone, 2013] pour cette nuance. L'ordre de grandeur est cependant cohérent, et les valeurs des $p_{opt,n}$ sont atteignables par l'expiration d'un musicien.

La valeur de $p_{opt,n}$ croît avec n : jouer des notes aigües nécessite une pression dans la bouche plus élevée. Ceci correspond à l'expérience du musicien, au trombone [Bouhuys, 1968] comme à la trompette (cf. chapitre 12.2 page 123). Les zooms réalisés sur la figure 8.3 montrent d'une part que les $f_{l,n}^{opt}$ sont plus proches de la borne supérieure de chaque plage de f_l , d'autre part que la valeur absolue de la dérivée seconde de p_{thresh} est plus grande pour $f_l > f_{l,n}^{opt}$ que pour $f_l < f_{l,n}^{opt}$: les "U" formés par les sections de la courbe de p_{thresh} sont asymétriques. Ceci est cohérent avec le fait que, pour un musicien, les "pitch bend"¹ sont plus difficiles à effectuer vers l'aigu que vers le grave. Cette dernière remarque doit néanmoins être considérée avec précaution, car un pitch bend permet d'obtenir une fréquence de jeu inférieure à la fréquence de résonance acoustique, ce qui n'est pas reproductible au seuil par ce modèle (cf. chapitre 11.3 page 118).

En conclusion, les résultats obtenus par ASL déterminent une plage de f_l associée à chaque registre de l'instrument. Cette plage de f_l n'est pas forcément exhaustive, par exemple dans le cas d'une solution émergeant d'une bifurcation de Hopf inverse. Pour chaque valeur de f_l , la valeur de pression dans la bouche la plus faible nécessaire pour déstabiliser le régime stationnaire est calculée. La fréquence de l'oscillation périodique susceptible d'émerger de cette instabilité est également calculée. Les résultats obtenus sur ce modèle sont cohérents avec le comportement expérimental d'un trombone, et plus généralement d'un cuivre. Néanmoins, les résultats de cette analyse sont limités au voisinage de la solution d'équilibre du système. Pour analyser les solutions éloignées de cet équilibre, et notamment le régime établi de toute solution quand $p_b > p_{thresh}$, d'autres outils tels que la simulation temporelle, ou la continuation numérique des branches de solutions, peuvent être utilisés. Les résultats d'ASL permettent néanmoins de guider l'initialisation de ces méthodes.

n	f_l (Hz)	$f_{ac,n}$ (Hz)	f_{thresh} (Hz)	$f_{l,n}^{opt}$ (Hz)	$f_{thresh,n}^{opt}$ (Hz)	$p_{opt,n}$ (Pa)	note (Hz)
1	[30,63]	38	[47.12,66.82]	49	55.6	144.8	<i>Bb</i> 1 (58.3)
2	[72,123]	112	[116.7,130.9]	110	122.9	710.2	<i>Bb</i> 2 (116.4)
3	[124,179]	170	[173,189.8]	162	180	1604	<i>F</i> 3 (174.6)
4	[180,234]	228	[233.1,247.5]	215	238.9	3170	<i>Bb</i> 3 (233.1)
5	[235,288]	290	[296,308.7]	271	301.6	5279	<i>D</i> 4 (293.7)
6	[289,352]	344	[348.5,369]	326	356	6133	<i>F</i> 4 (349.2)
7	[353,404]	400	[405,422.4]	379	410.1	10036	<i>Ab</i> 4 (415.3)
8	[405,460]	460	[464,479.6]	435	469	15330	<i>Bb</i> 5 (466)

TABLEAU I – Chaque ligne correspond à une plage de f_l associée à un registre du trombone. On répertorie la fréquence de résonance acoustique $f_{ac,n}$ la plus proche, la plage de f_{thresh} parcourue, $f_{opt,n}$ la valeur de f_l qui donne la plus faible valeur de p_b provoquant une auto-oscillation, et les valeurs de f_{thresh} et de p_{thresh} pour $f_l = f_{opt,n}$.

1. Technique permettant de modifier légèrement la fréquence de la note jouée sans toucher à la coulisse ou aux pistons

8.1.2 Régimes périodiques

A titre d'exemple, le comportement du modèle est d'abord observé pour $f_l = 90$ Hz, les autres paramètres étant ceux du tableau II page 30. Les résultats d'ASL présentés sur la figure 8.3, indiquent un seuil d'auto-oscillation du modèle à $p_{thresh} = 1222$ Pa. A cette pression, la fréquence d'auto-oscillation émergeant de la solution stationnaire est $f_{thresh} = 116$ Hz, légèrement au dessus de la seconde fréquence de résonance acoustique du résonateur $f_{ac,2} = 112$ Hz.

Le modèle de trombone est simulé pour des paramètres proches du seuil calculé par l'ASL. La situation $p_b = p_{thresh}$ est la limite entre le régime stationnaire et un régime oscillant d'amplitude nulle qui s'établirait après un temps de transitoire tendant vers l'infini. En pratique, cette situation est encadrée par deux simulations, avec $p_b = p_{thresh} \pm 1\%$, qui restent comparables au cas limite. Le modèle est également simulé à $p_b = 3$ kPa, afin d'observer le comportement loin du seuil. La figure 8.4 représente la forme d'onde de la pression simulée dans l'embouchure pour chaque valeur de p_b . La pression dans la bouche n'est pas une constante, mais une fonction porte régularisée de classe C^2 . Ceci permet une condition initiale non-raide pour le solveur [Silva, 2009]. La simulation est initialisée sur la solution stationnaire du système, calculée pour la valeur des paramètres à $t = 0$. La fréquence d'oscillation instantanée est calculée par détection des passages à zéro (implémentée dans la fonction `mirzerocross` de la `MIRtoolbox`²).

L'évolution de l'amplitude des signaux simulés est cohérente avec les résultats d'ASL : le comportement de l'oscillation périodique obtenue dépend de la situation par rapport au seuil. Pour $p_b < p_{thresh}$ (Fig. 8.4a) l'amplitude de la perturbation induite par le début de la simulation décroît rapidement, et converge vers 115.5 Pa, ce qui est bien la valeur (constante) de p_e calculé avec ce jeu de paramètres. Pour $p_b > p_{thresh}$ (Fig. 8.4b et 8.4c), l'amplitude de $p(t)$ croît d'autant plus vite que l'écart entre p_b et p_{thresh} est important. La croissance de l'amplitude est exponentielle au début, mais sature rapidement.

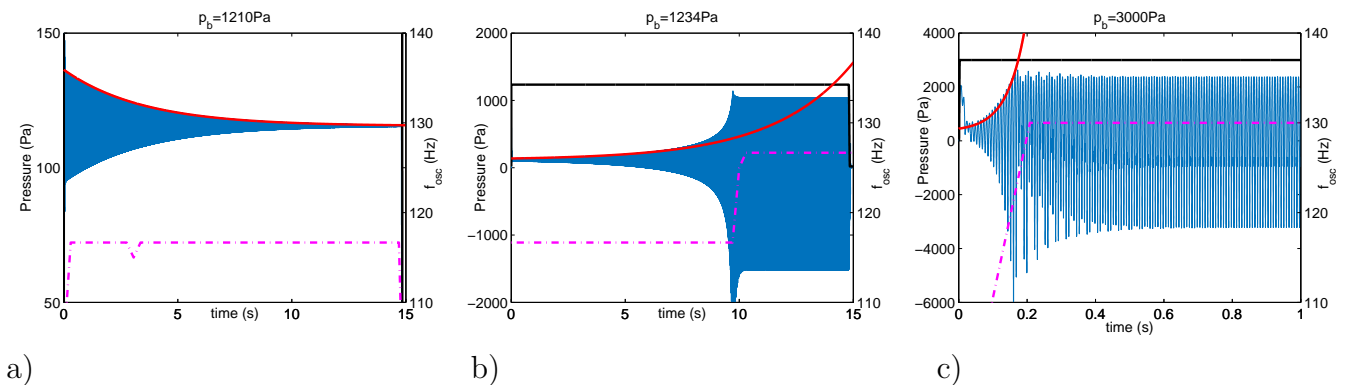


FIGURE 8.4 – Résultats de simulation à $f_l = 90$ Hz pour $p_b = 1210$ Pa (a) et $p_b = 1234$ Pa (b), respectivement 1% au-dessous et au-dessus du seuil. Le comportement à un point loin du seuil à $p_b = 3000$ Pa est également étudié (c). La pression dans l'embouchure $p(t)$ est en bleu, le paramètre p_b est noir, selon l'axe vertical de gauche. On notera les différences d'échelle. L'amplitude de $p(t)$ calculée à l'aide de l'ASL est tracée en rouge. La fréquence d'oscillation instantanée, calculée par détection des passages à zéro f_{osc} est aussi affichée (tirets magenta, axe de droite).

La croissance exponentielle de l'amplitude de l'oscillation est à comparer aux résultats de l'étude

2. <https://www.jyu.fi/hum/laitokset/musiikki/en/research/coe/materials/mirtoolbox/>. Dernier accès 17/10/2016

de la solution du système linéarisé. On rappelle l'équation (5.3) qui donne l'expression de cette solution :

$$X(t) = X_e + \sum_{i=1}^{N_{eq}} U_i \cdot e^{\lambda_i t} = X_e + \sum_{i=1}^{N_{eq}} U_i \cdot e^{\Re(\lambda_i)t} \cdot e^{j\Im(\lambda_i)t}, \quad (8.2)$$

où les λ_i et U_i sont les valeurs propres et vecteurs propres respectifs de $J_F(X)$. Pour rappel, cette matrice est la jacobienne du modèle de cuivre calculée en annexe C : la solution du système linéarisé au voisinage du point de calcul de cette matrice dépend de ses valeurs propres. Plus spécifiquement, la stabilité de la solution d'équilibre dépend du signe de la partie réelle de ces valeurs propres (voir chapitre 5).

D'après l'équation (8.2), l'évolution de l'amplitude suit donc l'exponentielle des parties réelles des λ_i . En pratique, l'expression peut se simplifier en se limitant à la paire de valeurs propres de plus grande partie réelle. Pour $p_b > p_{thresh}$ cela correspond à la paire de valeurs propres à partie réelle positive, responsable de l'instabilité linéaire de la solution stationnaire ; sinon cela revient à la paire de valeur propre dont la partie réelle est la plus proche de zéro. Cette valeur propre particulière est notée λ . En première approximation, la pression dans l'embouchure s'écrit :

$$p(t) - p_e = B \cdot e^{\Re(\lambda) \cdot t} \cdot e^{j\Im(\lambda) \cdot t}, \quad (8.3)$$

où p_e est la valeur à l'équilibre de $p(t)$ et B une constante réelle. Cela correspond bien à une amplitude d'oscillation d'enveloppe $B \cdot e^{\Re(\lambda) \cdot t}$. La figure 8.4 illustre la validité de cette expression : $p_e + B \cdot e^{\Re(\lambda) \cdot t}$ est tracée en rouge sur les résultats de simulation. Quand $p_b < p_{thresh}$ (Fig. 8.4a), l'équilibre est stable et le système reste au voisinage de la solution stationnaire : l'amplitude de la solution linéarisée prévoit remarquablement l'enveloppe du signal simulé. En revanche, lorsque le seuil p_{thresh} est dépassé (Fig. 8.4b et 8.4c) l'enveloppe du signal simulé finit par diverger de l'amplitude de l'équation (8.3), après $t = 8$ s pour $p_b = 1234$ Pa et après $t = 0.18$ s pour $p_b = 3$ kPa : la solution s'éloigne de l'équilibre instable, donc la linéarisation au voisinage de l'équilibre n'est plus valable. Une fois le transitoire d'attaque passé, l'amplitude de la pression dans l'instrument est limitée par des phénomènes non pris en compte par le modèle linéarisé : l'énergie apportée par la source de pression p_b s'équilibre avec les pertes dans le résonateur et celles dues au rayonnement, le système atteint un régime établi d'oscillation périodique.

p_b (Pa)	$\Re(\lambda)$	$ \Im(\lambda) /2\pi$	f_{osc} (Hz)	$t_{transient}$ (s)
1234	0.286	116.74	126.5	9.71
1500	5.559	117.66	127.6	0.74
2000	12.026	118.99	128.9	0.31
2500	16.09	120.01	129.7	0.215
3000	18.851	120.82	130.5	0.168

TABLEAU II – Données de simulations complémentaires à $f_l = 90$ Hz obtenues avec les paramètres du tableau II et les valeurs de p_b répertoriées. La durée du transitoire décroît quand p_b augmente. Il existe un écart de l'ordre de 8% entre la fréquence f_{thresh} prévue par l'ASL et la fréquence d'oscillation f_{osc} , ici mesurée sur le régime établi.

Le temps nécessaire pour atteindre ce régime périodique est variable et est d'autant plus court que p_b est loin au dessus du seuil. Selon une définition classique du transitoire, à savoir la durée nécessaire pour atteindre 95% de l'amplitude du régime établi, on a $t_{transient} = 9.71$ s à $p_b = 101\%$ du seuil, contre $t_{transient} = 0.168$ s à $p_b = 245\%$ de p_{thresh} . Cela se confirme sur d'autres simulations,

effectuées avec des valeurs de p_b intermédiaires. La durée du transitoire $t_{transient}$ est estimée pour chaque simulation à l'aide de la fonction MIRonsets [Lartillot and Toiviainen, 2007] et reportée dans le tableau II. La valeur propre λ de plus grande partie réelle est également calculée et reportée dans ce tableau.

La relation entre $t_{transient}$ et $\Re(\lambda)$ peut se modéliser : en effet, par définition $t_{transient}$ est le temps nécessaire pour que l'amplitude atteigne $p_{95\%}$ soit 95% de l'amplitude finale du régime établi. Si p_e est négligée devant $p_{95\%}$, l'équation (8.3) permet d'écrire :

$$p_{95\%} = 0.95 \cdot B \cdot e^{\Re(\lambda) \cdot t_{transient}}. \quad (8.4)$$

D'autre part, sous l'hypothèse que l'oscillation naît d'une bifurcation de Hopf directe, alors en première approximation l'amplitude du régime d'oscillation établi est proportionnel à la racine carrée du paramètre de bifurcation [Bergé et al., 1995, p.40]. La conséquence ici est que $p_{95\%}$ est proportionnelle à $\sqrt{p_b - p_{thresh}}$. En prenant le logarithme népérien de l'équation (8.4) la durée du transitoire peut s'écrire :

$$t_{transient} = \frac{1}{\Re(\lambda)} \cdot \ln(A \cdot \sqrt{p_b - p_{thresh}}), \quad (8.5)$$

où A est une constante réelle. En ajustant A sur un des points mesurés, une excellente corrélation entre ce modèle et les mesures reportées dans le tableau II est obtenue. Cette comparaison est illustrée par la figure 8.5.

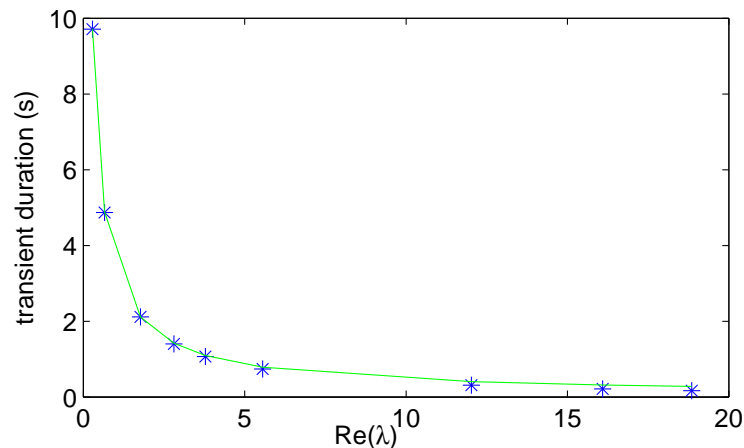


FIGURE 8.5 – Temps de transitoires mesurés sur les diverses simulations (marqueurs bleus) tracés en fonction de la partie réelle de λ correspondante (cf. tableau II) en comparaison avec le modèle de transitoire de l'équation (8.5) (trait plein vert).

En termes fréquentiels, les résultats de l'analyse de stabilité linéaire présentés en figure 8.3b) et les fréquences d'oscillation des simulations de la figure 8.4 sont cohérents. Pour $p_b = 1210$ Pa $< p_{thresh}$ (Fig. 8.4a) la fréquence de jeu est constante à $f_{osc} = 116$ Hz, ce qui est en parfait accord avec la fréquence d'oscillation de la solution linéarisée décrite par l'équation (8.3) : la fréquence d'oscillation f_{thresh} est déterminée par la partie imaginaire de la valeur propre λ de plus grande partie réelle. Dans les situations où la pression dans la bouche est supérieure au seuil (Fig. 8.4b et 8.4c) la fréquence d'oscillation est effectivement égale à $f_{osc} = f_{thresh}$ durant le transitoire. Cependant, la fréquence augmente brutalement lors du passage en régime établi : f_{osc} atteint 126.5 Hz pour $p_b = 1234$ Pa et 130.5 Hz pour $p_b = 3$ kPa. Dans les résultats reportés dans le tableau II, la fréquence d'oscillation du régime établi est donc entre 7.6 et 8% au dessus de la fréquence de la solution linéarisée, ce qui représente un intervalle musical supérieur au demi-ton,

entre 125 et 134 cents.

En résumé, pour l'enveloppe des signaux simulés comme pour les fréquences d'oscillation, les résultats de l'ASL et ceux issus de la simulation numérique sont tout à fait comparables tant que la solution reste au voisinage de la solution d'équilibre. C'est le cas pour une pression d'alimentation inférieure au seuil et durant les transitoires d'attaque. En revanche, dès que la solution s'éloigne de la solution stationnaire, certains effets négligés par la linéarisation influencent le comportement du système et les caractéristiques de la solution : limitation de l'amplitude et modification de la fréquence d'oscillation. Si l'ASL ne permet pas de connaître l'amplitude ni la fréquence du régime établi, elle permet cependant de détecter le seuil qui le fait émerger de la solution stationnaire, et d'estimer la fréquence d'oscillation et la durée du transitoire. Bien que la fréquence augmente légèrement quand on quitte le voisinage du point d'équilibre, f_{thresh} permet de savoir quel registre sera joué pour une pression dans la bouche raisonnablement voisine de p_{thresh} .

Cette solution périodique pour $f_l = 90$ Hz est maintenant continuée numériquement à l'aide de MANLAB. La continuation est effectuée selon la pression dans la bouche adimensionnée $\gamma = \frac{p_b}{P_M}$ (cf. chapitre 6). On indice les valeurs de γ particulières de la même manière que p_b , par exemple $\gamma_{thresh} = P_M \cdot p_{thresh}$. La figure 8.6 montre la branche obtenue pour $f_l = 90$ Hz et les paramètres de lèvres du tableau II. Le résonateur est ici limité à ses 6 premiers modes de résonance acoustique ($N_m = 6$). La décomposition en séries de Fourier utilisée (équilibrage harmonique) est réalisée sur $H = 60$ harmoniques.

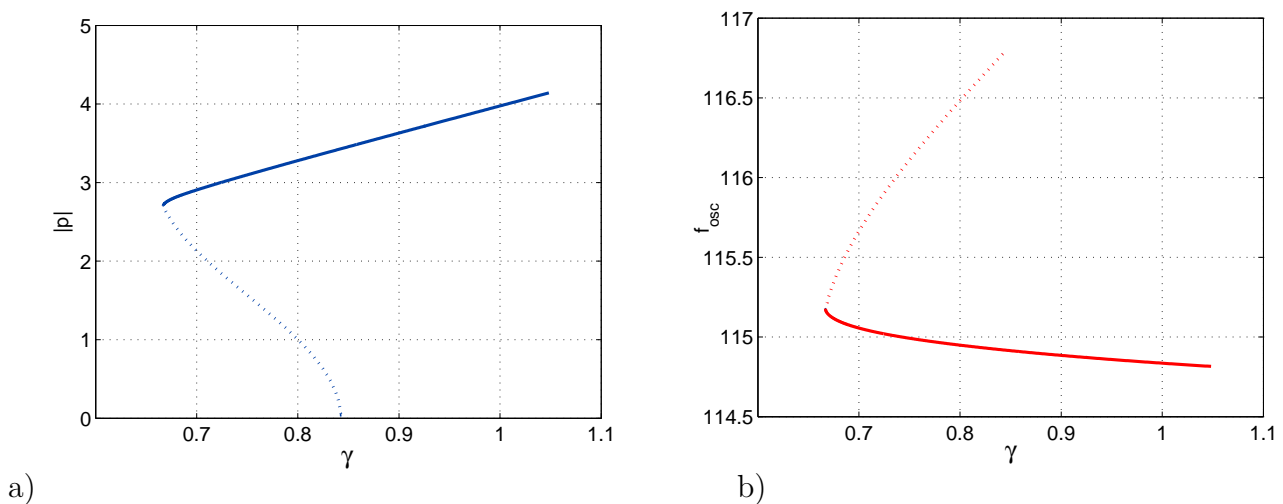


FIGURE 8.6 – Branche de solution périodique obtenus à l'aide de MANLAB, indiquant l'amplitude de $p(t)$ (a) et la fréquence d'oscillation (b) en fonction de la pression dans la bouche normalisée γ . Les parties instables de la branche sont tracées en pointillés, les parties stables en trait plein.

La branche d'oscillation représentée dans la figure 8.6a) part de la branche stationnaire avec une amplitude infinitésimale pour $\gamma_{thresh} = 0.8422$ soit $p_{thresh} = 1224$ Pa. Pour comparaison, l'ASL indique $p_{thresh} = 1223$ Pa pour ce modèle à 6 modes, soit une erreur de 0.08% imputable à des approximations de calcul. L'amplitude de l'oscillation croît tandis que γ diminue jusqu'à une valeur limite de $\gamma_r = 0.6669$; passé ce point, la branche de solution repart vers les γ croissants. L'oscillation est instable pendant la phase de décroissance de γ , puis elle devient stable au passage du point $\gamma = \gamma_r$. La solution décrit donc une bifurcation de Hopf inverse³ [Bergé et al., 1995],

3. Egalement appelée bifurcation de Hopf sous-critique

similaire à celles existantes pour des instruments à anche à perce conique [Dalmont et al., 2000]. A notre connaissance, il n'existe aucun résultat sur le type de bifurcation de Hopf (directe ou inverse) dans les modèles de cuivre, sauf dans le cas où le résonateur est cylindrique : la bifurcation observée est alors directe [Vergez and Rodet, 2000].

Pour $\gamma_r < \gamma < \gamma_{thresh}$, la solution stationnaire et cette solution périodique sont simultanément stables : l'état final du modèle est alors déterminé par les conditions initiales. Des simulations temporelles illustrent cette dépendance aux conditions initiales. Si le vecteur d'initialisation est pris sur la solution stationnaire, le système converge vers cet état stationnaire (Fig. 8.4a). En revanche, une simulation initialisée par un vecteur pris sur la partie stable de la branche périodique reste sur cette solution (Fig. 8.7). La forme d'onde du régime établi est identique à celle calculée par équilibrage harmonique (fig. 8.7a). De même, l'amplitude des composantes calculées par équilibrage harmonique correspond à l'amplitude des pics du spectre du signal simulé (fig. 8.7b). La fréquence de jeu simulée correspond à la valeur donnée par la figure 8.6b).

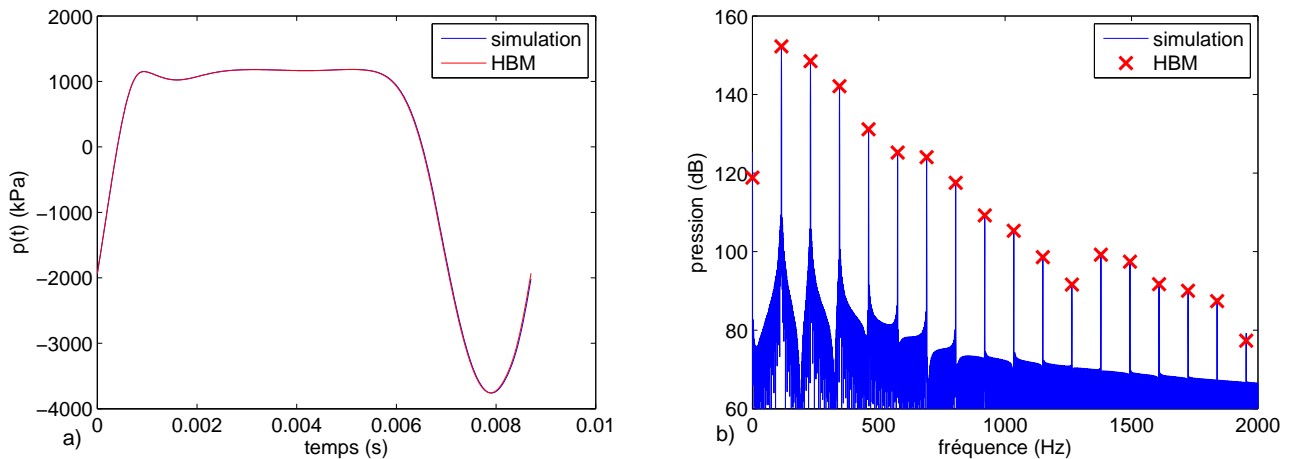


FIGURE 8.7 – (a) : Comparaison de la forme d'onde calculée par l'équilibrage harmonique (rouge) et la forme d'onde simulée du régime permanent, initialisée avec un point de la solution périodique (bleu). (b) : Comparaison du spectre de la pression simulée (bleu) et de l'amplitude des composantes spectrales obtenues par équilibrage harmonique (rouge). Résonateur à 6 modes, paramètres des lèvres tirés du tableau II $\gamma = 0.8338 < \gamma_{thresh}$ soit $p_b = 1212$ Pa.

L'effet de la bifurcation inverse sur le jeu du trombone est mis en évidence par la simulation représentée en figure 8.8 : faire décroître linéairement la pression dans la bouche depuis une valeur supérieure au seuil p_{thresh} permet de conserver l'oscillation pour des valeurs de $p_b < p_{thresh}$, qui ne permettraient pas de déstabiliser le régime stationnaire et d'attaquer un son. Le musicien peut alors jouer avec une amplitude de la pression dans l'embouchure inférieures à celle obtenue en initialisant sur la solution d'équilibre, tant que p_b reste supérieure à la valeur correspondant au point le plus à gauche de la branche périodique $p_r = P_M \cdot \gamma_r = 969$ Pa. Le passage de p_b sous cette valeur, marquée par une verticale noire dans la Fig. 8.8, entraîne l'extinction de l'oscillation très peu après. Le délai entre le passage de ce point de rebroussement et l'extinction peut être dû à des effets similaires à ceux engendrant des seuils d'oscillation dynamiques, étudiés en détail dans [Bergeot et al., 2013].

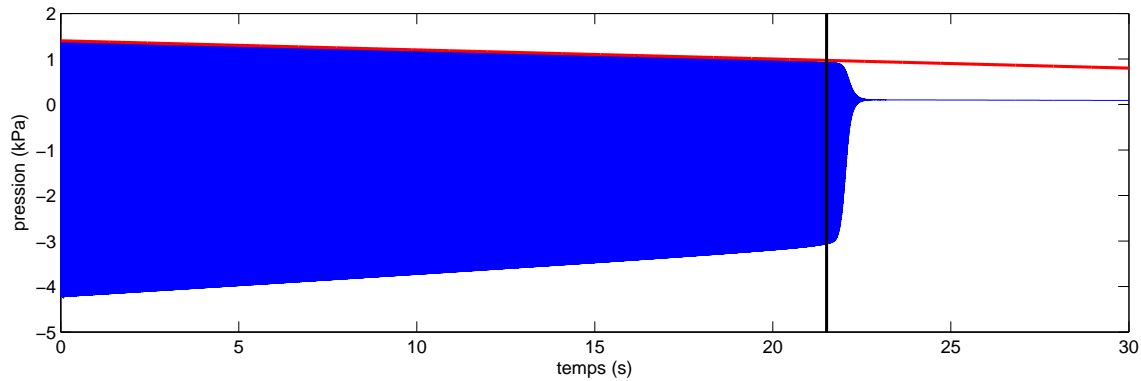


FIGURE 8.8 – Pression dans l’embouchure simulée (bleu) pour $f_l = 90$ Hz et p_b décroissant linéairement de 1401 à 800 Pa (rouge). Le passage à $p_b = 969$ Pa, correspondant à la valeur de γ_r , est indiqué par une verticale noire.

Les résultats de mesure obtenus sur la trompette (Fig. 12.5 page 126) montrent que pour une note donnée, la plus faible amplitude d’oscillation dans l’embouchure est mesurée après un decrescendo, ce qui correspond au comportement d’une bifurcation inverse. Ce rapprochement est toutefois à nuancer car il n’est pas exclu que le musicien fasse varier d’autres paramètres que p_b pour faire varier l’amplitude de l’oscillation dans l’embouchure. Des mesures complémentaires, faisant diminuer p_b toutes choses égales par ailleurs à l’aide d’une bouche artificielle par exemple, permettraient d’être plus affirmatif⁴.

Examinons maintenant un cas où la fréquence de résonance des lèvres est fixée à $f_l = 120$ Hz. Dans cette situation, l’ASL donne $p_{thresh} = 1056$ Pa. La fréquence d’oscillation associée à la première valeur propre dont la partie réelle devient positive est $f_{thresh} = 128.4$ Hz, ce qui correspond à une oscillation sur le second registre. La simulation numérique est lancée pour $p_b = 6500$ Pa, loin du voisinage du régime stationnaire ($p_b > 6 \cdot p_{thresh}$). La figure 8.9a) représente le spectre du régime périodique du signal de pression simulé dans l’embouchure. La fréquence fondamentale du régime périodique est mesurée à $f_{osc} = 187.5$ Hz : le troisième mode du résonateur étant à $f_{ac,3} = 170$ Hz, l’oscillation est principalement portée par ce troisième mode, ce qui semble à première vue contradictoire avec le résultat de l’analyse de stabilité linéaire. Ce comportement n’est cependant pas forcément contradictoire avec l’expérience musicale : lorsqu’un musicien augmente la pression dans sa bouche, au delà d’un certain seuil, il peut jouer une note plus aigüe sans modification consciente du contrôle musculaire sur ses lèvres.

Pour comprendre l’origine de cette situation, une méthode alternative à l’ASL est utilisée. Cet outil, décrit au chapitre 5.5, est fondé sur l’analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) linéarisée. Le résultat est représenté en figure 8.9b). La FTBO linéarisée remplit le critère de Barkhausen [Saneyoshi et al., 1987, Ferrand et al., 2010] en deux points, à 132 et 172.9 Hz. A ces deux fréquences, la FTBO est unitaire (sa phase est nulle et son module vaut 0 dB) et des instabilités peuvent donc émerger de la solution d’équilibre à ces fréquences, ceci en fonction des conditions initiales imposées. Ce calcul explique dans une certaine mesure l’écart entre la fréquence d’oscillation f_{osc} mesurée sur la simulation et la fréquence f_{thresh} donnée par l’ASL : en effet, cette dernière a été conçue comme un outil pour la recherche de seuils d’oscillation. Cependant le calcul de la première paire de valeurs propres conjuguées λ_1 de partie réelle positive ne préjuge pas

4. L’utilisation de méthodes de continuation type MANLAB appliquées aux cuivres est ici à ses prémisses. Nul doute que des travaux complémentaires seront utiles pour explorer les diagrammes de bifurcation des modèles de cuivres.

de l'apparition d'autres λ_k pour des valeurs de p_b dépassant le seuil. Or, un calcul *a posteriori* montre que la jacobienne calculée pour $f_l = 120$ Hz et $p_b = 6.5$ kPa a effectivement deux paires de valeurs propres à partie réelle positive : les fréquences correspondantes sont $|Im(\lambda_1)| = 132$ Hz et $|Im(\lambda_2)| = 172.9$ Hz respectivement. Ces fréquences correspondent aux points d'instabilité de la FTBO (Fig.8.9b). L'analyse de stabilité linéaire par évaluation des valeurs propres de la jacobienne permet donc d'envisager une oscillation à 172.9 Hz, ce que prévoit le résultat de simulation sur un troisième régime : comme dans les simulations précédentes à $f_l = 90$ Hz, la fréquence d'oscillation du régime établi est environ 8% plus élevée que la fréquence d'oscillation de la solution du système linéarisé. Cependant, la méthode d'ASL basée sur l'analyse de la boucle ouverte donne une vision complémentaire de la stabilité. En affichant la FTBO sur toute la plage de fréquence, on peut plus facilement avoir l'intuition de l'émergence proche d'une instabilité de la solution stationnaire.

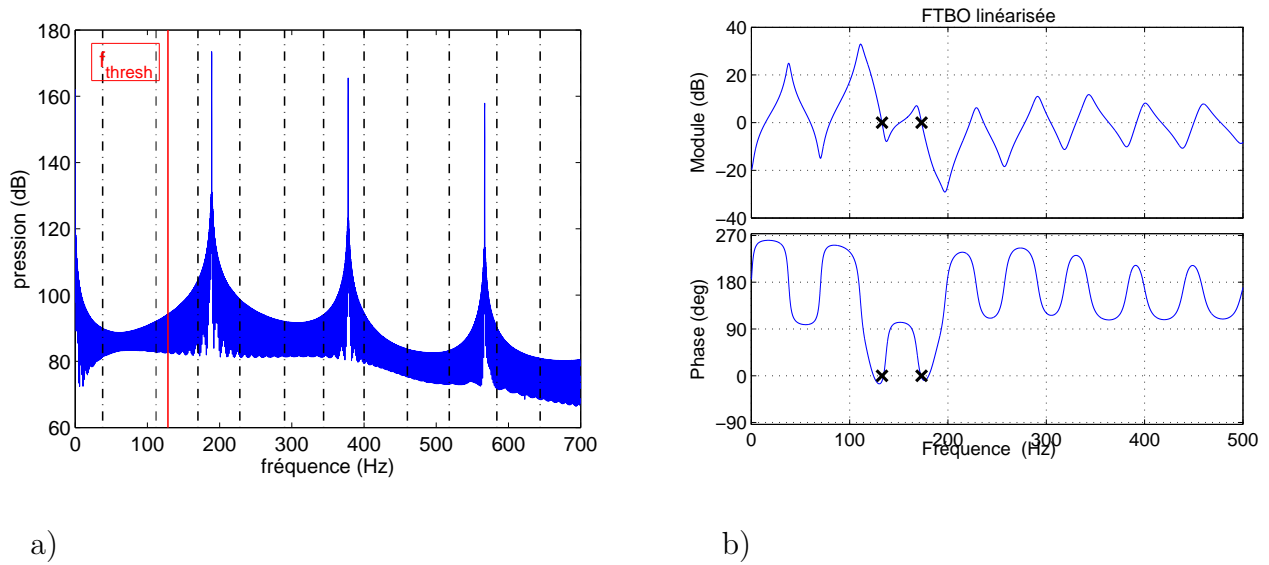


FIGURE 8.9 – Fig. (a) : spectre du signal de pression simulé pour $f_l = 120$ Hz et $p_b = 6.5$ kPa, mesuré sur le régime établi. La ligne verticale rouge indique la fréquence au seuil $f_{thresh} = 128.4$ Hz calculée par l'outil d'ASL du chapitre 5.4, les verticales noires pointillées sont les fréquences de résonance acoustique du résonateur $f_{ac,n}$. Fig. (b) : module et phase de la fonction de transfert en boucle ouverte du système avec le même jeu de paramètres (voir chapitre 5.5 Eq. (5.4) p. 38). Les croix noires indiquent les deux points d'instabilité potentielle.

Si ces deux méthodes de détection du seuil — ASL et FTBO — permettent de détecter les deux instabilités possibles, elles ont toutes les deux une limitation dans une situation comme celle-ci où plusieurs instabilités potentielles coexistent. Une oscillation est alors susceptible de se développer à partir d'une de ces deux instabilités. La convergence du système vers l'une ou l'autre des solutions oscillantes dépend alors de la stabilité de ces solutions, et des conditions initiales si les deux solutions sont simultanément stables.

8.1.3 Régimes quasi-périodiques

Une troisième configuration est maintenant étudiée : la fréquence de résonance des lèvres qui correspond au seuil d'oscillation le plus faible du second registre, soit $f_l = f_{l,2}^{opt} = 110$ Hz. Les autres paramètres des lèvres sont toujours ceux du tableau II. L'analyse de stabilité linéaire indique $p_{thresh,2}^{opt} = 711$ Pa et $f_{thresh,2}^{opt} = 122.9$ Hz. De façon similaire au paragraphe 8.1.2 trois simulations

différentes sont représentées. La figure 8.10 représente à la fois les formes d'ondes des signaux de pression dans l'embouchure $p(t)$, et les spectres calculés, à partir du régime établi de ces signaux simulés quand celui-ci existe, et à partir du transitoire sinon. Les pressions choisies permettent d'appréhender le comportement simulé au voisinage immédiat du seuil et à une valeur plus élevée : $p_b = 701$ Pa (Fig. 8.10a et 8.10d), $p_b = 720$ Pa (Fig. 8.10b et 8.10e) et $p_b = 2$ kPa (Fig. 8.10c et 8.10f). Sur chaque figure représentant la forme d'onde d'un des signaux simulés, l'amplitude de la solution du système linéarisé — c'est à dire l'enveloppe de l'équation (8.3) — est également tracée.

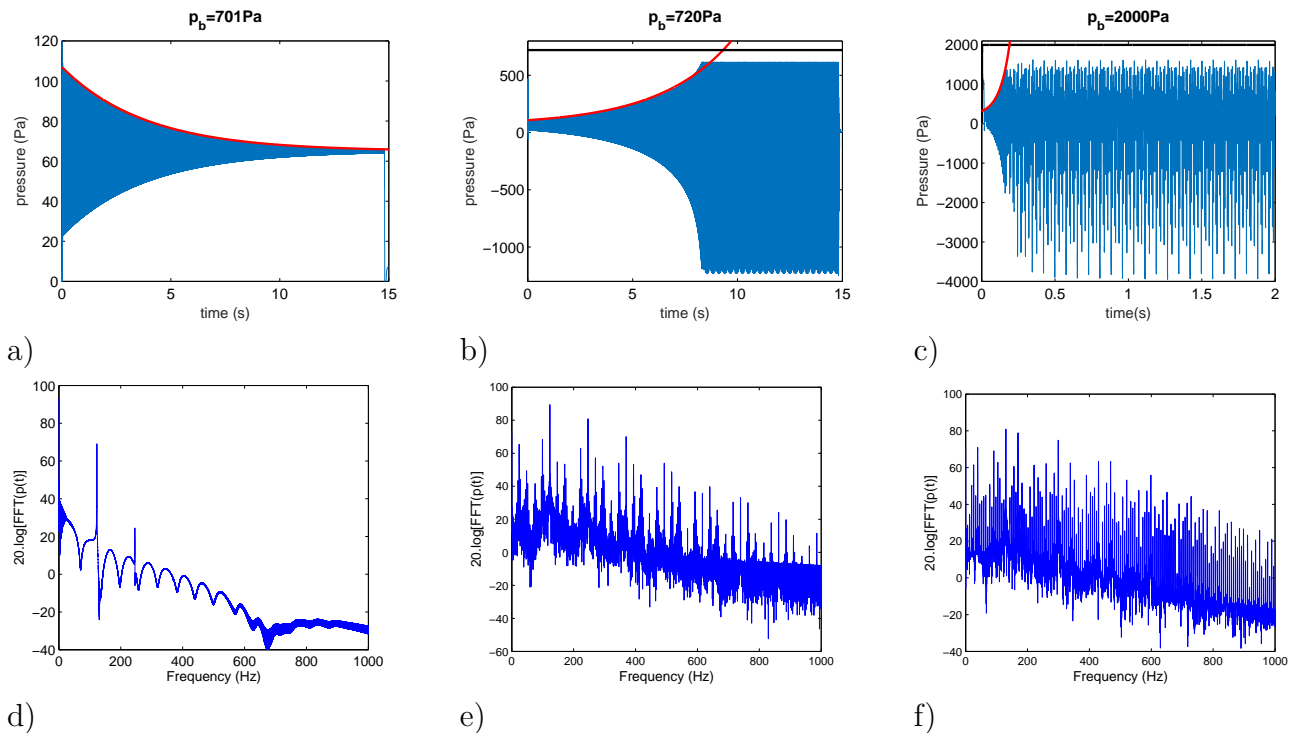


FIGURE 8.10 – Résultat de simulation à $f_l = 110$ Hz : pour $p_b = 701$ Pa, 720 Pa et 2 kPa, la forme d'onde de la pression dans l'embouchure simulée (haut) et le spectre (en dB) du régime établi de cette pression (bas) sont représentées. Le spectre pour $p_b < p_{thresh}$ (d) est calculé sur tout le signal. Les formes d'ondes sont en bleu, la pression d'alimentation p_b en noir. L'enveloppe de la solution du système linéarisé est tracée en rouge. Les échelles varient d'une figure à l'autre.

Lorsque $p_b < p_{thresh}$, l'amplitude d'oscillation du signal de pression décroît exponentiellement vers la solution d'équilibre (Fig. 8.10a). L'enveloppe du signal est parfaitement corrélée avec l'amplitude de la solution du système linéarisée (courbe rouge). L'oscillation semble essentiellement monochromatique à $f_{osc} = 122.9$ Hz, soit la valeur de f_{thresh} . Le spectre (Fig. 8.10d) montre une oscillation presque sinusoïdale amortie.

Dans les deux configurations où p_b est supérieur au seuil d'oscillation l'amplitude du signal croît exponentiellement, d'autant plus vite que l'écart entre p_b et p_{thresh} est important : ici également, l'enveloppe du signal simulé et l'expression issue du système linéarisé au voisinage de la solution stationnaire (Eq. (8.3)) se superposent. Le régime établi de ces deux simulations laisse apparaître une modulation d'amplitude, particulièrement visible sur les minima de pression de la Fig. 8.10b) et sur la Fig. 8.10c). En termes fréquentiels, l'oscillation quasi-périodique se traduit par l'apparition de pics secondaires, encadrant les harmoniques de 123.1 Hz et 130.2 Hz respectivement. La densité de ces pics secondaires et leur amplitude croît avec p_b . Dans le jeu musical, une oscillation quasi-périodique peut apparaître quand un tromboniste ajuste mal la

tension de ses lèvres, produisant ainsi un son décrit comme "roulant"⁵.

Le comportement des signaux simulés est conforme aux résultats obtenus par l'analyse de stabilité linéaire durant le transitoire : l'ASL permet de prévoir l'enveloppe et la fréquence d'oscillation du transitoire d'attaque. Cependant, dans cette configuration, le régime établi s'avère être une oscillation quasi-périodique. Comme précédemment (paragraphe 8.1.2) où la prédiction exacte de la fréquence du régime établi s'avérait impossible avec l'ASL, ces résultats montrent que c'est la nature même de ce régime qui n'est pas prévisible : aucun élément des résultats d'ASL ne nous indique la nature périodique, quasi-périodique ou chaotique du régime périodique qui découle de la perte de stabilité du signal.

8.1.4 Conclusion

Les résultats des méthodes d'analyse de seuil et de simulation numérique temporelle donnent des résultats pertinents sur les régimes d'oscillation correspondant aux modes acoustique 2 à 8 du trombone. Ils mettent en évidence des comportements qui peuvent être mis en relation avec des comportements constatés expérimentalement sur le trombone, et plus généralement sur les cuivres. Les résultats des méthodes de détection de seuil, ASL et FTBO, ont un coût de calcul très faible et donnent une vision globale du comportement du modèle au voisinage de sa solution stationnaire. Ces outils calculent le seuil de pression dans la bouche à partir duquel un ou plusieurs régimes d'auto-oscillation peuvent émerger de la solution statique. L'étude des valeurs propres de la jacobienne du système indique également la fréquence d'oscillation durant le transitoire d'attaque et permet d'en modéliser la durée, avec une très bonne corrélation avec les résultats de simulation temporelle.

Néanmoins, dès que le système s'éloigne de la solution d'équilibre, la validité du modèle linéarisé est bien sûr remise en cause. C'est notamment le cas quand la pression dans la bouche dépasse le seuil et qu'une oscillation auto-entretenu se stabilise. Dans ces situations, la simulation temporelle permet de calculer les caractéristiques du régime établi, notamment sa nature périodique ou quasi-périodique, son enveloppe complète et sa (ou ses) fréquence(s) d'oscillation. Dans les cas où plusieurs oscillations peuvent émerger de la solution d'équilibre, la simulation permet aussi de déterminer vers quel régime le système converge pour une condition initiale donnée. La continuation de solutions périodiques suivant p_b met en évidence la nature sous-critique de la bifurcation de Hopf entre la solution stationnaires et certaines branches périodiques, ce qui permet notamment de déterminer la plus faible pression dans la bouche susceptible de maintenir une auto-oscillation existante.

Du point de vue du modèle, ces analyses soulignent sa capacité à reproduire plusieurs phénomènes constatés sur les cuivres : émergence de solutions périodiques en augmentant la pression dans la bouche, sélection du registre en fonction de la fréquence de résonance des lèvres, production de régimes quasi-périodiques, difficulté des attaques *pianissimo*.

8.2 Premier régime

Cette partie traite plus particulièrement des régimes d'auto-oscillation soutenus par le premier mode de résonance acoustique du trombone. Comme indiqué en introduction du chapitre 8, ce premier mode a une fréquence de résonance $f_{ac,1}$ qui n'est pas dans la série harmonique que les $f_{ac,n}$ suivent approximativement pour $n \geq 2$. Malgré cette forte inharmonicité (environ 700 cents, Cf. Fig. 8.1b), la note "pédale", qui est supportée par ce premier mode acoustique, est harmonique

5. Ce phénomène est assez courant lorsque le musicien est fatigué musculairement après un long temps de jeu.

avec les autres notes. L'ASL et la simulation temporelle sont utilisées pour évaluer dans quelle mesure le modèle étudié reproduit ce comportement particulier. La différence principale entre une impédance de trombone et une impédance de saxhorn étant l'harmonicité du premier mode de ce dernier, l'analyse comparée de ces deux instruments prend ici tout son intérêt.

8.2.1 Note pédale

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire de la figure 8.3 sont reproduits dans les figures 8.11a) et 8.11b), sur une échelle réduite facilitant la lecture des données des cinq premiers registres. Un troisième graphique (Fig. 8.11c) représente le rapport entre la fréquence d'oscillation au seuil de l'ASL et la fréquence de résonance du mode la plus proche de f_{thresh} : ce rapport $f_{thresh}/f_{ac,n}$ permet d'adimensionner la fréquence d'oscillation, facilitant les comparaisons entre les différents régimes de l'instrument.

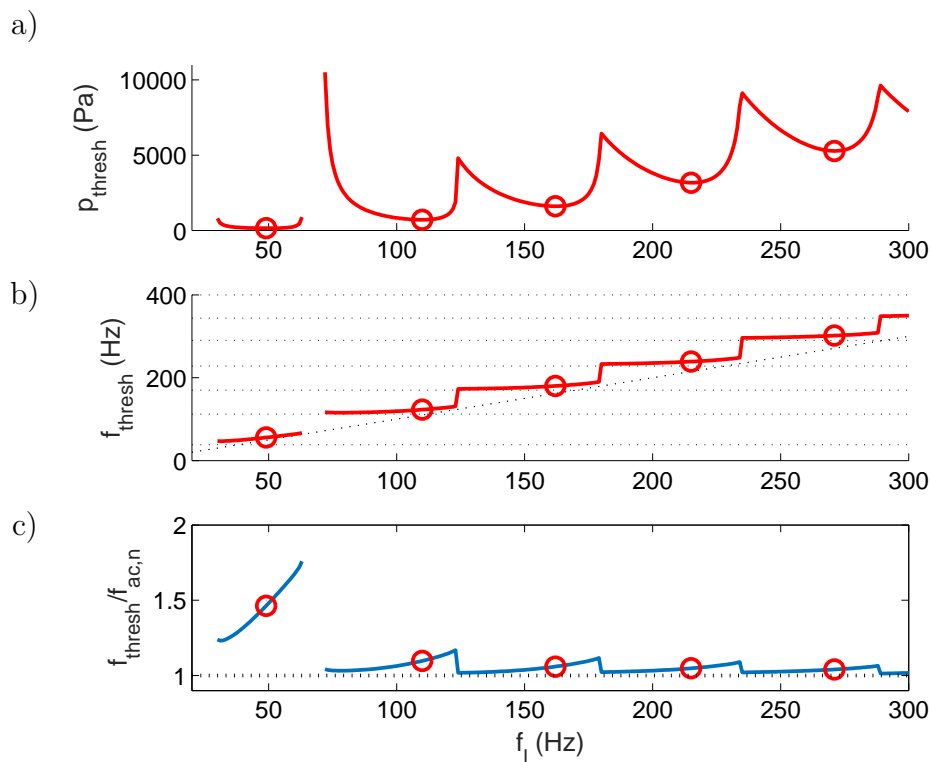


FIGURE 8.11 – Résultats d'analyse de stabilité linéaire sur le trombone, centrée sur les seuils des cinq premiers registres de l'instrument. La figure (c) représente f_{thresh} adimensionnée par la fréquence de résonance acoustique du mode soutenant l'oscillation.

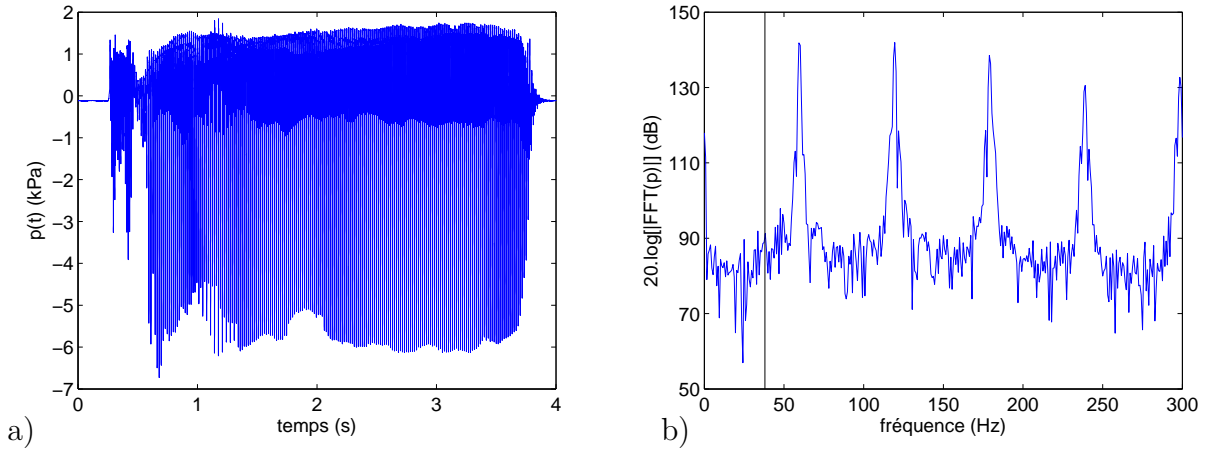


FIGURE 8.12 – forme d’onde (a) et spectre du régime établi (b) d’un *Sib* pédale jouée au trombone. La fréquence du premier mode du trombone $f_{ac,1} = 38\text{Hz}$ est indiquée par une ligne verticale noire. La fondamentale est ici à 59.4 Hz légèrement supérieure à la note de la gamme tempérée.

Le tableau III répertorie un certain nombre de variables pour les valeurs supposées "optimales" qui correspondent, pour chaque mode, à la valeur de p_{thresh} la plus faible. Sur les cinq premier régimes, la fréquence au seuil $f_{thresh,n}^{opt}$ correspond à la fréquence de jeu attendue par un musicien avec une erreur inférieure à 5.5% soit environ un demi-ton. L’analyse de stabilité linéaire donne donc une estimation raisonnable de la note jouée, y compris sur le premier régime. Cependant, $f_{thresh,1}^{opt}$ est légèrement inférieure à la fréquence du *Bb*1, tandis que, pour $2 < n < 5$, $f_{thresh,n}^{opt}$ est légèrement supérieure à la fréquence de la note de la gamme, conformément aux résultats de très nombreuses études portant sur un modèle de valve en-dehors.

La comparaison des valeurs du rapport $f_{thresh}/f_{ac,n}$ montre une spécificité du premier mode, avec des valeurs de $f_{thresh}/f_{ac,1}$ nettement supérieures à celles des régimes suivants. Si on se concentre sur les valeurs minimisant le seuil pour chaque mode, on a $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1} = 1.46$ tandis que les valeurs de $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$, $n \in [2,5]$ sont comprises entre 1.04 et 1.1.

Mode	$f_{l,n}^{opt}$ (Hz)	$f_{thresh,n}^{opt}$ (Hz)	gamme tempérée (Hz)	erreur relative	$f_{ac,n}$ (Hz)	$f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$
1	49	55.6	58.27	-4.6%	38	1.46
2	110	122.9	116.54	5.4%	112	1.1
3	162	180.0	174.81	2.9%	170	1.06
4	215	238.9	233.08	2.5%	228	1.05
5	271	301.6	291.35	3.5%	290	1.04

TABLEAU III – Valeurs de $f_{l,n}^{opt}$, $f_{thresh,n}^{opt}$, de la fréquence de la note de la gamme tempérée correspondante et erreur relative entre $f_{thresh,n}^{opt}$ et la fréquence de la note jouée pour les cinq premiers registres du trombone. La fréquence de résonance acoustique de chaque mode est également indiquée, ainsi que la valeur de $f_{thresh,n}^{opt}$ normalisée par $f_{ac,n}$.

En complément de ces résultats d’analyse de stabilité linéaire, une simulation temporelle a été effectuée pour $f_l = f_{l,1}^{opt} = 49\text{Hz}$ et pour $p_b = 150\text{Pa}$ soit 4 Pa (2.7%) au-dessus de $p_{thresh,1}^{opt}$. La fréquence d’oscillation du régime établi est de $f_{osc} = 61.9\text{Hz}$, soit environ 10% supérieure à $f_{thresh,1}^{opt}$: cette valeur est comparable aux écarts entre f_{osc} et f_{thresh} calculés précédemment au chapitre 8.1.2.

Les deux méthodes d’analyse utilisées indiquent donc que, sur le premier registre, la fréquence d’oscillation obtenue est nettement plus élevée que la fréquence de résonance acoustique $f_{ac,1}$.

Ces résultats sont cohérents avec le fait qu'un musicien joue un *Sib* pédale à 58 Hz sur une résonance située à 38 Hz. Des simulations conduites sur un modèle légèrement différent arrivent à des conclusions similaires [Gilbert and Aumond, 2008]. Malgré sa relative simplicité, ce modèle de cuivre prévoit donc l'important écart entre la note pédale du trombone et la fréquence du mode de résonance qui la supporte, y compris lorsque ce modèle est linéarisé au voisinage de son régime stationnaire.

Pour simplifier encore le modèle, l'ASL est utilisée sur un modèle dont le résonateur est réduit au premier mode du trombone ($N_m = 1$). La fréquence d'oscillation au seuil pour la plus faible pression de seuil est $f_{thresh,1}^{opt} = 61.1$ Hz, de nouveau très éloignée de la fréquence de résonance acoustique. Cela confirme que l'auto-oscillation de la note pédale est bien liée au premier mode de résonance, en contradiction avec une hypothèse précédemment formulée invoquant une coopération des modes supérieurs [Benade, 1976, p.405].

En complément de cette étude, l'expérience proposée dans [Bouasse, 1986, p.370] et réalisée dans [Gilbert and Aumond, 2008], qui consiste à équiper un trombone d'un bec de clarinette, est simulée⁶. Ce dispositif est modélisé par un modèle très similaire à celui présenté dans le chapitre 2, mais avec un modèle de valve "en dedans", plus adapté à la simulation des instruments à anche en roseau [Wilson and Beavers, 1974]. L'anche est donc décrite par une équation très proche de l'eq. (2.6), à l'exception du signe du second membre :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_r}{Q_r} \frac{dh}{dt} + \omega_r^2(h - h_0) = \frac{1}{\mu}(p(t) - p_b). \quad (8.6)$$

L'impédance d'entrée servant à cette simulation a été mesurée sur un trombone sans embouchure, en série avec une portion de cylindre de volume équivalent au bec de clarinette. Les paramètres de l'anche, issus de [Silva, 2009], sont les suivants : $\omega_r = 2 \cdot \pi \cdot 1000$ Hz (beaucoup plus élevée que pour un cuivre), $Q_r = 1.1$, $\mu = 1/4.9$ kg · m⁻², $W = 10^{-3}$ m et $h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ m.

