



**HAL**  
open science

# Modélisation thermomécanique multi-échelles des frottements sous chocs

Franck Dambakizi

► **To cite this version:**

Franck Dambakizi. Modélisation thermomécanique multi-échelles des frottements sous chocs . Modélisation et simulation. Ecole Polytechnique, 2009. Français. NNT: . tel-01470728

**HAL Id: tel-01470728**

**<https://hal.science/tel-01470728v1>**

Submitted on 17 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

**Franck DAMBAKIZI**

pour obtenir le grade de :  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Discipline : *Mécanique*

## MODÉLISATION THERMOMÉCANIQUE MULTI-ÉCHELLES DES FROTTEMENTS SOUS CHOCS

- Mise en œuvre dans un code hydrodynamique lagrangien -

soutenue à l'École Polytechnique, Palaiseau, le 30 novembre 2009  
devant le jury composé de :

M. Andrei CONSTANTINESCU	Directeur de recherche CNRS <i>LMS, École Polytechnique</i>	(Président du jury)
M. Patrick LABORDE	Professeur <i>IMT, Université Paul Sabatier</i>	(Rapporteur)
M. Jean-François MOLINARI	Professeur <i>EPFL</i>	(Rapporteur)
M. Antoine JUANICOTENA	Ingénieur - Docteur <i>CEA/DAM/CESTA</i>	(Examineur)
M. Nicolas TRIANTAFYLLIDIS	Professeur <i>University of Michigan</i>	(Examineur)
M. Jean-Philippe PERLAT	Ingénieur - Docteur <i>CEA/DAM/DIF</i>	(Examineur)
M. Patrick LE TALLEC	Professeur <i>LMS, École Polytechnique</i>	(Directeur de thèse)







## Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse, Patrick Le Tallec et à mon encadrant de thèse, Jean-Philippe Perlat. Merci d'avoir accepté de diriger mon travail et de poursuivre la collaboration que nous avons initiée en 2006, avec Benoit Desjardins, dans le cadre de mon stage de DEA. J'ai été particulièrement heureux de passer ces trois années de thèse sous votre encadrement, entre le CEA de Bruyères-le-Châtel, et le Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) de l'École Polytechnique. Je vous suis extrêmement reconnaissant pour votre confiance, votre disponibilité et la liberté que vous avez su m'accorder. Patrick, merci pour ton écoute attentive et tes conseils aussi précieux qu'avisés. Jean-Philippe, merci pour ton enthousiasme motivant.

J'exprime ma profonde gratitude à l'ensemble des membres du jury. À Andrei Constantinescu, président du jury, ainsi qu'à Patrick Laborde et Jean-François Molinari, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je tiens également à remercier Nick Triantafillidis et Antoine Junicotena pour leur présence comme examinateurs au sein du jury. Antoine, merci de t'être replongé pour un temps dans la science des frottements sous chocs.

Merci à Eric Van Renterghem de m'avoir accueilli dans son service au CEA, et pour sa correction attentive du présent manuscrit. Je tiens également à vivement remercier Renaud Motte et l'ensemble des membres du laboratoire pour leur accueil chaleureux. Une pensée toute particulière pour Corinne, Vincent et Claire qui m'a permis de passer ma thèse dans les meilleures conditions.

Celle-ci n'aurait pu se réaliser sans le soutien du LMS. J'ai eu le bonheur et la chance d'y croiser des personnes passionnées et passionnantes. Je tiens notamment à remercier Bernard Halphen de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, ainsi que Marc Bonnet et Habibou Maitournam pour nos riches discussions. Merci par ailleurs à Alexandra Joly et Christiane Periam pour leur disponibilité et gentillesse.

La transmission étant la condition du savoir, je tiens à exprimer ma reconnaissance à l'ensemble des professeurs qui ont su éveiller ma curiosité en partageant leur passion, me conduisant ainsi vers la recherche appliquée, que ce soit à l'EEIGM de Nancy, à l'ETSEIB de Barcelone, à l'ENS de Cachan et à l'École Polytechnique. Merci en particulier à Jorge Alcala, de l'Université Polytechnique de Catalogne, pour m'avoir fait découvrir le monde de la recherche.

Une pensée chaleureuse pour tous les stagiaires, thésards et post-doctorants du CEA et du LMS, avec qui j'ai eu la joie de partager ces trois années. Merci à Aude Champmartin, Emeric Falize, Xavier Davoine, Virginie Lombart, Marc-Antoine Lafay, Mathieu Drouin, Xavier Barthélémy, Xavier Pialat, Christophe Fochessato, Mathieu Peybernes, Julien Cartier, Solène Le Bourdieu, Hughes Egly, Zorah Hammouch, Sarah Mauger, Déborah Elbaz, Yoann Levy, Laurent Dastugue, Michaël Carrie, Damien Hérisson, Kerem Ege, Ionut Negrau, Cédric Bellis, Stéphanie Chaillat, et Eva Heripré.

Au-delà de l'aventure scientifique que représente le doctorat, ces trois années de thèse auront également été pour moi l'occasion de contribuer à l'action de l'École Polytechnique pour améliorer et animer le quotidien des doctorants. Aussi, je remercie la merveilleuse équipe X'Doc 2007 pour tous les moments passés ensemble et pour votre implication sans faille. Merci à Cécile Krebs, Gaëlle Lehoucq, Andreea Sodolescu, Gwenaël Edeline, Thanh-Liêm Nguyễn, Pierre Lombard, Florian Richoux, Michel Ynard et Eric Lignon. Mes remerciements vont également à l'ensemble des membres de l'École Doctorale de l'X. Merci à Michel Rosso, Fabrice et Alexandra pour toutes les actions que vous mettez en œuvre auprès des doctorants, et pour promouvoir de si belle manière la formation par la recherche.

J'adresse également une pensée amicale à mes camarades de la Préparation Militaire Supérieur Etat-Major, promotion Castex 2006/2007.

Un grand merci à mes amis de longue date, Audrey, Gabrielle, Grégoire, Anne-Gaëlle, Aurélie, Michaël, Étienne, Hélène, Marine, Anne, Dominique, Lilia, Ali, Benoit, Pamela et Mathieu.

Je tiens également à remercier ma famille. Pour votre soutien tout au long de ma thèse et votre présence le jour de ma soutenance.

Merci enfin à toi Marion, pour ton aide précieuse, ton attention et tes encouragements.







## Table des matières

Table des matières	9
Résumé court en français	15
Short Abstract in English	17
Introduction générale	19
<b>I État de l'art</b>	<b>23</b>
<hr/>	
1 Introduction aux frottements sous chocs	25
1.1 Caractérisation des frottements sous chocs	26
1.1.1 Sur les frottements dynamiques...	26
1.1.2 Qu'entendons nous par <i>frottements sous chocs</i> ?	27
1.1.3 Le contexte expérimental	28
1.2 Comportement thermomécanique des structures et interfaces métalliques mises en glissement par choc	30
1.2.1 Le comportement observé à l'échelle de la structure	30
1.2.2 Le comportement observé à l'échelle de l'interface	31
1.3 L'étude des frottements sous chocs au CEA/DAM	38
1.3.1 Le programme de recherche du CEA/DAM	38
1.3.2 La technique expérimentale du CEA/DAM	38
2 Modélisation classique des problèmes de frottement sous chocs	43
2.1 Éléments de modélisation	44
2.1.1 Représentation du problème et notations utilisées	44
2.1.2 Description du mouvement	46
2.1.3 Déformations du milieu continu et expression des contraintes	47
2.2 Le problème aux limites de base	51
2.2.1 Lois fondamentales de conservation	51
2.2.2 Lois constitutives	52
2.2.3 Modélisation des conditions aux limites spatio-temporelles	62
2.3 Modélisation des géométries simples dans l'espace $\mathbb{R}^2$ à deux dimensions.	71
2.3.1 Modélisation des problèmes en déformation plane	71
2.3.2 Récapitulatif du problème aux limites de référence dans $\mathbb{R}^2$	74

3	Gestion numérique des frottements sous choc	<b>79</b>
3.1	Introduction aux codes hydrodynamiques	80
3.1.1	Présentation et bref historique des codes de calcul hydrodynamiques	80
3.1.2	Principe de fonctionnement des codes hydrodynamiques	80
3.1.3	Les approches eulérienne et lagrangienne	82
3.2	Présentation du code hydrodynamique retenu pour cette étude	84
3.2.1	Éléments de discrétisation	84
3.2.2	Les équations discrètes résolues par le code	88
3.2.3	Résolution du problème discret	93
3.3	Traitement numérique des interfaces de contact dans les codes hydrodynamiques	98
3.3.1	Principe de résolution et notions relatives au traitement des interfaces discrètes	98
3.3.2	Gestion du contact	102
3.3.3	Gestion du frottement	103
3.4	Recalage numérique des tirs expérimentaux réalisés au CEA/DAM	106
3.4.1	Récapitulatif des expériences de tir	106
3.4.2	Interprétation des résultats par corrélations calculs/expériences	106
3.4.3	Problématiques	107
<b>II</b>	<b>Modélisation multi-échelles</b>	<b>111</b>
<hr/>		
	Introduction de la seconde partie	<b>113</b>
4	Approche multi-échelles par décomposition de domaines	<b>119</b>
4.1	Construction de la géométrie multi-échelles par décomposition de domaine	120
4.2	Le problème couplé de référence	121
4.2.1	Le problème global dans $\Omega_M(T)$ , loin de l'interface de glissement	122
4.2.2	Modélisations classiques des interfaces de glissement	125
4.2.3	Le problème thermomécanique local dans $\Omega_\mu$	126
4.2.4	Conditions de couplage	131
4.3	Le problème en écart sur $\Omega_\mu$	134
5	Simplification du problème en couche limite par analyse dimensionnelle	<b>139</b>
5.1	Écriture du problème sans dimension dans la couche limite $\Omega_\mu$	140
5.1.1	Notions préliminaires à l'étude dimensionnelle	140
5.1.2	Les lois d'échelles utilisées	141
5.1.3	Écriture du problème sans dimension dans la couche limite $\Omega_\mu$	143
5.1.4	Récapitulatif du problème sans dimension en couche limite	154
5.2	Analyse et simplification du problème en écart adimensionné	158
5.2.1	Estimation des nombres sans dimension et des valeurs caractéristiques	158
5.2.2	Applications numériques dans le cadre des expériences de tir du CEA/DAM	159
5.3	Le problème asymptotique en couche limite	161
6	Analyse de stabilité linéaire du problème asymptotique en couche limite	<b>169</b>
6.1	Écriture du problème en perturbations	170
6.1.1	Récapitulatif du système différentiel de base	170
6.1.2	Linéarisation du problème	171
6.1.3	Développement des perturbations en modes normaux	172
6.2	Analyse de stabilité du problème	174

6.2.1	Relation de dispersion . . . . .	174
6.2.2	Condition de stabilité . . . . .	175
6.3	Validation de la condition de stabilité . . . . .	176
6.3.1	Passage en variables dimensionnées . . . . .	176
6.3.2	Expressions des modules $Y_{\varepsilon_p}$ , $Y_\theta$ et de la contrainte $\tau_0$ . . . . .	176
6.3.3	Réécriture de la condition de stabilité dans le cas de matériaux SCG . . . . .	179
6.3.4	Validation de la condition de stabilité par application numérique . . . . .	179
 <b>III Implémentation et résolution numérique</b>		<b>185</b>
<hr/>		
	Introduction de la troisième partie	<b>187</b>
7	Le modèle thermoélastique quasi-statique	<b>193</b>
7.1	Le cas limite thermoélastique quasistatique . . . . .	194
7.1.1	Les hypothèses de modélisation . . . . .	194
7.1.2	Le problème thermoélastique local . . . . .	195
7.2	Résolution du problème thermique en couche limite . . . . .	196
7.2.1	Solution analytique au problème thermique en régime transitoire . . . . .	196
7.2.2	Résolution numérique par la méthode de DUHAMEL . . . . .	202
7.2.3	Résolution numérique par la méthode des différences finies . . . . .	206
7.2.4	Recalage des tirs de V.PRAKASH et comparaison des différentes méthodes . . . . .	209
7.3	Résolution du problème thermoélastique quasi-statique . . . . .	212
7.3.1	Formulation discrète du problème thermoélastique quasi-statique . . . . .	212
7.3.2	Résolution du problème thermoélastique quasi-statique non-couplé . . . . .	215
7.3.3	Résolution du problème thermoélastique couplé . . . . .	219
7.3.4	Mise en oeuvre numérique et recalage des tirs expérimentaux du CEA/DAM . . . . .	225
7.4	Conclusion du chapitre . . . . .	229
8	Le modèle thermoélastoplastique quasi-statique	<b>231</b>
8.1	Présentation du modèle thermoélastoplastique quasistatique . . . . .	232
8.1.1	Récapitulatif des hypothèses de modélisation à l'échelle locale . . . . .	232
8.1.2	Le problème continu . . . . .	234
8.1.3	Le problème discret . . . . .	236
8.2	Résolution du problème thermoélastoplastique non-couplé . . . . .	240
8.2.1	Présentation du problème non-couplé . . . . .	240
8.2.2	Algorithme de résolution du problème non-couplé . . . . .	241
8.2.3	Applications numériques et validation qualitative . . . . .	245
8.3	Résolution du problème thermoélastoplastique couplé . . . . .	246
8.3.1	Principe de résolution du problème couplé . . . . .	246
8.3.2	Algorithme de résolution du problème couplé . . . . .	249
8.3.3	Validation du modèle par recalage des tirs réalisés au CEA/DAM . . . . .	253
	Conclusion générale	<b>259</b>
	Liste des publications et communications	<b>263</b>

<b>Annexes</b>	<b>267</b>
<hr/>	
A Algorithme de THOMAS (TDMA)	267
Bibliographie	271





## Résumé court en français

La mise en glissement par choc de structures métalliques s'accompagne de mécanismes thermomécaniques complexes et fortement couplés. Localisés au voisinage de l'interface au sein d'une couche de matière d'épaisseur micrométrique, ces phénomènes affectent les surfaces de contact et par conséquent la dynamique globale du glissement. Leur sévérité, quantifiée par la puissance dissipée par frottement, dépend de deux paramètres clefs :

- $[V]$ , la vitesse relative de glissement,
- $F_N$ , la pression de contact à l'interface.

Dans le cadre des applications spécifiques du CEA/DAM, où les structures sont soumises à d'importantes sollicitations dynamiques, les frottements se font à la fois aux grandes vitesses de glissement ( $[V] \sim 100 - 3000 m.s^{-1}$ ) et dans le domaine des hautes pressions dynamiques ( $F_N \sim 1 - 40 GPa$ ). Face à de telles sollicitations, la réponse thermomécanique observée à l'interface est essentiellement pilotée par deux mécanismes en compétition : l'adoucissement thermique et l'écroutissage mécanique de l'interface.

Une modélisation correcte des contacts frottant est donc nécessaire dès lors que l'on souhaite dimensionner ou garantir les structures par le calcul. Actuellement, la prise en compte du frottement dans les codes hydrodynamiques se heurte à **une problématique double** :

- **une problématique physique**, les sollicitations auxquelles sont soumis les matériaux sont telles que l'usage des lois classiques de frottement (loi de Coulomb) ne permet plus de décrire le comportement aux interfaces de contact de manière adéquate.
- **une problématique numérique** : l'échelle des mailles d'interface ( $\approx 100 \mu m$ ) classiquement utilisées dans les codes hydrodynamiques ne permet pas de capter les mécanismes thermomécaniques réellement mis en jeu aux échelles micrométriques ( $\approx 20 \mu m$ ).

Cette problématique double, caractéristique des problèmes de frottement sous chocs, s'explique par l'**aspect multi-échelles du problème**, conséquence directe de la localisation des phénomènes thermomécaniques au voisinage de l'interface.

La résolution numérique de la dynamique globale des structures nécessite donc une résolution plus fine du problème à l'échelle de l'interface. Pour y parvenir, l'objectif de cette thèse consiste à mettre en œuvre un modèle destiné à l'étude des frottements sous chocs et permettant d'identifier et de prendre en compte le fort couplage thermomécanique observé aux interfaces de glissement.

**La stratégie de modélisation retenue** repose sur une approche originale multi-échelles.



Le problème à l'interface est ainsi décomposé en un problème local et un problème global, tous deux étant reliés par des relations de couplage. Cette stratégie nous permet d'identifier et de prendre en compte les forts gradients observés aux interfaces de glissement, tout en limitant les coûts de calcul et de stockage.

- à l'échelle globale, le comportement de la structure est modélisé par une loi de comportement élastoplastique permettant de traiter les grandes déformations.
- à l'échelle locale, plusieurs modèles rhéologiques peuvent être employés pour traiter les mécanismes mis en jeu au voisinage de l'interface (modèle de fluide visqueux, modèle de rugosité, modèle d'interface fragilisée...). Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi de la traiter comme un solide thermoélastoplastique, en conservant les mêmes propriétés mécaniques qu'à l'échelle globale. Par analyse dimensionnelle nous montrons également que le problème associé se ramène à un problème unidimensionnel dans l'épaisseur de la couche de diffusion thermique.

En ce qui concerne **l'implémentation numérique du modèle**, chaque problème est discrétisé de manière indépendante. Ils sont ensuite résolus simultanément pour chaque nœud situé sur l'interface. Le problème global est résolu par le code hydrodynamique à l'aide d'un schéma explicite en temps. A l'échelle locale, le comportement thermoélastoplastique de l'interface est quant à lui résolu par un modèle de sous-maillages, à l'aide d'un schéma aux différences finies 1D, implicite en temps. Afin de tenir compte de l'architecture actuelle du code de calcul hydrodynamique, une stratégie de couplage en force a été retenue; la contrainte réelle de frottement est déterminée à l'échelle locale par le modèle de sous-maille qui la communique ensuite au code hydrodynamique. Nous en déduisons alors une valeur corrigée de la vitesse relative de glissement intégrant les phénomènes thermomécaniques observés localement. Deux variantes de ce modèle ont ainsi été implémentées et testées sur des situations expérimentales réelles :

- une première variante négligeant l'inertie locale ainsi que le comportement plastique dans le voisinage de l'interface. Ce modèle nous permet notamment d'évaluer l'histoire thermique à l'interface.
- une seconde variante, également quasi-statique à l'échelle locale, qui nous permet d'avoir accès au champ de déformation plastique généré par frottement dans la sous-couche de matière jouxtant l'interface.

Chacune des variantes nous permet d'avoir accès aux valeurs d'interface, ainsi qu'aux profils de température et de déformation plastique dans l'épaisseur de la couche de matière jouxtant l'interface. Enfin, elles permettent de restituer avec succès les signaux expérimentaux en utilisant seulement deux paramètres :  $\mu_0$ , le coefficient de frottement statique de Coulomb et  $f$ , un coefficient de frottement propre à notre modèle.

## ■ Mots Clefs :

frottements sous chocs, frottements dynamiques intermétalliques, code hydrodynamique, approche multi-échelles, décomposition de domaines, modèle de sous-maillages, couplage thermomécanique, conduction thermique, adoucissement thermique, comportement élastoplastique, écrouissage mécanique, loi d'interface, modèle de frottement, analyse dimensionnelle, analyse de stabilité linéaire.

## Short Abstract in English

The purpose of the present work is to provide new insights in the understanding and computational modeling of shock-induced metal-on-metal dynamic friction. Dynamic friction refers to the physics that governs the tangential force acting across a material interface after the passage of a shock wave. It plays a key role in shock-driven systems where metal interfaces are submitted to relatively large contact pressures ( $F_N \sim 1 - 40 \text{ GPa}$ ) and relative sliding velocities ( $[V] \sim 100 - 3000 \text{ m.s}^{-1}$ ).

Shock-induced frictional properties remain largely unknown although various experimental techniques have recently been developed. Severe loading conditions lead to extremely localized thermomechanical processes. These local phenomena may profoundly change the state of interface during the dynamic slip process : on a very thin sheared layer ( $0.1 \mu\text{m}$ ) important strain rates are obtained with major irreversible plastic deformation. Metal interfaces are also submitted to a warm-up phase due to frictional heat production, and plastic work. It leads to an important and localized increase in surface temperature, that may lead in extremely short time to the fully melt temperature regime and to the formation of a thin molten metal film.

Although they are widely used for the numerical simulation of high speed impact problems, the current generation of hydrocodes either neglect friction or rely on simple empirical models in which the frictional stress is related to the normal stress and/or the sliding velocity through the Coulomb's law. Such a classical law of friction is not valid and can not be used when shear stresses are limited by yielding conditions. Under severe loading conditions, the interfacial flow stress  $Y$  is determined using a SCG (Steinberg-Cochran-Guinan) model. The constitutive model must take into account work hardening, pressure effect, thermal softening and melting. Shear stresses will thus strongly depend on the thermomechanical history at the interface. We therefore need to understand the evolution of the thermomechanical fields and their relationship to the observed slip response.

On a numerical point of view, the main difficulties are related to the localization of the thermomechanical processes and to the control of thermal blow up. Accurate modeling of dynamic friction under dry sliding conditions therefore requires the use of a sub-grid model and the development of adequate coupling conditions between the local and the global models.

This is done through a domain decomposition approach which decomposes the interface problem into a global and a local one. At the global scale, the structure's model is a thermoelastoplastic model in large strains, where thermal conduction is neglected and where the interface is reduced to a nonlinear relation between temperature, sliding velocity and force to be predicted at local scale. Through dimensional and asymptotic analysis the local problem which accounts for frictional contact, elastoplastic yielding, thermal softening, heat conduction and dynamic effects can be reduced to a 1D finite difference subgrid model solved locally by nonlinear time implicit solvers.

The coupling strategy is force based : the friction force is evaluated at the local scale by the full model and transferred to the global model which can then predict local velocity corrections.

This strategy has been developed in 2 situations of increasing complexity :

- a first situation where the local problem is quasistatic and thermoelastic,
- a second case where the local problem is quasistatic and thermoelastoplastic,

This formulation has been updated in order to be consistently coupled to an industrial hydrocode for predicting the macroscopic behavior of the full structure such as the propagation of slip induced shear waves and the global chronology of the interface slip. The coupling strategy has been implemented and tested in real life examples.

## ■ **Keywords**

shock-driven dry friction, dynamic friction, hydrocodes coupling, multiscale approach, domain decomposition, subgrid model, thermomechanical coupling, thermal blow-up, elastoplastic behavior, strain hardening, interface law, friction model, dimensional analysis, linear stability analysis.

## Introduction générale

Cette thèse est consacrée à la modélisation et à la résolution numérique des problèmes de frottements sous chocs. Relativement récente, cette thématique de recherche est intimement liée à l'étude des structures métalliques complexes soumises à d'importantes sollicitations dynamiques, aussi bien en terme de pression que de vitesse de déformation. De tels chargements sont généralement obtenus par impact mécanique (ex : impact de plaques) ou par choc pyrotechnique (détonation de substance chimiques, d'explosifs) spécifiques des applications militaires ou de haute technologie (ex : problème de balistique interne et balistique terminale). Les temps caractéristiques observés sont de l'ordre de la microseconde, et les phénomènes mis en jeu sont essentiellement transitoires. Dans ce cadre :

- à l'échelle de la structure, la réponse des matériaux sollicités est caractérisée par leur comportement hydrodynamique en grandes déformations,
- au niveau des interfaces potentielles de contact/glisement, l'énergie dissipée par frottement contribue à l'échauffement et à la plastification d'une couche de matière d'épaisseur micrométrique ( $\approx 20\mu m$ ) localisée au voisinage direct de l'interface.

Les sollicitations rencontrées étant peu représentatives des problèmes fréquemment traités en ingénierie des matériaux, la physique réellement mise en jeu aux interfaces de glissement reste encore peu comprise. Parmi les principaux travaux effectués à ce jour, nous citerons les programmes de recherche conduits aux USA, à Los Alamos par Hammerberg et al. (voir [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]), ainsi qu'outre-Manche à l'AWE par Ball G.J, Winter R.E et al. (voir [8, 9, 10, 11, 12, 13]), et enfin en France au CEA/DAM par Juanicotena et al. (voir [14, 15]). Ils s'articulent tous autour :

- d'un **volet expérimental**, utilisant des dispositifs simples mis sous sollicitations réelles, telles que les techniques d'impact de plaques,
- d'un **volet numérique**, la conception, le dimensionnement et la garantie des structures complexes ne pouvant être envisagés autrement que par le biais de la modélisation numérique à l'aide de codes de calcul industriels.

Ces différentes études font ressortir **une problématique double** à l'origine de cette thèse :

- la physique même du frottement et la capacité à mettre en œuvre des modèles d'interface adaptés pour le traitement des frottements sous chocs.
- la gestion du frottement dans les codes de calculs hydrodynamiques. En effet, l'échelle des mailles d'interfaces classiquement utilisées ( $\sim 100\mu m$ ) ne permet pas de capturer les mécanismes réellement mis en jeu à l'échelle micrométrique de l'interface.

Pour remédier à ce défaut de précision, lié à l'**aspect multi-échelles du problème**, nous nous sommes donc proposés de développer une méthode permettant de résoudre numériquement les problèmes de frottement sous chocs. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un programme de recherche conduit au CEA/DAM, et a été réalisé en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) de l'École Polytechnique, sous la direction conjointe de Patrick Le Tallec (LMS) et Jean-Philippe Perlat (CEA/DAM).

La démarche entreprise s'articule autour de trois étapes essentielles qui constitueront les trois parties de ce mémoire :

## Première partie : État de l'art

La **première partie** introduit les principales notions nécessaires à l'étude des frottement sous chocs.

- Nous en proposons une définition simple dans le **premier chapitre** (pp. 25 à ??) au cours duquel nous identifions également les régimes de sollicitations caractéristiques de nos applications. Ceci nous permet d'établir une classification permettant de quantifier la sévérité des sollicitations en fonction de deux paramètres : la vitesse relative de glissement et la pression de contact exercée à l'interface. Cette classification établie, nous décrivons le contexte expérimental et abordons les aspects phénoménologiques liés à la mise en glissement sous choc de matériaux métalliques. Afin de mettre en avant l'aspect multi-échelles du problème, nous nous intéressons alors aux comportements thermomécaniques observés à l'échelle de la structure au cœur des matériaux, et à l'échelle micrométrique au voisinage de l'interface.
- Forts de ces premiers enseignements, nous présentons au cours du **deuxième chapitre** (pp. ?? à ??) la modélisation de base classiquement employée pour traiter les problèmes de frottement sous choc. Chaque phénomène est ainsi associé à un système d'équations. Le comportement aux interface de glissement est quant à lui traité sous la forme de conditions aux limites, à l'aide des lois de frottement classiques.
- Nous concluons finalement cette première partie par un **troisième chapitre** (pp. 79 à 109) spécifiquement dédié à la résolution numérique des problèmes de structures sollicitées par choc. Pour cela, nous rappelons le principe de fonctionnement des **codes hydrodynamiques** puis nous présentons un code explicite lagrangien bidimensionnel qui nous servira de base pour cette étude. Dans ce cadre, nous revenons sur les méthodes de discrétisation permettant de passer du modèle mathématique introduit au chapitre 2 au problème discret que nous souhaitons résoudre. Puis nous présentons en détails les algorithmes de résolution numérique utilisés pour gérer le contact et le frottement aux interfaces.

Nous concluons finalement cette première partie en évoquant les limites actuelles des codes de calculs et les problématiques que nous serons amenées à traiter.

La question principale qui se pose alors au terme de cette première partie est la suivante :

**Comment résoudre plus finement le comportement à l'interface ?**

## Seconde partie : Modélisation multi-échelles

Nous nous proposons d'y répondre au cours de la **la seconde partie** de notre étude où nous exposons la stratégie de résolution retenue et développée dans ce travail :

- **Le quatrième chapitre** (pp. 119 à 135) est ainsi consacré à notre approche multi-échelles par décomposition de domaines, permettant une modélisation et résolution plus fine de l'interface. Nous y détaillons la construction de la géométrie retenue pour modéliser l'interface et considérons deux problèmes distincts :
  - un problème global, à l'échelle macroscopique de la structure,
  - un problème local, à l'échelle micrométrique, qui nous permet de traiter l'interface comme un corps à part entière et ainsi d'avoir accès au comportement dans le voisinage direct de la zone de contact.
- Il en résulte un problème en écart posé au voisinage de l'interface que nous simplifions dans le **cinquième chapitre** (pp. 139 à 166) par analyse dimensionnelle. Cette étape nous permet notamment de montrer que l'ensemble des phénomènes locaux observés aux interfaces de glissement peuvent être traités par un simple modèle unidimensionnel, facile à implémenter numériquement.
- Une analyse de stabilité linéaire présentée en **sixième chapitre** (pp. 169 à 180) vient consolider le modèle proposé dans le cas d'un problème d'évolution thermoélastoplastique quasi-statique.

## Troisième partie : Implémentation numérique et validation

Dans la **troisième et dernière partie** de notre étude, nous résolvons ce problème à l'aide d'un modèle de sous-mailles que nous couplons au code de calcul hydrodynamique retenu pour cette étude. Nous traitons alors trois cas limites :

- dans le **septième chapitre** (pp. 193 à 230), nous étudions un cas d'**évolution thermoélastique quasistatique**, où les effets d'inertie sont négligés au voisinage de l'interface et où nous supposons que l'évolution mécanique est purement élastique ( $\dot{\epsilon}_p = 0$ ). Seule l'échauffement thermique et l'adoucissement qu'il induit sont donc pris en compte.
- dans le **huitième chapitre** (pp. 231 à 256), nous traitons le cas plus général d'une **évolution thermoélastoplastique quasistatique**, où l'inertie est de nouveau négligée localement mais où nous intégrons cette fois-ci la déformation plastique observée au voisinage de l'interface de glissement, et où nous tenons compte de l'écroûissage associé.

Nous tâcherons notamment d'éprouver chacun de ces modèles par recalage numérique de signaux expérimentaux recueillis suite aux campagnes de tirs conduites au CEA/DAM.



Première partie

**État de l'art**





## Introduction aux frottements sous chocs

### ■ Introduction du chapitre

L'objectif de ce premier chapitre est de définir ce que nous entendons par **frottements sous chocs** tout en nous familiarisant avec les principales notions à connaître pour aborder cette thématique. Pour faciliter cette démarche et appréhender au mieux la problématique à l'origine de cette thèse, nous avons divisé ce chapitre en trois sections.

- Nous nous intéressons dans un premier temps (Section 1, pp. 26 à 29) à la notion de *frottement dynamique*. Pour l'illustrer, nous présentons différentes applications industrielles que nous nous proposons de classer en fonction de leur sévérité. La hiérarchie établie nous permet alors de distinguer un régime de sollicitations caractéristique des problèmes de *frottements sous chocs*. Nous concluons finalement cette première section en évoquant le contexte expérimental ainsi que les principales études réalisées à ce jour.
- La seconde section de ce chapitre (pp. 30 à 38) est essentiellement consacrée aux aspects phénoménologiques liés à la mise en glissement de matériaux métalliques sollicités par choc. Nous récapitulons pour cela les différents mécanismes mis en jeu au sein des matériaux, et introduisons par la même occasion la notion de plasticité. Puis nous approfondissons notre approche en nous intéressant plus spécifiquement aux phénomènes thermomécaniques mis en jeu aux interfaces de glissement.
- Finalement, nous concluons ce chapitre en présentant le programme de recherche initié au CEA/DAM (Section 3, pp. 38 à 39) pour traiter cette thématique.

## ■ 1.1 Caractérisation des frottements sous chocs

### 1.1.1 Sur les frottements dynamiques...

Dans la pratique, nous distinguons le **frottement statique** du **frottement dynamique**. Le frottement statique correspond à l'effort minimal que nous devons fournir pour mettre en mouvement deux corps initialement en contact et au repos. Une fois que cet effort est atteint, les deux corps en question vont alors glisser l'un par rapport à l'autre. Le frottement dynamique caractérise dès lors la résistance qu'oppose l'interface de contact à ce mouvement relatif de glissement.

Les frottements dynamiques s'accompagnent généralement d'une dissipation d'énergie, attribuée au travail des forces de frottement. Localisée à l'interface de glissement, elle affecte directement l'intégrité de la zone de contact et par conséquent la dynamique globale du glissement. La **puissance dissipée à l'interface**, plus ou moins importante selon les sollicitations exercées, va nous permettre de quantifier la "sévérité" du frottement. Sans en connaître l'expression mathématique, ni chercher à en établir la formule, une brève synthèse des études réalisées jusqu'ici nous permet cependant de distinguer deux paramètres clefs permettant de l'évaluer pour une même paire tribologique (voir [16]) :

- la **vitesse relative de glissement**  $[V]$  entre les deux matériaux,
- l'**effort de contact**  $F_N$  exercé à l'interface.

En fonction des valeurs prises par chacun de ces deux paramètres nous allons distinguer différents **régimes de sollicitation** aux interfaces ; il nous est dès lors relativement aisé de trier et différencier les différents problèmes de frottement dynamique. Pour l'illustrer nous avons reporté quelques exemples classiques sur un diagramme logarithmique exprimant la pression de contact en fonction de la vitesse relative de glissement (voir figure 1.1). En particulier, nous distinguons trois grands domaines : le domaine des applications industrielles classiques, celui des applications de haute technologie, et finalement, le domaine des applications à vocation militaire.

Dans le premier domaine (zones 3 à 4 sur la figure 1.1), les conditions de frottement rencontrées s'étendent sur une plage de vitesses allant de 0 à  $100m.s^{-1}$ , tandis que les pressions n'excèdent pas la centaine de mégapascal. Nous y retrouvons les procédés de mise en forme des matériaux tels que l'usinage à grande vitesse (UGV), l'emboutissage, le meulage ou bien encore la soudure par friction ("FSW-Friction Stir Welding" en anglais) (voir [17]). Figurent également dans ce domaine la plupart des systèmes de freinage, allant de la simple plaquette de frein automobile aux disques de freinage utilisés pour le TGV ou le Concorde.

Ces deux derniers exemples sont caractéristiques des applications de haute technologie (zones 2 à 3 sur la figure 1.1). Dans ce domaine les vitesses s'étendent sur une plage de vitesse allant de la centaine de mètres par seconde à environ  $500m.s^{-1}$ .

Au-delà, les applications rencontrées relèvent essentiellement du domaine militaire (zones 1 à 2 sur la figure 1.1). Les vitesses de glissement observées sont supérieures à la centaine de mètres par seconde, tandis que les pressions de contact peuvent atteindre le gigapascal. De telles conditions sont caractéristiques des problèmes de balistique intérieure et terminale (impact de projectiles).

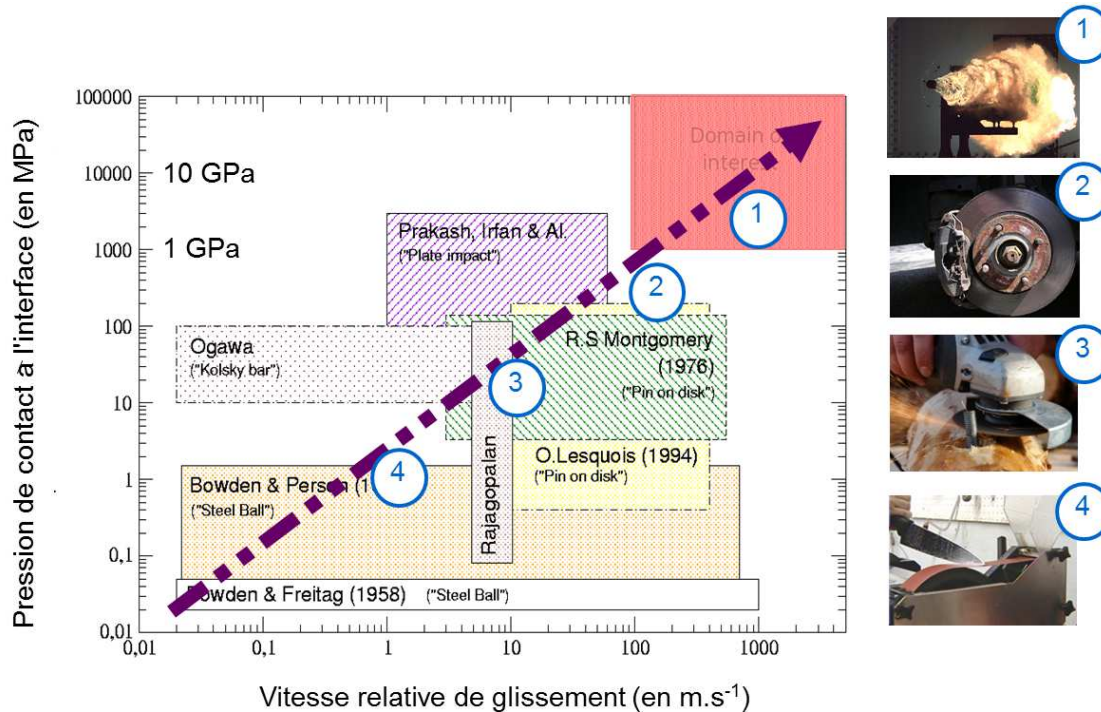


FIGURE 1.1 – Diagramme logarithmique récapitulant les différents régimes de sollicitations rencontrés dans les problèmes de frottement dynamique, en fonction de la pression de contact  $F_N$  et de la vitesse relative de glissement [V].

### 1.1.2 Qu’entendons nous par *frottements sous chocs* ?

Ces rappels effectués, se posent alors les questions suivantes :

**Qu’entendons nous par frottement sous chocs ? Dans quel régime se situent-ils ? En quoi se distinguent-ils des problèmes de frottement classiques ?**

Les frottements sous chocs sont également des frottements dynamiques. Cependant, ils se distinguent des cas que nous venons d’énoncer du fait de leur extrême sévérité. Ainsi, il existe certains régimes où nous observons à la fois des pressions de contact particulièrement élevées ainsi que de larges vitesses de glissement : les pressions exercées se situent dans la plage dite des **hautes pressions dynamiques** (>1 GPa), tandis que les vitesses de glissement observées sont qualifiées de **vitesses hypervéloces** (>1000 m/s). Le domaine défini par ces deux plages est représenté par la zone hachurée en rouge (zone 1) sur le diagramme 1.1. Cette situation est caractéristique des frottements sous chocs !

En dehors des applications spécifiques du CEA/DAM, peu nombreux sont les cas de figure où nous rencontrons de telles sollicitations.

Nous citerons cependant l'exemple des canons à rails ("railguns" en anglais). Cette application relevant exclusivement du domaine militaire, relativement peu de documentation est disponible à ce sujet. Néanmoins, les quelques informations extraites de littérature (voir [18, 19, 20, 21]) nous permettent d'estimer que les plages d'utilisation ( $1000\text{m.s}^{-1} < [V] < 3000\text{m.s}^{-1}$ ) et ( $F_N \sim 2\text{GPa}$ ) sont relativement proches des sollicitations observées pour nos applications.

### Comment obtenir de telles sollicitations aux interfaces ?

Les conditions sévères de chargement dynamique que nous venons d'évoquer sont généralement la conséquence d'une **sollicitation par choc**. D'une façon générale, nous parlons de choc lorsqu'une énergie est transférée en un temps extrêmement bref d'un milieu à un autre. Les temps caractéristiques sont de l'ordre de la microseconde, donc extrêmement brefs, et les phénomènes mis en jeu sont alors essentiellement transitoires.

En résumé, et en réponse aux questions que nous nous posons, nous pouvons désormais définir les frottements sous chocs comme des problèmes de frottement dynamique caractérisés par la présence de fortes pressions de contact aux interfaces, couplées à de larges vitesses relatives de glissement. C'est dans ce domaine que nous nous situons au cours de cette étude.

### 1.1.3 Le contexte expérimental

Nous nous posons maintenant la question suivante :

#### Comment obtenir de telles conditions à l'aide de techniques expérimentales simples ?

Force est de constater que les travaux spécifiquement dédiés à l'étude des frottements sous chocs sont à ce jour peu nombreux. En effet, relativement peu de techniques permettent d'étudier les frottements dynamiques à la fois aux grandes vitesses de glissement et sous de fortes pressions de contact, de telles sollicitations étant peu représentatives des problèmes fréquemment rencontrés en ingénierie des matériaux.

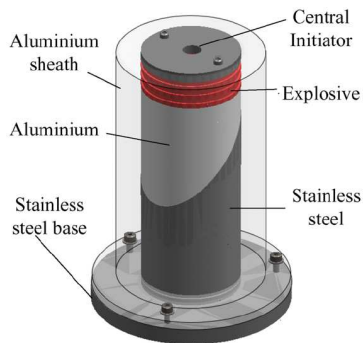
Parmi les principales études expérimentales conduites au cours de ces dernières années, nous citerons cependant les travaux réalisés au Los Alamos National Laboratory par Hammerberg et Al. (voir [1, 2, 4]), les expériences conduites par R. Winter, G. Ball, et Al. à l'AWE (Atomic Weapon Establishment, Aldermaston, Royaume-Uni) (voir [9, 10, 13]), et finalement les travaux réalisés au Commissariat à l'Énergie Atomique (voir [14, 15]) qui seront présentés en fin de chapitre.

Dans chacun des cas, les techniques employées (voir [3, 8, 22, 23]) ont pour point commun d'être constituées d'un édifice pyrotechnique permettant de mettre en vitesse une structure métallique par propagation d'ondes de choc de forte intensité. Ces dispositifs dérivent en majorité de techniques expérimentales initialement développées pour étudier les frottements dynamiques aux faibles pressions de contact :

- les tribomètres de type pion sur disque, tels qu'utilisés par R.S. Montgomery (voir [24]) et O. Lesquois (voir [16, 25]) pour étudier les frottements dynamiques et l'usure dans les canons d'armes.

- les dispositifs d'impact par barres de Hopkinson, tels qu'utilisés par K. Ogawa (voir [26, 27]).
- les techniques d'impact de plaques inclinées mise en mouvement par lanceurs à gaz ou à poudre. Initialement développées par Clifton et Al. et Gupta et Al. (voir [28]) elles sont notamment utilisées par M.Irfan et V.Prakash (voir [29, 30, 31]).

En ce qui concerne les dispositifs spécifiquement dédiés à l'étude des frottements sous chocs, il convient de citer la technique expérimentale utilisée outre-Manche à l'AWE. Les premières expériences connues ont été réalisées sur un couple Aluminium/Acier à l'aide des dispositifs expérimentaux FN1 et FN2, afin d'obtenir des mesures du glissement relatif observé suite à un chargement dynamique (voir [8, 10, 12]).



Le dispositif expérimental actuel (technique FN6) est constitué d'une cible cylindrique (généralement en aluminium et acier) mise en mouvement par une fine couche d'explosif (SX2 - Cyclotriméthylène trinitramine). L'interface entre les deux matériaux étant inclinée, la différence d'impédances mécaniques entre l'aluminium et l'acier engendre un mouvement relatif de glissement. La cible est confinée dans un cylindre en aluminium afin de pouvoir la récupérer intacte après la mise à feu. En variant la quantité d'explosif, différentes pressions de contact peuvent alors être obtenues, modifiant ainsi les conditions de frottement.

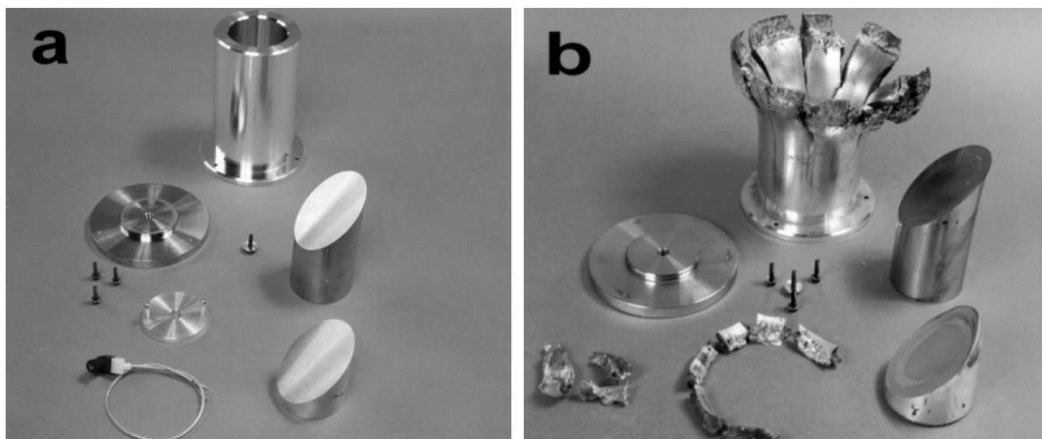


FIGURE 1.2 – Dispositif FN6 utilisé à l'AWE pour étudier les frottements sous choc (voir [12]).

## 1.2 Comportement thermomécanique des structures et interfaces métalliques mises en glissement par choc

Intéressons-nous maintenant au comportement des structures et interfaces métalliques lorsqu'elles sont soumises à un choc ! Avant de présenter les phénomènes mis en jeu aux échelles micrométrique, nous nous intéressons dans un premier temps à la réponse macroscopique observée au sein de chacun des solides en mouvement. Puis, dans un second temps, nous regardons plus précisément les phénomènes mis en jeu à l'interface de glissement.

### 1.2.1 Le comportement observé à l'échelle de la structure

Contrairement aux frottements sous chocs, l'étude du comportement sous chocs des matériaux a fait l'objet de nombreuses études au cours de ces dernières années et la littérature à ce sujet est relativement bien fournie. Nous citerons à ce titre l'ouvrage de Mark A. Meyers (voir [32]) qui compile l'essentiel des connaissances actuelles.

Comme nous l'avons écrit précédemment, nous parlons de choc lorsqu'une énergie est transférée en un temps extrêmement bref d'un milieu à un autre. D'un point de vue physique, les vecteurs de cette énergie transmise sont les ondes de chocs, qui sont des surfaces de discontinuité avec flux de masse. Ainsi, lors d'un choc par impact mécanique ou bien consécutif à la détonation d'une charge d'explosif, l'onde de choc transmise se propage dans les solides de manière autonome avec une célérité de quelques kilomètres par seconde. Ceci a notamment pour effet de comprimer le matériau, la pression atteignant quelque centaines de gigapascals. La propagation des ondes de chocs dans les métaux engendre ainsi différents mécanismes et peut dans certains cas causer des dommages considérables. En fonction de l'intensité des sollicitations, le matériau va généralement présenter différents types de comportement que nous récapitulons dans le tableau 1.1.

Taux de déformation $\dot{\epsilon}$ ( $s^{-1}$ )	Vitesse	Effet	Méthode de chargement
$10^8$	>12 km/s	Impact explosif Vaporisation	-
$10^5$ - $10^7$	3-12 km/s	Matériau hydrodynamique Compressibilité	Projection par explosif Canon à gaz double étage
$10^5$	1-3 km/s	Comportement partiellement fluide, pression largement au-delà de la limite élastique. Effets densité prédominants	Canons à poudres et canons à gaz
$10^4$	500-1000 m/s	Effet de la résistance du matériau important	Canons à poudres
$10^2$	50-500 m/s	Écoulement plastique	
$10^0$	<50 m/s	Élastique, plasticité localisée	Dispositifs de projections mécaniques, canon à air comprimé

TABLE 1.1 – Réponse des matériaux aux impacts (extrait de [33]).

## Comportement élastique des matériaux métalliques

Lorsque le choc est d'amplitude relativement faible, les structures se déforment élastiquement. L'énergie du choc est dans ce cas convertie en énergie de déformation. Les ondes élastiques générées vont alors se propager au sein des matériaux, puis vont être réfléchies à ses frontières causant notamment la vibration du milieu, jusqu'à leurs atténuations.

Le passage de l'onde de choc peut ainsi être à l'origine d'une réorganisation de la structure cristalline des métaux et par conséquent d'un changement de phase (voir [34]), contribuant dans certains cas à un renforcement des propriétés mécaniques. Aussi, l'interprétation avancée de ces phénomènes demande une excellente connaissance des conditions de changements de phase en pression, en température, mais aussi des cinétiques associées pour chacun des matériaux considérés.

## Plasticité sous chocs des matériaux métalliques

Lorsque l'onde de choc transmise est de forte intensité, les matériaux se déforment de manière irréversible avec dissipation d'énergie sous forme de chaleur, caractéristique du phénomène de **plasticité** (voir [35]) contrairement au comportement élastique où les déformations sont réversibles. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de M. Meyers et N.D. Cristescu (voir [32, 36]) pour de plus amples informations concernant les mécanismes de la plasticité dynamique.

Nous rappellerons simplement que l'origine physique de ces déformations irréversibles résulte de la déformation cristalline du matériau à l'échelle microscopique et plus particulièrement de la migration de défauts particuliers du réseau cristallin : les dislocations. Au cours de la déformation, des dislocations se créent, s'annihilent, se déplacent et franchissent des obstacles de nature diverse, contribuant ainsi à adoucir ou durcir le matériau. Outre ce phénomène, nous observons également l'activation de mécanismes de cisaillement localisés au sein des grains, tel que le maclage.

## Dégradation et endommagement du matériau

Finalement, lorsque l'état des contraintes au sein des matériaux atteint une certaine limite, dite de rupture, la matière commence à s'endommager, voire à se désagréger. Un exemple classique dans le cadre de nos applications est le phénomène dit de *spalling*.

### 1.2.2 Le comportement observé à l'échelle de l'interface

#### Les observations phénoménologiques aux interfaces : une agrégation de mécanismes complexes

Contrairement aux phénomènes physiques observés à l'échelle macroscopique, les mécanismes mis en jeu au niveau des interfaces de glissement sont plus complexes et difficiles à mettre en évidence expérimentalement. Comme le résumait J.T.Oden et J.A.C Martins (voir [37]),

**The nature of dynamic friction forces developed between bodies in contact is extremely complex and is affected by a long list of factors : the constitution of the interface, the time scales and frequency of the contact, the response of the interface to normal forces, inertia**



**and thermal effects, roughness of the contacting surfaces, history of loadings, wear and general failure of the interface materials, and so on...<sup>1</sup>**

Autrement dit, les frottements sous choc ne constituent pas un seul et même phénomène, mais sont une agrégation de plusieurs mécanismes complexes que nous détaillons ci-après. Nous l'expliquons tout d'abord du fait de la structure plus complexe de l'interface, mais aussi car la mise en glissement de matériaux métalliques s'accompagne d'une brusque dissipation d'énergie localisée en un temps très bref au voisinage de l'interface.

### **Caractérisation des interfaces métalliques à l'échelle micrométrique ; des milieux complexes ?**

Nous ne pouvons évoquer le comportement phénoménologique des interfaces, sans en rappeler auparavant la structure complexe. En effet, la structure des interfaces métalliques diffère fortement de la structure observée au cœur des matériaux.

**It is well known that the material interface is a mechanically complex medium!<sup>2</sup>**

Comme l'illustre Rabinowicz dans [38] (voir figure 1.3) les interfaces métalliques sont généralement constituées de plusieurs couches dont l'épaisseur varie de la dizaine d'angström au micromètre. Ces différentes couches sont en partie générées lors de la mise en forme des matériaux (par usinage par exemple), ou bien encore à cause de leur oxydation superficielle. Cela se traduit par la présence en surface d'irrégularités géométriques caractérisée par une succession de pics et d'aspérités dont une mesure classique est la rugosité.

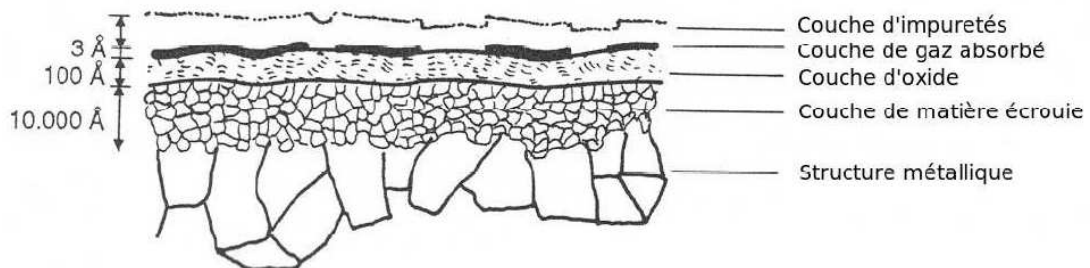


FIGURE 1.3 – Représentation des surfaces métalliques telles qu'observées dans [38]

1. Traduit de l'anglais : *La nature des forces de frottements dynamiques se développant entre deux corps en contact et extrêmement complexe, et est affecté par une longue liste de facteurs : la constitution de l'interface, les échelles de temps et la fréquence du contact, la réponse de l'interface aux chargements normaux, l'inertie et les effets thermiques, la rugosité des surfaces de contact, l'histoire du chargement, l'usure et la rupture des interfaces...*

2. Traduit de l'anglais : *Il est bien connu que l'interface entre deux solides en contact est un milieu mécaniquement complexe.*

## Dissipation de l'énergie à l'interface

Suite aux différentes campagnes de tirs effectuées à l'Awe, plusieurs observations phénoménologiques ont permis de décrire le comportement thermomécanique aux interfaces de contact. Celui-ci dépend fortement de la compétition entre deux phénomènes localisés à l'interface au sein d'une couche de matière d'épaisseur micrométrique :

- d'une part un phénomène d'**adoucissement thermique** causé par un échauffement important de l'interface
- d'autre part un phénomène d'**écrouissage mécanique** induit par la déformation plastique de l'interface.

## L'énergie dissipée par frottement échauffe la matière

Comme le résume la figure 1.4, l'échauffement observé aux interfaces de glissement provient de la puissance mécanique générée lors d'un contact frottant qui est essentiellement dissipée sous forme de chaleur. Quelle est l'origine physique de ces échauffements, et comment se répartie la chaleur au sein des matériaux ?

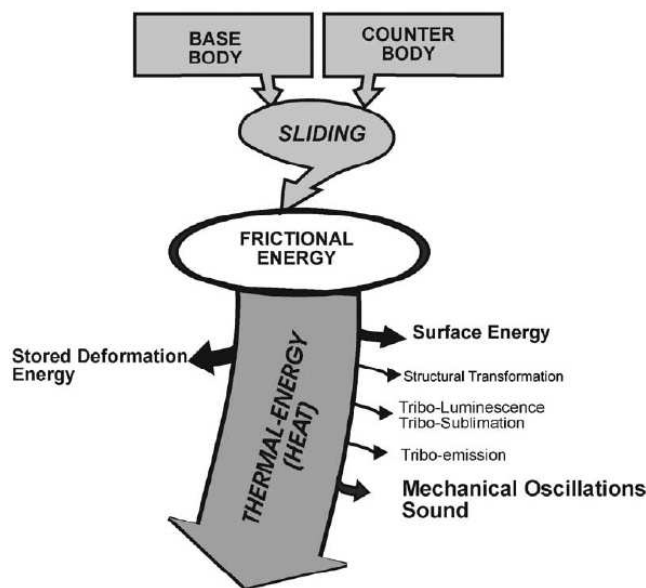


FIGURE 1.4 – L'énergie dissipée par frottement échauffe la matière. Image extraite de [39]

Historiquement, les premières études connues remontent aux travaux de Bowden et Al. (voir [40, 41, 42, 43]). Pour expliquer la brusque élévation de température accompagnant la mise en glissement de métaux, Bowden et Al. vont distinguer deux sources thermiques principales :

- **une source de chaleur surfacique** qui échauffe les matériaux à l'interface métal-métal. Cette source de chaleur est attribuée au travail des forces de frottement. A l'échelle de la structure, tout se passe comme si l'interface "dégageait" un flux de chaleur se partageant entre les deux corps en glissement, élevant ainsi la température de part et d'autre de l'interface.
- **une source de chaleur volumique** qui échauffe le cœur des matériaux. Bowden et Al. vont ainsi suggérer que la quantité de chaleur produite par frottement ne naît pas forcément aux interfaces du fait du travail développé par les forces de frottement. Selon eux, une partie de la chaleur va en effet être engendrée par la dissipation plastique due aux déformations irréversibles générées au voisinage des interfaces de glissement.

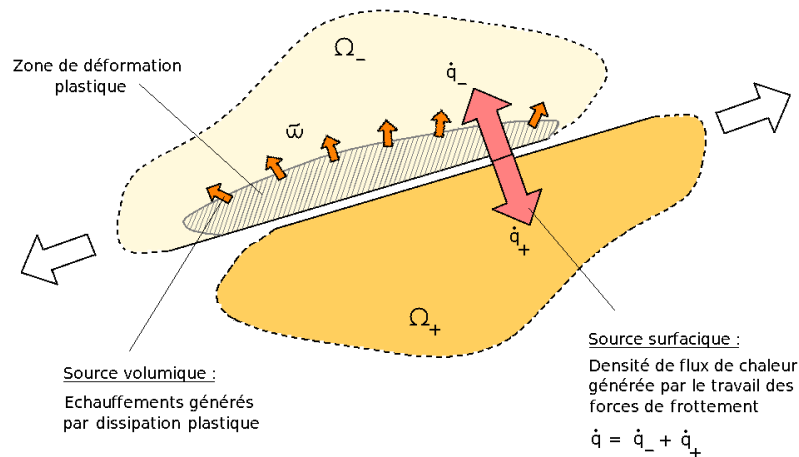


FIGURE 1.5 – Nature des phénomènes thermiques : notions de densité surfacique de flux de chaleur et de sources thermiques volumiques

Physiquement, la production de chaleur dans un contact frottant est attribuée au cisaillement rapide des extrémités des aspérités (jonctions) de l'aire réelle de contact. Il s'agit donc d'événements locaux et brefs, à l'origine de la notion de *température éclair* (*flash temperature*) (échelle micrométrique) fréquemment rencontrée dans la littérature. La chaleur est alors transmise par conduction sur l'aire géométrique de contact dont la température est alors désignée par *température (moyenne) de contact* (*bulk temperature*).

Dans le cas spécifique des frottements sous choc, où nous observons d'importantes vitesses de glissement, les zones de contact sont cisillées en un temps extrêmement bref et l'élévation de la température de contact se fait sur une échelle de temps extrêmement courte (de l'ordre de la microseconde). Pour de si brusques élévations de température, la chaleur produite par le frottement n'a pas le temps de diffuser par conduction au sein des matériaux en glissement. La température "s'évanouit" alors à mesure que nous nous éloignons de la zone de contact et nous dressons le constat suivant :

**" L'échelle d'échauffement est petite par rapport à l'échelle de la structure globale. "**

Cela se traduit par la localisation de l'échauffement au voisinage de l'interface, au sein d'une couche d'épaisseur micrométrique. Cet échauffement local est alors susceptible de modifier profondément la structure superficielle des matériaux ainsi que le comportement rhéologique des interfaces qui deviennent moins résistantes : nous parlons alors d'**adoucissement thermique** (voir figure 1.6).

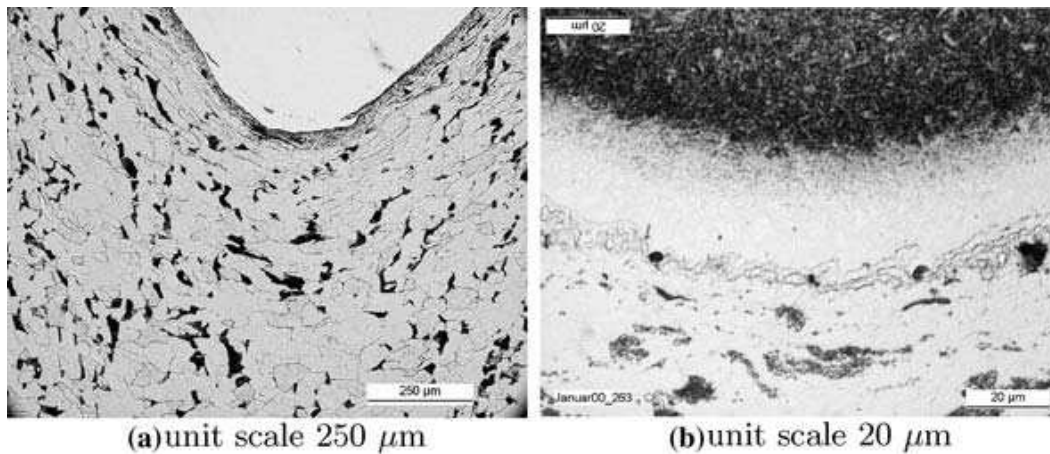


FIGURE 1.6 – Adoucissement thermique observé par ZAVARISE lors de problèmes d'impact au voisinage de l'interface impacteur/cible. Nous distinguons sur l'image (b) une fine couche de matière entre l'impacteur et la cible correspondant à la zone affectée thermiquement. Images extraites de [44]

### Écrouissage mécanique des interfaces métalliques

Suite à la mise en glissement de matériaux métalliques, nous notons également la présence de régions fortement cisailées dans la zone proche de l'interface (voir figure 1.2.2). Nous y observons d'importantes déformations, dans la majorité des cas irréversibles, s'accompagnant d'une modification des efforts de cisaillement limites supportables par le matériau.

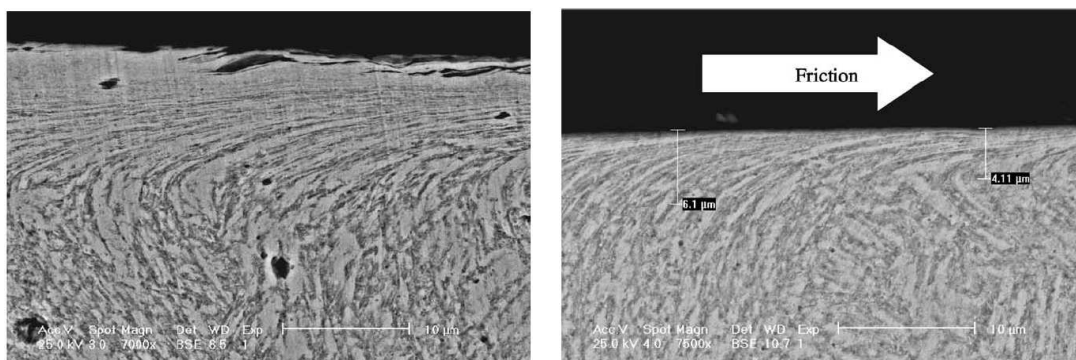


FIGURE 1.7 – Illustration du phénomène de déformation plastique, tel qu'observé à l'interface d'un pion métallique lors d'un essai pion sur disque. Image extraite de [45].

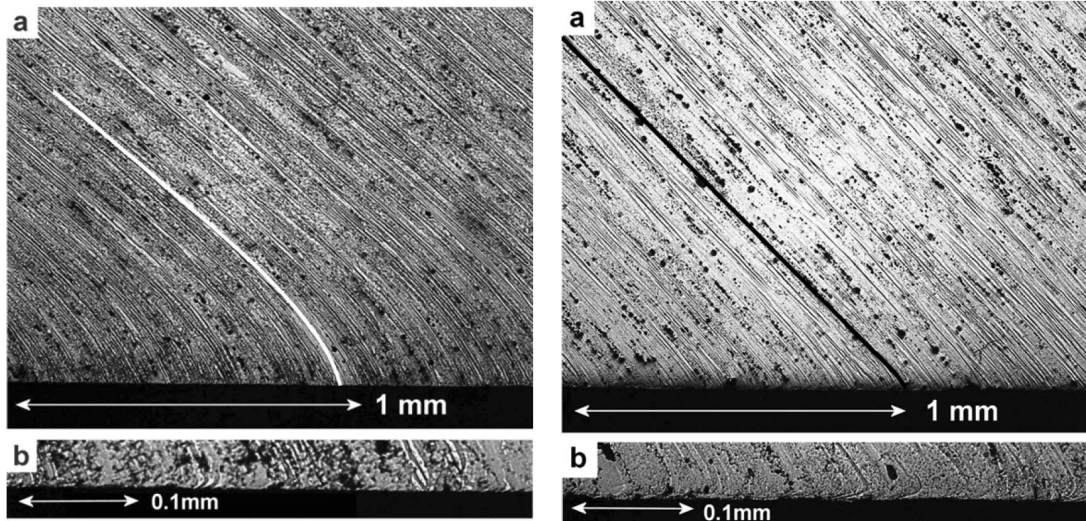


FIGURE 1.8 – Déformation plastique observée au voisinage d'une interface métallique sollicitée par choc. Images extraites de [12].

### Comportement mécanique résultant

Les phénomènes d'adoucissement thermique et d'érouissage mécanique semblent véritablement piloter le comportement global de la surface de glissement. En fonction de leur sévérité respective, différents mécanismes sont mis en jeu. Par ordre de sévérité, cela commence par la localisation du cisaillement. S'en suit l'usure et la dégradation de l'interface caractérisées par la formation de copeaux et l'arrachement de matière. Puis à mesure que la température augmente, nous observons la fusion partielle de l'interface, à l'origine du phénomène de gouging. Finalement, lorsque les sollicitations sont extrêmes, nous observons la formation d'un film hydrodynamique visqueux aux très hautes températures, caractérisé par l'apparition d'une fine couche de métal fondu conduisant dans certains cas à la mixtion partielle des interfaces et à la formation de MML'S (Mechanically Mixed Layers, voir figure 1.10).

**Usure et dégradation des interfaces** Dans certains cas de figures, le frottement entre deux métaux peut conduire à la détérioration superficielle de l'un comme de l'autre. Ceci est en partie dû à la formation de résidus ou de copeaux : nous parlons plus généralement de phénomène d'usure. Cette thématique fait à elle seule l'objet d'un domaine de recherche à part entière et sa compréhension joue un rôle clef dans le domaine de la mise en forme des matériaux. Nous citerons à cet effet les travaux pionniers d'Ashby [46, 47].

Nous n'avons pas trouvé de travaux dans la littérature faisant état de telles observations lors de frottements sous chocs. Les sollicitations rencontrées dans ce cas sont généralement plus propices à la formation d'un film hydrodynamique de matière en fusion.



Notons à titre informatif les observations de F.Stefani et J.Parker (voir [48]) qui évoquent un phénomène de *gouging* lors d'expériences de tirs réalisées sur des canons à rail dans la plage des grandes vitesses de glissement (vitesses hypervéloces  $>1000\text{m/s}$ ). Ce phénomène se traduit par l'apparition de cratères à l'interface des métaux mis en glissement (voir figure 1.9), limitant de ce fait l'usage des canons à rails sous certaines conditions.

Les conditions qui nous intéressent sont probablement hors de ce régime.

FIGURE 1.9 – Phénomène de *gouging* observé à l'interface de matériaux mis en glissement à l'aide d'un canon à rail. Observations de F.STEFANI et J.PARKER (voir [48])

**Fusion superficielle partielle ou totale de l'interface et formation d'un film hydrodynamique** Dans le cas particulier des frottements sous fortes pressions de contact, et pour de larges vitesses de glissement, la chaleur générée par frottement s'accompagne de fortes températures en surface. Dès lors, les solides ayant un faible point de fusion se liquéfient de telle sorte qu'une couche continue de métal en fusion se développe au niveau de la surface de contact (voir [49, 50]).

A partir de ce constat F.P Bowden suggère que le métal se comporte comme une combinaison de deux éléments : un film mince s'apparentant à une couche de cisaillement supporté par un solide massif. Lorsque les deux matériaux sont proches de leur point de fusion, nous observons dans certains cas la formation d'une couche de mélange tel que représenté sur la figure 1.10.



FIGURE 1.10 – Illustration d'une MML'S "Mechanically Mixed Layers". L'échauffement observé aux interfaces de glissement conduit dans certains cas à la miction partielle des interfaces (voir [45]).

Nous mentionnons ces phénomènes à titre informatif car ils sont susceptibles d'être observés. Cependant, nous ne chercherons pas à en établir une modélisation par la suite (nous justifierons ce choix au cours du chapitre 3, pp. 79 à 109).

## Terminologie couramment employée

Toujours à titre informatif, notons que l'existence des mécanismes d'adoucissement thermique et d'érouissage mécanique est à l'origine de plusieurs terminologies, couramment employées en tribologie pour désigner la couche de matière jouxtant l'interface.

- Ainsi, lorsque l'interface est le siège de déformations plastiques irréversibles (la zone présente un fort érouissage), nous rencontrons fréquemment la notion de MAZ pour (Mechanically Affected Zone, ou TMAZ, la zone affectée thermomécaniquement) (voir [51]). Cette zone correspond à la couche de matière où nous observons de brusques variations des propriétés mécaniques. Plus particulièrement elle comprend la zone ayant plastifiée du fait du fort taux de cisaillement.
- Lorsque l'adoucissement thermique prédomine à l'interface, l'acronyme HAZ est plus couramment employée pour désigner la couche de matière jouxtant l'interface (voir [44]). Le choix de cette terminologie provient de l'expression anglaise "*Heat Affected Zone*"<sup>3</sup> fréquemment rencontré dans les problèmes de mise en forme des matériaux tel que la soudure par friction FSW (voir [17]).

## ■ 1.3 L'étude des frottements sous chocs au CEA/DAM

### 1.3.1 Le programme de recherche du CEA/DAM

La compréhension des frottements sous choc revêt une importance certaine pour les applications du CEA/DAM. L'objectif est de disposer d'un modèle de frottement adéquat permettant de restituer au mieux la dynamique des structures complexes soumises à un choc, telle qu'observée expérimentalement. Cependant, et comme nous avons pu le constater jusqu'ici, l'étude des frottements sous chocs demeure à ce jour une thématique de recherche relativement récente. A ce titre, nous disposons de relativement peu de données permettant de garantir les différents modèles de frottements existants (que nous aurons l'occasion de présenter au cours du chapitre suivant !).

Pour y remédier, le CEA/DAM a mis en œuvre un programme de recherche dédié à l'étude des frottements sous chocs. La stratégie de recherche s'articule autour d'un volet expérimental et d'un volet numérique que nous présentons ici.

### 1.3.2 La technique expérimentale du CEA/DAM

A l'instar de l'AWE, le CEA/DAM dispose également d'une technique expérimentale permettant d'étudier les frottement sous chocs. Alors que la technique d'impact FN6 de l'AWE a essentiellement été conçue pour étudier les aspects phénoménologiques liés au frottement sous chocs (par le biais d'analyses post-mortems), l'application première du dispositif utilisé au CEA/DAM est d'éprouver les modèles de frottement aux très fortes sollicitations, en procédant pour ce faire à des mesures de vitesses libres.

---

3. ZAT en français, pour "*Zone Affectée Thermiquement*"

D'un point de vue pratique, la technique consiste à impacter puis à faire glisser au moyen d'un lanceur à poudre un projectile de forme conique initialement confiné dans une cible cylindrique (Figures 1.11 et 1.12). L'originalité de cette méthode est qu'elle permet d'accéder à de larges plages de vitesses de glissement [V] ainsi qu'à d'importantes pressions de contact  $F_N$  en jouant simplement sur la nature et la vitesse de l'impacteur, ou bien encore sur l'angle du cône. Les vitesses de glissement observées pour de telles expériences peuvent ainsi atteindre des valeurs particulièrement élevées. Il en va de même pour la pression de contact exercée à l'interface, celle-ci pouvant atteindre plusieurs dizaines de GPa.

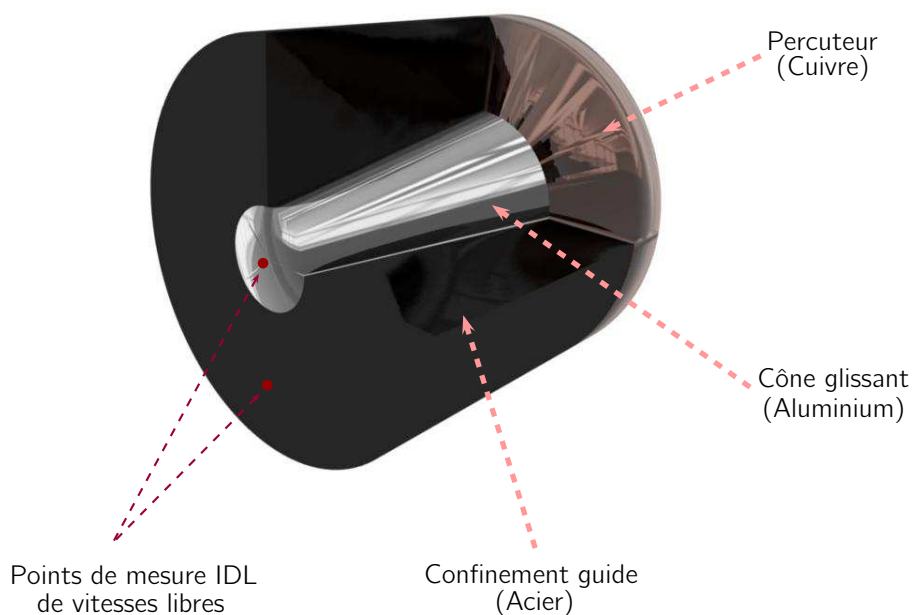


FIGURE 1.11 – Aperçu de la technique de tir utilisée au CEA/DAM. Les points d'acquisition des vitesses libres sont représentés en rouge à la surface du cône central et du confinement

Pour recalibrer les modèles de frottement, nous mesurons la vitesse de projectile ainsi que les vitesses de surface libre du cône central, dans l'axe de la cible, et du confinement. Leur acquisition s'effectue par Interférométrie Doppler Laser et par sondes chronométriques.

Cette configuration a notamment été utilisée lors de différentes campagnes de tir effectuées sur un couple aluminium/acier.

Afin de quantifier le frottement mis en jeu, il est nécessaire de procéder à une simulation numérique de l'expérience intégrant la loi de frottement à identifier ou valider. C'est précisément l'objet de notre étude. Ce dispositif expérimental nous servira donc de référence par la suite.





FIGURE 1.12 – Aperçu post-mortem de la cible après impact.

## ■ Conclusion du chapitre

**A**u cours de ce chapitre, nous avons eu l'occasion de nous familiariser avec les différentes notions liées à l'étude des frottements sous chocs. Nous retiendrons les points suivants :

- La mise en glissement sous chocs d'interfaces métalliques s'accompagne de phénomènes thermomécaniques irréversibles et fortement couplés entre eux.
- La sévérité de ces phénomènes semble fortement dépendre des conditions de frottement et des sollicitations auxquelles sont soumises les interfaces de glissement. Plus particulièrement, le couple formé par la vitesse relative de glissement  $[V]$  et la pression de contact  $F_N$  s'avère jouer un rôle prépondérant sur la dynamique globale du frottement.
- En fonction de la valeur prise par chacun de ces deux paramètres, deux phénomènes majeurs vont alors entrer en compétition et influencer sur la dynamique globale du frottement :
  - un phénomène d'**adoucissement thermique** occasionné par la mise en glissement de matériaux métalliques. Celle-ci s'accompagne d'échauffements importants produits à la fois par dissipation plastique et par le travail développé par les forces de frottement. Ces échauffements brusques affectent fortement la résistance des interfaces et peuvent dans certains cas conduire à la fusion partielle de l'interface. par conséquent .
  - un phénomène d'**écrouissage mécanique** induit par les forts taux de cisaillement observés au sein de la couche de matière. A l'inverse du phénomène d'adoucissement, l'écrouissage va tendre à renforcer les propriétés mécanique des interfaces.
- L'analyse post-mortem d'échantillons mis en glissement par choc dans des problèmes d'impact à haute vitesse permet de mettre en évidence la **localisation de chacun de ces deux phénomènes** au sein d'une couche de matière d'épaisseur micrométrique ( $\approx 20\mu m$ ).

**Intéressons nous maintenant à la mise en équation de ce problème !**





## Modélisation classique des problèmes de frottement sous chocs

### ■ Introduction du chapitre

**D**ans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation mathématique des problèmes de frottement sous chocs. Pour ce faire, nous nous proposons d'adjoindre à chaque phénomène physique le système d'équations qui lui est associé. Lorsque les structures sont soumises à des chargements sévères en termes de pression, de température, de durée et de vitesse de chargement, il s'agit d'écrire un problème aux limites intégrant :

- **le comportement macroscopique observé à l'échelle de la structure** : pour cela nous devons disposer de modèles permettant de calculer le comportement dynamique en grandes déformations de matériaux sollicités par choc. Ces modèles doivent retranscrire les phénomènes transitoires induits par le passage d'onde de chocs, ainsi que l'apparition éventuelle de déformations irréversibles (cf. chapitre 1, pp. 30 à 31),
- **le comportement microscopique observé au niveau des interfaces de contact** : nous devons également modéliser la résistance au glissement observée aux fortes pressions de contact et larges vitesses de glissement. Idéalement, le modèle doit tenir compte des mécanismes mis en jeu au voisinage des interfaces, telle que la déformation plastique en sous-couche, ainsi que la production de chaleur générée à la fois par le travail des forces de frottement et par dissipation plastique (cf. chapitre 1, 31 à 35).

Pour mener à bien la modélisation de tels problèmes, nous avons divisé ce chapitre en trois sections :

- La première section (pp. 44 à 50) nous permet de rappeler les bases de la modélisation ainsi que les principales notations utilisées dans le cadre de cette étude. Nous y abordons également la description du mouvement en grandes transformations (pp. 46 à 47), avant de nous

intéresser à l'expression des déformations (pp. 47 à 48) et des contraintes (pp. 48 à 50) au sein des milieux continus.

- Au cours de la seconde section (pp. 51 à 71), nous introduisons l'ensemble des équations permettant de modéliser le comportement des structures sollicitées par choc, à savoir : les lois de conservation (pp. 51 à 52), les lois constitutives (pp. 52 à 62) ainsi que les conditions initiales et aux limites (pp. 62 à 71). La modélisation des interactions observées aux interfaces de glissement fait quant à elle l'objet d'une attention particulière. Nous récapitulons dans un premier temps les conditions permettant de vérifier que deux corps sont en contact (pp. 64 à 65), puis nous passons en revue les principales lois permettant de modéliser le frottement éventuel (pp. 65 à 69). Enfin, nous nous intéressons à la modélisation des échanges de chaleur observés lors de la mise en glissement de matériaux métalliques (pp. 69 à 71). Ces différentes étapes nous permettent finalement d'obtenir un premier problème aux limites de base, caractéristique de la majorité des problèmes de frottement sous choc !
- A partir de cette trame, nous nous intéressons dans la troisième et dernière section (pp. 71 à 77) au cas particulier des problèmes d'évolution en déformations planes que nous modélisons dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  à deux dimensions.

## ■ 2.1 Éléments de modélisation

### 2.1.1 Représentation du problème et notations utilisées

Le cadre retenu pour cette étude est celui de la **mécanique des milieux continus** (voir [52, 53]). Dans la formulation mathématique de ce concept, un système mécanique quelconque est représenté par un volume constitué au niveau différentiel de particules ou points matériels. Nous considérons alors un milieu occupant dans la *configuration de référence* (autrement dit à l'instant initial  $T = 0$ ) le domaine  $\Omega_0$  dans l'espace tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . La géométrie étant susceptible d'évoluer au cours du temps, nous désignons par  $\Omega(T)$  le domaine occupé à l'instant  $T$  et nous notons  $\Gamma(T)$  sa frontière. L'état géométrique des particules occupant ce domaine est caractérisé par la seule connaissance de leur position notée  $\underline{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$  dans notre cas. Enfin, l'élément de volume est noté  $d\Omega$ , tandis que l'élément de surface est noté  $d\Gamma$ .

Comme nous souhaitons avant-tout étudier l'influence du frottement aux interfaces de glissement, nous supposons dans un second temps que le milieu est un assemblage de deux sous-structures partageant initialement une surface de contact commune. Ces deux sous-structures occupent les domaines  $\Omega_1(T)$  et  $\Omega_2(T)$  (voir figure 2.1 p.45) et sont chacune constituée d'un matériau métallique que nous supposons isotrope et homogène en espace. Nous désignons par  $\Gamma_1(T)$  et  $\Gamma_2(T)$  leurs frontières respectives et nous notons  $\underline{n}_1(\underline{X}, T)$  la normale sortante au domaine  $\Omega_1(T)$ ,  $\forall \underline{X} \in \Gamma_1(T)$  (respectivement  $\underline{n}_2(\underline{X}, T)$ , la normale sortante au domaine  $\Omega_2(T)$ ,  $\forall \underline{X} \in \Gamma_2(T)$ ). Nous vérifions alors :

$$\begin{cases} \overline{\Omega}(T) = \overline{\Omega}_1(T) \cup \overline{\Omega}_2(T), \\ \Gamma(T) = \Gamma_1(T) \cup \Gamma_2(T). \end{cases}$$

La surface de contact partagée par ces deux domaines évolue au cours du temps. Elle est incluse dans une *surface de contact potentiel* que nous notons  $\Gamma_C(T) = \Gamma_{C,1}(T) \cup \Gamma_{C,2}(T)$ .

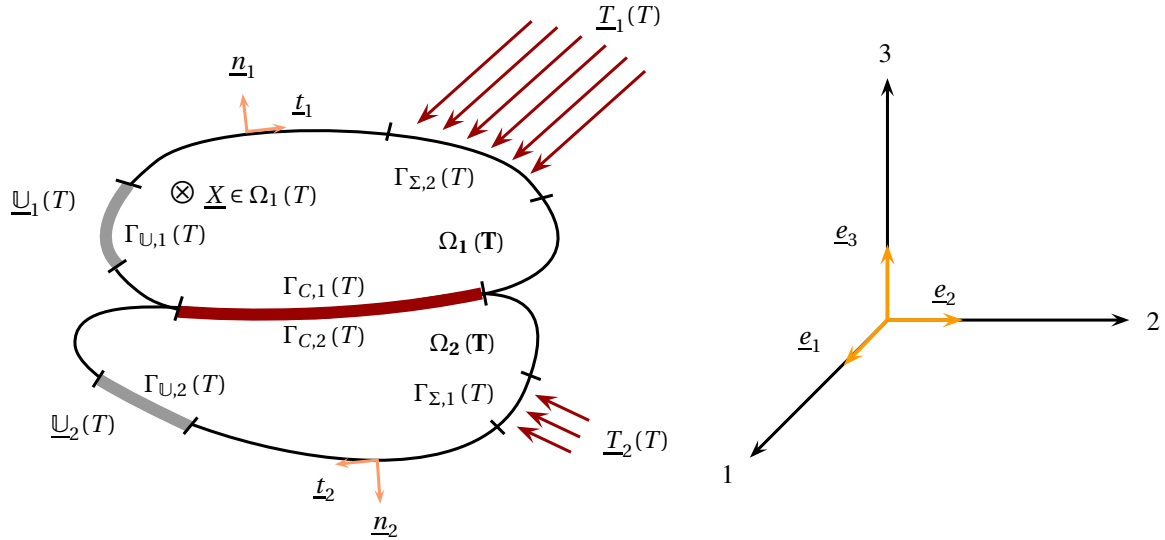


FIGURE 2.1 – Représentation schématique dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  du problème aux limites de référence

Les deux sous-structures  $\Omega_1(T)$  et  $\Omega_2(T)$  sont chacune soumises à des forces volumiques de pesanteur que nous négligeons par rapport aux chargements dynamiques qu'elles subissent. Comme nous l'avons évoqué au cours du chapitre précédent, il s'agit essentiellement, pour les applications que nous considérons, de chargements consécutifs à un choc d'origine mécanique (ex : impact de plaques) ou chimique (ex : détonation d'explosif). Ces sollicitations extérieures sont appliquées aux frontières de la structure  $\Omega(T)$  en imposant sur  $\Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T)$  :

- des efforts mécaniques sur la frontière  $\Gamma_\Sigma(T) \subset (\Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T))$  de normale unitaire  $\underline{n}_\Sigma$ ,
- des conditions thermiques sur la frontière  $\Gamma_\Theta = \Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T)$  de normale unitaire  $\underline{n}_\Theta$ ,
- des conditions de bord libre sur la frontière  $\Gamma_L(T) = \Gamma(T) \setminus (\Gamma_C(T) \cup \Gamma_\Sigma(T))$ , de normale unitaire  $\underline{n}_L$ .

