



HAL
open science

Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie

Anne-Marie Rinaldi

► To cite this version:

Anne-Marie Rinaldi. Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie. Mathématiques [math]. Université Sorbonne Paris Cité - Université Paris Diderot (Paris 7), 2016. Français. NNT : . tel-01470473

HAL Id: tel-01470473

<https://hal.science/tel-01470473v1>

Submitted on 17 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat
de l'Université Sorbonne Paris Cité
Préparée à l'Université Paris Diderot

Ecole doctorale «Savoirs Scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique
des disciplines» (ED400)

Laboratoire de didactique André Revuz/Spécialité : didactique des mathématiques

Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie

Par Anne-Marie Rinaldi

Thèse de doctorat de didactique des mathématiques

Dirigée par Brigitte Grugeon-Allys et Catherine Houdement

Présentée et soutenue publiquement à Paris le 05 décembre 2016

Rapporteuse : Gueudet, Ghislaine/ Professeure des Universités/ Université de Bretagne occidentale

Rapporteur : Matheron, Yves/ Professeur des Universités/ Institut Français de l'éducation

Examinatrice : Margolinas, Claire/ maître de conférences HDR/ Université Blaise Pascal Clermont-
Ferrand

Examineur : Vivier, Laurent/ maître de conférences HDR/ Université Paris Diderot

Co-directrice de thèse: Grugeon-Allys, Brigitte/Professeure des Universités/ Université Paris Est
Créteil

Co-directrice de thèse: Houdement, Catherine/Professeure des Universités/ Université de Rouen
Normandie

Remerciements

J'exprime en premier lieu ma profonde gratitude à mes deux directrices, Catherine Houdement et Brigitte Grugeon-Allys pour leur accompagnement et leur implication dans le suivi de la thèse. Leurs lectures minutieuses d'un bon nombre d'écrits intermédiaires et nos échanges réguliers ont permis d'orienter la recherche, de produire et d'étoffer les analyses. J'exprime également ma reconnaissance à Ghislaine Gueudet et Yves Matheron qui ont accepté d'être les rapporteurs de la thèse. Les remarques constructives et les questions qu'ils ont soulevées m'ont permis de revisiter mon travail et de poursuivre la réflexion. Mes remerciements vont également à Claire Margolinas et Laurent Vivier qui ont accepté d'être membres du Jury.

Je suis très reconnaissante envers les enseignants qui m'ont généreusement accueillie dans leurs classes et qui ont accepté d'expérimenter l'ingénierie.

Merci aux membres de l'équipe du LDAR, aux chercheurs de l'ARDM, et plus particulièrement aux membres du groupe M615, pour leur contribution à ma formation à la recherche en didactique des mathématiques. Merci également aux membres du groupe des jeunes chercheurs pour leur dynamisme et leur enthousiasme, à Jérôme Barberon le directeur de la bibliothèque de l'IREM pour son aide précieuse, ainsi qu'à Evelyne Scarron, Martine Lamy et Sandrine Pellé pour leur disponibilité à mon égard.

Mes remerciements vont également à mes collègues de l'ESPE de l'académie d'Amiens avec qui je partage au quotidien des missions de formation, d'enseignement et d'encadrement. Beaucoup m'ont témoigné de l'attention, de l'affection et m'ont encouragée à poursuivre. Merci à Sylvie Drougard et à Agnès Houel de créer un cadre de vie sympathique au centre de Beauvais. Merci à Nathalie Catellani, la directrice de l'ESPE et aux membres du CAREF pour l'intérêt qu'ils manifestent pour mes travaux de recherche.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille, mes proches, mes amis, mon père et ma mère qui n'auront pas eu la joie de m'accompagner jusqu'à la soutenance, et, bien évidemment, ma fille, Camille, si patiente et présente à mes côtés.

Table des matières

INTRODUCTION	13
I. Genèse de la recherche : des constats de formateur.....	13
II. Présentation du sujet de la thèse.....	15
III. Plan de la thèse.....	16
CHAPITRE 1 : Questions initiales	19
I. Contexte de la recherche.....	20
I.1. Les attentes institutionnelles.....	20
I.1.1. Au niveau du calcul posé.....	20
I.1.2. Au niveau du calcul mental.....	20
I.1.3. Au niveau des évaluations nationales CE1.....	22
I.2. L'enseignement du calcul posé de la soustraction.....	24
I.2.1. Trois techniques opératoires de la soustraction.....	24
I.2.2. Les choix des auteurs de manuels et d'ouvrages.....	26
I.3. Pratiques des élèves.....	27
I.3.1. Au niveau du calcul posé en colonne.....	27
I.3.2. Au niveau du calcul mental.....	29
II. Questionnement et cadre théorique.....	31
CHAPITRE 2: Références épistémologiques sur le calcul soustractif et son enseignement	35
I. Transposition didactique et TAD.....	36
I.1. Notion de savoir savant de référence.....	36
I.2. Notion de praxéologie.....	37
I.3. Notion d'ostensif.....	38
II. Etude des savoirs savants de référence.....	39
II.1. Nombres entiers et addition selon Bezout (1764) et Reynaud (1821).....	39
II.2. Nombre entiers et addition dans la théorie des ensembles (fin du XXe siècle).....	41
II.3. Nombres entiers et addition selon Peano (début XXIe siècle).....	42
II.4. Nombres entiers et addition selon Lebesgue (1915).....	48
III. Étude des savoirs à enseigner de référence.....	50
III.1. Les raisons d'enseigner le calcul additif et soustractif.....	51
III.1.1. La valence épistémique du calcul.....	52
III.1.2. La structure des situations additives.....	53
III.2. L'enseignement des techniques de calcul mental.....	55
III.2.1. Les enjeux de l'enseignement du calcul mental.....	55
III.2.2. Notions de flexibilité et d'adaptabilité.....	56

III.2.3. Classements des techniques de calcul mental additif.....	58
III.2.4. Proposition de classement pour le calcul soustractif	62
III.2.5. Degré d'adaptabilité du calculateur	64
III.3. L'utilisation des ostensifs.....	66
III.3.1. Les désignations des nombres.....	66
III.3.2. Les arbres de calcul	68
III.3.3. Les droites numériques	68
IV. L'enseignement d'un algorithme de la soustraction	77
IV.1. Les raisons d'enseigner un algorithme de la soustraction.....	77
IV.2. Etude de différents algorithmes de la soustraction.....	81
IV.2.1. Approche historique : étude de Ross et Pratt-Cotter (1997).....	81
IV.2.2. Consultation de manuels anciens.....	86
V. Conclusion de l'étude épistémologique et didactique	88
CHAPITRE 3 : Organisation mathématique de référence.....	91
I. Organisations mathématiques associées au calcul soustractif	92
I.1. Organisations mathématiques locales	92
I.2. Liens entre les différentes organisations mathématiques locales.....	93
II. OM1 : Produire des calculs additifs ou soustractifs	94
III. OM2 : traduire et associer différents types de représentations sémiotiques.....	94
IV. OM3 : effectuer un calcul	96
IV.1. Fonctions de la technologie (Castela & Romo Vazquez, 2011, p.88).....	97
IV.2. Effectuer un calcul soustractif mental.....	99
IV.2.1. Les principaux types de tâches	99
IV.2.2. $T_{a-\square\square}$: soustraire un nombre à deux chiffres.....	100
IV.2.3. $T_{a-\square 0}$: soustraire un multiple de dix	107
IV.2.4. $T_{a-\square}$: soustraire un nombre inférieur à dix.....	108
IV.3. Effectuer un calcul soustractif posé en colonne	109
IV.4. Effectuer un calcul soustractif avec une calculatrice	111
V. OM4 : Réécrire un calcul	111
VI. Conclusion	113
CHAPITRE 4 : Problématique et méthodologie	115
I. Questions de recherche et hypothèses de travail.....	117
II. Précisions méthodologiques	118
II.1. En lien avec l'analyse de manuels	118
II.2. En lien avec l'observation de séances	120
II.2.1. Modalités retenues	120
II.2.2. Outils choisis pour l'analyse	121

III. Vers un premier bilan suite aux observations non participatives de classe	122
III.1. Informations sur les différents projets d'enseignement.....	122
III.2. Analyse des séances de classe observées	125
III.2.1. Analyses relatives à la classe B	125
III.2.2. Analyses relatives à la classe C	130
III.3. Propositions retenues en lien avec les pratiques observées.....	134
IV. Vers un second bilan suite aux premières expérimentations	137
IV.1. Présentation des situations	137
IV.2. Analyse d'une situation de calcul réfléchi	138
IV.3. Analyse de situations en lien avec la conservation des écarts.....	140
IV.3.1. La règle cassée.....	141
IV.3.2. Translation d'une bandelette sur la droite numérique graduée	146
V. Apports de l'étude des pratiques spécifiques	151

CHAPITRE 5 : Analyse des organisations mathématiques et didactiques de manuels 153

I. Présentation de la grille élaborée pour analyser les organisations mathématiques et didactiques.....	154
II. Analyse des organisations d'Outils pour les Maths (2012).....	156
II.1. Présentation de la structure des manuels	156
II.2. Organisation mathématique relative au calcul soustractif.....	157
II.2.1. Organisation mathématique au CE1.....	157
II.2.2. Organisation mathématique au CE2.....	174
II.2.3. Complétude de l'organisation mathématique.....	178
III. Analyse des organisations d'Euro Maths (2001&2010)	179
III.1. Présentation de la structure des manuels.....	179
III.2. Organisation mathématique au CE1	180
III.3. Organisation mathématique au CE2.....	189
III.4. Complétude de l'organisation mathématique.....	202
IV. Apports de l'analyse praxéologique des manuels	203

CHAPITRE 6 : Présentation de l'ingénierie..... 207

I. Ébauche de l'ingénierie.....	208
I.1. Agencement des séquences sur la durée de l'expérimentation	208
I.2. Imbrication des différentes organisations locales	210
II. Présentation de l'évaluation diagnostique	212
II.1. Exercices relatifs à T_{a+b} et T_{a-b}	212
II.2. Exercices relatifs à $T_{Pro.Cal.}$	213
II.3. Exercices relatifs à $T_{Ass.(sch./cal.)}$ et $T_{Ass.(cal./cal.)}$	213
III. Description et analyse <i>a priori</i> des séquences de l'ingénierie	214

III.1. Séquence relevant de $T_{a-\square}$ (Sq1).....	214
III.1.1. Description et analyse de la reprise de $T_{a-\square}$	215
III.1.2. Consolidation de τ_{1010} , τ_{A10} et introduction de τ_{N10C}	220
III.2. Séquence relevant de $T_{a-\square 0}$ (Sq2).....	222
III.2.1. Description et analyse de la reprise de $T_{\square\square 0-\square 0}$	222
III.2.2. Description et analyse de la rencontre avec $T_{\square\square\square-\square 0}$	224
III.3. Séquence relevant de $T_{\text{Prod.Cal.}}$ (Sq3).....	226
III.3.1. Description et analyse de la reprise de $T_{\text{Prod.Cal.}}$	227
III.3.2. Consolidation du bloc relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$	229
III.4. Séquence relevant de $T_{\text{Prod.Cal.Mes.}}$ (Sq4).....	231
III.5. Séquence relevant de $T_{\text{Prod.Cal.Mes.}}$ et de T_{a-b} (Sq5).....	231
III.5.1. Première rencontre avec la conservation des écarts.....	232
III.5.2. Construction du bloc technologico-théorique relevant de τ_{AN}	234
III.6. Séquence de calcul mental relevant de T_{a-b} (Sq6).....	235
III.7. Séquence de calcul posé visant l'installation de τ_{ALG} (Sq7).....	236
III.7.1. Analyse de la découverte de τ_{ALG}	236
III.7.2. Analyse de la situation <i>calculateur/ correcteur</i>	238
IV. Présentation de l'évaluation finale (EF).....	241
IV.1. Exercices relatifs à $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$	241
IV.2. Exercices relatifs à T_{a-b}	242
IV.3. Exercices relatifs à $T_{\text{Pro. Cal.}}$	243
IV.4. Exercices relatifs à $T_{\text{Ass.(cal./cal.)}}$	244
V. Conclusion.....	244
CHAPITRE 7 : Présentation de l'expérimentation et des analyses.....	247
I. Choix méthodologique de recueil et d'analyse de données.....	248
I.1. Organisation des expérimentations et recueil des données.....	248
I.2. Méthodologie d'analyse.....	249
I.3. Plan suivi pour conduire l'analyse.....	250
II. Effectuer un calcul soustractif, décrire la technique utilisée.....	250
II.1. Séquence relevant de $T_{a-\square}$ (Sq1).....	251
II.1.1. Consignes et modalités de travail.....	251
II.1.2. Techniques relatives à la première série de calculs.....	252
II.1.3. Fonctions de la technologie relatives à τ_{1010} et $(\tau_{1010})'$ pendant la phase de mise en commun.....	255
II.1.4. Techniques relatives aux calculs de $34 - 6, 153 - 4$ et $75 - 7$	257
II.1.5. Construction du bloc technologico-théorique relevant de τ_{A10}	258
II.1.6. Impact et portée de la mise en œuvre de Sq1.....	259
II.2. Séquence relevant de $T_{a-\square 0}$ (Sq2).....	264
II.2.1. Analyse <i>a posteriori</i> des techniques et technologies ($T_{\square\square 0-\square 0}$).....	265
II.2.2. Analyse <i>a posteriori</i> des techniques et technologies ($T_{\square\square\square-\square 0}$).....	268

II.3. Retour sur les hypothèses de recherche	270
III. Donner du sens à la notion d'écart, de différence et de complément.....	271
III.1. Analyse <i>a posteriori</i> en lien avec les problèmes de comparaison.....	272
III.1.1. Problème de comparaison (S1Sq3).....	272
III.1.2. Problème de double comparaison (S2Sq3).....	275
III.1.3. Usage de la droite numérique comme élément constitutif du bloc relatif à $\Theta_{ADD/SOUS}$	280
III.2. Analyse <i>a posteriori</i> de la situation de la règle cassée (Sq4)	281
III.2.1. Analyse <i>a posteriori</i> de la situation de la règle cassée	281
III.2.2. Analyse <i>a posteriori</i> de la situation <i>de jeu</i>	284
III.3. Apports de $T_{Pro. Cal.}$ au niveau de la construction de $\Theta_{ADD/SOUS}$	284
IV. Découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts	285
IV.1. Analyse <i>a posteriori</i> de l'émergence de τ_{AN}	285
IV.1.1. Analyse des déroulements effectifs de la situation <i>translation d'une bandelette modifiée</i>	285
IV.1.2. Retour sur la situation <i>translation de bandelette modifiée</i>	288
IV.2. Analyse <i>a posteriori</i> de l'installation de τ_{AN}	289
IV.2.1. Difficultés relevées dans la mise en œuvre de τ_{AN}	290
IV.2.2. Pistes pour consolider le bloc relatif à Θ_{AN}	293
V. Mobiliser les différentes techniques enseignées pour effectuer T_{a-b}	294
V.1. Analyse <i>a posteriori</i> des techniques, des technologies, des ostensifs mobilisés.....	294
V.2. Réflexion autour des techniques enseignées et des ostensifs	299
VI. Découvrir et utiliser l'algorithme de la soustraction par conservation des écarts.....	300
VI.1. Analyse <i>a posteriori</i> de la rencontre avec τ_{ALG}	300
VI.2. Analyse <i>a posteriori</i> de la situation <i>calculateur/ correcteur</i>	302
VI.3. Analyse <i>a posteriori</i> du bloc construit autour de Θ_{DD} et de Θ_{AN}	303
VII. Résultats aux évaluations diagnostique et finale	304
CONCLUSION GENERALE	309
I. La construction d'une organisation mathématique de référence sur le calcul soustractif ..	311
II. La caractérisation des différentes organisations mathématiques locales dans certains manuels et dans les pratiques des enseignants observés	312
III. La construction d'une ingénierie en accord avec l'organisation mathématique de référence	314
IV. La recherche de conditions de viabilité dans l'enseignement ordinaire	315
V. Effets de l'ingénierie sur les praxéologies des élèves	318
VI. Limites et perspectives.....	320
REFERENCES	323
GLOSSAIRE ET ABBREVIATIONS	333

ANNEXES	337
I. Annexe A : Annexes relatives au chapitre 2	339
I.1. Annexe A : Planche de photographies d'extraits de manuels (1889- 1974)	341
II. Annexe B : Annexes relatives au chapitre 4	345
II.1. Annexe B.1 : Questionnaire préparatoire à l'entretien avec les enseignants des classes A, B et C (Janvier 2012)	347
II.2. Annexe B.2 : Tableau récapitulatif des situations proposées aux enseignants et mises en œuvre dans les classes A, B et C (Janvier 2012- Mars 2012)	348
II.3. Annexe B. 3.1 : Scénario proposé aux enseignants relatif à la situation « facile, pas facile »	349
II.4. Annexe B. 3.2 : Enoncé distribué à deux élèves relatif à la situation « facile, pas facile »...	350
II.5. Annexe B.4 : Analyse <i>a posteriori</i> de la séance <i>règle cassée</i> extraite de Rinaldi (2013) ...	351
II.6. Annexe B.5 : Scénario relatif à la séance : <i>Translation d'une bandelette</i> sur la droite numérique graduée (2012)	354
III. Annexe C : annexes relatives au chapitre 5.....	357
III.1. Annexe C.1.1 : Organisations mathématiques associées à chaque exercice des doubles pages propres au calcul soustractif (Outils pour les Maths, CE1, 2012).....	359
III.2. Annexe C.1.2 : Classification des problèmes selon leur type de Tâches (Vergnaud, 1990) répertoriés sur chaque double page d'Outils pour les Maths (CE1, 2012).....	361
III.3. Annexe C.1.3 : Classification des types de tâches relatifs au calcul mental (Outils pour les Maths CE1, 2012)	363
III.4. Annexe C.1.4 : Classification des types de tâches relatifs au calcul mental (Outils pour les Maths CE2, 2012)	365
III.5. Annexe C.2.1 : Organisations mathématiques associées à chaque exercice des étapes relatives au calcul soustractif (Euro Maths, CE1, 2001)	366
III.6. Annexe C.2.2 : Analyses des exercices d'application relatifs au calcul de l'écart (Etape 64, Euro Maths, CE1, 2001, p.107).....	368
III.7. Annexe C.2.3 : Classification des types de tâches relatifs au calcul (exercices du manuel Euro Maths CE1, 2001).....	370
III.8. Annexe C.2.4 : Organisations mathématiques associées à chaque exercice des étapes relatives au calcul soustractif (Euro Maths, CE2, 2010)	372
IV. Annexe D : annexes relatives au chapitre 6	373
IV.1. Annexe D.0.1 : Evaluation diagnostique (ED).....	375
IV.2. Annexe D.0.2 : Evaluation finale (EF).....	377
IV.3. Annexe D.1.1 : Modèle de feuille de calculs (S1Sq1)	381
IV.4. Annexe D.1.2 : Proposition de scénario Sq1.....	382
IV.5. Annexe D.2.1 : Proposition de scénario Sq2.....	389
IV.6. Annexe D.3.1 : Proposition de scénario Sq3.....	398
IV.7. Annexe D.3.2 : Exercices relatifs à S3Sq3	408
IV.8. Annexe D.4.1 : Proposition de scénario Sq4.....	410
IV.9. Annexe D.5.1 : Proposition de scénario Sq5.....	416
IV.10. Annexe D.5.2 : Ecritures équivalentes S1Sq5.....	423
IV.11. Annexe D.5.3 : Série de calculs relatifs à τ_{AN} S2Sq5	424

IV.12. Annexe D.6.1 : Proposition de scénario Sq6.....	425
IV.13. Annexe D.7.1 : Proposition de scénario Sq7.....	431
V. Annexe E : annexes relatives au chapitre 7	441
V.1. Annexe E.1.1 : Transcription S1Sq1 (classe A).....	443
V.2. Annexe E.1.2 : Transcription S1Sq1 (classe B).....	447
V.3. Annexe E.1.3 : Cinq feuilles de calcul renseignées permettant d'inférer l'utilisation de τ_{A10} (Classe A & B, S1Sq1, 2014).....	450
V.4. Annexe E.1.4 : Construction du bloc technologico-théorique relatif à τ_{A10} (classe B, S1Sq1, 2014).....	453
V.5. Annexe E.2.1 : Transcription S1Sq2 (classe B).....	454
V.6. Annexe E.3.1 : Transcription S1Sq3 (classe A).....	457
V.7. Annexe E.3.2 : Transcription S1Sq3 (classe B).....	461
V.8. Annexe E.4.1 : Transcription S1Sq4 (classe B).....	465
V.9. Annexe E.5.1 : Transcription S1Sq5 (classe A).....	466
V.10. Annexe E.5.2 : Transcription S1Sq5 (classe B).....	468
V.11. Annexe E.5.3 : Transcription S2Sq5 (classe A).....	471
V.12. Annexe E.5.4 : Classement en fonction de trois types d'erreurs repérées pour effectuer un calcul soustractif avec τ_{AN} (S2Sq5).....	474
V.13. Annexe E.6.1 : Transcription S1Sq6 (classe A).....	475
V.14. Annexe E.6.2 : Transcription S1Sq6 (classe B).....	477
V.15. Annexe E.7.1 : Transcription S1Sq7 (classe A).....	479
V.16. Annexe E.7.2 : Transcription S1Sq7 (classe B).....	482
VI. Annexe F : annexes relatives aux évaluations diagnostiques.....	485
VI.1. Annexe F.1 : Résultats de l'évaluation diagnostique de la classe A.....	487
VI.2. Annexe F.2 : Résultats de l'évaluation diagnostique de la classe B.....	488
VII. Annexe G : annexes relatives aux évaluations finales.....	489
VII.1. Annexe G.1.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a-\square}$	491
VII.2. Annexe G.1.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a-\square}$	492
VII.3. Annexe G.2.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a-\square 0}$	493
VII.4. Annexe G.2.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a-\square 0}$	494
VII.5. Annexe G.3.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a-\square\square}$	495
VII.6. Annexe G.3.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a-\square\square}$	496
VII.7. Annexe G.4.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a-\square\square}$ posé en colonne.....	497
VII.8. Annexe G.4.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a-\square\square}$ posé en colonne.....	498
VII.9. Annexe G.5.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à la technologie associée à τ_{ALG}	499
VII.10. Annexe G.5.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à la technologie associée à τ_{ALG}	500
VII.11. Annexe G.6.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{Prod.Cal}$	501

VII.12. Annexe G.6.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{\text{Prod.Cal}}$...	502
VII.13. Annexe G.7.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{\text{ASS (cal/cal)}}$	503
VII.14. Annexe G.7.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{\text{ASS (cal/cal)}}$	504

Introduction

Dans cette thèse, nous cherchons à cerner les enjeux de l'enseignement du calcul à l'école élémentaire et à déterminer des conditions qui permettraient d'améliorer son apprentissage. Nous nous intéressons aux techniques de calcul soustractif, mental et posé en colonnes, mises en œuvre par les élèves en CE2. Avant de préciser notre questionnement, et de donner le plan de l'étude, nous présentons les motivations professionnelles qui nous ont incitée à choisir ce sujet et à le traiter, en utilisant principalement le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

I. Genèse de la recherche : des constats de formateur

Pendant deux années consécutives, de 2008 à 2010, nous avons animé, en tant que formatrice à l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'académie d'Amiens, un stage de formation continue dont l'intitulé était « lire, écrire, calculer » au cycle 2. Ce stage, répondait à une commande au niveau du plan académique de formation de l'Oise, en lien avec la diffusion des nouveaux programmes d'enseignement pour l'école primaire. Ces

programmes (bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008), contrairement à ceux de 2002, n'étaient pas accompagnés de documents d'application. Le stage devait, dans ce contexte amener les enseignants à concevoir des programmations¹ éventuelles pour atteindre les objectifs fixés par niveau et les aider à préciser les attentes institutionnelles en termes de contenus d'enseignement. Les enseignants titulaires qui participaient au stage étaient remplacés un jour par semaine sur six mois par des stagiaires affectés en responsabilité dans leurs classes.

Un autre changement, l'arrivée d'évaluations nationales en 2009, en fin de CE1 et début CM2, préoccupait les professeurs des écoles, en particulier ceux qui enseignaient en CE1. Ils se demandaient comment faire pour « finir » le programme dans les temps et enseigner des notions qui auparavant relevaient du cycle 3. Nous nous souvenons avoir été particulièrement interpellée par l'enseignement d'une technique relative à la soustraction en cycle 2 et ce dès le CP Beaucoup parmi les enseignants se posaient la question du choix de la technique, d'autres se demandaient comment l'introduire, d'autres encore à quel moment de l'année l'introduire.

Ce changement de programme, minime en apparence, focalisait l'attention et la réflexion de tous les acteurs sur un objet d'enseignement isolé et singulier. Une grande difficulté que soulèvent d'ailleurs les programmes, et qui, pourtant, semble inévitable au vu de leur communication à des professionnels et des non professionnels de l'éducation et de leur diffusion à grande échelle, est liée à leur découpage. Pour une même discipline, on trouve plusieurs domaines, et dans chaque domaine, plusieurs thèmes qui rassemblent différents sujets d'étude. Dans cette hiérarchisation, il n'est pas si simple d'établir des liens entre les sujets d'études d'un même thème, et de trouver des liens d'un thème à un autre. L'avancée d'un an de l'apprentissage d'une technique opératoire perturbe les équilibres entre les sujets d'étude propres au calcul mental, et réinterroge les liens entre calcul mental et calcul posé. Donc, un petit changement en apparence, soulève le problème de l'atomisation des savoirs, exprimé en ces termes par Chevallard (2003) :

« Le fait que, comme tel – non par exemple en tant que le noosphérique qu'il peut être par ailleurs –, le professeur de mathématiques ne soit pas amené à situer les thèmes qu'il enseigne dans les secteurs et les domaines que dessine le programme, le conduit à faire défiler ces thèmes, et les sujets qui leur sont associés dans le cours d'études, les uns après les autres, à la queue leu leu : la « statistique », par exemple, n'est alors rien d'autre que la

¹ Une programmation est un projet prévisionnel établi afin de couvrir l'ensemble du programme.

succession des sujets et thèmes de « statistique » ; et de même pour la géométrie, l'algèbre, etc. Une telle atomisation de la matière à étudier contraste déjà formellement avec l'ambition originelle dont pourtant elle procède – enseigner « les mathématiques », « la statistique », « la géométrie », « l'algèbre », etc. » (Chevallard, 2003, p.3)

Pour avancer sur la question de l'enseignement du calcul soustractif, nous connaissons un ensemble de résultats sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul mental en France, et d'autres résultats provenant d'études sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul posé en colonnes (nous y reviendrons au chapitre 1). A notre connaissance, aucune recherche ne traitait du calcul soustractif dans sa globalité. De là, l'idée de nous documenter davantage, de chercher dans des revues internationales, comment la question était traitée, et, au besoin, d'approfondir le sujet, d'en programmer l'étude.

II. Présentation du sujet de la thèse

Comme formatrice, nous avons constaté que l'enseignement du calcul soustractif sur les entiers naturels pose davantage de problèmes aux enseignants que l'enseignement du calcul additif sur les entiers naturels. Le fait que le calcul de la différence $a - b$ de deux entiers naturels dans l'ensemble des entiers naturels, suppose une contrainte sur le couple de nombres a et b , ($a \geq b$) rend ce calcul complexe. A l'inverse de l'addition, la soustraction n'est pas une opération commutative. Les erreurs persistantes des élèves, évoquées par les enseignants et observées aux évaluations nationales, révèlent des difficultés d'apprentissage. Ces erreurs se traduisent quand l'élève produit un calcul incorrect sur sa feuille, qu'il écrit par exemple, en ligne ou en colonne $38 - 52$, ou quand il effectue le calcul chiffre à chiffre dans le sens où c'est possible et qu'il trouve $52 - 38 = 26$.

Les professeurs que nous avons rencontrés conçoivent très bien les difficultés de leurs élèves en calcul posé et voudraient les contourner. D'où leurs hésitations dans le choix de l'algorithme de la soustraction à enseigner. D'un autre côté, leurs demandes propres à l'enseignement du calcul mental sont peu nombreuses. A partir du moment où leurs élèves connaissent les tables d'addition et de soustraction, les compléments, et arrivent à effectuer des calculs simples (soustraire un nombre inférieur à dix, soustraire un multiple de dix), ils ne cherchent pas à questionner les techniques utilisées ni à développer les technologies.

Dans la mesure où nous pensons qu'il n'est pas souhaitable de dissocier calcul mental et calcul posé, et de privilégier (voire négliger) un type de calcul par rapport à l'autre, le choix de l'algorithme de la soustraction arrive en second plan. L'essentiel est d'amener les élèves à utiliser les propriétés des nombres et des opérations, pour mettre en place, puis, peu à peu, maîtriser un ensemble de techniques. Si l'algorithme de la soustraction basé sur la propriété de conservation des écarts est choisi, cela semble cohérent que la propriété de conservation des écarts soit également travaillée en calcul mental.

L'objectif de la recherche est de concevoir et d'évaluer une ingénierie autour du calcul soustractif sur les entiers naturels pour le CE2, qui tiendrait compte des contraintes de l'enseignement ordinaire, afin d'outiller les enseignants du premier degré et, indirectement, d'amener les élèves à décrire, expliquer, évaluer et justifier mathématiquement un ensemble de techniques de calcul soustractif sur les entiers naturels.

III. Plan de la thèse

Dans le premier chapitre, nous présentons le contexte institutionnel de la recherche. A partir d'un premier état des lieux sur les pratiques des élèves (résultats des évaluations nationales, analyses d'entretiens), nous formulons nos questions initiales dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique.

Dans le chapitre 2, avec l'intention de concevoir une organisation mathématique de référence, nous identifions les savoirs savants et les savoirs de référence propres aux nombres entiers naturels et aux opérations (addition et soustraction). Nous présentons ensuite une synthèse des travaux de didactique relative à l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif mental et posé. Cette étude nous permet d'identifier les différentes techniques envisageables pour effectuer un calcul soustractif, en pointant les éléments de technologie savante sur lesquelles elles s'appuient, ainsi que les ostensifs convoqués. Elle permet aussi de mettre en évidence l'importance accordée à la flexibilité et à l'adaptabilité en calcul mental.

Dans le chapitre 3, nous construisons une organisation mathématique de référence fondée sur la référence épistémologique établie au chapitre précédent. Cette organisation mathématique de référence est la clef de voûte de notre travail de thèse. Elle fonde l'analyse des praxéologies enseignées (à travers deux manuels à la charnière du CE1 et du CE2), puis l'élaboration d'une ingénierie pour le CE2. Elle agrège quatre organisations locales

construites autour de (1) la production de calcul dans la résolution de problèmes, (2) la traduction et l'association de différentes représentations sémiotiques, (3) l'effectuation des calculs, et enfin (4) la réécriture de calculs.

Dans le chapitre 4, nous estimons nécessaire, de prendre, en amont, des informations sur les pratiques des enseignants « ordinaires » en général et en particulier. En effet, une des questions de départ est celle de l'existence d'une ingénierie complète (au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique), robuste et possible (au sens de la zone maximale de développement professionnel (Robert, 2013)). Dans ce chapitre, nous présentons notre méthodologie pour recueillir des informations dans ce but, puis les premiers résultats obtenus suite à l'analyse d'observations de classe, relatifs à l'enseignement du calcul mental et du calcul posé, lors d'une première expérimentation portant sur l'explicitation de techniques de calcul mental et l'introduction de la propriété de conservation des écarts. Nous concluons ce chapitre en affinant nos questions initiales, pour formuler une problématique qui prend en compte l'organisation mathématique de référence et l'examen des pratiques des trois enseignants observés.

Dans le chapitre 5, nous analysons les praxéologies proposées par des auteurs de manuels, au travers du filtre de l'organisation mathématique de référence construite au chapitre précédent. Nous utilisons la méthodologie présentée au chapitre 4. Notre expérience nous fait supposer que l'apprentissage de certaines techniques de calcul soustractif sont privilégiées, d'autres absentes, et que les connaissances sur les nombres et les propriétés des opérations pour les justifier ne sont pas forcément explicitées ou sont implicites. Le bloc technologico-théorique de l'organisation mathématique à enseigner est peut-être incomplet, ce qui ne permet pas, en outre, de développer la valence épistémique du calcul. Pour finir, après avoir donné les caractéristiques des organisations mathématiques et didactiques des manuels étudiés, nous envisageons quelques pistes pour concevoir l'ingénierie, en intégrant les résultats obtenus à partir de l'étude des pratiques de l'enseignement du calcul soustractif (chapitre 4 et chapitre 5).

Dans le chapitre 6, nous spécifions les outils théoriques que nous utilisons pour la construction de l'ingénierie de développement (organisation mathématique, organisation didactique), en lien avec nos hypothèses de travail et de recherche présentées au chapitre 4. Nous justifions le découpage (en séquences et séances d'apprentissage) proposé aux

enseignants. Nous effectuons l'analyse *a priori* de chaque séquence, afin d'avoir un grain très fin d'analyse sur les techniques, les éléments de technologie et les ostensifs supposés utilisés par les élèves. Nous nous intéressons également aux scénarii proposés aux enseignants, afin d'être en mesure après expérimentation de mesurer la viabilité des situations envisagées.

Dans le chapitre 7, nous effectuons l'analyse *a posteriori* des séquences de l'ingénierie en nous appuyant sur les productions des élèves et les transcriptions des séances filmées dans deux classes. Nous cherchons à savoir quelles techniques, quels ostensifs et éléments de technologie les élèves utilisent et réinvestissent d'une séquence à l'autre. Nous cherchons à mesurer quelles influences ont eu les phases d'institutionnalisation sur les apprentissages, selon les techniques valorisées ou ignorées, les éléments technologiques développés par les enseignants. Nous testons ainsi indirectement la robustesse des situations proposées.

Dans la conclusion générale, nous revenons sur les points essentiels de la recherche : conception d'une organisation mathématique de référence relative au calcul soustractif sur les entiers naturels, utilisation de cet outil théorique pour analyser des manuels et des pratiques d'enseignants observés, conception et évaluation d'une ingénierie mise en œuvre dans deux classes de CE2. Au regard des effets positifs et des limites de l'ingénierie sur les apprentissages des élèves, nous proposons de cibler un certain nombre de questions propres à l'organisation mathématique et à la viabilité de l'ingénierie, pour engager éventuellement une autre recherche.

Chapitre 1

Questions initiales

Dans ce chapitre, nous présentons le contexte dans lequel la recherche s'inscrit, en précisant les attentes institutionnelles véhiculées par les programmes et en « brochant » un premier état des lieux sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en fin de cycle 2 et début de cycle 3 (basé sur des éléments prélevés dans les manuels destinés aux enseignants, sur les résultats des élèves de CE1 aux évaluations nationales de 2011 et sur l'analyse d'entretiens conduits avec des élèves de CE2 dans le cadre de notre MASTER de recherche). Nous montrons comment nous sommes partie de ces constats pour formuler nos questions initiales dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique.

I. Contexte de la recherche

Pour avoir un aperçu du contexte dans lequel s'inscrit la recherche, nous commençons par préciser les attentes institutionnelles relatives au calcul additif et soustractif, en nous référant aux programmes de 2008 et aux évaluations nationales de CE1, puis nous donnons un état des lieux des pratiques d'enseignement du calcul soustractif posé, en analysant de façon globale différentes propositions relevées dans des manuels destinés aux professeurs. Pour finir, nous donnons un aperçu des pratiques des élèves, en nous appuyant sur des entretiens conduits dans le cadre du master de recherche de didactique des mathématiques.

I.1. Les attentes institutionnelles

Nous distinguons les attentes qui relèvent du calcul posé de celles qui relèvent du calcul mental, avant de nous intéresser aux évaluations nationales de fin de CE1.

I.1.1. Au niveau du calcul posé

On trouve, dans les programmes de l'école primaire de 2008, dans la rubrique Nombres et calcul, les attentes suivantes :

- *au cycle 2 : « les élèves apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction. » (B.O. n°3 du 19 juin 2008, p.18).*
- *au cycle 3 : « la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable. » (B.O. n°3 du 19 juin 2008, p.23).*

Rien n'indique dans les programmes quelle technique et quel degré de justification sont attendus en CE1, en CE2 et par la suite, les compétences n'étant pas déclinées année par année mais par cycle. Or sans cette justification de la technique opératoire de la soustraction posée (quelle qu'elle soit), nous faisons l'hypothèse, que les élèves, en particulier ceux qui font des erreurs, ont peu de moyens de contrôler pas à pas leur calcul. Les élèves qui ne font pas d'erreur, quant à eux, peuvent ne pas savoir quel sens mathématique donner aux retenues. De notre point de vue, un objectif double, mériterait d'être formulé explicitement : « travailler une technique pour elle-même et justifier sa mise en place ».

I.1.2. Au niveau du calcul mental

On trouve, dans les programmes de l'école primaire de 2008, dans la rubrique « Nombres et calcul », les attentes suivantes :

- Au cycle 2 : « *L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.* » (B.O. n°3 du 19 juin 2008, p.18).
- Au cycle 3 : « *tables d'addition et de multiplication. L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés.* » (B.O. n°3 du 19 juin 2008, p.23).

Rien n'indique dans les programmes, quels types de calcul sont proposés aux élèves ni quels types de procédures permettent justement de développer une connaissance plus approfondie des nombres. Beaucoup d'implicite minimise l'importance et la portée du calcul réfléchi. Aucun texte ne présente, alors que c'était le cas dans le préambule du document d'accompagnement sur le calcul mental, la nature et la fonction du calcul réfléchi :

*« Et surtout, une pratique régulière du calcul mental réfléchi permet de familiariser les élèves avec les nombres et d'approcher (en situation) certaines propriétés des opérations (cf. les différentes méthodes utilisables pour calculer $37 + 18$ ou 25×16). » Dans ce domaine particulièrement, il convient de distinguer **ce qu'il faut mémoriser ou automatiser** (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure...) et **ce qu'il faut être capable de reconstruire** (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu). » (Document d'accompagnement 2002, p.1).*

En effet, cet extrait mentionne explicitement la possibilité d'utiliser plusieurs procédures pour résoudre un même calcul et donne un exemple de calcul $37 + 18$ pour illustrer le propos². La pratique qui consiste à réécrire un calcul, en un calcul équivalent, mais plus simple à effectuer est mise en exergue. Les faits numériques connus sur lesquels le calculateur s'appuie ne se bornent pas aux tables d'addition et de multiplication. D'autres habilités calculatoires sont mentionnées, nous retenons, entre autres, le calcul sur les dizaines et les centaines entières ainsi que les compléments à la dizaine entière. En conséquence, sans plus entrer dans la richesse du texte proposé en document d'accompagnement, nous faisons l'hypothèse que certains enseignants (notamment les « nouveaux »), s'ils utilisent uniquement le B.O. de 2008, faute d'appui théorique et didactique, auront des difficultés à établir rapidement dans l'année scolaire, les procédures qu'il faut enseigner en calcul mental, en les hiérarchisant les

² $37 + 18 = 37 + 20 - 2$ ou $37 + 18 = 30 + 10 + 14 + 1$ ou $37 + 18 = 40 + 20 - 5$ ou $37 + 18 = 30 + 10 + 7 + 8$.

unes par rapport aux autres. Peut-être qu’indirectement, les évaluations nationales proposées en 2011 en CE1 peuvent orienter leur travail. Voyons ce qu’il en est.

I.1.3. Au niveau des évaluations nationales CE1

Nous avons recensé les items des évaluations nationales de CE1, spécifiques au calcul soustractif, sur les cinq dernières années où elles ont été mises en œuvre dans les classes avant d’analyser les résultats relatifs à mai 2011. Cet état des lieux permet d’explicitier les connaissances et capacités qui peuvent être théoriquement certifiées en fin de cycle 2.

- *Nature des items proposés*

Dans le livret de l’enseignant de CE1, trois types de connaissances et capacités sont affichés dans la rubrique « calcul » :

- ✓ *Connaitre et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des différences*
- ✓ *Connaitre et utiliser des techniques opératoires de la soustraction*
- ✓ *Résoudre des problèmes relevant de la soustraction*

Elles sont évaluées à partir d’items de trois sortes, que nous avons classés dans le tableau ci-après :

	Année 2009	Année 2010	Année 2011	Année 2012	Année 2013
Calcul dicté oralement	13 – 6	24 – 10	34 – 10	325 – 100	16 – 7
	43 – 10	45 – 15	55 – 15	734 – 200	8 – 5
		34 – 9	44 – 9		9 – 6
		321 – 100	231 – 100		10 – 3
Calcul à effectuer en colonne	362 – 126	784 – 145	786 – 254	987 – 265	247 – 135
		362 – 126	481 – 126	274 – 37	364 – 218
Problème ³		Transformation T _{trans pos} 37/x/72	Combinaison T _{comb} 121/x/225	Combinaison T _{comb} 43/x/185	Transformation T _{trans pos} 46/x/63

Tableau 1.1 : exercices proposés dans la rubrique « calcul » aux évaluations nationales CE1

En nous intéressant plus précisément aux calculs dictés nous constatons que :

- ✓ Suivant les années, il n’y a que deux ou quatre calculs.
- ✓ Il y a des années « maigres » (2012 et 2013) où on évalue uniquement la capacité à soustraire 100 ou 200 ou la connaissance du répertoire soustractif.
- ✓ Les calculs dictés en 2011 sont du même type que ceux de 2012, soustraire 10, 100, 15 et 9. Le calcul qui demande de soustraire 9 est le seul qui soit un peu ambitieux, car il va

³ Ces problèmes correspondent à des problèmes de transformation ou de combinaison en nous référant à la typologie des problèmes additifs de Vergnaud (cf. Chapitre 2.) Le code utilisé indique qu’on recherche soit la transformation connaissant l’état initial et l’état final, soit le cardinal d’une partie.

permettre éventuellement à l'élève d'utiliser une *procédure de calcul mental pour calculer une différence*. Le livret de l'enseignant est assez laconique sur la diversité des procédures envisageables. Dans les commentaires pour aider à l'analyse des réponses erronées on peut lire :

« *Les techniques simples de calcul mental pour la soustraction ne sont pas assimilées (décomposition /regroupement ; ex $34 - 9$ peut se calculer comme $34 - 10 + 1$.* » (Livret de l'enseignant, évaluation CE1, 2011, p. 24)

Dans l'ensemble, nous sommes étonnée de ne pas voir des calculs du type $62 - 15$, qui mettraient à défaut la décomposition/regroupement, ou encore davantage des calculs du type $62 - 59$, qui s'effectueraient beaucoup plus facilement en cherchant un complément.

Au niveau des calculs posés, les items recensés dans le tableau 1.1 montrent que l'élève doit toujours, à partir d'un calcul donné en ligne, poser l'opération en colonne. Il n'y a qu'en 2013, que le nombre initial et le nombre à soustraire n'ont pas le même nombre de chiffres. Sinon, on constate, que chaque année, sur les deux calculs à effectuer, un seul nécessite la présence de retenues.

Sur les problèmes, ceux que nous avons évoqués dans le tableau 1.1 sont des problèmes d'application directe⁴ en nous référant au classement de Vergnaud (1990). Nous constatons qu'en 2012 et 2013, les calculs à effectuer en ligne ou en colonne pour déterminer la solution n'étaient pas « simples » ($72 - 37$; $63 - 46$).

- *Présentation des résultats des évaluations nationales au CE1 en 2011*

Ils sont disponibles sur le site du ministère et donnent la répartition des élèves en fonction de leur nombre de « bonnes réponses ». Dans l'Oise, les scores se rapprochent de ceux enregistrés en moyenne en France. La moitié des élèves a réussi 25 items ou plus sur 40 en mathématiques. Il n'y a pas eu de synthèse, à notre connaissance, permettant de cibler dans chaque domaine, les compétences et les champs qui ont fait défaut à une majorité des élèves. Par contre, un tel document a été communiqué par l'Inspection académique de la Sarthe⁵.

⁴ Dans les cahiers d'élèves : d'autres problèmes « concrets » qui nécessitent successivement une addition puis une soustraction ou deux soustractions sont présents.

⁵ Disponible sur : <http://www.ia72.ac-nantes.fr/vie-pedagogique/evaluations-nationales-socle-commun/resultats-aux-evaluations-nationales-et-orientations-pedagogiques/resultats-aux-evaluations-nationales-et-orientations-pedagogiques-604155.kjsp> (consulté le 14/07/15).

Au niveau du calcul, il est dit que :

Les techniques opératoires de l'addition (même avec retenue) et de la soustraction simple sont bien maîtrisées mais la soustraction avec des retenues n'a été réussie que par 46,5% des élèves (item 77).

L'un des items, qui s'apparentait à un problème de réinvestissement de connaissances, testait la capacité à identifier une situation de soustraction et mettre en œuvre et réussir l'opération. Il n'est réussi que par 47% des élèves (item 90).

En conclusion, nous n'avons pas connaissance du taux de réussite aux items correspondant aux calculs dictés. Les seuls pourcentages sur lesquels nous pouvons nous appuyer sont ceux donnant le taux de réussite de la soustraction posée en colonne qui est de 46,5%⁶ et ceux donnant le taux de réussite à un problème de transformation 47%. Partant du constat qu'un élève sur deux, en moyenne a des difficultés en fin de CE1 pour trouver le résultat d'une soustraction posée en colonne et à reconnaître un problème soustractif, nous avons établi un premier état des lieux sur l'enseignement du calcul posé de la soustraction que nous présentons au paragraphe suivant .

I.2. L'enseignement du calcul posé de la soustraction

Nous commençons par donner un aperçu des différentes techniques de la soustraction posée avant de préciser les techniques retenues par différents auteurs de manuel. Ce paragraphe fait directement référence à Rinaldi (2013).

I.2.1. Trois techniques opératoires de la soustraction

Guinet (1978), dans un article retraçant l'histoire des techniques opératoires de la soustraction, mentionne l'existence de trois techniques qui ont fait l'objet d'un enseignement systématique en France. La première, appelée dans cet article technique, par « compensation »⁷ nous est familière. Elle est usuellement utilisée en CE2, en France. Elle demande des connaissances en numération décimale et s'appuie sur la propriété dite de conservation des écarts (la différence entre deux nombres ne change pas si on ajoute ou si on soustrait le même nombre aux deux termes de la différence). C'est elle qui est utilisée, quand on trouve un calcul posé, avec des retenues ainsi placées :

⁶ Si on se réfère par ailleurs, aux résultats des Evaluations CEDRE 2014, en fin de CM2, trouvés dans la note d'information n° 18 de MAI 2015, on lit qu'il y a « une baisse en technique opératoire » depuis 2007, mais nous n'en dirons pas plus n'ayant pas accès à plus de données.

⁷ La terminologie de l'article est encore assez utilisée actuellement. Nous reviendrons sur cette terminologie au chapitre 2.

$$\begin{array}{r} 275 \\ - 38 \\ \hline 237 \end{array}$$

En effet pour calculer $275 - 38$, on calcule $(275 + 10) - (38 + 10)$ soit $(200 + 70 + 15 - 40 + 8 = 200 + 70 - 40 + 15 - 8 = 237$.

La deuxième technique, appelée dans cet article par « emprunt » est toujours d'après Guinet (1978), davantage utilisée dans le monde anglo-saxon. Elle repose entièrement sur les propriétés du système de numération décimale. C'est ainsi que pour calculer $275 - 38$ avec cette technique, on « casse » une dizaine. 275 est alors composé de 2 centaines, 6 dizaines et 15 unités. Il n'y a plus d'entrave pour soustraire 8 unités à 15 unités, puis 3 dizaines à 6 dizaines et 0 centaine à 2 centaines.

La troisième technique appelée dans cet article par « addition », est fondée sur l'idée que pour chercher la différence entre b et a, on cherche combien il faut pour aller de a à b. Pour effectuer un calcul soustractif posé, on s'appuie sur la technique opératoire de l'addition, et en particulier l'addition à trou.

$$\begin{array}{r} 275 \\ + 237 \\ \hline 275 \end{array}$$

C'est le discours technologique de l'addition qui est utilisé, contrairement aux deux premières techniques. On se demande combien il faut ajouter à 8 pour obtenir 5. Comme ce calcul n'est pas possible, on cherche combien il faut ajouter à 8 pour obtenir 15. On trouve 7. On inscrit ce chiffre dans la colonne des unités au dessus du trait. Dans 275 on a déjà obtenu 15, c'est pourquoi on marque une retenue⁸, celle de l'addition dans la colonne des dizaines. $3 + 1 = 4$, combien faut-il ajouter à 4 pour obtenir 7 ? 3. On inscrit 3 dans la colonne des dizaines. Il reste alors deux centaines à ajouter pour atteindre 275 : on marque un 2 au dessus du trait dans la colonne des centaines.

⁸ La retenue peut être marquée dans la colonne des dizaines au dessus du trait ou au dessus du chiffre 3.

I.2.2. Les choix des auteurs de manuels et d'ouvrages

Ces trois techniques ne s'appuyant pas entièrement sur les mêmes connaissances, elles ont chacune des raisons particulières d'être enseignées. C'est ainsi que les auteurs du *ERMEL CE2* (2006) privilégient l'enseignement de la technique par addition, en évoquant surtout la continuité des apprentissages entre le CE1 et le CE2. Même en CM1 (2006), alors qu'ils « acceptent toutes les techniques performantes », ils recommandent encore l'apprentissage de la technique par addition pour les enfants qui commettent encore des erreurs (p. 187).

Les auteurs de « *J'apprends les maths* », quant à eux, en 2003 préconisaient l'enseignement de la technique par emprunt. Ils ont fait évoluer leur choix en 2010, car ils expliquent que cette technique par emprunt est facile à comprendre dans le cas de nombres à deux chiffres mais que :

« Lorsque le nombre a trois chiffres et lorsqu'il s'écrit avec un zéro comme chiffre des dizaines, la gestion d'une telle procédure devient beaucoup plus complexe. » (*J'apprends les maths*, 2010, p. 86)

Les auteurs de « *Euro maths* » en 2009 proposent d'enseigner la technique par compensation, dès le CE1, en l'inscrivant dans une progression où les élèves découvrent au préalable la propriété de conservation des écarts et une technique de calcul dite « à la russe » qui va consister à :

« Remplacer une soustraction par une soustraction équivalente dans laquelle le nombre à soustraire est un nombre rond. » (*Euro Maths*, 2009, p. 29)

Ainsi avec cette technique pour calculer $143 - 67$, on calcule $146 - 70$. Ces deux calculs sont équivalents pourtant le second est plus facile à effectuer mentalement. On a ajouté à 67, le nombre 3 pour obtenir un nombre « rond » et ajouté 3 à 143 pour conserver l'écart.

En conclusion, les auteurs de collections de manuels scolaires font des choix différents pour la technique de soustraction posée enseignée. Les trois techniques citées sont liées à des connaissances sur la numération décimale de position, mais celle par compensation met en jeu la propriété de conservation des écarts que n'utilisent pas les deux autres. **C'est la raison pour laquelle nous avons décidé de nous pencher sur l'enseignement de cette technique, en assumant une perspective épistémique pour le calcul**, en complément d'une perspective pragmatique (Artigue 2004). Dans le paragraphe suivant, nous évoquons les pratiques des élèves à partir des travaux de Maurel & Sackur (2010) et Rinaldi (2013).

I.3. Pratiques des élèves

Dans ce paragraphe, nous évoquons les pratiques des élèves en calcul posé et en calcul mental, à partir des travaux de Maurel & Sackur (2010) et des entretiens effectués dans le cadre du MASTER de didactique des mathématiques.

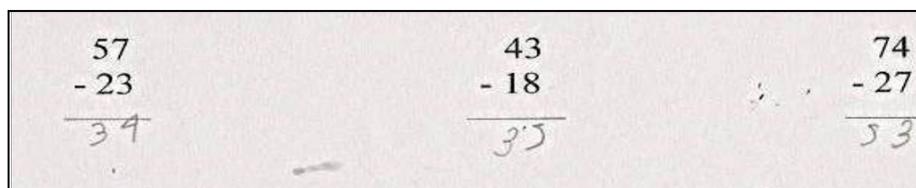
I.3.1. Au niveau du calcul posé en colonne

Maurel & Sackur (2010) constatent que les calculs soustractifs avec retenues posent encore des difficultés à certains élèves de CM1. Ces chercheurs avancent que les élèves font :

« *La soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.* » (Maurel & Sackur, 2010, p. 48).

Dans la classe de CE2 où nous avons conduit une expérimentation dans le cadre de notre mémoire de MASTER, nous avons donné un test, en janvier 2010, pour évaluer les connaissances et les compétences des élèves en calcul mental et posé. Cette classe était une classe de vingt et un élèves dans une école d'application de Beauvais. Les élèves avaient reçu le même enseignement en mathématiques en CE1 et revu l'algorithme de la soustraction posée en colonne, basée sur la propriété de conservation des écarts pendant la période 2⁹ de l'année scolaire.

Pour le premier calcul $57 - 23$ posé en colonne, un seul élève s'était trompé et trouvait 58, tous les autres avaient réussi. En revanche, sept élèves sur vingt et un, donc un tiers, n'avaient pas réussi les soustractions avec retenues. Quatre reproduisaient l'erreur classique signalée précédemment, comme en atteste la production reprographiée ci-après :



The image shows three columns of handwritten subtraction problems. The first column shows $57 - 23$ with a horizontal line and the result 34 written below. The second column shows $43 - 18$ with a horizontal line and the result 35 written below. The third column shows $74 - 27$ with a horizontal line and the result 53 written below. Each problem is written in a simple, slightly slanted handwriting.