L'analyse de stabilité linéaire appliquée à ce modèle donne $p_{thresh} = 1760$ Pa et $f_{thresh} = 37.55$ Hz : La figure 8.13a) représente la forme d'onde de la pression simulée pour $p_b = 1800$ Pa, la figure 8.13b) est le spectre de cette pression.

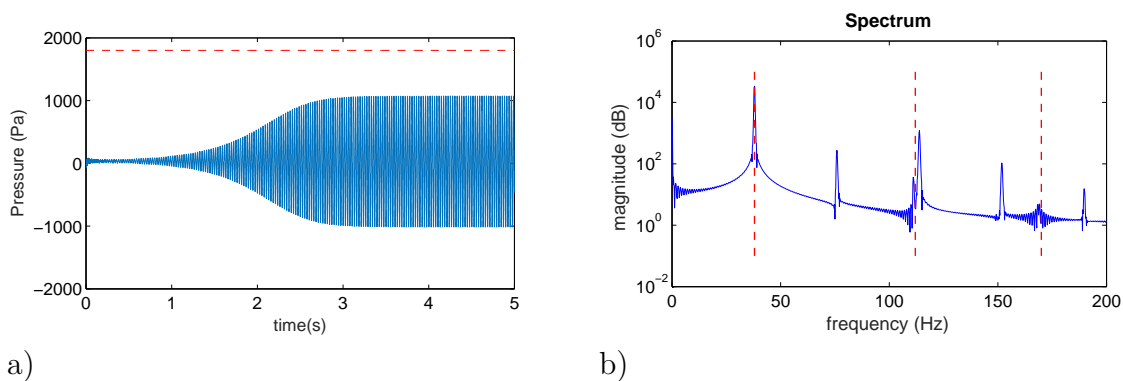


FIGURE 8.13 – . Forme d'onde (a) et spectre (b) de la pression à l'entrée du résonateur, simulée avec un modèle de trombone équipé d'un bec de clarinette avec anche. Le résultat est oscillation périodique à 37.6 Hz. Dans la figure (b), les fréquences de résonance du résonateur sont indiquées par des lignes pointillées rouges.

La fréquence de l'oscillation périodique obtenue lors de cette simulation est une bonne reproduction du *Eb1* joué sur le dispositif expérimental. Les fréquences de résonance du résonateur

6. Expérimentalement, la note est jouée à une fréquence légèrement inférieure à 38 Hz ce qui correspond à un *Mib1* trop bas ou un *Re1* trop haut

ne coïncident pas avec les harmoniques de la fréquence d'oscillation (à part le second mode, proche de la troisième harmonique) : le signal simulé est spectralement très pauvre. Ici, la fréquence d'oscillation est légèrement inférieure à la fréquence de résonance acoustique associée ($f_{osc}/f_{ac,1} = 0.99$) conformément au comportement d'un modèle d'instrument équipé d'une valve "en-dedans" [Wilson and Beavers, 1974, Campbell, 2004] au seuil. Aucun phénomène similaire à la note pédale n'est observé ici. Cela conforte le choix du modèle de valve en-dehors pour la simulation des lèvres d'un cuivriste.

8.2.2 Note Fantôme⁷

Cette étude est complétée par la comparaison des résultats obtenus avec un trombone avec ceux d'un saxhorn, semblable à celui présenté sur la figure 8.14. Tout comme pour un trombone, la note la plus grave jouable au saxhorn est un $B\flat 1$ dont la fréquence de jeu (58 Hz) est très proche de $f_{ac,1}$ qui, pour cet instrument, vaut 57 Hz. Le modèle analysé est en tout point identique au modèle de trombone à l'exception du résonateur, qui est ici l'impédance d'entrée de saxhorn tracée en figure 8.1a) (projetée sur une base de modes complexes). Les résultats d'analyse de stabilité linéaire sont présentés en figure 8.15, qui est l'équivalent de la figure 8.11 pour le saxhorn.



FIGURE 8.14 – Illustration d'un saxhorn baryton semblable à celui dont l'impédance est utilisée ici.

Le premier registre du saxhorn présente un rapport $f_{thresh}/f_{ac,1}$ significativement plus élevé que les valeurs de $f_{thresh}/f_{ac,n}$ pour $n \geq 2$ (Fig. 8.15c). En se focalisant sur les valeurs optimales, $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ vaut 1.23 pour le saxhorn quand les valeurs de $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ sont inférieurs à 1.1 pour $2 \leq n \leq 5$. Le comportement est qualitativement le même que celui du modèle de trombone, pour lequel le rapport $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1} = 1.46$ est significativement plus élevé que celui des registres suivants.

La fréquence d'oscillation optimale au seuil est $f_{thresh,1}^{opt} = 70.1$ Hz. Ceci ne correspond pas au $B\flat$ pédale du saxhorn, mais à une autre note qu'il est possible de jouer sans effort particulier, appelée ici "note fantôme". Bien qu'elle soit très rarement utilisée dans l'écriture musicale, tous les musiciens interrogés ont confirmé l'existence de cette note, jouable sur tout saxhorn ténor ou baryton, et plus généralement sur tout instrument de la famille des tubas. Selon l'instrument, elle se trouve entre une tierce mineure et une quarte juste au-dessus de la note pédale, ce qui signifie un rapport de fréquences entre 1.12 et 1.33 cohérent avec $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1} = 1.23$.

7. Le terme "note fantôme" est un choix de l'auteur pour désigner une note connue des tubistes mais peu documentée dans les littératures scientifique et musicale.

L'analyse du modèle de cuivres prédit donc l'existence d'une note dont l'existence est expérimentalement constatée. Cependant, l'émission d'un $B\flat_1$ pédale au saxhorn, correspondant à un rapport $f_{osc}/f_{ac,1} = 1.02$, n'est pas expliquée par cette analyse du modèle. Pour les deux instruments analysés, le modèle de cuivre prévoit un écart particulièrement élevé entre la fréquence de l'oscillation du premier registre et la fréquence de résonance du premier mode. La valeur du rapport entre $f_{thresh,1}^{opt}$ et $f_{ac,1}$ semble moins liée à l'harmonicité des modes du résonateur qu'aux caractéristiques de la première résonance, et au couplage avec les lèvres du musicien. D'après les tests effectués avec un trombone et un saxhorn, il semble que plus $f_{ac,1}$ est basse, plus le rapport de fréquences est important. Cette hypothèse est testée en modifiant les deux impédances à disposition : la fréquence de résonance du premier mode de chacune est décalée, par pas de 4 Hz, en conservant l'amplitude et le facteur de qualité de ce mode et sans modifier les autres modes. Le rapport $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ est calculé à chaque pas, et les résultats sont représentés sur la figure 8.16.

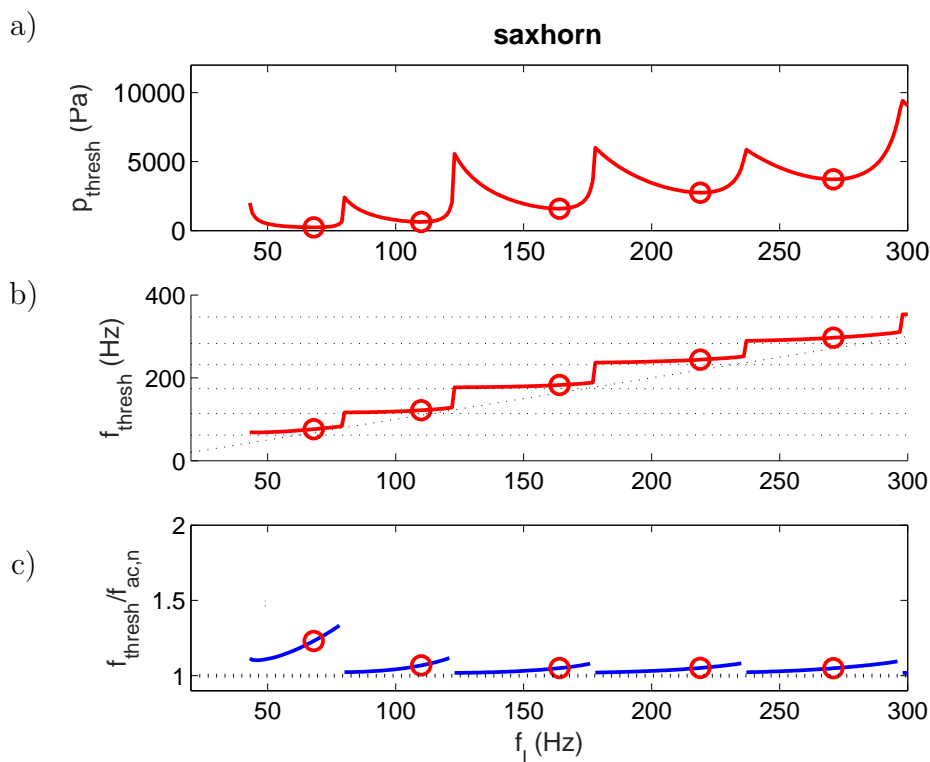


FIGURE 8.15 – Résultats d'ASL d'un modèle de saxhorn, avec les paramètres du tableau II. (a) représente la pression de seuil. (b) représente la fréquence au seuil f_{thresh} . Les horizontales en pointillé noir indiquent les fréquences des modes du résonateur. (c) représente le rapport $f_{thresh}/f_{ac,n}$. Pour chaque mode, les cercles rouges indiquent les valeurs correspondant au seuil de pression le plus faible.

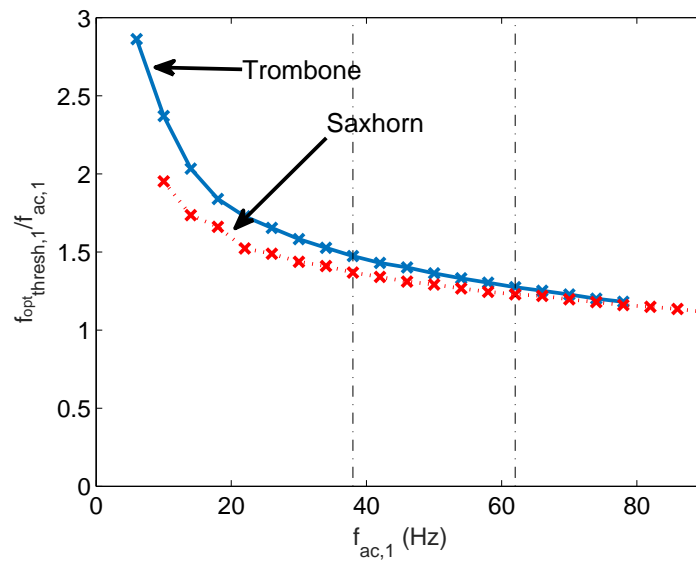


FIGURE 8.16 – Rapports $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ en fonction des différentes valeurs de $f_{ac,1}$ testées, pour l'impédance modifiée d'un trombone (bleu) et d'un saxhorn (rouge). Le rapport croît quand $f_{ac,1}$ diminue.

Ces résultats confirment que le rapport $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ augmente quand la fréquence de résonance du premier mode décroît. Ceci généralise le comportement de la note pédale du trombone et de la note fantôme du saxhorn. Un phénomène similaire est observé sur un modèle de clarinette (valve "en-dedans") [Wilson and Beavers, 1974] : là aussi, quand la fréquence de résonance acoustique décroît, son écart avec la fréquence d'oscillation augmente.

8.2.3 Doublements de période

Une simulation temporelle du modèle de trombone est effectuée pour chaque valeur de f_l entre 50 et 61 Hz. Les spectres des régimes d'oscillation obtenus sont représentés sur la figure 8.17. Pour chaque pas de 1Hz, la fréquence d'oscillation de la simulation f_{osc} et la fréquence au seuil calculée par l'ASL f_{thresh} sont reportées dans le tableau IV.

Pour $f_l = 50$ Hz à 54 Hz (Fig. 8.17a et 8.17b), la fréquence d'oscillation de la simulation est cohérente avec f_{thresh} calculée par l'ASL. Mais à $f_l = 55$ Hz (Fig. 8.17c) la fréquence d'oscillation est brutalement divisée par deux. Le même phénomène est observé entre à 57 Hz (Fig. 8.17e), où f_{osc} est égale au quart de sa valeur initiale. A partir de $f_l = 60$ Hz (Fig. 8.17h), la fréquence fondamentale du signal est à nouveau cohérente avec f_{thresh} , cependant l'enveloppe spectrale est très différente des régimes périodiques observés pour $f_l < 55$ Hz, et il devient difficile d'identifier le régime d'oscillation.

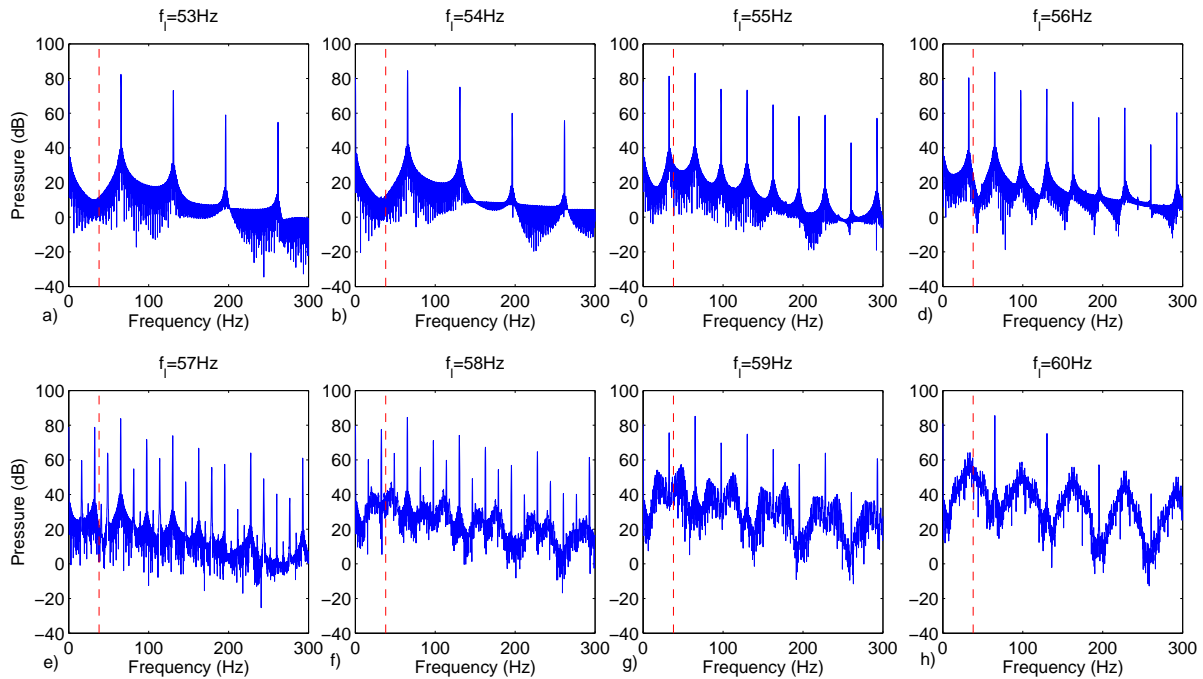


FIGURE 8.17 – Spectres des régimes établis des simulations effectuées pour $f_l = 53$ Hz à 60 Hz dont les données sont reportées dans le tableau IV. Les lignes verticales rouges représentent la fréquence de résonance du premier mode du trombone, $f_{ac,1} = 38$ Hz.

f_l (Hz)	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
f_{osc} (Hz)	65.45	65.48	65.49	65.49	65.46	32.53	32.54	16.32	16.32	32.5	65.1	65.1
f_{thresh} (Hz)	56.3	56.97	57.71	58.36	59.08	59.78	60.51	61.27	62	62.77	63.58	64.44

TABLEAU IV – Fréquences d'oscillation mesurées sur les signaux simulés pour $p_b = 400$ Pa. Les valeurs de f_{thresh} sont également reportées.

Entre $f_l = 55$ Hz et 59 Hz, f_{osc} est inférieure à la fréquence de résonance du premier mode $f_{ac,1}$: la condition de régénération au seuil d'un modèle avec une anche outward n'est plus respectée [Eliott and Bowsher, 1982], le maintien de cette auto-oscillation est donc lié à un doublement de période. Le comportement mis en évidence par ces simulations est à rapprocher des observations expérimentales de [Maganza et al., 1986, Gibiat and Castellengo, 2000] : deux doublements de période successifs, indiquant une cascade sous-harmonique. Des doublements de période ont également été mis en évidence dans des modèles d'instruments de la famille des bois [Gibiat, 1988, Kergomard et al., 2004]. Ces doublements de période ne sont bien sûr pas prévus par l'ASL, qui ne peut prévoir les caractéristiques du régime établi de l'instrument, notamment quand des phénomènes non linéaires provoquent des doublements de période. Cependant, ils apparaissent dans les simulations numériques du modèle, montrant une fois de plus la capacité de celui-ci à reproduire un comportement complexe des cuivres, par ailleurs observé expérimentalement.

8.2.4 Conclusion

L'étude du modèle de cuivre, appliqué au trombone et au saxhorn, sur une plage de f_l plus réduite, met en évidence des spécificités des oscillations supportées par le premier mode acoustique du résonateur. L'écart entre la fréquence de résonance du premier mode $f_{ac,1}$ et la fréquence de résonance

au seuil f_{thresh} du premier régime d'oscillation est particulièrement élevé, comparativement aux régimes portés par les modes suivants : le rapport $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ atteint 1.46 pour le trombone et 1.23 pour le saxhorn pour $n = 1$, tandis qu'il reste inférieur à 1.1 pour $n \geq 2$. Plus généralement, le rapport $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ augmente quand la fréquence du premier mode décroît, similairement à ce qui est observé sur un modèle de clarinette [Wilson and Beavers, 1974]. Une simulation numérique des modèles de trombone et de saxhorn, avec une pression dans la bouche légèrement supérieure au seuil, fait apparaître une oscillation périodique dont la fréquence d'oscillation est également élevé par rapport à $f_{ac,1}$.

Ces résultats prédisent la note pédale du trombone, caractérisée par un fort écart entre la fréquence de jeu du musicien et la résonance acoustique la plus proche. Le modèle de cuivre proposé est donc capable de prédire ce comportement particulier du trombone, y compris lorsque le modèle est linéarisé au voisinage de la solution d'équilibre. La note pédale est également reproduite par un modèle dont le résonateur se limite au premier mode de résonance acoustique du trombone, ce qui confirme l'importance de ce premier mode pour la définition de la fréquence de résonance et contredit l'hypothèse d'une note pédale principalement expliquée par les modes supérieurs de l'instrument [Benade, 1976, p.405]. Le modèle de saxhorn ne reproduit pas la note pédale de cet instrument, mais une note que nous avons appelée "note fantôme", dont l'existence a été attestée expérimentalement sur plusieurs instruments de la famille des tubas. La modélisation d'un trombone équipé d'un bec de clarinette [Bouasse, 1986, Gilbert and Aumond, 2008] aboutit à une fréquence d'oscillation très proche de la fréquence de résonance acoustique du premier mode, ce qui conforte le choix de modélisation des lèvres par une valve "en-dehors".

Sur une plage de f_l de 55 à 58 Hz, les fréquences d'oscillation calculées par simulation temporelle sont très différentes de f_{thresh} . Les valeurs de f_{osc} subissent deux divisions par deux successivement. Ces deux doublements de période traduisent une cascade sous-harmonique. De manière prévisible, ce phénomène n'est pas pris en compte par le modèle linéarisé au voisinage du régime stationnaire utilisé pour l'analyse de stabilité linéaire.

Chapitre 9

Jeu avec une sourdine

Résumé introductif

Ce chapitre reprend un article soumis pour publication à *Acta Acustica united with Acustica*, co-signé avec Christophe Vergez et Joël Gilbert : "Physical modelling of trombone mutes, the pedal note issue". Un tromboniste utilisant une sourdine sèche a de grandes difficultés à jouer certaines notes pédales, notamment le $B\flat_1$ qui est la note pédale correspondant à la première position de la coulisse. Ces notes sont peu stables, décrites comme des sons "roulants" par les musiciens.

Il est connu que l'adjonction d'une sourdine sèche à un trombone fait apparaître un mode acoustique "parasite", visible dans l'impédance d'entrée de l'instrument sous la forme d'un pic supplémentaire entre ceux correspondant aux premier et second modes. L'amplitude de ce pic supplémentaire est un ordre grandeur en dessous des premier et second pics d'impédance. Une sourdine équipée d'un système de contrôle actif a été développée par [Meurisse et al., 2015] pour annihiler ce pic parasite, ce qui permet à un tromboniste de jouer facilement les notes pédales qui étaient perturbées par une sourdine normale.

Comme analysé au chapitre 8.2, le modèle de trombone présenté au chapitre 2 reproduit le phénomène de note pédale sur un trombone sans sourdine. Le comportement de ce modèle est ici examiné pour pour trois configurations : un trombone sans sourdine ("trombone ouvert"), ce même trombone équipé d'une sourdine sèche standard ("sourdine passive"), et enfin équipé de la sourdine équipée du dispositif de contrôle actif de [Meurisse et al., 2015] ("sourdine active"). Dans la pratique, cela revient à changer le résonateur de ce modèle, donc à modifier l'impédance d'entrée utilisée. Les trois mesures d'impédances sont projetées sur une base de modes complexes pour obtenir trois impédances approximées, une pour chaque situation. Les paramètres de l'excitateur sont ceux définis au chapitre 3, identiques pour les trois situations.

L'analyse de stabilité linéaire est appliquée aux trois configurations sur une plage de paramètres utilisables pour produire une note pédale. Les résultats des configurations "trombone ouvert" et "sourdine active" sont très similaires. En revanche, les résultats de la configuration "sourdine passive" font émerger un nouveau régime au delà d'une certaine valeur de f_l , dont les fréquences au seuil correspondent à une oscillation sur le mode parasite induit par la sourdine. Les résultats d'ASL sont cohérents avec l'expérience : d'une part la perturbation des régimes d'oscillation au voisinage de la note pédale est détectée, sous la forme d'un régime d'oscillation supplémentaire. D'autre part l'effet de la sourdine active est reproduit. Une série de simulations temporelles permet d'illustrer et de compléter ces résultats. Tandis que le modèle de trombone sans sourdine et celui équipé de la sourdine active ont des comportements très proches, l'émergence d'un régime d'oscillation parasite est à nouveau observée pour le trombone avec une sourdine passive. Ce nouveau

régime d'oscillation devient rapidement une oscillation quasi-périodique, produisant un son "roulant" semblable à ce que les trombonistes obtiennent. Une fois de plus, le modèle physique choisi permet de reproduire et d'expliquer non seulement la note pédale du trombone, mais également sa perturbation par l'usage d'une sourdine, ainsi que l'efficacité du dispositif de contrôle actif mis en œuvre pour corriger cette perturbation.

Physical modelling of trombone mutes, the pedal note issue.

Lionel Velut, Christophe Vergez, Joël Gilbert

Article soumis à *Acta Acustica united with Acustica*

9.1 Introduction

A usual solution for changing the timbre of a brass instrument consists in using a mute, which is a device plugged to the opening of the instrument bell, or held by hand just in front of the bell. The shape and the material of the mute affect the pressure radiation of the bell, therefore modifying the emitted sound [Campbell and Greated, 1994, p.398]. As a side effect, introducing an obstacle in the bell, or close to it, also modifies the acoustical properties of the instrument [Backus, 1976]. This has various consequences, including modification of the instrument tuning and of the feeling the musician has of his instrument.

Pedal notes are the lowest playable notes on a trombone. When the slide is fully closed, the note played is a Bb^1 , corresponding to a playing frequency of $58Hz$ in equal temperament. These notes are quite particular regimes of oscillation of the instrument, for which the playing frequency is farther from the resonance frequency of the corresponding acoustical mode (the lowest one) than for other regimes [Gilbert and Aumond, 2008, Velut et al., 2016c]. Furthermore, the lowest acoustical mode is inharmonic with other acoustical modes. When a straight mute is inserted in the trombone, playing stable pedal notes on the three first slides positions — Bb^1 , A^1 and Ab^1 — is uneasy and results in a rolling, unstable sound [Sluchin and Caussé, 1991, Meurisse et al., 2015]. Measurements of the input impedance of a trombone with a mute [Meurisse et al., 2015, Velut et al., 2016d] show the occurrence of a parasitic acoustical mode between the first and the second modes.

This paper will particularly focus on the pedal Bb^1 , corresponding to the slide fully pulled. It will hereinafter be referred to as "the pedal note". An active control device has been previously developed to remove this parasitic mode [Meurisse et al., 2015], which makes it possible to play the pedal note with a straight mute. It consists of an "active mute", a commercial straight mute equipped with an active control device which cancels the aforesaid parasitic resonance mode.

The purpose of this paper is to investigate to what extent a simple physical model of trombone can predict the effect of a trombone straight mute on the pedal note and the effectiveness of the active mute. The physical model of brass instrument is first presented. Then, linear stability analysis (LSA) and time-domain simulations are used to analyse the behaviour of the pedal note in this model. Analyses are conducted on an "open trombone" configuration (tenor trombone without any mute), a "passive mute" configuration (the same trombone with a consumer straight mute) and an "active mute" configuration (the same trombone with an identical straight mute and the described active control loop). Results of this model are compared with the experimental results from [Meurisse et al., 2015].

9.2 Tools

Brass instrument model

A physical model of trombone, suitable for a large class of music instruments, is presented in this article. Following Helmholtz pioneering work [von Helmholtz, 1877], the trombone is modelled as a closed-loop system consisting of an exciter and a resonator which are coupled, as illustrated in Fig. 9.1. Such a system is able to self-oscillate in different oscillation regimes.

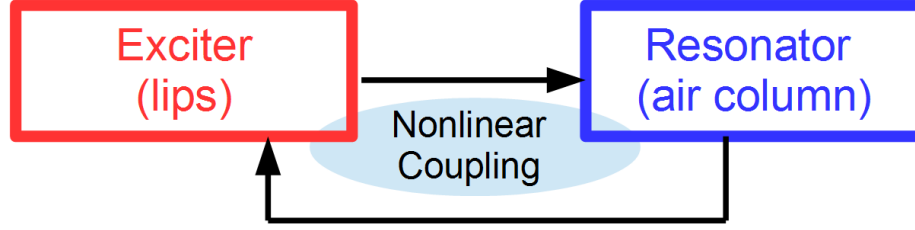


FIGURE 9.1 – Closed-loop model in free oscillation, suitable for the description of most self-sustained musical instruments, including trombones. Self-sustained oscillations are generated by the localised non-linear coupling (here the airflow between lips) between a linear exciter (here the lips) and a linear resonator (here the air column inside the instrument bore).

For a brass instrument, the exciter is the lips of the musician, which act as a valve : the section of the channel between the lips depends on the pressure difference through these lips as well as on their mechanical characteristics. Multiple models of the lip reed have been proposed and used, with one degree of freedom [Eliott and Bowsher, 1982, Fletcher, 1993, Cullen et al., 2000, Silva et al., 2007] or 2 DOF [Adachi and Sato, 1996, Campbell, 2004, Lopez et al., 2006, Newton et al., 2008]. The model retained for this paper is the one-DOF valve model, usually referred to as the "outward-striking" model, also called (+,−) swinging-door model in the literature :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} + \omega_l^2(h - h_0) = \frac{1}{\mu}(p_b - p(t)), \quad (9.1)$$

where h is the height of the lip channel (m) ; p is the pressure at the input of the instrument, in the mouthpiece (Pa) ; p_b is the constant blowing pressure in the mouth (Pa) ; $\omega_l = 2\pi f_l$ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) is the lip resonance angular frequency ; Q_l is the (dimensionless) quality factor of the lips ; h_0 is the value of $h(t)$ at rest ; μ is an equivalent surface mass ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$).

Although it does not fully reproduce all the observed behaviours of human or artificial lips, this model is sufficient for reproducing the normal playing situations [Yoshikawa, 1995], including the pedal note of the trombone [Velut et al., 2016c] and multiphonic sounds [Velut et al., 2016a]. As a limitation, this model is known to oscillate at higher frequencies than those at which a musician would play on the same acoustical mode. Even for this relatively simple model, choosing the lip parameters is challenging and requires a thorough bibliographical review. This was conducted in [Velut et al., 2016c]. The resulting set of parameters is given in table I.

h_0 (m)	W (m)	$1/\mu$ ($\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$)	Q_l
$5 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-3}$	0.11	7

TABEAU I – Lip parameters retained in this study.

The resonator is the air column contained in the bore of the instrument. Given the low playing amplitude considered in this article, the brassiness phenomenon, related to non-linear propagation in the instrument [Myers et al., 2012] is not taken into account. Under this hypothesis, the resonator can be fully described by its input impedance, which is by definition the ratio of the pressure $P(\omega)$ to the flow $U(\omega)$ at the input of the instrument, in the frequency domain :

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)}. \quad (9.2)$$

This value can be measured thanks to the sensor described in [Macaluso and Dalmont, 2011]. In this paper, three input impedance measurements are used : the impedance of an open trombone (without any mute), the impedance of the same trombone with a "passive mute" (mute without

active control) and the impedance of this trombone with an "active mute", with the feedback active control device enabled.

The input impedance can be considered as a sum of peaks, each peak corresponding to a resonance mode of the air column inside the instrument. Thus, it can be fitted with a sum of complex modes, corresponding to a sum of poles-residues functions :

$$Z(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^{N_m} \frac{C_n}{j\omega - s_n}, \quad (9.3)$$

C_n and s_n being the dimensionless complex residues and poles of the complex modes of the fitted impedance, respectively. $Z_c = \frac{\rho \cdot c}{\pi \cdot r^2}$ is the characteristic impedance of the resonator, ρ is the air density, c the celerity of acoustic waves in the air and r the input radius of the mouthpiece. N_m is the number of modes used to fit the impedance fixed to $N_m = 13$ in this article. Translation of eq. (9.3) in the time domain leads to an ordinary differential equation for each complex modal component p_n of the pressure $p(t)$:

$$\frac{dp_n}{dt} = s_n p_n(t) + Z_c C_n \cdot u(t) \quad \forall n \in [1..N_m], \quad (9.4)$$

where $u(t)$ is the time-domain expression of the flow at the input of the instrument. Furthermore, $p(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n(t)]$.

The fit is optimised by a least mean squares algorithm. This results in a very good match between the measured impedance and the fit, as shown in Fig. 9.2.

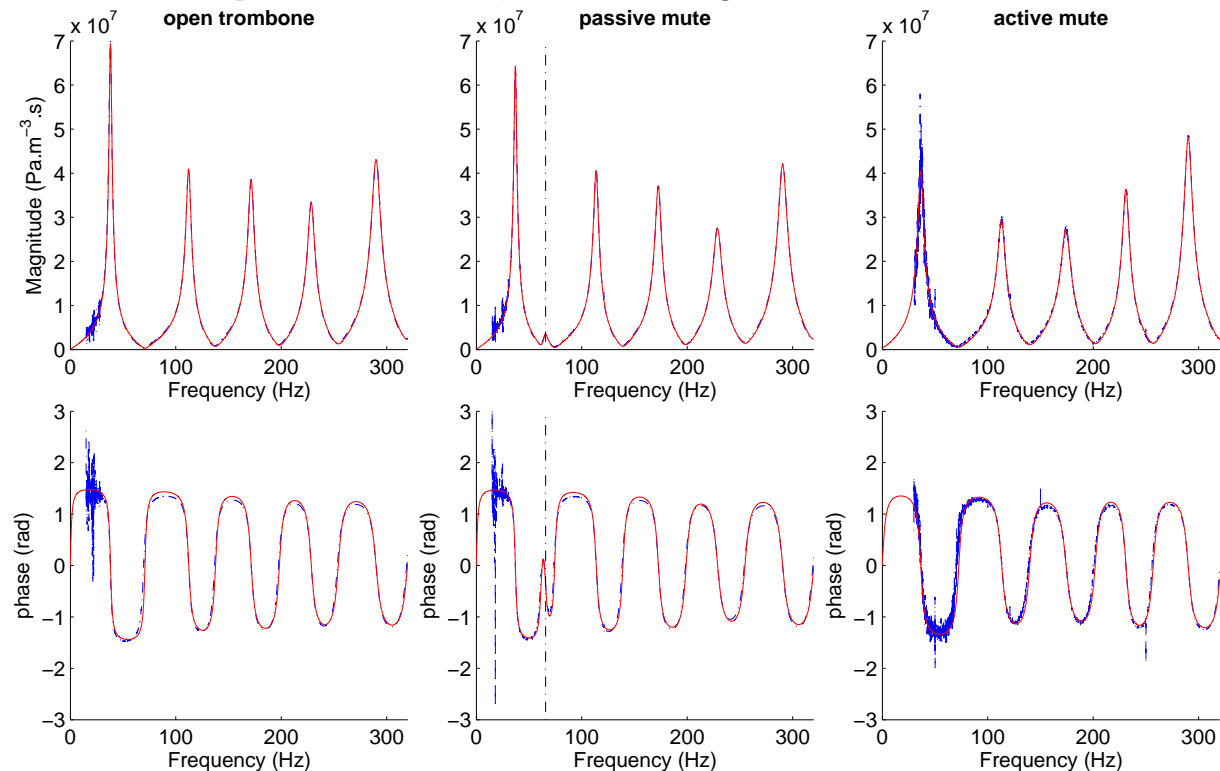


FIGURE 9.2 – (colour online) Comparison of the measured impedances (blue, dash-dotted) and their modal fits (red, plain) with 13 complex modes. Magnitudes (top plots) and phases (bottom plots) of the 3 impedances — open trombone (left), passive straight mute (middle) and active mute (right) — are displayed. The dash-dotted line at 65.7 Hz indicates the parasitic mode.

The lips and the resonator are coupled through the expression of the flow $u(t)$ of the air jet through the lip channel :

$$u(t) = W.h(t).\sqrt{\frac{2.|p_b - p(t)|}{\rho}}.sign(p_b - p(t)).\theta(h), \quad (9.5)$$

where W is the width of the lip channel and ρ the air density, $sign$ is the sign function and $\theta(h)$ is the Heaviside step function. This non-linear expression of the flow was proposed in [Wilson and Beavers, 1974, Elliott and Bowsher, 1982] and has been used in almost every publication about brasswind and woodwind physical models since.

The whole model can therefore be written :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} + \omega_l^2(h - h_0) = \frac{1}{\mu}(p_b - p(t)) \\ u(t) = W.h(t).\sqrt{\frac{2.|p_b - p(t)|}{\rho}}.sign(p_b - p(t)).\theta(h) \\ \frac{dp_n}{dt} = s_n p_n(t) + Z_c C_n .u(t) \quad \forall n \in [1..N_m] \\ p(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_n(t)] \end{array} \right. \quad (9.6)$$

Linear stability analysis

The model described above has a variety of possible behaviours. One of them is a static solution, all variables being constant. The stability of this static solution is a useful piece of information, as instability of the static solution indicates possible emergence of oscillating solutions through Hopf bifurcations. This stability analysis can be carried out on a linearised model : non-linear equations are linearised in the vicinity of the static solution. Then, the stability of this static solution is assessed through computation of the eigenvalues of the Jacobian matrix. If at least one eigenvalue has a positive real part, any perturbation of the static solution will grow exponentially, which by definition means the solution is unstable. Details on the method applied to brass instruments can be found in [Velut et al., 2016c].

This method is used to find the lowest blowing pressure value leading to an unstable static solution. This p_b value is hereafter called p_{thresh} . The imaginary part of the same eigenvalue indicates the oscillation angular frequency for $p_b = p_{thresh}$, provided that the oscillating solution is periodic. The corresponding frequency is noted f_{thresh} .

LSA has been used for flute-like instruments [Auvray et al., 2012, Terrien et al., 2014] as well as reed woodwinds [Wilson and Beavers, 1974, Chang, 1994, Silva et al., 2008] and brasswinds [Cullen et al., 2000, Velut et al., 2016c]. This method does not provide information about the stability of the oscillating solution which results from the destabilisation of the static solution. The only piece of information about the resulting waveform is f_{thresh} , which is only valid if said solution is periodic.

An example of results is given in Fig. 9.3 : p_{thresh} (a) and f_{thresh} (b) are plotted against the lip resonance frequency f_l , which is a control parameter used by the musician to change the note played with the trombone. As observed in [Velut et al., 2016c], the plots can be divided in several f_l ranges corresponding to U-shaped sections of the p_{thresh} curves and very lightly growing plateaus of f_{thresh} just above the acoustic resonance frequencies of the resonator.

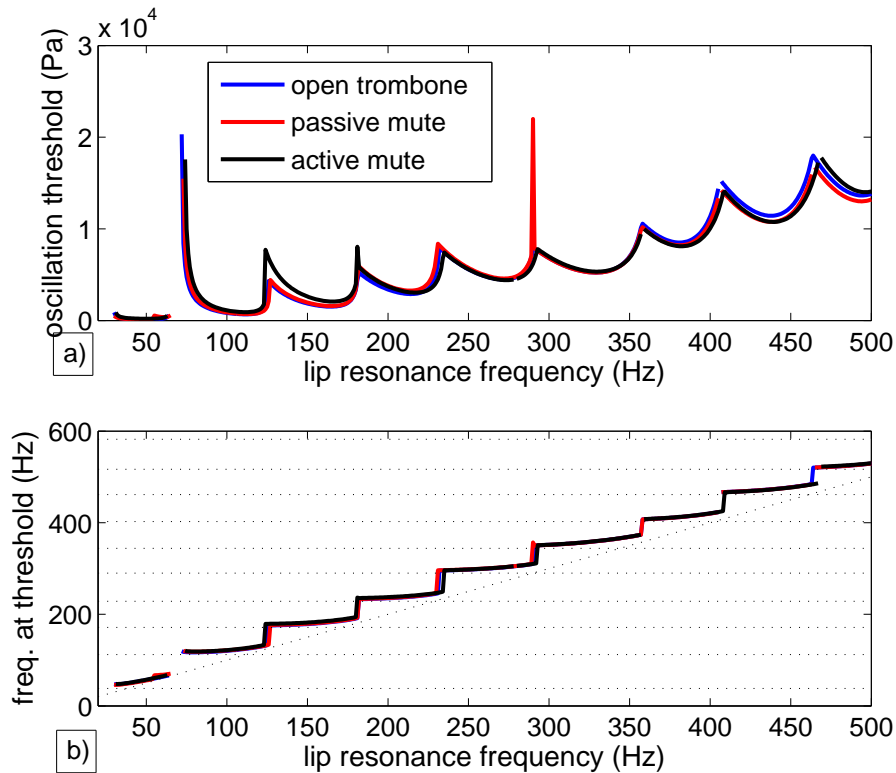


FIGURE 9.3 – (colour online). Linear stability analysis results : p_{thresh} (a) and f_{thresh} (b) are plotted against f_l . Results for the open trombone (blue), the passive mute (red) and the active mute (black) are displayed. Black dotted lines of the bottom plot are the resonance frequencies of the open trombone (horizontal) and the bisector of the axes ($f_{thresh} = f_l$). The qualitative behaviour of the open trombone, the passive mute and active mute are very similar at this scale.

Time-domain simulation

To get more information about the nature of oscillating solutions of the instrument model, solving the non-linear equation system Eq. (9.6) is required. Numerical differential equation solvers provide simulated values of the system variables. Simulated values of the pressure at the input of the instrument p have been obtained with the open-source Python library called MO-REESC [MoReeSC, 2013], which has been developed specially for time-domain simulation of self-oscillating reed and lip valve instrument models [Silva et al., 2014].

To illustrate the additional information provided by time-domain simulation, waveforms and spectra of two simulated pressure signals are given in Figure 9.4. The simulation in Fig. 9.4 (a) and (c) was computed with $f_l = 90$ Hz while the one in Fig. 9.4 (b) and (d) was computed with $f_l = 110$ Hz, each one on an open trombone, with a blowing pressure 10% higher than the oscillation threshold. While LSA results for these two situations are very close to one another, numerical resolution of the complete model shows a difference in the nature of the oscillation : while the oscillation is periodic for $f_l = 90$ Hz, it appears to be quasi-periodic for $f_l = 110$ Hz.

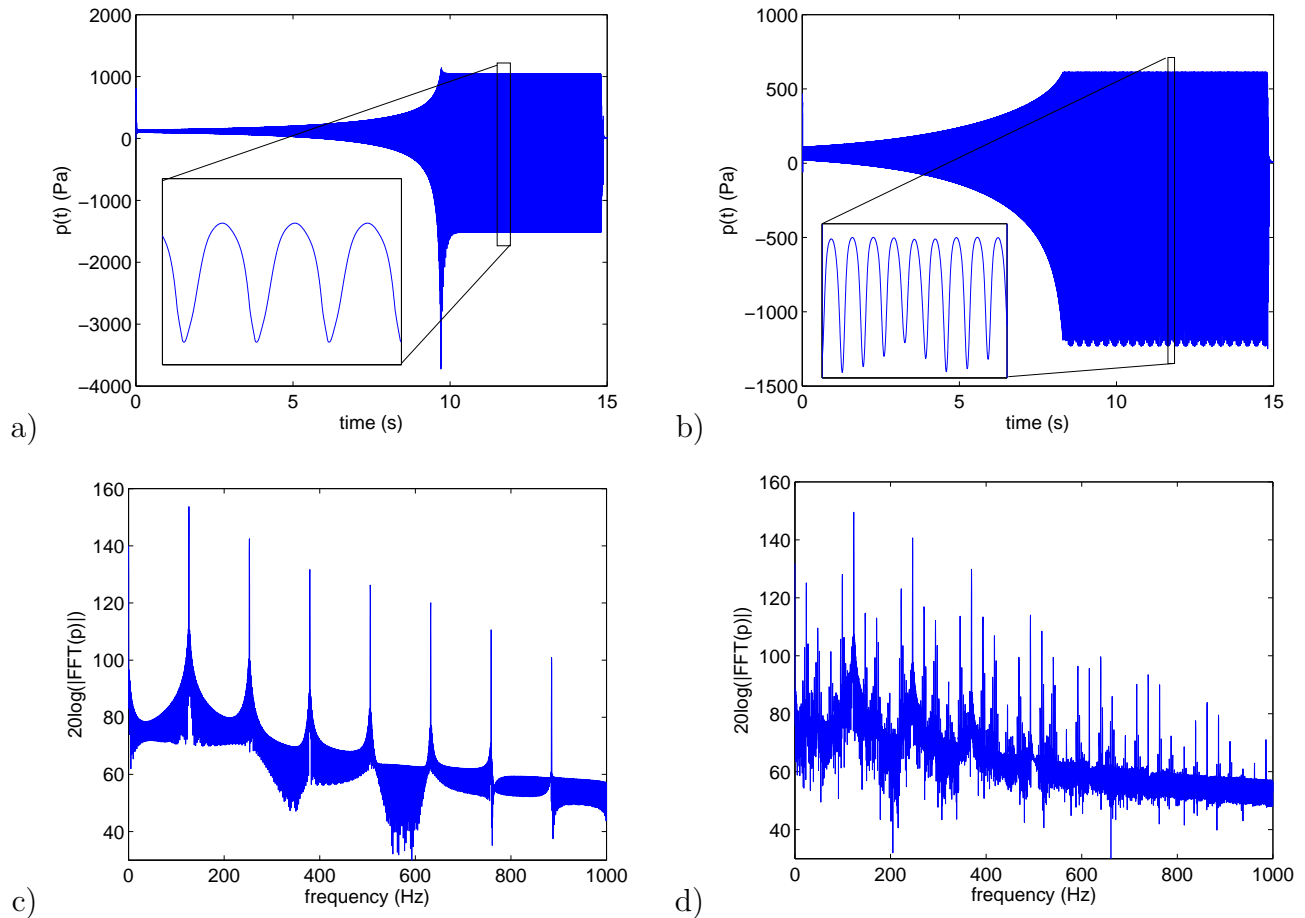


FIGURE 9.4 – Waveforms of simulated p signals for $f_l = 90$ Hz (a) and $f_l = 110$ Hz (b) with zooms on some periods, along with spectra of their respective sustained regime in c) and d). For each simulation p_b is set to $1.1 \cdot p_{thresh}$. $f_l = 90$ Hz results in a periodic oscillation while $f_l = 110$ Hz results in a quasi-periodic oscillation with well defined secondary peaks.

The f_l and p_b values for simulations are chosen thanks to LSA, avoiding a long and cumbersome search for the oscillation threshold with multiple simulations. The complementarity of these methods quickly provides a lot of information about relevant points of the oscillation regime.

9.3 Results

LSA

Linear stability analysis was performed on the three configurations studied : open trombone, passive mute, and active mute. Choosing a configuration consists in choosing C_n and s_n values among the three sets obtained by fitting, all other parameters of the model remaining the same. Lip parameters were taken from Table I. LSA was performed within the pedal note range, for f_l from 30 Hz to 65 Hz. This results in f_{thresh} values corresponding to an oscillation sustained by the first acoustical mode of the open trombone. Figure 9.5 is a zoom on Fig H.4 in the considered f_l range. Fig. 9.5a) showing the threshold pressures p_{thresh} , while Fig. 9.5b) is the frequency at threshold f_{thresh} .

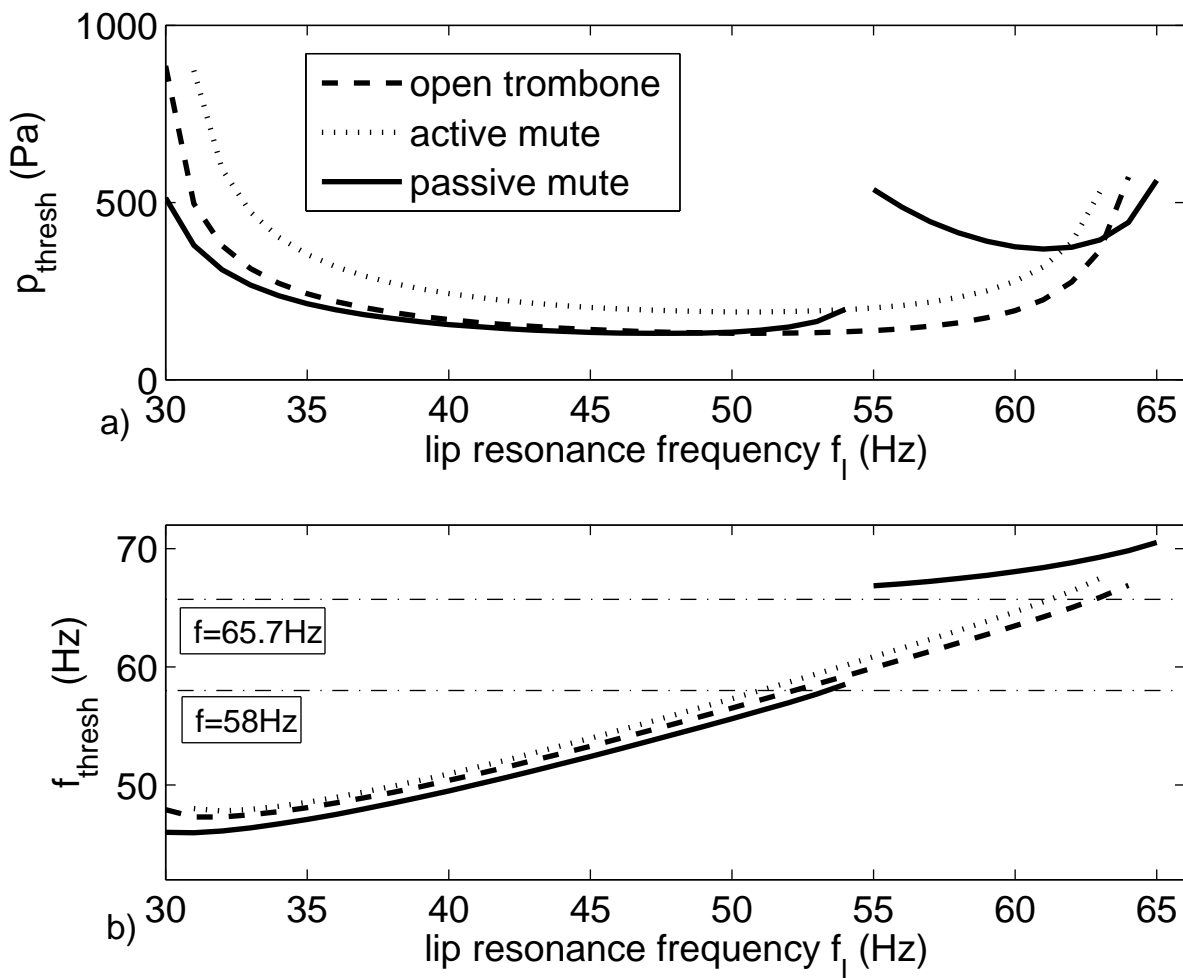


FIGURE 9.5 – Results of LSA in the vicinity of the pedal note (zoom of Fig.9.3). Results with an open trombone (dashed line), a passive mute (solid line) and the active mute (dotted) are plotted together. (a) is the oscillation threshold pressure p_{thresh} , (b) is the oscillation frequency at threshold f_{thresh} , against f_l . Horizontal dash-dotted lines in (b) indicate 58 Hz (playing frequency of the pedal $B\flat$) and 65.7 Hz (resonance frequency of the parasitic mode of the passive mute). While open trombone and active mute have very similar behaviours, the oscillation regime expected for the trombone with the passive mute becomes different above $f_l = 55$ Hz with a sudden increase in the p_{thresh} and f_{thresh} values.

The open trombone and the active mute behaviours are similar : the $p_{thresh} = F(f_l)$ plot is U-shaped. f_{thresh} is above the trombone's first acoustical resonance frequency (39 Hz) and grows monotonously with f_l . Within this f_l range, the oscillation threshold of the active mute trombone is about 75 Pa higher than that of the open trombone, and f_{thresh} is also 0.5 to 1.5 Hz higher. For $f_l \leq 54$ Hz, the results for the trombone with a passive mute are similar to those for the other configurations. But from $f_l = 55$ Hz, both the pressure threshold and the expected playing frequency increase significantly : p_{thresh} suddenly jumps from 198.6 to 536.9 Pa, while f_{thresh} increases by 8.3 Hz (13%, i.e. slightly more than a tone), to reach 66.8 Hz. This value is just above the resonance frequency of the parasitic peak induced by the passive mute.

f_{thresh} covers a range of frequencies around the expected playing frequency of a pedal $B\flat = 58$ Hz. The results for the open trombone and the active mute configurations are very close to one

another, the only difference being a rather small offset in p_{thresh} and f_{thresh} . In contrast, the passive mute results stand out from the two other configurations : for f_l values above 55 Hz, p_{thresh} and f_{thresh} increase suddenly. The f_{thresh} value obtained is above the acoustic resonance frequency of the parasitic mode related to the passive mute, and so the regeneration condition [Elliott and Bowsher, 1982, Campbell, 2004] is satisfied for an oscillation supported by this parasitic mode.

These results can account for the difficulty of playing a stable pedal note with a passive mute : the LSA indicates a perturbation of the oscillation frequency at threshold, for parameters which could be those used for the pedal note. However, experimental results shown in [Meurisse et al., 2015] suggest a non-periodic oscillation when a musician tries to play a pedal note with a passive mute. As LSA cannot predict the nature of the oscillation, further investigation on the complete non-linear model is needed. This is the purpose of the numerical simulations presented in the following section.

Time-domain simulations

Time-domain simulations were carried out within the same range of f_l as for LSA, in 1 Hz steps, for each configuration : trombone alone, trombone with a passive mute and finally trombone with active mute. The blowing pressure was set to $p_b = 1.1 \cdot p_{thresh}$ as in [Velut et al., 2016c] in order to keep manageable transient times. This value is close enough to p_{thresh} so that cautious comparisons can be carried out between these simulations and LSA.

Simulated pressure signals were separated into a transient and a sustained regime with the help of the "mironsets" function from MIRtoolbox [Lartillot and Toiviainen, 2007]. The spectra of all the sustained regimes were computed. Figure 9.6 plots spectra of $p(t)$ for representative values of f_l . For $f_l < 55$ Hz, the three configurations - —open trombone, passive mute, active mute —- lead to a periodic oscillation, as illustrated for $f_l = 53$ Hz by (Fig. 9.6a). The oscillation frequency is a bit higher than f_{thresh} : 7.5% for open trombone and active mute, and 2.5% higher for the passive mute. Oscillation frequencies higher than f_{thresh} when $p_b > p_{thresh}$ is coherent with the fact that a musician's playing frequency gets higher when he increases his blowing pressure. The trombone with a passive mute has a lower oscillation frequency than the open trombone, which has itself a slightly lower oscillation frequency than that of the trombone with the active mute. The oscillation frequencies range from 60 to 64 Hz, a bit higher than $Bb = 58$ Hz. This is sensible since this model is known to oscillate at higher frequencies than those at which a musician plays.

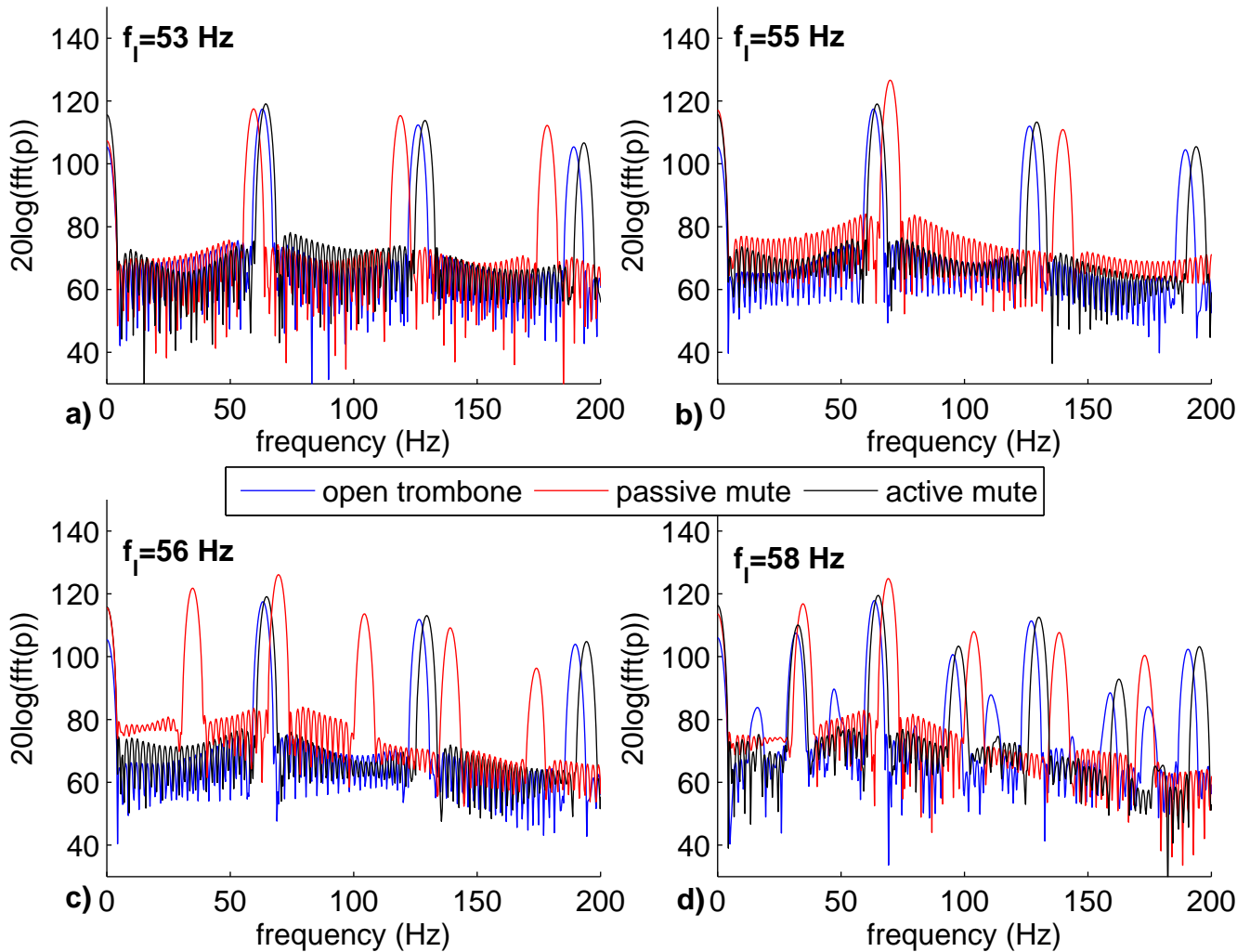


FIGURE 9.6 – (Colours online) Spectra of the simulated $p(t)$ signals, for $f_l = 53$ Hz (a), 55 Hz (b), 56 Hz (c) and 58 Hz (d). p_b is set to 110% of the oscillation threshold. For each f_l value, results with the open trombone (blue), the passive mute (red) and the active mute (black) are displayed. The results for the open trombone and the passive mute are noticeably similar.