Elles sont complétées à l'interface de contact potentiel  $\Gamma_C(T) = \Gamma_{C,1}(T) \cup \Gamma_{C,2}(T)$  par :

- des conditions de contact unilatéral,
- des conditions de frottement,
- une condition de flux thermique.

Ces conditions imposées aux frontières du domaine définissent les conditions aux limites du problème. Nous les explicitons au cours de la seconde section de ce chapitre (pp. 62 à 71).

Tel que nous l'avons défini, un champ solution du problème  $\mathcal{B}(\underline{X}, T)$  va ainsi être partitionné en un champ  $\mathcal{B}_1(\underline{X}, T)$  dans le domaine  $\Omega_1(T)$ , et en un champ  $\mathcal{B}_2(\underline{X}, T)$  dans le domaine  $\Omega_2(T)$ . Pour alléger l'écriture du problème, nous négligeons par la suite la notation indicielle, sauf mention explicite.

## 2.1.2 Description du mouvement

### Les descriptions eulériennes et lagrangiennes

Comme nous avons pu le constater au cours du chapitre précédent, l'une des propriétés principales des matériaux métalliques est l'aptitude à la déformation sous l'effet d'une sollicitation extérieure. Pour décrire la déformation de la structure  $\Omega(T)$ , nous devons tout d'abord déterminer le mouvement de chaque particule matérielle au cours du temps. Aussi, nous notons :

- $\underline{M}$ , la position d'une particule matérielle dans la *configuration de référence* ( $\Omega_0 = \Omega(0)$ ),
- $\underline{X}$ , la position d'une particule matérielle dans la *configuration actuelle*  $\Omega(T)$ ,
- $\underline{X}(\underline{M})$ , la position actuelle dans  $\Omega(T)$  de la particule matérielle qui occupait la position  $\underline{M}$  dans la configuration de *référence* ( $\Omega_0 = \Omega(0)$ ).

Deux approches existent pour décrire le mouvement des particules :

- **Description lagrangienne du mouvement** : dans ce cas, nous considérons la trajectoire de chaque particule matérielle à partir de sa position  $\underline{M}$  dans la configuration initiale  $\Omega_0 = \Omega(0)$  (configuration dite *de référence*). Cette description du mouvement est peu adaptée au problème que nous souhaitons traiter et nous lui préférons généralement la description eulérienne du mouvement.
- **Description eulérienne du mouvement** : dans cette description, nous recherchons à tout instant  $T$ , le champ de vitesse  $\underline{v}(\underline{X}, T)$ , où  $\underline{v}(\underline{X}, T)$  est la vitesse de la particule de matière qui se trouve à la position  $\underline{X} \in \Omega(T)$  au temps  $T$ .

**Dans le cadre de cette étude, toutes les variables et inconnues du problème seront écrites dans la description eulérienne, sauf mention explicite !**

### Dérivée matérielle

Afin d'évaluer l'évolution au cours du temps d'une grandeur  $\mathcal{B}(\underline{X}, T)$  caractéristique du problème, exprimée en coordonnées eulériennes, nous devons calculer sa dérivée par rapport au temps. Dans la description eulérienne du mouvement, la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial t}$  seule ne permet pas de décrire la variation de la quantité  $\mathcal{B}(\underline{X}, T)$  par rapport au temps à particule fixée. En effet, cette dérivée néglige le fait que la particule qui passe à la position  $\underline{X}$  à l'instant  $T$  est en mouvement et que ce mouvement contribue à la variation de  $\mathcal{B}(\underline{X}, T)$  dans le temps.

Pour y remédier, nous utilisons une **dérivée particulaire** (ou *dérivée matérielle*) que nous notons  $\frac{d}{dt}$  et que nous définissons comme la somme d'une variation instantanée à position  $\underline{X}$  fixée et d'un terme exprimant l'advection de la quantité portée par la particule que l'on suit dans son mouvement :

$$\underbrace{\frac{d\mathcal{B}(\underline{X}, T)}{dt}}_{\text{dérivée particulaire}} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{B}(\underline{X}, T)}{\partial t}}_{\text{variation instantanée}} + \underbrace{\underline{v}(\underline{X}, T) \cdot \text{grad}(\mathcal{B}(\underline{X}, T))}_{\text{advection}}. \quad (2.1)$$

Pour alléger les écritures, nous utiliserons également la notation

$$\dot{\mathcal{B}}(\underline{X}, T) = \frac{d\mathcal{B}(\underline{X}, T)}{dt}. \quad (2.2)$$

### 2.1.3 Déformations du milieu continu et expression des contraintes

#### Cinématique du milieu continu et expression des déformations

Du fait des sollicitations qu'elle subit, la structure  $\Omega(T)$  est amenée à se déformer. Dans notre cas de figure où nous observons de **grandes transformations**, nous étudierons les vitesses de déformation du milieu par le biais du **tenseur gradient des vitesses**  $\underline{\underline{\mathbb{L}}}(\underline{X}, T)$ ,

$$\underline{\underline{\mathbb{L}}}(\underline{X}, T) = \text{grad}(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)). \quad (2.3)$$

Comme tout tenseur du second ordre,  $\underline{\underline{\mathbb{L}}}(\underline{X}, T)$  peut-être décomposé en une partie symétrique  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T)$  et antisymétrique  $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\underline{X}, T)$  correspondant respectivement au **tenseur des taux de déformations** et au **tenseur des taux de rotations** :

$$\underline{\underline{\mathbb{L}}}(\underline{X}, T) = \underbrace{\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T)}_{\text{tenseur symétrique des taux de déformation}} + \underbrace{\underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\underline{X}, T)}_{\text{tenseur antisymétrique des taux de rotation}}. \quad (2.4)$$

Ces deux tenseurs s'expriment dans la description eulérienne comme des fonctions linéaires des gradients spatiaux du champ de vitesses  $\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)$ , pour tout point de coordonnées  $\underline{X}$  dans la configuration actuelle  $\Omega(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \{ \text{grad}(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) + \text{grad}^T(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) \}, \\ \underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \{ \text{grad}(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) - \text{grad}^T(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) \}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \{ \text{grad}(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) + \text{grad}^T(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) \}, \\ \underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \{ \text{grad}(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) - \text{grad}^T(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) \}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Notons que le tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T)$  (eq. 2.5) mesure la vitesse à laquelle se déforme un volume élémentaire de matière. Comme c'est un tenseur symétrique du second ordre, il peut être décrit par 6 composantes qui caractérisent complètement la vitesse de déformation du milieu dans le repère considéré :

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T) = \begin{pmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbb{D}_{12} & \mathbb{D}_{13} \\ \mathbb{D}_{12} & \mathbb{D}_{22} & \mathbb{D}_{23} \\ \mathbb{D}_{13} & \mathbb{D}_{23} & \mathbb{D}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$



D'un point de vue physique, la connaissance du tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)$  suffit à déterminer les taux de variations de longueurs et les variations d'angles du milieu. Ainsi, les termes non diagonaux ( $\mathbb{D}_{12}$ ,  $\mathbb{D}_{13}$  et  $\mathbb{D}_{23}$ ) mesurent la moitié de la vitesse de variation d'un angle droit entre les axes pris successivement deux à deux. Les termes diagonaux du tenseur ( $\mathbb{D}_{11}$ ,  $\mathbb{D}_{22}$ ,  $\mathbb{D}_{33}$ ) représentent quant à eux les vitesses d'allongements relatifs (ou dilatations) dans les directions de ces axes. Par conséquent, une mesure du **taux de dilatation volumique** nous est donnée par la trace du tenseur des taux de déformation qui est égale à la divergence du vecteur vitesse  $\underline{V}(\underline{X}, T)$  :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)) = \text{div}(\underline{V}(\underline{X}, T)). \quad (2.8)$$

Une **transformation incompressible**, c'est à dire sans variation de volume impliquera donc la nullité de la trace  $\text{Tr}(\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T))$ . La nullité du tenseur  $\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)$  caractérise quant à elle une transformation sans variations mutuelles de longueurs ni d'angles, ce qui correspond en d'autres termes à un **mouvement rigidifiant**.

### Expression des contraintes (schématisation des efforts intérieurs)

Les déformations du milieu génèrent des efforts intérieurs au sein de la matière, que nous caractérisons à l'aide du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)$ , lui aussi symétrique d'ordre deux. Également appelé tenseur de Cauchy, il s'écrit dans le même repère :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)$  étant symétrique, il peut être décomposé en :

- une partie déviatorique caractérisée par le **tenseur déviateur des contraintes**  $\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)$ ,
- une partie sphérique caractérisée par le **tenseur sphérique des contraintes**  $\Sigma_M(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{1}}$ ,  
où  $\Sigma_M(\underline{X}, T)$  est une contrainte moyenne et  $\underline{\underline{1}}$  le tenseur identité.

Nous vérifions ainsi :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) = \underbrace{\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)}_{\text{tenseur déviateur}} + \underbrace{\Sigma_M(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{1}}}_{\text{tenseur sphérique}}. \quad (2.10)$$

Lié à un changement de volume, le tenseur sphérique des contraintes  $\Sigma_M(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{1}}$  dépend uniquement de la contrainte moyenne  $\Sigma_M(\underline{X}, T)$  qui comme son nom l'indique mesure la valeur moyenne des composantes diagonales du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)$ . Son expression est indépendante du système de coordonnées retenu :

$$\Sigma_M(\underline{X}, T) = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)) = \frac{1}{3} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}). \quad (2.11)$$

Pour les problèmes en grandes transformations, nous préférons généralement utiliser la **pression hydrostatique**  $\mathbb{P}(\underline{X}, T)$ , qui n'est autre que l'opposé de la contrainte moyenne  $\Sigma_M(\underline{X}, T)$ .

$$\mathbb{P}(\underline{X}, T) = -\Sigma_M(\underline{X}, T). \quad (2.12)$$

Quel que soit le système de coordonnées retenu, le tenseur déviateur des contraintes  $\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)$  s'écrit dès lors :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\Sigma_{11} - \frac{1}{3}\Sigma_{22} - \frac{1}{3}\Sigma_{33} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \frac{2}{3}\Sigma_{22} - \frac{1}{3}\Sigma_{11} - \frac{1}{3}\Sigma_{33} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \frac{2}{3}\Sigma_{33} - \frac{1}{3}\Sigma_{11} - \frac{1}{3}\Sigma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Nous noterons notamment que sa trace s'annule et nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) = \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) - \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{1}}, \\ \text{Tr}(\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

### Vecteur contrainte

Le **vecteur contrainte**  $\underline{T}(\underline{X}, T)$  représente la densité des efforts mécaniques exercés à travers une interface donnée du milieu. Ce vecteur s'obtient par construction comme le produit du tenseur des contraintes et de la normale unitaire à la frontière considérée :

$$\underline{T}(\underline{X}, T) = \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}(\underline{X}, T), \quad \forall \underline{X} \in \Gamma(T). \quad (2.16)$$

Comme nous le verrons au cours des sections suivantes, le vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{X}, T)$  va nous permettre de définir les conditions aux limites s'exerçant aux frontières de la structure  $\Omega(T)$ . Nous pouvons le décomposer comme la somme de deux vecteurs (voir figure p.50) :

- $\underline{F}_N(\underline{X}, T)$  porté par la normale unitaire  $\underline{n}(\underline{X}, T)$  à la frontière  $\Gamma(T)$ ,
- $\underline{F}_T(\underline{X}, T)$  porté par le vecteur tangent unitaire  $\underline{t}(\underline{X}, T)$ .
- La composante normale du vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{X}, T)$  s'obtient relativement à la normale unitaire  $\underline{n}(\underline{X}, T)$  à l'aide de la relation suivante :

$$F_N(\underline{X}, T) = \underline{T}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}(\underline{X}, T), \quad \forall \underline{X} \in \Gamma(T). \quad (2.17)$$

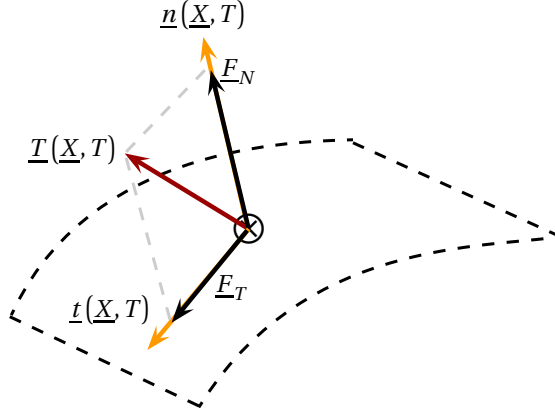


FIGURE 2.2 – Représentation du vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{X}, T)$ , de sa composante normale  $F_N(\underline{X}, T)$  et construction du vecteur représentant l'effort tangential  $\underline{E}_T(\underline{X}, T)$

Il nous est dès lors possible de définir le vecteur

$$\underline{E}_N(\underline{X}, T) = F_N(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}(\underline{X}, T), \quad \forall \underline{X} \in \Gamma(T). \quad (2.18)$$

- La composante tangentielle du vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{X}, T)$  s'obtient alors par :

$$\underline{E}_T(\underline{X}, T) = \underline{T}(\underline{X}, T) - \underline{E}_N(\underline{X}, T), \quad \forall \underline{X} \in \Gamma(T), \quad (2.19)$$

soit de manière équivalente,

$$\underline{E}_T(\underline{X}, T) = \underline{\Sigma}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}(\underline{X}, T) - F_N(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}(\underline{X}, T), \quad \forall \underline{X} \in \Gamma(T). \quad (2.20)$$

Suite à cette étape, nous sommes alors en mesure de définir le vecteur unitaire tangent

$$\underline{t}(\underline{X}, T) = \frac{\underline{E}_T(\underline{X}, T)}{\|\underline{E}_T(\underline{X}, T)\|} \quad (2.21)$$

et la composante tangentielle  $F_T(\underline{X}, T)$  du vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{X}, T)$ ,

$$F_T(\underline{X}, T) = \underline{E}_T(\underline{X}, T) \cdot \underline{t}(\underline{X}, T) = \|\underline{E}_T\|, \quad \forall \underline{X} \in \Gamma(T). \quad (2.22)$$

## ■ 2.2 Le problème aux limites de base

Intéressons nous maintenant à la modélisation des phénomènes mis en jeu. Pour déterminer l'évolution thermomécanique de la structure  $\Omega(T)$ , nous devons résoudre un problème aux limites gouverné par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit :

- des équations de conservation,
- des équations constitutives,
- des conditions aux limites spatio-temporelles.

### 2.2.1 Lois fondamentales de conservation

Les premières équations que nous devons résoudre sont les **équations de conservation**. Elles expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour tout système ou sous-système matériel que l'on suit dans son mouvement. Plusieurs formulations équivalentes peuvent être écrites. Dans le cadre de cette étude, nous avons privilégié une formulation locale non conservative.

- **Conservation de la masse (ou de la quantité de matière)**

L'équation s'écrit sous la forme locale :

$$\frac{d\rho(\underline{X}, T)}{dT} + \rho(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{V}(\underline{X}, T)) = 0, \quad (2.23)$$

où  $\rho(\underline{X}, T)$  est la densité volumique. Cette équation est également appelée *équation de continuité*.

- **Conservation de la quantité de mouvement**

Dans un référentiel galiléen, cette équation traduit le fait que le taux de variation de la quantité de mouvement d'un volume matériel  $\Omega'(T) \in \Omega(T)$  que l'on suit dans son mouvement est égal à la résultante des efforts exercés sur ce volume matériel. Quand les forces volumiques appliquées à la structure sont négligeables (généralement les forces de pesanteur), celle-ci s'écrit sous la forme locale non-conservative :

$$\rho(\underline{X}, T) \cdot \frac{d\underline{V}(\underline{X}, T)}{dT} = \text{div}(\underline{\Sigma}(\underline{X}, T)). \quad (2.24)$$

En considérant l'équation (eq. 2.14), nous obtenons l'expression équivalente suivante :

$$\rho(\underline{X}, T) \cdot \frac{d\underline{V}(\underline{X}, T)}{dT} = \text{div}(\underline{\Sigma}(\underline{X}, T)) - \text{grad}(\mathbb{P}(\underline{X}, T)). \quad (2.25)$$

- **Conservation de l'énergie**

Finalement, l'équation de conservation de l'énergie exprime le fait que la dérivée particulaire de l'énergie totale associée à un volume matériel  $\Omega'(T) \in \Omega(T)$  que l'on suit dans son mouvement est égal, à chaque instant, à la somme de la puissance mécanique des efforts extérieurs et du taux de chaleur reçus par ce volume. L'énergie totale étant égale à la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, plusieurs formulations sont possibles. Après soustraction de l'énergie cinétique, nous retenons la forme locale exprimant la conservation de l'énergie interne. Pour rappel, l'énergie interne d'un corps traduit les interactions mises en jeu à l'échelle microscopique. Pour tout domaine  $\Omega'(T) \in \Omega(T)$  que l'on suit dans son mouvement et en l'absence de source de chaleur, celle-ci s'écrit :

$$\rho(\underline{X}, T) \frac{de(\underline{X}, T)}{dT} = \underbrace{\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)}_{\text{puissance des efforts intérieurs}} - \underbrace{\text{div} \left( \overset{\circ}{\underline{Q}}(\underline{X}, T) \right)}_{\text{puissance calorifique induite par conduction}}. \quad (2.26)$$

L'ensemble des termes situés à droite de l'égalité constituent des termes sources contribuant aux variations d'énergie interne. Par ailleurs,  $e(\underline{X}, T)$  désigne la densité massique d'énergie interne dans le milieu étudié, tandis que  $\overset{\circ}{\underline{Q}}(\underline{X}, T)$  est un vecteur modélisant le flux de chaleur au sein de la matière (voir eq. 2.12 p. 60) :  $\overset{\circ}{\underline{Q}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n} \cdot d\mathbf{a}$  mesure le taux de chaleur transmis à l'extérieur à travers une facette  $\underline{n} \cdot d\mathbf{a}$ .

Remarquons qu'après substitution du tenseur des contraintes par l'équation (eq. 2.10) nous obtenons une formulation équivalente faisant apparaître le travail de la pression hydrostatique :

$$\rho(\underline{X}, T) \frac{de(\underline{X}, T)}{dT} = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{D}}(\underline{X}, T) - \underbrace{\underline{\mathbb{P}}(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{\underline{V}}(\underline{X}, T))}_{\text{travail de la pression hydrostatique}} - \text{div} \left( \overset{\circ}{\underline{Q}}(\underline{X}, T) \right). \quad (2.27)$$

## 2.2.2 Lois constitutives

Aux trois équations de conservations introduites précédemment, il convient d'ajouter d'autres relations permettant quant à elles de décrire le comportement des matériaux en fonction des sollicitations qu'ils subissent ; ce sont les **équations constitutives**. Elles s'articulent autour d'une **loi de comportement** qui permet de relier la variation des contraintes à la variation des déformations observées dans un milieu donné. Nous la complétons généralement par :

- des **lois constitutives de la plasticité**, qui permettent de déterminer les conditions à l'origine de la déformation irréversible des métaux,
- des **équations d'état** qui caractérisent l'état de la matière à partir des valeurs prises par certains paramètres d'état, tels que l'énergie interne, et la densité,
- une **loi thermique** qui relie gradient de température et flux de chaleur au sein des matériaux.

## Forme générale des lois de comportement en grandes déformations

Comme nous l'avons évoqué au cours du chapitre précédent, les matériaux métalliques présentent différents types de comportement en fonction des sollicitations auxquelles ils sont soumis.

- Lorsque les sollicitations exercées demeurent peu importantes, le comportement rhéologique des matériaux est dit **élastique**. La déformation se résorbe alors lorsque les sollicitations cessent d'être appliquées.
- Il existe cependant un niveau maximal des sollicitations au-dessus duquel les matériaux subissent des déformations irréversibles.

Le comportement réversible des matériaux métalliques en grandes transformations, peut se modéliser à l'aide d'une loi de comportement hypoélastique. Celle-ci s'écrit comme une relation linéaire, entre une dérivée temporelle du tenseur déviateur des contraintes  $\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)$  et le tenseur déviateur des taux de déformations élastiques  $\underline{\underline{D}}'(\underline{X}, T)$ ,

$$\underline{\underline{D}}'(\underline{X}, T) = \left( \underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T)) \underline{\underline{1}} \right). \quad (2.28)$$

- **Notion de dérivée objective :**

Par définition, les dérivées temporelles de contraintes employées en grandes transformations doivent être **objectives**. En d'autres termes, elles doivent être indépendantes de l'observateur. Plusieurs dérivées répondent à ce critère. Les dérivées objectives les plus utilisées sont les dérivées de Jaumann (voir [53] p. 279, [54]) et de Green-Naghdi (voir [55]). La dérivée de Truesdell (voir [53], p. 278) est également utilisée dans certains codes de calcul. La différence entre chacune de ces dérivées n'est cependant sensible que pour des déformations très importantes. Comme le rapporte G. Nefussi (voir [56]), la dérivée de Jaumann est préconisée pour des raisons théoriques par Ladevèze (voir [57]) et Rougé (voir [58]). C'est donc cette dérivée, la plus physique, que nous considérons dans notre cas. Appliquée au tenseur déviateur des contraintes elle est notée  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}}(\underline{X}, T)$  et vérifie :

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}}(\underline{X}, T) = \dot{\underline{\underline{S}}}(\underline{X}, T) + \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, T) - \underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T). \quad (2.29)$$

Nous reconnaissons dans la relation précédente (eq. 2.29) le tenseur déviateur des contraintes  $\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)$ , sa dérivée matérielle  $\dot{\underline{\underline{S}}}(\underline{X}, T)$ , ainsi que le tenseur des taux de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, T)$ . Notons également que dans l'hypothèse de petites rotations ( $\underline{\underline{\Omega}} \rightarrow 0$ ), la dérivée de Jaumann  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}}(\underline{X}, T)$  est identique à la dérivée matérielle  $\dot{\underline{\underline{S}}}(\underline{X}, T)$  du tenseur déviateur des contraintes.

- **Formulation hypoélastique linéaire du comportement réversible isotrope :**

Le comportement élastique isotrope des matériaux en grandes transformations est modélisée par une relation linéaire entre la dérivée de Jaumann du tenseur déviateur des contraintes (eq. 2.29), le tenseur déviateur des taux de déformation élastique  $\underline{\underline{D}}'(\underline{X}, T)$  (eq. 2.28), et le **module de cisaillement**  $G_0$  :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) = 2G_0 \cdot \left( \underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T)) \underline{\underline{1}} \right). \quad (2.30)$$

- **Prise en compte du comportement élastoplastique en grandes déformations**

La loi que nous venons d'écrire (eq. 2.30) permet de traiter le comportement élastique des métaux. Cependant, elle ne peut plus être appliquée en présence de déformations irréversibles. Pour décrire le comportement élastoplastique des métaux en grandes déformations, nous devons donc la reformuler. Comme le récapitule G.Nefussi (voir [56]), deux approches existent :

- les lois de comportement élastoplastiques "*en formulation totale*".
- les lois de comportement élastoplastiques "*en taux*", souvent appelées **lois incrémentales**,

Contrairement au comportement élastique, il n'est plus possible d'écrire une relation biunivoque entre déformations et contraintes en raison de la dépendance de la solution à l'historique de chargement. Les lois en "*taux*" décrivent cet historique par une décomposition additive du tenseur des taux de déformation totale  $\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)$  en une partie élastique réversible  $\underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T)$  et une partie plastique irréversible  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  (eq. 2.31). La déformation plastique se faisant par définition sans variation de volume, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{D}}(\underline{X}, T) = \underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T) + \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T), \\ \text{Tr}(\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)) = 0. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{D}}(\underline{X}, T) = \underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T) + \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T), \\ \text{Tr}(\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)) = 0. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

En substituant le tenseur des déformations élastiques  $\underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T)$  par l'équation (eq. 2.31) dans la loi de comportement hypoélastique (eq. 2.30), nous obtenons alors la **loi de comportement élastoplastique** :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) = 2G_0 \left( \underline{\underline{D}}(\underline{X}, T) - \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)) \underline{\underline{1}} \right). \quad (2.33)$$

D'après les relations (eqs. 2.31 et 2.33), une évolution purement élastique du matériau se fera donc à partie plastique  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  nulle.

## Lois constitutives de la plasticité

Disposant d'une loi de comportement permettant de décrire le comportement élastoplastique des métaux (eq. 2.33), l'enjeu consiste désormais à déterminer le tenseur des taux de déformation plastique  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$ . Pour cela nous avons recours à différentes lois constitutives de la plasticité des métaux. Dans la pratique, il s'agit de répondre aux trois questions suivantes :

**Quand y a-t-il déformation plastique ?**  
**Comment s'effectue la déformation plastique ?**  
**Comment évoluent les conditions de plasticité au cours du temps ?**

Dans un premier temps nous devons donc définir et déterminer quel état des contraintes va provoquer le comportement inélastique des matériaux. Cette notion de chargement maximal traduit l'existence d'une *contrainte d'écoulement* seuil  $\Upsilon(\underline{X}, T)$  appelée *seuil de plasticité* ou bien encore *limite élastique*. Son expression nous est donnée par un *modèle rhéologique* fonction de différents paramètres thermomécaniques.

- **Modèles rhéologiques (Yield Stress Model) :**

Dans le cas des matériaux sollicités par choc, la limite élastique  $\Upsilon(\underline{X}, T)$  va dépendre de plusieurs paramètres, tels que la température, la pression hydrostatique, la vitesse de déformation plastique, ou bien encore la déformation plastique cumulée en un point matériel donné.

$$\Upsilon(\underline{X}, T) = \mathcal{F}(\Theta(\underline{X}, T), \mathbb{P}(\underline{X}, T), \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T), \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(\underline{M}), T), \dots) \quad (2.34)$$

En plus du modèle élastoplastique parfait, où la limite élastique en un point matériel donné est supposée constante au cours du temps, plusieurs autres modèles existent pour décrire cette fonction d'écoulement. Nous les regroupons généralement au sein de trois classes de modèles (voir [35], p. 11) :

- Nous distinguons tout d'abord **les modèles empiriques** : Ce sont des fonctions mathématiques simples choisies pour leur aptitude à retranscrire des données issues d'expériences de caractérisation mécanique. Ils sont donc valides dans un domaine restreint et leur extrapolation se justifie difficilement. Néanmoins, ces modèles sont très largement employés car les coefficients associés sont disponibles dans la littérature pour un grand nombre de matériaux, et leur formulation simple facilite leur utilisation. Nous pouvons citer par exemple,
  - le modèle de Steinberg-Cochran-Guinan SCG (voir [59]),
  - le modèle de Steinberg-Lund (voir [60]),
  - le modèle de Johnson-Cook (voir [61]),
  - le modèle de Preston-Tonks-Wallace (PTW) (voir [62]).
- Viennent ensuite **les modèles semi-empiriques** : Ces modèles s'appuient sur la restitution de phénomènes physiques observables (équivalence temps-température, saturation de la contrainte). Leur coefficients correspondent à des grandeurs physiques identifiables et sont donc, par nature, plus facilement extrapolés en dehors du domaine de détermination. Le modèle semi-empirique le plus utilisé est celui de Zerilli-Armstrong (voir [63]).



- Finalement, **les modèles physiques** sont basés sur la représentation de l'évolution de la micro-structure du matériau à l'aide de variables spécifiques (densité de dislocations...). Ils cherchent à représenter les phénomènes microstructuraux qui contrôlent le comportement élastoplastique des matériaux métalliques. Citons pour exemple le modèle MTS (Mechanical Treshold Stress) (voir [64]).

Notons que dans le cadre de cette thèse, notre travail utilisera essentiellement le modèle SCG. Dans ce modèle empirique, la limite élastique  $\Upsilon(\underline{X}, T)$  est définie comme une fonction de la température  $\Theta(\underline{X}, T)$ , de la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\underline{X}, T)$ , et de la déformation plastique cumulée  $\bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T)$  dont nous explicitons l'expression à la page p. 59 :

$$\begin{cases} \Upsilon(\underline{X}, T) = \min\left(Y_{\max}, Y_0 [1 + \beta \cdot \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T)]^\eta\right) \cdot \frac{\mathbb{G}(\underline{X}, T)}{G_0}, & (2.35) \\ \mathbb{G}(\underline{X}, T) = G_0 (1 + g^{\mathbb{P}}(\underline{X}, T) - h_\Theta(\Theta(\underline{X}, T) - 300)). & (2.36) \end{cases}$$

Dans l'équation (2.35),  $Y_0$  est la limite élastique initiale, tandis que  $Y_{\max}$  représente la *contrainte de saturation* (ou *limite d'écrouissage*) et le terme  $\mathbb{G}(\underline{X}, T)$  représente le coefficient de cisaillement SCG. Les coefficients  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $g$ , et  $h_\Theta$  sont des paramètres du modèle SCG, propre au matériau considéré,  $\beta$  et  $\eta$  caractérisant l'écrouissage,  $g$  l'écrouissage sous pression hydrostatique, et  $h_\Theta$  l'adoucissement thermique.

- **Critères de plasticité :**

Le modèle rhéologique devant être écrit dans l'ensemble des contraintes, il convient de spécifier la limite élastique dans l'espace des contraintes. Nous introduisons pour ce faire un **critère de plasticité** qui définit les conditions que doit satisfaire l'état des contraintes pour que se produise la déformation plastique. Tout comme les modèles rhéologiques, les critères de plasticité sont pour la plupart d'origine empirique. Leur principe repose sur la définition d'une fonction de charge  $\Phi(\underline{X}, T)$  qui pour les matériaux métalliques, où la déformation plastique est supposée incompressible, s'écrit généralement comme une fonction scalaire de l'état des contraintes et du seuil de plasticité du matériau :

$$\Phi(\underline{X}, T) = \Phi\left(\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T), \Upsilon(\underline{X}, T)\right). \quad (2.37)$$

En fonction de la valeur prise par cette fonction de charge  $\Phi(\underline{X}, T)$  (eq. 2.37) nous notons :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{el} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) \in \mathbb{R}^6 \mid \Phi(\underline{X}, T) < 0 \right\} \text{ le domaine d'élasticité} & (2.38) \\ \partial\mathcal{C} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) \in \mathbb{R}^6 \mid \Phi(\underline{X}, T) = 0 \right\} \text{ la surface seuil} & (2.39) \end{cases}$$

Parmi les différents critères de plasticité incompressibles existant (eq. 2.37), le plus utilisé pour les métaux est le **critère de Von Mises** (voir [65]), également appelé *critère de l'énergie de changement de forme*. Son expression est donnée par l'équation suivante :

$$\Phi(\underline{X}, T) = \Sigma_{eq}(\underline{X}, T) - \Upsilon(\underline{X}, T), \quad (2.40)$$

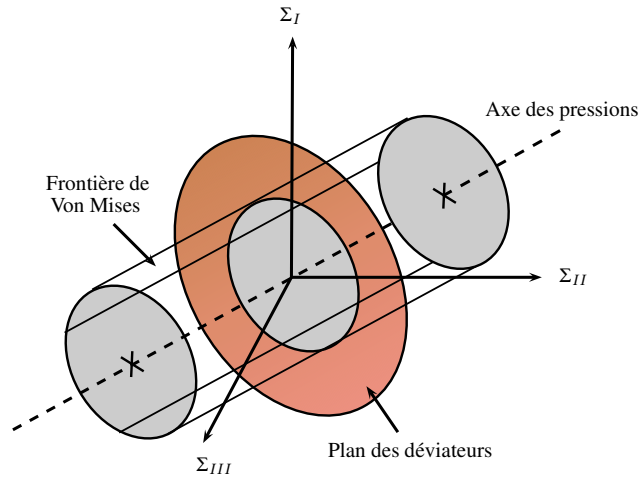


FIGURE 2.3 – Représentation du critère de VON MISES dans l'espace formé par les contraintes principales  $\Sigma_I$ ,  $\Sigma_{II}$  et  $\Sigma_{III}$

où  $\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)$  est la contrainte équivalente de Von Mises. Cette contrainte mesure l'intensité du cisaillement et nous la définissons par,

$$\Sigma_{eq}(\underline{X}, T) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)\| = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}})}. \quad (2.41)$$

Comme nous l'avons représenté sur la figure 2.3 Le domaine de plasticité de Von Mises est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des pressions.

- **Loi d'écoulement plastique :**

Il nous faut maintenant décrire de quelle façon va se faire la déformation plastique une fois le seuil plastique atteint (c'est à dire lorsque  $\Phi(\underline{X}, T) = 0$ ). Pour ce faire, nous calculons le tenseur déviateur des taux de déformation plastique  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  à l'aide d'une **loi d'écoulement plastique** reliant l'incrément de déformation plastique à l'incrément de contrainte. En particulier, il nous faut préciser :

- la direction de l'incrément de déformation plastique,
- l'amplitude de l'incrément de déformation plastique.

Expérimentalement, nous constatons pour la majorité des matériaux métalliques que les variations de déformation plastique s'opèrent suivant des directions normales à la surface seuil  $\Phi(\underline{X}, T) = 0$  et vers l'extérieur de cette surface. Ceci nous amène à postuler que l'évolution de la déformation plastique est gouvernée par une **règle de normalité**. La surface seuil étant définie par la fonction  $\Phi(\underline{X}, T) = 0$ , nous définissons sa normale extérieure  $\underline{\underline{\psi}}(\underline{X}, T)$  par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\psi}}(\underline{X}, T) = \left( \frac{\partial \Phi(\underline{X}, T)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)} \right), \quad (2.42)$$

où  $\underline{\underline{\psi}}(\underline{X}, T)$  donne la direction de l'écoulement plastique. Nous pouvons alors exprimer le tenseur déviateur des taux de déformation plastique  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T) = \dot{\lambda}(\underline{X}, T) \left( \frac{\partial \Phi(\underline{X}, T)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)} \right), \quad \dot{\lambda}(\underline{X}, T) \geq 0. \quad (2.43)$$

Ici, le multiplicateur  $\dot{\lambda}(\underline{X}, T)$  est un scalaire a priori indéterminé, constituant l'une des inconnues introduites par le modèle de comportement. Physiquement,  $\dot{\lambda}(\underline{X}, T)$  correspond à l'amplitude de la vitesse de déformation plastique et est lié à l'accroissement des contraintes par rapport au seuil initial de plasticité. Les déformations se faisant dans le sens des contraintes correspondantes appliquées, ce scalaire est nécessairement positif ou nul.

Pour résumer,

- la vitesse de déformation plastique  $\dot{\lambda}(\underline{X}, T)$  est nulle lorsque l'état des contraintes se situe dans le domaine d'élasticité  $\mathcal{C}_{el}$ ,
- la vitesse de déformation plastique  $\dot{\lambda}(\underline{X}, T)$  est normale extérieure à la surface seuil  $\partial \mathcal{C}$  lorsque les contraintes vérifient  $\Phi(\underline{X}, T) = 0$ .

Lorsque le critère de plasticité de Von Mises (eqs. 2.40 et 2.41) est utilisé, le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}(\underline{X}, T)$  (eq. 2.43) est égal à la vitesse de **déformation plastique généralisée**  $\dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(\underline{M}), T)$ ,

$$\dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(\underline{M}), T) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T) \right\|. \quad (2.44)$$

La loi d'écoulement plastique (eq. 2.43) s'écrit alors :

$$\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}(\underline{M}), T) = \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(\underline{M}), T) \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}. \quad (2.45)$$

#### • Conditions de charge et décharge :

Pour résumer, un écoulement plastique ne peut être observé que si :

$$\begin{cases} \Phi(\underline{X}, T) = 0, & (2.46) \\ \dot{\lambda}(\underline{X}, T) > 0. & (2.47) \end{cases}$$

Dans le cas où la condition  $\Phi(\underline{X}, T) = 0$  est satisfaite, il se produit un glissement dans la direction normale au domaine de plasticité. Dans le cas contraire, le comportement est élastique, et nous

observons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\underline{X}, T) < 0, \\ \dot{\lambda}(\underline{X}, T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}(\underline{X}, T) = 0. \\ \Phi(\underline{X}, T) < 0, \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Nous résumons ces deux conditions par l'équation suivante<sup>1</sup> :

$$\dot{\lambda}(\underline{X}, T) \cdot \Phi(\underline{X}, T) = 0, \dot{\lambda}(\underline{X}, T) \geq 0, \Phi(\underline{X}, T) \leq 0. \quad (2.50)$$

- **Condition de consistance (persistence) :**

A ces conditions de charge et de décharge (eq. 2.50), il convient d'ajouter une dernière condition, appelée **condition de consistance** (ou bien également *condition de persistence*). Celle-ci exprime qu'en charge plastique, l'état des contraintes doit demeurer sur la surface de charge  $\Phi(\underline{X}, T) = 0$  au cours d'un incrément plastique. Autrement dit, nous devons également vérifier :

$$\dot{\Phi}(\underline{X}, T) = 0. \quad (2.51)$$

Nous avons alors la condition suivante,

$$\dot{\lambda}(\underline{X}, T) > 0 \Rightarrow \dot{\Phi}(\underline{X}, T) = 0. \quad (2.52)$$

Comme précédemment (eq. 2.50) nous pouvons regrouper les deux conditions précédentes sous la forme d'une seule et même équation :

$$\dot{\lambda}(\underline{X}, T) \cdot \dot{\Phi}(\underline{X}, T) = 0. \quad (2.53)$$

- **Déformation plastique cumulée :**

Nous définissons finalement la **déformation plastique cumulée**  $\bar{\mathbb{E}}_p(M, T)$  qui est une mesure scalaire du trajet de déformation plastique réalisé au cours du temps en un point matériel donné :

$$\bar{\mathbb{E}}_p(M, T + \Delta T) = \bar{\mathbb{E}}_p(M, T) + \int_T^{T+\Delta T} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) dT. \quad (2.54)$$

---

1. Notons que les conditions ainsi énoncées s'appellent en programmation convexe, conditions de KUHN-TUCKER.

## Équations constitutives additionnelles

- **Équation constitutive de la thermique, la loi de Fourier :**

Les échanges thermiques mis en jeu au sein de la structure  $\Omega(T)$  se font essentiellement par conduction. Nous les modélisons par le vecteur  $\underline{\overset{\circ}{Q}}(\underline{X}, T)$  caractérisant le flux de chaleur observé. Nous l'exprimons à l'aide de la loi constitutive de Fourier (voir [66]) qui permet de relier linéairement  $\underline{\overset{\circ}{Q}}(\underline{X}, T)$  au gradient des températures  $\Theta(\underline{X}, T)$  :

$$\underline{\overset{\circ}{Q}}(\underline{X}, T) = -\kappa(\underline{X}, T) \cdot \text{grad}(\Theta(\underline{X}, T)), \quad \forall \underline{X} \in \Omega(T). \quad (2.55)$$

Le coefficient  $\kappa(\underline{X}, T)$  est un scalaire positif caractérisant la **conductivité thermique** du milieu considéré.

- **Équations d'état :**

Pour caractériser l'état de la matière, nous utilisons deux équations d'états :

- une **équation d'état en pression** (eq. 2.58) qui permet de calculer la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\underline{X}, T)$  (voir eq. 2.12) connaissant la densité  $\rho(\underline{X}, T)$ , ainsi que la densité d'énergie  $e(\underline{X}, T)$ . Celle-ci s'exprime typiquement comme la somme de deux termes :

$$e(\underline{X}, T) = e_M(\underline{X}, T) + e_{el}(\underline{X}, T). \quad (2.56)$$

Le terme  $e_{el}(\underline{X}, T)$  correspond à l'énergie de cisaillement élastique stockée de manière réversible et s'écrit :

$$\rho(\underline{X}, T) \frac{de_{el}(\underline{X}, T)}{dT} = \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{D}}_{el}(\underline{X}, T). \quad (2.57)$$

La partie complémentaire  $e_M(\underline{X}, T)$  est en général la partie qui est prise en compte dans l'équation d'état en pression :

$$\mathbb{P}(\underline{X}, T) = \mathbf{P}(\rho(\underline{X}, T), e_M(\underline{X}, T)). \quad (2.58)$$

Plusieurs formulations existent en fonction des matériaux considérés, telles que les lois de Mie-Grüneisen, de Tillotson.

- une **équation d'état en température** (eq. 2.59) qui permet quant à elle d'exprimer la partie complémentaire  $e_M(\underline{X}, T)$  de la densité d'énergie interne  $e(\underline{X}, T)$  comme une fonction de la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\underline{X}, T)$  et de la température  $\Theta(\underline{X}, T)$  :

$$e_M(\underline{X}, T) = e(\mathbb{P}(\underline{X}, T), \Theta(\underline{X}, T)). \quad (2.59)$$

D'après cette formulation (eq. 2.59) nous pouvons écrire une expression alternative à l'équation de l'énergie (eq.2.27), fonction de  $e_M(\underline{X}, T)$  et du taux de déformation plastique  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  :

$$\rho(\underline{X}, T) \frac{de_M(\underline{X}, T)}{dT} - \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T) + \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{\underline{V}}(\underline{X}, T)) + \text{div}(\overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}}(\underline{X}, T)) = 0. \quad (2.60)$$

Remarquons dans l'expression précédente que le terme  $\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  modélise la dissipation plastique au sein des matériaux. En remplaçant le tenseur des taux de déformations plastique  $\underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T)$  par son expression (eq. 2.45), nous récrivons ce terme comme le produit de la contrainte équivalente  $\Sigma_{\text{eq}}(\underline{X}, T)$  et de la vitesse de déformation plastique généralisée  $\dot{\underline{\underline{E}}}_p(\underline{X}(M), T)$  :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{D}}_p(\underline{X}, T) = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{S}}(\underline{X}, T) : \underline{\underline{S}}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{\text{eq}}(\underline{X}, T)} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}_p(\underline{X}(M), T) = \Sigma_{\text{eq}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}_p(\underline{X}(M), T). \quad (2.61)$$

Dès lors, une formulation équivalente de l'équation de conservation de l'énergie interne calorifique s'écrit :

$$\rho(\underline{X}, T) \frac{de_M(\underline{X}, T)}{dT} - \Sigma_{\text{eq}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}_p(\underline{X}(M), T) + \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{\underline{V}}(\underline{X}, T)) + \text{div}(\overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}}(\underline{X}, T)) = 0. \quad (2.62)$$

- **Modèles additionnels :**

Éventuellement, certains modèles additionnels, tels que des **modèles d'endommagement** (ex : le modèle de Tuler-Butcher, les modèles dits de "critères limites" en pression, densité, contrainte principale maximale, et les modèles géométriques...) peuvent être pris en compte dans l'évolution des coefficients de comportement.

### Conditions de régularité imposées par les relations constitutives

Comme nous pouvons le constater, la loi de Fourier (eq. 2.55) utilise le gradient du champ de température  $\Theta(\underline{X}, T)$ . La loi élastoplastique (eq. 2.33) utilise quant à elle le gradient des vitesses  $\underline{\underline{V}}(\underline{X}, T)$ . Ces gradients sont pris au sens des distributions.

Pour que ces lois conduisent à des puissances développées finies, il ne peut pas y avoir de distribution de Dirac dans les gradients de températures utilisés dans les zones avec conduction thermique ainsi que dans les gradients de vitesses utilisés dans les zones élastoplastiques avec écrouissage. Nous devons donc vérifier deux conditions de continuité sur toute interface à l'intérieur du matériau considéré (hors ondes de choc) :

- continuité du champ des températures  $\Theta(\underline{X}, T)$ ,
- continuité du champ des vitesses  $\underline{V}(\underline{X}, T)$ .

En général, nous imposons ces conditions en exigeant pour tout  $T > 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V} \in \mathcal{H}^1(\Omega(T)), \\ \Theta \in \mathcal{H}^1(\Omega(T)). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.63) \\ (2.64) \end{array}$$

Ceci revient à écrire que la dérivée première de chacune des fonctions est de carré intégrable sur le domaine  $\Omega(T)$ .

### 2.2.3 Modélisation des conditions aux limites spatio-temporelles

Le système d'équations aux dérivées partielles que nous venons d'introduire (eqs. 2.23 à 2.64) ne fait qu'exprimer la façon suivant laquelle les variables thermomécaniques du problème évoluent en espace et en temps, traduisant ainsi l'équilibre thermomécanique de la structure  $\Omega(T)$ . Pour que la formulation du problème soit complète, il est nécessaire d'y adjoindre des conditions aux limites spatio-temporelles. Celles-ci vont nous permettre de traduire le lien existant entre la structure  $\Omega(T)$  et le milieu extérieur. Par convention, nous choisissons l'instant  $T = 0$  pour être notre temps initial. Nous allons ainsi distinguer :

- les conditions initiales, qui expriment dans le cas de problèmes instationnaires la distribution spatiale des différents champs et paramètres du problème à un instant donné, le plus souvent dans la configuration de référence  $\Omega_0$  à l'instant initial  $T = 0$ . Cette distribution est en principe arbitraire et peut même être discontinue.
- les conditions aux limites qui s'expriment sur  $\Gamma(T)$  et qui décrivent la façon suivant laquelle les valeurs aux frontières du corps étudié vont varier à partir de l'instant initial,
- les conditions aux limites à l'interface de glissement  $\Gamma_C(T)$ , dont les relations permettant de prendre en compte le frottement.

Les conditions aux limites ainsi posées vont nous permettre d'expliquer comment, à partir d'un instant initial, le système va évoluer.

### Conditions initiales

- Valeurs initiales des champs thermomécaniques :

Nous supposons que le champ des contraintes, la déformation plastique cumulée et le champ des vitesses sont initialement nuls dans la configuration de référence  $\Omega_0$ , de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0, \\ \underline{\underline{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0, \\ \underline{\underline{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.65) \\ (2.66) \\ (2.67) \end{array}$$

Pour modéliser les chocs, nous considérons une condition initiale de chargement en vitesse, que nous imposons sur une frontière  $\Gamma_U(0)$  :

$$\underline{\underline{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\underline{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \quad (2.68)$$

Nous spécifions également une température et une densité initialement homogènes en espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \forall \underline{X} \in \Omega_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.69) \\ (2.70) \end{array}$$

### Conditions aux limites sur $\Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T)$

- Condition de bords libres imposée sur  $\Gamma_L(T)$  (C.L. statiques) :

Nous supposons que la structure n'est soumise à aucun chargement mécanique au cours du temps  $T$ . Autrement dit,  $\Gamma_\Sigma(T) = \emptyset$ . Sur  $\Gamma_L(T)$  le vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{X}, T)$  doit être nul :

$$\underline{T}(\underline{X}, T) = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_L(\underline{X}, T) = 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_L(T). \quad (2.71)$$

- Condition aux limites thermique imposée sur  $\Gamma_\Theta(T) = \Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T)$  :

Finalement, nous devons modéliser les échanges de chaleur entre le domaine  $\Omega(T)$  et le milieu extérieur. Dans notre cas de figure, les échanges convectifs et radiatifs avec le milieu ambiant sont négligés, et nous imposons une condition de flux nul sur la frontière  $\Gamma_\Theta(T) = \Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T)$  de normale unitaire  $\underline{n}_\Theta$  :

$$\underline{\dot{Q}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_\Theta(\underline{X}, T) = 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_\Theta(T). \quad (2.72)$$



D'après la loi constitutive de Fourier (eq. 2.55), ceci revient à imposer une condition aux limites de Neumann telle que la dérivée en température s'annule sur  $\Gamma_\Theta(T)$  :

$$-\kappa(\underline{X}, T) \cdot \text{grad}(\Theta(\underline{X}, T)) \cdot \underline{n}_\Theta = -\kappa(\underline{X}, T) \cdot \frac{\partial \Theta(\underline{X}, T)}{\partial \underline{n}_\Theta} = 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_\Theta(T). \quad (2.73)$$

### Conditions aux limites à l'interface de glissement $\Gamma_C(T)$

Intéressons-nous finalement aux interactions mises en jeu à l'interface de glissement  $\Gamma_C(T)$ . Nous les modélisons par le biais de trois conditions aux limites distinctes :

- un modèle de contact unilatéral permettant de déterminer s'il y a contact ou décollement à l'interface,
- un modèle de frottement, permettant de prendre en compte la résistance au glissement lorsque le contact est vérifié,
- une condition aux limites thermique permettant d'exprimer les échanges de chaleur à l'interface, et notamment la production de chaleur due au travail des forces de frottement.

- **Modélisation des conditions de contact unilatéral :**

Pour définir les conditions de contact (voir [67, 68]), nous considérons maintenant un point  $\underline{X}$  sur l'interface potentielle de contact  $\Gamma_C(T)$ . Si  $\underline{X} \in \Omega_i(T)$ ,  $\underline{n}(\underline{X}, T)$  dénotera la normale extérieure et  $g_C(\underline{X}, T)$  la distance à l'obstacle  $\Omega_j$ , c'est à dire la distance entre  $\underline{X}$  et sa projection  $\underline{Y}(\underline{X})$  sur  $\Omega_j$ ,

$$g_C(\underline{X}, T) = (\underline{X} - \underline{Y}) \cdot \underline{n}(\underline{Y}). \quad (2.74)$$

En cas de contact en  $\underline{X} \in \Omega_1$ , il existe à l'échelle du point matériel une petite surface  $S(X)$  de normale  $\underline{n}_C(\underline{X})$  sur laquelle les deux corps  $\Omega_i(T)$  et  $\Omega_j(T)$  sont en contact. Nous vérifions alors, sous les notations de la figure 2.1, l'**unicité des normales**,

$$\underline{n}_1(\underline{X}, T) = -\underline{n}_2(\underline{X}, T) = \underline{n}_C(\underline{X}, T), \quad (2.75)$$

ainsi qu'un **écart nul** entre les deux corps,

$$g_C(\underline{X}) = 0. \quad (2.76)$$

Nous observons également l'**égalité des efforts normaux**,

$$F_N(\underline{X}, T) = F_{N,1}(\underline{X}, T) = F_{N,2}(\underline{Y}, T), \quad (2.77)$$

qui sont en **compression**,

$$F_N(\underline{X}, T) \geq 0. \quad (2.78)$$

A ces quatre conditions de contact (eqs. 2.75 à 2.78), nous ajoutons souvent une condition de **persistance** indiquant qu'il ne peut pas y avoir de décollement pour des forces normales non nulles. Nous l'écrivons

$$[\underline{V}] \cdot \underline{n}_C = (\underline{V}_2 - \underline{V}_1) \cdot \underline{n}_C = 0 \text{ si } F_N > 0. \quad (2.79)$$

Quand il n'y a pas de contact, l'effort de contact est nul et la distance  $g_C(\underline{X})$  est positive. En posant  $\underline{n}_C = \underline{n}(\underline{X})$  en l'absence de contact nous résumons l'ensemble de ces conditions de contact unilatéral sur la surface potentielle de contact  $\Gamma_C$  par le système d'équations (eqs. 2.80 à 2.83) schématisé par le graphique 2.4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_C(\underline{X}, T) \geq 0, \quad \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), \\ g_C(\underline{X}, T) \cdot F_N(\underline{X}, T) = 0, \\ F_N(\underline{X}, T) \leq 0, \\ ([\underline{V}] (\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C) \cdot F_N = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.80) \\ (2.81) \\ (2.82) \\ (2.83) \end{array}$$

Notons que l'équation (eq. 2.81), également appelée *condition de complémentarité* (voir [67, 68]), indique qu'en un point il y a soit contact, soit décollement.

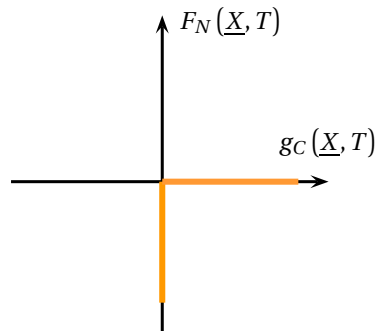


FIGURE 2.4 – Représentation graphique de la loi de contact unilatéral

- Conditions de glissement avec frottement :

Lorsque le contact est vérifié à l'interface, nous devons dans un second temps prendre en compte les phénomènes observés dans le plan tangent à l'interface de contact  $\Gamma_C(T)$ . Dans ce plan, nous observons l'unicité des efforts tangents, et nous avons :

$$\underline{E}_T(\underline{X}, T) = \underline{E}_{T,1}(\underline{X}, T) = -\underline{E}_{T,2}(\underline{X}, T). \quad (2.84)$$

Il en va de même pour les vecteurs unitaires tangents, et nous avons  $\underline{t}_1(\underline{X}, T) = -\underline{t}_2(\underline{X}, T)$ ,  $\forall \underline{X} \in \Gamma_C(T)$ .

Nous définissons cette fois-ci  $[\underline{V}](\underline{X}, T)$  la vitesse relative de glissement, telle que :

$$[\underline{V}](\underline{X}, T) = [\underline{V}](\underline{X}, T) \cdot \underline{t}_1(\underline{X}, T) = (\underline{v}_2(\underline{X}, T) - \underline{v}_1(\underline{X}, T)) \cdot \underline{t}_1(\underline{X}, T). \quad (2.85)$$

Dès lors deux cas de figure se présentent à nous :

- soit les deux corps sont en adhérence et nous vérifions  $[\underline{V}](\underline{X}, T) \cdot \underline{t}_C(\underline{X}, T) = 0$ ,
- soit les deux corps sont en glissement dans le plan tangent à l'interface et nous avons  $[\underline{V}](\underline{X}, T) \cdot \underline{t}_C(\underline{X}, T) \neq 0$ .

Pour déterminer la composante tangentielle  $F_T(\underline{X}, T)$  caractérisant le frottement, nous avons recours à un **modèle de frottement** qui nous permet de relier  $F_T(\underline{X}, T)$  à la composante normale (effort de contact)  $F_N(\underline{X}, T)$ , et éventuellement à la vitesse relative de glissement  $[\underline{V}](\underline{X}, T)$  ou à d'autres paramètres et à leur histoire :

$$F_T(\underline{X}, T) = \mathcal{F}(F_N(\underline{X}, T), [\underline{V}](\underline{X}, T), \dots). \quad (2.86)$$

Pour modéliser le frottement dynamique à l'interface de contact potentiel  $\Gamma_C(T)$ , différentes lois existent. Le choix du modèle de frottement conditionne la réponse des interfaces. Nous nous proposons donc de récapituler les principaux modèles existant. Rappelons que ces modèles ne peuvent bien évidemment plus être appliqués en présence de décollement à l'interface, la notion de frottement étant indissociable de la notion de contact.

- **La loi d'Amontons-Coulomb, relation de base de la tribologie**

La première loi utilisée pour décrire le frottement entre deux corps est proposée en 1699 par Guillaume Amontons. Celle-ci sera reprise près d'un siècle plus tard, en 1785, par Charles-Augustin de Coulomb, avant d'être communément admise par la communauté scientifique. Elle va alors s'imposer comme la relation de base de la tribologie et demeure à ce jour la plus ancienne et la plus utilisée des lois de frottement, du fait, notamment, de son extrême simplicité. Dans la pratique, elle permet d'exprimer l'effort tangentiel  $F_T(\underline{X}, T)$  à fournir afin de mettre en mouvement un solide soumis à un effort normal  $F_N(\underline{X}, T)$ . Pour qu'un glissement relatif soit observé à l'interface nous devons alors vérifier :

$$|F_T|(\underline{X}, T) \geq \mu_0 \cdot |F_N|(\underline{X}, T). \quad (2.87)$$

Force est de constater que la loi d'Amontons-Coulomb s'avère être un outil particulièrement efficace afin d'appréhender la majorité des problèmes de frottements. Néanmoins, elle n'explique pas la physique à l'origine du frottement. Celle-ci est en réalité dissimulée derrière le coefficient de frottement statique de Coulomb  $\mu_0$ . En un sens, ce coefficient est un paramètre

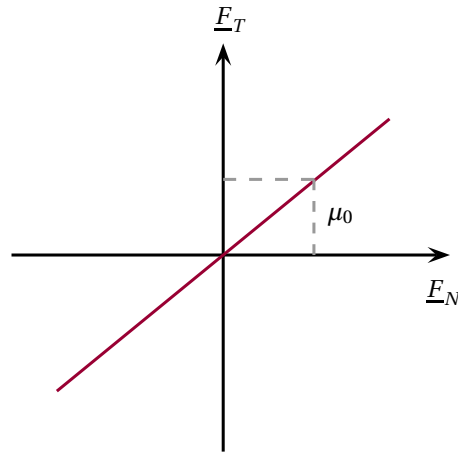


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de la loi de frottement d'AMONTONS-COULOMB

caractérisant l'interface et ses propriétés. Dans la majorité des cas, il est propre à chaque paire tribologique (dans le cas des frottement acier/acier, un coefficient de 0.3 est communément admis), mais ce coefficient peut dépendre de l'état mécanique et thermodynamique local de l'interface.

- **Lois de Coulomb modifiées**

Alors que la loi d'Amontons-Coulomb permet de déterminer les conditions nécessaires pour vaincre le frottement statique et ainsi engendrer un mouvement relatif de glissement, elle ne permet cependant pas de traiter les problèmes de frottement dynamique.

De nouveau, c'est au physicien français C.A. Coulomb que l'on doit les principales avancées, ce dernier ayant fait très tôt la distinction entre, d'une part, le frottement statique, et d'autre part, le frottement dynamique. Il va notamment montrer qu'une fois les matériaux mis en glissement, le frottement dynamique peut être sensiblement plus faible que le frottement statique et que dans la majorité des cas, la friction dynamique est presque indépendante de la vitesse de glissement.

Ces observations ont finalement conduit à une relation simple (eq. 2.89), permettant d'exprimer le coefficient de frottement à l'interface  $\mu(|V|)$  comme une fonction décroissante de la vitesse relative de glissement observée à l'interface de glissement  $[V](\underline{X}, T)$  (voir figure 2.6).

Cette expression distingue le coefficient de frottement statique  $\mu_0$ , du coefficient de frottement dynamique  $\mu_\infty$  et nécessite un troisième paramètre  $\gamma$  correspondant à l'inverse d'une vitesse de glissement seuil.

$$\begin{cases} \underline{F}_{T,2} = -\underline{F}_{T,1} = -\lambda \cdot [V](\underline{X}, T), \lambda \geq 0, & (2.88) \\ F_T = \mu(|V|) \cdot F_N, & (2.89) \\ \mu(|V|) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \cdot \exp(-\gamma|V|). & (2.90) \end{cases}$$

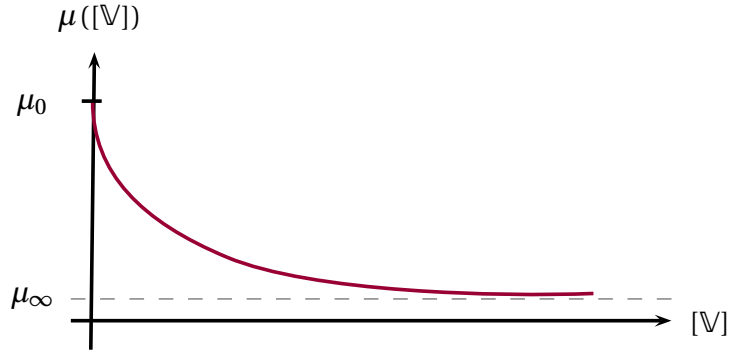


FIGURE 2.6 – Evolution du coefficient de frottement  $\mu$  avec la vitesse de glissement [V].

Selon cette loi, la contrainte à l'interface  $F_T$  agit dans le sens opposé à la vitesse relative tangentielle [V] ( $\underline{X}, T$ ) observée entre les deux corps. De nouveau, ce modèle de frottement ne peut être appliqué qu'en cas de contact à l'interface. Bien qu'il permette de recaler un grand nombre de résultats expérimentaux, nous nous retrouvons dans le même cas de figure que pour le frottement statique et la loi d'Amontons-Coulomb : quels phénomènes se cachent derrière les coefficients  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$  et  $\gamma$  de la loi de Coulomb modifiée ?

- **Le cas limite des fortes pressions de contact : la loi de Tresca**

Comme nous avons eu l'occasion de l'évoquer, les contraintes s'exerçant au sein d'un matériau métallique sont limitées par une limite de plasticité.

Il existe certains cas où l'état des contraintes observé à l'interface conduit au dépassement de la limite élastique (seuil plastique)  $\Upsilon(\underline{X}, T)$  des matériaux. Dans ce cas de figure, les lois d'Amontons-Coulomb et de Coulomb modifiée ne sont plus valides (voir [69]) ; il nous faut dès lors ajouter une dépendance de la force de frottement  $F_T(\underline{X}, T)$  à la contrainte d'écoulement du matériau  $\Upsilon(\underline{X}, T)$ .

Pour y remédier, nous avons recours à la loi de frottement à seuil de Tresca<sup>2</sup> qui permet de prendre en compte la limite physique de la contrainte de cisaillement à l'interface. Selon cette loi, l'effort de frottement à la surface d'un solide en glissement va être directement proportionnel à la plus petite **limite élastique**  $\Upsilon(\underline{X}, T)$  des matériaux en contact, prise au niveau de l'interface. Nous avons alors :

$$F_T \leq \min\left(\mu_T \cdot \frac{\Upsilon_1}{\sqrt{3}}, \mu_T \cdot \frac{\Upsilon_2}{\sqrt{3}}\right), \quad (2.91)$$

où  $\mu_T$  est un coefficient de frottement à déterminer. Nous parlons de loi de Coulomb à seuil, ou bien encore de loi de Coulomb-Orowan lorsqu'elle est combinée avec la loi simple de Coulomb (eq. 2.87).

2. Egalement rencontrée dans la littérature sous le nom de loi de PRANDTL

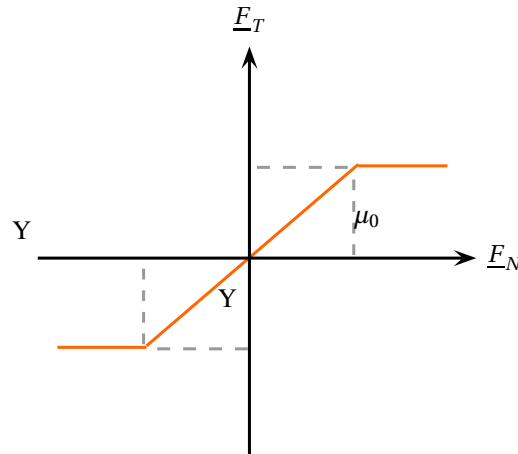


FIGURE 2.7 – Représentation graphique de la loi de frottement de TRESCA

Notons finalement la possibilité de coupler :

- la loi de Coulomb modifiée (eq. 2.90), qui permet de prendre en compte la dépendance à la vitesse de la contrainte de cisaillement,
- la loi de Tresca (eq. 2.91), pour tenir compte des fortes pressions de contact.

Dans ce cas, le modèle de frottement s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{E}_{T,2} = -\underline{E}_{T,1} = -\lambda \cdot [\underline{V}] (\underline{X}, T), \lambda \geq 0, & (2.92) \\ F_T = \min \left( \mu([\underline{V}]) \cdot \frac{F_N}{S}, \mu_T \cdot \frac{Y_1}{\sqrt{3}}, \mu_T \cdot \frac{Y_2}{\sqrt{3}} \right), \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), & (2.93) \\ \mu([\underline{V}]) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \cdot \exp(-\gamma |[\underline{V}]|). & (2.94) \end{cases}$$

- **Modélisation des échanges de chaleur à l'interface :**

Le frottement étant modélisé à l'aide de l'une des lois précédentes, il nous reste à écrire les conditions thermiques à l'interface. Comme nous l'avons évoqué au cours du chapitre précédent, la principale source de chaleur lors d'un contact glissant a pour origine le travail des forces de frottement à l'interface. Nous modélisons cette puissance dissipée par un terme source d'origine surfacique, le **taux de chaleur**  $\dot{Q}(\underline{X}, T)$ , défini comme le produit de la composante tangentielle de cisaillement  $F_T(\underline{X}, T)$  et de la vitesse relative de glissement  $[\underline{V}](\underline{X}, T)$ . Nous observons alors sur l'interface  $\Gamma_C(T)$  que le taux de chaleur produit par unité de temps et de surface sous l'effet des forces de frottement est égal à,

$$\dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T) = |F_T(\underline{X}, T) \cdot \mathbb{V}(\underline{X}, T)|, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T). \quad (2.95)$$

La principale difficulté de modélisation se résume alors à la question suivante :

### Comment se partage le taux de chaleur $\dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T)$ à l'interface de contact ?

Pour cela, deux hypothèses doivent être considérées :

- La première hypothèse consiste à dire que **le travail des forces de frottement est entièrement converti sous forme de chaleur !**

Autrement dit, il n'y a pas de déperdition thermique vers le milieu ambiant. Nous en déduisons que la chaleur générée à l'interface entre les deux corps en glissement est la somme des densités de flux de chaleur  $-\underline{\dot{Q}}_1(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_1$  et  $-\underline{\dot{Q}}_2(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_2$  reçues par chacun des deux matériaux. Nous avons donc :

$$\dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T) = -\underline{\dot{Q}}_1(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_1 - \underline{\dot{Q}}_2(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_2, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T). \quad (2.96)$$

- La seconde hypothèse postule l'existence d'un **contact parfait à l'interface**. Ceci revient à imposer la continuité des températures ainsi que la conservation du flux à l'interface de contact :

$$\Theta(\underline{X}, T) = \Theta_1(\underline{X}, T) = \Theta_2(\underline{X}, T), \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T). \quad (2.97)$$

Du fait de cette hypothèse, nous pouvons introduire un coefficient  $\beta_T$  qui quantifie le partage de la densité de flux de chaleur  $\dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T)$  à l'interface  $\Gamma_C(T)$  entre les domaines  $\Omega_1(T)$  et  $\Omega_2(T)$ . D'après De Vriendt (1982), la chaleur se décompose ainsi en deux flux  $-\underline{\dot{Q}}_1(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_1$  et  $-\underline{\dot{Q}}_2(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_2$  vérifiant  $\forall \underline{X} \in \Gamma_C(T)$  :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T) = -\underline{\dot{Q}}_1(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_1 - \underline{\dot{Q}}_2(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_2, & (2.98) \\ -\underline{\dot{Q}}_1(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_1 = \beta_T \cdot \dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T), & (2.99) \\ -\underline{\dot{Q}}_2(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_2 = (1 - \beta_T) \cdot \dot{\mathcal{Q}}(\underline{X}, T). & (2.100) \end{cases}$$

Sous ces conditions, Vernotte montre que le coefficient  $\beta_T$  en l'absence de sources thermique internes dépend directement des propriétés thermiques de chacun des matériaux et plus particulièrement de leurs effusivités<sup>3</sup> respectives. Ainsi, en observant que  $\beta_T$  mesure la quantité de chaleur reçue par le domaine  $\Omega_1(T)$ , nous avons :

$$\beta_T = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (2.101)$$

Notons que les effusivités  $\epsilon(\underline{X}, T)$  s'écrivent en fonction de la conductivité  $\kappa(\underline{X}, T)$  et de la diffusivité thermique  $\alpha(\underline{X}, T)$  des matériaux et sont supposées constantes au cours du temps de sorte que :

$$\epsilon_1 = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\alpha_1}} \text{ et } \epsilon_2 = \frac{\kappa_2}{\sqrt{\alpha_2}}. \quad (2.102)$$

## 2.3 Modélisation des géométries simples dans l'espace $\mathbb{R}^2$ à deux dimensions.

### 2.3.1 Modélisation des problèmes en déformation plane

Pour la suite de notre étude, nous allons nous intéresser exclusivement aux problèmes tridimensionnels simples pouvant être modélisés dans  $\mathbb{R}^2$ . En l'occurrence, nous nous proposons d'étudier le cas particulier des problèmes en **déformations planes**, tels que les problèmes d'impact de plaque. Dans ce cas de figure, les champs solutions du problème sont invariants par translation suivant l'une des directions de l'espace.

Nous considérons initialement un repère orthonormé  $(O, \underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z)$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous considérons alors que les champs solutions du problème sont invariants par translation suivant la direction  $Y$  de l'espace et nous prenons  $\mathbb{V}_Y = 0$ . Ceci nous permet de nous ramener à un problème 2D dans le plan formé par les vecteurs unitaires  $(\underline{e}_X, \underline{e}_Z)$ . Des lors, le système d'équations introduit précédemment se simplifie, et nous obtenons les relations suivantes :

- **Expression des contraintes en 2D-plan :**

En déformations planes, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & 0 & \Sigma_{XZ} \\ 0 & \Sigma_{YY} & 0 \\ \Sigma_{ZX} & 0 & \Sigma_{ZZ} \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

3. Précisons que d'un point de vue physique, l'effusivité thermique d'un matériau mesure sa capacité à échanger de l'énergie thermique avec son environnement.



D'après l'équation (eq. 2.13), le tenseur déviateur des contraintes  $\mathbb{S}_{XX}(\underline{X}, T)$  est alors entièrement déterminé par les quatre composantes suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{S}_{XX}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3}\Sigma_{XX} - \frac{1}{3}\Sigma_{YY} - \frac{1}{3}\Sigma_{ZZ}, & (2.104) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{S}_{YY}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3}\Sigma_{YY} - \frac{1}{3}\Sigma_{XX} - \frac{1}{3}\Sigma_{ZZ}, & (2.105) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{S}_{ZZ}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3}\Sigma_{ZZ} - \frac{1}{3}\Sigma_{XX} - \frac{1}{3}\Sigma_{YY}, & (2.106) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{S}_{XZ}(\underline{X}, T) = \Sigma_{XZ}. & (2.107) \end{cases}$$

La contrainte  $\Sigma_{XZ}(\underline{X}, T)$  et son expression déviateur  $\mathbb{S}_{XZ}(\underline{X}, T)$  sont équivalentes. Aussi, nous prenons par la suite :

$$\mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T) = \Sigma_{XZ}(\underline{X}, T) = \mathbb{S}_{XZ}(\underline{X}, T). \quad (2.108)$$

- **Expression du tenseur des taux de déformation en 2D-plan :**

Le tenseur des déformations  $\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T)$  s'écrit :

$$\underline{\underline{D}}(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_X(\underline{X}, T)}{\partial X} & 0 & \frac{\partial v_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} + \frac{\partial v_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} + \frac{\partial v_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} & 0 & 2 \frac{\partial v_Z(\underline{X}, T)}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

Le tenseur des taux de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, T)$  s'écrit quant à lui sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} - \frac{\partial v_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} - \frac{\partial v_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.110)$$

- **Détermination de la dérivée de Jaumann en 2D-plan :**

Nous en déduisons l'expression du tenseur de Jaumann (eq. 2.29) dont les composantes s'écrivent après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{S}}_{XX}(\underline{X}, T) = \dot{\mathbb{S}}_{XX} + \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} - \frac{\partial \mathbb{V}_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} \right), \end{array} \right. \quad (2.111)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{S}}_{YY}(\underline{X}, T) = \dot{\mathbb{S}}_{YY}, \end{array} \right. \quad (2.112)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{S}}_{ZZ}(\underline{X}, T) = \dot{\mathbb{S}}_{ZZ} + \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} \right), \end{array} \right. \quad (2.113)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{T}}_{XZ}(\underline{X}, T) = \dot{\mathbb{T}}_{XZ} + \left( \frac{\mathbb{S}_{XX} - \mathbb{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X(\underline{X}, T)}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z(\underline{X}, T)}{\partial X} \right). \end{array} \right. \quad (2.114)$$

- **Loi de comportement élastoplastique en 2D-plan/2D-axi :**

Nous pouvons récrire la loi de comportement élastoplastique, dont l'expression nous est donnée par l'équation (eq. 2.33). Après substitution du tenseur des taux de déformation plastique  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\underline{X}, T)$  par la loi d'écoulement plastique (eq. 2.43), celle-ci s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T) = 2G_0 \cdot \left[ \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T) - \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \cdot \frac{3 \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T)}{2 \Sigma_{eq}} - \frac{\text{div}(\underline{\underline{\mathbb{V}}}(\underline{X}, T))}{3} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right]. \quad (2.115)$$

Dans un premier temps, nous remplaçons le tenseur des taux de déformation totale  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{X}, T)$  par son expression (eq. 2.109).

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{S}}_{XX}(\underline{X}, T) = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \frac{\mathbb{S}_{XX}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}, \end{array} \right. \quad (2.116)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{S}}_{YY}(\underline{X}, T) = -2G_0 \cdot \left( \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \frac{\mathbb{S}_{YY}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}, \end{array} \right. \quad (2.117)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{S}}_{ZZ}(\underline{X}, T) = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \frac{\mathbb{S}_{ZZ}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}, \end{array} \right. \quad (2.118)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\mathbb{T}}_{XZ}(\underline{X}, T) = 2G_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \frac{\mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}. \end{array} \right. \quad (2.119)$$

Nous remplaçons alors les composantes du tenseur objectif des contraintes  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T)$  par leurs expressions respectives (eqs. 2.111 à 2.114). Suite à ces substitutions, la loi de comportement élastoplastique en grandes déformations s'écrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{S}}_{XX} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} - \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{XX}}{\Sigma_{eq}}, \end{array} \right. \quad (2.120)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{S}}_{YY} = -2G_0 \cdot \left( \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{YY}}{\Sigma_{eq}}, \end{array} \right. \quad (2.121)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{S}}_{ZZ} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} \right) - \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{ZZ}}{\Sigma_{eq}}, \end{array} \right. \quad (2.122)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{T}}_{XZ} = 2G_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - \left( \frac{\mathbb{S}_{XX} - \mathbb{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{T}_{XZ}}{\Sigma_{eq}}. \end{array} \right. \quad (2.123)$$

### 2.3.2 Récapitulatif du problème aux limites de référence dans $\mathbb{R}^2$

Nous présentons maintenant le problème aux limites de référence qui servira de base à cette thèse.

- **Lois de conservation :**

— Conservation de la masse (équation de continuité) :

$$\frac{d\rho(\underline{X}, T)}{dT} + \rho(\underline{X}, T) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X(\underline{X}, T)}{\partial X} + \frac{\partial \mathbb{V}_Z(\underline{X}, T)}{\partial Z} \right) = 0, \quad \forall \underline{X} \in \Omega(T). \quad (2.124)$$

— Conservation de la quantité de mouvement  $\forall \underline{X} \in \Omega(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Sigma_{XX}(\underline{X}, T)}{\partial X} + \frac{\partial \mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T)}{\partial Z} = \rho(\underline{X}, T) \cdot \frac{\partial \mathbb{V}_X(\underline{X}, T)}{\partial T}, \end{array} \right. \quad (2.125)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T)}{\partial X} + \frac{\partial \Sigma_{ZZ}(\underline{X}, T)}{\partial Z} = \rho(\underline{X}, T) \cdot \frac{\partial \mathbb{V}_Z(\underline{X}, T)}{\partial T}. \end{array} \right. \quad (2.126)$$

— Conservation de la quantité d'énergie :

$$\rho(\underline{X}, T) \frac{de_M(\underline{X}, T)}{dT} - \Sigma_{eq} \cdot \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) + \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T)) + \text{div}\left(\overset{\circ}{\underline{\mathbb{Q}}}(\underline{X}, T)\right) = 0. \quad (2.127)$$

- **Partition du tenseur des contraintes  $\forall \underline{X} \in \Omega(T)$  :  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) = \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T) - \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{1}}$**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_{XX}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3} \Sigma_{XX}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \Sigma_{YY}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \Sigma_{ZZ}(\underline{X}, T), \end{array} \right. \quad (2.128)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_{YY}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3} \Sigma_{YY}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \Sigma_{XX}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \Sigma_{ZZ}(\underline{X}, T), \end{array} \right. \quad (2.129)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_{ZZ}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3} \Sigma_{ZZ}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \Sigma_{XX}(\underline{X}, T) - \frac{1}{3} \Sigma_{YY}(\underline{X}, T), \end{array} \right. \quad (2.130)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T) = \Sigma_{XZ}(\underline{X}, T), \end{array} \right. \quad (2.131)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(\underline{X}, T) = -\frac{1}{3} (\Sigma_{XX} + \Sigma_{YY} + \Sigma_{ZZ}) \end{array} \right. \quad (2.132)$$

• **Lois constitutives de la thermique :**

— Loi de Fourier :

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}}(\underline{X}, T) = -\kappa(\underline{X}, T) \cdot \text{grad}(\Theta(\underline{X}, T)), \forall \underline{X} \in \Omega(T). \quad (2.133)$$

— Équation d'état en température :

$$e_M(\underline{X}, T) = \mathbf{e}(\mathbb{P}(\underline{X}, T), \Theta(\underline{X}, T)), \forall \underline{X} \in \Omega(T). \quad (2.134)$$

• **Lois constitutives de la plasticité :**

— Équation d'état en pression :

$$\mathbb{P}(\underline{X}, T) = \mathbf{P}(\rho(\underline{X}, T), e_M(\underline{X}, T)), \forall \underline{X} \in \Omega(T). \quad (2.135)$$

— Loi de comportement élastoplastique  $\forall \underline{X} \in \Omega(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{S}}_{XX} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} - \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{XX}}{\Sigma_{eq}}, \end{array} \right. \quad (2.136)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{S}}_{YY} = -2G_0 \cdot \left( \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{YY}}{\Sigma_{eq}}, \end{array} \right. \quad (2.137)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{S}}_{ZZ} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} \right) - \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{ZZ}}{\Sigma_{eq}}, \end{array} \right. \quad (2.138)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{T}}_{XZ} = 2G_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - \left( \frac{\mathbb{S}_{XX} - \mathbb{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{T}_{XZ}}{\Sigma_{eq}}. \end{array} \right. \quad (2.139)$$

— Critère de plasticité de Von Mises :

$$\Phi(\underline{X}, T) = \Sigma_{eq}(\underline{X}, T) - \Upsilon(\underline{X}, T). \quad (2.140)$$

— Taux de déformation plastique :

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\underline{X}(M), T) = \dot{\mathbb{E}}_p \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}. \quad (2.141)$$

— Contrainte équivalente de Von Mises :

$$\Sigma_{eq}(\underline{X}, T) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T) \right\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{S}}} : \underline{\underline{\mathbb{S}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Tr}(\underline{\underline{\mathbb{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{S}}}), \forall \underline{X} \in \Omega(T). \quad (2.142)$$

— Limite élastique / modèle rhéologique :

$$\Upsilon(\underline{X}, T) = \mathcal{F}(\Theta, \mathbb{P}, \bar{\mathbb{E}}_p, \dot{\mathbb{E}}_p, \dots). \quad (2.143)$$

— Conditions de consistance / persistance :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \cdot \Phi(\underline{X}, T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.144)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \cdot \dot{\Phi}(\underline{X}, T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.145)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.146)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\underline{X}, T) \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.147)$$

— Déformation plastique cumulée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbb{E}}_p(M, T + \Delta T) = \bar{\mathbb{E}}_p(M, T) + \int_T^{T+\Delta T} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) dT, \forall \underline{X} \in \Omega(T) \\ \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\mathbb{D}}_{\underline{p}}(\underline{X}, T) \right\|, \forall \underline{X} \in \Omega(T). \end{array} \right. \quad (2.148)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbb{E}}_p(M, T + \Delta T) = \bar{\mathbb{E}}_p(M, T) + \int_T^{T+\Delta T} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) dT, \forall \underline{X} \in \Omega(T) \\ \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\mathbb{D}}_{\underline{p}}(\underline{X}, T) \right\|, \forall \underline{X} \in \Omega(T). \end{array} \right. \quad (2.149)$$

• Conditions de régularité  $\forall \underline{X} \in \Omega(T), T > 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T) \in \mathcal{H}^1(\Omega(T)), T > 0, \\ \Theta(\underline{X}, T) \in \mathcal{H}^1(\Omega(T)), T > 0. \end{array} \right. \quad (2.150)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, T) \in \mathcal{H}^1(\Omega(T)), T > 0, \\ \Theta(\underline{X}, T) \in \mathcal{H}^1(\Omega(T)), T > 0. \end{array} \right. \quad (2.151)$$

• Conditions aux limites spatio-temporelles

— Valeurs initiales des champs thermomécaniques  $\forall \underline{X} \in \Omega_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Sigma}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\mathbb{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad (2.152)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Sigma}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\mathbb{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad (2.153)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Sigma}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\mathbb{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad (2.154)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Sigma}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\mathbb{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad (2.155)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Sigma}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\mathbb{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad (2.156)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Sigma}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\mathbb{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad (2.157)$$

— Conditions de bord libre sur  $\Gamma_L(T)$  :

$$\underline{\Sigma}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_\Sigma = 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_L(T). \quad (2.158)$$

— Condition de flux nul sur  $\Gamma_\Theta(T) = \Gamma(T) \setminus \Gamma_C(T)$  :

$$-\kappa(\underline{X}, T) \cdot \frac{\partial \Theta(\underline{X}, T)}{\partial \underline{n}_\Theta} = 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_\Theta(T). \quad (2.159)$$

• Conditions aux limites sur l'interface de contact  $\Gamma_C(T)$  :

— Conditions de contact unilatéral sur  $\Gamma_C(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_C(\underline{X}, T) \geq 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), \\ g_C(\underline{X}, T) \cdot F_N(\underline{X}, T) = 0, \\ F_N(\underline{X}, T) \leq 0, \\ ([\underline{\mathbb{V}}](\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C) \cdot F_N = 0. \end{array} \right. \quad (2.160)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_C(\underline{X}, T) \geq 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), \\ g_C(\underline{X}, T) \cdot F_N(\underline{X}, T) = 0, \\ F_N(\underline{X}, T) \leq 0, \\ ([\underline{\mathbb{V}}](\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C) \cdot F_N = 0. \end{array} \right. \quad (2.161)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_C(\underline{X}, T) \geq 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), \\ g_C(\underline{X}, T) \cdot F_N(\underline{X}, T) = 0, \\ F_N(\underline{X}, T) \leq 0, \\ ([\underline{\mathbb{V}}](\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C) \cdot F_N = 0. \end{array} \right. \quad (2.162)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_C(\underline{X}, T) \geq 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), \\ g_C(\underline{X}, T) \cdot F_N(\underline{X}, T) = 0, \\ F_N(\underline{X}, T) \leq 0, \\ ([\underline{\mathbb{V}}](\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C) \cdot F_N = 0. \end{array} \right. \quad (2.163)$$

— Modèle de frottement sur  $\Gamma_C(T)$  :

$$\begin{cases} \underline{E}_{T,2} = -\underline{E}_{T,1} = -\lambda \cdot [\underline{V}] (\underline{X}, T), \lambda \geq 0, & (2.164) \\ F_T = \min \left( \mu([\underline{V}]) \cdot F_N, \mu_T \cdot \frac{\underline{V}_1}{\sqrt{3}}, \mu_T \cdot \frac{\underline{V}_2}{\sqrt{3}} \right), \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T) & (2.165) \\ \mu([\underline{V}]) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \cdot \exp(-\gamma |[\underline{V}]|). & (2.166) \end{cases}$$

— Condition de flux à l'interface sur  $\Gamma_C(T)$  :

$$\begin{cases} \dot{\underline{Q}}(\underline{X}, T) = |F_T(\underline{X}, T) \cdot [\underline{V}] (\underline{X}, T)|, \forall \underline{X} \in \Gamma_C(T), & (2.167) \\ -\dot{\underline{Q}}_1 \cdot \underline{n}_1 = \beta_T \cdot \dot{\underline{Q}}(\underline{X}, T), & (2.168) \\ -\dot{\underline{Q}}_2 \cdot \underline{n}_2 = (1 - \beta_T) \cdot \dot{\underline{Q}}(\underline{X}, T). & (2.169) \end{cases}$$

## ■ Conclusion du chapitre

**N**ous venons de présenter une modélisation mathématique de référence (eqs. 2.124 à 2.169) permettant de décrire l'ensemble des phénomènes mis en jeu au sein des structures sollicitées par choc et qui servira de base à cette étude. Ce problème aux limites est gouverné par un système d'équations aux dérivées partielles fortement couplées entre elles. Il fait notamment apparaître deux formes de non-linéarités :

- des **non linéarités portant sur la loi de comportement du matériau** (eqs. 2.136 à 2.139). Ces non linéarités ont pour origine l'existence d'un phénomène de plasticité engendrant des déformations irréversibles, ainsi que la possibilité de prendre en compte des déformations modérées.
- des **non linéarités de contact** que nous regroupons en deux catégories :
  - les non-linéarités de contact unilatéral (eqs. 2.160 à 2.163),
  - les non-linéarités de frottement (eqs. 2.164 et 2.165), objet de notre intérêt dans le cadre de cette étude.

