



Extension du domaine de la décomposition

P. Gosselet

gosselet@lmt.ens-paris-saclay.fr
LMT – ENS Paris-Saclay/CNRS/Université Paris-Saclay

Soutenance d'Habilitation à Diriger des Recherches
10 février 2017

La mécanique des structures...

- ... est l'étude du **mouvement** et de ses causes dans les **solides**. Un solide est caractérisé par sa **forme**, et localement par son **matériau**.
- ... se traduit mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles (**EDP**) qui relie les variations spatiales des champs de **déplacement** u et de **contrainte** σ (tensions internes) sur le domaine d'étude.

En général, ce système a une solution qu'on ne peut pas calculer exactement.

La méthode des éléments finis

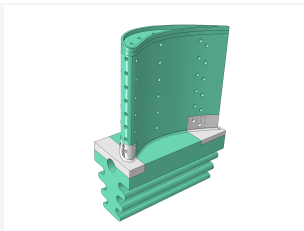
- Technique d'approximation qui ramène le problème à un système discret.
- Représentation simplifiée de la géométrie (**maillage**) et de la **cinématique** qui s'appuie sur les nœuds.
- Résultats d'autant plus précis que la maille est fine et donc le problème de grande taille
- Taille de la maille h guidée par la mécanique et l'objectif de la **modélisation**.

La mécanique des structures. . .

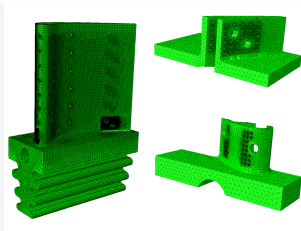
- ... est l'étude du **mouvement** et de ses causes dans les **solides**. Un solide est caractérisé par sa **forme**, et localement par son **matériau**.
- ... se traduit mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles (**EDP**) qui relie les variations spatiales des champs de **déplacement** u et de **contrainte** σ (tensions internes) sur le domaine d'étude.

En général, ce système a une solution qu'on ne peut pas calculer exactement.

La méthode des éléments finis



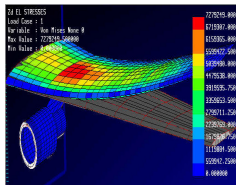
CAD d'une aube de turbine



Maillage fin et zooms

Le virtual testing

L'objectif est de disposer d'une **maquette virtuelle** des structures pour les **valider** et les **optimiser** en minimisant les essais physiques.



Flexion aile (nastran)



Test torsion aile A380 (supaero)

Ingrédients de base

- (Garantir la qualité des modèles)
- Garantir la qualité des calculs
- Obtenir les résultats des calculs dans un temps raisonnable en exploitant correctement les calculateurs actuels.

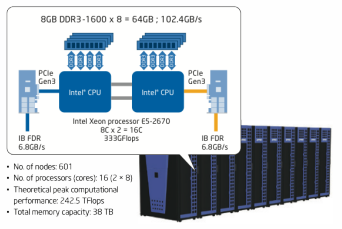
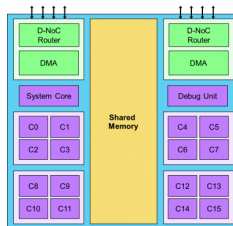


Figure 3. Configuration of Laurel Subsystem with 601 nodes

crédits : laurel



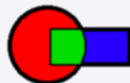
crédit : linleygroup

Une organisation hiérarchique

- Unités de calcul : cœurs/processeurs/nœuds + accélérateurs (GPU)
- Mémoires : registre/cache/différents niveaux de mémoire partagée
- Réseaux : bus/.../ethernet avec une certaine topologie

Les paradigmes de programmation doivent être adaptés (opérations atomiques, programmation multitâche, échange de messages)

- ... ont été initiées vers 1870 par Hermann Schwarz pour prouver l'existence de solutions (de l'équation de Laplace) sur des domaines constitués par des unions recouvrantes de sous-domaines de forme simple.
- ... l'idée est de vérifier les équations indépendamment dans les sous-domaines et au bout d'un **processus itératif** à assurer l'égalité du déplacement dans le recouvrement.
- ... en absence de recouvrement, l'idée est la même mais il faut s'assurer de la continuité des champs et de leur dérivée normale : **continuité** du déplacement et **équilibre** des efforts (action-réaction).



Référence



pas de continuité



pas de transmission
d'effort

Avec l'évolution de la théorie des EDP, l'intérêt des DDM se déplace

Modélisation (traduction d'un problème physique en équations)

- Attribution de propriétés spécifiques aux **interfaces**.
- Cadre théorique pour la définition de **modèles imbriqués**.

Calcul parallèle et la **distribution** des calculs (utilisation de *clusters*, HPC)

- Schématiquement, on attribue un sous-domaine à un processeur, les besoins mémoires sont donc répartis.
- Il faut faire converger les itérations rapidement (**performance**) et sur des classes de problèmes variées (**robustesse**).
- Il faut éviter les échanges de données (mauvaise latence des réseaux) et privilégier les calculs indépendants par sous-domaine.

Exemple de modélisation par DDM (1/2)

Sans recouvrement

Les interfaces entre sous-domaines sont le support de comportement mécanique (interfaces fonctionnelles)¹.

- Assemblages avec contact², frottement, adhésion.
- Interfaces cohésives (délaminage des composites lamifiés³).
- Collages parfaits

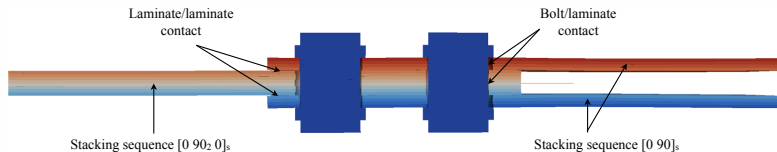


FIGURE – Plaques composites boulonnées (16 plis).

1. Idée constitutive de l'approche Latin [Ladevèze 1985-]
2. [Dostal 2004]
3. [(PK,KS) OA PG 2009 - 2017]

Exemple de modélisation par DDM (1/2)

Sans recouvrement

Les interfaces entre sous-domaines sont le support de comportement mécanique (interfaces fonctionnelles)¹.

- Assemblages avec contact², frottement, adhésion.
- Interfaces cohésives (délaminage des composites lamifiés³).
- Collages parfaits

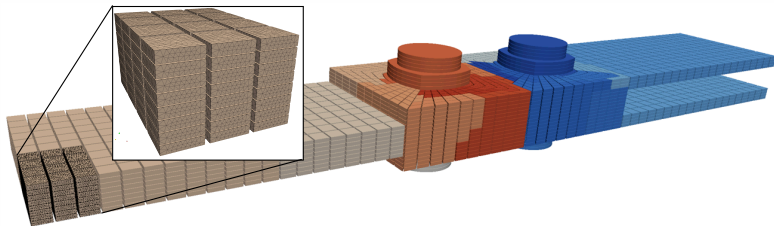


FIGURE – Discrétisation (12 M dds), 10 600 sous-domaines, 29 CPUs

1. Idée constitutive de l'approche Latin [Ladevèze 1985-]
2. [Dostal 2004]
3. [(PK,KS) OA PG 2009 - 2017]

Exemple de modélisation par DDM (1/2)

Sans recouvrement

Les interfaces entre sous-domaines sont le support de comportement mécanique (interfaces fonctionnelles)¹.