At $f_l = 55$ Hz (Fig. 9.6b) the oscillation frequency of the passive mute configuration suddenly jumps from 59.4 to 69.6 Hz, making it play sharper (nearly a minor third) than the two other configurations. This is consistent with the LSA results, where f_{thresh} suddenly increases by 8 Hz for this f_l value. The oscillations are still periodic and above the acoustical resonance frequency of the first mode; but for $f_l = 56$ Hz and above (illustrated by Fig. 9.6c) the fundamental frequency of the passive mute falls to 34.8 Hz. This is nearly half its former value, and under the trombone's first acoustic resonance frequency (39 Hz). Finally, for $f_l \geq 58$ Hz (Fig. 9.6d), all configurations result in fundamental oscillation frequencies about half, or a quarter, of the oscillation frequencies obtained for lower f_l values.

Simulation and LSA results are consistent : when f_l reaches 55 Hz, the oscillation frequency of the trombone with a passive mute suddenly increases. This is related to a regime change in the instrument : for $f_l < 55$ Hz, the oscillation is mainly supported by the trombone's first acoustical mode, while above, the parasitic mode at 65.7 Hz caused by the mute becomes the main

supporting mode of the oscillation, which explains the increase in the oscillating frequency. Above $f_l = 56$ Hz, however, the oscillation frequency of the passive mute decreases to half of its former value. As the oscillation frequency is under the trombone's first acoustical resonance frequency, the regeneration condition of a model with outward-striking valve is not satisfied [Campbell, 2004]. This situation suggests a period-doubling phenomenon [Bergé et al., 1995]. When increasing f_l again, the three configurations appear to undergo period doubling, which is even doubled for the open trombone with a fundamental frequency of 16.2 Hz. Sub-harmonic cascade has already been put in evidence for trombones [Gibiat and Castellengo, 2000], notably in a previous study with the very same model and parameters [Velut et al., 2016c].

These results confirm the existence of a parasitic regime of oscillation for the passive mute configuration, which could explain why musicians experience difficulties when trying to play the $B\flat$ pedal in this situation. This parasitic regime is sustained by the parasitic acoustical mode brought by the mute. Furthermore, in accordance with the experimental results published in [Meurisse et al., 2015], the simulation results are qualitatively the same for the open trombone and the active mute, with very close oscillation frequencies. The range of f_l leading to periodic oscillations near the pedal note frequency is quite wider for the open trombone and the active mute than for the passive mute.

9.4 Conclusions

Playing a stable $B\flat$ 1 on a trombone with a straight mute is very difficult. An active mute has been developed [Meurisse et al., 2015] to deal with this issue. Two analysis tools, LSA and time-domain simulation, are used to investigate to what extent the chosen brass instrument model reproduces the experimental behaviour of the trombone pedal note when the trombone is equipped with a commercial, passive straight mute, and when using the said active-control mute. LSA and time-domain simulation results are quite identical for the open trombone and the trombone with an active mute. The model is therefore able to predict the efficiency of the active control device which makes the pedal note easily playable again. Results of the model of a trombone equipped with a passive mute, however, are clearly different from those of the open trombone model : the pedal note is disturbed by a new oscillation regime, which seems related to the parasitic acoustical mode added by the mute. Hence, even a "small" perturbation of the input impedance, such as a peak 20 times smaller in amplitude than surrounding peaks, can strongly affect the behaviour of a resonator.

As in a previous paper [Velut et al., 2016c], this study shows a rather good agreement between LSA results and time-domain simulations, within the limits of the LSA method. This study on mutes also shows the relevance of the chosen brass instrument model, which is able to predict a number of behaviours of the trombone, including particular playing regimes [Velut et al., 2016c, Velut et al., 2016a] and, in the present case, the influence of modifications of the instrument bore.

The methodology proposed seems relevant, as beginning a study with LSA very quickly gives an overview of the potential behaviour of the system under given conditions. This fast computation already provides interesting results, which can be interpreted alone. However, if further exploration of the oscillation regime is required, LSA results give hints for choosing f_l and p_b values for initialising other analysis methods.

9.5 Acknowledgements

The authors would particularly like to thank Thibault Meurisse and Adrien Mamou-Mani for providing the input impedance measurements used here.

This work was done in the frameworks of the Labex MEC (ANR-10-LABX-0092) and of the A*MIDEX project (ANR-11-IDEX-0001-02), funded by the French National Research Agency (ANR).

Chapitre 10

Jeu multiphonique

Résumé introductif

Ce chapitre reprend un article accepté à la publication dans le *Journal of the Acoustical Society of America*, co-signé avec Christophe Vergez et Joël Gilbert : "Measurements and time-domain simulations of multiphonics in the trombone".

Ce chapitre s'intéresse ici aux multiphoniques, un effet sonore utilisé par les cuivristes. Une des techniques possibles pour produire cet effet consiste à simultanément jouer une note et en chanter une autre dans l'embouchure. Le son qui résulte de cette technique est perçu par l'auditeur comme un accord ou un agrégat composé de plus de deux notes distinctes. Le but de cet article est d'une part d'analyser des sons produits par un tromboniste, d'autre part d'évaluer la capacité du modèle étudié dans cette thèse à reproduire les phénomènes observés.

Des signaux de pression dans la bouche, dans l'embouchure et à l'extérieur du pavillon, mesurés *in vivo* sur un tromboniste jouant des multiphoniques, sont comparés à ceux obtenus par simulation temporelle d'un modèle dérivé de celui présenté au chapitre 2. Ce modèle comporte une composante de forçage ajoutée au système auto-oscillant, qui modélise le signal chanté par le musicien. En pratique cela se traduit par l'ajout d'une composante sinusoïdale dans la pression dans la bouche, qui est représenté par $p_m(t) = p_m^0 + p_m^1 \cdot \sin(\theta(t))$ où p_m^0 est la pression statique due à l'expiration du musicien et p_m^1 l'amplitude du forçage modélisant le chant.

La première comparaison porte sur un multiphonique consistant à jouer un Fa_3 et chanter un Do_4 simultanément. Les deux composantes sont séparées d'une quinte, soit un rapport de fréquence 3 : 2. Sous réserve de choisir une amplitude p_m^1 élevée par rapport à l'amplitude du chant mesuré dans la bouche, les résultats de simulations et de mesures sont comparables. Les spectrogrammes des mesures de pression interne et externe font apparaître les composantes harmoniques du chant et du jeu, mais aussi des composantes dont les fréquences sont des combinaisons linéaires de la fréquence jouée et de la fréquence chantée. De façon similaire, les spectrogrammes des simulations de p et p_{ext} comportent les composantes harmoniques des fréquences d'auto-oscillation et de forçage, ainsi que des composantes qui sont les combinaisons linéaires de ces fréquences. Ceci est une conséquence de l'intermodulation au sein du modèle non linéaire d'instrument de musique. Une seconde comparaison est effectuée, cette fois dans le cas d'une fréquence de chant (ou de forçage) décroissante dans le temps. Là encore, des composantes dont les fréquences sont des combinaisons linéaires du jeu et du chant – respectivement de l'auto-oscillation et du forçage — apparaissent. L'intermodulation se renforce lorsque les deux fréquences se rapprochent, et provoque une modulation d'amplitude à une fréquence qui correspond à l'écart entre les fréquences d'auto-oscillation et de forçage. Les signaux obtenus sont quasi-périodiques, avec de brefs passages périodiques quand le rapport des deux fréquences est un nombre rationnel (résonances internes). Quelques modifications du modèle sont explorées, comme par exemple un modèle minimaliste où le résonateur est

limité à un seul mode, ou un modèle dont le signal de forçage est constitué de trois composantes harmoniques. Ces modifications confirment les résultats précédents.

La nature des sons multiphoniques — quasipériodiques, ou périodiques résultant de résonances internes — est mise en évidence par l'analyse de ces mesures et simulations. Les contenus fréquentiels des signaux simulés et mesurés sont remarquablement similaires pour les deux situations comparées. Cela montre que le modèle d'oscillateur auto-entretenu forcé qui est proposé est capable de reproduire un son multiphonique. Cependant, ces résultats nécessitent une amplitude de forçage p_b^1 très élevée, en comparaison de l'amplitude du chant qui est mesurée dans la bouche du musicien, ce qui reste le point faible du modèle physique minimaliste utilisé.

Measurements and time-domain simulations of multiphonics in the trombone.

Lionel Velut, Christophe Vergez, Joël Gilbert

Article accepté pour publication dans le *Journal of the Acoustical Society of America*

10.1 Introduction

A "monodic instrument", by its etymological meaning, is an instrument designed to play "monophonic" sounds, that is sounds with a single pitch. However, most monodic instruments of the orchestra can also produce unusual sounds, called "multiphonic sounds". This term means that the listener perceives multiple notes in the sound.

A range of wind instruments can produce sounds called multiphonics [Castellengo, 1981]. Actually, this word designates two distinct phenomena. On the one hand, the term "multiphonic" can refer to a multiple-pitched sound generated with an extension of the conventional playing techniques : woodwind multiphonics, where quasi-periodic regimes are generated through specific embouchures and/or fingerings [Backus, 1978, Keefe and Laden, 1991, Dalmont et al., 1995, Gibiat and Castellengo, 2000, Doc et al., 2014], belong to this category. A quasi-periodic oscillation is a deterministic oscillation whose energy is located at frequencies which are integer combinations of base frequencies. The ratios between the base frequencies are irrational numbers. Flute-like instrument multiphonics are also based on an extended playing technique : the oscillation of the air jet becomes quasi-periodic with no need to introduce another oscillator [Campbell and Greated, 1994, Blanc et al., 2010, Terrien et al., 2013]. Brass instrument multiphonics can be based on two distinct mechanisms : a spontaneous quasi-periodic self-oscillation, similar to those in flutes and in reed instruments, can be involved [Castellengo et al., 1983]. But on the other hand, the brass instrument player can also produce a multiphonic sound by singing while he plays [Campbell and Greated, 1994, Sluchin, 1995] : two oscillators are then involved, the lips and the vocal folds. This paper only focuses on this latter kind of multiphonic sound on the trombone. In this situation, an intermodulation is observed, making non-harmonic frequencies appear in the resulting sound.

According to the musical context, a multiphonic sound can be considered as a mistake made by the musician or due to a defect of the instrument : in occidental art-music, a "rolling sound" is generally considered to be a mistake the musician makes and a bowed instrument with "wolf notes" [Inácio et al., 2008] is considered to be of poor quality. However, multiphonic sounds can also be intentional. This applies to extra-European traditional instruments such as pre-Columbian *flautas de chinos* producing *sonidos rajados* [Wright and Campbell, 1998, Blanc et al., 2010, Terrien et al., 2013], or the Australian aboriginal *didjeridu* [Wolfe and Smith, 2008] where the musician has several options for modifying the sound by singing or tuning of vocal tract resonance while he plays. But European classical music also includes examples of multiphonics : an example of cadenza of a French horn concertino is displayed in the score in Figure 10.1. The technique is mentioned in teaching methods of the 19th century, as reported in [Sluchin, 1995]. Jazz and avant-garde music have popularized this musical effect with artists like James Morrison, Nils Landgren, Nat McIntosh and many others.



FIGURE 10.1 – Cadenza from C.M. von Weber’s concertino for horn, including multiphonic sounds.

Multiphonics produced by a musician simultaneously singing and playing a brass instrument have been documented in [Campbell and Greated, 1994, Sluchin, 1995] but, to the author’s knowledge, simulations of this phenomenon have never been carried out. This paper examines the ability of a simple instrument physical model to simulate trombone multiphonics. This helps a better understanding of the multiphonic phenomenon and defines the abilities of the considered model. Comparisons between results of this model and measurements on trombone players are proposed on both multiphonic sounds studied : namely, playing an F_3 while singing a C_4 (referred to hereafter as $F_3 - C_4$ multiphonic), and playing an F_3 while singing a note whose pitch decreases from C_4 to slightly above C_3 (referred to later as "decreasing playing frequency multiphonic"). The measurement and simulation tools are first presented in Section 2; then, measurements and simulations of a selection of multiphonic sounds are compared in Section 3 to evaluate the ability of the model to reproduce multiphonics.

10.2 Tools

Experimental setup

An experimental device has been developed to measure some characteristic variables during a trombone multiphonic performance. The acoustic pressure inside the instrument mouthpiece $p(t)$, characteristic of the response of the instrument, is measured. Another sensor measures the blowing pressure as well as the acoustic pressure inside the mouth $p_m(t)$. The radiated sound, $p_{ext}(t)$, is also recorded. The measurements room has a short reverberation time, similar to that of a rehearsal studio, for the musician’s convenience.

- The mouth pressure $p_m(t)$ is measured with an Endevco 8510B-5 miniature pressure sensor, through a capillary tube (1.5 mm inner diameter) inserted in the mouth of the musician. The capillary tube is glued to a short piece of silicone tubing (4 mm diameter) connected to the pressure sensor. The assembly of tubes forms a Helmholtz resonator which bandpass-filters the signal. An *ad hoc* convolution filter is applied to the measured signal in order to compensate for the transfer function of the tube.
- The pressure inside the mouthpiece $p(t)$ is measured through the same sensor model. The sensor is screwed into the mouthpiece wall. The microphone is small enough for the shape of the mouthpiece cup not to be significantly altered.
- The radiated sound $p_{ext}(t)$ is recorded with a B&K 1/4" microphone, placed about 40 cm downstream from the center of the trombone’s bell. The vicinity with the bell limits the influence of the reflections in the room.

These sensors are connected to their respective conditioners/amplifiers. The signals are simultaneously recorded by a computer through NI-9234 and 9215 acquisition modules. The sampling frequency is 51200 Hz.

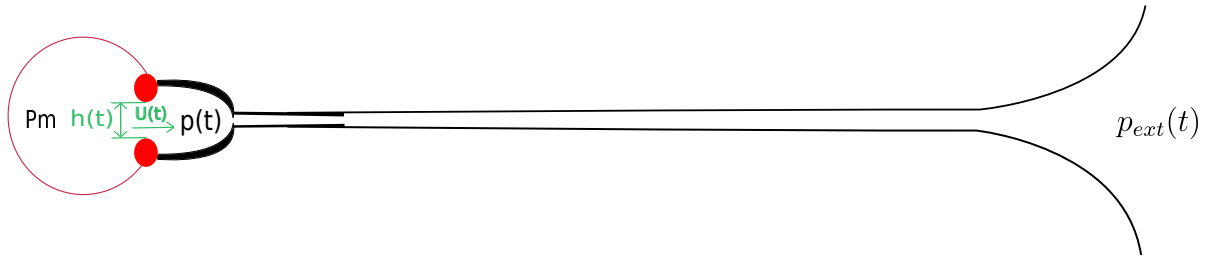


FIGURE 10.2 – (color online) Sketch of the trombone positioning $p_m(t)$, $p(t)$ and $p_{ext}(t)$. Some variables of the model defined in Section 10.2 are written in green.

Time-domain simulation of a trombone's physical model

All along this article, measurements are compared with time-domain simulations from a trombone physical model. The retained self-sustained model relies on a linear exciter which is non-linearly coupled with a linear resonator. Each of these three elements is described below. This kind of model has been widely used for wind instruments [Fletcher, 1993] including brass instruments [Elliott and Bowsher, 1982, Yoshikawa, 1995, Cullen et al., 2000], since the seminal work of von Helmholtz [von Helmholtz, 1877].

For brass instruments, the exciter consists of the lips of the musician, represented by a linear, oscillator-like valve, linking the height between the lips $h(t)$ and the pressure difference across the lips $\delta p(t) = p_m(t) - p(t)$. A one degree of freedom valve (referred to hereafter as "1-DOF valve") [Fletcher, 1993] is enough to model the lips for common playing situations [Yoshikawa, 1995] with a tractable number of parameters. Two kinds of 1-DOF valves can be considered : "striking outward", which tends to open when δp grows, and "striking inward" which presents the opposite behavior. For the reasons detailed in [Velut et al., 2016c] we chose a "striking outward" valve to model the lips of the trombonist. This model relies on the following equation :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} + \omega_l^2(h - h_0) = \frac{1}{\mu}(p_m - p(t)), \quad (10.1)$$

where $\omega_l = 2\pi f_l$ (rad/s) is the lip resonance angular frequency ; Q_l the (dimensionless) quality factor of the lips ; h_0 the value of $h(t)$ at rest (m) ; μ an equivalent surface mass of the lips ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$).

Lip parameters very similar to those chosen in [Velut et al., 2016c] after a thorough bibliographical review are used. These parameters are given in Table I. The only difference is the quality factor Q_l lessened from 7 to 5. Results previously obtained in [Velut et al., 2016c] were satisfactory, with reasonable threshold blowing pressures in the [1kPa : 15kPa] range for commonly played notes. The refining of the Q_l value results in periodic playing on a larger range of f_l on the Jupiter JSL 232l trombone used in the experiment.

$h_0(\text{m})$	$L(\text{m})$	$1/\mu(\text{m}^2\text{kg}^{-1})$	Q_l
$5\cdot 10^{-4}$	$12\cdot 10^{-3}$	0.11	5

TABLEAU I – Lip parameters retained for this article.

In most studies about brasswinds, p_m is assumed to be constant in usual playing, corresponding to the blowing pressure. However, in order to simulate a multiphonic, a forcing component is added to the static value of p_m , corresponding to the acoustic pressure produced by the vibrating vocal folds.

For multiphonic simulations with a constant singing frequency, the p_m signal takes the following form :

$$p_m(t) = p_m^0 + p_m^1 \cdot \sin(2\pi t f_s), \quad (10.2)$$

where p_m^0 and p_m^1 are respectively the constant blowing pressure and the amplitude of the singing signal, and f_s the singing frequency.

For simulations with a decreasing frequency, the signal is divided into 3 parts : first, the mouth pressure is a constant blowing pressure for 6 seconds : this gives time to reach a steady-state oscillating regime. Then, the p_m signal is similar to Eq. (10.2) for 6 seconds with $f_s = f_1$. Then, the frequency decreases from f_1 to f_2 taking this form :

$$p_m(t) = p_m^0 + p_m^1 \cdot \sin \left[2\pi t \left(f_1 + \frac{(f_2 - f_1) \cdot t}{2d} \right) \right], \quad (10.3)$$

where d is the duration of the frequency decrease (s).

In the measurements, the p_m^1/p_m^0 ratio is about 0.02, but higher values are used in simulations, to get computed spectra as close as possible to experimental ones. A value of $p_m^1 = 0.3p_m^0$ is used all along this paper. This difference in p_m^1 values between simulation and measurement is a limitation of our model.

This exciter is non-linearly coupled to a resonator : the bore of the trombone. Propagation in brass instruments, particularly the trombone, is known to be nonlinear for loud tones. This causes nonlinear distortion of the waveform, possibly leading to shockwaves [Hirschberg et al., 1996, Myers et al., 2012]. In musical terms, the sound becomes "brassy" at louder playing dynamics. However, since this study focuses on low and moderate playing dynamics, a linear model of propagation is sufficient. Thus, the resonator is modeled by its input impedance Z . By definition, Z is the ratio, in the frequency domain, of the pressure at the input of the resonator $P(\omega)$ to the acoustic flow $U(\omega)$ taken at this same point :

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)}. \quad (10.4)$$

The input impedance of the Jupiter JSL 2321 tenor trombone used for experiments (with the slide fully pulled in) is measured with the impedance sensor described in [Macaluso and Dalmont, 2011], then fitted by a sum of 13 Lorentzian functions — representing the 13 first modes of the trombone — using a least squares method similar to that in [Silva, 2009].

The coupling between this resonator and the aforementioned exciter is non linear. It is provided by the airflow through the lip channel. The air jet is assumed to be laminar in the lip channel, then turbulent in the mouthpiece, all its kinetic energy being dissipated without pressure recovery. Applying the Bernoulli law and the mass conservation law between the mouth and the lip channel gives the following expression of the flow between the lips, depending on the pressure difference and the height of the lip channel [Elliott and Bowsher, 1982, Hirschberg et al., 1995] :

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\rho}} L h(t) \cdot \text{sign}(p_m - p(t)) \cdot \sqrt{|p_m - p(t)|}, \quad (10.5)$$

where $u(t)$ is the airflow rate ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$), $\rho = 1.19 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ the air density at 20 deg C and L the width of the lip channel (m).

Simulations based on this model are carried out with MOREESC [MoReeSC, 2013]. This open-access Python library solves the equations of the model numerically, based on the modal decomposition of the pressure signal in the instrument. This provides values of p , the lip opening h and the

airflow between the lips u at each time sample. It features the possibility of modifying input parameters during the simulation, which is particularly useful in this study for defining time-varying mouth pressure signals. In order to get a simulated pressure, a measurement of the transfer function of the trombone, between p and p_{ext} is made. Filtering the simulated p with the given transfer function results in a simulated p_{ext} .

Preliminary measurement on vocal folds

A preliminary experiment is carried out to assess the choice of a forcing term to model the singing like in Eq. (10.2) and (10.3). The production of a multiphonic sound requires two exciters : the lips of the musician and his vocal folds. In order to evaluate the independence of the vocal fold oscillation with respect to the lip oscillation, an estimation of the vocal fold oscillation is carried out by measuring the electrical conductivity of the glottis, similarly to what was done in the experimental campaign conducted on the didjeridu [Wolfe and Smith, 2008]. The glottis conductivity is assumed to be approximatively proportional to the contact area of the lips [Hezard et al., 2014]. Since we are interested in comparing orders of magnitude, this approximative proportionality is sufficient. An electroglottograph from VoceVista is used to measure the conductivity of the vocal folds while the musician plays an $F_3 - C_4$ multiphonic. The spectrum of the resulting signal is shown in Fig. 10.3.

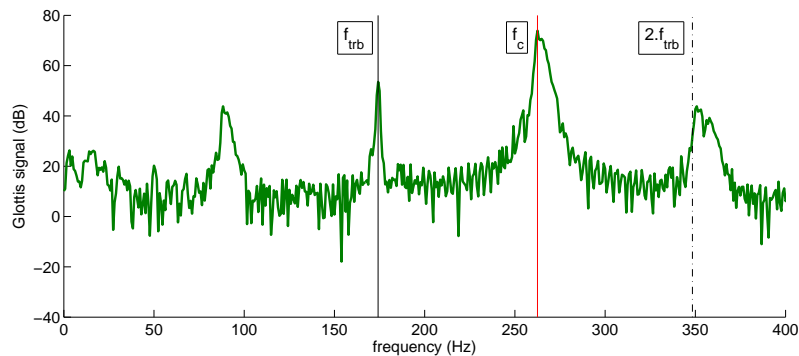


FIGURE 10.3 – (color online) Spectrum of glottis signal when playing an $F_3 - C_4$ multiphonic. Vertical lines indicate the trombone playing frequency f_{trb} (black), the singing frequency f_s (red) and f_{trb} first harmonic (black, dash-dotted). Hanning window of width 0.2 s, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz.

Spectral components can be observed at the singing frequency $f_s = 262.5$ Hz but also at the playing frequency $f_{trb} = 174.2$ Hz, showing a coupling between the lips and the vocal folds. However, the amplitude of the f_{trb} component is 20 dB lower than the amplitude of the f_s one : this indicates that the oscillation of the vocal folds is not much altered by the acoustic feedback. Thus, since we are interested in identifying the simplest model simulating multiphonic sounds, modeling the contribution of vocal folds through a forcing term seems to be a decent approximation, much simpler than a model that would take into account the vocal folds, the vocal tract and the lips . However, a time-domain simulation tool which would simulate the coupling with the impedance of the vocal tract would probably be of some interest. The implementation of such a model could be realized with the tools presented here.

10.3 Results

F_3 - C_4 multiphonic

Experiment The study firstly focuses on the F_3 - C_4 multiphonic, which is one of the most commonly played by trombonists and proposed as a first exercise in [Sluchin, 1995]. Producing an $F_3 - C_4$ multiphonic consists in playing an F_3 while singing a C_4 , i.e. a fifth above. In physical terms, this means playing on the third register of the trombone, while simultaneously singing the note whose frequency is 1.5 times higher ($f_s/f_{trb} = 1.5$). The musician is asked to successively sing a C_4 , then play an F_3 , then perform an $F_3 - C_4$ multiphonic.

Figure 10.4 shows the spectrograms corresponding to this experiment and calculated for the time-domain signals of p_m in Fig. 10.4 (a), p in Fig.10.4 (b) and p_{ext} in Fig.10.4 (c). The successive tasks — singing, playing, multiphonic — successively appear on the spectrograms. During the singing, a component appears at $f_s = 259.8Hz$ with its harmonics. Similarly, $f_{trb} = 173.6Hz$ and its harmonics appear while the musician is playing an F_3 . A component at f_{trb} can be observed in Fig. 10.4 (b) and (c) but also in the p_m spectrogram, because of the coupling with the vocal tract of the musician [Chen et al., 2012, Fréour and Scavone, 2013]. When the multiphonic is played, $p(t)$ and $p_{ext}(t)$ contain the fundamental and harmonics of both f_s and f_{trb} . In addition, other frequency components also appear, which do not belong to either the harmonic series of f_s or that of f_{trb} . These components are shown by arrows in Fig. 10.4 (b). Note that one of these components has its frequency under f_{trb} . Figure 10.5 superimposes the spectra of $p(t)$ during the three phases of the performance : singing, playing, multiphonic. This highlights that some peaks of the multiphonics spectrum clearly do not belong to the played signal or to the sung signal.

Simulation This experiment (playing an F_3 on a trombone while singing a C_4) is simulated, using the method described in Section 10.2 with the parameters given in Table I : the physical model of trombone is set to play an F_3 , on its 3^d register, with a lip resonance frequency $f_l = 140$ Hz and a steady blowing pressure set to $p_m^0 = 4500$ Pa. This value is slightly above the threshold pressure calculated by linear stability analysis, as in [Velut et al., 2016c]. Then, the "sung" note is included to simulate the multiphonic : a forcing sinusoidal component is added to the static blowing pressure, at a frequency f_s corresponding to the upper fifth, as written in Eq. (10.2). The amplitude of the forcing sinusoidal component is set to 30% of p_m^0 so that $p_m^1 = 1350$ Pa. This forcing component starts 3 seconds after the blowing pressure, once the self-oscillation of the instrument model has reached its steady state. This avoids interferences between the forcing component and the transitory phase of the self-sustained oscillation.

Spectrograms of the simulation results for p_m , p and p_{ext} are displayed in Fig. 10.6 (a), (b) and (c), respectively. First, the model auto-oscillates on its own until $t = 3s$; then the forcing component is added. Fig. 10.6 (a) does not display any spectral component at f_{trb} , because the retained model does not take the coupling with the vocal tract into account. Before $t = 3s$, Fig. 10.6 (b) and (c) only display spectral components at $f_{trb} = 189$ Hz and its harmonics. The oscillation frequency of the simulation is higher than the experimentally recorded playing frequency in Fig. 10.4. This is consistent with a well-known limitation of this brass model, known to oscillate at sharper frequencies than the tempered scale notes [Campbell, 2004, Silva et al., 2007, Chaigne and Kergomard, 2016, p.547]. Then, at $t = 3$ s, the forcing component at $f_s = 282.7$ Hz appears. As in the experiment, $p(t)$ and $p_{ext}(t)$ show frequency components which are neither f_s , nor f_{trb} , nor their harmonics. This is also to be seen

in the p spectra displayed in Fig. 10.7 : some peaks of the multiphonic signal do not match f_s , f_{trb} (solid lines) or their harmonics (dashed lines).

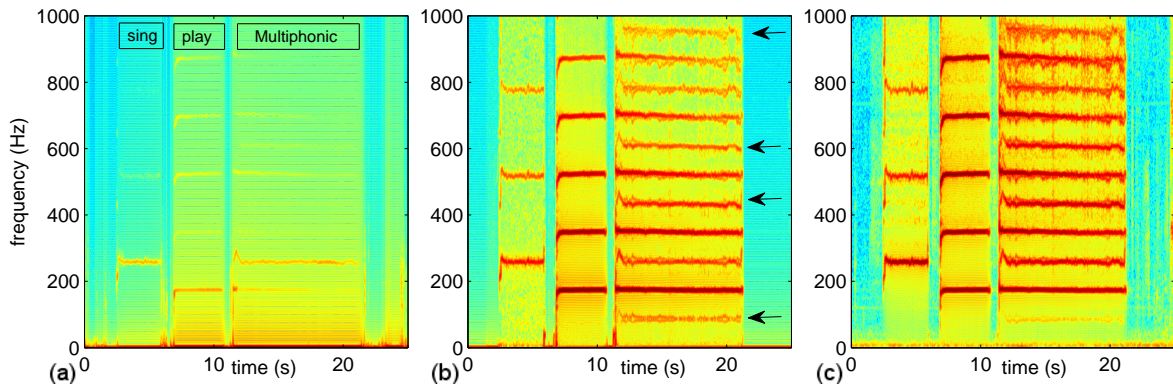


FIGURE 10.4 – (color online) Experiment : spectrograms of the pressures in the mouth p_m (a), in the mouthpiece p (b) and radiated p_{ext} (c) measured *in vivo*. Hanning window of width 0.2 s, 95% overlap, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz. The musician successively sings C_4 (2.5 – 6.5s), plays F_3 (7 – 11s), then performs an $F_3 - C_4$ multiphonic (12 – 21s). During multiphonic, the p and p_{ext} spectrograms exhibit spectral components which do not belong to either the sung or the played note : they are designated with arrows in (b).

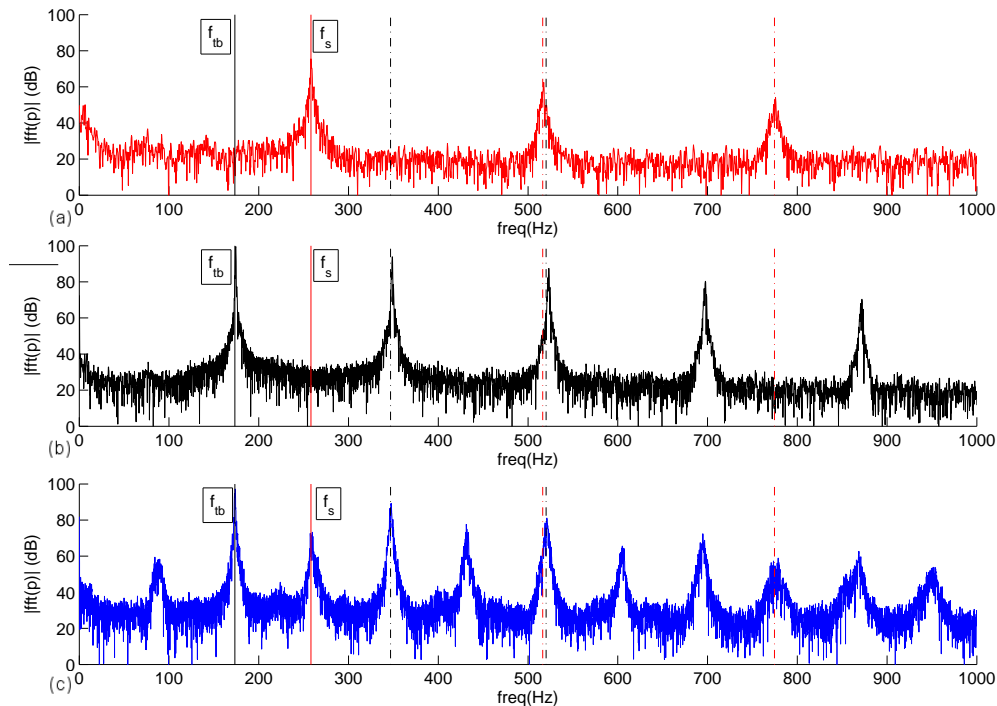


FIGURE 10.5 – (color online) Experiment : spectra of the mouthpiece pressure $p(t)$ from the same performance : playing (a), singing (b), multiphonic (c). Spectra taken from the spectrograms in Fig. 10.4b). Peaks appear in the multiphonic spectrum, whose frequencies match neither the oscillation frequency $f_{trb} = 173.6Hz$ nor the singing frequency $f_s = 259.8Hz$ nor their harmonics. f_{trb} and f_s are represented as vertical plain lines (fundamentals) and dash-dotted lines (harmonics).

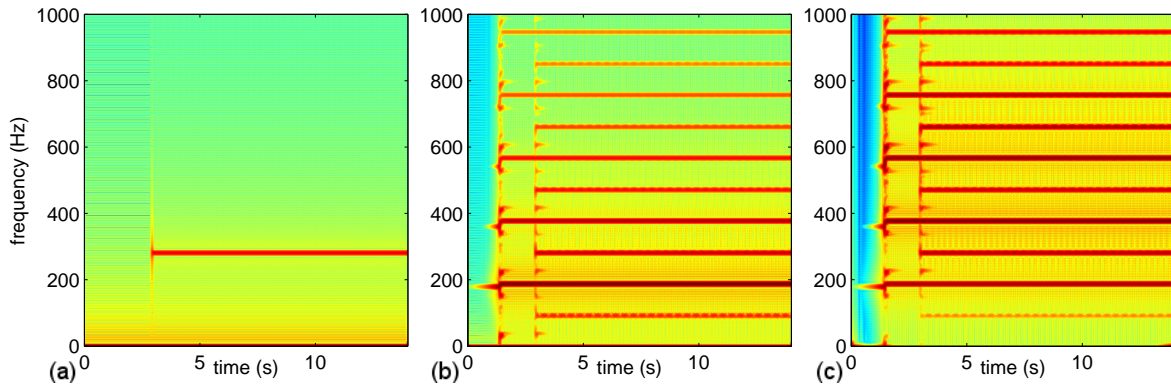


FIGURE 10.6 – (color online) Simulation : spectrograms of the simulated pressures in the mouth p_m (a), in the mouthpiece p (b) and radiated p_{ext} (c). Hanning window of width 0.2 s, overlapping of 95%, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz. The blowing pressure p_m has a stationary component ($p_m^0 = 4500$ Pa) and, after $t = 3$ s, an oscillating component (amplitude $p_m^1 = 1350$ Pa, frequency $f_s = 282.7$ Hz). The transient occurs at $t = 1.3$ s, the forcing signal is added after $t = 3$ s. As in the experiment, spectral components other than harmonics of the playing and the singing frequencies appear.

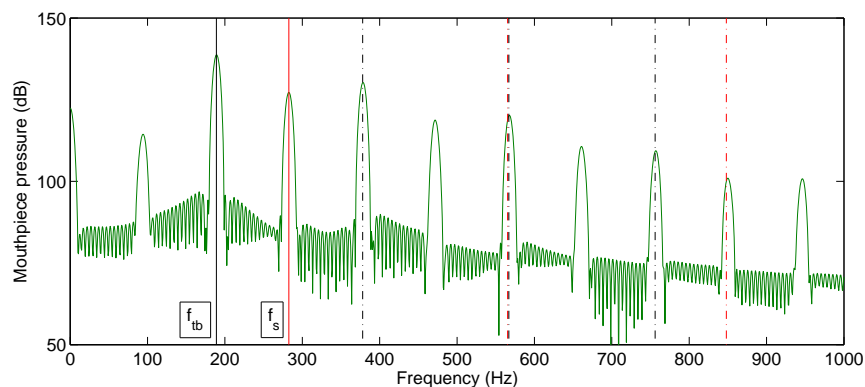


FIGURE 10.7 – (color online) Simulation : spectrum of the mouthpiece pressure $p(t)$ from the simulation of the multiphonics. Spectrum is taken from spectrogram in Fig. 10.6b). $f_{trb} = 189$ Hz, $f_s = 282.7$ Hz and their harmonics are shown. Some frequencies are neither harmonic of f_s nor of f_{trb} but are integer combinations of those.

Discussion

Frequencies of the peaks appearing in the spectra of multiphonics, either simulated (Fig. 10.6 and 10.7) or measured (Fig. 10.4 and 10.5), match very well integer combinations of f_s and f_{trb} : the relative error is less than 3% for the measured frequencies and less than 0.5% for the simulated frequencies. Table II reports the frequencies appearing in the simulation and in the measurement, and proposes one or two integer combinations giving the same frequency. A given integer combination matches the peak of the same rank in the experiment and in the simulation. These frequency components at integer combinations of f_{trb} and f_s are hereafter called combination tones (CT), as in [Campbell and Greated, 1994, p.64]. In terms of amplitude, the peaks in the spectra of the simulated and the measured multiphonics are not the same, even if the shapes of the spectral envelopes remain comparable.

Peak No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{exp}(Hz)$	86.1	176	259.8	347.3	433.4	521	605.1	694.8	778.7	868.7
$f_{sim}(Hz)$	94.15	189	282.7	377.9	471.4	567.6	661.1	756.6	850	946.2
lin. comb.	$f_s - f_{trb}$ $2f_{trb} - f_s$	f_{trb}	f_s $3f_{trb} - f_s$	$2f_{trb}$ $4f_{trb} - f_s$	$f_s + f_{trb}$	$3f_{trb}$ $2f_s$	$3f_s - f_{trb}$ $5f_{trb} - f_s$	$2f_s + f_{trb}$ $4f_{trb}$	$3f_s$	$5f_{trb}$ $4f_s - f_{trb}$

TABLEAU II – (color online) Frequencies of first peaks of spectrum of $p(t)$ measured (f_{exp}) and simulated (f_{sim}) during an $F_3 - C_4$ multiphonic. Integer combinations of f_s and f_{trb} corresponding to each combination tone are indicated.

Signals recorded during this multiphonic playing are periodic signals. However, the fundamental frequency of these signals is an octave below the played note, at $f_{trb}/2$.

The radiated pressure signals p_{ext} of the recorded¹ and the simulated² multiphonic are both heard as chords rather than as a single note. The playing and singing frequencies appear, along with other notes, notably the F_2 one octave below f_{trb} . Though, informal listening tests highlights some perceptive differences. First, the sung note is heard louder in the experimental recording than in the simulation. Then, while listening to the recording of the musical performance, a third note, namely an A_4 , can be heard, whose fundamental frequency is $f_s + f_{trb}$. This note cannot be clearly heard in the simulated p_{ext} signal, although its frequency components are present. One reason might be the differences in spectral balance between the experiment and the simulation, which could be related to the simplicity of the forcing signal : this latter hypothesis will be investigated later in the article.

As a conclusion, the $F_3 - C_4$ multiphonic studied here appears to be quite a peculiar periodic regime of oscillation. The spectral components are f_s , f_{trb} , their harmonics, and the combination tones of frequencies $f_{CT} = qf_{trb} \pm f_s$, $q \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ (except negative frequencies). The simulation model, based on a self-oscillating system, sinusoidally forced to model the contribution of the singing voice, reproduces the emergence of a regime which is very similar in terms of frequency content, but with some differences in the peak amplitudes.

Though it is periodic, this regime is not a usual self-sustained oscillation of a brass instrument : the fundamental frequency is not the trombone's oscillation frequency, but a combination tone. Several harmonics are also combination tones, each one matching with several integer combinations of f_s and f_{trb} . This fact is related to this specific situation where f_{trb}/f_s is a rational value. The system undergoes a 3 :2 synchronization (also called an internal resonance in the dynamic system terminology) which makes combination tones integer multiples of $f_s - f_{trb}$. It is a particular behavior of a forced self-sustained oscillator. Academic case studies presenting this situation are developed in [Nayfeh and Balachandran, 1995, p.156] with forced Van Der Pol oscillators for instance.

According to the oscillator theory, the system studied should generate a quasi-periodic oscillation when there is no internal resonance. The following part will investigate multiphonic situations with a variable singing frequency, leading to multiple situations where f_s/f_{trb} is irrational.

Variable singing frequency

Experiment The trombone player is now asked to play a multiphonic with f_{trb} as stable as possible, while decreasing his singing frequency. He starts playing the same $F_3 - C_4$ multiphonic as before. Then, he lowers its singing frequency f_s as linearly as possible, until he reaches a frequency just above f_{trb} , while he keeps playing an F_3 . He then holds these playing and singing frequencies

1. <https://soundcloud.com/user-422312706/01-mesure-multiphonique-f3c4-pext/s-1K0Jd>

2. <https://soundcloud.com/user-422312706/02-simu-multiphonique-f3-c4-pext/s-ij5bf>

for a few seconds.

Spectrograms of the resulting p_m , p and p_{ext} are shown in Fig. 10.8 (a), (b) and (c), respectively. Fig. 10.8 (a) exhibits the evolution of the f_s and f_{trb} components in the mouth. The f_{trb} component is fairly stable all along the measurement. The singing component remains stable between 0 and 5 seconds, then decreases between 5 and 10 seconds, and stays 152 musical cents above f_{trb} until the end ($f_s/f_{trb} = 1.09$). After $t = 6$ s, a new spectral component emerges in the mouth, at a frequency growing towards f_{trb} . The peak at f_s has the highest amplitude all along the measurement.

The phenomenon that appears during the first 6 seconds of the spectrogram in Fig. 10.8 (b) and (c) is very similar to the one appearing after 12s in Fig. 10.4. Then, when f_s decreases, some frequency peaks seem to "split" in two components, one with a decreasing frequency, the other one with an increasing frequency. While the frequencies get closer to one another, other components with increasing or decreasing frequencies become stronger in amplitude, collecting towards f_{trb} and its harmonics. This leads to a quite rich spectrum with several secondary peaks around f_{trb} and its harmonics, after $t = 8$ s when the singing frequency stabilizes.

To follow the evolution of the components more easily, spectra are computed at each second on the mouthpiece signal and plotted in Fig. 10.9. The splitting of certain frequency components is noticeable : for illustration, the first peak at $t = 3.12$ s at 85 Hz (Fig. 10.9 (a)) splits progressively into two distinct peaks of frequency 75 Hz and 100 Hz, respectively, at $t = 5.06$ s (Fig. 10.9 (c)). The last spectrum, at $t = 10.12$ s (Fig. 10.9 (h)), shows numerous peaks on either side of f_{trb} and its harmonics.

Simulation The same simulation model as in Section 10.3 is used to reproduce this second experiment. Starting with the same parameter values as in the previous section ($f_l = 140$ Hz, $p_m^0 = 4500$ Pa, $p_m^1 = 1350$ Pa, $f_s = 282.7$ Hz i.e. a fifth above f_{trb}), the singing frequency is decreased linearly (sweep signal) between $t = 6$ s and $t = 12$ s, to 152 cents above the playing frequency : $p_b(t)$ follows Eq. (10.3) with $f_1 = 282.7$ Hz, $f_2 = 206$ Hz and $d = 6$ s. The final frequency is chosen to stick with the experiment, where the final singing frequency of the musician is also 152 cents above the playing frequency. During the last two seconds, $f_s = 206$ Hz. Just as above, spectrograms of p_m , p and p_{ext} are shown in Fig. 10.10 (a), (b) and (c), respectively. Fig. 10.11 represents the spectra of p computed each second. Fig. 10.10 and 10.11 for simulation are equivalent to Fig. 10.8 and 10.9 for experiment.

According to Eq. (10.3), the mouth pressure only contains the forcing term, providing a convenient view on the evolution of f_s . The first seconds of the p and p_{ext} spectrograms of Fig. 10.10 (b) and (c) are very similar to the spectrograms of Fig. 10.6 with components of f_s and f_{trb} plus the combination tones. Then, when f_s starts decreasing, each component at f_s or its harmonics splits into two components moving away from one another, one having a decreasing frequency and the other having an increasing frequency. The amplitude of increasing-frequency components is weaker than that of decreasing-frequency components. Between $t = 7$ s and $t = 8$ s, a regime briefly emerges at $38.5\text{ Hz} = f_{trb}/5$ and its harmonics, while $f_s = 265\text{ Hz}$: it can be noticed under the form of evenly spaced lines (at 38.5 Hz, 77 Hz, 115.5 Hz, 154 Hz, 192.5 Hz, 231 Hz etc.) in Fig. 10.10 (b) (between the dash-dotted lines) and (c). This is a periodic regime due to a 5 : 1 internal resonance. Indeed, at this point the f_s/f_{trb} ratio is rational and the resulting regime is periodic. The resulting frequency is very close to the first acoustic resonance frequency of the trombone (38.9 Hz) so the first mode may sustain this oscillation. This will be addressed in Section 10.13. After $t = 10$ s, the existing components strengthen and new ones appear, to end up with several secondary peaks on each side of the components of the auto-oscillation. These new peaks are particularly visible in the last spectra in Fig. 10.11.

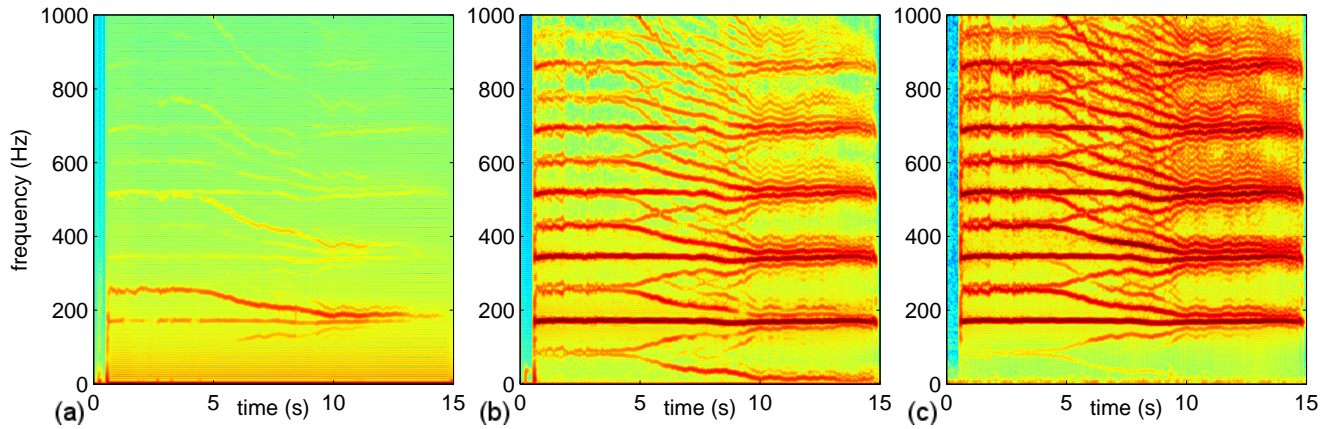


FIGURE 10.8 – (color online) Experiment : Spectrograms of p_m (a), p (b) and p_{ext} (c) measured during a multiphonic. Hanning window of width 0.2 s, overlapping of 95%, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz. The singing frequency is constant at $f_s = 255\text{Hz}$ (note C_4) for 5 seconds, then decreases towards $f_s = 185\text{Hz}$ (slightly above f_{trb} , note F_3) and remains at this value after $t = 10\text{s}$. The playing frequency remains as constant as possible, with $f_{trb} \in [167.2 : 173.4]$.

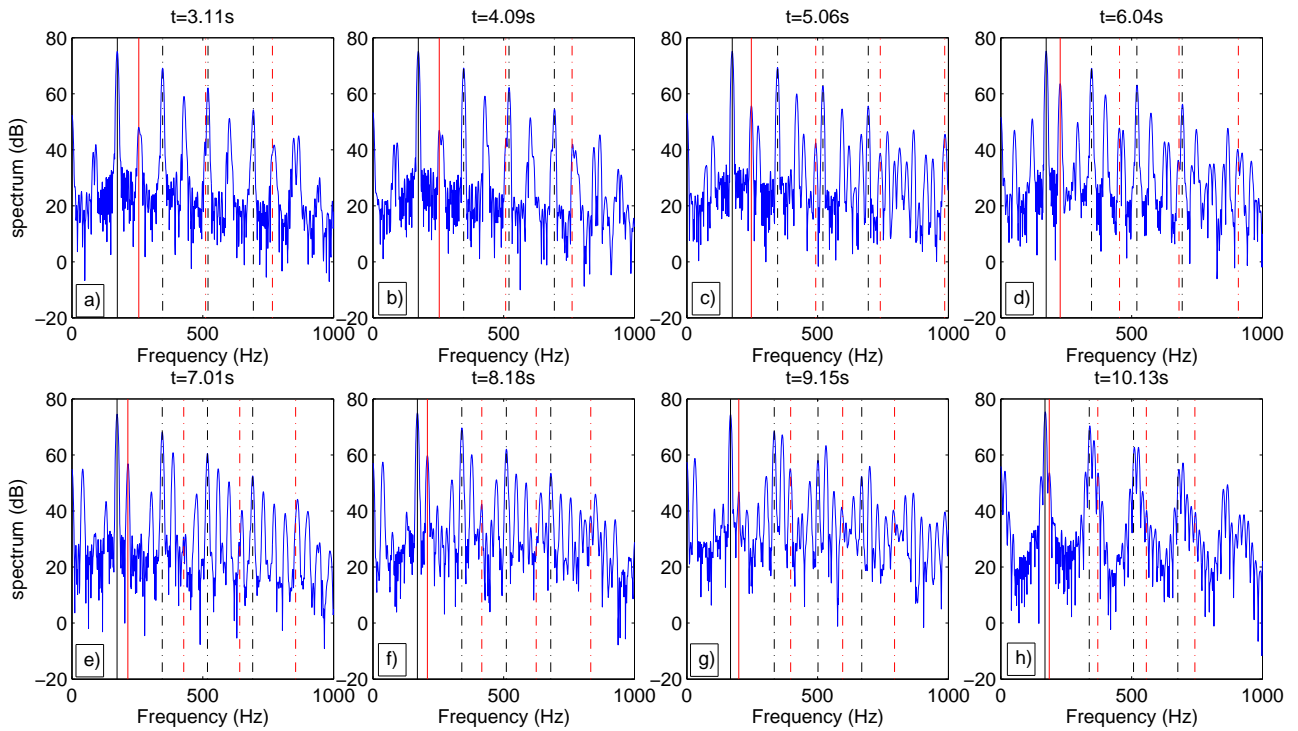


FIGURE 10.9 – (color online) Experiment : Spectra taken from instants of Fig. 10.8b) each second between approximately $t = 3\text{s}$ and $t = 10\text{s}$, when f_s decreases. The plain lines represent f_{trb} (black) and f_s (red), the dash-dotted lines represent their respective harmonics.

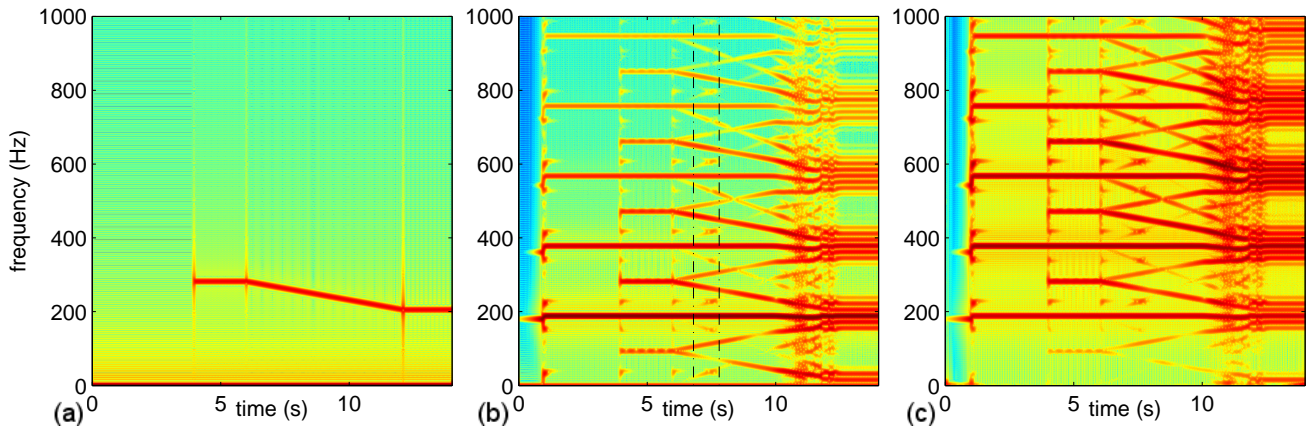


FIGURE 10.10 – (color online) Simulation : Spectrograms of the simulated p_m (a), p (b) and p_{ext} (c). Hanning window of width 0.2 s, overlapping of 95%, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz. The forcing term appears after $t = 4$ seconds at $f_s = 282.7\text{Hz}$ (a fifth above f_{trb}), then is steady until $t = 6$ s; then decreases linearly towards $f_s = 206$ Hz (155 cents above f_{trb}) for 6 seconds : then it stays at this frequency for 2 seconds. The playing frequency remains stable at $f_{trb} = 188.7$ Hz all along the simulation. Vertical dash-dotted lines in (b) highlight the periodic oscillation regime at 38.5Hz .

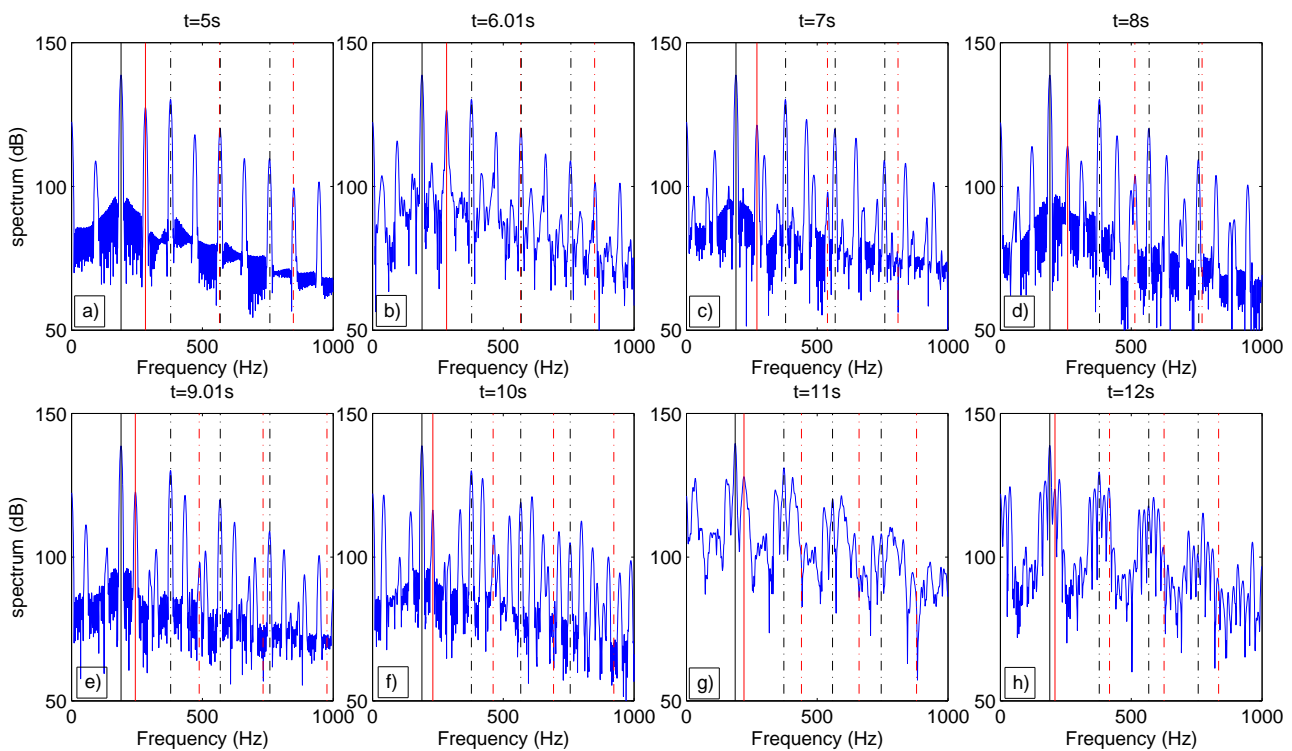


FIGURE 10.11 – (color online) Simulation : Spectra of the simulated p , taken from the spectrogram in Fig. 10.10b) each second, between approximately $t = 5\text{s}$ and $t = 12\text{s}$ where f_s decreases. The plain vertical lines represent f_{trb} and f_s , the dash-dotted lines represent their respective harmonics.