Figure 1.1 : Productions relatives à une soustraction posée (sans et avec retenue)

Parmi ceux qui savaient appliquer l'algorithme, beaucoup produisaient pour justifier son utilisation un *discours formel et convenu*, d'après Coulange & Grugeon (2008). Nous confirmons ce manque de justifications, en nous appuyant sur l'analyse d'enregistrements

⁹ Période commençant après les vacances de la Toussaint et allant jusqu'aux vacances d'hivers.

filmés d'entretiens en tête à tête, entre chercheur et élève, qui avaient eu lieu dans la classe de CE2 que nous évoquions précédemment, une semaine après la passation du test écrit. Le discours de Benoît, élève de cette classe de CE2, produit en février 2010, alors qu'il résolvait la soustraction posée 43-18 avec papier – crayon, nous semble révélateur :

- « Alors ici il y a trois moins huit, on ne peut pas. Si j'ai trois bonbons, je ne peux pas t'en donner huit, j'en ai pas assez ». *L'élève prend son stylo et marque les retenues.*
- « Donc on va faire une retenue, on va mettre un « un » ici et « un ».
- « Après on fait un paquet. » *Il entoure la retenue placée dans la colonne des dizaines avec le chiffre des dizaines correspondant.*
- « Treize moins huit, on peut. Si, j'ai treize bonbons, je peux très bien t'en donner huit. »
- « douze, onze, dix, neuf, huit, sept, six, cinq ». *L'élève compte en même temps le nombre de nombres qu'il dit en utilisant les doigts de sa main gauche qu'il lève un à un, puis trois doigts de sa main droite. Il écrit 5 dans la colonne des unités.*
- « Et là, on va faire quatre moins deux, je peux t'en donner deux. » *Il écrit 2 dans la colonne des dizaines.*

On mesure que l'élève a compris, en référence au registre des collections, qu'on ne pouvait pas soustraire le plus grand au plus petit sans faire intervenir une retenue et que cette retenue, un peu magique, bien placée, va permettre de poursuivre le calcul. Le statut de ce « un » qui, en fait, représente une dizaine n'est pas explicité, par contre le « *treize moins huit* » montre qu'implicitement cette connaissance est présente. Le « on va faire un paquet » est aussi une convention que l'élève a apprise ou un besoin ressenti de justification. C'est un moyen peut-être mnémotechnique pour se souvenir qu'à l'étape suivante, il faudra ajouter le chiffre du dessus à celui du dessous. En conclusion, le discours¹⁰ de Benoît fait référence au dénombrement, probablement aux usages en vigueur dans la classe pour mémoriser les différentes étapes à suivre, mais nullement à la propriété de conservation des écarts pour justifier l'utilisation des retenues. On peut cependant dire que ce discours permet d'identifier « le mode d'emploi » pour cette technique.

Dans l'article déjà cité, Maurel & Sackur (2010) interrogeaient au sujet du calcul soustractif posé, des élèves d'une classe de CM1 qui avaient appris la technique par compensation. Elles ont pointé le fait que la majorité d'entre eux employaient l'expression : « j'emprunte une dizaine et je la rends » pour justifier le fait d'écrire deux retenues. Là encore,

¹⁰ L'analyse du discours de Benoît fait référence à la notion de « technologie » que nous définissons en référence à la théorie anthropologique du didactique dans la quatrième partie de l'article.

cette phrase, mode d'emploi, permet de mettre en avant une action qui, à première vue, justifie la présence des retenues.

En conclusion : les résultats obtenus par certains élèves confirment l'existence de réelles difficultés pour effectuer une soustraction posée avec retenues en cours d'année de CE2. Les entretiens montrent de surcroît que certains élèves savent quand il faut introduire des retenues, savent les placer au bon endroit, sans savoir ce qu'elles représentent mathématiquement. Nous faisons l'hypothèse qu'un travail en amont sur la propriété des écarts permettrait de justifier la mise en place de la technique et permettrait aux élèves de donner une signification plus mathématique aux retenues qu'ils utilisent.

D'autres discours filmés et retranscrits révèlent aussi que les élèves ne savent pas toujours expliciter les procédures qu'ils emploient en calcul mental. C'est l'objet du paragraphe suivant.

I.3.2. Au niveau du calcul mental

Avant de nous appuyer sur plusieurs travaux de recherche sur l'apprentissage et l'enseignement du calcul mental (deuxième partie du chapitre 2), nous souhaitons préciser les questions initiales que nous nous sommes posées après avoir entendu les élèves expliquer leurs procédures. Au départ, notre projet était très ambitieux car nous désirions conduire des entretiens d'explicitation, au sens de Vermersch (1994), « *La spécificité de l'entretien d'explicitation est de viser la verbalisation d'une action* ». Il s'agit de prendre des informations sur la technique utilisée pour exécuter une tâche particulière, de s'informer du détail de ses actions effectives, de leur enchaînement, de leur succession, de l'articulation entre prise d'informations et opérations de réalisation. Conduire un entretien d'explicitation, c'est s'intéresser aux connaissances pratiques, présentes en acte. À côté de cette description du déroulement de l'action (« informations directes ») selon Vermersch, et grâce à elle, des informations « obliques » sont mises à jour. Il s'agit des connaissances effectivement utilisées, qu'elles soient explicites ou non, des buts visés et des représentations mobilisées. L'ensemble de ces informations ne peuvent pas être mis à jour sans passer tout d'abord par la description de l'action dans sa singularité. Car toute action est singulière et ce que l'on a fait concrètement se distingue nettement de ce que l'on sait théoriquement de ce qu'il faudrait faire. Conduire un entretien d'explicitation, c'est surtout s'intéresser au « comment » afin d'arriver d'après Balas-Chanel (2002) :

« Au-delà de la dimension procédurale de l'action, de questionner ce que Vermeersch a nommé "les satellites de l'action" c'est-à-dire les buts poursuivis, les connaissances qui fondent l'action et éventuellement le jugement, c'est-à-dire l'évaluation que M. porte à son travail. » (Balas-Chanel, 2002, §33)

Plusieurs techniques existent pour conduire ce type d'entretien. Ne les maîtrisant pas assez pour les appliquer, nous avons conduit des entretiens qui visent l'explicitation en adoptant une forme qui :

- informe l'élève de notre objectif : « je désire savoir comment tu as fait pour calculer ».
- le met en confiance.
- l'encourage à spécifier des points précis.
- laisse des vides de parole.
- autorise les relances.

Cette précision apportée, nous présentons dans le tableau ci après, trois extraits d'entretiens que nous avons conduits avec trois élèves (E1, E2, E3) afin de repérer les techniques qu'ils ont respectivement utilisées et les connaissances sur les nombres et les opérations qu'ils ont mobilisées. Nous avons choisi un calcul qu'ils ont l'habitude de rencontrer (et qui correspond à un calcul dicté des évaluations CE1).

53-10	53-10	53-10
<p>E1 : « Tu fais trois moins zéro, ça fait trois. » <i>Elle écrit le chiffre 3.</i> E1 : « Après cinq moins un, ça fait quatre. » <i>Elle écrit le chiffre 4.</i> E1 : « ça fait quarante- trois ».</p>	<p>E2 : « Treize moins dix ». <i>L'élève au bout de cinq secondes rectifie :</i> E2 : « cinquante-trois moins dix ». <i>L'élève ne verbalise pas. Ses lèvres bougent.</i> <i>Le chercheur intervient au bout de vingt secondes :</i> C : « Clémence, dis moi ce que tu fais dans ta tête. Je vois que tu fais des tas de choses. » <i>L'élève donne de suite une explication:</i> E2 : « Je mets cinquante - trois, après je compte dix. » <i>L'élève ne verbalise pas. Ses lèvres bougent. Pour finir, elle note quarante comme résultat.</i></p>	<p>E3 : « Quarante-trois » C : « Comment tu as fait pour trouver de suite quarante-trois. » E3: « Le plus gros chiffre et tu en enlèves dix pour arriver à quarante-trois. » C : « Et maintenant tu as quarante-trois et tu en enlèves dix.» E3 : « Trente-trois. » C : « comment tu le sais ? » E3:- « Tu as le plus gros chiffre et tu n'as plus qu'à en enlever dix. » C : « Et tu connais tous les résultats comme cela. Si je te dis cent-soixante-dix-neuf moins dix » E3 : « Combien ? » C : « Cent-soixante-dix- neuf moins dix. » E3 : « Cent-soixante-neuf. » C : « Parce que tu sais par cœur, tu sais la suite des nombres de dix en dix par cœur, c'est ça ? » E3 : « Des fois quand j'ai faux je me corrige. »</p>
<p>Durée : Treize secondes avant d'annoncer le résultat</p>	<p>Durée : Une minute quinze secondes avant d'annoncer le résultat.</p>	<p>Durée : même pas une seconde pour annoncer le résultat.</p>

Tableau 1.2 : retranscriptions de discours d'élèves relatifs au calcul mental de 53-10

Le premier élève pose l'opération dans sa tête. Il cherche le chiffre des unités et le chiffre des dizaines du résultat. Il s'appuie sur les écritures chiffrées des nombres proposés. La seconde élève décompte de un en un à partir du nombre cinquante-trois sans s'aider de ses doigts. Sa procédure est empirique. Elle n'est ni économique, ni fiable. Le troisième élève trouve le résultat directement sans savoir expliquer sa procédure. Nous supposons qu'il connaît la comptine des nombres de dix en dix à rebours à partir de n'importe quel nombre donné.

Nous partons du constat que, même sur des calculs très simples comme celui de cinquante-trois moins dix, les élèves de CE2 ont des procédures différentes qui ne mettent pas en jeu les mêmes connaissances sur les nombres et les opérations. Notre regard d'expert nous permet d'affirmer que certaines sont plus efficaces que d'autres. Poser l'opération en colonne est ici inutile, décompter de un en un est ici coûteux, connaître la suite des nombres ou étendre les répertoires aux dizaines entières est ici efficace. Nous ne doutons pas que les professeurs des écoles, en faisant pratiquer régulièrement le calcul mental aux élèves, essaient de leur enseigner différentes techniques et de les hiérarchiser les unes par rapport aux autres. Les dispositifs mis en place ont probablement des faiblesses qu'il est intéressant d'identifier puis d'analyser, pour, éventuellement, proposer une ingénierie didactique autour du calcul soustractif. Nous allons dans le paragraphe suivant, formuler notre questionnement initial dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique.

II. Questionnement et cadre théorique

Les éléments que nous avons prélevés et exposés au paragraphe précédent nous incitent à envisager notre questionnement en prenant en compte les sources de difficultés liées à l'apprentissage et à l'enseignement du calcul soustractif à l'école élémentaire.

Ces difficultés peuvent être analysées en considérant une approche écologique. La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), par l'approche écologique, questionne ce qui doit être présent dans l'ensemble des savoirs à enseigner pour que chaque objet de savoir puisse vivre en étroite corrélation avec les autres. Or les changements de programmes de 2008 introduisent très précocement une technique de la soustraction posée dès le CE1. Il y a donc, dans la chaîne trophique, introduction d'un élément nouveau dont il faut assurer le besoin et qui a forcément des incidences sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif

posé et du calcul soustractif dans sa globalité. C'est ce que désigne Artaud (1997) sous la loi du tout structuré :

« Un objet ne peut pas exister seul : il doit venir prendre place dans une organisation mathématique, organisation qu'il faut faire exister. La nécessité qu'existe un milieu dit alors que cette émergence d'une organisation mathématique ne peut se faire ex nihilo. Il faut prendre appui sur des organisations, mathématiques ou non mathématiques, déjà existantes. »
(Artaud, 1997, p.125).

Une de nos premières questions, en nous appuyant sur une analyse épistémologique est de définir, vu que nous privilégions une technique posée fondée sur la propriété de conservation des écarts, les organisations mathématiques à développer. Nous cherchons notamment à savoir comment cette propriété de conservation des écarts peut exister de manière stable et viable dans ces organisations. Nous voulons identifier les chaînes trophiques dans lesquelles elle apparait, et avec quelles fonctions, étant entendu que d'autres éléments mathématiques (définitions et propriétés) sont présents et interviennent également dans l'effectuation d'un calcul mental et posé en ligne. Par la suite, pour faire vivre ces organisations mathématiques, nous nous proposons de concevoir une ingénierie didactique adaptée aux pratiques de l'enseignement ordinaire. Or, cet enseignement à l'école primaire, d'après ce qui ressort des difficultés des élèves à expliquer leurs techniques, semble surtout axé sur la valence pragmatique du calcul. Le professeur des écoles cherche à ce que l'élève calcule « vite et bien ». Il cherche avant tout à ce que l'élève soit capable d'appliquer une technique, quitte à ce qu'il la comprenne « après ». Pour certains élèves cela ne pose en apparence pas de problèmes. Ils ne font pas d'erreurs. Pour d'autres élèves, appliquer est difficile car appliquer suppose un minimum de connaissances sur les nombres et les opérations qu'ils ne maîtrisent pas.

Nous cherchons quelles conditions mettre en place, pour concilier un enseignement qui vise à installer des savoir-faire et des automatismes, avec un enseignement où les différentes étapes qui interviennent dans un calcul (en ligne, mental ou posé) sont justifiées mathématiquement. Dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, nous pensons que donner le mode d'emploi de la technique ne suffit pas pour comprendre, voire appliquer la technique. Un travail spécifique doit être conduit pour justifier *rationnellement* la technique, l'*expliquer*, la *rendre intelligible* et l'*éclairer* en reprenant les termes de Chevallard (1999). Reste à définir sous quelle forme et par qui peut être produit ce discours et

avec quels ostensifs (écritures chiffrées, droite numérique, schéma, réécriture de calculs,...). Reste à concevoir un nouveau contrat didactique au sens de Brousseau (1988).

Un dernier point, à notre avis sur lesquels certains élèves achoppent est lié au fait qu'une technique, *une manière de faire*, a une portée limitée. Il faut accepter que d'autres techniques soient *supérieures* et méritent d'être connues. Or, ces nouvelles techniques s'appuient bien souvent sur davantage de connaissances sur les nombres et les opérations. Elles sont alors perçues par les élèves comme « difficiles » et par les enseignants comme « prématurées ». Pourtant retarder leur mise en place, installe l'élève dans une manière de faire et de penser *statique*.

En conclusion, à partir de constats sur les pratiques des élèves en lien avec les attentes de l'institution, nous avons émis des hypothèses sur ce qu'il faudrait enseigner, selon nous, pour faire évoluer ces mêmes pratiques. Une première étape de la recherche va consister à étudier avec précision, les savoirs mathématiques savants, les savoirs didactiques au regard d'une étude épistémologique sur le calcul soustractif et son enseignement, afin d'élaborer une organisation mathématique de référence.

Mais pour élaborer une ingénierie complète et opérationnelle, des réponses théoriques ne suffisent pas, toute une réflexion doit être conduite afin de définir une organisation didactique adaptée au contenu, et accessible aux professeurs des écoles. Concrètement, cela suppose de prélever des renseignements sur leurs pratiques, notamment sur les ressources qu'ils utilisent, les habitudes qu'ils instaurent, les façons dont ils se saisissent de nouvelles propositions. Nous précisons, un peu plus loin, dans le corps de la thèse, la méthodologie que nous avons élaborée, ainsi que les outils théoriques que nous avons empruntés à plusieurs cadres théoriques, la Théorie Anthropologique du Didactique, la double approche et la Théorie des Situations Didactiques pour mener notre enquête préalable à la conception et la mise en œuvre de l'ingénierie.

Chapitre 2

Références épistémologiques sur le calcul soustractif et son enseignement

Dans ce chapitre, après avoir précisé les outils que nous empruntons à la Théorie Anthropologique du Didactique, nous nous attachons à présenter les savoirs intervenant dans l'effectuation d'un calcul additif et soustractif sur les entiers naturels. Nous menons une revue de travaux sur l'enseignement du calcul mental et posé à l'école élémentaire dans différents pays. Cette étude nous amène à préciser nos questions sur la place et le rôle du calcul dans l'enseignement élémentaire, notamment à distinguer les enjeux du calcul réfléchi et du calcul posé. Nous réalisons ainsi un inventaire des techniques et des ostensifs couramment introduits

pour effectuer un calcul soustractif. Nous nous positionnons, par rapport aux choix existants dans la perspective de construire une organisation mathématique de référence.

I. Transposition didactique et TAD

I.1. Notion de savoir savant de référence

Le questionnement initial que nous avons formulé au premier chapitre se situe dans le cadre de la TAD. Pour y répondre, nous allons utiliser la notion de transposition didactique:

« Au sens restreint, la transposition didactique désigne donc le passage du savoir savant au savoir enseigné. Or, c'est à la confrontation de ces deux termes, à la distance qui les sépare, par delà ce qui les rapproche et impose de les confronter, que l'on peut le mieux saisir la spécificité du traitement didactique du savoir. » (Chevallard, 1982, p.6)

Notre première intention est de recenser les savoirs savants, qui interviennent dans un calcul soustractif sur les entiers naturels, afin de montrer et d'expliquer la nature des savoirs à enseigner. Nous reprenons l'idée développée par Chambris (2008) sur l'existence de savoirs savants de deux ordres : le savoir savant utile aux mathématiciens pour la production des savoirs et le savoir savant « *mathématiquement correct* » utile pour l'enseignement,¹¹ mais pas nécessairement utile aux mathématiciens.

Pour montrer l'utilité de ces savoirs savants de second ordre au niveau du calcul soustractif, nous prenons comme exemple les axiomes de Peano, la définition de l'addition et le théorème dit de récurrence (nous les présentons avec précision au paragraphe suivant). Ils permettent entre autres, de construire l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} et d'établir les propriétés de l'addition (commutativité, associativité, régularité,..) sur \mathbb{N} . Ces savoirs sont incontestablement de premier ordre et ne peuvent pas, vu leur complexité, être proposés ainsi aux enseignants *stricto sensu* à l'école élémentaire. Ils peuvent être considérés comme des savoirs savants de référence, des savoirs experts, vu qu'ils interviennent dans l'effectuation d'un calcul. Reste à déterminer sous quelle forme, ils peuvent être transposés à l'école primaire. Nous faisons l'hypothèse en référence aux travaux de Lebesgue (1915), qu'il est envisageable entre autre d'établir les propriétés de l'addition à partir de l'expérience, dans le cadre de la mesure. Nous montrons à travers cet exemple, que nous nous intéressons aux savoirs savants experts et aux usages (utilisation, justification) qui s'y réfèrent dans

¹¹ Joshua (1996) évoque aussi les savoirs experts qui interviennent dans des sciences autres que les sciences exactes.

l'Institution qui nous intéresse, en l'occurrence celle de l'école primaire¹². C'est pourquoi nous commençons notre étude en nous référant *au traité de référence*¹³ écrit par Bezout (1764) et complété par Reynaud (1821). Nous poursuivons en évoquant les profonds bouleversements épistémologiques qui ont eu lieu à la fin du XIX^{ème} siècle. Nous montrons comment les concepts de nombres entiers et d'opération ont évolué en lien avec la théorie des ensembles ou l'axiomatique de l'arithmétique (savoirs savants du premier ordre) dans la mesure où cette évolution a eu des conséquences sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, au moment de la réforme des Mathématiques Modernes (de 1968 à 1978) et après la réforme. Pour Chevallard (1982), ces changements étaient nécessaires pour maintenir à bonne distance les deux pôles de la transposition didactique interne.

« Le savoir enseigné s'use. Usure, qu'on peut dire « biologique », qui l'éloigne trop visiblement du savoir savant. Usure « morale », ou obsolescence, qui le rapproche dangereusement du savoir banalisé. Avec le temps, le savoir traité par le système d'enseignement vieillit ; il apparaît un jour comme vieux par rapport à la société (par rapport au savoir savant et par rapport au savoir banalisé). » (Chevallard, 1982, p.10)

Nous cherchons en fait à caractériser l'évolution des savoirs savants de second ordre dans l'étude des nombres entiers naturels et des opérations, mais avant de conduire cette étude, nous rappelons comment la TAD caractérise l'activité mathématique et nous précisons les notions que nous allons utiliser par la suite.

I.2. Notion de praxéologie

La Théorie Anthropologique du Didactique propose un modèle praxéologique dans lequel :

« Toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une certaine technique τ , justifiée par une technologie Θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ . En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/ \tau, / \Theta / \Theta]$ et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. » (Chevallard, 1998, p.92)

En appui sur ce modèle, nous répertorions les types de tâches qui sont propres au calcul soustractif sur les entiers naturels, en identifiant pour chacun d'entre eux les techniques qui permettent de les accomplir. Au delà de l'aspect pratique, intervient l'aspect « discours

¹² Cela rejoint l'idée d'une transposition didactique élargie aux « pratiques » développée par Perrenoud (1998)

¹³ *Un traité de référence*, d'après Chambris (2008) a pour vocation d' « élémenter » le savoir à enseigner » c'est-à-dire « d'extraire » les éléments d'une science qui permettent de générer l'ensemble des connaissances de l'époque sur la science en question (page 18).

raisonné », qui renvoie au *bloc technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$ et qui nous intéresse particulièrement. Nous questionnons les modes de validation (internes aux mathématiques) et de justification (propres à l'école élémentaire).

Un autre point fort du modèle est de permettre de porter une attention très ciblée à un type de tâches (praxéologie ponctuelle) et d'avoir un regard plus global, ascendant et descendant sur l'ensemble des types de tâches propre au calcul additif et soustractif (praxéologies locales, régionales ...), sachant que :

« Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales $[T_i/ \iota_i/ \Theta / \Theta]$ centrées sur une technologie Θ déterminée, ensuite en organisations régionales $[T_{ij}/ \iota_{ij}/ \Theta_j / \Theta]$ formées autour d'une théorie Θ . » (Chevallard, 1998, p. 95)

Nous appuyant sur cette hiérarchisation, allant d'une praxéologie ponctuelle associée à un unique type de tâches à une praxéologie locale centrée sur une unique technologie, nous pourrions caractériser l'organisation mathématique (OM) relative au calcul additif et soustractif sur \mathbb{N} .

I.3. Notion d'ostensif

Bosch et Chevallard (1999) distinguent deux types d'objets qui sont co-activés dans la mise en œuvre d'une technique et dans son environnement technologico-théorique, les ostensifs et les non-ostensifs :

- *« les objets ostensifs-du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance » pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible ».*
- *« les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets » comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement - au sens où on leur attribue une existence - sans pour autant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés. »*(Bosch & Chevallard, 1999, p.10).

Pour effectuer ou justifier un calcul soustractif, des ostensifs qui appartiennent principalement à trois registres, celui de l'oralité, de l'écrit, et de la matérialité, sont sollicités. Nous verrons leur nature et leur importance suivant les techniques utilisées (mentales, posées en ligne, posées en colonne), du côté des savoirs savants de référence (second ordre) puis du côté des savoirs à enseigner.

II. Etude des savoirs savants de référence

Dans ce paragraphe, nous étudions les savoirs savants de second ordre, propres aux nombres entiers et aux opérations, répertoriés dans les traités de Bezout (1764) et Reynaud (1821). Ils sont caractéristiques, selon Neyret cité par Chambris (2008), de la période précédant la réforme des mathématiques modernes et demeurent utiles à l'enseignement (connaissance des désignations des nombres et des opérations, proposition de technique de calcul). Vu l'absence¹⁴ de traité à proprement parler, pour recenser les savoirs de second ordre, liés à la théorie des ensembles et à l'axiomatique de Peano, nous évoquons directement les savoirs de premier ordre qui ont influencé l'enseignement de l'arithmétique élémentaire. Pour finir, nous nous intéressons au point de vue de Lebesgue (1915), mathématicien éclairé du XX^{ème} siècle, sur les mathématiques à enseigner à l'école élémentaire.

II.1. Nombres entiers et addition selon Bezout (1764) et Reynaud (1821)

Pour Bezout :

« Le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unité une quantité est composée. » (Bezout, 1764, p.1)

Le nombre est abstrait quand la nature de l'unité n'est pas donnée, et concret dans l'autre cas. Au regard de cette définition, le nombre n'existe pas en tant que tel. Il est relié et défini à partir des grandeurs. Bezout indique ensuite que les mots de la langue française qui permettent de désigner chaque nombre sont « familiers ». Il n'en dit pas davantage sur les règles de fonctionnement de la numération parlée. Il consacre par contre un paragraphe à exposer les principes qui permettent de désigner les nombres au moyen des caractères que sont les chiffres (principe décimal et principe de position).

Pour Reynaud :

« Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle même, donne un nombre nommé deux, celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre nommé trois ; » (Reynaud, 1821, p.1)

La définition du nombre proposée par Reynaud, contrairement à celle de Bezout n'est pas liée aux grandeurs. L'unité ne dépend plus de l'espèce de la grandeur. C'est une entité abstraite

¹⁴ Chambris (2008, p.19) : « Neyret conclut sa thèse en pointant l'absence de traité, en 1995, et la « nécessité de disposer d'un nouveau traité qui « coiffe » à la fois le collège et l'Institution de formation des professeurs des écoles ».

qui a cependant une matérialité car elle correspond à un élément quelconque, mais bien identifié d'une collection. Le nombre apparaît alors comme le résultat d'un comptage de un en un des éléments de la collection. L'aspect ordinal avec l'idée de successeur est également mis en avant. Les mots qui désignent les nombres sont introduits avec les règles de fonctionnement caractéristiques de la numération orale¹⁵.

Dans le traité suivi des notes, les deux auteurs après avoir évoqué la nature des nombres entiers et leurs désignations évoquent les opérations.

Bezout introduit l'addition en ces termes :

« Exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un nombre, est ce qu'on appelle faire une addition. » (Bezout, 1764, p.9)

Cette opération reste intuitive, la notion de valeur totale n'étant pas explicitée. Le résultat, la somme, peut être trouvée facilement grâce à une « règle » que Bezout énonce. Règle qui correspond à la technique de l'addition en colonne que nous appliquons encore de nos jours. De la même manière¹⁶, Bezout introduit la soustraction comme une opération associée à l'action de retrancher, donc à une action concrète et imagée. Les termes choisis pour désigner le résultat, « reste, excès, différence », renvoient d'ailleurs à l'idée de problèmes concrets. La soustraction n'apparaît pas « d'emblée » comme l'opération « inverse » de l'addition. Cette caractéristique n'intervient que plus loin dans son exposé quand il donne « une preuve » pour vérifier l'exactitude d'un calcul soustractif. Au niveau de la technique proposée pour effectuer un calcul soustractif, il ne propose pas la technique basée sur la propriété de conservation des écarts mais la technique basée sur « l'emprunt », suivant son expression :

« Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6 dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira : 7 ôté de 16, il restera 9 qu'on écrira sous 7. » (Bezout, 1764, p.13)

Reynaud, quant à lui, pour décrire l'addition, n'emploie pas l'expression de « valeur totale ». Il énonce que « le résultat contient à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres » et donne un exemple de recherche de somme pour étayer son propos. La technique utilisée, une fois encore, correspond à un calcul posé en colonne. En revanche, la définition qu'il donne pour la soustraction s'apparente plus à l'opération inverse de l'addition. Il mentionne d'ailleurs deux techniques pour calculer une différence :

¹⁵ Pour une analyse plus précise et complète du système de numération, voir Mounier (2010).

¹⁶ « La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre nombre. Le résultat de cette opération s'appelle reste, excès, ou différence. »

« La soustraction peut s'effectuer en ôtant du plus grand nombre des deux nombres donnés, toutes les unités du plus petit, ou en cherchant ce qu'il faut ajouter au plus petit des nombres donnés pour obtenir le plus grand. »
(Reynaud, 1821, p.7)

Par ailleurs, la technique qu'il mentionne pour effectuer un calcul en colonne est aussi basée sur « l'emprunt »¹⁷.

En conclusion, revisiter ces deux approches complémentaires est intéressant pour notre étude. Cela permet de montrer, comme le souligne Chambris (2008), que les nombres dits concrets (rattachés aux grandeurs) et abstraits (à partir desquels le calcul est introduit), qui sans doute ont fondé les programmes de l'école primaire avant 1970, restent latents ou présents dans les savoirs de référence. L'addition et la soustraction servent en premier lieu à anticiper sur le résultat d'opérations concrètes avant d'être des opérations sur les nombres. Les techniques posées en colonne sont introduites pour trouver efficacement, à partir de résultats mémorisés et en appui avec les principes de la numération, la somme et la différence de deux nombres. Le discours technologique donne le mode d'emploi de la technique. Il indique pourquoi et comment gérer chaque étape du calcul. Il n'a pas pour fonction de valider la technique en utilisant le registre des écritures symboliques. Dans le paragraphe suivant, nous présentons en quoi, l'approche du nombre et des opérations vue du côté de la théorie des ensembles est différente.

II.2. Nombre entiers et addition dans la théorie des ensembles (fin du XXe siècle)

Quand deux ensembles¹⁸ sont équipotents, donc que l'on peut établir une bijection¹⁹ entre eux, on dit qu'ils ont le même cardinal. Pour les ensembles finis, on définit le nombre d'éléments d'un ensemble comme la propriété commune à tous les éléments de même cardinal que lui.

Il en résulte qu'un entier naturel qui correspond au cardinal d'un ensemble A, $\text{card}(A)$ mesure le nombre d'éléments de cet ensemble A.

¹⁷ Mot en italique dans le texte p.8

¹⁸ « Un ensemble est une collection d'objets issus de notre perception ou de notre pensée, tous déterminés et distincts. Ces objets s'appellent les éléments d'un ensemble. » Atlas des mathématiques (1997) p.23.

¹⁹ « Une bijection est une application pour laquelle deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont toujours pour images deux éléments distincts de l'ensemble d'arrivée et, pour la quelle tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un élément de l'ensemble de départ et d'un seul. » Noïrfalïse & Matheron (2009) p.110

L'addition de deux nombres entiers est alors définie comme le cardinal de la réunion²⁰ de A et B, de cardinaux respectifs $\text{card}(A)$ et $\text{card}(B)$, dans le cas où A et B sont deux ensembles disjoints²¹.

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Pour définir la soustraction, deux entiers naturels a et b étant donnés, vérifiant $b \geq a$, il est toujours possible de choisir dans un ensemble B de cardinal b, une partie A de B de cardinal a. La différence entre a et b est le cardinal de l'ensemble complémentaire²² de A dans B.

Présentés avec ce vocabulaire spécifique aux mathématiques, le nombre entier et les opérations semblent perdre toute matérialité et n'avoir aucun lien avec le réel. Pourtant il n'en est rien, comme nous l'indiquons au paragraphe suivant, en nous appuyant sur la théorie des champs conceptuels et des structures additives de Vergnaud. Pour finir de donner un aperçu de l'évolution du concept de nombre entier et d'opération, nous nous référons à une approche axiomatique.

II.3. Nombres entiers et addition selon Peano (début XXIe siècle)

L'objet de ce paragraphe²³ est d'esquisser les grandes lignes de la construction des entiers naturels à partir des axiomes de Peano, et de rappeler les propriétés de l'addition et de la soustraction qui en résultent.

- **Axiomes de Peano**

L'ensemble des entiers naturels est introduit en postulant l'existence d'un triplet $(0, \mathbf{N}, S)$ où \mathbf{N} est un ensemble, 0 est un élément particulier de \mathbf{N} et $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une application qui vérifient les propriétés suivantes :

(A1) S est injective.

(A2) L'image de S est \mathbf{N}^* .

(A3) Si A est une partie de \mathbf{N} telle que $0 \in A$ et $(\forall n \in \mathbf{N})(n \in A \Rightarrow (S(n) \in A))$, alors $A = \mathbf{N}$

²⁰ « $A \cup B$, réunion de A et B, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A et à B. » Atlas des mathématiques(1997) p.25.

²¹ Deux ensembles sont disjoints s'ils n'ont pas d'éléments communs.

²² Si A et B sont deux ensembles tels que A soit inclus dans B, le complémentaire de A dans B est l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.

²³ Nous nous sommes appuyée pour énoncer et établir les propriétés relatives à la construction des nombres entiers naturels et des opérations sur Arnaudies J.-M., Fraysse, H.(1989) chapitre II (p.41-48).

L'ensemble \mathbf{N} est l'ensemble des entiers naturels; l'élément 0 s'appelle zéro ; l'application S s'appelle application successeur : si $n \in \mathbf{N}$, $S(n)$, est le successeur de n. La propriété (A3) s'appelle axiome de récurrence. Si $n \in \mathbf{N}^*$, d'après (A2) et (A1), n est l'image par S d'un unique élément appartenant à \mathbf{N} . Cet élément s'appelle le prédécesseur de n. Ainsi 0 est l'unique élément n'ayant pas de prédécesseur. Le successeur de zéro s'appelle un et se note 1. On note encore $S(1)=2, S(2) = 3, S(3) = 4, S(5) = 6 \dots$ C'est en utilisant le théorème qui va suivre, qui découle directement de A3, qu'il est possible d'établir les propriétés de l'addition :

- **Théorème dit de récurrence**

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'une variable n avec $n \in \mathbf{N}$ alors les relations :

$$[P(0)] \text{ et } [(\forall n \in \mathbf{N}) P(n) \Rightarrow P(S(n))] \text{ impliquent : } (\forall n \in \mathbf{N}) P(n)$$

L'addition quant à elle est une loi introduite grâce au théorème de récurrence et au théorème suivant qui assure son existence et son unicité :

- **Théorème et définition de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels \mathbf{N}**

Il existe une et une seule loi de composition interne, application notée $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $(p, q) \rightarrow p + q$ et appelée addition, vérifiant :

$$1) (\forall p \in \mathbf{N}) p + 0 = p$$

$$2) (\forall p \in \mathbf{N})(\forall q \in \mathbf{N}) p + S(q) = S(p + q)$$

$p + q$ est la somme de p et de q.

Cette loi interne possède un certain nombre de propriétés qui font uniquement appel à ce qui précède et que nous allons démontrer avant d'énoncer et d'établir l'existence d'une relation d'ordre sur l'ensemble des entiers naturels. Relation qui permet d'engendrer une dernière propriété de l'addition connue sous le nom de régularité de l'addition.

- **Propriétés de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels**

✓ (P1) existence d'un élément neutre : $(\forall n \in \mathbf{N}) n + 0 = 0 + n = n$

Démonstration par récurrence sur n de $0 + n = n$ (l'autre égalité est la demande 1) de l'addition)

▪ Comme pour tout entier n on a $n + 0 = n$ d'après le théorème et définition de l'addition, on a pour $n = 0$, $0 + 0 = 0$. La propriété est vérifiée au rang 0.

▪ Supposons la propriété vraie au rang n , soit $0 + n = n$, alors $S(0 + n) = S(n) = 0 + S(n)$ donc la propriété est établie au rang $S(n)$.

La propriété est vraie au rang 0 et au rang $S(n)$ donc la propriété est établie par le théorème de récurrence.

✓ **(P2) expression du successeur d'un entier : $(\forall n \in \mathbf{N}) S(n) = n + 1 = 1 + n$**

Démontrons que $S(n) = n + 1$ par récurrence sur n .

▪ Comme $0 + 0 = 0$, d'après (P1) on a $S(0) = S(0 + 0) = 0 + S(0) = 0 + 1$.

Comme $S(0) = 1$ et $n + 0 = n$ pour tout n , on a $S(0) = 1 + 0$.

La propriété est vérifiée au rang 0.

▪ Supposons la propriété vraie au rang n , soit $S(n) = n + 1$ et $S(n) = 1 + n$

- On a $S(S(n)) = S(S(n) + 0)$ d'après (P1) et donc $S(S(n)) = S(S(n) + 0) = S(n) + S(0) = S(n) + 1$

- On a $S(n) = 1 + n$, d'où $S(S(n)) = S(1 + n) = 1 + S(n)$.

La propriété est vraie au rang 0 et au rang $S(n)$ donc la propriété est établie par le théorème de récurrence.

✓ **(P3) associativité de l'addition :**

$$(\forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N})(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r} = \mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r})$$

Fixons p et q et démontrons la propriété par récurrence sur r .

▪ $(p + q) + 0 = (p + q) = p + q$ d'après (P1) et $p + (q + 0) = p + (q) = p + q$ d'après (P1). On en déduit $(p + q) + 0 = p + (q + 0)$. La propriété est vraie au rang 0. On peut donc écrire $p+q+0$.

▪ Supposons la propriété vraie au rang r , soit $(p + q) + r = p + (q + r)$, on a :

$(p + q) + S(r) = S((p + q) + r)$ d'après la définition de l'addition et $S((p + q) + r) = S(p + (q + r))$ d'après l'hypothèse au rang r et $S(p + (q + r)) = p + S(q + r)$ d'après la définition de l'addition or $p + S(q + r) = p + (q + S(r))$ d'après la définition de l'addition.

La propriété est vraie au rang $S(r)$.

La propriété est vraie au rang 0 et au rang $S(r)$ donc la propriété est établie par le théorème de récurrence. On notera désormais $p + q + r$.

✓ **(P4) commutativité de l'addition** : $(\forall (p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}) p + q = q + p$

Fixons p et démontrons par récurrence sur q .

- $p + 0 = 0 + p$ d'après (P1) donc la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie au rang q , soit $p + q = q + p$, on a :
 - $p + S(q) = p + (1 + q)$ d'après (P2)
 - $p + (1 + q) = (p + 1) + q$ d'après l'associativité
 - $(p + 1) + q = (1 + p) + q$ d'après (P2)
 - $(1 + p) + q = 1 + (p + q)$ d'après l'associativité
 - $1 + (p + q) = 1 + (q + p)$ d'après l'hypothèse au rang q
 - $1 + (q + p) = (1 + q) + p$ d'après l'associativité

Donc $p + S(q) = S(q) + p$. La propriété est vraie au rang $S(q)$.

La propriété est vraie au rang 0 et au rang $S(q)$ donc la propriété est établie par le théorème de récurrence.

✓ **(P5)** : $(\forall (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}) (n + m = n) \Leftrightarrow (m = 0)$

Le sens $m = 0 \Rightarrow n + m = n$ est immédiat car zéro est l'élément neutre de l'addition (P1).

Pour démontrer l'autre sens, fixons m et démontrons par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$ on a $0 + m = 0 \Rightarrow m = 0$ est vrai d'après (P1).
- Supposons la propriété vraie au rang n soit $(n + m = n) \Rightarrow (m = 0)$

On a $S(n) + m = S(n) \Rightarrow S(n + m) = S(n) \Rightarrow n + m = n$ car S est injective. On a bien $(m = 0)$ par hypothèse de récurrence. La propriété étant vérifiée au rang 0 et héréditaire, elle est établie par le théorème de récurrence.

✓ **(P6)** : $(\forall (p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}) (p + q = 0) \Leftrightarrow (p = 0 \text{ et } q = 0)$

- Supposons $p = 0$ et $q = 0$ alors $p + q = 0$ d'après P(1).
- Pour l'implication réciproque, on fait une démonstration par contraposée.

Supposons $q \neq 0$, alors il existe un unique entier m tel que $q = S(m)$ puisque tout élément non nul a un prédécesseur. $p + q = p + S(m) = S(p + m)$ or $S(p + m) \neq 0$ car l'image de \mathbf{N} par S est \mathbf{N}^* .

- Supposons $p \neq 0$, un même raisonnement et l'utilisation de la commutativité permettent de conclure.

Afin d'établir la propriété de l'addition connue sous le nom de la régularité, nous allons rappeler et démontrer l'existence d'une relation d'ordre total sur l'ensemble des entiers naturels :

- **Théorème et définition relatif à l'ordre total sur l'ensemble des entiers naturels**

Sur \mathbb{N} la relation binaire notée \leq définie pour tous p, q entiers naturels par :

$(p \leq q) \Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{N} / q = p + d)$ est une relation d'ordre total.

Démonstration :

- La réflexivité (pour tout entier naturel p , on a : $p \leq p$) découle du fait que pour tout entier naturel p , on ait $p + 0 = p$ (c'est la demande 1) de l'addition).

- L'antisymétrie (pour tous entiers naturels p et q , $p \leq q$ et $q \leq p$ entraîne $p = q$ résulte des propriétés (P3),(P5) et (P6) .

En effet supposons qu'il existe d entier naturel tel que $q = p + d$ et d' tel que $p = q + d'$.
On a alors $q = p + d = (p + d') + d = p + (d + d')$ d'après (P3) soit $p = p + (d + d')$ ce qui entraîne $d + d' = 0$ d'après (P5) donc $d = 0$ et $d' = 0$ d'après (P6). On en conclut $p = q$.

- La transitivité (pour tous entiers naturels p, q et r , $p \leq q$ et $q \leq r$ entraîne $p \leq r$) résulte de l'associativité de l'addition (P3).

En effet supposons qu'il existe d entier naturel tel que $q = p + d$ et d' tel que $r = q + d'$.
On a alors $r = q + d' = (p + d) + d' = p + (d + d')$ d'après (P3).

- L'ordre total (soit q un entier naturel, alors $(\forall p \in \mathbb{N}), p \leq q$ ou $q \leq p$) se démontre par récurrence sur q .

Pour $q = 0$, on a quelque soit p entier naturel, $p = p + 0$, donc $p \geq 0$.

Supposons la propriété au rang q et montrons la au rang $S(q)$.

On a soit (1) $p \leq q$ soit (2) $q \geq p$.

Cas(1) : il existe r tel que $q = p + r$ donc $S(q) = (p + r) + 1 = p + (r + 1)$ par l'associativité (P3)) et donc on a $S(q) \geq p$.

Cas (2) : il existe r tel que $p = q + r$.

- Si $r = 0$, alors $p = q$ et $q \leq S(q)$ par P(2) soit $p \leq S(q)$.
- Si r est non nul, alors il existe r' tel que $r = r' + 1$ par (P2) et la définition de S . On a donc $p = q + (r' + 1) = (q + 1) + r'$ par la commutativité et l'associativité d'où $p = S(q) + r'$ et donc $p \geq S(q)$.

La propriété est donc établie au rang 0 et héréditaire, elle est donc démontrée par le théorème de récurrence. Elle permet avec l'ensemble de ce qui précède d'établir la régularité de l'addition :

- **(P7) régularité de l'addition** : $(\forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}) (\mathbf{p} + \mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{r}) \Leftrightarrow (\mathbf{p} = \mathbf{q})$

Le sens $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ implique $\mathbf{p} + \mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{r}$ est immédiat.

Supposons $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$

Premier cas : $\mathbf{p} < \mathbf{q}$, d'après le théorème relatif à l'ordre total sur \mathbf{N} , il existe un entier \mathbf{m} avec \mathbf{m} non nul sinon on aurait $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ tel que $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{m}$. On a alors $\mathbf{q} + \mathbf{r} = (\mathbf{p} + \mathbf{m}) + \mathbf{r} = \mathbf{p} + (\mathbf{m} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} + (\mathbf{r} + \mathbf{m}) = (\mathbf{p} + \mathbf{r}) + \mathbf{m}$ d'après l'associativité et la commutativité. On en déduit que $\mathbf{q} + \mathbf{r}$ est différent de $\mathbf{p} + \mathbf{r}$, car si on avait $\mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$, on aurait $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ par (P6) or \mathbf{m} est non nul ce qu'il fallait démontrer.

On démontre le second cas $\mathbf{q} < \mathbf{p}$, de la même manière.

En conclusion, cette approche axiomatique permet de mettre en évidence la notion de successeur et de construire l'ensemble des entiers naturels de proche en proche ainsi que d'établir les propriétés de l'addition. La propriété relative à l'ordre total sur l'ensemble des entiers naturels et la régularité de l'addition permettent de définir la soustraction sur l'ensemble des entiers naturels et d'établir ses propriétés.

- **Théorème et définition de la soustraction sur l'ensemble des entiers naturels**

La soustraction dans l'ensemble des entiers naturels est l'opération qui, à tout couple d'entiers (\mathbf{n}, \mathbf{m}) tel que $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$ associe l'unique entier naturel \mathbf{p} vérifiant l'égalité $\mathbf{n} = \mathbf{m} + \mathbf{p}$.

En effet, un tel nombre existe car \leq est un ordre total et il est unique par la propriété de régularité de l'addition (P5). Il est alors noté $\mathbf{p} = \mathbf{n} - \mathbf{m}$.

- **Propriétés de la soustraction sur les entiers naturels**

Puisque cette opération n'est pas définie sur un domaine symétrique, la question de la commutativité ne se pose pas. En revanche la soustraction possède un certain nombre de propriétés sur l'ensemble des entiers naturels qui proviennent directement de celles de l'addition :

- ✓ **(S1)** : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}) \mathbf{n} - \mathbf{0} = \mathbf{n}$

- ✓ **(S2) : pour soustraire un nombre à une somme, on peut soustraire ce nombre à l'un ou l'autre des termes de la somme.**

Cela se traduit, pour n, p et q entiers tels que les différences introduites aient un sens, c'est-à-dire $p \geq q$ et $n \geq q$ par : $(n + p) - q = n + (p - q) = (n - q) + p$.

- ✓ **(S3) : une différence ne change pas si on ajoute ou si on soustrait le même nombre aux deux termes de la différence. Cette propriété est aussi connue sous le nom de propriété de conservation des écarts.**

Cela se traduit pour p, q et r entiers tels que les différences introduites aient un sens, c'est-à-dire pour $p \geq q$ par : $(p + r) - (q + r) = p - q$ et pour $p \geq q, p \geq r$ et $q \geq r$ par : $(p - r) - (q - r) = p - q$.

- ✓ **(S4) : pour soustraire une somme à un nombre, on peut soustraire le premier terme au nombre puis le second au résultat.**

Cela se traduit, pour n, p et q entiers tels que les différences introduites aient un sens, c'est-à-dire pour $n \geq p + q$ et $n \geq p$ et $n - p \geq q$ par : $n - (p + q) = (n - p) - q$.

Pour conclure, l'axiomatique de Peano est un puissant moteur pour le développement des mathématiques. Il permet d'établir en « interne », sans référence au réel, les définitions et les propriétés des nombres entiers et des opérations. A ce sujet, un mathématicien du XXème siècle, Lebesgue, s'oppose à un enseignement qui serait précocement centré sur les « mathématiques pures ». Dans le paragraphe suivant, nous présentons quelques unes de ses idées fortes.

II.4. Nombres entiers et addition selon Lebesgue (1915)

Lebesgue (édition originale 1915) explique dans son ouvrage « Théorie de la mesure » qu'il va s'occuper de la mesure des grandeurs car pour lui il n'y a pas de sujet plus fondamental. La mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques, or, les mathématiques appliquées ont précédé les mathématiques pures et la logique mathématique. Il préconise ce qu'il faut enseigner dans le primaire, le secondaire et le supérieur :

« C'est le sens aigu de la réalité qu'il faut s'efforcer de développer chez les jeunes ; après, mais après seulement, le passage à l'abstrait peut-être profitable ; lorsque sous l'abstrait on continue à savoir voir le concret et, dans le général, tous les cas vraiment utiles. » (Lebesgue, 1975, p. 2)

Cette nécessité de partir du concret viendrait de l'intérêt du pragmatisme des mathématiques. A titre d'exemple, Lebesgue évoque la construction des nombres entiers. Les hommes, quand ils ont voulu comparer deux collections, en sont arrivés à compter, c'est-à-dire à comparer les deux collections à une même collection type, la collection des mots d'une certaine phrase, les mots employés étant appelés nombres, le dernier mot prononcé correspondant au cardinal de la collection.

« Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet. » (Ibid., p. 3)

Les règles des opérations seraient alors des moyens de nous dispenser des opérations de dénombrement pour certaines collections qui seraient formées à partir de collections déjà dénombrées. Certains faits que l'on énonce comme des théorèmes ou des propriétés, se démontreraient avant tout comme des vérifications expérimentales. C'est le cas pour la commutativité de l'addition, car le cardinal attaché à une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range, en les comptant, les objets de la collection.

Pour Lebesgue, l'arithmétique a pu être édifiée car on dispose d'une définition complète du nombre, la description de l'opération qui le fournit. A cette définition expérimentale, les hommes ont ajouté une mystique et une métaphysique, mystique qu'on n'enseigne pas à l'école et métaphysique qu'on a par tradition, par respect envers les mathématiques grecques, continué à présenter, d'autant plus que cette métaphysique confère un caractère de noblesse à l'arithmétique. Pourtant, pour Lebesgue, l'arithmétique, même si les hommes dans leur aspiration vers l'absolu en avaient fait « la science parfaite par excellence », reste avant tout une science expérimentale, « la moins imparfaite de nos sciences ». Sa supériorité vient du fait qu'elle n'utilise qu'un petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme depuis qu'il y a des hommes. De plus :

« Nous savons, sans hésitation, dans quel cas l'arithmétique s'applique, dans quel cas elle ne s'applique pas. » (Ibid., p. 5)

Pour illustrer son propos, Lebesgue considère une cage dans laquelle on met deux animaux et encore deux animaux et montre qu'il n'est pas possible de compter combien la cage contient d'animaux, car on ne sait pas si la collection est immuable, si chaque objet garde son individualité, s'il n'y a pas d'objets qui apparaissent ou disparaissent. Par contre, il affirme que :

« dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est simplement grâce à un axiome ou deux que deux et deux font quatre. » (Ibid., p.6).

tout en montrant que ce genre d'exposé n'élucide pas la notion de nombre. La notion de nombre requiert l'expérience relative aux collections et les recommandations, qui consistent à ne pas confondre le nombre et le symbole qui le représente, sont inutiles avant d'aborder les études supérieures. Pour Lebesgue, après avoir expliqué ce qu'est compter, il conviendrait de donner la suite des nombres, c'est-à-dire d'exposer la numération décimale écrite et de l'utiliser.

« Le nombre écrit suivant la numération décimale, est un objet concret sur lequel de jeunes cerveaux raisonnent plus facilement. » (Ibid., p. 9)

Ce nombre « *plus général* » que le nombre entier s'obtient en comparant des distances à un multiple d'une unité, puis à des multiples d'un dixième d'unité, d'un centième d'unité, ... Ce nombre peut encore être considéré comme le compte rendu complet de cette suite indéfinie d'opérations dont il est le résultat. On passe ainsi de la notion d'entier à celle de décimal exact et de rationnel, et tout aussi naturellement, des opérations sur les entiers aux opérations sur les nombres « généraux ». On définit ces opérations géométriquement, en introduisant par exemple un segment somme et un segment différence de deux autres, dont on trouve la longueur. Les définitions des opérations suggérées par l'expérience sont ensuite posées de « *façon logique* ».

En conclusion : L'approche du nombre et des opérations proposée par Lebesgue pousse à « sortir » du cadre numérique pour introduire dans le cadre de la mesure des grandeurs, la notion d'écart, puis la propriété de conservation des écarts par translation. C'est du moins cette idée que nous avons retenue et cherché à développer en poursuivant notre travail de recherche. Mais présentement, venons-en aux savoirs de référence propres à l'enseignement du calcul.

III. Étude des savoirs à enseigner de référence

Nous avons fait le choix avant même d'aborder les savoirs à enseigner de référence sur le calcul mental et posé en colonne (techniques, ostensifs, ...) de commencer cette partie en précisant les raisons qui motivent l'enseignement du calcul. Nous pensons, sur un plan « global », à sa valence épistémique (Artigue, 2005) et, sur un plan local, à une approche cognitive des structures additives (Vergnaud, 1990).

III.1. Les raisons d'enseigner le calcul additif et soustractif

Tournès²⁴ (2007) émet l'hypothèse que certains enseignants du primaire sont peu attachés au calcul sous toutes ces formes (mental, instrumenté et posé) car ils méconnaissent le rôle essentiel du calcul dans le développement des mathématiques, tant pour la création de nouveaux concepts abstraits que dans l'application en retour des mathématiques à la réalité. Il donne alors des repères historiques qui permettent de saisir l'évolution du calcul et de sa nature et retrace l'histoire de quelques calculs célèbres effectués par des mathématiciens de génie comme Newton, Gauss et Connes, médaille Fields en 1982.

L'expression « calcul » vient, selon lui, du mot latin “ calculus ” qui renvoie aux cailloux que les romains utilisaient pour compter. Bien avant les Romains, les Babyloniens utilisaient également des cailloux, comme en témoignent les premières traces de comptage, contemporaines de l'invention de l'écriture, vers 3000 ans avant J.-C. Le calcul, fort de cette origine, est de nos jours encore, souvent associé au dénombrement de quantités discrètes (calcul sur les nombres entiers naturels) et à la mesure des grandeurs (calcul sur les fractions, sur les nombres décimaux et sur les nombres sexagésimaux). Cependant, une seconde approche, à travers les siècles, plutôt interne aux mathématiques s'est développée. Tournès, l'évoque en partant d'une proposition de définition élaborée par Rouche (2007) :

« Calculer, c'est combiner des symboles suivant des règles dans un but déterminé. » (Rouche, 2007, p.679)

Cette définition a l'avantage de s'appliquer à différents types de calculs (calcul numérique, calcul algébrique, calcul tensoriel, calcul matriciel, calcul intégral, etc.) qui opèrent sur différents ostensifs (symboles). Elle permet aussi de distinguer deux aspects du calcul. Le premier qui consiste à choisir et ordonner les opérations pour arriver à la solution du problème, et le second qui consiste à effectuer le calcul en respectant et en appliquant des règles. C'est sur l'explicitation de ces règles et la mise en avant des savoirs mathématiques en jeu dans un calcul que nous allons revenir dans le paragraphe suivant, en évoquant un principe fondateur, celui de la valence épistémique du calcul pour motiver l'enseignement de celui-ci.

²⁴http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Formation_continue_enseignants/13/0/actes_maths_primaire_110130.pdf (consulté le 13 juillet 2016)

III.1.1. La valence épistémique du calcul

Artigue (2005) convoque ce qu'elle définit comme étant l'intelligence du calcul en ces termes :

« Associer intelligence et calcul peut sembler à première vue étrange, le mot « calcul » renvoyant plus communément à une activité mécanique, automatisable, de plus en plus déléguée d'ailleurs à des machines. C'est avoir là, me semble-t-il, une vision très restrictive de ce que constitue réellement l'activité de calcul en mathématiques, de la diversité de ses facettes, des formes d'intelligence qu'elle nécessite, qu'il s'agisse de choisir les représentations des objets les mieux adaptées aux calculs que l'on souhaite mener, d'organiser et gérer ce calcul dès qu'il ne relève pas de la simple routine, d'en anticiper, interpréter ou contrôler les résultats » (Artigue, 2005, p.1)

Son analyse permet de distinguer, en premier lieu, le calcul au sens courant, que l'on exécute avec ou sans calculatrice, non pas à des fins propres mais pour trouver un résultat. C'est le calcul qui permet à la boulangère de rendre la monnaie, le calcul qui permet au banquier d'octroyer un prêt, le calcul que chacun exécute au plus vite et sans erreur, en mettant en œuvre ses compétences calculatoires. Cette activité est tellement banalisée, répandue qu'on a tendance à occulter *l'activité de calcul en mathématiques*. Or, cette activité est riche, et revêt plusieurs *facettes*. Nous mentionnons, pour commencer, celle qui consiste à résoudre un calcul comme on résout un problème.