Nous noterons que les non-linéarités de type contact/frottant sont parmi les plus difficiles à traiter car elles mettent en jeu des changements brusques de comportement (au passage contact / décollement et au passage adhérence / glissement).

Outre la complexité induite par les non-linéarités du modèle, notons que les problèmes thermique et mécanique sont ici fortement couplés, par le biais notamment du modèle rhéologique (eq. 2.143), de la loi de Fourier (eq. 2.133), et de la condition de flux à l'interface (eq. 2.167).

Calculer une solution analytique à ce problème demeure extrêmement complexe, voire quasi-impossible. Dès lors, une résolution de ce système par le biais de méthodes numériques s'impose !



## Gestion numérique des frottements sous choc

### ■ Introduction du chapitre

Ce chapitre est consacré à l'étude numérique des structures sollicitées par choc. Nous y détaillons les différentes étapes nécessaires à la résolution de tels problèmes en portant une attention particulière à la gestion numérique des contact frottants, objets de la présente étude. Pour cela, nous avons divisé ce chapitre en quatre sections principales :

- Au cours de la **première section** (pp.80-84), nous nous intéressons aux codes hydrodynamiques qui sont les codes de calcul généralement utilisés pour traiter les structures sollicitées par choc. Après en avoir rappelé l'origine ainsi que le principe de fonctionnement, nous présentons les deux approches de discrétisation classiquement employées, à savoir les approches lagrangienne et eulérienne.
- Dans la **seconde section** (pp.84-98), nous présentons le code hydrodynamique retenu pour cette étude. Nous y détaillons notamment la formulation du problème discret à partir du modèle mathématique introduit au Chapitre 2. Puis nous présentons de façon détaillée le schéma numérique et l'algorithme utilisés pour le résoudre.
- La **troisième section** (pp.98-106) est consacrée à la gestion des non-linéarités de contact et de frottement observées aux interfaces de glissement. Celles-ci sont dans un premier temps traitées par un algorithme spécifiquement dédié à la gestion du contact, puis, lorsque le contact est vérifié, un second algorithme permet de prendre en compte la résistance au glissement par frottement. Nous présentons chacune de ces deux étapes, ainsi que les systèmes d'équations discrètes associés et les algorithmes utilisés pour les résoudre.
- Finalement, dans la **quatrième et dernière section** (pp.106-109) nous nous intéressons aux résultats numériques obtenus à l'aide du code hydrodynamique dans le cadre de simulations d'expériences de frottement sous choc. En nous basant sur le recalage des expériences de



tir présentées au chapitre précédent, nous montrons notamment les faiblesses et limites des modèles classiquement utilisés pour la gestion du frottement aux interfaces de contact.

## ■ 3.1 Introduction aux codes hydrodynamiques

### 3.1.1 Présentation et bref historique des codes de calcul hydrodynamiques

Les codes hydrodynamiques sont des codes de dynamique rapide utilisés pour calculer des réponses à court terme lorsque **le comportement des matériaux dépend fortement de la pression hydrostatique** (voir [70]). Autrement dit, nous avons  $\left(\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) \sim \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \underline{\underline{1}}\right)$ . De tels problèmes sont généralement caractérisés par l'aspect transitoire des phénomènes mis en jeu, traduisant la présence d'ondes de choc, de fortes déformations, et de temps caractéristiques extrêmement courts. L'initialisation de ces phénomènes se fait généralement par impact matériel (projectile, crash..) ou bien encore suite à une détonation (décomposition chimique rapide).

Les domaines d'application des codes hydrodynamiques sont nombreux, et recouvrent différents domaines, allant des essais de type "crash-test", à l'étude de la balistique des armes, ou bien encore à la résistance à la perforation. D'un point de vue pratique, les codes 1D sont principalement utilisés pour résoudre les problèmes de propagation d'ondes de choc planes, tandis que les codes 2D sont majoritairement dédiés à l'étude de problèmes axisymétriques (impact normal de cylindres, barres, sphères, projectiles axisymétriques). Finalement, les problèmes plus complexes tels que les impacts inclinés requièrent l'utilisation de codes tridimensionnels. Ces derniers ne seront pas abordés au cours de la présente étude, et nous nous limiterons à des problèmes 2D-plan.

Un des premiers codes hydrodynamique connu est le code HEMP<sup>1</sup> développé à la fin des années 1950 aux USA par Marc L. Wilkins de l'Université de Californie (voir [71]). Ce premier code a par la suite été suivi par un grand nombre de codes basés sur la méthode des différences finies (voir le tableau 3.1). Puis, depuis les années 1970, sous l'impulsion des laboratoires américains Los Alamos National Laboratory (LANL) et Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL), plusieurs codes éléments finis, initialement conçus pour traiter des problèmes quasi-statiques, ont peu à peu pris le pas sur les codes historiques avant de définitivement s'imposer.

### 3.1.2 Principe de fonctionnement des codes hydrodynamiques

Plusieurs méthodes de résolution numérique sont utilisées dans les codes hydrodynamiques. Parmi les plus employées, il convient notamment de citer les algorithmes de discrétisation par différences finies, et par éléments finis.

La mise en œuvre de ces méthodes repose sur une étape essentielle : la formulation du problème continu sous une forme discrète pouvant être facilement interprétée et résolue par les machines de calcul. Pour cela, le système d'équation gouvernant le problème doit être réécrit sur un domaine spatio-temporel discret. Cette discrétisation se fait à la fois en espace et en temps :

---

1. *Hydrodynamic Elasto Magneto Plastic*

**TABLE 6.1 Principal Hydrocodes Used in the United States<sup>a</sup>**

Code	Origin*	Numerical Method	Dimensional Capability	Numerical Coordinate Scheme
SWAP		MC	1-D	Lagrangian
WONDY		FD	1-D	Lagrangian
TOUDY	SNL	FD	2-D	Lagrangian
DUFF		FD	1-D	Lagrangian
HEMP	LLNL	FD	1, 2, 3-D	Lagrangian
STEALTH	SAIC	FD	1, 2, 3-D	Lagrangian
PRONTO	SNL	FD	2, 3-D	Lagrangian
MESA	LANL	FD	2, 3-D	Eulerian
PAGOSA	LANL	FD	3-D	Eulerian
JOY	LLNL	FD	3-D	Eulerian
DYNA	LLNL	FE	2, 3-D	Lagrangian
CALE	LLNL	FD	2-D	Lagrangian
CAVEAT	LANL	FD	2, 3-D	
CTH	SNL	FD	2, 3	Eulerian
PICES	Phys. Intl.	FD	2, 3-D	Coupled Lagrangian/ Eulerian
CRALE		FD	1, 2-D	Arbitrary Lagrangian/ Eulerian
AFTON		FD	1-D	
CSQ II	SNL	FD	2-D	Eulerian
EPIC-2	Honeywell	FE	2-D	Lagrangian
EPIC-3	Honeywell	FE	3-D	Lagrangian
NIKE-2D, 3D	LLNL	FE	2, 3-D	
Codes for personal computers				
ZEUS	Segletis/Zukas			Lagrangian
AUTODYN		FE	2-D	
TDL MADER	C. Mader	FD	2-DD	Lagrangian

<sup>a</sup>Abbreviations: MC, method of characteristics; FD, finite differences; FE, finite elements.

\*SNL: Sandia National Labs; LLNL: Lawrence Livermore National Labs.; SAIC: Science Appl. Inc.; Phys. Intl: Physics International.

FIGURE 3.1 – Liste non exhaustive des principaux codes hydrodynamiques existant. (voir [32], p.174-176)

- la discrétisation en espace permet de définir un **maillage**, qui est une approximation discrète du domaine d'étude (dans notre cas de figure  $\Omega(T)$ )
- la discrétisation temporelle de l'intervalle de temps permet quant à elle de définir différents **instants discrets** permettant une résolution pas à pas des problèmes.

La méthode la plus simple à mettre en œuvre est la méthode des différences finies notamment en raison de sa facilité d'implémentation. Elle consiste à remplacer les opérateurs différentiels continus par des opérateurs discrets aux différences et permet d'obtenir aussi bien une discrétisation en temps, qu'une discrétisation en espace. Le domaine d'étude est alors approché par une liste de points répartie sur le domaine d'étude. Le maillage obtenu s'avère cependant inadapté pour traiter des géométries complexes et nous lui préférons généralement la méthode des éléments finis qui utilise un assemblage de volumes élémentaires et que nous décrivons dans la section suivante.

La majorité des codes couplent donc ces deux méthodes : la discrétisation temporelle des équations se fait à l'aide de schéma aux différences finies, tandis que la discrétisation spatiale est effectuée par la méthode des éléments-finis. Nous revenons sur ce point de manière plus détaillée au cours de la section suivante.

### 3.1.3 Les approches eulérienne et lagrangienne

Les codes hydrodynamiques sont généralement regroupés en deux grandes familles : Eulérien et Lagrangien. Comme nous allons le voir, ces deux descriptions dépendent essentiellement du choix du maillage utilisé pour approcher le problème.

#### Description lagrangienne

Dans la description lagrangienne, **le maillage se déforme avec la matière** : les points de la grille de discrétisation sont attachés à la matière et se déplacent localement avec une vitesse égale à la vitesse matérielle (voir figure 3.2). Les grandeurs de l'écoulement (vitesse, pression...) sont calculées de la même façon en chaque point au fur et à mesure de l'avancée de l'intégration. Des points adjacents de la discrétisation peuvent donc se rapprocher ou s'éloigner en fonction des contraintes et des déformations locales. La masse, la quantité de mouvement et l'énergie sont donc transportées par l'écoulement. La masse contenue dans la maille est invariante au cours de l'intégration en temps, mais le volume et la forme des mailles change en raison de la dilatation et de la compression du matériau.

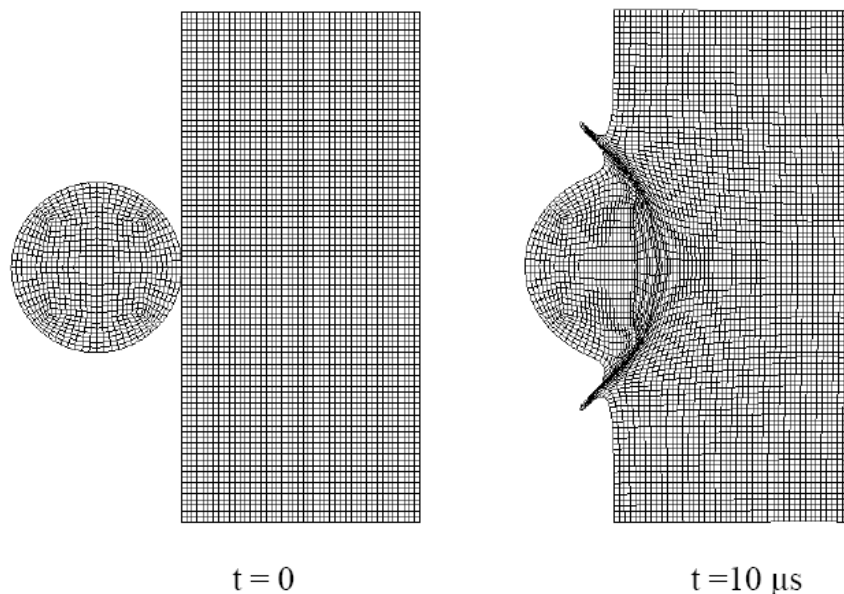


FIGURE 3.2 – Approche lagrangienne : le maillage se déforme avec le matériau. Image extraite de "*Hydrocodes - Codes de dynamique rapide*", (voir [33])

### Description eulérienne

Dans ce cas de figure, **le maillage reste fixe** (voir figure 3.3). Tous les points de la discrétisation restent par conséquent immobiles dans l'espace au fur et à mesure de l'avancée de la résolution du problème. Pour obtenir la description eulérienne d'un écoulement, nous calculons les grandeurs physiques (vitesse, pression...) aux points du réseau de discrétisation, disposés en des positions déterminées de l'espace. La masse, la quantité de mouvement et l'énergie transportées par la matière transitent d'une maille à ses voisines. Dans une telle description, le volume de la maille reste constant car les points de discrétisation restent fixes dans l'espace. Les mailles contenant plusieurs matériaux sont appelées mailles mixtes.

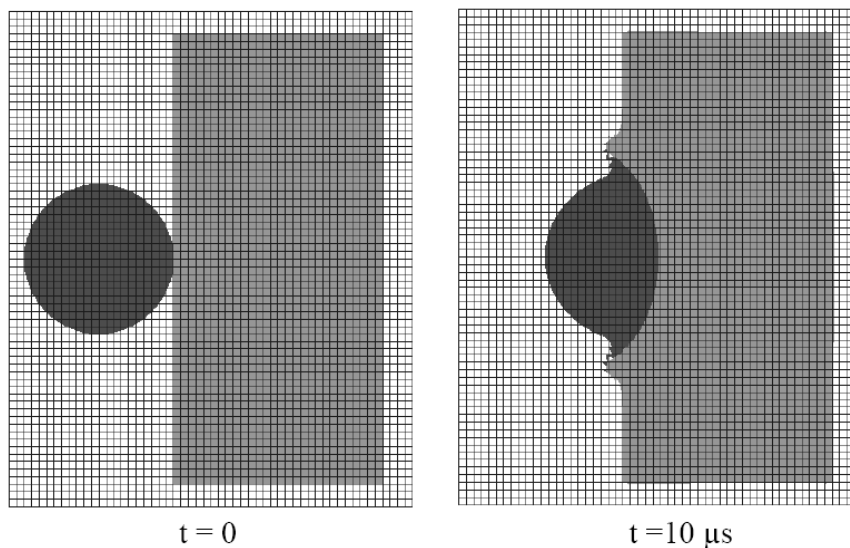


FIGURE 3.3 – Approche eulérienne : le maillage reste fixe. Image extraite de *"Hydrocodes - Codes de dynamique rapide"*, (voir [33])

### Avantages et inconvénients des deux approches

Bien évidemment chacune des deux méthodes présente à la fois des avantages et des inconvénients que nous récapitulons ici :

- **Avantages et inconvénients de l'approche lagrangienne**

Avantages de l'approche lagrangienne :

- respect des contours des matériaux : le maillage respecte la géométrie de chaque objet ;
- traitement immédiat des conditions aux limites de surface libre et de contact de glissement entre les objets ;
- possibilité de distinguer à tout moment des zones de discrétisation pour chaque objet ;
- possibilité de suivre une grandeur attachée à une particule de l'écoulement ;
- pas de "lissage" des phénomènes physiques.

Inconvénients de l'approche lagrangienne :

- nécessité de prévoir des algorithmes de contact-glissement (non interpénétration de la matière) ;
- difficulté pour traiter les grandes déformations (distorsion des mailles) ;
- difficulté pour traiter les phénomènes d'érosion, "d'arrachement de matière", tel que l'usure ou les phénomènes de "gouging" (voir figure 1.9, p. 37).

- **Avantages et inconvénients de l'approche eulérienne**

Avantage de l'approche eulérienne :

- pas de problème de distorsion de mailles, donc possibilité théorique de calculer tous les problèmes d'impact à haute vitesse ;
- maillage fixe (voire cartésien) ;
- parallélisation "massive".

Inconvénient de l'approche eulérienne :

- incertitude sur le positionnement de la matière et donc des interfaces ;
- difficulté (voire impossibilité) de prise en compte du glissement entre les objets ;
- difficultés pour le traitement des conditions aux limites ;
- difficultés pour traiter les phénomènes d'endommagement.

L'incertitude régnant sur le positionnement exact des interfaces rend la gestion du frottement particulièrement complexe dans le cadre d'une approche eulérienne. **Dans le cadre de cette étude, nous avons donc opté pour une description lagrangienne.**

## ■ 3.2 Présentation du code hydrodynamique retenu pour cette étude

Nous limitons notre approche aux cas de structures pouvant être représentées par des géométries simples dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  à deux dimensions (problèmes 2D-plan ou 2D-axi). Le code de calcul que nous avons retenu est un code hydrodynamique lagrangien bidimensionnel s'articulant autour du problème de base dans  $\mathbb{R}^2$  introduit au cours du chapitre 2 (eqs. 2.124 à 2.167, pp. 74 à 77). Notons que pour des raisons d'ordre de grandeur, **la conduction n'est pas prise en compte** à l'échelle macroscopique de la structure  $\left(\overset{\circ}{\mathbb{Q}}(\underline{X}, T) = 0\right)$ . Ce problème est résolu à l'aide d'un schéma d'ordre deux en espace et en temps, que nous détaillons ici.

### 3.2.1 Éléments de discrétisation

#### Formulation variationnelle du problème de base

La discrétisation en espace est basée sur la méthode des éléments finis. Pour la mettre en œuvre, le système d'équations continues (eqs. 2.124-2.169, pp. 74 à 77), qui constituait la formulation forte du problème, est dans un premier temps réécrit sous forme variationnelle (ou forme faible). Nous ne détaillerons pas cette étape mais noterons que dans la pratique, les équations aux dérivées partielles gouvernant le problème sont chacune multipliées par des *fonctions test* puis sont ensuite intégrées

sur l'ensemble du domaine  $\Omega(T) \in \mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega(T)$ .

La formulation variationnelle obtenue est une expression équivalente du problème. Elle contient l'ensemble des informations relatives à ce dernier, c'est à dire le système d'équations aux dérivées partielles gouvernant le problème et les conditions aux limites. Le problème ainsi formulé s'apparente à un problème de minimisation de l'énergie (que nous retrouvons par le biais du théorème des travaux virtuels classiquement utilisé en mécanique (voir [53])).

### Discrétisation spatiale

L'étape suivante consiste à approcher cette formulation variationnelle du problème mécanique dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. La méthode de base de l'approximation est la méthode dite de Galerkin. Celle-ci consiste à récrire les champs inconnus  $\mathcal{B}(\underline{X}, T)$  du problème (par exemple le champ des vitesses  $\underline{V}(\underline{X}, T)$ , le champ des contraintes  $\underline{\Sigma}(\underline{X}, T), \dots$ ) comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de *fonctions de forme*  $N_i$  indépendantes du temps :

$$\mathcal{B}(\underline{X}, T) = \sum_i \mathcal{B}_i \cdot N_i \quad (3.1)$$

En choisissant successivement ces mêmes fonctions de forme  $N_i$  comme fonctions tests dans la formulation variationnelle, ceci nous permet finalement d'obtenir un système discret en espace.

Dans la méthode des éléments finis, la géométrie continue de la structure  $\Omega$  est ainsi approchée par une géométrie discrète, le maillage  $\Omega_h$ . Celui-ci est constitué de  $N$  nœuds  $\underline{X}_i$ ,  $i = 1..N$  et  $M$  mailles polygonales  $\Omega_j$ ,  $j = 1..M$  vérifiant  $\Omega_h = \bigcup \Omega_j$  (voir figure 3.4). Notons que ces éléments peuvent être de forme différentes. En l'occurrence, soit des triangles, soit des quadrangles : cela dépend essentiellement du choix des fonctions de forme  $N_i$ .

Dans notre cas de figure, la discrétisation spatiale du problème est réalisée à l'aide du schéma décalé en espace de Wilkins, initialement développé afin de traiter les problèmes d'évolution élastoplastique (voir [71]). Cette méthode repose sur une discrétisation spatiale à deux niveaux. La formulation variationnelle discrète du problème s'obtient en multipliant :

- les lois de conservation de la masse et de l'énergie par des fonctions  $\Upsilon$  de  $\mathcal{T}_0$ , où  $\mathcal{T}_0$  est l'espace des fonctions constantes par éléments,
- la loi de conservation de la quantité de mouvement par des fonctions  $\underline{\Psi} = (\Psi_X, \Psi_Z)$  de  $\mathcal{T}_1$ , où  $\mathcal{T}_1$  est l'espace des fonctions isoparamétriques bilinéaires continues en espace.

Les champs matériels, ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles sont ainsi approchés par morceaux soit dans  $\mathcal{T}_0$ , soit dans  $\mathcal{T}_1$  et peuvent ainsi être interpolés sur chacun des éléments du maillage.

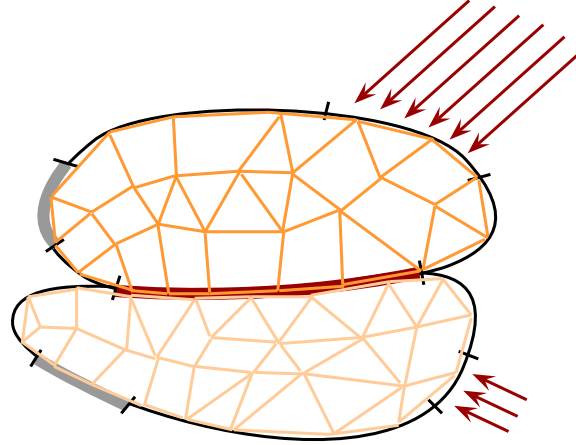


FIGURE 3.4 – Discretisation spatiale de la structure  $\Omega(T)$  à l'aide d'un maillage  $\Omega_h(T)$  non structuré constitué d'éléments triangulaires et quadrangulaires

Notons qu'avec ce schéma de discrétisation,

- les **positions**,  $\underline{X}(T)$ , les **vitesse**s  $\underline{V}(\underline{X}, T)$ , et les **accélérations**  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}, T)$  sont définies aux sommets des éléments  $\Omega_j$ ,
- les **variables thermodynamiques**, telles que la densité  $\rho(\underline{X}, T)$ , l'énergie interne  $e(\underline{X}, T)$ , les contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T)$  ou bien encore la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\underline{X}, T)$ , sont quant à elles supposées constantes dans chaque maille  $\Omega_j$ . Il en va de même pour les gradients des valeurs calculées aux nœuds, telles que les taux de déformation et de rotation.

Notons finalement que ce schéma associe à chaque maille  $\Omega_j$  un volume  $\mathcal{V}(\Omega_j)$  ainsi qu'une masse  $\mathcal{M}(\Omega_j)$  constante au cours du temps.

### Discrétisation temporelle

Une fois la discrétisation spatiale effectuée, le problème est finalement discrétisé en temps. Pour cela, le domaine temporel est subdivisé en un certain nombre de sous-intervalles  $[T^n, T^{n+1}, \dots]$  nous permettant de définir plusieurs instants discrets et pas de temps  $\Delta T$ . Dans la pratique, il existe deux grandes familles de schémas temporels, les schémas dits explicites et les schémas implicites :

- les schémas explicites sont facilement implémentables car ils permettent de calculer le résultat d'une équation au temps  $t + \Delta t$  en fonction des quantités connues à l'instant  $t$  précédent. L'inconvénient majeur de cette méthode est la nécessité de prendre un pas de temps très petit pour préserver la stabilité du schéma.

- les schémas implicites (ex :le schéma de Newmark) sont des méthodes plus lourdes à mettre en œuvre dès qu'il s'agit de traiter des problèmes fortement non-linéaires tel que le nôtre. En effet, afin que l'équation d'équilibre soit vérifiée à l'instant  $t + \Delta t$ , une convergence de la solution est effectuée sur  $\Delta t$ . De fait, si les non-linéarités sont importantes pendant  $\Delta t$ , la convergence du problème sera difficile. En revanche, l'avantage de telles méthodes est leur stabilité inconditionnelle permettant ainsi l'utilisation d'un plus grand pas de temps.

Dans le cadre précis de cette étude, les phénomènes physiques que nous souhaitons observer sont des phénomènes transitoires rapides. Pour pouvoir mettre en évidence ces phénomènes, un pas de temps suffisamment petit est nécessaire. Pour satisfaire cette condition, nous utilisons le **schéma d'intégration temporel explicite de Von Neumann Richtmeyer**. Une des spécificités de ce schéma vient du fait qu'il utilise deux niveaux de discrétisation temporelle (voir figure 3.5) :

- un premier niveau à l'instant discret  $T^n$ ,
- un second niveau à l'instant discret  $T^{n+1/2} = \frac{1}{2}(T^n + T^{n+1})$ .

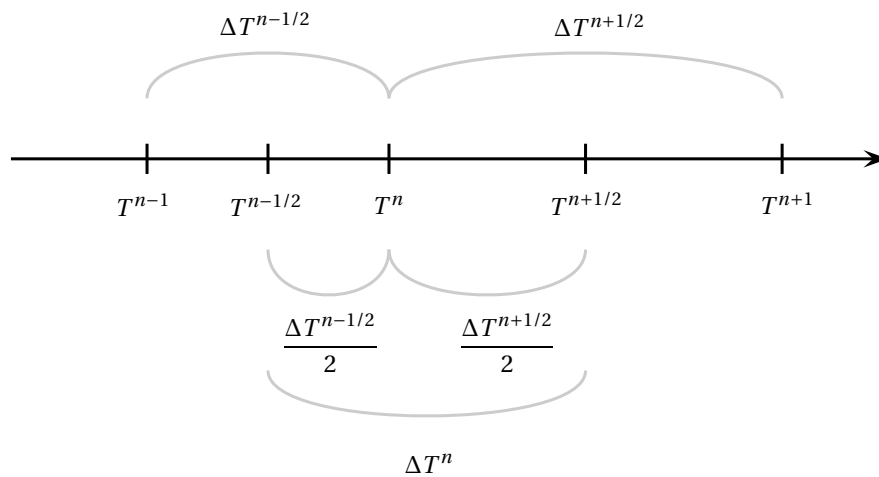


FIGURE 3.5 – Schéma d'intégration temporel à deux niveaux de VON NEUMANN RICHTMEYER : définition des pas de temps  $\Delta T^n$  et  $\Delta T^{n+1/2}$ .

Nous distinguons donc deux pas de temps  $\Delta T^n$  et  $\Delta T^{n+1/2}$  :

$$\begin{cases} \Delta T^n = T^{n+1/2} - T^{n-1/2}, & (3.2) \\ \Delta T^{n+1/2} = T^{n+1} - T^n. & (3.3) \end{cases}$$

Notons que l'utilisation de ces deux réseaux décalés permet d'obtenir très simplement le deuxième ordre de précision en temps, quand les variations de pas de temps ne sont pas trop importantes d'un pas de temps au suivant.

Pour illustrer le calcul des dérivées temporelles aux instants  $T^n$  et  $T^{n+1/2}$  nous prenons pour exemple le calcul du champ des accélérations  $\ddot{\underline{U}}(\underline{X}_i)^n$  ainsi que le calcul du champ des vitesses  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$ .



Les accélérations nodales à l'instant  $T^n$  sont ainsi approchées par,

$$\underline{\dot{U}}(\underline{X}_i)^n \approx \frac{\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} - \underline{V}(\underline{X}_i)^{n-1/2}}{\Delta T^n}. \quad (3.4)$$

Les vitesses nodales à l'instant  $T^{n+1/2}$  sont quant à elles approchées par,

$$\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \approx \frac{\underline{X}_i^{n+1} - \underline{X}_i^n}{\Delta T^{n+1/2}}. \quad (3.5)$$

Si besoin est, nous relient les deux échelles de temps à l'aide des approximations (3.6) et (3.7), valables aussi bien pour une grandeur définie par maille, que pour une grandeur définie aux nœuds. Nous avons ainsi pour une grandeur tensorielle  $\mathcal{B}$  d'ordre quelconque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}(\underline{X}_i)^{n-1/2} \approx \frac{\mathcal{B}(\underline{X}_i)^n + \mathcal{B}(\underline{X}_i)^{n-1}}{2}, \\ \mathcal{B}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \approx \frac{\mathcal{B}(\underline{X}_i)^{n+1} + \mathcal{B}(\underline{X}_i)^n}{2}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

### 3.2.2 Les équations discrètes résolues par le code

Récapitulons maintenant le système d'équations discret résolu par le code de calcul ! Précisons que le traitement du comportement hydrodynamique des matériaux repose en grande partie sur la décomposition additive du tenseur des contraintes (eq. 2.10, p. 48)  $\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1}$  en une partie déviatorique  $\underline{\underline{\mathcal{S}}}(\Omega_j)^{n+1}$  et en une partie sphérique fonction de la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1}$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1} = \underline{\underline{\mathcal{S}}}(\Omega_j)^{n+1} - \mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}}. \quad (3.8)$$

#### Lois de conservation discrètes

##### — Équation discrète de conservation de la masse (eqs. 2.124) :

L'équation discrète de conservation de la masse est résolue dans chaque maille  $\Omega_j$  (fonction test constante par maille) et s'écrit :

$$\mathcal{M}(\Omega_j) = \rho(\Omega_j)^{n+1} \cdot \mathcal{V}(\Omega_j)^{n+1} = \text{cste}, \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{M}(\Omega_j)$  et  $\mathcal{V}(\Omega_j)$  correspondent respectivement à la masse et au volume d'une maille  $\Omega_j$ .

— **Équation discrète de conservation de la quantité de mouvement (eqs. 2.125 et 2.126) :**

L'équation discrète de conservation de la quantité de mouvement est calculée pour chaque nœud  $\underline{X}_i$  de maillage (fonction test nodale  $\underline{\Psi}(\underline{X}_i)$  prenant la valeur 1 en  $\underline{X}_i$  et 0 sur les autres nœuds) et s'écrit :

$$m(\underline{X}_i) \cdot \underline{\ddot{U}}^{n+1}(\underline{X}_i) = \underline{F}(\underline{X}_i)^{n+1}. \quad (3.10)$$

Dans l'équation précédente, le terme  $m(\underline{X}_i)$  représente la masse nodale associée au nœud  $\underline{X}_i$ , tandis que la force  $\underline{F}(\underline{X}_i)^{n+1}$  matérialise l'état des contraintes au voisinage du nœud  $\underline{X}_i$ .

En théorie le terme  $m(\underline{X}_i) \cdot \underline{\ddot{U}}^{n+1}(\underline{X}_i)$  devrait nous être donnée par,

$$m(\underline{X}_i) \cdot \underline{\ddot{U}}^{n+1}(\underline{X}_i) = \int_{\Omega} \rho \cdot \underline{\ddot{U}}^{n+1}(\underline{X}_i) \cdot \Psi(\underline{x}) \, d\Omega. \quad (3.11)$$

Dans la pratique, nous l'approchons de manière consistante sous la forme du produit  $m(\underline{X}_i) \cdot \underline{\ddot{U}}^{n+1}(\underline{X}_i)$  par une opération dite de *mass lumping* effectuée en considérant l'approximation faite par Wilkins. Pour cela, nous divisons la masse de chacun des  $k$  éléments  $\Omega_k$  rattaché au nœud  $\underline{X}_i$  considéré, par le nombre  $n_{\mathcal{T},\mathcal{Q}}$  de nœuds qui le constitue, soit  $n_{\mathcal{T},\mathcal{Q}} = 3$  pour un élément triangulaire  $\mathcal{T}$  et  $n_{\mathcal{T},\mathcal{Q}} = 4$  pour un quadrangle  $\mathcal{Q}$ . Puis nous sommes l'ensemble des contributions (voir figure 3.6) ce qui revient à écrire :

$$m(\underline{X}_i) = \sum_k \left( \frac{\mathcal{M}(\Omega_j)}{n_{\mathcal{T},\mathcal{Q}}} \right). \quad (3.12)$$

Les  $k$  masses  $\mathcal{M}(\Omega_j)$  étant constantes, il en va donc de même pour la masse nodale  $m(\underline{X}_i)$ .

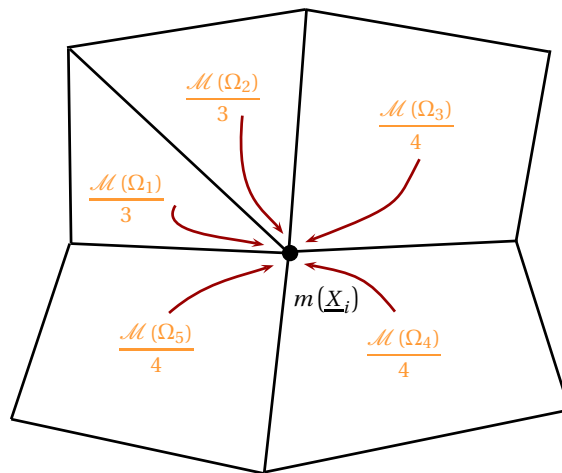


FIGURE 3.6 – Illustration du calcul des masses nodales par la méthode de WILKINS

L'équation discrète (eq. 3.10) fait également intervenir un terme  $\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  modélisant les efforts exercés au voisinage du point  $\underline{X}_i$ . Les contraintes étant calculées pour chaque maille  $\Omega_j$ , nous devons donc calculer une valeur en chacun des nœuds  $\underline{X}_i$ . Dans la méthode des éléments finis,  $\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  est obtenu à partir de la formulation variationnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Nous la calculons pour chaque nœud  $\underline{X}_i$  du maillage par la relation suivante :

$$\underline{F}(\underline{X}_i)^n = \sum_k \int_{\Omega_k} (\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_k)^n : \text{grad}(\underline{\Psi}(\underline{X}_i))) d\Omega, \quad (3.13)$$

où  $\Omega_k$  représente l'une des  $k$  mailles de frontière  $\Gamma_k$  à laquelle appartient le nœud  $\underline{X}_i$ .

Les contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_k)^n$  étant par définition constantes sur chaque élément, et après intégration par partie, nous avons de manière équivalente :

$$\underline{F}(\underline{X}_i)^n = \sum_k \left( \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_k)^n : \int_{\Gamma_k} \underline{\Psi}(\underline{X}_i) \cdot \underline{n}_{\Gamma_k} d\Gamma \right), \quad (3.14)$$

où nous rappelons que  $\underline{\Psi}(\underline{X}_i)$  est la fonction de forme de  $\mathcal{V}_1$  choisie pour l'approximation par éléments finis.

— **Equation discrète de conservation de l'énergie interne (eq. 2.127) dans chaque maille  $\Omega_j$  :**

L'équation discrète de conservation de l'énergie interne est généralement (eq. 2.127) couplée avec l'équation d'état en pression (eq. 2.135). La décomposition du tenseur des contraintes (eq. 3.8) en deux parties implique par ailleurs une intégration en deux temps (traitement dissocié de la partie élastoplastique et de la pression hydrostatique). Nous définissons ainsi une énergie interne intermédiaire  $\tilde{e}_M(\Omega_j)^{n+1}$  incluant le travail élastoplastique :

$$\tilde{e}_M(\Omega_j)^{n+1} = e_M(\Omega_j)^n + \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1/2} : \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2}. \quad (3.15)$$

Le tenseur déviateur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1/2}$  est ici approché par le biais de l'équation (eq. 3.7), et s'écrit en fonction de  $\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^n$  :

$$\tilde{e}_M(\Omega_j)^{n+1} = e_M(\Omega_j)^n + \left( \frac{\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1} + \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^n}{2} \right) : \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2}. \quad (3.16)$$

Une fois que cette énergie interne intermédiaire  $\tilde{e}_M(\Omega_j)^{n+1}$  a été calculée, nous résolvons la loi de conservation de l'énergie (eq. 2.127) intégrée en temps utilisant l'identité

$$\text{div}(\mathbb{V}) = -\rho \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (3.17)$$

ainsi que l'équation d'état (eq. 2.135) dans chaque maille  $\Omega_j$  :

$$\begin{cases} e_M(\Omega_j)^{n+1} = \bar{e}_M(\Omega_j)^{n+1} - \left( \frac{\mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1} + \mathbb{P}(\Omega_j)^n}{2} \right) \left( \frac{1}{\rho(\Omega_j)^{n+1}} - \frac{1}{\rho(\Omega_j)^n} \right), & (3.18) \\ \mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1} = \mathbf{P}(\rho(\Omega_j)^{n+1}, e(\Omega_j)^{n+1}). & (3.19) \end{cases}$$

### Lois constitutives de la plasticité

#### — Loi de comportement élastoplastique discrète (eqs. 2.136 à 2.139) :

La loi de comportement élastoplastique discrète s'écrit dans chaque maille  $\Omega_j$  :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1/2} = 2G_0 \cdot \left( \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)^{n+1/2}) \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)_p^{n+1/2} \right), \quad (3.20)$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1/2}$  est la dérivée temporelle objective de Jaumann appliquée au tenseur des contraintes. Cette dernière est fonction des tenseurs déviateurs  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^n$  et  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1}$ , ainsi que du tenseur des taux de rotation  $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\Omega_j)^{n+1/2}$  (eq. 3.39).

Par la suite, nous notons

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}(\Omega_j)^n = \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^n - \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^n \cdot \underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\Omega_j)^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2} + \underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\Omega_j)^{n+1/2} \cdot \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^n \cdot \Delta T^{n+1/2},$$

le tenseur déviateur des contraintes après prise en compte de la rotation  $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}(\Omega_j)^{n+1/2}$ , et la loi de comportement élastoplastique discrète s'écrit de manière équivalente :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}^{n+1} = \tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^n + 2G_0 \cdot \Delta T^{n+1/2} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbb{D}}}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\mathbb{D}}}^{n+1/2}) \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p^{n+1/2} \right). \quad (3.21)$$

Rappelons ici que le tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2}$  est obtenu par décomposition additive du tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)^{n+1/2}$  en une partie élastique  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_{el}(\Omega_j)^{n+1/2}$  et une partie plastique  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2}$  obtenue par résolution de la loi d'évolution plastique (eqs. 3.22 à 3.27).

#### — Critère de plasticité de Von Mises calculé dans chaque maille $\Omega_j$ :

$$\Phi(\Omega_j)^{n+1} = \Sigma_{eq}(\Omega_j)^{n+1} - \Upsilon(\Omega_j)^{n+1}. \quad (3.22)$$

— Contrainte équivalente de Von Mises calculée dans chaque maille  $\Omega_j$  :

$$\Sigma_{\text{eq}}(\Omega_j)^{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1} \right\| = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1})}. \quad (3.23)$$

— Limite élastique / modèle rhéologique de la maille  $\Omega_j$  :

$$\Upsilon(\Omega_j)^{n+1} = \mathcal{F}(\Theta^n, \mathbb{P}^n, \bar{\mathbb{E}}_p^{n+1}, \dot{\mathbb{E}}_p^{n+1/2}, \dots). \quad (3.24)$$

— Déformation plastique cumulée calculée dans chaque maille  $\Omega_j$  :

$$\begin{cases} \bar{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^{n+1} = \bar{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^n + \dot{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2}, \\ \dot{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} \right\|. \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\dot{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} \right\|. \quad (3.26)$$

— La loi d'écoulement discrète dans chaque maille  $\Omega_j$  s'écrit quant à elle :

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} = \frac{3}{2} \dot{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} \cdot \frac{\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^{n+1}}{\Sigma_{\text{eq}}(\Omega_j)^{n+1}}. \quad (3.27)$$

## Conditions aux limites spatio-temporelles

— Valeurs initiales des champs thermomécaniques  $\forall \underline{\underline{X}} \in \Omega_0$  :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^0 = 0, & (3.28) \\ \underline{\underline{\mathbb{V}}}(\underline{\underline{X}}_i)^0 = 0, \forall \underline{\underline{X}} \in \Omega_0 & (3.29) \\ \underline{\underline{\mathbb{V}}}(\underline{\underline{X}}_i)^0 = \underline{\underline{\mathbb{V}}}_0, \forall \underline{\underline{X}} \in \Gamma_{\cup}(0). & (3.30) \\ \rho(\Omega_j)^0 = \rho_0. & (3.31) \end{cases}$$

Ce problème est complété par des conditions aux limites (eqs. 2.158 à 2.169) écrites sous forme discrète, et que nous appliquons à l'interface entre les deux domaines discrets. Nous ne les écrivons pas ici, mais les présentons en détails, ainsi que leur prise en compte au cours de la troisième section de ce chapitre (voir pp. 98 à 106).

### Condition de stabilité

Comme nous l'évoquons précédemment, la stabilité d'un schéma explicite n'est vérifiée que sous certaines conditions. Pour que le problème discret puisse être résolu par le code hydrodynamique que nous utilisons, nous devons vérifier deux conditions (voir [72]) :

- une condition de stabilité CFL :

Cette condition consiste à vérifier que la distance parcourue par une onde de célérité  $\zeta_L$  durant un pas de temps  $\Delta T$  dans une maille  $\Omega_j$ , ne soit pas supérieure à une longueur caractéristique  $\hat{L}(\Omega_j)$  de la maille prédéfinie :

$$\max \left( \frac{\zeta_L \cdot \Delta T}{\hat{L}(\Omega_j)} \right) \leq 1. \quad (3.32)$$

- une condition géométrique sur la compression des éléments  $\Omega_j$  :

Cette condition limite la variation de volume d'une maille d'un instant discret à un autre. La masse des éléments étant constante au cours du temps, elle s'écrit en terme de densité :

$$\max \left( \frac{\Delta \rho(\Omega_j)}{\rho(\Omega_j)} \right) \leq \text{constante}. \quad (3.33)$$

### 3.2.3 Résolution du problème discret

#### Récapitulatif des données et inconnues du problème

Comme nous l'avons vu le schéma de discrétisation temporel fait intervenir deux niveaux en temps. Pour simplifier nous décrivons l'algorithme de résolution en débutant par le calcul des accélérations nodales  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n$ . A cet instant discret  $T^n$ , les données dont nous avons besoin et dont nous disposons sont les suivantes :

- Grandeurs calculées précédemment en chacun des nœuds  $\underline{X}_i$ ,  $i = 1..N$  du maillage :
  - le champ des accélérations  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^{n-1}$ ,
  - le champ des vitesses  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n-1/2}$ ,
  - le champ des positions  $\underline{X}_i^n$ ,
- Grandeurs calculées précédemment dans chacun des éléments  $\Omega_j$ ,  $j = 1..M$  du maillage :
  - la densité  $\rho(\Omega_j)^n$ ,
  - le tenseur symétrique des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_j)^n$  et sa partie déviatorique, le tenseur  $\underline{\underline{S}}(\Omega_j)^n$ ,
  - la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\Omega_j)^n$ ,
  - l'énergie interne  $e(\Omega_j)^n$ ,
  - le déformation plastique cumulée  $\bar{\mathbb{E}}_p(\Omega_j)^n$

## Chronologie du schéma explicite

### Traitement classique des matériaux

- Calcul des accélérations  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n$ ,  $i = 1..N$  à l'instant  $T^n$  :

La première étape de l'algorithme consiste à calculer les accélérations nodales à l'instant discret  $T^n$ . Pour ce faire nous résolvons l'équation discrète de conservation de la quantité de mouvement (eq. 3.10) et nous avons :

$$\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n = \frac{\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \quad (3.34)$$

où  $m(\underline{X}_i)$  est la masse nodale du nœud  $\underline{X}_i$  considéré, et  $\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  la force appliquée au nœud  $\underline{X}_i$ . Précisons que cette accélération ne tient pas compte des forces  $\delta\underline{F}(\underline{X}_i)$  éventuellement exercées aux nœuds  $\underline{X}_i$  de l'interface discrète. Il s'agit des forces de contact  $F_N(\underline{X}_i)^n = \delta\underline{F}(\underline{X}_i) \cdot \underline{n}$  et forces de frottement  $F_T(\underline{X}_i)^n = \delta\underline{F}(\underline{X}_i) \cdot \underline{n}$ . Nous devons donc procéder à une correction que nous effectuons ultérieurement.

- Calcul des vitesses  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$ ,  $i = 1..N$  à l'instant  $T^{n+1/2}$  :

Connaissant les accélérations  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n$ , les vitesses nodales à l'instant  $T^{n+1/2}$  sont obtenues par une simple intégration en temps à partir de l'équation (eq. 3.4). Connaissant le champ des vitesses  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n-1/2}$  et l'accélération  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n$  aux nœuds  $\underline{X}_i$ ,  $i = 1..N$ , ainsi que le pas de temps  $\Delta T^n$ , nous en déduisons la vitesse  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$  à l'instant  $T^{n+1/2}$  par :

$$\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n \cdot \Delta T^n + \underline{V}(\underline{X}_i)^{n-1/2} \quad (3.35)$$

- Calcul des dérivées sur les vitesses  $\delta\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$ ,  $i = 1..N$  à l'instant  $T^{n+1/2}$  :

Ces vitesses  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$  sont éventuellement corrigées afin de respecter les conditions de contact et de frottement observées aux interfaces. Pour cela, nous calculons des dérivées sur les vitesses  $\delta\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$ ,  $i = 1..N$  nous permettant de réactualiser les vitesses nodales. Cette étape se fait en deux temps pour chaque nœud situé à l'interface :

- une première correction effectuée par un algorithme de gestion du contact,
- une seconde correction, après prise en compte du frottement.

Nous présentons en détail chacune des deux étapes dans la section suivante (voir pp.98 à 106).

- Actualisation des positions  $\underline{\underline{X}}_i^{n+1}$ ,  $i = 1..N$  à l'instant  $T^{n+1}$  :

Une fois que les vitesses  $\underline{\underline{V}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1/2}$  ont été déterminées en chacun des nœuds du maillage, nous actualisons leurs positions  $\underline{\underline{X}}_i$  à l'aide de l'équation discrète (eq. 3.5) et nous avons :

$$\underline{\underline{X}}_i^{n+1} = \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2} + \underline{\underline{X}}_i^n. \quad (3.36)$$

- Calcul des volumes  $\mathcal{V}(\Omega_j)^{n+1}$  et densités  $\rho(\Omega_j)^{n+1}$  à l'instant  $T^{n+1}$  :

Connaissant les nouvelles positions nodales  $\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1}$  nous en déduisons facilement le volume  $\mathcal{V}(\Omega_j)^{n+1}$  de chacune des mailles  $\Omega_j$  à l'instant  $T^{n+1}$ . La masse  $\mathcal{M}(\Omega_j)$  de chaque élément  $\Omega_j$  demeurant constante au cours du temps, nous actualisons simplement les densités  $\rho(\Omega_j)^{n+1}$  pour chaque maille :

$$\rho(\Omega_j)^{n+1} = \frac{\mathcal{V}(\Omega_j)^{n+1}}{\mathcal{M}(\Omega_j)}. \quad (3.37)$$

### Traitement élastoplastique des matériaux :

L'élastoplasticité est traitée explicitement par le code calcul. L'intégration du comportement (eq. 3.20) sur le pas de temps  $\Delta T^{n+1/2}$  est réalisée en utilisant un **algorithme de retour radial** (voir [73], pp. 155-161) que nous détaillons ci-après. Ce traitement élastoplastique des matériaux se fait en plusieurs étapes :

- Calcul des tenseurs discrets  $\underline{\underline{D}}(\Omega_j)^{n+1/2}$  et  $\underline{\underline{\Omega}}(\Omega_j)^{n+1/2}$  à l'instant  $T^{n+1/2}$  :

Nous déterminons tout d'abord les tenseurs des taux de déformation  $\underline{\underline{D}}^{n+1/2}$  (eq. 3.38) et de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}^{n+1/2}$  (eq. 3.39), que nous calculons au centre des mailles à l'instant  $T^{n+1/2}$  par le biais des relations discrètes suivantes :

$$\underline{\underline{D}}(\Omega_j)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \text{grad} \left( \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1/2} \right) + \text{grad}^T \left( \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1/2} \right) \right\} \quad (3.38)$$

$$\underline{\underline{\Omega}}(\Omega_j)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \text{grad} \left( \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1/2} \right) - \text{grad}^T \left( \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{X}}_i)^{n+1/2} \right) \right\} \quad (3.39)$$

- Résolution de la plasticité par un algorithme de retour radial :

Nous souhaitons maintenant déterminer l'état des contraintes  $\underline{\underline{S}}(\Omega_j)^{n+1}$  au sein du matériau. Pour ce faire, nous devons résoudre la loi de comportement élastoplastique discrète (eq. 3.20) :

$$\underline{\underline{S}}(\Omega_j)^{n+1} = \underline{\underline{S}}(\Omega_j)^n + 2G_0 \cdot \Delta T^{n+1/2} \cdot \left( \underline{\underline{D}}(\Omega_j)^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}}^{n+1/2}) \cdot \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}(\Omega_j)_p^{n+1/2} \right). \quad (3.40)$$



Pour calculer la déformation plastique au sein des matériaux, nous faisons tout d'abord l'hypothèse d'une évolution purement élastique, de sorte que  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} = \mathbf{0}$  et  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)^{n+1/2} = \underline{\underline{\mathbb{D}}}_{el}(\Omega_j)^{n+1/2}$ . Nous en déduisons alors un prédicteur élastique  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1}$  du tenseur déviateur des contraintes tel que :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^n + 2G_0 \cdot \Delta T^{n+1/2} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\Omega_j)^{n+1/2}) \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right). \quad (3.41)$$

La contrainte équivalente  $\Sigma_{\text{eq,pred}}^{n+1}$  associée à cet état des contraintes nous est donnée par la relation suivante :

$$\Sigma_{\text{eq,pred}}^{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \text{Tr} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1} \cdot \underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1} \right)}. \quad (3.42)$$

Nous calculons alors le critère discret de Von Mises (eq. 3.23), qui s'écrit à l'instant  $T^{n+1}$  :

$$\Phi^{n+1} \left( \Sigma_{\text{eq,pred}}^{n+1}, \Upsilon^{n+1} \right) := \Sigma_{\text{eq,pred}}^{n+1} - \frac{\Upsilon(\Omega_j)^{n+1}}{\sqrt{3}} \leq 0, \quad (3.43)$$

où  $\Upsilon(\Omega_j)^{n+1}$  est la limite élastique discrète, déterminée à l'aide d'un des modèles rhéologiques présentés au cours du chapitre précédent.

Deux cas se présentent alors :

- le critère de plasticité n'est pas vérifié ( $\Phi^{n+1} < 0$ ) : dans ce cas, l'évolution sur le pas de temps  $\Delta T^{n+1/2}$  est purement élastique et la déformation plastique est nulle au sein de la maille  $\Omega_j$  considérée. Nous avons alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1}, \end{array} \right. \quad (3.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_p(\Omega_j)^{n+1} = \underline{\underline{\mathbb{E}}}_p(\Omega_j)^n. \end{array} \right. \quad (3.46)$$

- le critère de plasticité est vérifié ( $\Phi^{n+1} \geq 0$ ) : dans ce cas, l'état des contraintes est nécessairement sur la surface de charge et nous avons par soustraction de l'équation (eq. 3.41) dans (eq. 3.40) :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1} - 2G_0 \cdot \Delta T^{n+1/2} \cdot \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2}. \quad (3.47)$$

Par application de la règle du retour radial, nous calculons :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1} = \frac{Y(\Omega_j)^{n+1}}{\Sigma_{\text{eq,pred}}^{n+1}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1}. \quad (3.48)$$

Nous en déduisons finalement le tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2}$  par l'équation (eq. 3.47) et nous trouvons :

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\Omega_j)^{n+1/2} = \left\{ 1 - \left( \frac{Y(\Omega_j)^{n+1}}{\Sigma_{\text{eq,pred}}^{n+1}} \right) \right\} \cdot \frac{\underline{\underline{\mathbb{S}}}_{\text{pred}}^{n+1}}{2G_0 \cdot \Delta T^{n+1/2}}. \quad (3.49)$$

— Détermination de la dissipation plastique et actualisation de l'énergie interne par dépôt d'énergie :

Nous calculons une valeur intermédiaire  $\tilde{e}(\Omega_j)^{n+1}$  de l'énergie interne  $e(\Omega_j)^{n+1}$  que nous actualisons par dépôt d'énergie élastoplastique (eq. 3.15) :

$$\tilde{e}_M(\Omega_j)^{n+1} = e_M(\Omega_j)^n + \underline{\underline{\mathbb{S}}}^{n+1/2} : \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2} = e_M(\Omega_j)^n + \left( \frac{\underline{\underline{\mathbb{S}}}^{n+1} + \underline{\underline{\mathbb{S}}}^n}{2} \right) : \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p^{n+1/2} \cdot \Delta T^{n+1/2}. \quad (3.50)$$

### Traitement classique des matériaux

— Calcul de l'énergie interne  $e(\Omega_j)^{n+1}$  et de la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1}$  :

Nous calculons finalement l'énergie interne  $e(\Omega_j)^{n+1}$  ainsi que la pression hydrostatique  $\mathbb{P}^{n+1}(\Omega_j)$ , en résolvant par une **méthode de Newton** l'équation discrète de conservation de l'énergie ainsi que l'équation d'état retenue (eqs. 3.18 et 3.19) :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{n+1}(\rho^{n+1}(\Omega_j), \mathbb{P}^{n+1}(\Omega_j)) = \tilde{e}^{n+1} + \left( \frac{\mathbb{P}^{n+1} + \mathbb{P}^n}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{\rho^{n+1}} - \frac{1}{\rho^n} \right) \end{array} \right. \quad (3.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}^{n+1}(\Omega_j) = \mathbf{P}(\rho^{n+1}(\Omega_j), e(\Omega_j)^{n+1}) \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Remarquons que ces calculs tiennent généralement compte d'un terme de pseudo-viscosité introduit afin de gérer correctement le passage des ondes chocs au sein de chacune des mailles.

— Actualisation du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1}$  :

Connaissant le tenseur déviateur des contraintes  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1}$  ainsi que la pression hydrostatique  $\mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1}$  dans chaque maille  $\Omega_j$  nous en déduisons finalement le tenseur des contraintes par l'équation (eq. 3.8),

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\Omega_j)^{n+1} - \mathbb{P}(\Omega_j)^{n+1} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}}. \quad (3.53)$$

## Récapitulatif de l'algorithme de résolution

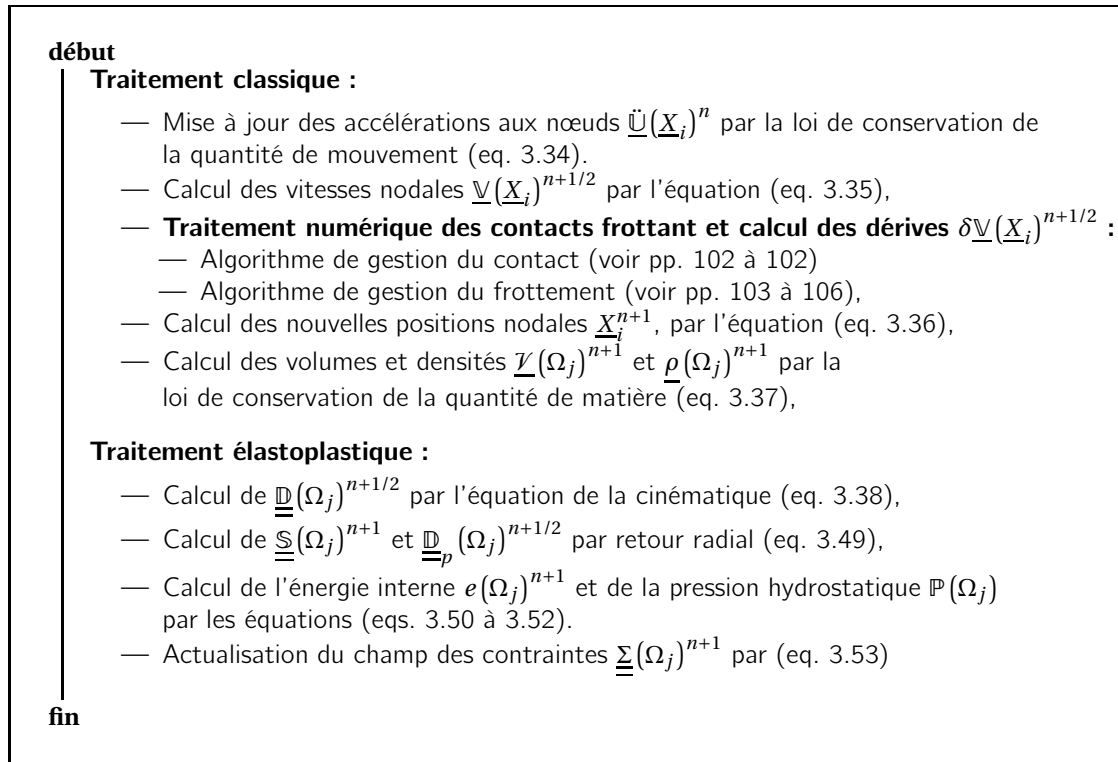


FIGURE 3.7 – Algorithme de résolution utilisé par le code de calcul hydrodynamique retenu

## 3.3 Traitement numérique des interfaces de contact dans les codes hydrodynamiques

### 3.3.1 Principe de résolution et notions relatives au traitement des interfaces discrètes

#### Principe de résolution des contacts frottant

Le système d'équations discrètes que nous venons d'écrire est résolu par le code hydrodynamique en chaque nœud  $\underline{X}_i$  et chaque maille  $\Omega_j$  du milieu discret. La résolution aux interfaces potentielles de contact s'avère cependant plus complexe !

Comme nous l'avons vu, la première étape de l'algorithme de résolution consiste à déterminer les accélérations  $\ddot{\underline{U}}(\underline{X}_i)^n$  en chacun des nœuds  $\underline{X}_i$  du maillage (voir algorithme de résolution 3.7, p. 98). Le code hydrodynamique résoud pour cela l'équation discrète de conservation de la masse (eq. 3.34). Cependant, pour tenir compte des non-linéarités de type contact frottant, le calcul des

accélérations aux noeuds d'interface devrait en réalité s'écrire :

$$\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n = \frac{\underline{F}(\underline{X}_i)^n + \delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)}, \quad (3.54)$$

où  $\delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  représente les forces dues au contact et au frottement à l'interface. Les accélérations et vitesses d'interface dont nous disposons à l'instant  $T^{n+1/2}$  ne tiennent pas compte de cette correction et sont calculées en prenant  $\delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n = \mathbf{0}$ . Comme elles ne correspondent pas aux accélérations et vitesses que nous devrions réellement observer, nous les appelons par la suite **accélérations et vitesses libres** (sans contact ni frottement), et nous les notons respectivement  $\underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n$  et  $\underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2}$ .

$$\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n = \underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n + \frac{\delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)}. \quad (3.55)$$

Le calcul des vitesses réelles aux nœuds d'interfaces  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}_i)^n$  (accélérations libres et accélérations induites par les contacts frottant) est donc "splitté" en deux étapes :

— une étape de calcul des vitesses libres,

$$\underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n \cdot \Delta T^n + \underline{V}(\underline{X}_i)^{n-1/2}, \quad (3.56)$$

— une étape de calcul des vitesses corrigées intégrant les contacts frottant,

$$\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} + \frac{\delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n. \quad (3.57)$$

Nous introduisons ainsi une dérive sur les vitesses  $\delta\underline{V}$  due aux forces de contact frottant  $\delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n$ , que nous définissons comme une intégration d'un terme d'accélération sur l'intervalle de temps  $\Delta T^n$ . Formellement, nous pouvons donc l'écrire au temps  $T^{n+1/2}$ , et nous avons :

$$\delta\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \left( \frac{\delta\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \right) \cdot \Delta T^n. \quad (3.58)$$

Pour pouvoir calculer ces termes correctifs, le code utilise successivement deux algorithmes distincts :

- **un premier algorithme permettant de vérifier si le contact est réalisé à l'interface.** Cet algorithme calcule la correction à prendre en compte en chacun des noeud d'interface pour assurer un contact permanent suivant la direction normale  $\underline{n}_C$  à la surface de contact et nous avons

$$\delta \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_C = \left( \frac{\delta F_N(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \right) \cdot \Delta T^n, \quad (3.59)$$

où  $\delta F_N^n(\underline{X}_i) = \delta \underline{F}(\underline{X}_i)^n \cdot \underline{n}_C$  représente la force normale de contact calculée en chacun des nœuds d'interface.

- **un second algorithme permettant de traiter la présence éventuelle de frottement** lorsque le contact est vérifié à l'interface. Cet algorithme calcule une correction dans le plan tangent à l'interface de glissement, suivant la direction portée par le vecteur tangent  $\underline{t}$  et nous avons :

$$\delta \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \left( \frac{\delta F_T(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \right) \cdot \Delta T^n, \quad (3.60)$$

où  $\delta F_T^n(\underline{X}_i) = \delta \underline{F}(\underline{X}_i)^n \cdot \underline{t}$  représente quant à elle la force de frottement calculée en chacun des nœuds d'interface.

## Représentation de l'interface discrète

Afin de distinguer chacun des matériaux mis en glissement à l'interface, nous désignons une **surface glissante** et une **surface guide**. Dans la pratique, la surface guide correspond à la surface discrète maillée la plus grossièrement, tandis que la surface glissante correspond à la surface discrète maillée la plus finement. Les matériaux ayant l'impédance mécanique la plus élevée sont souvent choisis comme matériau glissant et sont donc maillés plus finement que le matériau guide. Pour résoudre numériquement les interfaces discrètes, chaque nœud glissant  $\underline{X}_i$  est alors associé à un bras guide situé en vis à vis<sup>2</sup>.

Pour simplifier la présentation des algorithmes de gestion du contact et du frottement, nous considérons par la suite un nœud glissant  $\underline{X}_g$  situé en vis à vis avec un bras guide formé par les nœuds de coordonnées  $\underline{X}_0$  et  $\underline{X}_1$  (voir figure 3.8).

Nous déterminons alors  $\underline{X}_G$ , la projection orthogonale du nœud glissant  $\underline{X}_g$  sur le bras guide qui lui est associé, suivant la normale au bras guide notée  $\underline{n}_G$ . Une fois la projection orthogonale effectuée, nous définissons un coefficient *coef* compris entre 0 et 1, permettant de déterminer la position relative du nœud projeté  $\underline{X}_G$  sur le bras guide associé au nœud  $\underline{X}_g$ . Nous définissons ce coefficient comme le rapport entre la longueur du segment  $|\underline{X}_G - \underline{X}_0|$  et la longueur du bras guide  $|\underline{X}_1 - \underline{X}_0|$ , soit :

$$coef = \frac{|\underline{X}_G - \underline{X}_0|}{|\underline{X}_1 - \underline{X}_0|} \quad (3.61)$$

Nous vérifions notamment que,

- si *coef* = 0, alors le nœud projeté  $\underline{X}_G$  coïncide avec le nœud  $\underline{X}_0$  du guide,
- si *coef* = 1, alors le nœud projeté  $\underline{X}_G$  coïncide avec le nœud  $\underline{X}_1$  du guide,

---

2. Remarquons qu'à plusieurs nœuds glissants peuvent correspondre un même bras guide.

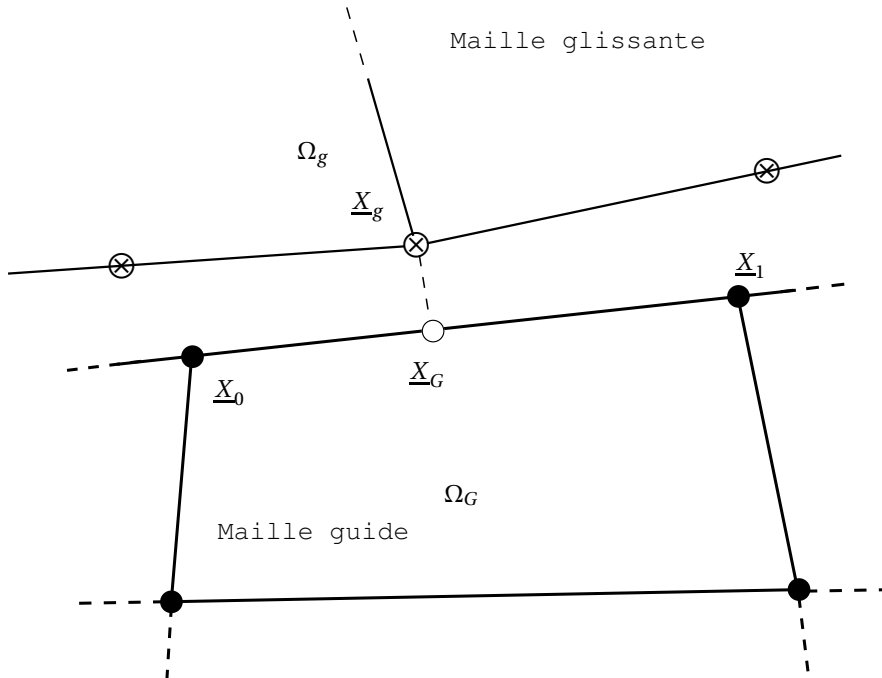


FIGURE 3.8 – Représentation de l’interface de glissement

— si  $coef = 0.5$ , alors le nœud projeté  $\underline{X}_G$  se trouve au milieu du bras guide.

L’évaluation des grandeurs en  $\underline{X}_G$  s’obtient simplement par interpolation sur le bras guide. Par exemple, le calcul de la masse  $m(\underline{X}_G)$  associée au nœud projeté  $\underline{X}_g$  nous est donné par :

$$m(\underline{X}_G) = (1 - coef) \cdot m(\underline{X}_0) + coef \cdot m(\underline{X}_1). \tag{3.62}$$

La vitesse  $\underline{v}(\underline{X}_G)^{n+1/2}$  à l’instant  $T^{n+1/2}$  s’obtient de la même façon et nous avons :

$$\underline{v}(\underline{X}_G)^{n+1/2} = (1 - coef) \cdot \underline{v}(\underline{X}_0)^{n+1/2} + coef \cdot \underline{v}(\underline{X}_1)^{n+1/2}. \tag{3.63}$$

### 3.3.2 Gestion du contact

Intéressons-nous maintenant à la gestion du contact entre deux interfaces discrètes. Il s'agit de déterminer quelles sont les zones en décollement, ou bien au contraire en contact en résolvant pour cela les équations (eqs. 2.160 à 2.163). Plusieurs méthodes existent dans la littérature pour résoudre numériquement ce type de non-linéarités. Parmi les plus utilisées, nous distinguons notamment :

- la méthode de pénalisation,
- la méthode des multiplicateurs de Lagrange,
- la méthode du bi-potentiel (De Saxcé et Feng).

Nous utilisons ici une méthode basée sur la détermination d'une pression de surface  $\mathbb{P}_S$  assurant la condition de contact (eq. 2.161). Pour décrire la méthodologie employée, nous nous plaçons à l'instant discret  $T^{n+1/2}$ , juste après l'étape de calcul des vitesses libres  $\underline{\mathbb{V}}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2}$ . Nous nous proposons alors de les corriger en calculant une dérive sur les vitesses  $\delta\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$  que nous calculons suivant la normale à l'interface. Pour l'illustrer à partir de la figure 3.8, nous considérons par la suite un des bras glissant associé au nœud  $\underline{X}_g$  et le bras guide situé en vis à vis, soit dans notre cas le bras formé par les nœuds  $\underline{X}_0$  et  $\underline{X}_1$ .

- Ces deux bras (glissant/guide) définissent des surfaces potentiellement en contact au début du calcul. Nous supposons alors qu'elles le sont effectivement et qu'il n'y a pas de décollement cinématique au cours de l'évolution (contact bilatéral permanent). Dès lors, ceci revient à dire que les normales unitaires  $\underline{n}_g$  et  $\underline{n}_G$  associées à chacune des surfaces en vis à vis coïncident. Par définition, c'est la normale unitaire du bras guide  $\underline{n}_G$  qui définit  $\underline{n}_C$ , la normale à l'interface de contact et nous notons :

$$\underline{n}_C = \underline{n}_G = -\underline{n}_g. \quad (3.64)$$

- La normale des surfaces de contact étant définie, la seconde étape consiste à **déterminer la pression de surface** permettant de respecter la condition de contact discrète  $\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_g = \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_G$ . La force normale  $\delta F_N$  exercée aux nœuds  $\underline{X}_g$  est alors déterminée par :

$$\delta F_N(\underline{X}_g) = \frac{\mathbb{P}_S \cdot l}{2}, \quad (3.65)$$

où  $l$  est une mesure de la surface effective de contact associée au nœud  $\underline{X}_g$ . surface. Après avoir déterminé les forces normales exercées en chacun des nœuds d'interface  $\underline{X}_i$ , les vitesses sont alors corrigées en introduisant une correction sur les vitesses normales et nous calculons de manière générale :

$$\delta\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_C = \left( \frac{\delta F_N^n(\underline{X}_i)}{m(X_i)} \right) \cdot \Delta T^n, \quad (3.66)$$

Remarquons cependant que l'hypothèse faite sur l'unicité des normales (eq. 3.64) introduit des approximations sur le calcul de la pression de surface  $\mathbb{P}_S$ . Le contact n'est donc pas "parfait". Notons également que cette méthode force le contact et n'autorise aucun décollement ultérieur entre les surfaces. Lorsque les deux surfaces tendent à s'écarter, la pression de surface calculée est alors négative.

### 3.3.3 Gestion du frottement

Intéressons nous maintenant à la gestion du frottement aux interfaces de glissement. Pour décrire l'algorithme de gestion du frottement, nous nous plaçons de nouveau à l'instant  $T^{n+1/2}$ . Comme nous l'avons évoqué précédemment (se référer à l'algorithme de résolution 3.7), l'algorithme de gestion du frottement est appelé après l'étape de calcul des vitesses libres  $\underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2}$  (eq. 3.35), dont la composante suivant la normale à l'interface de contact  $\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_C$  a été corrigée lors d'une première étape de gestion du contact.

La prise en compte du frottement consiste cette fois-ci à corriger la composante tangentielle des vitesses libres  $\underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t}$  de chacun des nœuds d'interface  $\underline{X}_i$  en introduisant pour ce faire une **dérive sur la vitesse**  $\delta\underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t}$  que nous déterminons dans le plan tangent à l'interface de glissement.

### Évaluation du mouvement de glissement relatif aux interfaces discrètes

Comme nous allons le voir, cette dérive est fonction de la force de frottement  $\delta F_T^n$  qui s'oppose par définition au mouvement relatif des matériaux en glissement. Numériquement nous calculons ce mouvement relatif entre chaque nœud glissant et le bras guide qui lui est associé.

En considérant de nouveau un nœud glissant  $\underline{X}_g$  et son projeté  $\underline{X}_G$  sur le bras guide  $[\underline{X}_0, \underline{X}_1]$  (voir figure 3.8, p. 101) nous avons :

$$\begin{cases} \underline{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2} = \underline{V}^*(\underline{X}_g)^{n+1/2} + \delta\underline{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2}, & (3.67) \\ \underline{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2} = \underline{V}^*(\underline{X}_G)^{n+1/2} + \delta\underline{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2}. & (3.68) \end{cases}$$

Les dérivées sur les vitesses  $\delta\underline{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2}$  et  $\delta\underline{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2}$  s'expriment en fonction de la force de frottement  $\delta F_T^n$  observée à l'interface. Cette dernière étant identique aux nœuds  $\underline{X}_g$  et  $\underline{X}_G$ , nous avons par application de la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{cases} \delta\underline{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = -\frac{\delta F_T^n}{m_g} \cdot \Delta T^n, & (3.69) \\ \delta\underline{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = -\frac{\delta F_T^n}{m_G} \cdot \Delta T^n. & (3.70) \end{cases}$$

où  $m_g$  et  $m_G$  correspondent respectivement à la masse du nœud glissant  $\underline{X}_g$  et à la masse du nœud projeté  $\underline{X}_G$  situé en vis à vis sur le bras guide  $\underline{X}_1 - \underline{X}_0$  et  $\mathcal{S}_g^n$  la surface nodale du nœud glissant.

Connaissant les vitesses  $\underline{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2}$  et  $\underline{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2}$ , l'expression de **la vitesse relative de glissement**  $[\underline{V}]^{n+1/2}$  entre le nœud glissant  $\underline{X}_g$  et le bras guide  $\underline{X}_1 - \underline{X}_0$  nous est donnée par :



$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbb{V}]^{n+1/2} = \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} - \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}}, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} = \underline{\mathbb{V}}^*(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} - \frac{\delta F_T^n}{m_g} \cdot \Delta T^n, \\ \underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} = \underline{\mathbb{V}}^*(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} - \frac{\delta F_T^n}{m_G} \cdot \Delta T^n. \end{array} \right. \quad (3.71)$$

$$\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} = \underline{\mathbb{V}}^*(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} - \frac{\delta F_T^n}{m_g} \cdot \Delta T^n, \quad (3.72)$$

$$\underline{\mathbb{V}}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} = \underline{\mathbb{V}}^*(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{\dot{t}} - \frac{\delta F_T^n}{m_G} \cdot \Delta T^n. \quad (3.73)$$

Par la suite, nous écrivons l'équation (eq. 3.71) sous la forme d'une seule et même équation nous permettant d'exprimer la vitesse relative de glissement à l'interface  $[\mathbb{V}]^{n+1/2}$ , en fonction de la vitesse de glissement libre  $[\mathbb{V}^*]^{n+1/2}$  et des dérivées sur les vitesses :

$$[\mathbb{V}]^{n+1/2} = [\mathbb{V}^*]^{n+1/2} - F_T^n \cdot \frac{\Delta T^n \cdot \mathcal{S}_g^n}{m_g} + F_T^n \cdot \frac{\Delta T^n \cdot \mathcal{S}_g^n}{m_G}. \quad (3.74)$$

### Calcul de l'effort de frottement et correction des vitesses

Nous calculons maintenant la force de frottement  $\delta F_T^n$  en chacun des nœuds glissants. Pour cela, nous devons dans un premier temps déterminer **la force de soudure**  $\delta F_\star^n$  qui correspond par définition à la force de frottement permettant d'annuler tout mouvement relatif à l'interface de glissement. Elle correspond donc à la force de frottement maximale pouvant être appliquée numériquement. La vitesse de glissement  $[\mathbb{V}]^{n+1/2}$  s'annulant lorsque  $\delta F_T^n = \delta F_\star^n$  est appliquée, l'équation (eq. 3.74) se ramène donc à l'expression suivante :

$$[\mathbb{V}^*]^{n+1/2} - \frac{\delta F_\star^n}{m_g} \cdot \Delta T^n + \frac{\delta F_\star^n}{m_G} \cdot \Delta T^n = 0, \quad (3.75)$$

et nous en déduisons finalement :

$$\delta F_\star^n = \frac{[\mathbb{V}^*]^{n+1/2}}{\Delta T^n} \left( \frac{m_g \cdot m_G}{m_g + m_G} \right) \quad (3.76)$$

La force de frottement maximale  $\delta F_T^n$  à l'interface est calculée à l'aide de la loi de frottement retenue (loi de Coulomb, loi de Coulomb modifiée, loi de Tresca...), et s'exprime généralement en fonction de la force normale  $\underline{F}_N^n$  que nous avons déterminée lors de l'étape de gestion du contact. Elle dépend éventuellement de la vitesse relative de glissement libre  $[\mathbb{V}^*]^{n+1/2}$  (modèle de Coulomb modifié) ou bien encore de la limite élastique des matériaux  $\mathbb{Y}^n$ , que nous interpolons aux nœuds d'interface  $\underline{X}_g$  et  $\underline{X}_G$  (modèle de Tresca) :

— Loi de Coulomb :

$$\delta F_T^n = \mu_0 \cdot \delta F_N^n. \quad (3.77)$$

— Loi de Coulomb modifiée :

$$\begin{cases} \delta F_T^n = \mu \cdot \delta F_N^n, & (3.78) \\ \mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \cdot \exp\left(-\gamma \left| [\mathbb{V}^*]^{n+1/2} \right| \right). & (3.79) \end{cases}$$

Notons pour ce cas de figure, où  $\mu$  dépend de  $[\mathbb{V}]$ , que c'est généralement la vitesse relative de glissement libre  $[\mathbb{V}^*]^{n+1/2}$  qui est incorporée dans les modèles, et non la vitesse corrigée. Ce biais permet d'éviter d'avoir à résoudre une équation non-linéaire.

— Loi de Tresca :

$$\begin{cases} \delta F_T^n = \min \left( \mu \cdot \delta F_N^n, \mu_T \frac{\mathbb{Y}(\underline{X}_g)^n \cdot \mathcal{S}(\underline{X}_g)^n}{\sqrt{3}}, \mu_T \frac{\mathbb{Y}(\underline{X}_G)^n \cdot \mathcal{S}(\underline{X}_G)^n}{\sqrt{3}} \right), & (3.80) \\ \mu = \mu_T = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \cdot \exp\left(-\gamma \left| [\mathbb{V}^*]^{n+1/2} \right| \right). & (3.81) \end{cases}$$

Notons que  $\mathcal{S}(\underline{X}_g)^n$  et  $\mathcal{S}(\underline{X}_G)^n$  correspondent respectivement aux surfaces nodales des nœuds  $\underline{X}_g$  et  $\underline{X}_G$ .

Une fois que la force de frottement maximale  $\delta F_T^n$  a été déterminée, la correction finale sur les vitesses des nœuds d'interface est effectuée en calculant les dérivées sur les vitesses  $\delta \mathbb{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{t}$  et  $\delta \mathbb{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{t}$  par le biais des relations discrètes 3.82 et 3.83. Nous avons ainsi au nœud glissant  $\underline{X}_g$  et en son projeté  $\underline{X}_G$  :

$$\begin{cases} \delta \mathbb{V}(\underline{X}_g)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \frac{\min(\delta F_T^n, F_\star^n)}{m_g} \cdot \Delta T^n, & (3.82) \\ \delta \mathbb{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \frac{\min(\delta F_T^n, F_\star^n)}{m_G} \cdot \Delta T^n. & (3.83) \end{cases}$$

Pour les nœuds guides  $\underline{X}_0$  et  $\underline{X}_1$ , nous renvoyons finalement :

$$\begin{cases} \delta \mathbb{V}(\underline{X}_0)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = (1 - coef) \cdot \delta \mathbb{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{t}, & (3.84) \\ \delta \mathbb{V}(\underline{X}_1)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = (coef) \cdot \delta \mathbb{V}(\underline{X}_G)^{n+1/2} \cdot \underline{t}. & (3.85) \end{cases}$$

Cette démarche que nous venons d'écrire est répétée pour l'ensemble des nœuds  $\underline{X}_i$  appartenant à l'interface discrète. Par la suite, nous serons amenés à travailler en terme de contrainte normale  $F_N^n$  et tangentielle  $F_T^n$  que nous définissons par :

$$\begin{cases} F_N^n = \frac{\delta F_N(\underline{X}_i)^n}{\mathcal{S}(\underline{X}_i)^n}, & (3.86) \\ F_T^n = \frac{\delta F_T(\underline{X}_i)^n}{\mathcal{S}(\underline{X}_i)^n}, & (3.87) \end{cases}$$

où  $\mathcal{S}(\underline{X}_i)^n$  est la surface nodale du nœud d'interface  $\underline{X}_i$  considéré !

### 3.4 Recalage numérique des tirs expérimentaux réalisés au CEA/DAM

#### 3.4.1 Récapitulatif des expériences de tir

Afin d'éprouver les modèles de frottement implémentés dans le code de calcul que nous venons de décrire, plusieurs simulations ont été réalisées sur la base de tirs expérimentaux réalisés au CEA/DAM sur un couple Aluminium/Acier. Sur la figure 3.9 sont représentées les évolutions en fonction du temps des vitesses libres du guide en Acier, et du cône en Aluminium, pour différentes sollicitations.

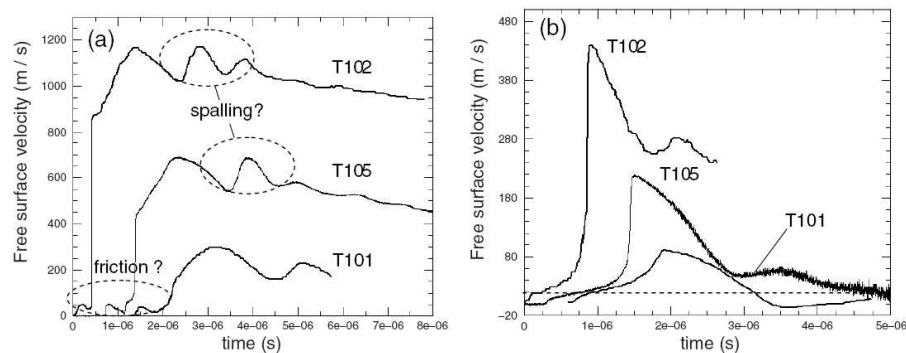


FIGURE 3.9 – Vitesses de surfaces libres mesurées lors d'un tir sur un couple Aluminium (cône)/ Acier (confinement) (voir [14]).

Les signaux de vitesses libres mesurés sur le cône central et le confinement présentent sensiblement les mêmes profils. Nous observons dans un premier temps l'arrivée d'un **précurseur élastique**. Cette étape est suivie d'une rampe de compression s'accompagnant d'une **brusque montée en vitesse**. Celle-ci atteint alors un point culminant avant de décroître (phase de détente).

#### 3.4.2 Interprétation des résultats par corrélations calculs/expériences

Pour recalcr numériquement ces signaux expérimentaux, tous les calculs ont été menés en géométrie bi-dimensionnelle axisymétrique, en considérant une configuration lagrangienne. La figure 3.10 illustre le maillage utilisé.