Discussion

As in the previous experiment, several frequency components appear to be harmonics of neither f_{trb} nor f_s . At the beginning, the frequencies are the same as in Section 10.3. Certain integer

combinations result in the same combination tones, like for example $3f_{trb} = 2f_s$. Then, when f_s decreases, these integer combinations are no longer equal since f_s and f_{trb} are no longer in a 3 : 2 ratio : the combination tone frequencies either increase or decrease, depending on the sign in front of f_s in the integer combination. The frequencies contained in the signal are no longer integer multiples of the lowest frequency. The oscillation becomes quasi-periodic as soon as f_s/f_{trb} is no longer rational.

Frequencies of the components of p during the phase where f_s decreases are recorded, and plotted with marks in Fig. 10.12 (a) (experimental measurement) and (b) (simulation). Some integer combinations of f_s and f_{trb} , of positive frequency $qf_{trb} \pm f_s$, $q \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ are also plotted with plain lines on the same figures. The match between each peak frequency and one integer combination is remarkable, with a maximum relative error of 2.5%. Therefore, the emerging frequency components are integer combinations of f_s and f_{trb} , just as the $F_3 - C_4$ multiphonic. It can be concluded that this more complex multiphonic regime is due to the same phenomenon as in Section 10.3, emerging from the coupling between a self-sustained oscillator and a forcing term. However, here the oscillation regime is quasi-periodic.

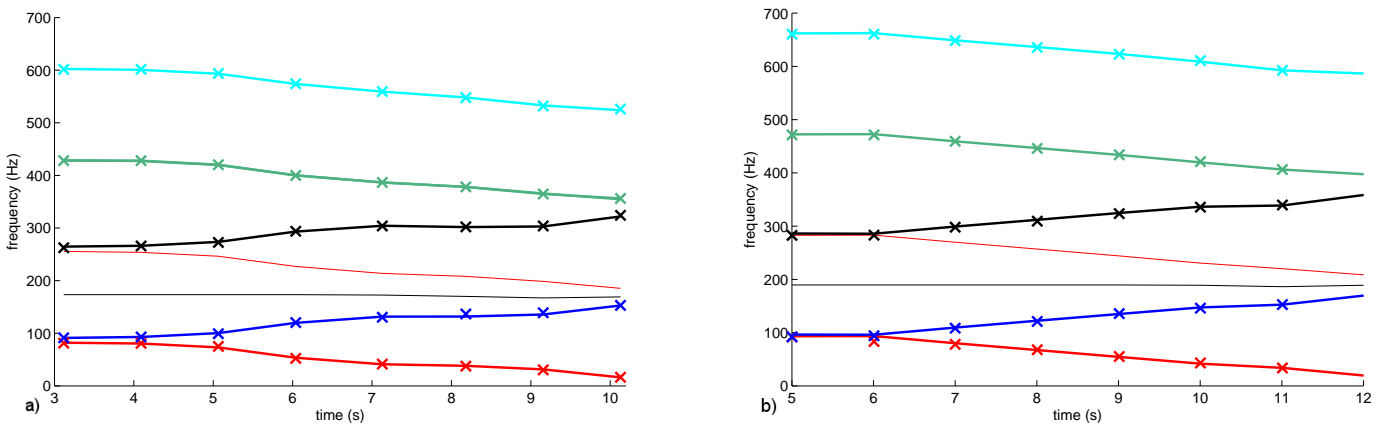


FIGURE 10.12 – (color online) Plot of f_s (red), f_{trb} (black) and some integer combinations (plain lines) along with the frequencies of the five first components of experimental (a) and simulation (b) mouthpiece pressure (marks). These marks correspond to the peak frequencies in Fig. 10.9 and 10.11. The recorded values very closely match the integer combinations.

The simulated p_{ext} and the musical performance were heard as similar during the experiment, yet differences exist. In the recorded multiphonic³, an A_3 can be heard at the beginning. When f_s begins to change, this A_3 rapidly decreases in loudness. During the decrease in f_s , certain notes become audible while others disappear. These notes can also be heard in the simulated p_{ext} ⁴ but their overall loudness is weaker. At the end of this multiphonic, f_s and f_{trb} are close to each other. There, a "rolling" or "beating" sound can be heard, both in the experimental and in the simulated p_{ext} signals. This could be explained by the very low $f_s - f_{trb} = 16Hz$ component (16.3 Hz in measurements, 17.3 Hz in simulation), perceived as a modulation of the sound.

These observations can be related to the spectral envelopes of the measured and the simulated p : comparatively with the peaks at f_{trb} , the combination tones and the harmonics of f_s have a smaller amplitude in simulation than in experimental measurements. The f_s component of p is an exception as it is weaker in measurement than in simulation. At the end of the multiphonic, the peaks at harmonics of f_{trb} are flanked by smaller peaks on both sides. These secondary peaks are

3. <https://soundcloud.com/user-422312706/03-mesure-multiphonique-dcroissant-pept/s-XvqvU>

4. <https://soundcloud.com/user-422312706/04-simu-multiphonique-dcroissant-pept/s-0n5d5>

significantly weaker in measurement than in simulations.

It can be assumed that these amplitude differences between experiment and simulation are related to the sinusoidal nature of the forcing whereas the singing is a more complex periodic signal. To assess this hypothesis, another simulation is carried out, this time with a forcing signal reproducing the three first harmonics of the recorded singing signal. The oscillating component of p_m now consists of three sinusoids, with the same relative amplitudes and phases as the first components of the measured sung signal. Figure 10.13 compares spectra of p simulated with a forcing signal consisting of one or three harmonics (blue and red plots, respectively), at the beginning (Fig. 10.13 (a)) and the end (Fig. 10.13 (b)) of a simulation with decreasing f_s . All parameters of the three-harmonic forcing simulation are equal to those of the simulation presented in Fig. 10.10 and Fig. 10.11 except the p_m signal.

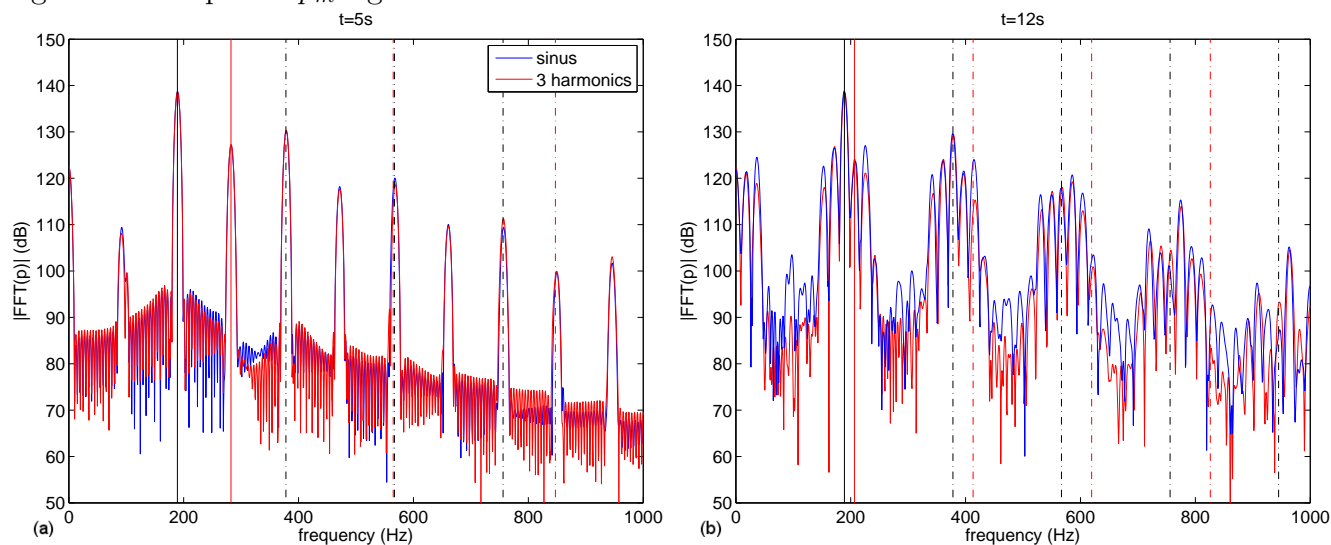


FIGURE 10.13 – (color online) Comparison of spectra of internal pressures simulated either with a sinusoidal forcing component, or a 3-harmonic forcing component. Hanning window of width 0.2 s, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz. Frequency decreases as in Fig. 10.10. Fig. (a) is the spectra of p at the beginning of the simulations, Fig. (b) at the end. Differences in terms of amplitude are small in (a) and reach 6 dB in (b). Vertical lines indicate f_{trb} and f_s (plain) and their harmonics (dash-dotted).

Adding harmonics to the forcing signal only results in minor changes in the spectral envelope of the signal. Apart from the components at $2f_s$ and $3f_s$ being logically stronger, the major difference between these simulations is the relative height of the peaks as compared to the numerical noise. Between amplitude peaks, the minima are visibly weaker with a three-component forcing signal, particularly at the end of the simulation (Fig.10.13 (b)). The influence on the amplitude of combination tones is not significant. The lack of major difference could be explained by the weakness of the harmonics of the forcing, the second and third harmonics of f_s being respectively 17.5 dB and 27.5 dB weaker than the fundamental.

From the results on multiphonics with a sliding f_s described in this section the conclusions from the previous section can be generalized : the self-oscillating model with an additional forcing term is sufficient to simulate multiphonics, resulting in the same frequency components as the measured ones. The frequencies of the components of both the simulated and the measured p match very well with integer combinations of the instrument self-oscillation frequency and the singing or forcing frequency : these components are either harmonics of f_s and f_{trb} or combination tones.

This consolidates the idea that multiphonic regimes of brass instruments are either quasi-periodic regimes or, when the f_{trb}/f_s ratio is rational, periodic regimes. Both behaviors come from the same phenomenon. The $F_3 - C_4$ multiphonic considered in 10.3 is a particular case, where all frequencies in the signal are harmonic because of the 3 :2 internal resonance.

The simulation model tested here reproduces this behavior accurately, in spite of the simplicity of the model. The main difference is the spectral envelope. A forcing signal closer to the singing signal does not significantly change this limitation.

Simulations with one acoustic resonance

New simulations with an even simpler model are carried out. Not only the forcing is sinusoidal as seen in Fig. 10.14, but the resonator is reduced to one resonance, the third acoustic mode of the trombone — the one used for playing an F_3 . A simulation with a decreasing sinusoidal forcing is carried out. The playing frequency with this resonator is $f_{trb} = 180.5$ Hz, so the playing frequency decreases from $f_s = 270$ Hz to $f_2 = 196.4$ Hz for 6 seconds to keep the same frequency ratios as in Section II.

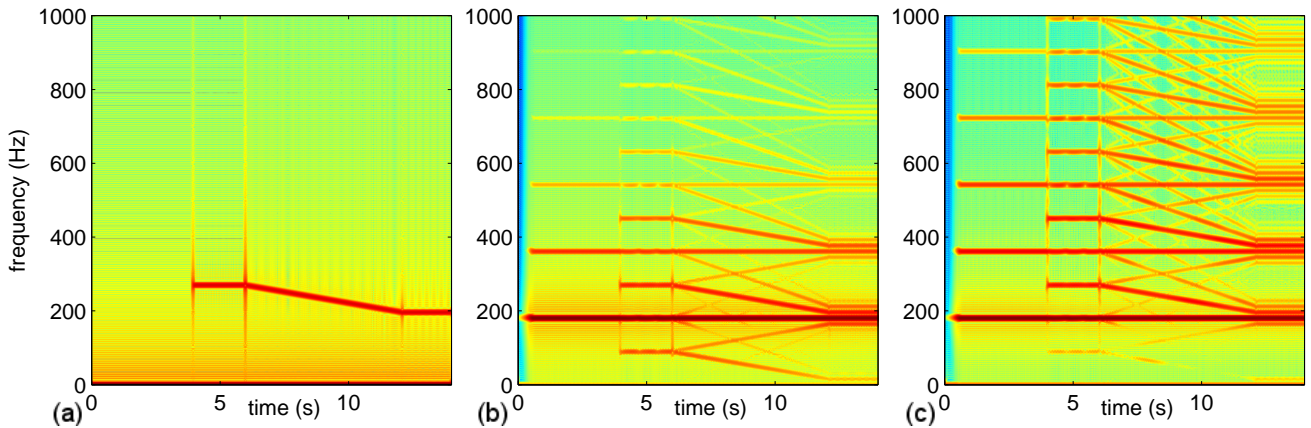


FIGURE 10.14 – (color online) Simulation : Spectrograms of p_m , p and p_{ext} simulated with a one-mode resonator. Hanning window of width 0.2 s, 95% overlapping, zero-padding of the signal until frequency precision is under 1 Hz. $f_{trb} = 180.5$ Hz, f_s from 270 Hz to 196.4 Hz. The results are comparable with those presented in Fig. 10.10 with weaker components at high frequencies.

The frequency components of the internal pressure p are harmonics of f_{trb} and f_s or combination tones, as in the previous simulations and measurements, for all values of f_s tested. Thus, the multiphonic behavior appears with this model. However, the amplitude of most frequency components is weaker. This is illustrated by the amplitude differences reported in Table III : while the amplitude of the component at f_{trb} remains fairly constant, all other components are significantly weaker for the 1-mode simulation. Harmonics of f_{trb} are no longer supported by the modes 6, 9 and 12, which affects the amplitude of combination tones. The f_s component in $p(t)$ is weaker, even though the amplitude of the forcing is equal : the modulus of the resonator impedance is 13 times weaker at f_s with only one mode than with 13 modes, which reduces the amplitude of the f_s component in the mouthpiece. The lowest component $f_s - f_{trb} = 15.9$ Hz at the end of the simulation is also weaker, but it is perceived as a modulation of the sound, making a "rolling" sound just like in previous simulations and in measurement. The brief regime at fundamental frequency $f_{trb}/5$ which can be seen between $t = 7s$ and $t = 8s$ in Fig 10.10 does not occur here, because of the absence of the first mode. Another simulation with all acoustic modes except the first one does not make this regime appear, which strengthens this hypothesis. This simulation result is not shown here for the sake

of brevity.

frequency	$f_s - f_{trb}$	f_{trb}	f_s	$2f_{trb}$	$f_s + f_{trb}$	$3f_{trb}$	$3f_s - f_{trb}$
difference (dB) at $t = 5$ s	0.6	0.3	10.7	27	11.7	23.2	16
difference (dB) at $t = 9$ s	7.6	0.5	4.8	27.4	14.2	27	8.7
difference (dB) at $t = 13$ s	26	1.2	4.5	17.9	12.7	25.1	17.4

TABLEAU III – Differences (in dB) in the amplitudes of the first peaks for one-mode and 13-mode simulations, measured on the data displayed in Fig. 10.14, at three time points : $t = 5$ s when $f_s = 270$ Hz, $t = 9$ s when $f_s = 233$ Hz and decreases, and $t = 13$ s when $f_s = 196.4$ Hz. While amplitudes of the peaks at f_{trb} are equivalent, other components are much weaker when the resonator has a single mode.

The quasi-periodic regime related to multiphonics therefore occurs even with a very simple instrument model : a one-DOF mechanical exciter non-linearly coupled with a one-mode acoustic resonator, self-oscillating and forced with a sinusoidal signal.

10.4 Conclusions

Both measurement and simulation results presented in this paper confirm the type of oscillating regime of the multiphonic sounds studied. When the musician sings and plays different notes simultaneously, the resulting pressure signal inside the instrument contains harmonics of the sung and played frequencies, as well as combination tones, whose frequencies are integer combinations of f_s and f_{trb} . This is verified not only in the particular case of an $F_3 - C_4$ multiphonic as in Section 10.3 but also in the case of a time-variable frequency. This generally corresponds to quasi-periodic oscillation, except when an internal resonance occurs and the ratio between playing and singing frequencies is rational. In this latter case, the oscillation is periodic, though it is different from the usual periodic self-oscillation of a brass instrument.

To some extent, the trombone physical model used in this paper is able to simulate this phenomenon. Even if the simulated and measured f_{trb} are not exactly the same (as usual with an outward-striking lip model), the frequency content of the simulated internal pressure of the instrument p is very similar to the probe microphone measurements inside the mouthpiece, with harmonics of both the sung and played signals along with combination tones. This similarity also applies when f_s decreases with time, and when the instrument model is simplified at most. The major difference between simulation and measurement consists in differences in the spectral envelopes : the amplitude of the peaks corresponding to combination tones is generally weaker in measurement than in simulation when the forcing is sinusoidal. This is particularly true when f_s and f_{trb} are close to each other, the secondary peaks being much weaker in measurement. A richer forcing signal with three harmonics, closer to the measured sung signal, does not dramatically change the results : changing the forcing signal does not seem the best way to improve the simulation.

While the simulated blowing pressure p_m^0 is of the same order of magnitude as blowing pressures usually measured on trombone players [Bouhuys, 1968, Fréour and Scavone, 2013], the amplitude of the forcing signal p_m^1 used in our simulations is about 15 times higher than the amplitude measured in the recorded mouth pressure signal p_m . This is the main limitation of this model for multiphonic simulation. Yet, these very different input parameters give comparable results in terms of internal pressure p , the difference in amplitude between the peaks at f_{trb} and f_s being of the same order of magnitude in the measured and simulated p spectra. This is the main limitation of our model. A more complex model, taking into consideration the couplings between the lips,

the vocal folds, the resonances in the instrument and those in the vocal tract would possibly give a better simulation of multiphonics in terms of amplitude of the frequency components, yet at the expense of a far greater complexity.

Acknowledgements

Thanks to Maxime Demartin, trombonist, for obligingly performing the required exercises on our experimental device, and entrusting his trombone to us for impedance measurements. Thanks to the technical staff of the SERM, Olivier Pot and Vincent Long, for their help in designing and building the experimental setup. Thanks to Patrick Sanchez and Thibault Lefranc for their help for input impedance and radiation transfer function measurements. Thanks to Jean Kergomard and Pierre Vigué for their interesting discussions about this article.

This work has been carried out in the framework of the Labex MEC (ANR-10-LABX-0092) and of the A*MIDEX project (ANR-11-IDEX-0001-02), funded by the « Investissements d’Avenir » French Government program managed by the French National Research Agency (ANR).

Résumé de la partie III :

L'analyse de stabilité linéaire donne des informations sur le fonctionnement global du modèle, en particulier le seuil de pression dans la bouche à partir duquel une oscillation est susceptible d'apparaître. Tant que le système reste au voisinage de son régime stationnaire, le modèle linéarisé permet de calculer l'enveloppe temporelle du régime transitoire et l'évolution de la fréquence de l'oscillation. Déterminer les caractéristiques des autres régimes (notamment les régimes établis quand la pression dans la bouche dépasse le seuil d'oscillation) nécessite d'autres méthodes d'analyse telles que la simulation temporelle. Ces méthodes déterminent si le régime établi est périodique ou non, ou encore si un ou plusieurs doublements de période interviennent. L'évolution des caractéristiques des solutions périodiques, stables ou instables peut être suivie par continuation numérique grâce à la Méthode Asymptotique Numérique.

Les résultats du modèle reproduisent de nombreux comportements d'un trombone. En fonction des paramètres choisis, l'oscillation est supportée principalement par l'un des modes de résonance acoustique du trombone. Le modèle admet des solutions périodiques, dont la fréquence d'oscillation est proche des valeurs mesurées expérimentalement sur un trombone. Cette proximité entre fréquence calculée et expérience est notamment vérifiée pour la note pédale du trombone, et ce malgré la forte inharmonicité du premier mode de cet instrument : ceci implique un fort écart entre la fréquence de jeu et la fréquence de résonance dudit mode. La fréquence de l'oscillation périodique correspondant au premier mode du saxhorn est elle aussi éloignée de la fréquence de résonance de ce mode. Cette oscillation correspond à une note jouable au saxhorn, baptisée "note fantôme". Certains choix de paramètres résultent en une oscillation due à un doublement de période, en accord avec les résultats expérimentaux publiés dans [Gibiat and Castellengo, 2000]. Au moins une partie des solutions périodiques émergent d'une bifurcation de Hopf inverse, ce qui peut expliquer la difficulté des attaques *pianissimo* au trombone. D'autres situations mènent à une oscillation quasi-périodique, qualifiée de "son roulant" par les musiciens. Ce modèle s'avère capable de reproduire la perturbation du jeu de la note pédale par l'usage d'une sourdine sèche, ainsi que la compensation de cette perturbation par un système de contrôle actif. L'ajout d'un forçage à ce modèle permet de simuler la production de sons multiphoniques et de montrer qu'ils correspondent à des régimes d'oscillation soit quasi-périodiques, soit périodiques résultant de résonances internes entre le forçage et l'auto-oscillation. Tous les comportements observés sur ce modèle et rappelés ci-dessus correspondent à des comportements des cuivres déjà connus, ou mis en évidence expérimentalement pendant la thèse.

Des limites à la capacité de ce modèle à reproduire le comportement d'un cuivre sont cependant mises en évidence. Les fréquences d'oscillation du modèle sont systématiquement un peu plus hautes que les notes expérimentées, comme toujours avec le modèle de lèvres retenu [Chaigne and Kergomard, 2016, Silva et al., 2007]. Si la note "fantôme" du saxhorn est prédite par ce modèle, aucun jeu de paramètre n'a été trouvé pour reproduire le *Sib* pédale de cet instrument. Enfin, la reproduction correcte des régimes d'oscillation multiphoniques est conditionnée au choix d'une amplitude de forçage très supérieure à l'amplitude mesurée du chant que ce forçage modélise.

Quatrième partie

Paramètres de contrôle du jeu :
l'exemple de la trompette

Introduction

Cette quatrième partie s'attache, comme le reste de la thèse, à l'étude des régimes d'auto-oscillation dans les cuivres, mais en abordant le sujet par la mesure du contrôle exercé par le musicien. Cette approche est complémentaire de l'étude de ces régimes par modélisation physique. Les résultats sur ce sujet issus de mesures expérimentales sont relativement rares, car les paramètres à mesurer sont particulièrement nombreux pour les cuivres. La mesure de ces paramètres doit perturber aussi peu que possible le musicien, ce qui exclut les capteurs encombrants ou qui modifient les caractéristiques de l'instrument. Certains paramètres de contrôle sont encore aujourd'hui impossibles à mesurer pendant le jeu (par exemple la fréquence de résonance des lèvres).

L'instrument choisi est la trompette et les régimes étudiés sont périodiques. Les résultats présentés sont issus de campagnes de mesure *in vivo* réalisées à l'aide de la trompette instrumentée décrite au chapitre 7. Après mise en marche du dispositif expérimental et mesure de la température ambiante, le musicien dispose du temps qu'il désire, pour pratiquer quelques exercices d'échauffement, se familiariser avec la trompette instrumentée et s'habituer à l'acoustique de la salle d'expérimentation. Les exercices sont répétés autant de fois que nécessaire pour que le sujet soit satisfait de sa performance et que l'expérimentateur soit sûr que toutes les mesures ont été effectuées correctement. L'un des objectifs est de comprendre comment un musicien fait varier certains des paramètres de contrôle mesurés pour choisir la fréquence de jeu et la nuance jouée. Ces aspects sont développés dans le chapitre 11. Un autre objectif est de mesurer la plage de valeurs de pression dans la bouche et de force d'appui sur l'embouchure qu'un musicien utilise pour jouer sur un registre donné de sa trompette. Cette cartographie des paramètres de jeu est présentée dans le chapitre 12. Les sujets sont quatre trompettistes : l'un est étudiant au conservatoire à un niveau semi-professionnel. Les trois autres sont des musiciens amateurs dont le niveau de formation et la pratique musicale sont très divers.

Dans cette partie, l'intégralité des partitions et des noms de notes est écrite pour la trompette la plus couramment utilisée, qui est un instrument transpositeur en *Sib*. Toutes les notes indiquées ici correspondent donc à la note de la gamme tempérée située un ton au-dessous : une note indiquée *Do6* ici correspond au *Sib5* de la gamme tempérée (932.3 Hz), un *Sol* correspond à un *Fa* etc.

Chapitre 11

Contrôle de l'instrument par un musicien

La tessiture de la plupart des instruments de la famille des cuivres couvre de nombreux registres de l'instrument. Par exemple, un trompettiste peut jouer au moins 6 notes différentes sans modifier son doigté¹. D'autre part, sans changer de registre, il est possible d'infléchir la fréquence de jeu en utilisant une technique appelée "pitch-bend"². Dans le but de comprendre comment le musicien sélectionne le registre joué, ce chapitre présente les valeurs de pression dans la bouche et de débit d'air moyen, mesurées quand un trompettiste joue les notes pour un doigté "à vide" pour différentes nuances. Ces mesures sont analysées en termes de puissance fournie par le musicien et de résistance à l'écoulement, selon une approche proposée par [Bouhuys, 1968]. Puis on observe dans quelle mesure le musicien peut contrôler l'écart entre sa fréquence de jeu et les fréquences de résonance acoustiques de la trompette.

11.1 Pression dans la bouche et débit d'air

Le trompettiste joue l'exercice présenté sur la figure 11.1. Chaque note de la série harmonique correspondant aux registres 2 à 7 de l'instrument tous pistons levés (de *Do4* à *Sib5*), est jouée quatre fois à une nuance différente en cherchant à couvrir toute la plage dynamique en nuances "équidistantes". *ppp* et *fff* désignent respectivement la nuance la plus faible et la plus forte que le musicien peut atteindre, *mp* et *mf* étant des nuances intermédiaires. Chaque note est tenue jusqu'à ce que le signal de sortie de l'anémomètre soit stabilisé ce qui, compte tenu du temps de réponse de l'appareil, peut durer jusqu'à 30 secondes. La figure 11.2 représente les résultats de mesure. Elle reprend la forme utilisée pour une expérience équivalente sur un tromboniste dans la figure 4 de [Bouhuys, 1968], rappelée ici dans la Fig. 11.3. La pression dans la bouche p_b est tracée en fonction de la tension de sortie de l'anémomètre à boule chaude U utilisée pour la mesure de débit. Cette tension est proportionnelle à la vitesse d'écoulement mesurée par l'anémomètre, elle-même supposée proportionnelle au débit de l'écoulement d'air dans l'instrument : la sortie du capteur de débit est donc supposée proportionnelle au débit dans l'instrument. C'est une hypothèse forte qui devra être vérifiée par l'étalonnage de l'anémomètre, aussi préférons-nous pour l'instant donner la tension de sortie (en volts) de celui-ci, supposée analogue à un débit.

1. Le "doigté" désigne ici la position des pistons. Un doigté "à vide" signifie qu'aucun piston n'est enfoncé.
2. Les expressions "lipping up" et "lipping down" peuvent également désigner cette technique.

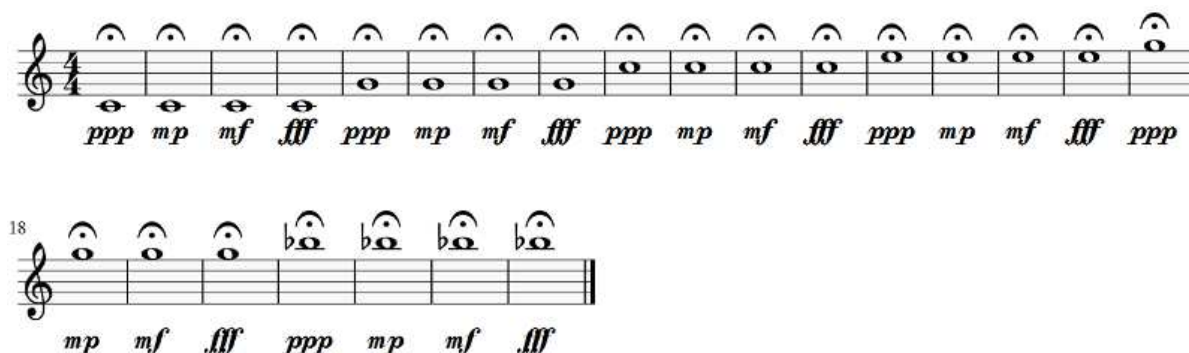


FIGURE 11.1 – Exercice demandé au musicien : notes tenues sur les régimes 2 à 7 de la trompette tous pistons levés. Chaque note est jouée à la nuance minimale dont le musicien est capable *ppp*, à deux nuances intermédiaires *mp* et *mf*, puis à la nuance maximale *fff*.

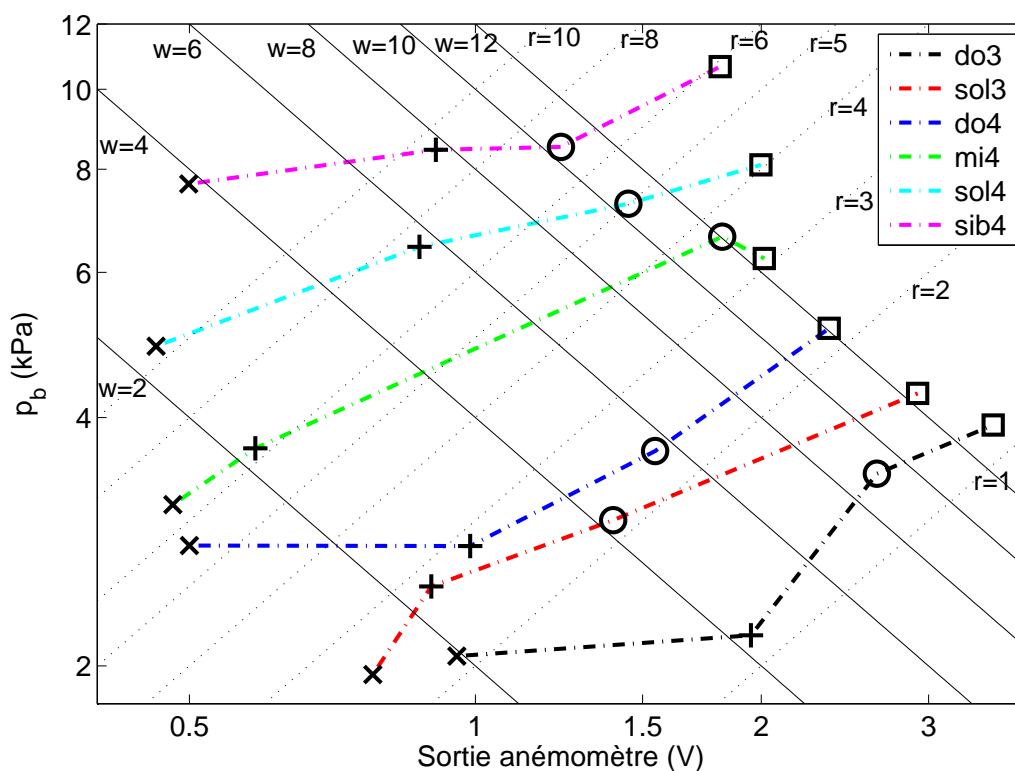


FIGURE 11.2 – Pression dans la bouche en fonction de la tension de sortie de l'anémomètre, pour un trompettiste jouant les registres 2 à 7 tous pistons levés, à 4 nuances différentes. Chaque couleur de trait correspond à une note, chaque symbole correspond à une nuance : *ppp* (x), *mp* (+), *mf* (o) et *fff* (□). Les droites en trait plein correspondent à des lignes d'isopuissance (w), les droites en pointillé à des isorésistances aérauliques (r).

Les résultats obtenus sur la trompette sont qualitativement identiques aux mesures sur trombonistes de [Bouhuys, 1968]. Lorsque le trompettiste joue plus fort, le débit et la pression dans la bouche augmentent tous deux. La plage de débit utilisée est sensiblement la même pour toutes les notes (correspondant à une sortie de l'anémomètre entre 0.4 et 3.4 V environ). Les notes aiguës à partir du régime 4 (*Do4*) peuvent être jouées à la nuance *ppp* avec des débits moindres. Cela correspond au ressenti du musicien. En revanche, la pression dans la bouche est spécifique à chaque

note jouée : pour une nuance donnée, la pression dans la bouche utilisée pour jouer sur le registre $n + 1$ est supérieure à la pression pour jouer sur le registre n . Sous l'hypothèse que la pression nécessaire pour jouer la nuance *ppp* correspond au seuil d'oscillation p_{thresh} , ce résultat correspond à l'analyse de stabilité linéaire du modèle de cuivre, présentée au chapitre 8.1 (page 59 : le seuil d'oscillation croît avec le rang du registre joué).

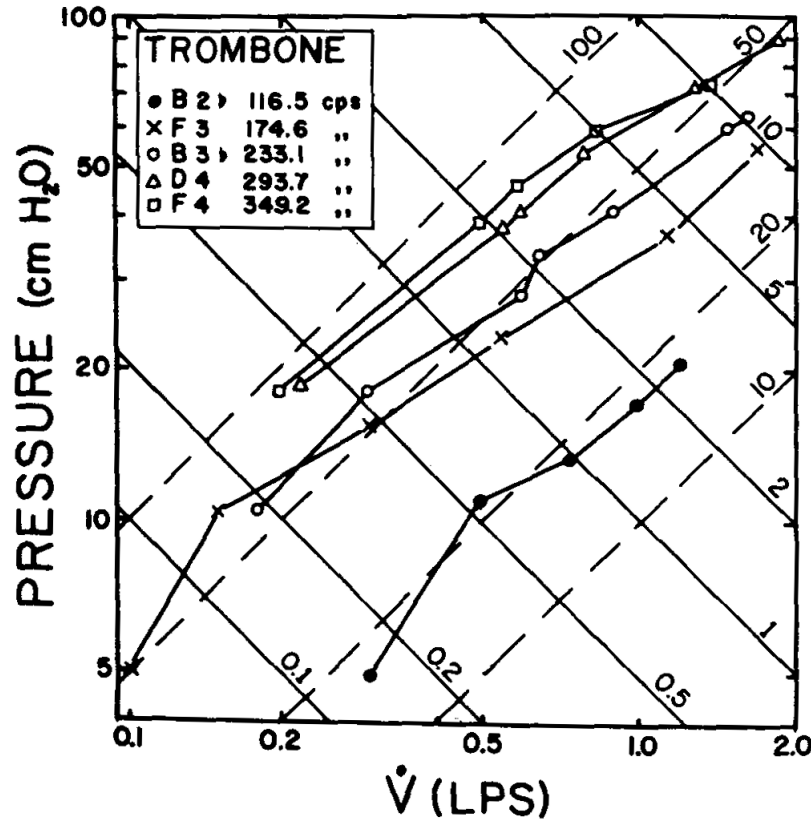


FIGURE 11.3 – Figure issue de [Bouhuys, 1968] présentant des résultats de mesure sur le trombone, très similaires à ceux présentés ici.

Il est intéressant de remarquer que d'une part, le produit du débit moyen par la pression dans la bouche est homogène à une puissance moyenne en Watt ; d'autre part, le rapport de ces valeurs est homogène à une résistance aéraulique moyenne à l'écoulement, en $\text{Pa}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{s}$. Le produit et le rapport des paramètres mesurés sont donc respectivement analogues à une pseudo-puissance et une pseudo-résistance. Quelques courbes de niveau de ces valeurs sont également tracées sur la figure 11.2. Elles correspondent à des droites (les échelles étant logarithmiques), et représentent des isopuissances allant de $w = 2$ à $w = 12$ et des isorésistances de $r = 1$ à $r = 10$. Sur le circuit d'air constitué par le musicien et son instrument, le canal entre les lèvres est le seul élément de section variable susceptible de modifier la résistance à l'écoulement d'air. L'hypothèse de [Bouhuys, 1968], selon laquelle la section moyenne du canal entre les lèvres est d'autant plus faible que cette pseudo-résistance aéraulique r augmente, est reprise ici.

On observe donc sur la figure 11.2 que l'augmentation de la nuance à fréquence égale, tout comme l'augmentation de la fréquence à nuance égale, se traduisent par l'augmentation de la puissance fournie par le musicien : ceci est cohérent avec le ressenti subjectif du trompettiste sur lequel les mesures sont effectuées, pour qui il est plus fatiguant de jouer fort et aigu. Par ailleurs, augmenter la nuance sans modifier la note jouée implique la diminution de la résistance aéraulique, c'est à dire une augmentation de la section d'ouverture des lèvres. Ceci est plus marqué pour les notes

aigües que pour les notes graves. En revanche, à nuance égale, une note plus aigüe correspond à une résistance aéraulique accrue, donc à des lèvres plus resserrées. Encore une fois, ces résultats sont cohérents avec le ressenti du trompettiste, qui relâche volontairement ses lèvres lorsqu'il joue fort et, au contraire, tend à les resserrer quand il joue aigu.

Les résultats de ces mesures sont qualitativement équivalents à ceux publiés et analysés dans [Bouhuys, 1968] sur un trombone. Ceci met en évidence la remarquable similarité des techniques mises en œuvre pour jouer les instruments de la famille des cuivres. Ces résultats pourraient probablement aider certains trompettistes à prendre conscience de leur manière de jouer, en objectivant leur contrôle. Il est possible d'imaginer une application pédagogique fournissant un retour en temps réel au musicien sur sa technique de jeu, permettant par exemple à un élève de comparer ses résultats à celui de son professeur.

11.2 Fréquences de jeu et résonances acoustiques

La fréquence de jeu est mesurée lorsqu'un trompettiste joue une descente chromatique de *Sol4* à *Réb4*, ce qui correspond au troisième registre de la trompette pour toutes les positions de pistons utilisées dans la pratique musicale³. Aucune consigne de nuance n'est donnée au musicien. Cette fréquence de jeu est comparée aux fréquences de résonance de la trompette utilisée. La figure 11.4 indique cette fréquence et ses premières harmoniques sur le tracé de l'impédance de la trompette utilisée, pour deux exemples de notes mesurées : *Sol4* (tous pistons levés) et *Mi4* (pistons 1 et 2 enfoncés). Les impédances pour chaque doigté ont été préalablement mesurées à une température T_1 : elles sont ici corrigées pour compenser la différence entre T_1 et la température de l'air dans l'instrument durant la mesure T_2 . Dans la pratique, cette correction se traduit par la dilatation de l'axe des fréquences par $\sqrt{T_2/T_1}$. En première approximation, T_2 est supposée uniforme sur toute la longueur de l'instrument [Gilbert et al., 2006] et égale à la moyenne entre la température ambiante et la température de l'air soufflé par le musicien.

Dans ce cadre de jeu normal, les fréquences de jeu observées sont systématiquement un peu plus élevées que les fréquences de résonance de l'instrument. Ce phénomène est visible sur la figure 11.4, en particulier sur les points donnant la fréquence des harmoniques. Ceci correspond au comportement d'un modèle de cuivre où les lèvres sont modélisées par une valve "en-dehors" [Campbell, 2004]. Cela conforte le choix effectué au chapitre 2 dans le cadre d'un modèle de lèvres à un degré de liberté. Néanmoins, le décalage entre fréquence de résonance de la trompette et fréquence de jeu mesurée est plus important pour le *Mi4* (5.8 Hz, soit 35 cents) que pour le *Sol4* (3.1 Hz soit 15 cents), ce qui est visible sur la figure 11.4. L'écart entre la fréquence jouée par le musicien et la fréquence de résonance associée dépend donc de la note jouée. Les écarts mesurés ici sont comparables à ceux publiés dans [Eveno et al., 2014].

Malgré le décalage relativement plus important entre la fréquence de jeu du *Mi4* et la fréquence de résonance associée, cette note est jouée très légèrement trop grave par rapport à la gamme tempérée. Ce décalage permet donc d'améliorer — incomplètement — la justesse de l'instrument. Cette correction se fait cependant au prix d'une diminution du module de l'impédance, environ 5 fois plus faible à la fréquence de jeu qu'au pic de résonance.

3. Soit toutes les combinaisons possibles à l'exception du 3^{ème} piston enfoncé seul. Voir la *Grande méthode complète pour cornet à pistons et Saxhorn* de J.B. Arban, 1864, ed. Carl Fisher, New York.

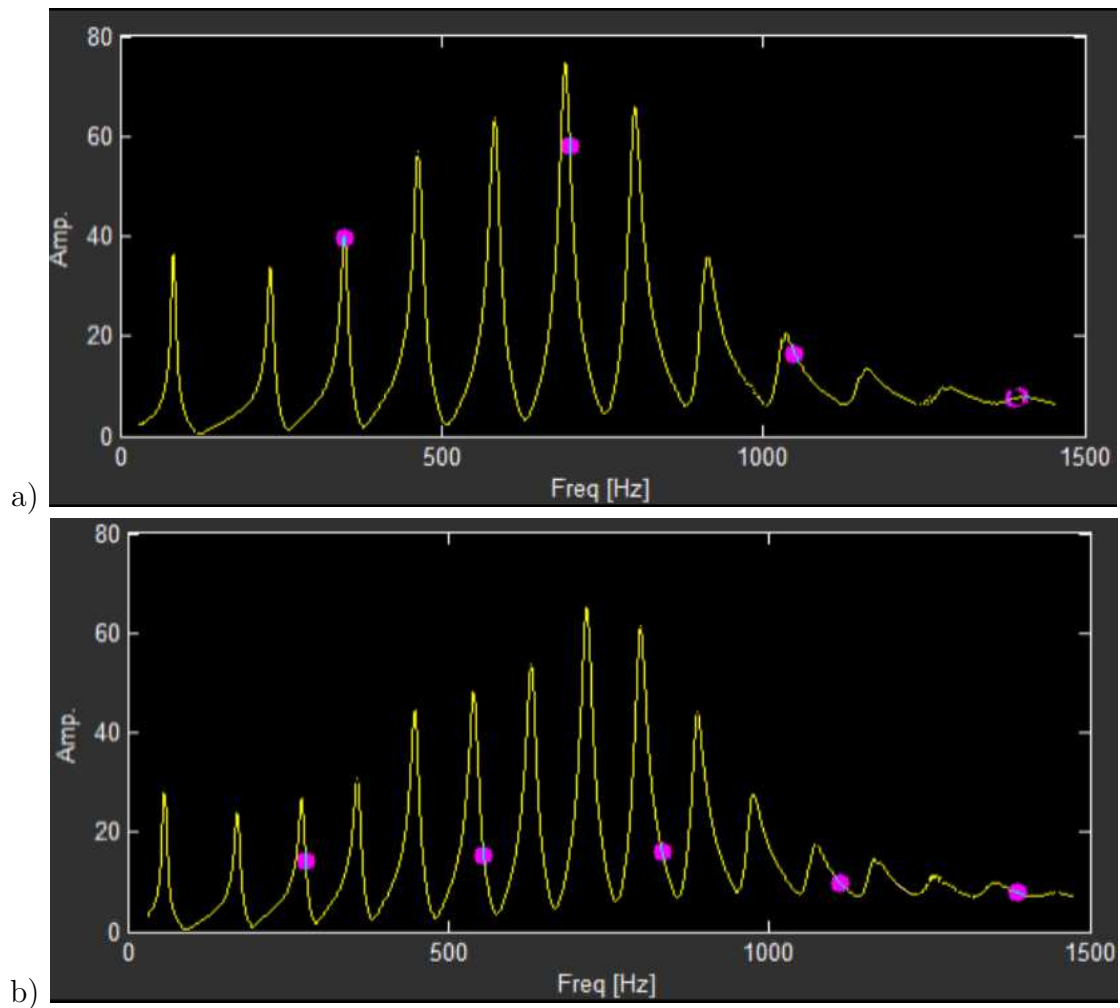


FIGURE 11.4 – Fréquence d'oscillation instantanée et ses premières harmoniques (points magenta) reportés sur l'impédance d'entrée mesurée adimensionnée (jaune) pour un trompettiste jouant un *Sol4* (a) et un *Mi4* (b). L'impédance correspond au doigté utilisé et est compensée en température.

11.3 Pitch-bending

Le décalage entre fréquence de résonance et fréquence de jeu peut, dans une certaine mesure, être contrôlé par le musicien. Cela fait l'objet d'une technique appelée "pitch bend", quelquefois traduit par "son courbé" dans la littérature francophone. La fréquence de jeu d'un trompettiste est enregistrée durant l'exécution de cette technique, et tracée sur la figure 11.5. Le trompettiste commence par jouer un *Sol4* (tous pistons levés). Il diminue ensuite autant qu'il le peut sa fréquence de jeu, avant de revenir au *Sol4* initial et de répéter l'exercice dans la foulée. Tout cela se fait sans aucune action sur les pistons.

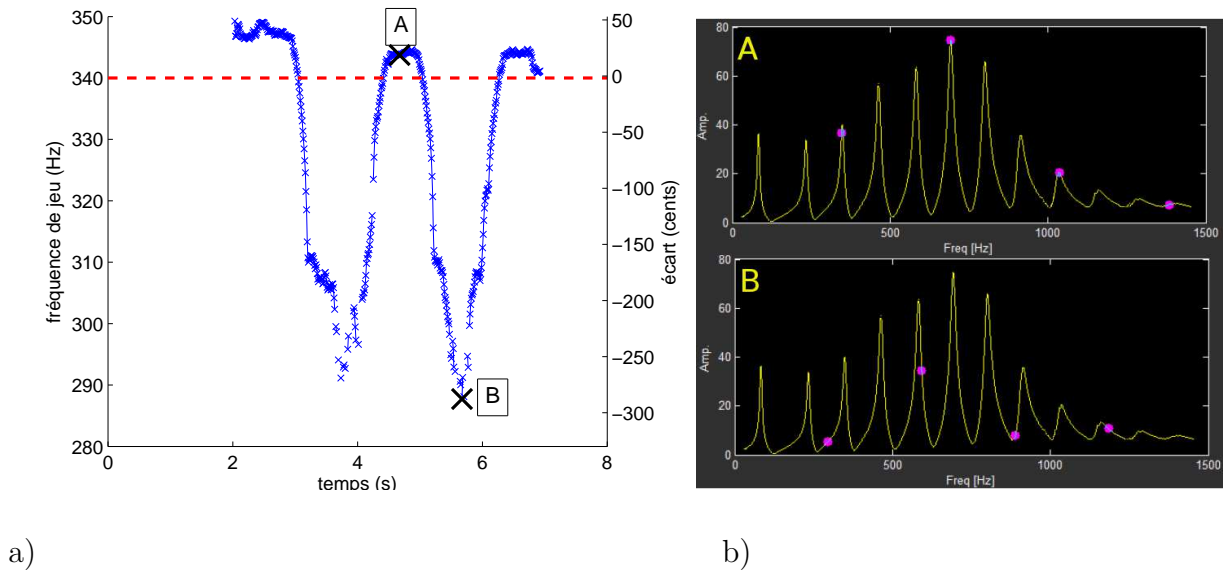


FIGURE 11.5 – gauche : Fréquence de jeu mesurée pendant que le trompettiste exécute un "pitch-bend" sur un *Sol4*. Le pointillé rouge indique la fréquence de résonance du 3^{ème} mode de la trompette $f_{ac,3} = 340$ Hz. La fréquence de jeu mesurée et ses harmoniques sont tracées sur l'impédance d'entrée de la trompette aux points (A) et (B) (droite).

La fréquence de jeu mesurée évolue de 347.6 Hz à 287.7 Hz, respectivement 38 cents au-dessus et 289 cents au-dessous de $f_{ac,3}$ de la trompette, atteignant la fréquence de jeu d'un *Mi4*. Durant ce pitch-bend, la fréquence de jeu peut être supérieure ou largement inférieure à $f_{ac,3}$. Ce comportement ne peut être reproduit par le modèle de cuivre décrit au chapitre 2, qui implique que la fréquence de jeu au seuil soit supérieure à la fréquence de résonance du mode de l'instrument. Par ailleurs, la comparaison entre fréquence de jeu et impédance montre que lorsque la fréquence de jeu diminue, ses harmoniques décroissent également⁴ et ne correspondent plus aux fréquences de résonance de l'instrument : ceci peut expliquer la diminution de l'amplitude de ces harmoniques, qui se manifeste par un appauvrissement du timbre du son durant le pitch-bend. L'oscillation est soutenue moins efficacement par les résonances de la trompette, ce qui se traduit par une difficulté de jeu : la réalisation de pitch-bends requiert l'aisance technique procurée par plusieurs années de pratique instrumentale.

Le conduit vocal du musicien est également un résonateur acoustique couplé aux lèvres, en parallèle de la colonne d'air de l'instrument : à ce titre, les fréquences de résonance du conduit vocal influencent la fréquence de jeu. Un musicien peut modifier la géométrie de son conduit vocal, notamment en déplaçant sa langue et son palais [Kaburagi et al., 2011], ce qui modifie les résonances du conduit vocal⁵. Un musicien dispose donc d'un moyen supplémentaire pour contrôler sa fréquence de jeu. Ce phénomène est connu pour être utilisé pour le jeu de pitch-bend et de notes suraiguës, par les cuivristes [Chen et al., 2012, Fréour and Scavone, 2013] ainsi que par les saxophonistes [Scavone et al., 2008, Guillemain et al., 2010].

L'importance relative des deux résonateurs — l'instrument et le conduit vocal — peut être calculée à partir des mesures de pressions acoustiques dans l'embouchure p_{emb} et dans la bouche $p_{b,ac}$. L'impédance d'entrée du conduit vocal s'écrit $Z_{CV}(\omega) = \frac{P_{b,ac}(\omega)}{U_{CV}(\omega)}$, où U_{CV} est le débit acoustique entrant dans le conduit vocal. Celle de la trompette $Z_{TP} = \frac{P_{emb}(\omega)}{U_{TP}(\omega)}$ où U_{TP} est le débit acoustique

4. Ce phénomène est particulièrement visible sur la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=Bb1BKSzu808>

5. Il s'agit du même type de mécanisme que celui utilisé pour choisir la voyelle prononcée ou chantée.

entrant dans la trompette. Le débit acoustique sortant de la bouche est l'opposé de celui entrant dans l'embouchure, soit $U_{CV} = -U_{TP}$, ce qui peut s'écrire :

$$\frac{Z_{CV}(\omega)}{Z_{TP}(\omega)} = \frac{-P_{b,ac}(\omega)}{P_{emb}(\omega)}. \quad (11.1)$$

Le module du rapport des impédances d'entrée du conduit vocal et de la trompette est donc égal, en valeur absolue, à l'amplitude du rapport entre la pression acoustique dans la bouche et celle dans l'embouchure. L'amplitude RMS du rapport des pressions $p_{b,ac}$ et p_{emb} mesurées est tracée en fonction de la fréquence instantanée dans la figure 11.6, aux instants correspondant aux points A et B de la figure 11.5.

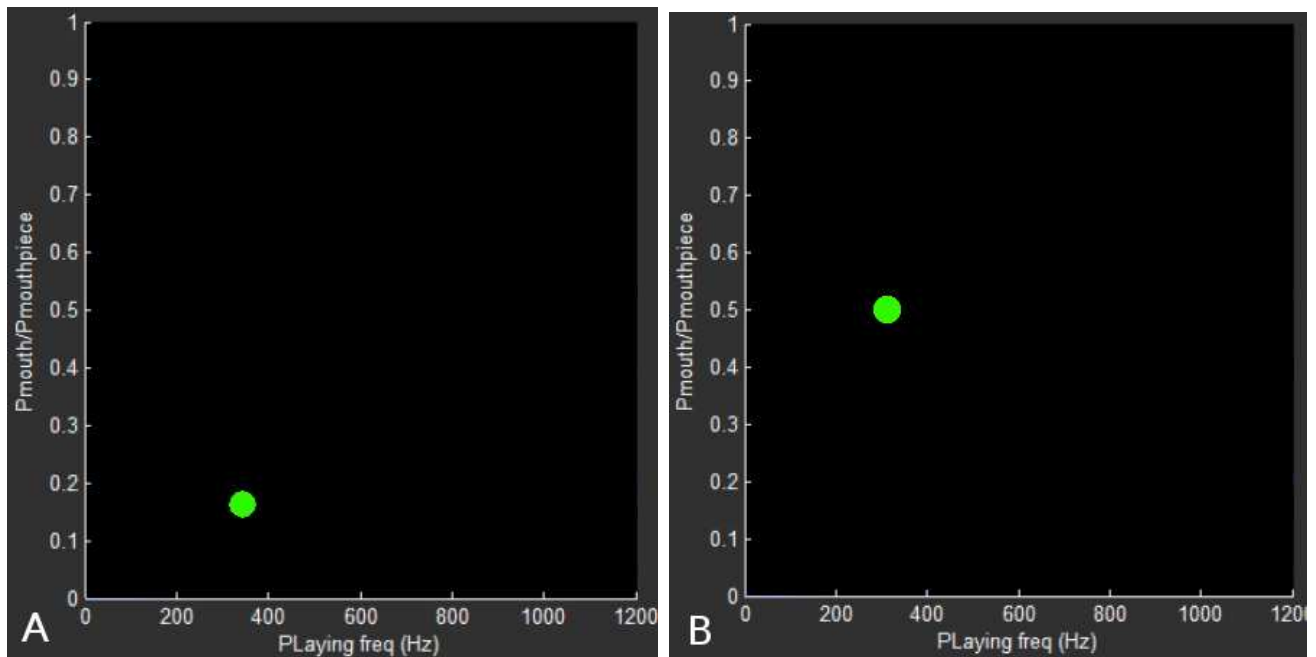


FIGURE 11.6 – Module du rapport de l'impédance d'entrée du conduit vocal sur l'impédance d'entrée de la trompette, tracé en fonction de la fréquence de jeu, aux points A et B de la Fig. 11.5. Entre le le maximum et le minimum de la fréquence de jeu, ce rapport augmente d'un facteur 3.

Le rapport des impédances d'entrée augmente de 0.17 à 0.5 durant le pitch-bend : l'influence du conduit vocal par rapport à celle de la trompette est multipliée par 3 pour cet exercice. Ces résultats confirment donc que, pour exécuter certaines techniques de jeu telles que le pitch bend, les trompettistes mettent en œuvre leur conduit vocal.

11.4 Conclusion

Les mesures de pression dans la bouche et de débit effectuées sur un trompettiste montrent une grande similitude dans la technique de contrôle observée ici pour la trompette et celles publiées dans [Bouhuys, 1968]. La valeur de débit dans l'instrument dépend principalement de la nuance de jeu. En revanche, la plage de débit utilisée varie peu selon la note jouée. En effet, le choix du régime est principalement déterminé par la pression dans la bouche, plus élevée pour les notes aigües au moins pour une nuance donnée. Ceci est cohérent avec l'augmentation de la pression seuil donnée par l'analyse de stabilité linéaire du modèle de cuivre à mesure qu'on joue sur un registre plus élevé, (cf. chapitre 8.1.2). L'augmentation de la nuance, tout comme l'augmentation

de la fréquence de jeu, implique que le musicien fournit à l'instrument une puissance moyenne supérieure, à travers l'un ou l'autre de ces paramètres. Augmenter la nuance nécessite également que l'ouverture des lèvres augmente, alors que jouer plus aigu nécessite de la diminuer. Les comportements observés sont cohérents avec le ressenti du musicien, à qui jouer fort et/ou aigu demande un effort supplémentaire et qui contrôle l'ouverture moyenne de ses lèvres (par l'intermédiaire des muscles du visage, de la position de la mâchoire, etc.) pour choisir le registre joué et la nuance. En situation de jeu "normale", quand un trompettiste joue sur un registre de son instrument, la fréquence de jeu est légèrement supérieure à la fréquence de résonance acoustique correspondante, ce qui correspond au comportement d'un modèle d'instrument où les lèvres sont modélisées par une valve "en-dehors" pour laquelle f_{thresh} reste supérieure à la fréquence de résonance acoustique du mode associé. Cet écart de fréquence compense partiellement les défauts de justesse de l'instrument. Une étude plus exhaustive de l'écart entre note jouée et résonance acoustique permettrait de mieux comprendre dans quelle mesure le musicien corrige, consciemment ou non, l'inharmonicité de son instrument. La différence entre fréquence de jeu et fréquence de résonance peut aussi être modifiée volontairement, sans recours aux pistons : dans ce cas de figure, appelé pitch bend, la plage d'évolution de la fréquence de jeu peut être large de plusieurs demi-tons, et se situe principalement sous la fréquence de résonance acoustique associée. La comparaison des pressions acoustiques mesurées dans la bouche et dans l'embouchure pendant ce pitch-bend montre que l'impédance du conduit vocal du musicien augmente considérablement par rapport à celle de la trompette, à mesure que la fréquence décroît. Un modèle cherchant à reproduire ce phénomène nécessite donc la prise en compte du conduit vocal du musicien. Pour ces situations de jeu particulières, il pourrait s'avérer pertinent d'utiliser un modèle de lèvres plus complexe [Yoshikawa, 1995, Cullen et al., 2000, Campbell, 2004], permettant un écart à la fois positif et négatif entre la fréquence de jeu et la fréquence de résonance acoustique.