Pour développer cette idée, nous pensons à une situation de classe où un maître de Cycle III, deuxième année demande à ses élèves, qui ne connaissent pas encore la technique de la multiplication par un nombre à deux chiffres mais connaissent la technique de la multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre et savent multiplier par dix, de trouver le résultat de 45×89 . Oui, il y a intelligence de calcul quand l'élève pense que multiplier 45 par 89, c'est multiplier 45 par 90 et soustraire 45. Il y a aussi intelligence du calcul si l'élève pense à multiplier 45 par 80 et à ajouter au résultat le produit de 45 par 9. Dans les deux cas, l'élève a *« choisi les représentations des objets les mieux adaptées aux calculs »*, dans le premier cas, il a décomposé 89 en $90 - 1$, dans le second, il a décomposé 89 en $80 + 9$. Ces choix, en l'occurrence, ne sont pas exhaustifs, il aurait aussi pu considérer 45 comme le produit de cinq par neuf et utiliser ensuite l'associativité de la multiplication en calculant : $9 \times (5 \times 89)$. Il a ensuite *« organisé et géré ce calcul »* en combinant plusieurs opérations qu'il maîtrisait.

Une autre facette de l'activité de calcul, qui intervient dans l'exemple traité ci-dessus est :

« le rôle que joue le calcul dans la conceptualisation des objets mathématiques qu'il engage, l'appréhension de son potentiel épistémique, au delà de son potentiel pragmatique de production de résultats ». (Ibid., p.1)

En effet, les deux premières démarches proposées pour trouver 45×89 ont permis de « revenir » sur le sens de 89 . 89 correspond à huit dizaines et neuf unités ou encore à dix dizaines moins une unité. Le reste du calcul repose sur la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction. Le fait de décomposer le calcul, permet d'explicitier les propriétés des nombres et des opérations qui interviennent au-delà de la recherche du résultat. Cela renforce la valence épistémique du calcul.

En conclusion, le rôle primordial que joue le calcul dans la conceptualisation des objets mathématiques est un principe fondateur, qui motive l'enseignement du calcul à l'école élémentaire. Nous allons dans le paragraphe suivant, étudier au niveau local, celui du calcul additif sur les entiers naturels, un autre aspect qui renforce la nécessité d'étudier à l'école primaire le calcul additif et soustractif sur les entiers naturels.

III.1.2. La structure des situations additives

Vergnaud (1990) a établi une typologie des situations additives et mis ainsi, en évidence six catégories, à partir desquelles il est possible d'engendrer tous les problèmes d'addition et de soustraction de l'arithmétique élémentaire :

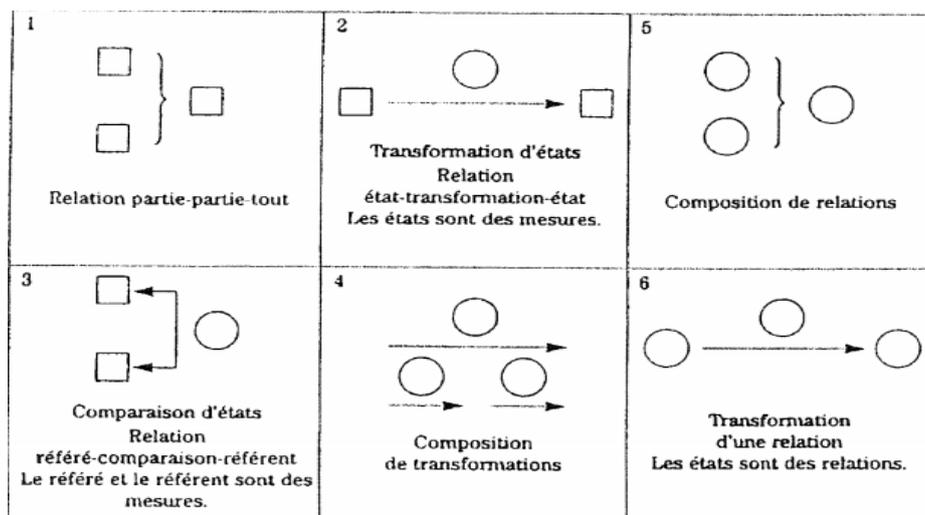


Figure 2.1 : Classement des problèmes additifs selon Vergnaud (1990)

Il insiste sur le fait que la rencontre d'un sujet avec un problème issu d'une classe spécifique n'évoque pas chez un individu tous les schèmes disponibles²⁵. Dans le cas de la soustraction, Vergnaud (1990) établit que le rapport au sens se construit dans la durée. Pour le jeune enfant, la première conception correspondrait à une « *diminution* » d'une quantité initiale, par consommation, perte ou retrait. A partir d'une telle conception, il ne sera pas immédiat de comprendre, la soustraction comme un « *complément* », ou à l'inverse comme une « *augmentation* », comme une « *comparaison* » ou encore une « *différence entre états successifs* ». En effet, chacune de ces situations mobilise une conception différente, suppose un calcul relationnel distinct, et pourtant tous ces calculs aboutissent aux choix de la même opération arithmétique : la soustraction. Il montre aussi, l'importance des schémas comme représentations symboliques car ceux-ci facilitent la communication et permettent d'identifier des situations que les élèves distinguent, alors que la représentation algébrique fait perdre beaucoup d'informations, parce qu'elle identifie sous les mêmes signes +, - et = des concepts élémentaires relativement différents à la base.

Il suggère qu'il ne faut pas prendre pour objets d'étude des objets trop petits, mais bien au contraire des champs conceptuels assez larges :

« Un champ conceptuel étant défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion. » (Vergnaud, 1989-1990, p.62)

Dans le cas du calcul soustractif, l'ensemble des situations ne met pas en jeu qu'un seul concept mais peut impliquer les concepts de mesure, de comparaison, de transformation, de nombre entier, d'abscisse et d'autres encore. Les procédures sont variées et peuvent prendre appui sur le dénombrement ou être imagées, calculatoires. Les représentations symboliques sont en étroite connexion. On peut associer à un diagramme sagittal, une addition, une soustraction ou une addition à trou. On peut aussi symboliser l'addition et la soustraction par les schémas présentés dans le tableau précédent, où on voit clairement apparaître l'état initial, l'état final et la transformation.

²⁵ Son approche permet de mettre en exergue deux éléments essentiels, celui de « *situation* » et celui de « *schème* ». Le premier, celui de situation est à entendre avec le sens qu'on lui accorde en psychologie. En se référant à cette science, on étudie les situations, indirectement, car, on étudie les processus cognitifs et les réponses du sujet qui sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés. Le second, le concept de schème, emprunté à Piaget, est une totalité organisée, qui permet de générer une classe de conduites différentes. Il comporte des invariants opératoires qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation, et la prise d'informations sur la situation à traiter, des anticipations du but à atteindre, des règles d'action, des inférences.

La classification des situations additives permet, entre autre, d'interroger les liens entre addition et soustraction au niveau même du calcul. Le lien, comme l'a montré Vergnaud, n'est pas immédiat et se construit suivant les individus, à plus ou moins long terme. Calculer, $43 - 39$, en cherchant à résoudre $39 + ? = 43$ et réciproquement, n'est pas immédiat mais peut devenir, comme nous allons le voir dans l'étude qui suit, un des objectifs de l'enseignement du calcul mental ou en ligne.

III.2. L'enseignement des techniques de calcul mental

Calculer mentalement ne signifie pas calculer rapidement, facilement et exclusivement mentalement. L'usage du papier et du crayon, la nécessité de s'appuyer sur des écrits intermédiaires est envisageable et parfois même recommandée. Avec cette définition, le calcul en ligne est un cas particuliers du calcul mental.

L'enseignement et l'apprentissage du calcul mental ont évolué durant ces vingt dernières années. De nombreuses études, depuis celle de Fuson et al.(1997), ont été conduites aux Etas Unis, en Chine, en Australie, aux Pays Bas, en Allemagne, en Belgique, en France et dans de nombreux autres pays.

“These studies have documented the frequent and varied nature of children's and adults' use of (informal) strategies for mental computation that depart from the formal written algorithms taught in school.”
(Verschaffel, Greer & De Corte, 2007, p.569)

Nous allons, dans un premier temps en nous appuyant sur ces études, préciser les enjeux du calcul mental puis introduire les notions de flexibilité et d'adaptabilité qui lui sont associées. Pour développer notre propos, nous exposerons différents classements relatifs aux techniques de calcul mental et présenterons des dispositifs expérimentaux visant à montrer l'usage qu'en font les élèves en classe.

III.2.1. Les enjeux de l'enseignement du calcul mental

Threlfall (2002) et Klein, Beishuizen & Treffers (1998) s'accordent à noter que la place de l'enseignement du calcul mental, aux Pays Bas dans les années 1990, en Angleterre et au Pays de Galles dans les années 2000, est devenue d'autant plus importante que des évaluations²⁶, que l'on pourrait qualifier d'officielles ou règlementaires, ont été mises en

²⁶ Au Pays Bas, c'est suite au constat que 55% des élèves de 3^{ème} année arrivaient à calculer mentalement sans se tromper $64-28$ et usaient de peu de flexibilité que la réforme de l'enseignement des mathématiques Réalistes

œuvre, généralement à partir de la 3^{ème} année de l'école élémentaire. En France, on constate, d'après le rapport Durpaire²⁷ (2006), que l'enseignement du calcul mental a toujours été préconisé avant et après la réforme.

Pour Thompson (1999), le calcul mental fait appel au '*working in your head*' (*recalling facts*) and '*working with your head*' (*figuring out*). En calculant mentalement, on est amené à utiliser « sa tête » en faisant appel à sa mémoire, et encore « sa tête » pour réfléchir afin de trouver une procédure en fonction du calcul en jeu.

“Mental strategies are more about the application of known or quickly calculated number facts in combination with specific properties of the number system to find the solution of a calculation whose answer is not known.”
(Thompson, 1999, p.2)

Boole (1994-1995), en explicitant les connaissances et les capacités²⁸ mises en œuvre par un enfant qui effectue un calcul mentalement, évoque également, en premier lieu, le choix de la stratégie, qui est inhérente à toute résolution de problème, l'appel à la mémoire, l'organisation des faits numériques mais précise que les propriétés opératoires interviennent aussi.

De ces deux approches similaires et complémentaires, nous retiendrons que le calcul mental consiste à chercher une stratégie basée sur l'application de résultats connus ou retrouvés rapidement, en combinaison avec l'utilisation des propriétés spécifiques du système de numération décimal, des nombres et des opérations.

III.2.2. Notions de flexibilité et d'adaptabilité

Mais que se passe-t-il réellement en classe ? Comment les élèves réagissent-ils quand ils ont à effectuer un calcul de tête? Butlen & Charles-Pézard (2007) donnent des résultats concernant les procédures des élèves de fin de cycle 2. Ils constatent que les élèves à qui « on n'a pas appris à faire autrement », privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête. En second lieu, ils utilisent les procédures qui supposent une décomposition canonique des

(RME) a décidé dans les années 1990, de fixer le calcul mental comme un objectif fondamental et de retarder l'enseignement du calcul posé. Klein, Beishuisen, Treffers (1998)

En Angleterre et au pays de Galles, des changements dans les programmes ont eu lieu depuis 1998 quand des tests ont été prévus pour les élèves de 11 et 14 ans Threlfall (2002).

²⁷ « *Le calcul a une place primordiale. Le calcul mental en particulier est très présent dans les quatre programmes de l'école primaire édités après 1970 et l'exigence de connaître les tables est soulignée.* »
(Durpaire, p.12).

²⁸ « Le calcul mental est instructif à plus d'un titre, il l'est pour l'enfant, puisqu'il exerce les ressources de la mémoire, l'organisation des faits numériques, et l'aspect stratégique que l'on trouve dans toute résolution de problème qui n'est pas le produit immédiat d'un algorithme. » (Boole, 1994- 1995, p.40)

deux nombres et, en dernier lieu, « inventent » des procédures qui mobilisent des décompositions additives ou soustractives. Les élèves préfèrent donc des procédures sûres et sont peu à l'aise avec les calculs qui nécessitent, par exemple, un passage à la dizaine. Les auteurs en déduisent un défaut d'adaptabilité et de connaissances. Les élèves en difficulté²⁹, encore plus que leurs camarades, méconnaissent les faits numériques (tables d'addition, table de soustraction, compléments à dix, ...) et les propriétés du système décimal. De plus, l'habitude d'avoir recours systématiquement à une et une seule procédure, basée sur la décomposition canonique des deux nombres, les rend de plus en plus habiles avec celle-ci (du moins dans le cas de calcul additif, avec des nombres inférieurs à cent) car la gestion « mentale » de la retenue ne pose pas trop de problème et le surcomptage (à l'aide des doigts) permet de trouver les résultats intermédiaires. Ils ne chercheront probablement pas à effectuer³⁰ $45 + 17$ en calculant $45 + 20 - 3$ ou $45 + 5 + 12$.

Les auteurs introduisent « *le paradoxe de l'automatisme* » qui peut se résumer ainsi :

« Trop peu d'automatismes (au sens de trop peu de procédures automatisées) peut renforcer l'automatisme (au sens du comportement automatisé). Davantage d'automatismes peut permettre d'échapper à l'automatisme »³¹.
(Butlen & Charles-Pézard, 2007, p.10)

Cette conclusion met en avant la nécessité d'enrichir les connaissances numériques des élèves, et de rendre plus systématique l'usage d'une pluralité de techniques de calcul, afin d'éviter l'automatisation de l'une d'entre elles.

Threlfall (2002) pense d'ailleurs que c'est une idée commune que de vouloir, pour atteindre la flexibilité, enseigner différentes méthodes de calcul, puis enseigner le meilleur choix à faire. Il défend quant à lui une autre idée :

“I will go on to argue that flexibility in mental calculation is better approached through teaching that focuses on the number knowledge and understanding that is drawn on when calculating” (Threlfall, 2002, p.32)

Pour Threlfall, face à un calcul nouveau, l'élève ne cherche pas quelles sont toutes les procédures qu'il peut utiliser pour déterminer « la meilleure » mais il considère les nombres

²⁹ « Un élève est en difficulté quand il échoue par exemple à un niveau donné à une évaluation réussie par 80% des ses pairs » (Butlen & Charles-Pézard, 2007, p. 8).

³⁰ Nous verrons dans un autre paragraphe la typologie des procédures. Celle basée sur la décomposition canonique est notée « 1010 » ($45+17=40+5+10+7$), celle qui consiste à « passer par » la dizaine supérieure de 45 est notée « A10 » ($45+17=45+5+12$), celle qui consiste à arrondir 17, basée sur la compensation est notée « N10C » ($45+17=45+5+12$).

présents et remarque certaines de leurs caractéristiques ou les nombres « voisins », et choisit éventuellement de décomposer ou d'arrondir. Chaque élève a donc son propre cheminement qui dépend de ce qu'il observe et retient en fonction de ses propres connaissances. La stratégie choisie dépend de ce que l'individu sait et convoque. Elle est bien évidemment influencée par l'expérience, mais elle « émerge » au cours de la résolution.

“The solution path taken may be interpreted later as being the result of a decision or choice, and be called a 'strategy', but the labels are misleading. The 'strategy' (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges.” (Ibid., p.42)

In fine, nous retenons que la stratégie est initiée par une démarche analytique, construite à partir des données du calcul et non pas alternative, basée prioritairement sur la connaissance de plusieurs procédures de calcul.

Heinze, Star & Verschaffel (2009) notent que cette question de procédures, de stratégies en calcul est beaucoup étudiée depuis une dizaine d'années et qu'il est d'usage dans les recherches actuelles d'évoquer les notions de flexibilité et d'adaptabilité³². La flexibilité renvoie au fait que les élèves soient en mesure de choisir entre plusieurs techniques pour effectuer un calcul, et l'adaptabilité au fait que ce choix soit le plus pertinent possible. Dans le cas du calcul additif, plusieurs recherches ont eu pour objet de répertorier puis classer les procédures utilisées par les élèves. Nous allons présenter leurs résultats, avant d'aborder la question de l'évaluation de l'adaptabilité du calculateur.

III.2.3. Classements des techniques de calcul mental additif

Nous retenons quatre classifications proposées par Fuson et al. (1997), Carpenter et al. (1998), Klein, Beishuizen & Treffers (1998) et Thompson (1999). Pour chacune d'entre elles, les chercheurs ont défini des classes assez larges qui permettent d'identifier puis d'analyser les procédures usuelles, employées par les élèves, tout en obtenant un ensemble cohérent et significatif, assez simple d'utilisation. A l'origine, l'intention des chercheurs était différente. Fuson, par exemple, a cherché en quoi les conceptions différentes qu'avaient les élèves du nombre pouvaient jouer sur leurs procédures, pour ajouter ou soustraire un nombre à un chiffre puis à deux chiffres. Carpenter s'est intéressé aux procédures spontanées des élèves en

³² En France, on parle plutôt de calcul réfléchi si on se réfère au « calcul mental », documents d'accompagnement des programmes de 2002. « Les expressions “calcul réfléchi” et « calcul raisonné », considérées comme équivalentes, sont clairement préférables à celle de “calcul rapide”, autrefois en usage. Elles insistent sur l'importance donnée à la méthode (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure) plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes. p.3

opposition à l'utilisation d'algorithmes standards. Klein et Thompson aux conditions d'enseignement, permettant de développer, chez les élèves, une plus grande flexibilité.

Afin d'évoquer précisément les différentes classifications, nous avons repris les données obtenues par Threlfall (2002), présentées dans le tableau ci-après. Il semble probable que la plupart des procédures puissent être, d'après le chercheur, celles auxquelles on pourrait s'attendre en questionnant des élèves d'une même tranche d'âge (9-10 ans), ayant suivi un enseignement « équivalent »³³. On peut donc les qualifier de procédures représentatives. Les calculs sont donnés dans un format standard qui permet de montrer les différentes étapes et de faciliter la comparaison. Le codage par une lettre permet d'évoquer simplement chacune d'entre elles et de les référencier, par la suite dans la classe qui convient.

A	40 + 40	5 + 8	80 + 13	
B	40 + 40	80 + 8	88 + 5	(perhaps as 88 + 2 then 90 + 3)
C	45 + 40	85 + 8		(perhaps as 85 + 5 then 90 + 3)
D	45 + 8	53 + 40		(or 48 + 5 then 53 + 40)
E	45 + 50	95 - 2		(or 48 + 50 then 98 - 5)
F	45 + 45	90 + 3		(or 48 + 48 then 96 - 3)
G	50 + 50	100 - 7		(perhaps as 100 - 2 then 98 - 5)
H	48 + 2	50 + 43		(or 45 + 5 then 50 + 43)

Figure 2.2 : techniques « représentatives » pour effectuer $45 + 48$ Threlfall (2002)

Fuson et al. (1997, p 146) classent les différentes méthodes employées par les élèves en quatre catégories:

- méthodes qui commencent par un nombre et consistent ensuite à ajouter ou enlever les dizaines et les unités isolées de l'autre nombre [C et D] ;
- méthodes qui décomposent les deux nombres en dizaines et unités et où les calculs sont traités séparément [A] ;
- méthodes mixtes dans lesquelles les dizaines sont ajoutées ou soustraites, puis la séquence se poursuit en ajoutant ou enlevant les unités isolées [B] ;
- méthodes dans lesquelles les deux nombres sont modifiés pour rendre plus facile le calcul [G].

Carpenter et al. (1997, p 4) pensent à une classification à trois voies :

- « *Sequentiel* », dans laquelle le premier nombre n'est pas modifié "[C et D] ;

³³ L'article ne précise pas la nature de l'enseignement dispensé aux élèves ni les conditions de passation du test.

- «*Combining units separately*», dans laquelle les dizaines et les unités sont traitées séparément, puis combinées [A] ;
- «*Compensating* » dans laquelle les nombres sont ajustés pour simplifier le calcul.» [E, F et G].

Klein et al. (1998) énumèrent cinq classes:

- '*1010*', dans laquelle les dizaines et les unités sont scindées et traitées séparément [A].
- '*N 10*' dans laquelle les dizaines du second nombre sont ajoutées ou soustraites au premier nombre, puis les unités isolées sont ajoutées ou soustraites " [Cet D].
- '*A 10* ', dans laquelle le second nombre est décomposé pour fournir une quantité qui transforme le premier nombre à la dizaine supérieure ou inférieure, puis le reste du second nombre est ajouté ou soustrait [H].
- '*N10C*' dans lequel le second nombre est arrondi à la dizaine, qui est ensuite ajouté au premier nombre, avec un ajustement ultérieur, ou de compensation [E].
- '*10s*', dans laquelle les deux dizaines sont traitées, puis ajoutées ou soustraites et où le calcul se poursuit séquentiellement [B].

Thompson (1999) propose quatre principales classes de méthodes :

- La méthode «*split* » qui consiste à décomposer chaque nombre en dizaines et en unités isolées, puis à traiter séparément et recombinaison les dizaines et les unités [A].
- La méthode «*jumb*» qui consiste à décomposer un seul nombre en dizaines et en unités, puis à ajouter à l'autre nombre, la quantité de dizaines, puis les unités restantes ou réciproquement [C et D].
- La méthode «*split-jumb* » qui combine la «décomposition » et les méthodes «saut», dans laquelle les deux nombres sont décomposés, les dizaines sont combinées, puis par saut un nombre d'unités isolées est ajouté et encore un autre [B].
- La méthode «*over-jumb* » ou «*compensation*» consiste à arrondir un nombre à un multiple de dix puis à ajouter et soustraire la valeur de l'arrondi [E].

Analyse

Nous retrouvons dans chaque classement toujours deux catégories communes :

- L'une de ces catégories regroupe les techniques qui décomposent les deux nombres en dizaines et unités isolées et où les calculs sont traités séparément (qui correspondent à la procédure [A]).

Méthodes dénommées « Combining units separately », « split » ou « 1010 » suivant les chercheurs.

- L'autre catégorie regroupe les techniques qui laissent « inchangé » le premier nombre et qui consistent à ajouter ou soustraire les dizaines et les unités isolées de l'autre nombre (qui correspondent aux procédures [C et D]).

Méthodes dénommées « séquentiel », « jumb » ou N10.

Fuson est la seule à créer une classe où on distingue les méthodes dans lesquelles les deux nombres sont modifiés pour rendre plus facile le calcul.

Carpenter quant à lui regroupe toutes les méthodes qui consistent à changer un ou deux nombres afin de simplifier le calcul en une seule catégorie qu'il nomme « Compensation » [E, F et G].

Les méthodes mixtes évoquées par Fuson sont reprises par Thompson qui les nomme les méthodes «split-jumb » et par Klein et Beishuizen qui les nomment « IOs ». Elles combinent la «décomposition » et les méthodes « de saut », car les deux nombres sont décomposés en dizaines et unités puis les dizaines sont combinées, et, par deux sauts consécutifs, un nombre d'unités isolées est ajouté ou retranché.

Pour finir Thompson regroupe en une seule classe la méthode «over-jumb» ou méthode dite de «compensation» qui consiste à arrondir un des nombres en un multiple de dix puis à ajouter et soustraire la valeur de l'arrondi. Cette classe regroupe chez Klein et Beishuizen A1O et N1OC, dans lesquelles le second nombre est arrondi à la dizaine, qui est ensuite ajouté au premier nombre, avec un ajustement ultérieur, ou de compensation.

En conclusion, les classements proposés ont un nombre plus ou moins grand de catégories. Nous présentons dans le diagramme suivant, l'ensemble des classes évoquées et leurs dénominations, quand elles existent.

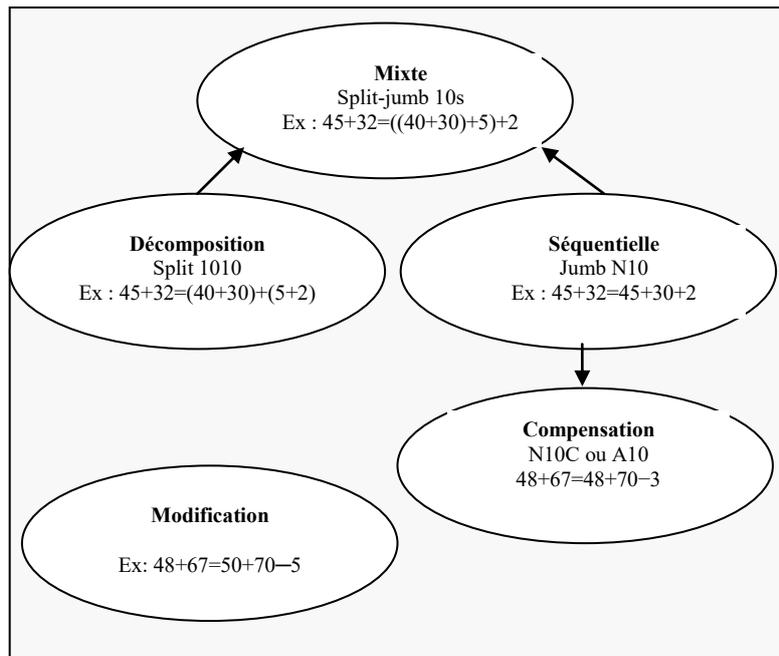


Figure 2.3 : Différentes classes de techniques de calcul mental additif Fuson et al. (1997), Carpenter et al. (1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999).

III.2.4. Proposition de classement pour le calcul soustractif

A partir des résultats de recherche évoqués au paragraphe précédent, qui traite essentiellement de calcul additif³⁴, nous définissons un classement de techniques soustractives en nous réservant le choix de le modifier légèrement, quand nous construirons l'organisation mathématique de référence, qui contient en plus des « techniques », les types de tâche, les ostensifs et les éléments de technologie.

Nous nous sommes rapprochée des notations choisies par Klein et Beishuizen (1998), quand cela était possible, car ces notations avec l'utilisation du nombre *10* (prononcez *dix*) ou *1010* (prononcez *dix-dix*) évoquent l'aspect décimal et l'aspect positionnel du système de numération écrit avec des chiffres.

- Les techniques τ_{1010} et $\tau_{(1010)}$, basées sur la décomposition canonique ou non, vont consister à décomposer les deux nombres, d'où l'idée d'écrire deux fois le nombre *10*.

Exemple : $53 - 21 = (50 - 20) + (3 - 1)$ ou $54 - 27 = (40 - 10) + (14 - 7)$

- La lettre *N* désigne le second nombre du calcul. La technique τ_{N10} (prononcez *N-dix*), séquentielle va consister à décomposer canoniquement *N*.

Exemple : $54 - 27 = 54 - (20 + 7) = (54 - 20) - 7$

³⁴ au vu du calcul proposé qui était $45 + 48$.

- La technique τ_{10N10} (prononcez *dix-N-dix*) va consister à utiliser τ_{1010} puis τ_{N10} d'où cette notation qui utilise la juxtaposition.

Exemple : $54 - 27 = ((50 - 20) + 4) - 7$ ou $54 - 27 = ((50 - 20) - 7) + 4$

- La technique τ_{N10C} (prononcez *N-dix-C*) dite de compensation va consister à utiliser un nombre pivot qui est une puissance de 10 supérieure à N (N désigne le second nombre du calcul). Le C est indiqué pour évoquer la compensation.

Exemple : $54 - 27 = (54 - 30) + 3$

- La lettre A désigne le premier nombre du calcul. La technique τ_{A10} (prononcez *A-dix*) consiste à utiliser un nombre pivot qui est une puissance de 10 inférieure à A.

Exemple : $54 - 27 = (54 - 24) - 3$

- La technique, qui repose sur la propriété de l'écart dite de « translation » est notée τ_{AN} (prononcez *A-N*) pour A premier nombre et N second nombre.

Exemple : $54 - 27 = 57 - 30$

- La dernière technique est notée $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$ car elle consiste à rechercher le résultat en effectuant une addition à trou. Exemple : $27 + ? = 54$

En conclusion, c'est à partir des quatre classements des techniques de référence sur le calcul mental additif, que nous avons construit un classement des techniques de calcul soustractif mental ou posé en ligne, qui intègre une technique faisant appel à la translation et à l'addition. Le tableau suivant récapitule l'ensemble des techniques éventuelles³⁵ pour effectuer un calcul du type 54-27.

Calcul de 54-27		
τ_{N10}	Séquentielle	$(54 - 20) - 7$
$\tau_{(1010)'$	Décomposition	$(40 - 10) + (14 - 7)$
τ_{10N10}	Mixte	$((50 - 20) + 4) - 7$ ou $((50 - 20) - 7) + 4$
τ_{A10} ou τ_{N10C}	Compensation	$(54 - 24) - 3$ ou $(54 - 30) + 3$
τ_{AN}	Translation	$57 - 30$
$\tau_{\text{SOUS/ADD}}$	Addition	$27 + ? = 54$

Figure 2.4: Techniques de calcul mental soustractives pour effectuer 54 - 27

³⁵ La seule technique non applicable est τ_{1010} .

III.2.5. Degré d'adaptabilité du calculateur

Des chercheurs, Rathgeb-Schnierer & Green (2013), cherchent à mesurer le degré d'adaptabilité que possède un élève. Pour cela, ils étudient, un calcul étant donné, quelles sont les caractéristiques et les relations que les élèves reconnaissent, et comment ils utilisent ces caractéristiques et ces relations pour l'effectuer. Le dispositif mis en place consiste à faire expliciter, individuellement à chaque élève, pourquoi tel calcul lui semble facile et tel autre lui semble difficile. Ils ont noté que certains élèves privilégient comme argument les nombres en jeu et leurs relations, alors que d'autres évoquent la procédure qu'ils utilisent pour effectuer le calcul. L'exemple suivant est donné et codé dans l'article :

*“ Two different students explained why $33+33$ is an easy problem:
S 1: Because there's the same numbers in each 'um space.
S 2: Because first I add 30 and 3, and then I add 3.”*
(Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, p.7)

Le premier élève (S1) a utilisé les caractéristiques des nombres et le second élève (S2) a évoqué la procédure de calcul. Les chercheurs arrivent ainsi à établir « un profil » de chaque élève et à « mesurer » sa flexibilité et son adaptabilité, sur une douzaine de calculs additifs et soustractifs.

Nous retenons ce dispositif expérimental qui s'effectue en trois temps :

- distinction entre calcul facile /difficile
- explicitation de l'argument qui permet de retenir un calcul comme facile ou difficile
- effectuation d'un calcul facile et d'un calcul difficile.

Le fait d'amener les élèves à expliciter la façon dont ils perçoivent le calcul (facile ou difficile) permet, entre autres, de voir s'ils se conduisent de manière monosémique ou s'ils interagissent avec le problème posé (nombres en jeu, relation entre les nombres, procédure standard, stratégie adaptée, ...). De plus, les échanges au moment de la synthèse permettront de constater que le même calcul peut être considéré comme facile pour quelqu'un et difficile pour quelqu'un d'autre, et que ce n'est pas toujours pour la même raison que nous jugeons telle chose facile ou difficile.

Une autre étude conduite par Torbeyns, Bert De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel (2009), cherche à savoir si les élèves ont tendance à utiliser une procédure par compensation (quand le nombre à ajouter ou à soustraire a, par exemple, 9 comme chiffre des unités) plutôt qu'une procédure séquentielle. Le dispositif que les chercheurs ont expérimenté est basé sur

« using the choice/no-choice method »³⁶. Dans la condition de choix, les élèves effectuent les calculs proposés en choisissant la procédure « a » ou « b », et dans la condition de non choix, ils utilisent une fois « a » et une fois « b » pour effectuer le calcul. Les conditions de non choix permettent de vérifier que les élèves « maîtrisent » chaque procédure « a » et « b » et évaluent leur dextérité avec chacune d’entre elles (précision de la réponse, temps mis pour trouver la solution). Le résultat obtenu est le suivant :

“Children seem to select this strategy only on the basis of the characteristics of the task, but not their individual strategy performance characteristics”
(Torbeys, Bert De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel, 2009, p.589)

Pour les chercheurs, l’expérimentation n’a pas montré de différence sensible entre la précision et la rapidité d’exécution entre les procédures « a » et « b ». Le fait que les élèves de l’expérimentation aient d’abord étudié la méthode séquentielle puis celle par compensation n’a pas eu d’influence. Cette question de savoir s’il faut étudier « a » et « b » dans un même temps ou attendre de maîtriser « a » pour rencontrer « b » est toujours ouverte.

Nous retenons ce dispositif, car il permet de s’assurer que l’élève maîtrise plusieurs techniques en l’occurrence deux (notion de flexibilité), pour effectuer un même calcul. Nous pensons intéressant de coupler les études de l’addition à trou et de la technique séquentielle, de la technique séquentielle et de la compensation, de la séquentielle et de la translation. Certains calculs permettront de relever les caractéristiques que l’élève repère dans la condition de choix (nombres proches entre eux, nombre à soustraire proche d’un multiple de dix), et donc de mesurer son degré d’adaptabilité.

En conclusion, en nous appuyant sur différentes recherches conduites sur l’enseignement du calcul mental, nous avons proposé un ensemble de techniques de calcul mental soustractif intégrant une technique par translation. Nous avons également analysé deux dispositifs expérimentaux qui mettent les élèves en situation de « réfléchir » avant d’effectuer un calcul et permettent de mesurer le degré de flexibilité et d’adaptabilité des élèves.

³⁶« using the choice/no-choice method” est un dispositif conçu par Siegler & Lemaire (1997) pour tester la flexibilité sur des calculs multiplicatifs. Les références se trouvent dans l’article de Torbeys, Bert De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel (2009)

III.3. L'utilisation des ostensifs

Dans ce paragraphe, nous indiquons les ostensifs qui permettent de désigner les nombres. Nous poursuivons en évoquant l'intérêt des arbres à calcul puis nous terminons en présentant et en questionnant l'introduction de droite(s) numérique(s) comme outil facilitateur de l'effectuation d'un calcul soustractif.

III.3.1. Les désignations des nombres

Les désignations de nombres se font au moyen de mots spécifiques de la langue parlée (un, deux, trois,...) de chiffres (0, 1, 2,..., 8, 9) et d'unités de numération (u, d, c, m) en respectant les règles de formation et d'écriture du système de numération parlée et du système de numération décimale.

« L'aspect positionnel (la valeur d'un chiffre dépend de sa position) et l'aspect décimal (la valeur d'un chiffre est dix fois supérieure à celle du même chiffre placé à sa droite immédiate - si c'est possible- et dix fois inférieur à celle du même chiffre placé à sa gauche immédiate) sont inséparables. »
(Perrin-Glorian, 2012, p.74)

Pour une étude plus poussée des systèmes de numération parlée et décimale, nous renvoyons le lecteur aux travaux de Mounier (2010) et de Tempier (2013). Nous présentons le système de codage que nous avons retenu et qui est repris dans le glossaire :

- La désignation langagière canonique correspond au nom du nombre, à l'écrit comme à l'oral, dans notre système de numération parlé usuel. Exemple : deux-cent-cinquante-quatre.
- L'écriture en chiffres d'un nombre (EC). Il s'agit de la désignation d'un nombre dans notre système de numération décimale. Exemple : 254.
- Les écritures additives d'un nombre (EA). Il n'y a pas unicité. Exemple : $254=231+23$; $254=127+127,...$
- L'écriture additive canonique d'un nombre (EAC). Ecriture additive canonique selon les puissances de dix. Il y a unicité. Exemple : $254=200+50+4$.
- Les écritures en unités de numération (EUN). Il n'y a pas unicité. Exemple : 254 s'écrit 2 centaines, 54 unités ou encore 2c54u en abrégé ou encore 25d4u.
- Les écritures en unités de numération canonique (EUNC). Il n'y a pas unicité car l'ordre peut changer. Le nombre d'unités de chaque rang est au plus égal à neuf. Exemple : 254 s'écrit 2 centaines, 5 dizaines, 4 unités (2c5d4u en abrégé) ou 5 dizaines, 2 centaines et 4 unités.

Utilisations potentielles des différentes désignations des nombres :

- Un calcul, qu'il soit donné oralement ou par écrit fait intervenir un type de désignation et mobilise des connaissances sur les nombres qui dépassent la reconnaissance auditive, visuelle des mots ou des chiffres.

- L'effectuation d'un calcul peut être simplifiée en écrivant les nombres donnés avec un autre type d'écriture, ce qui ne nécessite pas l'usage exclusif des écritures chiffrées (EC).

Exemple : Pour effectuer *deux cent cinq moins trente*, je peux effectuer 20d moins 3d plus 5u et trouver donc 17d5u soit le nombre *cent-soixante-quinze*.

- Les écritures additives (EA), les écritures additives canoniques (EAC) permettent de remplacer un calcul par un calcul équivalent.

$$345 - 23 = (300 + 40 + 5) - (20 + 3) = (300) + (40 - 20) + (5 - 3)$$

$$70 - 3 = (60 + 10) - 3$$

- L'écriture chiffrée donne immédiatement une écriture en écriture additive canonique (EAC) ou en écriture en unités de numération (EUC), et réciproquement, ce qui est très utile pour réécrire les calculs (voir exemples précédents).

- Quand deux entiers sont écrits en écritures chiffrées (EC), il est immédiat de repérer celui qui est le plus grand. On compare le nombre de chiffres des deux nombres. En cas d'égalité, on compare le chiffre de gauche.

- La propriété de troncature : le nombre d'unités de chaque ordre se lit directement sur l'écriture du nombre par troncature. Exemple : $350 - 70 = 35d - 7d$.

- Les techniques de calcul posées de l'addition et de la soustraction ne font intervenir que les écritures chiffrées des nombres, mais nécessitent que les nombres soient placés l'un sous l'autre et que les chiffres correspondant à un même rang soient alignés.

En conclusion : Nous avons présenté, en donnant des exemples d'utilisation au niveau du calcul, les différentes écritures des nombres. Dans le paragraphe suivant, nous évoquons un autre type d'ostensif qui utilise justement les écritures chiffrées des nombres ou éventuellement les écritures en unité de numération.

III.3.2. Les arbres de calcul

Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{array}{l} 78 - 6 = 70 + 8 - 6 \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \swarrow \\ \qquad \qquad \qquad = 70 + 2 \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \swarrow \\ \qquad \qquad \qquad = 72 \end{array}$$

L'arbre de calcul s'élabore en créant intentionnellement des branches, qui partent de certains nombres, choisis dans l'expression initiale. Une convention existe, qui permet, à partir de deux branches (et uniquement deux), d'obtenir, à l'étape suivante, un nœud. D'un nœud ne partira ensuite, éventuellement, qu'une seule branche. L'écriture et la lecture de l'arbre sont descendantes et remplacent une écriture obtenue avec des parenthèses. Pour Balman, (2001) :

« Parmi les graphes, ce sont essentiellement les arbres qui sont utilisés dans les manuels scolaires. Un des types d'arbre est l'arbre de calcul ou arbre d'opérateurs. Ce ne sont pas des objets d'enseignement mais des outils de visualisation des calculs. » (Balman, 2001, p.37)

C'est aussi dans ce sens, en tant qu'outil de visualisation du calcul, que nous pensons utile leur introduction dans l'effectuation de calcul soustractif. Dans le paragraphe suivant, nous présentons de manière plus approfondie l'utilisation des droites numériques, car beaucoup de travaux de recherche ont mesuré leur impact sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul mental.

III.3.3. Les droites numériques

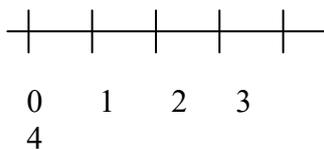
Teppo & Van den Heuvel-Panhuizen (2014) rappellent que les lignes de nombres « number lines », sont des éléments qu'il est fréquent de trouver dans le paysage scolaire de la maternelle au collège. Pour ces chercheurs, une ligne de nombres est un dispositif figuratif représentant des abstractions mathématiques particulières qui fonctionne avec différents types de nombres et permet de les penser. Il n'existe pas une omniprésente ligne de nombres qui correspondrait à toutes les tâches liées aux nombres. Toutefois, de nombreux enseignants, étant familiers avec seulement la ligne où les premiers nombres entiers naturels sont déjà en place, ne proposent que celle-ci et créent une dépendance qui occasionne des difficultés.

Les auteurs évoquent l'existence de cinq modèles de lignes de nombres et précisent sur quelle base, un modèle particulier est utilisé :

« *A particular number line model is part of a representational system organized to highlight patterns of relations among numbers and operations. Such a system consists of a set of representational units and labeling conventions, and a collection of rules that describes the ways of working within this representation.* » (Teppo & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014, p46)

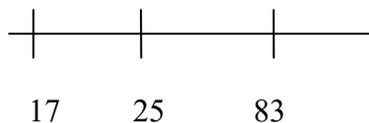
Pour chaque modèle, ils précisent donc : (1) les caractéristiques visuelles, (2) le type de nombres concernés, (3) la façon dont les nombres et les opérations sont représentés, et (4) le support didactique qu'une ligne de nombres fournit.

▪ *The filled number lines*



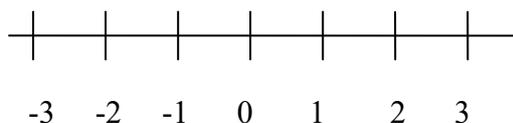
La ligne de nombres ou droite numérique « remplie », que nous nommerons par la suite la droite numérique graduée (DNG), est caractérisée par des points équidistants, ou des graduations, qui représentent les nombres entiers. Cette droite numérique graduée permet des séquences de comptage, de positionnement de nombres et l'exploration de la relation d'ordre entre les nombres.

▪ *The empty number lines*



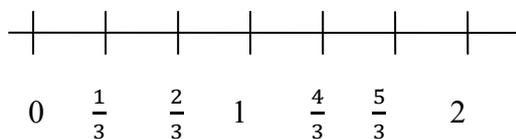
La ligne de nombres vide, ou droite numérique vide (DNV) met l'accent sur les aspects d'ordre entre les nombres. Les points ou les graduations ne sont pas également espacés. A partir d'un segment de ligne vide, on peut montrer une stratégie de calcul. On part d'un point positionné librement sur une telle ligne, puis on dessine une séquence de sauts pour représenter visuellement les étapes de la réalisation d'un calcul particulier.

▪ *The directed-length number lines*



La ligne de nombres orientée avec la notion de mesure permet de représenter les nombres entiers relatifs en traçant des segments orientés à partir de l'origine. C'est un support pour montrer le résultat des additions et soustractions d'entiers relatifs.

- *The rational number lines*



La ligne des nombres rationnels, s'obtient en divisant l'intervalle unité en sous-intervalles égaux. Les nombres sont représentés comme des points ou des graduations. Cette ligne s'apparente à une droite numérique graduée (DNG). Elle permet des séquences de comptage, de repérage et soutient la mise en place des fractions et des fractions décimales.

- *The proportional and double number line*



La ligne de nombres proportionnelle avec double marquage se compose d'une seule ligne avec une double échelle qui affiche les points appariés. Elle sert pour raisonner sur une relation proportionnelle particulière entre plusieurs nombres.

En conséquence, les différentes formes de ligne mettent en avant les éléments fondamentaux, dans les conceptions sous-jacentes des nombres qui sont pris en charge. Nous ne nous intéressons, quant à nous, qu'aux deux premiers modèles, notre recherche étant limitée aux entiers naturels. Pour chacun de ces deux modèles, nous allons évoquer en détail certains résultats de recherche et expliquer en quoi ils nous permettent de nous positionner par rapport à l'emploi d'une ligne de nombres.

a) La droite numérique graduée

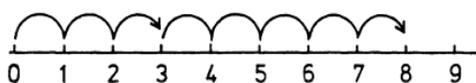
Beaucoup de recherches ont été conduites sur l'usage que les élèves faisaient de la *filled number lines*, que nous avons appelée la droite numérique graduée (DNG). Un des premiers résultats d'Ernest (1985) a été de montrer que l'utilisation de cet outil est loin d'être « évidente ».

“It may also be that because the number line model can be used to represent enactive procedures employed by young children its use is taken to be self-evident to children. The above discussion suggests that this is not the case.”
 (Ernest, 1985, p. 422)

Diezmann, Lowrie & Sugars, (2010)³⁷ confirment ce résultat en montrant que les élèves rencontrent de véritables difficultés pour localiser correctement des nombres entiers, quand une partie des graduations n’est pas représentée sur la ligne de nombres. Pour Doritou & Gray (2009), les enseignants eux-mêmes n’ont pas toujours une profonde compréhension des affordances et des contraintes de représentation présentes dans l’utilisation de certaines lignes de nombres, qui sont spécifiques à un contexte de tâches. La droite numérique vide (DNG) est cependant un outil qui peut permettre aux élèves de trouver le résultat d’additions et de soustractions « simples » comme nous allons le voir, et qui offre d’autres possibilités, dont certaines nous semblent exploitables au cycle 3.

La droite numérique graduée (DNG) permet de retrouver le résultat d’une addition ou d’une soustraction d’un nombre par un nombre à un chiffre. Ernest (1985) prend l’exemple d’un fait élémentaire comme $3 + 5$ et rappelle que Resnick et Ford montrent l’existence de trois techniques de calcul utilisées par les enfants :

La première technique dite du « counting all » consiste à déplacer un doigt ou un crayon d’abord de trois, puis de cinq à partir de trois. La réponse est lue à partir de la position finale qui est de huit. Les mouvements sont illustrés sur la figure suivante :



La figure 2.5 (b) présente un schéma simplifié du même processus. La figure 2.5(c) représente les mouvements d’un enfant qui compte les points sur la ligne de nombres, et illustre ainsi une variante de procédé.

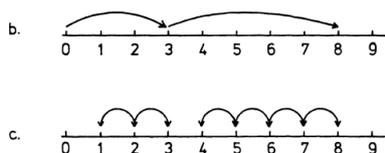


Figure 2.5 : figures extraites de Ernest (1985, p.413)

³⁷ Nous reprenons ce résultat de recherche ainsi que le suivant aux pages 7 et 8.

La deuxième technique dite du « *counting on method* » consiste à commencer au point marqué trois et à compter à partir de là, cinq de plus. Cette technique est illustrée sur la figure 2.5 bis :

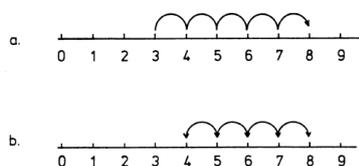


Figure 2.5 bis : figures extraites de Ernest (1985, p.414)

En utilisant cette technique, un enfant peut toucher le point marqué trois et ensuite effectuer cinq « bonds » pour arriver au point marqué huit. Ceci est illustré sur la figure 2.5 bis (a). Autrement, l'enfant peut toucher les cinq points au-delà du point marqué trois, pour arriver au point marqué huit. Ceci est illustré dans la figure 2.5 bis (b).

La troisième technique est une variante de la seconde. Pour calculer $3 + 5$, l'enfant choisit le plus grand nombre, à savoir 5 et compte ensuite trois. Ceci est illustré sur la figure suivante :

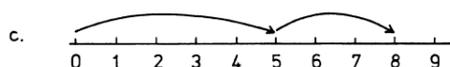


Figure 2.5 bis-bis : figure extraite de Ernest (1985, p.414)

Les trois techniques décrites ci-dessus sont probablement les techniques employées par la plupart des jeunes enfants (âgés de 5 à 8 ans) pour calculer des sommes telles que $3 + 5$ à l'aide d'une droite numérique graduée. L'élément central de ces techniques est qu'elles sont « actives »³⁸ physiquement. Le grand inconvénient de ces techniques est qu'elles privilégient un comptage de un en un et n'incitent pas à calculer directement en utilisant sa mémoire ou en faisant appel à des faits numériques connus. C'est pourquoi, nous privilégions l'introduction de la droite numérique graduée au cycle 3 dans le cadre de la mesure. En ce sens, la définition de la droite numérique graduée (DNG) émise par Freudenthal (1983) citée par Teppo et Van den Heuvel-Panhuizen (2013) est un élément théorique sur lequel nous allons nous appuyer.

“The device beyond praise that visualizes magnitudes and at the same time the natural numbers articulating them is the number line.” (Freudenthal, 1983 p. 101)

” How far is it ‘from here to there’ on the number line? The little steps are counted. But you can also take the ‘from here to there’ between your thumb and forefinger, carry it back to 0 and read it off. “(Freudenthal, 1983 p. 102).

³⁸ Il est concevable que certains enfants puissent apprendre à remplacer les mouvements de la main par l'œil, mais cela reste un mouvement physique.

Cette définition montre que la droite numérique graduée (DNG) est une représentation qui permet de visualiser parallèlement les grandeurs et les entiers naturels. L'emplacement d'un point représentant un nombre est obtenu en reportant ce nombre d'unités à partir de l'origine. La distance entre deux nombres (on peut prendre « d'ici à là » entre le pouce et l'index) peut être translatée vers l'origine 0, ce qui permet de lire la différence des deux nombres. La droite numérique graduée (DNG) est un outil qui permet de faire le lien entre le cadre numérique (différence entre deux nombres) et le cadre de la mesure (distance entre deux points d'abscisses ces nombres avec une unité de longueur UN, origine 0), de connecter ces deux cadres qui habituellement le sont peu à l'école primaire.

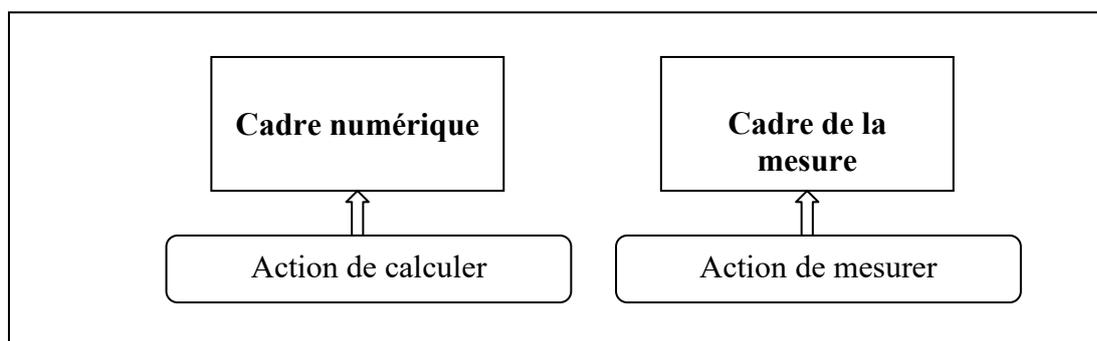


Figure 2.6 : cadre numérique et cadre de la mesure en parallèle

En effet, dans le cadre de la mesure³⁹, à l'école élémentaire, pour déterminer une longueur, on apprend à manipuler les instruments usuels de mesure (le double décimètre, le mètre). L'utilisation de ces différentes règles graduées, qui s'apparentent à des droites numériques graduées avec des unités exprimées en unités de mesure (1cm, 1dm), consiste à aligner une extrémité du segment à mesurer avec la graduation *zéro*, afin de lire directement le résultat au niveau de la seconde extrémité du segment. Cette technique n'est pas nécessairement justifiée par une technologie savante. Au nombre a n'est pas associée la différence $a - 0$. Il nous semble cependant utile d'établir ce lien entre cadre numérique et cadre de la mesure, en définissant l'écart entre deux entiers naturels.

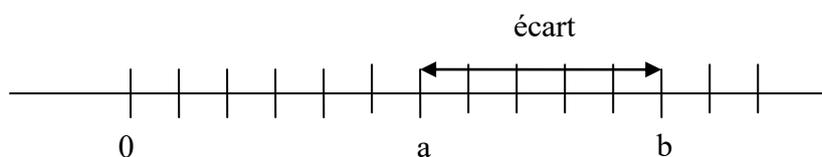


Figure 2.7 : représentation de l'écart entre a et b sur la droite numérique graduée (DNG)

³⁹ Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs, des masses, des capacités, puis exprimer cette mesure par un nombre entier ou un encadrement par deux nombres entiers.

L'écart entre a et b (symbolisé par la double flèche), est la mesure de la longueur du segment de points d'abscisses a et b, quand l'unité de longueur est 1. Il se calcule en recherchant le complément de a à b, ou la différence b moins a .

En conclusion, nous choisissons d'utiliser la droite numérique graduée (DNG) dans le cadre de la mesure. Pour motiver la recherche de la longueur d'un segment par un calcul soustractif, nous n'utilisons pas directement une droite numérique graduée (DNG), mais nous introduisons comme artefact une règle cassée, c'est-à-dire une droite numérique graduée privée de ces premières graduations. Ce milieu matériel (segment, règle cassée) va permettre au vu des résultats obtenus, de valider ou d'invalidier les techniques mises au point (soustraction, addition à trou, comptage des unités une à une) et, à condition de mesurer un très grand segment, d'écarter les techniques par comptage.

Indirectement nous serons amenée à revenir sur la caractéristique essentielle de la droite numérique graduée qui est l'existence d'une unité et le report de celle-ci. En ce sens, nous nous inscrirons dans la continuité des recherches effectuées par Doritou et Gray (2009) et Diezmann, Lowrie & Sugars (2010)⁴⁰.

⁴⁰ Doritou et Gray (2009) montrent à la suite d'une enquête menée auprès d'enseignants, que ceux-ci en évoquant la DNG sont sensibles aux séances de comptage permises par son utilisation, ont une conception procédurale de celle-ci mais n'évoquent pas le fait que la DNG soit construite à partir de la répétition régulière d'un intervalle unité.

“Though the classroom teachers in this survey applauded the pedagogical benefit of the number line as a tool, neither they nor the trainee teachers provided little explicit or implied indication that this benefit had a formality based upon the repetition of a unit interval and the partition of this interval” (Doritou & Gray, 2009, p.1742)

Diezmann, Lowrie & Sugars, (2010) recommandent d'insister sur le fait qu'une DNG est construite à partir d'une même unité qu'on reporte suite à l'analyse des erreurs produites par des élèves de 10-12 au test présenté ci-dessous :

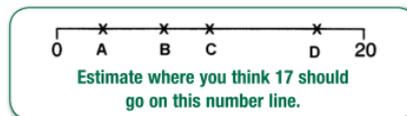


Figure 3. Year 3 number line item (Queensland School Curriculum Council (QSCC), 2000a).