Afin d'éprouver les modèles de frottement, de premiers recalages ont été effectués en utilisant une loi de Coulomb simple (eq. 3.77) à coefficient de frottement  $\mu = \mu_0$  constant. Sur la figure 3.11 sont représentés les signaux numériques obtenus pour différentes valeurs du coefficient de frottement statique  $\mu_0$ . Comme nous pouvons le constater, aucun des cas ne permet de recalcr idéalement

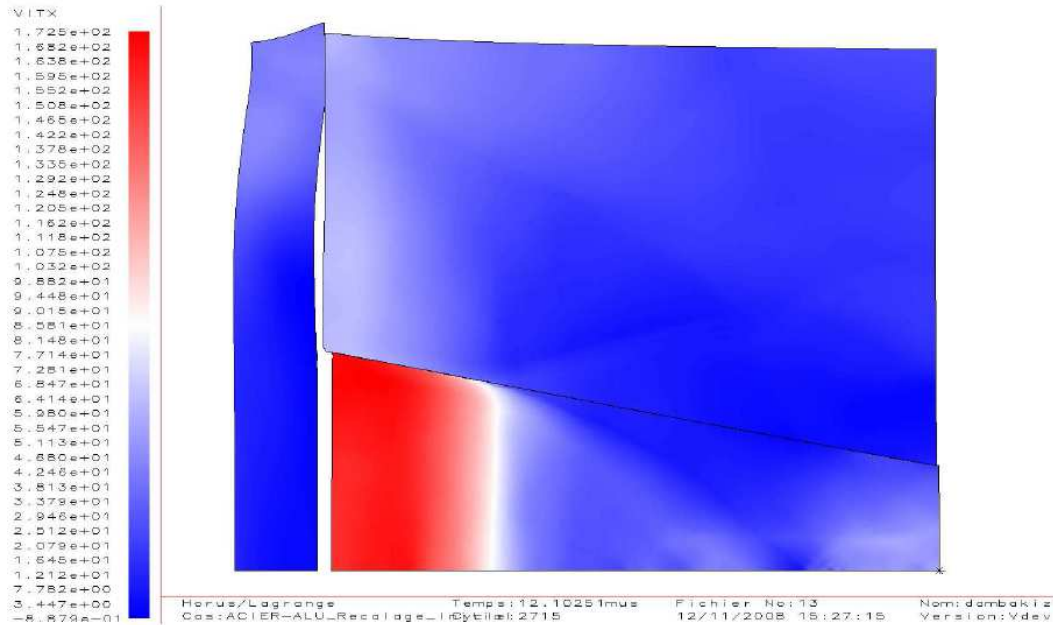


FIGURE 3.10 – Illustration de la géométrie axisymétrique utilisée pour étudier numériquement les expériences de tir réalisées au CEA/DAM.  $\Delta Z \sim 100\mu m$ ,  $\Delta T \sim 10ns$

le signal expérimental.

Le recalage à l'aide d'un modèle Coulomb-Tresca (eq. 3.80) conduit lui aussi à des résultats numériques non représentatifs des résultats expérimentaux et nécessite de fixer quatre paramètres ( $\mu_0, \mu_\infty, \gamma, \mu_T$ ). Ce modèle tient pourtant compte de l'état thermomécanique, puisqu'il exprime une dépendance de la force de frottement avec la limite élastique  $\Upsilon$ , elle-même fonction de la température  $\Theta$  et de la déformation plastique  $\bar{\mathbb{E}}_p$ . Se pose ainsi plusieurs interrogations liées à la pertinence des modèles de frottement utilisés, mais aussi à la *représentativité des coefficients de frottement*, l'ensemble des phénomènes physique étant dissimulé derrière ces coefficients.

### 3.4.3 Problématiques

#### Comment expliquer de tels écarts entre les signaux expérimentaux et les signaux numériques ?

Nous expliquons cet écart par une problématique double, à la fois physique et numérique. Ces expériences nous enseignent en effet que les lois de frottement classiques telle que la loi de Coulomb ne peuvent plus être appliquées dans le cas de frottements sous chocs. La loi de frottement privilégiée doit donc être une loi de type Coulomb-Tresca (eq. 3.80) prenant en compte les phénomènes thermomécaniques mis en jeu aux interfaces de glissement.

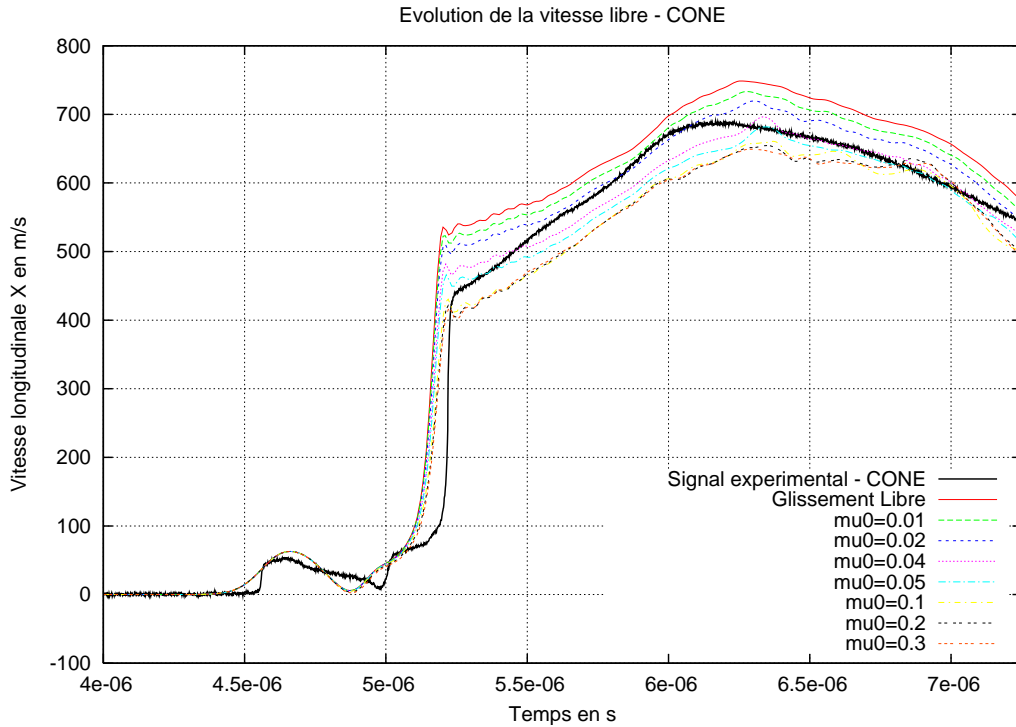


FIGURE 3.11 – Recalage numérique de la vitesse libre mesurée à la surface du cône en Aluminium à l'aide d'une loi de COULOMB simple (eq. 3.77) en utilisant différents coefficients de frottement statique  $\mu_0$ .

Cependant, l'usage d'une telle loi se heurte à **une seconde problématique d'ordre numérique** cette fois. En effet la discrétisation spatiale majoritairement utilisée dans les codes de calcul hydrodynamiques nous impose de calculer les grandeurs thermodynamiques telles que la limite élastique  $\Upsilon$ , la température  $\Theta$ , ou bien encore la déformation plastique cumulée  $\bar{\epsilon}_p$  au centre des mailles. Nous n'avons donc pas directement accès aux valeurs d'interface (voir figure 3.12).

Dès lors, les limites élastiques qui interviennent dans la loi de frottement de Tresca sont des valeurs calculées au centre des mailles et non aux nœuds. Compte-tenu de l'échelle des mailles d'interface ( $\sim 100\mu\text{m}$ ), nous ne tenons donc pas compte des mécanismes réellement mis en jeu au voisinage direct de l'interface ( $\sim 20\mu\text{m}$ ). Ce défaut de précision affecte fortement la dynamique du glissement. L'échelle des mailles utilisées ne permet donc pas de résoudre les phénomènes d'adoucissement thermique et d'érouissage mécanique observés localement.

La force de frottement calculée est donc faussée et ne permet pas de traiter nos applications spécifiques, où nous avons besoin de connaître avec précision la température et la déformation plastique aux interfaces de contact.

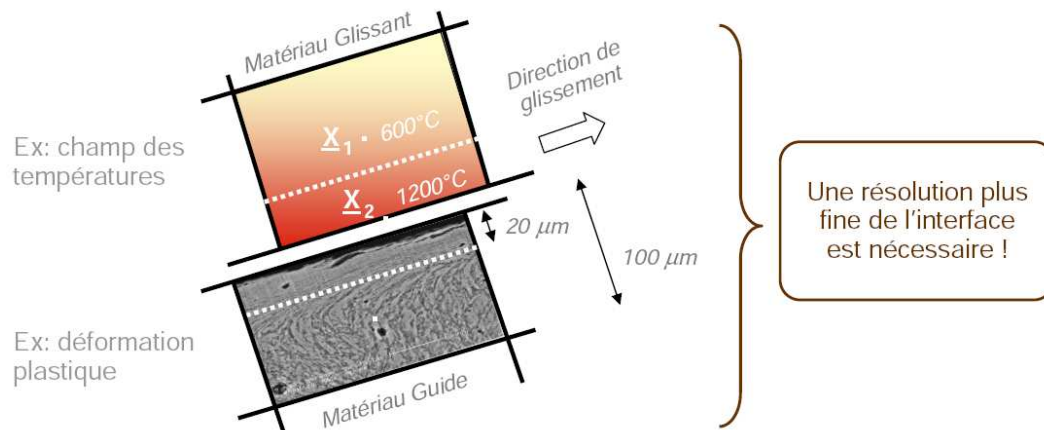


FIGURE 3.12 – Problématique numérique : l'échelle des mailles d'interface ( $\sim 100\mu\text{m}$ ) ne permet pas de prendre en compte les mécanismes réellement mis en jeu au voisinage direct de l'interface ( $\sim 20\mu\text{m}$ ).

## ■ Conclusion du chapitre

**N**ous retiendrons que les phénomènes thermomécaniques mis en jeu lors du glissement sous chocs d'interfaces métalliques se produisent sur une épaisseur micrométrique bien plus petite que les tailles des mailles classiquement utilisées par les codes de calcul. Ce défaut de précision aux échelles micrométriques affecte fortement la gestion numérique du frottement, et ne nous permet pas de restituer de façon optimale les signaux expérimentaux.



Deuxième partie

## **Modélisation multi-échelles**





## Introduction de la seconde partie

*If you face a formidable enemy, try to divide them and conquer one by one!*

---

d'après Suntszu, *The Art of War*

### ■ Problématiques liées à la modélisation des frottements sous chocs

La première partie de notre étude nous a permis de mettre en évidence l'importance des rôles joués par l'adoucissement thermique et l'écroûissage mécanique lors de la mise en glissement d'interfaces métalliques. L'extrême localisation de ces deux phénomènes se traduit par la présence d'une couche thermomécanique d'épaisseur micrométrique influant directement sur la dynamique globale du frottement.

Les études menées jusqu'ici font ressortir une problématique double. Nous distinguons ainsi :

- **une problématique physique** : les sollicitations auxquelles sont soumis les matériaux sont telles que l'usage des lois classiques de frottement (loi de Coulomb) ne permet plus de décrire le comportement aux interfaces de contact de manière adéquate.
- **une problématique numérique** : l'échelle des mailles d'interface ( $\sim 100\mu\text{m}$ ) classiquement utilisées dans les codes hydrodynamiques ne permet pas de capter les mécanismes thermo-mécaniques réellement mis en jeu aux échelles micrométriques ( $\sim 20\mu\text{m}$ ).

Pour y répondre, nous proposons dans cette seconde partie une stratégie permettant d'améliorer la gestion numérique des frottements sous chocs dans les codes hydrodynamiques.

Nous élaborons et présentons un nouveau modèle de frottement spécialement conçu pour traiter les frottements sous chocs. Il sera par la suite implémenté au sein d'un code hydrodynamique et devra permettre le recalage des tirs expérimentaux passés ou à venir.

Comme nous allons le voir, plusieurs approches sont possibles. Pour faciliter ce choix, nous devons satisfaire un cahier des charges précis.

## ■ Le cahier des charges et les exigences de modélisation

Le modèle que nous nous proposons de développer doit répondre à certaines exigences, aussi bien physiques que numériques :

- **Exigences physiques :**

Il doit tout d'abord permettre une résolution plus fine du comportement thermomécanique aux interfaces de glissement, afin de prendre en compte la physique réellement mise en jeu. Idéalement, nous limiterons le nombre de paramètres du modèle.

- **Exigences numériques :**

D'un point de vue numérique, ce modèle devra être robuste et facilement implémentable au sein d'un code de calcul hydrodynamique. Pour cela il devra être peu coûteux en temps de calcul ainsi qu'en espace de stockage.

## ■ Les méthodes de résolution envisageables

Pour améliorer la gestion numérique des frottements sous chocs dans les codes hydrodynamique, plusieurs approches sont possibles :

### Améliorer le modèle de frottement :

En réponse à la problématique physique, la première méthode consiste à développer un modèle de frottement moyen permettant de prendre en compte chacun des phénomènes mis en jeu aux interfaces de glissement, sans avoir à résoudre le problème à l'échelle micrométrique. Une telle loi de frottement s'écrit alors sous la forme suivante :

$$F_T = \mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \cdot F_N. \quad (3.88)$$

où les paramètres  $\alpha$  sont des valeurs caractérisant le comportement à l'interface, généralement obtenus par recalage de résultats expérimentaux.

Nous retiendrons que cette option a notamment été retenue par Lardy B. et Juanicotena A. afin de prendre en compte la composante thermique des frottements dynamiques. Ils aboutissent à un modèle simple permettant d'exprimer l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la température de contact aux interfaces.

$$\mu(\Theta) = \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \exp\left(\frac{\Theta_S - \Theta_A}{A}\right)} + \mu_\infty. \quad (3.89)$$

où  $\Theta_S$  dénote la température de surface, déterminée à l'aide d'une loi empirique, et où  $\Theta_A, A$  sont des paramètres à fixer par recalage. Les coefficients  $\mu_0$  et  $\mu_i nfty$  correspondent respectivement aux coefficients de frottement statique et dynamique rencontré dans la loi de Coulomb modifiée, et que nous devons également déterminer.

D'autres modèles de frottement existent et expriment le coefficient de frottement  $\mu$  comme une fonction de plusieurs paramètres caractérisant l'interface, tels que la rugosité des surfaces en contact, la température d'interface, la proportion de jonction ou d'aspérités.

Bien qu'elle soit relativement simple à mettre en œuvre, cette méthode nécessite de fixer un grand nombre de paramètres, généralement obtenus par recalage numérique de signaux expérimentaux. Là n'est pas notre objectif, puisque nous souhaitons au contraire disposer d'un modèle de frottement nécessitant un faible nombre de paramètres, et par conséquent d'essais expérimentaux.

### **Améliorer la méthode de résolution numérique :**

La seconde méthode à notre disposition consiste à jouer uniquement sur la méthode de résolution numérique, tout en conservant une loi de frottement simple à l'échelle la plus fine du calcul. Deux choix s'offrent à nous :

- **Raffiner le maillage à l'interface**

Intuitivement, on s'attend à ce que la solution numérique approche de mieux en mieux la solution exacte, quand le nombre de nœuds du maillage augmente. Cette méthode, en apparence la plus simple à mettre en œuvre peut néanmoins s'avérer extrêmement coûteuse en terme de coût de calcul. Comme nous avons eu l'occasion de l'évoquer au cours du chapitre 3, la majorité des codes hydrodynamiques utilisés s'articulent autour de schémas explicites (c'est notamment le cas du schéma de Wilkins). La convergence des résultats n'est alors possible que si les conditions de stabilité sont garanties (voir p. 93). Dès lors, et d'après l'équation (eq. 3.33, pp. 93) une diminution du pas d'espace (donc de la longueur caractéristique des éléments) implique nécessairement une diminution du pas de temps et par conséquent l'augmentation drastique du temps de calcul !

- **Utiliser un modèle de sous-maille**

Pour remédier au problème de localisation, nous nous proposons d'utiliser une approche plus élégante, qui consiste à mettre en œuvre un modèle de sous-mailles.

Zavarise a recours à cette technique (voir figure 3.13) pour étudier les phénomènes thermiques associés au frottement lors d'impacts et de perforations à grande vitesse (voir [44]).

Cette option implique une **approche multi-échelles**. Elle nécessite ici :

- une première étape de décomposition de la structure étudiée en une partie locale proche de l'interface et une partie globale à l'échelle de la structure,
- une modélisation des phénomènes mis en jeu dans chacun des domaines, ce qui nous permet de découpler le problème local,
- des conditions de couplage entre le problème microscopique (échelle locale) et le problème macroscopique (échelle globale).

C'est l'option que nous avons retenue pour cette thèse, et que nous nous proposons de détailler au cours des chapitres à venir.

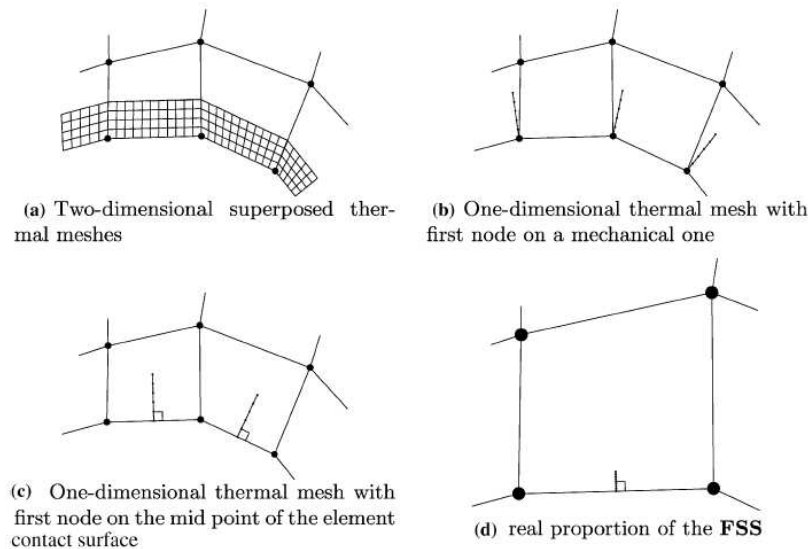


FIGURE 3.13 – Stratégie de résolution proposée par ZAVARISE pour résoudre le problème thermomécanique (voir [44]).

## ■ Le plan de cette seconde partie

Pour faciliter cette démarche, la stratégie de modélisation que nous nous proposons d'employer est décrite au cours des trois prochains chapitres :

- **Le premier chapitre de cette deuxième partie** (pp. 119 à 135) est consacré à la modélisation multi-échelles de l'interface par décomposition de domaine. Ceci nous permet de modéliser la couche de matière jouxtant l'interface comme une couche limite. Nous récapitulons alors le système d'équations gouvernant le problème multi-échelles.
- Dans le **second chapitre de cette deuxième partie** (pp. 139 à 166) nous procédons à la simplification du problème en couche limite par **analyse dimensionnelle** et **analyse asymptotique**. Cette étape va notamment nous permettre de déterminer les différentes grandeurs et échelles caractéristiques du problème.
- Finalement, **le troisième chapitre de cette deuxième partie** (pp. 169 à 180) est dédié à **l'analyse de stabilité linéaire** du problème en couche limite.





## Approche multi-échelles par décomposition de domaines

### ■ Introduction du chapitre

**A** fin de prendre en compte l'ensemble des phénomènes observés aux interfaces métalliques sollicitées par choc, nous introduisons dans ce chapitre un problème multi-échelles couplant :

- un **problème en champ proche** permettant de décrire le comportement observé dans la couche de matière d'épaisseur micrométrique située au voisinage de l'interface, siège de forts gradients thermiques et mécaniques.
- un **problème en champ lointain** permettant de décrire le comportement à l'échelle macroscopique de la structure loin de l'interface de glissement.

Pour cela, notre stratégie repose sur une **approche par décomposition de domaines** :

- Dans la première section (pp. 120 à 121), nous définissons deux sous-domaines  $\Omega_\mu$  et  $\Omega_M$  respectivement associés au problème en champ proche et au problème en champ lointain.
- Nous récapitulons dans un second temps (pp. 121 à 134) les systèmes d'équations gouvernant chacun des deux problèmes ainsi que les conditions de couplage permettant de les relier entre eux.
- Finalement, nous écrivons un problème en écart (pp. 134 à 135) permettant d'évaluer les variations de comportement observées localement entre notre problème multi-échelles et un modèle macroscopique simplifié négligeant la diffusion thermique.



## 4.1 Construction de la géométrie multi-échelles par décomposition de domaine

Afin d'écrire notre problème multi-échelles, nous décomposons dans un premier temps le domaine  $\Omega(T)$  d'épaisseur caractéristique  $L$  en deux sous-domaines  $\Omega_\mu(T)$  et  $\Omega_M(T)$  :

- **le domaine**  $\Omega_\mu(\mathbf{T}) \subset \Omega(\mathbf{T})$  modélise le voisinage direct de l'interface de contact potentiel  $\Gamma_C(T)$ . Son épaisseur caractéristique  $h_\varepsilon$  est d'ordre micrométrique et nous avons  $h_\varepsilon \ll \Delta Z < L$ , où  $\Delta Z$  est la dimension caractéristique d'une maille de calcul. Nous notons  $\Gamma_\mu(T)$  sa frontière et  $\underline{n}_\mu$  la normale unitaire sortante. Ce domaine modélise la couche de matière affectée thermomécaniquement par le frottement et nous y observons de forts gradients de température et de déformation plastique.
- **le domaine**  $\Omega_M(\mathbf{T}) \subset \Omega(\mathbf{T})$ , d'épaisseur caractéristique  $(L - h_\varepsilon)$  permet quant à lui de modéliser le comportement de la matière loin de l'interface de glissement. Nous notons  $\Gamma_M(T)$  sa frontière et  $\underline{n}_M(\underline{X}, T)$  la normale unitaire sortante  $\forall \underline{X} \in \Gamma_M(T)$ . Les gradients de température et de déformation plastique observés y sont nettement plus faibles que dans  $\Omega_\mu(T)$ .

Comme nous l'illustrons sur la figure 4.1 p. 121, nous supposons finalement que les deux domaines se raccordent en une zone intermédiaire modélisée par l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$  de normale unitaire  $\underline{n}_\varepsilon$ . Nous notons  $\underline{V}_\varepsilon$  la vitesse de cette interface et imposons par la suite qu'il ne peut pas y avoir de décohésion entre les domaines  $\Omega_\mu(T)$  et  $\Omega_M(T)$  de sorte que,

$$\Omega(T) = \Omega_\mu(T) \cup \Omega_M(T). \quad (4.1)$$

Dans l'optique d'une symétrisation du problème, précisons que le domaine  $\Omega_\mu(T)$  comprend l'interface de contact potentiel  $\Gamma_C(T)$  et nous avons,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_C(T) \subset \Omega_\mu(T), \\ \Omega_\mu(T) = \Omega_{\mu,1}(T) \cup \Omega_{\mu,2}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$$\left. \right\} \quad (4.3)$$

- La frontière  $\Gamma_M(T)$  délimitant le domaine  $\Omega_M(T)$  inclue :
  - une frontière  $\Gamma_U(T)$  de normale  $\underline{n}_U$ , où nous appliquons une condition cinématique initiale permettant de modéliser le choc,
  - une frontière  $\Gamma_\Sigma(T)$  de normale  $\underline{n}_\Sigma$ , où nous appliquons une condition de bord libre,
  - la frontière  $\Gamma_\varepsilon(T)$  de normale  $\underline{n}_\varepsilon$ , qui délimite les domaines  $\Omega_\mu(T)$  et  $\Omega_M(T)$ .
- La frontière  $\Gamma_\mu(T)$  délimitant le domaine  $\Omega_\mu(T)$  inclue quant à elle :
  - une frontière  $\Gamma_u(T)$  de normale  $\underline{n}_u$ , où nous appliquons une condition cinématique initiale permettant de modéliser le choc,
  - une frontière  $\Gamma_\sigma(T)$  de normale  $\underline{n}_\sigma$ , où nous appliquons une condition de bord libre,
  - la frontière  $\Gamma_\varepsilon(T)$  de normale  $\underline{n}_\varepsilon$ , qui délimite les domaines  $\Omega_\mu(T)$  et  $\Omega_M(T)$ ,
  - l'interface de contact potentiel  $\Gamma_C(T)$  de normale  $\underline{n}_C$ .

Suite à cette décomposition de domaine l'interface peut ainsi être considérée comme un corps à part entière dont les propriétés diffèrent sensiblement des deux matériaux en contact.

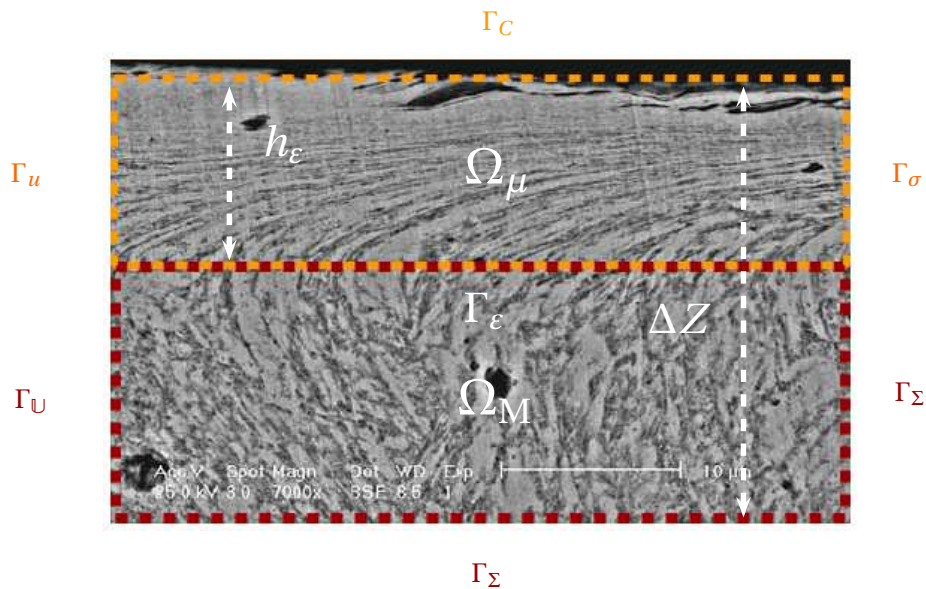


FIGURE 4.1 – Construction de la géométrie multi-échelles par décomposition de domaine : nous définissons une couche limite  $\Omega_\mu(T)$  localisée au voisinage de l'interface de contact potentiel  $\Gamma_C(T)$ , ainsi qu'un domaine  $\Omega_M(T)$ . Ils vont nous permettre de modéliser le comportement respectivement observé aux échelles micrométriques et macrométriques

## 4.2 Le problème couplé de référence

Nous nous proposons maintenant de réécrire le problème d'évolution thermomécanique introduit au chapitre 2 (voir pp. 74 à 77), en considérant cette fois-ci les deux domaines  $\Omega_M$  et  $\Omega_\mu$  que nous venons de définir. Il s'agit dans notre cas d'écrire :

- un **problème macroscopique**, gouverné par un système d'équations définies sur  $\Omega_M$  et qui permet de décrire le comportement de la matière loin de l'interface, à l'échelle macroscopique de la structure.
- un **problème local**, gouverné par un système d'équations définies dans  $\Omega_\mu$  et qui permet de décrire le comportement au voisinage de l'interface de glissement, à l'échelle micrométrique.
- des **conditions de couplage**, que nous définissons sur la frontière  $\Gamma_\varepsilon$ , et qui vont nous permettre de relier les deux problèmes entre eux.

Comme nous le verrons au cours de la troisième partie, chaque problème sera discrétisé de manière indépendante. Le problème couplé est ensuite résolu par un algorithme itératif qui fait successivement appel au solveur local et au solveur global.

Par la suite, différentes notations sont utilisées afin de distinguer le problème macroscopique dans  $\Omega_M$  du problème microscopique dans  $\Omega_\mu$ . Nous les récapitulons dans le tableau 4.1.

	<b>Problème macroscopique</b> Notation dans $\Omega_M$	<b>Problème local</b> Notation dans $\Omega_\mu$
Vecteur position	$\underline{X} = (X, Y, Z)$	$\underline{x} = (x, y, z)$
Vecteur vitesse	$\underline{V}(\underline{X}, T)$	$\underline{v}(\underline{x}, t)$
Tenseur des contraintes	$\underline{\Sigma}(\underline{X}, T)$	$\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$
Tenseur déviateur des contraintes	$\underline{\mathbb{S}}(\underline{X}, T)$	$\underline{s}(\underline{x}, t)$
Composante tangentielle	$\mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T)$	$\tau_{xz}(\underline{x}, t)$
Contrainte équivalente	$\Sigma_{\text{eq}}(\underline{X}, T)$	$\sigma_{\text{eq}}(\underline{x}, t)$
Effort tangent	$F_T = \underline{t} \cdot \underline{\Sigma}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C$	$f_T = \underline{t} \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_C$
Effort normal	$F_N = \underline{n}_C \cdot \underline{\Sigma}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_C$	$f_T = \underline{n}_C \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_C$
Pression hydrostatique	$\mathbb{P}(\underline{X}, T)$	$P(\underline{x}, t)$
Tenseur des taux de déformations	$\underline{\mathbb{D}}(\underline{X}, T)$	$\underline{d}(\underline{x}, t)$
Tenseur des taux de déformations élastique	$\underline{\mathbb{D}}_{\text{el}}(\underline{X}, T)$	$\underline{d}_{\text{el}}(\underline{x}, t)$
Tenseur des taux de déformations plastique	$\underline{\mathbb{D}}_{\text{p}}(\underline{X}, T)$	$\underline{d}_{\text{p}}(\underline{x}, t)$
Fonction critère de plasticité	$\Phi(\underline{X}, T)$	$\phi(\underline{x}, t)$
Limite élastique	$\Upsilon(\underline{X}, T)$	$Y(\underline{x}, t)$
Vitesse de déformation plastique	$\dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T)$	$\dot{\varepsilon}_p(\underline{x}(M), t)$
Déformation plastique cumulée	$\mathbb{E}_p(M, T)$	$\bar{\varepsilon}_p(M, T)$
Densité d'énergie interne partielle <sup>1</sup>	$e_M(\underline{X}, T)$	$e_\mu(\underline{x}, t)$
Température	$\Theta(\underline{X}, T)$	$\theta(\underline{x}, t)$
Vecteur flux de chaleur	$\overset{\circ}{\mathbb{Q}}(\underline{X}, T)$	$\overset{\circ}{q}(\underline{x}, t)$
Densité	$\rho_M(\underline{X}, T)$	$\rho_\mu(\underline{x}, t)$
Conductivité thermique	$\kappa_M(\underline{X}, T)$	$\kappa_\mu(\underline{x}, t)$

TABLE 4.1 – Notations utilisées pour distinguer le problème global du problème local

#### 4.2.1 Le problème global dans $\Omega_M(T)$ , loin de l'interface de glissement

Les équations considérées dans  $\Omega_M(T)$  sont identiques à celles introduites au chapitre 2, pages 74 à 77. Nous négligeons cependant la conduction pour des raisons d'ordre de grandeur et nous avons,

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}}(\underline{X}, T) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_M(T). \quad (4.4)$$

1. Les densités d'énergie internes  $e_\mu$  et  $e_M$  négligent la densité d'énergie de déformation élastique par cisaillement. Nous les notons  $e_{\text{el},\mu} = \underline{s} : \underline{\mathbb{D}}_{\text{el}}$  et  $e_{\text{el},M} = \underline{\mathbb{S}} : \underline{\mathbb{D}}_{\text{el}}$  dans  $\Omega_\mu$ .

Dès lors, la loi de Fourier (eq. 2.133) ainsi que la condition de flux thermique nul (eq. 2.159) ne sont pas prise en compte. Les équations restantes sont donc dans le cadre d'une approximation bidimensionnelle :

- **Lois de conservations dans  $\Omega_M(T)$  :**

— Conservation de la masse (Équation de continuité) :

$$\frac{d\rho_M(\underline{X}, T)}{dT} + \rho_M(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{V}(\underline{X}, T)) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_M(T). \quad (4.5)$$

— Conservation de la quantité de mouvement dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Sigma_{XX}(\underline{X}, T)}{\partial X} + \frac{\partial \mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T)}{\partial Z} = \rho_M(\underline{X}, T) \cdot \frac{\partial V_X(\underline{X}, T)}{\partial T}, \\ \frac{\partial \mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T)}{\partial X} + \frac{\partial \Sigma_{ZZ}(\underline{X}, T)}{\partial Z} = \rho_M(\underline{X}, T) \cdot \frac{\partial V_Z(\underline{X}, T)}{\partial T}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

— Conservation de l'énergie interne :

$$\rho_M(\underline{X}, T) \frac{de_M(\underline{X}, T)}{dT} - \Sigma_{\text{eq}} \cdot \dot{\epsilon}_p(\underline{X}(M), T) + \mathbb{P}(\underline{X}, T) \cdot \text{div}(\underline{V}(\underline{X}, T)) = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_M(T). \quad (4.8)$$

- **Lois constitutives de la plasticité dans  $\Omega_M(T)$  :**

— Partition du tenseur des contraintes dans  $\Omega_M(T)$ ,  $\underline{\Sigma}(\underline{X}, T) = \underline{\mathbb{S}}(\underline{X}, T) - \mathbb{P}(\underline{X}, T) \underline{\mathbb{1}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_{XX}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3} \Sigma_{XX} - \frac{1}{3} \Sigma_{YY} - \frac{1}{3} \Sigma_{ZZ}, \\ \mathbb{S}_{YY}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3} \Sigma_{YY} - \frac{1}{3} \Sigma_{XX} - \frac{1}{3} \Sigma_{ZZ}, \\ \mathbb{S}_{ZZ}(\underline{X}, T) = \frac{2}{3} \Sigma_{ZZ} - \frac{1}{3} \Sigma_{XX} - \frac{1}{3} \Sigma_{YY}, \\ \mathbb{T}_{XZ}(\underline{X}, T) = \Sigma_{XZ}, \\ \mathbb{P}(\underline{X}, T) = -\frac{1}{3} (\Sigma_{XX} + \Sigma_{YY} + \Sigma_{ZZ}). \end{array} \right. \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

$$(4.11)$$

$$(4.12)$$

$$(4.13)$$

— Équation d'état en pression :

$$\mathbb{P}(\underline{X}, T) = \mathbf{P}(\rho_M(\underline{X}, T), e_M(\underline{X}, T)), \forall \underline{X} \in \Omega_M(T). \quad (4.14)$$

— Loi de comportement élastoplastique en grandes déformations dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\dot{\mathbb{S}}_{XX} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} - \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{XX}}{\Sigma_{eq}}, \quad (4.15)$$

$$\dot{\mathbb{S}}_{YY} = -2G_0 \cdot \left( \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{YY}}{\Sigma_{eq}}, \quad (4.16)$$

$$\dot{\mathbb{S}}_{ZZ} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial Z} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial X} \right) - \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{S}_{ZZ}}{\Sigma_{eq}}, \quad (4.17)$$

$$\dot{\mathbb{T}}_{XZ} = 2G_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - \left( \frac{\mathbb{S}_{XX} - \mathbb{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial Z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial X} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\mathbb{E}}_p \frac{\mathbb{T}_{XZ}}{\Sigma_{eq}}. \quad (4.18)$$

— Critère de plasticité de Von Mises dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\Phi(\underline{X}, T) = \Sigma_{eq}(\underline{X}, T) - \Upsilon(\underline{X}, T), \quad \forall \underline{X} \in \Omega_M(T). \quad (4.19)$$

— Contrainte équivalente de Von Mises dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\Sigma_{eq}(\underline{X}, T) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T) \right\| = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\underline{\mathbb{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{S}}})}, \quad \forall \underline{X} \in \Omega_M(T). \quad (4.20)$$

— Loi d'écoulement plastique dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\underline{X}(M), T) = \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\mathbb{S}}}(\underline{X}, T)}{\Sigma_{eq}(\underline{X}, T)}. \quad (4.21)$$

— Modèle rhéologique dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\Upsilon(\underline{X}, T) = \mathcal{F}(\Theta, \mathbb{P}, \bar{\mathbb{E}}_p, \dot{\mathbb{E}}_p, \dots). \quad (4.22)$$

— Conditions de consistance / persistance dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \cdot \Phi(\underline{X}, T) = 0, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \cdot \dot{\Phi}(\underline{X}, T) = 0, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T) \geq 0, \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\underline{X}, T) \leq 0. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

— Déformation plastique cumulée dans  $\Omega_M(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbb{E}}_p(M, T + \Delta T) = \bar{\mathbb{E}}_p(M, T) + \int_T^{T+\Delta T} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) dT, \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p(\underline{X}(M), T) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{\mathbb{D}}}_p(\underline{X}, T) \right\|. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

- **Condition de régularité dans  $\Omega_M(T)$ ,  $\forall T > 0$**

$$\underline{\underline{V}}(\underline{X}, T) \in \mathcal{H}^1(\Omega_M(T)), \forall T > 0. \quad (4.29)$$

- **Conditions initiales**

— Valeurs initiales des champs thermomécaniques dans  $\Omega_M(0)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\underline{E}}_p(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\underline{V}}(\underline{X}, 0) = 0, \\ \underline{\underline{V}}(\underline{X}, 0) = \underline{\underline{V}}_0, \forall \underline{X} \in \Gamma_U(0). \\ \Theta(\underline{X}, 0) = \Theta_0, \\ \rho_M(\underline{X}, 0) = \rho_0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.30) \\ (4.31) \\ (4.32) \\ (4.33) \\ (4.34) \\ (4.35) \end{array}$$

- **Conditions aux limites sur  $\Gamma_M(T) \cup \Gamma_U(T)$**

— Condition de bord libre sur  $\Gamma_\Sigma(T) \cup \Gamma_U(T)$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, T) \cdot \underline{n}_\Sigma = 0, \forall \underline{X} \in \Gamma_\Sigma(T) \cup \Gamma_U(T). \quad (4.36)$$

## 4.2.2 Modélisations classiques des interfaces de glissement

Nous nous proposons maintenant d'écrire le problème local au sein du domaine  $\Omega_\mu(T)$ . Se pose alors la question suivante :

### Comment décrire le comportement du matériau à l'interface ?

En effet, nous ne disposons pas d'informations suffisantes pour décrire fidèlement ce qu'il se passe réellement au voisinage d'une interface de glissement, le comportement observé étant difficilement accessible expérimentalement. L'une des principales interrogations réside donc dans le choix d'un modèle rhéologique local permettant de modéliser le comportement de la surface de glissement et de la sous-couche environnante. Idéalement, il doit prendre en compte les comportements suivants :

- **comportement purement visqueux** induit par les températures élevées et les déformations intenses dans cette zone. Nous pourrions par exemple modéliser la matière comme un fluide visqueux pour rendre compte du comportement aux très hautes températures. C'est notamment la démarche entreprise par Prakash et al. (voir [49, 50]) qui modélisent l'interface comme un fluide de Bingham.

- **comportement plastique** dans les zones fortement cisailées.
- **comportement élastique** dans les zones les plus éloignées de l'interface de glissement, où les températures et les déformations sont beaucoup moins importantes.

Malheureusement, une telle loi de comportement unifiée n'existe pas ce jour ! Aussi, et pour simplifier notre approche, **nous décidons d'utiliser localement les mêmes modèles constitutifs que ceux introduits à l'échelle de la structure** (eqs. 2.124 à 2.169). En revanche, nous tenons cette fois-ci compte de la conduction thermique qui était jusqu'ici négligée à l'échelle macroscopique (eq. 4.4, p. 122).

### 4.2.3 Le problème thermomécanique local dans $\Omega_\mu$

Le problème décrivant le comportement de la couche limite  $\Omega_\mu$  s'écrit :

- **Lois de conservations**  $\forall \underline{x} \in \Omega_\mu$  :

— Conservation de la masse (équation de continuité) :

$$\frac{d\rho_\mu(\underline{x}, t)}{dt} + \rho_\mu(\underline{x}, t) \cdot \text{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_\mu. \quad (4.37)$$

— Conservation de la quantité de mouvement  $\forall \underline{x} \in \Omega_\mu$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}(\underline{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}(\underline{x}, t)}{\partial z} = \rho_\mu(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial v_x(\underline{x}, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}(\underline{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}(\underline{x}, t)}{\partial z} = \rho_\mu(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial v_z(\underline{x}, t)}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

$$\quad (4.39)$$

— Conservation de l'énergie interne :

$$\rho_\mu(\underline{x}, t) \frac{de_\mu(\underline{x}, t)}{dt} - \sigma_{\text{eq}}(\underline{x}, t) \cdot \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}, t) + P(\underline{x}, t) \text{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) + \text{div}(\overset{\circ}{\underline{q}}(\underline{x}, t)) = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_\mu. \quad (4.40)$$

Comme nous souhaitons évaluer le champ des températures au voisinage de l'interface, nous considérons une forme équivalente (eq. 4.41) que nous obtenons après substitution du flux de chaleur  $\overset{\circ}{\underline{q}}(\underline{x}, t)$  par la loi de Fourier (eq. 2.133) :

$$\rho_\mu(\underline{x}, t) \frac{de_\mu(\underline{x}, t)}{dt} - \sigma_{\text{eq}}(\underline{x}, t) \cdot \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}, t) + P(\underline{x}, t) \text{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) - \text{div}\{\kappa_\mu(\underline{x}, t) \cdot \text{grad}(\theta(\underline{x}, t))\} = 0. \quad (4.41)$$

- **Lois constitutives de la thermique dans  $\Omega_\mu$  :**

— Équation d'état en température :

$$e_\mu(\underline{x}, t) = \mathbf{e}(P(\underline{x}, t), \theta(\underline{x}, t)), \forall \underline{x} \in \Omega_\mu. \quad (4.42)$$

• **Lois constitutives de la plasticité dans  $\Omega_\mu$  :**

— Partition du tenseur des contraintes dans  $\Omega_\mu(T)$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{s}}(\underline{x}, t) - P(\underline{x}, t)\underline{\underline{1}}$  :

$$\begin{cases} s_{xx}(\underline{x}, t) = \frac{2}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy} - \frac{1}{3}\sigma_{zz}, & (4.43) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{yy}(\underline{x}, t) = \frac{2}{3}\sigma_{yy} - \frac{1}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{zz}, & (4.44) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{zz}(\underline{x}, t) = \frac{2}{3}\sigma_{zz} - \frac{1}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy}, & (4.45) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xz}(\underline{x}, t) = \sigma_{xz}, & (4.46) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). & (4.47) \end{cases}$$

— Équation d'état en pression dans  $\Omega_\mu$  :

$$P(\underline{x}, t) = P(\rho_\mu(\underline{x}, t), e_\mu(\underline{x}, t)), \forall \underline{x} \in \Omega_\mu. \quad (4.48)$$

— Loi de comportement élastoplastique en grandes déformations dans  $\Omega_\mu$  :

$$\begin{cases} \dot{s}_{xx} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \tau_{xz} \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\epsilon}_p \frac{s_{xx}}{\sigma_{eq}}, & (4.49) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{s}_{yy} = -2G_0 \cdot \left( \frac{1}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\epsilon}_p \frac{s_{yy}}{\sigma_{eq}}, & (4.50) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{s}_{zz} = 2G_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \tau_{xz} \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\epsilon}_p \frac{s_{zz}}{\sigma_{eq}}, & (4.51) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tau}_{xz} = 2G_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \left( \frac{s_{xx} - s_{zz}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - 3G_0 \cdot \dot{\epsilon}_p \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{eq}}. & (4.52) \end{cases}$$

— Critère de plasticité de Von Mises dans  $\Omega_\mu$  :

$$\phi(\underline{x}, t) = \sigma_{eq}(\underline{x}, t) - Y(\underline{x}, t), \forall \underline{x} \in \Omega_\mu. \quad (4.53)$$

— Contrainte équivalente de Von Mises dans  $\Omega_\mu$  :

$$\sigma_{eq}(\underline{x}, t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \underline{\underline{s}}(\underline{x}, t) \right\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Tr}(\underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{s}}), \forall \underline{x} \in \Omega_\mu. \quad (4.54)$$

— Loi d'écoulement plastique dans  $\Omega_\mu$  :

$$\underline{\underline{d}}_p(\underline{x}(M), t) = \dot{\epsilon}_p(\underline{x}, t) \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}(\underline{x}, t)}{\sigma_{eq}(\underline{x}, t)}. \quad (4.55)$$



— Modèle rhéologique local dans  $\Omega_\mu$  :

Pour modéliser l'évolution en couche limite de la contrainte d'écoulement  $Y(\underline{x}, t)$ , nous considérons le modèle rhéologique SCG introduit au cours du Chapitre 2 (voir eqs. 2.35 et 2.36 pp. 56).

La limite élastique  $Y(\underline{x}, t)$  est alors définie comme une fonction de la température locale  $\theta(\underline{x}, t)$ , de la déformation plastique cumulée en couche limite  $\bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, t)$  et de la pression hydrostatique  $P(\underline{x}, t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(\underline{x}, t) = \min(Y_{\max}, Y_0 [1 + \beta \cdot \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, t)]^\eta) \cdot \frac{G(\underline{x}, t)}{G_0}, \\ G(\underline{x}, t) = G_0 (1 + gP(\underline{x}, t) - h_\Theta(\theta(\underline{x}, t) - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta(\underline{x}, t)}{\Theta_F - \theta(\underline{x}, t)}\right). \end{array} \right. \quad (4.56)$$

$$(4.57)$$

Pour rappel, dans l'équation (eq. 4.56),  $Y_0$  est la limite élastique initiale, tandis que  $Y_{\max}$  représente la contrainte de saturation. Les coefficients  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $g$ , et  $h_\Theta$  sont quant à eux des paramètres du modèle SCG, propres au matériau considéré.

Le terme  $G(\underline{x}, t)$  représente le coefficient de cisaillement SCG. Le terme exponentiel intervenant dans son expression est introduit afin de prendre en compte l'adoucissement thermique proche de la température de fusion  $\Theta_F$  (voir [12]). Il dépend du coefficient  $\xi$  que G.Ball, R.Winter et al. fixe à 0.001. Dans le cas où  $\xi = 0$ , nous retrouvons la formulation originelle introduite par Steinberg, Cochran et Guinan (voir [59]).

Comme nous venons de l'évoquer, la limite élastique  $Y(\underline{x}, t)$  est une fonction de trois paramètres. Partant de ce constat, nous pouvons dès lors définir trois modules :

$$Y_{\bar{\varepsilon}_p}(\underline{x}, t) = \frac{\partial Y(\underline{x}, t)}{\partial \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, t)}, \quad Y_\theta(\underline{x}, t) = \frac{\partial Y(\underline{x}, t)}{\partial \theta(\underline{x}, t)}, \quad \text{et} \quad Y_P(\underline{x}, t) = \frac{\partial Y(\underline{x}, t)}{\partial P(\underline{x}, t)}. \quad (4.58)$$

Ces modules vont notamment nous permettre de quantifier la compétition observée localement entre les phénomènes d'écrouissage mécanique (caractérisé par  $Y_{\bar{\varepsilon}_p}(\underline{x}, t)$ ) et d'adoucissement thermique (caractérisé par  $Y_\theta(\underline{x}, t)$ ).

— Conditions de consistance / persistance,  $\forall \underline{x} \in \Omega_\mu(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}, t) \cdot \phi(\underline{x}, t) = 0, \\ \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}, t) \cdot \dot{\phi}(\underline{x}, t) = 0, \\ \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}, t) \geq 0, \\ \phi(\underline{x}, t) \leq 0. \end{array} \right. \quad (4.59)$$

$$(4.60)$$

$$(4.61)$$

$$(4.62)$$

— Déformation plastique cumulée ,  $\forall \underline{x} \in \Omega_\mu(T)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p(M, T + \Delta T) = \bar{\varepsilon}_p(M, T) + \int_T^{T+\Delta T} \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}(M), T) dT, \\ \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}(M), T) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{d}_{\equiv p}(\underline{x}, t) \right\|. \end{array} \right. \quad (4.63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p(M, T + \Delta T) = \bar{\varepsilon}_p(M, T) + \int_T^{T+\Delta T} \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}(M), T) dT, \\ \dot{\varepsilon}_p(\underline{x}(M), T) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{d}_{\equiv p}(\underline{x}, t) \right\|. \end{array} \right. \quad (4.64)$$

- **Conditions de régularité dans  $\Omega_\mu(T)$ ,  $\forall T > 0$  :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(\underline{x}, t) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu(T)), \forall T > 0, \\ \theta(\underline{x}, t) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu(T)), \forall T > 0. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(\underline{x}, t) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu(T)), \forall T > 0, \\ \theta(\underline{x}, t) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu(T)), \forall T > 0. \end{array} \right. \quad (4.66)$$

- **Conditions initiales**

— Valeurs initiales des champs thermomécaniques dans  $\Omega_\mu(0)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \forall \underline{x} \in \Gamma_u(0). \\ \theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0. \\ \rho_\mu(\underline{x}, 0) = \rho_0, \end{array} \right. \quad (4.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \forall \underline{x} \in \Gamma_u(0). \\ \theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0. \\ \rho_\mu(\underline{x}, 0) = \rho_0, \end{array} \right. \quad (4.68)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \forall \underline{x} \in \Gamma_u(0). \\ \theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0. \\ \rho_\mu(\underline{x}, 0) = \rho_0, \end{array} \right. \quad (4.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \forall \underline{x} \in \Gamma_u(0). \\ \theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0. \\ \rho_\mu(\underline{x}, 0) = \rho_0, \end{array} \right. \quad (4.70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \forall \underline{x} \in \Gamma_u(0). \\ \theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0. \\ \rho_\mu(\underline{x}, 0) = \rho_0, \end{array} \right. \quad (4.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \bar{\varepsilon}_p(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = 0, \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \forall \underline{x} \in \Gamma_u(0). \\ \theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0. \\ \rho_\mu(\underline{x}, 0) = \rho_0, \end{array} \right. \quad (4.72)$$

- **Conditions aux limites sur  $\Gamma_\mu \setminus \Gamma_C$**

— Condition de bord libre sur  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_\sigma(\underline{x}, t) = 0, \forall \underline{x} \in \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u. \quad (4.73)$$

— Condition de flux nul sur  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  :

$$\kappa_\mu(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial \theta(\underline{x}, t)}{\partial \underline{n}_\theta(\underline{x}, t)} = 0, \forall \underline{x} \in \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u. \quad (4.74)$$

- **Conditions aux limites sur  $\Gamma_C(T)$**

— Conditions de contact unilatéral ,  $\forall \underline{x} \in \Gamma_C(T)$  :

Les conditions de contact observées à l'interface  $\Gamma_C(T)$  sont identiques à celles que nous avons introduites au chapitre 2 (eqs. 2.160 à 2.167). Nous utilisons donc le même modèle qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_C(\underline{x}, t) \geq 0, \forall \underline{x} \in \Gamma_C(T), \\ g_C(\underline{x}, t) \cdot f_N(\underline{x}, t) = 0, \\ f_N(\underline{x}, t) \leq 0, \\ ([\underline{v}](\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_C) \cdot f_N = 0. \end{array} \right. \quad (4.75)$$

$$g_C(\underline{x}, t) \cdot f_N(\underline{x}, t) = 0, \quad (4.76)$$

$$f_N(\underline{x}, t) \leq 0, \quad (4.77)$$

$$([\underline{v}](\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_C) \cdot f_N = 0. \quad (4.78)$$

— Modèle de frottement sur  $\Gamma_C(T)$  :

En ce qui concerne la gestion du frottement, nous nous proposons d'utiliser une loi de type Coulomb-Tresca,

$$f_T = \min(\mu_0 \cdot f_N, f_{T,\text{Tresca}}) \quad (4.79)$$

où l'effort de Tresca est déterminé à partir de limite élastique SCG introduite précédemment :

$$f_{T,\text{Tresca}} = \mu_T \cdot \min\left(\frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}}, \frac{Y_0}{\sqrt{3}}(1 + \beta \bar{\epsilon}_p(0, t))^\eta\right) \\ \times (1 + gP(\underline{x}, t) - h_\Theta(\theta(\underline{x}, t) - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta(\underline{x}, t)}{\Theta_F - \theta(\underline{x}, t)}\right), \forall \underline{x} \in \Gamma_C(T). \quad (4.80)$$

Pour la suite de cette étude, nous introduisons un coefficient de frottement  $\mathbf{f}$  fonction de la déformation plastique cumulée à l'interface  $\bar{\epsilon}_p(0, t)$ . Ce coefficient constitue donc un paramètre du problème dont nous étudierons l'influence sur la dynamique globale du glissement. Pour comparer les frottements de Coulomb et de Tresca, le coefficient de frottement utilisé dans la loi de Coulomb est le coefficient de frottement statique  $\mu_0$  et nous avons,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{f}_{T,2} = -\underline{f}_{T,1} = -\lambda \cdot [\underline{v}](\underline{x}, t), \lambda \geq 0, \\ f_T = \min\left\{\mu_0 \cdot f_N, \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}}(1 + gP(\underline{x}, t) - h_\Theta(\theta(\underline{x}, t) - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta(\underline{x}, t)}{\Theta_F - \theta(\underline{x}, t)}\right)\right\}. \end{array} \right. \quad (4.81)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{f}_{T,2} = -\underline{f}_{T,1} = -\lambda \cdot [\underline{v}](\underline{x}, t), \lambda \geq 0, \\ f_T = \min\left\{\mu_0 \cdot f_N, \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}}(1 + gP(\underline{x}, t) - h_\Theta(\theta(\underline{x}, t) - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta(\underline{x}, t)}{\Theta_F - \theta(\underline{x}, t)}\right)\right\}. \end{array} \right. \quad (4.82)$$

— Condition de flux à l'interface sur  $\Gamma_C(T)$  :

Après prise en compte de la loi de Fourier (eq. 2.133), nous avons :

$$\dot{\underline{q}}(\underline{x}, t) = |f_T(\underline{x}, t)| \cdot [\underline{v}](\underline{x}, t), \forall \underline{x} \in \Gamma_C(T), \quad (4.83)$$

$$\kappa_{\mu,1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \underline{n}_1} = \beta_T \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{x}, t), \quad (4.84)$$

$$\kappa_{\mu,2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \underline{n}_2} = (1 - \beta_T) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{x}, t). \quad (4.85)$$

#### 4.2.4 Conditions de couplage

Nous écrivons finalement les conditions de couplage permettant de relier les deux problèmes thermomécaniques entre eux à l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$ . Pour signifier que nous sommes sur cette interface, nous notons provisoirement  $h_\varepsilon$  la position d'un point matériel situé à la jonction entre les domaines  $\Omega_\mu$  et  $\Omega_M$ .

- **Régularité de la vitesse à l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$  :**

La condition de régularité globale (eq. 4.29) du champ des vitesses impose la régularité des vitesses à l'interface  $\Gamma_\varepsilon$ , et nous avons donc :

$$\underline{v}(h_\varepsilon, t) = \underline{V}(h_\varepsilon, t) = \underline{V}_\varepsilon \text{ en tout point de l'interface } \Gamma_\varepsilon. \quad (4.86)$$

Notons par ailleurs qu'il n'y a pas de condition de régularité de température à l'interface  $\Gamma_\varepsilon$  car la conduction est négligée à l'échelle macroscopique dans  $\Omega_M$  (eq. 4.4).

Nous complétons cette première condition de couplage par trois autres conditions déterminées à partir des équations de conservations. Nous écrivons pour cela les conditions de saut pour chacune des trois lois<sup>2</sup>. En notant  $\underline{V}_\varepsilon$  la vitesse locale à l'instant  $T$  de l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$  nous vérifions les relations suivantes :

- **Conservation de la masse à l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$  :**

La seconde condition de couplage est obtenue en écrivant la condition de saut de la masse à travers l'interface  $\Gamma_\varepsilon$ . Celle-ci s'écrit dans notre cas :

$$\{\rho_\mu(h_\varepsilon, t) \cdot (\underline{v}(h_\varepsilon, t) - \underline{V}_\varepsilon) - \rho_M(h_\varepsilon, t) \cdot (\underline{V}(h_\varepsilon, t) - \underline{V}_\varepsilon)\} \cdot \underline{n}_\varepsilon = 0. \quad (4.87)$$

Cette équation exprime la **continuité du flux massique à travers l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$** , mesuré relativement à la vitesse locale de l'interface  $\underline{V}_\varepsilon$ . Compte tenu de la condition de régularité (eq. 4.86), la condition de saut (eq. 4.87) est automatiquement satisfaite.

- **Conservation de la quantité de mouvement à l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$  :**

La condition de saut sur la quantité de mouvement s'écrit à l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$ ,

$$\{\rho_\mu \cdot (\underline{v} \otimes (\underline{v} - \underline{V}_\varepsilon)) - \rho_M \cdot (\underline{V} \otimes (\underline{V} - \underline{V}_\varepsilon))\} \cdot \underline{n}_\varepsilon - \left( \underline{\underline{\sigma}}(h_\varepsilon, t) - \underline{\underline{\Sigma}}(h_\varepsilon, t) \right) \cdot \underline{n}_\varepsilon = 0. \quad (4.88)$$

---

2. Ces conditions de saut sont explicitées dans les ouvrages de P.HUERRE, SALENÇON ou bien encore LE TALLEC.

Compte tenu de la condition de régularité en vitesse (eq. 4.86), nous obtenons la condition de couplage suivante :

$$\left( \underline{\underline{\sigma}}(h_\varepsilon, t) - \underline{\underline{\Sigma}}(h_\varepsilon, t) \right) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon = 0. \quad (4.89)$$

Cette relation impose donc la **continuité du vecteur contrainte à l'interface**  $\Gamma_\varepsilon$  !

- **Conservation de l'énergie à l'interface**  $\Gamma_\varepsilon(T)$  :

La condition de saut en énergie interne est obtenue à partir de l'équation de saut en énergie totale à l'interface  $\Gamma_\varepsilon(T)$ . Celle-ci s'écrit :

$$\left\{ \left( \rho_\mu \cdot (e_\mu + e_{el,\mu}) + \rho_\mu \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) \cdot (\underline{v} - \underline{V}_\varepsilon) - \left( \rho_M \cdot (e_M + e_{el,M}) + \rho_M \frac{\underline{V} \cdot \underline{V}}{2} \right) \cdot (\underline{V} - \underline{V}_\varepsilon) \right\} \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon + \left( \underline{\underline{\dot{q}}}(h_\varepsilon, t) - \underline{\underline{\dot{Q}}}(h_\varepsilon, t) \right) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon - \left\{ \underline{v} \cdot \left( \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon \right) - \underline{V} \cdot \left( \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon \right) \right\} = 0. \quad (4.90)$$

En tenant compte de la condition de continuité des vitesses (eq. 4.86) ainsi que de la condition de continuité du vecteur contrainte (eq. 4.89) à travers l'interface  $\Gamma_\varepsilon$ , l'équation précédente se réduit à la condition de couplage suivante :

$$\left( \underline{\underline{\dot{q}}}(h_\varepsilon, t) - \underline{\underline{\dot{Q}}}(h_\varepsilon, t) \right) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon = 0. \quad (4.91)$$

Cette relation (eq.4.91) exprime simplement la **continuité du flux de chaleur à travers l'interface**  $\Gamma_\varepsilon(T)$ . Le flux  $\underline{\underline{\dot{Q}}}$  étant nul par définition dans  $\Omega_M$  (eq. 4.4), nous en déduisons

$$\underline{\underline{\dot{q}}}(h_\varepsilon, t) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon = 0. \quad (4.92)$$

En résumé, après prise en compte de la loi de Fourier, les conditions de couplage entre le problème local dans  $\Omega_\mu$  et le problème macroscopique dans  $\Omega_M$  se résument aux relations suivantes à l'interface  $\Gamma_\varepsilon$  :

**Continuité des vitesses** (eq. 4.86) :

$$\underline{v}(h_\varepsilon, t) = \underline{\mathbb{V}}(h_\varepsilon, t), \quad (4.93)$$

**Continuité du vecteur contrainte** (eq. 4.89) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(h_\varepsilon, t) \cdot \underline{n}_\varepsilon = \underline{\underline{\Sigma}}(h_\varepsilon, t) \cdot \underline{n}_\varepsilon, \quad (4.94)$$

**Condition de flux nul** (eq. 4.92) :

$$\kappa_\mu(h_\varepsilon, t) \cdot \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial \underline{n}_\varepsilon} = 0. \quad (4.95)$$

### ■ 4.3 Le problème en écart sur $\Omega_\mu$

En nous plaçant dans le cas particulier où  $h_\varepsilon \rightarrow 0$ , nous retrouvons le problème non perturbé actuellement résolu par le code hydrodynamique, à échelle macroscopique en négligeant la diffusion thermique et les échauffements localisés.

Afin d'estimer les variations de comportement calculées entre notre problème multi-échelles ( $\Omega(T) = \Omega_M(T) \cup \Omega_\mu(T)$ ) et le problème non perturbé ( $h_\varepsilon \rightarrow 0$ ), nous nous proposons d'écrire un **problème en écart** caractérisant la différence entre :

- la solution du problème multi-échelles que nous venons d'énoncer,
- la solution dite *de base* que l'on obtiendrait localement dans  $\Omega_\mu$  en négligeant toute diffusion thermique.

Par construction et en reprenant les notations du paragraphe 4.2.1 (voir p. 121) pour la noter, cette solution *de base* est définie sur  $\Omega_\mu$  comme la solution prolongée des équations 4.5 à 4.36 auxquelles nous rajoutons les conditions de prolongement suivantes :

- Continuité de la solution de base à l'interface  $h_\varepsilon$  :

$$\lim_{z \rightarrow h_\varepsilon^-} \{\mathbb{V}(z, t)\} = \lim_{Z \rightarrow h_\varepsilon^+} \{\mathbb{V}(Z, T)\}. \quad (4.96)$$

- Continuité du vecteur contrainte à l'interface  $h_\varepsilon$  :

$$\lim_{z \rightarrow h_\varepsilon^-} \{\underline{\underline{\sigma}}(z, t) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon\} = \lim_{Z \rightarrow h_\varepsilon^+} \{\underline{\underline{\Sigma}}(Z, T) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon\}. \quad (4.97)$$

et la condition de couplage en cisaillement avec le problème local sur  $\Gamma_C$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{n}}_C = \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{n}}_C, \\ \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{n}}_C = \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{n}}_C, \forall \underline{\underline{x}} \in \Gamma_C. \end{array} \right. \quad (4.98)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{n}}_C = \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{n}}_C, \forall \underline{\underline{x}} \in \Gamma_C. \end{array} \right. \quad (4.99)$$

Cette dernière équation revient donc à écrire :

$$F_T(\underline{\underline{x}}, t) = f_T(\underline{\underline{x}}, t), \forall \underline{\underline{x}} \in \Gamma_C. \quad (4.100)$$

Notons que nous pouvons retrouver ces relations de couplage en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés.

## ■ Conclusion du chapitre

**A** fin de résoudre le comportement thermomécanique des interfaces mises en glissement par choc, nous nous sommes proposés d'avoir recours à une méthode multi-échelles par décomposition de domaine. Cette démarche nous permet de différencier deux problèmes :

- un **problème global**, que nous résolvons à l'échelle de la structure  $\Omega_M(T)$ ,
- un **problème local**, décrivant les mécanismes thermomécaniques mis en jeu au sein de la couche limite d'épaisseur micrométrique  $\Omega_\mu(T)$  située au voisinage de l'interface de glissement. Pour décrire le problème d'évolution thermomécanique au sein de cette couche, nous avons supposé que le comportement de la matière proche de l'interface pouvait être modélisé par une loi rhéologique élastoplastique similaire à la loi utilisée à l'échelle de la structure.

Nous avons également introduit au sein de la couche  $\Omega_\mu$  un problème fictif, dit de base, permettant un prolongement régulier de la solution du problème macroscopique.

Les questions que nous nous posons maintenant sont les suivantes :

**Pouvons-nous évaluer l'épaisseur de la couche limite thermomécanique ?**  
**Pouvons-nous simplifier le problème de base au voisinage de l'interface de glissement ?**

Nous nous proposons d'y répondre au cours du chapitre suivant, en ayant pour cela recours à l'analyse dimensionnelle.









## Simplification du problème en couche limite par analyse dimensionnelle

### ■ Introduction du chapitre

Dans ce chapitre, nous procédons à l'étude dimensionnelle du problème introduit au cours du chapitre précédent dans la couche limite  $\Omega_\mu$ . La philosophie de cette approche consiste à adimensionner des corrélations pour évaluer l'importance relative des différents mécanismes physiques mis en jeu au voisinage de l'interface de glissement. Pour cela, nous avons divisé ce chapitre en trois sections :

- Dans la première section (pp. 140 à 157), nous procédons à l'**inspection détaillée du problème d'évolution thermomécanique en couche limite**. Nous introduisons alors différentes grandeurs caractéristiques du problème et autant de lois d'échelles que nous utilisons pour adimensionner le problème en couche limite.
- Dans un second temps (pp. 158 à 161), nous estimons les nombres sans dimensions gouvernant notre problème. Nous montrons notamment que pour les sollicitations caractéristiques de nos applications, certains termes deviennent prépondérants et d'autre négligeables. Ceci nous permet de simplifier de manière significative le problème en couche limite.
- Nous le récapitulons dans la troisième section (pp. 161 à 165) puis, à partir de ce problème de base, nous introduisons les cas limites que nous traiterons au cours de la troisième et dernière partie de notre étude (pp. 187 à 256).

## 5.1 Écriture du problème sans dimension dans la couche limite $\Omega_\mu$

### 5.1.1 Notions préliminaires à l'étude dimensionnelle

Pour procéder à l'étude dimensionnelle du problème en couche limite, nous devons dans un premier temps récrire le système d'équations sous forme adimensionnée.

Pour ce faire, nous procédons dans un premier temps à l'inspection du système d'équations locales (eqs. 4.37 à 4.99) en regroupant les termes du problème au sein de trois ensembles (voir [74]) : les **paramètres**, les **variables indépendantes** et les grandeurs **inconnues**.

**L'ensemble des paramètres** regroupe les termes permettant de décrire la configuration étudiée :

- Il s'agit notamment des grandeurs définissant les dimensions du domaine étudié  $\Omega_\mu(T)$ . Dans notre cas de figure, nous connaissons  $L$ , la longueur initiale de l'interface de contact potentielle  $\Gamma_C(T)$ . En revanche nous ne connaissons pas son épaisseur  $h_\varepsilon$  que nous supposons égale à l'épaisseur de la couche limite thermique et fonction du temps  $T$ . Nous tâcherons donc de l'évaluer au cours de ce chapitre.
- Nous avons également connaissance des paramètres décrivant les propriétés thermomécaniques du ou des matériaux occupant le domaine  $\Omega_\mu(T)$ . Pour le problème considéré, il s'agit de :
  - la limite élastique  $Y_0$  (en  $Pa$ ),
  - la limite d'écrouissage  $Y_{\max}$  (en  $Pa$ ),
  - le module de cisaillement  $G_0$  (en  $Pa$ ),
  - la température de fusion  $\Theta_F$  (en  $K$ ).
- Finalement, nous disposons des valeurs initiales de certaines grandeurs, telles que :
  - la densité  $\rho_0$  (en  $kg/m^3$ ),
  - la conductivité thermique  $\kappa_0$  (en  $W/m.K$ ),
  - la température de référence  $\Theta_0$  en  $K$ .

Contrairement aux paramètres du problème, **les variables indépendantes** sont des termes dont la valeur est susceptible d'évoluer sans qu'il n'existe pour autant de relation de dépendance entre eux. Autrement dit, nous pouvons fixer la valeur d'une variable indépendante sans que cela ne modifie la valeur des autres variables. Ce sont classiquement les variables spatio-temporelles, soit dans notre cas de figure :

- le temps d'observation  $t$ ,
- les composantes  $x$  et  $z$  définissant la position d'un point matériel  $\underline{x} \in \Omega_\mu(T)$ .

Nous considérons enfin les **inconnues du problème** qui s'expriment en fonction des paramètres et des variables indépendantes que nous venons d'énumérer. Pour le problème d'évolution thermomécanique local dans  $\Omega_\mu(T)$  nous cherchons à évaluer :

- les grandeurs thermomécaniques telles que les densités locale  $\rho_\mu(\underline{x}, t)$  et prolongée  $\rho_M(\underline{x}, t)$ , et la conductivité thermique locale  $\kappa(\underline{x}, t)$ ,
- les énergies internes locale  $e_\mu(\underline{x}, t)$  et prolongée  $e_M(\underline{x}, t)$ ,
- les champs de vitesses local  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  et prolongé  $\underline{V}(\underline{x}, t)$ ,
- les inconnues locales et prolongées homogènes à une contrainte, telle que les limites élastiques  $Y(\underline{x}, t)$  et  $\mathbb{Y}(\underline{x}, t)$ , les composantes des tenseurs des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}, t)$ , les pressions hydrostatiques  $P(\underline{x}, t)$  et  $\mathbb{P}(\underline{x}, t)$  ainsi que les composantes des tenseurs déviateur des contraintes  $\underline{\underline{s}}(\underline{x}, t)$  et  $\underline{\underline{S}}(\underline{x}, t)$  et finalement les contraintes équivalentes de Von Mises  $\sigma_{eq}(\underline{x}, t)$  et  $\Sigma_{eq}(\underline{x}, t)$ ,
- les taux de déformation plastique équivalent  $\dot{\epsilon}_p(\underline{x}, t)$  et  $\dot{\mathbb{E}}_p(\underline{x}, t)$ , qui permettent de déterminer l'écoulement plastique ainsi que les déformations plastiques cumulées  $\bar{\epsilon}_p(\underline{x}, t)$  et  $\bar{\mathbb{E}}_p(\underline{X}, T)$ ,
- la température  $\theta(\underline{x}, t)$ .

### 5.1.2 Les lois d'échelles utilisées

Après avoir répertorié l'ensemble des grandeurs du problème en couche limite, la seconde étape consiste à adimensionner les variables indépendantes ainsi que les inconnues apparaissant dans le système d'équations. Pour cela, nous définissons plusieurs lois d'échelles en normant chacun des termes à l'aide de valeurs caractéristiques correctement choisies.

Pour construire ces lois d'échelles, nous introduisons plusieurs **grandeurs caractéristiques** :

- la variable temps  $t$  est adimensionnée par **un temps caractéristique**  $\hat{T}$ , et nous avons :

$$T = \hat{T} \cdot \tilde{t}. \quad (5.1)$$

Pour pouvoir traiter les variations de quantités sur deux échelles différentes dans les deux directions de l'espace  $x$  et  $z$ , nous allons considérer deux longueurs caractéristiques :

- la composante longitudinale  $x$  du vecteur position  $\underline{x}$  est adimensionnée par **une longueur caractéristique**  $\hat{L}$ , de sorte que :

$$x = \hat{L} \cdot \tilde{x}. \quad (5.2)$$

- la composante transverse  $z$  du vecteur position  $\underline{x}$  est quant à elle adimensionnée par **une épaisseur caractéristique**  $\hat{h}$ , telle que :

$$z = \hat{h} \cdot \tilde{z}. \quad (5.3)$$

L'utilisation d'une échelle de longueur différente suivant les directions longitudinales et transverses indique que nous effectuons **une dilatation d'échelle** le long de la direction transverse, de manière à se ramener à des variations sur des épaisseurs caractéristiques d'ordre unité après dilatation.

- la température  $\theta(\underline{x}, t)$  est adimensionnée par **une température caractéristique**  $\hat{\Theta}$ ,

$$\theta = \hat{\Theta} \cdot \tilde{\theta}. \quad (5.4)$$

- les densités locale  $\rho_\mu$  et prolongée  $\rho_M$  sont adimensionnées par **une densité caractéristique**  $\hat{\rho}$  :

$$\rho_\mu = \hat{\rho} \cdot \tilde{\rho}_\mu, \text{ et } \rho_M = \hat{\rho} \cdot \tilde{\rho}_M, \quad (5.5)$$

- Finalement, nous choisissons d'adimensionner l'ensemble des grandeurs homogènes à une contrainte par **une contrainte caractéristique**  $\hat{Y}$ , et nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \hat{Y} \cdot \tilde{Y}, \text{ et } \mathbb{Y} = \hat{Y} \cdot \tilde{\mathbb{Y}}, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \hat{Y} \cdot \tilde{\sigma}, \text{ et } \underline{\underline{\Sigma}} = \hat{Y} \cdot \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \hat{Y} \cdot \tilde{P}, \text{ et } \mathbb{P} = \hat{Y} \cdot \tilde{\mathbb{P}}, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{s}} = \hat{Y} \cdot \underline{\underline{\tilde{s}}}, \text{ et } \underline{\underline{\underline{S}}} = \hat{Y} \cdot \underline{\underline{\underline{\tilde{S}}}}, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{eq}} = \hat{Y} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{eq}}, \text{ et } \Sigma_{\text{eq}} = \hat{Y} \cdot \tilde{\Sigma}_{\text{eq}}. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Notons que l'utilisation d'une échelle de contrainte indépendante par rapport à l'échelle des masses, des vitesses et du temps indique là aussi que nous effectuons une **dilatation de l'échelle des contraintes** pour se ramener à des contraintes adimensionnées de l'ordre de l'unité.

A partir des 6 paramètres d'adimensionnement ( $\hat{T}, \hat{L}, \hat{h}, \hat{\Theta}, \hat{Y}, \hat{\rho}$ ) linéairement indépendants, nous définissons les autres valeurs caractéristiques que nous utilisons pour adimensionner :

- Les composantes longitudinales  $v_x(\underline{x}, t)$  et  $\mathbb{V}_X(\underline{x}, t)$  ainsi que les composantes transverses  $v_z(\underline{x}, t)$  et  $\mathbb{V}_Z(\underline{x}, t)$  des vecteurs vitesse  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  et  $\underline{\mathbb{V}}(\underline{x}, t)$  ; nous introduisons pour ce faire **les vitesses caractéristiques**  $\hat{V}_X$  et  $\hat{V}_Z$  que nous définissons respectivement comme le rapport des longueurs caractéristiques  $\hat{L}$  et  $\hat{h}$  sur le temps caractéristique  $\hat{T}$ . Les lois d'échelles sur les vitesses se résument alors aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \hat{V}_X \cdot \tilde{v}_x = \left(\frac{\hat{L}}{\hat{T}}\right) \cdot \tilde{v}_x, \text{ et } \mathbb{V}_X = \left(\frac{\hat{L}}{\hat{T}}\right) \cdot \tilde{\mathbb{V}}_X, \end{array} \right. \quad (5.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z = \hat{V}_Z \cdot \tilde{v}_z = \left(\frac{\hat{h}}{\hat{T}}\right) \cdot \tilde{v}_z, \text{ et } \mathbb{V}_Z = \left(\frac{\hat{h}}{\hat{T}}\right) \cdot \tilde{\mathbb{V}}_Z. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

- Les taux de déformation plastique équivalents  $\dot{\epsilon}_p(\underline{x}, t)$  et  $\dot{\mathbb{E}}_p(\underline{x}, t)$  ; pour cela nous introduisons **le taux de déformation plastique caractéristique**  $\hat{\mathbb{E}}_p$  que nous définissons comme le rapport entre la vitesse longitudinale caractéristique  $\hat{V}_X$  et l'épaisseur caractéristique  $\hat{h}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}_p = \hat{\mathbb{E}}_p \cdot \tilde{\dot{\mathbb{E}}}_p, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_p = \hat{\mathbb{E}}_p \cdot \tilde{\dot{\epsilon}}_p, \end{array} \right. \quad (5.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbb{E}}_p = \left(\frac{\hat{V}_X}{\hat{h}}\right) = \left(\frac{\hat{L}}{\hat{h}\hat{T}}\right). \end{array} \right. \quad (5.15)$$

- Les déformations plastiques cumulées  $\bar{e}_p(\underline{x}, t)$  et  $\bar{\mathbb{E}}_p(\underline{x}, t)$ ; nous les adimensionnons à l'aide de **la déformation plastique cumulée caractéristique**  $\hat{\mathbb{E}}_p$  que nous définissons comme le produit entre le taux de déformation plastique caractéristique  $\hat{\dot{\mathbb{E}}}_p$ , et le temps caractéristique  $\hat{T}$ , de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbb{E}}_p = \hat{\mathbb{E}}_p \cdot \hat{\mathbb{E}}_p, \\ \bar{e}_p = \hat{\mathbb{E}}_p \cdot \hat{e}_p, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbb{E}}_p = \left( \frac{\hat{L}}{\hat{h}} \right). \end{array} \right. \quad (5.18)$$

- Les densités d'énergies internes  $e_\mu$  et  $e_M$  ainsi que la conductivité  $\kappa_\mu$  sont respectivement adimensionnées par **une densité d'énergie interne caractéristique**  $\hat{e}$  et **une capacité thermique caractéristique**  $\hat{\kappa}$  à partir du niveau d'énergie  $\left( \frac{\hat{Y} \hat{\mathbb{E}}_p}{\hat{\rho}} \right)$  dissipée et diffusée en couche limite :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_\mu = \hat{e} \cdot \bar{e}_\mu \text{ et } e_M = \hat{e} \cdot \bar{e}_M, \hat{e} = \frac{\hat{Y} \hat{L}}{\hat{\rho} \hat{h}} \\ \kappa_\mu = \hat{\kappa} \cdot \bar{\kappa}_\mu, \hat{\kappa} = \frac{\hat{\rho} \hat{e} \hat{h}^2}{\hat{\theta} \hat{T}} = \frac{\hat{Y} \hat{h} \hat{L}}{\hat{\Theta} \hat{T}} \end{array} \right. \quad (5.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_\mu = \hat{\kappa} \cdot \bar{\kappa}_\mu, \hat{\kappa} = \frac{\hat{\rho} \hat{e} \hat{h}^2}{\hat{\theta} \hat{T}} = \frac{\hat{Y} \hat{h} \hat{L}}{\hat{\Theta} \hat{T}} \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Notons finalement que dans le modèle rhéologique SCG (eqs. 4.56 à 4.57) et dans la loi de frottement (eqs. 4.81 à 4.82), les coefficients  $\beta$ ,  $g$ ,  $h_\Theta$ ,  $\lambda$  et  $\gamma$  sont respectivement adimensionnés à l'aide des cinq lois d'échelle suivantes :

$$\beta = \frac{1}{\hat{\mathbb{E}}_p} \cdot \bar{\beta}, \quad g = \frac{1}{\hat{Y}} \cdot \bar{g}, \quad h_\Theta = \frac{1}{\hat{\Theta}} \cdot \bar{h}_\Theta, \quad \lambda = \frac{1}{\hat{V}_X} \cdot \bar{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\hat{Y}}{\hat{V}_X} \cdot \bar{\gamma}.$$

### 5.1.3 Écriture du problème sans dimension dans la couche limite $\Omega_\mu$

Procédons maintenant à l'adimensionnement du système d'équations gouvernant le problème local dans la couche limite  $\Omega_\mu$ . Pour cela, nous récrivons les EDP introduites au cours du chapitre précédent à l'aide des lois d'échelles (eqs. 5.1 à 5.20) que nous venons d'établir. Pour simplifier les calculs ultérieurs, nous allons remplacer dans le problème local les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ainsi que la loi de comportement élastoplastique, par les équations en écart correspondantes.



### Adimensionnement de la loi de conservation de la masse

Par différence entre la loi de conservation de la masse locale (eq. 4.37) et de la loi de base en couche limite, nous avons :

$$\frac{d(\rho_\mu - \rho_M)}{dt} + \rho_\mu(\underline{x}, t) \cdot \text{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) - \rho_M(\underline{x}, t) \cdot \text{div}(\underline{V}(\underline{x}, t)) = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_\mu(t). \quad (5.21)$$

Après prise en compte des lois d'échelles, nous avons :

$$\left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{T}}\right) \frac{d(\tilde{\rho}_\mu - \tilde{\rho}_M)}{d\tilde{t}} + \tilde{\rho}_\mu \cdot \left\{ \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X}{\hat{L}}\right) \cdot \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z}{\hat{h}}\right) \cdot \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right\} - \tilde{\rho}_M \cdot \left\{ \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X}{\hat{L}}\right) \cdot \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}} + \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z}{\hat{h}}\right) \cdot \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \tilde{z}} \right\} = 0. \quad (5.22)$$

Nous adimensionnons alors l'équation précédente en multipliant l'ensemble des termes par  $\left(\frac{\hat{T}}{\hat{\rho}}\right)$ , et nous obtenons finalement :

$$\frac{d(\tilde{\rho}_\mu - \tilde{\rho}_M)}{d\tilde{t}} + \tilde{\rho}_\mu \cdot \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) - \tilde{\rho}_M \cdot \left( \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \tilde{z}} \right) = 0. \quad (5.23)$$

Notons que cette formulation ne fait apparaître aucun nombre sans dimension !

### Adimensionnement de la loi de conservation de la quantité de mouvement

La différence entre la loi de conservation de la quantité de mouvement écrite à l'échelle locale (eqs. 4.38 et 4.39) et dans le problème de base s'écrit dans  $\Omega_\mu$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma_{xx} - \Sigma_{XX})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} - \mathbb{T}_{XZ})}{\partial z} = \rho_\mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} - \rho_M \cdot \frac{\partial V_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial(\tau_{xz} - \mathbb{T}_{XZ})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{zz} - \Sigma_{ZZ})}{\partial z} = \rho_\mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} - \rho_M \cdot \frac{\partial V_z}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (5.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X}{\hat{T}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z}{\hat{T}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.25)$$

En remplaçant les inconnues à l'aide des lois d'échelle, nous obtenons le système suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{h}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X}{\hat{T}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{h}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z}{\hat{T}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{h}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X}{\hat{T}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\hat{Y}}{\hat{h}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z}{\hat{T}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Nous adimensionnons chacune des deux équations en les multipliant par  $\left(\frac{\hat{h}}{\hat{Y}}\right)$ . Nous aboutissons alors au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X \cdot \hat{h}}{\hat{T} \cdot \hat{Y}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z \cdot \hat{h}}{\hat{T} \cdot \hat{Y}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_X \cdot \hat{h}}{\hat{T} \cdot \hat{Y}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{V}_Z \cdot \hat{h}}{\hat{T} \cdot \hat{Y}}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Finalement, nous simplifions chacune des équations en remplaçant les vitesses caractéristiques  $\hat{V}_X$  et  $\hat{V}_Z$  par leurs expressions respectives (eqs. 5.11 et 5.12) et nous obtenons le système sans dimension suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{h} \cdot \hat{L}}{\hat{Y} \cdot \hat{T}^2}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{h}^2}{\hat{Y} \cdot \hat{T}^2}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{h} \cdot \hat{L}}{\hat{Y} \cdot \hat{T}^2}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{t}}\right), \\ \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{h}^2}{\hat{Y} \cdot \hat{T}^2}\right) \cdot \left(\tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{t}}\right). \end{array} \right. \quad (5.31)$$

Comme nous pouvons le constater, deux nombres sans dimension apparaissent :

$$\mathbf{N}_1 = \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right) \text{ et } \mathbf{N}_2 = \left(\hat{\rho} \frac{\hat{h} \cdot \hat{L}}{\hat{Y} \cdot \hat{T}^2}\right).$$

Le premier coefficient ( $\mathbf{N}_1$ ) est une mesure du **rapport d'aspect** entre l'épaisseur caractéristique  $\hat{h}$  et la longueur caractéristique  $\hat{L}$  de la couche limite  $\Omega_\mu$ .

Le second coefficient ( $\mathbf{N}_2$ ) mesure quant à lui l'**inertie** au sein de la couche limite.

Le terme sans dimension situé à droite de l'égalité dans la seconde équation (eq. 5.31) correspond quant à lui au produit de  $\mathbf{N}_1$  par  $\mathbf{N}_2$ .