Chapitre 12

Plages de valeurs des paramètres de jeu

Ce chapitre analyse des résultats de mesures effectués sur quatre trompettistes dont la pratique et la formation musicale sont très variées. L'objectif est ici de définir des plages de valeurs de différents paramètres utilisés pour le jeu musical. Ces plages de valeur sont mal documentées dans la littérature et sont d'une utilité certaine, notamment pour choisir les paramètres d'entrée d'un modèle physique.

12.1 Protocole de mesure

Les résultats présentés sont issus des mesures effectuées pendant que chaque musicien joue deux exercices, présentés sous forme de partition en figure 12.1 et 12.2. Ces deux exercices concernent les notes correspondant aux registres de 2 à 7, tous pistons levés ([0]) soit une montée harmonique du C4 au Bb5.

FIGURE 12.1 – Exercice demandé au musicien. Jouer ces notes tous pistons levés, en notes filées : Commencer avec le niveau sonore le plus doux possible, l'augmenter pendant 4 temps jusqu'au maximum jouable, puis le faire décroître pendant 4 temps jusqu'au minimum.

FIGURE 12.2 – Exercice demandé au musicien : notes tenues sur les premiers régimes de la trompette tous pistons levés. Le musicien joue chaque note à quatre nuances différentes, avec la consigne de couvrir une plage dynamique maximale.

Durant le premier exercice (Fig. 12.1), des "notes filées" sont jouées : le musicien attaque chaque note à la nuance la plus faible qu'il est capable de jouer puis augmente la dynamique de jeu jusqu'à obtenir la nuance maximale, avant de redescendre à la nuance la plus faible possible. La montée et la descente durent chacune 6 secondes, rythmées par un métronome visuel (flashes lumineux) réglé à 40 battements par minute. Le second exercice (Fig. 12.1) est identique à celui présenté au chapitre 11 : chaque registre est joué à 4 nuances différentes, de la plus faible possible à la plus élevée que le musicien peut atteindre, en cherchant à couvrir la plage dynamique de façon régulière. Les nuances *ppp*, *mp*, *mf* et *fff* sont données à titre indicatif. Chaque note dure 4 pulsations à 40 bpm, soit 6 secondes, également cadencées par un métronome visuel.

La consigne donnée aux musiciens est de couvrir toute leur plage dynamique, du niveau sonore le plus faible à celui le plus fort, sans se préoccuper de la justesse ni de la musicalité du son émis.

12.2 Pression dans la bouche

La figure 12.3 reporte les pressions dans la bouche p_b mesurées pour chaque note et chaque musicien, en magenta pour les résultats de l'exercice "notes filées" (Fig. 12.1) et en bleu pour ceux de l'exercice "notes séparées" (Fig. 12.2). Dans le cas des notes filées, 3 valeurs sont notées : deux minimales du début et de la fin, et une maximale. Chaque forme de marqueur (x , +, o et \square) correspond à un trompettiste différent. Les résultats de deux sujets seulement (+ et \square) apparaissent pour le C6 "contre-ut", et ce uniquement en notes séparées. Ceci est dû aux capacités techniques de certains sujets, mais aussi au fait que, pour les notes aigües, le capillaire de mesure de p_b est parfois bouché par la langue du musicien.

L'un des résultats mis en évidence sur un musicien unique au chapitre 11.1 se voit ici généralisé : la valeur minimale de p_b nécessaire pour jouer un registre augmente avec la hauteur de ce registre. Ceci rappelle l'augmentation des valeurs $p_{opt,n}$ quand n croît, montrée théoriquement au chapitre 8.1.2. Parallèlement, les valeurs maximales de pression dans la bouche augmentent avec la hauteur du registre joué.

La plage dynamique globale de p_b mesurée est de 28 dB entre la valeur la plus élevée et la valeur la plus faible mesurées. Ces valeurs correspondent respectivement à une nuance maximale sur la note filée la plus aigüe, et la nuance minimale sur la note la plus grave. Les valeurs maximales sont atteintes par le trompettiste semi-professionnel (marqueur +).

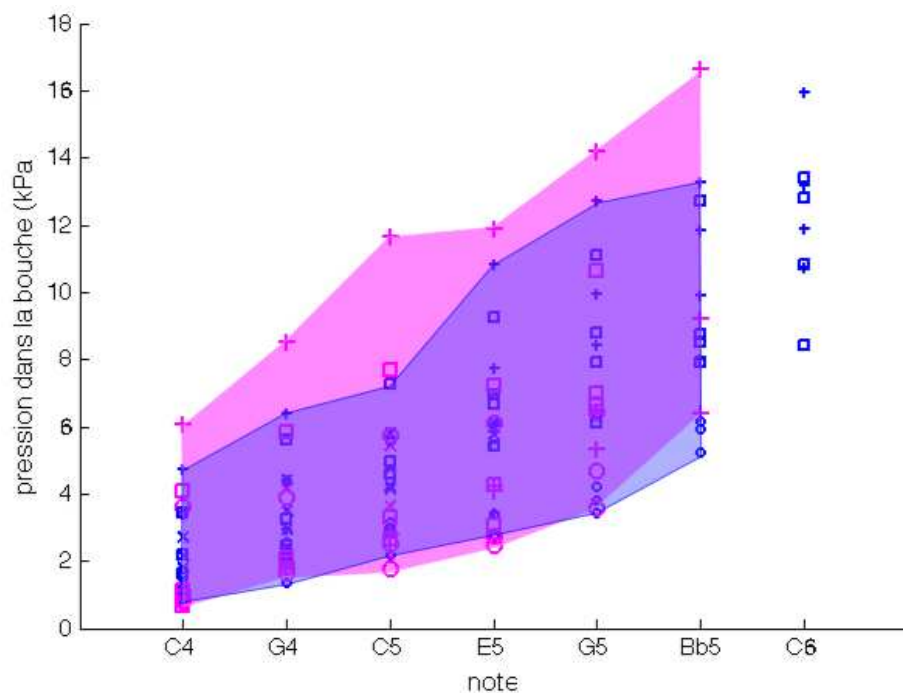


FIGURE 12.3 – Pression statique dans la bouche p_b mesurée sur 4 musiciens différents jouant les registres 2 à 7 d’une trompette tous pistons levés, d’abord en notes filées (magenta) puis en notes séparées 2 (bleu). Les zones parcourues par les variables dans les deux exercices sont tracées. Chaque musicien est représenté par un symbole différent (x , $+$, o et \square).

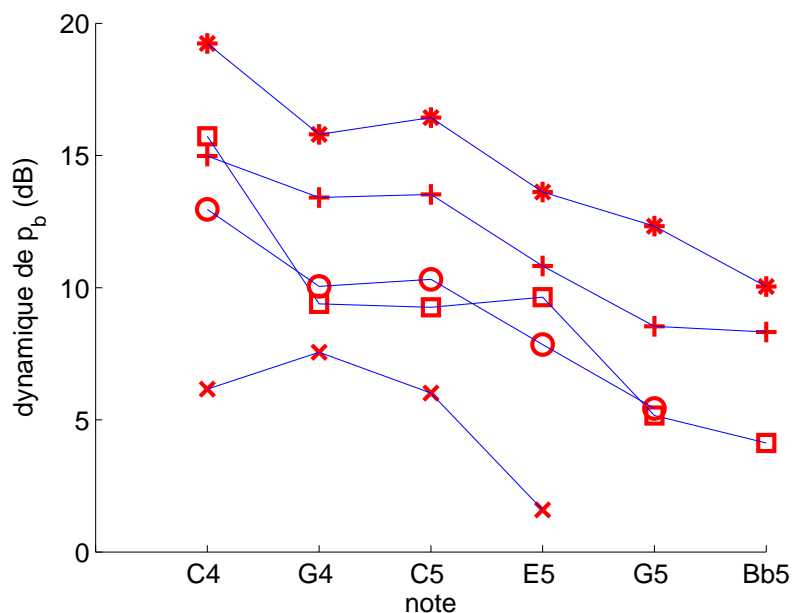


FIGURE 12.4 – Plage dynamique en dB de la pression dans la bouche pour chaque note jouée. La dynamique individuelle de chaque musicien est donnée (o , $+$, x , \square), ainsi que la dynamique tous musiciens confondus ($*$, calculée entre le plus haut niveau du musicien atteignant la plus haute valeur et le plus bas niveau du musicien atteignant la plus faible valeur).

La dynamique de p_b note par note, tous musiciens confondus, est présentée dans la figure 12.4 en échelle dB . La plage de p_b utilisable pour jouer une note est d’autant plus réduite que la note jouée est élevée. Cela s’explique notamment par l’augmentation de la pression minimale pour jouer une

note. La valeur maximale de pression est elle limitée par les capacités physiologiques du musicien, en particulier pour les notes les plus aigües¹. Une différence apparaît entre les deux exercices effectués : la valeur maximale de p_b atteinte en jouant des notes filées est toujours supérieure à celle atteinte en jouant la note séparée à nuance maximale *fff*. Cet écart de p_b maximale est particulièrement marqué chez le sujet identifié par +, ou il atteint une valeur comprise entre 1.2 et 5 kPa selon le registre. En revanche, la pression minimale est sensiblement identique pour les notes filées et pour les notes séparées. Par conséquent, la plage de p_b mesurée pour chaque note est plus large pour les notes filées que celle obtenue pour les notes séparées. Cette différence pourrait s'expliquer par un réflexe des sujets cherchant par habitude la musicalité malgré la consigne : les notes filées étant classiquement un exercice d'échauffement, moins soumis à cet impératif de musicalité dans la pratique quotidienne, cet exercice souffrirait moins de ce réflexe.

12.3 Amplitude de la pression dans l'embouchure

L'amplitude de la pression dans l'embouchure, notée $|p_{emb}|$, est tracée sur la figure 12.5. Les valeurs mesurées durant l'exercice "notes séparées" sont tracées en bleu, celles de l'exercice "notes filées" sont tracées en magenta. Les valeurs minimales (début et fin) et maximales (milieu) de $|p_{emb}|$ sont prises aux mêmes instants que celles de p_b reportées dans la figure 12.3.

Tous sujets confondus, la dynamique de $|p_{emb}|$ est maximale pour le *Do5* (37 dB) et le *Sol4* (35.6 dB). Elle est légèrement moins importante pour le registre le plus grave (28.5 dB) et réduit considérablement pour les registres plus aigus, avec un minimum de 20 dB pour le *Sib5*. La valeur minimale de $|p_{emb}|$ tend à croître avec le registre joué : l'amplitude la plus faible est atteinte pour le *Sol4* (137 dB) et la plus élevée pour le *Sib5* (158 dB). Sous l'hypothèse que la nuance perçue par l'utilisateur est corrélée à $|p_{emb}|$, ces résultats correspondent aux ressentis des trompettistes : d'une part la plage de nuances accessibles est plus grande pour les notes graves, d'autre part il est difficile de jouer *pianissimo* des notes aigües.

En revanche, les valeurs maximales de $|p_{emb}|$ sont remarquablement stables, ente 172.5 et 177 dB, ce qui correspond aux valeurs expérimentales typiquement publiées. L'amplitude maximale de l'oscillation est limitée par les pertes qui ont lieu dans le conduit, dont les pertes viscothermiques aux parois, rayonnement de l'instrument, etc. Aux amplitudes atteintes lors du jeu *fff*, le phénomène de cuivrage apparaît et la propagation dans le conduit n'est plus linéaire [Myers et al., 2012] : ceci modifie l'écoulement et serait à prendre en compte dans une éventuelle modélisation de ces pertes. L'amplitude dans l'embouchure est également limitée par la pression dans la bouche, qui ne peut croître indéfiniment à cause des limites physiologiques du trompettiste. Le seul trompettiste semi-professionnel (marqueur +) parmi les quatre sujets mesurés est celui qui atteint les plus fortes amplitudes, conséquence probable des fortes pressions dans la bouche qu'il est capable d'atteindre. Pour chaque note, la plage de $|p_{emb}|$ mesurée durant l'exécution de notes filés (Fig. 12.1) est considérablement plus large que celle mesurée pour des notes séparées (Fig. 12.2). A la différence des valeurs de p_b , cette plus grande plage de $|p_{emb}|$ est principalement dûe à des valeurs minimales plus faibles pour les notes filées que pour les notes séparées. Un tel écart de comportement entre le paramètre p_b et la variable $|p_{emb}|$ montre que d'autres paramètres que la pression dans la bouche interviennent dans l'amplitude de l'oscillation dans l'embouchure. D'autre part, la valeur minimale de $|p_{emb}|$ correspond systématiquement à la fin de l'enregistrement du son filé. Il semble donc possible d'atteindre une amplitude plus faible en la faisant diminuer plutôt qu'en attaquant le plus doucement possible. Ce type de comportement pourrait correspondre à une bifurcation inverse, telle que celle mise en évidence par continuation d'une solution du modèle de trombone au chapitre 8.1.2.

1. A titre de comparaison, la pression sanguine dans les artères d'un humain en bonne santé ne dépasse pas les 140 mmHg soit 18.6 kPa.

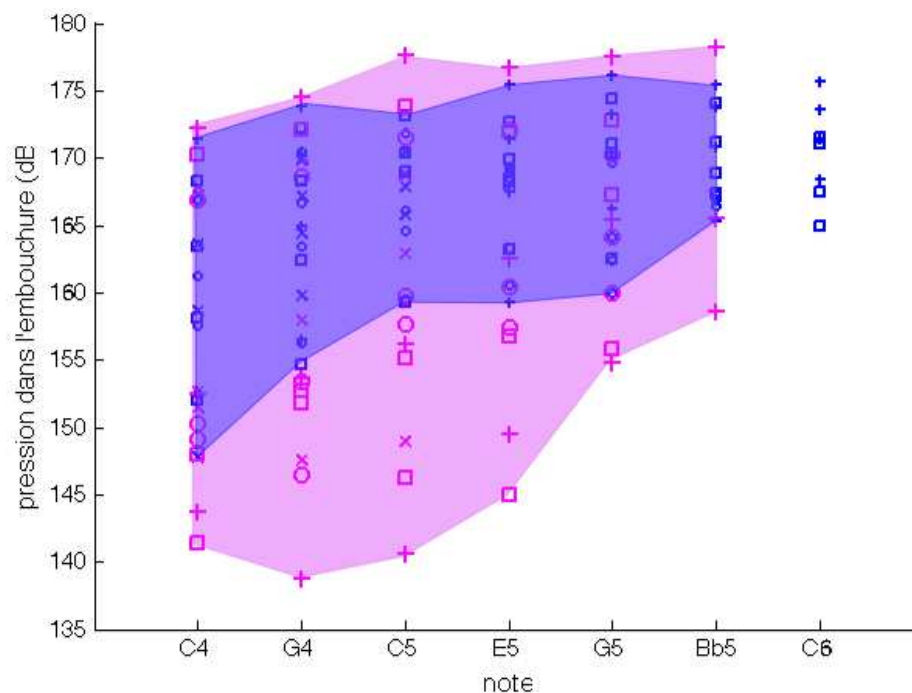


FIGURE 12.5 – Pression dans l'embouchure (dB) mesurée sur 4 musiciens différents, sur les exercices 1 (bleu) et 2 (magenta). Les zones parcourues par les variables dans les deux exercices sont coloriées. Chaque marqueur +, x , o et \square correspond à un musicien.

12.4 Force d'appui sur l'embouchure

La force d'appui des lèvres sur l'embouchure est représentée en fonction de la note jouée sur la figure 12.6, en magenta pour les notes filées (Fig. 12.1) et en bleu pour les notes séparées (Fig. 12.2). Bien qu'en toute rigueur une force s'exprime en Newton, elle est ici exprimée en kilogrammes. Les valeurs mesurées sur le *Sib5* filé ont été écartées car incohérentes (supérieures à 7kg).

La plage de forces utilisées par les 4 sujets est très étendue : la valeur maximale est de 2,2kg (*Sol5*) soit 100 fois la valeur minimale observée (22g pour le *Do4*). La force minimale nécessaire augmente quand le musicien joue sur des registres plus hauts. Ce résultat est cohérent avec les mesures publiées dans [Petiot, 2003]. Il correspond également à un réflexe classique des trompettistes débutants qui appuient fortement leur embouchure sur leurs lèvres, au risque d'occasionner des blessures [Jung et al., 1995]. L'amplitude de la dynamique note par note (rapport entre les valeurs maximale et minimale de la force d'appui) est tracée sur la figure 12.7. La plage de valeurs de force d'appui permettant de jouer les notes les plus graves *Do4* et *Sol4* est largement plus étendue que celle permettant de jouer sur les registres aigus. Cela s'explique par l'augmentation de la force minimale nécessaire sus-citée, tandis que la force maximale d'appui sur les lèvres est limitée par la douleur du musicien.

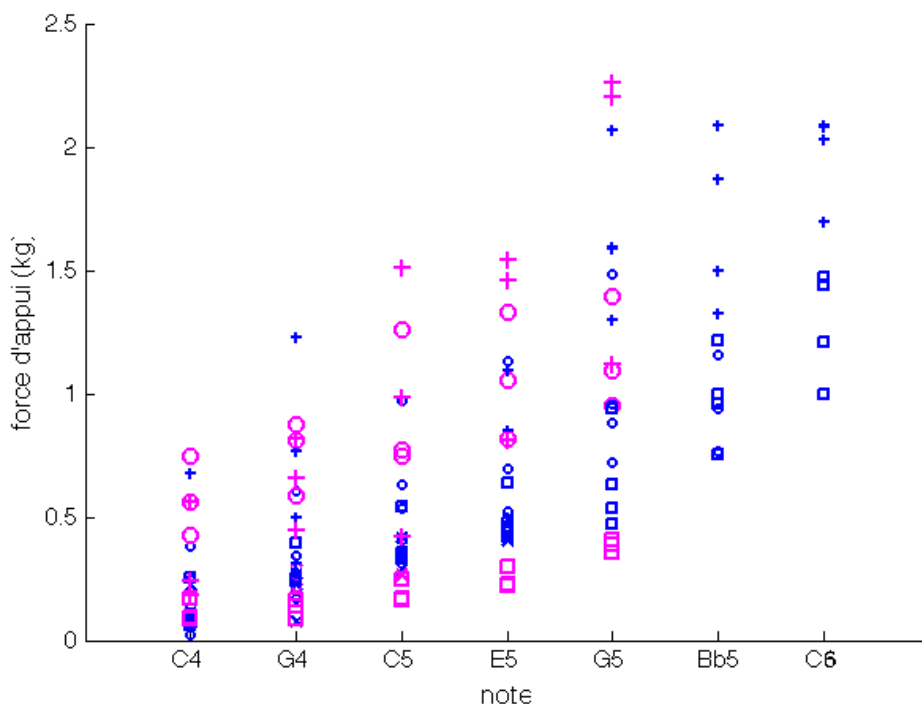


FIGURE 12.6 – Force d'appui des lèvres sur l'embouchure (kg) pour les exercices 1 (Fig. 12.1) en magenta et 2 (Fig. 12.2) en bleu, en fonction de la note jouée. Chaque marqueur +, x, o et □ correspond à un musicien.

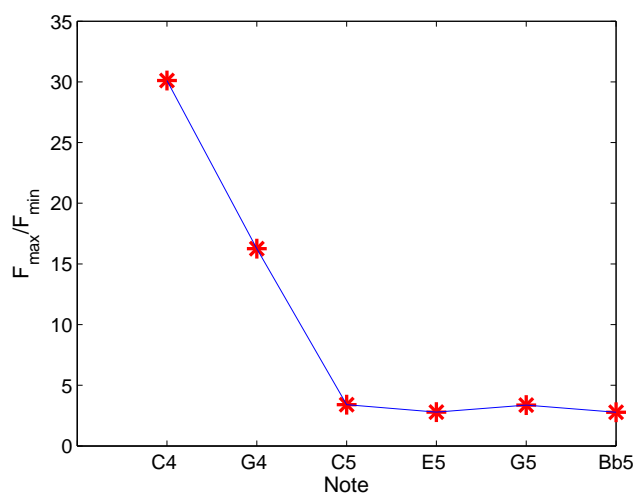


FIGURE 12.7 – Plage dynamique de la force d'appui : Rapport des forces maximale et minimale mesurée sur chaque registre, tous musiciens confondus.

Les mesures de force d'appui publiées dans [Petiot, 2003], effectuées sur des joueurs de bugle, donnent des résultats partiellement compatibles à ceux présentés ici : les valeurs mesurées sur des sujets de niveau "intermédiaire" et "professionnel" entrent dans les plages mesurées pour chaque note ; en revanche, le sujet expérimental désigné comme "moyen" emploie des forces supérieures à celles mesurées ici mais restent comparables. Le contrôle de la force d'appui sont donc comparables pour la trompette et le bugle. Les résultats de [Bianco et al., 2012], mesurant une force d'appui entre 12 et 27 Newton (soit 1.22 et 2.75 kg) pour un *Do5* sont supérieures aux valeurs mesurées ici. Cependant, la grande différence entre les exercices demandés est susceptible d'expliquer cet écart de résultats.

Force d'appui en fonction de p_b

L'évolution simultanée de p_b et de la force d'appui est observée plus en détail. La figure 12.8 représente la force d'appui en fonction de p_b , chaque graphique représentant une nuance : ppp (a), mp (b), mf (c) et fff (d). Les données sont issues de l'exercice "notes séparées".

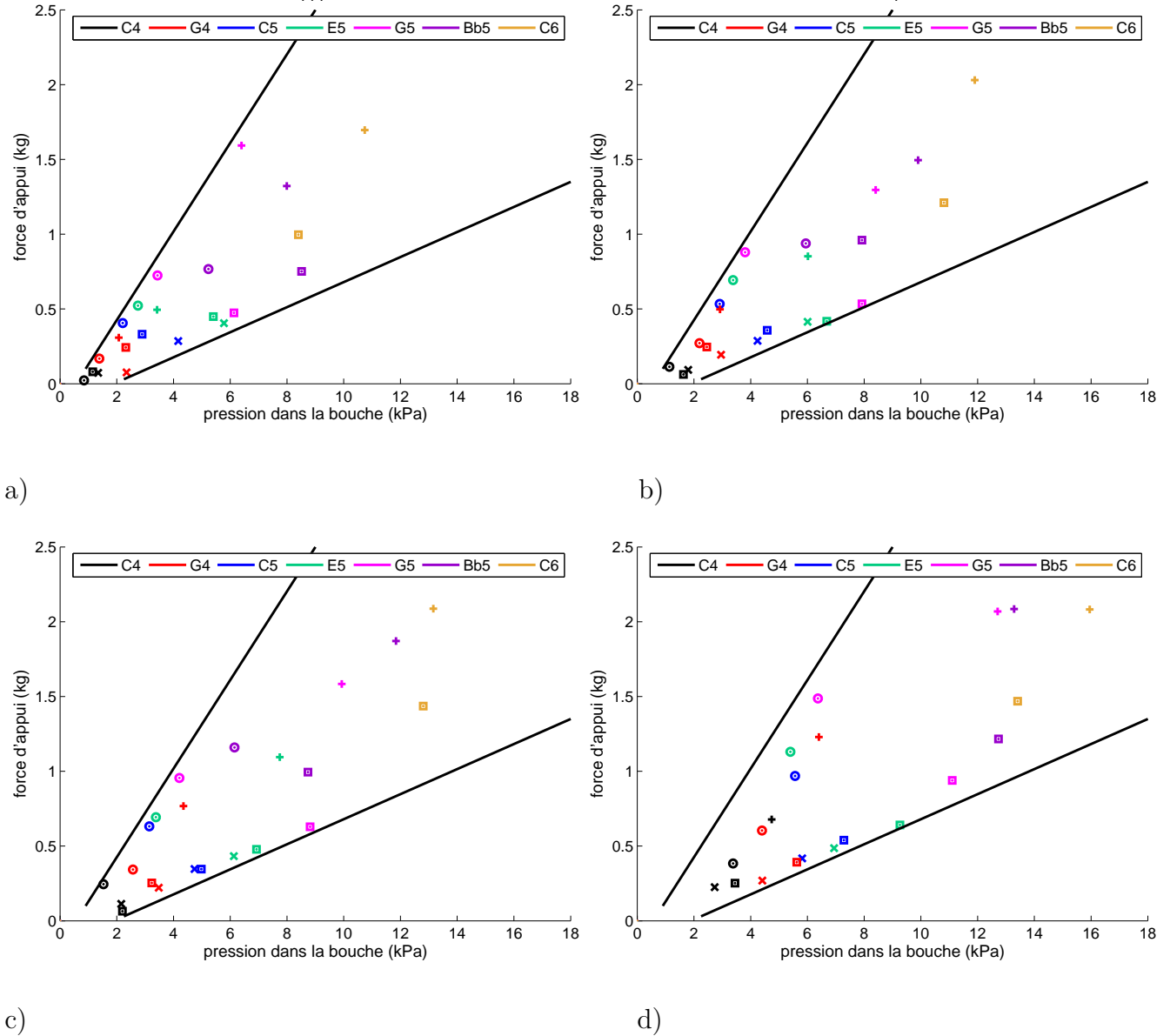


FIGURE 12.8 – Force d'appui sur l'embouchure (kg) en fonction de la pression dans l'embouchure p_b (kPa) pour les registres 2 à 8 d'une trompette tous pistons levés. Chaque note correspond à une couleur, chaque figure correspond à une nuance de jeu, de la plus faible (a) à la plus élevée (d). Les droites noires délimitent le secteur angulaire du graphique contenant tous les points. Chaque marqueur +, x, o ou \square correspond à un musicien.

L'ensemble des valeurs mesurées sont comprises dans un secteur angulaire du plan (force, p_{emb}), délimité par deux obliques noires reportées sur les quatre graphiques de la figure 12.8. Ceci met en évidence l'impossibilité de jouer plus fort et/ou plus aigu sans appuyer plus fort. Cela se vérifie individuellement pour chacun des 4 sujets expérimentaux. Cette augmentation inévitable de la force d'appui peut partiellement s'expliquer par la nécessité d'assurer l'étanchéité entre la bouche et l'embouchure malgré une plus forte contrainte de la pression de l'air sur l'intérieur des lèvres.

Néanmoins, les différences interpersonnelles apparaissant dans la figure 12.8 sont importantes : des régressions linéaires sur les données de chaque musicien montrent que selon le musicien considéré, le taux de variation de la force d'appui peut aller de $0.05 \text{ kg}\cdot\text{Pa}^{-1}$ (sujet x) à $0.37 \text{ kg}\cdot\text{Pa}^{-1}$ (sujet o). Ce taux de variation de chaque sujet dépend peu de la nuance : il reste relativement stable pour les figures 12.8 (a), (b), (c) et (d). Plusieurs stratégies de contrôle semblent exister : certains musiciens cherchent à maintenir une force d'appui faible et aussi constante que possible quelle que soit la note et la nuance jouée, quand d'autres s'autorisent des variations plus importantes de la force d'appui.

Le réflexe naturel de la majorité des trompettistes débutants consiste à appuyer trop fort sur les lèvres. La plupart des méthodes d'apprentissage visent donc à limiter cette force d'appui et à la compenser par un meilleur contrôle du masque musculaire. Il est intéressant de noter que le seul trompettiste semi-professionnel parmi les 4 sujets (marqueurs +) n'est pas celui dont la force d'appui évolue le plus lentement. Par ailleurs, comme pour la pression dans la bouche, c'est ce musicien qui atteint les plus hautes valeurs de paramètre de contrôle. Ces constatations rejoignent les conclusions de [Barbenel, 1988] selon lesquelles il n'y a pas de lien direct entre la force utilisée et le niveau de pratique des musiciens. La tolérance à la force d'appui pourrait dépendre de la morphologie buccale du trompettiste.

12.5 Conclusion

Ce chapitre dresse une ébauche de cartographie de certains paramètres de contrôle utilisés par 4 trompettistes pour jouer les notes correspondant aux registres 2 à 7 d'une trompette dont tous les pistons sont levés. Le fait de jouer un registre plus aigu, ou à une nuance plus élevée, provoque l'augmentation simultanée de la pression dans la bouche et de la force d'appui des lèvres sur l'embouchure. Pour ces deux paramètres, il existe une valeur minimale nécessaire pour jouer une note à une nuance très faible : cette valeur minimale croît quand le musicien joue un registre plus élevé. Cela correspond au ressenti des trompettistes. Un rapprochement peut être fait entre la valeur minimale mesurée de pression dans la bouche, et le seuil d'oscillation minimum $p_{opt,n}$ théorique du registre n du modèle présenté au chapitre 2 : ce seuil d'oscillation augmente également avec le rang du registre n comme cela est montré au chapitre 8.1.2. Cette correspondance est un élément en la faveur de ce modèle physique d'instrument de la famille des cuivres.

L'augmentation de la force d'appui sur l'embouchure lors d'un jeu plus fort ou plus aigu peut partiellement s'expliquer par la nécessité de conserver une jonction étanche entre le rebord de l'embouchure et les lèvres, malgré des situations impliquant une pression dans la bouche — donc une contrainte mécanique sur cette jonction — plus élevée. Cependant, l'augmentation de cette force en fonction de p_b est plus rapide pour certains musiciens que pour d'autres, mettant en lumière les différences de stratégies de contrôle parmi les quatre sujets testés. La comparaison de ce taux de variation entre force d'appui sur l'embouchure et pression dans la bouche est une caractéristique qui pourrait être mesurée sur des musiciens dont la formation musicale est identifiée.

La dynamique de la plage de paramètres utilisables pour jouer sur un registre donné tend à décroître avec la hauteur dudit registre. Cela se vérifie pour la pression dans la bouche comme pour la force d'appui sur l'embouchure : dans ce dernier cas, il y a une différence importante entre les registres 2 et 3 (*Do4* et *Sol4*) disposant d'une large plage, et les registres suivants pour lesquels elle est considérablement plus réduite. Les larges plages de paramètres utilisables pour le *Do4* et le *Sol4* sont un élément pouvant expliquer pourquoi ces notes sont les premières jouées par un débutant à la trompette. Les valeurs modérées de pression dans la bouche requises pour jouer ces notes participent probablement à cette facilité d'émission. La perception sensorielle humaine étant

logarithmique (fonction de Weber-Fechner), la diminution de cette dynamique est perçue comme une décroissance de l'amplitude des plages de paramètres utilisables.

La consigne donnée permet de constater que chaque sujet a des plages de valeurs de paramètres qui lui sont propres, se traduisant par des amplitudes de pression dans l'embouchure qui lui sont également propres. La consigne donnée sous forme de nuance donne des résultats assez variables en termes d'amplitude de pression dans l'embouchure, reflétant la diversité des stratégies de contrôle et de sensibilité des musiciens.

Résumé de la partie IV :

La mesure de paramètres de contrôle durant le jeu d'un trompettiste permet d'analyser quantitativement le contrôle de la production du son. Cette démarche est complémentaire à la démarche de modélisation proposée dans les parties précédentes. La mesure simultanée de la pression dans la bouche et du débit moyen dans l'instrument met en évidence une augmentation de la puissance moyenne fournie par le musicien quand il joue une note plus aigüe ou augmente la nuance de jeu. Jouer plus fort requiert un débit supérieur et une diminution de la résistance à l'écoulement, qui correspond à une augmentation de l'ouverture moyenne des lèvres. Jouer plus aigu exige la fermeture des lèvres, ainsi qu'une pression dans la bouche plus élevée. Ces résultats sont cohérents avec le ressenti du trompettiste. Le comportement de la trompette décrit dans cette partie est qualitativement le même que celui du trombone publié dans [Bouhuys, 1968]. Par ailleurs, l'écart entre la fréquence de jeu du musicien et la fréquence de résonance acoustique soutenant l'oscillation est mesuré. En situation normale, le musicien joue légèrement au dessus de la fréquence de résonance, ce qui correspond au comportement d'un modèle de lèvres "en-dehors". Cet écart de fréquence varie selon les notes et peut compenser des défauts d'harmonicité de l'instrument. Cependant, un musicien expérimenté peut contrôler cet écart de fréquence, au prix d'une perte de qualité du timbre du son. Cette technique, appelée "pitch-bend", provoque des écarts de fréquence non reproductibles par un modèle de lèvres à un degré de liberté.

Une cartographie de la jouabilité de l'instrument selon certains paramètres de contrôle est établie en mesurant les plages de valeurs de ces paramètres pendant que plusieurs trompettistes jouent sur toute la tessiture et la plage dynamique de l'instrument. Des variables caractéristiques du comportement de l'instrument sont mesurées simultanément. La pression dans la bouche minimale pour jouer sur un registre est d'autant plus élevée que le registre est aigu : ceci est cohérent avec l'étude théorique d'un modèle physique de cuivre présentée dans la partie III, qui montre que les seuils d'oscillation du modèle augmentent avec la fréquence du registre considéré. Les amplitudes dans l'embouchure les plus faibles sont obtenues après un *decrescendo*, et ne correspondent pas pour autant à la valeur de pression dans la bouche la plus faible. Ceci implique que l'amplitude de pression dans l'embouchure dépend d'un autre paramètre non mesuré, et laisse supposer que les bifurcations de Hopf à l'émergence des notes sont inverses. L'utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique au chapitre 8.1.2 page 65 a montré l'existence ce type de bifurcation sur les cuivres. L'augmentation de la pression dans la bouche et l'augmentation de la force d'appui des lèvres sont systématiquement corrélées. Une explication plausible est la nécessité de maintenir une jonction lèvres-embouchure étanche malgré l'augmentation des contraintes dans la bouche. Cependant le taux de croissance de la force d'appui quand la pression dans la bouche augmente est très dépendant du musicien, ce qui montre différentes techniques de contrôle de l'instrument selon la formation musicale du trompettiste. Le seul musicien de formation professionnelle parmi les 4 sujets expérimentaux est celui dont la plage de pression dans la bouche est la plus étendue, et celui qui atteint les plus grandes valeurs de force d'appui sur l'embouchure. Des comparaisons de mesures de ce type pourraient s'avérer d'un grand intérêt pédagogique, notamment en objectivant les différences de technique entre professeurs de musique et apprenants.

Conclusions et perspectives

Conclusion générale

Les travaux présentés dans cette thèse visent à mieux comprendre l'émergence et les caractéristiques des différents régimes d'oscillation d'un instrument de la famille des cuivres, en fonction des paramètres de contrôle du musicien. L'approche utilisée consiste à construire un modèle physique d'instrument et à déterminer quels comportements de l'instrument modélisé ce modèle est capable de reproduire. Des résultats expérimentaux complètent cette analyse et permettent de comparer certains comportements observés sur le modèle au comportement d'un instrument réel. Ces mesures permettent par ailleurs de dresser une cartographie des valeurs des paramètres de contrôle que les musiciens utilisent lors de la pratique musicale.

L'étude bibliographique a mené au choix d'un modèle physique de cuivre, qui repose sur le couplage non linéaire d'une valve à un degré de liberté "en-dehors" [Eliott and Bowsher, 1982] avec un résonateur linéaire. Il s'agit d'un système bouclé admettant des solutions stationnaires ou auto-oscillantes. Le résonateur est modélisé par l'impédance d'entrée de l'instrument étudié, approximée par une somme de modes complexes modélisant les résonances acoustiques de la colonne d'air contenue dans la perce de l'instrument [Silva et al., 2014]. La valve lippale et le résonateur linéaire sont couplés non linéairement par le jet d'air s'écoulant entre les lèvres du musicien [Hirschberg et al., 1990]. Le paramétrage du modèle, et en particulier des lèvres, est issu d'une large étude bibliographique portant une attention spécifique aux résultats de mesures sur lèvres humaines ou artificielles, ainsi qu'au réalisme physiologique de la pression dans la bouche requise. L'un des avantages de ce modèle est sa grande flexibilité : en particulier, la somme de modes complexes représentant le résonateur peut modéliser l'impédance de n'importe quel instrument, mesurée ou calculée. La modification des pôles et résidus de ces modes complexes permet de transformer virtuellement les caractéristiques de l'instrument modélisé. Tout instrument de la famille des cuivres, existant ou virtuel, peut donc être décrit à condition de trouver un jeu de paramètres de lèvre pertinent pour l'embouchure concernée.

Le modèle ainsi obtenu appartient à la grande famille des systèmes dynamiques non linéaires. Différents outils d'analyse de ces systèmes ont été adaptés pour étudier ce modèle sous différents angles :

- L'outil d'analyse de stabilité linéaire (ASL) a permis de calculer des informations sur le fonctionnement global du modèle, en particulier le seuil de pression dans la bouche à partir duquel une oscillation est susceptible d'apparaître, et la fréquence de l'oscillation émergeant de cette déstabilisation. Cette méthode, couramment utilisée pour l'analyse des modèles d'instruments à vent [Wilson and Beavers, 1974], a été entièrement adaptée à notre modèle de cuivre durant cette thèse. Un faible coût de calcul a permis d'obtenir une vision du comportement du modèle au voisinage de sa solution d'équilibre sur une plage du paramètre f_l couvrant l'ensemble de la tessiture de l'instrument.
- La simulation temporelle, basée sur le code MOREESC dédié aux modèles d'instrument à anche simple ou lippale, résout numériquement les équations non linéaires du système pour un jeu de paramètres que l'utilisateur peut faire varier au cours de la simulation [Silva et al., 2014]. Cette possibilité de faire varier les paramètres a été particulièrement utile pour intégrer un forçage dans le modèle lors de la simulation de sons multiphoniques. Le résultat d'une simulation dépend des conditions initiales. Cette méthode permet de calculer des solutions stables de toute nature — stationnaire, périodique, quasi-périodique, etc. — en un point de paramètres donnés. L'évolution temporelle de la forme d'onde de chaque variable du système est calculée.
- La continuation numérique à l'aide de MANLAB permet de suivre l'évolution d'une solution

du problème selon un paramètre choisi, en l'occurrence la pression dans la bouche. La forme d'onde de chaque variable, ainsi que la fréquence d'oscillation, sont calculées pour toute valeur du paramètre de continuation. La stabilité des solutions calculées est également calculée. Le modèle de cuivre utilisé étant proche d'un modèle d'instrument à anche de roseau précédemment implémenté dans MANLAB [Karkar, 2012], certains éléments de cette implémentation ont été repris. L'adaptation du modèle pour la méthode de calcul de la stabilité des branches de solution est un travail original.

Par ailleurs, les mesures de paramètres et de variables décrivant le fonctionnement de l'instrument sont réalisées grâce à une trompette instrumentée. Le développement de cet outil a commencé pendant deux stages de Master [Velut, 2012, David-Sivelle, 2013]. Le travail effectué pendant cette thèse a consisté à achever la réalisation, tester et étalonner les capteurs et participer au développement du code de mesure dédié, avant de réaliser les premières campagnes expérimentales. Ce outil a été développé pour mesurer simultanément la pression statique dans la bouche, la force d'appui sur les lèvres, la phase du déplacement des lèvres en vibration, la position des pistons, la vitesse d'écoulement dans l'instrument (une image du débit moyen), la pression acoustique dans l'embouchure, la pression acoustique dans la bouche et le son rayonné à l'extérieur du pavillon. Le choix des paramètres et des variables mesurés, voulus aussi proches que possible de ceux du modèle de cuivre étudié par ailleurs, a été guidé par la volonté de perturber le moins possible le musicien pendant son jeu, en minimisant autant que possible l'intrusivité des capteurs utilisés dans les limites de la technologie existante.

L'analyse du modèle à l'aide des différents outils développés met en évidence sa capacité à reproduire de nombreux comportements du trombone. Ces résultats ont conduit à la rédaction d'un article à *Acta Acustica United with Acustica*, en cours de révision [Velut et al., 2016c]. En fonction des paramètres, et en particulier selon la fréquence de résonance des lèvres et la pression dans la bouche, l'oscillation du modèle de trombone est portée par l'un des modes de résonance acoustiques du résonateur. Des solutions périodiques sont observées, à des fréquences d'oscillation très proches de celles des notes jouées par un tromboniste (chap. 8.1). Plus le registre joué est aigu, plus la pression minimale nécessaire pour y provoquer une oscillation est élevée : ce résultat, évident pour un cuivriste, est vérifié à la fois expérimentalement à la trompette (chap. 12.2) et théoriquement par l'analyse des seuils d'oscillation du modèle (chap. 8.1). La continuation numérique d'une de ces solutions périodiques montre qu'elle émerge d'une bifurcation de Hopf inverse. C'est à notre connaissance la première fois qu'une telle bifurcation est mise en évidence sur un modèle de cuivre. Dans la pratique instrumentale, cette bifurcation pourrait expliquer, au moins en partie, pourquoi les cuivristes jouent plus facilement une note à très faible volume après un *decrescendo* qu'en attaquant directement cette note (chap. 12.3).

La concordance entre la fréquence de jeu mesurée expérimentalement et la fréquence d'oscillation du régime périodique se vérifie aussi pour le premier registre du trombone (Chap. 8.2.1). Le modèle étudié reproduit donc la note pédale du trombone, en oscillant à une fréquence bien au-dessus de la fréquence de résonance du premier mode. Un écart significatif est également constaté entre la fréquence de résonance du premier mode du modèle de saxhorn et la fréquence de l'oscillation périodique qu'il supporte. Le modèle reproduit ici une note communément jouable sur les instruments de type tuba et connue de la plupart des tubistes, bien qu'elle soit absente de la littérature scientifique et inutilisée musicalement. Elle est baptisée ici "note fantôme".

L'usage d'une sourdine sèche est connu pour perturber sévèrement l'émission de certaines notes pédales du trombone. Ce problème a conduit à la fabrication d'un dispositif de contrôle actif,

intégré dans une sourdine, qui résout ce problème [Meurisse et al., 2015]. La modélisation au chapitre 9 d'un trombone avec une sourdine sèche et avec cette sourdine active reproduit, respectivement, la perturbation de la note pédale et la correction de ce problème. Ces résultats sur la sourdine ont donné lieu à une communication au congrès français d'acoustique [Velut et al., 2016d] et à la rédaction d'un article soumis à *Acta Acustica united with Acustica* et actuellement en cours de révision [Velut et al., 2016b].

Certains jeux de paramètres donnent également naissance à des oscillations quasi-périodiques qui correspondent aux sons "roulants", redoutés des cuivristes notamment quand la fatigue musculaire perturbe le contrôle du musicien sur ses lèvres. D'autres paramètres provoquent l'apparition d'oscillations périodiques qui révèlent une cascade sous-harmonique, similaire à celle montrée expérimentalement par [Gibiat and Castellengo, 2000]. Un autre type de régime particulier est étudié : les sons multiphoniques consistant à chanter dans l'embouchure et jouer simultanément. Cet effet musical est mesuré sur un trombone et simulé au chapitre 10 en ajoutant une composante de forçage au modèle. Les simulations obtenues reproduisent le contenu spectral des signaux mesurés, avec l'apparition de composantes spectrales à des fréquences correspondant aux combinaisons linéaires des fréquences chantée et jouée par le musicien, ou respectivement aux fréquences de forçage et d'auto-oscillation du modèle. Les oscillations résultantes sont généralement quasi-périodiques, ou périodiques dans le cas d'une résonance interne entre chant et jeu. Ces résultats sur les multiphoniques ont donné lieu à l'écriture d'un article, accepté pour publication dans le *Journal of the Acoustical Society of America* [Velut et al., 2016a].

Outre les résultats expérimentaux déjà cités en corrélation avec des comportements du modèle d'oscillation, les campagnes de mesure apportent des connaissances sur les contrôles utilisés par un trompettiste pour jouer au moins sept notes différentes sans modifier son doigté sur une large plage de nuances sonores. La mesure simultanée de pression dans la bouche et du débit menée au chapitre 11.1, montre qu'une augmentation de la nuance de jeu ou de la hauteur de la note jouée passe par l'augmentation de la puissance moyenne fournie par le musicien. L'élévation de la fréquence passe par la diminution de la section d'ouverture moyenne des lèvres tandis que jouer un son plus fort implique au contraire l'augmentation de cette section. Cette étude sur la trompette, qui revisite celle publiée dans [Bouhuys, 1968] sur le trombone, montre un comportement qualitativement identique entre ces deux instruments.

Dans le chapitre 12, il est décrit la mesure des plages de valeurs de la pression dans la bouche, de la pression dans l'embouchure et de la force d'appui de l'embouchure sur les lèvres, pendant que plusieurs trompettistes jouent sur toute la tessiture ainsi que toute la plage dynamique de l'instrument. Plus une note est aigüe, plus la dynamique des plages de pression dans la bouche et de force dans l'embouchure permettant de la jouer est restreinte, ce qui est conforme au ressenti des musiciens et aux quelques mesures précédemment publiées à ce sujet. L'augmentation de la pression dans la bouche et l'augmentation de la force d'appui des lèvres sont systématiquement corrélées. Malgré la constante incitation des professeurs de trompette à appuyer le moins fort possible sur les lèvres, le musicien le plus avancé parmi les quatre sujets n'est pas celui qui appuie le moins fort pour une pression dans la bouche donnée, ni même celui pour lequel cette force croît le moins vite. Le lien entre maîtrise et force d'appui n'est donc pas évident, conformément aux conclusions de [Barbenel, 1988].

Certains résultats mettent néanmoins en évidence quelques limites à la capacité du modèle choisi à reproduire le comportement d'un instrument de la famille des cuivres. La tendance, largement documentée, des modèles de lèvre "en-dehors" à osciller à une fréquence plus élevée que les fré-

quences de jeu mesurées expérimentalement est confirmée par nos résultats. Par ailleurs, si la note "fantôme" du saxhorn est convenablement reproduite, aucun jeu de paramètre n'a été trouvé pour reproduire le *Sib1* pédale normalement joué par un saxhorn. Dans des situations de jeu "normal", où le musicien joue simplement des notes de la gamme, le modèle reproduit la plupart des comportements de jeu. En revanche, dans le cas de techniques spécifiques comme le pitch-bend, ce modèle est insuffisant pour reproduire les variations de fréquence de jeu dont un musicien est capable. Un modèle de lèvres plus complexe, avec plusieurs degrés de liberté par exemple, serait une piste à explorer, ainsi qu'un modèle prenant en compte l'acoustique du conduit vocal qui semble avoir une importance notable pour cette technique. Par ailleurs, un modèle différent pourrait améliorer la simulation des multiphoniques : si le modèle auto-oscillant forcé produit un résultat comparable aux mesures, c'est à la condition d'une composante de forçage d'amplitude 20 fois plus importante que le signal de chant qu'elle modélise. La prise en compte du conduit vocal est, là encore, une piste d'amélioration.

Perspectives

Des résultats obtenus durant cette thèse incitent à continuer l'exploration de certains phénomènes. Vu les limitations sus-citées du modèle de lèvres à un degré de liberté "en dehors", un choix possible serait de complexifier ce modèle. La prise en compte du conduit vocal a déjà été réalisée, par exemple dans [Fréour et al., 2015]. Certains modèles de lèvres à deux degrés de liberté tels que ceux utilisés, par exemple, dans [Adachi and Sato, 1996, Richards, 2003, Newton, 2009] s'avèrent capables de reproduire certains comportements des instruments inaccessibles avec le modèle utilisé dans cette thèse. Ces deux modifications du modèle peuvent être faites sans difficulté particulière. Cependant, le chapitre 3 a mis en évidence la difficulté de régler un modèle de lèvre à un degré de liberté. Augmenter le nombre de degrés de liberté, donc le nombre de paramètres à régler, ne ferait qu'augmenter la complexité du paramétrage. De même, modéliser le conduit vocal signifie extraire des quantités *in vivo* pertinentes pour le paramétrer.

Étant données les difficultés supplémentaires qu'engendrerait un modèle plus complexe, il semble raisonnable de s'en tenir à un modèle aussi simple que possible. Si ce modèle est capable de reproduire une grande partie des comportements du trombone, comme montré dans cette thèse, il peut encore contribuer à la compréhension des cuivres et de leur pratique. En particulier, l'implémentation MANLAB du modèle ouvre de nombreuses possibilités. La continuation des branches périodiques correspondant aux registres les plus utilisés, résultant en un diagramme de bifurcations du modèle, peut être faite sans autre limitation que le temps de calcul. Ces résultats, associés à l'information de stabilité des différentes solutions, pourraient apporter des éléments de compréhension des transitions entre les régimes d'oscillation du modèle de cuivre. Une implémentation du même modèle en choisissant la fréquence de résonance des lèvres comme paramètre de continuation permettrait d'explorer l'évolution des solutions périodiques selon un autre angle. Cette continuation selon f_l semble notamment un outil précieux pour explorer la cascade sous-harmonique mise en évidence au chapitre 8.2.3. Ces perspectives nous semblent réalisables à court terme. Par ailleurs, la simulation temporelle du modèle est un complément pertinent de l'outil de continuation numérique. D'une part, il permet de reproduire les régimes transitoires auxquels l'équilibrage harmonique ne permet pas d'accéder. D'autre part, des simulations faisant varier le paramètre de continuation, dans l'esprit de la figure 8.8 page 67 permettent de comparer le résultat de l'évolution quasi-statique du paramètre propre à la continuation et de l'évolution dynamique de ce paramètre dans la simulation. Ce peut être un nouvel angle d'approche des seuils dynamiques étudiés par [Bergeot, 2013].

Une des limitations de cette thèse est le manque de données expérimentales directement utilisables pour, d'une part, paramétrer le modèle de lèvres, et d'autre part pour comparer les résultats du modèle à des résultats mesurés. Ce manque de données de mesures sur les cuivres, et en particulier de mesures *in vivo*, incite à utiliser largement la trompette instrumentée présentée au chapitre 7. Les résultats rapportés au chapitre 12 ne sont qu'une partie des mesures issues d'une première campagne expérimentale. Le frein principal aux mesures à la trompette instrumentée est le temps nécessaire pour découper les fichiers de mesure bruts en segments analysables, qui représente plusieurs heures voire quelques jours de travail à multiplier par le nombre de musiciens. L'automatisation de ce travail de segmentation faciliterait la réalisation de campagnes expérimentales. Les possibilités de mesures simultanées, de comparaison et d'analyse de paramètres de jeu à l'aide de ce dispositif semblent suffisamment vastes pour occuper une thèse consacrée à l'étude expérimentale de la technique instrumentale. Comparer les résultats d'une bouche artificielle et de musiciens humains jouant le même protocole serait un moyen intéressant d'évaluer la similitude entre lèvres humaines et lèvres artificielle. Par ailleurs, des outils de visualisation en temps réel des mesures faites à la trompette instrumentée ont été présentées à l'oral lors du congrès Vienna Talk 2015 [Velut et al., 2015]. En donnant au musicien un retour visuel intuitif et immédiat sur sa technique de jeu, ces dispositifs pourraient faciliter l'objectivation de la technique de jeu pour les musiciens. Nous y voyons un intérêt potentiel pour l'enseignement de la trompette : la visualisation de la technique du professeur à comparer à sa propre méthode pourrait être un outil pédagogique précieux. Plus généralement, comparer les techniques de jeu de trompettistes ayant des niveaux de pratique différents contribuerait à caractériser comment se déroule l'apprentissage du contrôle de l'instrument.

La trompette instrumentée peut encore être améliorée, notamment en réduisant le temps de réponse du capteur de débit moyen dans l'instrument. Mesurer en temps réel des débits très faibles d'un air humide sans perturber l'écoulement semble cependant technologiquement difficile, faute de capteurs à la fois rapides, sensibles et robustes. Parallèlement, le capteur de force d'appui sur les lèvres de cette trompette et le dispositif de mesure d'impédance mécanique des lèvres décrit dans [Newton et al., 2008] pourraient être utilisés simultanément, afin de caractériser comment l'appui de l'embouchure sur les lèvres modifie leurs caractéristiques mécaniques. Bien que les méthodes de mesure de l'impédance mécanique des lèvres décrites dans [Newton, 2009] soient une avancée notable sur ce sujet, il reste pour l'heure impossible de mesurer les caractéristiques modales de lèvres humaines pendant le jeu. C'est l'un des obstacles principaux limitant les possibilités de comparaison entre résultats expérimentaux et analyses de modèles. Être capable de mesurer des paramètres de lèvres en temps réel durant le jeu représenterait une réelle avancée dans l'étude des cuivres et de leur contrôle par le musicien.

Bien que la synthèse sonore ne soit pas l'objectif de nos travaux, les outils qui ont été développés au cours de cette thèse pourraient être utiles pour améliorer le paramétrage des codes de simulation par modèle physique, par exemple [Adrien, 1989, Välimäki, 2004, Guillemain et al., 2005, Vergez and Tisserand, 2006, Harrison et al., 2015]. L'utilisation de synthétiseurs par modèles physiques nécessite souvent un ajustement empirique des valeurs de paramètres, hasardeux et potentiellement coûteux en temps. La cartographie des paramètres de jeu du trompettiste réalisée avec la trompette instrumentée est une source de paramètres de jeu réalistes pour chaque note, directement utilisables en synthèse. Mesurer simultanément des paramètres de contrôle pendant que le trompettiste exécute des exercices musicaux différents (en terme de note jouée, de nuance, de timbre, d'attaque...) permettrait de définir des lois d'évolution des paramètres traduisant l'intention musicale en termes physiques. Ces lois seraient alors un outil pertinent pour établir un

"mapping" entre les évolutions temporelles des paramètres de contrôle d'une synthèse sonore par modèles physiques de cuivres, et les paramètres de contrôleurs MIDI traditionnels, souvent porteurs de moins d'information [Scavone and Silva, 2005]. Par exemple, les différents types d'attaque avec un clavier MIDI ne sont discriminés que par la valeur du paramètre de "vélocité". Une amélioration potentielle consisterait à établir un "mapping" entre la vélocité MIDI mesurée, reflet du geste du musicien, et l'évolution temporelle de plusieurs paramètres de contrôle du modèle. Par ailleurs, calculer le diagramme de bifurcations du modèle physique utilisé par un synthétiseur offre une vue globale sur ses différents comportements, et sur les jeux de paramètres à utiliser pour obtenir un comportement donné, donc synthétiser le son désiré. Le diagramme de bifurcations d'un modèle serait une source d'information précieuses pour paramétrer un modèle de synthèse.

Bibliographie

- [Adachi and Sato, 1995] Adachi, S. and Sato, M. (1995). Time-domain simulation of sound production in the brass instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(6) :3850–3861.
- [Adachi and Sato, 1996] Adachi, S. and Sato, M. (1996). Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2) :1200–1209.
- [Adrien, 1989] Adrien, J. (1989). *The Representations of Sound*, chapter "The missing link : Modal Synthesis". The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [Allgower and Georg, 2003] Allgower, E. and Georg, K. (2003). *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Almeida et al., 2015] Almeida, A., Bergeot, B., Vergez, C., and Gazengel, B. (2015). Analytical determination of the attack transient in a clarinet with time-varying blowing pressure. *Acta Acustica united with Acustica*, 101(5) :1026–1038.
- [Arquier et al., 2005] Arquier, R., Cochelin, B., and Vergez, C. (2005). Manlab, logiciel de continuation interactif. In *7^{ème} Colloque national en calcul des structures*, Giens, France.
- [Auvray et al., 2012] Auvray, R., Fabre, B., and Lagrée, P. (2012). Regime change and oscillation thresholds in recorder-like instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(2) :1574–1585.
- [Backus, 1976] Backus, J. (1976). Input impedance curves for the brass instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 60(2) :470–480.
- [Backus, 1978] Backus, J. (1978). Multiphonic tones in the woodwind instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 32(2) :591–599.
- [Backus and Hundley, 1971] Backus, J. and Hundley, T. (1971). Harmonic generation in the trumpet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49 :509–519.
- [Baguet and Cochelin, 2003] Baguet, S. and Cochelin, B. (2003). On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcations. *Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 19(6) :459–471.
- [Barbenel, 1988] Barbenel, J. (1988). Mouthpiece forces produced while playing the trumpet. *Journal of Biomechanics*, 21(5) :417–424.
- [Benade, 1976] Benade, A. (1976). *Fundamentals of musical acoustics*. Oxford University Press, 608 pages.
- [Bergé et al., 1995] Bergé, P., Pomeau, Y., and Vidal, C. (1995). *L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence (Order in chaos : towards a deterministic approach of turbulence)*. Hermann, 352 pages.
- [Bergeot, 2013] Bergeot, B. (2013). *Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable (Birth of oscillations in clarinet-like instruments with variable control parameter)*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France.
- [Bergeot et al., 2013] Bergeot, B., Almeida, A., Vergez, C., and Gazengel, B. (2013). Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure : influence of noise. *Nonlinear Dynamics*, 74(3) :591–605.