- Assemblages avec contact², frottement, adhésion.
- Interfaces cohésives (délaminage des composites lamifiés³).
- Collages parfaits

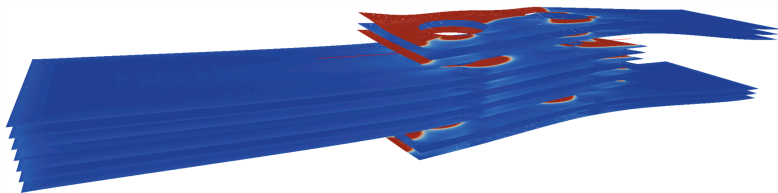


FIGURE – Endommagement dans les interfaces après 70 incréments.

-
1. Idée constitutive de l'approche Latin [Ladevèze 1985-]
 2. [Dostal 2004]
 3. [(PK,KS) OA PG 2009 - 2017]

Exemple de modélisation par DDM (1/2)

Sans recouvrement

Les interfaces entre sous-domaines sont le support de comportement mécanique (interfaces fonctionnelles)¹.

- Assemblages avec contact², frottement, adhésion.
- Interfaces cohésives (délaminage des composites lamifiés³).
- Collages parfaits

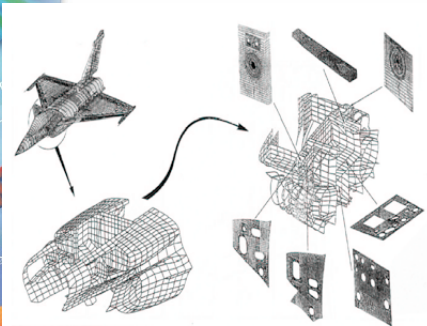


FIGURE – Délaminage autour d'un boulon.

-
1. Idée constitutive de l'approche Latin [Ladevèze 1985-]
 2. [Dostal 2004]
 3. [(PK,KS) OA PG 2009 - 2017]

Exemple de modélisation par DDM (2/2)

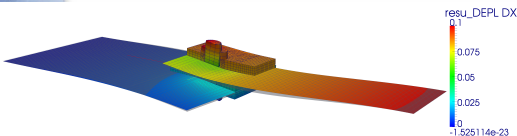
Avec recouvrement



Les modèles gigognes sont classiques dans l'industrie. Les DDM permettent de prendre en compte toutes les interactions (global \leftrightarrow local) même non-linéaires^a.

a. [Hirai 1984, Whitcomb, Mao 1991, LG OA PG 2009]

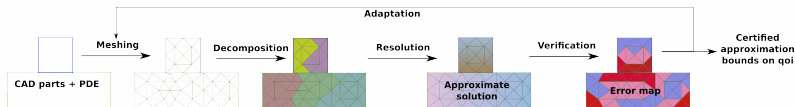
FIGURE – Structure définie par modèles imbriqués (Dassault aviation)



Un modèle global (plaque + connecteur 1D) est « patché » par une représentation 3D de la zone boulonnée^a.

a. GG OA PG 2016

Chaîne de calcul en ingénierie



Quels peuvent être les apports des DDM dans la chaîne de conception ?

Contributions :

- Formulation des problèmes, en particulier en non-linéaire, pour maximiser le parallélisme et augmenter la robustesse.
- « Robustification » et accélération des solveurs en linéaire, recyclage de l'information numérique.
- Vérification des calculs en parallèle, calcul adaptatif, mise en relation erreur de discrétisation / erreur de résolution.
- Adaptation des méthodes pour les utiliser avec des logiciels industriels (*calcul non-intrusif*).

Plan de la présentation

- 1 Contexte
- 2 Bilan quantitatif
- 3 Les ingrédients fondamentaux des DDM
- 4 Quelques contributions
 - Vers le calcul haute performance en ingénierie
 - Calcul non-intrusif
- 5 Conclusion

Carrière

- 2001-2003 Thèse à l'UPMC sous la direction de C. Rey.
- 2003-2004 ATER UPMC/Post doc TU-Delft (Daniel Rixen)
- 2004- Chargé de recherche CNRS au LMT-Cachan secteur structure

Publications

- 31 articles dans des revues internationales + 2 chapitres
- 83 conférences + 5 coauteur de keynotes
- 2 articles de vulgarisation, 20 séminaires

Coencadrements

- 9 thèses soutenues, 4 thèses en cours, 3 post-doctorants.
- Stagiaires (doctorants invités, M2, M1)

Collaborations

F. Feyel & C. Rey & A. Parret-Fréaud (SafranTech), D. Rixen (TUMunich), N. Spillane (CMAP), F.-X. Roux & C. Bovet (Onera), J.-F. Molinari (EPFL), P. Kerfriden (U. Cardiff), J. Escher (U. Hanovre), M. Kadri (Tunis), Zset.

Nombreux TDs/TPs/encadrements de stages.
Responsabilité de deux cours.

EDP pour la mécanique

- niveau L3
- 20h cours + 10h TD
- Généralités, classification, interprétation au sens des distributions, transformées de Laplace et de Fourier, séparation de variables, introduction aux méthodes variationnelles
- 1 livre d'enseignement (Dunod, coauteur Claire David)

Méthodes matricielles

- niveau M2
- 30h (cours/TP)
- Calcul numérique, solveurs directs et itératifs, problèmes aux valeurs propres, problèmes non-linéaires, intégration, approximation...

Au laboratoire / à l'école

- Membre du conseil de laboratoire (2 mandats élus, 1 nommé),
- Correspondant formation LMT
- Membre élu du conseil scientifique de l'ENS (1 mandat)
- Membre de l'équipe de gestion de l'IRTG 1627 avec Hanovre
- Responsable de l'UTR (★★) : modélisation et calcul par DDM

Participation à des projets

- Correspondant LMT pour les ANR ICARE et SEMAFOR, pour le PIA PAMSIM, participation au programme EHPOC et MUSCA, responsable d'une tâche dans le programme européen MAAXIMUS

Organisation

- Minisymposium dans DD 2005, CSMA 2009, XDMS 2015, CSMA 2017
- Conférence CSMA 2009 (responsable des actes),

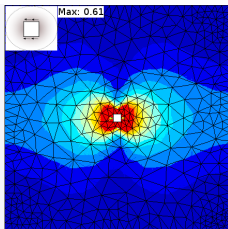
Plan de la présentation

- 1 Contexte
- 2 Bilan quantitatif
- 3 Les ingrédients fondamentaux des DDM**
- 4 Quelques contributions
 - Vers le calcul haute performance en ingénierie
 - Calcul non-intrusif
- 5 Conclusion

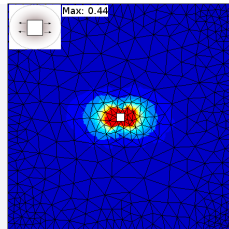
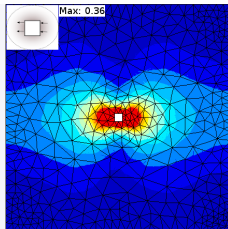
Ingrédient DDM 1 : le principe de Saint-Venant

Séparation d'échelle

Effet d'une distribution d'effort sur le bord d'un sous-domaine



Résultante $R_1 = R_2$



Résultante $R_3 = 0$

- Résultante similaire \rightarrow effets lointains identiques.
- Résultante nulle \rightarrow effets uniquement localisés.
- Torseur nul \Leftrightarrow efforts orthogonaux aux déplacements rigides.