### Adimensionnement de la loi de conservation de l'énergie interne

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'équation de conservation de l'énergie interne (eq. 4.41) s'écrit dans  $\Omega_\mu$  :

$$\rho_\mu(\underline{x}, t) \frac{de_\mu(\underline{x}, t)}{dt} - \sigma_{\text{eq}}(\underline{x}, t) \cdot \dot{\epsilon}_p(\underline{x}, t) + P(\underline{x}, t) \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) - \operatorname{div}\{\kappa_\mu(\underline{x}, t) \cdot \operatorname{grad}(\theta(\underline{x}, t))\} = 0. \quad (5.32)$$

Après prise en compte des relations d'échelle, nous avons :

$$\sigma_{\text{eq}} \cdot \dot{\epsilon}_p = \left( \hat{Y} \cdot \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \bar{\sigma}_{\text{eq}} \cdot \dot{\epsilon}_p. \quad (5.33)$$

De la même façon, nous récrivons le terme  $P \cdot \text{div}(\underline{v})$  à l'aide des lois d'échelle et nous obtenons,

$$P \cdot \text{div}(\underline{v}) = \left( \frac{\hat{Y} \hat{V}_X}{\hat{L}} \right) \cdot \bar{P} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\hat{Y} \hat{V}_Z}{\hat{h}} \right) \cdot \bar{P} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}. \quad (5.34)$$

Finalement, le terme  $\text{div}\{\kappa_\mu(\underline{x}, t) \cdot \text{grad}(\theta(\underline{x}, t))\}$  s'écrit,

$$\text{div}\{\kappa_\mu(\underline{x}, t) \cdot \text{grad}(\theta(\underline{x}, t))\} = \left( \frac{\hat{\kappa} \hat{\Theta}}{\hat{L}^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\kappa}_\mu}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \bar{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \left( \frac{\hat{\kappa} \hat{\Theta}}{\hat{h}^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\kappa}_\mu}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{z}} + \bar{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2} \right). \quad (5.35)$$

En tenant compte des développements précédents (eqs. 5.33 à 5.35) l'équation de conservation de l'énergie interne s'écrit après prise en compte des lois d'échelle,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\hat{\rho} \hat{e}}{\hat{T}} \right) \bar{\rho}_\mu \frac{d\bar{e}_\mu}{d\bar{t}} &= \left( \frac{\hat{Y} \hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \bar{\sigma}_{\text{eq}} \cdot \dot{\epsilon}_p - \left( \frac{\hat{Y} \hat{V}_X}{\hat{L}} \right) \cdot \bar{P} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} - \left( \frac{\hat{Y} \hat{V}_Z}{\hat{h}} \right) \cdot \bar{P} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} \\ &+ \left( \frac{\hat{\kappa} \hat{\Theta}}{\hat{L}^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\kappa}_\mu}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \bar{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \left( \frac{\hat{\kappa} \hat{\Theta}}{\hat{h}^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\kappa}_\mu}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{z}} + \bar{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2} \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nous l'adimensionnons en la multipliant par  $\left( \frac{\hat{h}^2}{\hat{\kappa} \hat{\Theta}} \right) = \left( \frac{\hat{T}}{\hat{\rho} \hat{e}} \right)$ . L'équation de l'énergie interne s'écrit alors sous forme adimensionnée :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_\mu \frac{d\bar{e}_\mu}{d\bar{t}} &= \left( \frac{\hat{Y} \hat{h} \hat{L}}{\hat{\kappa} \hat{\Theta} \hat{T}} \right) \cdot \bar{\sigma}_{\text{eq}} \cdot \dot{\epsilon}_p - \left( \frac{\hat{Y} \hat{h} \hat{L}}{\hat{\kappa} \hat{\Theta} \hat{T}} \cdot \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \cdot \left( \bar{P} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{P} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} \right) \\ &+ \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial \bar{\kappa}_\mu}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \bar{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \frac{\partial \bar{\kappa}_\mu}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{z}} + \bar{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Outre le coefficient  $\mathbf{N}_1 = \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)$  que nous retrouvons dans cette formulation, nous faisons apparaître un nouveau coefficient sans dimension :

$$\mathbf{N}_3 = \left( \frac{\hat{Y} \hat{h} \hat{L}}{\hat{\kappa} \hat{\Theta} \hat{T}} \right) = 1 \text{ par construction de } \hat{\kappa}.$$

Ce coefficient ( $\mathbf{N}_3$ ) peut être interprété comme le rapport entre l'énergie thermique produite par le travail de déformation plastique et l'énergie thermique stockée.

### Adimensionnement de l'équation d'état en température

L'équation d'état en température (eq. 4.42) nous permet d'exprimer la densité d'énergie interne complémentaire  $e_\mu(\underline{x}, t)$  comme une fonction de la densité  $\rho_\mu(\underline{x}, t)$  et de la température  $\theta(\underline{x}, t)$  dans la couche limite  $\Omega_\mu$ . Sous forme adimensionnée, nous l'écrivons :

$$\bar{e}_\mu(\bar{\underline{x}}, \bar{t}) = e(P(\bar{\underline{x}}, \bar{t}), \bar{\theta}(\bar{\underline{x}}, \bar{t})) \quad (5.38)$$

### Partition du tenseur des contraintes dans $\Omega_\mu$

Sous forme adimensionnée, la partition du tenseur des contraintes revient à écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{s}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}), \\ (\bar{s}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}), \\ (\bar{s}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}) = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}), \\ (\bar{\tau}_{xz} - \bar{\tau}_{XZ}) = (\bar{s}_{xz} - \bar{\Sigma}_{XZ}). \\ (\bar{P} - \bar{\mathbb{P}}) = -\frac{1}{3}((\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) + (\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) + (\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ})) \end{array} \right. \quad (5.39)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{s}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}), \\ (\bar{s}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}) = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}), \end{array} \right\} \quad (5.40)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{s}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}) = \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}), \\ (\bar{\tau}_{xz} - \bar{\tau}_{XZ}) = (\bar{s}_{xz} - \bar{\Sigma}_{XZ}). \end{array} \right\} \quad (5.41)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{\tau}_{xz} - \bar{\tau}_{XZ}) = (\bar{s}_{xz} - \bar{\Sigma}_{XZ}). \\ (\bar{P} - \bar{\mathbb{P}}) = -\frac{1}{3}((\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) + (\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) + (\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ})) \end{array} \right\} \quad (5.42)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{P} - \bar{\mathbb{P}}) = -\frac{1}{3}((\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\Sigma}_{XX}) + (\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\Sigma}_{YY}) + (\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\Sigma}_{ZZ})) \end{array} \right\} \quad (5.43)$$

### Équation d'état en pression adimensionnée dans $\Omega_\mu$

Nous avons de même,

$$\bar{P}(\bar{\underline{x}}, \bar{t}) = \mathbf{P}(\bar{\rho}_\mu(\bar{\underline{x}}, \bar{t}), \bar{e}_\mu(\bar{\underline{x}}, \bar{t})). \quad (5.44)$$

### Adimensionnement de la loi de comportement élastoplastique

Nous procédons maintenant à l'adimensionnement de la loi de comportement élastoplastique. En faisant la différence entre le problème local et le problème de base, il reste :

$$\left\{ \begin{aligned} \{\dot{s}_{xx} - \dot{S}_{XX}\} &= 2G_0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial(v_x - \mathbb{V}_X)}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial(v_z - \mathbb{V}_Z)}{\partial z} \right\} - \tau_{xz} \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial x} - \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial z} \right) - 3G_0 \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{s_{xx}}{\sigma_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\mathbb{S}_{XX}}{\Sigma_{eq}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.45)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \{\dot{s}_{yy} - \dot{S}_{YY}\} &= -2G_0 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial(v_x - \mathbb{V}_X)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial(v_z - \mathbb{V}_Z)}{\partial z} \right\} \\ &\quad - 3G_0 \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{s_{yy}}{\sigma_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\mathbb{S}_{YY}}{\Sigma_{eq}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.46)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \{\dot{s}_{zz} - \dot{S}_{ZZ}\} &= 2G_0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial(v_z - \mathbb{V}_Z)}{\partial z} - \frac{1}{3} \frac{\partial(v_x - \mathbb{V}_X)}{\partial x} \right\} - \tau_{xz} \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \mathbb{T}_{XZ} \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial x} \right) - 3G_0 \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{s_{zz}}{\sigma_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\mathbb{S}_{ZZ}}{\Sigma_{eq}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.47)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \{\dot{\tau}_{xz} - \dot{\mathbb{T}}_{XZ}\} &= 2G_0 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial(v_x - \mathbb{V}_X)}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial(v_z - \mathbb{V}_Z)}{\partial x} \right\} - \left( \frac{s_{xx} - s_{zz}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\mathbb{S}_{XX} - \mathbb{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{V}_X}{\partial z} - \frac{\partial \mathbb{V}_Z}{\partial x} \right) - 3G_0 \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{\tau_{XZ}}{\sigma_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\mathbb{T}_{XZ}}{\Sigma_{eq}} \right). \end{aligned} \right. \quad (5.48)$$

Après prise en compte des lois d'échelles introduites précédemment, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\hat{Y}}{\hat{T}} \right) \cdot \{\dot{s}_{xx} - \dot{S}_{XX}\} &= 2G_0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{\mathbb{V}}_X)}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{h}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{\mathbb{V}}_Z)}{\partial \tilde{z}} \right\} - \hat{Y} \cdot \tilde{\tau}_{xz} \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} - \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} \right\} \\ &\quad + \hat{Y} \cdot \tilde{\mathbb{T}}_{XZ} \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbb{V}}_Z}{\partial \tilde{x}} - \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbb{V}}_X}{\partial \tilde{z}} \right\} - 3G_0 \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{s}_{xx}}{\tilde{\sigma}_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\mathbb{S}}_{XX}}{\tilde{\Sigma}_{eq}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.49)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\hat{Y}}{\hat{T}} \right) \cdot \{\dot{s}_{yy} - \dot{S}_{YY}\} &= -2G_0 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{\mathbb{V}}_X)}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{h}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{\mathbb{V}}_Z)}{\partial \tilde{z}} \right\} \\ &\quad - 3G_0 \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{s}_{yy}}{\tilde{\sigma}_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\mathbb{S}}_{YY}}{\tilde{\Sigma}_{eq}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.50)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\hat{Y}}{\hat{T}} \right) \cdot \{\dot{s}_{zz} - \dot{S}_{ZZ}\} &= 2G_0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{h}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{\mathbb{V}}_Z)}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{\mathbb{V}}_X)}{\partial \tilde{x}} \right\} - \hat{Y} \cdot \tilde{\tau}_{xz} \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} - \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} \right\} \\ &\quad + \hat{Y} \cdot \tilde{\mathbb{T}}_{XZ} \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbb{V}}_X}{\partial \tilde{z}} - \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbb{V}}_Z}{\partial \tilde{x}} \right\} - 3G_0 \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{s}_{zz}}{\tilde{\sigma}_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\mathbb{S}}_{ZZ}}{\tilde{\Sigma}_{eq}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.51)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\hat{Y}}{\hat{T}} \right) \cdot \{\dot{\tau}_{xz} - \dot{\mathbb{T}}_{XZ}\} &= 2G_0 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{\mathbb{V}}_X)}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{\mathbb{V}}_Z)}{\partial \tilde{x}} \right\} - \hat{Y} \cdot \left( \frac{\tilde{s}_{xx} - \tilde{s}_{zz}}{2} \right) \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} - \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} \right\} \\ &\quad + \hat{Y} \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbb{S}}_{XX} - \tilde{\mathbb{S}}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbb{V}}_X}{\partial \tilde{z}} - \left( \frac{\hat{V}_Z}{\hat{L}} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbb{V}}_Z}{\partial \tilde{x}} \right\} - 3G_0 \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right) \cdot \left( \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\tau}_{XZ}}{\tilde{\sigma}_{eq}} - \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\mathbb{T}}_{XZ}}{\tilde{\Sigma}_{eq}} \right). \end{aligned} \right. \quad (5.52)$$

Nous adimensionnons alors le système en choisissant de multiplier chacune des équations par  $\left(\frac{\hat{h}}{G_0 \hat{V}_X}\right)$ , ce qui nous conduit aux expressions suivantes :

$$\left( \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \cdot \left\{ \dot{\bar{s}}_{xx} - \dot{\bar{S}}_{XX} \right\} = 2 \left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\bar{v}_x - \bar{V}_X)}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\bar{v}_z - \bar{V}_Z)}{\partial \bar{z}} \right\} - \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \bar{\tau}_{xz} \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} \right\} \\ + \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \bar{\mathbb{T}}_{XZ} \cdot \left\{ \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \frac{\partial \bar{V}_Z}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{V}_X}{\partial \bar{z}} \right\} - 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{s}_{xx}}{\bar{\sigma}_{eq}} + 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{S}_{XX}}{\bar{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.53)$$

$$\left( \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \cdot \left\{ \dot{\bar{s}}_{yy} - \dot{\bar{S}}_{YY} \right\} = -2 \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\bar{v}_x - \bar{V}_X)}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\bar{v}_z - \bar{V}_Z)}{\partial \bar{z}} \right\} - 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{s}_{yy}}{\bar{\sigma}_{eq}} + 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{S}_{YY}}{\bar{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.54)$$

$$\left( \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \cdot \left\{ \dot{\bar{s}}_{zz} - \dot{\bar{S}}_{ZZ} \right\} = 2 \left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\bar{v}_z - \bar{V}_Z)}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \frac{\partial(\bar{v}_x - \bar{V}_X)}{\partial \bar{x}} \right\} - \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \bar{\tau}_{xz} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} - \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \right\} \\ + \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \bar{\mathbb{T}}_{XZ} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{V}_X}{\partial \bar{z}} - \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \frac{\partial \bar{V}_Z}{\partial \bar{x}} \right\} - 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{s}_{zz}}{\bar{\sigma}_{eq}} + 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{S}_{ZZ}}{\bar{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.55)$$

$$\left( \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) \cdot \left\{ \dot{\bar{\tau}}_{xz} - \dot{\bar{\mathbb{T}}}_{XZ} \right\} = 2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{v}_x - \bar{V}_X)}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \frac{\partial(\bar{v}_z - \bar{V}_Z)}{\partial \bar{x}} \right\} - \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \left( \frac{\bar{s}_{xx} - \bar{s}_{zz}}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} - \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \right\} \\ + \frac{\hat{Y}}{G_0} \cdot \left( \frac{\bar{S}_{XX} - \bar{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{V}_X}{\partial \bar{z}} - \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \frac{\partial \bar{V}_Z}{\partial \bar{x}} \right\} - 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{\tau}_{xz}}{\bar{\sigma}_{eq}} + 3\hat{\epsilon}_p \frac{\bar{\mathbb{T}}_{XZ}}{\bar{\Sigma}_{eq}}. \quad (5.56)$$

Nous retrouvons de nouveau le nombre sans dimension  $\mathbf{N}_1 = \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}}\right)$  ainsi qu'un quatrième nombre sans dimension, exprimant simplement le rapport entre la contrainte caractéristique  $\hat{Y}$  et le coefficient de cisaillement élastique  $G_0$  :

$$\mathbf{N}_4 = \left(\frac{\hat{Y}}{G_0}\right). \quad (5.57)$$

### Adimensionnement du critère de plasticité de VON MISES :

La contrainte équivalente  $\sigma_{eq}(\underline{x}, t)$  et la limite élastique  $Y(\underline{x}, t)$  étant toutes homogènes à une contrainte, il en va de même pour la fonction critère  $\phi(\underline{x}, t)$ . Après adimensionnement par la contrainte caractéristique  $\hat{Y}$ , le critère de plasticité de Von Mises s'écrit sous une forme simple ne faisant intervenir aucun nombre sans dimension :

$$\tilde{\phi}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = \tilde{\sigma}_{eq}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) - \tilde{Y}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}). \quad (5.58)$$

### Expression adimensionnée de la contrainte équivalente de VON MISES :

La contrainte équivalente  $\sigma_{\text{eq}}(\underline{x}, t)$  de Von Mises s'écrit sous forme adimensionnée :

$$\bar{\sigma}_{\text{eq}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \underline{\tilde{s}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \right\| = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\tilde{s}} \cdot \underline{\tilde{s}})}. \quad (5.59)$$

### Expression adimensionnée du tenseur des taux de déformation plastique :

En notant  $\underline{\tilde{d}}_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})$  le tenseur adimensionné des taux de déformation plastique, nous avons :

$$\underline{\tilde{d}}_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = \dot{\varepsilon}_p \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\tilde{s}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}. \quad (5.60)$$

### Expressions adimensionnées des modèles rhéologiques

Après adimensionnement, le modèle rhéologique Scg s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = \min\left(\frac{Y_{\text{max}}}{\tilde{Y}}, \frac{Y_0}{\tilde{Y}} [1 + \beta \cdot \varepsilon_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})]^\eta\right) \cdot \tilde{G}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}), \\ \tilde{G}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = \left[1 + \tilde{g} \cdot \tilde{P} - \tilde{h}_\Theta \left(\tilde{\theta} - \frac{300}{\tilde{\Theta}}\right)\right] \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \tilde{\theta}}{\left(\frac{\Theta_F}{\tilde{\Theta}} - \tilde{\theta}\right)}\right). \end{array} \right. \quad (5.61)$$

$$\left. \right\} \quad (5.62)$$

Nous faisons ici apparaître 3 nouveaux nombres sans dimensions :

$$\mathbf{N}_5 = \left(\frac{Y_{\text{max}}}{\tilde{Y}}\right), \mathbf{N}_6 = \left(\frac{Y_0}{\tilde{Y}}\right) \text{ et } \mathbf{N}_7 = \left(\frac{\Theta_F}{\tilde{\Theta}}\right).$$

### Adimensionnement des conditions de consistance et persistance

Les expressions adimensionnées des conditions de consistance et persistance s'écrivent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\phi}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = 0, \\ \dot{\varepsilon}_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \dot{\tilde{\phi}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = 0, \\ \dot{\varepsilon}_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \geq 0, \\ \tilde{\phi}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \leq 0. \end{array} \right. \quad (5.63)$$

$$\left. \right\} \quad (5.64)$$

$$\left. \right\} \quad (5.65)$$

$$\left. \right\} \quad (5.66)$$

### Expression adimensionnée de la déformation plastique cumulée

Sous forme adimensionnée, nous calculons la déformation plastique cumulée à l'aide des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p(M, \tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \bar{\varepsilon}_p(M, \tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \Delta\tilde{t}} \dot{\bar{\varepsilon}}_p(\underline{\tilde{x}}(M), \tilde{t}) d\tilde{t}, \end{array} \right. \quad (5.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\varepsilon}}_p(\underline{\tilde{x}}(M), \tilde{t}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{\dot{d}}}_p(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \right\|. \end{array} \right. \quad (5.68)$$

### Expressions adimensionnées des conditions de régularités

Les champs des vitesses adimensionnées  $\underline{\underline{v}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})$  et  $\underline{\underline{V}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})$ , ainsi que le champ de température adimensionné  $\tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})$  vérifient les conditions de régularité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{v}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu), \forall \tilde{t} > 0, \end{array} \right. \quad (5.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{V}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu), \forall \tilde{t} > 0, \end{array} \right. \quad (5.70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu), \forall \tilde{t} > 0. \end{array} \right. \quad (5.71)$$

### Adimensionnement des conditions aux limites spatio-temporelles

#### Conditions initiales adimensionnées :

— Valeurs initiales dans  $\Omega_\mu(0)$ , pour  $\tilde{t} > 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p(\underline{\tilde{x}}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{v}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{v}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = \left( \frac{\underline{\underline{V}}_0}{\underline{\underline{V}}_X} \right), \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_u(0), \end{array} \right. \quad (5.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, 0) = \left( \frac{\Theta_0}{\Theta} \right), \end{array} \right. \quad (5.76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_\mu(\underline{\tilde{x}}, 0) = \tilde{\rho}_M(\underline{\tilde{x}}, 0) = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right). \end{array} \right. \quad (5.77)$$

L'écriture adimensionnée des conditions initiales nous permet d'introduire 3 nombres sans dimensions supplémentaires. Il s'agit de :

$$\mathbf{N}_8 = \left( \frac{\underline{\underline{V}}_0}{\underline{\underline{V}}_X} \right), \mathbf{N}_9 = \left( \frac{\Theta_0}{\Theta} \right) \text{ et } \mathbf{N}_{10} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right).$$



**Conditions aux limites adimensionnées**

— Condition de bord libre imposée sur  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_\sigma(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = 0, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u. \quad (5.78)$$

— Condition de flux nul imposée sur  $\Gamma_\theta(T)$  :

$$-\tilde{\kappa}_\mu(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})}{\partial \underline{n}_\theta(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})} = 0, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_\theta. \quad (5.79)$$

— Conditions aux limites sur  $\Gamma_\varepsilon$ , déduites des conditions de couplage (eqs. 4.86 à 4.99) :

Comme nous sommes sur la frontière  $\Gamma_\varepsilon$  ceci revient à écrire les conditions aux limites en  $(\tilde{x}, \tilde{z} = 1)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{v}}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) = \underline{\tilde{V}}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}), \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_\varepsilon = \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_\varepsilon, \\ -\tilde{\kappa}_\mu(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \underline{n}_\varepsilon} = 0. \end{array} \right. \quad (5.80)$$

$$\quad (5.81)$$

$$\quad (5.82)$$

**Conditions aux limites à l'interface potentielle de contact  $\Gamma_C$** 

— Conditions de contact unilatéral sur  $\Gamma_C$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_C(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \geq 0, \quad \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C, \\ \tilde{g}_C(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{f}_N(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = 0, \\ \tilde{f}_N(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \leq 0, \\ ([\underline{\tilde{v}}](\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_C) \cdot \tilde{f}_N = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.83) \\ (5.84) \\ (5.85) \\ (5.86) \end{array}$$

— Modèle de frottement sur  $\Gamma_C$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{f}}_{T,2} = -\underline{\tilde{f}}_{T,1} = -\tilde{\lambda} \cdot [\underline{\tilde{v}}](\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}), \quad \tilde{\lambda} \geq 0, \\ \underline{\tilde{f}}_T = \min \left\{ \mu_0 \cdot \tilde{f}_N, \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{\max}}{\hat{Y}\sqrt{3}} (1 + g\tilde{P}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) - \tilde{h}_\Theta(\tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})}{\frac{\Theta_F}{\hat{\Theta}} - \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})}\right) \right\} \end{array} \right. \quad (5.87)$$

$$\left. \right\} \quad (5.88)$$

Nous retrouvons dans la loi de frottement le nombre sans dimension  $\mathbf{N}_5 = \left(\frac{Y_{\max}}{\hat{Y}}\right)$ .

— Condition de flux à l'interface sur  $\Gamma_C$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\tilde{q}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = |\tilde{f}_T(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot [\underline{\tilde{v}}](\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})|, \quad \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C(T), \\ -\tilde{\kappa}_{\mu,1} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \underline{n}_1} = \beta_T \cdot \overset{\circ}{\tilde{q}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}), \quad \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C(T), \\ -\tilde{\kappa}_{\mu,2} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \underline{n}_2} = (1 - \beta_T) \cdot \overset{\circ}{\tilde{q}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}), \quad \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C(T). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.89) \\ (5.90) \\ (5.91) \end{array}$$

— Condition de couplage en cisaillement sur  $\Gamma_C$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{t} \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_C = \underline{t} \cdot \underline{\tilde{\Sigma}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_C, \quad \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C(T), \\ \underline{\tilde{v}} \cdot \underline{n}_C = \underline{\tilde{V}} \cdot \underline{n}_C. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.92) \\ (5.93) \end{array}$$

### 5.1.4 Récapitulatif du problème sans dimension en couche limite

Après introduction des nombres sans dimension, l'ensemble des équations caractérisant le problème local au voisinage de l'interface s'écrit :

#### Lois de conservation :

— Conservation de la masse :

$$\frac{d(\tilde{\rho}_\mu - \tilde{\rho}_M)}{d\tilde{t}} + \tilde{\rho}_\mu \cdot \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) - \tilde{\rho}_M \cdot \left( \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{z}} \right) = 0. \quad (5.94)$$

— Conservation de la quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \mathbf{N}_2 \cdot \left( \tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{t}} \right), \\ \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \cdot \left( \tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{t}} \right). \end{array} \right. \quad (5.95)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})}{\partial \tilde{z}} = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \cdot \left( \tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{t}} \right). \end{array} \right. \quad (5.96)$$

— Conservation de l'énergie interne :

$$\tilde{\rho}_\mu \frac{d\tilde{e}_\mu}{d\tilde{t}} = \tilde{\sigma}_{\text{eq}} \cdot \tilde{\dot{\epsilon}}_p - \mathbf{N}_1 \cdot \left( \tilde{P} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{P} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) + \mathbf{N}_1^2 \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\kappa}_\mu}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\kappa}_\mu}{\partial \tilde{z}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{\kappa}_\mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2}. \quad (5.97)$$

#### Equations constitutives de la thermique :

— Equation d'état en température adimensionnée :

$$\tilde{e}_\mu(\tilde{x}, \tilde{t}) = e(\tilde{\rho}_\mu(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{t})). \quad (5.98)$$

#### Équations constitutives de la plasticité :

— Partition du tenseur des contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{s}_{xx} - \tilde{\mathbb{S}}_{XX}) = \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ}), \\ (\tilde{s}_{yy} - \tilde{\mathbb{S}}_{YY}) = \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ}), \\ (\tilde{s}_{zz} - \tilde{\mathbb{S}}_{ZZ}) = \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}), \\ (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ}) = (\tilde{s}_{xz} - \tilde{\mathbb{S}}_{XZ}). \end{array} \right. \quad (5.99)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{s}_{yy} - \tilde{\mathbb{S}}_{YY}) = \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ}), \\ (\tilde{s}_{zz} - \tilde{\mathbb{S}}_{ZZ}) = \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}), \end{array} \right. \quad (5.100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{s}_{zz} - \tilde{\mathbb{S}}_{ZZ}) = \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}), \\ (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ}) = (\tilde{s}_{xz} - \tilde{\mathbb{S}}_{XZ}). \end{array} \right. \quad (5.101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ}) = (\tilde{s}_{xz} - \tilde{\mathbb{S}}_{XZ}). \end{array} \right. \quad (5.102)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{P} - \tilde{\mathbb{P}}) = -\frac{1}{3} ((\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\Sigma}_{XX}) + (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\Sigma}_{YY}) + (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\Sigma}_{ZZ})) \end{array} \right. \quad (5.103)$$

— Equations d'état en pression :

$$\tilde{P} = \mathbf{P}(\tilde{\rho}_\mu, \tilde{\epsilon}_\mu). \quad (5.104)$$

— Loi de comportement élastoplastique :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{N}_4 \cdot \mathbf{N}_1 \cdot \left\{ \dot{s}_{xx} - \dot{S}_{XX} \right\} &= 2 \left\{ \frac{2}{3} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{V}_X)}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{V}_Z)}{\partial \tilde{z}} \right\} - \mathbf{N}_4 \cdot \tilde{\tau}_{xz} \cdot \left\{ \mathbf{N}_1^2 \cdot \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} \right\} \\ &+ \mathbf{N}_4 \cdot \tilde{\mathbb{T}}_{XZ} \cdot \left\{ \mathbf{N}_1^2 \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{z}} \right\} - 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{s}_{xx}}{\tilde{\sigma}_{eq}} + 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{S}_{XX}}{\tilde{\Sigma}_{eq}}, \end{aligned} \right. \quad (5.105)$$

$$\mathbf{N}_4 \cdot \mathbf{N}_1 \cdot \left\{ \dot{s}_{yy} - \dot{S}_{YY} \right\} = -2 \left\{ \frac{1}{3} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{V}_X)}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{3} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{V}_Z)}{\partial \tilde{z}} \right\} - 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{s}_{yy}}{\tilde{\sigma}_{eq}} + 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{S}_{YY}}{\tilde{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.106)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{N}_4 \cdot \mathbf{N}_1 \cdot \left\{ \dot{s}_{zz} - \dot{S}_{ZZ} \right\} &= 2 \left\{ \frac{2}{3} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{V}_Z)}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{3} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{V}_X)}{\partial \tilde{x}} \right\} - \mathbf{N}_4 \cdot \tilde{\tau}_{xz} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} - \mathbf{N}_1^2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} \right\} \\ &+ \mathbf{N}_4 \cdot \tilde{\mathbb{T}}_{XZ} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{z}} - \mathbf{N}_1^2 \cdot \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{x}} \right\} - 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{s}_{zz}}{\tilde{\sigma}_{eq}} + 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{S}_{ZZ}}{\tilde{\Sigma}_{eq}}, \end{aligned} \right. \quad (5.107)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{N}_4 \cdot \mathbf{N}_1 \cdot \left\{ \dot{\tau}_{xz} - \dot{\mathbb{T}}_{XZ} \right\} &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial(\tilde{v}_x - \tilde{V}_X)}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{2} \mathbf{N}_1^2 \frac{\partial(\tilde{v}_z - \tilde{V}_Z)}{\partial \tilde{x}} \right\} - \mathbf{N}_4 \cdot \left( \frac{\tilde{s}_{xx} - \tilde{s}_{zz}}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} - \mathbf{N}_1^2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} \right\} \\ &+ \mathbf{N}_4 \cdot \left( \frac{\tilde{S}_{XX} - \tilde{S}_{ZZ}}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{z}} - \mathbf{N}_1^2 \frac{\partial \tilde{V}_Z}{\partial \tilde{x}} \right\} - 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\tau}_{xz}}{\tilde{\sigma}_{eq}} + 3 \dot{\epsilon}_p \frac{\tilde{\mathbb{T}}_{XZ}}{\tilde{\Sigma}_{eq}}. \end{aligned} \right. \quad (5.108)$$

— Critère de plasticité :

$$\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) - \tilde{Y}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}). \quad (5.109)$$

— Contrainte équivalente :

$$\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\tilde{s}}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\tilde{s}} : \underline{\tilde{s}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\tilde{s}} \cdot \underline{\tilde{s}})}. \quad (5.110)$$

— Loi d'écoulement plastique :

$$\underline{\tilde{d}}_p(\tilde{\mathbf{x}}(M), \tilde{t}) = \dot{\epsilon}_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\tilde{s}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}. \quad (5.111)$$

— Modèle rhéologique :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{Y}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &= \min(\mathbf{N}_5, \mathbf{N}_6 [1 + \beta \cdot \tilde{\epsilon}_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})]^\eta) \cdot \tilde{G}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \end{aligned} \right. \quad (5.112)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{G}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &= (1 + \tilde{g} \cdot \tilde{P} - \tilde{h}_\Theta(\tilde{\theta} - \mathbf{N}_9)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \tilde{\theta}}{\mathbf{N}_7 - \tilde{\theta}}\right). \end{aligned} \right. \quad (5.113)$$

— Conditions de consistance/persistence :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (5.114)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \dot{\tilde{\phi}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (5.115)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &\geq 0, \end{aligned} \right. \quad (5.116)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &\leq 0. \end{aligned} \right. \quad (5.117)$$

— Déformation plastique cumulée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_p(M, \tilde{t} + \Delta \tilde{t}) = \tilde{\varepsilon}_p(M, \tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \Delta \tilde{t}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_p(\underline{\tilde{x}}(M), \tilde{t}) d\tilde{t}, \end{array} \right. \quad (5.118)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\varepsilon}}_p(\underline{\tilde{x}}(M), \tilde{t}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{\tilde{d}}}_{\underline{\underline{p}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \right\|. \end{array} \right. \quad (5.119)$$

— Conditions de régularités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{v}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu), \forall \tilde{t} > 0, \end{array} \right. \quad (5.120)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{V}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu), \forall \tilde{t} > 0, \end{array} \right. \quad (5.121)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\theta}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_\mu), \forall \tilde{t} > 0. \end{array} \right. \quad (5.122)$$

**Conditions initiales adimensionnées :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.123)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_p(\underline{\tilde{x}}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.124)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{v}}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.125)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{v}}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = \mathbf{N}_8, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_u(0), \end{array} \right. \quad (5.126)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\theta}}}(\underline{\tilde{x}}, 0) = \mathbf{N}_9, \end{array} \right. \quad (5.127)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\rho}}}_\mu(\underline{\tilde{x}}, 0) = \underline{\underline{\tilde{\rho}}}_M(\underline{\tilde{x}}, 0) = \mathbf{N}_{10}. \end{array} \right. \quad (5.128)$$

**Conditions aux limites adimensionnées**

— Condition de bord libre imposée sur  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{\underline{n}}_\sigma(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = 0, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u. \quad (5.129)$$

— Condition de flux nul imposée sur  $\Gamma_\theta$  :

$$-\underline{\underline{\tilde{\kappa}}}_\mu(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{\theta}}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})}{\partial \underline{\underline{n}}_\theta(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})} = 0, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_\theta. \quad (5.130)$$

— Conditions aux limites sur  $\Gamma_\varepsilon$ , déduites des conditions de couplage (eqs. 4.93 à 4.95) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{v}}}(\underline{\tilde{x}}, 1, \tilde{t}) = \underline{\underline{\tilde{V}}}(\underline{\tilde{x}}, 1, \tilde{t}), \end{array} \right. \quad (5.131)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\tilde{x}}, 1, \tilde{t}) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon = \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}(\underline{\tilde{x}}, 1, \tilde{t}) \cdot \underline{\underline{n}}_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.132)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\underline{\underline{\tilde{\kappa}}}_\mu(\underline{\tilde{x}}, 1, \tilde{t}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{\theta}}}}{\partial \underline{\underline{n}}_\varepsilon} = 0. \end{array} \right. \quad (5.133)$$

**Conditions aux limites à l'interface potentielle de contact  $\Gamma_C$** 

— Conditions de contact unilatéral sur  $\Gamma_C$  :

$$\begin{cases} \tilde{g}_C(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \geq 0, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C, & (5.134) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{g}_C(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{f}_N(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = 0, & (5.135) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_N(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \leq 0, & (5.136) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ([\underline{\tilde{v}}](\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_C) \cdot \tilde{f}_N = 0. & (5.137) \end{cases}$$

— Modèle de frottement sur  $\Gamma_C$  :

$$\begin{cases} \underline{\tilde{f}}_{T,2} = -\underline{\tilde{f}}_{T,1} = -\tilde{\lambda} \cdot [\underline{\tilde{v}}](\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}), \tilde{\lambda} \geq 0, & (5.138) \\ \tilde{f}_T = \min \left\{ \mu_0 \cdot \tilde{f}_N, \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{N}_5}{\sqrt{3}} (1 + g\tilde{P}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) - \tilde{h}_\Theta(\tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) - 300)) \cdot \exp \left( \frac{-\xi \cdot \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})}{\frac{\Theta_F}{\Theta} - \tilde{\theta}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})} \right) \right\} & (5.139) \end{cases}$$

— Condition de flux à l'interface sur  $\Gamma_C$  :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) = |\tilde{f}_T(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot [\underline{\tilde{v}}](\underline{\tilde{x}}, \tilde{t})|, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C(T), & (5.140) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\tilde{\kappa}_{\mu,1} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \underline{n}_1} = \beta_T \cdot \dot{\tilde{q}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}), & (5.141) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\tilde{\kappa}_{\mu,2} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \underline{n}_2} = (1 - \beta_T) \cdot \dot{\tilde{q}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}). & (5.142) \end{cases}$$

— Condition de couplage en cisaillement sur  $\Gamma_C$  :

$$\begin{cases} \underline{t} \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_C = \underline{t} \cdot \underline{\tilde{\Sigma}}(\underline{\tilde{x}}, \tilde{t}) \cdot \underline{n}_C, \forall \underline{\tilde{x}} \in \Gamma_C(T), & (5.143) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\tilde{v}} \cdot \underline{n}_C = \underline{\tilde{V}} \cdot \underline{n}_C. & (5.144) \end{cases}$$

Dix coefficients sans dimension interviennent dans ce système adimensionné,

$$\begin{array}{llll} \bullet \mathbf{N}_1 = \frac{\hat{h}}{\hat{L}} & \bullet \mathbf{N}_2 = \rho \frac{\hat{h} \cdot \hat{L}}{\hat{Y} \cdot \hat{T}^2} & \bullet \mathbf{N}_3 = \frac{\hat{Y} \hat{h} \hat{L}}{\hat{\kappa} \hat{\Theta} \hat{T}} = 1 & \bullet \mathbf{N}_4 = \frac{\hat{Y}}{G_0} \\ \bullet \mathbf{N}_6 = \frac{\hat{Y}_0}{\hat{Y}} & \bullet \mathbf{N}_7 = \frac{\Theta_F}{\hat{\Theta}} & \bullet \mathbf{N}_8 = \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_x} & \bullet \mathbf{N}_9 = \frac{\Theta_0}{\hat{\Theta}} \\ & & & \bullet \mathbf{N}_5 = \frac{Y_{\max}}{\hat{Y}} \\ & & & \bullet \mathbf{N}_{10} = \frac{\rho_0}{\hat{\rho}} \end{array}$$

En fonction de la valeur prise par chacun de ces nombres, certains termes vont devenir négligeables, ou au contraire prépondérants. Cela dépend des valeurs caractéristiques choisies pour l'adimensionnement du problème.

## ■ 5.2 Analyse et simplification du problème en écart adimensionné

### 5.2.1 Estimation des nombres sans dimension et des valeurs caractéristiques

Afin de déterminer l'ordre de grandeur des nombres sans dimension  $\mathbf{N}_1$  à  $\mathbf{N}_{10}$  caractérisant le problème, il est nécessaire de fixer les variables d'adimensionnement. Rappelons dans notre cas qu'il s'agit des 12 grandeurs caractéristiques suivantes :

- le temps caractéristique  $\hat{T}$
- l'épaisseur caractéristique  $\hat{h}$
- la contrainte caractéristique  $\hat{Y}$
- la densité caractéristique  $\hat{\rho}$
- la vitesse caractéristique longitudinale  $\hat{V}_X$
- la vitesse de déformation plastique  $\hat{\mathbb{E}}_p = \left( \frac{\hat{V}_X}{\hat{h}} \right)$
- la longueur caractéristique  $\hat{L} = (\hat{V}_X \cdot \hat{T})$
- la température caractéristique  $\hat{\Theta}$
- l'énergie interne caractéristique  $\hat{e} = \left( \frac{\hat{Y}\hat{L}}{\hat{\rho}\hat{h}} \right)$
- la conductivité thermique caractéristique  $\hat{\kappa} = \left( \frac{\hat{Y}\hat{h}\hat{L}}{\hat{\Theta}\hat{T}} \right)$
- la vitesse caractéristique transverse  $\hat{V}_Z = (\hat{h}/\hat{T})$
- la déformation plastique cumulée  $\hat{\mathbb{E}}_p = \left( \frac{\hat{L}}{\hat{h}} \right)$

Par la suite, nous choisissons :

- le temps caractéristique  $\hat{T}$  arbitraire,
- la contrainte caractéristique  $\hat{Y} = Y_0$  la limite élastique initiale,
- la température caractéristique  $\hat{\Theta} = \Theta_F$  la température de fusion,
- la densité caractéristique  $\hat{\rho} = \rho_0$  la densité initiale.

Nous prenons également comme vitesse longitudinale caractéristique, la célérité élastique  $\hat{V}_X = \zeta_L$ , où  $\zeta_L$  est une propriété intrinsèque du matériau définie comme la racine carré du rapport entre son module de cisaillement  $G_0$  et sa densité  $\rho_0$  :

$$\zeta_L = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}}. \quad (5.145)$$

Enfin, nous prenons  $\hat{\kappa} = \kappa_0$ , où  $\kappa_0$  est la conductivité du matériau dans son état initial.

Suite à ce choix, les valeurs caractéristiques restantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bullet \hat{L} &= (\zeta_L \cdot \hat{T}) & \bullet \hat{h} &= \left( \frac{\kappa_0 \theta_F \hat{T}}{Y_0 \hat{L}} \right) = \left( \frac{\kappa_0 \theta_F}{Y_0 \zeta_L} \right) \\ \bullet \hat{e} &= \left( \frac{Y_0^2 \zeta_L^2 \hat{T}}{\rho_0 \kappa_0 \Theta_F} \right) & \bullet \hat{V}_Z &= \left( \frac{\kappa_0 \theta_F}{Y_0 \zeta_L \hat{T}} \right) \\ \bullet \hat{\mathbb{E}}_p &= \left( \frac{Y_0 \zeta_L^2}{\kappa_0 \Theta_F} \right) & \bullet \hat{\mathbb{E}}_p &= \left( \frac{Y_0 \zeta_L^2 \hat{T}}{\kappa_0 \Theta_F} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'expression des nombres sans dimension,

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbf{N}_1 &= \frac{\hat{h}}{\hat{L}} = \left( \frac{\kappa_0 \Theta_F}{Y_0 \zeta_L^2 \hat{T}} \right) & \bullet \mathbf{N}_2 &= \left( \frac{\rho_0 \kappa_0 \Theta_F}{Y_0^2 \hat{T}} \right) & \bullet \mathbf{N}_3 &= 1 \\
 \bullet \mathbf{N}_4 &= \left( \frac{Y_0}{G_0} \right) & \bullet \mathbf{N}_5 &= \left( \frac{Y_{\max}}{Y_0} \right) & \bullet \mathbf{N}_6 &= 1 \\
 \bullet \mathbf{N}_7 &= 1 & \bullet \mathbf{N}_8 &= \left( \frac{V_0}{\zeta_L} \right) & \bullet \mathbf{N}_9 &= \left( \frac{\Theta_0}{\Theta_F} \right) \\
 \bullet \mathbf{N}_{10} &= 1
 \end{aligned}$$

Le problème en couche limite est donc caractérisé par six nombres sans dimension dont deux sont fonction du temps caractéristique  $\hat{T}$  :

- le nombre sans dimension  $\mathbf{N}_1$  qui mesure le rapport d'aspect entre l'épaisseur caractéristique  $\hat{h}$  de la couche de diffusion thermique  $\Omega_\mu$  et une longueur caractéristique  $\hat{L}$  de la structure :

$$\mathbf{N}_1 = \left( \frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right) = \left( \frac{\kappa_0 \Theta_F}{Y_0 \zeta_L^2 \hat{T}} \right). \quad (5.146)$$

- le nombre sans dimension  $\mathbf{N}_2$ .

$$\mathbf{N}_2 = \left( \frac{\rho_0 \kappa_0 \Theta_F}{Y_0^2 \hat{T}} \right). \quad (5.147)$$

Nous pouvons interpréter  $N_2$  comme une **mesure des effets d'inertie dans la couche limite  $\Omega_\mu$  située au voisinage de l'interface de glissement.**

Les quatre autres nombres ( $\mathbf{N}_4$ ,  $\mathbf{N}_5$ ,  $\mathbf{N}_8$ ,  $\mathbf{N}_9$ ) mesurent respectivement le rapport entre la limite d'élasticité initiale  $Y_0$  et le module de cisaillement  $G_0$ , le rapport entre la limite d'érouissage  $Y_{\max}$  et la limite d'élasticité initiale  $Y_0$ , le rapport entre la vitesse d'impact  $V_0$  et la célérité élastique  $\zeta_L$ , et le rapport entre la température initiale  $\Theta_0$  et la température de fusion  $\Theta_F$ .

Nous nous proposons de déterminer les ordres de grandeur de ces six nombres sans dimensions en nous appuyant sur les expériences d'impact réalisées au CEA/DAM, pour chaque matériau du couple Aluminium/Acier.

## 5.2.2 Applications numériques dans le cadre des expériences de tir du CEA/DAM

### Configuration des expériences de tir du CEA/DAM

Nous considérons le dispositif expérimental utilisé pour les expériences d'impact T101-T105 que nous avons brièvement présenté au cours du chapitre 1 (voir pp. 38 à 39). La paire tribologique



est constituée d'un matériau guide en acier, tandis que le matériau glissant est en aluminium. Les paramètres expérimentaux retenus pour cette expérience sont les suivants :

Paramètres expérimentaux	Valeurs
- vitesse d'impact $V_0$	250 $m.s^{-1}$
- température initiale $\Theta_0$	300 $K$

Nous considérons également les propriétés matériaux suivantes :

Propriétés thermomécaniques	Aluminium	Acier
- $\rho_0$ , densité en $kg/m^3$	2703	7900
- $\alpha_0$ , diffusivité thermique en $m^2/s$	48.9e-6	4.076e-6
- $\kappa_0$ , conductivité thermique en $W/m.K$	117	16.1
- $Y_0$ , limite d'élasticité initiale en $Pa$	200e6	340e6
- $Y_{max}$ , limite d'écrouissage en $Pa$	680e6	2.5e9
- $G_0$ , module de cisaillement en $Pa$	27.6e9	77e9
- $\Theta_F$ , température de fusion en $K$	1220	2380

Les célérités élastiques  $\zeta_L$  que nous avons introduites précédemment (eq. 5.145) sont déduites de ces données et nous avons :

Propriétés thermomécaniques	Aluminium	Acier
- $\zeta_L$ , célérité élastique $m/s$	3195	3122

### Évaluation des nombres sans dimension ( $N_1, N_2$ )

Notons que pour évaluer les nombres ( $N_1, N_2$ ), le choix du temps caractéristique  $\hat{T}$  utilisé pour adimensionner la variable temps  $t$  va jouer un rôle clef. Nous nous proposons d'en étudier l'influence sur le système final en considérant différents temps caractéristiques  $\hat{T}$ .

**Étude du problème sans dimension aux temps longs** Nous considérons dans un premier temps un problème aux *temps longs*, où le temps caractéristique  $\hat{T}$  correspond au temps caractéristique d'observation de l'expérience qui dans notre cas est de l'ordre de la dizaine de micro-secondes,  $\hat{T} \approx 10\mu s$ . Pour les valeurs caractéristiques retenues, les nombres sans dimension ( $N_1, N_2, N_4$ ) prennent les valeurs suivantes :

Nombre sans dimension	Aluminium	Acier
- $N_1$ , rapport d'aspect :	6.99e-6	1.15e-6
- $N_2$ , effets d'inertie :	9.64e-4	2.612e-4

Sous ces conditions nous obtenons les longueurs caractéristiques suivantes :

Grandeurs caractéristiques	Aluminium	Acier
- $\hat{h}$ , épaisseur caractéristique en $\mu m$ :	0.223	0.361
- $\hat{L}$ , longueur caractéristique en $\mu m$ :	31.9e3	31.2e3

Dans la perspective d'une implémentation numérique du modèle, nous devons également regarder comment ce comporte le problème pour des pas de temps relativement faible, de l'ordre de la nanoseconde. Pour nous en convaincre nous procédons donc à l'étude du problème au temps courts.

**Étude du problème sans dimension aux temps courts** Afin de prendre en compte les variations soudaines des grandeurs thermomécaniques, comme c'est le cas lors de problème d'impact, nous considérons cette fois-ci un temps caractéristique  $\hat{T}$  de l'ordre de la dizaine de nanoseconde,  $\hat{T} \approx 10ns$ . Sous cette condition, l'évaluation des nombres sans dimension dans le cadre de nos applications conduit aux résultats suivants :

Nombre sans dimension	Aluminium	Acier
- $\mathbf{N}_1$ , rapport d'aspect :	6.99e-3	1.15e-3
- $\mathbf{N}_2$ , effets d'inertie :	0.96	0.26

Pour ce choix, nous obtenons cette fois-ci :

Grandeurs caractéristiques	Aluminium	Acier
- $\hat{h}$ , épaisseur caractéristique en $\mu m$ :	0.223	0.0361
- $\hat{L}$ , longueur caractéristique en $\mu m$ :	31.9	31.2

### Évaluation des nombres sans dimension ( $\mathbf{N}_4, \mathbf{N}_5, \mathbf{N}_8, \mathbf{N}_9$ )

Quelque soit le temps caractéristique  $\hat{T}$  retenu, les nombres sans dimension ( $\mathbf{N}_4, \mathbf{N}_5, \mathbf{N}_8, \mathbf{N}_9$ ) prennent les valeurs suivantes :

Nombre sans dimension	Aluminium	Acier
- $\mathbf{N}_4 = Y_0/G_0$ :	0.007	0.004
- $\mathbf{N}_5 = Y_{\max}/Y_0$ :	3.400	7.352
- $\mathbf{N}_8 = \mathbb{V}_0/\zeta_L$ :	0.078	0.080
- $\mathbf{N}_9 = \Theta_0/\Theta_F$ :	0.245	0.126

Notons finalement que le produit  $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_4$  qui intervient dans l'équation adimensionnée de conservation de l'énergie (eq. 5.97) reste dans les deux cas négligeable devant 1.

## ■ 5.3 Le problème asymptotique en couche limite

Suite à l'application numérique que nous venons d'effectuer, nous constatons que le rapport d'aspect est petit ( $\mathbf{N}_1 \ll 1$ ) quelque soit le temps caractéristique retenu et que le rapport entre limite élastique et limite plastique est aussi petit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_1 \ll 1, \\ \mathbf{N}_4 \ll 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.148) \\ (5.149) \end{array}$$

Alors que l'inertie (caractérisée par le nombre sans dimension  $N_2$ ) est négligeable pour des temps caractéristiques  $\hat{T}$  de l'ordre de la dizaine de microseconde, nous constatons que cette approximation n'est plus vraie lorsque nous nous plaçons à l'échelle des temps dynamiques  $\hat{T} \approx 10ns$ . La prise en compte de l'inertie dans notre modèle peut donc être nécessaire.

Dans ce cadre, sous l'hypothèse (eq. 5.148) et (eq. 5.149), nous pouvons supprimer les conditions aux limites latérales sur  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_\sigma$  car les dérivées en  $\tilde{x}$  disparaissent après cette simplification. Nous supprimons également l'équation de conservation de la masse qui n'est plus nécessaire car  $\tilde{v}_z$  n'est pas une variable. Sous ces conditions le problème adimensionné (eqs. 5.94 à 5.144) se simplifie et nous obtenons **un problème unidimensionnel suivant la normale  $\underline{n}_C$  à l'interface**. Finalement, sur l'épaisseur  $\tilde{z} = 1$ , le problème en couche limite s'écrit suivant la normale  $\underline{n}_C$  à l'interface de glissement comme la combinaison :

- d'un problème d'évolution mécanique unidimensionnel  $\forall \tilde{z} \in [0, 1]$ ,
- d'un problème d'évolution thermique unidimensionnel  $\forall \tilde{z} \in [0, 1]$ ,
- d'un modèle d'interface en  $\tilde{z} = 0$ .

**Le problème d'évolution mécanique  $\forall \tilde{z} \in [0, 1]$**  Il est d'abord gouverné par la loi de comportement élastoplastique (eq. 5.108) que nous pouvons intégrer en espace :

$$[\tilde{v}_x(1, \tilde{t}) - \tilde{V}_X(1, \tilde{t})] - [\tilde{v}_x(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{V}_X(\tilde{z}, \tilde{t})] = 3 \int_{\tilde{z}}^1 \dot{\tilde{\epsilon}}_p \frac{\tilde{\tau}_{xz}}{\tilde{\sigma}_{eq}} d\tilde{z} - 3 \int_{\tilde{z}}^1 \dot{\tilde{\epsilon}}_p \frac{\tilde{\tau}_{XZ}}{\tilde{\Sigma}_{eq}} d\tilde{z}. \quad (5.150)$$

Compte-tenu de la relation de couplage imposant l'égalité des vitesses en  $\tilde{z} = 1$ , celle-ci s'écrit finalement :

$$\tilde{V}_X(\tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{v}_x(\tilde{z}, \tilde{t}) + 3 \int_{\tilde{z}}^1 \dot{\tilde{\epsilon}}_p \frac{\tilde{\tau}_{xz}}{\tilde{\sigma}_{eq}} d\tilde{z} - 3 \int_{\tilde{z}}^1 \dot{\tilde{\epsilon}}_p \frac{\tilde{\tau}_{XZ}}{\tilde{\Sigma}_{eq}} d\tilde{z}. \quad (5.151)$$

Nous la complétons par la loi de conservation (eq. 5.95), les équations constitutives de la plasticité (eqs. 5.109 à 5.118), les conditions initiales sur l'état des contraintes (eq. 5.123), le champ des vitesses (eq. 5.125), la déformation plastique (eq. 5.124), les conditions aux limites en  $\tilde{z} = 1$  (eqs. 5.131 et 5.132) ainsi que par la condition de couplage en cisaillement en  $\tilde{z} = 0$  (eq. 5.143). La pression hydrostatique intervient ici au niveau du modèle rhéologique dans la construction du module de cisaillement SCG adimensionné  $\tilde{G}$  (eq. 5.113). En négligeant la contrainte déviatorique  $\tilde{s}_{zz}$  devant la pression  $P$ , nous pouvons la remplacer par la contrainte  $\tilde{\sigma}_{zz}$  dans la définition de  $\tilde{G}$ .

Or d'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement (eq. 5.96) nous avons,

$$\frac{\partial (\tilde{\sigma}_{zz}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{\Sigma}_{ZZ}(\tilde{z}, \tilde{t}))}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (5.152)$$

ce qui d'après la condition de couplage (eq. 5.132) nous donne  $\tilde{\sigma}_{zz}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{\Sigma}_{ZZ}(\tilde{z}, \tilde{t})$ . Par construction, nous avons également,

$$\tilde{\Sigma}_{ZZ}(0, \tilde{t}) = \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = \tilde{\sigma}_{zz}(0, \tilde{t}) = \tilde{f}_N(0, \tilde{t}). \quad (5.153)$$

Le problème mécanique se réduit donc finalement à,

**Équation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial (\tilde{\tau}_{xz} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = \mathbf{N}_2 \cdot \left( \tilde{\rho}_\mu \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\rho}_M \frac{\partial \tilde{V}_X}{\partial \tilde{t}} \right), \quad (5.154)$$

**Loi de comportement élastoplastique intégrée en espace :**

$$\tilde{s}_{xx} \cdot \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_p}{\tilde{\sigma}_{eq}} = \tilde{\mathbb{S}}_{XX} \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbb{E}}}_p}{\tilde{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.155)$$

$$\tilde{s}_{yy} \cdot \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_p}{\tilde{\sigma}_{eq}} = \tilde{\mathbb{S}}_{YY} \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbb{E}}}_p}{\tilde{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.156)$$

$$\tilde{s}_{zz} \cdot \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_p}{\tilde{\sigma}_{eq}} = \tilde{\mathbb{S}}_{ZZ} \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbb{E}}}_p}{\tilde{\Sigma}_{eq}}, \quad (5.157)$$

$$\tilde{V}_X(\tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{v}_x(\tilde{z}, \tilde{t}) + 3 \int_{\tilde{z}}^1 \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_p}{\tilde{\sigma}_{eq}} \tilde{\tau}_{xz} d\tilde{z} - 3 \int_{\tilde{z}}^1 \frac{\dot{\tilde{\mathbb{E}}}_p}{\tilde{\Sigma}_{eq}} \tilde{\mathbb{T}}_{XZ} d\tilde{z}. \quad (5.158)$$

**Critère de plasticité :**

$$\tilde{\phi}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{Y}(\tilde{z}, \tilde{t}). \quad (5.159)$$

**Contrainte équivalente :**

$$\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \underline{\underline{\tilde{s}}}(\tilde{z}, \tilde{t}) \right\| = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{\tilde{s}}} : \underline{\underline{\tilde{s}}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Tr} \left( \underline{\underline{\tilde{s}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{s}}} \right). \quad (5.160)$$

**Loi d'écoulement plastique :**

$$\underline{\underline{\tilde{d}}}_p(\underline{\underline{\tilde{x}}}(M), \tilde{t}) = \dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) \cdot \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\tilde{s}}}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{z}, \tilde{t})}. \quad (5.161)$$

**Modèle rhéologique :**

$$\tilde{Y}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \min \left( \frac{Y_{\max}}{Y_0}, [1 + \beta \cdot \tilde{\epsilon}_p(\tilde{z}, \tilde{t})]^\eta \right) \cdot \tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{t}), \quad (5.162)$$

$$\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{t}) = (1 + \tilde{g} \cdot \tilde{\Sigma}_{ZZ}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{h}_\Theta(\tilde{\theta} - 3\tilde{\theta}_0\Theta_F)) \cdot \exp \left( \frac{-\tilde{\xi} \cdot \tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}} \right). \quad (5.163)$$

**Conditions de consistance/persistance :**

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\phi}(\tilde{z}, \tilde{t}) = 0, \quad (5.164)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) \cdot \dot{\tilde{\phi}}(\tilde{z}, \tilde{t}) = 0, \quad (5.165)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) \geq 0, \quad (5.166)$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{z}, \tilde{t}) \leq 0. \quad (5.167)$$

**Déformation plastique cumulée :**

$$\tilde{\epsilon}_p(M, \tilde{t} + \Delta \tilde{t}) = \tilde{\epsilon}_p(M, \tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \Delta \tilde{t}} \dot{\tilde{\epsilon}}_p(\underline{\underline{\tilde{x}}}(M), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (5.168)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_p(\underline{\underline{\tilde{x}}}(M), \tilde{t}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{\tilde{d}}}_p(\underline{\underline{\tilde{x}}}(M), \tilde{t}) \right\|. \quad (5.169)$$

**Conditions initiales :**

$$\tilde{\epsilon}_p(\tilde{z}, 0) = 0, \quad (5.170)$$

**Condition de couplage en  $\tilde{z} = 1$  :**

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(1, \tilde{t}) \cdot \underline{\underline{n}}_e = \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}(1, \tilde{t}) \cdot \underline{\underline{n}}_e, \quad (5.171)$$

**Le problème d'évolution thermique**  $\forall \tilde{z} \in [0, 1]$  Pour les besoins ultérieurs de notre étude, nous nous proposons de récrire l'équation de conservation de l'énergie adimensionnée (eq. 5.97) en remplaçant le terme  $\tilde{\rho}_\mu(\tilde{z}, \tilde{t}) \frac{d\tilde{e}_\mu(z, t)}{d\tilde{t}}$  par son expression. Pour cela, nous remplaçons la densité d'énergie interne complémentaire  $\tilde{e}_\mu(z, t)$  par l'équation d'état en température (eq. 5.98) :

$$\frac{d\tilde{e}_\mu(\tilde{z}, \tilde{t})}{d\tilde{t}} = \left. \frac{\partial \tilde{e}_\mu(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{P}} \right|_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{d\tilde{\rho}(\tilde{z}, \tilde{t})}{d\tilde{t}} + \left. \frac{\partial \tilde{e}_\mu(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{\tilde{P}} \cdot \frac{d\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\tilde{P}}{d\tilde{t}} + \tilde{c}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) \cdot \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}}. \quad (5.172)$$

Ici,  $\tilde{c}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) = \left. \frac{\partial \tilde{e}_\mu(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{\tilde{P}}$  représente la capacité calorifique à pression constante du matériau considéré. Nous supposons par la suite que l'énergie thermique est insensible à la pression dans la couche d'interface, et nous prenons  $\frac{1}{\Gamma} = 0$ .

Sous cette hypothèse, et en introduisant la diffusivité thermique

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho \cdot c_p}, \quad (5.173)$$

adimensionnée en  $\alpha = \tilde{\alpha} \hat{\alpha}$  avec,

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\rho} \hat{c}_p} = \frac{\kappa_0 \cdot \Theta_F}{\rho_0 \cdot \hat{e}} = \frac{\kappa_0 \cdot \Theta_F \cdot \hat{h}}{Y_0 \cdot \hat{L}}, \quad (5.174)$$

l'équation d'évolution thermique se réduit à,

$$\frac{\tilde{\kappa}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\tilde{\alpha}(\tilde{z}, \tilde{t})} \cdot \frac{d\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{d\tilde{t}} = \tilde{\kappa}(\tilde{z}, \tilde{t}) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}^2} + \tilde{\sigma}_{\text{eq}}(\tilde{z}, \tilde{t}) \cdot \dot{\tilde{e}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}). \quad (5.175)$$

Par la suite nous supposons également que la diffusivité thermique  $\tilde{\alpha}(\tilde{z}, \tilde{t})$  ainsi que la conductivité  $\tilde{\kappa}(\tilde{z}, \tilde{t})$  varient peu au cours du temps et demeurent homogènes en espace sur l'épaisseur  $[0, 1]$ .

La forme adimensionnée de l'équation de l'énergie que nous considérons par la suite s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{d\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{eq}}(\tilde{z}, \tilde{t}) \cdot \dot{\tilde{e}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}). \quad (5.176)$$

Ce modèle d'évolution thermique suppose donc que **la propagation de chaleur au voisinage de l'interface de glissement se fait de manière unidirectionnelle suivant la normale à l'interface**, ce qui semble cohérent compte-tenu des gradients de températures généralement observés.

Le problème d'évolution thermique est donc gouverné par l'équation instationnaire de la conduction que nous venons d'écrire sous forme adimensionnée (eq. 5.176). Elle est complétée par la condition initiale en température (eq. 5.127), ainsi que par les conditions aux limites de Neumann en  $\tilde{z} = 0$  et  $\tilde{z} = 1$  (eqs. 5.140 à 5.142 et 5.133) :

{	<b>Équation instationnaire de la conduction :</b>	$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{eq}} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p, \quad (5.177)$
	<b>Condition initiale en température :</b>	$\tilde{\theta}(\tilde{z}, 0) = \left( \frac{\Theta_0}{\Theta_F} \right), \quad (5.178)$
	<b>Condition de couplage thermique en <math>\tilde{z} = 1</math> :</b>	$-\tilde{\kappa} \cdot \left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{n}_e} \right _{\tilde{z}=1} = 0, \quad (5.179)$
	<b>Condition de flux en <math>\tilde{z} = 0</math> :</b>	$-\tilde{\kappa} \cdot \left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} \right _{\tilde{z}=0} = \beta_T \cdot \overset{\circ}{\tilde{q}}(0, \tilde{t}). \quad (5.180)$

Remarquons ici que l'indépendance de l'énergie thermique par rapport à la pression dans la couche d'interface permet aussi d'estimer directement la densité en supposant par ailleurs que les parties déviatoriques restent négligeables par rapport au terme de pression. Nous aurons en effet,

$$P(\tilde{z}, \tilde{t}) - \mathbb{P}(\tilde{z}, \tilde{t}) \approx \tilde{\sigma}_{zz}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{\Sigma}(\tilde{z}, \tilde{t}) = 0, \quad (5.181)$$

ce qui donne,

$$\rho_\mu = \rho_\mu(P) = \rho_\mu(\mathbb{P}) = \rho_M(\mathbb{P}) = \rho_M. \quad (5.182)$$

**Le modèle d'interface en  $\tilde{z} = 0$**  permet finalement de gérer le contact et le frottement à l'interface de glissement. Il est gouverné par les équations (eqs. 5.134 à 5.142) :

<b>— Condition de couplage en <math>\tilde{z} = 0</math> :</b>	$\tilde{\tau}_{xz}(0, \tilde{t}) = \tilde{\mathbb{T}}_{XZ}(0, \tilde{t}) = \tilde{F}_T(0, \tilde{t}). \quad (5.183)$
<b>— Conditions de contact unilatéral en <math>\tilde{z} = 0</math> :</b>	
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \geq 0, \\ \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0, \\ \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) \leq 0, \\ ([\tilde{\mathbb{V}}](0, \tilde{t}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_C) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0. \end{array} \right. \quad (5.184)$
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \geq 0, \\ \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0, \\ \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) \leq 0, \\ ([\tilde{\mathbb{V}}](0, \tilde{t}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_C) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0. \end{array} \right. \quad (5.185)$
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \geq 0, \\ \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0, \\ \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) \leq 0, \\ ([\tilde{\mathbb{V}}](0, \tilde{t}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_C) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0. \end{array} \right. \quad (5.186)$
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \geq 0, \\ \tilde{g}_C(0, \tilde{t}) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0, \\ \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) \leq 0, \\ ([\tilde{\mathbb{V}}](0, \tilde{t}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_C) \cdot \tilde{F}_N(0, \tilde{t}) = 0. \end{array} \right. \quad (5.187)$
<b>— Modèle de frottement en <math>\tilde{z} = 0</math> :</b>	
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_{T,2} = -\tilde{f}_{T,1} = -\tilde{\lambda} \cdot [\tilde{\mathbb{V}}](\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \tilde{\lambda} \geq 0, \\ \tilde{f}_T = \min \left\{ \mu_0 \cdot \tilde{f}_N, \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{\text{max}}}{Y_0} (1 + \tilde{g} \cdot \tilde{\Sigma}_{ZZ}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{h}_\Theta(\tilde{\theta} - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}}\right) \right\}. \end{array} \right. \quad (5.188)$
	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_{T,2} = -\tilde{f}_{T,1} = -\tilde{\lambda} \cdot [\tilde{\mathbb{V}}](\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \tilde{\lambda} \geq 0, \\ \tilde{f}_T = \min \left\{ \mu_0 \cdot \tilde{f}_N, \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{\text{max}}}{Y_0} (1 + \tilde{g} \cdot \tilde{\Sigma}_{ZZ}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{h}_\Theta(\tilde{\theta} - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \cdot \tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}}\right) \right\}. \end{array} \right. \quad (5.189)$
<b>— Flux de chaleur généré à l'interface (<math>\tilde{z} = 0</math>) :</b>	
	$\overset{\circ}{\tilde{q}}(0, \tilde{t}) =  \tilde{\tau}(0, \tilde{t}) \cdot [\tilde{\mathbb{V}}]_x(0, \tilde{t}) , \quad (5.190)$

## ■ Conclusion du chapitre

**A**u cours de ce chapitre, nous avons procédé à l'étude dimensionnelle du problème thermo-mécanique régissant le comportement observé au voisinage des interfaces métalliques mis en glissement par choc.

Cette démarche nous a permis de quantifier la prépondérance des phénomènes physiques mis en jeu. Nous montrons notamment que le problème peut se réduire passage à la limite à un simple problème unidimensionnel suivant la direction normale à l'interface de glissement. Dans ce cadre, nous pouvons dès lors négliger les variations des quantités physiques tangentiellement à l'interface. Enfin, nous montrons que les effets d'inertie (mesurés par le nombre sans dimension  $\mathbf{N}_2$ ) peuvent être négligés lorsque nous travaillons aux temps longs ( $\hat{T} \approx 10\mu s$ )

Notons que par construction d'après l'équation (eq. 5.159), nous distinguons deux problèmes d'évolution en fonction de la valeur prise par la fonction de charge  $\phi(z, t)$  (critère de Von Mises) :

- soit une **évolution thermoélastoplastique** lorsque  $\phi(z, t) = 0$ ,
- soit une **évolution thermoélastique** lorsque  $\phi(z, t) < 0$ .

Par la suite, nous nous proposons d'étudier deux cas :

- **un problème thermoélastique quasistatique**, où les effets d'inertie ( $\mathbf{N}_2 \rightarrow 0$ ) sont négligés localement et où l'on suppose que l'évolution mécanique est purement élastique ( $\dot{\epsilon}_p = 0$ ). Seule la composante thermique est donc prise en compte dans ce modèle,
- **un problème thermoélastoplastique quasistatique**, où l'inertie est de nouveau négligée localement ( $\mathbf{N}_2 \rightarrow 0$ ) et où nous tenons cette fois-ci compte de la déformation plastique observée au voisinage de l'interface de glissement.

L'influence de l'inertie au niveau local n'est pas traitée dans cette thèse mais constitue l'une des principales perspectives d'étude envisagée pour la suite de nos travaux. Son étude s'articulera en partie autour du **problème thermoélastoplastique avec inertie** que nous venons d'écrire avec  $\mathbf{N}_2$  non négligeable et où nous tiendrons également compte des effets dus à l'adoucissement thermique et à l'écroutissement mécanique par déformation plastique.







## Analyse de stabilité linéaire du problème asymptotique en couche limite

### ■ Introduction du chapitre

**A** fin de nous assurer de la validité de notre approche et du modèle utilisé pour décrire le comportement aux interfaces de glissement, nous procédons au cours de ce chapitre à l'étude de stabilité linéaire du problème en couche limite obtenu au cours du chapitre précédent (eqs. 5.154 à 5.190, pp. 163 à 165). Cette étude s'inspire notamment des travaux réalisés par Armero et Park (voir [75]) qui traitent un modèle similaire au nôtre, où le milieu étudié est une couche de matière viscoélastoplastique sollicitée en cisaillement. Pour mener à bien cette étude de stabilité, nous avons divisé ce chapitre en trois sections :

- Dans la première section (pp. 170 à 174), nous récapitulons le système différentiel de base, puis nous le linéarisons en considérant de petites perturbations autour d'un état de base solution du problème. Nous exprimons alors ces perturbations sous la forme de modes normaux, ce qui nous permet d'obtenir le problème en perturbation qui nous servira de base à l'étude de stabilité linéaire.
- Nous déterminons dans la seconde section (pp. 174 à 175) une **condition nécessaire et suffisante de stabilité**. En particulier, nous montrons que cette condition relie les modules d'écroutissage  $Y_{\varepsilon_p}$  et d'adoucissement thermique  $Y_{\theta}$  introduits au cours du chapitre 4.
- Finalement, nous nous assurons dans la troisième section (pp. 176 à 180) que cette condition de stabilité est toujours satisfaite dans le cadre de notre modèle, où les matériaux au voisinage de l'interface sont modélisés à l'aide du modèle rhéologique SCG.

## 6.1 Écriture du problème en perturbations

### 6.1.1 Récapitulatif du système différentiel de base

Récapitulons dans un premier temps le système différentiel que nous souhaitons étudier. Pour ce faire, nous considérons le problème asymptotique adimensionné que nous avons obtenu au cours du chapitre précédent (eqs. 5.154 à 5.190, pp. 163 à 165) en considérant une **évolution plastique** à échelle locale et élastique à l'échelle globale :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) \rightarrow 0, & (6.1) \\ \tilde{\phi}(\tilde{z}, \tilde{t}) = 0, & (6.2) \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}) > 0. & (6.3) \end{cases}$$

Compte tenu de l'approximation 6.1, et d'après les équations (eqs. 5.155 à 5.158, pp. 163 à 163), nous avons :

$$\tilde{s}_{xx} = \tilde{s}_{yy} = \tilde{s}_{zz} = 0 \text{ et } \tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{3} \cdot |\tau_{xz}|. \quad (6.4)$$

Dans ce cadre, le problème est gouverné par un système différentiel de premier ordre en temps par rapport aux variables  $(\tilde{\tau}_{xz}, \tilde{v}_x, \dot{\tilde{\epsilon}}_p, \tilde{\theta})$ . Il est formé par l'équation adimensionnée de conservation de la quantité de mouvement (eq. 5.154) et par la loi de comportement adimensionnée (eq. 5.158) qui pour les besoins de cette analyse est écrite sous forme non-intégrée (eq. 5.108), par le critère adimensionné de Von Mises (eq. 5.159) et finalement par l'équation adimensionnée de la conduction (eq. 5.177).

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xz}(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ}(\tilde{z}, \tilde{t}))}{\partial \tilde{z}} = \mathbf{N}_2 \cdot \tilde{\rho} \cdot \left( \frac{\partial(\tilde{v}_x(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{\mathbb{V}}_X(\tilde{z}, \tilde{t}))}{\partial \tilde{t}} \right), & (6.5) \\ \frac{\partial(\tilde{v}_x(\tilde{z}, \tilde{t}) - \tilde{\mathbb{V}}_X(\tilde{z}, \tilde{t}))}{\partial \tilde{z}} = \sqrt{3} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t}), & (6.6) \\ |\tilde{\tau}_{xz}(\tilde{z}, \tilde{t})| \cdot \sqrt{3} = \tilde{Y}(\tilde{\theta}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{F}_N), & (6.7) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}} \cdot |\tilde{\tau}_{xz}(\tilde{z}, \tilde{t})| \cdot |\dot{\tilde{\epsilon}}_p(\tilde{z}, \tilde{t})|. & (6.8) \end{cases}$$

Précisons ici que les grandeurs  $\tilde{\rho}, \tilde{\alpha}, \tilde{\kappa}, \tilde{\mathbb{T}}_{XZ}, \tilde{\mathbb{V}}_X$  et  $\tilde{F}_N$  qui intervient dans le calcul de  $\tilde{Y}$  (eq. 5.162) sont héritées du problème macroscopique. En ce sens, elles seront par la suite traitées comme des paramètres fixes et localement uniformes.

Par la suite, nous considérons le cas d'une évolution quasistatique dans laquelle les effets d'inertie sont négligés et nous prenons donc  $\mathbf{N}_2 = \mathbf{0}$ . Le système (eqs. 6.5 à 6.8) se simplifie et nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial (\bar{\tau}_{xz}(\bar{z}, \bar{t}) - \bar{\mathbb{T}}_{XZ}(\bar{z}, \bar{t}))}{\partial \bar{z}} = 0, & (6.9) \\ \frac{\partial (\bar{v}_x(\bar{z}, \bar{t}) - \bar{\mathbb{V}}_X(\bar{z}, \bar{t}))}{\partial \bar{z}} = \sqrt{3} \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_p(\bar{z}, \bar{t}), & (6.10) \\ |\bar{\tau}_{xz}(\bar{z}, \bar{t})| \cdot \sqrt{3} = \bar{Y}(\bar{\theta}, \bar{\epsilon}_p, \bar{F}_N), & (6.11) \\ \frac{\partial^2 \bar{\theta}(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\theta}(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = -\frac{\sqrt{3}}{\bar{\kappa}} \cdot |\bar{\tau}_{xz}(\bar{z}, \bar{t})| \cdot |\dot{\bar{\epsilon}}_p(\bar{z}, \bar{t})|. & (6.12) \end{cases}$$

### 6.1.2 Linéarisation du problème

Plaçons nous au cœur de la couche limite. Nous linéarisons le système précédent (eqs. 6.9 à 6.12) en considérant de petites perturbations  $\mathcal{S}_0 = \{\delta \bar{\tau}, \delta \bar{v}, \delta \bar{\epsilon}_p, \delta \bar{\theta}\}$  autour d'un état de base localement homogène  $\mathcal{S}_0 = \{\bar{\tau}_0, \bar{v}_0, \bar{\epsilon}_{p,0}, \dot{\bar{\epsilon}}_{p,0}, \bar{\theta}_0\}$  à l'échelle des perturbations que nous étudions avec  $\bar{\tau}_0 > 0$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}_{p,0} > 0$ . Comme il y a échauffement et diffusion thermique du fait du produit  $\dot{\bar{\epsilon}}_{p,0} \cdot \bar{\tau}_0$ , cela veut dire que nous travaillons aux toutes petites échelles de perturbations en temps ou en espace sur lesquelles nous pouvons négliger la contribution de  $\dot{\bar{\epsilon}}_{p,0}$  aux changements de déformation plastique et de température, et négliger la contribution des conditions aux limites. Nous posons (voir [76]) :

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_0 + \delta \bar{\tau}, & (6.13) \\ \bar{v}_x = \bar{v}_0 + \delta \bar{v}_x, & (6.14) \\ \bar{\epsilon}_p = \bar{\epsilon}_{p,0} + \delta \bar{\epsilon}_p, & (6.15) \\ \dot{\bar{\epsilon}}_p = \dot{\bar{\epsilon}}_{p,0} + \frac{\partial \delta \bar{\epsilon}_p}{\partial t}, & (6.16) \\ \bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \delta \bar{\theta}. & (6.17) \end{cases}$$

Nous reportons alors les expressions (6.13) à (6.17), dans le système (eqs. 6.9 à 6.12). Pour linéariser la limite élastique  $\bar{Y}(\bar{\theta}, \bar{\epsilon}_p, \bar{F}_N)$  qui intervient dans le critère adimensionné de Von Mises (eq. 5.159), rappelons que pour une fonction  $f(x, y)$  donnée la linéarisation en un point  $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$  autour de l'état de base  $(x_0, y_0)$  est obtenue à l'aide de la relation suivante (eq. 6.18) :

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) = f(x_0, y_0) + \delta x \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + \delta y \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}. \quad (6.18)$$

Pour la limite élastique  $\bar{Y}(\bar{\theta}, \bar{\epsilon}_p, \bar{F}_N)$ , en rappelant que  $\bar{F}_N$  est ici traité comme un paramètre, nous obtenons :

$$\bar{Y}(\bar{\epsilon}_{p,0} + \delta \bar{\epsilon}_p, \bar{\theta}_0 + \delta \bar{\theta}) = \bar{Y}(\bar{\epsilon}_{p,0}, \bar{\theta}_0) + \delta \bar{\epsilon}_p \cdot \left. \frac{\partial \bar{Y}(\bar{\epsilon}_p, \bar{\theta})}{\partial \bar{\epsilon}_p} \right|_{\bar{\epsilon}_{p,0}, \bar{\theta}_0} + \delta \bar{\theta} \cdot \left. \frac{\partial \bar{Y}(\bar{\epsilon}_p, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \right|_{\bar{\epsilon}_{p,0}, \bar{\theta}_0}. \quad (6.19)$$

Nous reconnaissons dans cette expression (eq. 6.19) les modules adimensionnés d'adoucissement thermique  $\tilde{Y}_{\tilde{\theta}}$  et d'érouissage  $\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p}$ , exprimés dans l'état de base  $\mathcal{S}_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_{\tilde{\theta}} = \frac{\partial Y(\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\theta})}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\theta}_0}, \\ \tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} = \frac{\partial Y(\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\theta})}{\partial \tilde{\varepsilon}_p} \Big|_{\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\theta}_0}. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

$$\left. \right\} \quad (6.21)$$

Le système perturbé s'écrit alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\tilde{\tau}_0 + \delta \tilde{\tau} - \tilde{\mathbb{T}}_{XZ})}{\partial \tilde{z}} = 0, \end{array} \right. \quad (6.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\tilde{v}_0 + \delta \tilde{v}_x - \tilde{\mathbb{V}}_X)}{\partial \tilde{z}} = \sqrt{3} \left( \dot{\tilde{\varepsilon}}_{p,0} + \frac{\partial \delta \tilde{\varepsilon}_p}{\partial \tilde{t}} \right), \end{array} \right. \quad (6.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\tau}_0 + \delta \tilde{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \tilde{Y}(\tilde{\varepsilon}_{p,0}, \tilde{\theta}_0) + \tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} \cdot \delta \tilde{\varepsilon}_p + \tilde{Y}_{\tilde{\theta}} \cdot \delta \tilde{\theta} \right\}, \end{array} \right. \quad (6.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (\tilde{\theta}_0 + \delta \tilde{\theta})}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial (\tilde{\theta}_0 + \delta \tilde{\theta})}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}} \cdot (\tilde{\tau}_0 + \delta \tilde{\tau}) \cdot \left( \dot{\tilde{\varepsilon}}_{p,0} + \frac{\partial \delta \tilde{\varepsilon}_p}{\partial \tilde{t}} \right). \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Comme nous ne nous intéressons qu'au premier ordre en perturbation, ceci nous conduit à négliger le terme  $(\delta \tilde{\theta} \cdot \delta \dot{\tilde{\varepsilon}}_p)$  apparaissant dans l'équation (eq. 6.25). Après soustraction de l'état de base  $\mathcal{S}_0$ , le problème en perturbations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta \tilde{\tau}}{\partial \tilde{z}} = 0, \end{array} \right. \quad (6.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\partial \delta \tilde{\varepsilon}_p}{\partial \tilde{t}}, \end{array} \right. \quad (6.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} \cdot \delta \tilde{\varepsilon}_p + \tilde{Y}_{\tilde{\theta}} \cdot \delta \tilde{\theta} \right), \end{array} \right. \quad (6.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \delta \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial \delta \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}} \cdot \left( \tilde{\tau}_0 \cdot \frac{\partial \delta \tilde{\varepsilon}_p}{\partial \tilde{t}} + \delta \tilde{\tau} \cdot \dot{\tilde{\varepsilon}}_{p,0} \right). \end{array} \right. \quad (6.29)$$

### 6.1.3 Développement des perturbations en modes normaux

L'objectif de l'analyse de stabilité linéaire consiste à montrer que les petites perturbations  $\delta \tilde{\tau}$ ,  $\delta \tilde{v}$ ,  $\delta \tilde{\varepsilon}_p$ , et  $\delta \tilde{\theta}$  solution du problème (eqs. 6.26 à 6.29) décroissent avec le temps. Afin de déterminer l'amplification ou l'atténuation de ces perturbations, nous les exprimons sous la forme de modes normaux (voir [75]) solutions élémentaires du problème posé indépendamment des conditions aux limites, de

sorte que pour une perturbation  $\delta\mathcal{B}$  quelconque nous ayons :

$$\delta\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}} \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \tilde{\omega}\tilde{t})} \quad (6.30)$$

Le terme  $\hat{\mathcal{B}}$  est appelé **fonction d'amplitude**. Le coefficient  $\tilde{k}$  correspond quant à lui au **nombre d'onde** caractérisant les perturbations, et  $\tilde{\omega}$  représente leur **pulsation propre**. Enfin nous notons  $i = \sqrt{-1}$ . Dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire, nous choisissons  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\omega}$ , tels que :

$$\begin{cases} \tilde{k} \in \mathbb{R}, \tilde{k} > 0 \\ \tilde{\omega} \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (6.31)$$

$$(6.32)$$

Rappelons que l'ensemble des fonction  $e^{i\tilde{k}\tilde{z}}$ ,  $\tilde{k} \in \mathbb{R}$  forme une base de l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ . Nous notons  $\Im(\tilde{\omega})$  la partie imaginaire de la pulsation propre,  $\Re(\tilde{\omega})$  sa partie réelle, et nous avons :

$$\delta\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}} \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \tilde{\omega}\tilde{t})} = \hat{\mathcal{B}} \cdot e^{i\{\tilde{k}\tilde{z} - (\Re(\tilde{\omega}) + i\Im(\tilde{\omega})) \cdot \tilde{t}\}} = \hat{\mathcal{B}} \cdot e^{\Im(\tilde{\omega})\tilde{t}} \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \Re(\tilde{\omega})\tilde{t})}. \quad (6.33)$$

La quantité  $e^{\Im(\tilde{\omega})}$  est appelée **coefficient d'amplification** et permet de définir la croissance temporelle de la perturbation. Dans ce cas, la stabilité temporelle de l'écoulement de base est soumise aux conditions suivantes (voir [76]) :

- S'il existe  $\tilde{\omega}$  solution avec  $\Im(\tilde{\omega}) > 0$ , alors la solution de base  $\mathcal{S}_0$  est instable car il existe une perturbation  $\delta\mathcal{B}$  qui croît avec  $\tilde{t}$ ,
- Si  $\forall \tilde{\omega}, \Im(\tilde{\omega}) < 0$ , alors la solution de base  $\mathcal{S}_0$  est stable car toute perturbation  $\delta\mathcal{B}$  décroît avec  $\tilde{t}$ ,
- Si  $\forall \tilde{\omega}, \Im(\tilde{\omega}) \leq 0$ , alors la stabilité de la solution de base  $\mathcal{S}_0$  est dite *marginale* : toute perturbation reste bornée, mais il peut exister des perturbations qui ne décroissent pas au cours du temps.