Une erreur courante a été en effet d'employer le comptage pour identifier la place de 17. Juste avant 20, 19. 19 est donc placé en D ; juste avant 19, 18, 18 est placé en C et 17 enfin, juste avant 18, 17 est donc placé en B. Cette erreur est liée à l'utilisation d'une stratégie de comptage qui est inappropriée ici puisque les intervalles présents n'ont pas tous la même mesure.

b) La droite numérique vide

La droite numérique vide (DNV), sur laquelle les élèves marquent les nombres dont ils ont besoin pour effectuer un calcul additif ou soustractif, a été proposée comme un outil (Treffers, 1991; Treffers et De Moor, 1990) pour suppléer aux difficultés rencontrées par les élèves pour effectuer un calcul additif et soustractif, dans un champ numérique de vingt à cent.

Pour Gravemeijer (1994), cet outil présente trois avantages. D'abord, il permet une représentation en ligne de nombres, ce qui n'est pas le cas quand on utilise un matériel constitué de petits cubes emboîtables (matériel Unifix au Pays Bas). Or cette représentation en ligne du nombre est utile quand on traite des situations faisant intervenir la distance ou la mesure. En second lieu, les procédures qui consistent à calculer séparément sur les dizaines et les unités isolées (1010) s'apparentent bien au matériel cité précédemment. Elles peuvent ensuite évoluer vers une procédure séquentielle (N10) basée sur la décomposition du nombre à soustraire.

L'exemple suivant illustre cette procédure sur un calcul additif.

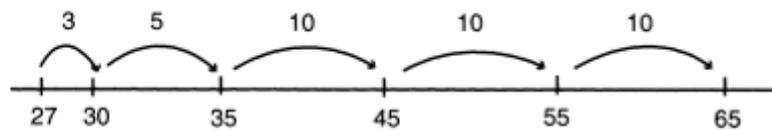


Figure 1a. Solving $27 + 38$ as curtailed counting on: $27 + 3 = 30$, $30 + 5 = 35$, $35 + 10 = 45$, $45 + 10 = 55$, $55 + 10 = 65$.

Figure 2.8 : figure extraite de Gravemeijer (1994, p.457)

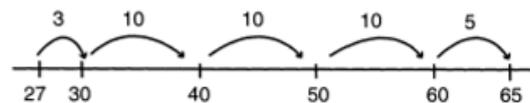


Figure 1b. Another way of solving $27 + 38$: $27 + 3 = 30$, $30 + 10 = 40$, $40 + 10 = 50$, $50 + 10 = 60$, $60 + 5 = 65$.

Figure 2.8 bis : figure extraite de Gravemeijer (1994, p.457)

La troisième raison évoquée par Gravemeijer pour choisir la droite numérique vide est :

« It was argued that a new model should leave students the freedom to develop their own solution procedures. However, this argument is not sufficient; there has to be room for improvement. Or better, employing the model should foster the development of more sophisticated strategies. »

(Gravemeijer, 1994, p.461)

En effet, Gravemeijer explique que les élèves vont petit à petit, seuls ou « stimulés » en petits groupes, en échangeant ensuite avec tous les élèves de la classe, être amenés à faire évoluer

leurs procédures. Du comptage de un en un, ils vont passer au comptage de dizaines en dizaines et d'unités en unités pour arriver à une procédure standard N10 qui consiste à ajouter ou soustraire un nombre entier de dizaines et d'unités isolées. Cette évolution ne s'arrête pas là, car la DNV favorise aussi l'utilisation des procédures de compensation comme l'illustre l'exemple ci après.

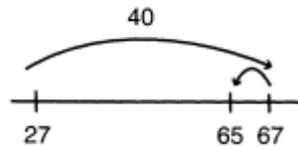


Figure 2.8 bis.bis : figure extraite de Gravemeijer (1994, p.457)

Deux autres arguments sont développés explicitement mais indirectement par Gravemeijer. Le quatrième argument est que sur la droite numérique vide on peut voir les différentes étapes du calcul, repérer les erreurs éventuelles, mais aussi repérer ce qui a été fait pour trouver ce qu'il reste à faire :

“ Looking at the role of the empty number line, we see that this model not only allows students to express and communicate their own solution procedures, it also facilitates those solution procedures, because marking on the number line also functions as a way of scaffolding. It shows the (partial) results; it shows which part of the operation has been carried out and what remains to be done.” (Gravemeijer, 1994, p.461).

Le dernier argument pour utiliser la droite numérique vide mis en avant par Bobis (2005) suite à la lecture de l'article de Gravemeijer est que le schéma avec appui sur la droite numérique vide est un appui à la discussion entre pairs. Un élève, avec cet outil, peut expliciter sa procédure aux autres et les autres, ayant la pratique de cet outil, peuvent l'interpréter :

« Another advantage of utilising the empty number line, not explicitly mentioned by Gravemeijer but a natural progression of his thinking, is the way it can provide a stimulus for classroom discussion and sharing of mental strategies. Students can actually explain their strategies by showing others. This makes the empty number line a very powerful tool to entrance communication in the classroom. » (Bobis, & Bobis 2005, p.75)

Le schéma avec appui sur la droite numérique vide serait donc un appui à la discussion entre pairs.

En conclusion, tous les arguments que nous venons d'énumérer nous incitent à utiliser la droite numérique vide (DNV) en début de cycle 3 pour rendre compte d'un calcul. Nous faisons l'hypothèse que, introduite à bon escient et utilisée régulièrement, la droite numérique vide permettra de mettre en évidence les différentes étapes qui interviennent dans un calcul et

montrera pourquoi ces étapes sont utiles pour calculer plus « facilement » en fonction des nombres en jeu. Nous l'utiliserons en complément d'autres ostensifs, d'arbres, par exemple, qui permettent également de visualiser la réécriture de calcul. Une étude conduite par van den Heuvel-Panhuizen (2008) mentionne d'ailleurs le danger d'un enseignement prescriptif qui montre quels nombres marquer, quels sauts effectuer, quels symboles utiliser sur la droite numérique vide au détriment de la recherche de procédures personnelles, de raccourcis et de l'utilisation par les élèves de leur langage et leurs propres notations.

“Teaching the students this ‘didactical ballast’ (Van den Heuvel-Panhuizen, 1986) is not only very time-consuming, but also anti-didactical, because it takes away from the children any opportunity to mathematise: to find their own strategies, including shortcuts, and to come up with their own notations.” (Van den Heuvel-Panhuizen, 2008, p.27)

En conséquence, enseigner le schéma sur la droite numérique vide pourrait donc conduire à un glissement métacognitif et méta-didactique⁴¹ (Brousseau, 2010).

IV. L'enseignement d'un algorithme de la soustraction

Dans ce paragraphe, nous étudions à partir des travaux de Clarke (2005) et de Thompson (1995), les motivations qui incitent à enseigner une technique qualifiée d'« algorithme » pour effectuer un calcul soustractif. Nous utilisons une approche historique (travaux de Ross et Pratt-Cotter (1997) pour retracer l'évolution des algorithmes enseignés aux Etats-Unis de 1882 à nos jours. Nous recherchons, en consultant quelques manuels anciens, s'il est possible d'établir un parallèle avec les choix opérés en France.

IV.1. Les raisons d'enseigner un algorithme de la soustraction

« Le mot algorithme vient de Al Khwarizmi, surnom du mathématicien arabe Muhammad Ibn Musa (IXe siècle), né à Khwarizem, en Ouzbékistan. Son sens a changé plusieurs fois avant d'en arriver à ses significations actuelles. Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou ambigüité), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données. Un algorithme ne résout donc

⁴¹ A propos du glissement métacognitif et didactique, Brousseau (2010) évoque le fait que « lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et, pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématiques. D'objets d'études ils deviennent par le même processus objets d'enseignement. » (Brousseau, 2010, p.8).

pas seulement un problème unique mais toute une classe ne différant que par les données mais gouvernée par les mêmes prescriptions. (Bouvier et al, 2005, p.27).

Cette définition montre que le but d'un algorithme de calcul est de réduire un calcul complexe en une série de calculs plus élémentaires qui peuvent être effectués en utilisant des processus bien établis, ainsi que des règles pour la coordination de ces calculs plus simples. Vu que leur utilisation est largement répandue dans les classes primaires du monde entier, et que, d'après Shuard⁴² en 1986, 80% du temps consacré à l'enseignement du calcul est réservé au seul enseignement des algorithmes, plusieurs études ont été conduites, notamment au Royaume Uni, aux Etats-Unis, en Australie pour analyser l'impact de l'enseignement d'un algorithme sur l'apprentissage des élèves en mathématiques.

Clarke (2005) dans une conférence donnée en 2005⁴³, énonce huit raisons de pratiquer les algorithmes standards :

- “▪ algorithms have been traditional primary mathematics content around the world for many years*
 - algorithms are powerful in solving classes of problems, particularly where the computation involves many numbers, where memory may be overloaded*
 - algorithms are contracted, summarising several lines of equations involving distributivity and associativity*
 - algorithms are automatic, being able to be taught to, and carried out by, someone without having to analyse the underlying basis of the algorithm*
 - algorithms are fast, with a direct route to the answer*
 - algorithms provide a written record of computation, enabling teachers and students to locate any errors in the algorithm*
 - algorithms can be instructive*
 - for the teacher, algorithms are easy to manage and assess”*
- (Clarke, 2005,p.93)

La première raison reprend l'idée qu'un algorithme standard est un savoir mathématique qui se transmet de génération en génération. Il fait partie des connaissances communes de base que chacun doit acquérir à l'école, et peut être utilisé hors de l'école.

La deuxième raison évoque la puissance d'un algorithme standard car celui-ci s'applique à n'importe quelle classe de problèmes et ne nécessite pas de mémoriser les nombres en jeu surtout quand il y en a plusieurs.

⁴² Shuard H. (1986) Primary Mathematics Today and Tomorrow, deputy principal of Homerton College, Cambridge, England

⁴³ Making mathematics VITAL Proceedings of the Twentieth Biennial Conference of The Australian Association of Mathematics Teachers Edited by M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer

La troisième raison est liée à la compacité d'un calcul effectué grâce à un algorithme standard. Celui-ci se présente comme une écriture contractée correspondant en fait à plusieurs lignes d'écritures.

La quatrième raison montre que la force d'un algorithme standard est qu'il peut être enseigné et réalisé par quelqu'un, sans que celui-ci sache expliquer pourquoi il « fonctionne ». Il s'agit de faire automatiquement le calcul, « sans avoir besoin de réfléchir ».

La cinquième raison rappelle que l'utilisation d'un algorithme standard permet d'aller rapidement à la solution en utilisant une démarche « directe ».

De plus, raison six, le compte rendu écrit du calcul effectué en utilisant l'algorithme standard permet à celui qui le lit de le valider (élève ou enseignant) et de localiser facilement les erreurs.

La septième raison peut être interprétée de différentes manières. Il est, par exemple, possible et instructif de s'interroger sur le bien fondé au niveau mathématique d'un algorithme.

La dernière raison suggère que pour l'enseignant, l'algorithme standard est facile à présenter en classe et à évaluer. En effet, on peut supposer, que l'algorithme n'est pas facile en soi, mais facile en comparaison aux autres techniques de calcul mental, qui dépendent des nombres en jeu et qui ne sont ni directes ni généralisables.

Thompson⁴⁴, reprend quant à lui la comparaison entre les techniques de calcul mental et les algorithmes standards en citant Plunkett (1979) :

“Whereas mental algorithms are fleeting, iconic, holistic and not often generalisable, standard written algorithms, on the other hand, are symbolic, automatic, contracted, efficient, analytic and generalisable.”
(Thompson, 1995, p.17)

L'algorithme s'applique de la même manière quels que soient les nombres en jeu alors que certaines techniques de calcul mental vont être plus efficaces dans certains cas. C'est en ce sens qu'il est possible d'associer à l'idée d'algorithme, l'idée de « technique généralisable » alors que le calcul mental est associé à l'idée de « flexibilité ».

Un autre élément important pris en compte est le fait que pour écrire le calcul posé en colonne, on utilise uniquement des chiffres et des signes opératoires ; on opère donc à partir de symboles, alors qu'avec une autre technique de calcul on peut éventuellement réaliser un schéma. De plus, à chaque étape du calcul, on ajoute ou on soustrait des chiffres qui sont

⁴⁴ Nous n'avons pas la date précise de l'article. Il est disponible sur le site suivant : http://www.ianthompson.pi.dsl.pipex.com/index_files/british%20research%20on%20mental%20and%20written%20calculation%20for%20addition%20and%20subtraction.pdf

placés les uns sous les autres. L'algorithme oblige les utilisateurs, une fois le calcul posé, à se livrer à une pure manipulation de « symboles ». L'algorithme est rarement associé à sa base conceptuelle. En fait, toujours d'après Thompson (1999), une pratique courante dans l'utilisation d'algorithmes exige même que l'on ne pense pas à ce que les chiffres représentent si l'on ne veut pas être confondu, distrait. Les algorithmes « standards » encouragent « la passivité cognitive » de l'utilisateur en ce sens où :

“The decision as to how to set out the calculation, where to start, what value to assign to the digits, etc, are all taken out the individual 's hand.”
(Thompson, 1999, p.17)

C'est pourquoi ils sont dangereusement séduisants, au point qu'il n'est pas rare de voir des élèves avoir recours à l'algorithme de la soustraction pour trouver le résultat de $100 \$ - 99,95 \$$. Dans ce sens, il est nécessaire de trouver un équilibre dans l'enseignement

des différentes techniques de calcul additif et soustractif à enseigner. Thomson (1999) suggère une idée de progression:

“The framework also describes a clear teaching progression for calculation, starting from mental methods, passing through jottings, informal written methods, formal algorithms using expanded notation, and culminating in the learning of the standard algorithms.”(Ibid., p 18)

Dans cette progression, l'enseignement précoce d'algorithme est évité, étant entendu que les élèves doivent être impliqués dans l'élaboration de techniques mentales, puis écrites, mais élaborées à partir de leurs connaissances des nombres à un chiffre, à deux chiffres et des opérations.

Une autre étude, conduite par Butlen & Charles-Pézard (2007), que nous avons déjà citée, montre aussi les dangers qu'il y aurait à enseigner trop tôt les algorithmes et à ne pas instituer le fait que d'autres techniques permettent, même si elles ne sont pas généralisables mais spécifiques à une classe, d'obtenir rapidement et sûrement un résultat exact.

En conclusion dans cette première partie, nous avons analysé ce qui caractérise le calcul posé en colonne et montré les avantages ainsi que les limites d'un enseignement précocement et presque exclusivement centré sur une technique puissante, rapide et efficace, mais qui ne permet pas aux élèves d'exercer leur mémoire, de développer flexibilité et adaptabilité, de réinvestir leurs connaissances sur les nombres et les opérations. Dans le

paragraphe suivant, l'étude permet, grâce à une approche historique, d'aborder les spécificités des différents algorithmes propres à la soustraction.

IV.2. Etude de différents algorithmes de la soustraction

IV.2.1. Approche historique : étude de Ross et Pratt-Cotter (1997)

A notre connaissance, il existe des études conduites en France, notamment celle de Guinet (1978), qui présente les caractéristiques des différents algorithmes de la soustraction posée sur un plan mathématique et retracent leurs histoires mais elles ne s'attachent pas à déterminer pourquoi tel ou tel algorithme a été enseigné à telle ou telle période, depuis l'avènement de l'école obligatoire et publique en 1882. En opposition, une recherche conduite par Ross et Pratt-Cotter (1997) examine l'évolution historique des algorithmes utilisés à l'école élémentaire aux Etats-Unis depuis l'époque coloniale, aux environs de 1600, jusqu'à nos jours, et montre que trois algorithmes sont présents. Leurs noms sont ceux usuellement donnés par les auteurs de manuels et les utilisateurs.

The decomposition algorithm, le plus utilisé actuellement aux Etats-Unis, est aussi connu sous le nom de *borrow method*, c'est-à-dire de la méthode d'emprunt⁴⁵. Il est à noter que ce terme d'emprunt peut-être trompeur car il laisse entendre que quelque chose doit être rendu, or, ce n'est pas exactement l'idée qu'on retrouve dans la méthode de décomposition, l'idée étant plutôt de « casser » une dizaine, une centaine pour poursuivre le calcul. L'exemple choisi par Johnson (1938) et cité par Ross le montre ; cette méthode remonterait à 1821 :

How many are 53 less 18:
$53 = 5 \text{ tens} + 3 \text{ units}$
$18 = 1 \text{ ten} + 8 \text{ units}$
We cannot take 8 units from 3 units; we therefore take one of the 5 tens and add it to the 3 units.
$53 = 4 \text{ tens} + 13 \text{ units}$
$18 = 1 \text{ ten} + 8 \text{ units}$
$53 - 18 = 3 \text{ tens} + 5 \text{ units} = 35$

On note que pour enlever 18 à 53, on va décomposer 53 en 40 + 13 pour pouvoir enlever 8 unités à 13 unités et pour finir 1 dizaine à 4 dizaines.

⁴⁵ Nous avons évoqué cette technique dans le paragraphe II en étudiant les opérations selon Bezout et Reynaud.

Le second algorithme *the equal additions algorithm* remonterait au XV- XVIème siècle. Cet algorithme *des égalités des ajouts* peut aussi être connu sous le nom de *borrow and repay method*. Le terme « d'emprunt » peut se justifier si on conçoit les deux nombres du calcul et un capital de nombres disponibles extérieurs au calcul, à quoi on peut emprunter une puissance de dix pour le *minuend*, nombre que l'on soustrait, et une puissance de dix pour le *subtrahend*, nombre auquel on soustrait. Un exemple de cette méthode est aussi donné par Johnson (1938) et repris par Ross :

6354	
<u>2978</u>	
3376	
8 from 14, 6; 8 from 15, 7; 10 from 13, 3; 3 from 6, 3.	

On note qu'enlever 8 à 4 est impossible, donc on va donner 10 à 6354 et 10 à 2968, ce qui permet de trouver que de 8 à 14 on a 6 et de 8 à 15 on a 7, car on a donné pour poursuivre le calcul 100 à 6354 et 100 à 2978. On poursuit en donnant 1000 aux deux nombres et en effectuant les calculs intermédiaires pour trouver le chiffre des centaines et des unités de mille.

Le troisième algorithme, appelé *the Austrian algorithm* est aussi connu sous le nom d'*additions method*. Il établit un lien encore plus clair entre l'addition et la soustraction. Un exemple extrait de Wentworth & Smith (1902) repris par Johnson et par Suzan Ross est présenté :

From 94,275 take 67,492.	
<u>94275</u>	Thus: 2 and 3 are 5; 9 and 8 are 17, carry
67492	1 to 4 as in addition, making it 5, 5 and 7
26783	are 12; carry 1 to 7 making it 8; 8 and 6 are
	14; carry 1 to 6 making it 7; 7 and 2 are 9.

Dans beaucoup de manuels, « la ligne » annonçant le résultat se trouve sous le second nombre. Il est alors moins facile de poser une addition à trou dans sa tête. Dans la configuration proposée (figure 3) on se dit par exemple :

« 2 pour aller à 5 ? », c'est 3. « 9 pour aller à 17 ? », c'est 8 et je retiens 1, 4 plus un 5. « 5 pour aller à 12 ? » c'est 7 et je retiens 1, 7 plus un 8. « 8 pour aller à 14 ? », c'est 6 et je retiens 1, 6 plus un 7. « 7 pour aller à 9 ? » c'est 2.

Période coloniale

L'étude s'est intéressée aux manuels scolaires de la période coloniale, pour identifier les règles et les algorithmes qui étaient utilisés pour effectuer une soustraction. Elle révèle que décennie après décennie, l'algorithme le plus utilisé est celui basé sur la propriété de conservation des écarts, nommé *equal additions method*, et que les deux autres algorithmes *the decomposition* et *the Austrian algorithms* n'apparaissent que peu souvent. Un autre constat nous intéresse particulièrement :

“There was no explanation given to the student as to why the method works or why using this method will give the difference of two numbers. The student was given the rule and a series of examples. The student was then given several problems to work, some of which involved renaming and some that did not.”
(Ross & Cotter, 1987, p.5)

Les élèves apprenaient à appliquer l'algorithme, sans que celui-ci ait été justifié mathématiquement au préalable. Plusieurs exemples permettaient de s'appropriier les différentes étapes, puis, « sans modèle », l'élève devait à son tour calculer. Ross et Pratt-Cotter insistent parallèlement sur le fait que l'élève n'avait pas un accès continu au livre. Il était donc tenu d'apprendre l'algorithme, de faire appel à sa mémoire pour retrouver les étapes une à une.

“The manuscript was more of a copybook than a textbook. The student would get the book from the teacher and copy the problems onto his slate or paper and then work the problems.” (Ibid, p. 5)

En étudiant un manuel de Ray de 1857 *Practical Arithmetic by Induction and Analysis*, Ross avance un autre élément important relatif à l'enseignement de la technique qui concerne le temps d'apprentissage. Celui-ci se faisait en quelques jours, alors que maintenant, dans les années 2000, il faut parfois aux Etats-Unis, deux ans pour installer l'algorithme de la soustraction posée avec retenue :

“This is a very different from today where students are typically introduced to basic facts in one grade level and then taught subtraction with renaming in a different grade. It may be two years before these concepts are both presented as opposed to two days.” (Ibid, p. 6)

Dans cet ouvrage, on peut constater également que deux techniques sont introduites, en premier *the decomposition method* suivie de *the equal method*. Ross se demande si le fait

d'apprendre deux algorithmes différents presque simultanément n'est pas déstabilisant pour les élèves :

« It would be interesting to know if children were confused by the two methods being presented so closely together. » (Ibid., p.6)

Ross analyse un autre manuel Standard Arithmetic de Milne (1895). Il est structuré de la même manière que le manuel de Ray. On trouve en premier lieu des calculs basiques à faire, puis une présentation de la méthode de décomposition mais uniquement de celle-ci. Le nombre d'exercices diffère, dans le premier ouvrage, on en recense trente cinq, alors que, dans le second on en trouve une centaine.

Suite à l'époque coloniale, du **début au milieu des années 1900**, on ne trouve pas d'exemples de manuels où il y aurait combinaison des trois algorithmes pour enseigner la soustraction. Par contre, dans chaque manuel de cette période, on constate qu'il n'y a pas de système de marquage, de retenues posées dans les soustractions. Les élèves devaient passer par du calcul mental et ne noter que les résultats :

« However, the algorithms that were used did not show any marking through or numbers being rewritten. The students were expected to use mental calculations, writing only the resulting difference. » (Ibid, p. 6) ⁴⁶

Il faudra attendre 1937 pour que Brownell conduise une étude sur l'intérêt de mettre « a crutch » dans l'algorithme posé.

“ The crutch involved marking through numerals from which an amount was borrowed in order to keep track of the different steps when working a problem. ” (Ibid, p.7)

Cette « béquille », cette façon de noter les changements, en utilisant par exemple l'algorithme de décomposition, comme le montre le calcul ci-après cité par Ross et Pratt- Cotter, s'est avérée positif.

7	The child will be allowed to mark through the eight
86	and place seven above it in order to keep track of the
<u>39</u>	borrowing instead of having to remember the
47	process through the entire problem.

⁴⁶En était-il de même en France? Probablement car le mot « retenue » est de la même famille que le mot retenir et une grande importance était accordée à la mémoire.

Les élèves sont devenus davantage habiles et rapides dans le premier stade de l'apprentissage. Dès lors, l'utilisation de la « béquille » devint très populaire et l'algorithme le plus enseigné est celui de la décomposition comme l'affirment Ross et Pratt Cotter :

“While some textbooks may present alternative algorithms for subtraction the decomposition algorithm is considered the primary algorithm in USA (...) The equal additions algorithm and the Austrian method all but disappeared from textbooks.” (Ibid, p. 7)

Cela n'empêche pas certains débats autour de ce choix. Des études conduites avant l'utilisation de la «béquille» par *the board of education for New York City* en 1913, *the board of Education for San Francisco* en 1919, en 1914 et en 1927 en Angleterre n'ont pas permis de trancher pour savoir quel était l'algorithme qu'il était préférable d'enseigner, chaque étude mettant en avant plusieurs avantages et plusieurs inconvénients.

Par exemple, les arguments en faveur de la *décomposition method*, renommée *direct method* par Clark, Otis et Hatton (1939) sont les suivants :

- sa forme est en étroite association avec le sens de la soustraction,
- la technique de la soustraction est distincte de celle d'une addition (en opposition avec *l'Austrian method*),
- l'emprunt est plus facile à comprendre que la conservation des écarts quand on ajoute une somme (en opposition avec *the equal additions*).

Les arguments envers *the additive method* sont les suivants : elle fournit une économie dans l'apprentissage car elle est en continuité avec l'enseignement de l'addition, en outre, il n'y a pas de difficulté particulière quand il y a des zéros successifs dans *the minuend*.

En conclusion, c'est surtout l'introduction de la « béquille » par Brownell en 1937 qui a permis de promouvoir *the decomposition method*. Le fait de « barrer » et de « remplacer » un chiffre par un autre a simplifié le travail de l'élève et a fait taire les controverses.

« This new version of the decomposition algorithm has so completely dominated the field that it is rare to see any other algorithm used to teach subtraction today. » (Ibid, p. 8)

Suite à la lecture de cet article, nous avons consulté quelques manuels anciens disponibles à la bibliothèque de l'ESPE d'Amiens, pour repérer⁴⁷ une évolution éventuelle dans le choix des algorithmes enseignés en France.

⁴⁷ Nos investigations ne peuvent que nous donner des indications et non nous donner de résultats, car il est difficile de savoir si les instituteurs qui utilisaient les manuels consultés étaient nombreux, s'il existait plusieurs collections éditées en même temps. Elles peuvent simplement nous donner des indications sur ce qui

IV.2.2. Consultation de manuels anciens

En annexe A, nous présentons cinq extraits de manuels que nous avons choisis en fonction des livres conservés à la bibliothèque de l'ESPE d'Amiens.

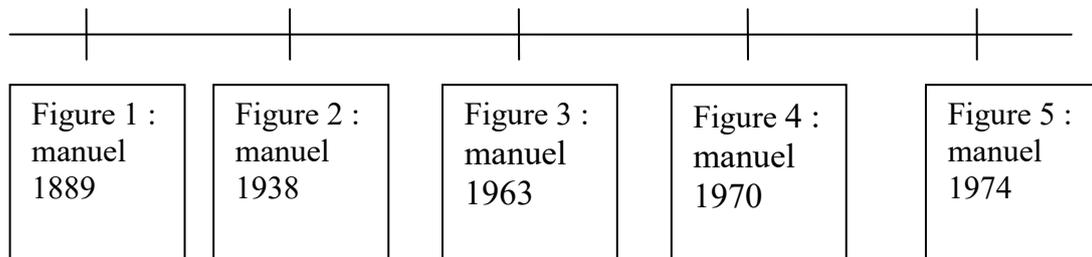


Figure 2.9 : liste des manuels présentés en annexe A

Sur le manuel le plus ancien 1889 (Figure 1 annexe A), les retenues ne sont pas notées dans l'opération posée en colonne mais elles sont évoquées (« 1 de retenue et 2 font 3 ») dans le texte explicatif qui accompagne le calcul. L'algorithme utilisé repose sur la propriété de conservation des écarts. Dans la règle proposée par les auteurs, le nombre à soustraire, le « minuend » en anglais, est dénommé le « petit nombre » en opposition au « grand nombre » qui est celui auquel on soustrait. Le calcul s'effectue chiffre à chiffre, de haut en bas. Quand le chiffre du petit nombre est plus « fort » (expression utilisée par les auteurs) que celui du grand nombre, on ajoute 10 au chiffre du haut (dénommé chiffre « supérieur ») et 1 au chiffre inférieur de gauche. Cette correspondance entre 10 en haut et 1 en bas à gauche n'est pas justifiée.

Pour le manuel de 1938, nous avons reproduit le problème « concret » choisi par les auteurs (FIG2) pour introduire et expliquer l'algorithme. Ce problème consiste, étant donné une somme initiale d'argent (4 pièces de 10F et 3 pièces de 1F), à chercher la somme d'argent qui restera après avoir dépensé 8F. La technique présentée par les auteurs consiste à échanger 1 pièce de 10F contre 10 pièces de 1F afin de pouvoir effectuer $10 + 10 + 10 + 10 + 3 - 8$. Cette technique est associée à une manipulation concrète et aucune « règle » (mode d'emploi généralisé) n'est présentée. Dans l'opération posée en colonne, les retenues sont notées.

éventuellement se faisait à une période donnée en France, pour introduire et expliquer « par écrit » la soustraction posée avec retenues.

En considérant le manuel de 1963, les explications données à côté de la soustraction posée montrent que l'algorithme s'appuie sur la propriété de conservation des écarts. La situation concrète présentée juste avant, contrairement à précédemment, ne permet pas de conclure. Le manuel de 1970 utilise l'algorithme qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts après l'avoir introduite dans plusieurs contextes. Les notations sont celles qu'on trouve actuellement.

Pour le dernier manuel, la réforme des mathématiques modernes⁴⁸ est passée par là (1965-1973). La soustraction est posée en base six. La technique proposée par les auteurs s'appuie sur la décomposition du nombre en base six. Les notations sont celles qu'on trouve actuellement et qui sont évoquées dans l'étude de Ross et Pratt-Cotter citée précédemment.

En conclusion : les manuels étudiés permettent grâce à la situation choisie pour introduire la soustraction posée en colonne ou à la règle proposée par les auteurs, de repérer l'utilisation de deux algorithmes, l'un basé sur la décomposition et l'autre basé sur la propriété de conservation des écarts. Des notations pour marquer les retenues ont été introduites au fil du temps. Celle qui consiste à barrer un chiffre du nombre auquel on soustrait n et d'écrire $n-1$ à la place permet d'identifier facilement celui qui repose sur la décomposition du nombre à soustraire. Est-ce à dire que l'utilisation de cet ostensif suffit pour comprendre les enjeux conceptuels de l'algorithme? Pas forcément, si on se réfère aux résultats de l'étude conduite par Thanheiser (2010). Pour ce chercheur, beaucoup de futurs enseignants penseraient que la valeur de la retenue (celle qu'on écrit sur la droite après avoir barré le chiffre de rang supérieur) est constante, indépendante de la place du chiffre dans le nombre, et qu'elle vaut « 1 » dans le cas d'une soustraction (10 dans le cas d'une addition).

⁴⁸ « Sans vouloir présenter les caractéristiques mathématiques de ces nouveaux programmes, mentionnons ici seulement l'importance donnée à l'algèbre moderne et aux concepts de la théorie des ensembles dans tous les cursus, depuis le niveau élémentaire jusqu'au baccalauréat, la géométrie d'Euclide et le calcul n'étant plus enseignés en tant que tel. » Gispert (2007). L'enseignement des mathématiques au XXe siècle dans le contexte français consulté sur <http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Gispert08-reformes/Gispert08.htm> (consulté le 10/07/2015).

V. Conclusion de l'étude épistémologique et didactique

Notre travail de relecture et de synthèse sur les savoirs savants du second ordre à travers les traités de Bezout (1764) et Reynaud (1821) montre que l'addition et la soustraction sont définies comme deux opérations distinctes, permettant de résoudre des problèmes « concrets ». Pour Vergnaud (1990), c'est plutôt la notion de structure additive qui prime. Les calculs additifs et soustractifs sont présentés comme des moyens (non uniques) de modéliser les différentes classes étudiées (Figure 2.1). Ces deux approches, bien que différentes, donnent un sens à la production de calcul en lien avec la résolution de problèmes. D'où la construction de l'organisation mathématique locale OM1, propre à la production de calculs, au chapitre 3, en vue d'élaborer une organisation mathématique de référence.

Le point de vue de Lebesgue (1915) nous encourage à présenter la notion d'écart dans le cadre de la mesure, puis à établir le fait que la différence correspond à un complément, donc à renforcer l'idée de la soustraction vue comme l'opération inverse de l'addition. Cette approche dans le cadre de la mesure peut alors faciliter, dans un second temps, l'appréhension de la propriété de conservation des écarts par translation. De là, le choix d'enseigner un algorithme de la soustraction posée réputé « compliqué » en opposition à l'algorithme basé sur la décomposition des nombres (cf. IV.2.1).

Par ailleurs, l'étude didactique a montré toute l'importance accordée, dans plusieurs pays dont la France, à l'enseignement du calcul mental (automatisé ou réfléchi) dans le but de développer flexibilité et adaptabilité chez le calculateur. Mais au-delà de cette recherche « astucieuse » de résultats, le calcul permet de conceptualiser les nombres entiers, les relations existant entre les nombres entiers et les opérations (valence épistémique). Avec cet objectif, un travail de réécriture des calculs en ligne nous semble utile. Il permet d'expliquer et de justifier les techniques mises en œuvre (d'où la construction de OM4, propre à la recherche d'écritures équivalentes, au chapitre 3).

En plus d'utiliser les désignations des nombres et de proposer un travail sur les écritures mathématiques pour justifier les techniques de calcul, l'idée d'introduire des ostensifs, tels que l'arbre à calcul et les droites numériques pour faciliter et expliquer la mise en œuvre des techniques (entre autre les techniques séquentielles) au regard des travaux de recherche évoqués au III.3 nous semble pertinente (d'où la construction d'une organisation

mathématique basée sur l'association et la traduction de représentations sémiotiques au chapitre 3).

Pour ce qui est propre à l'effectuation des calculs, l'étude didactique a permis dans la continuité de ce qui existait déjà (classifications proposées par Fuson (1997), Carpenter (1998), Klein, Beishuizen & Treffers (1998) et Thompson (1999).), d'identifier et de coder les techniques de calcul soustractif mental susceptibles d'être intégrées dans l'organisation mathématique de référence (construction de OM3 consacrée à l'effectuation des calculs).

Reste à approfondir cette étude et à la rendre opérationnelle, tel est l'objectif de la construction de l'organisation mathématique de référence proposée au chapitre suivant.

Chapitre 3

Organisation mathématique de référence

Nous prenons appui sur l'étude épistémologique et didactique relative au calcul soustractif sur les entiers naturels, conduite au chapitre 2, pour construire une organisation mathématique de référence (Bosch et Gascon, 2005). Une organisation mathématique de référence permet de doter le chercheur d'un outil puissant et légitime pour analyser l'organisation mathématique à enseigner, sachant que celle-ci a une influence centrale sur le processus de transposition didactique :

« mais cette influence ne peut pas être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que le chercheur considère pour son analyse. » (Bosch & Gascon, 2005, p.117)

Cet outil nous servira par la suite à analyser les praxéologies à enseigner à travers différents manuels scolaires et pour concevoir une ingénierie pour le CE2. Afin de le construire, nous commençons par motiver l'existence de différents genres de tâches (produire un calcul, effectuer un calcul, justifier un calcul..), tout en montrant comment ceux-ci s'articulent, au moins partiellement entre eux. Ce premier découpage nous amène à identifier quatre organisations mathématiques locales. Pour chacune, nous relevons les types de tâches qui s'y réfèrent. Nous repérons plus particulièrement, en lien avec notre question de recherche⁴⁹, les ostensifs, les techniques et les technologies (ainsi que leurs fonctions) sollicités dans l'effectuation d'un calcul mental, posé en ligne ou en colonne.

I. Organisations mathématiques associées au calcul soustractif

I.1. Organisations mathématiques locales

Nous définissons quatre organisations mathématiques locales que nous présentons brièvement avant de revenir sur notre choix.

- La première organisation mathématique locale, OM1, est une organisation construite autour de la production de calculs additifs et soustractifs. Elle s'appuie sur des tâches de production d'expressions numériques pour modéliser les problèmes liés au dénombrement et à la mesure.
- La deuxième organisation mathématique locale, OM2, est construite autour de la traduction ou de l'association de différentes représentations sémiotiques⁵⁰. Elle est liée au fait que le cadre numérique mette en jeu plusieurs types de représentations sémiotiques, et que, pour produire, exécuter, vérifier un calcul, on soit éventuellement amené à passer d'un type de représentation à un autre.

⁴⁹ Question autour des conditions à installer « en classe » pour enseigner la valence épistémique du calcul.

⁵⁰ Nous utilisons l'expression « représentation sémiotique » au sens de Duval (2000). Les objets mathématiques sont représentés par une écriture, une notation, un symbole, un tracé, une figure, autrement dit par des productions constituées de signes d'un certain type et appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signification et de fonctionnement.. Nous développons dans le paragraphe suivant quels sont les types de représentations sémiotiques en jeu dans un calcul soustractif en nous appuyant sur l'étude épistémologique conduite au chapitre 2.

- La troisième organisation mathématique locale, OM3, est basée sur l'effectuation des calculs (exacts ou approchés). Elle regroupe quatre genres de tâches : le calcul écrit en ligne, le calcul posé en colonne, le calcul mental automatisé ou réfléchi, le calcul instrumenté (à l'aide d'une calculatrice).
- La quatrième organisation mathématique, OM4, est centrée sur des tâches spécifiques d'équivalence d'écritures. Cette organisation existe à cause de la nécessité, quand le calcul est mental ou écrit en ligne, de transformer l'expression numérique proposée, en jouant sur les propriétés des nombres et des opérations, pour effectuer un ou plusieurs calculs plus économiques. Il ne s'agit pas d'un travail sur les écritures uniquement syntaxique mais aussi sémantique. C'est en fonction du but visé, par exemple soustraire 9, qu'on va soustraire 10 et ajouter 1.

I.2. Liens entre les différentes organisations mathématiques locales

Les quatre organisations mathématiques locales que nous venons de définir s'agrègent plus ou moins de la manière suivante :

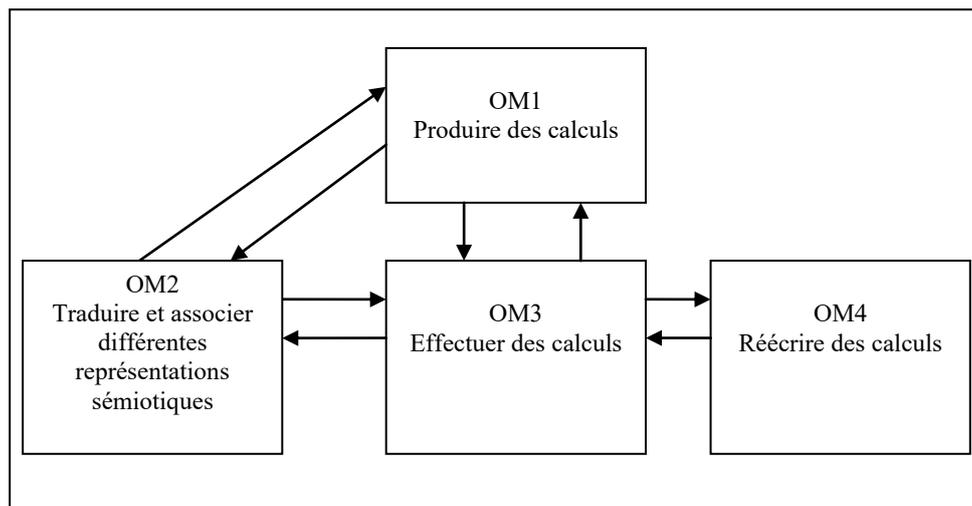


Figure 3.1 : schéma relatif aux OM locales propres au calcul additif et soustractif sur N

En effet, il nous semble que bien souvent, les calculs sont produits avec l'intention de trouver un résultat et font donc appel à des types de tâches propres à OM2, d'où le lien entre OM1 et OM2. Pour produire des calculs, dans un contexte de résolution de problèmes, on est amené à transformer des représentations sémiotiques de type langagier, données dans l'énoncé, en représentations sémiotiques de type symbolique, données sous forme d'égalités numériques, d'où le lien entre OM1 et OM2. De même, pour effectuer des calculs, on utilise des ostensifs propres aux nombres et aux opérations, et donc des représentations sémiotiques d'ordre symbolique ou imagé (nombres ou représentations imagées de collections, schémas avec

appui sur la DNV) d'où le lien entre OM2 et OM3. Pour finir, les relations entre OM3 et OM4 proviennent du fait que, pour effectuer un calcul posé en ligne (OM3), on soit amené à le réécrire (OM4).

II. OM1 : Produire des calculs additifs ou soustractifs

A l'école primaire, la production de calculs additifs et soustractifs est souvent rattachée à la résolution de problèmes. Nous considérons qu'elle est un moyen de modéliser le problème dans le but de le résoudre.

Nous notons le genre de tâches $T_{\text{Prod. cal.}}$ pour indiquer que, un problème numérique additif ou soustractif étant proposé, il s'agit de **produire un calcul** qui permet de le modéliser.

Les problèmes concernés sont des problèmes catégorisés par Vergnaud (1990) (cf. chapitre 2, § III.I.2) ou des composés de ces problèmes. Nous les codons ainsi⁵¹ :

	recherche de l'état initial	recherche de la valeur de la transformation	recherche de l'état final
transformation positive	$T_{\text{trans pos } x/T/Ef}$	$T_{\text{trans pos } Ei/x/Ef}$	$T_{\text{trans pos } Ei/T/x}$
transformation négative	$T_{\text{trans nég } x/T/Ef}$	$T_{\text{trans nég } Ei/x/Ef}$	$T_{\text{trans nég } Ei/T/x}$

Tableau 3.1 : exemple de codage retenu pour les problèmes de transformation

Par ailleurs, nous apportons une attention particulière aux problèmes de comparaison dans le contexte de la mesure pour introduire la notion d'écart, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (cf. §.III.III), avant d'introduire la propriété de conservation des écarts et de renforcer la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition

Nous considérons (et cela suffit pour notre étude) que OM1 rend compte du passage d'un problème à une ou plusieurs égalités numériques de type $a + x = b$, $a - b = x$ et $a + x = b$, où a et b sont deux données du problème et x est l'inconnue.

III. OM2 : traduire et associer différents types de représentations sémiotiques

Dans cette organisation mathématique locale, nous considérons trois types de représentations sémiotiques⁵² utiles à notre étude : les expressions numériques de la forme

⁵¹ Pour les problèmes de combinaison et de comparaison, le code est $T_{\text{comb } x/E2/ET}$ quand on cherche le cardinal d'une partie (x) connaissant la cardinal de l'autre ($E2$) et le cardinal du tout (ET). $T_{\text{comp } E1/x/E2}$ veut dire qu'on cherche la valeur de la comparaison.

$a - b$, $a + b$ ainsi que les égalités numériques de la forme $a + b = x$; $a - b = x$; $a + x = b$, les expressions langagières et les représentations iconiques associées à une droite numérique graduée ou vide⁵³.

- Le premier type de tâches consiste à **traduire** une expression numérique ou une égalité numérique par une expression langagière et inversement. Nous le notons $T_{\text{Tra. (cal. / lan.)}}$.

Une tâche propre à ce type de tâches consiste à traduire $8 - 5$ par une expression langagière. Nous retenons, à titre d'exemples, comme propositions d'expressions langagières : *huit moins cinq, la différence entre huit et cinq et le complément à cinq de huit.*

De même, $8 - 5 = 3$ se traduit par *la différence entre huit et cinq égale trois*, ou encore *trois plus cinq égale huit* ou encore *le complément de cinq à huit est trois.*

Réciproquement, si on considère par exemple l'expression langagière *l'écart entre 8 et 15 est 7*, celle-ci se traduit par trois égalités numériques

$$15 - 8 = 7 ; 7 + 8 = 15 \text{ et } 8 + 7 = 15.$$

- Le second type de tâche consiste à **traduire** une expression numérique ou une égalité numérique par un schéma associé à une droite numérique et inversement.

Une tâche propre à ce type de tâches consiste par exemple à traduire l'expression numérique $45 - 27$ par un schéma avec appui sur la droite numérique vide (DNV). Nous retenons comme exemple de proposition le schéma suivant :

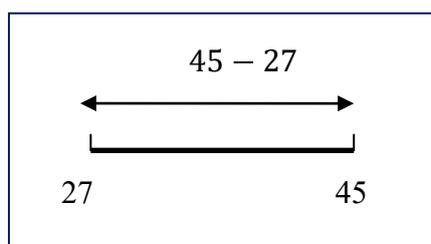


Figure 3.2 : exemple de schéma avec appui sur DNV pour représenter un écart

La double flèche (c'est un exemple de codage) traduit le fait que $45 - 27$ mesure la longueur du segment d'extrémités les points d'abscisse 27 et 45. (cf. chapitre 2, § III.III).

⁵² Ces types de représentations sémiotiques recourent les ostensifs qui permettent de désigner les nombres à l'oral et à l'écrit.

⁵³ Nous avons écarté les représentations iconiques associées à des diagrammes sagittaux mais retenu les représentations iconiques liées à des droites numériques en lien avec l'étude didactique sur l'enseignement du calcul mental.

Remarquons que le même schéma permet de traduire les expressions langagières telles que *la différence entre quarante-cinq et vingt-sept* ou *l'écart entre vingt-sept et quarante-cinq* ou encore *l'écart entre quarante-cinq et vingt-sept*.

De même, une proposition pour traduire l'égalité numérique $45 - 27 = 18$, ou l'expression *quarante-cinq moins vingt-sept égal dix-huit* est la suivante :

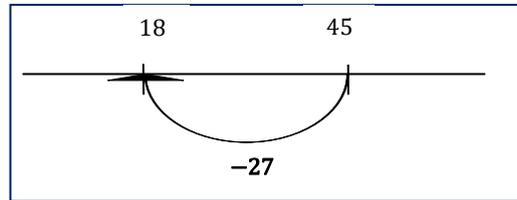


Figure3.3: exemple de schéma avec appui sur la DNV pour traduire le calcul d'une différence

Deux autres types de tâches sont mobilisés :

- **Associer** un calcul soustractif à une expression mathématique verbale et inversement.

Nous le notons $T_{Ass. (cal. / lan.)}$

- **Associer** un calcul soustractif à un schéma avec droite numérique et inversement. Nous le notons $T_{Ass. (cal. / sch.)}$.

La distinction entre traduire et associer provient du fait que, dans l'association, deux types de représentations sémiotiques sont donnés.

Pour finir, nous notons $\tau_{Tra. (cal. / lan.)}$, $\tau_{Tra. (cal. / sch.)}$, $\tau_{Ass. (cal. / lan.)}$ et $\tau_{Ass. (cal. / sch.)}$ les techniques utilisées. Les technologies s'appuient sur les règles fonctionnelles et syntaxiques qui régissent les deux types de représentation et la traduction de l'un à l'autre.

IV. OM3 : effectuer un calcul

Dans cette organisation mathématique locale, nous considérons quatre genres de tâches :

- effectuer un calcul mental donné à l'oral⁵⁴
- effectuer un calcul écrit en ligne
- effectuer un calcul posé en colonne
- effectuer un calcul en utilisant la calculatrice

⁵⁴ Le calcul mental (cf. chapitre 2, §III.2) exclut le calcul posé en colonne. Il n'exclut pas le fait d'avoir recours au papier crayon, de poser le calcul en ligne ou de s'aider d'un schéma avec appui sur la droite numérique vide.

Pour chaque genre de tâches, nous nous attachons uniquement au calcul soustractif, pour ne pas alourdir la rédaction, sans oublier pour autant que les techniques pour ajouter ou soustraire un nombre, dont un classement a été proposé au chapitre 2 (cf. § II.2.3), reposent sur les mêmes éléments technologiques et se construisent parallèlement. Nous traitons, dans un même paragraphe, les deux premiers genres de tâches « mental et écrit en ligne », car le répertoire des techniques envisageables est identique, même si la formulation des tâches, le choix des ostensifs et les éléments de technologie mis en avant, ne sont pas toujours identiques, comme nous le verrons par la suite. Pour approfondir notre étude et caractériser les discours qui accompagnent les techniques, nous sommes amenée à utiliser différentes fonctions de la technologie développées par Castela dans le modèle praxéologique élargi (Castela & Romo Vazquez, 2011). Nous présentons ces différentes fonctions dans le paragraphe suivant.

IV.1. Fonctions de la technologie (Castela & Romo Vazquez, 2011, p.88)

- *« décrire le type de tâches et la technique »*

Cette fonction recouvre notamment le discours oral produit pour caractériser la tâche ou décrire les gestes de la technique, mais aussi le discours écrit, utilisant des écritures chiffrées, un schéma avec appui sur la droite numérique, un arbre à calcul... Nous faisons l'hypothèse, qu'en introduisant régulièrement cette fonction avant d'effectuer un calcul (par écrit) et au moment de restituer un calcul (oralement face à des pairs et à l'expert), nous amenons chaque élève à progresser dans sa propre maîtrise de la technique.

- *« valider la technique »*

Cette fonction consiste à justifier mathématiquement la technique. En engageant un travail de réécriture des calculs, sur des exemples génériques, les savoirs liés aux décompositions des nombres et aux propriétés propres à la soustraction peuvent être mis en avant. Pour la propriété de conservation des écarts, nous proposons, comme annoncé au chapitre précédent, (cf. § III.3.3) de mettre en œuvre un travail spécifique dans le contexte de la mesure, pour amener les élèves à découvrir, formuler et utiliser cette propriété en calcul mental et en calcul posé en colonne.

- *« expliquer la technique »*

Les explications données peuvent ne pas valider complètement la technique, si elles ne respectent pas complètement les normes de la validation usuelle en mathématiques, mais

contribuer cependant à la compréhension des causes par les sujets. Pour illustrer cette fonction, prenons pour exemple le calcul de deux-cent-quinze moins deux-cent-trois. Préciser que quinze moins trois égale douze, ou cinq moins trois égal deux, suffit pour comprendre pourquoi le résultat est égal à deux-cent-douze sans pour autant valider ce résultat. A l'écrit, l'explication peut être donnée en « reliant » les chiffres des unités des deux nombres du calcul pour mettre en évidence le calcul effectué sur les chiffres des unités.

- « *Faciliter la mise en œuvre de la technique* »

Les savoirs mobilisés ici aident à l'efficacité et au confort d'utilisation de la technique. On peut penser à l'étude conduite par Brownell (1937) sur l'utilisation et le marquage des retenues dans l'algorithme posé de la soustraction qui a facilité sa mise en œuvre (cf. chapitre 2, § IV.2.1).

- « *Motiver la technique et les geste qui la composent* »

Les auteurs précisent que ce sont les buts atteints qui justifient rationnellement les gestes, en montrant leur raison d'être. Pour illustrer cette fonction de motivation, prenons le calcul de $103 - 48$, comme 48 est proche de 50, il est plus économique de calculer $105 - 50$.

- « *Evaluer la technique* »

Nous retenons de la lecture de Castela & Romo Vazquez (2011), la nécessité :

- de tenir compte de l'étendue d'une technique. Par exemple, une technique qui consiste à effectuer le calcul chiffre à chiffre et qui s'applique pour effectuer $568 - 357$, n'est pas applicable pour effectuer $500 - 357$.
- de comparer le coût d'une technique à celui d'autres techniques. Cette ergonomie dépend, « en partie », de l'utilisateur. Pour effectuer le calcul précédent, certains préféreront éventuellement chercher un complément, d'autres utiliseront des techniques mixtes ou séquentielles, voire de compensation ou de translation (cf. figure 2.4).

Pour conclure, ces fonctions de la technologie qui, selon Castela & Romo Vazquez (2011), sont parfois intimement associées, vont nous permettre d'analyser les discours (oraux et écrits) se rattachant à telle ou telle technique de calcul soustractif, à différents moments de l'étude, de la rencontre d'un type de tâche à son évaluation, et d'identifier ainsi les savoirs théoriques et pratiques qui sont en cours de construction.

IV.2. Effectuer un calcul soustractif mental

Dans ce paragraphe, nous commençons par spécifier les différents types de tâches qui interviennent dans un calcul mental, puis nous étudions, pour chacun d'entre eux, les techniques potentielles. Pour chaque technique, nous explicitons les propriétés mathématiques qui permettent de les justifier. En lien avec l'étude épistémologique réalisée au chapitre précédent, nous envisageons l'utilisation de plusieurs ostensifs pour exercer les différentes fonctions de la technologie évoquées au paragraphe précédent.

IV.2.1. Les principaux types de tâches

Nous considérons les types de tâches suivants :

- Soustraire un nombre à deux chiffres
- Soustraire un nombre à trois chiffres
- Soustraire un nombre inférieur à dix
- Soustraire un multiple de dix ou de cent
- Trouver le complément d'un nombre à un nombre
- Trouver le complément à 10, à 20, à 100, à 1000 d'un nombre
- Trouver le complément à un multiple de dix ou de cent

Le premier type de tâches « soustraire un nombre à deux chiffres » est le plus couramment évoqué dans la documentation portant sur le calcul soustractif. L'étude didactique conduite au chapitre 2 montre qu'il convoque des types⁵⁵ de tâches intermédiaires qui peuvent être vus, pour cette raison, comme des sous-types de tâches du premier. C'est le cas de « soustraire un multiple de dix ou cent » et « soustraire un nombre inférieur à dix ».

Pour exprimer le troisième type de tâches du tableau, nous aurions pu écrire « soustraire un nombre à un chiffre ». Nous avons préféré évoquer le nombre « dix », et par la même, choisir de faire référence à la taille du nombre (ici « petit ») plutôt qu'à son écriture. De même, le choix des expressions « soustraire un nombre à deux chiffres ou à trois chiffres » est réfléchi. Nous voulons marquer l'importance de certaines techniques dites

⁵⁵ Nous nous sommes appuyée sur les documents d'accompagnement des programmes de 2002 et sur le calcul mental au cycle des approfondissements de Lethielleux (2001) pour déterminer avec précision l'ensemble des types de tâches que nous retenons.

« séquentielles »⁵⁶, qui s'appuient « sur l'écriture » du nombre à soustraire, plutôt que sur sa taille.