Il faut un mécanisme de transmission de l'information lointaine (**grille grossière**)⁴.
Le reste de la solution dépend des proches voisins.

4. [Mandel 1993, Farhat 1994 2001, Ladevèze 1999, Dohrmann 2003]

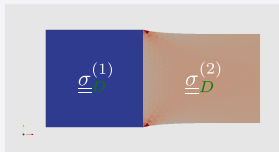
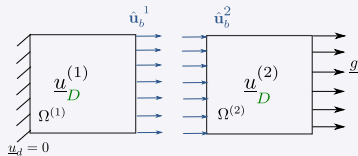
Ingédient DDM 2 : l'équilibre local \longrightarrow la condensation

Résolution locales les plus classiques

Déplacement continu à l'interface

$$\hat{u}_b^2 - \hat{u}_b^1 = 0 \Rightarrow \hat{u}_b^2 = \hat{u}_b^1$$

Problème de Dirichlet sur Ω^s

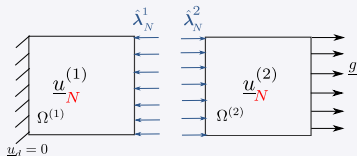


réactions en **déséquilibre**

Réactions équilibrés à l'interface

$$\hat{\lambda}_N^2 + \hat{\lambda}_N^1 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_N^2 = -\hat{\lambda}_N^1$$

Problème de Neumann sur Ω^s

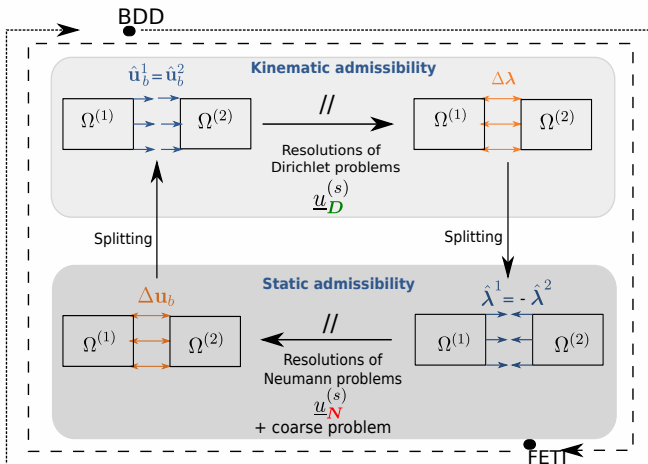


déplacements **discontinus**

Le sous-domaine est une **boîte noire** qui résout l'équilibre local pour un **condition limite** donnée et renvoie une **quantité duale** à l'interface.

Ingrédient DDM 3 : itérations à l'interface

Approche duale (FETI) et primale (BDD)⁵



+ dans ce cas il n'y a pas stationnarité et un solveur de Krylov est indispensable
les points fixes sont possibles avec recouvrement ou/et conditions de Robin

5. [Mandel 1993, Farhat 1994, Rixen 1998, PG CR DR 2003, Klawonn 2003]

Exemple : la méthode FETI

Mise en œuvre dans Zset⁶

Ingrédients

- Inconnue = effort équilibré aux interfaces
- Problème grossier = auto-équilibre des sous-domaines
- Résidu = saut de déplacement à l'interface
- Solveur = gradient conjugué préconditionné projeté
- Préconditionneur = opérateur de Dirichlet pondéré

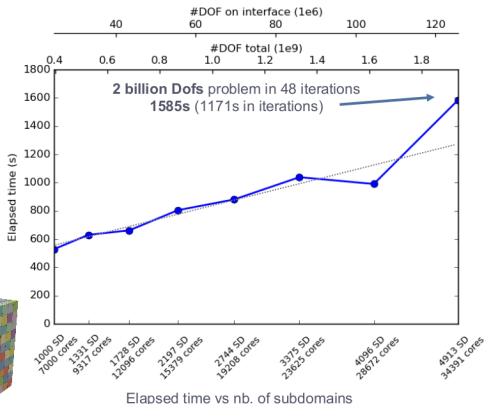
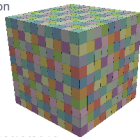
FETI weak scalability (1 000 to 4 913 sd) up to 2MM Dof

Study FETI (historical algorithm) up to billion Dofs on homogeneous problem

Test case : cube made of identical sub-cubes

- Each sub-cube is a subdomain
→ Total size grows with number of subdomains
- Homogeneous linear elastic behavior
- Difficulties : bandwidth of matrices, high memory requirement
- Total problem size from **392 million to 1,929 billion Dof**
- Resolution: 400 kDof and 7 cores per subdomains

Example of configuration
(1 000 sub-domains)



1 Safran Tech / Confidential / HPC / M&S-CAM / 12/19/2016

Ce document et les informations qu'il contient sont la propriété de Safran. Ils ne doivent pas être copiés ni communiqués à un tiers sans l'autorisation préalable et écrite de Safran.

SAFRAN

Avec l'aimable autorisation d'Augustin Parret-Fréaud (SafranTech)

Plan de la présentation

- 1 Contexte
- 2 Bilan quantitatif
- 3 Les ingrédients fondamentaux des DDM
- 4 **Quelques contributions**
 - Vers le calcul haute performance en ingénierie
 - Calcul non-intrusif
- 5 Conclusion

Vers le calcul haute performance

Objectifs

- Prendre en compte le plus tôt possible la non-linéarité du problème
- Mettre en place des solveurs robustes et rapides
- Utiliser au maximum l'information numérique
- Vérifier la qualité du calcul et l'adapter si besoin.

Pistes d'étude

- Les méthodes Schur-Newton-Krylov (BDD-NL, FETI-NL, FETI2LM-NL)
- La méthode Latin (Directions alternées-Schwarz optimisé-stationnarité)

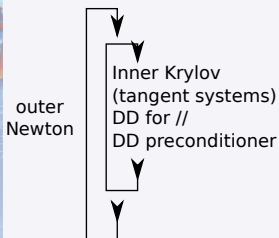
Association Schur et Newton

Approche Newton-Krylov-Schur

Trouver le déplacement **global** u tq

$$f_{int}(u) + f_{ext} = 0$$

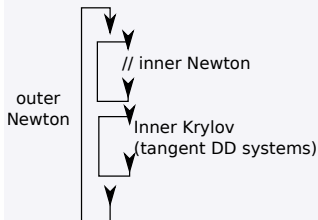
linéariser and résoudre par DDM.



Approche Schur-Newton-Krylov

Trouver le déplacement d'**interface** u_b tq

$$\begin{cases} \forall s, f_{int,i}^s(u^s) + f_{ext,i}^s = 0 \\ u^s = u_b \text{ on the interface} \\ \text{équilibre des réactions } \lambda^s \\ \forall s, f_{int,b}^s(u^s) + f_{ext,b}^s =: -\lambda^s \end{cases}$$



L'objectif est de remplacer des itérations de Krylov (échanges) par des itérations de Newton locales. On parle de relocalisation non-linéaire⁷. Des idées similaires pour Schwarz existent depuis plus longtemps⁸.