Dans notre cas de figure, nous cherchons les solutions perturbées sous la forme,

$$\delta\tilde{\tau} = \hat{\tau} \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \tilde{\omega}\tilde{t})}, \quad (6.34)$$

$$\delta\tilde{v} = \hat{v} \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \tilde{\omega}\tilde{t})}, \quad (6.35)$$

$$\delta\tilde{\varepsilon}_p = \hat{\varepsilon}_p \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \tilde{\omega}\tilde{t})}, \quad (6.36)$$

$$\delta\tilde{\theta} = \hat{\theta} \cdot e^{i(\tilde{k}\tilde{z} - \tilde{\omega}\tilde{t})}. \quad (6.37)$$

En tenant compte de ce développement (eqs. 6.34 à 6.37), le système linéarisé se réduit au système perturbé suivant :

$$\begin{cases} i\tilde{k}\hat{t} = 0, & (6.38) \\ i\tilde{k}\hat{v} = -i\tilde{\omega}\sqrt{3}\cdot\hat{\varepsilon}_p, & (6.39) \\ \hat{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tilde{Y}_{\hat{\varepsilon}_p}\cdot\hat{\varepsilon}_p + \tilde{Y}_{\hat{\theta}}\cdot\hat{\theta}\right), & (6.40) \\ -\tilde{k}^2\hat{\theta} + \frac{i\tilde{\omega}}{\tilde{\alpha}}\cdot\hat{\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}}\left(-i\tilde{\omega}\tilde{\tau}_0\hat{\varepsilon}_p + \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,0}\hat{t}\right). & (6.41) \end{cases}$$

Nous en déduisons  $\hat{t} = 0$  d'après la première équation, et le système linéarisé s'écrit suite à cette simplification :

$$\begin{cases} i\tilde{k}\hat{v} + i\tilde{\omega}\sqrt{3}\cdot\hat{\varepsilon}_p = 0, & (6.42) \\ \tilde{Y}_{\hat{\varepsilon}_p}\cdot\hat{\varepsilon}_p + \tilde{Y}_{\hat{\theta}}\cdot\hat{\theta} = 0, & (6.43) \\ \frac{\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}}i\tilde{\omega}\tilde{\tau}_0\hat{\varepsilon}_p + \tilde{k}^2\hat{\theta} - \frac{i\tilde{\omega}}{\tilde{\alpha}}\cdot\hat{\theta} = 0. & (6.44) \end{cases}$$

Après multiplication de la première équation par  $-i$  et de la dernière équation par  $\tilde{\alpha}$ , nous récrivons ce système perturbé sous une forme matricielle simple qui servira de base à notre étude de stabilité linéaire :

$$\mathbf{M}\cdot\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{k} & \tilde{\omega}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \tilde{Y}_{\hat{\varepsilon}_p} & \tilde{Y}_{\hat{\theta}} \\ 0 & \frac{\tilde{\alpha}\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}}i\tilde{\omega}\tilde{\tau}_0 & \tilde{\alpha}\tilde{k}^2 - i\tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{\varepsilon}_p \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.45)$$

où  $\underline{\mathbf{B}}$  est le vecteur des fonctions d'amplitude et  $\mathbf{M}$  est une matrice fonction de  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\omega}$ .

## ■ 6.2 Analyse de stabilité du problème

### 6.2.1 Relation de dispersion

Par définition  $\underline{\mathbf{B}} = 0$  est solution, mais nous recherchons une solution non nulle. Une telle solution ne peut exister que si la matrice  $\mathbf{M}$  n'est pas inversible, c'est à dire uniquement si son déterminant est nul ( $\det(\mathbf{M}) = 0$ ).

Celui ci s'écrit dans notre cas :

$$\det(\mathbf{M}) = \tilde{k}\tilde{Y}_{\hat{\varepsilon}_p}\cdot(\tilde{\alpha}\tilde{k}^2 - i\tilde{\omega}) - \tilde{k}\tilde{Y}_{\hat{\theta}}\cdot\left(\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{3}}{\tilde{\kappa}}i\tilde{\omega}\tilde{\tau}_0\right). \quad (6.46)$$

Pour qu'une solution non nulle existe, nous devons donc vérifier :

$$\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} \tilde{\alpha} \tilde{k}^2 - i \tilde{\omega} \tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} - i \tilde{\omega} \tilde{Y}_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\tilde{\alpha} \sqrt{3}}{\tilde{\kappa}} \tilde{\tau}_0 = 0, \quad (6.47)$$

et nous en déduisons l'expression de la pulsation propre,

$$\tilde{\omega} = \frac{-i \tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} \tilde{\alpha} \tilde{k}^2}{\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} + \tilde{Y}_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\tilde{\alpha} \sqrt{3}}{\tilde{\kappa}} \tilde{\tau}_0}. \quad (6.48)$$

## 6.2.2 Condition de stabilité

D'après les conditions énoncées p. 173, la stabilité du problème d'évolution thermoélastoplastique quasistatique est assurée si et seulement si :

$$\Im(\tilde{\omega}) = \frac{-\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} \tilde{\alpha} \tilde{k}^2}{\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} + \tilde{Y}_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\tilde{\alpha} \sqrt{3}}{\tilde{\kappa}} \tilde{\tau}_0} \leq 0. \quad (6.49)$$

Précisons ici que la diffusivité  $\tilde{\alpha}$  et la conductivité  $\tilde{\kappa}$  sont supposées positives tout comme la contrainte de cisaillement ( $\tilde{\tau}_0 > 0$ ). Enfin, nous rappelons que :

- $\tilde{Y}_{\tilde{\theta}} < 0$  car une augmentation de la température  $\tilde{\theta}$  contribue à la diminution du seuil de plasticité  $\tilde{Y}$ ,
- $\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} > 0$  car une augmentation de  $\tilde{\varepsilon}_p$  contribue à l'augmentation de  $\tilde{Y}$  par écrouissage.

Remarquons également que le cas particulier  $\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} = 0$  assure d'après (eq. 6.49) la **stabilité marginale du problème**. Il en va de même lorsque  $k = 0$ .

D'après (eq. 6.49), comme  $\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p}$  est positif, **une condition nécessaire et suffisante de stabilité** va être :

$$\tilde{Y}_{\tilde{\varepsilon}_p} > -\tilde{Y}_{\tilde{\theta}} \cdot \tilde{\tau}_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\kappa}}. \quad (6.50)$$

En d'autres termes, le problème d'évolution quasi-statique en couche limite devient instable lorsque l'écrouissage local ne compense pas l'adoucissement thermique observé au voisinage de l'interface. Assurons nous que cette condition est toujours vérifiée dans le cas de matériau SCG.



## ■ 6.3 Validation de la condition de stabilité

### 6.3.1 Passage en variables dimensionnées

Afin de nous assurer de la stabilité du problème thermoélastoplastique quasistatique, nous nous proposons dans un premier temps de récrire la condition de stabilité (eq. 6.50) en variables dimensionnées. Il suffit pour ce faire de multiplier l'inégalité (eq. 6.50) par  $\frac{\hat{Y}}{\hat{\mathbb{E}}_p} = \frac{Y_0 \hat{h}}{\hat{L}}$  et de remarquer que l'on a d'après l'équation (eq. 5.174, p. 164) :

$$\frac{Y_0}{\hat{\mathbb{E}}_p} \cdot \hat{Y}_{\varepsilon_p} = Y_{\varepsilon_p}, \quad (6.51)$$

pour le module d'érouissage, et que le dimensionnement du terme  $\tilde{Y}_\theta \cdot \tilde{\tau}_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\kappa}}$  s'écrit :

$$\tilde{Y}_\theta \cdot \tilde{\tau}_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\kappa}} \times \frac{Y_0 \cdot \hat{h}}{\hat{L}} = Y_\theta \cdot \tilde{\tau}_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{\hat{h} \cdot \Theta_F}{\hat{L}}, \quad (6.52)$$

$$= Y_\theta \cdot \tau_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{\hat{h} \cdot \Theta_F}{\hat{L} \cdot Y_0}, \quad (6.53)$$

$$= Y_\theta \cdot \tau_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\kappa}}, \quad (6.54)$$

$$= Y_\theta \cdot \tau_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{\kappa}. \quad (6.55)$$

L'inégalité de stabilité (eq. 6.50) se réduit donc après dimensionnement à :

$$Y_{\varepsilon_p} > -Y_\theta \cdot \tau_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{\kappa}. \quad (6.56)$$

### 6.3.2 Expressions des modules $Y_{\varepsilon_p}$ , $Y_\theta$ et de la contrainte $\tau_0$

Nous nous proposons maintenant de remplacer les dérivées partielles  $Y_{\varepsilon_p}$ ,  $Y_\theta$  et la contrainte  $\tau_0$  par leurs expressions respectives. Dans le cadre de notre modèle, les deux modules  $Y_{\varepsilon_p}$ ,  $Y_\theta$  sont déterminés à partir du modèle rhéologique SCG retenu pour modéliser la limite élastique des matériaux au voisinage de l'interface (voir eqs. 5.162 et 5.163, p. 163). Nous nous proposons par la même occasion de vérifier les inégalités ( $Y_\theta < 0$ ,  $\tilde{Y}_{\varepsilon_p} > 0$ ) annoncées précédemment (voir p. 175).

Pour cela, rappelons que le modèle rhéologique SCG s'écrit sous forme dimensionnée :

$$\begin{cases} Y(\bar{\varepsilon}_p, \theta) = \min \{ Y_{\max}, Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_p)^\eta \} \cdot \frac{G(\theta)}{G_0}, \\ G(\theta) = G_0 \cdot (1 + g F_N - h_\Theta (\theta - 300)) \cdot \exp\left(\frac{-\xi \theta}{\Theta_F - \theta}\right). \end{cases} \quad (6.57)$$

$$(6.58)$$

Pour rappel, le terme exponentiel qui apparaît dans l'expression du module de cisaillement  $G(\theta)$  a été introduit par G.Ball, R.Winter et al. (voir [12]) afin de modéliser l'adoucissement de la limite élastique au voisinage de la température de fusion  $\Theta_F$  des matériaux et vérifie :

$$0 < \exp\left(\frac{-\xi \theta}{\Theta_F - \theta}\right) < 1, \quad \forall \theta \in [\Theta_0, \Theta_F]. \quad (6.59)$$

Rappelons également que lorsque  $\xi = 0$ , nous retrouvons la formulation originelle du modèle SCG (voir [59]) telle que nous l'avons introduite au cours du Chapitre 2 (eqs. 2.35 et 2.36 p.56).

Précisons enfin que pour la majorité des métaux les coefficients SCG  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $g$  et  $h_\Theta$  sont toujours positifs (voir [59]). Comme la limite élastique  $Y(\varepsilon_p, \theta)$  est par définition positive nous devons donc avoir :

$$G(\theta) > 0, \quad (6.60)$$

ce qui limite la valeur que peut prendre le coefficient d'adoucissement thermique à  $h_\Theta (\Theta_F - 300) \leq 1$ .

### Expression du module d'écroissage plastique $Y_{\bar{\varepsilon}_p}$ :

En ce qui concerne la dérivée partielle de la limite élastique  $Y(\bar{\varepsilon}_p, \theta)$  par rapport à la déformation plastique  $\bar{\varepsilon}_p$  deux cas se présentent :

— A saturation, c'est à dire lorsque  $Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^\eta = Y_{\max}$  nous avons,

$$Y_{\bar{\varepsilon}_p} = 0. \quad (6.61)$$

Dans ce cas de figure, et comme nous l'avons énoncé précédemment, le problème d'évolution thermoélastoplastique quasistatique est marginalement stable.

— Si la limite d'écroissage  $Y_{\max}$  n'a pas été atteinte, alors nous avons dans l'état de base  $\mathcal{S}_0$ ,

$$Y_{\bar{\varepsilon}_p} = \left. \frac{\partial Y(\bar{\varepsilon}_p, \theta)}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \right|_{\bar{\varepsilon}_{p,0}, \theta_0} = \eta \beta Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^{\eta-1} \cdot \frac{G(\theta_0)}{G_0}. \quad (6.62)$$

Comme  $G(\theta_0) > 0$ , il en résulte qu'une augmentation de la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}_{p,0}$  tend à augmenter la limite élastique  $Y$  par écroissage. Le cas saturé étant marginalement stable, nous ne considérons par la suite que le cas non-saturé  $Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^\eta < Y_{\max}$  avec,

$$Y_{\bar{\varepsilon}_p} = \left. \frac{\partial Y(\bar{\varepsilon}_p, \theta)}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \right|_{\bar{\varepsilon}_p, \theta_0} = \eta \beta Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_p)^{\eta-1} \cdot \frac{G(\theta_0)}{G_0} \geq 0. \quad (6.63)$$

### Expression du module d'adoucissement thermique $Y_\theta$ :

La dérivée partielle de la limite élastique  $Y(\bar{\varepsilon}_p, \theta)$  par rapport à la température  $\theta$  s'écrit dans l'état de base  $\mathcal{S}_0$  :

$$Y_\theta = \left. \frac{\partial Y(\bar{\varepsilon}_p, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\bar{\varepsilon}_p, \theta_0} = \min \{ Y_{\max}, Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_p)^\eta \} \cdot \frac{1}{G_0} \left. \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0}. \quad (6.64)$$

D'après l'équation (eq. 6.58) nous avons,

$$\left. \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -G_0 \cdot h_\Theta \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta_0}{\Theta_F - \theta_0}\right) - G_0 \cdot (1 + gF_N - h_\Theta (\theta_0 - 300)) \cdot \frac{\xi \cdot \Theta_F}{(\Theta_F - \theta_0)^2} \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta_0}{\Theta_F - \theta_0}\right), \quad (6.65)$$

soit de manière équivalente<sup>1</sup>,

$$\left. \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -G_0 \cdot h_\Theta \exp\left(\frac{-\xi \cdot \theta_0}{\Theta_F - \theta_0}\right) - \frac{\xi \cdot \Theta_F \cdot G(\theta_0)}{(\Theta_F - \theta_0)^2}. \quad (6.67)$$

Nous retiendrons pour la suite l'expression de  $Y_\theta$  dans le cas non saturé,

$$Y_\theta = Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_p)^\eta \cdot \frac{1}{G_0} \left. \frac{\partial G(\theta_0)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \leq 0. \quad (6.68)$$

avec  $\left. \frac{\partial G(\theta_0)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0}$  déterminé par (eq. 6.65)

Ce résultat confirme qu'une augmentation de température contribue à la diminution de la limite élastique des métaux SCG.

### Expression de la contrainte $\tilde{\tau}_0 \in \mathcal{S}_0$ solution de base :

Comme nous considérons une évolution plastique, nous avons dans le cas non-saturé :

1. Précisons que dans le cas où  $\xi = 0$  (formulation originelle du modèle SCG (voir [59])) nous avons,

$$\left. \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -G_0 \cdot h_\Theta < 0. \quad (6.66)$$

$$\tau_0 \sqrt{3} = Y(\bar{\varepsilon}_{p,0}, \theta_0) = Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^\eta \cdot \frac{G(\theta_0)}{G_0}. \quad (6.69)$$

### 6.3.3 Réécriture de la condition de stabilité dans le cas de matériaux SCG

Regardons maintenant si la condition de stabilité (eq. 6.56) est vérifiée dans le cadre de notre modèle. Pour rappel, nous devons montrer que :

$$Y_{\bar{\varepsilon}_p} > -Y_\theta \cdot \tau_0 \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{\kappa}.$$

En remplaçant  $Y_{\bar{\varepsilon}_p}$ ,  $Y_\theta$  et  $\tau_0$  par leur expressions respectives (eqs. 6.63, 6.68 et 6.69) prises dans le cas non saturé, la condition de stabilité (eq. 6.50) s'écrit :

$$\eta \beta Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^{\eta-1} \cdot \frac{G(\theta_0)}{G_0} > -Y_0^2 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^{2\eta} \cdot \frac{G(\theta_0)}{G_0} \cdot \frac{1}{G_0} \frac{\partial G(\theta_0)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{\alpha}{\kappa}. \quad (6.70)$$

Après simplification la condition de stabilité (eq. 6.56) se réduit donc à l'inégalité :

$$-\frac{Y_0}{G_0} \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot (1 + \beta \bar{\varepsilon}_{p,0})^{\eta+1} \cdot \frac{\alpha}{\eta \beta \kappa} < 1. \quad (6.71)$$

Si on exprime cette inégalité en terme de déformation plastique maximale, la condition de stabilité s'écrit alors,

$$\bar{\varepsilon}_{p,0} \leq \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\eta \beta \kappa}{\alpha \cdot Y_0} \right) \left( \frac{G_0}{-\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}} \right) \right\}^{\frac{1}{\eta+1}} - \frac{1}{\beta}. \quad (6.72)$$

avec  $\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$  déterminée par l'équation (eq. 6.65).

### 6.3.4 Validation de la condition de stabilité par application numérique

Nous nous proposons de vérifier cette condition par application numérique en considérant un problème de frottement entre un matériau en aluminium et un matériau en acier dont les propriétés mécaniques sont rappelées ci-après :

Propriétés thermomécaniques	Aluminium	Acier
- $\rho_0$ , densité en $kg/m^3$	2703	7900
- $\alpha_0$ , diffusivité thermique en $m^2/s$	48.9e-6	4.076e-6
- $\kappa_0$ , conductivité thermique en $W/m.K$	117	16.1
- $Y_0$ , limite d'élasticité initiale en $Pa$	200e6	340e6
- $Y_{max}$ , limite d'écrouissage en $Pa$	680e6	2.5e9
- $G_0$ , module de cisaillement en $Pa$	27.6e9	77e9
- $\Theta_F$ , température de fusion en $K$	1220	2380
<b>Coefficients du modèle SCG</b>		
- $\beta$ , coefficient d'écrouissage sans dimension	125	43
- $\eta$ , coefficient d'écrouissage sans dimension	0.10	0.35
- $g$ , module d'endurcissement en $Pa^{-1}$	6.52e-11	2.26e-11
- $h_\theta$ , module d'adoucissement thermique en $K^{-1}$	6.16e-4	4.55e-4

Nous avons ici représenté l'évolution du terme  $\frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\eta\beta\kappa}{\alpha \cdot Y_0} \right) \left( \frac{G_0}{-\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}} \right) \right\}^{\frac{1}{\eta+1}} - \frac{1}{\beta}$  avec la température  $\theta$  en considérant des pressions de contact  $F_N = (0, 40 GPa)$  caractéristiques de nos applications.

Pour l'aluminium (voir figure 6.1 p.181) nous constatons que la condition de stabilité impose une déformation maximale  $0.8 < \bar{\epsilon}_{p,0} < 1.2$  tant que la température au sein de la couche limite n'est pas trop proche de la température de fusion.

Il en va de même pour l'acier (voir figure 6.2 p.182)

Il en va de même de pour l'acier (voir figure 6.2).

**Le problème thermomécanique au voisinage de l'interface de glissement est donc conditionnellement stable en couche d'interface pour le modèle SCG. Il reste stable en deçà d'une déformation plastique moyenne de l'ordre de 100% non atteinte dans nos cas de figure (voir Partie 3).**

## ■ Conclusion du chapitre

**N**ous venons d'étudier la stabilité du problème au voisinage de l'interface. La condition nécessaire et suffisante de stabilité que nous obtenons (eq. 6.50) et qui impose que l'écrouissage compense l'adoucissement thermique en cas de déformation plastique n'est valable que pour des déformations plastiques modérées dans la couche d'interface. Elle est violée lorsque la température est au voisinage de la température de fusion  $\Theta_F$ . Il faudra donc vérifier dans les résultats numériques si le niveau de plasticité intérieure dans la couche limite de frottement reste borné, même si l'interface subit des fortes déformations plastiques.

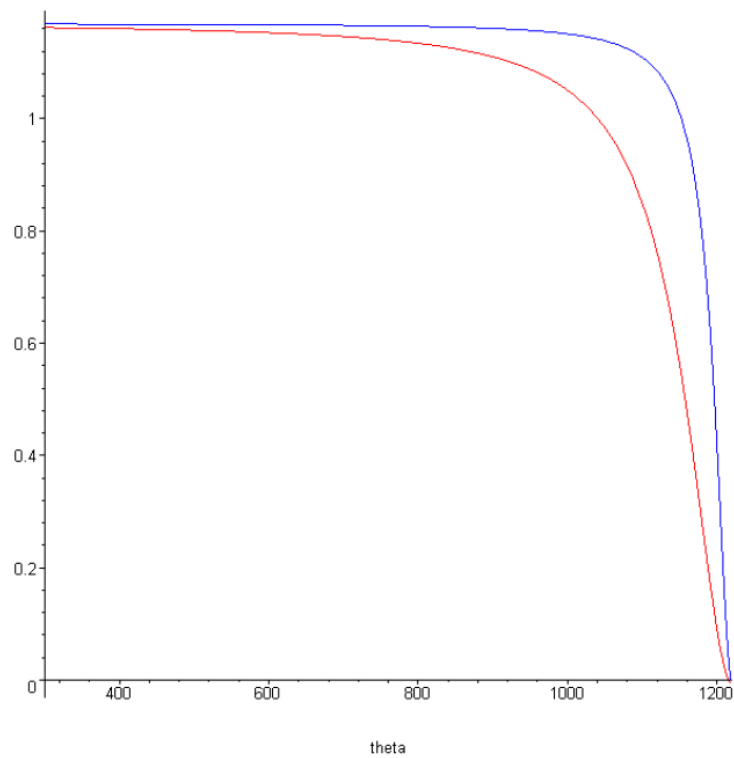


FIGURE 6.1 – Évolution en couche limite de la déformation plastique  $\bar{\epsilon}_{p,0}$  maximale avec la température  $\theta$  pour un matériau en aluminium, et pour des pressions de contact  $F_N = 0 \text{ GPa}$  (courbe bleue) et  $F_N = 40 \text{ GPa}$  (courbe rouge).

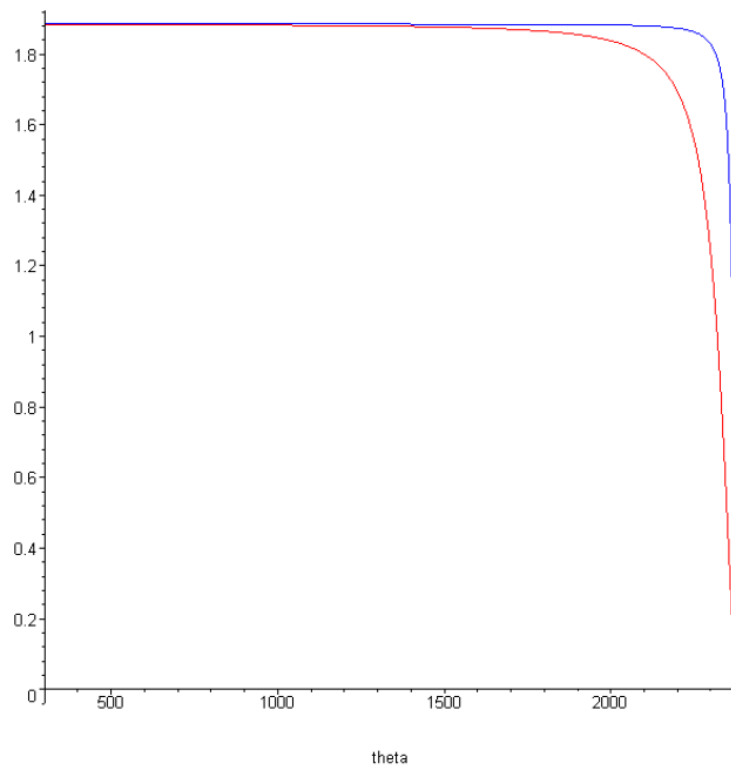


FIGURE 6.2 – Évolution en couche limite de la déformation plastique  $\bar{\epsilon}_{p,0}$  maximale avec la température  $\theta$  pour un matériau en acier, et pour des pressions de contact  $F_N = 0 \text{ GPa}$  (courbe bleue) et  $F_N = 40 \text{ GPa}$  (courbe rouge).







Troisième partie

## **Implémentation et résolution numérique**



## Introduction de la troisième partie

### ■ La stratégie de résolution numérique

**D**ans cette troisième partie, nous procédons à l'implémentation numérique du modèle multi-échelles au sein du code de calcul hydrodynamique retenu pour cette étude. Pour permettre une résolution plus fine de l'interface de glissement et ainsi prendre en compte l'ensemble des phénomènes thermomécaniques mis en jeu à son voisinage direct, la stratégie de couplage numérique que nous avons retenue considère deux problèmes discrétisés de manière indépendante (voir figure 6.3, pp. 188) :

- un problème global, qui rend compte des phénomènes observés à l'échelle de la structure et qui est résolu par le code hydrodynamique à l'aide du schéma explicite que nous avons présenté en détails au cours du Chapitre 3 (pp. 79 à 109).
- un problème local, que nous venons d'écrire sous forme adimensionnée et qui permet de traiter le comportement au voisinage de l'interface de glissement (voir Chapitre 5, pp. 163 à 165). Il est quant à lui traité par un modèle de sous-mailles que nous présentons ici.

Les deux problèmes sont résolus ensemble. Le pas de temps  $\Delta t$  est imposé par le code hydrodynamique, de sorte que  $\Delta t = \Delta T$ . Compte-tenu de la structure explicite du code hydrodynamique et de la structure unidimensionnelle du code local, le problème couplé se décompose en une série de petits problèmes indépendants couplant un problème de cellule frontière à un problème local. Ce problème local étant unidimensionnel, nous le résolvons en chacun des noeuds de l'interface discrète macroscopique suivant la normale au bras guide (voir figure 6.3.a, pp. 188)

### ■ La discrétisation retenue à l'échelle locale

Du fait de notre approche par décomposition de domaine, plusieurs méthodes numériques peuvent être employées pour discrétiser le problème local, comme la méthode des éléments finis ou les différences finies.

Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi de discrétiser le problème local à l'aide d'un schéma aux différences finies. Après développement asymptotique, le problème local ne fait apparaître des dérivées que suivant la direction transverse. Le problème local se découple donc en une série de

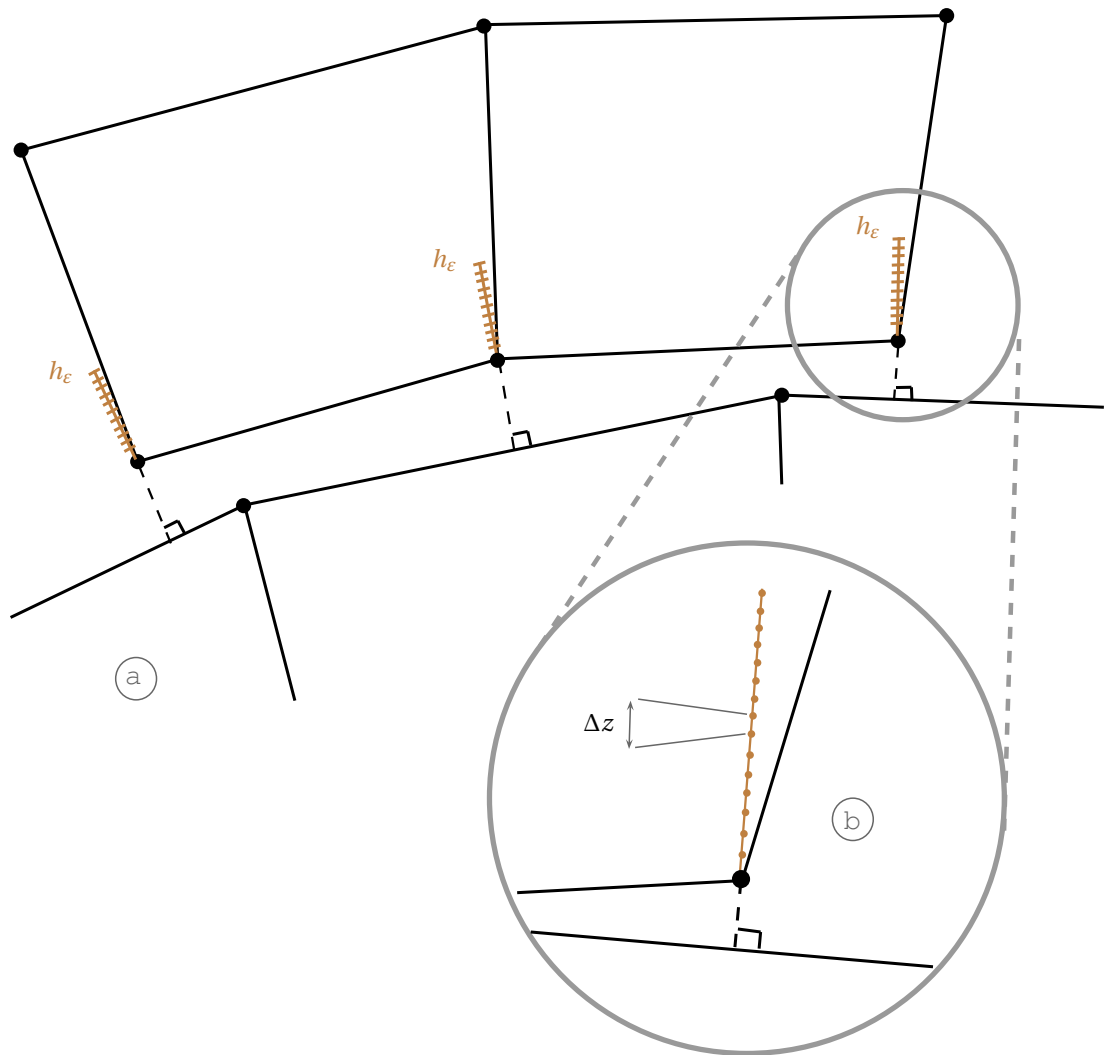


FIGURE 6.3 – Stratégie de couplage numérique : le problème global et le problème local sont chacun discrétisé de manière indépendante (figure a). Le comportement à l'interface est résolu en chacun des noeuds de l'interface discrète par un modèle de sous-maille (figure b).

problèmes indépendants de dimension un en espace, à résoudre sur le domaine  $[0, h_\epsilon]$ . Un problème de ce type est résolu pour chacun des nœuds situés à la frontière du maillage global.

- La discrétisation spatiale que nous avons choisie pour traiter le problème local consiste à définir une **discrétisation en sous-maillages, uniforme en espace**. Pour cela nous décomposons le domaine unidimensionnel  $\Omega_\mu = [0, h_\epsilon]$  en  $M$  sous-maillages d'épaisseurs  $\Delta z = h_\epsilon / M$  identiques. Nous obtenons ainsi un maillage (voir figure 6.3.b, p.188) constitué de  $N = M + 1$  nœuds repérés par leurs positions discrètes  $z_i$ , de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} [0, h_\epsilon] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [z_i, z_i + \Delta z] \\ z_i = i \cdot \Delta z, \Delta z = h_\epsilon / M, i = 0, N \end{array} \right. \quad (6.73)$$

$$(6.74)$$

- En ce qui concerne le **schéma de discrétisation temporel** utilisé pour résoudre le problème local, deux choix s'offrent à nous : nous pouvons soit avoir recours à un schéma explicite tel que le schéma centré en temps utilisé par le code hydrodynamique, soit opter pour un schéma implicite plus coûteux à mettre oeuvre. Cependant un schéma explicite ne garantit la convergence que sous certaines conditions. Il nous oblige en effet à tenir compte d'une condition CFL reliant le pas d'espace local  $\Delta z$  au pas de temps  $\Delta t$ . Ce dernier étant imposé par le code hydrodynamique, l'emploi d'un schéma explicite nous oblige à utiliser un maillage spatial adaptatif. Cette option n'étant pas envisageable car extrêmement coûteuse, nous avons donc opté pour un **schéma d'intégration implicite en temps** qui nous permet de conserver le même maillage (eqs. 6.73 à 6.74) au cours du temps et qui nous garantit également une **stabilité inconditionnelle**. De plus, le choix d'un schéma implicite permet d'imposer directement les conditions d'admissibilité à vérifier par la solution du problème local :

- la température  $\theta(z, t)$  au voisinage de l'interface ne doit pas excéder la température de fusion  $\Theta_F$  des matériaux,
- la contrainte de cisaillement  $\tau(z, t)$  observée au voisinage de l'interface ne doit pas dépasser la limite d'écrouissage  $Y_{\max}$  des matériaux.

Dès lors, la forme discrète servant de base à la procédure d'intégration en temps nous est donnée à l'instant discret  $t^n$  et pour tout champ tensoriel  $\mathcal{B}$  d'ordre quelconque par :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right)^n = \dot{\mathcal{B}}^n = \frac{\mathcal{B}^n - \mathcal{B}^{n-1}}{\Delta t} \quad (6.75)$$

## ■ Principe de résolution du problème couplé

Le problème couplé que nous venons de définir est résolu lors de l'étape de gestion du frottement, dont nous avons détaillé l'algorithme de résolution au cours du Chapitre 3 (pp. 103 à 106). Pour respecter l'architecture de cet algorithme, la méthode de résolution numérique consiste de nouveau à corriger les vitesses de glissement libres  $\underline{v}^*(\underline{X}_i) \cdot \underline{t}$  de chacun des nœuds  $\underline{X}_i$  situés sur l'interface

discrète, en calculant pour ce faire une dérive  $\delta \underline{v}(\underline{X}_i) \cdot \underline{t}$  à l'aide du modèle local et du problème macroscopique en  $\underline{X}_i$ . Pour rappel, les équations traitées à l'échelle macroscopique pour corriger les vitesses sont les suivantes :

• **Résolution de la dynamique au noeud d'interface à l'instant  $T^{n+1/2}$**

— Calcul de la densité d'efforts  $\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  appliquée à l'instant  $T^n$

$$\underline{F}(\underline{X}_i)^n = \sum_k \left( \underline{\Sigma}(\Omega_k)^n : \int_{\Gamma_k} \underline{\Phi}(\underline{X}_i) \cdot \underline{n}_{\Gamma_k} d\Gamma \right). \quad (6.76)$$

— Détermination des accélérations libres  $\underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n$

$$\underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n = \frac{\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)}. \quad (6.77)$$

— Calcul des vitesses libres

$$\underline{v}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n \cdot \Delta T^n + \underline{v}(\underline{X}_i)^{n-1/2} \quad (6.78)$$

• **Gestion du contact par détermination d'une pression de surface  $\mathbb{P}_S$  et correction de la composante normale des vitesses libres**

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta F_N(\underline{X}_i)^n = \frac{\mathbb{P}_S^n \cdot l}{2} \text{ et } F_N(\underline{X}_i)^n = \frac{\delta F_N(\underline{X}_i)^n}{\mathcal{S}(\underline{X}_i)^n}, \end{array} \right. \quad (6.79)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \underline{v}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_C = \frac{\delta F_N(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n, \end{array} \right. \quad (6.80)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n} = \underline{v}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n} - \delta \underline{v}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}. \end{array} \right. \quad (6.81)$$

• **Gestion du frottement et correction de la composante tangentielle des vitesses libres**

$$\left\{ \begin{array}{l} F_\star^n = \frac{[\underline{v}^*]^{n+1/2}}{\Delta T^n} \left( \frac{m_G \cdot m(\underline{X}_i)}{m_G + m(\underline{X}_i)} \right), \end{array} \right. \quad (6.82)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \underline{v}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \frac{\min(\delta F_T^n(\underline{X}_i), F_\star^n(\underline{X}_i))}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n, \end{array} \right. \quad (6.83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \underline{v}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} - \delta \underline{v}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t}. \end{array} \right. \quad (6.84)$$

TABLE 6.1 – Récapitulatif des équations discrètes résolues en chacun des noeuds d'interface par le code hydrodynamique

Rappelons ici que  $m(\underline{X}_i)$  et  $m_G$  correspondent respectivement à la masse du noeud glissant  $\underline{X}_i$  considéré et à la masse du noeud obtenu par projection de  $\underline{X}_i$  sur le bras guide. Une mesure de la surface nodale nous est quant à elle donnée par  $\mathcal{S}(\underline{X}_i)$ . Enfin,  $F_\star^n(\underline{X}_i)$  représente la force de

soudure et  $\delta F_T^n(\underline{X}_i)$  la force de frottement déduite du modèle local.

Comme les conditions de contact unilatérales (eqs. 5.184 à 5.187) dépendent uniquement de grandeurs macroscopiques, elles sont écrites ici sur le problème global et seront donc absentes du problème local.

Notons finalement que la condition de couplage (eq. 5.183) imposée par le modèle multi-échelles correspond à un **couplage en force**; la contrainte de frottement réelle  $F_T^n = \tau^n$  est identique pour le modèle de sous-maillages et pour le code hydrodynamique. Une fois  $\tau^n$  identifiée, nous en déduisons alors pour chaque nœud  $\underline{X}_i$  une valeur corrigée  $\mathbb{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2}$  de la vitesse relative de glissement qui intègre les phénomènes thermomécaniques observés localement, à savoir l'écrouissage par déformation plastique ainsi que l'adoucissement thermique induit par l'échauffement brutal de l'interface.

## ■ Le plan de cette troisième partie

Cette méthode de résolution numérique est appliquée aux deux cas d'évolution thermomécanique quasi-statique que nous avons introduits en conclusion du chapitre 5 (pp. 166 à 166), où nous considérons que les variations des sollicitations sont suffisamment lentes pour exclure les phénomènes dynamiques dans l'analyse des écarts entre la solution locale et la solution globale prolongée.

- Dans le chapitre 7, nous nous intéressons plus spécifiquement aux aspects thermiques liés à la mise en glissement sous choc d'interfaces métalliques, au rôle joué par la température  $\theta(z, t)$  et à son influence sur la dynamique globale du frottement. Pour ce faire, nous résolvons le problème thermique en négligeant la déformation plastique induite par frottement. Le modèle thermique obtenu est notamment vérifié dans le cas de tirs élastiques, sur la base des expériences d'impact de plaques effectuées par Prakash (voir [31]).
- Finalement, le chapitre 8 intègre la déformation plastique au voisinage de l'interface dans un modèle local quasistatique, et nous permet de quantifier la compétition entre adoucissement thermique et écrouissage mécanique.

Nous éprouvons chacun des deux modèles en procédant au recalage des signaux numériques calculés par simulation avec les signaux expérimentaux obtenus lors des campagnes de tir du CEA/DAM pour un couple Aluminium/Acier.





## Le modèle thermoélastique quasi-statique

### ■ Introduction du chapitre

**D**ans ce chapitre, nous procédons à l'étude approfondie d'un cas d'évolution thermomécanique où l'inertie et la déformation plastique locales sont supposées négligeables au voisinage de l'interface de glissement ( $\mathbf{N}_2 \rightarrow \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \mathbf{0}$ ). Dès lors, seul le mécanisme de conduction thermique est pris en compte. Ce premier cas va notamment nous permettre de déterminer l'histoire des températures au voisinage de l'interface et par la même occasion d'étudier l'influence de l'adoucissement thermique sur la dynamique globale du glissement. Pour cela, nous avons divisé ce chapitre en trois sections :

- Dans un premier temps (section 1, pp. 194 à 196), nous récapitulons le problème simplifié en couche limite que nous écrivons sous forme dimensionnée sur  $\Omega_\mu = [0, h_\varepsilon]$  à partir du problème asymptotique sans dimension obtenu précédemment (eqs. 5.154 à 5.190, pp. 163 à 165).
- Dès lors, nous nous intéressons au cours d'une seconde section (pp. 196 à 211) au problème d'évolution thermique en couche limite, que nous résolvons analytiquement puis numériquement. La solution est validée à partir des expériences de tir présentées par Prakash (voir [31]).
- Finalement, nous récapitulons dans la troisième section (pp. 212 à 229) l'ensemble des équations discrètes gouvernant le problème thermoélastique en couche limite. Nous le résolvons tout d'abord de manière indépendante, en imposant une vitesse de glissement constante à l'interface et nous le validons qualitativement sur la base des résultats obtenus à l'AVE par Ball et Winter (voir [12]). Puis dans un second temps, nous procédons au couplage numérique du modèle avec le code de calcul hydrodynamique retenu pour cette étude. Après avoir présenté le solveur local et l'algorithme utilisé, nous procédons finalement au recalage et à la validation des tirs expérimentaux réalisés au CEA/DAM sur un couple Aluminium/Acier.

## 7.1 Le cas limite thermoélastique quasistatique

### 7.1.1 Les hypothèses de modélisation

Nous rappelons dans un premier temps les hypothèses permettant de nous ramener au cas thermoélastique :

- **Inertie négligeable en couche limite** : L'étude dimensionnelle menée au cours du Chapitre 5 nous enseigne que les effets d'inertie peuvent être négligés au voisinage de l'interface pour des temps d'observation de l'ordre de la dizaine de micro-secondes. Aussi, et pour simplifier notre étude, nous considérons dans un premier temps une évolution quasi-statique locale, ce qui revient à prendre  $\mathbf{N}_2 \rightarrow \mathbf{0}$  dans l'équation de conservation du mouvement (eq. 5.154). Cette dernière se simplifie alors, ce qui revient à écrire sous forme non-adimensionnée que l'inertie locale est égale à l'inertie macroscopique, et permet d'identifier cisaillement local et cisaillement macroscopique :

$$\frac{\partial \tau(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbb{T}_{XZ}(z, t)}{\partial z}, \quad \forall z \in [0, h_\varepsilon]. \quad (7.1)$$

- **Déformation plastique négligeable en couche-limite** : La seconde hypothèse permettant de nous ramener au cas limite thermoélastique consiste à négliger en première approximation la déformation plastique  $\dot{\varepsilon}_p(z, t)$  dans la zone jouxtant l'interface de glissement. Nous supposons qu'il en va de même pour la déformation plastique macroscopique  $\dot{\mathbb{E}}_p(z, t)$  et nous avons :

$$\dot{\varepsilon}_p(z, t) = \dot{\mathbb{E}}_p(z, t) = \mathbf{0}, \quad \forall z \in [0, h_\varepsilon]. \quad (7.2)$$

Ceci revient donc à considérer une **évolution purement élastique à l'interface** et la loi de comportement élastoplastique (eqs. 5.155 à 5.158) est réduite à l'égalité suivante en  $z = 0$  :

$$v_x(0, t) = \mathbb{V}_X(0, t). \quad (7.3)$$

Par la suite nous considérons une formulation analogue, obtenue en soustrayant à l'équation précédente (eq. 7.3), la vitesse d'interface du matériau situé en vis à vis. La loi de comportement élastoplastique intégrée en espace sur  $[0, h_\varepsilon]$  s'écrit alors comme une fonction des vitesses relatives de glissement microscopique  $[v](0, t) = [\underline{v}] \cdot \underline{\underline{t}}$  et macroscopique  $[\mathbb{V}](0, t) = [\underline{\mathbb{V}}] \cdot \underline{\underline{t}}$  :

$$[v](0, t) = [\mathbb{V}](0, t). \quad (7.4)$$

Cette hypothèse nous permet également de nous affranchir du terme source  $\sigma_{\text{eq}} \cdot \dot{\varepsilon}_p$  dans l'équation de conservation de l'énergie (eq. 5.177), ainsi que des équations constitutives de

la plasticité (eqs. 5.159 à 5.168). Combinée à l'équation (eq. 7.1), elle permet d'éliminer le champ de contrainte interne  $\tau(z, t)$  des équations.

### 7.1.2 Le problème thermoélastique local

Récapitulons maintenant le système d'équations gouvernant le problème thermoélastique local.

- **Le problème d'évolution mécanique**  $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Loi de comportement élastoplastique intégrée en espace (eq. 5.158) :} \\ [\nu](0, t) = [\mathbb{V}](0, t). \end{array} \right. \quad (7.5)$$

- **Le problème d'évolution thermique**  $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation instationnaire de la conduction (eq. 5.177) :} \\ \text{Condition initiale en température (eq. 5.178) :} \\ \text{Condition de couplage thermique en } z = h_\varepsilon \text{ (eq. 5.179) :} \\ \text{Condition de flux en } z = 0 \text{ (eq. 5.180) :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (7.6) \\ \theta(z, 0) = \Theta_0, \quad (7.7) \\ -\kappa \cdot \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_\varepsilon} = 0, \quad (7.8) \\ -\kappa \cdot \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_T \cdot \overset{\circ}{q}(0, t) \quad (7.9) \end{array}$$

Remarquons que le problème thermique ainsi formulé ne fait intervenir que deux inconnues :

- $\theta(z, t)$ , le champ de température au voisinage de l'interface,  $\theta(z, t) < \Theta_F$
- $\overset{\circ}{q}(0, t)$ , le flux de chaleur à l'interface.

#### Le modèle d'interface en $z = 0$ :

Pour les besoins ultérieurs de notre étude, nous considérons les équations discrètes gouvernant le problème dans la cellule macroscopique. Il s'agit des équations introduites au Chapitre 3 et que nous avons rappelées en introduction de cette partie (voir tableau 6.1 p. 190, eqs. 6.76 à 6.84). Ces équations sont complétées par les relations suivantes :

- **Condition de couplage en effort en  $z = 0$  (eq. 5.183) :**

$$\tau(0, t) = F_T(0, t), \quad (7.10)$$

- **Modèle de frottement en  $z = 0$  :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2(0, t) \cdot \underline{\underline{t}} = -\tau_1(0, t) \cdot \underline{\underline{t}} = -\lambda \cdot [\underline{\underline{\nu}}](0, t), \lambda \geq 0, \\ \tau(0, t) = \min \left( \mu_0 \cdot F_N(0, t), \mathbf{f} \cdot \left( \frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}} \right) \cdot (1 + g \cdot F_N(0, t) - h_\theta (\theta(0, t) - 300)) \cdot \exp \left( \frac{-\xi \cdot \theta(0, t)}{\Theta_F - \theta(0, t)} \right) \right) \end{array} \right. \quad (7.11)$$

— **Flux de chaleur généré à l'interface** ( $z = 0$ ) :

$$\dot{q}(0, t) = |\tau(0, t) \cdot [v](0, t)|. \quad (7.13)$$

## 7.2 Résolution du problème thermique en couche limite

Dans un premier temps, nous nous proposons de résoudre le problème thermique au voisinage de l'interface, qui comme nous l'avons vu est gouverné par le système d'équations (eqs. 7.6 à 7.9). L'objectif consiste ici à exprimer le champ des températures  $\theta(z, t)$  en fonction du flux de chaleur  $\dot{q}(0, t)$  généré à l'interface par le travail des forces de frottement. Dans l'optique de la résolution numérique du problème, deux choix s'offrent à nous :

- déterminer une solution analytique au problème d'évolution thermique, puis implémenter cette solution numériquement.
- écrire directement un schéma aux différences finies implicite en temps à partir du système d'équations (eqs. 7.6 à 7.9).

Nous traitons chacun des deux cas. Pour déterminer quelle méthode choisir, les questions que nous nous poserons concerneront notamment le coût de l'une ou l'autre des méthodes aussi bien en terme de temps de calcul, que d'occupation mémoire à précision équivalente.

### 7.2.1 Solution analytique au problème thermique en régime transitoire

Cherchons tout d'abord une solution analytique au problème d'évolution thermique ! Bien que plusieurs méthodes de résolution existent, telle qu'une méthode de séparation des variables, nous privilégions par la suite le recours aux transformées de Laplace. Nous utilisons cette méthode pour déterminer la solution du problème d'évolution thermique (eqs. 7.6 à 7.9) dans deux cas distincts :

- un cas simple où la densité de flux de chaleur  $\dot{q}(0, t) = \dot{q}(0)$  est constante au cours du temps.
- un cas plus général où la densité de flux de chaleur  $\dot{q}(0, t)$  varie au cours du temps.

Les calculs suivants ont été effectués en prenant comme condition de couplage thermique (eq. 7.8) en  $z = h_e$  la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Condition de couplage thermique en } z \rightarrow +\infty : \end{array} \right. \quad -\kappa \cdot \left. \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow +\infty} = 0. \quad (7.14)$$

Cette condition a été choisie car elle nous permet de retrouver la solution analytique utilisée par Prakash (voir [31]). Elle nous permettra aussi de valider notre schéma numérique.

Pour chacun des deux cas, nous notons  $\vartheta(z, p)$ , la transformée de Laplace par rapport au temps de l'élévation de température  $\theta(z, t) - \Theta_0$  :

$$\vartheta(z, p) = \mathcal{L}(\theta(z, t) - \Theta_0). \quad (7.15)$$

### Solution analytique pour une densité de flux de chaleur constante au cours du temps

En appliquant cette transformée (eq. 7.15) au problème thermique local (eqs. 7.6 à 7.9) nous obtenons dans l'espace de Laplace le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation instationnaire de la conduction :} \\ \text{Condition initiale en température :} \\ \text{Condition de couplage thermique en } z \rightarrow +\infty : \\ \text{Condition de flux en } z = 0 : \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vartheta(z, p)}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot p \vartheta(z, p) = 0, \\ \vartheta(z, 0) = 0, \\ -\kappa \cdot \frac{\partial \vartheta(z, p)}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0, \\ -\kappa \cdot \frac{\partial \vartheta(z, p)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\dot{q}(0)}{p}. \end{array} \quad \begin{array}{l} (7.16) \\ (7.17) \\ (7.18) \\ (7.19) \end{array}$$

L'équation aux dérivées partielles linéaire homogène (eq. 7.6) devient donc une équation différentielle dans l'espace de Laplace (eq. 7.16). Nous la résolvons simplement en posant  $s^2 = p/\alpha$ . Une solution générale à cette équation différentielle est :

$$\vartheta(z, p) = C_1 \cdot e^{-sz} + C_2 \cdot e^{+sz}. \quad (7.20)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes que nous déterminons à l'aide des conditions aux limites (eqs. 7.18 et 7.19). Pour cela, nous calculons tout d'abord la dérivée partielle en espace de la fonction  $\vartheta(z, p)$ . Nous obtenons ainsi :

$$-\kappa \frac{\partial \vartheta(z, p)}{\partial z} = \kappa s (C_1 \cdot e^{-sz} - C_2 \cdot e^{+sz}). \quad (7.21)$$

La condition de flux nul pour  $z \rightarrow +\infty$  (eq. 7.18), implique :

$$C_2 = 0. \quad (7.22)$$

La condition de flux d'interface en  $z = 0$  (eq. 7.19), nous permet quant à elle de déterminer  $C_1$  :

$$C_1 = \frac{\dot{q}(0)}{s\kappa p}. \quad (7.23)$$

Nous en déduisons l'expression du champ des températures dans l'espace de Laplace, soit :

$$\vartheta(z, p) = \frac{\overset{\circ}{q}(0)}{\kappa} \cdot \frac{e^{-sz}}{sp}. \quad (7.24)$$

Pour obtenir l'expression du champ des températures dans le domaine originel, nous devons donc résoudre :

$$\mathcal{L}^{-1}(\vartheta(z, t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\overset{\circ}{q}(0)}{\kappa}\right) \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-sz}}{sp}\right). \quad (7.25)$$

D'après les tables des transformées de Laplace (voir [77], p. 53, eq17), nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-sz}}{sp}\right) = 2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha t}\right) - z \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right). \quad (7.26)$$

Nous en déduisons finalement :

$$\theta(z, t) = \frac{\overset{\circ}{q}(0)}{\kappa} \left[ 2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha t}\right) - z \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] + \Theta_0 \quad (7.27)$$

Notons que nous pouvons récrire cette équation sous la forme suivante :

$$\theta(z, t) = 2 \frac{\overset{\circ}{q}(0)\sqrt{t}}{\epsilon} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \Theta_0. \quad (7.28)$$

Rappelons ici que le coefficient  $\epsilon$  correspond à l'effusivité du matériau et s'écrit en fonction de la diffusivité thermique  $\alpha$  et de la conductivité thermique  $\kappa$  du matériau considéré :

$$\epsilon = \frac{\kappa}{\sqrt{\alpha}}. \quad (7.29)$$

Ces expressions font intervenir la fonction erreur complémentaire **erfc**, ainsi que la fonction complémentaire inverse **ierfc**. Celles-ci sont définies par :

$$\text{ierfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) - x \cdot \text{erfc}(x), \quad (7.30)$$

$$\text{avec } \text{ierfc}(0) = 1/\sqrt{\pi}, \quad (7.31)$$

$$\text{et } \text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp^{-\xi^2} d\xi. \quad (7.32)$$

L'évolution de la température à l'interface  $\theta(0, t)$  s'obtient simplement en prenant  $z = 0$  dans l'équation (eq. 7.27)<sup>1</sup> :

$$\theta(0, t) = \frac{2 \overset{\circ}{q}(0)}{\epsilon} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \Theta_0. \quad (7.33)$$

### Solution analytique pour une densité de flux de chaleur variant au cours du temps

Étudions maintenant le cas plus général où la densité de flux de chaleur appliquée en  $z = 0$  varie au cours du temps. En appliquant la transformée de Laplace au système d'équations (eqs. 7.6 à 7.9), nous obtenons cette fois-ci le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Équation instationnaire de la conduction :} & \frac{\partial^2 \vartheta(z, p)}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot p \vartheta(z, p) = 0, \quad (7.34) \\ \text{Condition initiale en température :} & \vartheta(z, 0) = 0, \quad (7.35) \\ \text{Condition de couplage thermique en } z \rightarrow +\infty : & -\kappa \cdot \frac{\partial \vartheta(z, p)}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0, \quad (7.36) \\ \text{Condition de flux en } z = 0 : & -\kappa \cdot \frac{\partial \vartheta(z, p)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \overset{\circ}{q}(0, p). \quad (7.37) \end{array} \right.$$

De nouveau, une solution générale à l'équation différentielle (eq. 7.34) s'écrit (eq. 7.38) :

$$\vartheta(z, p) = C_1 \cdot e^{-sz} + C_2 \cdot e^{+sz}. \quad (7.38)$$

En suivant la même démarche que précédemment, mais en tenant cette fois-ci compte d'une densité de flux constante au cours du temps, le coefficient  $C_1$  s'écrit

$$C_1 = \frac{\overset{\circ}{q}(0, p)}{s\kappa}, \quad (7.39)$$

1. Remarquons que l'application d'une densité de flux constante à la surface d'un solide correspond à une évolution de température de surface variant comme la racine carré du temps.



tandis que le coefficient  $C_2$  s'annule du fait de la condition de flux nul pour  $z \rightarrow \infty$ . Nous en déduisons finalement l'expression de  $\vartheta(z, p)$  dans l'espace de Laplace :

$$\vartheta(z, p) = \frac{\overset{\circ}{q}(0, p)}{\kappa} \cdot \frac{e^{-sz}}{s}. \quad (7.40)$$

Pour déterminer l'expression du champ des températures  $\theta(z, t) = \mathcal{L}^{-1}(\vartheta(z, p))$  dans le domaine originel, nous devons cette fois-ci déterminer la transformation inverse d'un produit de fonctions. Par définition, la transformée de Laplace inverse d'un produit de fonctions se traduit par un produit de convolution dans le domaine originel. Nous avons ainsi :

$$\mathcal{L}^{-1}(f(z, p) \cdot g(z, p)) = \mathcal{L}^{-1}(f(z, p)) * \mathcal{L}^{-1}(g(z, p)) = f(z, t) * g(z, t), \quad (7.41)$$

où  $*$  désigne le produit de convolution de deux fonctions  $f(z, t)$  et  $g(z, t)$  quelconques.

En appliquant la transformation de Laplace inverse (eq. 7.41) à l'équation (eq. 7.40), nous obtenons :

$$\mathcal{L}^{-1}(\vartheta(z, p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\overset{\circ}{q}(0, p)}{\kappa}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-sz}}{s}\right). \quad (7.42)$$

D'après la table des transformées de Laplace (voir [77], p. 52, eq15), nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-sz}}{s}\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha t}\right). \quad (7.43)$$

Nous en déduisons donc :

$$\theta(z, t) - \Theta_0 = \overset{\circ}{q}(0, t) * \left(\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha t}\right)\right). \quad (7.44)$$

En remplaçant le produit de convolution  $*$  par sa définition :

$$f(z, t) * g(z, t) = \int_0^t f(z, t-\xi) \cdot g(z, \xi) d\xi = \int_0^t f(z, \xi) \cdot g(z, t-\xi) d\xi, \quad (7.45)$$

nous obtenons deux expressions équivalentes du champ de température  $\theta(z, t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(z, t) - \Theta_0 = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \overset{\circ}{q}(0, t - \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi \xi}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha \xi}\right) d\xi, \\ \theta(z, t) - \Theta_0 = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \overset{\circ}{q}(0, \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t - \xi)}\right) d\xi. \end{array} \right. \quad (7.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(z, t) - \Theta_0 = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \overset{\circ}{q}(0, t - \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi \xi}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha \xi}\right) d\xi, \\ \theta(z, t) - \Theta_0 = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \overset{\circ}{q}(0, \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t - \xi)}\right) d\xi. \end{array} \right. \quad (7.47)$$

Le problème d'évolution thermique (eqs. 7.6 à 7.9) se réduit donc à l'une des deux équations précédentes. Par la suite nous considérons l'équation (eq. 7.48) qui correspond à l'expression du champ des températures, utilisée par Prakash dans (voir [31]).

$$\theta(z, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \overset{\circ}{q}(0, \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t - \xi)}\right) d\xi + \Theta_0. \quad (7.48)$$

La température d'interface s'obtient de nouveau en prenant  $z = 0$  dans l'équation précédente (eq. 7.48). Nous avons ainsi :

$$\theta(0, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \overset{\circ}{q}(0, \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} d\xi + \Theta_0. \quad (7.49)$$

### Linéarité du champ de température avec la densité de flux de chaleur et opérateur de STEKLOV-POINCARÉ

Connaissant l'expression générale du champ des températures (eq. 7.48), supposons maintenant que le flux de chaleur généré à l'interface  $\overset{\circ}{q}(0, t)$  demeure constant sur l'intervalle de temps  $\Delta t = t - t^n$ . Nous pouvons alors récrire l'équation (eq. 7.48) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= \frac{1}{\kappa} \int_0^{t^n} \overset{\circ}{q}(0, \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t - \xi)}\right) d\xi \\ &+ \frac{\overset{\circ}{q}(0, \Delta t)}{\kappa} \int_{t^n}^t \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t - \xi)}\right) d\xi + \Theta_0. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Nous considérons alors le cas où le flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}(0, \Delta t)$  est nul entre les instants  $t^n$  et  $t$ . Par abus de langage, comme il n'y a pas d'apport de chaleur, nous allons appeler le champ résultant  $\theta_{ad}(z, t)$  **champ des températures adiabatique** que nous écrivons :

$$\theta_{ad}(z, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^{t^n} \overset{\circ}{q}(0, \xi) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t - \xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t - \xi)}\right) d\xi + \Theta_0. \quad (7.51)$$

L'équation de la température, est alors réduite à l'expression suivante,

$$\theta(z, t) = \theta_{ad}(z, t) + \frac{\overset{\circ}{q}(0, \Delta t)}{\kappa} \int_0^t \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(t-\xi)}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{4\alpha(t-\xi)}\right) d\xi. \quad (7.52)$$

Selon cette dernière expression, le champ des températures  $\theta(z, t)$  s'exprime donc comme une fonction linéaire du flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}(0, \Delta t)$ . L'élévation en température  $\theta(z, t) - \theta_{ad}(z, t)$  en fonction de la densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}(0, \Delta t)$  peut aussi s'écrire en utilisant l'inverse  $S_{\Delta t}^{-1}$  de l'opérateur de Steklov-Poincaré déduisant le flux d'interface de la température d'interface ce qui donne :

$$\theta(0, t) = \theta_{ad}(0, t) + S_{\Delta t}^{-1} \cdot \overset{\circ}{q}(0, t). \quad (7.53)$$

## 7.2.2 Résolution numérique par la méthode de DUHAMEL

Nous venons de déterminer une solution analytique (eq. 7.48) au problème de conduction thermique dans le cas d'une évolution sans dissipation plastique. La question que nous nous posons maintenant est la suivante :

### Comment calculer numériquement cette solution analytique ?

Afin de faciliter l'implémentation numérique de cette équation, nous nous proposons dans un premier temps d'appliquer le **théorème de superposition de Duhamel**. Ce théorème nous enseigne que :

**La solution d'un problème de conduction linéaire muni de conditions aux limites variant au cours du temps, peut-être ramené à un problème similaire dont les conditions aux limites sont indépendantes du temps.**

Le principe du théorème revient donc à décomposer la sollicitation thermique  $\overset{\circ}{q}(0, t)$  en une succession de  $k$  sollicitations thermiques  $\overset{\circ}{q}_k(0, \Delta t)$  constantes au cours sur  $\Delta t_k$ . Pour illustrer de manière simple la méthodologie employée, nous étudions dans un premier temps la réponse d'un milieu soumis à un simple échelon de densité de flux de chaleur (voir figure 7.1, p. 203).

Pour cela, nous considérons le cas d'un solide initialement à la température  $\Theta_0$  auquel nous appliquons :

- une densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}_1$  constante entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ ,
- une densité de flux de chaleur nulle  $\overset{\circ}{q}_2 = \overset{\circ}{q}_1 - \overset{\circ}{q}_1$  pour  $t > t_1$ .

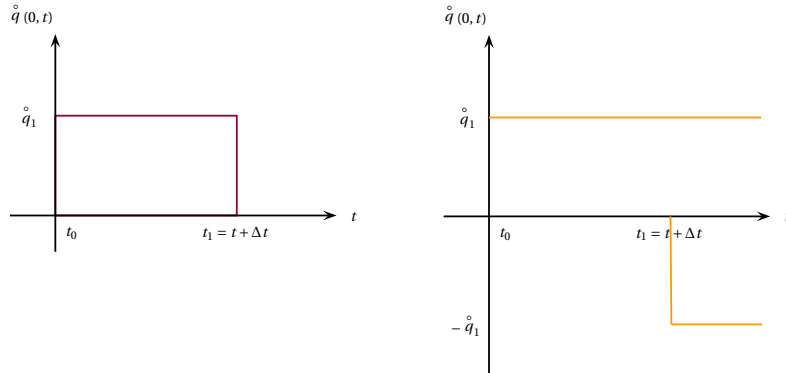


FIGURE 7.1 – Illustration du théorème de DUHAMEL : solide semi-infini soumis à un échelon de densité de flux de chaleur

En appliquant le théorème de Duhamel, la condition aux limites de surface peut se ramener à la somme des solutions de deux problèmes d'échelon, décalés dans le temps :

- Pour  $0 < t < t_1$  :

$$\theta(z, t) = 2 \frac{\dot{q}_1 \sqrt{t}}{\epsilon} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + \Theta_0. \quad (7.54)$$

- Pour  $t > t_1$  : nous superposons le problème de flux  $\dot{q}_1$  démarrant à l'instant  $t_0$  à un problème de flux  $-\dot{q}_1$  démarrant à l'instant  $t_1$ . Nous avons dès lors :

$$\theta(z, t) = 2 \frac{\dot{q}_1 \sqrt{t}}{\epsilon} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - 2 \frac{\dot{q}_1 \sqrt{(t-t_1)}}{\epsilon} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha_i(t-t_1)}} \right) + \Theta_0. \quad (7.55)$$

#### Formulation incrémentale du théorème de Duhamel

Généralisons maintenant le cas simple d'un échelon de densité de flux de chaleur, à celui d'une succession d'échelons. Ceci revient à dire que la densité de flux de chaleur  $\dot{q}(0, t)$  appliquée en  $z = 0$  peut-être décomposée en plusieurs paliers successifs de densités de flux de chaleur  $\dot{q}_i(0)$  constantes. En procédant de la sorte nous pouvons récrire la solution analytique (eq. 7.48) à l'aide d'une formulation incrémentale simple.

Afin d'éviter l'usage d'écritures trop lourdes, nous présentons cette méthode en ne considérant que l'évolution de la température d'interface  $\theta(0, t)$  définie par l'équation (eq. 7.49). De la même façon,

et par commodité d'écriture, nous introduisons la constante  $C$  définie par :

$$C = \frac{2}{\epsilon\sqrt{\pi}}. \quad (7.56)$$

Appliquons alors le chargement thermique représentée sur la figure 7.2!

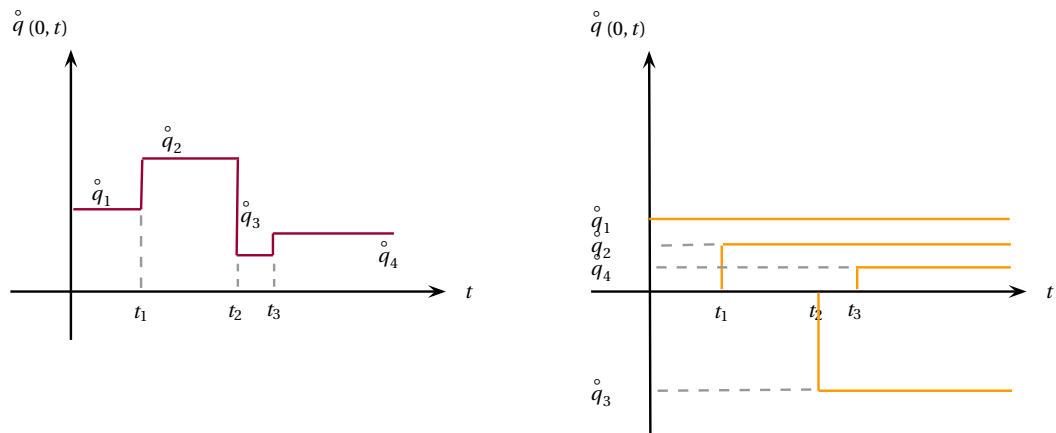


FIGURE 7.2 – Illustration du théorème de DUHAMEL : solide semi-infini soumis à une succession d'échellons de densités de flux de chaleur constantes

D'après le théorème de superposition, les valeurs des températures de contact  $\theta(0, t_n)$  pour chaque instant discret  $t_n$  s'écrivent en fonction des pas de temps  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  et des densités de flux de chaleur  $\dot{q}_n$  correspondantes.

$$\begin{aligned}
 \theta(0, t_1) - \Theta_0 &= \frac{2 \dot{q}_1}{\epsilon \sqrt{\pi}} \sqrt{(t_1 - t_0)} \\
 &= C \left( \sqrt{t_1 - t_0} \right) \dot{q}_1 \\
 &= C \dot{q}_1 \sqrt{\Delta t_1} \\
 \theta(0, t_2) - \Theta_0 &= C \left( \sqrt{t_2 - t_0} \right) \dot{q}_1 - C \left( \sqrt{t_2 - t_1} \right) \left( \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \right) \\
 &= C \dot{q}_1 \left( \sqrt{\Delta t_1 + \Delta t_2} - \sqrt{\Delta t_2} \right) + C \dot{q}_2 \sqrt{\Delta t_2} \\
 \theta(0, t_3) - \Theta_0 &= C \left( \sqrt{t_3 - t_0} \right) \dot{q}_1 - C \left( \sqrt{t_3 - t_1} \right) \left( \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \right) - C \left( \sqrt{t_3 - t_2} \right) \left( \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \right) \\
 &= C \dot{q}_1 \left( \sqrt{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} - \sqrt{\Delta t_2 + \Delta t_3} \right) + C \dot{q}_2 \left( \sqrt{\Delta t_2 + \Delta t_3} - \sqrt{\Delta t_3} \right) + C \dot{q}_3 \sqrt{\Delta t_3} \\
 &\vdots = \vdots
 \end{aligned}$$

Afin d'améliorer la précision numérique, nous préférons par la suite une écriture faisant intervenir les expressions conjuguées des coefficients :

$$\begin{aligned}
 \theta(0, t_3) - \Theta_0 &= \frac{C \dot{q}_1 \Delta t_1}{\left( \sqrt{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} + \sqrt{\Delta t_2 + \Delta t_3} \right)} + \frac{C \dot{q}_2 \Delta t_2}{\left( \sqrt{\Delta t_2 + \Delta t_3} + \sqrt{\Delta t_3} \right)} + \frac{C \dot{q}_3 \Delta t_3}{\sqrt{\Delta t_3}} \\
 &\vdots = \vdots
 \end{aligned}$$

Celle-ci permet de mettre en évidence la décroissance des coefficients en fonction du temps et conduit à des expressions numériques beaucoup plus stables. Pour plus de clarté, le système obtenu se réécrit sous une forme matricielle  $\underline{\theta}(0, t) = A \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{\Theta}_0$  :

$$\begin{pmatrix} \theta(0, t_1) \\ \theta(0, t_2) \\ \theta(0, t_3) \\ \vdots \\ \theta(0, t_n) \\ \vdots \\ \theta(0, t_N) \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Delta t_1}}{\Delta t_1} & & & & & & \\ \frac{\sqrt{t_2 - t_0} + \sqrt{\Delta t_2}}{\Delta t_1} & \frac{\sqrt{\Delta t_2}}{\Delta t_1} & & & & & \\ \frac{\sqrt{t_3 - t_0} + \sqrt{t_3 - t_1}}{\Delta t_1} & \frac{\Delta t_2}{\sqrt{t_3 - t_1} + \sqrt{\Delta t_3}} & \sqrt{\Delta t_3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} + \underline{\Theta}_0$$

Nous avons ainsi calculé la réponse thermique à une sollicitation variable par sommation des contributions de chaque incrément<sup>2</sup>.

---

2. A titre informatif, nous évoquons le cas limite où le pas de temps demeure constant au cours du temps. En supposant une

### 7.2.3 Résolution numérique par la méthode des différences finies

Nous venons de voir que la solution analytique à l'équation de la chaleur dans le cas d'une évolution quasi-statique élastique pouvait être implémentée numériquement à l'aide du théorème de Duhamel. Cette méthode nécessite cependant de stocker l'historique du flux d'interface  $\dot{q}(0, t)$ . Afin de résoudre des cas plus généraux, nous proposons d'avoir recours à un schéma implicite en temps et en espace que nous construisons par le biais de la **Méthode des Différences Finies**.

#### Discretisation de l'équation de la chaleur et schéma d'EULER implicite à deux niveaux

Pour obtenir l'expression discrète qui va nous donner les valeurs approchées du champ des températures  $\theta(z, t)$ , nous discrétisons les équations (eqs. 7.6 à 7.9) à l'aide d'un schéma implicite en temps et d'un schéma centré en espace. Rappelons que l'usage d'un schéma implicite garantit la stabilité inconditionnelle de l'approche.

En nous plaçant à l'instant  $t^n$ , le schéma d'Euler implicite (ou Euler rétrograde) appliqué à l'équation de la conduction instationnaire (eq. 7.6) s'écrit avec  $\Delta t = \Delta T$  :

$$\frac{\Theta_i^n - \Theta_i^{n-1}}{\Delta T} = \alpha \frac{\Theta_{i-1}^n - 2\Theta_i^n + \Theta_{i+1}^n}{\Delta z^2}. \quad (7.57)$$

Cette relation s'écrit également :

$$\Theta_{i-1}^n - 2\Theta_i^n + \Theta_{i+1}^n = \frac{\Delta z^2}{\alpha \Delta T} (\Theta_i^n - \Theta_i^{n-1}), \quad (7.58)$$

discretisation uniforme en temps, nous avons  $\Delta t_n = \Delta t = \text{cste}$ . Ceci nous permet de simplifier le système précédent de manière significative; le produit matriciel à effectuer implique alors une matrice triangulaire inférieure à diagonales constantes. Cette agencement particulier des termes est caractéristique des matrices de TOEPLITZ.

MATRICE DE TOEPLITZ :

$$\begin{pmatrix} \Theta_c(t_1) \\ \Theta_c(t_2) \\ \Theta_c(t_3) \\ \vdots \\ \Theta_c(t_n) \end{pmatrix} = C\sqrt{\Delta t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} & 1 & & & \\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}+1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} + \Theta_0$$

La résolution numérique des problèmes de TOEPLITZ est alors particulièrement simple et se réduit à un produit matrice de TOEPLITZ / vecteur qui peut être effectué à l'aide d'algorithmes de calcul rapides s'appuyant sur l'agencement particulier des matrices de TOEPLITZ comme par exemple à l'aide d'une transformée de FOURIER rapide.

ou bien encore en introduisant le nombre de Fourier,  $\overline{Fo} = \frac{\alpha \Delta T}{\Delta z^2}$ ,

$$\Theta_i^{n-1} = -\overline{Fo}(\Theta_{i-1}^n + \Theta_{i+1}^n) + (1 + 2\overline{Fo})\Theta_i^n, \quad \forall i, 0 \leq i \leq N. \quad (7.59)$$

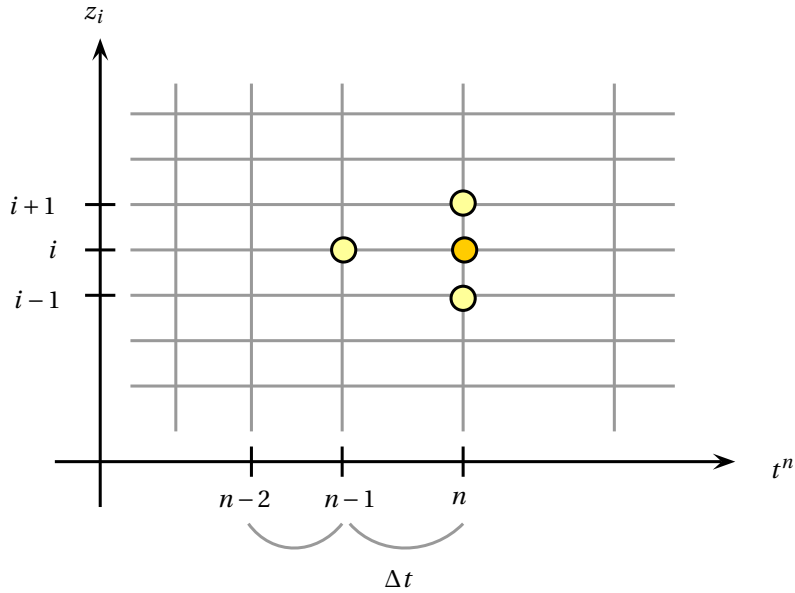


FIGURE 7.3 – Représentation graphique du schéma implicite pour une discrétisation homogène en espace  $h_e = N \cdot \Delta z$  et à pas de temps  $\Delta t$  non constant. Nous calculons la température  $\Theta_i^n$  à partir des valeurs  $\Theta_{i+1}^n$ ,  $\Theta_{i-1}^n$  et  $\Theta_i^{n-1}$

Les conditions aux limites de Neumann en  $z = 0$  et  $z = h_e$  (eqs. 7.8 et 7.9) sont imposées au temps  $t^n$  et sont discrétisées à l'aide d'une différence finie d'ordre deux en espace :

$$\overset{\circ}{q}_0^n = -\kappa \left( \frac{\Theta_{+1}^n - \Theta_{-1}^n}{2\Delta z} \right). \quad (7.60)$$

Soit de manière équivalente :

$$\Theta_{-1}^n = 2 \frac{\overset{\circ}{q}_0^n \Delta z}{\kappa} + \Theta_{+1}^n. \quad (7.61)$$

Nous en déduisons après report dans l'équation (eq. 7.59) en  $i = 0$  :

$$\Theta_0^{n-1} = -\overline{Fo} \left( 2 \frac{\overset{\circ}{q}_0^n \Delta z}{\kappa} + 2\Theta_1^n \right) + (1 + 2\overline{Fo})\Theta_0^n, \quad (7.62)$$



ce qui se transforme en,

$$\Theta_0^{n-1} + 2\overline{Fo} \left( \frac{\overset{\circ}{q}_0 \Delta z}{\kappa} \right) = (1 + 2\overline{Fo}) \Theta_0^n - 2\overline{Fo} \Theta_1^n. \quad (7.63)$$

De même, en  $i = N$  (c'est à dire en  $z = h_\varepsilon$ ) la condition de flux nul (eq. 7.8) nous impose :

$$\Theta_{N+1}^n = \Theta_{N-1}^n. \quad (7.64)$$

Nous en déduisons après report dans l'équation (eq. 7.59) en  $i = N$ ,

$$\Theta_N^{n-1} = -2\overline{Fo} (\Theta_{N-1}^n) + (1 + 2\overline{Fo}) \Theta_N^n \quad (7.65)$$

Finalement, les équations discrétisées sont réduites pour chaque pas de temps  $\Delta t$  à un système linéaire à matrice tridiagonale :

$$\begin{pmatrix} 1+2\overline{Fo} & -2\overline{Fo} & & & 0 \\ -\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & -\overline{Fo} & & \\ & -\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & -\overline{Fo} & \\ & & & \ddots & \\ & & & -\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & -\overline{Fo} \\ 0 & & & & -2\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_0^n \\ \Theta_1^n \\ \Theta_2^n \\ \vdots \\ \Theta_{N-1}^n \\ \Theta_N^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_0^{n-1} + 2\overline{Fo} \left( \frac{\overset{\circ}{q}_0 \Delta z}{k} \right) \\ \Theta_1^{n-1} \\ \Theta_2^{n-1} \\ \vdots \\ \Theta_{N-1}^{n-1} \\ \Theta_N^{n-1} \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

La résolution numérique d'un tel système s'avère peu coûteuse. Cette configuration tridiagonale nous permet en effet d'utiliser **l'algorithme de Thomas** (voir [78], p. 49) que nous présentons dans les annexes (pp. 267 à 268). Le coût en temps de calcul est dès lors du même ordre que pour un schéma explicite.

### Conséquences discrètes de la linéarité du champ de température avec le flux de chaleur

D'après l'équation (eq. 7.52) le champ des température  $\underline{\Theta}^n = \Theta^n(z)$  dépend linéairement de la densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}^n$  imposée à l'interface entre les instants  $t^{n-1}$  et  $t^n$ . Nous vérifions donc :

$$\underline{\Theta}^n = \underline{a} \cdot \overset{\circ}{q}^n + \underline{b} \quad (7.67)$$

Les coefficients  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  sont déterminés en résolvant deux cas distincts :

- **Un cas adiabatique**, où nous imposons une densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q} = \overset{\circ}{q}_{ad.} = 0$  nulle sur le pas de temps  $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ . Nous calculons ainsi le champ discret des températures adiabatiques  $\Theta_{ad.}^n$  en résolvant l'équation (eq. 7.66), et nous en déduisons :

$$\underline{b} = \Theta_{ad.}^n \quad (7.68)$$

- **Un cas frottant**, où nous imposons une densité de flux de chaleur non nulle quelconque,  $\overset{\circ}{q} = \overset{\circ}{q}_{fr.} \neq 0$ . Nous en déduisons un champ de température  $\Theta_{fr.}^n$ , en résolvant l'équation (eq. 7.66). Ceci nous permet de déterminer le coefficient  $\underline{a}$  :

$$\underline{a} = \frac{\Theta_{fr.}^n - \Theta_{ad.}^n}{\overset{\circ}{q}_{fr.}} \quad (7.69)$$

Une fois que les coefficients  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  ont été déterminés, le champ discret des températures  $\Theta^n = \Theta_i^n$  peut être calculé pour chaque noeud  $i$  du maillage, et ce quelque soit la densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}$  imposée à l'interface. Il nous suffit alors d'écrire :

$$\Theta_i^n = \left( \frac{\Theta_{fr.,i}^n - \Theta_{ad.,i}^n}{\overset{\circ}{q}_{fr.}} \right) \cdot \overset{\circ}{q} + \Theta_{ad.,i}^n \quad (7.70)$$

## 7.2.4 Recalage des tirs de V.PRAKASH et comparaison des différentes méthodes

Afin de valider et confronter les résultats obtenus numériquement par la méthode de Duhamel et par le schéma implicite, nous nous proposons de recalcr les résultats présentés par Prakash et al. dans l'article "*Time resolved friction during dry sliding of metal on metal*" (voir [31]). Dans cet article, les auteurs procèdent à une série de tirs par impact de plaques en considérant une paire tribologique alliage de titane Ti6Al4V / acier. Les conditions de tir choisies sont telles que les matériaux restent en permanence dans le domaine élastique, ce qui correspond à l'hypothèse de notre modèle.

### Validation des résultats obtenus à l'aide de la formulation analytique

Le tir que nous considérons se décompose en deux étapes (voir 7.4) :

- la première étape s'étend sur une durée de 1800 ns : la pression normale appliquée  $F_N(\mathbf{0}, t) = \sigma_1$  est de 1.3 GPa, tandis que l'effort de frottement  $\tau(\mathbf{0}, t) = \tau_1$  est de 0.18 GPa, et la vitesse relative de glissement  $[V]_1$  est de 34 m/s, ce qui revient à appliquer une densité de flux de chaleur  $\dot{q}_1 = 6.12e9 \text{ W/m}^2$ .
- la seconde étape débute au bout de 1800 ns et s'étend jusqu'à 3300 ns : la pression normale appliquée  $F_N(\mathbf{0}, t) = \sigma_2$  est de 0.325 GPa, l'effort de frottement  $\tau(\mathbf{0}, t) = \tau_2$  est de 0.06 GPa, et la vitesse de glissement  $[V]_2$  de 48 m/s, ce qui revient à appliquer une densité de flux de chaleur  $\dot{q}_1 = 2.88e9 \text{ W/m}^2$ .

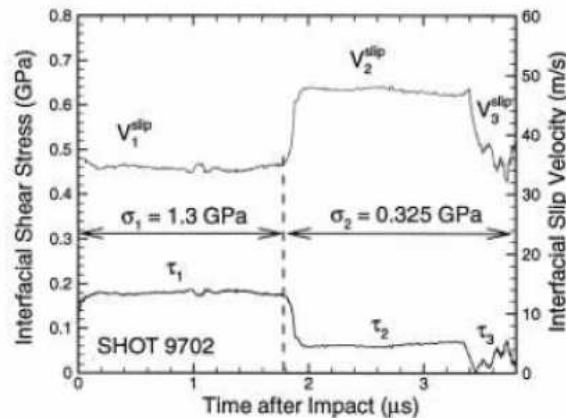


FIGURE 7.4 – Pression normale à l'interface, contrainte de cisaillement et vitesse de glissement - PRAKASH Shot 9702

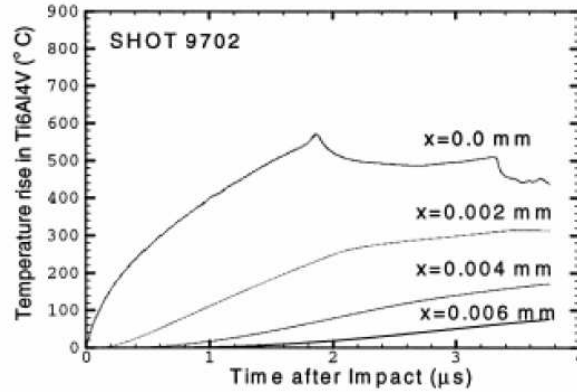
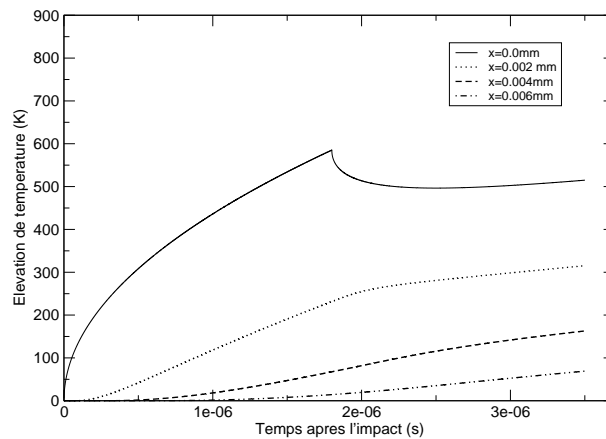
**Les résultats obtenus par PRAKASH** Pour les sollicitations que nous venons d'évoquer Prakash et al. obtiennent les évolutions de température décrites sur la figure. 7.5 :

**Les résultats obtenus à l'aide de la formulation analytique** En utilisant la méthode de Duhamel, nous obtenons les résultats présentés sur la figure 7.6. Ces résultats concordent qualitativement avec les résultats présentés par Prakash et al. (Figure 7.5). Nous obtenons en effet les mêmes profils de température à l'interface et dans l'épaisseur de la couche limite.