- [Bianco, 2012] Bianco, T. (2012). *Gestural control in trumpet performance : experiments and modelling*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [Bianco et al., 2012] Bianco, T., Freour, V., Cossette, I., Bevilacqua, F., and Caussé, R. (2012). Measures of facial muscle activation, intra-oral pressure and mouthpiece force in trumpet playing. *Journal of New Music Research*, 41(1) :49–65.
- [Blanc et al., 2010] Blanc, F., de la Cuadra, P., Fabre, B., Castillo, G., and Vergez, C. (2010). Acoustics of the *Flauta de Chinos*. In *Proceedings of the 20th International Symposium on Music Acoustics, paper no. 19*, pages 1–5, Sydney and Katoomba, Australia.
- [Bouasse, 1986] Bouasse, H. (1986). *Instruments à vent—tome 1 (wind instruments—Volume 1)*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 411 pages.
- [Bouhuys, 1968] Bouhuys, A. (1968). Pressure-flow events during wind instrument playing. *Annals of New York Academy of Sciences*, 155(1) :264–275.
- [Boutin et al., 2015] Boutin, H., Fletcher, N., Smith, J., and Wolfe, J. (2015). Relationship between pressure, flow, lip motion, and upstream and downstream impedances for the trombone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 137(3) :1195–1209.
- [Bromage et al., 2010] Bromage, S., Campbell, M., and Gilbert, J. (2010). Open areas of vibrating lips in trombone playing. *Acta Acustica united with Acustica*, 96 :603–613.
- [Campbell, 2004] Campbell, M. (2004). Brass instruments as we know them today. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :600–610.
- [Campbell and Greated, 1994] Campbell, M. and Greated, C. (1994). *The musician’s guide to acoustics*. J.M. Dent & sons Ltd., London, 613 pages.
- [Castellengo, 1981] Castellengo, M. (1981). Sons multiphoniques aux instruments à vent (multiphonic sounds on woodwind instruments). *Rapports de l’IRCAM*.
- [Castellengo et al., 1983] Castellengo, M., Caussé, R., and Sluchin, B. (1983). étude acoustique de l’émission multiphonique aux cuivres (acoustical study of multiphonic emission on brass instruments). In *Proceedings of International Conference on Acoustics 1983*, pages 355–385, Paris-Lyon-Toulouse.
- [Chaigne and Kergomard, 2008] Chaigne, A. and Kergomard, J. (2008). *Acoustique des instruments de musique*. Belin.
- [Chaigne and Kergomard, 2016] Chaigne, A. and Kergomard, J. (2016). *Acoustics of musical instruments*. Springer-Verlag, New York, 869 pages.
- [Chang, 1994] Chang, Y. M. (1994). Reed stability. *Journal of Fluids and Structures*, 8 :771–783.
- [Chen and Weinreich, 1996] Chen, F. and Weinreich, G. (1996). Nature of the lip reed. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2) :1227–1233.
- [Chen et al., 2011] Chen, J.-M., Smith, J., and Wolfe, J. (2011). Saxophonists tune vocal tract resonances in advanced performance techniques. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129 :415–426.
- [Chen et al., 2012] Chen, J.-M., Smith, J., and Wolfe, J. (2012). Do trumpet players tune resonances of the vocal tract? *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1) :722–727.
- [Clinch et al., 1982] Clinch, P., Troup, G., and Harris, L. (1982). The importance of the vocal tract resonance in clarinet and saxophone performance. *Acustica*, 50 :280–284.
- [Cochelin, 2005] Cochelin, B. (2005). Continuation intercative de diagrammes de bifurcations complexes. In *Actes du 17^{eme} congrès Français de Mécanique*, Troyes, France.
- [Cochelin et al., 2007] Cochelin, B., Damiel, N., and Pottier-Ferry, M., editors (2007). *Méthode Asymptotique Numérique*. Lavoisier, Cachan, France.

- [Cochelin and Vergez, 2009] Cochelin, B. and Vergez, C. (2009). A high-order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324.
- [Coltman, 1992] Coltman, J. (1992). Time-domain simulation of the flute. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92 :69–73.
- [Cullen et al., 2000] Cullen, J., Gilbert, J., and Campbell, M. (2000). Brass instruments : Linear stability analysis and experiments with an artificial mouth. *Acta Acustica united with Acustica*, 86 :704–724.
- [Dalmont et al., 1995] Dalmont, J.-P., Gazengel, B., Gilbert, J., and Kergomard, J. (1995). Some aspects of tuning and clean intonation in reed instruments. *Applied Acoustics*, 46(1) :19–60.
- [Dalmont et al., 2000] Dalmont, J.-P., Gilbert, J., and Kergomard, J. (2000). Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the Helmholtz motion analogy. *Acta Acustica united with Acustica*, 86(4) :671–684.
- [d’Andréa Novel et al., 2010] d’Andréa Novel, B., Coron, J., and Hélie, T. (2010). Asymptotic state observers for a simplified brass instrument model. *Acta Acustica united with Acustica*, 96 :733–742.
- [David-Sivelle, 2013] David-Sivelle, A. (2013). étude et réalisation de systèmes d’acquisition embarqués pour la captation des paramètres de jeu sur des instruments de musique. Master’s thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Sainte-Etienne - ISMIN Gardanne.
- [Debut, 2004] Debut, V. (2004). *Deux études d’un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale*. PhD thesis, Université de la méditerranée Aix-Marseille II, Marseille, France.
- [Debut et al., 2012] Debut, V., Antunes, J., and Inácio, O. (2012). What can we learn about the wolf phenomenon from a linearized analysis? In *Proceedings of Acoustics 2012*, pages 1197–1203, Nantes, France. Société Française d’acoustique.
- [Doc et al., 2014] Doc, J., Vergez, C., and Missoum, S. (2014). A minimal model of a single-reed instrument producing quasi-periodic sounds. *Acta Acustica united with Acustica*, 3 :543–554.
- [Doedel and Oldeman, 2009] Doedel, E. and Oldeman, B. (2009). *Auto-07P : continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. Concordia University.
- [E.J.Doedel, 1981] E.J.Doedel (1981). Auto : A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. In *Proceedings of 10th Manitoba conference on numerical mathematics and computation*, pages 265–284, Winnipeg.
- [Eliott and Bowsher, 1982] Eliott, S. and Bowsher, J. (1982). Regeneration in brass wind instruments. *Journal of Sound and Vibration*, 83 :181–217.
- [Eveno, 2012] Eveno, P. (2012). *L’impédance d’entrée pour l’aide à la facture des instruments de musique à vent : mesures, modèles et lien avec les fréquences de jeu*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Paris, France.
- [Eveno et al., 2014] Eveno, P., Petiot, J., Gilbert, J., Kieffer, B., and Caussé, R. (2014). The relationship between bore resonance frequencies and playing frequencies in trumpets. *Acta Acustica United with Acustica*, 100 :362–374.
- [Farkas, 1962] Farkas, P. (1962). *The art of brass playing : a treatise on the formation and use of the brass player’s embouchure*. Brass Publications.
- [Farner et al., 2006] Farner, S., Vergez, C., Kergomard, J., and Lizée, A. (2006). Contribution to harmonic balance calculations of self-sustained periodic oscillations with focus on single-reed instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(3) :1794–1804.

- [Ferrand et al., 2010] Ferrand, D., Vergez, C., and Silva, F. (2010). Seuils d’oscillation de la clarinette : validité de la représentation excitateur-résonateur (oscillation thresholds of the clarinet : validity of the exciter-resonator representation). In *Proceedings of 10^{eme} Congrès Français d’Acoustique*.
- [Flanagan, 1972] Flanagan, J. (1972). *Speech analysis : Synthesis and perception*. Springer-Verlag Heidelberg.
- [Fletcher, 1993] Fletcher, N. (1993). Autonomous vibration of simple pressure-controlled valves in gas flows. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(4) :2172–2180.
- [Fletcher and Rossing, 1998] Fletcher, N. and Rossing, T. (1998). *The physics of Musical Instruments*. Springer Science and Business Media.
- [Fréour, 2013] Fréour, V. (2013). *Acoustic and Respiratory Pressure Control in Brass Instrument Performance*. PhD thesis, Departement of Music Research, Schulich School of Music, McGill University, Montreal, Canada.
- [Fréour et al., 2010] Fréour, V., Caussé, R., and Cossette, I. (2010). Simultaneous measurements of pressure, flow and sound during trumpet playing. In *Proceedings 10^{eme} Congrès Français d’Acoustique*, Lyon, France. Société Française d’Acoustique.
- [Fréour et al., 2015] Fréour, V., Hélie, T., Caussé, R., and Scavone, G. (2015). In-vitro and numerical investigations of the influence of a vocal-tract resonance on lip auto-oscillations in trombone performance. *Acta Acustica united with Acustica*, 101 :256–269.
- [Fréour and Scavone, 2013] Fréour, V. and Scavone, G. (2013). Acoustical interaction between vibrating lips, downstream air column, and upstream airways in trombone performance. *J. Acoust. Soc. Am.*, 134(5) :3887–3898.
- [Fritz, 2005] Fritz, C. (2005). *La clarinette et le clarinettiste : influence du conduit vocal sur la production du son (The clarinet and the player : role of the vocal tract on the sound production)*. PhD thesis, Université Paris 6 and University of New South Wales, France.
- [Gautier et al., 2013] Gautier, F., Secail-Geraud, M., and Gilbert, J. (2013). Analysis of vibroacoustics of trombone bells thanks to an adaptation of the miller experiment. In *Proceedings of Meetings on Acoustics 2013*, volume 19, Montreal, Canada. Acoustical Society of America.
- [Gazengel et al., 2007] Gazengel, B., Guimezanes, T., Dalmont, J.-P., Doc, J., Fagart, S., and Léveillé, Y. (2007). Experimental investigation of the influence of the mechanical characteristics of the lip on the vibrations of the single reed. In *Proceedings of ISMA 2007*, Barcelona.
- [Gibiat, 1988] Gibiat, V. (1988). Phase space representations of acoustical musical signals. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3) :539–536.
- [Gibiat and Castellengo, 2000] Gibiat, V. and Castellengo, M. (2000). Period doubling occurrences in wind instruments musical performance. *Acta Acustica united with Acustica*, 86 :746–756.
- [Gilbert and Aumond, 2008] Gilbert, J. and Aumond, P. (2008). Pedal notes of brass instruments, a mysterious regime of oscillation. In *Proceedings of Acoustics’ 08*, Paris.
- [Gilbert et al., 1989] Gilbert, J., Kergomard, J., and Ngoya, E. (1989). Calculation of the steady-state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *J. Acoust. Soc. am.*, 86(1) :35–41.
- [Gilbert et al., 2006] Gilbert, J., Ruiz, L., and Gougeon, S. (2006). Influence de la température sur la justesse d’un instrument à vent (influence of temperature on the pitch of a wind instrument). In *Actes du 8^{eme} Congrès français d’acoustique 2006*, pages 599–602, Tours, France.
- [Grand et al., 1997] Grand, N., Gilbert, J., and Laloë, F. (1997). Oscillation threshold of woodwind instruments. *Acustica*, 83 :137.

- [Guillemain et al., 2005] Guillemain, P., Kergomard, J., and Voinier, T. (2005). Real-time synthesis of clarinet-like instruments using digital impedance models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(1) :483–494.
- [Guillemain et al., 2010] Guillemain, P., Vegez, C., Ferrand, D., and Farcy, A. (2010). An instrumented saxophone mouthpiece and its use to understand how and experienced musician plays. *Aca Acustica united with Acustica*, 96 :622–634.
- [Harrison et al., 2015] Harrison, R., Bilbao, S., Perry, J., and Wishart, T. (2015). An environment for physical modelling of articulated brass instruments. *Computer Music Journal*, 39(4) :80–95.
- [Hélie et al., 1999] Hélie, T., Vergez, C., Lévine, J., and Rodet, X. (1999). Inversion of a physical model of a trumpet. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2593–2598, Phoenix, USA.
- [Herbert and Wallace, 1997] Herbert, T. and Wallace, J. (1997). *The Cambridge Companion to Brass Instruments*. Cambridge University Press.
- [Hezard et al., 2014] Hezard, T., Freour, V., Caussé, R., Helie, T., and Scavone, G. (2014). Synchronous multimodal measurements on the lips and glottis : comparison between two human-valve oscillating systems. *Acta Acustica united with Acustica*, 100 :1172–1185.
- [Hirschberg et al., 1996] Hirschberg, A., Gilbert, J., Msallam, R., and Wijnands, P. (1996). Shock waves in trombones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 :1754.
- [Hirschberg et al., 1995] Hirschberg, A., Kergomard, J., and Weinreich, G. (1995). *Mechanics of musical instruments*. Springer-Verlag, Wien, Austria.
- [Hirschberg et al., 1990] Hirschberg, A., van de Laar, R., Marrou-Maurières, J., Wijnands, A., Dane, H., Kruijswijk, S., and Houtsma, A. (1990). A quasi-stationary model of air flow in the reed channel of single-reed woodwind instruments. *Acustica*, 70 :146–154.
- [Inácio and Antunes, 2007] Inácio, O. and Antunes, J. (2007). A linearized modal analysis of the bowed string. In *Proceedings of the 19th International Congress on Acoustics*, page 6, Madrid, Spain.
- [Inácio et al., 2008] Inácio, O., Antunes, J., and Wright, M. (2008). Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes. *Journal of Sound and Vibration*, 310 :260–286.
- [Inácio et al., 2006] Inácio, O., Henrique, L., and Antunes, J. (2006). The dynamic of tibetan singing bowls. *Acta Acustica united with Acustica*, 92(4) :637–653.
- [J.L Le Goer, 1992] J.L Le Goer, J. A. (1992). Capteurs à jauges extensiométriques. Technical report, Techniques de l’Ingenieur. ref. R1860.
- [Jung et al., 1995] Jung, T., Borschers, L., and Gebert, M. (1995). Measurement of tooth displacements and mouthpiece forces during brass instrument playing. *Medical Engineering and Physics*, 17(8) :567–570.
- [Kaburagi et al., 2011] Kaburagi, T., Yamada, N., Fukui, T., and Minamiya, E. (2011). A methodological and preliminary study on the acoustic effect of a trumpet player’s vocal tract. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130 :536.
- [Karkar, 2012] Karkar, S. (2012). *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants*. PhD thesis, Aix-Marseille Université.
- [Karkar et al., 2012] Karkar, S., Vergez, C., and Cochelin, B. (2012). Oscillation threshold of a clarinet model : a numerical continuation approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1) :698–707.

- [Keefe and Laden, 1991] Keefe, D. and Laden, B. (1991). Correlation dimension of woodwind multiphonic tones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(4) :1754–1765.
- [Kergomard, 1997] Kergomard, J. (1997). Instruments de musique à vent : comment éviter le chaos pour faire de la musique? *Acoustique et Techniques*, 9 :15–22.
- [Kergomard et al., 2004] Kergomard, J., Dalmont, J., Gilbert, J., and Guillemain, P. (2004). Period doubling in cylindrical reed instruments. In *Proceedings of the Joint Congress CFA/DAGA*, Strasbourg, France.
- [Krauskopf et al., 2007] Krauskopf, B., Osinga, B., and Galàn-Vioque, J., editors (2007). *Numerical continuation methods for dynamical systems*. Springer Netherlands, Dordrecht, Netherlands.
- [Krylov and Bogoliuboff, 1947] Krylov, N. and Bogoliuboff, N. (1947). *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Princeton University Press, New Jersey, english translation of russian edition from 1936 edition.
- [Lartillot and Toiviainen, 2007] Lartillot, O. and Toiviainen, P. (2007). A MATLAB toolbox for musical feature extraction from audio. In *Proc. of 10th International Conference on Digital Audio Effects (DaFx)*, Bordeaux, France.
- [Lazarus and Thomas, 2010] Lazarus, A. and Thomas, O. (2010). A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510–517.
- [Lopez et al., 2006] Lopez, I., Hirschberg, A., Hirtum, A. V., Ruty, N., and Pelorson, X. (2006). Physical modeling of buzzing artificial lips : The effect of acoustical feedback. *Acta Acustica united with Acustica*, 92 :1047–1059.
- [Macaluso and Dalmont, 2011] Macaluso, C. and Dalmont, J.-P. (2011). Trumpet with near-perfect harmonicity : Design and acoustic results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129(1) :404–414.
- [Maganza et al., 1986] Maganza, C., Caussé, R., and Laloé, F. (1986). Bifurcations, period-doubling and chaos in clarinet-like systems. *Europhysics letters*, 1 :295–302.
- [Martin, 1942] Martin, D. (1942). Lip vibrations in a cornet mouthpiece. *J. Acoust. Soc. Am.*, 13 :305.
- [Mayer and Bertsch, 2005] Mayer, A. and Bertsch, M. (2005). A new 3D transducer for measuring the trumpet mouhtpiece force. In *Proceedings of second congress of Alps-Adria Acoustics Association*, pages 217–223, Opatija, Croatia.
- [McIntyre et al., 1983] McIntyre, M., Schumacher, R., and Woodhouse, J. (1983). On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(5) :1325–1345.
- [Meurisse et al., 2015] Meurisse, T., Mamou-Mani, A., Caussé, R., Sluchin, B., and Sharp, D. (2015). An active mute for the trombone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 138(6) :3539–3548.
- [MoReeSC, 2013] MoReeSC (2013). Source website of the moreesc software. <http://moreesc.lma.cnrs-mrs.fr/>. Accessed : 2016-05-23.
- [Myers et al., 2012] Myers, A., Pyle, R., Gilbert, J., Campbell, M., Chick, J., and Logie, S. (2012). Effects of nonlinear sound propagation on the characteristic timbres of brass instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1) :678–688.
- [Nakhla, 1976] Nakhla, M. (1976). A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *IEEE Transmission Circuit Theory*, 23 :85–91.
- [Nayfeh and Balachandran, 1995] Nayfeh, A. and Balachandran, B. (1995). *Applied nonlinear dynamics : Analytical, computational and Experimental methods*. Wiley-VCH Verlag KGaA, Weinheim, 700 pages.

- [Neal et al., 2001] Neal, M., Richards, O., Campbell, D., and Gilbert, J. (2001). Study of the reed mechanism of brass instruments using an artificial mouth. In *Proceedings of ISMA 2001*, pages 99–102, Perugia, Italy.
- [Newton, 2009] Newton, M. (2009). *Experimental Mechanical and Fluid Mechanical Investigations of the Brass Instrument Lip-reed and the Human Vocal Folds*. PhD thesis, University of Edinburgh.
- [Newton et al., 2008] Newton, M., Campbell, M., and Gilbert, J. (2008). Mechanical response measurements of real and artificial brass players lips. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(1) :EL14–EL20.
- [Petiot and Gilbert, 2013] Petiot, J. and Gilbert, J. (2013). Comparison of trumpet’s sounds played by a musician or simulated by physical modelling. *Acta Acustica united with Acustica*, 99 :629–641.
- [Petiot, 2003] Petiot, J.-F. (2003). Measurement of the force applied to the mouthpiece during brass instrument playing. In *Proceedings of Stockholm Music Acoustics Conference 03*, Stockholm, Sweden.
- [Petiot et al., 2005] Petiot, J.-F., Poirson, E., and Gilbert, J. (2005). Study of the relation between trumpet’s sound characteristics and the input impedance. In *Proceedings of Forum Acusticum 2005*, pages 747–752, Budapest, Hungary.
- [Radhakrishnan and Hindmarsh, 1993] Radhakrishnan, K. and Hindmarsh, A. (1993). Description and use of lsode, the livermore solver for ordinary differential equations. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory - NASA, Report UCRL-ID-113855.
- [Ricaud et al., 2009] Ricaud, B., Guillemain, P., Kergomard, J., Silva, F., and Vergez, C. (2009). Behavior of reed woodwind instruments around the oscillation threshold. *Acta Acustica united with Acustica*, 95 :733–743.
- [Richards, 2003] Richards, O. (2003). *Investigation of the Lip Reed Using Computational Modelling and Experimental Studies with an Artificial Mouth*. PhD thesis, University of Edimburgh, Edimburgh, Scotland.
- [Rodet and Vergez, 1996] Rodet, X. and Vergez, C. (1996). Physical models of trumpet-like instruments. detailed behavior and model improvements. In *Proceedings of ICMC*, pages 448–453, Hong-Kong.
- [Ruty et al., 2007] Ruty, N., Pelorson, X., van Hirtum, A., and Hirschberg, A. (2007). An in vitro setup to test the relevance and the accuracy of low-order vocal folds models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(1) :479–490.
- [Saneyoshi et al., 1987] Saneyoshi, J., Tenamura, H., and Yoshikawa, S. (1987). Feedback oscillations in reed woodwind and brasswind instruments. *Acustica*, 67 :194–210.
- [Scavone et al., 2008] Scavone, G., Lefebvre, A., and da Silva, A. (2008). Measurement of vocal-tract influence during saxophone performance. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123 :3391.
- [Scavone and Silva, 2005] Scavone, G. and Silva, A. D. (2005). Frequency content of breath pressure and implications for use in control. In *Proceedings of the 2005 Conference on New Interfaces for Musical Expression*, pages 93–96, Vancouver, Canada.
- [Schumacher, 1981] Schumacher, R. (1981). Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet. *Acta Acustica united with Acustica*, 48(2) :71–85.
- [Seydel, 2009] Seydel, R. (2009). *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer Science and Business Media, New York, 477 pages.
- [Shampine and Reichelt, 1997] Shampine, L. and Reichelt, M. (1997). The matlab ODE suite. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(1) :1–22.

- [Silva, 2009] Silva, F. (2009). *Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple*. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille 1, Marseille, France.
- [Silva et al., 2007] Silva, F., Kergomard, J., and Vergez, C. (2007). Oscillation thresholds for "striking outwards" reeds coupled to a resonator. In *Proceedings of ISMA 2007*, Barcelona.
- [Silva et al., 2008] Silva, F., Kergomard, J., Vergez, C., and Gilbert, J. (2008). Interaction of reed and acoustic resonator in clarinet-like systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(5) :3284–3295.
- [Silva et al., 2014] Silva, F., Vergez, C., Guillemain, P., Kergomard, J., and Debut, V. (2014). MoReeSC : a framework for the simulation and analysis of sound production in reed and brass instruments. *Acta Acustica United with Acustica*, 100(1) :126–138.
- [Sluchin, 1995] Sluchin, B. (1995). *Jeu et chant simultanés sur les cuivres (Playing and singing simultaneously on brass instruments)*. Editions Musicales Européennes, 127 rue Amelot, 75011 Paris, 25 pages.
- [Sluchin and Caussé, 1991] Sluchin, B. and Caussé, R. (1991). *Sourdines des cuivres (Brass instrument mutes)*. Editions de la Maison des Sciences de l’Homme, Paris.
- [Stokes, 1972] Stokes, A. (1972). On the approximation of nonlinear oscillations. *Archives for rational mechanics and Analysis*, 12 :532–558.
- [Taillard et al., 2010] Taillard, P., Kergomard, J., and Laloë, F. (2010). Iterated maps for clarinet-like systems. *Nonlinear Dynamics*, 62 :253–271.
- [Terrien, 2013] Terrien, S. (2013). *Instruments de la famille des flûtes : analyse des transitions entre régimes*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, Marseille, France.
- [Terrien et al., 2013] Terrien, S., Vergez, C., Cuadra, P. D. L., and Fabre, B. (2013). Is the jet-drive flute model able to produce modulated sounds like flautas de chinos? In *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference*, pages 465–472, Stockholm.
- [Terrien et al., 2014] Terrien, S., Vergez, C., and Fabre, B. (2014). To what extent can a linear analysis predict the behaviour of a flute model? In *Proceedings of International Symposium on Musical Acoustics*, Le Mans, France.
- [Thibodeau and Wanderley, 2013] Thibodeau, J. and Wanderley, M. (2013). Trumpet augmentation and technological symbiosis. *Computer Music Journal*, 37(3) :12–25.
- [Urabe, 1965] Urabe, M. (1965). Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems. *Archives for rational mechanics and Analysis*, 20 :120–152.
- [Välimäki, 2004] Välimäki, V. (2004). Physics-based modeling of musical instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :611–617.
- [Velut, 2012] Velut, L. (2012). Paramètres de contrôle de la trompette pendant le jeu : mesure simultanée des paramètres de jeu in vivo sur trompettistes. Master’s thesis, Ecole Centrale de Marseille, Marseille, France.
- [Velut et al., 2016a] Velut, L., Vergez, C., and Gilbert, J. (2016a). Measurements and time-domain simulations of multiphonics in the trombone. hal-01363547 ; Submitted to JASA, accepted 2016-09-21 : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01363547>.
- [Velut et al., 2016b] Velut, L., Vergez, C., and Gilbert, J. (2016b). Physical modelling of trombone mutes, the pedal note issue. Submitted to *Acta Acustica united with Acustica* on 2016-09-22, currently in revision. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385524>.
- [Velut et al., 2016c] Velut, L., Vergez, C., Gilbert, J., and Djahanbani, M. (2016c). How well can linear stability analysis predict the behavior of an outward valve brass instrument model? hal-01245846 ; Submitted to *Acta Acustica united with Acustica*, currently in revision : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01245846>.

- [Velut et al., 2016d] Velut, L., Vergez, C., Gilbert, J., Mamou-Mani, A., and Meurisse, T. (2016d). Effets d'une sourdine sur le seuil et la fréquence d'oscillation du premier régime du trombone (effects of a mute on the threshold and the oscillation frequency of the trombone's first register). In *Proceedings of CFA/VISHNO 2016*, page 313, Le Mans, France. <http://www.conforg.fr/cfa2016/cdrom/data/articles/000057.pdf>.
- [Velut et al., 2015] Velut, L., Vergez, C., Gilbert, J., and Sanchez, P. (2015). Simultaneous and in vivo measurements of control parameters used in trumpet performance. In *Proceedings of the Third Vienna Talk on acoustics*, pages 3–5, Wien, Austria. Institute Of Music Acoustics (Wiener Klangstil).
- [Velut et al., 2014] Velut, L., Vergez, C., Gilbert, J., and Silva, F. (2014). Numerical simulation of the production of pedal notes in brass instruments. In *Proceedings of International Symposium on Musical Acoustics (ISMA) 2014*, Le Mans, France.
- [Vergez, 2000] Vergez, C. (2000). *Trompette et trompettiste : un système dynamique non linéaire à analyser, modéliser et simuler dans un contexte musical*. PhD thesis, Université Paris 6.
- [Vergez, 2010] Vergez, C. (2010). *Analyse du fonctionnement des instruments de musique à vent*. Habilitation à diriger des recherches (HDR), Université Aix-Marseille II, Marseille, France.
- [Vergez and Rodet, 1997] Vergez, C. and Rodet, X. (1997). Model of the trumpet functioning : Real-time simulation and experiments with an artificial mouth model. In *Proc. of International Symposium on Musical Acoustics (ISMA) 1997*, Edimburgh, Scotland.
- [Vergez and Rodet, 2000] Vergez, C. and Rodet, X. (2000). Dynamical systems and physical models of trumpet-like instruments. analytical study and asymptotical properties. *Acta Acustica united with Acustica*, 86 :147–162.
- [Vergez and Tisserand, 2006] Vergez, C. and Tisserand, P. (2006). *Computer Music Modeling and Retrieval*, chapter "The Brass project, from physical models to virtual musical instruments : playability issues", pages 24–33. Lecture Notes in Computer Science (LNCS 3902). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [von Helmholtz, 1877] von Helmholtz, H. (1877). *On the Sensations of Tone*. Dover Publications Inc., New York, 608 pages.
- [von Wangenheim, 2011] von Wangenheim, L. (2011). On the barkhausen and nyquist stability criteria. *Analog. Integr. Circ. Sig. Process.*, 66 :139–141.
- [Wall, 2003] Wall, R. W. (2003). Simple methods for detecting zero crossing. In *Proceedings of 29th annual conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 1–5, Roanoke, Virginia, USA. Paper no. 291.
- [Wilson and Beavers, 1974] Wilson, T. and Beavers, G. (1974). Operating modes of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(2) :653–658.
- [Wolfe and Smith, 2008] Wolfe, J. and Smith, J. (2008). Acoustical coupling between lip valves and vocal folds. *Acoustics Australia*, 36(1) :23–27.
- [Wright and Campbell, 1998] Wright, H. and Campbell, M. (1998). Analysis of the sound of chilean pifilca flutes. *The Galpin Society Journal*, 51 :51–63.
- [Yoshikawa, 1995] Yoshikawa, S. (1995). Acoustical behavior of brass player's lips. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(3) :1929–1939.

Annexes

Annexe A

Mesure de la fonction de transfert entre pression dans l'embouchure et pression rayonnée d'un trombone

La fonction de transfert en pression entre l'embouchure d'un trombone et la pression rayonnée prise à 50 cm dans l'axe du pavillon $H_{ext}(\omega) = \frac{P_{ext}(\omega)}{P(\omega)}$ est mesurée. Par la suite, toute simulation du signal de pression dans l'embouchure peut être filtrée par cette fonction de transfert afin d'obtenir un signal p_{ext} simulé. Pour obtenir cette fonction de transfert, la pression rayonnée et de la pression dans l'embouchure ont été mesurées simultanément en chambre anéchoïque. Le banc de mesure d'impédance présenté dans [Macaluso and Dalmont, 2011] est utilisé comme source pour émettre un signal wobulé (sinus glissant) en ondes planes au niveau du plan d'entrée de l'embouchure du trombone. Le signal émis par la source et le signal rayonné (mesuré dans l'axe du pavillon) sont enregistrés simultanément par le système d'acquisition accompagnant ce banc d'impédance.

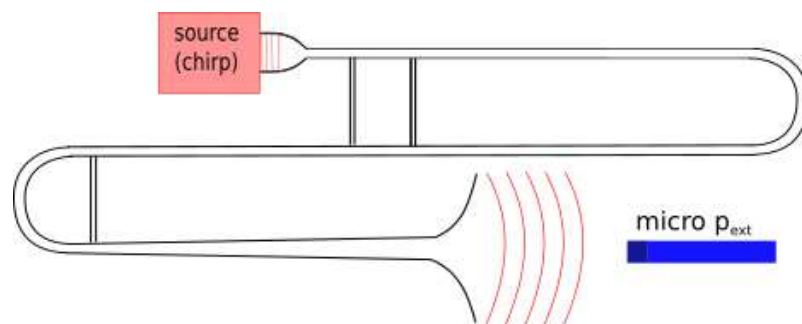


FIGURE A.1 – Mesure de la fonction de transfert de rayonnement d'un trombone. Une source sonore (rouge) émet un sinus glissant dans l'embouchure. Ce signal est mesuré simultanément par deux microphones (en bleus sur le schéma) dans l'embouchure et à une distance du pavillon correspondant à deux fois son diamètre.

Le rapport des spectres des pressions mesurées dans l'embouchure et à la sortie du trombone permet d'obtenir la fonction de transfert recherchée. En raison des limitations en fréquence du transducteur utilisé pour émettre le sinus glissant, la fonction $H_{ext}(\omega)$ obtenue n'est exploitable que sur une plage allant de 15 Hz à 1.5 kHz. La transformée de Fourier inverse de cette fonction de transfert donne la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique. La figure A.2 représente la fonction de transfert mesurée et celle du filtre déduit.

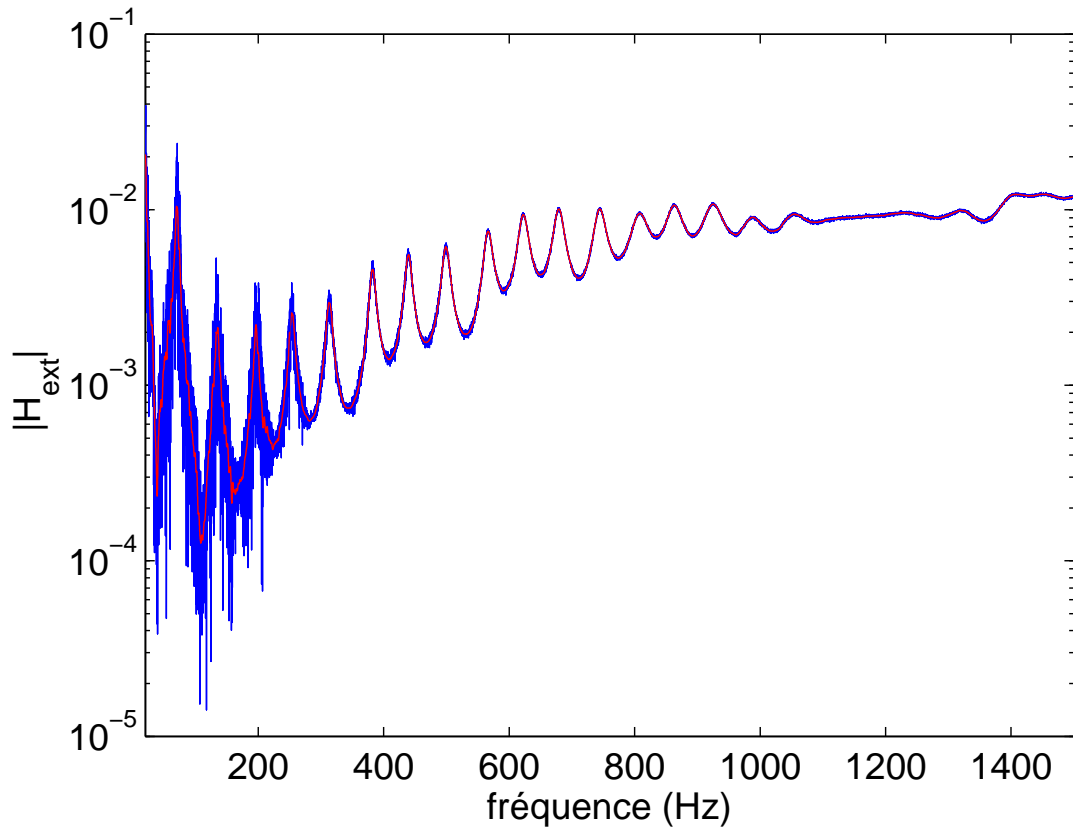


FIGURE A.2 – Module de la fonction de transfert H_{ext} mesurée (bleu) et fonction de transfert du filtre FIR déduit (rouge).

Dans la pratique, la fonction de transfert mesurée sur $[80, 5000]$ Hz est lissée. La réponse impulsionnelle correspondant à cette fonction de transfert est utilisée pour définir un filtre, qui est appliqué à la pression simulée dans l'embouchure pour obtenir une simulation de la pression rayonnée par le trombone.

Annexe B

Calcul de la solution d'équilibre

Cette annexe détaille le calcul donnant les valeurs à l'équilibre du modèle physique de cuivre décrit au chapitre 2 page 28. Le vecteur à l'équilibre X_e calculé est ensuite utilisé pour linéariser le modèle au voisinage de sa solution stationnaire.

Le système d'équations (5.1) de la page 37 décrit le système dans son état stationnaire :

$$\begin{cases} p_{n,e} = -\frac{Z_c \cdot C_n}{s_n} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot W \cdot h_e \cdot \sqrt{p_b - p_e} \quad \forall n \in [1 : N_m] \\ h_e = h_0 + \frac{1}{\mu \omega_l^2} (p_b - p_e) \\ p_e = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re[p_{n,e}] \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

En intégrant l'expression des composantes modales $p_{n,e}$ dans l'expression de p_e , ce système s'écrit :

$$\begin{cases} h_e = h_0 + \frac{1}{\mu \omega_l^2} (p_b - p_e) \\ p_e = -2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re \left(\frac{Z_c \cdot C_n}{s_n} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot W \cdot h_e \cdot \sqrt{p_b - p_e} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

La constante $Z_0 = -2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \Re \left(\frac{Z_c \cdot C_n}{s_n} \right)$ est introduite. h_e est remplacé par son expression dans celle de p_e :

$$p_e = Z_0 \cdot h_0 \cdot W \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_b - p_e} + \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{Z_0 \cdot h_0 \cdot W}{\mu \omega_l^2} (p_b - p_e)^{3/2}. \quad (\text{B.3})$$

La constante $\beta = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{W \cdot Z_0}{\mu \omega_l^2}$ est introduite. Avec le changement de variable $A = \sqrt{p_b - p_e}$ et en insérant l'expression de h_e dans la seconde équation, le système se résume à un polynôme du troisième degré en A :

$$A^3 + \frac{A^2}{\beta} + h_0 \cdot \mu \cdot \omega_l^2 \cdot A - \frac{p_b}{\beta} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Au moins une des trois racines de ce polynôme est réelle. Si plusieurs racines réelles coexistent, on choisit celle de plus petite valeur réelle positive. Cela se justifie par le fait que l'impédance $Z(\omega = 0)$ est proche de zéro, donc la pression d'équilibre est *a priori* faible. Les valeurs à l'équilibre des variables du modèle peuvent alors être calculées :

$$\begin{cases} p_e = p_b - A^2 \\ h_e = h_0 + \frac{A^2}{\mu \omega_l^2} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A partir de ces valeurs, le vecteur d'état complet du système à l'équilibre est reconstruit : le débit stationnaire entre les lèvres est calculé comme suit :

$$u_e = h_e \cdot W \cdot \sqrt{\frac{2(p_b - p_e)}{\rho}}$$

,

puis chaque composante de la pression à l'équilibre est calculée

$$\begin{cases} R_{n,e} = -\Re \left(\frac{C_n}{s_n} \right) s \cdot u_e \\ R_{n,e} = -\Im \left(\frac{C_n}{s_n} \right) \cdot u_e \end{cases} \quad 1 \leq n \leq N_m. \quad (\text{B.6})$$

Annexe C

Calcul de la matrice jacobienne du système a l'équilibre

Cette annexe détaille le calcul de la matrice jacobienne $J_F(X)$ du modèle de cuivre sous forme $\frac{dX}{dt} = F(X)$, avec $X = [\{R_n, I_n\}, h, \frac{dh}{dt}]$ (cf. système (2.11) page 28). Cette matrice jacobienne est utilisée pour l'analyse de stabilité linéaire de la solution d'équilibre décrite dans le chapitre 5. Les calculs étant faits au voisinage de la solution d'équilibre, $h(t) \approx h_e > 0$ et $p(t) \approx p_e \ll p_b$. Sous ces conditions, $p_b - p(t) > 0$ et $\theta(-h) = 0$. Les composantes de la fonction F décrivant le système peuvent alors s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{2n-1} = \frac{\tilde{R}_n}{dt} = \Re \left(s_n \cdot p_n + Z_c \cdot C_n \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot W \cdot h \cdot \sqrt{p_b - p} \right) \\ F_{2n} = \frac{I_n}{dt} = \Im \left(s_n \cdot p_n + Z_c \cdot C_n \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot W \cdot h \cdot \sqrt{p_b - p} \right) \\ F_{2.N_m+1} = \frac{dh}{dt} \\ F_{2.N_m+2} = \frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} - \omega_l^2 (h - h_0) + \frac{1}{\mu} (p_b - p) \end{array} \right\} 1 \leq n \leq N_m \quad (C.1)$$

Par définition, la matrice jacobienne d'un système d'équations différentielles de forme $\frac{dX}{dt} = F(X)$ est la matrice des dérivées partielles des composantes $F_1 \cdots F_{N_{eq}}$ de la fonction F par rapport aux composantes $X_1 \cdots X_{N_{eq}}$ du vecteur d'état X :

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1(X)}{dX_1} & \cdots & \frac{dF_1(X)}{dX_j} & \cdots & \frac{dF_1(X)}{dX_{N_{eq}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dF_i(X)}{dX_1} & \cdots & \frac{dF_i(X)}{dX_j} & \cdots & \frac{dF_i(X)}{dX_{N_{eq}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dF_{N_{eq}}(X)}{dX_1} & \cdots & \frac{dF_{N_{eq}}(X)}{dX_j} & \cdots & \frac{dF_{N_{eq}}(X)}{dX_{N_{eq}}} \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

Les composantes $F_{1..2N_m}$ dérivées par les $X_{1..2N_m}$ (c'est à dire les R_n et I_n) forment une sous-matrice carrée de taille $2.N_m$, représentant le résonateur acoustique. Ses composantes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_{2k-1}}{dR_n} = \frac{-\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot Z_c \cdot W \cdot C_{kR} \cdot h(t)}{\sqrt{p_b - 2 \cdot \sum R_n}} + s_{kR} \cdot \delta(k, n) \\ \frac{dF_{2k}}{dR_n} = \frac{-\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot Z_c \cdot W \cdot C_{kI} \cdot h(t)}{\sqrt{p_b - 2 \cdot \sum R_n}} + s_{kI} \cdot \delta(k, n) \\ \frac{dF_{2k-1}}{dI_n} = -s_{kI} \cdot \delta(k, n) \\ \frac{dF_{2k}}{dI_n} = +s_{kR} \cdot \delta(k, n) \end{array} \right. \quad \{k, n\} \in [1 : N_m]^2, \quad (C.3)$$

où $\delta(k, n)$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $n = k$ et nul sinon. C_{kR}, C_{kI} et s_{kR}, s_{kI} sont les parties réelles et imaginaires respectives de C_k et s_k .

Les dérivées des composantes concernant les résonateur acoustique par h et $h' = \frac{dh}{dt}$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_{2k-1}}{dh} = Z_c \cdot C_{kR} \cdot W \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b - 2 \cdot \sum R_n(t)} \\ \frac{dF_{2k}}{dh} = Z_c \cdot C_{kI} \cdot W \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b - 2 \cdot \sum R_n(t)} \\ \frac{dF_{2k-1}}{dh'} = 0 \\ \frac{dF_{2k}}{dh'} = 0 \end{array} \right. \quad 1 < k < 2 \cdot N_m. \quad (C.4)$$

Les dérivées des composantes F_{2N_m+1}, F_{2N_m+2} par les R_n et I_n s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_{2N_m+1}}{dR_n} = 0 \\ \frac{dF_{2N_m+2}}{dR_n} = 0 \\ \frac{dF_{2N_m+1}}{dI_n} = -\frac{2}{\mu} \\ \frac{dF_{2N_m+2}}{dI_n} = 0 \end{array} \right. \quad 1 < n < 2 \cdot N_m. \quad (C.5)$$

Enfin, la sous-matrice représentant la valve des lèvres comporte 4 composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_{2N_m+1}}{dh} = 0 \\ \frac{dF_{2N_m+2}}{dh} = -\omega_l^2 \\ \frac{dF_{2N_m+1}}{dh'} = 1 \\ \frac{dF_{2N_m+2}}{dh'} = -\frac{\omega_l}{Q_l} \end{array} \right. \quad (C.6)$$

Par exemple, pour $N_m = 3$ la jacobienne s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
-\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{1R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} + s_{1R} & -s_{1I} & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{1R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{1R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & Z_c \cdot C_{1R} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n(t) & 0 \\
-\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{1I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} + s_{1I} & s_{1R} & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{1I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{1I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & Z_c \cdot C_{1I} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n & 0 \\
-\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{2R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{2R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} + s_{2R} & -s_{2I} & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{2R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & Z_c \cdot C_{2R} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n(t) & 0 \\
-\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{2I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{2I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} + s_{2I} & s_{2R} & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{2I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & Z_c \cdot C_{2I} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n & 0 \\
-\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{3R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{3R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{3R} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} + s_{3R} & -s_{3I} & Z_c \cdot C_{3R} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n(t) & 0 \\
-\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{3I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{3I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} & 0 & -\frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}} Z_c \cdot C_{3I} \cdot W.h(t)}{\sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n} + s_{3I} & s_{3R} & Z_c \cdot C_{3I} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{p_b-2} \cdot \sum R_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-\frac{2}{\mu} & 0 & -\frac{2}{\mu} & 0 & -\frac{2}{\mu} & 0 & -\omega_l^2 & -\frac{\omega_l}{Q_l}
\end{array} \right) \quad (C.7)$$

Cette matrice est ensuite calculée pour $h = h_e$, $2 \sum(R_n) = p_e$ et ses valeurs propres sont extraites. Le signe des parties réelles des valeurs propres informent sur la stabilité de la solution d'équilibre du système.

Annexe D

Calcul de l'admittance acoustique linéarisée de l'excitateur

Cette annexe détaille le calcul de l'admittance linéarisée de l'excitateur du modèle $Y_a = \frac{\tilde{U}(\omega)}{P(\omega)}$, utilisée dans la méthode d'analyse de stabilité linéaire par examen de la fonction de transfert boucle ouverte par le critère de Barkhausen, dans le chapitre 5.5.

L'équation de la valve lippale (2.5) est valide ici car au voisinage de l'équilibre, les oscillations sont de petite amplitude et il n'y a pas de contact entre les lèvres :

$$\frac{1}{\omega_l^2} \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{1}{\omega_l Q_l} \frac{dh}{dt} + (h - h_0) = \frac{1}{\omega_l^2 \mu} (p_b - p(t)), \quad (\text{D.1})$$

$H(\omega)$ est la transformée de Fourier de $(h(t) - h_0)$ et $P(\omega)$ est la transformée de Fourier de $p(t)$ et $\delta(\omega)$ la distribution de Dirac centrée en $\omega = 0$. L'équation (D.1) devient, après application de la Transformée de Fourier :

$$\left(-\frac{\omega^2}{\omega_l^2} + j \frac{\omega}{\omega_l Q_l} \right) (H(\omega) + h_0 \delta(\omega)) + H(\omega) = \frac{1}{\mu \omega_l^2} (p_b \delta(\omega) - P(\omega)). \quad (\text{D.2})$$

Les calculs sont effectués pour $\omega > 0$ car les solutions recherchées sont oscillantes : cela permet également de négliger les constantes dans le domaine temporel car sous ces conditions $\delta(\omega) = 0$. La variable $D(\omega)$ décrit la dynamique de l'anche :

$$D(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_l^2} + j \frac{\omega}{Q_l} \right)}$$

Il vient alors :

$$H(\omega) = -\frac{D(\omega)}{\mu \omega_l^2} P(\omega). \quad (\text{D.3})$$

L'équation (2.7) décrivant le débit moyen entre les lèvres est ensuite linéarisée au voisinage de la solution stationnaire. On note ici $\delta p(t) = p_b - p(t)$ et δp_e sa valeur à l'équilibre. La linéarisation s'écrit :

$$\tilde{u}(p, h) = u(p_e, h_e) - \left[\frac{\partial u}{\partial p}(p_e, h_e) \right] (\delta p(t) - \delta p_e) + \left[\frac{\partial u}{\partial h}(p_e, h_e) \right] (h(t) - h_e). \quad (\text{D.4})$$

Au voisinage de l'équilibre, $\delta p > 0$ (écoulement stationnaire d'air de la bouche vers l'instrument) et $h > 0$ (pas de fermeture des lèvres) ce qui permet de s'affranchir de la fonction signe, de la valeur absolue et de la fonction de Heaviside $\theta(-h)$. Tous calculs faits, le débit linéarisé donne :

$$\tilde{u}(p,h) = W.h_e \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left(\frac{h}{h_e} + \frac{\delta p}{2.\delta p_e} - \frac{1}{2} \right). \quad (D.5)$$

La transformée de Fourier appliquée à cette équation fait alors apparaître $\tilde{U}(\omega)$:

$$\tilde{U}(\omega) = W.h_e \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left[\frac{H(\omega) + h_0.\delta(\omega)}{h_e} + \frac{p_b.\delta(\omega) - P(\omega)}{2.\delta p_e} - \frac{\delta(\omega)}{2} \right]. \quad (D.6)$$

En se plaçant à $\omega > 0$ et en insérant l'équation (D.3) il vient :

$$\tilde{U}(\omega) = W.h_e \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left[\frac{-D(\omega)}{\mu.\omega_l^2.h_e} - \frac{1}{2.\delta p_e} \right].P(\omega). \quad (D.7)$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation de Y_a utilisée dans la section 5.5 :

$$Y_a(\omega) = W.h_e \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left[\frac{-D(\omega)}{\mu.\omega_l^2.h_e} - \frac{1}{2.\delta p_e} \right]. \quad (D.8)$$

Annexe E

Elements de calcul pour la Méthode Asymptotique Numérique

Cette annexe est un complément à la présentation de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) effectuée au chapitre 6 (p. 40), qui détaille la continuation d'un problème de la forme de l'équation (E.1) :

$$R(U,\lambda) = 0, \quad (\text{E.1})$$

où R est une application vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}^n et $(U,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Il s'agit d'un extrait de la thèse de Sami Karkar, reproduit ici avec l'aimable autorisation de l'auteur. Le lecteur souhaitant plus de détails sur la méthode est vivement incité à se rapporter à cette thèse [Karkar, 2012] ainsi qu'à [Cochelin et al., 2007].

E.1 Principe

La MAN est une technique de perturbation. Le principe est de chercher les solutions de l'équation (E.1) sous la forme de série entière d'un paramètre de chemin a . Posant $Y = (U,\lambda)$, on écrit ainsi :

$$Y(a) = Y^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} a^p Y_p^{(0)} \quad (\text{E.2})$$

où $Y^{(0)} = (U^{(0)}, \lambda^{(0)})$ est une solution de départ connue.

E.2 Systèmes linéaires en cascade

Si $Y(a)$ est la branche de solution, alors $\forall a, R(Y(a)) = 0$, ou encore, en utilisant (E.2) et en développant R en série de Taylor :

$$\begin{aligned} R(Y(a)) &= R(Y^{(0)}) + \sum_{p=1}^{\infty} a^p Y_p^{(0)} \\ &= R(Y^{(0)}) + \left. \frac{\partial R}{\partial Y} \right|_{Y^{(0)}} (aY_1^{(0)} + a^2Y_2^{(0)} + \dots) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 R}{\partial Y^2} \right|_{Y^{(0)}} (aY_1^{(0)} + a^2Y_2^{(0)} + \dots)(aY_1^{(0)} + a^2Y_2^{(0)} + \dots) \\ &\quad + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

En ordonnant suivant les puissances de a et en utilisant le fait que $R(Y^{(0)}) = 0$ (puisque $Y^{(0)}$ est solution), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 = & a \left[\frac{\partial R}{\partial Y} \Big|_{Y^{(0)}} Y_1^{(0)} \right] \\
& + a^2 \left[\frac{\partial R}{\partial Y} \Big|_{Y^{(0)}} Y_2^{(0)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial Y^2} \Big|_{Y^{(0)}} Y_1^{(0)} Y_1^{(0)} \right] \\
& + a^3 \left[\frac{\partial R}{\partial Y} \Big|_{Y^{(0)}} Y_3^{(0)} + \text{termes dépendants de } Y_1^{(0)} \text{ et } Y_2^{(0)} \right] \\
& + \\
& \vdots \\
& + a^p \left[\frac{\partial R}{\partial Y} \Big|_{Y^{(0)}} Y_p^{(0)} + \underbrace{\text{termes dépendants de } Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_{p-1}^{(0)}}_{\text{terme qu'on notera } -F_p^{\text{nl}}} \right] \\
& + \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{E.4}$$

que l'on peut résumer sous la forme :

$$R(Y(a)) = aR_1 + a^2R_2 + \dots = 0. \tag{E.5}$$

Comme cette relation doit être vérifiée pour toute valeur de a , on en déduit que :

$$\forall p \geq 1, \quad R_p = 0. \tag{E.6}$$

Pour chaque ordre p , cette équation est un système linéaire en $Y_p^{(0)}$:

$$\frac{\partial R}{\partial Y} \Big|_{Y^{(0)}} Y_p^{(0)} = F_p^{\text{nl}} \tag{E.7}$$

où le second membre ne dépend que des ordres précédents. C'est donc un ensemble de systèmes linéaires en cascade. On remarque que la matrice (au membre de gauche) est toujours la même. Cela permet de ne pas dégrader les performances de la méthode en termes de temps de calcul lorsque l'ordre de troncature de la série N augmente puisqu'il n'y a qu'une unique matrice à inverser quel que soit N . En pratique, on choisit $N = 20$.

Toutefois, les systèmes ainsi définis sont sous-déterminés : $\dim R = n$ alors que $\dim Y = n + 1$. Il manque donc une équation pour fermer chaque système. C'est là qu'intervient la définition du paramètre de chemin. Si l'on utilise la pseudo-longueur d'arc, dont on rappelle la définition (locale) :

$$a = (Y - Y^{(0)})^T \cdot Y_1^{(0)}, \tag{E.8}$$

alors l'équation supplémentaire à l'ordre 1 est :

$$\|Y_1^{(0)}\|^2 = 1 \tag{E.9}$$

et à l'ordre $p > 1$:

$$[Y_1^{(0)}]^T \cdot Y_p^{(0)} = 0 \tag{E.10}$$

Ainsi, en tronquant les séries à un ordre N , on obtient un ensemble de N systèmes linéaires ayant une solution unique (à la seule condition que $\partial R/\partial Y$ soit de rang n), et que l'on résout l'un après l'autre car chacun dépend de la solution du précédent. La (seule) matrice à inverser est :

$$K = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial R}{\partial Y} \right|_{Y^{(0)}} \\ [Y_1^{(0)}]^T \end{bmatrix}.$$

On calculera donc d'abord l'ordre 1 indépendamment, puis les ordres $1 < p < N$ après avoir inversé cette matrice.

E.3 Taille du pas

On souhaite définir la taille du pas a_{\max} de façon à ce que le critère de tolérance suivant soit vérifié :

$$\forall a \in [0, a_{\max}], \quad R(Y(a)) < \epsilon, \quad (\text{E.11})$$

où ϵ est un paramètre défini par l'utilisateur. Les résultats de cette thèse ont été calculés pour $\epsilon = 10^{-12}$.

En reprenant la série entière du résidu (E.5) et en utilisant le fait que tous les termes jusqu'à l'ordre N sont nuls, il vient :

$$R(a) = a^{N+1}R_{N+1} + a^{N+2}R_{N+2} + \dots \quad (\text{E.12})$$

On suppose maintenant que le résidu est dominé par le premier terme de cette série. Il vient donc, pour $a > 0$:

$$\begin{aligned} \|R(a)\| &\sim a^{N+1}\|R_{N+1}\| \\ \|R(a)\| < \epsilon &\Leftrightarrow a^{N+1}\|R_{N+1}\| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow a < \left(\frac{\epsilon}{\|R_{N+1}\|} \right)^{\frac{1}{N+1}}. \end{aligned}$$

Or, comme on tronque la série de Y à l'ordre N , cela revient à supposer que $Y_{N+1}^{(0)} = 0$ et on a alors :

$$\begin{aligned} R_{N+1} &= \left. \frac{\partial R}{\partial Y} \right|_{Y^{(0)}} Y_{N+1}^{(0)} - F_{N+1}^{\text{nl}} \\ &= -F_{N+1}^{\text{nl}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une estimation de la longueur du pas :

$$a_{\max} = \left(\frac{\epsilon}{\|F_{N+1}^{\text{nl}}\|} \right)^{\frac{1}{N+1}}. \quad (\text{E.13})$$

En pratique, on observe avec cette définition que $R(a_{\max}) \sim \epsilon$.

E.4 Itération

On dispose alors d'un nouveau point de départ $Y^{(1)} = Y(a_{\max})$. On dispose également d'une tangente $dY/da(a_{\max})$. Toutefois, ce point n'est qu'une solution approchée et l'approximation de la tangente ainsi obtenue est encore moins bonne. On peut donc calculer une meilleure approximation du vecteur tangent en ce point en résolvant le système :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial Y}(Y^{(1)}) \\ A \end{bmatrix} \cdot \dot{Y}^{(1)} = 0 \quad (\text{E.14})$$

où $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un vecteur aléatoire.

Enfin, on normalise cette nouvelle tangente ainsi :

$$Y_1^{(1)} = \frac{\dot{Y}^{(1)}}{\|\dot{Y}^{(1)}\|}. \quad (\text{E.15})$$

On dispose alors des deux premiers termes de la série du pas suivant, que l'on peut calculer en résolvant les systèmes linéaires des ordres $1 < p < N$.

E.5 Correction éventuelle

On a vu que, dans le cas d'un point de départ exact, le résidu en fin de pas est de l'ordre de ϵ . Par ailleurs, si le point de départ $Y^{(i)}$ n'est pas exact avec par exemple $R(Y^{(i)}) \sim \epsilon$, on observe là aussi un résidu du même ordre de grandeur en fin de pas. Ainsi, il n'est en général pas nécessaire d'effectuer une correction en fin de pas, ou au début du pas suivant.