7. [Cresta OA CR 2007, LG OA PG 2009, Hinojosa 2014, JP PG CR 2008, Klawonn 2015]

8. [Dryia 1997], ASPIN [Cai, Keyes 2002], RASPEN [Gander 2015], Alternatif [Badea, 1991], Latin [Ladevèze, 1985]

Formalisme pour la relocalisation non-linéaire

cas de deux sous-domaines

• On définit (formellement) l'opérateur Dirichlet-vers-Neumann $\lambda^s = \mathbf{S}^s(\mathbf{u}_b^s; \mathbf{f}_{\text{ext}})$

• On cherche le déplacement d'interface \mathbf{U} tel que :

$$\mathbf{S}^1(\mathbf{U}; \mathbf{f}) + \mathbf{S}^2(\mathbf{U}; \mathbf{f}) = 0$$

• On linéarise

$$[\partial \mathbf{S}_i^1 + \partial \mathbf{S}_i^2] d\mathbf{U}_i = -(\mathbf{S}^1(\mathbf{U}_i; \mathbf{f}) + \mathbf{S}^2(\mathbf{U}_i; \mathbf{f}))$$

- le membre de droite correspond à la résolution de problèmes non-linéaires indépendants par sous-domaines
- le membre de gauche est *calculable*, il est de type BDD.
- le résidu global est un saut d'effort

• La méthode est un Newton inexact⁹
avec de 2 critères de convergence à adapter¹⁰

9. [Dembo 1982]

10. [CN PG CR JP 2016]

On peut définir une version **duale** en HPP (Neumann-vers-Dirichlet) \longrightarrow FETI-NL

$$\mathbf{u}_b^s = \mathbf{F}^s(\boldsymbol{\lambda}^s; \mathbf{f}) + \mathbf{R}^s \alpha^s$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^s / \quad \mathbf{F}^1(+\boldsymbol{\Lambda}; \mathbf{f}) - \mathbf{F}^2(-\boldsymbol{\Lambda}; \mathbf{f}) + \mathbf{R}^1 \alpha^1 - \mathbf{R}^2 \alpha^2 = 0$$

+ admissibilité vs modes rigides

On peut définir une version **mixte** (Robin-vers-Dirichlet) \longrightarrow FETI2LM-NL.

$$\boldsymbol{\mu}^s = \mathbf{Q}^s \mathbf{u}_b^s + \boldsymbol{\lambda}^s$$

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{M}^s(\boldsymbol{\mu}^s; \mathbf{f})$$

$$(\mathbf{Q}^1 + \mathbf{Q}^2)^{-1}(\boldsymbol{\mu}^1 + \boldsymbol{\mu}^2) - \mathbf{u}^s = 0, \forall s$$

\mathbf{Q}^s doit représenter la rigidité environnante. Un bon choix étend le domaine d'existence de l'opérateur Robin-vers-Dirichlet, évite les instabilités locales et permet d'augmenter les incréments^{11 12}.

11. [Cresta OA CR 2007, LG OA PG 2011]

12. Sur le choix de CL de Robin [Lions 90, Ladevèze 2000, Gander 2006, Magoules 2006, Roux 2009, Japhet 2014, GD PG CR 2011, KS OA PG 2012]

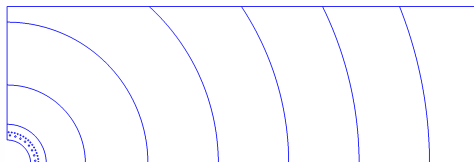


FIGURE – Problème de plasticité localisée

Increment of loading	0.2	0.4	0.8	1	1.3
Spread of nonlinearity	Elastic	1SD plastifies		Several SD plastify	
Primal/Classic	1	1	0.75	0.8125	0.815
Dual/Classic	0.5	0.75	0.833	1.25	2.96
Mixed/Classic, $\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{bb}$	0.5	0.75	0.667	0.75	0.778
Mixed/Classic, \mathbf{Q} opti	0.5	0.75	0.583	0.563	0.667

TABLE – Ratios of cumulated global iterations between nonlinearly localized and classic methods

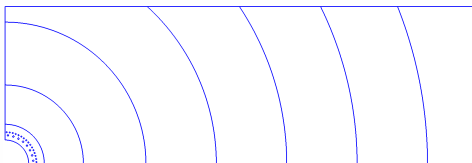


FIGURE – Problème de plasticité localisée

Increment of loading	0.2	0.4	0.8	1	1.3
Spread of nonlinearity	Elastic	1SD plastifies		Several SD plastify	
Primal/Classic	1	1	0.745	0.806	0.809
Dual/Classic	0.474	0.701	0.766	1.159	2.734
Mixed/Classic, $\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{bb}$	0.5	0.753	0.664	0.745	0.775
Mixed/Classic, \mathbf{Q} opti	0.5	0.753	0.579	0.557	0.662

TABLE – Ratios of cumulated Krylov iterations between nonlinearly localized and classic methods

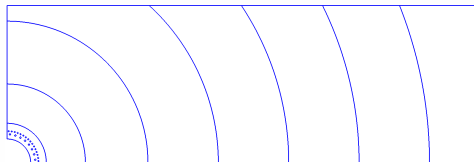


FIGURE – Problème de plasticité localisée

Increment of loading	0.2	0.4	0.8	1	1.3
Spread of nonlinearity	Elastic	1SD plastifies		Several SD plastify	
Primal/Classic	1.5	1.75	2	2.438	2.778
Dual/Classic	0.5	1.5	2.667	4.75	14.444
Mixed/Classic, $\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{bb}$	0.5	1.25	1.917	2.316	2.667
Mixed/Classic, \mathbf{Q} opti	0	1.25	1.5	1.563	2.222

TABLE – Ratios of cumulated local iterations between nonlinearly localized and classic methods

Conclusion sur le non-linéaire

Condensation non-linéaire FETI/BDD/FETI2LM - NL

- Augmentation du travail par sous-domaine
- Problème de l'équilibrage de charge (adaptation et *green computing*)
- Risques d'instabilités locales
- Mise en œuvre ambitieuse prévue (ANR SEMAFOR)

Autre piste : méthode Latin

- Également une méthode mixte.
- Localisation beaucoup plus poussée de la non-linéarité
→ besoin de monter d'une échelle pour mieux diffuser les phénomènes¹³.

Teaser – Thèse de Camille Negrello

- Une heuristique sexy pour la construction du paramètre de Robin Q^S
- Une version encore plus non-linéaire que la relocalisation non-linéaire

13. [PK OA PG 2010]

Forme additive du problème à résoudre et du préconditionneur

$$\left[\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^s \mathbf{S}^s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)T} \right] \mathbf{P}^T \left(\left[\sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{F}^s \mathbf{B}^{(s)T} \right] \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda} - \sum_s \mathbf{B}^s (\mathbf{d}^s - \mathbf{F}^s \mathbf{B}^{(s)T} \boldsymbol{\Lambda}_0) \right) = 0$$

avec \mathbf{B}^s les opérateurs d'assemblage, $\tilde{\mathbf{B}}^s$ les *scalings*¹⁴ ($\sum_s \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)T} = \mathbf{I}$)
 \mathbf{P} le projecteur grossier, $\boldsymbol{\Lambda}_0$ l'initialisation vs modes rigides
 $\mathbf{F}^s = \mathbf{S}^{s+}$ les compléments de Schur dual et primal

On utilise un gradient conjugué préconditionné projeté

Problèmes aux valeurs propres associé

$$\mathbf{P}^T \left[\sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{F}^s \mathbf{B}^{(s)T} \right] \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda}_i = \kappa_i \left[\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^s \mathbf{S}^s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)T} \right]^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_i$$