Nous disposons donc d'un premier modèle nous permettant de modéliser les échauffements thermiques générés lors de la mise en glissement de matériaux métalliques.

### Validation des résultats obtenus à l'aide du schéma implicite

Nous procédons de nouveau au recalage des signaux expérimentaux en considérant cette fois-ci le schéma numérique implicite. Pour le pas de temps, nous choisissons  $\Delta t = 1.10^{-9} \text{ s} = 1 \text{ ns}$  de l'ordre

FIGURE 7.5 – Evolution de la température dans le *Ti6Al4V* - PRAKASH Shot 9702FIGURE 7.6 – Evolution de la température dans le *Ti6Al4V* - Résultats obtenus par application du théorème de DUHAMEL

des pas de temps observés en dynamique rapide. Le problème thermique est résolu au voisinage de l'interface, dans l'alliage de titane Ti6Al4V. La zone étudiée s'étend sur une épaisseur  $h_\varepsilon = 20\mu\text{m}$  correspondant à l'épaisseur de diffusion thermique au sein du matériau ( $h_\varepsilon \sim \sqrt{\alpha T}$ ). Le maillage initialement retenu est composé de  $M = 500$  cellules ayant chacune une épaisseur  $\Delta z = 40\text{nm}$ .

Les résultats calculés concordent parfaitement avec ceux obtenus par la méthode incrémentale de Duhamel (voir figure 7.7). Ils confirment également la robustesse du schéma. Nous retiendrons donc cette méthode de résolution par la suite ! L'usage d'un schéma implicite nous permet en effet de traiter des pas de temps variables au cours du temps, ce qui facilite le couplage du modèle local avec le modèle global.

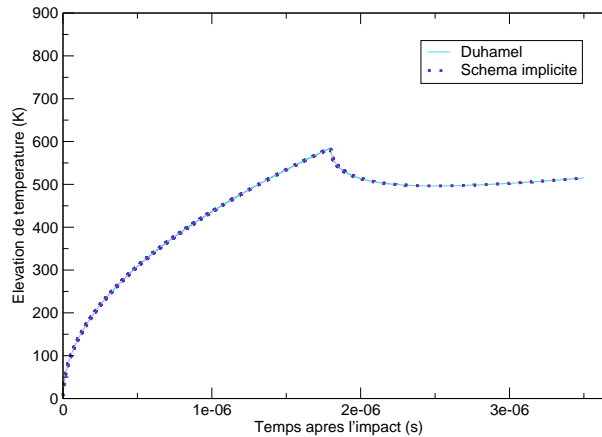


FIGURE 7.7 – Convergence du schéma implicite - PRAKASH Shot 9702

## 7.3 Résolution du problème thermoélastique quasi-statique

### 7.3.1 Formulation discrète du problème thermoélastique quasi-statique

Au cours de la section précédente, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème d'évolution thermique. En particulier, nous avons montré qu'il était possible de calculer le champ des températures à partir de la densité de flux de chaleur  $\dot{q}(0, t)$  appliquée à l'interface  $z = 0$ . Pour déterminer cette dernière, et d'après l'équation (eq. 7.13) nous devons connaître la vitesse réelle de glissement relatif  $[v](t)$  ainsi que l'effort de frottement  $F_T(0, t)$  qui est dans notre cas égal à la contrainte de cisaillement locale  $\tau(0, t)$ .

Pour estimer ces valeurs, nous devons résoudre le problème d'évolution thermoélastique couplé en tenant compte du problème mécanique (eqs. 7.5 à 195) et du modèle d'interface (eqs. 7.10 à 7.13). Nous présentons ici leur formulation discrète :

- Le problème d'évolution mécanique discret :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Loi de comportement élastoplastique discrète intégrée en espace :} \\ [v]^n = [V]^n. \end{array} \right. \quad (7.71)$$

- Le problème d'évolution thermique discret est gouverné par le système algébrique (eq. 7.66) avec  $\Theta^0(z) = \Theta_0$  :

$$\begin{pmatrix} 1+2\overline{Fo} & -2\overline{Fo} & & & & 0 \\ -\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & -\overline{Fo} & & & \\ & -\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & -\overline{Fo} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & -\overline{Fo} \\ 0 & & & -2\overline{Fo} & 1+2\overline{Fo} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_0^n \\ \Theta_1^n \\ \Theta_2^n \\ \vdots \\ \Theta_{N-1}^n \\ \Theta_N^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_0^{n-1} + 2\overline{Fo} \left( \frac{\dot{q}^n(0)\Delta z}{k} \right) \\ \Theta_1^{n-1} \\ \Theta_2^{n-1} \\ \vdots \\ \Theta_{N-1}^{n-1} \\ \Theta_N^{n-1} \end{pmatrix} \quad (7.72)$$

Pour résoudre ce système, nous calculons les champs  $\underline{\Theta}_{fr}^n$  et  $\underline{\Theta}_{ad}^n$  par résolution du système précédent en prenant respectivement une densité de flux  $\dot{q}^n(0) = \dot{q}_{fr}^n$  quelconque et  $\dot{q}^n(0) = 0$ . Nous pouvons alors déterminer pour n'importe quel densité de flux de chaleur  $\dot{q}^n(0)$ , le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(\dot{q}^n)$  qui lui est associée en résolvant l'équation (eq. 7.70) :

$$\underline{\Theta}^n = \left( \frac{\underline{\Theta}_{fr}^n - \underline{\Theta}_{ad}^n}{\dot{q}_{fr}^n} \right) \cdot \beta_T \cdot \dot{q}^n(0) + \underline{\Theta}_{ad}^n. \quad (7.73)$$

- **Le modèle d'interface en  $z=0$**  :

- **Condition discrète de couplage en effort en  $z=0$**  :

$$\tau^n(0) = F_T^n(0), \quad (7.74)$$

- **Modèle de frottement en  $z=0$**  :

$$\begin{cases} \tau_2(0)^n \cdot \underline{n}_C = -\tau_1(0)^n \cdot \underline{n}_C = -\lambda \cdot [\underline{v}]^n(0), \lambda \geq 0, \\ \tau^n(0) = \min \left\{ \mu_0 \cdot F_N^n(0), \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} (1 + gF_N^n - h_\Theta (\Theta^n(0) - 300)) \exp \left( \frac{-\xi \cdot \Theta^n(0)}{\Theta_F - \Theta^n(0)} \right) \right\}. \end{cases} \quad (7.76)$$

- **Flux de chaleur généré à l'interface ( $z=0$ )** :

$$\dot{q}^n(0)^n = |\tau(0)^n \cdot [\underline{v}]^n(0)^n|. \quad (7.77)$$

Ces équations sont complétées par les équations discrètes résolues par le code hydrodynamique dans les cellules d'interface. Il s'agit des équations introduites au Chapitre 3 et que nous avons rappelées en introduction de cette partie (voir tableau 6.1 p. 190, eqs. 6.76 à 6.84) :

- **Résolution de la dynamique macroscopique au noeud d'interface à l'instant  $T^{n+1/2}$**

- Calcul de la force  $\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  appliquée à l'instant  $T^n$

$$\underline{F}(\underline{X}_i)^n = \sum_k \left( \underline{\Sigma}(\Omega_k)^n : \int_{\Gamma_k} \underline{\Phi}(\underline{X}_i) \cdot \underline{n}_{\Gamma_k} d\Gamma \right). \quad (7.78)$$

$$\underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n = \frac{F(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)}. \quad (7.79)$$

$$\underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \underline{\ddot{U}}^*(\underline{X}_i)^n \cdot \Delta T^n + \underline{V}(\underline{X}_i)^{n-1/2} \quad (7.80)$$

— **Gestion du contact et correction de la composante normale des vitesses libres**

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_C = \frac{\delta F_N^n(\underline{X}_i)}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n, \end{array} \right. \quad (7.81)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n} = \underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n} - \delta \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}. \end{array} \right. \quad (7.82)$$

avec  $\delta F_N^n(\underline{X}_i)$  donné par l'équation de contact (eq. 3.65).

— **Gestion du frottement et correction de la composante tangentielle des vitesses libres**

$$\left\{ \begin{array}{l} F_\star(\underline{X}_i)^n = \frac{[\underline{V}^\star]^{n+1/2}}{\Delta T^n} \left( \frac{m_G \cdot m(\underline{X}_i)}{m_G + m(\underline{X}_i)} \right), \end{array} \right. \quad (7.83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \frac{\min(\delta F_T(\underline{X}_i)^n, F_\star(\underline{X}_i)^n)}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n, \end{array} \right. \quad (7.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \underline{V}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} - \delta \underline{V}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t}. \end{array} \right. \quad (7.85)$$

### 7.3.2 Résolution du problème thermoélastique quasi-statique non-couplé

Afin d'avoir un premier aperçu du comportement thermomécanique à l'interface, nous considérons un cas simple où nous supposons que la vitesse relative de glissement  $[\mathbb{V}]^n$  et l'effort normal  $F_N^n(0)$  sont connus. Nous souhaitons ici évaluer l'évolution de la contrainte de Tresca et de la température à l'interface.

#### Données et sortie du problème

Pour résoudre ce cas simplifié, nous nous plaçons à l'instant  $t^n$  et nous considérons comme **valeurs d'entrée** les données suivantes :

- la vitesse relative de glissement  $[\nu]^n = [\mathbb{V}]^n$  que nous supposerons constante au cours du temps,
- la pression de contact normale  $F_N^n(0)$ , elle aussi supposée constante au cours du temps,
- le champ des températures  $\Theta^{n-1}(z)$  calculé au pas de temps précédent et initialement uniforme à la température de référence  $\Theta_0$ .

Nous choisissons également les densités de flux de chaleur adiabatiques et frottantes, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{q}_{\text{ad.}}^n(0) = 0, \\ \overset{\circ}{q}_{\text{fr.}}^n(0) = Y_0 \cdot [\mathbb{V}], \end{array} \right. \quad (7.86)$$

$$(7.87)$$

où  $Y_0$  est la limite élastique initiale du matériau.

Les **valeurs intermédiaires** calculées par l'algorithme à l'instant  $t^n$  sont :

- la densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}^n(0)$  à l'interface,
- le champ des températures adiabatiques  $\Theta_{\text{ad.}}^n(z)$  en tout point du modèle de sous-maillages,
- le champ des températures frottantes  $\Theta_{\text{fr.}}^n(z)$  en tout point du modèle de sous-maillages,

Finalement, les **valeurs de sortie** de l'algorithme sont :

- la contrainte de frottement  $F_T^n(0) = \tau^n(0)$ ,
- le champ des températures locales  $\Theta^n(z)$  que nous stockons.

#### Description des étapes de résolution

Détaillons maintenant les différentes étapes résolues par l'algorithme non-couplé dans le cadre de ce cas simplifié. Connaissant la vitesse relative de glissement  $[\nu]^n = [\mathbb{V}]^n$  ainsi que l'effort normal  $F_N^n(0)$ , nous cherchons tout d'abord à déterminer les champs de température adiabatiques  $\Theta_{\text{ad.}}^n$  et frottants  $\Theta_{\text{fr.}}^n$  :

- Nous calculons dans un premier temps  $\Theta_{\text{ad.}}^n$  en résolvant le système discret (eqs. 7.72) avec  $\overset{\circ}{q}(0)_{\text{ad.}}^n = 0$ .



— Dans un second temps, nous calculons le champ des températures frottant  $\underline{\Theta}_{fr}^n$ , en résolvant de nouveau le système (eqs. 7.72) avec cette fois-ci  $\dot{q}(0)_{fr}^n = Y_0 \cdot [v]^n$ .

Connaissant ces deux champs thermiques nous pouvons dès lors déterminer pour n'importe quel flux de chaleur  $\dot{q}^n$  le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(\dot{q}(0)^n)$  qui lui est associé par l'équation (eq. 7.73).

Nous cherchons maintenant à déterminer la contrainte de frottement de Tresca  $\tau^n(\Theta^n(0))$  ainsi que le champ des température  $\underline{\Theta}^n(\tau^n(z))$ . Pour calculer ces valeurs, nous devons résoudre un problème non-linéaire avec  $\tau^n(0)$  donnée par la loi de frottement (eq. 7.76 où la loi de Coulomb n'est pas prise en compte) et  $\Theta^n(0)$  donné par (eq. 7.73), soit pour rappel :

$$\begin{cases} \tau^n(0) = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} (1 + gF_N^n - h_\Theta (\Theta^n(0) - 300)) \exp\left(\frac{-\xi \cdot \Theta^n(0)}{\Theta_F - \Theta^n(0)}\right), & (7.88) \\ \Theta^n(0) = \left(\frac{\Theta_{fr.}^n(0) - \Theta_{ad.}^n(0)}{\dot{q}_{fr.}^n}\right) \cdot \beta_T \cdot \tau^n(0) \cdot [v]^n + \Theta_{ad.}^n(0). & (7.89) \end{cases}$$

Pour cela, nous choisissons la contrainte de frottement locale  $\tau^n(0)$  comme **inconnue principale**, nous éliminons la température  $\Theta^n(0)$  par l'équation (eq. 7.89) et nous cherchons à minimiser l'erreur calculée sur le résidu  $\mathcal{F}(\tau^n(0))$  dans l'équation (eq. 7.88) que nous définissons par :

$$\mathcal{F}(\tau^n(0)) := \tau^n(0) - \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} (1 + gF_N^n - h_\Theta (\Theta_{int}^n(0) \cdot \tau^n(0) + \Theta_{ad}^n(0) - 300)) \exp\left(\frac{-\xi \cdot (\Theta_{int}^n(0) \cdot \tau^n(0) + \Theta_{ad}^n(0))}{\Theta_F - (\Theta_{int}^n(0) \cdot \tau^n(0) + \Theta_{ad}^n(0))}\right), \quad (7.90)$$

où  $\Theta_{int}(0)$  est une valeur intermédiaire connue définie telle que :

$$\Theta_{int}(0) = \left(\frac{\Theta_{fr.}^n(0) - \Theta_{ad.}^n(0)}{\dot{q}_{fr.}^n}\right) \cdot \beta_T \cdot [v]^n. \quad (7.91)$$

Pour résoudre cette équation non-linéaire (eq. 7.90), nous utilisons une **méthode de sécante** opérant sur  $\tau^n(0)$ . Ceci revient à effectuer plusieurs prédictions successives de l'effort de frottement  $\tau_{pred}^n(0)$ , jusqu'à convergence du problème. Pour ce faire, nous initialisons la sécante en nous donnant deux valeurs  $\tau_0^n = 0$  et  $\tau_1^n = \frac{Y_0}{\sqrt{3}}$  puis nous déterminons chaque nouvelle prédiction  $\tau_{pred}^n(0)$  par la formule de la sécante :

$$\tau(0)_{pred+1}^n = \tau(0)_{pred}^n - \left(\frac{\tau(0)_{pred}^n - \tau(0)_{pred-1}^n}{\mathcal{F}(\tau(0)_{pred}^n) - \mathcal{F}(\tau(0)_{pred-1}^n)}\right) \cdot \mathcal{F}(\tau(0)_{pred}^n). \quad (7.92)$$

Le nombre d'itérations typique à convergence varie de 5 à 13 itérations.

### Applications numériques

La solution du problème précédent nous permet de déduire  $F_T^n(0) = \tau^n(0)$  et  $\Theta(0, t)$ , que nous comparons aux résultats obtenus par Ball et al. (voir [12]). Les matériaux utilisés sont l'Aluminium AA 5083 H111, et l'Acier AISI 321 (EN X6CrNiTi18-10), dont les propriétés mécaniques sont récapitulées ci-après :

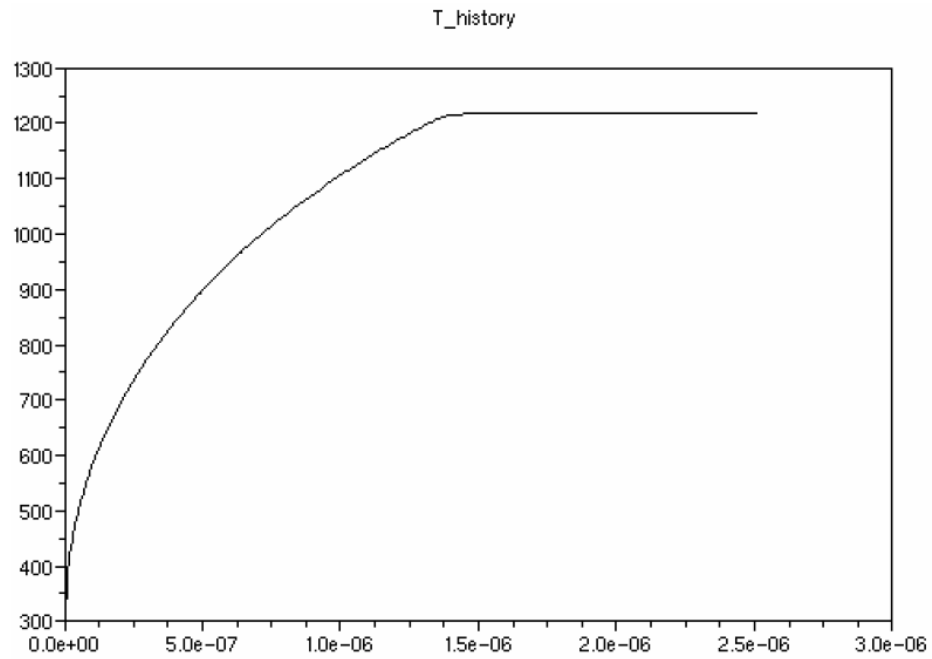
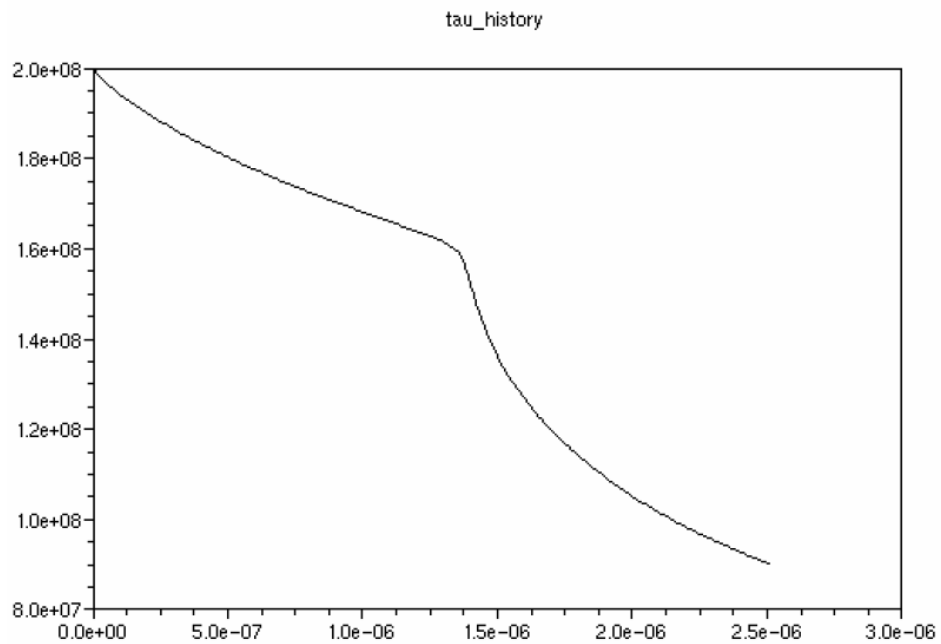
Propriétés thermomécaniques	Aluminium	Acier
- $\rho_0$ , densité en $kg/m^3$	2703	7900
- $\alpha_0$ , diffusivité thermique en $m^2/s$	48.9e-6	4.076e-6
- $\kappa_0$ , conductivité thermique en $W/m.K$	117	16.1
- $Y_0$ , limite d'élasticité initiale en $Pa$	200e6	340e6
- $Y_{max}$ , limite d'érouissage en $Pa$	680e6	2.5e9
- $G_0$ , module de cisaillement en $Pa$	27.6e9	77e9
- $\Theta_F$ , température de fusion en $K$	1220	2380
Coefficients du modèle SCG		
- $\beta$ , coefficient d'érouissage sans dimension	125	43
- $\eta$ , coefficient d'érouissage sans dimension	0.10	0.35
- $g$ , module d'endurcissement en $Pa^{-1}$	6.52e-11	2.26e-11
- $h_\theta$ , module d'adoucissement thermique en $K^{-1}$	6.16e-4	4.55e-4

Le maillage utilisé est composé de  $M = 500$  cellules ayant chacune une épaisseur  $\Delta z = 40nm$ . La zone étudiée s'étend donc sur une épaisseur  $h_\epsilon = 20\mu m$ . Le pas de temps utilisé est quant à lui  $\Delta T = 1ns$ . La vitesse de glissement choisie est telle que  $[v]^n = [V]^n = 200m.s^{-1}$ , tandis que la pression de contact  $F_N^n = 10Gpa$ . La température de référence est prise à  $\Theta_0 = 300K$  et la contrainte initiale  $\tau_0$  est calculée en supposant que nous avons initialement à  $\tau_0 = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} \frac{G(\Theta_0)}{G_0}$ , avec  $\mathbf{f} = 0.3$ .

A vitesse de glissement et pression de contact imposées ( $[V]^n = 200m/s, F_N^n = 10GPa$ ), la température d'interface  $\Theta^n(0)$  tend vers la température de fusion  $\Theta_F$  de l'aluminium (Cf. figure 7.8). L'adoucissement thermique observé implique quant à lui la diminution de la contrainte de cisaillement à l'interface  $\tau^n(0)$  (Cf. figure 7.9).

Qualitativement, nous retrouvons les résultats observés par Ball (voir [12]) (Cf. figure 7.10) qui met en évidence deux régimes :

- une phase de montée en température,
- une phase dite d'*Asymptotic Melting*, où la température d'interface tend asymptotiquement vers la température de fusion.

FIGURE 7.8 – Evolution de la température d'interface de  $t = 0$  à  $t = 2.5 \mu s$ FIGURE 7.9 – Evolution de la contrainte de cisaillement de  $t = 0$  à  $t = 2.5 \mu s$

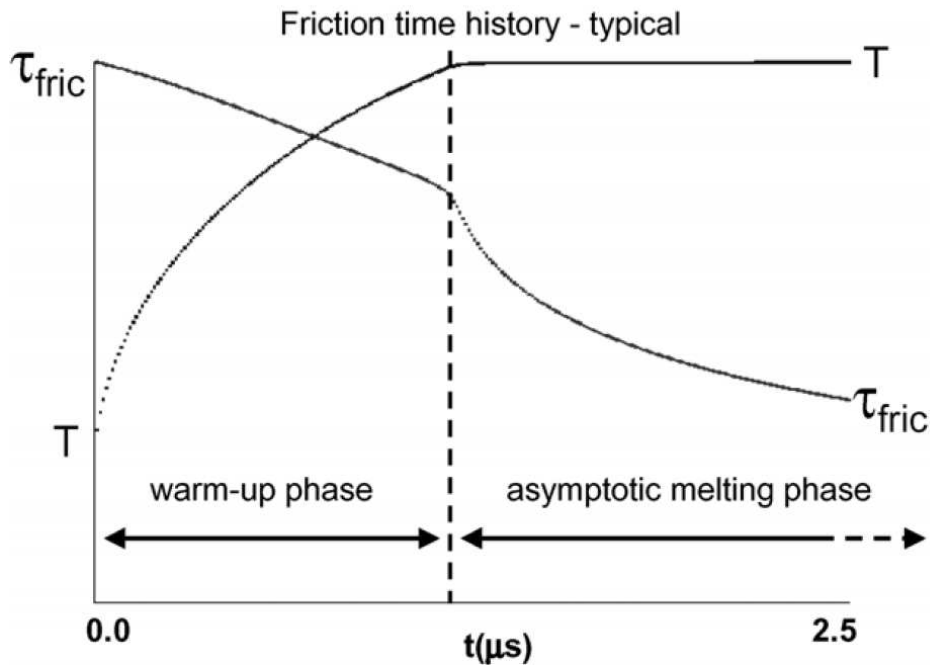


FIGURE 7.10 – Observations faites par BALL (voir [10, 12])

### 7.3.3 Résolution du problème thermoélastique couplé

#### Données et inconnues du problème

Intéressons-nous maintenant à l'algorithme utilisé pour résoudre le problème thermoélastique couplé (eqs. 7.71 à 7.85). Notre modèle est pris en compte lors de l'étape de gestion du frottement (voir Chapitre 3, pp. 103 à 106) qui intervient juste après l'étape de gestion du contact à l'instant discret  $t^n$  (voir Chapitre 3, pp. 102 à 102). Notre objectif consiste ici à déterminer les dérives sur les vitesses tangentielles  $\delta \underline{v}^{n+1/2}(0) \cdot \underline{t}$  pour l'ensemble des noeuds  $\underline{X}_i$  de l'interface discrète, en tenant compte de l'adoucissement thermique observé localement.

Pour résoudre le problème couplé, nous considérons comme **valeurs d'entrée** :

- les données héritées du code de calcul hydrodynamique :
  - l'effort normal  $F_N^n(0)$  qui a été déterminé lors de l'étape de gestion du contact macroscopique par (eq. 3.65),
  - l'effort de soudure  $F_*^n(0)$  qui est déterminé par (eq. 7.83),
  - la vitesse de glissement libre  $\underline{v}^*(0)^{n-1/2}$  aux noeuds glissant  $\underline{X}_i$  considéré que nous obtenons par (eq. 7.80). Nous connaissons également la vitesse libre du noeud obtenu par projection de  $\underline{X}_i$  sur le bras guide, ainsi que la vitesse relative de glissement libre  $[\underline{v}^*]^{n+1/2}$ ,
  - $m(\underline{X}_i)$ ,  $m_G$  et  $\mathcal{S}(\underline{X}_i)$ , les masses et la surface nodale de chaque noeud à l'interface.

- les données calculées au pas de temps précédent ( $t^{n-1}$ ) par le modèle thermoélastique :
  - le champ des températures  $\underline{\Theta}^{n-1}$ ,
  - la vitesse relative de glissement  $[v]^{n-1}$ .

Nous choisissons également les densités de flux de chaleur adiabatiques et frottantes, telles que :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{q}_{\text{ad.}}^n(0) = 0, \\ \overset{\circ}{q}_{fr}^n(0) = \left| Y_0 \cdot [\mathbb{V}^*]^{n+1/2} \right|. \end{cases} \quad (7.93)$$

$$(7.94)$$

où  $Y_0$  est la limite élastique initiale du matériau.

**Les valeurs intermédiaires** que nous déterminons par le biais de notre modèle sont :

- l'effort de frottement  $F_T^n(0) = \tau^n(0)$ ,
- l'effort de frottement de Coulomb  $\tau_C^n(0)$ ,
- la vitesse relative de glissement locale  $[v]^{n+1/2}$ ,
- la vitesse relative de glissement macroscopique  $[\mathbb{V}]^{n+1/2}$ ,
- le champ des températures adiabatiques  $\Theta_{ad}^n(z)$ ,
- le champ des températures frottantes  $\Theta_{fr}^n(z)$ ,
- le champ des températures locales  $\Theta^n(z)$ ,

**La valeur de sortie** est la dérive tangentielle sur les vitesses de glissement  $\delta \underline{\mathbb{V}}^{n+1/2} \cdot \underline{t}$ . Celle-ci va nous permettre de corriger les vitesses libres  $\mathbb{V}^*(0)^{n+1/2}$  calculées aux noeuds d'interface par le code hydrodynamique. Nous résolvons pour ce faire :

$$\delta \underline{\mathbb{V}}^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \min \left( F_T^*(0), \frac{\tau^n(0) \cdot \mathcal{S}(\underline{X}_i)}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n \right) \quad (7.95)$$

### Présentation détaillée du solveur couplé et de l'algorithme de résolution

Détaillons maintenant les différentes étapes résolues par le code hydrodynamique. Pour expliquer la méthode de résolution, nous choisissons par la suite comme inconnue principale la température d'interface  $\Theta^n(0)$ . Nous motivons ce choix car nous souhaitons nous assurer que cette valeur ne dépasse à aucun moment la température de fusion  $\Theta_F$  auquel cas le frottement s'annule à l'interface.

- **Détermination de l'effort de frottement de Coulomb  $\tau_C^n(0)$  :**

Nous calculons dans un premier temps la contrainte de frottement de Coulomb noté  $\tau_C^n(0)$  par la loi de Coulomb,

$$\tau_C^n(0) = \mu_0 \cdot F_N^n(0). \quad (7.96)$$

Cette contrainte de frottement est fonction de la contrainte normale  $F_N^n(0)$  qui est également une donnée du modèle calculée à l'échelle macroscopique par le code hydrodynamique lors de l'étape de gestion du contact :

- **Calcul des champs de température adiabatique  $\underline{\Theta}_{ad}^n$  et frottant  $\underline{\Theta}_{fr}^n$  :**

- Nous calculons  $\underline{\Theta}_{ad}^n$  en résolvant le système discret (eq. 7.72) avec  $\overset{\circ}{q}_{ad}^n = 0$ .
- Dans un second temps, nous calculons le champ des températures frottant  $\underline{\Theta}_{fr}^n$ , en résolvant de nouveau le système (eqs. 7.72) avec cette fois-ci  $\overset{\circ}{q}_{fr}^n > 0$ .

Connaissant ces deux champs thermiques nous pouvons dès lors déterminer pour n'importe quel flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}(0)^n$  le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(\overset{\circ}{q}(0)^n)$  qui lui est associé par l'équation (eq. 7.73).

- **Détermination de la température d'interface  $\Theta^n(0)$  :**

Nous souhaitons maintenant déterminer la contrainte de frottement de Tresca  $\tau^n(\Theta^n(0))$  ainsi que la vitesse relative de glissement locale  $[v]^{n+1/2}(\Theta^n(0))$  et le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(z)$ . Pour résoudre ce problème non-linéaire, nous nous proposons de minimiser l'erreur calculée sur la température d'interface  $\Theta^n(0)$  qui est notre inconnue discrète principale. Ceci revient à annuler le résidu  $\mathcal{F}(\Theta^n(0))$  que nous définissons à partir de la relation discrète de linéarité du champ de température (eq. 7.73) :

$$\mathcal{F}(\Theta^n(0)) := \Theta^n(0) - \Theta_{ad}^n(0) - \left( \frac{\Theta_{fr}^n(0) - \Theta_{ad}^n(0)}{\overset{\circ}{q}_{fr}^n} \right) \cdot \overset{\circ}{q}(0)^n. \quad (7.97)$$

Cette équation (eq. 7.97) est une équation non linéaire en température, car le flux de chaleur est fonction de l'effort de frottement (eq. 7.13) qui dépend lui-même de la température et de la vitesse de glissement (eq. 7.76).

Pour la résoudre, nous avons recours à une **méthode de la sécante** qui revient à effectuer plusieurs prédictions successives de la température d'interface  $\Theta^n(0)$ , jusqu'à convergence du problème. Nous détaillons ici les différentes étapes de résolution :

- (a). Dans un premier temps, nous choisissons une température d'interface  $\Theta_{pred}^n(0) < \Theta_F$ .
- (b). A partir de cette valeur, **nous déterminons la contrainte de Tresca**  $\tau_{pred}^n(\Theta_{pred}^n(0))$  par la relation de frottement (eq. 7.76),

$$\tau_{pred}^n(\Theta_{pred}^n(0)) = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} \left( 1 + g F_N^n(0) - h_{\Theta}(\Theta_{pred}^n(0) - 300) \right) \exp\left( \frac{-\xi \cdot \Theta_{pred}^n(0)}{\Theta_F - \Theta_{pred}^n(0)} \right), \quad (7.98)$$

où nous rappelons que  $\mathbf{f}$  est un paramètre du modèle de frottement.

- (c). Connaissant la contrainte de Tresca  $\tau_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$ , nous en déduisons la vitesse relative de glissement macroscopique  $[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n+1/2}(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$  qui est déterminée par le code de calcul hydrodynamique en résolvant l'équation de la dynamique macroscopique (eq. 7.85) :

$$[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n+1/2}(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) = [\mathbb{V}^*]^{n+1/2} - \tau_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) \cdot \mathcal{F} \cdot \left( \frac{\Delta t}{m_g} - \frac{\Delta t}{m_G} \right). \quad (7.99)$$

La vitesse relative de glissement hydrodynamique  $[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^n$  est évaluée au temps  $t^n$  par :

$$[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^n = \frac{1}{2} \left( [\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n+1/2} + [\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n-1/2} \right) \quad (7.100)$$

D'après la loi de comportement intégrée en espace (eq. 7.5) la vitesse relative de glissement locale  $[v]_{\text{pred}}^n$  s'écrit :

$$[v]_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) = [\mathbb{V}]_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)). \quad (7.101)$$

- (d). Nous pouvons alors en déduire le flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$ , qui nous est donné par l'équation (eq. 7.13) :

$$\overset{\circ}{q}_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) = \beta_T \cdot \left| \tau_{\text{pred}}^n \cdot [v]_{\text{pred}}^n \right|. \quad (7.102)$$

- (e). Nous calculons finalement l'erreur en température  $\mathcal{F}(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$  (eq. 7.97) :

$$\mathcal{F}^*(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) := \Theta_{\text{pred}}^n(0) - \Theta_{\text{ad}}^n(0) - \left( \frac{\Theta_{\text{fr}}^n(0) - \Theta_{\text{ad}}^n(0)}{q_{\text{fr}}^{\circ n}} \right) \cdot \overset{\circ}{q}_{\text{pred}}^n.$$

- (f). Deux cas se présentent alors :

- le résidu  $\mathcal{F}^*(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) \neq 0$ . Dans ce cas nous nous donnons une nouvelle température d'interface  $\Theta_{\text{pred},+1}^n(0)$  que nous obtenons par la formule de la sécante,

$$\Theta_{\text{pred},+1}^n = \Theta_{\text{pred}}^n - \left( \frac{\Theta_{\text{pred}}^n - \Theta_{\text{pred},-1}^n}{\mathcal{F}^*(\Theta_{\text{pred}}^n) - \mathcal{F}^*(\Theta_{\text{pred},-1}^n)} \right) \cdot \mathcal{F}^*(\Theta_{\text{pred}}^n) \quad (7.103)$$

Nous devons donc initialiser la sécante au cours de deux itérations permettant calculer les valeurs prédictives  $\Theta_{\text{pred},0}^n$  et  $\Theta_{\text{pred},1}^n$ .

— le résidu s'annule ( $\mathcal{F}^*(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) = 0$ ) et nous sortons de la sécante avec :

$$\begin{aligned} \bullet \Theta^n(0) &= \Theta_{\text{pred}}^n(0) & \bullet \tau^n(0) &= \tau_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) \\ \bullet [\mathbb{V}]^{n+1/2} &= [\mathbb{v}]_{\text{pred}}^{n+1/2}(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) & \bullet \overset{\circ}{q}^n(0) &= \overset{\circ}{q}_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) \end{aligned}$$

Notons que pour nos applications, entre 5 et 11 itérations sont nécessaires afin de converger vers la solution, ce qui s'avère être très peu coûteux en temps de calcul.

- Une fois que la sécante a convergé et que l'effort de frottement de Tresca  $\tau^n(0)$  a été calculé, nous devons nous assurer qu'il n'excède pas l'effort de frottement de Coulomb  $\tau_C^n(0)$ , ni l'effort de soudure  $\tau_\star^n(0)$ . Nous considérons donc deux cas :

— Si  $\tau^n(0) \leq \min(\tau_C^n(0), \tau_\star^n(0))$  alors nous conservons les valeurs  $\Theta^n(0), \tau^n(0), [\mathbb{V}]^{n+1/2}, \overset{\circ}{q}^n(0)$  calculées jusqu'ici.

— Sinon, si  $\tau^n(0) > \min(\tau_C^n(0), \tau_\star^n(0))$  alors nous prenons  $\tau^n(0) = \min(\tau_C^n(0), \tau_\star^n(0))$  et nous calculons

$$[\mathbb{v}]^n = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbb{V}^\star]^{n+1/2} - \tau^n(0) \cdot \mathcal{S} \cdot \left( \frac{\Delta t}{m_g} - \frac{\Delta t}{m_G} \right) + [\mathbb{V}]^{n-1/2} \right\}, \quad (7.104)$$

puis nous posons,

$$\overset{\circ}{q}^n(0) = |\tau^n(0) \cdot [\mathbb{v}]^n|. \quad (7.105)$$

- Dans les deux cas de figure, nous actualisons finalement l'ensemble du champ des températures  $\Theta^n$  par l'équation (eq. 7.73) et nous déterminons les dérivées tangentielles sur les vitesses  $\delta \underline{\mathbb{V}}^{n+1/2} \cdot \underline{\underline{t}}$  pour le noeud glissant et les noeuds guides par :

$$\delta \underline{\mathbb{V}}^{n+1/2} \cdot \underline{\underline{t}} = \mathbb{v}^{n+1/2}(0) - \mathbb{V}^\star(0)^{n+1/2}. \quad (7.106)$$



### Récapitulatif de l'algorithme de résolution du problème couplé

Calculer  $\tau_C^n(0)$  avec  $F_N(0)^n$  d'après l'équation (eq. 7.96) ;

Calculer  $\underline{\Theta}_{ad}^n$  avec  $\overset{\circ}{q}^n(0) = 0$  d'après l'équation (eq. 7.72) ;

Calculer  $\underline{\Theta}_{fr}^n$  avec  $\overset{\circ}{q}^n(0) = Y_{\max} \cdot [\mathbb{V}^*]^{n+1/2}$  d'après (eq. 7.72) ;

**tant que**  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) \neq 0$  **faire**

- Se donner une température d'interface  $\Theta_{pred}^n(0)$  par méthode de la sécante ;
- En déduire la contrainte de Tresca  $\tau_{pred}^n(\Theta_{pred}^n(0))$  à l'interface par (eq. 7.98) ;
- En déduire la vitesse de glissement macroscopique  $[\mathbb{V}]_{pred}^{n+1/2}(\Theta_{pred}^n(0))$  par (eq. 7.99) ;
- En déduire la vitesse de glissement locale  $[\nu]_{pred}^n = [\mathbb{V}]_{pred}^n$  par (eq. 7.101) ;
- En déduire le flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}_{pred}^n(\Theta_{pred}^n(0))$  par (eq. 7.102) ;
- Calculer l'erreur  $\mathcal{F}^*(\Theta_{pred}^n(0))$  défini par (eq. 7.97) ; ;
- si**  $\mathcal{F}^*(\Theta_{pred}^n(0)) \neq 0$  **alors** se donner une nouvelle valeur de  $\Theta^n(0)$  et réitérer l'opération ;
- sinon** sortir avec  $\Theta^n(0) = \Theta_{pred}^n(0)$ ,  $\tau^n(0) = \tau_{pred}^n(\Theta_{pred}^n(0))$ ,  $[\mathbb{V}]^{n+1/2} = [\nu]_{pred}^{n+1/2}(\Theta_{pred}^{n+1/2}(0))$

**fin**

Comparer  $\tau_C^n(0)$ ,  $\tau_{\star}^n(0)$  et  $\tau^n(0)$  ; ;

**si**  $\min(\tau_C^n(0), \tau_{\star}^n(0)) \geq \tau^n(0)$  **alors**

- Conserver  $[\mathbb{V}]^{n+1/2}$ ,  $\tau^n(0)$  et  $\Theta^n(0)$

**fin**

**sinon si**  $\min(\tau_C^n(0), \tau_{\star}^n(0)) < \tau^n(0)$  **alors**

- Prendre  $\tau^n(0) = \min(\tau_C^n(0), \tau_{\star}^n(0))$  ;
- Calculer la vitesse de glissement  $[\nu]^{n+1/2} = [\mathbb{V}]^{n+1/2}$  à l'interface par (eq. 7.99)

**fin**

Actualiser et stocker le champ des températures  $\underline{\Theta}^n$  par (eq. 7.73) ;

Sortir les dérivées sur les vitesses  $\delta \mathbb{V}^{n+1/2}$  par (eq. 7.106) ;

**Algorithme 1** : Algorithme de résolution du modèle thermique couplé

### 7.3.4 Mise en oeuvre numérique et recalage des tirs expérimentaux du CEA/DAM

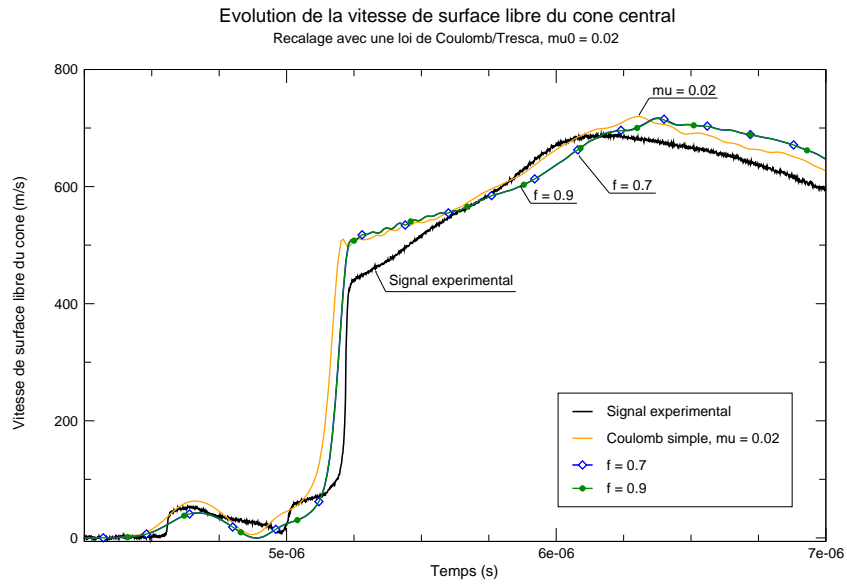
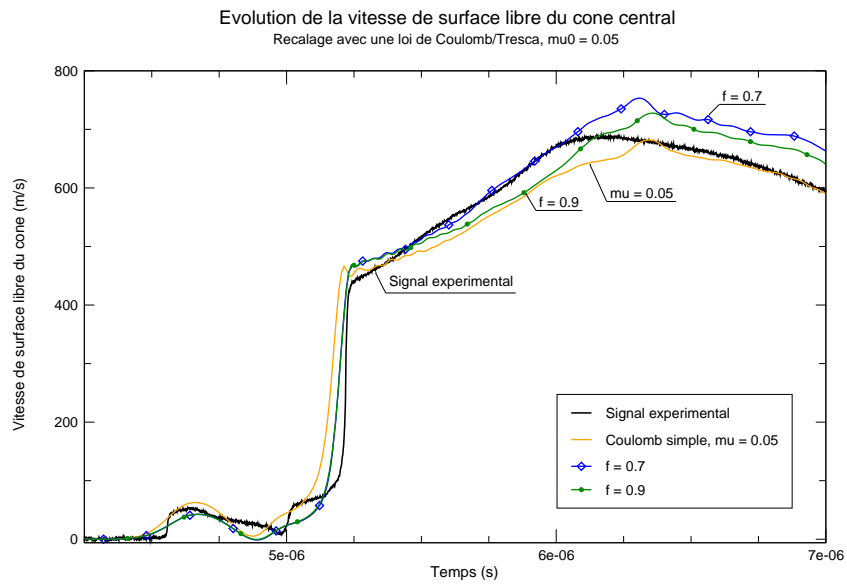
Nous avons éprouvé ce premier modèle en procédant au recalage des signaux expérimentaux obtenus lors des campagnes de tirs du CEA/DAM, sur un couple aluminium/acier, dont les propriétés sont rappelées ci après :

Propriétés thermomécaniques	Aluminium	Acier
- $\rho_0$ , densité en $kg/m^3$	2703	7900
- $\alpha_0$ , diffusivité thermique en $m^2/s$	48.9e-6	4.076e-6
- $\kappa_0$ , conductivité thermique en $W/m.K$	117	16.1
- $Y_0$ , limite d'élasticité initiale en $Pa$	200e6	340e6
- $Y_{max}$ , limite d'écrouissage en $Pa$	680e6	2.5e9
- $G_0$ , module de cisaillement en $Pa$	27.6e9	77e9
- $\Theta_F$ , température de fusion en $K$	1220	2380
Coefficients du modèle SCG		
- $\beta$ , coefficient d'écrouissage sans dimension	125	43
- $\eta$ , coefficient d'écrouissage sans dimension	0.10	0.35
- $g$ , module d'endurcissement en $Pa^{-1}$	6.52e-11	2.26e-11
- $h_\theta$ , module d'adoucissement thermique en $K^{-1}$	6.16e-4	4.55e-4

### Étude paramétrique

Dans un premier temps, nous avons recherché les paramètres de frottement  $\mu_0, f$  permettant de recalcr le plus fidèlement possible les signaux expérimentaux représentant les vitesses de glissement libre du cône en aluminium et du confinement en acier.

Pour cela, nous avons représenté sur les figures 7.11 à 7.14, l'évolution de la vitesse de surface libre du cône central en Aluminium.

FIGURE 7.11 – Recalage par le modèle thermoélastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.02$ FIGURE 7.12 – Recalage par le modèle thermoélastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.05$

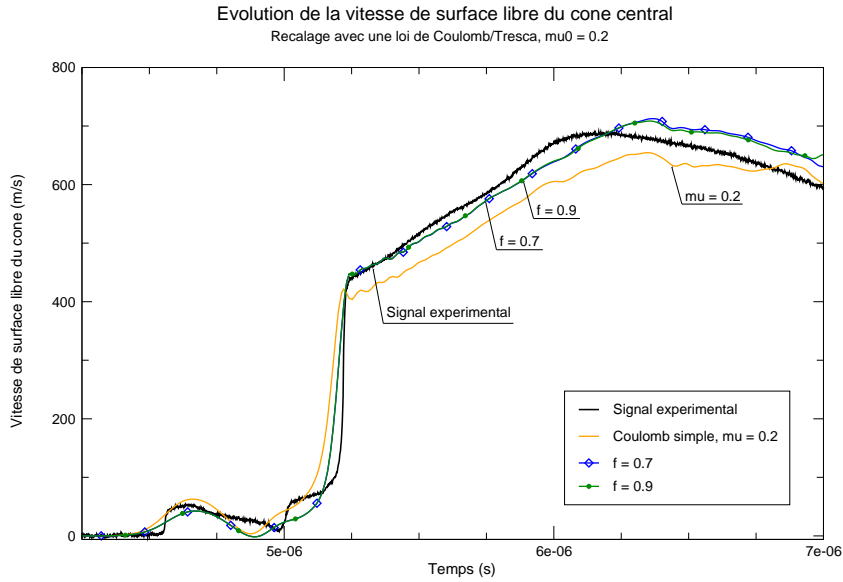


FIGURE 7.13 – Recalage par le modèle thermoélastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.2$

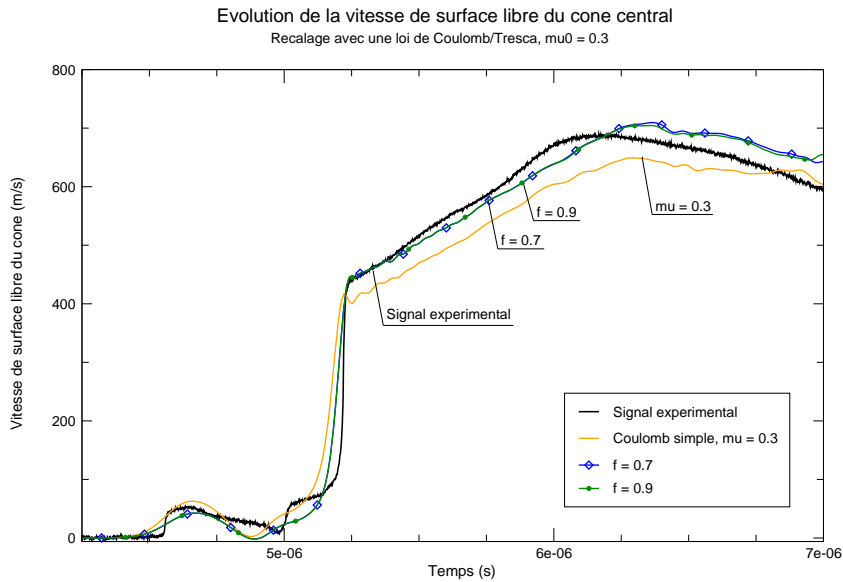


FIGURE 7.14 – Recalage par le modèle thermoélastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.3$

Comme nous pouvons le constater sur le premier graphique (7.11), le comportement varie peu en fonction du paramètre  $f$  retenu. La loi de frottement de Coulomb est alors privilégiée au détriment de notre modèle lorsque le coefficient de Coulomb prend des valeurs extrêmement faibles.

Ce n'est plus le cas pour des coefficients  $\mu_0$  plus élevés. Les paramètres de notre loi de frottement qui permettent le meilleur recalage sont obtenus pour des valeurs telles que  $\mu_0 = 0.2-0.3$ ,  $\mathbf{f} = 0.7-0.9$ . Nous noterons que notre modèle thermoélastique permet d'obtenir un meilleur recalage du signal expérimental qu'avec des lois de frottements classiques tout en ne nécessitant que deux paramètres  $\mu_0, \mathbf{f}$ .

## Comportement à l'interface

### Evolution de la température d'interface

Intéressons-nous maintenant au comportement observé à l'interface. Dans le cadre du modèle thermoélastique, nous avons représenté sur la figure 7.15 l'évolution au cours du temps de la température  $\Theta(0, t)$  pour chacun des nœuds  $X_i$  de l'interface discrète entre le cône en aluminium et le guide en acier (dans notre cas 300 nœuds représentés en abscisse). Les valeurs de température sont représentées sous forme de nappes de niveau dans le cas d'un recalage avec les paramètres  $\mu_0 = 0.3$ ,  $\mathbf{f} = 0.7$ .

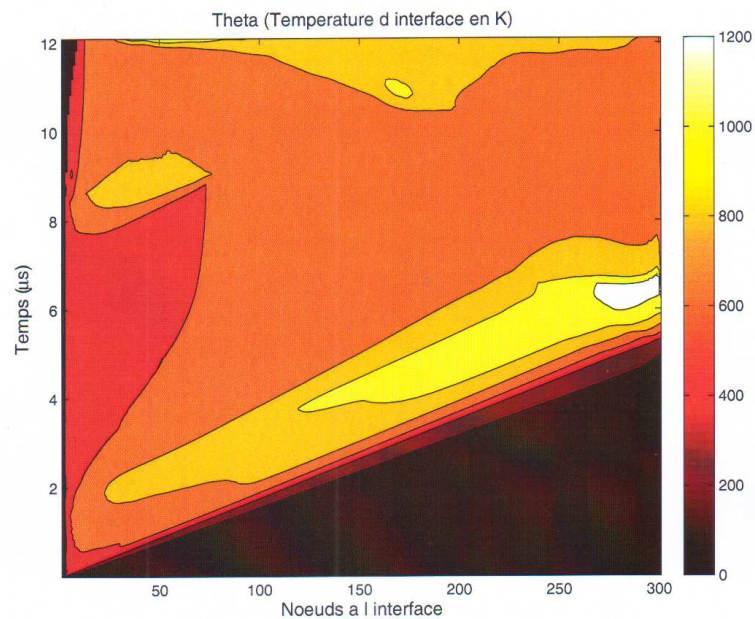


FIGURE 7.15 – Évolution de la température d'interface - Modèle thermoélastique avec  $\mu_0 = 0.3$ ,  $\mathbf{f} = 0.7$

La zone représentée en noir correspond aux nœuds n'ayant pas encore glissés et où aucun frottement n'est observé. Cette figure nous permet notamment de constater que certains nœuds atteignent la température de fusion de l'aluminium ( $\Theta_F = 1200K$ ) à l'interface.

### Évolution de la vitesse relative de glissement

Nous avons également comparé l'évolution de la vitesse relative de glissement à l'interface entre un cas obtenu à l'aide d'une loi de Coulomb modifiée classique ( $\mu_0 = 0.3$ ,  $\mu_\infty = 0.01$ ,  $\gamma = 0.05$ ) (voir figure 7.16), et le modèle thermoélastique avec  $\mu_0 = 0.3$ ,  $f = 0.7$  (voir figure 7.17).

Nous constatons que notre modèle prédit plus de frottement, la vitesse relative maximale ( $v=200$  m/s) étant inférieure à celle calculée par la loi de Coulomb modifiée. Ceci explique entre autre l'échauffement observé à l'interface et les fortes valeurs de températures.

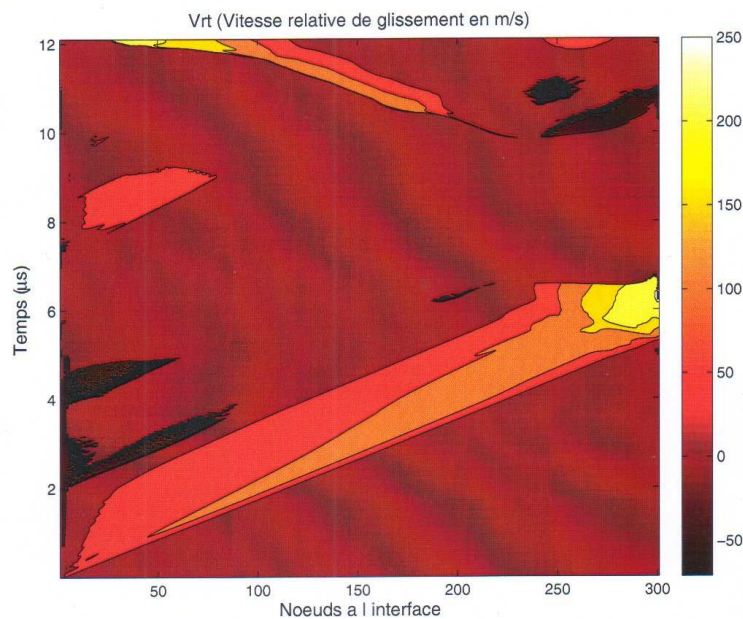


FIGURE 7.16 – Evolution de la vitesse relative de glissement - Modèle de frottement classique avec  $\mu_0 = 0.3$ ,  $\mu_\infty = 0.01$ ,  $\gamma = 0.05$

## ■ 7.4 Conclusion du chapitre

La validation de ce modèle sur la base des expériences conduites par Prakash, conduit à des résultats numériques concordant avec les signaux expérimentaux. Il en va de même pour le recalage des tirs CEA sur des couples Aluminium/Acier, puisque notre modèle thermoélastique quasi-statique permet de restituer le signal expérimental. Comme nous avons pu le constater l'un des principaux avantages du modèle vient du fait que seuls deux paramètres doivent être fixés :

- $\mu_0$ , le coefficient de Coulomb qui est un paramètre initialement connu, propre à chaque paire tribologique,
- $f$ , qui est un paramètre introduit par le modèle de frottement en couche limite.

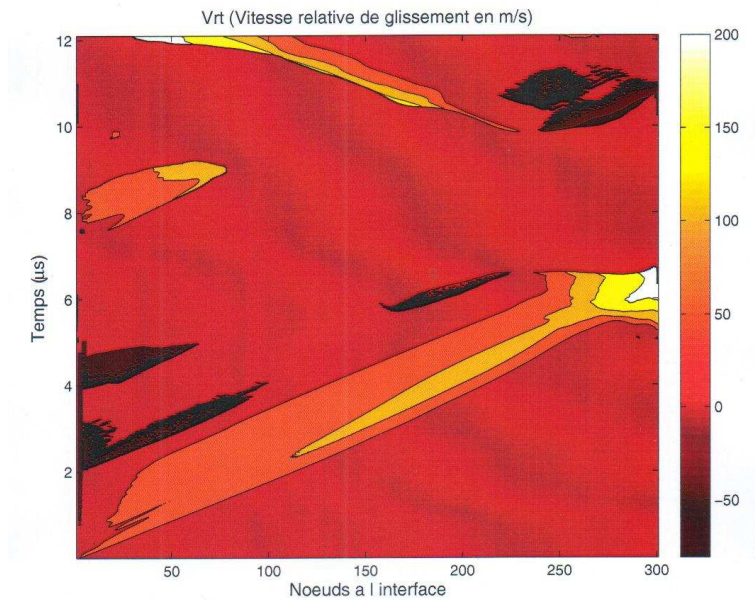


FIGURE 7.17 – Evolution de la vitesse relative de glissement - Modèle thermoélastique avec  $\mu_0 = 0.3$ ,  $f = 0.7$

Ceci constitue bien évidemment un avantage certains par rapport aux lois de Coulomb modifiées classiquement utilisées, et qui nécessitent quant à elles la détermination d'au moins trois paramètres. A titre d'exemple pour la loi de Coulomb-Orowan :  $(\mu_0, \mu_\infty, \gamma)$ .

Intéressons nous maintenant à l'influence de l'érouissage par déformation plastique que nous avons jusqu'ici négligé.

## Le modèle thermoélastoplastique quasi-statique

### ■ Introduction du chapitre

**D**ans ce chapitre, nous nous intéressons à l'influence de la déformation plastique  $\bar{\epsilon}_p(z, t)$  sur la dynamique globale du glissement dans le cas d'une d'évolution thermomécanique quasi-statique ( $\mathbf{N}_2 \rightarrow 0$ ) au voisinage de l'interface.

Nous avons divisé ce chapitre en trois sections distinctes :

- Dans un premier temps, nous récapitulons le système d'équations continues gouvernant le problème thermoélastoplastique quasistatique au voisinage de l'interface de glissement. Nous l'écrivons à partir du problème de base obtenu au Chapitre 5. Contrairement au cas thermoélastique, nous tenons cette fois-ci compte des équations constitutives de la plasticité (eq. 5.159 à 5.169).
- Dans un second temps, nous procédons à la discrétisation du problème en couche limite et le traitons indépendamment du code hydrodynamique, à partir de données issues des travaux de G. Ball, R. Winter et al.. Ceci nous permet d'avoir un premier aperçu du comportement à l'interface que nous confrontons avec les observations faites à l'AWE.
- Enfin, au cours de la troisième et dernière section de ce chapitre, nous résolvons numériquement le modèle couplé. Nous le validons en procédant de nouveau au recalage des tirs expérimentaux réalisés au CEA/DAM sur un couple Aluminium/Acier.



## 8.1 Présentation du modèle thermoélastoplastique quasistatique

### 8.1.1 Récapitulatif des hypothèses de modélisation à l'échelle locale

- **Inertie négligeable en sous-couche** : Suite aux simplifications obtenues par analyse dimensionnelle (voir Chapitre 5, eqs. 5.154 à 5.190, pp. 163 à 165) nous supposons de nouveau que les effets d'inertie peuvent être négligés au voisinage de l'interface de glissement et nous prenons ( $\mathbf{N}_2 \rightarrow 0$ ) dans l'équation de conservation du mouvement (eq. 5.154). Comme nous l'évoquions au cours du chapitre précédent (voir simplification 7.1, pp. 194), ceci nous permet de récrire l'équation de la dynamique locale (eq. 5.154) et nous avons :

$$\frac{\partial \tau(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbb{T}_{XZ}(z, t)}{\partial z}, \quad \forall z \in [0, h_\epsilon]. \quad (8.1)$$

Par intégration sur l'épaisseur de la couche limite, cette équation s'écrit,

$$\tau(h_\epsilon, t) - \tau(z, t) = \mathbb{T}(h_\epsilon, t) - \mathbb{T}(z, t). \quad (8.2)$$

Compte-tenu de la condition de couplage en  $z = h_\epsilon$  (eq. 5.171), nous en déduisons finalement :

$$\tau(z, t) = \mathbb{T}(z, t). \quad (8.3)$$

- **Déformation plastique macroscopique négligeable au voisinage de l'interface** : De nouveau, nous supposons que la déformation plastique est entièrement calculée à l'échelle locale, et qu'elle est mesurée par  $\dot{\epsilon}_p(z, t)$ . Nous prenons pour ce faire,

$$\dot{\mathbb{E}}_p(z, t) = 0. \quad (8.4)$$

Suite à cette seconde hypothèse (eq. 8.4), les équations (eqs. 5.155 à 5.157) de la loi de comportement se simplifient, et nous avons :

$$\dot{\epsilon}_p(z, t) \frac{s_{xx}(z, t)}{\sigma_{\text{eq}}(z, t)} = \dot{\epsilon}_p(z, t) \frac{s_{yy}(z, t)}{\sigma_{\text{eq}}(z, t)} = \dot{\epsilon}_p(z, t) \frac{s_{zz}(z, t)}{\sigma_{\text{eq}}(z, t)} = 0. \quad (8.5)$$

Comme nous considérons le cas où  $\dot{\epsilon}_p(z, t) \geq 0$  ceci implique en cas de chargement plastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{xx} = s_{yy} = s_{zz} = 0, \\ \sigma_{\text{eq}}(z, t) = \sqrt{3} \cdot |\tau(z, t)|, \text{ d'après l'équation (eq.5.160)}. \end{array} \right. \quad (8.6)$$

$$(8.7)$$

La dernière équation de la loi de comportement élastoplastique que nous avons intégrée sur l'épaisseur de la sous-couche s'écrit alors,

$$\mathbb{V}_X(z, t) = v_x(z, t) + \sqrt{3} \int_z^{h_\varepsilon} \dot{\varepsilon}_p d\bar{z}. \quad (8.8)$$

Après soustraction dans l'équation précédente de la vitesse d'interface du matériau situé en vis-à-vis, et après intégration en espace, nous obtenons en  $z = 0$  :

$$[v](0, t) = [V](0, t) - \sqrt{3} \int_0^{h_\varepsilon} \dot{\varepsilon}_p(z, t) dz. \quad (8.9)$$

D'après cette relation, la vitesse de glissement réelle  $[v](0, t)$  est donc égale à la vitesse de glissement macroscopique  $[V](0, t)$  à laquelle nous soustrayons la contribution de la déformation plastique au voisinage de l'interface.

Notons enfin que l'équation (eq. 5.169) est automatiquement vérifiée car nous avons,

$$\dot{\varepsilon}_p(z, t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \underline{\underline{d}}_p(z, t) \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_p(z, t) \underline{\underline{\frac{s(z, t)}{\tau(z, t)}}} \right\| = \dot{\varepsilon}_p(z, t). \quad (8.10)$$

Par la suite, pour lever l'incertitude sur  $\dot{\varepsilon}_p$ , nous calculons directement la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}_p(z, t)$  à partir du modèle rhéologique SCG (eqs. 5.162 et 5.163), du critère de plasticité (eq. 5.159), et des conditions de consistance et persistance (eqs. 5.164 à 5.167). D'après le critère de plasticité de Von Mises (eq. 5.159) une évolution plastique n'est possible que si

$$|\tau(z, t)| \cdot \sqrt{3} - Y(z, t) = 0, \quad (8.11)$$

ce qui revient à écrire pour un matériau SCG non saturé,

$$|\tau(z, t)| \cdot \sqrt{3} = Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_p(z, t))^\eta \cdot \frac{G(F_N(0, t), \Theta(z, t))}{G_0}. \quad (8.12)$$

Nous déduisons de cette dernière équation l'expression de la déformation plastique cumulée,

$$\bar{\varepsilon}_p(z, t) = \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta} \cdot \left\{ \left( \frac{\sqrt{3} \cdot |\tau(z, t)| \cdot G_0}{G(F_N(0, t), \Theta(z, t)) \cdot Y_0} \right)^{\frac{1}{\eta}} - 1 \right\} \right\} \quad (8.13)$$

La fonction maximum intervient ici afin de nous assurer que la déformation plastique cumulée prend uniquement des valeurs positives, ce qui revient à vérifier les conditions de consistance et persistance (eqs. 5.164 à 5.167).

### 8.1.2 Le problème continu

En négligeant les effets de l'inertie ( $\mathbf{N}_2 \rightarrow 0$ ) ainsi que la déformation macroscopique au voisinage de l'interface ( $\dot{\mathbb{E}}_p(z, t) = 0$ ), le problème thermoélastoplastique se résume aux trois systèmes d'équations suivants :

- un problème d'évolution élastoplastique  $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$ , où nous considérons les équations constitutives de la plasticité,
- un problème d'évolution thermique  $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$ , où nous devons tenir compte de la source de chaleur distribuée modélisant l'échauffement par dissipation plastique,
- un modèle d'interface local en  $z = 0$ ,

#### Le problème d'évolution élastoplastique local $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$ :

A l'échelle locale, le comportement mécanique de l'interface est gouverné par les équations (eqs. 8.14 à 8.21) suivantes. Notons que la condition de couplage imposant l'égalité des contraintes tangentielles microscopique et macroscopique en  $z = h_\varepsilon$  (eq. 5.171) n'apparaît plus car elle a été prise en compte dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (eq. 8.14). Il en va de même pour les conditions de consistance/persistence (eqs. 5.164 à 5.167) prises en compte dans l'équation (eq. 8.13).

**Équation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\tau(z, t) = \mathbb{T}(z, t), \quad \forall z \in [0, h_\varepsilon], \quad (8.14)$$

**Loi de comportement élastoplastique intégrée en espace :**

$$[v](0, t) = [V](0, t) - \sqrt{3} \int_0^{h_\varepsilon} \dot{\varepsilon}_p(z, t) dz, \quad (8.15)$$

**Critère de plasticité,  $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$  :**

$$\phi(z, t) := \sqrt{3} \cdot |\tau(z, t)| - Y(z, t) = 0. \quad (8.16)$$

**Modèle rhéologique,  $\forall z \in [0, h_\varepsilon]$  :**

$$Y(z, t) = \min(Y_{\max}, Y_0 (1 + \beta \bar{\varepsilon}_p(z, t))^\eta) \cdot \frac{G(F_N(0, t), \theta(z, t))}{G_0} \quad (8.17)$$

$$G(F_N(0, t), \theta(z, t)) = G_0 (1 + g F_N(0, t) - h_\Theta (\theta(z, t) - 300)) \cdot \exp\left(-\frac{0.001 \cdot \theta(z, t)}{\Theta_F - \theta(z, t)}\right) \quad (8.18)$$

**Déformation plastique cumulée :**

$$\bar{\varepsilon}_p(z, t + \Delta t) = \bar{\varepsilon}_p(z, t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\varepsilon}_p(z, t) dt. \quad (8.19)$$

$$\bar{\varepsilon}_p(z, t) = \max\left\{0, \frac{1}{\beta} \cdot \left\{ \left( \frac{\sqrt{3} \cdot |\tau(z, t)| \cdot G_0}{G(F_N(0, t), \Theta(z, t)) \cdot Y_0} \right)^{\frac{1}{\eta}} - 1 \right\}\right\} \quad (8.20)$$

**Condition initiale :**

$$\bar{\varepsilon}_p(z, 0) = 0. \quad (8.21)$$

**Le problème d'évolution thermique local  $\forall z \in [0, h_e]$  :**

De nouveau, le problème thermique à l'échelle locale est gouverné par l'équation instationnaire de la conduction (eq. 5.177) où nous tenons cette fois-ci compte du travail de déformation plastique. La condition initiale nous est donnée par l'équation (eq. 5.178), et le problème est complété par des conditions aux limites de Neumann en  $z = 0$  et  $z = h_e$  (eqs. 5.180 et 5.179) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation instationnaire de la conduction (eq. 5.177) :} \\ \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} = -\frac{\beta_Q \sqrt{3}}{\kappa} \cdot |\tau(z, t) \cdot \dot{\epsilon}_p(z, t)|, \quad (8.22) \\ \text{Condition initiale en température (eq. 5.178) :} \\ \theta(z, 0) = \Theta_0, \quad (8.23) \\ \text{Condition de couplage thermique en } z = h_e \text{ (eq. 5.179) :} \\ -\kappa \cdot \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_e} = 0, \quad (8.24) \\ \text{Condition de flux en } z = 0 \text{ (eq. 5.180) :} \\ -\kappa \cdot \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_T \cdot \overset{\circ}{q}(0, t). \quad (8.25) \end{array} \right.$$

Nous avons ici introduit (eq. 8.22) le coefficient sans dimension  $\beta_Q$  dit de Taylor-Quiney qui permet de quantifier la proportion d'énergie de déformation plastique transformée en chaleur, et qui est généralement choisit tel que  $\beta_Q = 0.9$  dans la littérature. L'énergie non dissipée sous forme de chaleur contribue généralement à la création ou à l'anihilation de défauts tels que les dislocations, contribuant ainsi à l'écroissage du matériau.

**Le modèle d'interface local en  $z = 0$  :**

Finalement, le problème à l'interface est identique à celui présenté au cours du chapitre précédent. De nouveau, nous considérons les équations discrètes résolues par le code hydrodynamique dans la cellule d'interface (voir tableau 6.1 p. 190, eqs. 6.76 à 6.84). Ces équations sont complétées par les relations suivantes :

— **Condition de couplage en  $z = 0$  (eq. 5.183) :**

$$\tau(0, t) = \mathbb{T}(0, t) = F_T(0, t), \quad (8.26)$$

— **Modèle de frottement en  $z = 0$  :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2(0, t) \cdot \underline{\dot{t}} = -\tau_1(0, t) \cdot \underline{n}_C = -\lambda \cdot [v](0, t), \lambda \geq 0, \quad (8.27) \\ \tau(0, t) = \min \left( \mu_0 F_N(0, t), f \left( \frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}} \right) \cdot (1 + g F_N(0, t) - h_\theta (\theta - 300)) \cdot \exp \left( \frac{-\xi \cdot \theta(0, t)}{\Theta_F - \theta(0, t)} \right) \right) \quad (8.28) \end{array} \right.$$

— **Flux de chaleur généré à l'interface ( $z = 0$ ) :**

$$\overset{\circ}{q}(0, t) = |\tau(0, t) \cdot [v](0, t)|, \quad (8.29)$$

### 8.1.3 Le problème discret

Intéressons-nous maintenant au système d'équations discrètes gouvernant le problème thermoélastoplastique quasistatique ! Comme nous l'avons évoqué en introduction de cette troisième partie, le comportement au voisinage de l'interface est résolu à l'aide d'un modèle de sous-maillles uniforme en espace et d'un schéma d'intégration implicite en temps (voir figure 6.3, p.188). La discrétisation spatiale est obtenue par différences finies centrées en espace et le domaine unidimensionnel  $\Omega_\mu = [0, h_\epsilon]$  est décomposé en  $M$  sous-maillles d'épaisseurs  $\Delta z = h_\epsilon / M$  identiques, soit  $N = M + 1$  noeuds repérés par leur position discrète  $z_i$ . Dans ce cadre nous avons pour rappel,

$$\left\{ \begin{array}{l} [0, h_\epsilon] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [z_i, z_i + \Delta z], \\ z_i = i \cdot \Delta z, \Delta z = h_\epsilon / N, i = 0, N, \end{array} \right. \quad (8.30)$$

$$z_i = i \cdot \Delta z, \Delta z = h_\epsilon / N, i = 0, N, \quad (8.31)$$

et nous posons par la suite,

$$f(i) = f(z_i) = f(i \cdot \Delta z). \quad (8.32)$$

#### Le problème d'évolution élastoplastique discret $\forall i = 0, N$ :

- **Équation discrète de conservation de la quantité de mouvement :**

L'équation discrète de conservation de la quantité de mouvement revient à écrire l'égalité,

$$\tau^n(i) = \mathbb{T}^n(i), \forall i = 0, N \quad (8.33)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, les contraintes macroscopiques sont calculées au niveau des mailles du code hydrodynamique. Comme  $h_\epsilon$  est petit devant l'épaisseur de la maille ( $\Delta Z \sim 100 \mu m$ ) nous pouvons supposer que la contrainte  $\mathbb{T}^n(z)$  est constante dans l'épaisseur de la sous-couche. L'équation discrète de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\tau^n(i) = \mathbb{T}^n(0) = \tau^n(0), \forall i = 0, N. \quad (8.34)$$

- **Loi de comportement élastoplastique discrète intégrée suivant  $z$  :**

Sous forme discrète, la loi de comportement (eq. 8.15) s'écrit,

$$[v]^n(0) = [V]^n(0) - \sqrt{3} \int_0^{h_\epsilon} \frac{\Delta \epsilon_p^n(z)}{\Delta t} dz, \quad (8.35)$$

où l'incrément de déformation plastique  $\Delta\varepsilon_p^n(z)$  nous est donné par :

$$\Delta\varepsilon_p^n(z) = \bar{\varepsilon}_p^n(z) - \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(z). \quad (8.36)$$

Nous en calculons l'intégrale entre 0 et  $h_\varepsilon$  par intégration numérique à l'aide d'une **formule de quadrature** simple : *la méthode des trapèzes*. Compte-tenu de la discrétisation spatiale décrite au paragraphe précédent (voir p. 236), nous avons :

$$\int_0^{h_\varepsilon} \left( \frac{\Delta\varepsilon_p^n(i)}{\Delta t} \right) dz = \frac{h}{2N} \left( \frac{\Delta\varepsilon_p^n(0)}{\Delta t} + \frac{\Delta\varepsilon_p^n(h_\varepsilon)}{\Delta t} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Delta\varepsilon_p^{n+1}(i \cdot \Delta z)}{\Delta t} \right). \quad (8.37)$$

- **Critère de plasticité discret de Von Mises :**

$$\phi^n(i) := |\tau^n(0)| \cdot \sqrt{3} - Y^n(i) = 0, \forall i = 0, N. \quad (8.38)$$

- **Modèle rhéologique discret de Steinberg, Cochran, Guinan :**  $\forall i = 0, N$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^n(i) = Y_0 \left\{ 1 + \beta \left( \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) + \Delta\varepsilon_p^n(i) \cdot \Delta t \right) \right\}^\eta \cdot \frac{G^n(\Theta^n(i))}{G_0} \\ G^n(\Theta^n(i)) = G_0 \left( 1 + g F_N^n(0) - h(\Theta^n(i) - 300) \right) \times \exp \left( -\frac{\xi \cdot \Theta^n(i)}{\Theta_F - \Theta^n(i)} \right) \end{array} \right. \quad (8.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^n(i) = Y_0 \left\{ 1 + \beta \left( \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) + \Delta\varepsilon_p^n(i) \cdot \Delta t \right) \right\}^\eta \cdot \frac{G^n(\Theta^n(i))}{G_0} \\ G^n(\Theta^n(i)) = G_0 \left( 1 + g F_N^n(0) - h(\Theta^n(i) - 300) \right) \times \exp \left( -\frac{\xi \cdot \Theta^n(i)}{\Theta_F - \Theta^n(i)} \right) \end{array} \right. \quad (8.40)$$

- **Déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}_p^{n+1}(i)$ ,  $\forall i = 0, N$  :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p^n(i) = \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) + \Delta\varepsilon_p^n(i) \cdot \Delta T^n, \\ \Delta\varepsilon_p^n(i) = \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta} \cdot \left\{ \left( \frac{\sqrt{3} \cdot |\tau^n(0)| \cdot G_0}{G^n(F_N^n(0), \Theta^n(i)) \cdot Y_0} \right)^{\frac{1}{\eta}} - 1 \right\} - \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) \right\}. \end{array} \right. \quad (8.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p^n(i) = \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) + \Delta\varepsilon_p^n(i) \cdot \Delta T^n, \\ \Delta\varepsilon_p^n(i) = \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta} \cdot \left\{ \left( \frac{\sqrt{3} \cdot |\tau^n(0)| \cdot G_0}{G^n(F_N^n(0), \Theta^n(i)) \cdot Y_0} \right)^{\frac{1}{\eta}} - 1 \right\} - \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) \right\}. \end{array} \right. \quad (8.42)$$

- **Condition initiale discrète :**

$$\varepsilon_p^0(i) = 0, \forall i = 0, N. \quad (8.43)$$

### Le problème d'évolution thermique discret $\forall i = 0, N$ :

La thermique au sein des matériaux est de nouveau résolue à l'aide d'un schéma implicite en temps, reliant le champ discret des températures  $\Theta^n(i)$  à la densité de flux de chaleur générée à l'interface  $\overset{\circ}{q}$ . Après discrétisation uniforme en espace par un schéma aux différences finies sur le maillage décrit p. 236, le problème se présente de nouveau sous la forme d'une matrice tridiagonale que nous résolvons à l'aide de l'algorithme de Thomas. En prenant  $\tau_i^n = \tau^n(0)$  d'après l'équation (eq. 8.33), il vient :

$$\frac{\Theta_{i-1}^n - 2\Theta_i^n + \Theta_{i+1}^n}{\Delta z^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Theta_i^n - \Theta_i^{n-1}}{\Delta T^n} = -\frac{\beta_Q}{\kappa} \cdot \sqrt{3} \cdot \tau^n(0) \cdot \dot{\epsilon}_p^n(i), \quad (8.44)$$

où bien encore de manière équivalente :

$$\Theta_{i-1}^n - 2\Theta_i^n + \Theta_{i+1}^n + \frac{\beta_Q \sqrt{3} \Delta z^2}{\kappa} \cdot \tau^n(0) \cdot \dot{\epsilon}_p^n(i) = \frac{\Delta z^2}{\alpha \Delta T^n} (\Theta_i^n - \Theta_i^{n-1}), \quad (8.45)$$

Pour résoudre ce modèle thermique, nous traitons par la suite les sources volumiques dues au travail plastique  $(\beta_Q \cdot \tau^n(0) \cdot \dot{\epsilon}_p^n(i))$  de manière explicite en utilisant le terme source calculé à l'instant  $t^{n-1}$  précédent  $(\beta_Q \cdot \tau^{n-1}(0) \cdot \dot{\epsilon}_p^{n-1}(i))$ . Nous calculons alors les températures proches de l'interface par :

$$\Theta_i^{n-1} = -\overline{Fo} \left( \Theta_{i-1}^n + \Theta_{i+1}^n + \frac{\beta_Q \sqrt{3} \cdot \Delta z^2}{\kappa} \cdot \tau^{n-1} \cdot (\dot{\epsilon}_p)^{n-1} \right) + (1 + 2\overline{Fo}) \Theta_i^n \text{ définie } \forall i, 0 \leq i \leq N. \quad (8.46)$$

Rappelons ici que  $\overline{Fo} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta z^2}$  est le nombre de Fourier caractérisant la pénétration de la chaleur au sein d'un matériau, en fonction de sa diffusivité thermique  $\alpha$ , ainsi que des pas de temps  $\Delta t$  et d'espace  $\Delta z$  utilisés.

Le fait de traiter explicitement les sources volumiques de chaleur nous permet de conserver la propriété de linéarité du champ des températures  $\Theta^n(i)$  avec le flux de chaleur à l'interface  $\overset{\circ}{q}(0)$ . De nouveau, nous calculons successivement le champ des températures adiabatiques  $\Theta_{ad}^n(i)$  et le champ des températures frottantes  $\Theta_{fr}^n(i)$  en considérant respectivement les flux  $\overset{\circ}{q}_{ad}^n = 0$  et  $\overset{\circ}{q}_{fr}^n > 0$  et en tenant dans les deux cas compte des termes sources  $\tau^{n-1} \cdot (\dot{\epsilon}_p)^{n-1}$  calculés à l'instant  $t^{n-1}$  précédent. Nous pouvons alors facilement estimer  $\Theta^n(z)$  au voisinage de l'interface en fonction de  $\overset{\circ}{q}(0)$  par :

$$\Theta^n(i) = \left( \frac{\Theta_{fr}^n(i) - \Theta_{ad}^n(i)}{\overset{\circ}{q}_{fr}^n} \right) \cdot \beta_T \cdot [v]^n \cdot \tau^n(0) + \Theta_{ad}^n(i). \quad (8.47)$$

Afin de valider notre hypothèse, nous vérifions à posteriori que la variation des sources volumiques est d'effet négligeable. Pour cela nous calculons une valeur corrigée de la température  $\hat{\Theta}^n(i)$ , obtenue en considérant les sources volumiques à l'instant  $t^n$  actuel  $(\beta_Q \cdot \tau^n(0) \cdot \dot{\epsilon}_p^n(i))$ , puis nous comparons  $\hat{\Theta}^n(i)$  et  $\Theta^n(i)$ .

**Le modèle d'interface en  $i = 0$  :**

- **Condition de couplage en  $i = 0$  :**

$$\tau^n(0) = \mathbb{T}^n(0) = \frac{\delta F_T^n(\underline{X}_i)}{\mathcal{S}(\underline{X}_i)}. \quad (8.48)$$

- **Modèle de frottement en  $i = 0$  :**

$$\begin{cases} \tau_2(0)^n \cdot \underline{n}_C = -\tau_1(0)^n \cdot \underline{n}_C = -\lambda \cdot [\underline{v}](0)^n, \lambda \geq 0, \\ \tau^n(0) = \min \left\{ \mu_0 \cdot F_N^n(0), \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} (1 + gP^n - h_\Theta (\Theta^n(0) - 300)) \exp\left(\frac{-\xi \cdot \Theta^n(0)}{\Theta_F - \Theta^n(0)}\right) \right\}. \end{cases} \quad (8.49)$$

- **Flux de chaleur généré à l'interface ( $z = 0$ ) :**

$$\dot{q}(0)^n = |\tau(0)^n \cdot [v](0)^n|, \quad (8.51)$$

Ces équations sont complétées par les relations macroscopiques discrètes (eq. 6.76 à 6.84) :

- **Résolution de la dynamique au noeud d'interface à l'instant  $T^{n+1/2}$**

— Calcul de la force  $\underline{F}(\underline{X}_i)^n$  appliquée à l'instant  $T^n$

$$\underline{F}(\underline{X}_i)^n = \sum_k \left( \underline{\underline{\Sigma}}(\Omega_k)^n : \int_{\Gamma_k} \underline{\Phi}(\underline{X}_i) \cdot \underline{n}_{\Gamma_k} d\Gamma \right). \quad (8.52)$$

— Détermination des accélérations libres  $\underline{\underline{U}}^*(\underline{X}_i)^n$

$$\underline{\underline{U}}^*(\underline{X}_i)^n = \frac{\underline{F}(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)}. \quad (8.53)$$

— Calcul des vitesses libres

$$\underline{\underline{V}}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} = \underline{\underline{U}}^*(\underline{X}_i)^n \cdot \Delta T^n + \underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n-1/2} \quad (8.54)$$

- **Gestion du contact et correction de la composante normale des vitesses libres**

$$\begin{cases} \delta \underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}_C = \frac{\delta F_N(\underline{X}_i)^n}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n, \end{cases} \quad (8.55)$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{V}}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n} - \delta \underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{n}. \end{cases} \quad (8.56)$$

avec  $\delta F_N^n(\underline{X}_i)$  donné par l'équation de contact (eq. 3.65).