Pour finir, nous avons choisi de soustraire un multiple de dix ou de cent plutôt que de soustraire un nombre entier de dizaines ou de centaines. La formulation retenue fait référence au nom des nombres et aux écritures chiffrées, alors que l'autre formulation fait référence aux unités de numération. En réalité, il s'agit de deux techniques différentes, mais la première nous semble plus générale. Elle n'exclut pas le fait d'interpréter l'écriture chiffrée du nombre qui se termine par un zéro comme un nombre entier de dizaines.

Ces considérations générales étant faites sur les types de tâches retenus, nous allons commencer par développer le type de tâche « soustraire un nombre à deux chiffres » en suivant le plan précisé en début de paragraphe.

IV.2.2. Ta—□□ : soustraire un nombre à deux chiffres

Nous distinguons deux cas suivant les valeurs des nombres en jeu dans le calcul :

- premier cas général : ce qui est proposé pour calculer $a - b$ (techniques et ostensifs) est possible quels que soient a et b entiers avec $b \leq a$.
- cas particulier : le chiffre des dizaines de a est supérieur ou égal à celui des dizaines de b et le chiffre des unités de a est supérieur ou égal à celui des dizaines de b ce qui permet d'autres techniques.

- *Premier cas : aucune condition sur les chiffres respectifs de a et de b n'est posée*

Illustrons ce cas par le calcul de $135 - 47$

► Utilisation de τ_{N10}

Pour calculer $135 - 47$, on calcule $135 - 40 - 7$ ou $135 - 7 - 40$.

Cette technique consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire, puis à utiliser les techniques associées aux deux tâches :

- soustraire un multiple de dix
- soustraire un nombre inférieur à dix

La technologie savante qui lui est associée est répertoriée dans le glossaire avec la notation Θ_D . Elle s'appuie sur les savoirs théoriques suivants :

⁵⁶ Techniques évoquées au chapitre 2, §III.II.4 et dans le glossaire

- La décomposition de l'un des deux termes du calcul
- La recomposition d'un nombre
- Les répertoires additifs et soustractifs
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale
- Les propriétés de la soustraction relatives à l'addition sur l'ensemble des entiers naturels :
 - * $(n + p) - q = n + (p - q) = (n - q) + p = n + p - q$
 - * $n - (p + q) = (n - p) - q = n - p - q$

▪ Pour **valider** la technique, au regard de la technologie sous-jacente, nous sommes amenée à rechercher des expressions numériques équivalentes à $a - b$ donc à mobiliser un type de tâche propre à OM4 qui consiste à réécrire le calcul.

$$135 - 47 = 135 - (40 + 7) = (135 - 40) - 7 = 95 - 7 = 88.$$

▪ Pour **faciliter et expliquer** la technique et en l'occurrence la **valider**, nous retenons la possibilité, en utilisant les nombres écrits en chiffres (EC) ou éventuellement écrits avec les unités de numération (UN), de construire un arbre. Cet ostensif permet de mettre en évidence les différentes étapes du calcul (décomposition canonique du nombre à soustraire, utilisation des propriétés de la soustraction sur \mathbb{N} (cf. chapitre 2, § III.2)), en évitant l'usage des parenthèses.

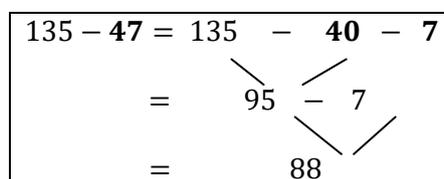


Figure 3.4: exemple d'arbre associé à la mise en œuvre de τ_{N10}

▪ Pour **faciliter et expliquer la technique, mais non la valider**, un schéma ayant pour appui la droite numérique vide montre les deux étapes du calcul. La première étape consiste à soustraire 40 puis, la seconde, à soustraire au nombre obtenu, le nombre 7.

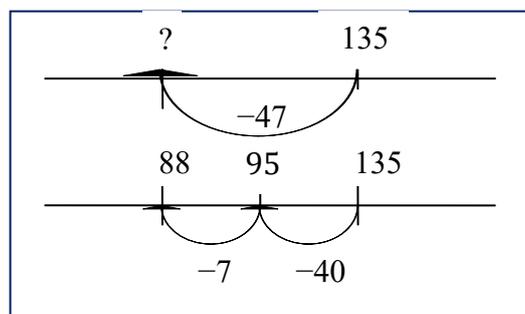


Figure 3.5 : exemple de schéma avec appui sur la DNV associé à la mise en œuvre de τ_{N10}

► Utilisation de τ_{10N10}

Pour calculer $135 - 47$ on calcule $130 - 40$ puis $90 + 5$ et enfin $95 - 7$.

Cette technique « mixte » consiste à décomposer les deux nombres ($135 = 130 + 5$ et $47 = 40 + 7$), à soustraire un multiple de dix à un multiple de dix, puis à ajouter et à soustraire un nombre inférieur à dix. Cette technique est notée τ_{10N10} . Elle met en jeu les mêmes connaissances que la technique séquentielle τ_{N10} . Sa technologie savante est donc la même que celle de τ_{N10} , soit Θ_D . Pour la valider, au regard de la technologie sous-jacente, nous sommes amenée à mobiliser un type de tâche propre à OM4 qui consiste à réécrire le calcul. Pour faciliter et expliquer sa mise en œuvre, l'élaboration d'un arbre ou l'utilisation d'un schéma⁵⁷ avec appui sur la droite numérique vide (DNV) est envisageable.

► Utilisation de τ_{N10C} ou τ_{A10}

Pour calculer $135 - 47$, on calcule $135 - 50 + 3$

ou on calcule $(135 - 5) - 42$ ou $(135 - 35) - 12$

Dans le premier cas, **la technique τ_{N10C}** consiste à remplacer le nombre à soustraire b par un multiple de dix ou de cent supérieur à b et à compenser le surplus. Cette technique est d'autant plus « économique » que le nombre b est « proche » d'un multiple de dix ou de cent, donc que son chiffre des unités est 7, 8 ou 9.

Dans le second cas, **la technique τ_{A10}** consiste à décomposer le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer. Remarquons que le choix du nombre pivot, premier résultat intermédiaire (ici 130 ou 100), dépend de la décomposition choisie en fonction des nombres qui interviennent dans le calcul.

Technologie savante : les deux techniques sont fondées sur Θ_D et reposent, de plus, sur la connaissance du multiple de dix ou de cent inférieur ou supérieur d'un nombre, sur une technique pour déterminer un complément, une technique pour soustraire un nombre entier de dizaines, soustraire ou ajouter un nombre inférieur à dix.

- Pour **valider** les techniques, au regard de la technologie sous-jacente, il est nécessaire de mobiliser un type de tâche propre à OM4 qui consiste à réécrire le calcul.
- Pour **faciliter et expliquer** les techniques et, en l'occurrence, les **valider**, nous retenons la possibilité, en utilisant les nombres écrits en chiffres (EC) ou éventuellement écrits avec les unités de numération (UN), de construire un arbre. Cet ostensif permet de mettre en évidence

⁵⁷ Ce schéma est plus difficile à élaborer car au lieu de noter en premier lieu le nombre au quel on soustrait, on note le nombre de dizaines de ce nombre. On marque ensuite trois « bonds », le premier de -40, le second de +5 et le dernier de -7.

les différentes étapes du calcul (décomposition du nombre à soustraire, utilisation des propriétés de la soustraction sur N, en évitant l'usage des parenthèses).

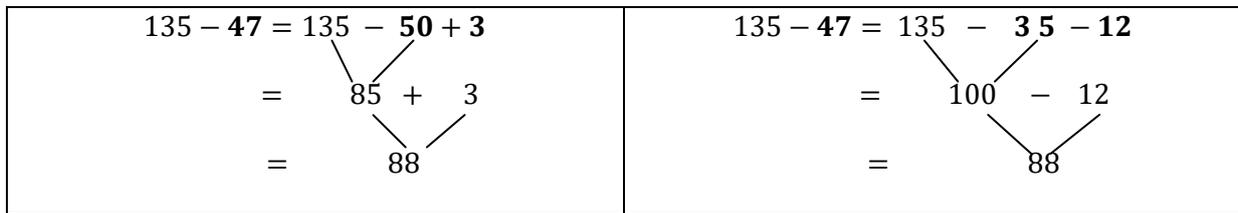


Figure 3.6 : arbres associé à la mise en œuvre de τ_{N10C} et de τ_{A10}

• Pour faciliter et expliquer τ_{N10C} et τ_{A10} , un schéma avec appui sur la droite numérique vide (DNV) permet de montrer les différentes étapes du calcul.

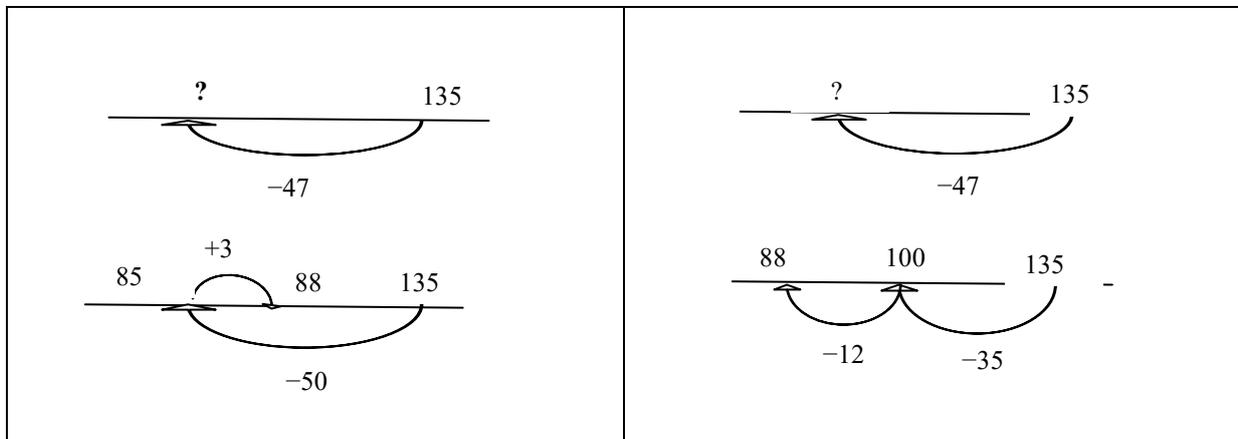


Figure 3.7 : schémas avec appui sur la DNV associés à la mise en œuvre de τ_{A10} et τ_{N10C}

► Utilisation de τ_{AN}

Pour calculer $135 - 47$, on calcule $138 - 50$.

Cette technique consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif. Cette technique est d'autant plus « économique » que le nombre b est « proche » d'un multiple de dix ou de cent, donc que son chiffre des unités est 7, 8 ou 9.

Technologie savante: Elle est répertoriée dans le glossaire avec la notation Θ_{AN} .

Elle s'appuie sur :

- L'ajout ou le retrait d'un même nombre aux deux termes du calcul,
- Les répertoires additifs et soustractifs,
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale,
- La propriété de conservation des écarts : la différence entre deux nombres a et b est inchangée si on ajoute ou si on soustrait un même nombre à a et b .

Dans le cadre numérique, on peut utiliser les nombres écrits en écriture chiffrée ou en unités de numération et un arbre pour mettre en évidence l'ajout et valider la technique.

$$\begin{array}{r}
 135 - 47 = (135 + 3) - (47 + 3) \\
 = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 138 \quad - \quad 50 \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 = 88
 \end{array}$$

Figure 3.8 : arbre associé à la mise en œuvre de τ_{AN}

Un schéma avec appui sur la DNV permet de visualiser la translation du segment (qui mesure l'écart entre 47 et 135) de 47 à de 50.

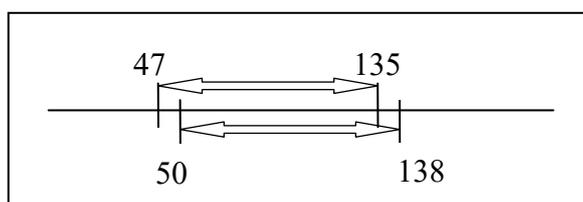


Figure 3.9 : schéma avec appui sur la DNV associé à la mise en œuvre de τ_{AN}

► Utilisation de $\tau_{SOUS/ADD}$

Pour calculer $135 - 47$, on calcule le complément à 47 de 137.

Cette technique consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou. Elle est d'autant plus économique que les nombres a et b sont proches.

Technologie savante: Elle est répertoriée dans le glossaire avec la notation $\Theta_{SOUS/ADD}$. Elle s'appuie sur :

- La définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels,
- Les répertoires additifs et soustractifs,
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale,
- Les propriétés de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels.

Un schéma prenant appui sur la DNV permet de visualiser le fait que l'écart entre a et b s'obtient indifféremment en reculant ou en avançant.

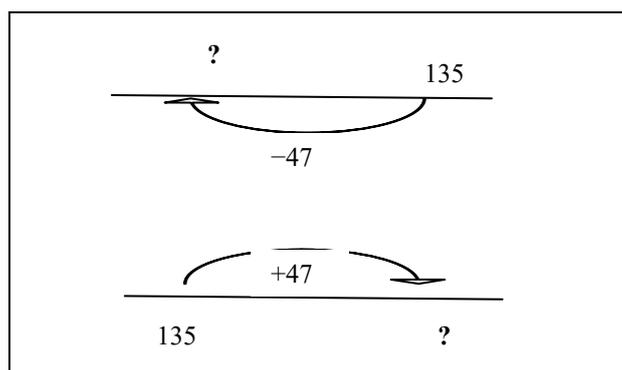


Figure 3.10 : schéma avec appui sur la DNV associé à la mise en œuvre de $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$

- *Second cas : le chiffre des dizaines de a est supérieur ou égal à celui des dizaines de b⁵⁸ et le chiffre des unités de a est supérieur ou égal à celui des dizaines de b*

Illustrons ce cas par le calcul de $156 - 21$

► Utilisation de τ_{1010}

Pour calculer $156 - 21$, on calcule $(100) + (50 - 20) + (6 - 1)$.

Cette technique est une technique basée sur la décomposition canonique des deux nombres. Elle consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 puis à les ajouter. Cette technique est celle qu'on utilise indirectement dans le calcul posé quand il n'y a pas de retenues.

Technologie savante : elle est répertoriée dans le glossaire avec la notation Θ_{DD} .

Elle s'appuie sur :

- La décomposition de chacun des deux termes du calcul,
- La recomposition d'un nombre,
- Les répertoires additifs et soustractifs,
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale.
- Les propriétés de la soustraction relatives à l'addition sur l'ensemble des entiers naturels :

$$*(n + p) - q = n + (p - q) = (n - q) + p = n + p - q$$

$$* n - (p + q) = (n - p) - q = n - p - q$$

Pour expliquer⁵⁹ et valider la technique, en utilisant les nombres écrits en chiffres, ou éventuellement écrits avec les unités de numération, on décompose le calcul en « partant » de

⁵⁸ La première condition, le chiffre des dizaines de a est supérieur ou égal à celui des dizaines de b, découle du fait que a est supérieur ou égal à .

⁵⁹ L'utilisation de la DNV ne permet pas d'expliquer la technique car celle-ci n'est pas séquentielle.

la décomposition canonique de a et de b. Chaque étape fait intervenir la recherche d'expressions numériques équivalentes, donc un type de tâches propres à OM4.

$$\begin{array}{r}
 156 - 21 = 100 + 50 + 6 - 20 - 1 \\
 = 100 + 30 + 5 \\
 = 135
 \end{array}$$

Figure 3.11 : arbre associé à la mise en œuvre de τ_{1010}

► **Prolongement : utilisation de $(\tau_{1010})'$**

Pour calculer $165 - 27$, on calcule $(100) + (50 - 20) + (15 - 7)$ ou encore $(150 - 20) + (15 - 7)$.

Cette technique s'appuie sur la décomposition du premier nombre et sur la décomposition canonique du nombre à soustraire. Elle se rapproche de τ_{1010} . Elle est utilisée dans l'algorithme de la soustraction posée dit par « emprunt » quand il y a des retenues.

Sa technologie savante est Θ_{DD} et comme pour τ_{1010} , un arbre permet de l'expliquer et de la valider.

- *synthèse sur le classement des techniques*

Nous présentons dans le tableau suivant, les techniques en fonction des quatre classes de technologies retenues, ainsi que les ostensifs utilisés pour **expliquer** les techniques, étant entendu que seul un travail de réécriture du calcul au moyen éventuellement d'un arbre ou d'une suite de calculs permet de **valider** la technique.

Technologie θ_{DD} τ_{1010} $(\tau_{1010})'$	Technologie θ_D τ_{N10} τ_{N10C} τ_{A10}	Technologie θ_{AN} τ_{AN}	Technologie $\theta_{SOUS/ADD}$ $\tau_{SOUS/ADD}$
Ostensifs: arbre	Ostensifs : arbre et droite numérique vide		

Tableau 3.2 : classement des techniques et des ostensifs en fonction des technologies

- *synthèse sur la comparaison des techniques*

Nous rappelons que seule τ_{1010} a un domaine de validité limité et que, suivant les nombres en jeu a et b, dans le calcul de $a - b$, quand b est « proche » d'un multiple de dix ou de cent supérieur à b, il est d'autant plus économique d'utiliser τ_{N10C} ou τ_{AN} . De même quand a et b sont proches, $\tau_{SOUS/ADD}$ est économique.

Autre constat, τ_{N10} , τ_{N10C} et τ_{AN} sont trois techniques qui, dans leur mise en œuvre, nécessitent le fait de savoir soustraire un multiple de dix, c'est pourquoi nous développons dans le paragraphe suivant ce type de tâches, qui peut être considéré comme un sous type de tâches.

IV.2.3. T_{a-b} : soustraire un multiple de dix

Nous distinguons deux cas suivant les valeurs des nombres en jeu dans le calcul :

- Premier cas général : ce qui est proposé pour calculer $a - b$ (techniques, et ostensifs) est possible quels que soient a et b entiers avec $b \leq a$.
- Cas particulier ; le chiffre des dizaines de a est supérieur ou égal à celui des dizaines de b ce qui permet d'autres techniques.
 - *Premier cas : aucune condition sur les chiffres respectifs de a et de b n'est posée*

Illustrons ce cas par le calcul de $356 - 70$

Les techniques qui consistent à partir du nombre a , puis à décompter un multiple de dix, de dix en dix, en s'aidant éventuellement de ses doigts, ou d'un geste, et qui s'appuient sur une connaissance orale ou écrite de la comptine numérique, de dix en dix, sécable, à rebours ne sont pas retenues, car elles ne mettent pas directement en jeu les propriétés des nombres et des opérations. Nous retenons uniquement les techniques basées sur les décompositions des nombres.

► Utilisation de τ_{CONV} .

Pour calculer $356 - 70$, on calcule $35 - 7$, on trouve 28, on en déduit que $350 - 70 = 280$ et $356 - 70 = 280 + 6$.

Cette technique consiste à exprimer un nombre d'unités d'un certain rang en un nombre d'unités d'un autre rang. La technologie savante sur laquelle elle repose est Θ_{DD} .

- Dans le cadre numérique, un arbre permet de mettre en évidence les différentes étapes du calcul (décomposition en unités de numération des deux nombres, conversion d'une unité (centaine) en unité de rang inférieur (dizaine), utilisation des propriétés de la soustraction sur \mathbb{N}), en évitant l'usage des parenthèses.

$$\begin{array}{l}
 3c5d6u - 7d = 3c + 5d + 6u - 7d \\
 = 35d + 6u - 7d \\
 = 32d + 6u \\
 = 3c2d6u
 \end{array}$$

Figure 3.12 : arbre associé à la mise en œuvre de τ_{CONV}

► **Utilisation de τ_{A10}**

Cette technique, ainsi que celles qui suivent, ont déjà été présentées au paragraphe IV.2.2. Nous ne donnons, dans ce qui suit, que le calcul à effectuer pour les mettre en œuvre.

$$356 - 70 = 356 - 50 - 20$$

► **Utilisation de τ_{N10C}**

$$356 - 70 = 356 - 100 + 30$$

► **Utilisation de τ_{AN}**

$$356 - 70 = 386 - 100$$

► **Utilisation de $\tau_{(1010)}$**

$$356 - 70 = 200 + 150 - 70 + 6$$

- **Second cas : le chiffre des dizaines de a est supérieur au chiffre des dizaines du nombre à soustraire**

Toutes les techniques précédentes s'appliquent ainsi que τ_{1010} .

- *Synthèse*

Une seule technique τ_{CONV} ne sollicite pas le répertoire soustractif sur les multiples de dix, qui doit néanmoins être connu. Les autres techniques sont plus ou moins économiques suivant les nombres en jeu. Il nous semble cependant que $(\tau_{1010})'$ quand le chiffre des unités du nombre auquel on soustrait n'est pas nul, est celle qui risque d'entraîner le plus d'erreurs de calculs dans sa mise en œuvre. Nous ne consacrons pas de paragraphe à l'étude du type de tâches *soustraire un multiple de cent* car l'ensemble des techniques, ostensifs et technologies se recoupe avec ce que nous venons d'étudier. Nous étudions dans le paragraphe suivant le type de tâches correspondant à *soustraire un nombre inférieur à dix*.

IV.2.4. $T_{a-\square}$: soustraire un nombre inférieur à dix

L'ensemble des techniques, ostensifs et éléments de technologie ayant été vu au préalable, nous présentons un tableau synthétisant l'ensemble des techniques en rappelant les technologies savantes qui s'y rattachent. Nous précisons que τ_{1010} et $(\tau_{1010})'$ ont une portée limitée et qu'il est d'usage, quand le nombre que l'on soustrait est supérieur ou égal à 7^{60} , d'utiliser τ_{N10C} et τ_{AN} . D'autre part, les ostensifs utilisés pour exercer les différentes fonctions de la technologie (notamment expliquer) sont toujours l'arbre et un schéma avec appui sur la

⁶⁰Quand le nombre que l'on soustrait est 4 (par exemple), il semble plus coûteux de soustraire dix et d'ajouter six.

droite numérique vide (DNV). La validation, elle, passe par un travail de réécriture du calcul qui convoque OM4.

Le chiffre des unités de a est supérieur ou égal à b	Le chiffre des unités de a est inférieur à b
$317 - 4 = ?$ ▪ τ_{1010} avec pour technologie Θ_{DD} On calcule $310 + 7 - 4$	$315 - 8 = ?$ ▪ $(\tau_{1010})'$ avec pour technologie Θ_D On calcule $300 + 15 - 8$ ▪ τ_{A10} avec pour technologie Θ_D On calcule $315 - 5 - 3$
▪ τ_{N10C} avec pour technologie Θ_D On calcule $(317 - 10) + 6$ ou $(315 - 10) + 2$ ▪ τ_{AN} avec pour technologie Θ_{AN} On calcule $(317 + 4) - 10$ ou $(315 + 2) - 10$	

Tableau.3.3 : techniques utilisées pour soustraire un nombre inférieur à dix

IV.3. Effectuer un calcul soustractif posé en colonne

Dans l'étude épistémologique, au paragraphe IV.2, nous avons caractérisé les techniques existantes pour effectuer un calcul soustractif posé en colonne. Chevallard (1998) parle de technique de nature algorithmique. Nous ne reviendrons pas sur les caractéristiques évoquées alors, ni sur le choix de ne considérer que la technique τ_{AIG} qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts⁶¹ et que nous notons τ_{AIG} pour la distinguer⁶² de τ_{AN} (plus générale). Nous allons compléter notre étude en évoquant le bloc $[T/t]$, le bloc *pratico technique*, puis les éléments de technologie qui sont propres à cette technique.

Nous commençons par présenter un mode d'emploi de la technique (fonction **décrire** de la technologie évoquée au paragraphe IV.1 de ce chapitre).

- *Mode d'emploi de τ_{ALG}*

Le nombre initial doit être placé sur la première ligne. Le nombre à soustraire est placé « en dessous », en alignant ses chiffres sous ceux du premier en partant de la droite. Le calcul s'effectue alors chiffre à chiffre, en partant de la droite. Deux cas sont envisageables :

⁶¹ Les autres techniques de nature algorithmique ont été présentées au § 1.2.1.3.

⁶² Quand on applique τ_{ALG} , on utilise la propriété de conservation des écarts en ajoutant aux deux termes de la différence, un multiple de dix.

1^{er} cas : il n'y a pas de retenue

$$\begin{array}{r} 2 \ 6 \ 7 \\ - \quad 2 \ 4 \\ \hline 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

« Sept moins quatre, trois, j'écris trois sous les chiffres des unités ; six moins deux, quatre, j'écris quatre sous les chiffres des dizaines ; deux moins zéro, deux, j'écris deux sous les chiffres des centaines, le résultat est deux-cent-quarante-trois. »

Cette technique s'apparente à τ_{1010} à la seule différence près, que le calcul n'est pas posé en ligne mais en colonne. Pour calculer $267 - 24$, on a décomposé canoniquement les deux nombres.

$$267 - 24 = (200 + 60 + 7) - (20 + 4) = (200) + (60 - 20) + (7 - 4) = 200 + 40 + 3 = 243.$$

La technologie savante est $\mathbf{O_{DD}}$.

2^{ième} cas : il y a au moins une retenue

$$\begin{array}{r} 2 \ 6 \ 12 \\ - \quad 5 \ 8 \\ \quad \quad 1 \\ \hline 2 \ 4 \ 4 \end{array}$$

« Deux moins huit, ce n'est pas possible, j'inscris deux retenues ; douze moins huit égale quatre, j'écris quatre sous le chiffre des unités, cinq plus un égale six, six moins six égale zéro, j'écris zéro sous le chiffre des dizaines ; deux moins zéro égale deux, j'écris deux sous le chiffre des centaines. »

Le calcul s'effectue par colonnes. Cette technique s'apparente ici à τ_{AN} (au lieu de calculer $262-58$ on calcule $272-68$), mais les transformations s'effectuent **sur les chiffres**. Le choix de l'ajout est fixé génériquement et la compensation automatisée : on ajoute 10 au chiffre du nombre initial qui est inférieur au chiffre correspondant du nombre à soustraire ; on compense en ajoutant 1 au chiffre du nombre à soustraire, qui est immédiatement à gauche. Le « 1 » inscrit devant le 2 correspond à l'ajout de dix unités et le « 1 » inscrit sous le 5 correspond à l'ajout d'une dizaine.

- *Validation de τ_{ALG}*

Pour calculer $262 - 58$, on a décomposé canoniquement les deux nombres et utilisé la propriété de conservation des écarts.

Le calcul effectué en ligne est le suivant :

$$\begin{aligned} 262 - 58 &= (200 + 60 + 2 + 10) - (50 + 8 + 10) = (200 + 60 + 12) - (60 + 8) \\ &= (200) + (60 - 60) + (12 - 8) = 204 \end{aligned}$$

La technologie savante est Θ_{AN} . L'ostensif utilisé est un tableau de trois lignes et d'autant de colonnes que de chiffres du nombre initial.

IV.4. Effectuer un calcul soustractif avec une calculatrice

Nous considérons (et cela suffit pour notre étude) que le calcul instrumenté avec une calculatrice sollicite trois types de tâches :

- effectuer directement le calcul soustractif avec la calculatrice
- vérifier un calcul effectué mentalement ou posé en colonne avec la calculatrice
- utiliser la calculatrice pour motiver un calcul réfléchi (avec touche défectueuse)
- Pour les deux premiers types de tâches, la technique s'appuie sur le repérage des touches indiquant les chiffres et les signes $+$, $-$, $=$. Une suite de calculs additifs et soustractifs sans parenthèse peut s'effectuer au fur et à mesure qu'ils sont tapés
- Le troisième type de tâches permet d'utiliser un milieu matériel différent que celui utilisé ordinairement (papier-crayon, ardoise-feutre, tableau crayon) pour afficher des résultats et montrer des opérations effectuées mentalement⁶³.

V. OM4 : Réécrire un calcul

OM4 va permettre, par le biais de transformations d'expressions mathématiques en expressions mathématiques équivalentes, de justifier les techniques de calcul mental soustractif étudiées dans le paragraphe précédent. Or ces techniques ont été classées en fonction de quatre technologies (cf. tableau 3.2) qui nous permettent d'identifier les types de tâches retenus :

⁶³ Nous renvoyons le lecteur à l'article de Caron (2007) qui présente les multiples avantages à utiliser un environnement tel que celui de la « *La Calculatrice défectueuse* » (Lemoyne, Giroux, René de Cotret, Brouillet, 2005).

- Transformer $a - b$ en $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_p)$ et inversement, avec a_i et b_j entiers naturels pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.
- Transformer $a - b$ en $a - (b_1 + b_2 + \dots + b_p)$ et inversement avec b_j entiers naturels pour $1 \leq j \leq p$.
- Transformer $a - b$ en $(a + c) - (b + c)$ ou $(a - c) - (b - c)$.
- Transformer $a - b = ?$ en $b + ? = a$ et inversement.

Techniques et éléments de technologie : les deux premiers types de tâches nécessitent le fait de transformer une écriture chiffrée (EC) en une écriture additive (EAC). Remarquons que le nombre de termes dépend du nombre de chiffres de a .

► **Pour le premier type de tâches**, les deux nombres sont décomposés. Exemples :

- $347 - 25 = (300 + 40 + 7) - (20 + 5)$.

Dans ce cas, l'écriture des deux nombres est canonique.

- $342 - 25 = (300 + 30 + 12) - (20 + 5)$.

Dans ce cas, l'écriture du premier nombre n'est pas canonique.

La suite des calculs se poursuit en utilisant les propriétés de l'addition et de la soustraction sur \mathbb{N} (cf. chapitre 2, II.3). Les éléments de technologie sont ceux de Θ_{DD} .

► **Pour le second type de tâches**, seul le second nombre est décomposé. Exemples :

- $347 - 25 = 347 - (20 + 5)$.

- $363 - 65 = 363 - (63 + 2)$.

- $363 - 90 = 363 - (100 - 10)$.

Quand l'écriture additive du nombre à soustraire est canonique, la technique est τ_{N10} .

Quand l'écriture n'est pas exclusivement additive et fait intervenir des puissances de dix, la technique en jeu est τ_{N10C} . Dans tous les cas, comme précédemment, les calculs se poursuivent en utilisant les propriétés de l'addition et de la soustraction sur \mathbb{N} . Les éléments de technologie sont ceux de Θ_D .

Pour le troisième type de tâches, on ajoute (ou on soustrait) un même nombre aux deux termes du calcul. Les éléments de technologie sont ceux de Θ_{AN} .

Pour le dernier type de tâches, les éléments de technologie sont ceux de $\Theta_{SOUS/ADD}$.

VI. Conclusion

Notre étude nous a conduite à mettre en évidence et à justifier les liens entre quatre organisations mathématiques locales (figure 3.1), OM1, construite autour de la production de calculs additifs et soustractifs, OM2, basée sur la traduction et l'association de différentes représentations sémiotiques, OM3 propre à l'effectuation des calculs et OM4, centrée sur la recherche d'équivalence d'écritures.

En affinant notre analyse des genres, des types de tâches propres à OM3, nous avons montré comment le calcul mental et le calcul posé en colonne peuvent être fédérés au moyen de deux technologies Θ_{DD} et Θ_{AN} . Ce résultat est important car il renvoie à la nécessité de savoir décomposer les nombres et de connaître la propriété de conservation des écarts, pour justifier mathématiquement trois techniques qui sont τ_{1010} , τ_{AN} et τ_{AIG} ; la dernière étant de nature algorithmique et appliquée au calcul soustractif posé en colonne.

Nous avons également évoqué une autre technologie Θ_D qui génère trois techniques séquentielles τ_{N10} , τ_{A10} et τ_{N10C} , utilisées exclusivement en calcul mental, et, pour finir, $\Theta_{ADD/SOUS}$, qui renvoie à la définition de la soustraction comme l'opération « inverse » de l'addition.

Dans de nombreux calculs, nous avons utilisé un arbre à calcul ou un schéma avec appui sur la droite numérique vide pour expliquer voire valider la technique envisagée. Ces ostensifs permettent de montrer les différentes étapes d'un calcul, leur enchaînement, ou de visualiser l'écart entre deux nombres. D'autres fonctions de la technologie sont importantes et ont été relevées au fil du texte, notamment celle qui consiste à motiver la technique (en analysant la nature et la taille des nombres en jeu) ou à l'évaluer, en considérant sa portée (nous pensons à τ_{1010}) ou en la comparant à d'autres (τ_{N10C} et τ_{AN} sont supérieures quand le nombre à soustraire est proche d'un multiple de dix ; $\tau_{SOUS/ADD}$ est supérieure quand l'écart entre les deux termes du calcul est petit).

C'est à partir de l'organisation mathématique de référence que nous venons de construire, que nous allons définir une grille d'analyse, dans le chapitre 4, qui nous servira pour analyser deux manuels, à la charnière du CE1 et CE2, puis, pour concevoir une ingénierie didactique pour le CE2.

Chapitre 4

Problématique et méthodologie

L'objet de ce chapitre est de présenter la méthodologie que nous avons retenue pour construire une *ingénierie* qui vise, selon Perrin-Glorian (2011), trois fonctions non indépendantes : une fonction de recherche, qui fait apparaître et étudie des phénomènes didactiques, une fonction de développement, qui se manifeste par la production de ressources, une fonction de formation, qui vise l'apprentissage professionnel des enseignants à travers l'analyse de la production et la modification de situations pour les élèves.

Ces trois fonctions non indépendantes ne peuvent pas être envisagées, selon Margolinas (2007), en se référant à un schéma classique :

Dans une vision que nous qualifierons ici de « classique » on imagine – idéalement – une sorte de chaîne descendante de la recherche fondamentale à l'ingénierie, au développement et à l'enseignement qui, pour sa part, fournit en retour une partie des questions pour la recherche fondamentale.
(Margolinas, 2007, p.26)

D'où la nécessité de construire un modèle d'ingénierie en tension entre deux pôles, celui de la recherche et celui de l'enseignement, et d'arriver à établir des allers-retours entre les deux. Pour y parvenir, nous avons parallèlement répondu à des questions théoriques sur le calcul et son enseignement, et analysé des pratiques à partir d'observations de classe et d'analyse de manuels. Le schéma ci-dessous (commenté juste après) indique les axes de la recherche et son enjeu : élaborer une ingénierie complète au sens de l'organisation mathématique et opérationnelle dans un contexte de classe ordinaire.

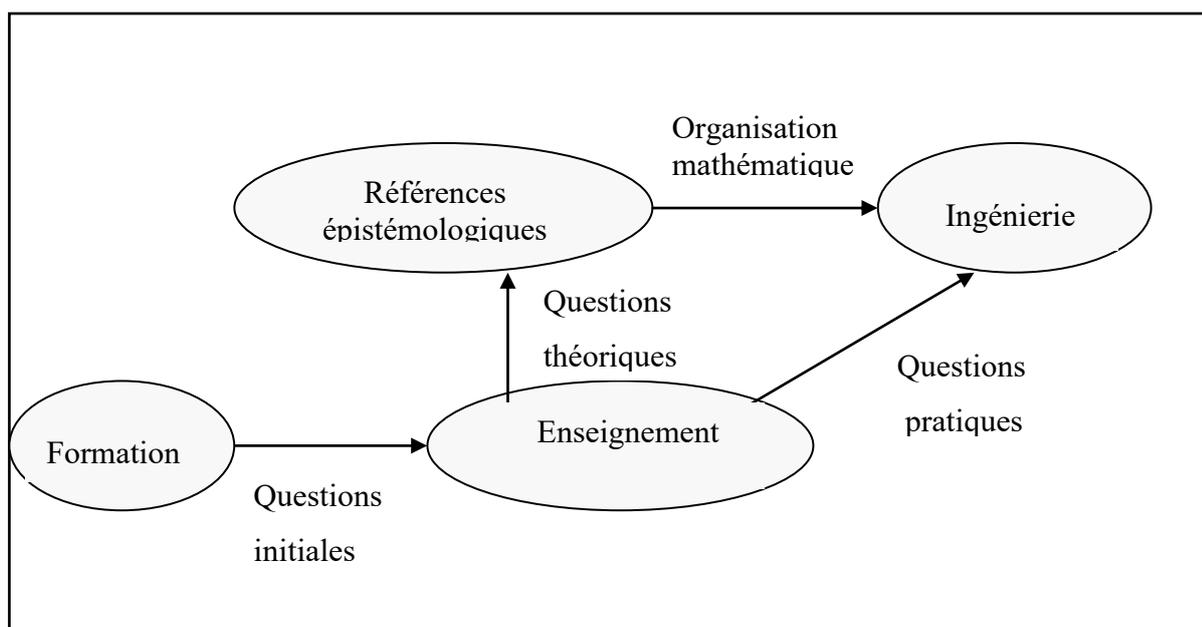


Figure 4.1 : les différents axes de la recherche en vue d'élaborer l'ingénierie

De nos préoccupations de formatrice, dans un contexte particulier lié à un changement de programme, sont venues nos questions initiales et des premières hypothèses sur les besoins en termes d'apprentissage des élèves (chapitre 1). L'élaboration d'une référence épistémologique sur le calcul et son enseignement (chapitre 2) nous a permis de répondre à certaines questions théoriques et nous a amenée à concevoir une organisation mathématique de référence relative au calcul soustractif sur les entiers naturels (chapitre 3). Dans ce chapitre (le chapitre 4), nous formulons nos questions de recherche et nos hypothèses de travail, puis

nous précisons la méthodologie retenue pour analyser les manuels (analyse qui sera faite au chapitre 5) et recueillir des informations sur les pratiques de trois enseignants. Une analyse des données recueillies nous permettra de revenir sur nos questions de recherche (liées à l'organisation mathématique de référence) pour formuler une première problématique (problématique1).

I. Questions de recherche et hypothèses de travail

Nous cherchons à élaborer une ingénierie qui fédère le calcul mental et le calcul posé autour de deux technologies principales θ_{DD} et θ_{AN} , identifiées au chapitre 3 et répertoriées dans le glossaire. Nous voulons également introduire différents types de tâches propres à OM2 *transformer et associer des types de représentations sémiotiques* et OM4 *réécrire un calcul soustractif*, afin d'expliquer et de valider l'ensemble des techniques de calcul soustractif. Afin d'y parvenir, il nous semble nécessaire, en amont, de prendre des informations sur les pratiques enseignantes à partir d'observation de classe et en conduisant une analyse de manuels.

En effet, nous retenons **trois hypothèses de travail** :

- L'intégration d'une organisation mathématique relative au calcul soustractif sur les entiers naturels sera plus conforme à nos attentes si nous ne nous éloignons pas trop des habitudes des enseignants.
- L'observation de pratiques des enseignants nous aidera à préciser leurs habitudes, notamment les contrats mis en œuvre (institutionnalisation des éléments technologiques) et à concevoir une ingénierie qui s'inscrit dans une **ZPDP**- zone proximale de développement des pratiques. L'idée est empruntée à Robert (2013) qui précise :

« Les pratiques des enseignants expérimentés manifestent une grande stabilité des gestions, en régime de croisière du moins. Cela amène à être très vigilant à ce que les enrichissements proposés puissent s'inscrire dans des habitudes, quitte à ce que ces évolutions accompagnées se fassent, petit à petit. »
(Robert, 2013, p.54 & p.55)

- L'analyse de manuels nous permettra d'avoir accès à des pratiques d'enseignement « plus génériques » des calculs soustractifs, notamment pour déterminer quelles sont les organisations mathématiques développées et les organisations didactiques proposées relatives au calcul soustractif sur les entiers naturels.

II. Précisions méthodologiques

Dans ce paragraphe, nous spécifions les modalités envisagées et les outils utilisés, afin d'établir une grille d'analyse de manuels en rapport avec nos questions de recherche, puis de recueillir et analyser des données relatives à des pratiques spécifiques.

II.1. En lien avec l'analyse de manuels

L'analyse de manuels sert à identifier (reconstruire) l'organisation mathématique choisie par les auteurs et permet de comparer cette organisation mathématique à l'organisation mathématique de référence relative au calcul soustractif sur les entiers naturels élaborée au chapitre 3. L'analyse permet aussi de donner accès à l'organisation didactique retenue par les auteurs (situation de découverte, application ou entraînement, leçon, contrôle de connaissances).

Pour mener à bien une étude minutieuse, et tirer des informations sur les pratiques « génériques » d'enseignants, nous avons ciblé deux collections dont les auteurs ont des profils différents :

- ✓ Pour la première, *Euro Maths*, éditions Hatier (2010), les auteurs principaux sont des chercheurs en didactique des mathématiques.
- ✓ Pour la seconde, *Outils pour les maths*, édition Magnard (2012), les auteurs principaux sont considérés comme davantage praticiens (professeur des écoles et conseiller pédagogique).

Pour chaque collection, nous avons consulté les manuels de CE1 et de CE2 ainsi que les guides pour l'enseignant car ils apportent des informations supplémentaires sur les organisations retenues et donnent des éléments propres à l'organisation des séquences. Au total, nous disposons de huit manuels.

Cette étude met en avant pour chaque organisation mathématique locale *produire un calcul* (OM1) *mettre en relation des types de représentation sémiotique* (OM2), *effectuer un calcul soustractif* (OM3) et *réécrire un calcul soustractif* (OM4), les types de tâches existants en CE1, maintenus en CE2 et nouveaux en CE2, et pour une même tâche, les techniques, les éléments de technologie et les ostensifs retenus par les auteurs. Remarquons (c'est aussi une différence entre les collections) que les manuels destinés aux élèves et à l'enseignant des deux

collections sont structurés de façon radicalement différente. En effet, *Euro Maths* adopte une programmation plutôt « spiralaire », alors qu'*Outils pour les Maths* organise la programmation des contenus de façon linéaire, rubrique après rubrique en reprenant les thèmes des programmes 2008. En effet, *Euro Maths* organise ainsi plusieurs rencontres différées dans le temps autour d'un même type de tâche, avec l'objectif de reprendre ou de faire évoluer les techniques étudiées, alors qu'*Outils pour les Maths* revient sur un type de tâche avec l'intention de réinvestir l'ensemble des acquis en modifiant les variables de commande (domaine numérique, contexte,...). On peut noter qu'*Outils pour les Maths* étant davantage cloisonné permet de repérer, plus facilement qu'*Euro Maths*, ce qui relève de OM1, OM2, OM3 et OM4.

Pour ce qui est lié à la production de calculs (OM1), nous nous basons sur les situations de découverte, exercices et leçons qui portent sur « l'addition et la soustraction », donc indirectement à la résolution de problèmes. Nous cherchons également, en lien avec cette organisation mathématique locale, des tâches propres à OM2, OM3 et OM4. A première lecture, les attentes des auteurs sont différentes. Les uns attendent un calcul donné en ligne, les autres uniquement le nom de l'opération. Les uns s'appuient sur des schémas avec droite numérique, les autres sur des représentations de collections d'objets. Autant de différences qui méritent d'être prises en considération pour analyser la complétude de l'organisation mathématique à enseigner par rapport à l'organisation mathématique de référence.

Pour ce qui est lié à l'effectuation de calcul (OM3), les deux collections ont également des parties bien identifiées qui correspondent au calcul mental et au calcul posé. Au premier abord, notons que les types de tâches propres au calcul mental sont sensiblement différents dans les deux collections. Dans la conduite de notre analyse, nous serons particulièrement attentive au fait de savoir quelles techniques sont enseignées et dans quel but. Nous chercherons à savoir si ces techniques sont effectivement élaborées ou seulement ébauchées, si elles sont suffisamment intelligibles et évaluées de manière satisfaisante. Nous examinerons les types de tâches propres à la réécriture de calculs soustractifs en ligne (OM4) et les ostensifs (OM2), introduits pour expliquer et faciliter la mise en œuvre des techniques.

Les deux collections proposent d'utiliser la technique de la soustraction en colonne qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts. Nous analyserons les situations que les auteurs proposent pour l'introduire. Nous préciserons si la présence des retenues est

considérée tacitement comme allant de soi, évidente. Nous chercherons quel est le statut de la propriété de conservation des écarts, quelle est sa portée.

Mais avant d'engager cette analyse de manuels, qui sera effective au chapitre 5, nous allons poursuivre notre questionnement sur les pratiques spécifiques propres à l'enseignement du calcul soustractif.

II.2. En lien avec l'observation de séances

Pour observer des pratiques avant d'élaborer l'ingénierie, nous avons choisi de retravailler avec l'enseignante qui nous avait ouvert sa classe dans le cadre du MASTER2, et proposer à deux enseignants de CE2 affectés dans des écoles de Beauvais (Oise), de profils sociologiques différents, de se joindre à nous. La première école, l'école A, est située au centre ville. Elle accueille des élèves de milieux divers. La seconde école, l'école B est située dans un quartier de pavillons qui jouxte le centre ville. Elle accueille des enfants du quartier qui appartiennent en majorité à la classe moyenne. La troisième école, l'école C est classée en Zone Prioritaire.

II.2.1. Modalités retenues

Après avoir conduit avec chaque enseignant un entretien en tête à tête à partir d'un questionnaire⁶⁴ présenté en annexe B.1, nous avons observé deux séances consécutives de calcul mental, dans chaque classe, préparées par eux seuls. Nous n'avons pas eu à notre disposition les documents qui ont servi aux enseignants pour préparer leur séquence. Suite à cette première série d'observations, nous avons tiré un premier bilan et proposé par la suite, à chaque enseignant, d'expérimenter plusieurs situations (voir le tableau récapitulatif de ces situations en annexe B.2). Les scénarios écrits que nous avons conçus et donnés aux enseignants servent de base aux séances qu'ils ont conduites. Nous avons assisté à l'intégralité des séances. Nous tirons de ces observations de classe les points saillants relatifs aux phases de recherche, de synthèse et d'institutionnalisation locale, afin de comprendre la façon dont les enseignants ont intégré les propositions sur les plans cognitif et médiatif, au sens de Robert et Rogalski (2003).

⁶⁴ Ce questionnaire doit servir de trame à l'entretien. Cet entretien doit mettre les enseignants en confiance pour qu'il nous indique leurs projets d'enseignement. Nous employons le tutoiement car nous connaissons deux enseignants sur les trois (une par le biais du MASTER, l'autre par le biais de l'Institut de formation des maîtres).

II.2.2. Outils choisis pour l'analyse

Dans le but de connaître des éléments significatifs sur les projets d'enseignement des enseignants sur le calcul mental et posé, au regard de chaque entretien, nous nous appuyons sur les nécessités professionnelles que Roditi (2003) a mises en avant et nommées principes⁶⁵ : principe de conformité au programme officiel (1), principe d'efficacité pédagogique (2), principe de clôture du champ mathématique (3), principe de nécessité de succès d'étape (5), principe de l'attente des élèves(6).

Par la suite, pour analyser les séances observées de calcul mental, nous pointons deux composantes définies par Robert et Rogalski (2003), la composante cognitive, qui met en avant les choix de l'enseignant en termes de contenus mathématiques travaillés, et la composante médiative, qui s'intéresse au déroulement de la séance.

« La composante cognitive traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle renseigne donc sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant.

Les choix correspondants aux déroulements, les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation de la tâche, les validations, les expositions de connaissances, incrémentent la composante, médiative. Elle renseigne sur les cheminements organisés pour les différents élèves. » (Robert, 2008, p.58)

A partir des notes que nous avons prises, des vidéos et de leurs transcriptions, nous repérons quelles activités sont proposées aux élèves et dans quel but, dans deux séances de calcul mental consécutives. Notre objectif est de considérer en premier lieu la chronologie de la séance, des deux séances, les différentes phases qui la (les) constituent, les invariants, s'ils existent d'une séance à l'autre. Une phase est un temps de la séance caractérisée par le but que l'enseignant veut atteindre (but déclaré ou reconstruit par nous). Nous cherchons à identifier les phases qui correspondent à des phases de dévolution, de recherche, de synthèse et éventuellement d'institutionnalisation.

Nos questions portent sur les tâches proposées. Sont-elles simples et isolées, au sens de Robert ? Sont-elles nombreuses et inscrites dans une progression qui dépasse la séance ? Est-il demandé aux élèves de rendre intelligibles les techniques qu'ils utilisent ? Comment

⁶⁵ Principes énoncés page 210.

apparaissent alors les éléments technologiques ? Quels sont les ostensifs utilisés ? Quelle est la répartition des responsabilités face à la construction du savoir ?

Les réponses apportées vont nous amener à dresser un premier bilan. En fonction de ce bilan et au regard de l'organisation mathématique de référence relative au calcul soustractif sur les nombres entiers, nous proposerons aux enseignants de travailler davantage certaines tâches propres à l'une ou l'autre des organisations mathématiques locales (production de calculs, transformations de représentations sémiotiques, réécriture de calculs ...) et de les travailler éventuellement de façon différente, en apportant notamment une importance accrue aux fonctions de la technologie (justifier, expliquer,...). Nous serons donc amenée à élaborer des situations qui motivent l'étude de ces tâches (absentes et pourtant nécessaires au vu de l'Organisation Mathématique de référence élaborée au chapitre 3). La façon dont s'empare ensuite chaque enseignant de ces situations nous permettra d'évaluer leur potentiel en vue de les intégrer. Cette expérimentation et les conclusions que nous en tirerons (second bilan) doivent nous amener à définir des conditions de viabilité pour l'ingénierie sur le calcul soustractif sur les entiers naturels à concevoir (chapitre 6) et nous permettre d'envisager des pistes pour programmer et organiser l'étude.

III. Vers un premier bilan suite aux observations non participatives de classe

Comme annoncé au paragraphe II.2, nous présentons les informations tirées des entretiens sur les projets d'enseignement des enseignants des classes A, B et C, avant d'analyser les séances observées dans les classes et de dresser un premier bilan.

III.1. Informations sur les différents projets d'enseignement

Afin de mieux connaître les projets des enseignants sur le calcul mental et posé, nous avons demandé à chaque professeur de répondre à des questions préparées à l'avance (annexe B.1). Malgré les questions un peu trop ouvertes⁶⁶, et les difficultés que nous avons eues pour faire « expliciter » leurs pratiques aux enseignants, des informations précieuses ressortent sur les parcours de chacun, leurs représentations du calcul mental et leurs usages du procédé La Martinière⁶⁷.

⁶⁶ Les entretiens auraient d'ailleurs gagné à être moins formels et davantage ciblés.

⁶⁷ Le procédé introduit au 19^e siècle dans l'école La Martinière consiste à utiliser l'ardoise et obéit à l'origine à des règles strictes : le maître pose une question. Le maître laisse les élèves réfléchir quelques instants. Au

	Classe A	Classe B	Classe C
Enseignant	13 ans d'ancienneté	8 ans d'ancienneté	36 ans d'ancienneté
	CAFIPEMF obtenu en 2008	Direction de l'école depuis 2010	
	Enseigne en CE2 depuis quatre ans	Enseigne en CE2 depuis deux ans	Enseigne en CE2/CM1 depuis trois ans
Evaluations CE1	Prises en compte pour repérer les difficultés des élèves et différencier dès le début de l'année.		
Manuels	Enseignant : aucun Elève : aucun	Enseignant : « A portée de maths » (Hachette Education, 2009) car il est bien structuré Elève : aucun	Enseignant : aucun en particulier Elève : « Compagnon maths » (SEDRAP, 2009)
Importance du calcul mental du côté enseignant	Importance de la rapidité	Pratique régulière nécessaire pour progresser.	Compréhension des rapports entre les nombres. Gymnastique de l'esprit qui s'acquiert en s'entraînant.
Utilité du calcul mental perçu par les élèves (selon eux)	Utile pour effectuer un calcul posé avec des grands nombres	Utile si on l'associe à la résolution de problèmes.	Aucune s'il n'est pas rattaché à des situations concrètes.
Utilité du procédé La Martinière	Impératif de faire vite et bien	Utiliser l'ardoise rend la recherche de résultats moins solennelle.	Il plait aux enfants et change du papier crayon

Tableau 4.1 : Eléments relatifs aux parcours professionnels, aux représentations du calcul mental et aux usages du procédé La Martinière des enseignants A, B et C

Nous sommes en présence de trois enseignants expérimentés qui ne « découvrent » pas le CE2, mais qui ont moins de cinq ans d'ancienneté dans ce niveau de classe. Un seul parmi eux a un manuel de référence « *A portée de maths* » pour construire sa programmation et ses leçons de mathématiques. Tous ont un discours un peu convenu sur l'utilisation des résultats des évaluations en CE1. Ils évoquent la différenciation mais sans donner, concrètement, les modalités qu'ils ont mises en place pour adapter leur enseignement aux besoins des élèves.

Ces entretiens permettent d'extraire quelques idées qui émergent et qui traduisent le rapport de ces trois enseignants du premier degré avec le calcul mental. En premier lieu, les trois enseignants font faire du calcul mental à leurs élèves, à raison en moyenne de vingt

premier signal, les élèves écrivent la réponse. Au second signal, ils lèvent leurs ardoises. Le maître contrôle les résultats et corrige.

minutes par jour. Ils appliquent les recommandations des instructions officielles (principe 1 de Roditi énoncé plus haut). Pour eux, le calcul mental s'apparente au calcul sans support papier. Ils n'évoquent pas le calcul en ligne. Le côté pragmatique du calcul mental est prédominant. Il est nécessaire et suffisant de pratiquer, de s'entraîner (deux enseignantes évoquent la gymnastique) pour progresser. Notons que le terme « d'automatisme » présent dans les instructions officielles n'est pas repris. L'idée sous-jacente d'acquérir des automatismes n'est pas évoquée en ces termes. Seule, l'enseignante de la classe C évoque la valence épistémique du calcul mental en effleurant l'idée qu'il existe « un rapport de compréhension entre les nombres ». Sinon, l'enseignante qui associe calcul mental et rapidité justifie en partie, ainsi, l'utilisation du procédé La Martinière, alors que les deux autres enseignants choisissent cette modalité car ils pensent que le fait de « lever » l'ardoise motive les élèves ou que le fait « d'effacer » autorise l'élève à se tromper.