On a $\forall i, 1 \leq \kappa_i$

C'est donc le haut du spectre (κ_i) qui pilote la convergence

14. [Rixen 1998, Klawonn 2001, PG CR DR 2003]

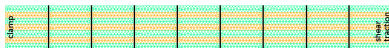


FIGURE – Poutre avec décomposition droite

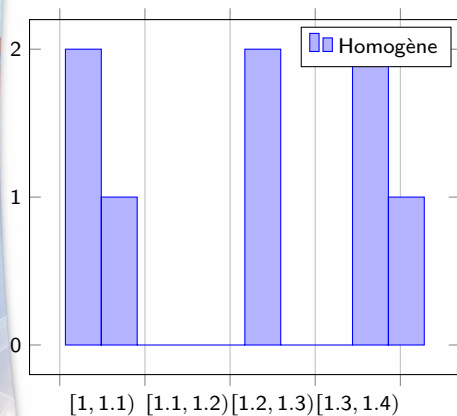


FIGURE – Spectre

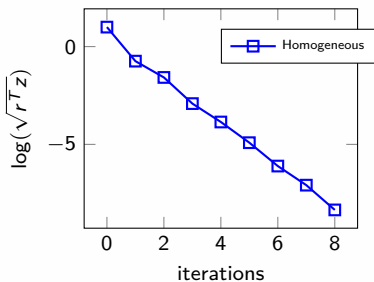


FIGURE – Convergence



FIGURE – Décomposition irrégulière

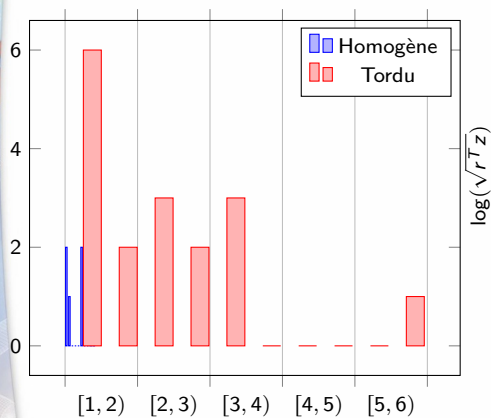


FIGURE – Spectre

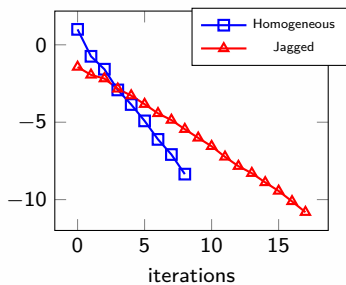


FIGURE – Convergence

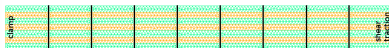


FIGURE – Poutre avec décomposition droite

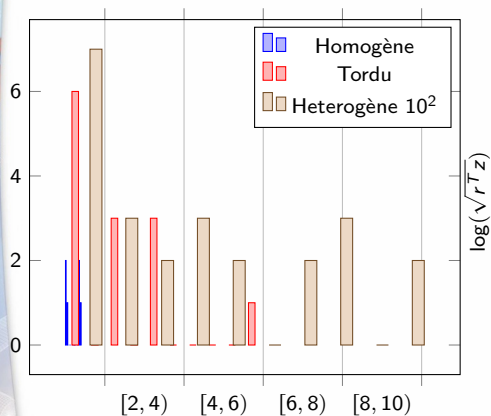


FIGURE – Spectre

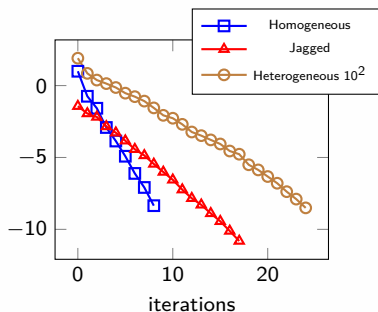


FIGURE – Convergence

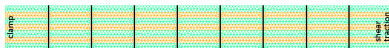


FIGURE – Poutre avec décomposition droite

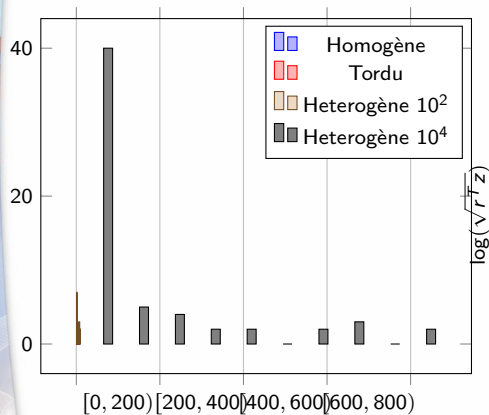


FIGURE – Spectre

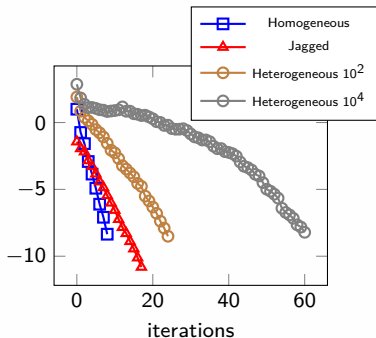


FIGURE – Convergence

... dues à des phénomènes locaux non-physiques à influence globale



Décomposition irrégulière



Contributions locales à la direction de recherche
L'irrégularité entraîne des phénomènes non désirés.

- Solution 1 : prédire et supprimer les mauvais modes (Geneo, adaptive FETIDP, deluxe scaling)¹⁵
- Solution 2 : limiter les effets à la volée (FETI-S aka MP-FETI)



Classical Z



Optimized Z

15. [Spillane Rixen 2013, Nataf Dolean Jolivet 2016, Klawonn 2016, Widlund 2014, Galvis, Efendiev, Pechstein, Driya, Sarkis...]

Il existe donc des grands κ_j valeurs propres.

$$\mathbf{P}^T \left[\sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{F}^s \mathbf{B}^s \right]^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda}_j = \kappa_j \left[\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^s \mathbf{S}^s \tilde{\mathbf{B}}^s \right]^T \boldsymbol{\Lambda}_j$$

La théorie GENE0 permet de casser ce problème aux valeurs propres en N sous-problèmes et montre l'origine locale des grandes valeurs propres. GENE0 propose d'agrandir l'espace grossier avec les modes problématiques.

Propositions

- Dans le cadre de la résolution d'une succession de systèmes proches, post-traiter les modes problématiques et les injecter dans les futurs problèmes grossiers \rightarrow **recyclage**¹⁶
- Définir un second membre **bloc** pour mieux explorer les composantes locales des opérateurs (B-FETI) \rightarrow pas très extensible¹⁷
- Définir à chaque itération une **famille de directions de recherche** d'origine locale et optimiser dans ce sous-espace (MP-FETI)¹⁸ \rightarrow plus extensible + adaptation possible¹⁹.