Toutefois, lorsqu'on enchaîne un grand nombre de pas (typiquement plusieurs dizaines), il arrive parfois que les résidus s'accumulent et qu'on obtienne, en fin de pas, un résidu un ou deux ordres de grandeur au-dessus de la tolérance ϵ . Dans ce cas, il peut s'avérer utile d'effectuer une correction en fin de pas, à l'aide d'un correcteur du type Newton par exemple. Dans cette thèse, une correction est effectuée quand le résidu dépasse 10^{-11} .

Annexe F

Éléments de calculs : Stabilité des branches périodiques

Cette annexe détaille les calculs des composantes de la matrice jacobienne du système 6.16 page 45, nécessaire au calcul de la stabilité des solutions périodiques par continuation numérique. Cette matrice s'écrit :

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial x} & \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2k}}{\partial x} & \frac{\partial F_{2k}}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial x} & \frac{\partial F_{2N_m-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial x} & \frac{\partial F_{2N_m}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial x} & \frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{R}_1} & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{I}_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{R}_n} & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{I}_n} & \cdots & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{R}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{I}_{N_m}} & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial x} & \frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

le calcul des composantes de cette matrice est détaillé ci-après, en introduisant les variables auxiliaires nécessaires à la formulation quadratique de ces composantes.

F.1 Dérivées de F_{2k-1}

$$F_{2k-1} = \Re(C_n) \cdot \tilde{u} + \Re(s_n) \cdot \tilde{R}_k - \Im(s_n) \cdot \tilde{I}_k.$$

$$\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{R}_n} :$$

La dérivée de $\tilde{u} = \zeta \frac{(s+x)}{2} \cdot \tilde{v}$ ne se calcule pas immédiatement car \tilde{v} n'est pas défini explicitement. Cependant, dériver l'expression $\tilde{v} \cdot z = (\gamma - 2 \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \tilde{R}_n)$ selon \tilde{R}_n donne $\frac{\partial \tilde{v} \cdot z}{\tilde{R}_n} = -2$. En décomposant $\frac{\partial \tilde{v} \cdot z}{\tilde{R}_n}$ on peut écrire :

$$\tilde{v} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tilde{v}} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{R}_n} + z \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{R}_n} = -2. \quad (\text{F.2})$$

Comme $\frac{\partial z}{\partial \tilde{v}} = \frac{\tilde{v}}{z}$ l'équation précédente donne l'expression suivante de la dérivée de \tilde{v} selon \tilde{R}_n :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{R}_n} = \frac{-2z}{\tilde{v}^2 + z^2}. \quad (\text{F.3})$$

La dérivée de \tilde{u} s'exprime en fonction de cette dérivée de \tilde{v} et des dérivées de x et s . x et s sont indépendants de \tilde{R}_n , leur dérivée est nulle, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{R}_n} = \frac{-\zeta \cdot z(x+s)}{\tilde{v}^2 + z^2}. \quad (\text{F.4})$$

Les variables $m = \tilde{v}^2 + z^2$ et $l = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{R}_n} = -\frac{\zeta \cdot z(x+s)}{m}$ sont introduites pour obtenir une formulation quadratique.

Par ailleurs, la dérivée de \tilde{R}_k par \tilde{R}_n est égale au symbole de Kronecker : $\frac{\partial \tilde{R}_k}{\partial \tilde{R}_n} = \delta(k,n) = 1$ si $k = n$ et $\delta(k,n) = 0$ sinon. L'expression de cette dérivée partielle est finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{R}_n} = \Re(C_n) \cdot l + \Re(s_n) \cdot \delta(k,n) \\ 0 = m \cdot l + \zeta \cdot z(x+s) \\ 0 = \tilde{v}^2 + z^2 - m \end{array} \right. \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{I}_n} :$$

\tilde{u} est indépendant de \tilde{I}_n . La dérivée de \tilde{I}_k par \tilde{I}_n s'écrit $\frac{\partial \tilde{I}_k}{\partial \tilde{I}_n} = \delta(k,n)$:

$$\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{I}_n} = -\Im(s_n) \cdot \delta(k,n). \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial x} :$$

\tilde{v} est indépendant de x donc la dérivée $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \tilde{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\zeta}{2} \cdot (x+s) \right) = \frac{\zeta}{2} \cdot \tilde{v} \cdot \left(1 + \frac{x}{s} \right).$$

La variable $q = \frac{x}{s}$ est introduite pour obtenir la formulation quadratique suivante :

$$\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial x} = \Re(C_n) \cdot \frac{\zeta}{2} \cdot \tilde{v} \cdot (1+q). \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial y} :$$

Composante indépendante de y :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial y} = 0.} \quad (\text{F.8})$$

F.2 Dérivées de F_{2k}

$\frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{R}_n}$: Voir $\frac{\partial F_{2k-1}}{\partial \tilde{R}_n}$ pour le détail de la dérivée de \tilde{u} :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{R}_n} = \Im(C_n) \cdot l + \Im(s_n) \cdot \delta(k, n).} \quad (\text{F.9})$$

$\frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{I}_n}$: Comme pour la dérivée selon \tilde{R}_n :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2k}}{\partial \tilde{I}_n} = \Re(s_n) \cdot \delta(k, n).} \quad (\text{F.10})$$

$\frac{\partial F_{2k}}{\partial x}$: La dérivée de \tilde{u} est identique à celle calculée pour F_{2k-1} :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2k}}{\partial x} = \Im(C_n) \cdot \frac{\zeta}{2} \cdot \tilde{v} \cdot (1 + q).} \quad (\text{F.11})$$

$\frac{\partial F_{2k}}{\partial y}$: Composante indépendante de y :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2k}}{\partial y} = 0.} \quad (\text{F.12})$$

F.3 Dérivées de F_{2N_m+1}

Cette composante ne dépendant que de y , toutes autres dérivées sont nulles :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2N_m+1}}{\partial y} = \omega_l.} \quad (\text{F.13})$$

F.4 Dérivées de F_{2N_m+2}

$$F_{2N_m+2} = \omega_l \cdot \left(1 - x(1 + K_F) - \frac{1}{Q_l} y - 2 \cdot \sum \tilde{R}_n + \gamma + K_F \cdot s \right).$$

$\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{R}_n}$: x , y et s sont indépendants de \tilde{R}_n , seule la somme des \tilde{R}_n reste à dériver :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{R}_n} = -2 \cdot \omega_l.} \quad (\text{F.14})$$

$\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{I}_n}$: Indépendant de \tilde{I}_n :

$$\boxed{\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial \tilde{I}_n} = 0.} \quad (\text{F.15})$$

$\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial x}$: Seuls s et x dépendent de x , avec $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x}{s} = q$:

$$\boxed{\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial x} = \omega_l \cdot (K_F \cdot q - 1 - K_F).} \quad (\text{F.16})$$

$\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial y}$:

$$\boxed{\frac{\partial F_{2N_m+2}}{\partial y} = \frac{-\omega_l}{Q_l}.} \quad (\text{F.17})$$

Finalement, la matrice jacobienne définie par (F.1) est assemblée, en utilisant les définitions de ses composantes dans les équations (F.5) à (F.17). Le système continué par MANLAB est enrichi des variables m , l et q définies ici.

Annexe G

Étalonnage des capteurs

La plupart des capteurs présentés au chapitre 7 ont nécessité un étalonnage. Cette annexe décrit la méthode d'étalonnage utilisée.

G.1 Pression dans la bouche et l'embouchure

Les deux capteurs de pression miniature Endevco sont reliés à un conditionneur dédié, qui alimente les micros et amplifie le signal de sortie. Les premières mesures de test du dispositif expérimental ont montré que la pression statique dans la bouche et l'amplitude de la pression dans l'embouchure peuvent dépasser 20 kPa lorsque des notes suraiguës sont jouées à très fort volume. Afin de garder une marge de gain, la chaîne d'acquisition est réglée pour mesurer une plage de pression de ± 30 kPa. La carte d'acquisition utilisée admet une plage de tension d'entrée de ± 5 V. Afin que la plage de tensions électriques en sortie du conditionneur corresponde à la plage de pression $[-30\text{kPa}, +30\text{kPa}]$, l'Output Scaling du conditionneur est réglé à $0.167\text{mV}\cdot\text{Pa}^{-1}$.

La mesure de pression est effectuée à travers un assemblage de deux tuyaux souples : un tube capillaire (diamètre 1.5 mm intérieur), entrant soit dans la bouche du musicien, soit dans l'embouchure de l'instrument. Ce tube capillaire est collé à l'intérieur d'un tube silicone (diamètre 4 mm intérieur) qui assure la jonction étanche entre le capillaire et le capteur de pression. Ces assemblages de capillaires, connectés aux capteurs de pression dans la bouche et l'embouchure, sont schématisés dans la figure G.1.

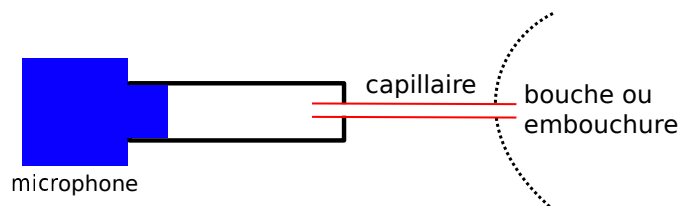


FIGURE G.1 – Schéma des assemblages de capillaires raccordés aux microphones miniatures mesurant la pression dans la bouche et l'embouchure.

Chaque assemblage de capillaires forme un résonateur de Helmholtz qui filtre le signal de pression avant sa captation par le microphone. La fonction de transfert en pression de ces assemblages de capillaires est donc mesurée, dans le but de concevoir un filtre compensant le filtrage qu'ils provoquent. Le dispositif de mesure est décrit par la figure G.2.

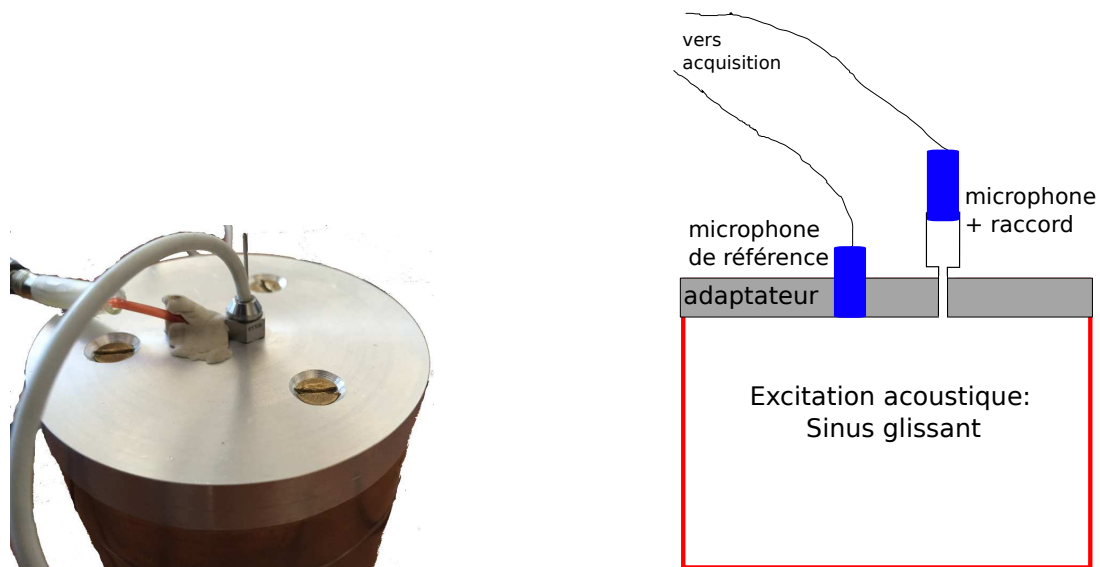


FIGURE G.2 – Mesure de la fonction de transfert des assemblages de capillaires reliant les capteurs de pression miniatures à la bouche ou à l'embouchure. Un micro équipé de l'assemblage tuyau-capillaire et un micro de référence, maintenus par un adaptateur (plaque grise), sont soumis à un même sinus glissant.

Le banc de mesure d'impédance présenté dans [Macaluso and Dalmont, 2011] est utilisé comme source sonore. Il émet un sinus glissant de 80 Hz à 5 kHz, en ondes planes sur son plan de sortie. Un capteur de pression de référence et un capteur de pression équipé d'un assemblage de capillaires sont maintenus dans le plan de sortie du banc d'impédance par un adaptateur. Les deux dispositifs, [micro seul] et [micro + assemblage capillaires], mesurent le même signal : le rapport de ces signaux dans le domaine fréquentiel donne la fonction de transfert de l'assemblage de capillaires. La figure G.3 représente la fonction de transfert mesurée, qui montre une résonance marquée autour de 1024 Hz.

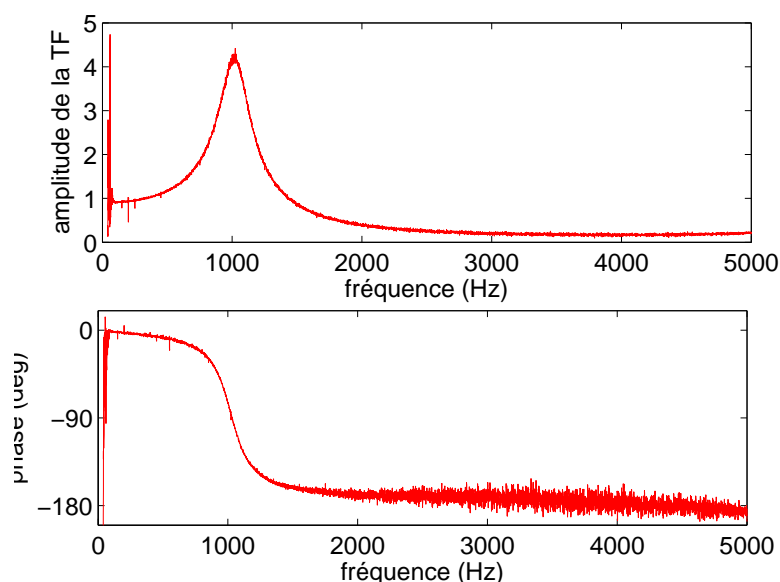


FIGURE G.3 – Fonction de transfert des raccords.

Un filtre à réponse impulsionnelle finie inversant cette fonction de transfert est ensuite déduit de cette mesure, et appliqué aux signaux mesurés. Nous remercions Philippe Guillemain pour son aide précieuse lors de cette opération. En pratique, les signaux mesurés dans la bouche et l'embouchure sont convolués par la réponse impulsionnelle du filtre inverse.

G.2 Pistons

Les potentiomètres reliés au corps de chaque piston sont montés en pont diviseur de tension : la tension au pointeur du potentiomètre est directement proportionnelle à la course de celui-ci. La tension de sortie a été mesurée pour 16 points de la course de chaque piston, par pas de 1 mm. L'équidistance des points de mesure a été assurée en insérant des cales d'épaisseur calibrée entre le chapeau et le corps du piston.

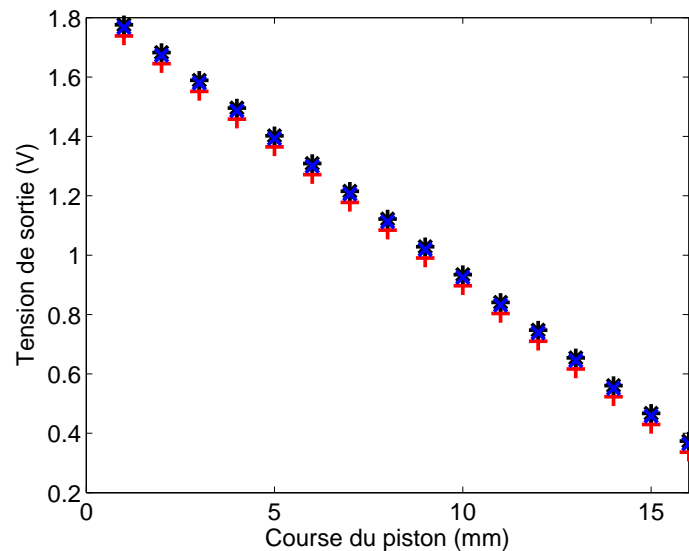


FIGURE G.4 – Étalonnage des capteurs de position des pistons. La course du piston est maintenue à l'aide d'un serrage et de cales d'épaisseur enfilées sur l'axe du piston.

La figure G.4 (gauche) montre l'utilisation de cales pour positionner précisément le troisième piston afin de mesurer la tension de sortie du potentiomètre correspondant. La partie droite de la figure représente la tension relevée pour différentes positions qui couvrent la course complète du piston. Les marqueurs +, *, x correspondent aux trois pistons. La courbe traduit une relation affine entre tension de sortie et position.

G.3 Force d'appui sur l'embouchure

Une fois l'embouchure transformée en capteur de force par collage des jauges de contraintes sur la queue de l'embouchure, il a été nécessaire d'étalonner ce capteur, donc d'estimer la loi $F = u(V)$ où V est la tension de sortie du conditionneur réalisé pour ce capteur, et F la force d'appui sur l'embouchure. Afin de faciliter la comparaison avec la littérature existante sur cette mesure [Vergez, 2000, Petiot, 2003] cette force est exprimée en kilogrammes.

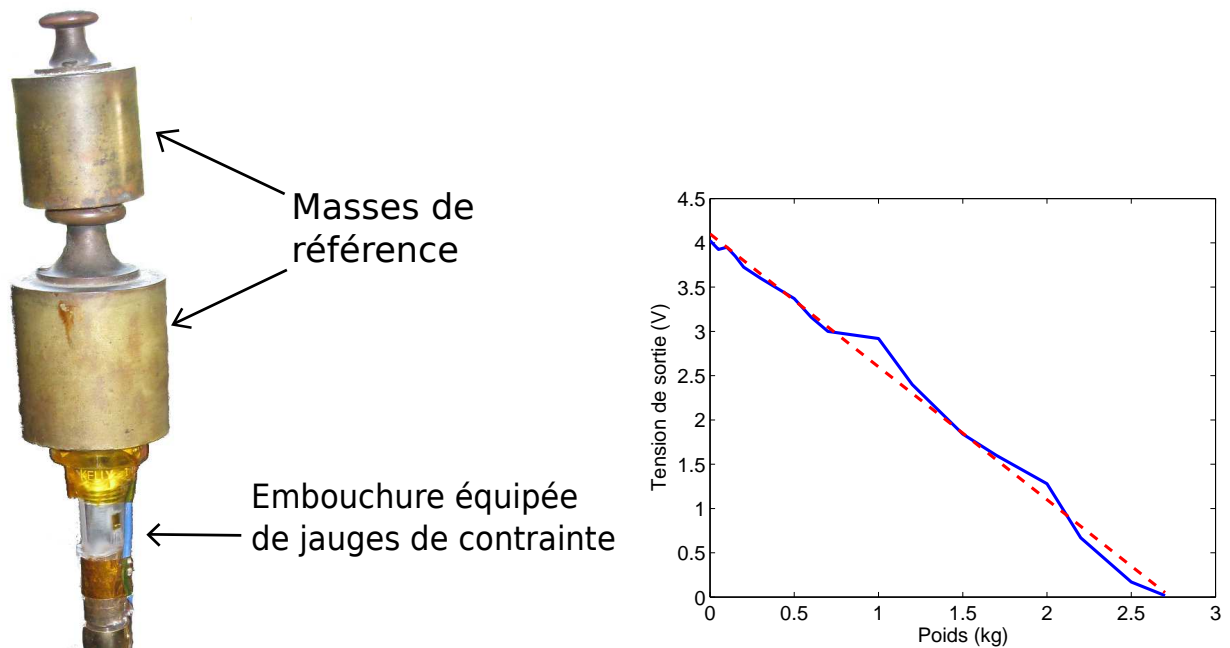


FIGURE G.5 – Etalonnage du capteur de force : la trompette est maintenue à la verticale, et l'embouchure est chargée par des masses de référence, marquées de 0 à 2.7 kg. La tension de sortie est mesurée à chaque pas. La réponse du capteur $F = u(V)$ est approximée par une fonction affine.

L'étalonnage, illustré par la figure G.5, a consisté en la mesure de la tension de sortie du conditionneur pour différentes valeurs de force appliquées sur l'embouchure. Le chargement de l'embouchure a été fait à l'aide de masses tarées, par pas de 50 grammes. Les points obtenus, tracés en bleu sur la droite de la figure G.5, mettent en évidence une relation presque affine entre force et tension de sortie : on obtient donc par régression une fonction $V = u(F)$ qui est inversée pour obtenir la loi d'étalonnage du capteur.

Annexe H

Article : Linear Stability Analysis

Cette annexe reproduit l'article soumis à *Acta Acustica united with Acustica* (en cours de révision), intitulé "How far can Linear Stability Analysis predict the behaviour of an outward-striking valve instrument model?" et co-signé avec Christophe Vergez, Joël Gilbert et Mithra Djahanbani. Les résultats sont assez semblables à ceux présentés au chapitre 8 de cette thèse.

H.1 Abstract

A physical model of brass instrument is considered in this paper : a one degree-of-freedom outward-striking valve for the lips, non-linearly coupled to a modal representation of the air column. It is studied through Linear Stability Analysis (LSA) of the equilibrium solution. This approach provides the threshold blowing pressure value, at which instability occurs, and the instability frequency value. The relevance of the results of this method is theoretically limited to the neighbourhood of the equilibrium solution. This paper checks the efficiency of LSA to understand the behaviour of the model computed through time-domain simulations. As expected, a good agreement is observed between LSA and numerical simulations of the complete nonlinear model around the oscillation threshold. For blowing pressures far above the oscillation threshold, the picture is more contrasted. In most of the cases tested, a periodic regime coherent with the LSA results is observed, but over-blowing, quasi-periodicity and period-doubling also occur. Interestingly, LSA predicts the production of the pedal note by a trombone, for which only nonlinear hypotheses have been previously proposed. LSA also predicts the production of a saxhorn note which, although known to musicians, has barely been documented.

H.2 Introduction

Linear Stability Analysis (LSA) can be used to analyse the behaviour of dynamical systems around equilibrium points (i.e. non-oscillating solutions). LSA consists in writing a linearised version of a dynamical system. The stability of the linearised system is then assessed by studying its response to harmonic perturbations.

LSA has already been applied to physical models of musical instruments, such as woodwind instruments [Wilson and Beavers, 1974, Chang, 1994, Silva et al., 2008, Karkar et al., 2012], flute-like instruments [Terrien et al., 2014] and brass instruments [Cullen et al., 2000, Lopez et al., 2006, Silva et al., 2007]. By definition, the domain of relevance of the LSA results is theoretically limited to the neighbourhood of the equilibrium solution. However, recent results on flutes have highlighted that LSA can predict important features of periodic regimes, such as their frequencies [Terrien et al., 2014]. This paper examines to what extent LSA can be used to understand

some aspects of the behaviour of a physical model of brass instrument.

Physical models of brass instruments have been proposed in multiple studies [Elliott and Bowsher, 1982, Fletcher, 1993, Adachi and Sato, 1996, Cullen et al., 2000, Campbell, 2004, Silva et al., 2007]. Since our focus in this study is a simple model, a one degree-of-freedom system is retained to model the player's lips : the outward-striking valve, also referred to as "(+,-)" in some publications. The same goal of simplicity makes us ignore nonlinear propagation in the bore of the instrument, which is responsible for "brassy sounds" at high sound levels [Myers et al., 2012]. The coupling by the airflow blown between the lips and the air column inside the bore is modelled through a usual nonlinear algebraic equation [Hirschberg et al., 1995]. This model is detailed in Section H.3.1. Even such a simple brasswind model has more parameters needing to be tuned than the simplest models of woodwind instruments, which is based on two dimensionless parameters only [Hirschberg et al., 1995, Dalmont et al., 1995, Taillard et al., 2010, Bergeot et al., 2013]. However, brasswind players make their instrument oscillate on several modes, which implies a significant modification of the mechanical characteristics of their lips. In musical terms, this corresponds to playing multiple notes without pulling a slide nor depressing a valve, which is part of the playing technique of all brass instruments. Therefore, the lip dynamics cannot be ignored, which implies an increase in the number of parameters to tune. A bibliographical review is given in Section H.3.2 to give grounds to the values chosen for each parameter of the model. In Section H.3.3, details are given on how LSA is applied to the model. There are several possible approaches to highlighting nonlinear model behaviours to compare them with LSA results. For instance, the Harmonic Balance Method gives a Fourier series approximation of the steady state of periodic regimes, including unstable ones [Gilbert et al., 1989, Cochelin and Vergez, 2009]. Since the pioneering work described in [McIntyre et al., 1983, Schumacher, 1981], it is also possible to carry out time-domain simulations at moderate computational cost, providing access to transients and possibly non-periodic solutions. The second approach is retained here (see Section H.3.4). Section H.4 compares LSA results and numerical simulations for different sets of parameter values. Periodic regimes, corresponding to the usual sound of the instrument, are explored, along with less common regimes such as quasi-periodicity and period-doubling. In Section H.5, we focus on the lowest acoustic resonance of brass instruments, called the pedal note, a particularly interesting case where LSA and numerical simulation results are surprisingly different from other regimes.

H.3 Tools

H.3.1 Brass instrument model

In most wind instruments [Fletcher, 1993, Chaigne and Kergomard, 2016], including brass instruments [Elliott and Bowsher, 1982, Yoshikawa, 1995, Cullen et al., 2000], the oscillation results from the coupling between an exciter and a resonator. More generally, the closed-loop system representation shown in Figure H.1 has been widely used by the musical acoustics community since the seminal work of Helmholtz [von Helmholtz, 1877, McIntyre et al., 1983].

For brass instruments, the exciter is the lips of the musician. It is represented by a linear, oscillator-like valve linking the height of the channel between the lips $h(t)$ and the pressure difference across the lips $\delta p(t) = p_b - p(t)$, where p_b is the blowing pressure, and $p(t)$ is the oscillating pressure signal inside the mouthpiece (the input of the bore).

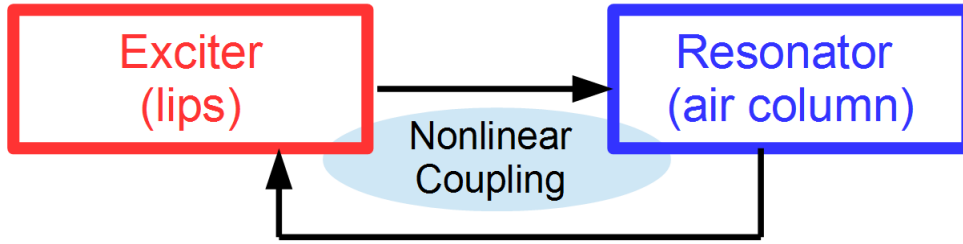


FIGURE H.1 – (Color online) Closed-loop model in free oscillation, suitable for the description of most self-sustained musical instruments. Self-sustained oscillations are generated by the localised nonlinear coupling between a linear exciter and a linear resonator. For brass instruments, the exciter is the lip reed while the resonator is the air column inside the bore, and the coupling is due to the air flow between the lips.

A one degree of freedom valve (referred to hereafter as "1-DOF valve") [Fletcher, 1993] is enough to model the lips for common playing situations [Yoshikawa, 1995] with a manageable number of parameters. Two kinds of 1-DOF valves can be considered : the "outward-striking" valve tends to open when δp grows, while the "inward-striking" valve tends to close.

While it is now admitted that woodwind reeds can be satisfactorily modelled by inward striking valves [Wilson and Beavers, 1974, Dalmont et al., 1995], there is no consensus about the modelling of the lip reed, as neither the outward-striking nor the inward-striking valve model reproduces all the behaviours observed with real musicians. Particularly, brass players are able to reach a playing frequency f_{osc} above and below the n^{th} bore resonance frequency $f_{ac,n}$ [Campbell, 2004], while a 1-DOF inward-striking or outward-striking valve model is limited to playing frequencies respectively below or above $f_{ac,n}$ to meet the regeneration condition explained in [Elliott and Bowsher, 1982]. Moreover, measurements of the mechanical response of artificial [Cullen et al., 2000, Neal et al., 2001] and natural lips [Newton et al., 2008] revealed the coexistence of both inward-striking and outward-striking resonances — this coexistence allowing f_{osc} to be below or above $f_{ac,n}$.

However, situations where f_{osc} is below $f_{ac,n}$ (inward-striking behaviour) are mostly specific to some musical effects. For normal playing situations, the playing frequency is above $f_{ac,n}$, and an outward-striking valve model is preferred. Moreover, the geometry of human lips makes them open when the pressure in the mouth increases, which is consistent with the behaviour of the outward-striking valve model. The relevance of this choice will be reinforced throughout this article, by comparing the results of the model analysis with experimental behaviours of brasswinds.

The outward-striking valve model gives the relation below, linking the height of the channel between the lips and the pressure difference across the lips :

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh}{dt} + \omega_l^2 (h - h_0) = \frac{1}{\mu} (p_b - p(t)), \quad (\text{H.1})$$

where $\omega_l = 2\pi f_l$ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) is the lip resonance angular frequency ; Q_l the (dimensionless) quality factor of the lips ; h_0 the value of $h(t)$ at rest ; μ a lip surface mass equivalent ; ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$). The variables are reported on the sketch of the lip region in Figure H.2 :

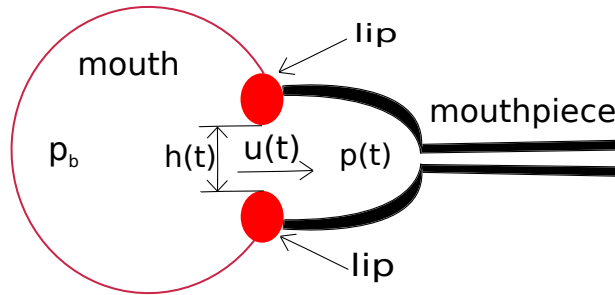


FIGURE H.2 – (Color online) Sketch of the mouth and lips of the musician and the instrument mouthpiece. The mouth (left) is considered as a cavity under a static pressure p_b . The lips (ellipses) separate the mouth from the mouthpiece. The height between the lips is $h(t)$, the airflow between the lips is $u(t)$ and the pressure in the mouthpiece is $p(t)$.

This model assumes the mouth pressure to be constant, even though the existence of an oscillating component in the mouth has been demonstrated experimentally [Fréour and Scavone, 2013]. A more precise model would consider this oscillating component, which is due to the tunable pipe formed by the vocal tract [Elliott and Bowsher, 1982]. A significant role of the vocal tract has been shown for saxophone and clarinet playing [Clinch et al., 1982, Fritz, 2005, Scavone et al., 2008, Guillemain et al., 2010, Chen et al., 2011]. However, for brass instrument playing, the role of the vocal tract does not seem to be significant when playing periodic regimes in the usual musical range of the instrument — although its interaction with the lips has been highlighted by experimental studies [Kaburagi et al., 2011, Chen et al., 2012, Fréour and Scavone, 2013, Fréour et al., 2015, Boutin et al., 2015].

The resonator is the air column inside the bore of a trombone or a saxhorn (see Section H.5.2). It is modelled by its input impedance, which is the ratio between pressure $P(\omega)$ and acoustic flow $U(\omega)$ in the mouthpiece. Its expression in the frequency domain is :

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)}. \quad (\text{H.2})$$

Nonlinear effects in the resonator should be taken into account to accurately describe the behaviour of brass instruments at medium/high playing levels [Hirschberg et al., 1996, Myers et al., 2012] particularly the "brassy sound" related to the formation of shock waves. However, the main objective of this work is the study of oscillation at low levels. Therefore the acoustic propagation along the bore is assumed to be linear and thus the input impedance fully describes the resonator in our model. Here, input impedances of a Courtois "T149" tenor trombone (and when mentioned, a Couesnon "Excelsior" baritone-saxhorn in Bb) are used. Impedances are measured with the impedance sensor described in [Macaluso and Dalmont, 2011]. They are fitted by a sum of complex modes (pole-residue functions) using a Least Mean Squares method, as described in [Silva, 2009, p.28–40]. The characteristic impedance of the resonator is $Z_c = \rho c/S$, S being the input cross section of the bore at the mouthpiece rim. The modal-fitted impedance is written :

$$Z(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^N \left[\frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right], \quad (\text{H.3})$$

s_n and C_n being the complex poles and the complex residues of the n^{th} complex mode, respectively. Translation of eq. (H.3) in the time domain and decomposition of $p(t)$ into its modal components p_n , such as $p(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^N \text{Re}(p_n)$ results in an ordinary differential equation for each p_n :

$$\frac{dp_n}{dt} = Z_c \cdot C_n \cdot u(t) + s_n \cdot p_n \quad \forall n \in [1, N]. \quad (\text{H.4})$$

The measured trombone impedance and an 18-mode fit are compared, cf. Figure H.3. The maximum relative difference between the measured and the fitted curves, for frequencies above 30Hz, is lower than 2.6 % for the magnitude, and 4.7 % for the phase. Measurement in low frequency is limited by the impedance sensor precision.

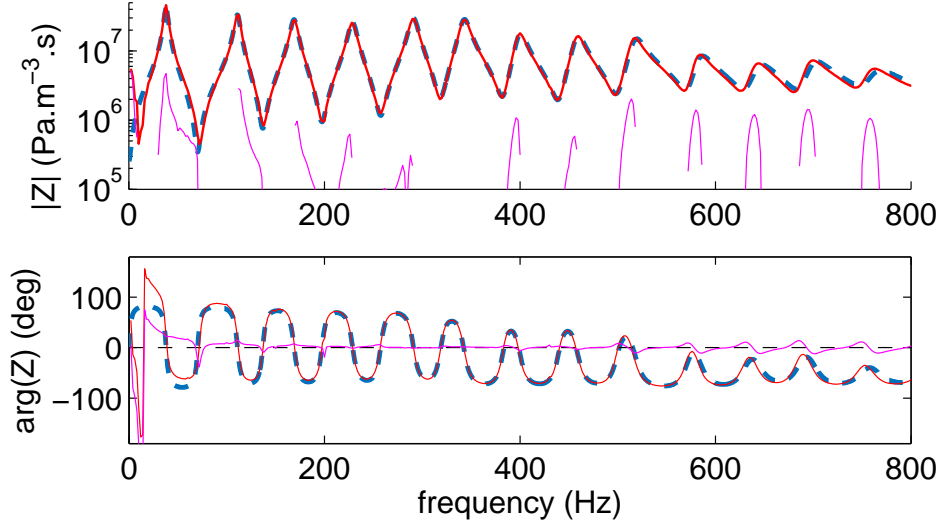


FIGURE H.3 – (colour online) Magnitude (top) and phase (bottom) of the input impedance of a Courtois tenor trombone with the slide in its first position. The solid (blue) curve depicts the measured impedance, the dashed (red) curve is the fitted curve with 18 complex modes. The difference between fit and measurement is also plotted (magenta).

Those two linear elements (exciter and resonator) are non-linearly coupled by the airflow through the lip channel. The air jet is assumed to be laminar in the lip channel, but turbulent in the mouthpiece, all its kinetic energy being dissipated without any pressure recovery. Applying the Bernoulli law and the mass conservation law gives the following expression of the flow between lips, depending on the pressure difference and the height of the lip channel [Wilson and Beavers, 1974, Elliott and Bowsher, 1982, Hirschberg et al., 1995] :

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W h(t) \sqrt{p_b - p(t)}, \quad (\text{H.5})$$

where $u(t)$ is the airflow ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$), $h(t)$ the height of the channel between the lips (m), $\rho = 1.19 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ the density of the air at 20 ċC and W the width of the lip channel (m).

The dynamics of the system described by (H.5), (H.1) and (H.4) can be put into a state-space representation $\dot{X} = F(X)$, where F is a nonlinear vector function, and X the state vector, containing the observables of the system. Since $p(t) = \sum_{n=1}^N 2\text{Re}(p_n(t))$, this results in the following system :

$$\begin{cases} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = -\omega_l^2 h(t) - \frac{\omega_l}{Q_l} \frac{dh(t)}{dt} - \frac{p(t)}{\mu} + \omega_l^2 h_0 + \frac{p_b}{\mu} \\ \frac{dp_n}{dt} = s_n p_n(t) + Z_c C_n \sqrt{\frac{2}{\rho}} W h(t) \sqrt{p_b - p(t)} \text{ for } n \in [1 : N]. \end{cases} \quad (\text{H.6})$$

This leads to the following state vector, similar to the one proposed in [Silva et al., 2014] :

$$X = \left[h(t); \frac{dh}{dt}; \{p_n(t), n \in [1 : N]\} \right]', \quad (\text{H.7})$$

and the function F can be written as :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dh}{dt} \\ \frac{d^2h}{dt^2} \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dt} \end{pmatrix} = F(X) = \begin{pmatrix} X(2) \\ -\omega_l^2 X(1) - \frac{\omega_l}{Q_l} X(2) - \frac{1}{\mu} \sum_{k=3}^{N+2} 2\text{Re}[X(k)] + \omega_l^2 h_0 + \frac{p_b}{\mu} \\ s_1 X(3) + C_1 \cdot Z_c \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} W X(1) \sqrt{p_b - \sum_{k=3}^{N+2} 2\text{Re}[X(k)]} \\ \vdots \\ s_N X(N+2) + C_N \cdot Z_c \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} W X(1) \sqrt{p_b - \sum_{k=3}^{N+2} 2\text{Re}[X(k)]} \end{pmatrix}. \quad (\text{H.8})$$

H.3.2 Choice of lip parameters

Setting the values for the parameters of the lip model is not obvious, because measuring the mechanical admittance (velocity over force ratio) under playing conditions (oscillating lips) seems out of reach, even if some experiments tend to it [Newton et al., 2008]. Adjusting parameters to get results comparable with measured signals does not seem a good approach : Indeed, even though a one-DOF model depends on a small number of parameters, different sets of parameter values may lead to similar results [Hélie et al., 1999]. Moreover, lip valve parameters are expected to vary far more than reed valve parameters, particularly the lip resonance frequencies.

A bibliographical review on lip parameter values has been done. Results from the literature are gathered in Table I along with a brief summary of the method used in the reviewed articles.

Reference	h_0 (m)	W (m)	f_l (Hz)	μ^{-1} (m^2kg^{-1})	Q_l	Summary
[Elliott and Bowsher, 1982]	N/A	N/A	200	0.2	0.5	Q_l measured on cheek
[Cullen et al., 2000]						1 st (Outward) mode
Embouchure : Soft	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$18 \cdot 10^{-3}$	189	0.07	10.5	artificial lips
Medium	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-3}$	203.5	0.11	6	3 embouchures
Tight	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-3}$	222	0.09	9	
[Lopez et al., 2006]	$2 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-3}$	162	0.03	5	artificial lips
[Gazengel et al., 2007]						human lips ;
Embouchure : Soft	N/A	N/A	115.7	N/A	0.79	saxophone-like
Medium	N/A	N/A	479.9	N/A	0.46	position ;
Tight	N/A	N/A	1073	N/A	0.46	3 embouchures
[Newton et al., 2008]	N/A	N/A	32	N/A	1.2–1.8	Human lips
						High-speed camera
[Richards, 2003]	$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	162	0.19	3.7	artificial lips
						fit for good results
[Rodet and Vergez, 1996]	N/A	N/A	428.4	0.67	2.88	Trumpet ; adjusted
						for simulation
[Adachi and Sato, 1996]	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	60–700	variable	0.5–3	Trumpet ; adjusted
						for simulation

TABLEAU I – Review of different values of lip parameters from literature, along with a brief explanation of the method. In some articles, certain values are not available (N/A). For papers presenting 2-DOF lip models, only the first, outward-striking DOF is reported. All but the last two references deal with trombone parameter values.

This work complements the review published in [Newton, 2009, p.119]. Many authors do not pro-

vide their parameter values, nor do they give explanations about their method to get these values, except the fact that these parameters allow periodic self-sustained oscillation of the model. Measurements on human or artificial lips were made in conditions as close as possible to playing conditions. The list of publications is not exhaustive : we left aside most of the publications since they do not justify their values, nor do they fit their measurements with a modal lip model.

Geometric parameters (lip channel width, and lip channel height when the player is not blowing) given in all studies are consistent, around $W = 12 \cdot 10^{-3}$ m and $h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ m. Parametric studies have shown that variations in these values do not drastically change the qualitative behaviour of the model : the threshold values change but the overall shape of the curves is the same. Similar observations have been made about μ , even though the range of the values gathered is a little wider ($\mu \in [5,33]$ for the trombone).

Measurements from [Gazengel et al., 2007, Newton et al., 2008] tend to give low quality-factor values between 0.5 and 2 for human lips. However, preliminary analysis carried out with $Q_l \approx 1$ showed very unrealistic pressure thresholds (order of magnitude : 10^4 to 10^5 Pa). Thus, a value for $Q_l = 7$ was chosen, closer to the values measured on artificial lips ($Q_l \in [3.7,10.5]$). The set of parameters used for simulation and LSA throughout this paper is given in Table II :

h_0 (m)	W (m)	$1/\mu$ (m^2kg^{-1})	Q_l
$5 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-3}$	0.11	7

TABLEAU II – Lip parameters retained in this study.

The value of f_l is constantly adapted by the musician while playing. For this reason, we performed LSA with f_l values ranging from 20 Hz to 500 Hz. This allows oscillation on the first eight regimes of the instrument, which correspond to the usual notes of the trombone, from $B\flat_1$ to $B\flat_4$ with the slide in first position.

H.3.3 Stability of the equilibrium solution

Linearising a closed-loop system to assess potential instabilities is a widely used method, in the dynamical systems community [Bergé et al., 1995] as well as in musical acoustics for brasswind, woodwind and flute-like instruments [Wilson and Beavers, 1974, Cullen et al., 2000, Silva et al., 2008, Auvray et al., 2012, Terrien et al., 2014]. Basically, the equations modelling the system are linearised around a known equilibrium solution. Then, the stability of this solution is determined.

When the system described in Section H.3.1 is in static equilibrium, the lip opening position has a static value $h(t) = h_e$. This equilibrium position is slightly larger than the lip opening at rest h_0 , due to the constraint of the blowing pressure on the inner sides of the lips. Similarly, there is a small static overpressure p_e at the input of the bore of the instrument, as $Z(\omega = 0)$ is nonzero. This is related to the pressure loss in the instrument. Mathematically, this equilibrium is obtained by cancelling all time derivatives in the system, as described in appendix H1. The value of $A = \sqrt{p_b - p_e}$ is obtained by solving :

$$A^3 + \frac{A^2}{\beta} + h_0 \mu \omega_l^2 A - \frac{p_b}{\beta} = 0, \quad (\text{H.9})$$

with $\beta = \frac{WZ(\omega=0)}{\mu\omega_l^2} \sqrt{\frac{2}{\rho}}$. The value of $Z(\omega = 0)$ is extrapolated from the fitted version of the impedance. Equation (H.9) has 1 or 3 real roots. In the latter case, the smallest real positive root should be considered to compute $p_e = p_b - A^2$ [Silva, 2009], as $Z(\omega = 0)$ is small. The lip channel height at equilibrium h_e is then given by (H.1) with $\ddot{h} = \dot{h} = 0$.

In the vicinity of the equilibrium solution X_e , the linearised function \tilde{F} can be written as :

$$\tilde{F}(X) = F(X_e) + J_F(X_e)(X - X_e), \quad (\text{H.10})$$

where $J_F(X)$ is the Jacobian matrix of the function F and X_e the state vector at the equilibrium solution. The solutions of $\dot{X} = \tilde{F}(X)$ are under the form :

$$X(t) - X_e = \sum_{i=1}^N U_i e^{\lambda_i t}, \quad (\text{H.11})$$

where λ_i are the eigenvalues of $J_F(X_e)$ and U_i the corresponding eigenvectors.

Thus, the eigenvalues of the Jacobian matrix give information about the stability of the equilibrium solution for a given set of parameters. If at least one of these eigenvalues λ has a positive real part, the amplitude of the linearised solution tends to infinity while time increases, which means the equilibrium is unstable and the solution starts oscillating. Referring to (H.11), this means that one of the terms of the sum dominates the solution, all other terms being decreasing exponentials. As a first approximation, the solution of the linearised system can be written :

$$X(t) - X_e = \sum_{n=1}^N \left(X_n e^{\lambda_n t} \right) \text{ for } n \text{ such as } \text{Re}(\lambda_n) > 0. \quad (\text{H.12})$$

The developed tool stops when the oscillation threshold is detected, i.e. one eigenvalue λ gets a positive real part. In the transient phase of the oscillation, the exponential growth of the amplitude is determined by the positive real part of λ , and the angular frequency is given by its imaginary part $\omega = \text{Im}(\lambda)$. However, the nonlinearities of the system limit the final amplitude and also affect the oscillation frequency of the steady state.

This method only detects instabilities emerging from the equilibrium solution. If a stable oscillating regime coexists along with the stable equilibrium solution, it will not be detected. This situation occurs for example in certain woodwind instruments, where the Hopf bifurcation (connecting the equilibrium solution to the oscillating one) is inverse in some cases [Grand et al., 1997, Dalmont et al., 2000, Farner et al., 2006, Ricaud et al., 2009].

H.3.4 Time-domain simulation

Another approach for studying musical instruments relies on time-domain *ab initio* simulations of the chosen model, for a given set of parameters.

Multiple numerical methods have been developed to simulate wind instruments with models similar to the one presented in Section H.3.1. Various approaches have been proposed to implement the resonator acoustic behaviour. The reflection function of the bore has been widely used [McIntyre et al., 1983, Schumacher, 1981, Adachi and Sato, 1995, Vergez and Rodet, 1997, Gilbert and Aumond, 2008]. The modal decomposition of the bore has been chosen for this article, and computations are carried out with the open-source MOREESC software tool, freely available [MoReeSC, 2013]. Its principles and results have been described in [Silva et al., 2014]. This simulation tool uses the state-space paradigm, similar to the one presented in Section H.3.1. It allowed us to simulate the behaviour of the model with a high number of acoustic modes for the resonator (18 in this study), and offers the necessary flexibility to modify the model parameters, including the resonator parameters, as it is done in Section 4.

H.4 Results

H.4.1 Linear Stability Analysis

The LSA method detailed in Section H.3.3 is applied to the model defined in Section H.3.1, with the set of lip parameters defined in Table II. The resonator is modelled with a modal fit ($N=18$ in Equation (H.3)) of a measured impedance (*Bb* trombone, first position).

For each value of f_l considered, the eigenvalues of the Jacobian matrix $J_F(X_e)$ presented in Equation (H.10) are computed for increasing values of p_b , until a first instability, characterized by at least one eigenvalue with positive real part, occurs. For each value of f_l , Figure H.4a) represents the lowest value of p_b giving rise to an unstable equilibrium solution, further referred to as the threshold pressure p_{thresh} . Figure H.4b) represents the imaginary part of the corresponding eigenvalue divided by 2π , which is the oscillation frequency at threshold, further called f_{thresh} . Each horizontal dashed line in Figure H.4b) represents the n^{th} acoustic resonance frequency of the instrument $f_{ac,n}$, given by the local maximum of the input impedance amplitude.

It should be noted that, for p_b values higher than p_{thresh} , other pairs of conjugate eigenvalues may have a positive real part, which implies a system with multiple instabilities. If different oscillating solutions are stable with these parameters, the system is able to start oscillating on different acoustic resonances. In Figure H.4, and later fig. H.11 and fig. H.14, the first instability (the one corresponding to $p_b = p_{thresh}$) is shown for each f_l value (solid curve). The second instability is reported only for a narrow range of f_l (dashed curve).

Between 20 and 500 Hz, the two curves of Figure H.4 can be divided into 9 parts. Each part corresponds to a range of f_l which correspond to one regime of oscillation, related to one acoustic resonance of the instrument : [30,63 Hz] (first regime), [72,123 Hz] (second regime), [124,179 Hz], [180,234 Hz], [235,288 Hz], [289,352 Hz], [353,404 Hz], [405,460 Hz], [462,500 Hz]. In Figure H.4b), an oscillating frequency plateau is maintained just above each value of $f_{ac,n}$. This is the usual behaviour of an outward-striking valve coupled to an air column : when playing on the n^{th} acoustic mode of the bore, the oscillation frequency at threshold f_{thresh} is just above $f_{ac,n}$, which is the resonance frequency of the n^{th} acoustic mode [Campbell, 2004]. For each regime, f_{thresh} monotonously follows the variation of f_l . This matches the experience of the brass player, who can slightly "bend" the pitch up and down, i.e. increase or decrease the pitch, by adjusting f_l through the muscular tension of the lips, and by adapting the blowing pressure to the change in p_{thresh} . The width of each plateau, i.e. the attainable musical range on each acoustic resonance, has analytical limits depending on the lip quality factor Q_l , as detailed in [Silva et al., 2007]. Between 64 Hz and 71 Hz, the equilibrium solution is unconditionally stable whatever the value of p_b : this frequency range covers the impedance minimum between 1^{st} and 2^{nd} peaks, which are farther apart from one another than the other peaks due to the first peak inharmonicity.

It can be observed in Figure H.4a) that the oscillation threshold globally increases with the rank of the acoustic resonance. A larger p_b value is required to reach the higher notes of the instrument, in accordance with the musical experience. For each regime, the p_{thresh} curve is U-shaped, as already observed in [Silva et al., 2007]. Its minimum value $p_{opt,n}$, marked with a circle in Figure H.4, is known to depend significantly on the quality factor of the lips Q_l . In the following, we assume as in [Lopez et al., 2006] that $p_{opt,n}$ and the associated lip resonance frequency $f_{l,n}^{opt}$ and oscillation frequency at threshold $f_{thresh,n}^{opt}$ represent the optimal playing configuration for a human performer. This hypothesis is in line with what musicians report, i.e. they develop a strategy to minimize the effort to produce a sound on a given regime. The values of $p_{opt,n}$, between 500 Pa and 15.3 kPa have the same order of magnitude as blowing pressure measured by [Bouhuys, 1968] and Freourthese. The pressure threshold increases faster when f_l is above $f_{l,n}^{opt}$ than below as illustrated by the inset in Figure H.4a). These results are compatible with the experience of brass players, who report that

"bending down" a note requires less effort than bending it up.

The rest of this section focuses on some examples of $[p_b, f_l]$ points to illustrate the different behaviours observed with the model. For each case, the agreement between LSA results and the sound produced by the time-domain simulation described in Section H.3.4 is discussed.

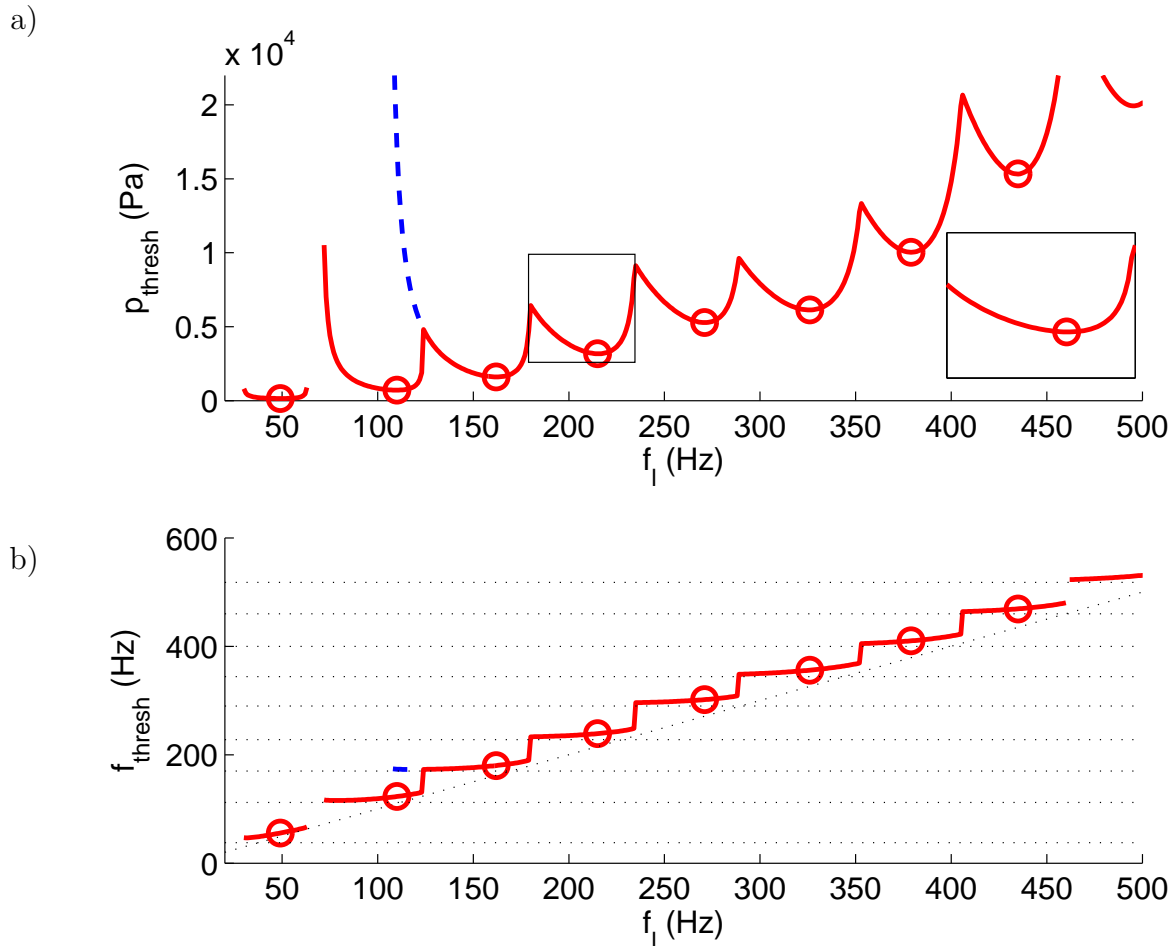


FIGURE H.4 – (colour online) Results of LSA applied, to the model detailed in Section H.3.1 with parameters from Table II. For a range of lip resonance frequencies f_l , (a) shows the threshold pressure p_{thresh} , while (b) shows the corresponding oscillation frequency f_{thresh} . Dotted lines are the values of $f_{ac,n}$. Circles indicate the "optimal" values $p_{opt,n}$ and $f_{\text{thresh},n}^{opt}$ as defined in the text. The magnified subplot (zoom on 4th regime) highlights the asymmetrical p_{thresh} behaviour above and below $p_{opt,n}$. For illustration, the second destabilisation threshold (a) and the corresponding frequency (b) are also plotted between $f_l = 109$ Hz and 123 Hz.

H.4.2 Exact match between simulation and LSA

The simulated pressure at the input of the instrument is compared with the LSA results. In particular, the oscillation threshold is assessed by performing simulations with p_b in the vicinity of p_{thresh} . The corresponding frequencies, called f_{osc} , are also compared to f_{thresh} given by LSA. This latter quantity is measured by applying a zero-crossing algorithm [Wall, 2003], with a sliding Hanning window (width $0.3s$, overlapping 99%). This method results in small computation artefacts, which should not be taken into account.

A simulation with the exact value of p_{thresh} would theoretically lead to an infinite transient time, defined as the time it takes to reach steady state. Therefore, values of p_b slightly below and above p_{thresh} are tested. To illustrate a periodic oscillation of the model, the lip resonance frequency is set to $f_l = 90$ Hz, everything else being given in Table II. The corresponding mouthpiece pressure waveforms are represented in the first two plots in Figure H.5. The third plot shows a situation where p_b is much higher than p_{thresh} .

When the mouth pressure is below the threshold ($p_b = 1210$ Pa whereas $p_{thresh} = 1222$ Pa) (Fig. H.5 a), the oscillation decreases exponentially towards the static, non-oscillating solution. The mouthpiece pressure converges towards 115.5 Pa, which is the value of p_e computed with LSA. The thick line represents the exponential decrease in the amplitude $X_a.e^{\text{Im}(\lambda)t}$ (amplitude of solutions taken from Eq. (H.12)). In this case, all eigenvalues of J_F have negative real parts : λ is the eigenvalue of J_F which real part is the closest to zero. The calculated oscillation frequency (dash-dotted line) is constant and equal to $f_{thresh} = 116$ Hz = $\text{Im}(\lambda)/2\pi$.

When the mouth pressure is slightly above the threshold ($p_b = 1234$ Pa) (Fig. H.5, centre), the pressure waveform envelope (thick line) increases exponentially during the transient phase, in agreement with Equation (H.12), before reaching a steady-state regime. The calculated oscillation frequency f_{osc} (dash-dots) begins at $f_{thresh} = 116$ Hz ; it becomes quite higher in the permanent regime (126 Hz, that is, 8.6 % or 143 musical cents above f_{thresh}).