Pour les trois enseignants, le calcul mental est bien perçu et bien vécu par les élèves car les modalités choisies sont différentes des modalités habituelles. Le statut de l'erreur n'est pas le même. Comme le dit un enseignant, elle n'est pas soulignée en rouge ou en vert mais aussitôt faite, aussitôt effacée. Autre constat, chaque enseignant pense que la pratique du calcul mental doit être rattachée à des situations concrètes, à la résolution de problèmes ou au calcul posé pour avoir du sens auprès des élèves. Et pour finir, les trois enseignants sont « satisfaits » d'enseigner le calcul mental. On peut supposer que les exercices d'entraînement qu'ils proposent permettent d'évaluer à court terme des réussites chez les élèves (principe 5 de Roditi énoncé plus haut). Ils ne se questionnent pas sur leurs pratiques, ni sur les techniques et technologies mobilisées par les élèves et ne parlent pas, même indirectement, de certains élèves qui, eux, seraient en difficulté. La différenciation pédagogique dans ce domaine n'est pas mentionnée. Quand nous avons abordé la question de l'aide individualisée, les réponses sont restées évasives. Autre élément surprenant, aucun n'évoque « le calcul réfléchi », pourtant tous les trois sont des enseignants expérimentés qui ont eu à mettre en œuvre les programmes de 2002. Peut-être que la forme de l'entretien (orale), sans préparation, ne permet pas d'être exhaustif sur sa pratique.

En conclusion, ces entretiens montrent que les enseignants ne sont pas « vraiment demandeurs » de nouveaux projets pour l'enseignement du calcul mental soustractif. Pour Margolinas (2007) et Robert, Roditi et Grugeon (2007), comme ils ne sont pas confrontés à une « crise grave », ils accepteront de renouveler leurs pratiques « mais toujours dans un

cadre suffisamment stable », sans changements radicaux. Cela confirme la nécessité de mieux cerner la façon dont ils enseignent pour leur proposer, par la suite, une organisation mathématique et didactique qui ne les déstabilisera pas d'emblée (hypothèse de travail 1).

III.2. Analyse des séances de classe observées

Les séances que nous avons observées se sont déroulées courant décembre 2010. En se basant sur les programmations établies par les enseignants, les élèves ont à cette période de l'année, une connaissance de l'addition et de la soustraction, des opérations en elles-mêmes (la façon dont on les note, le vocabulaire associé) et de leur utilité pour résoudre des problèmes numériques. Ils maîtrisent les répertoires additifs et soustractifs. Ils savent tous poser une addition en colonne et viennent d'apprendre l'algorithme de la soustraction posée en colonne (celui qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts).

Pour répondre à notre demande explicite, dans le cadre d'*observation non participative*, les enseignants ont mis en œuvre des séances « ordinaires » qui s'inscrivent habituellement dans leur programmation. Nous présentons ci après nos analyses en suivant la méthodologie exposée au paragraphe II.1.

III.2.1. Analyses relatives à la classe B

- *Séance 1*

Vu que nous n'avons pas à notre disposition le canevas de la séance, les objectifs qu'elle vise et les compétences sur lesquelles elle s'appuie, nous sommes amenée à reconstruire en fonction des différents épisodes de la séance et de leur enchaînement, la composante cognitive. C'est pourquoi, nous présentons nos observations (en suivant la chronologie du déroulement) avant d'effectuer une analyse praxéologique.

Le maître indique aux élèves qu'ils vont faire du calcul mental. Il utilise le tableau blanc interactif (TBI) pour afficher une aide qui, dit-il, sera utile en fin de séance. Il n'en dit pas plus. L'enseignant utilise une variante du procédé La Martinière (cf. § III.1)⁶⁸. Chaque élève (ils sont vingt-cinq en classe) utilise son ardoise. Le maître propose une première série de cinq calculs, posée oralement. Après chaque calcul, il laisse du temps aux élèves pour qu'ils puissent trouver le résultat. Les élèves n'ont pas à transcrire l'égalité numérique. Il faut

⁶⁸ Il donne plusieurs (et non pas un) calculs à effectuer en temps limité.

simplement qu'ils notent le résultat. Le fait que les élèves aient plusieurs calculs à effectuer avant de lever l'ardoise leur permet éventuellement, entre deux calculs, de changer ou de réutiliser telle ou telle technique, sans être influencés par une phase de mise en commun ou de correction intermédiaire. Voici les calculs proposés et l'analyse praxéologique que nous en faisons :

Calculs	La tâche est $T_{\square+\square}$	Techniques
5 + 7	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dans un seul cas $\square+\square \leq 10$ ▪ Sur trois calculs un des termes vaut 5. Sur deux calculs, un des termes vaut 7 (respectivement 8). ▪ Dans le premier et l'avant dernier calcul, le premier terme est inférieur au second. 	Une technique est recensée dans OM3 : elle consiste à restituer des faits numériques connus (τ_{REP}).
5 + 3		
4 + 8		
7 + 8		
9 + 5		

Tableau 4.2 : analyse praxéologique 1^{ère} série de calculs

Cette série terminée, l'enseignant demande aux élèves de présenter leurs résultats et interroge certains d'entre eux.⁶⁹ Il ne leur demande pas d'explicitier leurs procédures. Il suppose peut-être que la majorité d'entre eux connaissent les résultats de ces calculs additifs « par cœur ». Nous avons cependant observé six à sept élèves qui comptaient sur leurs doigts.

Le maître passe ensuite à la deuxième série de calculs (toujours additifs) après avoir annoncé qu'ils étaient plus difficiles.

Calculs	La tâche est $T_{a+\square\square}$	Techniques
11 + 12	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dans tous les calculs, la somme des chiffres des unités est inférieurs à 10. ▪ Sur deux calculs le chiffre des dizaines du nombre qu'on ajoute vaut 1 (respectivement 2). ▪ Dans l'avant dernier calcul, le premier terme est inférieur au second. 	Deux techniques sont envisageables : <ul style="list-style-type: none"> ▪ ajouter au nombre a un nombre entier de dizaines puis un nombre inférieur à dix (τ_{N10}). ▪ ajouter les chiffres des unités entre eux et les chiffres des dizaines entre eux pour trouver les chiffres du résultat (τ_{1010}) valable si la somme des chiffres est inférieure à 10.
23 + 12		
32 + 22		
15 + 41		
63 + 24		

Tableau 4.3 : analyse praxéologique 2^{ème} série de calculs

Là encore, l'enseignant demande aux élèves de présenter leurs résultats et choisit d'interroger un élève par calcul. Pour le calcul de *quinze plus quarante et un*, il interroge un élève qui

⁶⁹ Comme nous sommes placée au fond de la classe, nous n'avons pas pu voir s'il y avait des erreurs de calcul sur certaines ardoises.

trouve pour résultat *soixante-cinq*, qui est incorrect. A la question « *comment as-tu fait ?* », l'élève répond « *j'ai fait un plus quatre et cinq plus un.* ». Le maître lui indique de suite qu'il a inversé le chiffre des unités avec le chiffre des dizaines. Il ne demande pas de validation de la réponse aux autres élèves. A partir d'un résultat faux, la technique τ_{1010} finit par être en partie explicitée oralement par l'enseignant, à partir des unités de numération. La série finie, le maître conclut en disant que, tout compte fait, comme il n'y avait pas de retenue, il suffisait de connaître ses tables pour trouver le résultat.

Calculs	La tâche est $T_{a-\square}$	Techniques
12 – 5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dans tous les calculs, le nombre a est supérieur à 10 et inférieur à 25 ▪ Dans tous les calculs (sauf un), le nombre à soustraire est supérieur ou égal à cinq. 	Quatre techniques sont répertoriées dans OM3 : <ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{REP} ▪ τ_{A10} ▪ τ_{N10C} ▪ τ_{AN}
11 – 3		
14 – 5		
17 – 8		
24 – 9		

Tableau 4.4 : analyse praxéologique 3^{ième} série de calculs

Pour le calcul de *dix-sept moins huit*, l'enseignant interroge un élève qui explique *qu'il a calculé dix-sept moins sept puis enlevé un à dix*. Un autre élève lève spontanément le doigt pour exposer sa procédure qui consiste à *soustraire dix et à ajouter à sept, le nombre deux*. Le maître ne questionne pas les autres élèves pour connaître la technique qu'ils ont utilisée. Il n'y a pas de comparaison des techniques et pas de hiérarchisation.

Calculs	La tâche est $T_{a+\square 0}$	Techniques
20 + 40	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dans tous les calculs sauf le dernier, le nombre auquel on ajoute un multiple de dix est un multiple de dix. 	Trois techniques sont envisageables. Elles consistent à restituer des faits numériques connus (τ_{REP}) ou à convertir les nombres en dizaine d'unités (τ_{CONV}) ou encore à ajouter les chiffres des unités entre eux et les chiffres des dizaines entre eux pour trouver les chiffres du résultat (τ_{1010}).
30 + 50		
40 + 30		
30 + 70		
64 + 40		

Tableau 4.5 : analyse praxéologique 4^{ième} série de calculs

Pour le calcul de *soixante-quatre plus quarante*, l'enseignant interroge un élève qui a écrit sur son ardoise *soixante-huit*. Pour la première fois de la séance, l'enseignant inscrit le calcul à effectuer au tableau et propose un schéma :

$$64 + 40$$


L'enseignant commente à l'oral : « six dizaines plus quatre dizaines, dix dizaines ; quatre unités plus zéro unité, quatre unités ».

Deux types d'ostensifs sont utilisés. Les écritures chiffrées (EC) à l'écrit et les unités de numération (UN) à l'oral pour expliquer la mise en œuvre de τ_{1010} .

Calculs	La tâche est $T_{a-\square 0}$	Techniques
50 – 10	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dans trois calculs, le nombre auquel on soustrait un multiple de dix est un multiple de dix. 	Trois techniques sont envisageables. Elles sont répertoriées dans OM3. Il s'agit de : <ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{REP} ▪ τ_{CONV} ▪ τ_{1010}
40 – 20		
60 – 30		
43 – 30		
96 – 40		

Tableau 4.6 : analyse praxéologique 5^{ème} série de calculs

Les élèves ont visiblement tous trouvé les résultats attendus. Aucun n'expose sa procédure à l'ensemble du groupe classe. La dernière série ne porte pas sur le calcul additif et soustractif. Il s'agit de trouver le double de 12, le triple de 6, la moitié de 18, le quadruple de 5 et le tiers de 21.

Je multiplie	Je partage
Double	Moitié
Triple	Tiers
Quadruple	quart



L'aide évoquée par l'enseignant en début de séance est le schéma ci-contre.

Là encore, chaque élève interrogé donne le « bon » résultat. Les procédures utilisées ne sont pas explicitées.

Avant de poursuivre en présentant une synthèse de notre analyse praxéologique sous forme de tableau (tableau 4.7), nous précisons que la deuxième séance observée dans la classe B était construite exactement sur le même modèle. Le maître indique d'ailleurs, avant de commencer, « *qu'il ne change pas ses habitudes. On fait des séries de cinq et après on corrige.* »

Séances 1&2	Entraînement (35 minutes)	Entraînement (35 minutes)
Modalités	Variante du procédé La Martinière	
Nombres de calcul	30 (6×5)	25(5×5)
Consignes	Le maître donne oralement, un à un, cinq calculs à effectuer. Il laisse du temps entre deux calculs pour que les élèves puissent chercher et noter le résultat sur leurs ardoises. Il demande à tous les élèves de présenter leurs résultats à la fin de la série. Il interroge ensuite un élève pour que celui-ci donne oralement le résultat.	
Phases	Recherche et correction	
Types de tâches	<ul style="list-style-type: none"> ▪ répertoire additif ($T_{a+\square}$). ▪ addition de deux nombres à deux chiffres sans retenues ($T_{a+\square\square}$). ▪ soustraction d'un nombre à un chiffre ($T_{a-\square}$). ▪ addition d'un multiple de dix ($T_{a+\square 0}$). ▪ soustraction d'un multiple de dix ($T_{a-\square 0}$). ▪ recherche de double, tiers, triple, quadruple,... 	
Tâches du même type	Les tâches du même type sont regroupées dans une même série de calculs.	
Variables didactiques	Dans une série, une à deux techniques semblent attendues .	
Validation	Par le maître, le résultat est donné oralement et parfois justifié. Peu de responsabilité laissée à la charge des élèves dans la validation.	
Statut de l'erreur	Parfois, une technique est évoquée lors de la correction mais l'enseignant ne cherche pas à faire une typologie des erreurs ni à s'assurer que les élèves qui ne trouvent pas la réponse comprennent pourquoi.	
Techniques mises en avant par l'enseignant	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{REP} ▪ τ_{1010} ▪ τ_{N10C} (ajouter 9) 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{A10} ▪ τ_{CONV}
Ostensifs utilisés	Nom des nombres. Unités de numération. Une seule fois ? écriture chiffrée.	
Éléments de Technologie	Peu présents	
Institutionnalisation locale	Absente	

Tableau 4.7 : éléments d'analyse des séances 1&2 classe B

Les éléments d'analyse relevés suite à l'observation des deux séances laissent à penser que l'enseignant de la classe B construit ses séances de calcul mental en choisissant une modalité proche du procédé La Martinière (Cf. plus haut). Le déroulement envisagé montre une alternance entre plusieurs phases de recherche entrecoupées de phases de validation. Sur le plan cognitif, les cinq tâches qui correspondent à une série de calcul appartiennent à un type de tâche précis. A vu des nombres en jeu, une, voire deux techniques sont attendues et mises en avant par l'enseignant. Ce constat nous amène à apparenter ces exercices à des assortiments, au sens de Genestoux (2002). Nous développons cette idée au paragraphe III.3 après avoir analysé les séances observées dans la classe C.

III.2.2. Analyses relatives à la classe C

- *Séance 1*

Faute d'analyse *a priori* de la séance, nous reconstruisons la composante cognitive à partir de nos observations. Comme précédemment, nous présentons le déroulement de la séance et une analyse praxéologique.

La maîtresse demande aux élèves de sortir leurs ardoises, puis annonce le thème de la séance « *on va réviser ajouter 7* ». Elle écrit le calcul à effectuer au tableau ($3 + 7 =$). L'élève note le résultat sur son ardoise et présente son résultat dès qu'il a fini. Quand un nombre suffisant d'ardoises est levé, l'enseignant donne la réponse et l'inscrit à droite du signe égal ($3 + 7 = 10$). Elle « passe » alors au calcul suivant. Les erreurs, s'il y en a, ne sont pas relevées. Arrivée au cinquième calcul ($9 + 7 =$), elle met en avant une technique qui permet d'ajouter ($9 + 7 = 10 + 7 - 1$) et, au sixième calcul ($6 + 7 =$), une technique basée sur le passage à la dizaine supérieure ($6 + 7 = 6 + 3 + 4$), sans proposer de technique basée sur la connaissance des doubles ($6 + 7 = 6 + 6 + 1$).

Pour trouver $9+7$: « *On se dit que 9 c'est presque 10. $10+7$ et j'enlève 1* ».

Pour trouver $6+7$: « *On cherche $7+6$, on se dit j'ajoute 3 à 7 puis 3.* »

Ces techniques ne sont présentées qu'oralement. Il n'y a pas de réécriture de calculs pour les justifier. Au bout d'un temps, la partie gauche du tableau est « remplie » comme le contenu de la première colonne du tableau qui suit

Calculs	La tâche est $T_{\square+7}$	Techniques
$3 + 7 = 10$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dix calculs sont proposés. Le chiffre (\square) auquel on ajoute 7 varie de 1 à 9. ▪ Les calculs sont posés sans suivre un ordre particulier. ▪ Dans trois calculs $\square + \square \leq 10$. 	Une technique est recensée dans OM3 : Elle consiste à restituer des faits numériques connus (τ_{REP}).
$8 + 7 = 15$		
$5 + 7 = 12$		
$4 + 7 = 11$		
$9 + 7 = 16$		
$6 + 7 = 13$		
$2 + 7 = 9$		
$7 + 7 = 14$		
$10 + 7 = 17$		
$1 + 7 = 8$		

Tableau 4. 8 : analyse praxéologique 1^{ière} série de calculs (classe C)

L'enseignante annonce alors aux élèves que « *les choses* » vont se compliquer. Elle inscrit au tableau, sur la partie droite, le premier calcul à effectuer : $141 + 7 =$. Elle demande aux élèves de présenter leurs résultats. Elle note la réponse 148.

Elle inscrit le second calcul à effectuer $60 + 7$. Elle attend puis note la réponse 67.

Au troisième calcul, l'enseignante explicite oralement une technique pour calculer $83 + 7 =$.
- « *sept et trois dix, une dizaine. Dans quatre-vingt-trois, huit dizaines, huit dizaines et une dizaine : neuf dizaines.* »

Elle privilégie le fait d'écrire le plus grand nombre en premier et d'ajouter les unités de numération entre-elles.

Pour effectuer le quatrième calcul $58 + 7$, elle entoure le résultat numérique de la partie gauche qui peut être mobilisé, $8 + 7 = 15$, et précise qu'à ce résultat, il faut ajouter cinq dizaines, les cinq dizaines de 58. Les ostensifs utilisés à l'écrit sont les écritures chiffrées, et, à l'oral, les unités de numération. Le mode de fonctionnement de la technique est présenté oralement. Aucun travail de réécriture du calcul n'est proposé à l'écrit comme ci-dessous.

$$58 + 7 = 50 + 8 + 7 = 50 + 15 = 50 + 10 + 5 = 60 + 5 = 65 .$$

Pour conclure sur cette première séance de calcul mental observé dans la classe C, nous constatons qu'au total les élèves ont eu vingt calculs à effectuer. La première série visait à réviser la table des sept, soit à ajouter 7 aux dix premiers nombres, la seconde série visait à apprendre à ajouter 7 à un nombre à deux, voire trois chiffres, en utilisant une seule technique qui consiste à commencer par ajouter les unités isolées entre elles puis les chiffres des rangs supérieurs en tenant compte « des retenues ». Les élèves n'ont pas découvert la technique par eux mêmes, ils ont eu à l'appliquer sur plusieurs exemples numériques. Deux phases ressortent de la séance :

1° rappel des résultats à connaître,

2° introduction et application d'une technique sur dix calculs.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, donner des éléments d'analyse concernant la deuxième séance observée dans la classe C, car elle aborde un contenu mathématique différent, la notion d'écart entre deux nombres, et fait intervenir des schémas comme ostensifs.

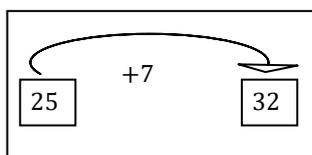
- Séance 2

La maîtresse annonce l'objectif de révision de la séance. Comme la fois précédente, elle note en ligne le calcul à effectuer. Les élèves écrivent le résultat sur leur ardoise et lèvent celle-ci pour que la maîtresse puisse valider ou invalider la réponse. La maîtresse lit et commente, oui, non, très bien, ... Quand elle estime que tout le monde a suffisamment cherché, elle indique la réponse et la note par écrit au tableau.

$31 + 5 =$ $24 + 4 =$ $37 + 6 =$ $69 + 2 =$ $88 + 7 =$ $53 + 6 =$	<p>La tâche est T_{a+b} avec $b < 10$</p> <p>Les techniques retenues sont celles qui consistent à commencer par additionner les chiffres des unités ou à passer par la dizaine antérieure.</p>
--	---

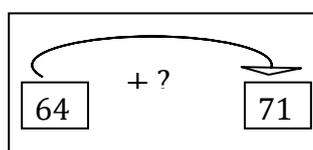
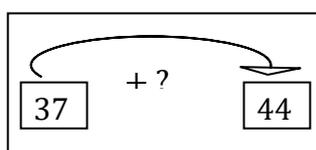
Tableau 4. 9 : analyse praxéologique 2^{ème} série de calculs (classe C)

Cette phase de révision terminée, l'enseignante propose du calcul soustractif en introduisant la notion d'écart entre deux nombres. Elle trace le schéma suivant au tableau et commente.



« L'écart entre 25 et 32 est 7. L'écart entre 32 et 25 est le même si on recule, il est de -7. »

On peut noter la maladresse du vocabulaire utilisé par l'enseignante. L'écart est une mesure de longueur donc positive (cf. chapitre 2, § III.3). +7 et -7 correspondent à des valeurs de transformation (au sens de Vergnaud). Ensuite, elle donne deux exercices d'application en précisant aux élèves qu'elle ne veut voir écrit sur l'ardoise que le résultat.



Les corrections se font en explicitant à chaque fois la technique utilisée à partir des ostensifs indiqués. Les nombres pivots⁷⁰ utilisés sont donnés à l'oral (40 pour le 1^{er} exemple et 70 pour le 2^{ème}). Pour finir, elle propose cinq autres recherches de valeurs de transformations positives et une négative ($25 \rightarrow 31$; $224 \rightarrow 229$; $341 \rightarrow 346$; $457 \rightarrow 463$; $287 \rightarrow 294$;

⁷⁰ Un nombre pivot dans un calcul est un nombre intermédiaire introduit par le calculateur pour faciliter le calcul. Certains pivots sont plus usités à cause des propriétés qu'ils ont dans le système décimal : par exemple les multiples de dix, de cent.

534→ 524). Un élève est choisi (en fonction de ce qu'il a écrit sur son ardoise) pour indiquer à l'ensemble du groupe la bonne réponse.

En résumé, l'enseignante a parlé d'écart entre deux nombres sur plusieurs exemples en faisant calculer des transformations. Elle a présenté et incité les élèves à utiliser la technique qui consiste à passer par la dizaine supérieure ou inférieure (τ_{A10}) pour trouver la valeur d'une transformation positive ou négative. Nous synthétisons les éléments d'analyse dans le tableau suivant (tableau 4.10) :

Séances 1&2 : classe C	Entraînement et découverte (35 minutes)	Entraînement et découverte (35 minutes)
Modalités	Variante du procédé La Martinière	
Nombres de calcul	20 (10+10)	20 (10+10)
Types de calcul	<ul style="list-style-type: none"> ▪ répertoire additif ($T_{\square+7}$). ▪ ajouter 7 à un nombre à deux ou trois chiffres ($T_{\square\square+7}$). ▪ ajouter un nombre à un chiffre à un nombre à deux chiffres ($T_{\square\square+\square}$). ▪chercher la valeur d'une transformation. 	
Tâches du même type	Les tâches du même type ne sont pas isolées et sont regroupées dans un même exercice.	
Variables didactiques	Dans un même exercice, les nombres choisis induisent l'utilisation d'une, voire deux techniques.	
Consignes	L'enseignant donne par écrit un calcul à effectuer. Dès que l'élève a trouvé le résultat, il lève son ardoise. L'enseignant valide ou invalide la réponse. Quand un bon nombre d'ardoises ont été levées, l'enseignant écrit au tableau la réponse.	
Phases	Entraînement et institutionnalisation locale	
Validation	Par le maître, le résultat est donné oralement et parfois justifié. Peu de responsabilité laissée à la charge des élèves dans la validation	
Statut de l'erreur	Parfois, une technique est évoquée lors de la correction mais l'enseignant ne cherche pas à faire une typologie des erreurs ni à s'assurer que les élèves qui ne trouvent pas la réponse comprennent pourquoi.	
Techniques mises en avant par l'enseignant	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{REP} ▪ τ_{1010} ▪ τ_{N10C} (ajouter 9) 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{A10}
Ostensifs utilisés	Nom des nombres. Ecriture chiffrée. Unité de numération (oral) et schéma appuyée sur droite vide	
Eléments de Technologies	Peu présents	
Institutionnalisation locale	Présente	

Tableau 4.10 : éléments d'analyse des séances 1&2 classe C

En conclusion, l'étude rapide effectuée à partir des observations de classe de deux séances consécutives dans les classes B et C et des entretiens montre que sur la composante cognitive, les enseignants mettent en place du calcul mental et posé avec certaines caractéristiques que nous résumons ainsi :

- ✓ C1 : des tâches de types $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$ présentes mais peu de tâches de types $T_{a-\square\square}$.
- ✓ C2 : des techniques comme τ_{1010} , τ_{N10C} et τ_{A10} présentes et d'autres comme τ_{N10} et τ_{AN} absentes.
- ✓ C3 : peu ou pas d'éléments technologico-théoriques institutionnalisés, pas de réécriture de calculs mobilisée pour justifier les techniques ; peu d'ostensifs sont présents dans la classe B. l'enseignant n'utilise que le nom des nombres et les unités de numération. L'enseignante de la classe C utilise davantage les écritures chiffrées des nombres et un schéma avec appui sur la droite numérique.
- ✓ C4 : pas de travail sur la conservation des écarts, un élément technologico-théorique fondateur de l'algorithme de la soustraction.

Dans le paragraphe suivant, nous nous appuyons sur ce constat et sur des éléments propres à la composante médiative pour formuler un ensemble de propositions en lien avec les pratiques observées.

III.3. Propositions retenues en lien avec les pratiques observées

Nous identifions des éléments ancrés dans les pratiques que nous souhaitons réinvestir à court et moyen terme,⁷¹ afin de tester leur impact sur la conception et le déroulement des situations d'enseignement et d'apprentissage sur le calcul soustractif. Nous commençons par préciser les choix qui se réfèrent davantage aux parcours cognitifs, avant de nous intéresser à ceux relatifs à la composante médiative.

- *Construire des séries de calculs avec une intention didactique : pointer une technique*

Le fait de proposer des séries⁷² de calculs à la manière de l'enseignant de la classe B⁷³ est intéressant dans le sens où ces séries s'apparentent à des assortiments. Genestoux (2002)

⁷¹ Les propositions à court terme vont donner lieu à une expérimentation « sur le vif », sans réel recul alors que les propositions à long terme vont être intégrées à l'ingénierie ? donc dans « un tout » davantage structuré et directement relié à l'organisation mathématique de référence.

⁷² Le nombre de calculs par série et le nombre de séries reste à définir.

⁷³ L'enseignante de la classe C présente un, voire deux exercices (par séance) qui s'apparentent à des assortiments.

définit un assortiment didactique (dans le cas du travail personnel de l'élève à la maison), comme étant :

« Une suite ordonnée de « questions » réunies selon une même intention didactique réalisable dans une unité de temps didactique. L'exercice est un objet institutionnel souvent considéré comme banal. L'assortiment est un modèle didactique de cet objet (qui extrait seulement certaines composantes). Il a pour fonction d'en problématiser la construction, de faciliter certaines comparaisons, de permettre des prévisions et de suggérer des améliorations. »
(Genestoux, 2002, p.178)

Nous considérons que, dans un assortiment⁷⁴, le savoir mathématique en jeu, qu'il s'agisse de faire découvrir des techniques nouvelles ou de s'entraîner à utiliser des techniques déjà connues, est ciblé. Les connaissances et les compétences que doit solliciter l'élève sont bien circonscrites. Certaines propriétés des nombres ou des opérations vont être activées par une ou plusieurs tâches, et d'autres volontairement écartées. Les questions qui correspondent aux différentes tâches proposées, leur nombre, leur rythme, leur redondance doivent permettre de faciliter certaines comparaisons, et de suggérer indirectement des techniques spécifiques et les technologies associées qui seront, en l'occurrence, plus économiques que d'autres. L'assortiment propose un milieu initialement matériel (ensemble de calculs) qui va évoluer et s'enrichir au cours de la phase d'exploration par les relations qu'établissent les élèves, les techniques qu'ils mettent en œuvre, les formulations qu'ils donnent, les éléments technologiques qui ressortent.

- *Introduire les technologies savantes en relation avec l'organisation mathématique de référence*

Les enseignants expliquent comment mettre en œuvre les techniques, sans forcément les justifier mathématiquement, en s'appuyant sur les propriétés des nombres et des opérations (ni oralement, ni en appui avec les ostensifs utilisés lors de la réécriture des calculs). Un de nos objectifs à court (si possible) et moyen termes va être de proposer un travail propre à *la réécriture de calculs* (OM4). Nous faisons l'hypothèse que ce travail est adapté aux compétences des élèves. Il s'inscrit dans la continuité des apprentissages et leur permettra d'utiliser des savoirs propres à la numération, aux propriétés des nombres et des opérations, au service du calcul. En revanche, nous pouvons supposer qu'il sera plus difficile de faire

⁷⁴ Dans la suite de l'article cité, Genestoux (2002) développe les caractéristiques d'un assortiment en utilisant des termes comme « formule », « répertoire de formules ». Nous nous permettons d'interpréter les idées que nous retenons, pour notre projet d'ingénierie, en utilisant des termes empruntés à la TAD.

évoluer le contrat didactique en cours d'année et de convaincre les élèves de s'intéresser autant à la technique de calcul qu'au résultat du calcul, et de les amener à prendre davantage en charge la comparaison puis la validation des techniques sous le contrôle du professeur, avant qu'il institutionnalise. Le contrat didactique étant défini par Brousseau (2010) comme :

« L'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la situation didactique - impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres - et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause. Le contrat didactique est le résultat d'une « négociation » souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif. » (Brousseau, 2010, p.6)

- ***Mobiliser les répertoires additifs, soustractifs et les compléments***

Sur les séances observées, nous constatons que certains élèves retrouvent des résultats en comptant sur leurs doigts. Nous chercherons à les aider à mémoriser les faits numériques qui doivent être connus, en légitimant et systématisant l'usage de τ_{REP} .

- ***Travailler la propriété de conservation des écarts en calcul mental***

En questionnant les trois enseignants sur leurs choix de programmation, nous constatons qu'ils n'ont pas proposé de types de tâches permettant de mobiliser la propriété de conservation des écarts, préalablement à l'introduction de la technique de la soustraction posée en colonne (τ_{AIG}). En conséquence, un de nos objectifs sera d'introduire cette propriété de conservation des écarts et de la travailler en calcul mental, avant même d'apprendre à poser le calcul en colonne et de l'utiliser par la suite. Nous voulons ouvrir le champ mathématique qui se présente pour l'instant comme une partie « auto-close » (principe 3 de Roditi exposé au § 4.1.1). D'où la nécessité de mettre en œuvre dans les classes des situations donnant des raisons d'être à la propriété de conservation des écarts.

- ***Instaurer des moments pour décrire la technique***

Dans nos propositions (à court et moyen termes), il ne s'agit pas de rompre avec le procédé La Martinière adopté par les trois enseignants car il permet à l'élève d'être dans l'action (j'écoute ou je lis le calcul proposé, je mets en œuvre une procédure pour trouver le résultat, j'écris et je présente mon résultat) et d'avoir un retour direct sur la validité de son résultat. Nous voulons conserver ce moyen médiatif. Nous voulons cependant instaurer des phases de formulation, y compris écrites, pour que les élèves décrivent les techniques qu'ils mettent en œuvre dans le but de les communiquer à un pair ou à l'enseignant.

- *Instaurer des moments pour valider et évaluer la technique*

Les phases de correction (cela semble être une pratique installée dans la classe C) ne nous semblent pas suffisantes pour permettre aux élèves de valider et évaluer eux-mêmes les différentes techniques exposées au groupe classe. Il nous semble important de proposer des moments de synthèse qui permettront aux élèves d'échanger et d'argumenter davantage.

IV. Vers un second bilan suite aux premières expérimentations

Dans ce paragraphe, nous présentons les situations d'apprentissage conçues avec l'intention de comprendre comment les élèves réagissent et comment les enseignants fonctionnent, dans quel sens ils intègrent ou n'intègrent pas les propositions qui leur sont faites. Nous analysons ensuite les pratiques des enseignants, à partir des expérimentations conduites dans les classes A, B et C. Nous montrons, pour finir, en quoi ces résultats permettent de renforcer nos choix relatifs à l'organisation mathématique de référence et ouvrent des perspectives pour concevoir une organisation didactique globale à moyen terme.

IV.1. Présentation des situations

Nous présentons un récapitulatif de l'ensemble des situations que nous avons conçues en prenant en compte les caractéristiques énoncées à la fin du paragraphe III.2.2 et les propositions que nous venons de faire :

Deux situations surtout en lien avec C2 : afin d'amener les élèves à ne plus utiliser le comptage pour effectuer $a - b$ avec $b \leq 6$ nous avons introduit deux jeux (cf. : annexe B2, S2 & S3) qui ont pour objectifs de mobiliser les techniques τ_{REP} , τ_{1010} et τ_{A10} pour effectuer rapidement les calculs.

Une séance surtout en lien avec C3 : afin d'amener certains élèves au vu de leurs difficultés, à utiliser τ_{A10} (le passage à la dizaine inférieure) nous proposons l'utilisation d'un nouvel ostensif, la droite numérique, et un travail de réécriture des calculs en ligne (cf. annexe B2, S4).

Une séance surtout en lien avec C1 : l'objectif est de proposer aux élèves une séance de calcul réfléchi et de revenir sur les technologies associées aux différentes techniques (cf. annexe B2, S5).

Quatre situations surtout en lien avec C4 : une situation pour introduire et formuler la propriété de conservation des écarts en mesurant avec une règle cassée puis en translatant une

bandelette. Deux situations de réinvestissement dans deux autres contextes (cf. annexe B2, S6, S7, S8 & S9).

Plutôt que de revenir sur chaque séance et son expérimentation, nous choisissons de nous appuyer sur deux séances, qui proposent des tâches nouvelles et inhabituelles aux élèves (évaluer l'ordre de difficulté d'un calcul et mesurer avec une règle cassée), l'une en lien avec C1 (calcul réfléchi) et l'autre en lien avec C4 (propriété de conservation des écarts) afin d'affiner notre regard sur les pratiques mises en jeu par les enseignants pendant les phases de synthèse et d'institutionnalisation.

IV.2. Analyse d'une situation de calcul réfléchi

Les enseignants des classes A, B et C, après s'être approprié le scénario présenté en annexe B.3.1, ont donné à leurs élèves l'énoncé présenté en annexe B.3.2. Cet énoncé est construit à partir d'un type d'exercice retenu par Rathgeb-Schnierer & Green (2013) pour étudier la flexibilité des élèves en calcul réfléchi. (cf. chapitre 2. III. 5). Le milieu dont dispose chaque binôme correspond à une liste de calculs posés en ligne (vingt calculs au total). La tâche proposée est nouvelle⁷⁵. L'élève n'a pas à présenter le résultat du calcul mais à évaluer si le calcul est facile à faire. C'est à lui d'interpréter, en fonction de ses connaissances et de sa maîtrise des techniques de calcul ce qui est facile et ce qui ne l'est pas, et de sélectionner la réponse « facile » ou « non facile ».

Les calculs proposés se répartissent autour des trois types de tâches. Les techniques attendues en fonction des variables didactiques choisies sont répertoriées dans le tableau suivant :

Ta-□	Le nombre qu'on enlève est un (<i>calculs A, K, N, S</i>) ou il correspond au chiffre des unités de a (<i>calculs D, G, J, Q</i>).	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{REP} ▪ τ_{1010} ▪ τ_{N10C}
	Le nombre qu'on enlève est supérieur au chiffre des unités de a (<i>calcul H</i>).	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{A10}
Ta-□0	Le chiffre des dizaines du nombre qu'on soustrait est un (<i>calculs C, L</i>) ou inférieur au chiffre des dizaines de a (<i>calculs F, Pet T</i>).	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{1010} ▪ τ_{CONV}
Ta-□□ ou Ta-□□□	Le chiffre des unités du nombre qu'on soustrait est supérieur au chiffre des unités de a et vaut 8 ou 9 (<i>calculs B, I, R</i>).	<ul style="list-style-type: none"> ▪ τ_{N10C} ▪ τ_{AN}

Tableau 4.11 : Analyse praxéologique relative aux calculs se référant à *facile/pas facile*

⁷⁵ La tâche vient après un long apprentissage (de septembre à décembre). Un ensemble de techniques a déjà fait l'objet d'un enseignement et chacune est théoriquement maîtrisée.

Nous nous appuyons sur la transcription (présentée en annexe B3.3) pour mesurer les écarts entre les techniques attendues dans OM3 et les techniques retenues par les élèves :

Les calculs les plus simples du type $a - 1$ (a entier naturel), ont été estimés *faciles* par l'ensemble des élèves. Dans la classe A, l'enseignante indique que le résultat du calcul correspond au nombre « juste avant a ». Dans la classe C, l'enseignante justifie le fait que le calcul de $67 - 1$ est facile en le réécrivant avec les unités de numération : $6d7u - u = 6d + 7u - 1u = 6d6u$. Aucun enseignant n'évoque la technique qui consiste à réciter la comptine numérique à rebours de un en un.

Les calculs où les élèves ont repéré le même chiffre au même rang ont été estimés *faciles*. En revanche, nul n'a pensé à argumenter en proposant une réécriture de calcul (par exemple : $108 - 8 = 100 + 8 - 8$). Tous se sont contentés de dire qu'on entendait le même « mot » (ici huit).

Le calcul de $a - 10$ a été estimé *facile*. L'ensemble des élèves a convoqué τ_{CONV} pour effectuer le calcul. Les élèves interrogés ont précisé qu'ils soustrayaient une dizaine (et non dix). Les enseignants ont alors exprimé le nombre auquel on soustrayait, initialement donné en unités, en dizaines d'unités.

Soustraire 29 et 28 a été jugé *difficile* par l'ensemble des élèves des classes A, B et C, alors que la technique τ_{N10C} avait été utilisée récemment pour soustraire 9 dans les classes B et C et semblait maîtrisée d'après nos observations. Cela peut signifier que les élèves ne sont pas habitués à utiliser les techniques τ_{N10C} ou τ_{AN} dans les calculs où le nombre à soustraire est proche d'un multiple de dix, ou bien qu'ils ne mobilisent pas ces techniques dans des calculs en ligne variés.

Les derniers échanges relatifs aux calculs de $83-5$, $93-5$ montrent que dans les classes A et B, les élèves interrogés utilisent le passage par la dizaine inférieure (soit τ_{A10}), alors que dans la classe C un élève décompte de un en un, sans être invité à proposer une autre technique (prégnance du comptage).

En conclusion, l'analyse praxéologique nous amène à relever les points suivants en réponses à nos questions sur le degré d'appropriation des élèves et des enseignants de la situation « *facile/pas facile* » :

- *Du côté élève*

La tâche proposée différente de celle qui consiste à « donner le résultat d'un calcul soustractif » permet d'amener l'élève à produire un discours pour expliquer sa technique. Ce discours, même s'il semble *a priori* assez pauvre, mérite d'être écouté, enrichi par des pairs et par l'enseignant.

- *Du côté enseignant*

Les enseignants produisent un discours surtout oral, utilisent par habitude les mots de la langue française (comme ostensifs) alors que la réécriture de calcul pourrait être plus adaptée à ce niveau de scolarité (les élèves connaissant les décompositions des nombres) pour expliquer et contrôler les techniques. Ils n'ont pas l'habitude d'instituer des éléments technologico-théoriques afin de justifier les techniques.

- *Du côté chercheur*

Les mots clefs, les écritures mathématiques, les gestes doivent être explicitement indiqués dans le scénario pour permettre aux enseignants d'être plus précis et plus rigoureux quand ils évoquent les propriétés mathématiques sur lesquelles s'appuient les techniques. Le fait de s'appuyer sur une analyse praxéologique détaillée (analyse *a priori*) peut aider l'enseignant à mettre en œuvre les différentes fonctions de la technologie au cours de la séance.

IV.3. Analyse de situations en lien avec la conservation des écarts

Nous présentons deux situations⁷⁶ d'apprentissage qui ont pour objectif d'introduire et de formuler la propriété de conservation des écarts dans le cadre de la mesure. Nous analysons leurs potentialités didactiques avant de revenir sur leurs mises en œuvre dans les classes A, B et C afin d'apprécier la façon dont les enseignants ont adhéré au projet d'enseignement.

⁷⁶ La première situation est en partie analysée dans Rinaldi (2013). La seconde situation s'inscrit dans la continuité de la première. Elle a été mise en œuvre à la suite de la première.

IV.3.1. La règle cassée

Nous présentons différentes propositions dans des manuels ou des articles destinés aux enseignants visant à introduire la propriété de conservation des écarts, avant de présenter une analyse praxéologique et quelques éléments de la composante médiative de la situation dite de la *règle cassée*. Ce développement sert à éclairer les résultats obtenus par la suite.

- *Différentes approches*

J'apprends les maths CE2 (2010, page 48) propose une situation dont le contexte se veut proche du vécu de l'enfant. Deux camarades comparent le cardinal de leurs collections de timbres, avant et après ajout d'une même quantité. Dans cette approche, le nombre représente le cardinal d'une collection. L'élève est très guidé. Il doit effectuer plusieurs calculs et établir la propriété de conservation des écarts dans le cadre numérique, en généralisant les résultats obtenus.

Euro maths CE2 (2010, page 44) propose un problème où mère et fils découvrent qu'ils auront toujours la même différence d'âge tous les ans. Là encore, le contexte est proche du vécu de l'enfant. En revanche, l'âge peut être vu comme le cardinal d'une collection (par exemple de bougies) ou une abscisse sur l'axe du temps, la différence d'âge pouvant être matérialisée sur l'axe en différents endroits, ce qui permet de voir son invariance par translation.

ERMEL CE2 (2000, page 118) met en place un jeu où il s'agit de trouver de proche en proche, en tenant compte des écarts, un nombre cible placé sur la droite numérique. Le nombre représente un repère sur la droite graduée par des entiers. Le déplacement mental sur l'axe est lié aux besoins du jeu.

La quatrième approche est celle de la situation de référence « *règles et réglettes* » présentée par Bueno-Ravel & Le Poche (2011). Dans cette situation, le matériel avec lequel les élèves travaillent est constitué d'une grande règle graduée appelée règle et d'une petite règle graduée appelée réglette. Sur la règle, se trouvent deux élastiques déplaçables. Chaque élastique marque un repère, ici un nombre. L'écart entre deux nombres (par exemple 87 et 129) est matérialisé par le segment délimité par deux élastiques (l'un placé sur 87 et l'autre sur 129) qui délimitent ce segment. Sur la réglette, il y a aussi deux élastiques, l'un est fixé sur 0 et l'autre est déplaçable. Si les élèves rapprochent les deux règles et font coïncider le 87

de la règle avec le 0 de la réglette, ils verront que l'élastique de la règle qui indique 129 coïncide avec l'élastique de la réglette qui indique 39, ce qui signifie que l'écart entre 87 et 129 est égal à l'écart entre 0 et 39 c'est-à-dire 39.

En conclusion, en nous basant sur l'étude épistémologique conduite au chapitre 2, nous nous rapprochons du choix d'*ERMEL CE2* et plus encore du choix de la situation *règles et réglettes* pour introduire la notion d'écart, car dans ces deux situations, le nombre représente un repère sur un axe (respectivement sur une droite graduée) et l'écart entre deux nombres mesure la longueur du segment délimité par ces deux nombres. La situation *règles et réglettes* propose de surcroît l'utilisation d'un artefact,⁷⁷ donc d'une ressource qui peut favoriser l'apprentissage de la notion d'écart (d'un contenu mathématique) à partir d'une tâche concrète (mesurer) sous certaines conditions. Nous reviendrons sur ce point de vue emprunté à Mariotti & Maracci (2010) quant à l'utilisation d'un artefact dans le cadre de la théorie de la médiation sémiotique, après avoir présenté et effectué l'analyse *a priori* de la situation *règle cassée*.

- *Analyse praxéologique*

Une règle cassée est un objet que nous avons obtenu en coupant l'extrémité gauche d'une règle graduée usuelle⁷⁸. L'intérêt de cet artefact est qu'il ne permet plus la lecture immédiate de la longueur d'un segment.⁷⁹ Le problème que nous donnons à résoudre aux élèves consiste à se servir d'une règle cassée, graduée en centimètres, pour déterminer la mesure d'un segment. Dans une première phase, la tâche est individuelle, chaque élève dispose de sa propre règle.

Nous présentons ci-dessous une reproduction de l'énoncé distribué aux élèves. Les segments a, b et c mesurent respectivement 5 cm, 3 cm et 8 cm.

⁷⁷ Rabardel (1995) définit un artefact comme : « Toute chose ayant subi une transformation, d'origine humaine (...) susceptible d'un usage, élaborée pour s'inscrire dans des activités finalisées. »

⁷⁸ Pour des raisons pratiques, nous nous sommes procurée des rubans en papier gradués sur une face en cm et mm et sur l'autre face en pouces et en dixièmes de pouces (rappel 1 pouce = 2,54 cm).

⁷⁹ Après avoir conduit une discussion visant à savoir où il fallait casser les règles (cf. Rinaldi 2013) nous avons choisi d'utiliser des règles qui mesurent environ trente centimètres et qui commencent aux environs des graduations 2, 3, 8 ou 9.

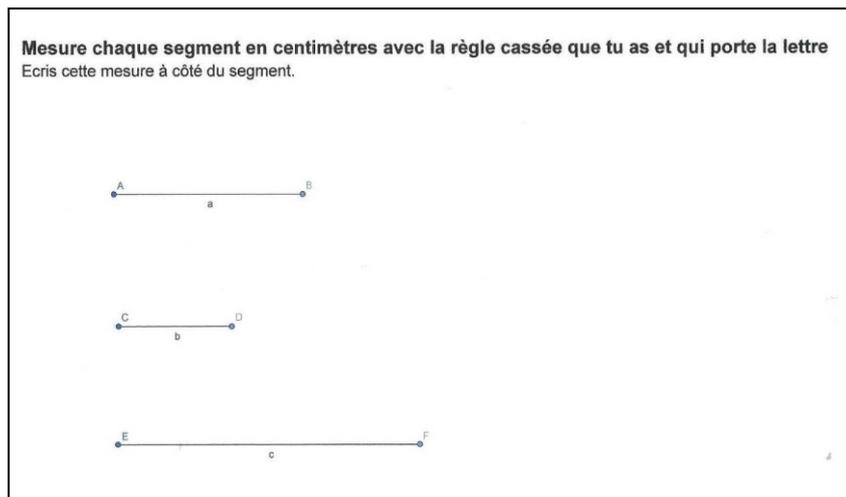


Figure 4.2 : segments à mesurer avec une règle cassée

Nous avons fait le choix de proposer trois segments pour examiner si l'élève, qui adopte une technique afin de mesurer le premier segment, la reconduit deux fois de suite. Le second segment mesure 3cm, afin d'inciter l'élève à estimer à vue d'œil le résultat en centimètres et à contrôler éventuellement sa technique (en cas de résultats trop éloignés de l'estimation). Nous aurions pu rajouter un quatrième segment beaucoup plus long, pour permettre à l'élève de se détacher d'un comptage mais nous ne l'avons pas fait dans cette première approche. Nous présentons dans le tableau ci-après les techniques des élèves, envisageables a priori pour mesurer un segment avec une règle cassée.

	<p>L'élève pose le bord gauche de sa règle sur l'extrémité du segment. Il en déduit sans tenir compte de la valeur de la graduation correspondant au point A que le segment mesure 13 cm et 7 mm.</p>
	<p>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9. Il en déduit sans tenir compte du fait qu'il n'est pas placé à « zéro » que le segment mesure 14 cm.</p>
	<p>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il compte de un en un, en s'aidant éventuellement de ses doigts, le nombre de centimètres et trouve 5 cm.</p>
	<p>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il lit le nombre qui correspond à la graduation B pour en déduire directement que le segment mesure 14-9 cm.</p>

Tableau 4.12 : techniques de mesurage avec une règle cassée

Seules, les deux dernières techniques vont permettre de trouver une mesure correcte. La première s'appuie sur le dénombrement et le fait que l'unité de graduation est un centimètre. L'autre s'appuie sur la notion de distance entre les points A et B⁸⁰.

- *Analyse du déroulement de la séance*

La situation est découpée en quatre phases :

Une phase de présentation: l'enseignant distribue à chaque élève une règle cassée et il attend des commentaires pour viser la dévolution. L'objectif est d'arriver collectivement à mentionner trois caractéristiques de la règle cassée : c'est une règle. Elle ne commence pas par une graduation notée zéro. Elle est graduée sur une face en centimètres et sur l'autre en pouces.

Une phase d'action : l'enseignant distribue l'énoncé du problème. Les élèves sont invités à le résoudre individuellement.

Une phase de formulation et de validation : une activité de groupe est proposée. Elle consiste à renseigner un tableau pour répertorier les mesures trouvées par chacun. Devant la pluralité des réponses, il est demandé aux élèves d'échanger, de communiquer leurs techniques et de se mettre d'accord pour donner la mesure des segments a, b et c en centimètres. L'objectif de cette phase est de confronter les techniques, éventuellement d'arriver à les valider ou les invalider en s'appuyant sur les rétroactions du milieu. Il s'agit aussi, en nous référant aux travaux de Mariotti et Maracci (2010), de faire émerger toutes les significations personnelles au sein du groupe et d'élaborer une construction conjointe de signes partagés. Cette étape permet à chacun de réfléchir sur sa propre expérience avec l'artefact et de comparer plusieurs utilisations différentes de la même règle cassée.

Une phase de synthèse en classe entière : *la discussion de classe*, pour reprendre les termes de Mariotti et Maracci (2010), a pour objectif de soutenir l'évolution des signes partagés vers des signes mathématiques. L'enseignant reprend une à une les techniques en explicitant leur domaine de validité.

⁸⁰ Si on place sur la droite (AB) le point O, point origine qui correspond à la graduation 0, on a : $AB = OB - OA$, soit le segment [AB] qui mesure 5cm ($14 - 9 = 5$). Une troisième technique que nous n'avons pas mentionnée car elle est dérivée de la deuxième, consiste à faire coïncider le point A à la graduation 10, ce qui permet de calculer mentalement, en soustrayant 10, la mesure du segment.

- *Premiers résultats*

Ces résultats s'appuient sur l'expérimentation conduite dans le cadre du master (nous présentons en annexe B.4.1 l'analyse *a posteriori* de la séance conduite dans le cadre du master) et sur les expérimentations conduites dans les classes A, B et C.

✓ **Résultats relatifs au degré d'appropriation des élèves**

Un premier résultat concerne la notion d'écart en elle-même, et montre à quel point il est difficile de « penser » le calcul de $a - b$ quand on a à mesurer un segment dont les extrémités ont pour abscisses a et b . En effet, un seul élève (dans deux classes, A et B, sur les trois classes A, B et C, contre un seul dans une classe, l'année de MASTER), quand les segments ont une longueur « petite » a directement posé le calcul de la différence $a - b$. Cela renforce à notre avis, la nécessité de confronter les élèves à un type de problème qui va leur permettre de dépasser à terme leurs connaissances initiales pour découvrir d'autres techniques de mesurage (basées sur le calcul) et d'approfondir une notion mathématique (celle d'écart). Le fait d'introduire un artefact, la règle cassée, donne une raison d'être à ce calcul, au regard du milieu construit.

Le second résultat, qui ressort de ces nouvelles expérimentations comme de celle effectuée dans le cadre du MASTER, est le rôle essentiel du milieu⁸¹, en particulier lorsque les élèves, par groupes, ont renseigné un tableau puis harmonisé leurs résultats. Ce milieu s'est avéré favorable pour valider les techniques, comparer leurs coûts et justifier le fait que les mesures des segments sont égales, quelle que soit la règle cassée utilisée.

✓ **Résultat relatif au degré d'appropriation des enseignants**

L'enjeu prépondérant pour l'enseignant semble être que chaque élève soit capable de savoir utiliser la règle cassée pour mesurer un segment à la fin de cette séance. L'enjeu de la situation est de dépasser cette capacité pour établir le lien entre la notion d'écart dans le cadre de la mesure et le calcul d'une différence. En ce sens, la seconde séance s'inscrit dans cette dynamique, en proposant un moment de réactivation des connaissances avant d'aborder une connaissance nouvelle, la propriété de conservation des écarts.

⁸¹Pour définir ce milieu, nous citons Margolinas (1995): « dans le niveau 3, les rapports du sujet épistémique S3 avec le milieu sont plus réflexifs, se rencontrent dans des situations de formulation ou de preuve. Le sujet épistémique (S3) « envisage les actions de S4 (lui-même, à l'occasion) soit pour communiquer des renseignements sur l'action, soit pour débattre de son adéquation. » (Margolinas, 1995, p.91)

IV.3.2. Translation d'une bandelette sur la DNG

Nous présentons brièvement les deux premiers exercices conçus pour réactiver les deux techniques étudiées pour mesurer avec une règle cassée (cf. tableau 4.12), avant d'analyser précisément l'exercice 3 qui met en jeu le savoir nouveau, à savoir la propriété de conservation des écarts.

- *Présentation des deux premiers exercices*

La tâche du premier exercice est identique à celle de l'exercice présenté à la figure 4.1. Elle consiste à mesurer trois segments⁸² avec une règle cassée. La tâche du second exercice consiste à interpréter le schéma présenté ci - dessous pour déterminer les mesures de longueur de chaque bandelette :



Figure 4.3 : bandelettes à mesurer

Une technique est attendue. Elle consiste à lire les deux graduations situées aux extrémités de chaque bandelette (x_a et x_b avec $x_a \leq x_b$) puis à effectuer le calcul de $x_b - x_a$. Cet exercice est un exercice de transition, préparatoire au troisième exercice⁸³, posé afin d'introduire la propriété de conservation des écarts.

- *Analyse praxéologique de l'exercice conçu pour introduire la propriété de conservation des écarts*

L'enjeu est de mesurer une même bandelette à différents endroits de la droite numérique graduée (DNG) et d'interpréter collectivement le résultat de cette expérience en formulant la propriété de conservation des écarts. Le scénario proposé aux enseignants (annexe B.5) donne quelques indications pour conduire la synthèse. En effet, il est indiqué qu'il est préférable de :

- ✓ Manipuler une bandelette devant le groupe classe (reconstruite à une autre échelle ou en utilisant le tableau interactif)
- ✓ Préciser qu'on translate la bandelette (une première fois de +3)
- ✓ Insister sur le fait que sa longueur est inchangée
- ✓ Ecrire les calculs soustractifs correspondants

⁸² Les segments ont la même orientation que ceux proposés à l'exercice présenté en figure 4.1. et mesurent respectivement 3, 9 et 7cm.