- **Gestion du frottement et correction de la composante tangentielle des vitesses libres**

$$F_\star^n = \frac{[\underline{\underline{V}}^*]^{n+1/2}}{\Delta T^n} \left( \frac{m_G \cdot m(\underline{X}_i)}{m_G + m(\underline{X}_i)} \right), \quad (8.57)$$

$$\delta \underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \frac{\min(\delta F_T(\underline{X}_i)^n, F_\star(\underline{X}_i)^n)}{m(\underline{X}_i)} \cdot \Delta T^n, \quad (8.58)$$

$$\underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} = \underline{\underline{V}}^*(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t} - \delta \underline{\underline{V}}(\underline{X}_i)^{n+1/2} \cdot \underline{t}. \quad (8.59)$$



## ■ 8.2 Résolution du problème thermoélastoplastique non-couplé

### 8.2.1 Présentation du problème non-couplé

Comme pour le problème thermoélastique non-couplé que nous avons traité au chapitre 7 (pp. 215 à 217), nous traitons dans un premier temps un cas simplifié où nous supposons que la vitesse macroscopique  $[\mathbb{V}]^n$  et la pression de contact  $F_N^n(0)$  sont connues. Ceci va nous permettre d'avoir un premier aperçu du comportement thermomécanique au voisinage de l'interface, et notamment d'étudier l'évolution de la température de contact  $\Theta^n(0)$ , de la contrainte de Tresca  $\tau^n(0)$ , et de la déformation plastique à l'interface  $\bar{\varepsilon}_p^n(i)$  dans l'épaisseur  $h_\varepsilon$  de la couche limite.

Pour ce cas simplifié, nous nous plaçons à l'instant  $t^n$  et nous considérons comme **valeurs d'entrée** les données suivantes :

- la vitesse relative de glissement  $[\mathbb{V}]^n$  que nous supposons constante au cours du temps,
- la pression de contact  $F_N^n(0)$ , elle aussi supposée constante au cours du temps,
- le champ des températures  $\Theta^{n-1}(i)$  calculé au pas de temps précédent et initialement uniforme à la température de référence  $\Theta_0$ ,  $\forall i = 0, N$ ,
- le champ de déformation plastique  $\bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i)$  calculé au pas de temps précédent et initialement nul en tout point du modèle de sous-maillles.
- la contrainte de frottement  $\tau^{n-1}(0)$  calculée à l'instant précédent, et que nous utilisons pour estimer les termes de dissipation plastique  $\tau^{n-1}(0) \cdot \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i)$  dans l'équation de la chaleur.

Nous nous donnons également comme densités de flux de chaleur adiabatiques et frottantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{q}_{\text{ad.}}(0) = 0, \\ \overset{\circ}{q}_{\text{fr.}}(0) = |Y_0 \cdot [\mathbb{V}]^n|, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (8.60) \\ (8.61) \end{array}$$

où  $Y_0$  est la limite élastique initiale du matériau.

Les **valeurs intermédiaires** calculées par l'algorithme à l'instant  $t^n$  sont :

- la densité de flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}(0)$  à l'interface,
- le champ des températures adiabatiques  $\Theta_{\text{ad.}}^n(i)$  en tout point du modèle de sous-maillles,
- le champ des températures frottantes  $\Theta_{\text{fr.}}^n(i)$  en tout point du modèle de sous-maillles,
- l'incrément de déformation plastique  $\Delta\varepsilon_p^n(i)$  en tout point du modèle de sous-maillles,
- le module de cisaillement SCG,  $G^n(F_N^n(0), \Theta^n(i))$  en tout point du modèle de sous-maillles.

Les **valeurs de sortie** que nous calculons dans le cadre de ce cas simplifié sont :

- la contrainte de frottement de Tresca  $\tau^n(0)$  que nous stockons,
- le champ des températures locales  $\Theta^n(z)$  que nous stockons,
- la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}_p^n(z)$  que nous stockons,
- la vitesse relative de glissement locale  $[v]^n$ ,
- la limite élastique SCG,  $Y^n(\bar{\varepsilon}_p^n(i), G^n(i))$  en tout point du modèle de sous-maillles.

## 8.2.2 Algorithme de résolution du problème non-couplé

Détaillons maintenant les différentes étapes résolues par l'algorithme non-couplé dans le cadre de ce cas simplifié. Comme pour le problème thermoélastique non-couplé (Chapitre 7, pp. 215 à 217), la première étape de la résolution consiste à calculer les champs de température adiabatiques  $\Theta_{ad}^n(i)$  et frottants  $\Theta_{fr}^n(i)$  :

- **Calcul des champs de température adiabatique  $\Theta_{ad}^n(i)$  et frottant  $\Theta_{fr}^n(i)$**

— Nous calculons  $\Theta_{ad}^n(i)$  en résolvant le système discret (eqs. 8.46) avec  $\overset{\circ}{q}(0)_{ad}^n = 0$ .

— Nous calculons  $\Theta_{fr}^n(i)$  en résolvant de nouveau le système (eqs. 8.46) avec cette fois-ci  $\overset{\circ}{q}(0)_{fr}^n > 0$ .

Connaissant ces deux champs thermiques nous pouvons dès lors déterminer pour n'importe quel flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}^n$  le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(\overset{\circ}{q}(0)^n)$  qui lui est associé par l'équation (eq. 8.47).

Nous souhaitons maintenant déterminer la contrainte de frottement de Tresca  $\tau^n(\Theta^n(0))$ , le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(\tau^n)$ , le champ des déformations plastiques  $\bar{\varepsilon}_p^n(\tau^n, \underline{\Theta}^n)$ , ainsi que la vitesse relative de glissement locale  $[v]^n$  et la limite élastique  $Y^n(i)$ ,  $\forall i = 0, N$ . Pour calculer cette réponse thermomécanique, nous devons résoudre un problème fortement non-linéaire gouverné par les équations suivantes :

$$[v]^n(0) = [\mathbb{V}]^n(0) - \frac{\sqrt{3}}{\Delta t} \int_0^{h_\varepsilon} \Delta \varepsilon_p^n(z) dz, \quad (8.62)$$

$$\Delta \varepsilon_p^n(i) = \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta} \cdot \left\{ \left( \frac{\sqrt{3} \cdot |\tau^n(0)| \cdot G_0}{G^n(F_N^n(0), \Theta^n(i)) \cdot Y_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} - \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) \right\}, \quad (8.63)$$

$$\tau^n(0) = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} \left( 1 + g F_N^n(0) - h_\Theta (\Theta^n(0) - 300) \right) \exp \left( \frac{-\xi \cdot \Theta^n(0)}{\Theta_F - \Theta^n(0)} \right), \quad (8.64)$$

$$\Theta^n(i) = \left( \frac{\Theta_{fr}^n(i) - \Theta_{ad}^n(i)}{\overset{\circ}{q}_{fr}^n} \right) \cdot \overset{\circ}{q}^n(0) + \Theta_{ad}^n(i) = \left( \frac{\Theta_{fr}^n(i) - \Theta_{ad}^n(i)}{\overset{\circ}{q}_{fr}^n} \right) \cdot \beta_T \cdot \tau^n(0) \cdot [v]^n + \Theta_{ad}^n(i). \quad (8.65)$$

Nous le résolvons en choisissant la température d'interface  $\Theta^n(0)$  comme inconnue discrète principale. Nous nous proposons alors de minimiser l'erreur sur le flux de chaleur (eq. 8.62),

$$\mathcal{F}(\Theta^n(0)) := \overset{\circ}{q}^n(0) - \beta_T \cdot \tau^n(0) \cdot [v]^n. \quad (8.66)$$

Pour ce faire, nous avons recours à une **méthode de la sécante** qui revient à effectuer plusieurs prédictions successives de la température d'interface  $\Theta_{pred}^n(0)$ , jusqu'à convergence du problème. Nous détaillons ici les différentes étapes de résolution.

- **Résolution de l'équation non-linéaire (eq. 8.66) par la méthode de la sécante**

- (a). Nous nous donnons dans un premier temps une température d'interface  $\Theta_{\text{pred}}^n < \Theta_F$ .
- (b). A partir de cette valeur, nous déterminons la contrainte de Tresca  $\tau_{\text{pred}}^n$  par la loi de frottement discrète (eq. 8.64),

$$\tau_{\text{pred}}^n = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{\text{max}}}{\sqrt{3}} \left( 1 + g F_N^n(0) - h_{\Theta} \left( \Theta_{\text{pred}}^n(0) - 300 \right) \right) \exp \left( \frac{-\xi \cdot \Theta_{\text{pred}}^n(0)}{\Theta_F - \Theta_{\text{pred}}^n(0)} \right),$$

où nous rappelons que  $\mathbf{f}$  est un paramètre du modèle de frottement.

- (c). Toujours à partir de la valeur  $\Theta_{\text{pred}}^n(0)$ , nous déterminons une valeur estimée du flux de chaleur à l'interface  $\overset{\circ}{q}_{\text{pred}}^n \left( \Theta_{\text{pred}}^n(0) \right)$  en utilisant la propriété de linéarité de la température avec le flux de chaleur (eq. 8.65) :

$$\overset{\circ}{q}_{\text{pred}}^n = \overset{\circ}{q}_{fr}^n \left( \frac{\Theta_{\text{pred}}^n(0) - \Theta_{ad}^n(0)}{\Theta_{fr}^n(0) - \Theta_{ad}^n(0)} \right). \quad (8.67)$$

- (d). Nous en déduisons alors le champ des températures  $\Theta_{\text{pred}}^n(i)$  en utilisant de nouveau l'équation (eq. 8.65) en  $i = 1, N$ .
- (e). A partir de ce champ des températures  $\Theta_{\text{pred}}^n(i)$  nous pouvons alors procéder au calcul de la déformation plastique au voisinage de l'interface. Pour cela, nous calculons dans un premier temps le module de cisaillement SCG,  $G_{\text{pred}}^n \left( \Theta_{\text{pred}}^n(i) \right)$  dans l'épaisseur de la couche limite par l'équation (eq. 8.40). Nous en déduisons alors une prédiction élastique locale  $Y(i)_{\text{pred},\star}^n$  du seuil de plasticité, obtenue en gelant localement la déformation plastique :

$$Y(i)_{\text{pred},\star}^n = Y_0 \left( 1 + \beta \varepsilon_p^{n-1}(i) \right)^{\eta} \cdot \frac{G_{\text{pred}}^n \left( \Theta_{\text{pred}}^n(i) \right)}{G_0} \quad (8.68)$$

Pour déterminer si nous sommes localement en régime plastique, nous vérifions pour chaque noeud du modèle de sous-mailles  $i = 0, N$ , le critère discret de Von Mises (eq. 8.38) :

$$\phi_{\text{pred}}^n(i) = \left| \tau_{\text{pred}}^n \right| \cdot \sqrt{3} - Y(i)_{\text{pred},\star}^n. \quad (8.69)$$

Selon la valeur prise par  $\phi_{\text{pred}}^n(i)$  deux cas peuvent se présenter :

— *Comportement élastique local,  $\phi_{\text{pred}}^n(i) < 0$  :*

Le matériau est soit demeuré dans le domaine élastique au cours du chargement, soit il a subi une décharge élastique à partir d'un état plastique. La vitesse d'écoulement plastique étant localement nulle ( $\dot{\varepsilon}_p^n(i) = 0$ ), nous n'observons pas d'écoulement plastique et nous avons,

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i) = 0, \\ Y_{\text{pred}}^n(i) = Y(i)_{\text{pred},\star}^n. \end{cases} \quad (8.70)$$

$$(8.71)$$

— *Écoulement plastique local,  $\phi_{\text{pred}}^n(i) \geq 0$  :*

La contrainte d'écoulement  $\tau_{\text{pred}}^n$  est soit sur la surface de charge, soit à l'extérieur. Dans ce cas de figure, il faut varier la limite d'élasticité  $Y_{\text{pred},\star}^n(i)$ . La déformation plastique varie durant le pas de temps, de sorte que  $\Delta \varepsilon_p^n(i) \geq 0$  nous est donnée par l'équation (eq. 8.63) et nous avons,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i) = \left( \frac{1}{\beta} \cdot \left( \frac{\tau_{\text{pred}}^n \cdot G_0 \sqrt{3}}{G(\Theta_{\text{pred}}^n(i)) \cdot Y_0} \right)^{\frac{1}{\eta}} - 1 \right) \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) > 0, \\ Y_{\text{pred}}^n(i) = Y_0 \left\{ 1 + \beta \left( \bar{\varepsilon}_p^{n-1}(i) + \Delta \varepsilon_p^n(i) \right) \right\}^{\eta} \cdot \frac{G_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(i))}{G_0}. \end{array} \right. \quad (8.72)$$

$$(8.73)$$

— (f) *Intégration numérique de l'incrément de déformation plastique  $\Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i)$  :*

Une fois que l'incrément de déformation plastique  $\Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i)$  a été calculé en chaque point du modèle de sous-mailles, nous en calculons l'intégrale sur l'épaisseur  $h_\varepsilon$  à l'aide de la formule de quadrature (eq. 8.37), pour rappel :

$$\int_0^{h_\varepsilon} \left( \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i) \right) dz = \frac{h}{2N} \left( \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(0) + \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(h_\varepsilon) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^{n+1}(i \cdot \Delta z) \right). \quad (8.74)$$

— (g). Connaissant  $[\mathbb{V}]^n$  qui est une donnée et  $\int_0^{h_\varepsilon} \left( \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i) \right) dz$  que nous venons de calculer, nous en déduisons la vitesse relative de glissement locale  $[v]_{\text{pred}}^n$  par l'équation (eq. 8.62) en  $i = 0$ ,

$$[v]_{\text{pred}}^n = [\mathbb{V}]^n - \int_0^{h_\varepsilon} \left( \Delta \varepsilon_{p,\text{pred}}^n(i) \right) dz.$$

— (h). *Estimation de l'erreur sur la loi de comportement :*

Nous vérifions finalement l'erreur sur la loi de comportement (eq. 8.66), en calculant le résidu  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0))$  introduit précédemment (eq. 8.82). En fonction de la valeur obtenue, deux cas se présentent à nous :

- Si le résidu s'annule  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) = 0$ , alors cela signifie que la valeur prédite  $\Theta_{pred}^n(0)$  est correcte. Les valeurs solutions du problème sont alors :

$$\begin{cases} \Theta^n(i) = \Theta_{pred}^n(i), & (8.75) \\ \tau^n = \tau_{pred}^n, & (8.76) \\ \Delta\varepsilon_p^n(i) = \Delta\varepsilon_{p,pred}^n(i). & (8.77) \end{cases}$$

Nous actualisons finalement la déformation plastique généralisée par l'équation (eq. 8.42) :

$$\bar{\varepsilon}_p^{n+1}(i) = \bar{\varepsilon}_p^n(i) + \Delta\varepsilon_p^{n+1}(i)$$

et nous prenons comme profil final du seuil plastique  $Y^n(i) = Y_{pred}^n(i)$ .

- Si  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) \neq 0$ , nous nous donnons une nouvelle température d'interface  $\Theta_{pred+1}^n(0)$  par la **méthode de la sécante** :

$$\Theta_{pred+1}^n(0) = \Theta_{pred}^n(0) - \left( \frac{\Theta_{pred}^n(0) - \Theta_{pred-1}^n(0)}{\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) - \mathcal{F}(\Theta_{pred-1}^n(0))} \right) \cdot \mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)). \quad (8.78)$$

Nous répétons ces différentes étapes ((a) à (h)), jusqu'à ce que le résidu  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0))$  s'annule. Rappelons que la méthode de la sécante nécessite de tester aux moins deux valeurs  $\Theta_0^n(0)$  et  $\Theta_1^n(0)$  pour pouvoir l'initialiser. Nous prenons dans notre cas  $\Theta_0^n(0) = \Theta_0$  et  $\Theta_1^n(0) = \Theta_F - 1$

### 8.2.3 Applications numériques et validation qualitative

Nous présentons maintenant les résultats obtenus dans le cas d'un essai de frottement entre un matériau en aluminium (Aluminium AA 5083 H111) et un matériau en acier inoxydable (Acier AISI 321 / EN X6CrNiTi18-10), dont les propriétés thermomécaniques sont rappelés ci-après :

Propriétés thermomécaniques	Aluminium	Acier
- $\rho_0$ , densité en $kg/m^3$	2703	7900
- $\alpha_0$ , diffusivité thermique en $m^2/s$	48.9e-6	4.076e-6
- $\kappa_0$ , conductivité thermique en $W/m.K$	117	16.1
- $Y_0$ , limite d'élasticité initiale en $Pa$	200e6	340e6
- $Y_{max}$ , limite d'écrouissage en $Pa$	680e6	2.5e9
- $G_0$ , module de cisaillement en $Pa$	27.6e9	77e9
- $\Theta_F$ , température de fusion en $K$	1220	2380
<b>Coefficients du modèle SCG</b>		
- $\beta$ , coefficient d'écrouissage sans dimension	125	43
- $\eta$ , coefficient d'écrouissage sans dimension	0.10	0.35
- $g$ , module d'endurcissement en $Pa^{-1}$	6.52e-11	2.26e-11
- $h_\theta$ , module d'adoucissement thermique en $K^{-1}$	6.16e-4	4.55e-4

Comme pour le problème thermoélastique non-couplé, le maillage utilisé est composé de  $M = 500$  cellules ayant chacune une épaisseur  $\Delta z = 40nm$ . La zone étudiée s'étend donc sur une épaisseur  $h_\varepsilon = 20\mu m$ . Le pas de temps utilisé est quant à lui  $\Delta T = 1ns$ . Nous imposons une vitesse de glissement  $[V]^n = 200m.s^{-1}$  et prenons une pression de contact  $F_N^n = 10Gpa$ . La température de référence est choisie telle que  $\Theta_0 = 300K$  et la température de fusion de l'aluminium à  $\Theta_F = 1220K$ . Enfin, la contrainte initiale  $\tau_0$  est calculée en supposant que nous avons initialement  $\tau_0 = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max} G(\Theta_0)}{\sqrt{3} G_0}$ , avec  $\mathbf{f} = 0.3$ .

Dans un premier temps, nous avons représenté l'évolution de la fonction erreur  $\mathcal{F}(\Theta^n(0))$  (eq. 8.66) en fonction de la température d'interface  $\Theta^n(0)$ , afin de nous assurer de sa monotonie voir figure (8.1). Pour ce faire, nous avons tracé cette fonction en début (courbe bleue) et fin de calcul (courbe verte). Comme nous pouvons le constater, cette fonction est bien monotone et va de  $\mathcal{F} < 0$  à  $\mathcal{F} > 0$ .

Comme pour le modèle thermoélastique non-couplé, la température d'interface (voir figure 8.2) et la contrainte de Tresca (voir figure 8.3) présentent les mêmes profils.

Ainsi, à vitesse de glissement  $[V] = 200m/s$  imposée, la température tend vers la température de fusion (Cf. figure 8.2), tandis que l'adoucissement thermique entraîne la diminution de la contrainte de cisaillement (Cf. figure 8.3) comme dans le cas thermoélastique. Cependant, cet adoucissement thermique est en partie compensé par la déformation plastique au sein des matériaux. Le graphique 8.4 fait ainsi clairement apparaître qu'une fine couche de matière d'épaisseur micrométrique  $\sim 2\mu m$  plastifie à l'interface à  $t = 0.25\mu s$ . Cette zone plastique correspond à la région où l'écrouissage et l'adoucissement thermique se compensent.

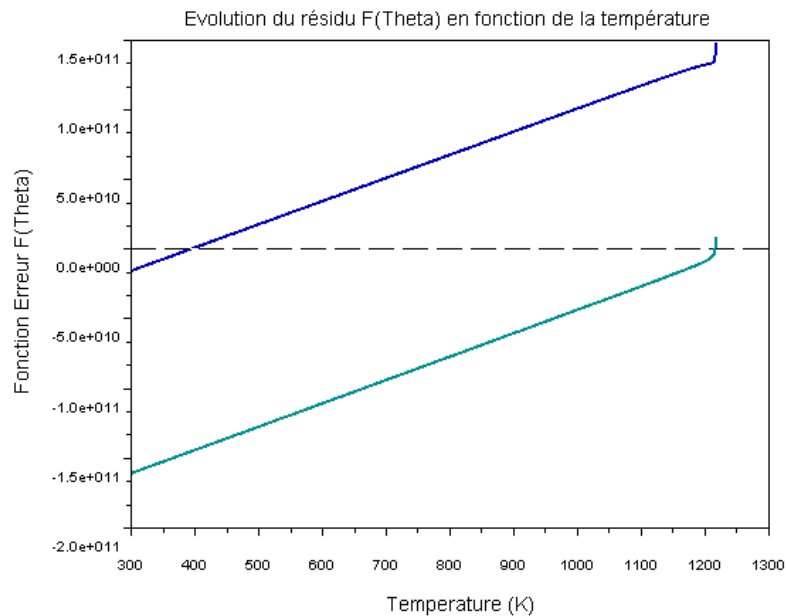


FIGURE 8.1 – Evolution du résidu  $\mathcal{F}(\Theta^n(0))$  (eq. 8.66) en fonction de la température d'interface  $\Theta^n(0)$ . Représentation en début de calcul, à  $t = 2\Delta t$  (courbe bleue) et en fin de calcul à  $t=2.5\mu s - \Delta t$  (courbe verte)

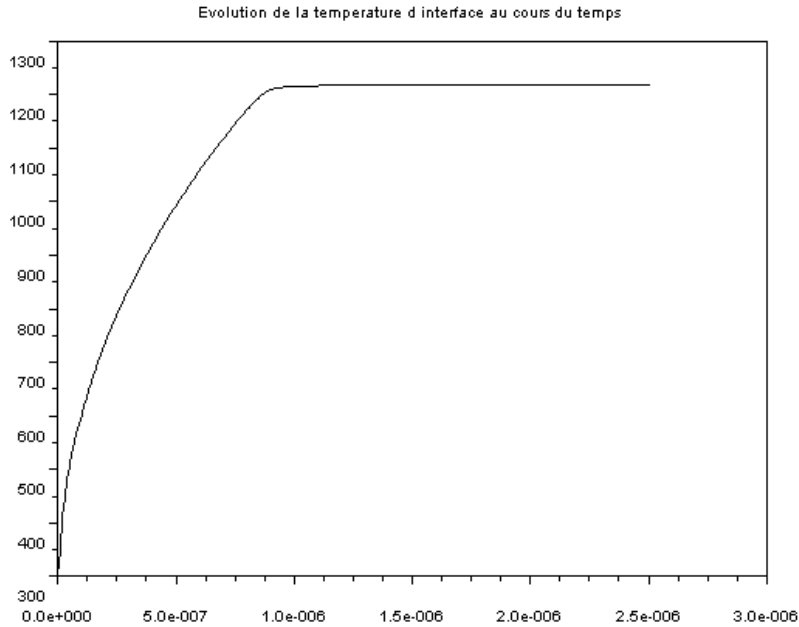
## 8.3 Résolution du problème thermoélastoplastique couplé

### 8.3.1 Principe de résolution du problème couplé

Contrairement au cas précédent, où le problème thermoélastoplastique quasistatique était résolu de manière indépendante en nous donnant une vitesse de glissement macroscopique constante, nous résolvons maintenant le problème couplé au code de calcul hydrodynamique.

Comme pour le problème thermoélastique (voir Chapitre précédent, pp. 193 à 230), notre modèle est pris en compte lors de l'étape de gestion du frottement qui intervient juste après l'étape de gestion du contact à l'instant discret  $t^n$  (voir Chapitre 3, pp. 98 à 106). De nouveau, notre objectif consiste à déterminer les dérivées sur les vitesses tangentielles  $\delta \underline{v}^{n+1/2}(0) \cdot \underline{t}$  pour l'ensemble des noeuds  $\underline{X}_i$  de l'interface discrète, en tenant compte de l'adoucissement thermique et de l'écrouissage par déformation plastique observés localement.

Pour résoudre le problème couplé, nous considérons comme **valeurs d'entrée** :

FIGURE 8.2 – Evolution de la température d'interface  $\Theta(0)$  de  $t = 0$  à  $t = 2.5 \mu s$ 

- les données héritées du code hydrodynamique :
  - la vitesse relative de glissement  $[\underline{V}] (\underline{X}_i)^{n-1/2}$  calculée à l'instant  $t^{n-1/2}$  précédent,
  - la vitesse de glissement libre  $\underline{V}^*(0)^{n+1/2}$  au noeud glissant  $\underline{X}_i$  considéré que nous obtenons par (eq. 8.54). Nous connaissons également la vitesse libre du noeud obtenu par projection de  $\underline{X}_i$  sur le bras guide, et par conséquent la vitesse relative de glissement libre  $[\underline{V}^*]^{n+1/2}$ ,
  - la force de contact  $\delta F_N(0)^n$  qui a été déterminée lors de l'étape de gestion du contact macroscopique par l'équation (eq. 8.55),
  - la force de soudure  $\delta F_\star(0)^n$  qui a été déterminée par l'équation (eq. 8.57),
  - $m(\underline{X}_i)$ ,  $m_G$  et  $\mathcal{S}(\underline{X}_i)$ , les masses et la surface nodale de chaque noeud à l'interface.
- les données calculées au pas de temps précédent ( $t^{n-1}$ ) par le modèle thermoélastoplastique :
  - le champ des températures  $\underline{\Theta}^{n-1}(i)$ , initialement à la température  $\Theta_0$ ,  $i = 1, N$ ,
  - le champ des déformations plastiques  $\bar{\epsilon}_p^{n-1}(i)$ , initialement nul en tout point  $i = 0, N$ ,
  - la vitesse relative de glissement locale  $[v](\underline{X}_i)^{n-1}$ .

Nous choisissons également les densités de flux de chaleur adiabatiques et frottantes telles que :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{q}_{ad.}(0) = 0, \\ \overset{\circ}{q}_{fr} = \left| Y_0 \cdot [\underline{V}^*]^{n+1/2} \right|. \end{cases} \quad (8.79)$$

$$(8.80)$$



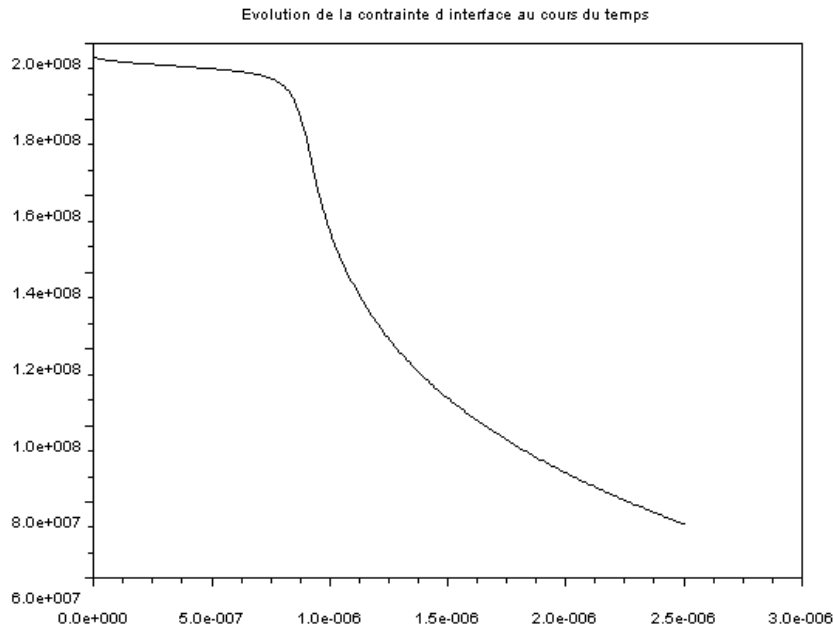


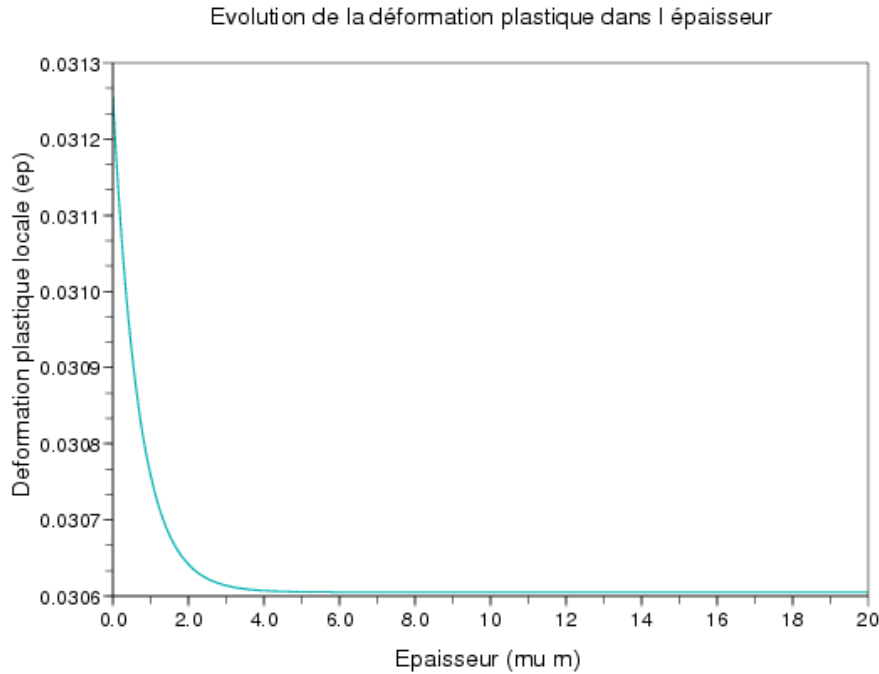
FIGURE 8.3 – Evolution de la contrainte de TRESCA  $\tau(0)$  de  $t = 0$  à  $t = 2.5 \mu s$

où  $Y_0$  est la limite élastique initiale du matériau.

**Les valeurs intermédiaires** que nous déterminons par le biais de notre modèle sont :

- la contrainte de frottement  $F_T^n(0) = \tau^n(0)$ ,
- la contrainte de frottement de Coulomb  $\tau_C^n(0)$ ,
- la vitesse relative de glissement locale  $[v]^{n+1/2}$ ,
- la vitesse relative de glissement macroscopique  $[V]^{n+1/2}$ ,
- le champ des températures adiabatiques  $\Theta_{ad}^n(i)$ ,
- le champ des températures frottantes  $\Theta_{fr}^n(i)$ ,
- le champ des températures locales  $\Theta^n(i)$ , que nous stockons,
- l'incrément de déformation plastique  $\Delta \varepsilon_p^n(i)$ ,
- la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}_p^n(i)$ , que nous stockons,
- le module de cisailment SCG,  $G^n(F_N(0)^n, \Theta^n(i))$  en tout point du modèle de sous-maillles,
- la limite élastique SCG,  $Y^n(G^n(i))$  en tout point du modèle de sous-maillles.

Enfin, et comme pour le problème thermoélastique, **la valeur de sortie** est la dérive tangentielle sur les vitesses de glissement  $\delta \underline{V}^{n+1/2} \cdot \underline{t}$ . Celle-ci nous permet de corriger les vitesses libres  $\underline{V}^*(0)^{n+1/2}$  calculées aux noeuds d'interface par le code hydrodynamique (eqs. 8.58 et 8.59)

FIGURE 8.4 – Déformation plastique en sous couche observée à  $t = 2.5 \mu s$ 

### 8.3.2 Algorithme de résolution du problème couplé

Détaillons maintenant les différentes étapes résolues par le code hydrodynamique. Pour cela, nous choisissons de nouveau la température d'interface  $\Theta^n(0)$  comme **inconnue principale**. Les premières étapes de la résolution sont identiques à celles du problème thermoélastique :

- **Détermination de la contrainte de frottement de Coulomb**

Dans un premier temps, nous calculons la contrainte de frottement de Coulomb,

$$\tau_C^n(0) = \mu_0 \cdot F_N^n(0), \quad (8.81)$$

où nous rappelons que la contrainte normale  $F_N^n(0) = \frac{\delta F_N^n(\underline{X}_i)}{\mathcal{S}(\underline{X}_i)}$  est une donnée de l'algorithme qui a été calculée par le code hydrodynamique lors de l'étape de gestion du contact.

- **Calcul des champs de température adiabatique  $\Theta_{ad}^n$  et frottant  $\Theta_{fr}^n$**

— Dans un second temps, nous calculons le champ des températures adiabatiques  $\Theta_{ad}^n$  en

résolvant le système discret (eq. 8.46) avec  $\overset{\circ}{\dot{q}}(0)_{ad}^n = 0$ .

- Puis nous calculons le champ des températures frottant  $\underline{\Theta}_{fr}^n$ , en résolvant de nouveau le système (eqs. 8.46) avec cette fois-ci  $\overset{\circ}{\dot{q}}(0)_{fr}^n > 0$ . Nous prenons par exemple  $\overset{\circ}{\dot{q}}(0)_{fr}^n = \left| Y_{max} \cdot [V^*]^{n+1/2} \right|$ .

Connaissant ces deux champs thermiques nous pouvons dès lors déterminer pour n'importe quel flux de chaleur  $\overset{\circ}{\dot{q}}^n$  le champ des températures  $\underline{\Theta}^n(\overset{\circ}{\dot{q}}(0)^n)$  qui lui est associé par l'équation (eq. 8.47).

Nous souhaitons maintenant déterminer la contrainte de frottement de Tresca  $\tau^n(\Theta^n(0))$ , le champ des températures  $\Theta^n(i)$ , le champ des déformations plastiques  $\bar{\epsilon}_p(i)$ . Pour cela, nous devons résoudre les équations locales (eqs. 8.34 à 8.51) ainsi que les équations globales (eqs. 8.52 à 8.59). Pour résoudre ce problème non-linéaire, nous nous proposons de minimiser l'erreur calculée sur la température  $\Theta^n(0)$  qui est notre inconnue discrète principale. Ceci revient à annuler le résidu  $\mathcal{F}(\Theta^n(0))$  que nous définissons de nouveau comme l'erreur sur le flux de chaleur, calculé à partir de l'équation (eq. 8.47) :

$$\mathcal{F}(\Theta^n(0)) := \mathcal{F}(\Theta^n(0)) := \overset{\circ}{\dot{q}}^n(0) - \beta_T \cdot \tau^n(0) \cdot [v]^n. \quad (8.82)$$

Pour résoudre cette équation non-linéaire (eq. 8.82), nous avons de nouveau recours à une **méthode de la sécante** qui revient à effectuer plusieurs prédictions successives de la température d'interface  $\Theta^n(0)$ , jusqu'à convergence du problème. Comme nous l'avons vu lors de la résolution du problème non-couplé, cette fonction est monotone (voir figure 8.1, 246), et va de  $\mathcal{F} < 0$  à  $\mathcal{F} > 0$  quand  $\Theta^n(0)$  va de  $\Theta_{ad}(0)$  vers  $\Theta_F$ . Nous détaillons ici les différentes étapes de résolution :

- (a). Dans un premier temps, nous nous donnons une température d'interface  $\Theta_{pred}^n(0) < \Theta_F$ .
- (b). Estimation de la contrainte de frottement de Tresca :

A partir de cette valeur, nous en déduisons une estimation  $\tau_{pred}^n$  de la contrainte de Tresca dans la couche limite. Cette dernière qui est par définition constante dans l'épaisseur dans le cas d'une évolution quasistatique (eq. 8.33), nous est donnée par la loi de frottement (eq. 8.50), et nous avons :

$$\tau_{pred}^n = \mathbf{f} \cdot \frac{Y_{max}}{\sqrt{3}} \left( 1 + gP^n - h_{\Theta} \left( \Theta_{pred}^n(0) - 300 \right) \right) \exp \left( \frac{-\xi \cdot \Theta_{pred}^n(0)}{\Theta_F - \Theta_{pred}^n(0)} \right), \quad (8.83)$$

où nous rappelons que  $\mathbf{f}$  est un paramètre du modèle de frottement. Notons également que dans le cas où la température d'interface  $\Theta_{pred}^n(0)$  choisie excède la température de fusion  $\left( \Theta_{pred}^n(0) \geq \Theta_F \right)$ , alors  $\tau_{pred}^n \left( \Theta_{pred}^n(0) \right) = 0$ .

- (c). Connaissant la contrainte de frottement de Tresca  $\tau_{\text{pred}}^n$  et en supposant qu'il n'y a pas de soudure, nous en déduisons la vitesse relative de glissement macroscopique  $[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n+1/2}(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$  qui est déterminée par le code de calcul hydrodynamique en résolvant l'équation de la dynamique macroscopique (eq. 8.59) :

$$[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n+1/2}(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) = [\mathbb{V}^*]^{n+1/2} - \tau_{\text{pred}}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) \cdot \mathcal{S} \cdot \left( \frac{\Delta t}{m_g} - \frac{\Delta t}{m_G} \right). \quad (8.84)$$

Nous l'évaluons à l'instant  $t^n$  par :

$$[\mathbb{V}]_{\text{pred}}^n = \frac{1}{2} \left( [\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n+1/2} + [\mathbb{V}]_{\text{pred}}^{n-1/2} \right). \quad (8.85)$$

- (d). Toujours à partir de la valeur  $\Theta_{\text{pred}}^n(0)$ , nous déterminons une valeur estimée du flux de chaleur à l'interface  $\overset{\circ}{q}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$  en utilisant la propriété de linéarité de la température avec le flux de chaleur (eq. 8.47) :

$$\overset{\circ}{q}^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0)) = \overset{\circ}{q}_{fr}^n \left( \frac{\Theta_{\text{pred}}^n(0) - \Theta_{ad}^n(0)}{\Theta_{fr}^n(0) - \Theta_{ad}^n(0)} \right) \quad (8.86)$$

- (e). *Estimation du champ des températures* : A partir du flux de chaleur  $\overset{\circ}{q}^n(0)^n(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$ , nous estimons le champ des températures  $\Theta_{\text{pred}}^n(i)$  dans l'épaisseur  $h_\varepsilon$  de la couche limite, autrement dit pour chaque point  $i$  du modèle de sous-maille par l'équation (eq. 8.47) écrite en  $i = 1, N$ .
- (f). *Calcul de l'écoulement plastique* : Le calcul de l'écoulement plastique, et son intégration en espace ce fait de la même façon que pour le problème non-couplé.
- (g). *Actualisation de la vitesse relative de glissement locale  $[v]^n$*  : Connaissant la vitesse relative de glissement macroscopique  $[\mathbb{V}]^n$  ainsi que l'intégrale de l'incrément de déformation plastique sur l'épaisseur de la couche limite, nous en déduisons  $[v]^n$  par la loi de comportement discrète intégrée en espace (eq. 8.35),

$$[v]^n(0) = [\mathbb{V}]^n(0) - \frac{\sqrt{3}}{\Delta t} \int_0^{h_\varepsilon} \Delta \varepsilon_p^n(z) dz.$$

- (h). *Estimation de l'erreur sur le flux de chaleur* :

Nous vérifions finalement l'erreur sur le flux de chaleur (eq. 8.35), en calculant le résidu  $\mathcal{F}(\Theta_{\text{pred}}^n(0))$  introduit précédemment (eq. 8.82). En fonction de la valeur obtenue, deux cas se présentent alors :

- Si le résidu s'annule  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) = 0$ , alors cela signifie que la valeur prédite  $\Theta_{pred}^n(0)$  est correcte. Les valeurs solutions du problème sont alors :

$$\begin{cases} \Theta^n(i) = \Theta_{pred}^n(i), & (8.87) \\ \tau^n = \tau_{pred}^n, & (8.88) \\ \Delta \varepsilon_p^n(i) = \Delta \varepsilon_{p,pred}^n(i) & (8.89) \end{cases}$$

Nous actualisons dans ce cas la déformation plastique généralisée par l'équation (eq. 8.42) :

$$\bar{\varepsilon}_p^{n+1}(i) = \bar{\varepsilon}_p^n(i) + \Delta \varepsilon_p^{n+1}(i), \quad (8.90)$$

et nous en déduisons le profil final du seuil plastique  $Y^n(i)$  suivant l'épaisseur  $h_\varepsilon$ .

- Si  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) \neq 0$ , nous nous donnons une nouvelle température d'interface  $\Theta_{pred+1}^n(0)$  par la **méthode de la sécante** :

$$\Theta_{pred+1}^n(0) = \Theta_{pred}^n(0) - \left( \frac{\Theta_{pred}^n(0) - \Theta_{pred-1}^n(0)}{\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) - \mathcal{F}(\Theta_{pred-1}^n(0))} \right) \cdot \mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)). \quad (8.91)$$

Nous répétons ces différentes étapes  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0))$ , jusqu'à ce que le résidu s'annule. Rappelons que la méthode de la sécante nécessite de tester aux moins deux valeurs  $\Theta_0^n(0)$  et  $\Theta_1^n(0)$  pour pouvoir l'initialiser.

Comme pour le problème thermoélastique, une fois que la sécante a convergé et que la contrainte de frottement de Tresca  $\tau^n(0)$  a été calculée, nous devons nous assurer qu'elle n'excède pas la contrainte de Coulomb  $\tau_C^n(0)$ , ni la contrainte de soudure  $\tau_\star^n(0)$ . Nous considérons donc deux cas :

- Si  $\tau^n(0) \leq \min(\tau_C^n(0), \tau_\star^n(0))$  alors nous conservons les valeurs  $\Theta^n(i), \varepsilon_p^n(i), \tau^n(0), [v]^n, \overset{\circ}{q}^n(0)$ , et  $[V]^{n+1/2}$  calculées jusqu'ici.
- Sinon, si  $\tau^n(0) > \min(\tau_C^n(0), \tau_\star^n(0))$  alors nous prenons  $\tau^n(0) = \min(\tau_C^n(0), \tau_\star^n(0))$  et nous calculons

$$[v]^n = \frac{1}{2} \left\{ [V^\star]^{n+1/2} - \tau^n(0) \cdot \mathcal{S} \cdot \left( \frac{\Delta t}{m_g} - \frac{\Delta t}{m_G} \right) + [V]^{n-1/2} \right\}, \quad (8.92)$$

puis nous posons,

$$\overset{\circ}{q}^n(0) = \beta_T \cdot |\tau^n(0) \cdot [v]^n|. \quad (8.93)$$

Nous actualisons alors le champ des températures  $\Theta^n(i)$  par l'équation (eq. 8.47), et recalculons le champ des déformations plastiques  $\varepsilon_p^n(i)$  (étape (g)).

Dans les deux cas, nous déterminons finalement les dérivées tangentielles sur les vitesses  $\delta \underline{v}^{n+1/2} \cdot \underline{t}$  pour le nœud glissant et les nœuds guides par :

$$\delta \underline{v}^{n+1/2} \cdot \underline{t} = v^{n+1/2}(0) - v^*(0)^{n+1/2}. \quad (8.94)$$

### Récapitulatif de l'algorithme de résolution

Calculer  $\tau_C^n(0)$  avec  $F_N(0)^n$  d'après l'équation (eq. 8.81) ;  
 Calculer  $\Theta_{ad}^n$  avec  $\dot{q}^n(0) = 0$  d'après l'équation (eq. 8.46) ;  
 Calculer  $\Theta_{fr}^n$  avec  $\dot{q}^n(0) = Y_{\max} \cdot [V^*]^{n+1/2}$  d'après (eq. 8.46) ;  
**tant que**  $\mathcal{F}(\Theta_{pred}^n(0)) \neq 0$  **faire**  
   Se donner une température d'interface  $\Theta_{pred}^n(0)$  par méthode de la sécante ;  
   En déduire la contrainte de frottement  $\tau_{pred}^n$  à l'interface par (eq. 8.83) ;  
   En déduire la vitesse de glissement macroscopique  $[V]_{pred}^{n+1/2}$  par (eqs. 8.84, 8.85) ;  
   En déduire le flux de chaleur  $\dot{q}_{pred}^n(\Theta_{pred}^n(0))$  par (eq. 8.86) ;  
   Calculer une prédiction de la limite élastique  $Y(i)_{pred,*}^n$  par (eq. 8.69) ;  
   Calculer le critère de plasticité de Von Mises  $\phi_{pred}^n(i) := |\tau_{pred}^n(i)|\sqrt{3} - Y(i)_{pred,*}^n$  ;  
   Calculer l'incrément  $\Delta \varepsilon_{p,pred}^n$  ;  
   Calculer l'intégrale du taux de déformation plastique sur l'épaisseur  $h_\varepsilon$  par l'équation eq. 8.37 ;  
   Calculer le résidu  $\mathcal{F}^*(\Theta_{pred}^n(0))$  par l'équation (eq. 8.82) ; ;  
   **si**  $\mathcal{F}^*(\Theta_{pred}^n(0)) \neq 0$  **alors** se donner une nouvelle valeur de  $\Theta^n(0)$  et réitérer l'opération ;  
   **sinon** Sortir avec  $\Theta^n(i) = \Theta_{pred}^n(i)$ ,  $\bar{\varepsilon}_p^n(i) = \bar{\varepsilon}_{p,pred}^n(i)$ ,  $\tau^n(0) = \tau_{pred}^n$ ,  $[v]^n = [v]_{pred}^n$  ;  
**fin**  
 Comparer  $\tau_C^n(0)$ ,  $\tau_*^n(0)$  et  $\tau^n(0)$  ; ;  
**si**  $\min(\tau_C^n(0), \tau_*^n(0)) \geq \tau^n(0)$  **alors**  
   | Conserver  $[V]^n$ ,  $\tau^n(0)$  et  $\Theta^n(0)$   
**fin**  
**sinon si**  $\min(\tau_C^n(0), \tau_*^n(0)) < \tau^n(0)$  **alors**  
   | Prendre  $\tau^n(0) = \min(\tau_C^n(0), \tau_*^n(0))$  ;  
   | Calculer la vitesse de glissement  $[v]^n$  à l'interface par (eq. ??) ;  
   | Actualiser les champs des températures  $\Theta^n(i)$  et des déformations plastiques  $\bar{\varepsilon}_p^n(i)$  par (eqs. ?? et étape (e)).  
**fin**  
 ;  
 Sortir les dérivées sur les vitesses  $\delta \underline{v}^{n+1/2}$  par (eq. 8.94). ;

**Algorithme 2** : Algorithme de résolution du modèle thermique couplé

### 8.3.3 Validation du modèle par recalage des tirs réalisés au CEA/DAM

De nouveau, nous avons éprouvé ce modèle en procédant au recalage des signaux expérimentaux obtenus lors des campagnes de tirs du CEA/DAM, sur un couple aluminium/acier.

Comme pour le modèle thermoélastique, nous avons dans un premier temps procédé à une étude paramétrique sur les paramètres  $\mu_0$  et  $f$  afin de déterminer le couple permettant le meilleur recalage.

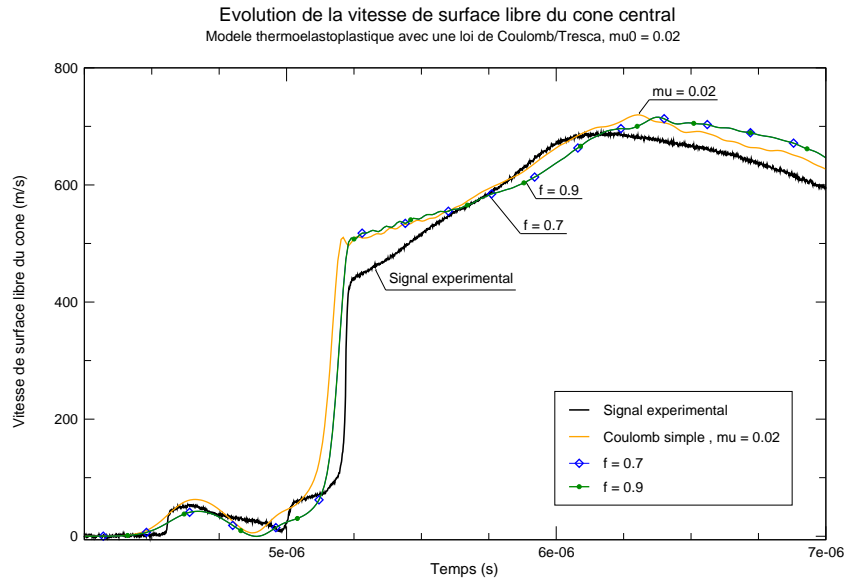


FIGURE 8.5 – Recalage par le modèle thermoélastoplastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.02$

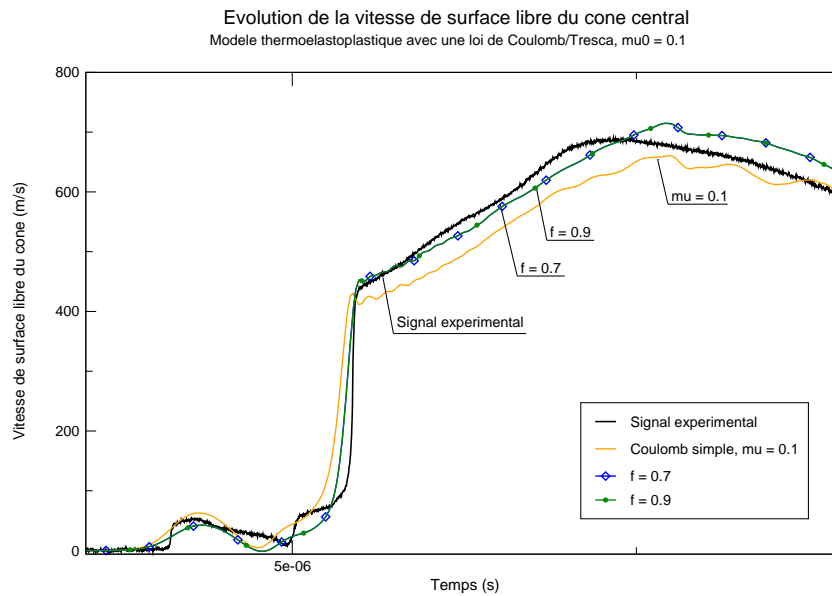


FIGURE 8.6 – Recalage par le modèle thermoélastoplastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.1$

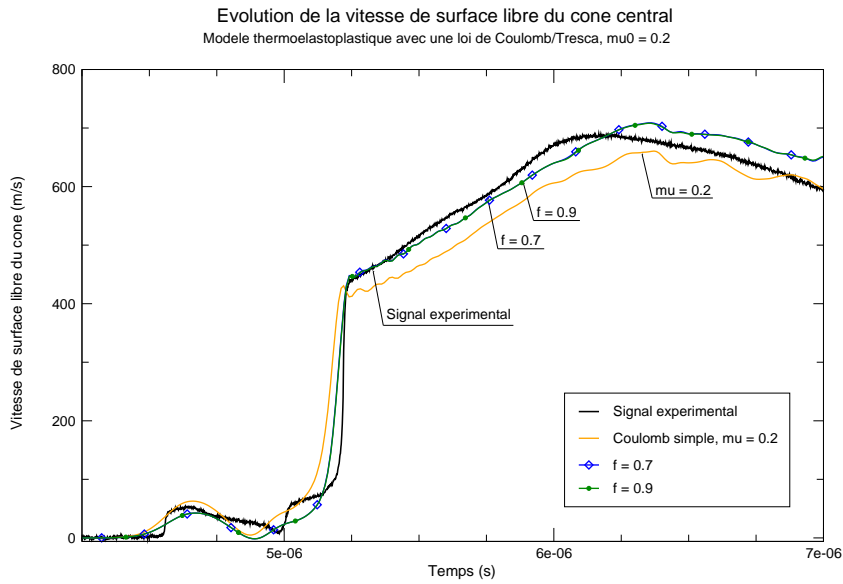


FIGURE 8.7 – Recalage par le modèle thermoélastoplastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.2$

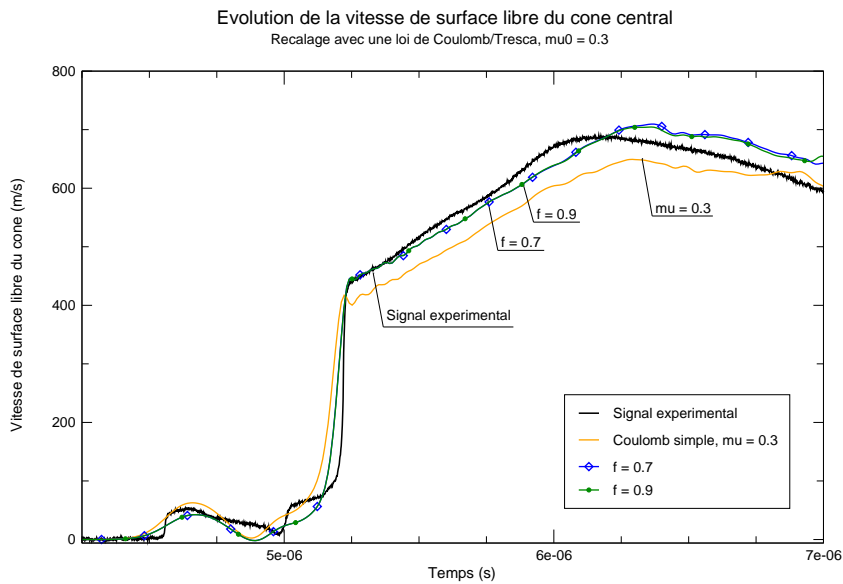


FIGURE 8.8 – Recalage par le modèle thermoélastoplastique de la vitesse libre du cône avec  $\mu_0 = 0.3$

Comme précédemment, nous constatons que le modèle thermoélastoplastique permet une bonne restitution des signaux expérimentaux. De nouveau, les paramètres permettant le meilleur recalage sont de  $\mu_0 = 0.2 - 0.3, f = 0.7 - 0.9$  (voir figures 8.7 et 8.7). Les signaux numériques obtenus sont quasi-identiques aux signaux obtenus à l'aide du modèle thermoélastique, ce qui revient à supposer



que la déformation plastique en couche limite demeure relativement faible pour ce cas test.

## ■ Conclusion du chapitre

**L'**étude qualitative de notre modèle sur la base des expériences de Ball confirme l'existence d'une couche de matière élastoplastique, que nous identifions à l'aide de notre modèle thermoélastoplastique. Cette couche plastifiée tend à renforcer les propriétés des matériaux à l'interface, et s'oppose au phénomène d'adoucissement thermique induit par son échauffement brutal.

La validation de ce modèle sur la base des expériences conduites au CEA/DAM, sur des couples Aluminium/Acier, nous permet quant à elle d'obtenir des résultats numériques concordant avec les signaux expérimentaux. Dans les cas traités, la déformation plastique en sous-couche reste cependant minimale et nous sommes proches du cas d'évolution thermoélastique que nous avons décrit au chapitre précédent.





## Conclusion générale

Dans le cadre de cette thèse nous nous sommes proposés de mettre en œuvre une méthode permettant de résoudre numériquement les problèmes de frottement observés aux interfaces de structures complexes sollicitées par chocs.

Il s'agissait en particulier de répondre à une problématique double :

- d'ordre **physique**, l'usage des lois classiques de frottement à échelle macroscopique ne permettant pas de décrire le comportement réellement observé aux interfaces de matériaux métalliques soumis à d'importantes sollicitations dynamiques,
- d'ordre **numérique**, liée au caractère multi-échelles du problème.

Pour remédier à ces problématiques et permettre une résolution plus fine du problème à l'échelle de l'interface, la stratégie que nous avons adoptée s'articule autour d'une approche multi-échelles. Pour cela, nous avons décomposé le problème à l'interface, en deux sous-problèmes reliés entre eux par des relations de couplage :

- un problème local, au voisinage direct de l'interface, permettant de calculer le comportement observé dans la couche de matière affectée thermomécaniquement,
- un problème global, loin de l'interface, qui correspond au problème résolu à l'échelle de la structure.

Cette stratégie nous permet notamment de traiter l'interface comme un corps à part entière, et ainsi de prendre en compte les phénomènes thermomécaniques réellement mis en jeu aux petites échelles. Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi de modéliser l'interface en utilisant le même système d'équations que celui utilisé à l'échelle de la structure (modèle de solide élastoplastique). Pour résoudre la thermique au sein de la couche de matière, nous avons également pris en compte la conduction thermique, qui n'est pas considérée à l'échelle de la structure. Finalement, pour tenir compte des fortes pressions de contact observées à l'interface, nous avons retenu une loi de frottement de type Coulomb/Tresca pour exprimer la contrainte de frottement à l'interface  $\tau(0, t)$ . Elle utilise un coefficient de coulomb  $\mu_0$  choisi constant dans le cas du modèle de Coulomb. Le modèle de Tresca ne fait quant à lui intervenir qu'un seul paramètre et relie la contrainte de frottement observée à l'interface à la limite élastique  $Y$  la plus faible. Cette limite, qui caractérise la résistance des matériaux est dans notre cas déterminée par le modèle rhéologique SCGde Steinberg, Cochran, Guinan et nous avons :

$$\tau(0, t) = \min \left( \mu_0 \cdot F_N(0, t), \mathbf{f} \cdot \left( \frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}} \right) \cdot (1 + g \cdot F_N(0, t) - h_\theta (\theta(0, t) - 300)) \cdot \exp \left( \frac{-\xi \cdot \theta(0, t)}{\Theta_F - \theta(0, t)} \right) \right). \quad (8.95)$$

L'étude dimensionnelle réalisée au Chapitre 5, nous a permis de simplifier de manière significative le problème local, en faisant apparaître certains termes prépondérants dans le système d'équations, ainsi que plusieurs nombres sans dimension gouvernant le problème, tel que le rapport d'aspect entre l'épaisseur caractéristique de la couche limite et une longueur caractéristique du problème. En choisissant un rapport d'aspect petit, ce qui concorde avec les observations expérimentales, nous montrons par passage à la limite que le système d'équations locales se ramène à un problème unidimensionnel plus simple à résoudre et à implémenter numériquement.

Le problème que nous obtenons finalement montre clairement que la physique observée au voisinage de l'interface va dépendre de trois aspects physiques principaux :

- la composante thermique quantifiée par la température  $\Theta$ ,
- la composante plastique quantifiée par la déformation plastique cumulée  $\bar{\epsilon}_p$ ,
- les effets d'inertie, non négligeable pour des temps de l'ordre de la nanoseconde.

Pour prendre en compte le fort couplage thermomécanique au voisinage de l'interface de glissement, le problème est résolu à l'aide d'un modèle de sous-mailles que nous résolvons pour chaque noeud de l'interface discrète. Nous le discrétisons à l'aide d'un schéma implicite en temps nous garantissant la stabilité inconditionnelle du problème. Le couplage avec le code de calcul hydrodynamique est un couplage en force.

## Les modèles étudiés

Afin d'étudier les contributions successives de l'adoucissement thermique, de l'écroissage mécanique par déformation plastique, et de l'inertie locale, deux cas limites ont été successivement traités :

- Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux aspects thermiques du frottement et à l'influence des fortes températures sur la dynamique globale du glissement. Pour cela le premier modèle que nous avons étudié est un modèle **thermoélastique quasistatique**, où nous avons négligé les effets de l'inertie dans la couche de matière jouxtant l'interface (à l'échelle locale) tout en supposant une évolution purement élastique. L'évolution de température dans le voisinage immédiat de l'interface est alors gouvernée par l'équation de la chaleur en une dimension d'espace, que nous résolvons le long de la normale à la surface de contact et qui pilote l'adoucissement thermique de l'interface.

En assimilant la puissance développée par la force de frottement à une source de chaleur surfacique, une solution analytique au problème thermique est ainsi déterminée. Nous avons notamment montré que l'implémentation numérique de cette solution pouvait être obtenue en reformulant la solution analytique sous forme incrémentale à l'aide du théorème de superposition de Duhamel. Cependant, et afin de résoudre des cas plus généraux où le pas de temps varie au cours du temps, nous avons décidé de reformuler le problème thermique à l'aide d'un schéma aux différences finies implicite en temps, avec un pas d'espace de l'ordre de la dizaine de nanomètres. Il se réduit à des systèmes particulièrement simples nécessitant le calcul de matrices tridiagonales, que nous résolvons à l'aide de l'algorithme de Thomas. Contrairement à la méthode de résolution basée sur le théorème de Duhamel, cette méthode

ne nécessite pas le stockage de l'histoire des flux de chaleurs générés à l'interface.

Le traitement numérique de l'équation de la chaleur à l'aide du schéma implicite 1D a été validé à l'aide de données issues des travaux de recherche de Prakash, nous permettant ainsi de prédire et d'accéder au profil de température dans une zone proche de l'interface.

Ce modèle thermoélastique rend qualitativement compte des phénomènes mis en jeu aux interfaces et permet d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus par l'équipe de G. Ball et R.E. Winter à l'AWE. Il confirme ainsi que les fortes pressions et larges vitesses occasionnées par le passage des ondes de choc conduisent à une brusque élévation de la température d'interface, atteignant dans certains cas la température de fusion des matériaux. Cet échauffement superficiel s'accompagne d'une diminution du seuil de plasticité, caractéristique du phénomène d'adoucissement thermique.

- La déformation plastique est prise en compte dans **un second modèle thermoélastoplastique** lui aussi quasistatique, distribuant la déformation plastique sur la couche limite plastique. La détermination de la déformation plastique cumulée est obtenue par résolution du problème d'évolution élastoplastique le long de la normale à l'interface.

Nous montrons notamment à l'aide de ce modèle que la diminution soudaine des limites d'élasticité par adoucissement est compensée par écrouissage mécanique du fait de la déformation plastique de l'interface.

Ces deux variantes ont chacune été éprouvée en procédant au recalage de signaux expérimentaux obtenus lors des campagnes de tir effectués au CEA/DAM sur des couples aluminium/acier. Elles permettent d'obtenir des signaux numériques concordant avec les observations expérimentales et offrant un meilleur recalage qu'avec les lois de frottement utilisées jusqu'à présent.

Nous retiendrons que notre approche multi-échelles permet de déterminer le comportement de l'interface, et notamment de calculer le champ des températures ainsi que les déformations plastiques dans la zone proche de l'interface.

Notre modèle confirme les rôles clefs joués par l'adoucissement thermique et l'écrouissage mécanique au voisinage des interfaces métalliques sollicitées par choc. Il présente également l'avantage de n'avoir à fixer que deux paramètres physiques au lieu des quatre paramètres utilisés par les lois de Coulomb modifiées :

- le coefficient de frottement  $\mu_0$ ,
- un paramètre  $\mathbf{f}$ , qui n'est autre qu'un coefficient de frottement englobant dans notre cas l'apport de la déformation plastique à l'interface.

D'un point de vue numérique, ce modèle s'avère peu coûteux, aussi bien en temps de calcul qu'en espace de stockage. L'épaisseur de la couche de diffusion  $h_\epsilon$  et la discrétisation  $\Delta z$  constituent quant à elles les variables numériques du problème.

Dans notre cas, l'épaisseur  $h_\epsilon$  correspond à l'épaisseur de la couche de diffusion thermique  $h_\epsilon \sim \sqrt{\alpha \cdot T}$ , où  $\alpha$  est la diffusivité du matériau et  $T$  le temps d'observation du phénomène. Le pas d'espace retenu  $\Delta z \sim 40nm$  nous a permis de restituer fidèlement les signaux expérimentaux et semble être un bon compromis entre temps de calcul et précision.

## ■ Perspectives d'étude

Nous avons montré la validité de notre approche et de nos modèles pour nos applications spécifiques. Ceux-ci vont être éprouvés sur un plus large panel de cas afin de déterminer avec précision les coefficients de frottement  $\mu_0$  et  $\mathbf{f}$  pour différents couples de matériaux sous différentes sollicitations.

La stratégie de résolution multi-échelles que nous avons utilisée constitue également une première base pour d'éventuelles études futures et offre de nombreuses perspectives aussi bien numériques que physiques ; comme nous avons pu le constater, cette approche présente en effet plusieurs avantages puisque nous sommes libres de choisir le modèle rhéologique utilisé localement, ainsi que la méthode de résolution numérique.

D'un point de vue physique il serait donc intéressant de tester différents modèles rhéologiques à l'échelle locale, comme un modèle viscoplastique (voir [75]), ou bien encore une **loi d'interface fragilisée** faisant intervenir une troisième échelle : celle des aspérités.

Finalement, l'une des principales perspectives de recherche à court terme vise à étudier l'influence des effets d'inertie au voisinage de l'interface, aspect que nous avons négligé dans cette thèse. Dans ce sens, un troisième modèle est actuellement en cours de développement. Il repose sur le problème de base introduit au Chapitre 5. Il pourra tenir compte de la vitesse de déformation plastique et utiliser une loi d'écoulement viscoélastoplastique.

## Liste des publications et communications

### ■ Publications

- *Multiscale thermomechanical modeling of shock-driven dry friction in hydrodynamics*, F. Dambakizi, P. Le Tallec, J-P. Perlat, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 198, Issues 21-26, 1 May 2009, Pages 1701-1715.

### ■ Communication avec acte

- *Numerical Solution of Dynamic Contact Problems*, P. Le Tallec, F. Dambakizi, P. Hauret, présenté lors de la conférence ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Rethymno, Crete, Greece, 13-16 June 2007. Publié dans *Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering* M. Papadrakakis, D.C. Charmpis, N.D. Lagaros, Y. Tsompanakis, Decembre 2008

### ■ Communications externes

- Congrès *WCCM8 World Computational Congress on Computational Mechanics* du 22 au 26 juillet 2007 à San Francisco (USA).  
Communication orale (20 min), Intitulé de la communication : *A 1D thermomechanical sub-grid model for explosively-driven dry friction*.
- Congrès *ECCOMAS Multidisciplinary Jubilee Symposium* du 18 au 20 février 2008 à Vienne (Autriche).  
Communication orale (20 min), Intitulé de la communication : *Multiscale thermomechanical modelling of high speed dry friction in hydrodynamics*.
- Congrès *IACM-ECCOMAS Multidisciplinary Jubilee Symposium* du 29 juin au 05 juillet 2008 à Venise (Italie).  
Communication orale (20 min), Intitulé de la communication : *Multiscale thermomechanical modelling of high speed dry friction in hydrodynamics*.
- Journée Annuelle des Doctorants du CEA/DAM, ENS Ulm, 17 Octobre 2008, Paris (France)  
Communication orale (15 min), Intitulé de la communication : *Modélisation thermomécanique multi-échelles des frottements sous chocs*.





## Annexes





## Algorithme de THOMAS (TDMA)

Cette annexe est consacrée à l'algorithme de Thomas (autrement connu sous l'abréviation TDMA pour TriDiagonal Matrix Algorithm), qui est une forme simplifiée de l'élimination de Gauss (Pivot de Gauss), et que utilisons pour résoudre les systèmes tridiagonaux de type

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad (\text{A.1})$$

avec  $a_1 = 0$  et  $c_n = 0$ . Sous forme matricielle, un tel système s'écrit,

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

L'usage de l'algorithme TDMA pour résoudre de tels systèmes permet d'obtenir une solution en  $\mathcal{O}(n)$  opérations, au lieu de  $\mathcal{O}(n^3)$  opérations classiquement requises par l'algorithme d'élimination de Gauss. Cet algorithme se décompose en deux étapes :

- Une première étape (*Forward elimination phase*) permet d'éliminer les coefficients  $a_i$ ,

$$b'_1 = b_1 \quad (\text{A.3})$$

$$d'_1 = d_1 \quad (\text{A.4})$$

pour  $k = 2$  à  $n$  faire (A.5)

$$m = \frac{a_k}{b'_{k-1}} \quad (\text{A.6})$$

$$b'_k = b_k - mc_{k-1} \quad (\text{A.7})$$

$$d'_k = d_k - md'_{k-1} \quad (\text{A.8})$$

fin boucle sur  $k$  (A.9)

- Une seconde étape (*Backward substitution phase*) permet finalement d'obtenir la solution en résolvant,

$$x_n = \frac{d'_n}{b'_n} \quad (\text{A.10})$$

pour  $k = n-1$  à  $1$  faire (A.11)

$$x_k = \frac{d'_k - c_k x_{k+1}}{b'_k} \quad (\text{A.12})$$

fin de boucle sur  $k$  (A.13)





## Bibliographie

- [1] **[Hammerberg J.E., Holian B.L., et Zhou S.J.]**, *Sliding friction in compressed metals at high velocities*, in *International Conference on Shock Waves in Condensed Media*, pages 343–354, St Petersburg, Russia, 1996.
- [2] **[Pelak R.A., Rightley P., et Hammerberg J.E.]**, *Friction in high-speed impact experiments*, in M.D.C.L.C.H.R.S. Furnish, editor, *11th Conference of the American-Physical-Society-Topical-Group on Shock Compression of Condensed Matter*, pages 1221–1224, Snowbird, Ut, 1999.
- [3] **[Crawford P., Rainey K., Rightley P., et Hammerberg J.E.]**, *A novel experimental technique for the study of high-speed friction under elastic loading conditions*, in M.D.G.Y.M.F.J.W. Furnish, editor, *Meeting of the Health Communication Division of the Western-States-Communication-Association*, pages 545–548, Long Beach, CA, 2002.
- [4] **[Hammerberg J.E., Ravelo R., Germann T.C., Kress J.D., et Holian B.L.]**, *Sliding friction at compressed ta/al interfaces*, in M.D.G.Y.M.F.J.W. Furnish, editor, *Meeting of the Health Communication Division of the Western-States-Communication-Association*, pages 565–568, Long Beach, CA, 2002.
- [5] **[Hammerberg J.E., Holian B.L., Germann T.C., et Ravelo R.]**, *Nonequilibrium molecular dynamics simulations of metallic friction at ta/al and cu/ag interfaces*, in *TMS/ASM Annual Meeting*, pages 2741–2745, San Diego, CA, 2004.
- [6] **[Hammerberg J.E., Ravelo R., et Germann T.C.]**, *High density sliding at ta/al and al/al interfaces*, in M.D.E.M.R.T.P.W.C.T. Furnish, editor, *Conference of the American-Physical-Society-Topical-Group-on-Shock-Compression-of-Condense d-Matter*, pages 391–394, Baltimore, MD, 2005.
- [7] **[Hammerberg J.E., Ravelo R., Germann T.C., et Holian B.L.]**, *Frictional interactions at compressed al interfaces*, in M.F.M.D.C.R.H.N.C.N.J. Elert, editor, *Conference of the American-Physical-Society-Topical-Group on Shock Compression of Condensed Matter*, pages 309–312, Waikoloa, HI, 2007.
- [8] **[Winter R.E., Taylor P., Carley D.J., Barlow A.J., Pragnell H., et Markland L.]**, *A flash x-ray technique to measure strain distribution at interfaces sliding at high pressure and velocity*, *Shock Compression Of Condensed Matter-2001, Pts 1 And 2, Proceedings*, volume 620, (2002), pages 507–510.
- [9] **[Barlow A.J., Winter R.E., Carley D., et Taylor P.]**, *Hydrocode modelling and analysis of a dynamic friction experiment*, *Shock Compression Of Condensed Matter - 2003, Pts 1 And 2, Proceedings*, volume 706, (2004), pages 521–524.



- [10] **[Winter R.E., Smeeton V.S., De'Ath J., Taylor P., Markland L., et Barlow A.J.]**, *Metallography of sub-surface flows generated by shock-induced friction*, *Shock Compression Of Condensed Matter - 2003, Pts 1 And 2, Proceedings*, volume 706, (2004), pages 625–628.
- [11] **[Ball G.J.]**, *Numerical simulation of dynamic friction*, *Shock Compression of Condensed Matter - 2005, Pts 1 and 2*, volume 845, (2006), pages 1503–1506.
- [12] **[Winter R.E., Ball G.J., et Keightley P.T.]**, *Mechanisms of shock-induced dynamic friction*, *Journal of Physics D-Applied Physics*, volume 39(23), (2006), pages 5043–5053.
- [13] **[Winter R.E., Keightley P.T., Kim H.J., Rigney D.A., et Emge A.]**, *Microstructures produced by dynamic friction*, *Shock Compression Of Condensed Matter - 2007, Pts 1 And 2*, volume 955, (2007), pages 1313–1316.
- [14] **[Juanicotena A.]**, *Experimental investigation of dynamic friction at high contact pressure applied to an aluminium/stainless steel tribo pair*, *J. De Physique Iv*, volume 134, (2006), pages 559–564.
- [15] **[Juanicotena A. et Szarzynski S.]**, *Investigation of dynamic friction induced by shock loading conditions*, *Shock Compression Condensed Matter - 2005, Pts 1 2*, volume 845, (2006), pages 1531–1534.
- [16] **[Lesquois O.]**, *Dégradations dans un contact grande vitesse en régime transitoire*, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994, p. 12.
- [17] **[Bastier A.]**, *Modélisation du soudage d'alliages d'aluminium par friction et malaxage*, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [18] **[Lehmann P., Shirm V., Peter H., et Wey J.]**, *Rail launchers to reach hypervelocity*, *International Journal of Impact Engineering*, volume 17(4-6), (1995), pages 509–515, 1994 Symposium on Hypervelocity Impact OCT 17-19, 1994 SANTA FE, NM.
- [19] **[James T.E. et James D.C.]**, *Contact pressure distribution and transition in solid armatures*, *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 37(1), (2001), pages 81–85, 10th Symposium on Electromagnetic Launch Technology APR 25-28, 2000 SAN FRANCISCO, CALIFORNIA.
- [20] **[Tumonis L., Kacianauskas R., et Kaceniauskas A.]**, *Evaluation of friction due to deformed behaviour of rail in the electromagnetic railgun : numerical investigation*, *Mechanika*, (1), (2007), pages 58–63.
- [21] **[Engel T.G., Neri J.M., et Veracka M.J.]**, *Characterization of the velocity skin-effect in the surface layer of a railgun sliding contact*, *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 44(7), (2008), pages 1837–1844.
- [22] **[Hammerberg J.E., Kyrala G.A., Oro D.M., Fulton R.D., Anderson W.E., Obst A.W., Oona H., Stokes J., et Wilke M.D.]**, *A pegasus dynamic liner friction experiment*, in M.D.C.L.C.H.R.S. Furnish, editor, *11th Conference of the American-Physical-Society-Topical-Group on Shock Compression of Condensed Matter*, pages 1217–1220, Snowbird, Ut, 1999.
- [23] **[Rousculp C.L., Hammerberg J.E., Oro D.M., Rodriguez G., Goodwin P.M., Salazar M.A., Reinovsky R.E., Faehl R.J., Chartrand R., Becker J.R., Berglin R.A., Delzer K.W., Gomez G.H., Malone R.M., Morgan D.V., Pate T.V., Theuer K.E., Rigney D.A., et Kim H.J.]**, *Dynamic friction experiments at the atlas pulsed power facility*, in *16th IEEE International Pulsed Power Conference*, pages 881–885, Albuquerque, NM, 2007.

- [24] **[Montgomery R.S.]**, *Friction and wear at high sliding speeds*, *Wear*, volume 36(3), (1976), pages 275–298, benet Weapons Laboratory, Watervliet Arsenal, Watervliet, N.Y. 12189 (USA).
- [25] **[Lesquois O., Serra J.J., Kapsa P., Serror S., et Boher C.]**, *Degradations in a high-speed sliding contact in transient regime*, *Wear*, volume 201(1-2), (1996), pages 163–170.
- [26] **[Ogawa K.]**, *Impact friction test method by applying stress wave*, *Experimental Mechanics*, volume 37(4), (1997), pages 398–402.
- [27] **[Rajagopalan S. et Prakash V.]**, *A modified torsional kolsky bar for investigating dynamic friction*, *Experimental Mechanics*, volume 39(4), (1999), pages 295–303.
- [28] **[Frutsky K.J. et Clifton R.J.]**, *Plate-impact technique for measuring dynamic friction at high temperatures*, *Journal Of Tribology-Transactions Of The Asme*, volume 119(3), (1997), pages 590–593.
- [29] **[Prakash V.]**, *A pressure-shear plate impact experiment for investigating transient friction*, *Experimental Mechanics*, volume 35(4), (1995), pages 329–336.
- [30] **[Rajagopalan S., Irfan M.A., et Prakash V.]**, *Novel experimental techniques for investigating time resolved high speed friction*, *Wear*, volume 225, (1999), pages 1222–1237, 12th International Conference on Wear of Materials APR 25-29, 1999 ATLANTA, GA.
- [31] **[Irfan M.A. et Prakash V.]**, *Time resolved friction during dry sliding of metal on metal*, *International Journal of Solids and Structures*, volume 37(20), (2000), pages 2859–2882.
- [32] **[Meyers M.]**, *Dynamic behavior of materials*, Wiley-Interscience, 1994.
- [33] **[Tosello R.]**, *Hydrocodes - codes de dynamique rapide*, Cours de l'Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var, 2006.
- [34] **[Llorca F., Buy F., et Farre I.]**, *Influence de la propagation d'un choc sur le comportement élastoplastique des matériaux métalliques*, *Chocs*, pages 104–113.
- [35] **[Llorca F., Farre J., et Buy F.]**, *Modeling of the elastoplastic behavior of metallic materials*, *Chocs*, (23), (2000), pages 7–16.
- [36] **[Cristescu N.]**, *Dynamic plasticity*, World Scientific Pub Co Inc, 2007.
- [37] **[Oden J.T. et Martins J.A.C.]**, *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 52(1-3), (1985), pages 527–634.
- [38] **[Rabinowicz E.]**, *Friction and wear of materials*, Wiley-Interscience, 1995.
- [39] **[Abdel-Aal H.]**, *On the interdependence between kinetics of friction-released thermal energy and the transition in wear mechanisms during sliding of metallic pairs*, *Wear*, volume 254(9), (2003), pages 884–900.
- [40] **[Bowden F.P. et Tabor D.]**, *Mechanism of metallic friction*, *Nature*, volume 150, (1942), pages 197–199.
- [41] **[Bowden F.P. et Freitag E.H.]**, *Friction of solids at high speeds*, *Nature*, volume 176(4490), (1955), pages 944–946.

- [42] **[Bowden F.P. et Freitag E.H.]**, *The friction of solids at very high speeds .i. metal on metal .ii. metal on diamond*, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A-Mathematical Phys. Sciences*, volume A248(1254), (1958), pages 350–367, côte BCX :W1A3.
- [43] **[Bowden F.P. et Persson P.A.]**, *Deformation, heating and melting of solids in high-speed friction*, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A-mathematical Phys. Sciences*, volume A260(130), (1961), pages 433–458, côte BCX :W1A3.
- [44] **[Zavarise G., Bacchetto A., et Ganser H.P.]**, *Frictional heating in contact mechanics - a methodology to deal with high temperature gradients*, *Computational Mechanics*, volume 35(6), (2005), pages 418–429.
- [45] **[Barrau O., Boher C., Gras R., et Rezai-Aria E.]**, *Analysis of the friction and wear behaviour of hot work tool steel for forging*, *Wear*, volume 255, (2003), pages 1444–1454.
- [46] **[Lim S.C. et Ashby M.F.]**, *Wear-mechanism maps*, *Acta Metallurgica*, volume 35(1), (1987), pages 1–24.
- [47] **[Lim S.C., Ashby M.F., et Brunton J.H.]**, *The effects of sliding conditions on the dry friction of metals*, *Acta Metallurgica*, volume 37(3), (1989), pages 767–772.
- [48] **[Fair H.D.]**, *Electromagnetic launch*, *International Journal of Impact Engineering*, volume 29(1-10), (2003), pages 247–262, hypervelocity Impact Symposium DEC 07-11, 2003 NOORDWIJK, NETHERLANDS.
- [49] **[Liou N.S., Okada M., Irfan M.A., et Prakash V.]**, *Transient thermo-mechanical interactions during high-speed slip at metal-on-metal interfaces*, *Optics and Lasers in Engineering*, volume 40(4), (2003), pages PII S0143–8166(02)00097–0.
- [50] **[Liou N.S., Okada M., et Prakash V.]**, *Formation of molten metal films during metal-on-metal slip under extreme interfacial conditions*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, volume 52(9), (2004), pages 2025–2056.
- [51] **[Abdel-Aal H.A.]**, *On the role of intrinsic material response in failure of tribo systems*, *Wear*, volume 259, (2005), pages 1372–1381, sl 2.
- [52] **[Miranville A. et Temam R.]**, *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*, Springer, 2003.
- [53] **[Salençon J.]**, *Mécanique des milieux continus : Tome 1 : Concepts généraux*, Ecole Polytechnique, 2005.
- [54] **[Jaumann G.]**, *Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze...*, aus der Kaiserlich-Königlichen Hof- und Staatsdruckerei, 1911.
- [55] **[Green A. et McInnis B.]**, *Generalized hypo-elasticity*, in *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, volume 57, pages 220–230, 1967.
- [56] **[Nefussi G.]**, *Sur les lois incrémentales en grandes transformations - Application au profilage*, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Laboratoire de Mécanique et Technologie, 1999.
- [57] **[Ladeveze P.]**, *Mécanique non linéaire des structures*, 1996.

- [58] **[Rougée P.]**, *Mecanique des grandes transformations*, Springer, 1997.
- [59] **[Steinberg D., Cochran S., et Guinan M.]**, *A constitutive model for metals applicable at high-strain rate*, *Journal of Applied Physics*, volume 51(279), (1980), page 1498, Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California 94550.
- [60] **[Steinberg D. et Lund C.]**, *A constitutive model for strain rates from  $10^{-4}$  to  $10^6$  s<sup>-1</sup>*.
- [61] **[Johnson G. et Cook W.]**, *A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures*, in *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, pages 541–547, The Hague, Netherlands, 1983.
- [62] **[Preston D.L., Tonks D.L., et Wallace D.C.]**, *Model of plastic deformation for extreme loading conditions*, *Journal Of Applied Physics*, volume 93(1), (2003), pages 211–220.
- [63] **[Zerilli F. et Armstrong R.]**, *Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations*, *Journal of Applied Physics*, volume 61, (1987), page 1816.
- [64] **[Follansbee P. et Kocks U.]**, *A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable.*, *Acta Metall.*, volume 36(1), (1988), pages 81–93.
- [65] **[Mises R.]**, *Mechanik der plastischen Formänderung von kristallen*, *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, volume 8(3).
- [66] **[Fourier J.]**, *Theorie analytique de la chaleur*.
- [67] **[Laursen T.]**, *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*, Springer Verlag, 2002.
- [68] **[Wriggers P.]**, *Computational contact mechanics*, Springer Verlag, 2006.
- [69] **[Druryanov B. et Alexandrov S.]**, *Laws of external friction of plastic bodies*, *International Journal of Plasticity*, volume 8(7), (1992), pages 819–826.
- [70] **[Zukas J.]**, *Introduction to hydrocodes*, Elsevier Science, 2004.
- [71] **[Wilkins M.]**, *Calculation of elastoplastic flows*, *Methods of computational physics*, volume 3, (1964), pages 211–263.
- [72] **[Desgraz J.C. et Lascaux P.M.]**, *Stabilité de la discrétisation des équations de l'hydrodynamique lagrangienne 2d*, volume 58, (1976), page 510.
- [73] **[Bonnet M. et Frangi A.]**, *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Ecole Polytechnique, 2007.
- [74] **[Eagar T.]**, *Order of magnitude scaling of complex engineering problems, and its application to high productivity arc welding*.
- [75] **[Armero F. et Park J.]**, *An analysis of strain localization in a shear layer under thermally coupled dynamic conditions. part 2 : Localized thermoplastic models*, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, volume 56(14), (2003), pages 2101–2133.
- [76] **[Charru F.]**, *Instabilités hydrodynamiques*, EDP Sciences, 2007.
- [77] **[Prudnikov A., Brychkov Y., et Marichev O.]**, *Integrals and series. 5. Inverse Laplace transforms*, Gordon and Breach Science Publ., 1992.
- [78] **[Hoffman J.]**, *Numerical methods for engineers and scientists*, CRC, 2001.