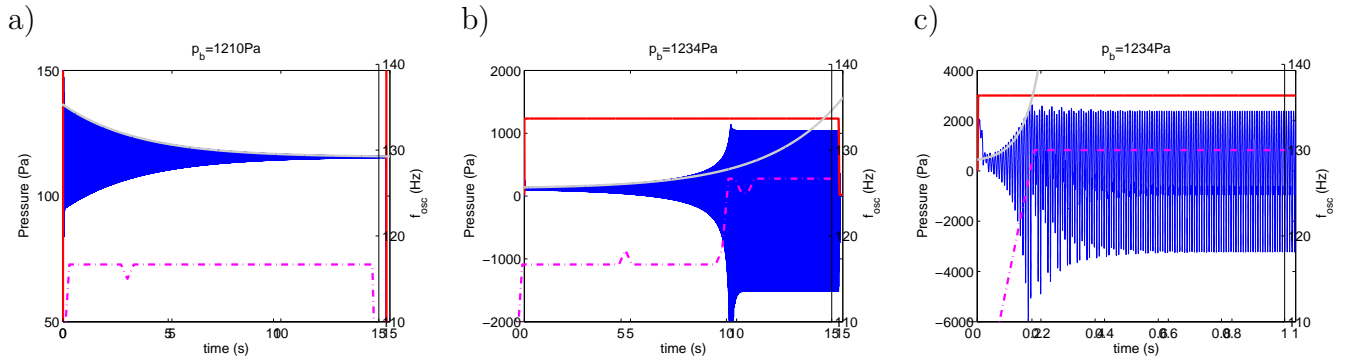


FIGURE H.5 – (colour online) Time-domain simulations with parameters from Table II and $f_l = 90$ Hz, with mouth pressure p_b lower (a) and higher (b) than the linearised model threshold ($p_{thresh} = 1222$ Pa). Mouth pressure (steady) and mouthpiece pressure (oscillating) are plotted (left vertical axis) along with the exponential growth/diminution of amplitude calculated using LSA (thick curves : envelope of Equation (H.12)). The dash-dotted curve depicts the instantaneous playing frequency. The expected oscillation frequency at threshold is $f_{thresh} = 116$ Hz. The third plot (c) corresponds to a blowing pressure much higher than the threshold ($p_b = 3$ kPa; zoom on first second of signal).

As expected, the behaviour of time-domain simulations is accurately predicted by LSA as long as p_b remains in the vicinity of p_{thresh} (Figure 4a and 4b). The value of p_{thresh} in simulation is in agreement with the value given by LSA. The eigenvalue with the largest real part predicts the frequency and the amplitude of the oscillation at the beginning of the simulation. However, above the pressure threshold in Fig. H.5b), after $t = 8$ s, the simulated amplitude gets affected by nonlinear phenomena and is no longer exponential. Thus, this linearised tool provides relevant information about the signal, but is obviously unable to fully predict the amplitude of the sustained regime waveform.

The third plot shows the results with $p_b = 3$ kPa much higher than p_{thresh} . LSA and time-domain simulation still give coherent information. As in Figure H.5b), the oscillating frequency

of the established regime $f_{osc} = 130.5$ Hz is 8 % higher than $\text{Im}(\lambda)/(2\pi) = 120.8$ Hz. The difference is 134 musical cents, larger than a semitone. f_{osc} is higher than near the threshold. An *in vivo* experiment has also shown that the pitch rises when the player increases the blowing pressure [Campbell and Greated, 1994]. However, this remark should be considered carefully because during practice a brass player always apply correlated control over mouth pressure and lip muscular activity.

p_b (Pa)	$\text{Re}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda)/2\pi$	f_{osc} (Hz)	measured transient duration (s)
1234	0.2864	116.74	126.5	9.71
1500	5.5591	117.66	127.6	0.74
2000	12.0262	118.99	128.9	0.31
2500	16.0891	120.01	129.7	0.215
3000	18.8507	120.82	130.5	0.1675

TABLEAU III – Values of the real part of the destabilising eigenvalue λ , its imaginary part divided by 2π , the oscillation frequency of the established regime, and the duration of the transient (both measured on simulations) for different values of the blowing pressure (all other parameters unchanged). The real part of λ increases with p_b , which implies a faster-growing envelope as p_b increases. This is consistent with the transient duration measured with MIRonsets¹ function estimating the time needed to reach the maximum value of $p(t)$.

Transient time, i.e. the time needed for the amplitude to reach 95% of its final value, have been measured with different values of p_b . The values are reported in Table III.

The transient time decreases while $\text{Re}(\lambda)$ increases, which can be modelled : according to Eq. (H.12) the amplitude grows exponentially with $\text{Re}(\lambda)$. Thus, under the assumption that p_e is negligible compared to 95% of the final amplitude (hereinafter noted $p_{95\%}$), one can write :

$$p_{95\%} = B \cdot e^{\text{Re}(\lambda) \cdot \text{transient}}, \quad (\text{H.13})$$

where B is a real constant and *transient* the transient time (s).

Furthermore, according to [Bergé et al., 1995, p.40] in the vicinity of a direct Hopf bifurcation, the maximum amplitude of the oscillation is proportional to the square root of the difference between the parameter value and the threshold value, which means $\sqrt{p_b - p_{\text{thresh}}}$ here. Therefore, the value of the pressure at $t = \text{transient}$ is :

$$p_{95\%} = 0.95 \cdot C \cdot \sqrt{p_b - p_{\text{thresh}}}, \quad (\text{H.14})$$

where C is a real constant.

Introducing this expression of $p_{95\%}$ in the natural logarithm of Eq. (H.13) results in the following analytical expression of the transient time where $A = \frac{0.95 \cdot C}{B}$:

$$\text{transient} = \frac{1}{\text{Re}(\lambda)} \cdot \ln(A \sqrt{p_b - p_{\text{thresh}}}). \quad (\text{H.15})$$

With $A = 4.75$ fitted on values measured on time-domain simulations, this model matches very well with the evolution of transient durations measured on simulations with different values of p_b , as shown in Figure H.6.

1. Part of MIRtoolbox :

Accessed 2016-09-13 <https://www.jyu.fi/hum/laitokset/musiikki/en/research/coe/materials/mirtoolbox/>.

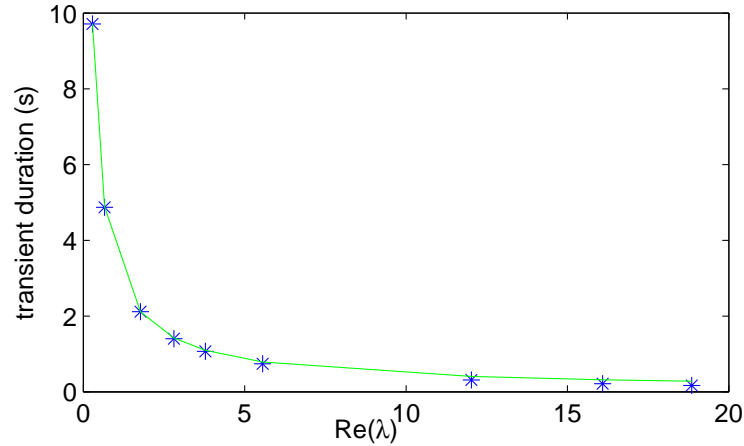


FIGURE H.6 – (colour online) Transient durations measured on time-domain simulations, plotted along the $\text{Re}(\lambda)$ value (blue markers). The green line is the transient duration model described by Eq.(H.15).

The oscillation frequency also increases with p_b . An estimate of the frequency is also given (imaginary part of λ divided by $2 \cdot \pi$) which matches well the pseudo-frequency of the transient phase of each signal.

This example is representative of most cases tested : LSA correctly predicts whether the solution is oscillating, with an acceptable estimation of the oscillation frequency. The transient duration can be accurately predicted with the real part of λ , as described in (H.15) even for p_b far above the threshold. However, the accuracy of the oscillation frequency prediction is limited, and LSA can predict neither the steady-state waveform nor the nature of the oscillation regime. This latter observation will be further highlighted in the following sub-section.

H.4.3 Unforeseen behaviours

LSA provides a lot of relevant information about the oscillation threshold and the transient phase. This is particularly true when p_b is near p_{thresh} . However, some simulations (detailed below) show nonlinear phenomena, which obviously this method cannot predict. These phenomena include quasi-periodic oscillations. By definition, these are deterministic oscillations whose energy is located at frequencies which are integer combinations of base frequencies, whose ratio is an irrational number.

Quasi-periodic oscillations

Firstly, the previous comparison between LSA and time-domain simulation is reproduced with a different lip resonance frequency. Three simulations are performed with the parameters given in Table II and $f_l = 110$ Hz. For these parameters, p_{thresh} is equal to 711 Pa. Again, three different p_b values are tested : $p_b = 701$ Pa, $p_b = 720$ Pa to illustrate the behaviour just below and above the threshold, and $p_b = 2$ kPa for an example far above the threshold. Results are plotted in Figure H.7. When p_b is under the threshold, results are very similar to the previous case with $f_l = 90$ Hz (Fig. H.7a) and H.7d)). However, when p_b becomes large enough to destabilize the equilibrium solution, the oscillation of the mouthpiece pressure becomes quasi-periodic instead of periodic (Figure H.7b),H.7e),H.7c) andH.7f)). The quasi-periodic nature of the signal is clearly

visible on the spectra (Figure H.7e) and H.7f)) with secondary peaks around the principal frequency peaks.

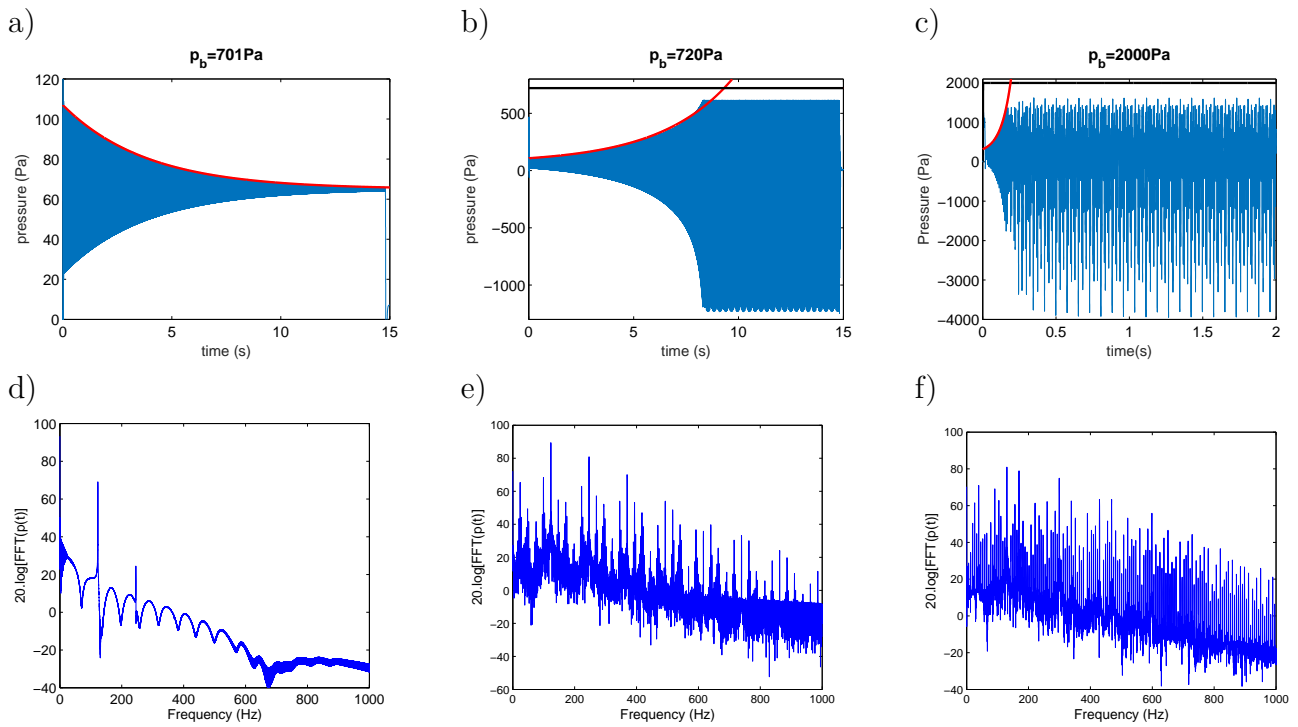


FIGURE H.7 – (colour online) Simulation results for $f_l = 110$ Hz, the pressure threshold being $p_{thresh} = 711$ Pa. Like in Figure H.5 three simulations are shown with $p_b = 701$ Pa (a), $p_b = 720$ Pa (b) and $p_b = 2$ kPa, much higher than p_{thresh} (c). Other parameters (lip characteristics) are given in Table II. Figures (d), (e) and (f) are the spectra corresponding to (a), (b) and (c), respectively ((e) and (f) calculated using steady regimes of (b) and (c)).

This illustrates the aforementioned limitation of LSA. The existence of an oscillating solution is attested in the vicinity of the bifurcation, and the pressure threshold p_{thresh} is accurately predicted, but the occurrence of a quasi-periodic regime cannot be predicted.

Period doubling

When f_l is equal to 55 Hz, p_b to 400 Pa (p_{thresh} being 161 Pa), and the other parameters are the values given in Table II, the simulation result oscillates at $f_{osc} = 32.5$ Hz, far below $f_{thresh} = 59.78$ Hz. This is a peculiar behaviour, as this oscillation frequency is significantly under the trombone first acoustic resonance ($f_{ac,1} = 38$ Hz). Indeed, the chosen model induces playing frequencies above the acoustic resonance frequency ($f_{osc} > f_{ac,n}$), at least near the pressure threshold, to comply with the regeneration condition [Elliott and Bowsher, 1982].

Figure H.8 compares the spectrum of the mouthpiece pressure simulated with the aforementioned parameters and $f_l = 55$ Hz (dotted line) and then with $f_l = 50$ Hz (solid line). For $f_l = 50$ Hz, $f_{osc} = 65$ Hz is higher than $f_{thresh} = 56.3$ Hz, like in previous simulations in Section H.4.2. For $f_l = 55$ Hz, a reasonable expectation would be an oscillation frequency slightly higher than 65 Hz, as f_{osc} tends to increase with f_l . However, the simulation oscillation frequency at $f_l = 55$ Hz is $f_{osc} = 32.47$ Hz, close to half of its value at $f_l = 50$ Hz.

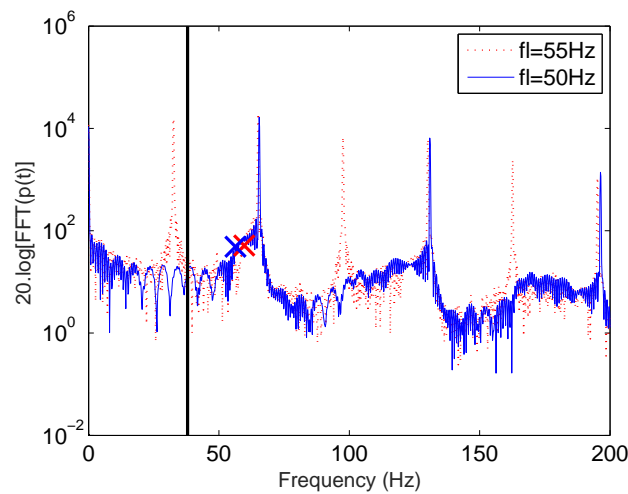


FIGURE H.8 – (colour online) Spectra of the simulated trombone mouthpiece pressures, with ($p_b = 400$ Pa for both lip resonance frequencies, $f_l = 50$ Hz (solid) and $f_l = 55$ Hz (dotted) (other parameters from Table II). Cross markers give the values of $f_{thresh} = 56.3$ Hz for $f_l = 50$ Hz and $f_{thresh} = 59.8$ Hz for $f_l = 55$ Hz. The solid vertical line indicates the first acoustic resonance frequency of the trombone bore, $f_{ac,1} = 38$ Hz.

Further simulations were carried out, with f_l going from 50 to 61 Hz in steps of 1 Hz, $p_b = 400$ Pa and the others parameters set as in Table II. Table IV reports the oscillation frequency measured on the simulated signals, along with the f_{thresh} value predicted by LSA. Between 54 and 55 Hz, the oscillation frequency is almost halved. Then, between 56 and 57 Hz, the frequency is again halved, becoming a quarter of its value for $f_l < 55$ Hz. For $f_l = 59$ Hz and above, the fundamental frequency rises sharply to a value close to its original value, but the energy is far more distributed in the spectrum.

These results are close to those reported in [Gibiat and Castellengo, 2000], with a trombone player performing two successive period doublings. When increasing f_l in this range, the model undergoes multiple period-doubling bifurcations. Similar scenarios have been observed on numerical models of woodwind instruments [Gibiat, 1988, Kergomard et al., 2004]. This succession of period doublings is also known as subharmonic cascade or Feigenbaum scenario and leads to chaotic behaviour, which may explain the noisiness of signals above $f_l > 58$ Hz. Again, explaining the occurrence of such phenomena is out of reach with LSA.

f_l (Hz)	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
f_{osc} (Hz)	65.45	65.48	65.49	65.49	65.46	32.53	32.54	16.32	16.32	65.1	65.1	65.1
f_{thresh} (Hz)	56.3	56.97	57.71	58.36	59.08	59.78	60.51	61.27	62	62.77	63.58	64.44

TABLEAU IV – Oscillation frequencies measured on the simulated mouthpiece pressure, for lip frequencies from 50 to 61 Hz, $p_b = 400$ Pa and other parameters from Table II. Oscillation frequencies at threshold given by LSA are also reported.

Overblowing

Besides these two nonlinear phenomena, other differences between eigenvalue-based LSA and time-domain simulation can be observed. Another example is given with $f_l = 120$ Hz, the parameters given in Table II and a high blowing pressure : $p_b = 6.5$ kPa while the threshold is $p_{thresh} = 1056$ Pa. While $f_{thresh} = 128.4$ Hz is just above the 2nd acoustic resonance frequency of the bore ($f_{ac,2} = 112$ Hz), the simulation oscillation frequency exceeds the 3rd : $f_{osc} = 187.5$ Hz $>$ $f_{ac,3} = 170$ Hz. Figure H.9 shows the spectrum of a simulation oscillating on the third acoustic resonance, while the predicted oscillation at threshold corresponds to the second one.

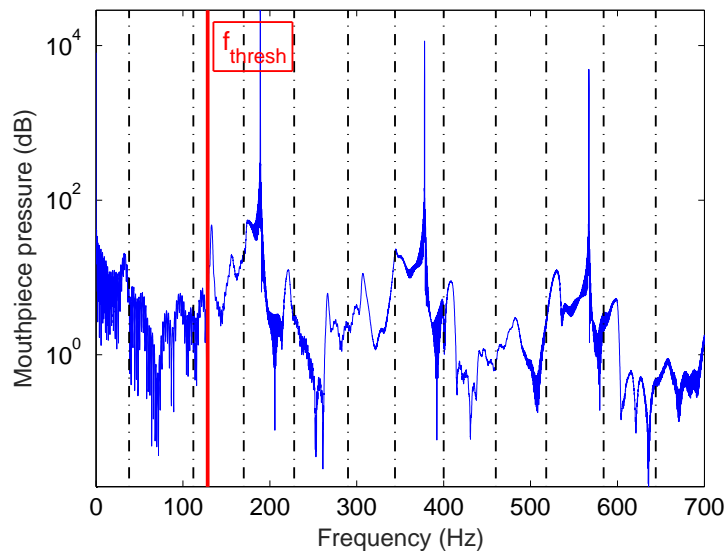


FIGURE H.9 – (colour online) Spectrum of simulated mouthpiece pressure for $f_l = 120$ Hz and $p_b = 6.5$ kPa with other parameters taken from Table II. The self-sustained oscillation occurs at $f_{osc} = 187.5$ Hz, corresponding to the third acoustic resonance, while LSA predicts an oscillation at $f_{thresh} = 128.4$ Hz (thick vertical line) with $p_{thresh} = 1056$ Pa. Each dash-dotted line represents the n^{th} acoustic resonance frequency $f_{ac,n}$ of the trombone bore.

The method previously used, which consists in retaining the lowest p_b value causing a destabilisation, does not predict the behaviour of the system with such a high blowing pressure. Yet, this oscillation on the third regime can be understood, since another pair of eigenvalues of the Jacobian matrix with a positive real part appears for $p_b > p_{thresh}$. The dashed lines in Figure H.4a) and H.4b) shows the pressure threshold corresponding to the second pair of such eigenvalues (called λ_2), and the associated oscillation frequency. For $f_l = 120$ Hz the second threshold is 6116 Pa with an oscillation frequency equal to $\text{Im}(\lambda_2)/2\pi = 172$ Hz, corresponding to the third regime of oscillation of the system. This is consistent with the behaviour observed in the numerical simulation.

H.4.4 Open-loop transfer function

For a better understanding of the origin of the different instabilities, another LSA formalism is used, which gives visual information about the stability margins of the different oscillation regimes. It consists in studying a linearised version of the open-loop transfer function (OLTF) of the system defined by Equation (H.5), (H.1) and (H.3) [Saneyoshi et al., 1987, Ferrand et al., 2010]. This OLTF is divided into two parts : the exciter admittance Y_a which describes the lip reed behaviour, from Equation (H.5) and (H.1), and the resonator input impedance, which is modelled with a modal fit of its input impedance Z like in the other formalism (see Equation (H.3)). The linearisation of the exciter admittance Y_a simplifies to a 1st degree Taylor expansion of Equation (H.5) near the equilibrium point ; Equation (H.1) is then put into the result. Details can be found in Appendix H2 about the calculation which leads to the following expression of Y_a :

$$Y_a = Wh_e \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left(-\frac{D(\omega)}{Kh_e} - \frac{1}{2\delta p_e} \right), \quad (\text{H.16})$$

where $D(\omega)$ represents the dynamics of the lip reed.

The stability of the OLTF, called H_{OL} , is then evaluated with the Barkhausen criterion [von Wangenheim, 2011], which points to possibly unstable solutions when $H_{OL} = Y_a.Z = 1$. On a Bode diagram, points with H_{OL} having a 0 dB magnitude and 0° phase are limits of stability. This method has already been used for clarinet models with inward-striking valves, and for brass and flute-like instruments [Saneyoshi et al., 1987, Ferrand et al., 2010, Terrien et al., 2014].

Figure H.10 shows the Bode diagram of the OLTF of the system fed with the same parameters as in Figure H.9. The stability limits are indicated with marks.

Here, the Bode diagram shows two points of 0 dB magnitude and 0 degree phase at 132 Hz and 172 Hz. In terms of the eigenvalues-based LSA tool described in H.3.3, these frequencies correspond to the imaginary part of the eigenvalues of J_F having a positive real part when these eigenvalues are calculated with $p_b = 6500$ Pa. The frequency obtained with OLTF differs from the one obtained with eigenvalues of the Jacobian matrix, because $f_{thresh} = 128$ Hz is obtained at $p_b = p_{thresh} = 1056$ Pa while the OLTF value is obtained with $p_b = 6.5$ kPa. The real part of the second destabilising pair of eigenvalues becomes positive above 6116 Pa, which is compatible with an oscillation on this regime at $p_b = 6.5$ kPa. The related frequency at threshold is 172.9 Hz corresponding to an oscillation on the third acoustic resonance.

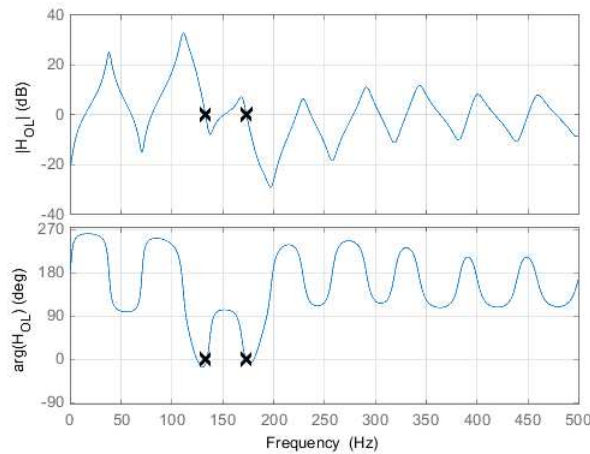


FIGURE H.10 – (colour online) Bode diagram of the open-loop transfer function of the trombone model with the parameters in Table II, $f_l = 120$ Hz and $p_b = 6.5$ kPa. There are two instability points (crosses), with a 0 dB magnitude and a zero phase.

Both LSA methods show multiple instabilities of the static solution, that is, multiple possible regimes of oscillation. The predictions of threshold pressures and possible oscillation frequencies are satisfactory. But they give no information either about the stability of these oscillation regimes, or about which regime the instrument will actually oscillate on. This is determined by initial conditions and by the stability of the different oscillating solutions, which depends on nonlinear elements out of reach of the method.

H.5 Lowest regime of oscillation

This chapter focuses on the results of LSA and time-domain simulation on the lowest regime, related to the first acoustic resonance of the air column inside the bore. This lowest playable note is called "pedal note" by musicians. For the trombone in first position, and the saxhorn with no valve depressed (neutral position), the pedal note is a $B\flat_1$ at 58 Hz in the musical scale.

H.5.1 The Trombone "pedal note"

To compare the behaviour of the different registers of the trombone, the ratio between the threshold frequency f_{thresh} and the resonance frequency of the corresponding acoustical mode $f_{ac,n}$ is computed. Figure H.11a) and H.11b) gives p_{thresh} and f_{thresh} like in Figure H.4 but on a smaller f_l range, and Figure H.11c) gives the $f_{thresh}/f_{ac,n}$ ratio.

At the lip frequencies corresponding to the pressure threshold minima, called $f_{l,n}^{opt}$ (see circles in Figure 9), this ratio appears to be significantly higher for the first acoustic resonance than for the other ones : $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1} = 55.6/38 = 1.46$ while $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n} \in [1.04 : 1.1]$ for $n \geq 2$ as shown in Table V.

It can be noted that, at least for the five lowest resonances, $f_{thresh,n}^{opt}$ is in good agreement with the note supposed to be played on the instrument for this resonance, according to the tempered scale (see Table V). Therefore, LSA gives a reliable estimation of the reference note for these acoustic resonances, including the pedal note, with a relative error between $f_{thresh,n}^{opt}$ and the tempered scale note smaller than 5.5%. However, $f_{thresh,n}^{opt}$ underestimates the playing frequency of the pedal note while it overestimates the other notes.

For illustration, a simulation is carried out with the usual parameters from Table II with $f_l = f_{l,n}^{opt} = 49$ Hz and $p_b = 150$ Pa (p_{thresh} being 146 Pa). The resulting signal oscillates at $f_{osc} = 61.86$ Hz, far higher than $f_{ac,1}$: the frequency results of LSA and of simulation are consistent for these parameters as well.

Regime	$f_{l,n}^{opt}$ (Hz)	$f_{thresh,n}^{opt}$ (Hz)	tempered scale (Hz)	relative error	$f_{ac,n}$ (Hz)	$f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$
1	49	55.6	58.27	-4.6%	38	1.46
2	110	122.9	116.54	5.4%	112	1.1
3	162	180.0	174.81	2.9%	170	1.06
4	215	238.9	233.08	2.5%	228	1.05
5	271	301.6	291.35	3.5%	290	1.04

TABLEAU V – $f_{thresh,n}^{opt}$ values for the five lowest regimes of the trombone, compared with the frequency of the expected note. The acoustic resonance frequency of the corresponding mode, the $f_{l,n}^{opt}$ value and the $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ ratio are also given. $f_{thresh,n}^{opt}$ is a suitable prediction of the played note. The $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ ratio is particularly high for the first oscillation regime.

The LSA and the numerical simulation reveal a particularity of the trombone first regime : the oscillation frequency predicted by both methods is far above the acoustic resonance frequency,

which results in a high $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ ratio for $n = 1$, while it is much smaller when $n \geq 2$. This matches the experience of trombone players, who are able to play the pedal note in tune with the other notes, despite the large inharmonicity of the corresponding acoustic resonance. Therefore, a linearised model is able to predict a regime previously attributed to unexplained non-linear contributions of the upper acoustic resonances [Benade, 1976, p.405]. To complete this conclusion, LSA have been applied to the model with a resonator limited to the trombone's first mode. This results in $f_{thresh,1}^{opt} = 61.06$ Hz. This confirms that the high $f_{thresh}/f_{ac,n}$ ratios are related to the first mode itself, without the need of combinations of the upper modes.

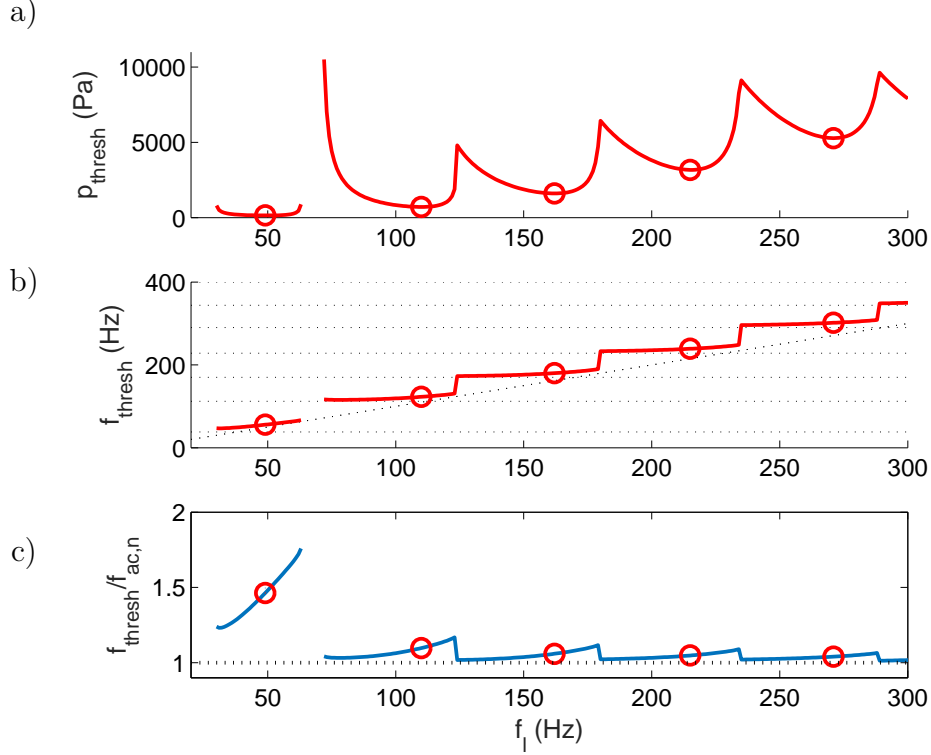


FIGURE H.11 – (colour online) Results of LSA (with lip parameters from Table II) are plotted on (a) and (b) with a narrower f_l range than in Figure H.4. Horizontal dotted lines in (b) are the $f_{ac,n}$ values. The $f_{thresh} = f_l$ curve is also plotted (dotted). (c) is the $f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n}$ ratio. Circles indicate the $f_{l,n}^{opt}$ lip resonance frequencies.

Bouasse proposed an experiment in which a trombone is played with a saxophone mouthpiece [Bouasse, 1986, p.370]. Gilbert and Aumont recently ran this experiment and published it [Gilbert and Aumont, 2008], together with audio and video recordings. The result is an instrument playing a low $E\flat_1$, that is, an oscillating frequency just under $f_{ac,1} = 38$ Hz, which is compatible with a playing frequency below the acoustic resonance frequency, characteristic of the inward-striking valve model used [Wilson and Beavers, 1974].

In order to explore the influence of nature of the exciter — inward-striking or outward striking — this experiment is simulated here. The trombone with a saxophone mouthpiece is modelled with a fit of the input impedance of a trombone in series with the equivalent volume of a saxophone mouthpiece, instead of a trombone mouthpiece. The saxophone reed is modelled with an inward-striking valve as defined in [Wilson and Beavers, 1974] for example. Its equation is the same as eq. (H.1) except the sign of the right-hand term : $(p_b - p(t))$ becomes $(p(t) - p_b)$ in this model. The characteristics of the cane reed are taken from [Silva, 2009], with $f_l = 1$ kHz, $Q = 1.1$; $1/\mu = 4.9$ m²kg⁻¹; $W = 10^{-3}$ m; $h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ m. The results are presented in Figure H.12.

The oscillating frequency of the simulated mouthpiece pressure is close to the first resonance frequency $f_{osc}/f_{ac,1} = 0.99$ — a ratio contrasting with the high ratio obtained with an outward-striking valve. The signal is nearly sinusoidal, because $p_b = 1800$ Pa is close to $p_{thresh} = 1760$ Pa, and because of the lack of acoustic resonances matching the harmonics of this frequency in the impedance spectrum.

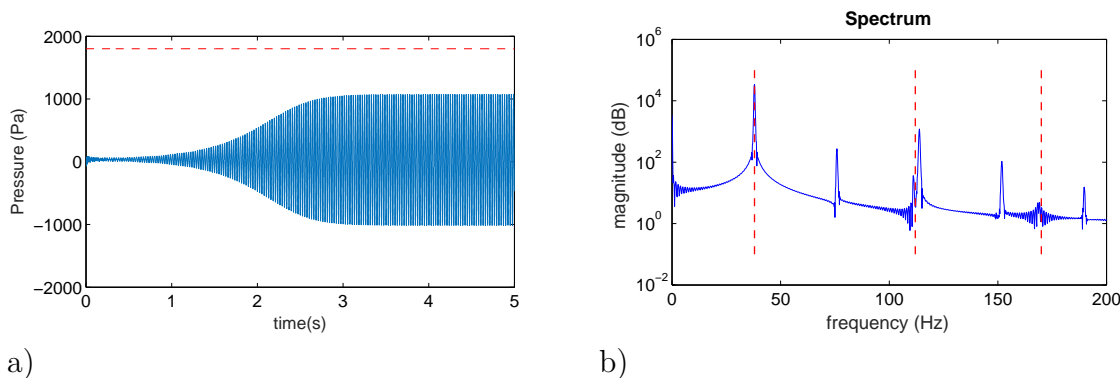


FIGURE H.12 – (colour online) Results of simulation of a trombone with a tenor saxophone mouthpiece, modelled as an inward-striking valve with reed resonance frequency $f_l = 1$ kHz, $W = 1$ cm, $h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ m, $Q_l = 1.1$, $1/\mu = 4.9$ m²kg⁻¹. The blowing pressure $p_b = 1800$ Pa is slightly above $p_{thresh} = 1760$ Pa. (a) : blowing pressure (dashed line) and mouthpiece pressure (solid line). (b) : spectrum of the mouthpiece pressure, showing an oscillation frequency $f_{osc} = 37.85$ Hz slightly below the first acoustic resonance $f_{ac,1} = 38$ Hz. Dashed lines represent the resonance frequencies of the bore.

Contrary to previous simulation, the $f_{osc}/f_{ac,1}$ ratio is very close to 1. No pedal note phenomenon seems to be reproduced here. This simulation supports our choice of an outward-striking valve model, rather than an inward-striking one, to reproduce the behaviour of the lips for the trombone.

H.5.2 A Saxhorn "ghost note" ?

A complementary exploration is conducted on a Baritone-saxhorn in $B\flat$. This instrument has a conical bore on almost its entire length, and it is played on the same range as the tenor trombone. Its acoustic resonance frequencies are quite similar to those of a trombone, as shown in Figure H.13. The main difference between both instruments is the first resonance peak, which is nearly harmonic with the other ones on the saxhorn and very inharmonic on the trombone. Thus, unlike with the trombone, the pedal note $B\flat_1$ is close to the lowest resonance frequency.

The pedal note is easily playable by an intermediate musician. However, while practicing, the authors fortuitously found out another playable note, whose frequency lies between $f_{ac,1}$ and $f_{ac,2}$. Trials have been carried out on different saxhorn models and brands. The note played lies between $D\flat_2$ and $E\flat_2$, that is, a frequency ratio $f_{osc}/f_{ac,1}$ between 1.19 and 1.35. We call it the "ghost note" in this paper. Experienced saxhorn players further confirmed the existence, and facility of emission, of this ghost note on many different saxhorns and tubas.

LSA results on the saxhorn model are provided in Figure H.14. The model used is similar to the trombone model, with Z equal to the input impedance of the saxhorn in Eq. (H.3). The behaviour is similar to that of the trombone, with a particularly high $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ ratio. Once again focusing on the $f_{thresh,n}^{opt}$ values (circles in Figure H.14), the ratio is $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1} = 1.23$. As in the case of the trombone, this ratio is smaller and quite constant for other modes ($f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n} < 1.05$, $n \geq 2$).

Time-domain simulation of the saxhorn model on the first acoustic resonance (with $p_b = p_{opt,1} + 1\%$, $f_l = f_{l,1}^{opt}$ and other parameters given in Table II) confirms that $f_{osc}/f_{ac,1} = 1.23$.

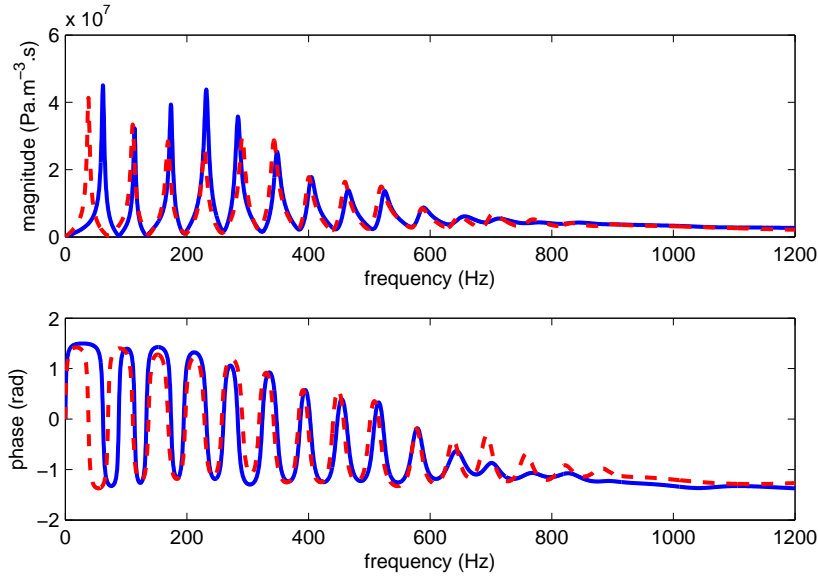


FIGURE H.13 – (colour online) Comparison between modal fits of the impedances of a trombone (dashed line) and of a saxhorn (solid line). The main difference in terms of frequency concerns the first peak.

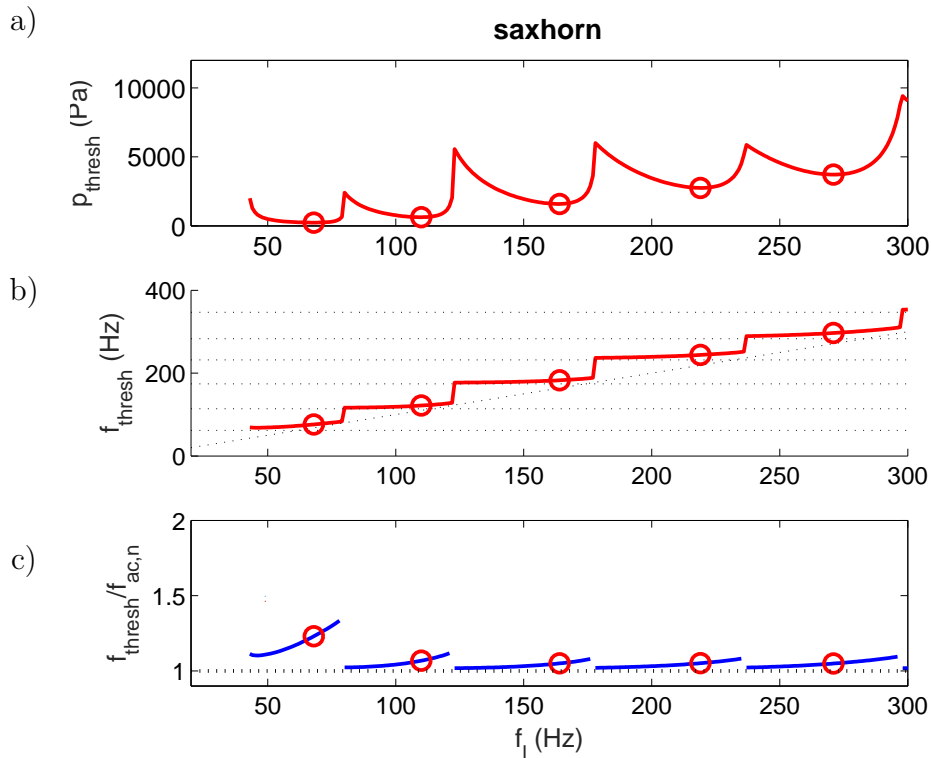


FIGURE H.14 – (colour online) LSA results for the saxhorn (with lip parameters given in Table II) are given under the same form as those for the trombone in Figure H.11. Circles indicate $p_{opt,n}$ (a) and $f_{thresh,n}^{opt}$ (b).

The gap between the lowest note played and the first acoustic resonance is smaller for the ghost

note of the saxhorn ($f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1} = 1.23$) than for the pedal note of the trombone. However, both are significantly higher than for the other modes ($f_{thresh,n}^{opt}/f_{ac,n} \leq 1.09$ otherwise). Other studies [Velut et al., 2014] also highlight a high $f_{osc}/f_{ac,1}$ ratio for trombone and saxhorn despite quite different simulation conditions, which indicates the robustness of this phenomenon against changes in parameters. Thus, this simple linearised model makes it possible to predict the pedal note of the trombone and the ghost note of the saxhorn. However, a set of parameters simulating the pedal note $B\flat 1$ of the saxhorn with this model still needs to be found, should it exist.

H.5.3 Shifting of the lowest resonance peak of the input impedances

The trombone and the saxhorn are two examples of instruments having a high $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ ratio. The trombone has a higher ratio than the saxhorn, and the first bore resonance frequency is lower. To assess this negative correlation between $f_{ac,1}$ and the $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ ratio, the first resonance frequency of the input impedance is shifted for both instruments. This is done by modifying the $\{C_{1,s_1}\}$ values in Eq. (H.3) while keeping the other resonances unchanged, as well as the amplitude and quality factor of the first resonance.

For each value of $f_{ac,1}$ tested, the $f_{thresh,1}^{opt}/f_{ac,1}$ value is calculated. Results for both saxhorn and trombone are reported in Figure H.15. For both instruments, the ratio increases when the first resonance frequency tends towards zero. Thus, as far as the studied model is concerned, the lower the resonance frequency, the larger the gap between the playing frequency and the first resonance frequency.

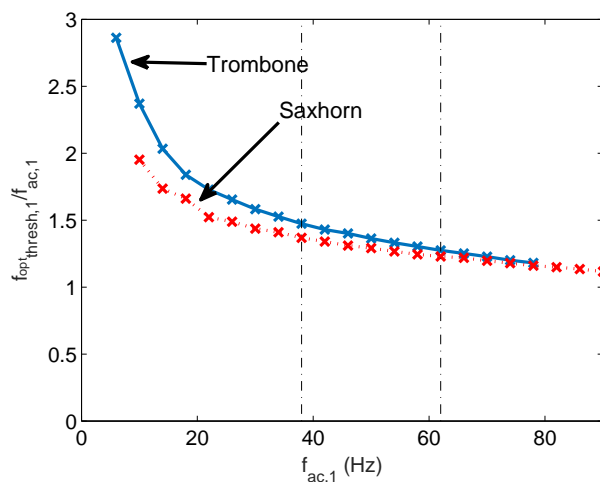


FIGURE H.15 – (colour online) Ratio between the predicted oscillation frequency $f_{thresh,1}^{opt}$ and the acoustic resonance frequency $f_{ac,1}$ for different values of the latter. The solid curve plots the results for the trombone, the dotted one for the saxhorn. Vertical dash-dotted lines are the original first resonance frequencies of a trombone (38 Hz) and a saxhorn (62 Hz).

H.6 Conclusions

Most results obtained in this study highlight the usefulness of Linear Stability Analysis (LSA) to understand various near-threshold behaviours of a complete nonlinear model of brass instrument applied to a trombone and a saxhorn.

Cases where simulation results are perfectly explained by LSA include exponentially decaying or increasing oscillation transients around the equilibrium solution. Moreover, in time simulations, frequencies of periodic regimes measured in steady states are similar to those given by

LSA, with playing frequencies close to the bore resonances. This remains true as long as the periodic regime emanating from the equilibrium solution remains stable. Indeed, once this periodic regime loses its stability, overblowing, quasi-periodicity or period-doubling occurs. Multiple instabilities of the equilibrium solution are shown by LSA, corresponding to several available oscillation regimes, but this method will not determine on which of these regimes the system is going to oscillate. Further studies of the model with numerical continuation methods [Doedel and Oldeman, 2009, Cochelin and Vergez, 2009], should detect the bifurcations between oscillation branches and estimate the stability domain of each periodic solution, thus determining on which regime the system would oscillate. Quasi-periodicity and period-doubling are nonlinear phenomena not taken into account in this method.

The most striking results in this paper concern the lowest acoustic resonance of brass instruments. Indeed, in the case of the trombone, LSA predicts the production of the pedal note. LSA clearly indicates that for low enough acoustic resonance frequencies, the frequency of the emerging oscillation is far beyond the resonance frequency of the instrument. This allows the trombone pedal note to be played in tune, even though the corresponding resonance frequency is misaligned with the nearly harmonic series of the upper impedance peaks. This result from LSA is quite unexpected : the pedal note of the trombone seems to result from a coupling between the lips and the nearest acoustic mode below the playing frequency, just like for the other oscillation regimes. In contrast with previous studies, LSA show that higher bore resonances are not necessarily implied in the establishment of the pedal note, as shown by the simulation with a one-resonance bore. Considering the saxhorn, LSA also suggests the production of a note — referred to as the "ghost note" in this paper — that has never been documented but the playability of which is confirmed by advanced players.

However some questions are still unsolved. First of all, the reason why the ratio between the playing frequency at threshold and the acoustic resonance frequency rises when the latter decreases requires further attention. Moreover, neither LSA nor numerical simulations could explain the production of the saxhorn pedal note. This may be due to a limitation of the 1-DOF valve model for the lips or more simply to unsuitable parameter values. Indeed, in spite of the bibliographical review carried out for this study, choosing parameter values for a brass model remains challenging. Even though the results obtained look reasonable, consistent with musicians' experience, *in vivo* measurements of lip parameters during musical performance would be very valuable.

Acknowledgments

We wish to thank the ten skilled saxhorn players who confirmed the existence of the ghost note on different instruments. We also wish to thank Fabrice Silva for the discussions about our results and for his help in using MOREESC.

Thanks to the reviewers, whose conscientious work improved the clarity of this article and raised some interesting questions.

This work was done in the framework of Labex MEX (ANR-10-LABX-0092) and of the project A*MIDEX (ANR-11-IDEX-0001-02), funded by the French National Research Agency (ANR).

Appendix H1 : Equilibrium point of the system

Prior to applying the linear stability analysis (LSA) to our model, the equilibrium solution must be computed before linearising the equations around this solution. This solution consists of a constant lip channel height $h(t) = h_e$, a constant flow between the lips u_e and a constant pressure in the instrument $p(t) = p_e$. Finding these values consists in solving the equation system (H.6) with these constant values. The system becomes :

$$\begin{cases} 0 = -\omega_l^2 h_e - \frac{p_e}{\mu} + \omega_l^2 h_0 + \frac{p_b}{\mu} \\ u_e = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W h_e \sqrt{p_b - p_e} \\ 0 = Z_c C_n u_e + s_n p_{ne} \text{ for } n \in [1 : N]. \end{cases} \quad (\text{H.17})$$

Considering the relation between $p(t)$ and its components $p_n(t)$, and adding the variable $A = \sqrt{p_b - p_e}$, it becomes :

$$\begin{cases} h_e = h_0 + \frac{A^2}{\mu \omega_l^2} \\ u_e = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W h_e A \\ p_e = Z(\omega = 0) u_e. \end{cases} \quad (\text{H.18})$$

These three equations can now be combined :

$$\frac{W Z(\omega = 0)}{\mu \omega_l^2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} A^3 + A^2 + W h_0 Z(\omega = 0) \sqrt{\frac{2}{\rho}} A - p_b = 0, \quad (\text{H.19})$$

which leads to eq (H.9) given in Section H.3.3.

Appendix H2 : Linearisation of Open-Loop Transfer Function

This appendix details the calculations leading to the linearised expression of the open-loop transfer function of the model. The linearisation of the flow between lips u simplifies to a 1st degree Taylor expansion of Equation (H.5) near the equilibrium point :

$$\tilde{u}(p, h) = u(p_e, h_e) - \left[\frac{\partial u}{\partial p}(p_e, h_e) \right] (\delta p(t) - \delta p_e) + \left[\frac{\partial u}{\partial h}(p_e, h_e) \right] (h(t) - h_e). \quad (\text{H.20})$$

$\delta p = p_b - p(t)$ is the differential pressure through the lips. δp_e and h_e are the respective values of δp and h at the equilibrium solution. Similarly to the previous appendix A, the p_e value is obtained by computing the roots of a 3rd order polynomial whose variable is $A = \sqrt{\delta p}$:

$$A^3 + \frac{A^2}{\beta} + \mu \omega_l^2 h_0 A - \frac{p_b}{\beta} = 0 \quad \text{with } \beta = \frac{Z(\omega = 0) \cdot W}{\mu \omega_l^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}. \quad (\text{H.21})$$

h_e is given by Equation (H.1) in static conditions (all time derivatives being null) :

$$h_e = h_0 + \frac{\delta p_e}{(\mu \omega_l^2)}. \quad (\text{H.22})$$

All calculations being done, the linearised expression of the flow between the lips is :

$$\tilde{u}(p,h) = Wh_e \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left(\frac{\delta p(t)}{2\delta p_e} + \frac{h(t)}{h_e} - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{H.23})$$

In the frequency domain, the equation of the lip movement (Equation (H.1)) gives the relation between the oscillating components of the mouthpiece pressure $P(\omega)$ and $H(\omega)$ the Fourier transform of $h(t) - h_0$. Since we are only interested in oscillating solutions, the $\omega = 0$ case is ignored : hence, each constant value is omitted. This leads to the following equation :

$$H(\omega) = D(\omega) \frac{P(\omega)}{\mu \omega_l^2}, \quad (\text{H.24})$$

with $D(\omega)$ being the dynamics of the lips :

$$D(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_l^2} + j \frac{\omega Q_l}{\omega_l}}, \quad (\text{H.25})$$

which leads to this final expression of the linearized valve admittance, defined as $Y_a = \frac{\tilde{U}(\omega)}{P(\omega)}$:

$$Y_a = W.h_e \cdot \sqrt{\frac{2\delta p_e}{\rho}} \left(-\frac{D(\omega)}{\mu \omega_l^2 . h_e} - \frac{1}{2\delta p_e} \right). \quad (\text{H.26})$$

With this expression, $H_{OL}(\omega) = Y_a(\omega) \cdot Z(\omega)$ can be computed for section H.4.4.

Nomenclature

The symbols and abbreviations used all along this paper are recalled here, along with their meaning and the unit used :

- $h(t)$: Height of the lip channel (m) ;
- W : Width of the lip channel (m) ;
- h_0 : Height of the lip channel at rest (m) ;
- ρ : Density of air at 20°C (kg.m⁻³) ;
- μ : Equivalent surfacic mass of the lips (kg.m⁻²) ;
- Q_l : Quality factor of the lips (no unit) ;
- $p(t)$ or $P(\omega)$: Waveform and Fourier transform of the pressure at the input of the bore of the instrument (Pa) ;
- p_b : Blowing pressure (Pa) ;
- p_{thresh} : Threshold value of p_b , above which the equilibrium solution is unstable (Pa) ;
- $u(t)$ or $U(\omega)$: Waveform and Fourier transform of the air flow at the input of the instrument (m³.s⁻¹) ;
- $Z(\omega)$: Input impedance of the resonator (Pa.m⁻³.s) ;
- $\omega_l = 2.\pi.f_l$: resonance frequency of the lips (rad.s⁻¹) ;
- f_{osc} : Playing frequency of the instrument (Hz) ;
- $f_{ac,n}$: Acoustic resonance frequency of the n^{th} mode (Hz) ;
- f_{thresh} : Oscillation frequency at p_{thresh} (Hz).
- $p_{opt,n}$: Lowest value of p_{thresh} for the n^{th} acoustic resonance (Pa) ;
- $f_{thresh,n}^{opt}$: Value of f_{thresh} (Hz) at $p_b = p_{opt,n}$ (Hz) ;
- $f_{l,n}^{opt}$: Value of f_l (Hz) at $p_b = p_{opt,n}$ (Hz) ;

Résumé

Cette thèse traite des différents régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres. On étudie en particulier la manière dont le musicien contrôle et sélectionne ces régimes. L'association d'un instrument, des lèvres et de la bouche d'un musicien forme un système dynamique complexe. Le couplage non linéaire entre les modes mécaniques des lèvres et les modes acoustiques de la colonne d'air de l'instrument peut, selon les paramètres, mener à un régime stationnaire, à des auto-oscillations périodiques de différentes fréquences, ou à des oscillations quasi-périodiques. Le contrôle musculaire sur les lèvres et sur la pression dans la bouche permet à un musicien entraîné de choisir le régime d'oscillation souhaité.

On propose deux approches pour mieux comprendre les conditions d'émergence des différents régimes de l'instrument et leur contrôle par le musicien. D'une part, on étudie un modèle physique de cuivre, qui consiste en une valve lippale à 1 degré de liberté couplée non linéairement à une expression modale de l'impédance d'entrée de l'instrument. Les seuils d'apparition et les caractéristiques de différents régimes d'oscillation de ce modèle sont étudiés à l'aide de plusieurs outils de dynamique des systèmes : l'analyse de stabilité linéaire, la simulation numérique et l'équilibrage harmonique. L'objectif sous-jacent est d'estimer la capacité de ce modèle à reproduire le comportement de l'instrument qu'il modélise. Un dispositif expérimental est également développé, dans le but de mesurer simultanément plusieurs paramètres de jeu employés par un musicien en même temps que la réaction de l'instrument.

Les résultats des différentes approches permettent de mieux comprendre les comportements liés aux régimes d'oscillation des cuivres. Les mesures réalisées sur plusieurs musiciens donnent les plages de variation des différents paramètres de contrôle mesurés. Les résultats des méthodes d'analyse du modèle se complètent. Elles donnent à la fois une vision globale de l'apparition de certains régimes oscillants du modèle d'instrument, et des informations plus détaillées sur certains points de fonctionnement. Certaines situations de jeu particulières sont étudiées plus en détail, notamment la note pédale du trombone, l'influence de l'utilisation d'une sourdine passive ou active sur celle-ci et la nature des sons multiphoniques.

Abstract

This thesis deals with the different oscillation regimes of brass instruments. It focuses on the way a musician can control and choose these regimes. The association of an instrument, the musician's lips and his mouth forms a complex dynamical system. Depending on the parameter values, the nonlinear coupling between the mechanical modes of the lips and the acoustical modes of the resonator can lead to a stationary regime, or result in periodic (with different frequencies) or even quasi-periodic self-sustained oscillations. Through muscular control on his/her lips and respiratory control of his/her blowing pressure, a trained musician can select the desired regime.

Two main approaches are developed for a better understanding of how musicians select these regimes, and what are the conditions of their emergence. On the one hand, a physical model of brass instrument is studied. It consists in a one-degree-of-freedom lip valve nonlinearly coupled to a modal fit of the input impedance of the instrument. The thresholds and the features of several oscillation regimes of this model are studied through dynamical systems tools, including linear stability analysis, numerical simulation and harmonic balance. The underlying goals are the assessment of the ability of this model to reproduce the behavior of the modelled instrument, and the understanding of transitions between oscillation regimes. The regime change thresholds are particularly examined. On the other hand, an experimental setup is developed in order to measure simultaneously multiple playing parameters used by a musician, together with the resulting instrument variables.

Results from these different perspectives provide a better understanding of the behavior of brass instrument oscillation regimes. Experimental measurements carried out with several musicians provide the range of the control parameters while playing. Results of the analysis methods of the model are complementary. A global vision of the occurrence of certain oscillation regimes is provided, along with more detailed information for some operating points. Some specific playing situations are examined in detail, such as the trombone pedal note, the influence of a passive or active mute on the latter, and the nature of multiphonic sounds.