⁸³ Énoncé du troisième exercice : « Donne la mesure de la bandelette que tu viens de recevoir en utilisant un calcul soustractif et en la posant une première fois au dessus de la graduation 12, puis de la graduation 15, et pour finir de la graduation 22. »

✓ Formuler la propriété de conservation des écarts : la différence ne change pas si on **ajoute le même nombre** aux deux nombres de départ (ici on a ajouté 3 à 12 et 3 à 17)

En résumé, la technique attendue pour réaliser la tâche demandée à l'exercice 3 consiste à lire la graduation x_b correspondant à la graduation x_a avec x_a égal 12, 15 et 22 puis à calculer $17 - 12$, $20 - 15$ et $27 - 22$. Le travail réalisé pendant la phase de synthèse est propre à OM2. Les tâches consistent à traduire ou à associer un schéma à la droite numérique graduée à un calcul et réciproquement, à traduire et associer deux calculs, deux schémas, traduire et associer un calcul à une expression mathématique et réciproquement ($T_{\text{Tra.}(sch./c\ al.)}$, $T_{\text{Ass.}(sch./sch.)}$, $T_{\text{Ass.}(calc./cal.)}$, $T_{\text{Ass.}(cal./lan.)}$). L'élément théorique institué est la propriété de conservation des écarts.

- *Analyse a posteriori*

Après avoir analysé une à une les productions des élèves des classes A, B et C relatives à l'exercice 3, nous récapitulons les résultats obtenus dans le tableau présenté à la page suivante (tableau 4.13).

	Classe A 22 élèves	Classe B 26 élèves	Classe C 25 élèves	% 73 élèves
Calculs justes (posés en ligne/ posés en colonne)	15 (12/3) soit 68%	15 (15/0) soit 58%	8 (2/6) soit 32%	52%
Erreurs de calcul (posés en ligne/ posés en colonne)	3 (1/2) soit 14%	0 (0/0) soit 0%	4 (1/3) soit 16%	10%
Exercice partiellement traité (0 calcul/1calcul/2 calculs)	3 (0/2/1) soit 14%	4 (2/1/1) soit 15%	7 (3/3/1) soit 28%	19%
Erreur de mesurage	1	1	1	4%
Calculs additifs, calculs sans lien avec les données	0 soit 0%	6 soit 23%	5 soit 20%	15%

Tableau 4.13 : résultats de l'exercice 3 dans les classes A, B et C

A la lecture des résultats, nous estimons que dans l'ensemble, l'exercice est bien traité. Sur les trois classes, un total de 62% des élèves pose les calculs soustractifs attendus pour mesurer la bandelette aux endroits indiqués. Suite à ce constat, nous nous appuyons sur un extrait de la retranscription de la correction de l'exercice dans la classe C et sur des captures d'écran reprographiés ci-après pour mettre en avant les différents types de représentations sémiotiques utilisées par l'enseignante :

La maîtresse montre du doigt le début de la bandelette à 12 et la fin de la bandelette à 17.



M : « La longueur de la bandelette va être de ? »

Un élève répond instantanément.

E : « 17-12 ».

Elle note sur le tableau de droite



La maîtresse retourne au tableau central et déplace effectivement la bandelette en commentant : « Je la fais glisser »



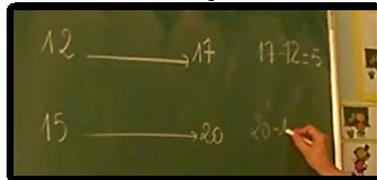
M : « Je dois trouver combien ? » Un élève répond instantanément.

E : « 5 »

M : « 5, est ce que la bandelette est élastique ? Non, je dois trouver 5. »

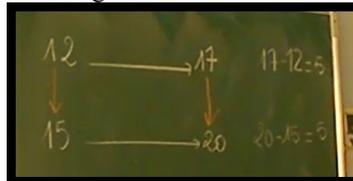
M : « Je vais vérifier si je trouve bien 5. La bandelette va de 15 à 20. Je fais l'opération. »

La maîtresse note le second calcul au dessous du premier



M : « Est-ce que j'ai utilisé les mêmes nombres ? Non. Pourtant mon résultat est toujours de 5. Regardez maintenant ce qui se passe ici et là. La maîtresse trace deux flèches en changeant de couleur ».

La maîtresse trace deux flèches en changeant de couleur et note +3



M : « Regardez maintenant ce qui se passe ici et là. » Un élève répond instantanément

E : « « Maîtresse je sais si tu fais 17+3, tu as 20 et 12+3 tu as 15. C'est toujours les mêmes nombres. »

M : « J'ai toujours le même écart. »

Plutôt que de montrer à quoi correspond ce déplacement de +3 sur la DNG, elle traite le dernier calcul et montre que si d'un côté, j'ai +7 de l'autre aussi.

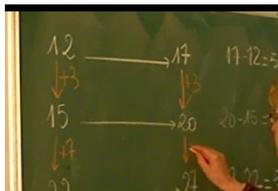


Tableau 4.14 : extrait de retranscription dans la classe C

Nous nous sommes attachée à présenter dans les zones grisées les dialogues engagés par l'enseignante avec la classe.

En conclusion : trois types de représentations sémiotiques sont sollicités, celui associé à la droite numérique graduée (qui correspond au tableau central), celui des expressions numériques (qui correspond au tableau de droite) et celui des expressions langagières. Le troisième étant associé au langage, il alimente les deux premiers et permet la transition de l'un à l'autre, transition qui se fait surtout, au vu des énoncés oraux et de leur enchainement, du premier registre vers le second.

Pour cette classe, un travail propre à OM2 est présent. Le schéma ci-après rend compte des tâches effectuées au long de l'activité. Il en manque une pour formuler la propriété de conservation des écarts dans le registre des expressions numériques. Nous l'avons notée en pointillé sur le schéma. En effet la maîtresse n'a jamais écrit $17-12 = (17+3) - (12+3)$.

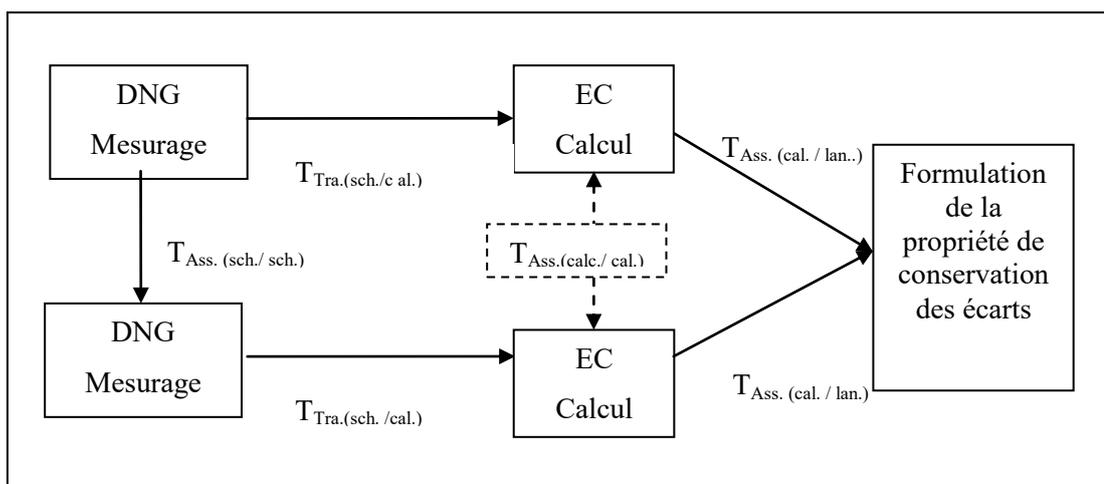


Figure 4.4 : Tâches et ostensifs utilisés dans la classe C avec l'objectif de formuler la propriété de conservation des écarts

Dans les classes A et B, les deux enseignants ont suivi le même cheminement que celui de l'enseignante de la classe C, qui se rapproche de celui proposé dans le scénario. La gestion du tableau a cependant été différente dans les trois classes, surtout dans la classe B où le maître utilise les fonctions du TBI. Il est le seul à ne pas avoir eu besoin de refaire une bandelette en carton. Alors que les calculs soustractifs étaient écrits au fur et à mesure par les élèves, il les a effacés en fin de la séance, au moment d'interpréter la valeur numérique associée à la translation.

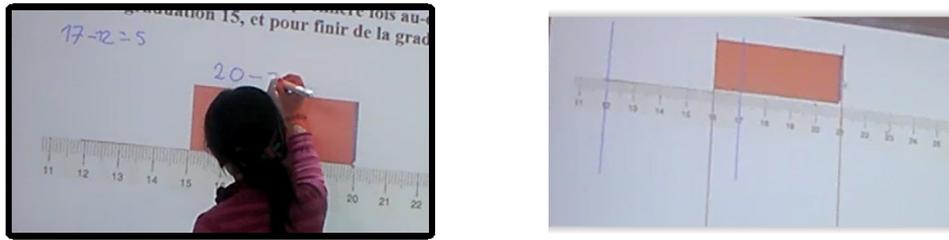


Figure 4.5 : Photographies du tableau dans la classe B en cours et fin de séance

En conclusion : dans les trois classes, la phase de synthèse a été rondement menée, les élèves ont adhéré au projet (participation active et écoute au moment de la correction) et pourtant, sans se concerter, avec le même scénario qui les engageait à le faire, les trois enseignants, pour conclure, n'ont pas montré l'équivalence des calculs en proposant un travail de réécriture, ni généralisé en disant oralement que « la différence ne change pas si on ajoute un même nombre aux deux termes de la soustraction » .

C'est en partie à cause de ce manque d'institutionnalisation locale que nous avons proposé une autre séance pour formuler la propriété de conservation des écarts dans le cadre de la mesure, en comparant la taille respective de deux poupées. *A posteriori*, ce double travail nous semble intéressant mais empiète sur le temps qui pourrait être consacré à appliquer la propriété des écarts en calcul mental et posé en colonne.

Dans le paragraphe suivant, nous revenons sur les propositions retenues et formulées au paragraphe III.3, et, plus particulièrement sur celles qui viennent d'être mises à l'épreuve dans les classes A, B et C, en lien avec le calcul réfléchi et la propriété de conservation des écarts, pour construire une ingénierie qui répond à une nécessité cognitive, basée sur l'organisation mathématique de référence élaborée au chapitre 3, tout en étant proche de la *ZPDP*- *zone proximale de développement professionnel* - (cf. hypothèse de travail empruntée à Robert (2013) et annoncée au paragraphe I du chapitre 4).

V. Apports de l'étude des pratiques spécifiques

Notre objectif est de regrouper et de hiérarchiser les éléments qui ressortent de l'étude, en distinguant ce qui relèvent des parcours cognitifs et de la composante médiative.

Les entretiens et les observations de classe montrent que les enseignants mettent en œuvre une pratique régulière du calcul mental plutôt axée vers le calcul automatisé. Ils n'instaurent pas beaucoup de calcul réfléchi, voulant sans doute avant tout que leurs élèves mémorisent des résultats (révision systématique des tables) et soient capables d'effectuer des tâches assez simples ($T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$). Certains types de tâches propres à OM3 comme T_{a-b} sont absents. Or si $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$ sont maîtrisés, calculer T_{a-b} s'inscrit dans la continuité des apprentissages. Certaines techniques comme τ_{AN} ne sont pas enseignées ; or, cette technique s'apparente à l'algorithme de la soustraction posée qu'ils enseignent (même technologie).

Pour enseigner le calcul soustractif, les enseignants proposent aux élèves des exercices qui s'apparentent à des *assortiments*. Certaines techniques relatives à un même type de tâches ne sont pas expliquées, ni validées par les élèves eux mêmes. Peu d'éléments technologico-théoriques (voire aucun) sont mobilisés et institutionnalisés pour justifier les techniques. L'organisation mathématique propre à la réécriture de calculs est absente (OM4).

En revanche, les expérimentations conduites à partir des scénarios que nous avons conçus ont montré que même si les enseignants des classes A, B et C ne sont pas demandeurs d'un autre projet d'enseignement (au vu des entretiens), ils sont prêts à renouveler leurs pratiques (en s'appropriant de nouvelles situations et en les testant dans leurs classes). Ce travail engagé dans les classes A, B et C nous permet d'avancer que l'utilisation d'une règle cassée pour mesurer un segment est une tâche robuste⁸⁴, au sens de Robert (2007), car les résultats obtenus sont presque identiques d'une année à l'autre et d'une classe à l'autre, indépendamment des déroulements proposés par les enseignants des classes A, B et C. Cette situation, sous certaines conditions, et la situation *translation d'une bandelette* peuvent amener les élèves à comprendre la raison d'être de la propriété de conservation des écarts et à formuler la propriété de conservation des écarts dans le contexte de la mesure.

⁸⁴ « D'où notre idée d'introduire le degré de « robustesse » des tâches. Il s'agit de caractériser la manière dont les activités induites par ces tâches peuvent être ou non influencées par les déroulements. Une tâche robuste donne lieu à des activités possibles, voire a minima, peu différentes des activités analysées a priori, quelles que soient les interventions de l'enseignant. La robustesse correspond ainsi à un potentiel de « non variabilité » des activités attachées à un énoncé. » (Robert, 2007, p.303)

L'analyse de manuels conduite au chapitre 5 nous amènera à compléter cette étude des pratiques spécifiques et à concevoir une ingénierie complète, au sens de l'organisation mathématique de référence et adaptée, en référence aux pratiques de l'enseignement ordinaire.

Chapitre 5

Analyse des organisations mathématiques et didactiques de manuels

Dans ce chapitre, nous analysons les organisations mathématiques et didactiques autour de la soustraction, proposées par les auteurs d'*Outils pour les Maths*, édition Magnard (2012) pour le CE1 et le CE2 et d'*Euro Maths*, édition Hatier (2001) pour le CE1 et Hatier (2010) pour le CE2, en suivant les grandes lignes de la méthodologie énoncées au chapitre 4, afin de recueillir des informations complémentaires sur les pratiques d'enseignement du calcul soustractif. L'étude menée au chapitre précédent, à partir d'entretiens, d'observations et d'expérimentations dans trois classes de CE2, laisse à penser que :

- ✓ certains types de tâches sont absents : calculer $a - b$ avec b nombre à deux chiffres proche d'un multiple de dix, et réécrire un calcul.
- ✓ certains éléments technologico-théoriques ne sont pas institutionnalisés, ce qui ne permet pas d'expliquer et de justifier les techniques mises en œuvre pour effectuer un calcul mentalement, posé en ligne ou en colonne.

L'analyse de manuels nous conduira à infirmer ou non ces résultats et à repérer une évolution dans la nature des tâches, des ostensifs et des techniques enseignées du CE1 au CE2. Elle nous apportera, de surcroît, des indications sur l'organisation de l'étude du calcul soustractif dans sa globalité (sur une et deux années). Pour finir, elle nous transmettra des exemples de premières rencontres choisies par les auteurs, afin d'introduire « localement » les différentes tâches, et nous dotera d'une vue d'ensemble sur les différents moments de l'étude.

A terme, cette étude va nous outiller pour concevoir une ingénierie complète au sens de l'organisation mathématique et compatible avec ce qu'il est d'usage d'observer dans les pratiques d'enseignement actuelles.

Nous exposons dans le paragraphe suivant la grille élaborée pour analyser les organisations mathématiques et didactiques *d'Outils pour les Maths* et *d'Euro Maths* en suivant les lignes de la méthodologie présentées au chapitre 4.

I. Présentation de la grille élaborée pour analyser les organisations mathématiques et didactiques

Avant de présenter la grille d'analyse, qui permet de comparer une organisation mathématique proposée par un auteur de manuel à l'organisation mathématique de référence élaborée au chapitre 3, nous exposons le cheminement suivi pour élaborer les critères d'analyse et les hiérarchiser.

- Pour les types de tâches liés à la production de calculs (OM1)

Nous commençons par indiquer à partir de quel type de problèmes (au sens de Vergnaud, 1990) et dans quel contexte l'élève est amené à produire un calcul de la forme $a + b = x$; $a - b = x$; $a + x = b$, où a et b sont deux données du problème et x est l'inconnue. Nous précisons ensuite, en fonction de la consigne posée à l'élève, ou des indications données dans le guide de l'enseignant, quels sont les ostensifs et les calculs attendus. Pour finir, nous mentionnons si l'élève doit trouver le résultat du calcul.

- Pour les types de tâches liés à l'association et la transformation de représentations sémiotiques (OM2)

Si nécessaire, nous mentionnons les liens de ce type de tâches avec la production de calculs (OM1) ou avec l'effectuation de calculs (OM3). Nous spécifions s'il est demandé à l'élève d'associer deux représentations de types différents ou de produire une représentation de type différent d'une représentation donnée.

- Pour les types de tâches liés à l'effectuation de calculs (OM3)

La méthode que nous adoptons consiste à analyser les types de tâches présents, et, pour chaque type de tâches, à relever, en nous référant aussi au guide de l'enseignant :

- les variables de commande, par exemple le champ numérique choisi par les auteurs.
- les variables didactiques, en l'occurrence, les termes de la soustraction et les relations entre ces termes qui ont de l'influence sur les techniques envisageables par les élèves.
- les techniques, les ostensifs et les éléments de technologie attendus.

- Pour les types de tâche propres à la réécriture de calculs (OM4)

Si nécessaire, nous mentionnons les liens de ce type de tâches avec l'effectuation de calculs (OM3). Nous précisons de quels types sont ces transformations⁸⁵ et à quels moments de l'étude elles sont envisagées.

- Pour les liens entre les différentes organisations mathématiques

Après avoir étudié cette question, nous élaborons un schéma comme celui présenté au chapitre 3 (cf. : figure 3.1) pour montrer les liens existants.

Pour analyser l'organisation didactique proposée par les auteurs, nous étudions la programmation envisagée par les auteurs. Cela nous amène à repérer le nombre et la nature des étapes envisagées et leur hiérarchisation. Pour chacune d'entre elles, nous nous référons au texte destiné au maître, pour connaître les objectifs d'apprentissage. Nous analysons, en lien avec ces objectifs, les enjeux des différents moments de l'étude (moment de première rencontre, d'exploration et d'émergence d'une technique, moment de la construction du bloc technologico-théorique). Nous relevons le milieu l'énoncé du problème, la liste de calculs, les

⁸⁵ Dans le chapitre 3, nous avons relevé quatre types de tâches :

- Transformer $a - b$ en $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_p)$ et inversement, avec a_i et b_j entiers naturels pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.
- Transformer $a - b$ en $a - (b_1 + b_2 + \dots + b_p)$ et inversement avec b_j entiers naturels pour $1 \leq i \leq p$.
- Transformer $a - b$ en $(a + c) - (b + c)$ ou $(a - c) - (b - c)$.
- Transformer $a - b = ?$ en $b + ? = a$ et inversement.

tâches proposées en lien avec les consignes, les techniques attendues à partir des procédures, les modalités (travail individuel, en groupe, collectif), l'institutionnalisation (la leçon) envisagée par les auteurs.

Pour conclure sur ces précisions méthodologiques nous précisons que les analyses de l'organisation mathématique et de l'organisation didactique sont menées conjointement.

II. Analyse des organisations d'Outils pour les Maths (2012)

Avant de conduire l'analyse de l'organisation mathématique et didactique relative au calcul soustractif sur les entiers naturels, en utilisant la grille élaborée au paragraphe I, nous présentons brièvement la structure des manuels de CE1 et de CE2.

II.1. Présentation de la structure des manuels

Le manuel destiné à l'élève et le guide du maître⁸⁶ comptent six parties : *Vers le calcul mental – Nombres – Calcul – Géométrie – Grandeurs et mesure – Organisation de données*. Le contenu relatif au calcul soustractif se trouve exclusivement dans la première partie *vers le calcul mental* et dans la troisième partie *calcul*. La partie *vers le calcul mental* en CE1 et en CE2, est découpée en plusieurs sous parties qui sont : *Calculer mentalement des sommes – Calculer mentalement des différences – Calculer mentalement des produits, doubles, triples quadruples*. Nous limitons notre étude à la sous partie *calculer mentalement des différences*.

Manuel CE1	Manuel CE2
Calculer mentalement des différences (1) (p. 12-13)	Calculer mentalement des différences (p.12-13)
Calculer mentalement des différences (2) (p. 14-15)	

Tableau 5.1 : titres relevés dans *calculer mentalement des différences*
Outils pour les Maths CE1&CE2 (2012)

La partie *calcul* est aussi découpée en plusieurs sous parties dont les enjeux sont les opérations : *l'addition et la soustraction – la multiplication – la division*. Plusieurs entrées sont proposées pour étudier *l'addition et la soustraction*. Dans le sommaire de chaque manuel, on trouve les titres suivants :

⁸⁶ Les auteurs nomment le manuel d'accompagnement destiné aux enseignants le guide du maître. Nous reprenons cette terminologie.

Manuel CE1	Manuel CE2
Comprendre le sens de l'addition et de la soustraction (p. 58-59) Choisir la bonne opération (p. 60-61) Additionner deux nombres (p. 62-63) Soustraire deux nombres(1) (p. 64-65) Soustraire deux nombres(2) (p. 66-67) Révisions (p. 68-69) Problèmes : l'addition, la soustraction (p. 70-71)	Additionner deux nombres (p.54-55) Soustraire deux nombres(1) (p. 56-57) Soustraire deux nombres(2) (p.58-59) Révisions (p.60-61) Problèmes : l'addition et la soustraction (p.62-63)

Tableau 5.2 : titres relevés dans *l'addition et la soustraction*
Outils pour les Maths CE1&CE2 (2012)

Une lecture en parallèle des sommaires montre que *Comprendre le sens de l'addition et de la soustraction* et *Choisir la bonne opération* sont deux sujets qu'on ne retrouve pas au CE2. Tous les autres sujets sont communs aux deux niveaux et regroupent ce qui est de l'ordre de la résolution de problèmes et du calcul posé en colonne.

Cette présentation rapide du plan des manuels étant faite, nous abordons dans le paragraphe suivant l'étude de l'organisation mathématique relative au calcul soustractif proposée par les auteurs d'*Outils pour les Maths* (2012).

II.2. Organisation mathématique relative au calcul soustractif

Nous conduisons cette étude en trois étapes. La première est consacrée à analyser l'organisation mathématique du CE1, la seconde à analyser les éléments proposés en CE2, en continuité ou en rupture avec ceux identifiés en CE1. La dernière consiste à s'appuyer sur les éléments relevés au préalable pour qualifier⁸⁷ l'organisation mathématique proposée par les auteurs et la comparer avec l'organisation mathématique de référence.

II.2.1. Organisation mathématique au CE1

Nous étudions une à une les six premières doubles pages propres au calcul soustractif⁸⁸. Pour chaque exercice, nous notons quelles organisations mathématiques locales sont convoquées (les tableaux renseignés sont présentés en annexe C.1.1). Cette classification permet d'estimer quelle part occupe chaque organisation mathématique locale au sein de

⁸⁷ Nous reviendrons de façon synthétique sur les types de tâches fréquents, techniques privilégiées, technologies valorisées, ostensifs introduits, liens courants entre les différentes organisations mathématiques locales, organisations mathématiques locales absentes.

⁸⁸ Nous ne considérons pas dans un premier temps la double page consacrée aux révisions ni celle consacrée à la résolution de problèmes car ces deux pages viennent en complément de ce qui précède.

l'organisation mathématique relative au calcul soustractif. Nous poursuivons ensuite notre analyse avec un grain plus fin, en étudiant avec la grille élaborée au paragraphe 1, les différents types de tâches proposés par les auteurs en lien avec la production de calculs (OM1), l'association et la traduction de différentes représentations sémiotiques (OM2), l'effectuation de calculs (OM3) et la réécriture de calculs (OM4). Dans un dernier paragraphe, nous relevons, en nous appuyant sur l'étude précédente, les caractéristiques de l'organisation mathématique propre au CE1 en vue d'analyser celle proposée au CE2.

	Calculer mentalement des différences(1)	Calculer mentalement des différences(2)	Comprendre le sens de l'addition et de la soustraction	Choisir la bonne opération	Soustraire deux nombres (1)	Soustraire deux nombres (2)
OM1	0%	0%	0%	70%	0%	0%
OM2	0%	0%	33%	30%	0%	0%
OM3	64%	72%	33%	0%	70%	90%
OM4	0%	0%	0%	0%	0%	0%
OM1 OM3	26%	22%	0%	0%	30%	10%
OM2 OM3	0%	6%	16%	0%	0%	0%
Pour calculer les pourcentages relatifs à chaque OM, nous avons effectué le rapport entre le nombre d'items renvoyant à une organisation mathématique locale sur le nombre total d'items. Les deux dernières lignes signifient que l'exercice convoque deux OM.						

Tableau 5.3 : répartition des organisations mathématiques locales
Outils pour les Maths CE1 (2012)

Ce tableau met en évidence que sur l'ensemble des doubles pages, hormis dans *choisir la bonne opération*, la production de calcul (OM1) est toujours associée à l'effectuation de calcul (OM3). En revanche, des types de tâches uniquement consacrés à l'effectuation de calculs (OM3) sont majoritairement présents dans les pages consacrées au *calcul mental* et à *la soustraction de deux nombres*. Il y a très peu de travail spécifique propre à la transformation et l'association de différentes représentations sémiotiques (OM2), et aucun travail relatif à la réécriture de calculs (OM4).

a) Etude relative à OM1

Le type de tâches qui consiste à produire un calcul additif ou soustractif est rattaché à la résolution de problèmes. Il est abordé comme nous le voyons dans le développement qui suit avec des objectifs sensiblement différents suivant les doubles pages considérées.

Dans calculer mentalement des différences (1) et (2), l'objectif des auteurs (p.13 du guide du maître) est en priorité axé sur la mise en œuvre de techniques de calcul mental pour résoudre des problèmes concrets. Une égalité numérique de type $a + b$; $a - b$; $a + \dots = b$, où a et b sont deux données du problème, n'est pas explicitement attendue. Seule, la réponse du problème est exigée d'après la consigne proposée dans le manuel⁸⁹. En annexe C2.1, nous avons répertorié les exercices qui correspondent à ce type de tâches et les calculs attendus.

Dans choisir la bonne opération, le guide du maître (p.56) indique que les élèves ont tendance à associer à une opération un champ lexical, d'où la nécessité de les mettre en garde contre *certaines mots trompeurs* qui ne sont pas des indices pertinents. Pour chaque exercice, l'élève doit *écrire la bonne opération*. Si on se réfère à l'exemple traité dans « la leçon », une réponse sous la forme $a + b$ ou $a - b$ est attendue. L'écriture $a + \dots = b$ n'est pas proposée. Notons de plus que l'élève n'a pas à effectuer le calcul. Le type de tâches fait exclusivement référence à OM1.

A titre d'exemple nous reprographions ci-dessous un des exercices proposés à l'élève. En annexe C.1.2, nous avons répertorié l'ensemble des problèmes de cette double page qui sollicitent $T_{\text{Trad.}(lan./cal.)}$, en précisant pour chacun d'eux le type auquel il appartient en nous référant à la catégorisation de Vergnaud (1990), ainsi que les calculs qui le modélisent.



Figure 5.1 : exercice 6 (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 61)

⁸⁹ Cette consigne est « écris le résultat ».

Dans *soustraire deux nombres (1)*, les auteurs ne précisent pas dans le guide du maître l'objectif de la résolution de problèmes. On suppose qu'il s'agit en complément avec le travail proposé en calcul mental, de mettre en œuvre la technique de la soustraction posée en colonne sans retenue pour résoudre des problèmes concrets⁹⁰. Le type de tâche convoqué fait référence à OM1 et sollicite OM3.

b) Etude relative à OM2

Nous relevons sur les quatre doubles pages qui convoquent OM2 (cf. Tableau 5.9) trois types de tâches :

- ✓ $T_{\text{Trans.}(sch./cal.)}$ qui consiste à traduire un schéma par un calcul soustractif.
- ✓ $T_{\text{Ass.}(lan./cal.)}$ qui consiste à associer à un énoncé textuel une expression numérique de la forme $a + b$ ou de la forme $a - b$.
- ✓ $T_{\text{Ass.}(lang./sch.)}$ qui consiste à associer un énoncé textuel à un dessin imagé.

Le premier type de tâches $T_{\text{Ass.}(sch./cal.)}$ est présent dans un seul exercice de *calculer mentalement des différences(2)*. Nous rephotographions les deux premiers items de cet exercice (au total l'exercice contient 5 items):

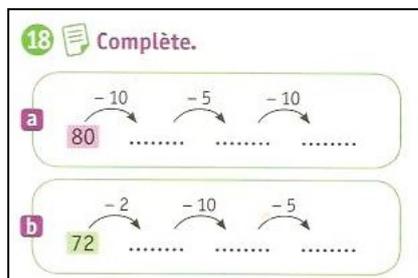


Figure 5.2 : exercice 18 (a) et (c) (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 15)

Chaque item correspond à une suite de calculs. La tâche consiste à interpréter le schéma, considérer que le nombre situé à gauche est le nombre initial et que le nombre associé au bond est l'opérateur puis à calculer une différence et à écrire le résultat sur une piste numérique (ceci trois fois de suite).

Ce type de tâche $T_{\text{Ass.}(sch./cal.)}$ est aussi présent dans *soustraire deux nombres (2)* dans la rubrique « cherchons »⁹¹.

⁹⁰ Les problèmes sont répertoriés et classés en annexe C.1.2.

⁹¹ Nous revenons sur l'analyse de ce problème au paragraphe c).2 vu qu'il a été choisi par les auteurs pour introduire la propriété de conservation des écarts.

Le second type de tâches $T_{\text{Ass.}(lan./cal.)}$ est présent dans *le sens de l'addition et de la soustraction* (rubrique « cherchons » et exercice 4 composé de quatre items) et dans *choisir la bonne opération* (exercice 1,2,3,4 et 5). Toutes les tâches proposées :

« Rappeler aux élèves le sens de l'addition et de la soustraction, à travers des situations ne nécessitant pas de compétences particulières de lecture et proposant des calculs simples. »

(Guide du maître, Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 54)

Nous choisissons de présenter le troisième item de l'exercice 4 reprographié ci-dessous, pour illustrer et conduire l'analyse :

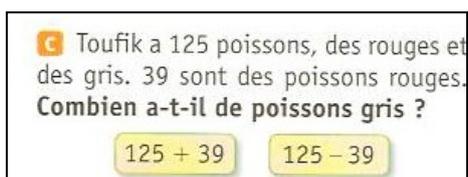


Figure 5. 3: exercice 4c (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 59)

Pour répondre à la question, l'élève peut :

- comparer $125 + 39$ à 125 et comparer $125 - 39$ à 125. Dans le premier cas, le nombre obtenu est supérieur à 125, dans le second, il est inférieur à 125. Dans l'énoncé, il est dit que Toufik a 125 poissons, il ne peut pas avoir un nombre de poissons gris supérieur à 125, c'est donc la seconde proposition qui convient puisque le résultat de celle-ci est inférieur à 125.

- associer au problème l'expression numérique $125 + 39$, auquel cas la proposition est erronée.

- associer au problème l'expression numérique $125 - 39$, auquel cas la proposition est correcte.

- rechercher le complément de 39 à 125. Auquel cas, la proposition est correcte mathématiquement mais non recevable car non répertoriée dans les choix possibles.

Les auteurs en ne proposant qu'une écriture additive et une écriture soustractive, excluent tout calcul du type $a + \dots = b$. Ils opposent addition et soustraction sans revenir sur le sens premier de la soustraction comme opération inverse de l'addition. Ils proposent même une activité qui renforce cette dichotomie car elle invite l'élève à choisir entre « + » et « - ».

« Présenter à l'oral d'autres petits problèmes additifs ou soustractifs et faire choisir par les élèves le signe de l'opération. Ils notent « + » ou « - » sur leur ardoise. » (Guide du maître, Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 55).

Le troisième type de tâches $T_{\text{Ass.}(lan./schl.)}$ est présent dans *le sens de l'addition et de la soustraction* (exercice3) et dans *soustraire deux nombres (2)*. Nous reprographions à titre d'exemple, une tâche proposée aux élèves :



Figure 5.4 : exercice 4c (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 59)

Nous constatons que l'élève doit choisir, entre deux représentations imagées, celle qui permet de modéliser le problème. Il doit valider la proposition de Lisa en dénombrant les billets et les pièces représentés. La somme à payer est de $(35 + 11)€$.

c) Etude relative à OM3

Nous analysons les types de tâche propres au calcul mental puis ceux qui s'apparentent au calcul posé.

1. Calcul soustractif mental

En nous basant sur les données inventoriées dans les tableaux⁹² présentés en annexe C1.3, nous regroupons les tâches présentes dans le manuel en six types de tâches :

- ✓ $T_{a-\square}$ avec $\square=1$ ou $\square=2$ ou $\square=3$ ou $\square=5$
- ✓ $T_{a-\square 0}$ avec $\square=1$ ou $\square=2$ ou $\square=5$
- ✓ $T_{a-\square 00}$ avec $\square=1$ ou $\square=2$ ou $\square=5$
- ✓ $T_{a-\square}$ avec $\square=9$ ou $\square=11$
- ✓ $T_{a+..=b}$ avec $b=10$, $b=100$ ou $b=1000$
- ✓ Trouver un ordre de grandeur

En considérant l'effectif des tâches propres à chaque type de tâches, nous avons construit un diagramme qui donne un aperçu de la répartition de ces types de tâches.

⁹² Les tableaux indiquent pour chaque exercice du manuel de l'élève où le calcul mental est sollicité, le nombre de tâches proposé (nombre de calculs que l'élève doit effectuer) et mentionnent le type de tâches convoqué.

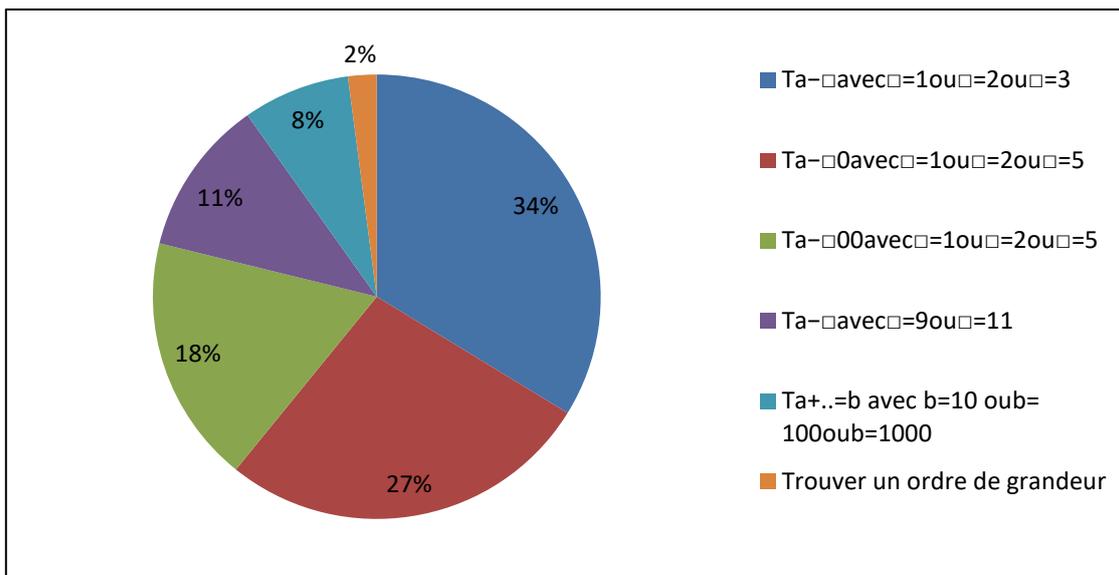


Tableau 5.4 : répartition des types de tâches en calcul mental
Outils pour les Maths CE1 (2012)

Nous commençons par étudier le type de tâches que l'élève rencontre en premier et qui s'avère aussi être le plus fréquent, soit *soustraire un, deux, trois ou cinq*.

- $T_{a-\square}$ avec $\square = 1$ ou $\square = 2$ ou $\square = 3$ ou $\square = 5$

Le choix des auteurs est de proposer deux exercices de cinq séries de calculs (cinq calculs par série) dans le manuel de l'élève, accompagnés d'exercices dans le guide du maître⁹³, regroupant les tâches relatives à soustraire un, soustraire deux puis soustraire trois. Les tâches correspondant à soustraire cinq sont moins nombreuses et parsemées sur l'ensemble des doubles pages consacrées au calcul mental.

Variable de commande

Sur un des deux exercices le nombre auquel on soustrait 1, 2, 3 est inférieur à 200, sur l'autre exercice, il est compris entre 200 et 1000.

Techniques et éléments de technologie attendus par les auteurs

Dans le guide du maître, les techniques sont exprimées en ces termes :

« Cette compétence est liée à la suite des nombres. Après une procédure par comptage (décomptage), les élèves seront amenés à procéder par décomposition pour trouver les résultats demandés. »

(Guide du maître, Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 10)

⁹³ Pour ceux proposés dans le guide de l'enseignant, il est mentionné simplement qu'il s'agit d'exercices *collectifs et oraux*. Pour ceux proposés dans le manuel de l'élève, il est mentionné qu'il s'agit d'« un entraînement individuel écrit pour préparer ou renforcer les exercices collectifs oraux proposés dans le guide du maître ».

Nous en déduisons qu'une technique de décomptage basée sur une connaissance de la comptine numérique⁹⁴, sécable, à rebours (oralisée ou écrite, avec ou sans l'aide des doigts) est attendue, puis qu'une seconde technique, basée sur la *décomposition*, sans plus de précisions, doit la remplacer.

Assortiments

Ces renseignements pris, nous choisissons de nous intéresser aux trois premiers exercices du manuel de l'élève reprographiés ci-dessous.

<p>1 Enlève 1 à ces nombres.</p> <p>a 8 - 15 - 11 - 7 - 9</p> <p>b 31 - 56 - 27 - 62 - 45</p> <p>c 40 - 60 - 80 - 20 - 50</p> <p>d 124 - 153 - 178 - 190 - 165</p>	<p>2 Enlève 2 à ces nombres.</p> <p>a 6 - 4 - 12 - 17 - 14</p> <p>b 26 - 47 - 25 - 61 - 82</p> <p>c 41 - 60 - 70 - 91 - 20</p> <p>d 162 - 184 - 135 - 102 - 110</p>	<p>3 Enlève 3 à ces nombres.</p> <p>a 4 - 12 - 15 - 9 - 17</p> <p>b 83 - 45 - 57 - 63 - 72</p> <p>c 43 - 22 - 71 - 32 - 61</p> <p>d 132 - 197 - 156 - 183 - 161</p>
---	--	--

Figure 5.5 : exercices 1, 2 et 3 (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 12)

Nous présentons en parallèle ces trois exercices, et non un à un, car les séries(a) (respectivement (b), (c) et (d)) de chaque exercice ont des similitudes. Chaque série, par les regroupements de tâches qu'elle propose, incite à utiliser une technique particulière et s'apparente en ce sens à un assortiment de Genestoux (2002).

Si nous examinons les nombres auxquels il faut soustraire 1 (respectivement 2 ou 3) nous constatons que :

- ✓ Les cinq nombres de chaque série (a) sont inférieurs à 20. Les cinq calculs peuvent être effectués en évoquant des faits numériques connus. La technique τ_{REP} est applicable.
- ✓ Les nombres de chaque série (b), à l'exception d'un seul (exercice 2 et 3), sont tels qu'il est possible d'effectuer le calcul en décomposant canoniquement le nombre à soustraire et en utilisant des faits numériques mémorisés. La technique τ_{1010} s'applique. $31 - 1 = 30 + 1 - 1$; ...; $26 - 2 = 20 + 6 - 2$; ...; $83 - 3 = 80 + 3 - 3$; ...
- ✓ Les cinq nombres de la série (c) de l'exercice 1 et trois nombres sur cinq de la série (c) de l'exercice 2 se terminent par zéro. La technique (τ_{1010})' s'applique. $40 - 1 = 30 + 10 - 1$; ...
- ✓ Quatre nombres sur cinq de la série (c) de l'exercice 3 sont tels qu'entre a et le résultat de $a - 3$ se trouve la dizaine entière de a. Deux techniques sont candidates. La

⁹⁴ Remarquons que la technique qui consiste à évoquer des faits numériques connus, τ_{REP} , n'est pas mentionnée.

technique (τ_{1010})' qui s'appuie sur la décomposition du nombre auquel on soustrait et la technique τ_{A10} qui s'appuie sur la décomposition du nombre que l'on soustrait.
 $22 - 3 = 10 + 12 - 3; 22 - 3 = 22 - 2 - 1; \dots$

- ✓ Les nombres de chaque série (d) sont supérieurs à 100. Pour chaque série, un, voire deux calculs ne peuvent pas s'effectuer en utilisant τ_{1010} et peuvent mobiliser (τ_{1010})' ou τ_{A10} .
- $T_{a-\square}$ avec $T_{a-\square}$ avec $\square=1$ ou $\square=2$ ou $\square=5$

Ce type de tâches est fortement représenté. Là encore, les auteurs pour conduire l'étude regroupent dans un même exercice, composé de plusieurs séries de calculs, une tâche qui va être soustraire 10 puis soustraire 20 et enfin 50. Ils proposent, comme nous le verrons en analysant précisément plusieurs exercices consécutifs, des assortiments au sens de Genestoux (2002). Ils favorisent certains rapprochements sur une série de calculs, et introduisent peu à peu des irrégularités. Celles-ci peuvent pousser l'élève à repérer la nature des nombres en jeu dans le but de choisir une technique adaptée.

Variables de commande

Dans les premiers exercices (du manuel élève et du livre du maître), le nombre a auquel on soustrait 10 ou 100 est inférieur à 200, puis il est compris entre 200 et 1000.

Variables didactiques

Les auteurs distinguent le cas où le chiffre des dizaines du nombre auquel on soustrait est nul du cas où il est non nul.

Techniques et éléments de technologie attendus par les auteurs

« Il est particulièrement important de montrer aux élèves que soustraire 10, c'est retrancher une dizaine et par conséquent c'est enlever 1 au chiffre des dizaines. Il est à noter que le passage à la dizaine inférieure représente une difficulté à identifier avec les élèves lorsque l'on passe en même temps à la centaine inférieure : par exemple, soustraire 10 à 307, c'est enlever 1 à 30 et par anticipation avoir repéré que 10 dizaines, c'est une centaine. »
 (Guide du maître, Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 10)

Les auteurs préconisent (« il est particulièrement important ») dans le cas où le chiffre des dizaines du nombre auquel on soustrait 10 est non nul, d'utiliser τ_{1010} . Ils donnent le mode d'emploi de la technique (« enlever 1 au chiffre des dizaines » et sous entendent de laisser inchangé les autres chiffres). Ils ne disent pas réellement que cette technique est mise à défaut dans le cas contraire, et optent alors pour l'utilisation de τ_{CONV} , en précisant qu'il faut opérer sur le nombre de dizaines du nombre auquel on soustrait. Ils rappellent les propriétés du

système de numération décimale sur lesquelles s'appuie la technique. Ils ne suggèrent pas d'appliquer (τ_{1010})'.

Assortiments

Nous choisissons d'exposer tous les exercices de la doublepage *calculer mentalement des différences (1)* qui se réfèrent à la tâche soustraire 10. Pour chaque série, nous relevons les variables didactiques en jeu (nous entourons les calculs qui peuvent s'avérer plus difficiles que les autres) et les techniques *a priori* envisageables dans l'organisation mathématique de référence.

<p>7 Enlève 10 à ces nombres.</p> <p>a 60 - 56 - 94 - 71 - 49</p> <p>b 163 - 188 - 120 - 110 - 143</p> <p>c 104 - 178 - 125 - 119 - 193</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Pour chaque calcul de chaque série τ_{CONV} est applicable. ▪ Pour les calculs de la série (a) vu que les nombres en jeu sont tous inférieurs à 100, τ_{REP} est envisageable. ▪ Pour un seul calcul de la série (c), 104 - 10, τ_{1010} n'est pas applicable mais vu que 104 est proche de 100, τ_{REP} est envisageable. (τ_{1010})' est aussi applicable.
<p>11 Enlève 10 à ces nombres.</p> <p>364 - 300 - 989 - 724 - 500</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Pour chaque calcul, τ_{CONV} est applicable. ▪ Pour 364 - 10, 989 - 10 et 724 - 10 τ_{1010} est applicable. ▪ Pour 300 - 10 et 500 - 10, comme 300 et 500 sont des centaines entières, τ_{REP} est envisageable. (τ_{1010})' est aussi applicable.
<p>14 Enlève 10 à ces nombres.</p> <p>a 14 - 95 - 60 - 53 - 80</p> <p>b 123 - 187 - 172 - 120 - 111</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Pour les calculs de la série (a) vu que les nombres en jeu sont tous inférieurs à 100, τ_{REP} est envisageable. ▪ Pour chaque calcul de chaque série τ_{CONV} et τ_{1010} sont applicables.
<p>16 Enlève 10 à ces nombres.</p> <p>a 450 - 910 - 300 - 450 - 200</p> <p>b 374 - 203 - 908 - 611 - 507</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Pour chaque calcul, τ_{CONV} est applicable. ▪ Pour 300 - 10 et 500 - 10, comme 300 et 500 sont des centaines entières, τ_{REP} est envisageable. ▪ Pour la série (b), τ_{1010} n'est applicable que pour deux calculs, les trois autres peuvent être effectués en utilisant éventuellement (τ_{1010})'.

Tableau 5.5 : analyse des exercices relatifs à *soustraire dix* (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 12-13)

L'analyse montre que les auteurs *d'Outils pour les Maths* choisissent de graduer les difficultés et de stabiliser certaines techniques, en l'occurrence τ_{1010} , avant d'introduire τ_{CONV} .

- $T_{a-\square 00}$ avec $\square=1$ ou $\square=2$ ou $\square=5$

Nous ne revenons pas sur les exercices que les auteurs proposent pour soustraire des multiples de 100, car tous les exercices proposés s'apparentent à ceux que nous venons d'analyser. La première série permet éventuellement d'utiliser τ_{REP} . Les calculs suivants peuvent être effectués en utilisant τ_{1010} . Des calculs nécessitant l'utilisation de τ_{CONV} ou éventuellement (τ_{1010})' sont peu à peu introduits.

- $T_{a-□}$ avec $□=9$ ou $□=11$

Pour éclairer l'analyse du type de tâches *soustraire neuf ou onze*⁹⁵, nous retranscrivons le texte destiné au maître :

« Les élèves doivent pouvoir soustraire rapidement 9, 11 à un nombre donné. Les procédures à maîtriser sont multiples et dépendent des nombres mis en jeu.

Exemple :

- $13-9$ peut se traduire par « 9 pour aller à 13 » (complément) ;
- $129-9$ enlever 9 au chiffre des unités ;
- $27-9$: retrancher 7 pour arriver à 20, puis retrancher 2 ;
- $627-9$: retrancher 10 et ajouter 1.

Cette dernière procédure sera largement explicitée et privilégiée sans pour autant exclure les autres. »

(Guide du maître, Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 10)

Variables didactiques

Les auteurs identifient, dans le paragraphe cité plus haut, les variables didactiques en s'appuyant sur des exemples numériques. Nous nous proposons de généraliser et de formuler ces variables en fonction du nombre a :

- le chiffre des unités du nombre a est 9 (exemple donné : $129 - 9$).
- la dizaine entière inférieure à a est comprise entre a et $a - 9$ (exemple donné : $27 - 9$).

Techniques et éléments de technologie attendus par les auteurs

D'après l'encadré destiné aux enseignants, la première technique proposée par les auteurs correspond à $\tau_{\text{ADD/SOUS}}$. Il n'est pas précisé en quoi elle est économique pour effectuer $13 - 9$ (les nombres 13 et 9 sont « proches »). La seconde technique est τ_{1010} . Là encore, il n'est pas dit qu'elle est efficace, car le nombre auquel on soustrait 9 a comme chiffre des unités le chiffre 9 ($129-9$). La troisième technique explicitée pour effectuer $27 - 9$ est τ_{A10} ($27 - 9 = 27 - 7 - 2$). Les éléments de technologie s'y reportant sont absents. La quatrième et dernière technique proposée est τ_{N10C} ($27 - 9 = 27 - 10 + 1$). Le livre du maître n'indique pas comment cette technique « sera largement explicitée et privilégiée ». La convocation d'OM4 est laissée à l'appréciation de l'enseignant.

En conclusion, si on fait abstraction τ_{REP} et de τ_{AN} , l'ensemble des techniques envisagées par les auteurs coïncide avec l'ensemble des techniques possibles. En revanche, les éléments technologiques présents dans le livre du maître ne sont pas beaucoup développés (peu d'éléments pour expliquer, justifier et évaluer les techniques). Les exercices proposés sont

⁹⁵ Ce type de tâches occupe une place relativement importante dans l'organisation mathématique propre au calcul mental (cf. tableau 5.4).

construits comme une à trois séries de cinq calculs. Nous reprogrammions ci-dessous l'un d'entre eux.

<p>12 Enlève 9 à ces nombres.</p> <p>829 - 438 - 544 - 395 - 203</p>

Figure 5.6 : exercice 12 (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 12)

Le guide du maître n'indique pas la ou les techniques attendues pour effectuer chaque calcul. Nous proposons d'effectuer le premier calcul $829 - 9$ en appliquant τ_{1010} , le second calcul $438 - 9$ en appliquant (τ_{A10}) et les suivants en appliquant τ_{N10C} .

- $T_{a+...=b}$ avec $b=10$, $b=100$ ou $b=1000$

Techniques et éléments de technologie attendus par les auteurs

Les auteurs, comme le montre le texte destiné aux enseignants présenté ci-dessous, ne précisent ni les techniques possibles ni les éléments de théorie s'y référant :

« Calculer des compléments. Là encore, cette compétence est liée à la numération, et il est nécessaire de réaliser ce type d'activités mentalement et à l'oral. D'autre part, cette compétence complète ce qui a été vu précédemment. Pour ces raisons, nous avons choisi de la faire apparaître ici. » (Ibid., p.12)

Ils proposent trois exercices dans *calculer mentalement des différences(2)*⁹⁶. Nous les reprogrammions avant d'en proposer une analyse.

Assortiments

<p>9 Combien pour aller à 10 ?</p> <p>a 2 - 5 - 9 - 3 - 4</p> <p>b 6 - 8 - 7 - 1 - 5</p>	<p>10 Combien pour aller à 100 ?</p> <p>a 50 - 70 - 40 - 30 - 90</p> <p>b 89 - 79 - 39 - 49 - 99</p>	<p>11 Combien pour aller à 1 000 ?</p> <p>a 800 - 500 - 700 - 600 - 900</p> <p>b 250 - 450 - 150 - 350 - 50</p>
---	---	--

Figure 5.7 : exercices 9, 10 et 11 (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 14)

L'exercice 9 propose comme tâche de rechercher les compléments à dix. Une technique possible en lien avec l'organisation de référence est τ_{REP} . Les nombres présents sur la ligne (a) de l'exercice 10 sont des multiples de dix. Pour réaliser la tâche $T_{a+...=100}$, deux techniques sont candidates : τ_{REP} ou τ_{CONV} . Les nombres de la ligne (b) ont tous *neuf* pour chiffre des unités. La recherche du complément à la dizaine entière supérieure s'en trouve simplifiée. Reste alors à trouver le complément de cette dizaine entière à cent (donc à appliquer les techniques mises en œuvre pour effectuer les calculs proposés à la ligne (a)). L'exercice 11

⁹⁶ Il est à noter qu'un autre exercice propose indirectement une recherche de compléments. Il s'agit d'un exercice (n°1 p. 58) dans *comprendre le sens de l'addition et de la soustraction*. Il est demandé à l'élève de compléter les opérations $8 + \dots = 12$; $10 - \dots = 8$. La technique, au vu des nombres en jeu, est τ_{REP} .

induit également l'utilisation d'une technique séquentielle pour trouver les compléments à mille.

- *Trouver un ordre de grandeur*

Sur l'ensemble des doubles pages du manuel de CE1 consacrées au calcul mental de différences, on trouve deux exercices, reproduits ci après, correspondant au type de tâches annoncé. Le guide du maître ne les évoque pas et n'en propose pas d'autres.

<p>13 Choisis le nombre qui est le plus proche du résultat.</p> <p>a $37 - 10 \rightarrow$ 10 30</p> <p>b $48 - 10 \rightarrow$ 40 50</p> <p>c $63 - 10 \rightarrow$ 50 70</p> <p>d $84 - 80 \rightarrow$ 10 100</p>	<p>14 Choisis le nombre qui est le plus proche du résultat.</p> <p>a $140 - 38 \rightarrow$ 100 180</p> <p>b $190 - 42 \rightarrow$ 150 200</p> <p>c $290 - 70 \rightarrow$ 200 300</p> <p>d $470 - 49 \rightarrow$ 400 420</p>
---	--

Figure 5.8 : exercices 13 et 14 (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 15)

Pour l'exercice 13, il est probable que l'élève calcule chaque différence⁹⁷ puis qu'il cherche, en fonction du résultat, le nombre le plus proche. L'exercice 14, venant juste après l'exercice 13, il est probable que l'élève va arrondir le nombre à soustraire à la dizaine entière la plus proche⁹⁸.

2. Calcul soustractif posé

Deux doubles pages dans le manuel de l'élève sont réservées pour introduire et appliquer une technique de la soustraction posée en colonne, en l'occurrence τ_{AIG} , technique basée sur la propriété de conservation des écarts. Nous analysons l'ensemble des tâches, en commençant par celles réservées aux soustractions sans retenue.

- *Soustraction sans retenue*

Pour introduire la technique, les auteurs demandent à l'élève de repérer les erreurs commises⁹⁹ dans trois soustractions posées par un camarade imaginaire, puis à l'enseignant de poser correctement les opérations au tableau avant de lire collectivement l'institutionnalisation locale, présente dans le manuel de l'élève, que nous regraphions ci-après.

⁹⁷ Soustraire dix ou un multiple de dix est une tâche re-convoquée.

⁹⁸ Il peut aussi choisir systématiquement parmi les nombres proposés celui qui est inférieur à 140 respectivement 190, 290) et être amené à changer de techniques pour le dernier calcul.

⁹⁹ Les auteurs explicitent la nature des erreurs commises : 1) Il a commencé par le chiffre de gauche et a calculé « 4 pour aller à 6 » donc il a trouvé 2. 2) Il a commis une erreur de calcul. 3) Il s'est trompé d'opération. Il a additionné les deux nombres au lieu de soustraire.