16. [PG CR JP 2013, Vasseur 2014]

17. [PG DR FXR NS 2015]

18. [Bridson 2006, Greif 2012, 2014, PG DR FXR NS 2015]

19. [Spillane 2016, APF CB NS PG 2017]

$$\lambda_0 = \mathbf{AG}(\mathbf{G}^\top \mathbf{AG})^{-1} \mathbf{e} + \mathbf{P}\lambda_{00}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{P}^\top (\mathbf{d} - \mathbf{F}\lambda_0)$$

$$\mathbf{Z}_0 = \left(\tilde{\mathbf{S}}^1 \mathbf{r}_0 | \dots | \tilde{\mathbf{S}}^N \mathbf{r}_0 \right), \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{P}\mathbf{Z}_0, \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{S}}^s = \tilde{\mathbf{B}}^s \mathbf{S}^s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)\top}$$

while $\sqrt{\mathbf{r}_i^\top \mathbf{Z}_i \mathbf{1}} > \epsilon$ do

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{F}\mathbf{W}_i, \quad \Delta_i = \mathbf{Q}_i^\top \mathbf{W}_i, \quad \gamma_i = \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{r}_i, \quad \alpha_i = \Delta_i^\dagger \gamma_i$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \mathbf{W}_i \alpha_i, \quad \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \mathbf{P}^\top \mathbf{Q}_i \alpha_i$$

switch do

case *Global τ -test* do

$$\mathbf{Z}_{i+1} = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{S}}^1 \mathbf{r}_{i+1} | \dots | \tilde{\mathbf{S}}^N \mathbf{r}_{i+1}) & \text{if } t_i := \frac{\gamma_i^\top \alpha_i}{\mathbf{r}_{i+1}^\top \mathbf{z}_{i+1}} < \tau, \\ \left[\sum_s \tilde{\mathbf{S}}^s \right] \mathbf{r}_{i+1} & \text{otherwise (classical FETI).} \end{cases}$$

end

case *Local τ -test* do

$$t_i^s = \frac{(\mathbf{W}_i \alpha_i)^\top \mathbf{F}^s (\mathbf{W}_i \alpha_i)}{\mathbf{r}_{i+1}^\top \tilde{\mathbf{S}}^s \mathbf{r}_{i+1}}$$

$$\mathbf{Z}_{i+1} = \text{concatenate}(\{\tilde{\mathbf{S}}^s \mathbf{r}_{i+1}; t_i^s < \tau\}, \sum_{t_i^s > \tau} \tilde{\mathbf{S}}^s \mathbf{r}_{i+1})$$

end

end

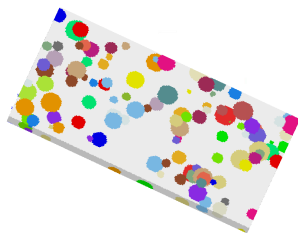
$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{P}\mathbf{Z}_{i+1}$$

$$\text{for } 0 \leq j \leq i \text{ do } \begin{cases} \Phi_{i,j} = \mathbf{Q}_j^\top \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \leftarrow \mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_j \Delta_j^\dagger \Phi_{i,j} \end{cases}$$

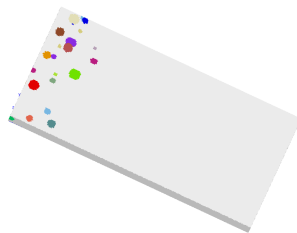
end

Illustration AMPFETI-Local

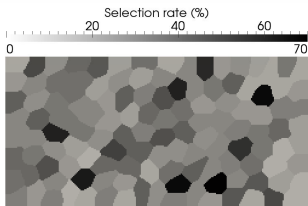
plaque hétérogène 128 sous-domaines



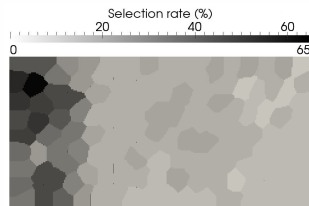
(a) Inclusions réparties



(b) Inclusions regroupées



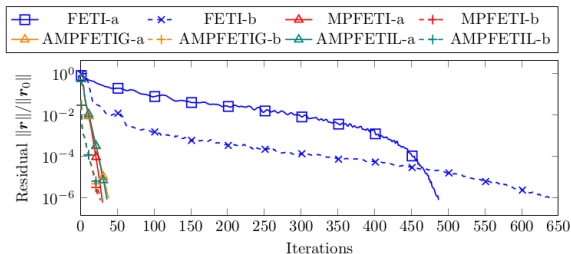
(c) Inclusions réparties



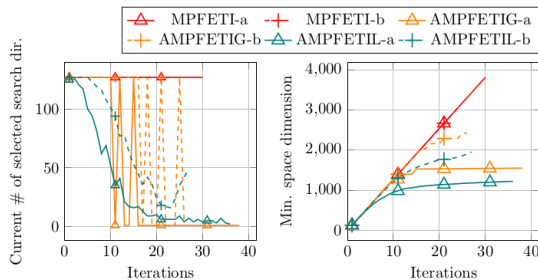
(d) Inclusions regroupées

FIGURE – Taux de sélection des directions fournies par chaque sous-domaine (AMPFETIL-a)

Performances AMPFETI



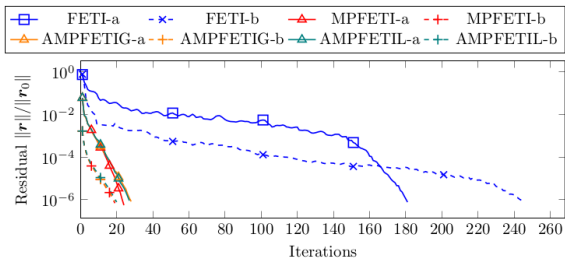
(a) Convergence history for spread out inclusions



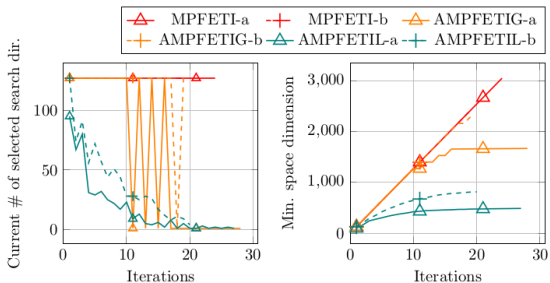
(c) Evolution of the size of minimization space for spread out inclusions

FIGURE – Inclusions réparties

Performances AMPFETI



(a) Convergence history for gathered inclusions



(c) Evolution of the size of the minimization space for gathered inclusions

FIGURE – Inclusions regroupées

Conclusion sur les solveurs linéaires

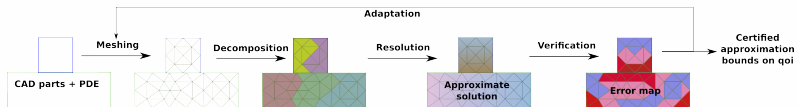
- Le multipréconditionnement augmente fortement la robustesse du solveur.
- Les adaptations permettent de limiter les coûts.
- Le test local fonctionne bien mais il a un réel surcoût en temps de calcul
- Sur des cas réels, les méthodes AMP vont au moins $2\times$ plus vite que FETI.
- Pour l'instant limite $\simeq 100\text{M}$ ddls / 500 sd pour les méthodes AMP.
- Travail sur une meilleure mise en œuvre et sur d'autres adaptations.
- Les méthodes (A)MP fonctionnent pour certains solveurs non-SPD²⁰.

- Le recyclage des espaces de Krylov a été validé sur une classe étendue de problèmes²¹.
- Les (pseudo)-périodicités peuvent être exploitées façon multipréconditionnement²².

20. [NS CB PG 2017]

21. [PG CR JP 2013]

22. [PG DR CR 2008]



- La vérification d'un calcul permet de le valider ou d'enclencher une procédure d'adaptation.
- C'est une étape dont le coût est proche de celui du calcul initial.

Travaux

- Mise en place du calcul parallèle de champs admissibles pour les méthodes FETI(DP) et BDD(C) en préprocessing des méthodes séquentielles²³
- Travail sur les bornes²⁴
- Travail sur les quantités d'intérêt²⁵
- Quelques études sur l'adaptation

23. [Ladevèze et al. 1983, 1991, 2011, Parès 2006, 2009]

24. [Vohralik 2007, 2010], [Prudhomme 1999, Parès 2006]

25. [Stein 2001, Ladevèze 2006, 2008, Becker 2001, Rannacher 2009, Cottreau 2009]

Construction de champs admissibles

À chaque itération de FETI(DP)/BDD(C)

on peut construire

- u_D continu partout et équilibré dans les sous-domaines $u_D \in H^1(\Omega)$
- u_N équilibré dans les sous-domaines avec des réactions équilibrés aux interfaces

Après un post-processing des réactions aux points multiples, on peut reconstruire un champ $\hat{\sigma}_N \in H^{div}(\Omega)$ admissible.

Bornes sur l'erreur globale

$$\begin{aligned}\|u - u_D\| &\leq \sqrt{\sum_s e_{cr}^2(u_D^s, \hat{\sigma}_N^s)} \\ \|u - u_N\| &\leq \sqrt{\sum_s e_{cr}^2(u_N^s, \hat{\sigma}_N^s)} + |r| \\ \frac{R_N(w)}{\|w\|} - |r| &\leq \|u - u_D\| \leq \sqrt{\sum_s e_{cr}^2(u_N^s, \hat{\sigma}_N^s)} + |r|\end{aligned}$$

avec $w \in H_0^1(\Omega)$

Pour des quantités d'intérêt linéaires, on utilise un **problème adjoint** résolu simultanément par un **solveur bloc** \rightarrow bornes inf et sup.

Définition d'un critère d'arrêt objectif

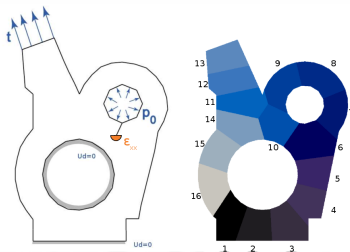


FIGURE – Structure pré-fissurée : chargement direct et adjoint, décomposition en 16 sd

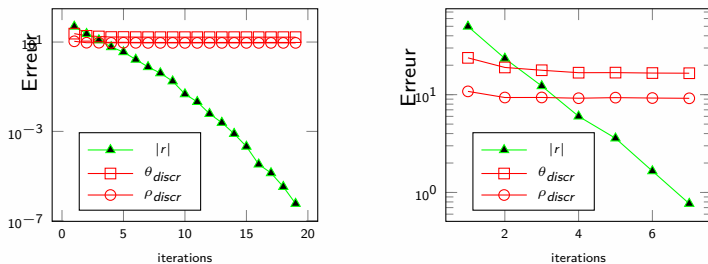


FIGURE – Enveloppe de l'erreur due à la discrétisation et évolution du résidu

On autorise des raffinements hiérarchiques indépendants par sous-domaines. On sélectionne les sous-domaines contribuant majoritairement à l'erreur.

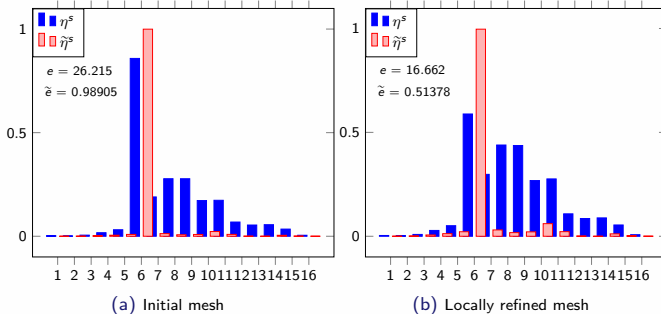


FIGURE – Distribution of error within subdomains

Mesh	e	\tilde{e}	l_H	$l_{HH,2}$	$\frac{1}{2}e\tilde{e}$
Uniform	26.215	0.98905	2.4915	3.1935	12.964
Locally refined	16.662	0.51378	3.2165	0.086055	4.2803

TABLE – Performance of local refined for the cracked structure

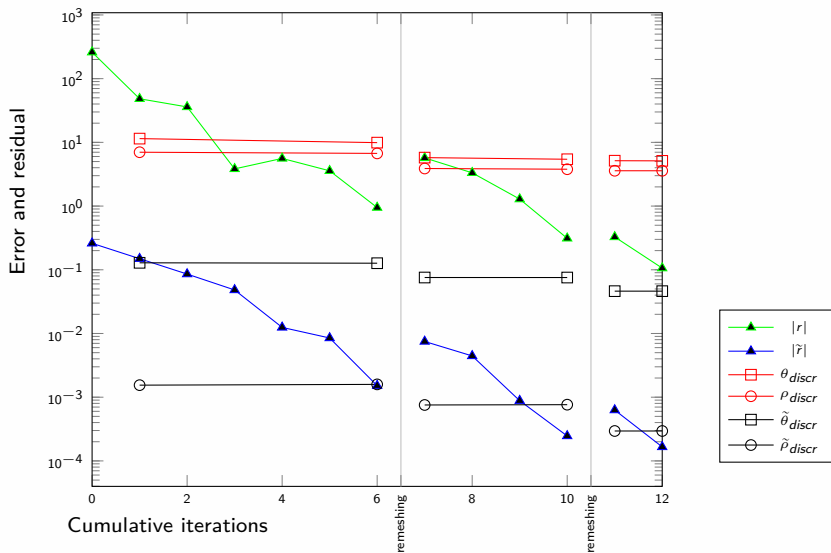


FIGURE – Erreurs de discrétisation et résidus au cours des itérations

Chaîne cohérente de calcul autour de la famille FETI/BDD.

- Calcul non-linéaire localisé
- Solveur tangent d'interface robuste
- Calcul d'erreur intégré, possibilité d'adaptation locale

Une autre piste d'étude concerne la méthode Latin.

Teaser – Thèse de Paul Oumaziz

- Revisite de la méthode DD Latin avec contact frottant.
- Étude des extensions multiéchelles et accélérations.
- Mise en œuvre sur une base de code_aster.

Objectifs

- S'insérer dans le cadre logiciel de l'industriel.
- Apporter de la précision et de l'efficacité à ses calculs.
- Permettre le couplage avec des logiciels de recherche.

La contrainte est donc de ne pas modifier un modèle global imposé par l'industriel et utiliser son logiciel.

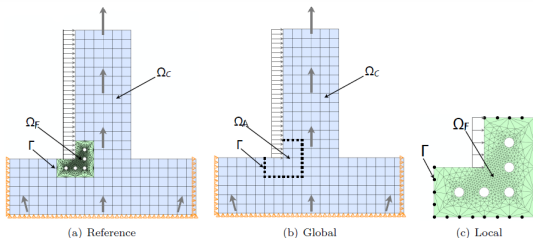


FIGURE – Modèles de référence (complémentaire + fin), modèle global (complémentaire + auxiliaire) et modèle local (fin)

Applications du calcul non-intrusif

- *Submodeling* exact
- Introduction de comportements/géométries complexes avec maillage adapté.
- Couplage plaque/3D pour l'étude de liaisons boulonnées.
- Utilisation de logiciels dédiés à l'étude locale.
- Couplage FEM/xFEM/modèle analytique pour la fissuration (UTO).
- Décomposition de domaine simple à coder (UTO).
- Couplage déterministe/stochastique (GeM).
- Couplage méso/micro modèle.

Rappel sur l'algorithme non-intrusif

Mécaniquement le plus simple est de poser le problème en terme de saut de contrainte \mathbf{p} à imposer sur le modèle global pour équilibrer le modèle local et la zone complémentaire.

Algorithm 1: Non-invasive stationary iterations with relaxation

Arbitrary initialization \mathbf{p}_0

for $j \in [0, \dots, m]$ do

$[\mathbf{u}_j^G] = \text{SolveGlobal}(\mathbf{p}_j; \mathbf{f}^G)$

$[\mathbf{u}_j^F, \lambda_j^F, \lambda_j^A] = \text{SolveFine//Aux}(\mathbf{u}_j^G; \mathbf{f}^F, \mathbf{f}^A)$

 Residual : $\mathbf{r}_j = -(\lambda_j^F + \mathbf{p}_j - \lambda_j^A)$

 Update : $\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \mathbf{r}_j$;

end

Interprétations

- La méthode peut s'interpréter comme une itération de Schwarz alterné sans recouvrement.
 - La représentation grossière de la zone d'intérêt fourni une **impédance** et une initialisation de qualité.
 - L'autre impédance est infinie (condition de Dirichlet).
- Elle s'interprète aussi en terme d'*operator splitting*, de multigrille localisée.

Accélération

- Δ^2 de Aitken
- Quasi Newton

Extensions

- Remplacement de la condition de Dirichlet par une bonne condition de Robin²⁶, passage à une version parallèle.
- Traitement des maillages incompatibles par un recouvrement²⁷.

Teaser – thèse de Maxime Blanchard

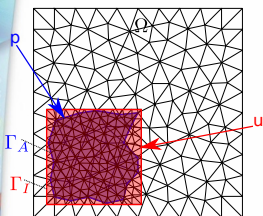
- Gradient conjugué en linéaire et non-linéaire
- Traitement des problèmes totalement non-linéaire
- Calcul non-intrusif de cycle limite en élastoviscoplasticité
- Mise en œuvre dans Abaqus, applications SNECMA

26. [LG OA PG 2011]



27. [GG PG OA 2014]

Utilisation d'un recouvrement

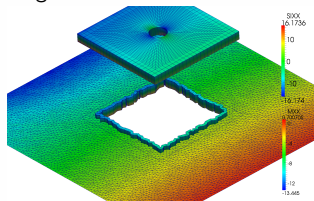
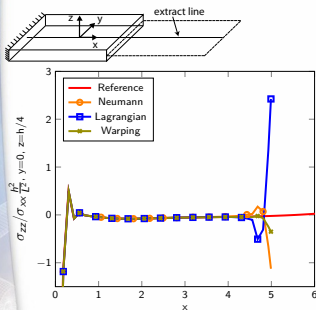
a priori différent de [Lozinsky Laborde]



La zone Auxiliaire est le grossier inscrit dans la zone d'intérêt.

-  Descente G→L en déplacement sur $\partial\Omega^I$
-  Montée L→G en effort sur $\partial\Omega^A$

Utilisation dans le couplage plaque/3D pour « gommer » les effets de bord.



Utilisation d'un maillage intermédiaire pour calculer l'effort correctif (code_aster).

$$\lambda_i^F = \int_{\Omega^A} (\sigma_h^F : \varepsilon(\phi_i^G) - f \cdot \phi_i^G) dx$$

Illustration du global local

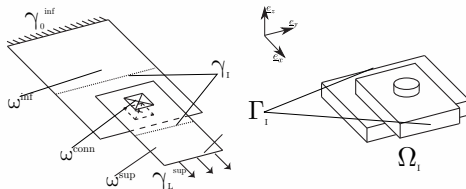


FIGURE – Gauche, modèle global : 2 plaques et 1 connecteur 1D → Code_aster
Droite, modèle local : représentation précise de la zone boulonnée → COFAST

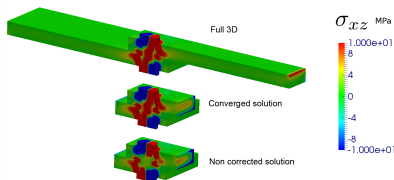


FIGURE – Distribution d'effort transverse

Moralité : le *submodeling* est souvent très faux ; le couplage converge très vite même avec un modèle global grossier.

Les méthodes de décomposition de domaine. . .

- ... comme support de modélisation
- ... comme cadre de base pour définir des solveurs parallèles efficaces en linéaire et non-linéaire, et pour vérifier et adapter les calculs.
- ... comme outil pour brancher les méthodes de la recherche dans le contexte industriel

Ce que je n'ai pas pu évoquer

- La méthode STARFLEET pour la reconstruction séquentielle de champs statiquement admissibles.
- Un problème grossier pour la TVRC (méthode de Trefftz indirecte + Galerkin discontinu avec couplage antihermitien).
- L'étude numérique de problèmes non-linéaires couplés parabolique/elliptique (modèles de MEMS).

Gros solveurs

- Une mise en œuvre à 3 niveaux de FETI/BDD en non-linéaire dans Zset [CN].
- Adaptation pour le multipréconditionnement en non-symétrique.
- Un outil de décomposition qui évite les interfaces tordues, qui s'adapte aux hétérogénéités [YEG] et qui faciliterait l'usage d'accélérateurs (GPU).
- Vérification en non-linéaire avec qoi et adaptation parallèle.
- Une version HPC de la méthode Latin dans Petsc (pour utilisation dans code_aster) [MV] + continuer à revisiter la Latin.

Calcul non-intrusif

- Parallélisme en temps.
- Mise en œuvre par co-simulation Abaqus.
- Des scripts python génériques abstrayant les logiciels de calcul.

mais aussi

- Étude du problème de Cauchy elliptique par des techniques proches des DDM, identification de fissures [RF].

Merci pour votre attention

Merci aux (post) doctorants

Pierre Kerfriden, Julien Pebrel, Lionel Gendre, Augustin Parret-Fréaud, Karin Saavedra, Geoffrey Desmeure, Guillaume Guguin, Valentine Rey, Christina Lienstromberg, Camille Negrello, Paul Oumaziz, Maxime Blanchard, Renaud Ferrier, Christophe Bovet, Mathieu Vitse

Merci aux directeurs

Olivier Allix, Christian Rey, Pierre-Alain Boucard, Joachim Escher

Merci aux partenaires académiques

Daniel Rixen, Louis Kovalevsky, François-Xavier Roux, Nicole Spillane, Frédéric Feyel, Vincent Chiaruttini.

Merci aux partenaires industriels

Stéphane Guinard (Airbus), Mickael Abbas, Ayavi-Dzifa Kudawoo, Nicolas Tardieu (EDF), *op. cit.* (SafranGroup), *op. cit.* (ONERA).

Merci aux services

Lydia Matijevic, DSI LMT (PRCC), ENS

Merci à tous