► Pour calculer une soustraction :

	7	6	
-	4	5	
<hr/>			
	3	1	

- ① Je pose mon opération en colonnes.
- ② Je soustrais d'abord les unités :
5 pour aller à 6, ça fait 1. J'écris 1 sous les unités.
- ③ Je continue mon calcul avec les dizaines :
4 pour aller à 7, ça fait 3. J'écris 3 sous les dizaines.

Figure 5.9 : la soustraction sans retenue (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 64)

Eléments de technologie présents

Fonction **décrire** : les différentes étapes qui permettent d'effectuer le calcul sont explicitées. Le mode d'emploi de la technique est complet. (fonction décrire).

Fonction **faciliter** : dans le livre du maître, les auteurs donnent deux moyens pour faciliter la mise en œuvre de τ_{AIG} , destinés aux élèves ayant des difficultés. Ils proposent d'inscrire les nombres dans un tableau de numération pour ceux qui n'alignent pas bien les chiffres, ou de calculer le complément de a à b plutôt que $b - a$ pour ceux qui ne maîtrisent pas le répertoire soustractif.

En revanche les fonctions **valider, contrôler et évaluer** sont absentes. Les auteurs ne proposent pas de vérifier le résultat en posant une addition ($31 + 45 = 76$). Ils ne proposent pas une tâche de réécriture de calcul propre à OM4 ($76 - 45 = (70 + 6) - (40 + 5) = (70 - 40) + (6 - 5) = 31$). Ils n'établissent pas de lien avec τ_{1010} , pourtant étudiée en calcul mental pour effectuer $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$.

Par la suite plusieurs types de tâches sont proposés :

- ✓ Effectuer des soustractions posées¹⁰⁰
- ✓ Poser et effectuer des soustractions données en ligne¹⁰¹
- ✓ Poser et effectuer des soustractions¹⁰²

¹⁰⁰ Exercices 1 p.64 : huit calculs $a - b$ avec a et b nombres à deux chiffres. Exercice 3 p.65 : huit calculs $a - b$ avec a nombre à trois chiffres et b nombre à deux chiffres. Exercice 5 p.65 : huit calculs $a - b$ avec a et b nombres à trois chiffres.

¹⁰¹ Exercice 2 p.64 : Douze calculs $a - b$ avec a et b nombres à deux chiffres. Exercice 4 p.65 : huit calculs $a - b$ avec a nombre à trois chiffres et b nombre à deux chiffres Exercice 6 p. 65 : quatre calculs $a - b$ avec a nombre à trois chiffres et b nombre à deux chiffres et quatre calculs avec a et b nombre à trois chiffres.

¹⁰² Exercice 7 p.65 : $a - b$ avec a et b nombres à deux chiffres. Exercice 8 et 9 p.65 : un calcul avec a nombre à trois chiffres et b nombre à deux chiffres.

- *Soustraction avec retenue*

Les auteurs précisent dans le guide du maître que la technique τ_{AIG} s'appuie sur la propriété de conservation des écarts et qu'une compréhension de cette propriété permet de saisir le rôle des retenues.

« La difficulté des soustractions à retenues porte sur la compréhension du rôle de la retenue. Par là même, c'est la conservation des écarts qui doit être comprise. »

(Guide du maître, Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 62)

Ils proposent une première rencontre avec cette propriété en s'appuyant sur le problème reprographié ci-dessous :

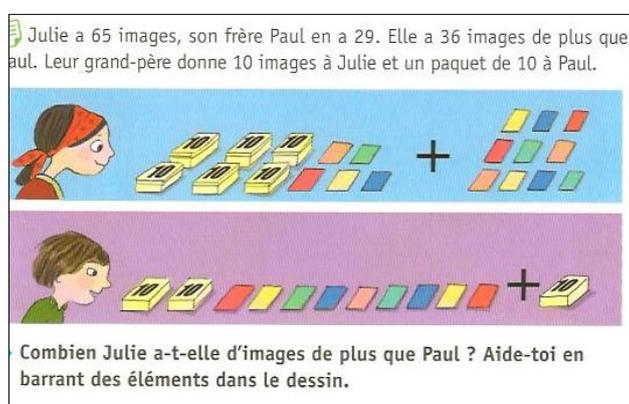


Figure 5.10: situation de découverte pour la soustraction avec retenue (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 66)

Sur le schéma, le signe opératoire + est utilisé pour montrer qu'on réunit à chaque fois deux collections imagées. La démarche est guidée. L'élève est invité à dénombrer les éléments qui restent après avoir barré les éléments communs aux deux collections imagées. Il doit alors constater que l'écart est toujours de 36, alors que Julie a reçu 10 images supplémentaires et Paul un paquet de 10 images. Le guide du maître en reste là. Il ne propose pas de généralisation et ne formule pas la propriété. Il suggère d'introduire la technique opératoire en revenant au calcul initial $65 - 29$, puis de se référer au texte reprographié ci-dessous :

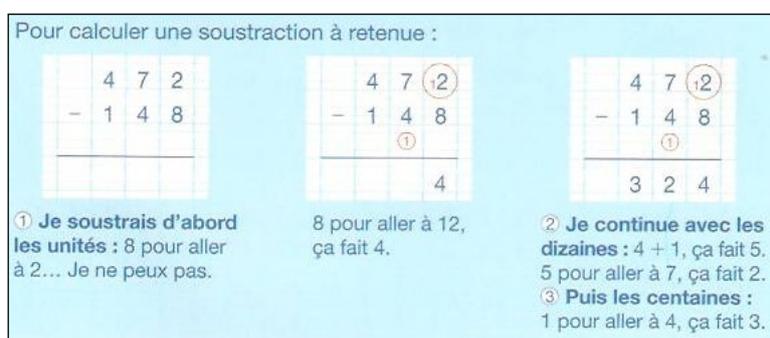


Figure 5.11: la soustraction avec retenue (Outils pour les Maths CE1, 2012, p. 66)

Eléments de technologie présents

Fonction **décrire** : Les différentes étapes qui permettent d'effectuer le calcul sont explicitées. Cependant, contrairement à ce qui est annoncé dans le livre du maître, le mode d'emploi de la technique ne semble pas congruent avec la conservation des écarts. En effet, la comptine proposée par les auteurs ne dit pas « 2 moins 8 », mais à la place « de 8 pour aller à 2 ». Expression qui se transforme alors en « 8 pour aller à 12 » (calcul en avant) et qui amène à écrire ensuite une retenue additive sous le 4. C'est un mode d'emploi qui correspond à celui de l'addition à trou. Il y a dissociation entre le mode d'emploi de la technique et la validation de la technique (conservation des écarts).

Fonction **faciliter** : dans le guide du maître, il est indiqué qu'il faut évoquer la propriété de conservation des écarts au cas où un élève oublierait une retenue.

En revanche les fonctions **expliquer, valider, contrôler et évaluer** sont absentes. Les élèves ont été sensibilisés à la signification des retenues à partir d'un exemple. La propriété de conservation des écarts n'a pas été formulée. Les auteurs ne proposent pas de vérifier le résultat en posant une addition. Ils ne proposent pas de tâche de réécriture de calcul propre à OM4 et n'établissent pas de lien avec τ_{AN} , vu que cette technique n'est pas étudiée en calcul mental.

Par la suite deux types de tâches sont proposés :

- ✓ Effectuer des soustractions posées¹⁰³ : 19 tâches au total. Pour chaque calcul, l'emplacement des retenues est indiqué par la présence de deux cercles (voir de quatre cercles).
- ✓ Poser et effectuer des soustractions données en ligne¹⁰⁴ : 36 tâches au total. Nous récapitulons ci-dessous, le nombre de soustractions où les retenues valent respectivement dix ou cent :

	Valeur des retenues : 10	Valeur des retenues : 100
Nombre de soustractions posées avec deux retenues	12/19	9/19
Nombre de soustractions à poser avec deux retenues	18/36	28/36

¹⁰³ Sur dix-neuf soustractions posées et préparées sur la double page :

- deux calculs $a - b$ avec a et b nombres à deux chiffres
- six calculs $a - b$ avec a et b nombres à trois chiffres
- onze calculs $a - b$ avec a nombre à trois chiffres et b nombre à deux chiffres.

¹⁰⁴ Sur trente-six soustractions en ligne à poser:

- vingt-six calculs $a - b$ avec a et b nombres à trois chiffres
- treize calculs $a - b$ avec a nombre à trois chiffres et b nombre à deux chiffres.

Nous constatons qu'il y a des calculs qui nécessitent deux couples de retenues (12/55) et que la part de soustractions où la valeur des retenues vaut cent est élevé : environ 67% (37/55). Les auteurs se sont pourtant contentés de présenter un seul exemple où les retenues valent dix (cf. figure 5.10).

Avant d'aborder l'étude spécifique au CE2, nous exposons les caractéristiques de l'organisation mathématique propre au CE1.

d) Caractéristiques de l'organisation mathématique de CE1

Nous pointons, suite à l'étude minutieuse relative à chaque type de tâches, les éléments qui caractérisent l'organisation mathématique des auteurs d'*Outils pour les Maths* (CE1, 2012) :

Caractéristiques propres à OM1 : la production d'expressions numériques telles que $a + b$ ou $a - b$ est rattachée à la résolution de problèmes. Un calcul du type $a + \dots = b$ n'est pas attendu par les auteurs vu qu'ils privilégient l'addition et la soustraction sans donner de réel statut à l'addition à trou.

Caractéristiques propres à OM2 : trois types de tâches sont présents $T_{\text{Trans.}(sch./cal.)}$, $T_{\text{Ass.}(lan./cal.)}$ et $T_{\text{Ass.}(lang./sch.)}$. Les schémas proposés sont presque exclusivement des collections imagées d'objets, ce qui peut amener à privilégier des techniques basées sur le comptage. Des ostensifs comme la droite numérique vide ou graduée sont absents.

Caractéristiques propres à OM3 : en calcul mental, les exercices présents dans le manuel de l'élève et le livre du maître d'*Outils pour les maths CE1* (2012) se résument, en grande majorité, à effectuer mentalement, et jamais en ligne, des séries de cinq calculs.

- ✓ Le choix des calculs permet à l'élève d'appliquer une technique ciblée par les auteurs. En ce sens, ces exercices s'apparentent à des assortiments au sens de Genestoux (2002). (cf. § III.3 du chapitre 4).
- ✓ Le type de tâches complexes $T_{a-\square}$ n'est pas abordé. Pour $T_{a-\square}$, trois techniques sont introduites, τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} , dans le cas particulier où le chiffre à soustraire est 9. Il n'est jamais clairement dit par les auteurs que τ_{1010} a une portée limitée. Pour $T_{a-\square 0}$, la technique privilégiée est τ_{CONV} .
- ✓ Le texte destiné aux enseignants apporte peu d'éléments (seuls les mots « décomposition » et « numération » sont prononcés) sur les technologies relatives aux techniques introduites (Θ_D et Θ_{DD}). Un travail propre à OM4 pour justifier les techniques n'est jamais envisagé.

Les moments d'institutionnalisation locale sont laissés à l'entière appréciation de l'enseignant.

- ✓ En calcul posé, τ_{AIG} est introduite sans lien avec τ_{1010} (pourtant étudiée en calcul mental) et sans lien avec τ_{AN} (non étudiée). La seule fonction de la technologie réellement présente est celle qui consiste à décrire la technique. Une comptine, sans référence à la conservation des écarts est donnée à l'élève

Caractéristiques propres à OM4: cette organisation mathématique locale est absente. La réécriture de calculs n'est pas travaillée.

Ces quelques lignes sur les caractéristiques propres à chaque organisation mathématique locale du CE1 étant dressées, nous reviendrons sur les liens entre les organisations mathématiques, après avoir conduit l'étude relative au CE2. Cette dernière doit permettre de révéler les types de tâches, les ostensifs, les éléments de technologie nouveaux, et d'étudier la complétude de l'organisation mathématique proposée par les auteurs *d'Outils pour les Maths*.

II.2.2. Organisation mathématique au CE2

Nous avons étudié une à une les trois doubles pages propres au calcul soustractif.¹⁰⁵ Pour chaque exercice, après avoir repéré quelles organisations mathématiques locales étaient convoquées, nous constatons qu'OM2 et OM4 sont absentes. Il n'y a pas de travail sur la transformation et l'association de différents types de représentations sémiotiques, ni de travail spécifique à la réécriture de calculs. OM1 est toujours relié à OM3, l'élève, quand il doit produire un calcul, doit ensuite l'effectuer.

Nous poursuivons alors notre analyse avec un grain plus fin, en étudiant les changements éventuels du CE1 au CE2 propres à OM3, avant de conclure sur la complétude de l'organisation mathématique propre au CE2. Nous commençons par l'étude des types de tâches propres au calcul mental avant d'aborder l'étude du calcul posé.

¹⁰⁵ Nous ne considérons pas la double page consacrée aux révisions ni celle consacrée à la résolution de problèmes car ces deux pages viennent en complément de ce qui précède.

1. Calcul soustractif mental

En nous basant sur les données inventoriées dans le tableau¹⁰⁶ présenté en annexe C1.4, nous retrouvons des types de tâches étudiés en CE1. Il s'agit de :

- ✓ $T_{a-\square 0}$
- ✓ $T_{a-\square 00}$
- ✓ $T_{a-\square}$ avec $\square=9$ ou $\square=11$ ¹⁰⁷

et des types de tâches nouveaux comme :

- ✓ $T_{a-\square 000}$
- ✓ T_{a-b} avec $b=15$ ou $\square=25$ ou $b=50$ ou $b=75$
- ✓ $T_{a-\square\square}$

Nous ne reprenons pas l'analyse des types de tâches comme *soustraire des multiples de 10, de 100, de soustraire 9 et 11*, vu que les auteurs reprennent mot pour mot, dans le guide du maître du CE2, les textes explicatifs destinés au maître de CE1. Nous ne menons pas l'analyse de *soustraire des multiples de 5*, vu que les auteurs n'attendent pas de technique spécifique et précisent simplement que ce retrait se fait par « *décomposition et recomposition* » (guide du maître, outils pour les maths CE2, 2012, p. 10). Nous analysons le type de tâche $T_{a-\square\square}$, qui correspond à *soustraire un nombre à deux chiffres à un nombre à deux voire, trois chiffres*.

Les trois premiers exercices présents dans le manuel de l'élève sont reprographiés ci-dessous :

<p>24 Calcule.</p> <p>a. 48 - 43 79 - 75</p> <p>b. 52 - 47 64 - 56</p> <p>c. 147 - 139 435 - 425</p> <p>d. 562 - 542 654 - 604</p>	<p>25 Calcule.</p> <p>a. 48 - 18 75 - 25</p> <p>b. 56 - 23 49 - 36</p> <p>c. 324 - 14 843 - 23</p> <p>d. 658 - 22 954 - 42</p>	<p>26 Calcule.</p> <p>a. 60 - 8 50 - 3</p> <p>b. 80 - 14 90 - 26</p> <p>c. 30 - 27 40 - 21</p> <p>d. 260 - 25 330 - 13</p>
---	---	---

Figure 5.12 : exercices 24, 25 et 26 (Outils pour les Maths CE2, 2012, p. 13)

Assortiments

- Dans les exercices 24 et 25, les nombres présents dans les séries a et b (respectivement c et d) sont des nombres à deux chiffres (respectivement à trois chiffres). Dans l'exercice 26, le nombre que l'on soustrait est un nombre à un chiffre puis un nombre à deux chiffres.
- Dans l'exercice 24 : les nombres en jeu (sauf pour un calcul) sont proches. Leur différence est inférieure à 20.

¹⁰⁶ Le tableau indique pour chaque exercice du manuel de l'élève où le calcul mental est sollicité, le nombre de tâches proposé (nombre de calculs que l'élève doit effectuer) et mentionne le type de tâches convoqué.

¹⁰⁷ Des types de tâches dérivés de celui-ci comme soustraire 8, 19, 90, 21, 101 qui sollicitent τ_{N10C} .

Dans l'exercice 25 : le calcul de différences se ramène toujours au calcul de différences de nombres de deux chiffres, sans retenue.

Dans l'exercice 26 : les nombres en jeu pour chaque calcul sont éloignés, très éloignés à une exception près (premier calcul du c). Ils nécessitent l'usage d'une retenue.

Techniques et éléments de technologie attendue par les auteurs

Les auteurs proposent dans le texte destiné au maître trois techniques :

« - Lorsque les deux nombres sont proches, on complète pour atteindre le nombre demandé. Ex : $12 - 11 \rightarrow 11$ pour aller à 12, cela fait 1. Dans ce cas, l'élève complète le plus petit nombre pour arriver au plus grand.

- Lorsque les nombres sont plutôt éloignés, on ôte le plus petit nombre au plus grand. Ex : $12 - 2 \rightarrow$ j'enlève 2 à 12, cela fait 10.

L'élève peut-être conduit à décomposer le nombre à retrancher. Ex : $42 - 23 \rightarrow$ A 42, j'enlève 20, cela fait 22; puis j'enlève 3, cela fait 19;

- Enfin l'élève peut effectuer une addition à trou, première opération apprise et qu'il maîtrise. »

(Guide du maître, Outils pour les Maths CE2, 2012, p. 10)

En conclusion, pour effectuer $Ta-\square\square$, les auteurs suggèrent deux techniques $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$ et τ_{N10} .

A aucun moment, la conservation des écarts n'est indiquée. Tout comme au CE1, peu d'éléments théoriques sont institués¹⁰⁸.

2. Calcul soustractif posé

Les auteurs commencent tout comme en CE1 à retravailler la technique de soustraction

► Pour calculer une différence ou un écart entre deux nombres, on effectue une soustraction.

► Pour poser une soustraction en colonnes, il faut :

- écrire le plus grand nombre sur la première ligne ;
- aligner les chiffres : les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, etc
- soustraire d'abord les unités, puis les dizaines, etc.

5	3	8	2 pour aller à 8 → 6. J'écris 6 sous les unités.
-	2	1 2	1 pour aller à 3 → 2. J'écris 2 sous les dizaines.
3	2	6	2 pour aller à 5 → 3. J'écris 3 sous les centaines.

► Pour vérifier la vraisemblance du résultat, on évalue un ordre de grandeur.
Ex. : $538 - 212$ est proche de $540 - 210 = 330$.

► Pour vérifier le résultat d'une soustraction, on peut effectuer une addition.
Ex. : $538 - 212 = 326 \rightarrow 326 + 212 = 538$

Figure 5.13 : la soustraction sans retenue (Outils pour les Maths CE2, 2012, p. 56)

¹⁰⁸ Les techniques sont « simplement » décrites au maître et appliquées sur un exemple.

Eléments de technologie présents

Nous constatons que la technique n'est toujours pas reliée à τ_{1010} , technique toutefois utilisée en calcul mental. Le mode d'emploi s'apparente comme en CE1 à celui de l'addition à trou. En revanche, contrairement au CE1, les auteurs donnent à l'élève des moyens pour contrôler et vérifier le résultat obtenu¹⁰⁹. Par la suite, si on se réfère aux exercices présents dans le manuel de CE2, l'élève est moins guidé qu'en CE1. Il a seulement à effectuer deux soustractions posées. En revanche, il doit poser et effectuer onze soustractions données en ligne et posées à partir d'énoncés de problèmes, puis effectuer huit soustractions.

Pour introduire la soustraction avec retenue, la tâche ressemble à celle proposée en CE1 et privilégie à nouveau une technologie basée sur le comptage. Seules les modalités de travail et le contexte diffèrent : les élèves travaillent à partir de deux collections qu'ils ont réellement entre les mains. Ils sont par binômes et doivent trouver la valeur des deux écarts (avant et après ajout). Sur le contexte de cette situation, nous constatons qu'il se veut proche du vécu de l'élève, alors qu'il est en fait assez loin des pratiques sociales usuelles. Il est peu vraisemblable de voir la même boulangère donner une *dizaine* de guimauves emballée *dans un sac* à un enfant, et *dix* guimauves *en vrac* à un autre enfant. Sur le contenu, la propriété de conservation des écarts est mise en avant à partir d'un exemple concret. En outre, cet exemple ne permet pas de découvrir que la différence est inchangée quand on ajoute ou quand on soustrait n'importe quel nombre aux deux termes d'une différence. Les auteurs se contentent de translater dix.

Samira a un sachet de 52 guimauves. Mégane a un sachet de 38 guimauves.
→ Calcule l'écart de guimauves entre les deux sachets.
La boulangère offre 10 guimauves à Samira et une dizaine de guimauves à Mégane.



→ La boulangère leur a-t-elle offert la même quantité de guimauves ?
→ Combien de guimauves a chacune des filles à présent ?
→ Calcule l'écart entre les deux nouvelles quantités. Que constates-tu ?

Figure 5.14 : situation de découverte pour la soustraction avec retenue
(Outils pour les Maths CE2, 2012, p. 66)

¹⁰⁹ Sans le mentionner, les auteurs appliquent à nouveau la tâche *trouver le terme manquant dans une écriture soustractive*. Le fait de chercher si le nombre b trouvé en calculant $c - a$ vérifie l'égalité $a + b = c$ permet de prouver que b est la différence entre c et a .

En conclusion, les élèves ont été sensibilisés à la signification des retenues à partir d'un exemple concret, mais la technique n'a pas été justifiée. Aucun travail spécifique et approfondi pour découvrir la propriété de conservation des écarts et l'appliquer à différentes situations et en calcul mental, n'est programmé par les auteurs sur les deux années.

II.2.3. Complétude de l'organisation mathématique

Nous terminons cette étude de l'organisation mathématique d'*Outils pour les Maths CE1 & CE2* (2012), en présentant les liens existants entre les différentes organisations mathématiques locales et en analysant les principaux recoupements ou manques en lien avec l'organisation mathématique de référence construite au chapitre 3.

Nous constatons que les seuls calculs attendus sont exclusivement additifs ou soustractifs (OM1). Par ailleurs, les types de représentations sémiotiques utilisés sont majoritairement les écritures chiffrées. Elles servent pour noter les calculs et le résultat des calculs, même si, à l'occasion, surtout en CE1, les schémas à partir de collections dessinées permettent de modéliser les problèmes numériques (OM2).

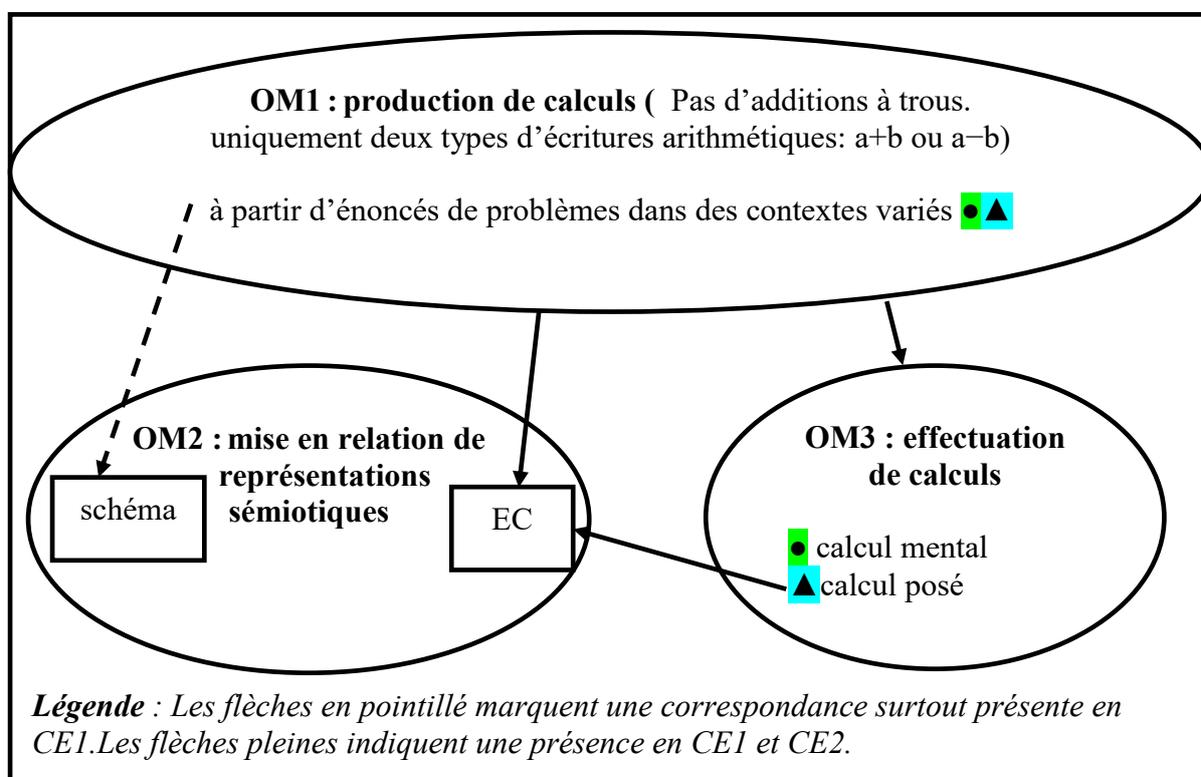


Figure 5.15 : liens entre les différentes organisations locales
Outils pour les Maths CE1 & CE2 (2012)

D'autre part, l'effectuation des calculs (OM3) a une place centrale. De nombreux types de tâches sont étudiés en CE1 (pour mémoire $T_{a-\square}$, T_{a-9} , $T_{a-\square 0}$, $T_{a-\square 00}$ parmi les principaux). Un nouveau type de tâches, $T_{a-\square\square}$ est introduit en CE2. Des techniques ciblées, τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} , τ_{ALG} et, ponctuellement $\tau_{ADD/SOUS}$, τ_{N10} dont la rencontre est programmée à partir de séries de calculs qui s'apparentent parfois à des assortiments au sens de Genestoux (2002) sont décrites dans le guide du maître. Peu d'éléments théoriques¹¹⁰ sont par ailleurs introduits sur les technologies relatives aux techniques introduites (Θ_D et Θ_{DD}). τ_{AN} est ignorée en calcul mental et τ_{ALG} n'est pas soutenue par un travail en lien avec Θ_{AN} . La propriété de conservation des écarts est mentionnée en lien avec des collections sans être abordée comme une propriété numérique et très peu travaillée. Dernier point qui différencie cette organisation mathématique de l'organisation mathématique de référence, un travail propre à la réécriture de calculs (OM4) pour justifier les techniques n'est jamais envisagé.

Pour conclure, cette étude a permis de mesurer les décalages entre l'organisation mathématique de référence et l'organisation mathématique proposée par les auteurs d'*Outils pour les Maths*. Elle révèle aussi une programmation intéressante des types de tâches étalée sur deux ans, et instruit sur l'intérêt de concevoir des assortiments pour enseigner plusieurs techniques et évaluer leur portée relative. Mais nous reviendrons sur ces différents apports, en vue d'élaborer une ingénierie autour du calcul soustractif en CE2, après avoir étudié l'organisation mathématique proposée par les auteurs d'*Euro Maths*.

III. Analyse des organisations d'Euro Maths (2001&2010)

Nous présentons brièvement la structure des manuels de CE1(2001) et de CE2(2010) avant de conduire l'analyse de l'organisation mathématique et didactique relative au calcul soustractif sur les entiers naturels.

III.1. Présentation de la structure des manuels

Les manuels destinés à l'élève de CE1 et de CE2 présentent, pour chaque période, plusieurs *étapes*¹¹¹. Chacune d'entre elles traite plus directement de : *Connaissance des nombres – Calcul - Géométrie- Mesure- Traitement des données*¹¹².

¹¹⁰ Seuls les mots *décomposition* et *numération* sont présents occasionnellement dans les textes destinés aux enseignants.

¹¹¹ Les auteurs précisent : « Chaque étape présente une unité de travail sur un thème et fait l'objet de une, deux, ou trois séances de travail. » (Euro Maths, CE1, 2001, p.4).

¹¹² Les appellations sont sensiblement différentes en CE2.

En nous référant aux sommaires¹¹³, nous listons les titres des étapes qui proposent des tâches relatives au calcul soustractif sur les entiers naturels :

Manuel CE1	Manuel CE2
L'addition et la soustraction (7 étapes) La table d'addition (1 étape) Calcul réfléchi (3 premières étapes) Les nombres pour prévoir et vérifier (2 premières étapes) S'entraîner à calculer (1 étape) La calculatrice (2 étapes)	Addition et soustraction (4 étapes) Calcul automatisé, calcul réfléchi : addition et soustraction (3 étapes) Soustraction : conservation des écarts Soustraction : technique usuelle

Tableau 5.6 : titres relevés dans Euro Maths CE1 (2001) & CE2 (2010)

Une lecture en parallèle des différents titres montre que *l'addition et la soustraction* ainsi que le *calcul réfléchi*¹¹⁴ occupent une place importante dans les deux niveaux. En revanche, *aucune technique* de la soustraction n'est abordée en CE1. En CE2, la technique de la soustraction usuelle est introduite suite à la programmation de l'étude de la propriété de conservation des écarts.

Cette présentation rapide des manuels étant faite, nous en venons à l'étude de l'organisation mathématique relative au calcul soustractif proposée par les auteurs *d'Euro Maths* en CE1 (2001).

III.2. Organisation mathématique au CE1

Nous étudions une à une les étapes mentionnées précédemment, en commençant par indiquer, pour chaque exercice, les organisations mathématiques locales qu'il convoque (les tableaux renseignés sont présentés en annexe C.2.1). Cette classification permet d'estimer quelle part occupe chaque organisation mathématique locale au sein de l'organisation mathématique relative au calcul soustractif.

¹¹³ Les sommaires permettent d'identifier ce qui *a priori* concerne le calcul. En nous référant aux pages du manuel, nous avons retenu les pages concernées par le calcul additif et soustractif. Nous ne citons pas les étapes qui concernent le calcul multiplicatif.

¹¹⁴ *Le calcul mental* n'apparaît ni en CE1, ni en CE2 car il est proposé, en filigrane toute l'année quel que soit le domaine étudié (géométrie, mesure,...).

	L'addition et la soustraction	La table d'addition	Calcul Réfléchi	Les nombres pour prévoir et vérifier	S'entraîner à calculer	La calculatrice
OM1	0%	0%	0%	0%	0%	0%
OM2	0%	0%	0%	0%	0%	0%
OM3	17%	100 %	24%	0%	100%	20%
OM4	0%	0%	14%	0%	0%	0%
OM1 OM3	76%	0%	0%	100%	0%	80%
OM1-OM2	2%	0%	0%	0%	0%	0%
OM2-OM3	0%	0%	10%	0%	0%	0%
OM1-OM2- OM3	5%	0%	0%	0%	0%	0%
OM2-OM3- OM4	0%	0%	48%	0%	0%	0%
Pour calculer les pourcentages relatifs à chaque OM, nous avons effectué le rapport entre le nombre d'items renvoyant à une organisation mathématique locale sur le nombre total d'items. Les deux dernières lignes signifient que l'exercice convoque trois OM.						

Tableau 5.7 : répartition des organisations mathématiques locales
Euro Maths CE1 (2001)

Ce tableau met en évidence que, sur l'ensemble des étapes, la production de calcul (OM1) et le travail sur l'association et la transformation de représentations sémiotiques de types différents (OM2) sont toujours associés à l'effectuation de calcul (OM3). Les types de tâches consacrés uniquement à l'effectuation de calculs (OM3) sont présents dans l'étape consacrée à la construction et à la mémorisation du répertoire additif (table d'addition) et dans l'étape prévue pour s'entraîner à effectuer des calculs. Le travail propre à la réécriture de calculs (OM4) est introduit dans les deux seules étapes consacrées au calcul réfléchi et non repris par la suite.

a) Etude relative à OM1

Le type de tâches qui consiste à produire un calcul additif ou soustractif (OM1) est rattaché à la résolution de problèmes dans *l'addition et la soustraction*, ou mobilisé pour

atteindre un nombre dans *les nombres pour prévoir et vérifier* ainsi que dans *la calculatrice*.¹¹⁵

En lien avec *l'addition et la soustraction*, sept étapes sont programmées :

- ✓ Les deux premières (étapes 12 et 14) proposent un travail de production de calculs à partir des transformations, dans un contexte ordinal puis cardinal et parallèlement un travail propre à OM3.
- ✓ L'étape 64 introduit la notion d'écart dans différents contextes.
- ✓ Les étapes 21, 30, 43, 47 abordent un travail de même type autour de la production et l'effectuation de calculs, à partir de problèmes de combinaison d'états et de composition de transformations.

Afin d'analyser avec un grain plus fin, les techniques, ostensifs et éléments de technologie retenus, nous revenons sur l'étape 12, l'étape 14 et l'étape 64.

- *Etape 12, Euro Maths CE1 (2001)*

A la lecture des objectifs proposés dans le livre du maître, cette première étape permet de :

« Se familiariser avec différents sens de problèmes additifs et soustractifs. Mettre en œuvre des procédures de calcul réfléchi (ajouter ou retrancher un nombre inférieur à 20). »

(Livre du maître, Euro Maths CE1, 2001, p. 31)

La première tâche proposée consiste à résoudre un problème de **transformation d'états** (ou de suite de transformations) avec, dans tous les cas, la recherche de l'état final. Cette tâche est amenée concrètement et oralement :

« Dans une boîte opaque, le maître met des billes (de 1 à 10). Il annonce le nombre. Il ajoute des billes ou en enlève en disant ce qu'il fait. Les enfants écrivent le nombre de billes qu'il y a dans la boîte à la fin des manipulations ».
(Ibid., p. 32)

Elle est proposée plusieurs fois, avec, à chaque fois, des nombres différents pour l'état initial et la valeur de la transformation. Les auteurs spécifient dans le livre du maître les variables numériques en jeu et les techniques attendues.¹¹⁶ Nous les répertorions dans le tableau suivant :

¹¹⁵ Dans ces étapes, un compte est bon et écrire ce qu'il faut afficher sur la calculatrice sont proposés.

¹¹⁶ Dans la première phase, le nombre initial de billes est inférieur à 10, le type de tâches convoqué est : « ajouter de 1 à 5 billes ou enlever de 1 à 3 billes ».

Le livre du maître suggère que la technique employée par les élèves va être :

« Dans le cas d'un retrait, mettre le premier nombre sur ses doigts, baisser le nombre de doigts correspondant au retrait, recompter les doigts restés debout ; ou mettre un des nombres dans « sa tête », l'autre sur ses doigts et décompter à partir du précédent nombre mémorisé. » (Ibid., p. 32)

Première phase $T_{\text{soustraire } 1, 2 \text{ ou } 3 \text{ à } a}$ $0 \leq a \leq 10$	Seconde phase $T_{\text{soustraire de } 1 \text{ à } 5 \text{ à } a}$ $15 \leq a \leq 25$	Troisième phase $T_{\text{soustraire de } 10 \text{ à } 15 \text{ à } a}$ $15 \leq a \leq 35$
Décompter en se basant sur la comptine orale avec ou sans l'aide des doigts.		
	τ_{A10}	
		τ_{N10}

Tableau 5.8 : techniques attendues par les auteurs d'Euro Maths CE1(2001) pour soustraire un nombre compris entre 1 et 15

Nous en concluons que les auteurs ne font pas référence à la connaissance du répertoire soustractif ou à une technique comme τ_{1010} qui est accessible mais dont la portée est limitée. Ils n'utilisent pas d'ostensif comme les écritures chiffrées, ni les unités de numération, ni la droite numérique. Tous les calculs se font mentalement. Ils envisagent *une mise en évidence des procédures de calcul efficaces qui auront été explicitées par les élèves* avant de proposer une application suivie de 6 exercices qui ne se détachent pas du contexte « de la boîte ». En revanche :

- Les énoncés sont maintenant posés à l'écrit avec un texte ou un schéma.
- Il s'agit toujours de chercher l'état final sauf pour les deux derniers exercices qui consistent à chercher la transformation, une fois négative et une fois positive.
- Il est demandé à l'élève d'écrire le calcul qui modélise le problème.

- *Etape 14, Euro Maths CE1 (2001)*

A la lecture des objectifs proposés dans le livre du maître, cette seconde étape doit permettre :

« D'anticiper le résultat de déplacements sur la piste des nombres. Développer différentes stratégies de calcul pour retrancher un nombre inférieur à 20. » (Livre du maître, Euro Maths CE1, 2010, p. 36)

Dans la deuxième phase, le nombre initial de billes est maintenant compris entre 15 et 25, le type de tâches convoqué est : « ajouter de 5 à 10 billes ou enlever de 1 à 5 billes ».

Le livre du maître indique que la technique précédente employée par les élèves qui repose sur le décomptage, en mettant le nombre initial sur les doigts n'est plus opérationnelle, par contre les auteurs suggèrent qu'il est envisageable de :

« Décompter de un en un en utilisant la comptine à rebours ; de s'appuyer sur la dizaine inférieure (pour calculer $23-5$, je calcule $23-3$ puis $20-2$). »

(Ibid., p. 32)

Ils n'évoquent pas la technique τ_{1010} qui consiste pour un calcul de la forme $28-5$ à calculer $8-5$ et à ajouter au résultat 20.

Dans la troisième phase, le nombre initial de billes est maintenant compris entre 15 et 35, le type de tâches convoqué est : « ajouter ou enlever de 10 à 15 billes ».

Les auteurs précisent dans le livre du maître que :

« Pour enlever 14 par exemple, on enlève 10, puis 4. » (Ibid., p.32)

Ils privilégient τ_{N10} et n'évoquent pas la technique qui consiste, pour un calcul de la forme $32-11$, à calculer $2-1$ et à ajouter au résultat $30-10$.

La tâche consiste à calculer un état final, un état initial, la transformation positive ou négative dans un contexte ordinal. La technique visée d'après le livre du maître est τ_{N10} (technique déjà vue à l'étape précédente, l'étape 12). L'application qui suit, en nous référant à la figure 5.3 présentée ci-après, doit amener l'élève à comprendre la relation entre l'écriture arithmétique (le modèle) et l'action du jeu. Il s'agit ensuite (troisième tirage) de résoudre les additions ou soustractions à trou pour déterminer la transformation. Pour finir, un seul exercice mobilisant un calcul soustractif est proposé. Il met en jeu OM1 et OM3.

Application

tirage Complète les informations notées par Marie.

Règle du jeu de piste

Un dé avec les nombres 12, 13, 14 sur les faces bleues et les nombres 12, 13, 14 sur les faces rouges.
 La case de départ est la case 60. Chaque joueur lance le dé. Lorsque le dé tombe sur une face bleue, le joueur avance du nombre de cases indiqué par le dé. Lorsque le dé tombe sur une face rouge, le joueur recule du nombre de cases indiqué par le dé.
 Le gagnant est celui qui arrive le premier au bout de la piste.

	Case de départ	Dé	Case d'arrivée
Marie	60	12	
Audrey	60	14	
Nicolas	60		73

tirage À l'aide des informations notées par Nicolas sur son ardoise, complète le tableau.

Marie 72 - 14
 Audrey 46 + 13
 Nicolas 73 - 12

	Case de départ	Dé	Case d'arrivée
Marie	72	14	
Audrey			
Nicolas			

tirage *Audrey a oublié de marquer les points du dé. Complète son ardoise et le tableau.

Marie 58 + = 72
 Audrey 59 + = 71
 Nicolas 61 - = 48

	Case de départ	Dé	Case d'arrivée
Marie	58		72
Audrey			
Nicolas			

Figure 5.16 : application relative au jeu de piste (Euro Maths CE1, 2001, p.25)

- *Etape 64, Euro Maths CE1 (2001)*

Cette septième et dernière étape sur ce thème doit permettre de :

« Se familiariser avec la notion d'écart, de différence, de distance dans différents contextes. Trouver des procédures pour calculer des écarts. »
 (Livre du maître, Euro maths CE1, 2001, p.145)

Le problème présenté ci-dessous (figure 5.4) est un problème de comparaison entre plusieurs grandeurs continues. Le calcul de l'écart peut se faire par une addition à trou ou une soustraction. Les auteurs précisent que :

« *Le contexte est propice à une représentation sur la droite numérique qui facilite le calcul et en permet la maîtrise par un calcul réfléchi* ». (Ibid., p.145)

Notons que deux techniques séquentielles, τ_{A10} et τ_{N10} ont déjà été évoquées, lors des étapes précédentes mais sans l'appui de la droite numérique. Cet ostensif est donc introduit pour la première fois dans un contexte de mesure. Il sera réutilisé dans l'étape suivante qui se nomme calcul réfléchi 3 et sur laquelle nous reviendrons au moment de l'étude relative à OM3.

Découverte



Audrey	José	Nicolas	Marie	Thomas	Jeanne
	245cm	185cm		260cm	

Le saut de Marie mesure 40 cm de plus que celui de Nicolas. Celui de Jeanne mesure 25 cm de moins que celui de José. Audrey saute 30 cm de moins que Jeanne. Caramel saute 243 cm.
Complète le tableau avec ces informations.

- Qui saute le plus loin?
- Calcule l'écart entre le saut de José et celui de Thomas.
- Calcule l'écart entre le saut de Caramel et celui de Nicolas.

Calcule l'écart entre le saut de Nicolas et celui de José.

Calcule l'écart entre le saut de Caramel et celui de Thomas.

Figure 5.17 : découverte de l'écart (Euro Maths CE1, 2001 p. 106)

Six autres tâches de production de calcul associées à une résolution de problèmes dans des contextes variés sont proposées à la suite. Nous les présentons et les analysons en annexe C2.2. Cette analyse montre que tous les problèmes proposés peuvent être modélisés en utilisant une soustraction ou une addition à trou et qu'une des intentions des auteurs est de réinvestir les techniques étudiées au préalable. La droite numérique vide est un ostensif mentionné à l'intention de l'enseignant. Il est précisé que ces outils peuvent servir pour montrer les étapes de calcul qui interviennent dans les techniques séquentielles comme τ_{A10} ou

τ_{N10} . Parallèlement à l'utilisation de cet ostensif, une ou deux réécritures de calcul sont proposées, ainsi qu'un arbre, avec l'intention d'expliquer τ_{A10} et non de la justifier.

b) Etude relative à OM2

Nous relevons une seule tâche¹¹⁷ qui consiste à associer à un énoncé textuel, un schéma avec appui sur des collections d'objets dans la troisième étape de *l'addition et la soustraction* (l'étape 21). Toutes les autres tâches, présentes dans les trois étapes de *calcul réfléchi* (étape 15, étape 31, étape 68) consistent à transformer un énoncé textuel en un schéma avec appui sur la droite numérique. La fonction du schéma est de permettre d'illustrer les différentes étapes d'un calcul effectué avec une technique séquentielle. Les auteurs précisent d'ailleurs dans le livre du professeur (calcul réfléchi (1), p.38) qu'ils institutionnalisent (c'est leur terme) la technique τ_{N10} avec deux représentations, un schéma par saut et les écritures additives avec appui sur dix. Ils reformulent cet objectif à la dernière étape de calcul réfléchi (étape 68) relative à l'addition et la soustraction :

« Apprendre à utiliser la droite numérique comme support pour effectuer des calculs du type $a + \dots = c$ ou $a - \dots = c$. »
 (Livre du maître, Euro maths CE1, 2001, p. 148)

Ci-dessous nous reprogrammions la situation découverte proposée à l'étape 15 pour illustrer le propos :

1. Réponds aux questions de Marie et de Nicolas.

Je suis sur la case 68, je dois avancer de 14 cases. Quel est le numéro de la case sur laquelle j'arrive?.....

Je suis sur la case 61, je dois reculer de 13 cases. Quel est le numéro de la case sur laquelle j'arrive?.....

2. Voici ce qu'Audrey propose pour répondre à la question de Nicolas.

3. Voici ce que José propose pour répondre à la question de Marie.

$68 + 14 = 68 + 10 + 4 = 78 + 4 = 82$	
$68 + 14 = 82$	

Que peut proposer Audrey pour répondre à la question de Marie?

Que peut proposer José pour répondre à la question de Nicolas?

Figure 5.18 : ostensifs utilisés en lien avec une technique séquentielle (Euro Maths CE1, 2001 p. 26)

¹¹⁷ Le problème est un problème de combinaison d'états. Dans un parking, il y a 24 voitures. 15 sont bleues, les autres sont rouges. Trois dessins imagés sont proposés. L'élève doit trouver celui qui correspond à l'énoncé et en déduire le nombre de voitures bleues.

Pour conclure, dans le travail proposé par les auteurs, il existe des liens étroits entre OM1, OM2 et OM3. Après avoir fait jouer l'élève¹¹⁸, les auteurs modélisent les actions menées en introduisant un calcul ou un schéma avec appui sur la droite numérique. Ce calcul ou ce schéma exposent les différentes étapes qui interviennent dans la mise en œuvre de τ_{N10} ET $\tau_{SOUS/ADD}$. La première technique τ_{N10} a l'avantage de ne pas avoir une portée limitée, comme τ_{1010} , car le problème des retenues ne se pose pas. En revanche, cette technique n'est pas toujours économique suivant les nombres en jeu. Mais nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant en abordant l'analyse de l'organisation relative à l'effectuation des calculs (OM3).

c) Etude relative à OM3

En nous basant sur les données inventoriées dans les tableaux¹¹⁹ présentés en annexe C2.3, nous regroupons les tâches présentes dans le manuel en quatre types de tâches :

- ✓ $T_{a-\square}$ avec $\square \leq 5$
- ✓ $T_{a-\square\square}$ avec $10 \leq \square\square \leq 15$ ou $20 \leq \square\square \leq 25$
- ✓ $T_{a-\square 0}$ avec $\square \leq 5$
- ✓ $T_{a+..=b}$

En considérant les effectifs des tâches propres à chaque type de tâches, nous constatons que les trois premiers types sont étudiés sur la globalité des étapes alors que la recherche d'un complément ($T_{a+..=b}$) fait surtout l'objet de la construction et la mémorisation du répertoire additif (*La table d'addition*) ainsi que de la recherche de l'écart (*L'addition et la soustraction* (7)).

Nous ne revenons pas en détail sur les exercices proposés aux élèves, étant donné que nous les avons indirectement¹²⁰ étudiés dans les paragraphes 1.2.a et 1.2.b. Nous abordons

¹¹⁸ La production de calculs est initiée par deux situations concrètes. Ces situations correspondent à un déplacement sur une piste de nombres et au jeu de la boîte (contexte ordinal présenté en premier).

¹¹⁹ Les tableaux indiquent pour chaque exercice du manuel de l'élève, le nombre de tâches proposé (nombre de calculs que l'élève doit effectuer) et mentionne le type de tâches convoqué. Ces tableaux ne prennent pas en compte les calculs que le livre du professeur suggère de donner oralement car ceux-ci reprennent des tâches étudiées au préalable. A titre d'exemple, l'activité de mise en route de la calculatrice 1 (étape 20) reprend le jeu de piste (cf.étape 14) :« le maître écrit le numéro d'une case au tableau (de 50 à 80). Il lance le dé et annonce la couleur de la face et le nombre. Les enfants écrivent le numéro de la case d'arrivée. Un enfant vérifie sur le jeu de piste. » (livre du professeur, p.50, Euro Maths 2001).

¹²⁰ En effet le tableau présenté en annexe C2.1 montre que les tâches convoquent (sauf dans une ou deux étapes) plusieurs organisations mathématiques locales.

directement la question des techniques et des technologies attendues par les auteurs et les ostensifs introduits. Le tableau ci-après permet de synthétiser les éléments relevés.

Types de tâches	$T_{a-\square}$ avec $\square \leq 5$	$T_{a-\square 0}$ avec $\square \leq 5$	$T_{a-\square\square}$ avec $10 \leq \square\square \leq 30$	$T_{a+\dots=b}$
Techniques	<ul style="list-style-type: none"> Décompter en se basant sur la comptine orale avec ou sans l'aide des doigts passer par la dizaine entière (τ_{A10}). 		<ul style="list-style-type: none"> Décomposer le nombre à soustraire en unités isolées et en dizaines (τ_{N10}) Remplacer un calcul soustractif par une recherche de compléments et réciproquement ($\tau_{SOUS/ADD}$) 	
Éléments de technologie	<ul style="list-style-type: none"> Les auteurs font référence dans le livre de l'enseignant aux éléments théoriques sur lesquels s'appuient τ_{N10} et $\tau_{ADD/SOUS}$ c'est-à-dire à Θ_D et $\Theta_{SOUS/ADD}$. Ils décrivent, expliquent, facilitent et justifient la mise en œuvre de chaque technique et les justifient. Les tâches propres à la réécriture de calculs sont isolées. La justification des techniques est proposée sur un ou deux exemples numériques tenant lieu d'exemple générique. 			
Ostensifs	<ul style="list-style-type: none"> Écriture chiffrée Axe ou droite numérique 			

Tableau 5.9 : types de tâches, techniques et éléments de technologie, ostensifs relatifs à OM3 Euro Maths CE1(2001)

Pour conclure, les auteurs commencent par proposer de soustraire un nombre *inférieur à cinq* puis de soustraire *dix* (puis *vingt*) pour enchaîner en proposant de soustraire un nombre compris *entre dix et quinze* (puis *entre vingt et vingt-cinq*). Ils **décrivent et expliquent** la mise en œuvre d'une technique séquentielle τ_{N10} au moyen des écritures chiffrées ou d'un axe numérique. Ils justifient cette technique sur un ou deux exemples de calculs qu'ils réécrivent (mobilisation de OM4). A la marge, ils décrivent et expliquent $\tau_{SOUS/ADD}$ pour calculer l'écart entre deux nombres.

d) Etude relative à OM4

Un seul type de tâches est présent : Transformer $a - b$ en $a - (b_1 + b_2 + b_j + \dots + b_p)$ et inversement avec b_j entiers naturels pour $1 \leq i \leq p$ pour justifier la technique τ_{N10} . Les tâches ponctuelles sont regroupées dans une étape relative au *calcul réfléchi*.

III.3. Organisation mathématique au CE2

Après avoir analysé pour chaque étape du manuel de CE2 les organisations mathématiques mobilisées¹²¹ (cf. annexe C2.4), nous constatons qu'il y a très peu de travail sur la transformation et l'association de différents types de représentations sémiotiques (OM2) et aucun travail spécifique de réécriture de calculs (OM4). En revanche, la production (OM1) et l'effectuation de calculs (OM3) sont présentes et très souvent mobilisées en parallèle.¹²²

Sur la production de calculs, le travail engagé en CE1 à partir du déplacement sur une piste de nombres ou du jeu de la boîte est repris. D'autres énoncés aux contextes différents visant à étudier chaque type de problème (en lien avec la classification de Vergnaud) sont proposés. Les écritures en ligne attendues sont de la forme: $a + b = x$; $a - b = x$; $a + x = b$ où a et b sont deux données du problème et x est l'inconnue.

Sur l'effectuation de calculs (OM3), de nouveaux types de tâches sont introduits en complément de ceux étudiés en CE1. C'est pourquoi nous poursuivons notre analyse avec un grain plus fin, en reprenant la grille d'analyse exposée au premier paragraphe du chapitre 5, avant de conclure sur la complétude de l'organisation mathématique propre au CE1 et au CE2. Nous commençons par l'étude des types de tâches propres au calcul mental avant d'aborder l'étude du calcul posé.

1. Calcul soustractif mental

Nous nous intéressons aux trois¹²³ étapes de *calcul réfléchi* et à l'étape 21, dont l'intitulé est *addition, soustraction : différentes méthodes de calcul*. En nous référant au livre du professeur, les étapes¹²⁴ E1, E2 et E3 ont chacune pour objectif de :

¹²¹ Nous nous basons, pour chaque exercice d'une étape sur la consigne proposée par les auteurs.

¹²² Quand l'élève produit un calcul, il doit à la suite l'effectuer.

¹²³ La quatrième étape est consacrée au calcul multiplicatif.

« S'entraîner à automatiser certains calculs. »
 (Livre du professeur, Euro Maths CE2, 2010, p.54, p.79 et p.91)

L'étape 21, quant à elle, doit amener à :

« Analyser des procédures de soustraction et les mettre en œuvre. »
 (Ibid., p.85)

Le type de tâches visé par les auteurs pour E1, E2 et E3 est mentionné sur la page du manuel destiné à l'élève. Il s'agit de :

- ✓ *Ajouter ou soustraire un nombre inférieur à 10* »
 - ✓ *Ajouter ou soustraire un multiple de 10*
 - ✓ *Trouver un complément*
 - ✓ *Ajouter ou soustraire un nombre compris entre 10 et 20*
- (Euro Maths CE2, 2010, p.13 et p.53)

Le type de tâches visé par les auteurs pour l'étape 21, au vu des calculs proposés, est de :

- ✓ *soustraire un nombre à trois chiffres*

Dans la suite du paragraphe, nous recherchons pour chaque type de tâches, les techniques et les éléments de technologie attendus par les auteurs ainsi que les ostensifs introduits.

- T_{a-b} avec $a \leq 10$

Les deux exercices proposés dans le manuel sont reprographiés ci-dessous :

Ajouter ou soustraire un nombre inférieur à 10				
53 + 4	47 + 5	3 + 126	76 + 6	134 + 8
49 - 7	75 - 6	78 - 5	125 - 8	82 - 6

Figure 5.19 : exercice 2.1 (Euro Maths CE2, 2010, p. 13)

Ajouter ou soustraire un nombre inférieur à 10				
43 + 6 = ...	57 + 4 = ...	7 + 136 = ...	5 + 109 = ...	228 + 8 = ...
39 - 7 = ...	46 - 7 = ...	158 - 6 = ...	403 - 8 = ...	323 - 5 = ...

Figure 5.20 : exercice 2.1 (Euro Maths CE2, 2010, p. 53)

Variables de commande

En analysant tous les calculs de $a - b$, présents dans le manuel de l'élève aux étapes 1 et 3, on constate que a est compris entre 49 et 125 (page 13), puis compris entre 39 et 403 (page 53).

Variables didactiques

¹²⁴ E1 et E3 sont construites sur le même modèle et propose en premier lieu une ou plusieurs tables d'addition à compléter puis quatre séries de calcul à effectuer en temps limité (20 minutes). Chaque série est composée de cinq calculs additifs et de cinq calculs soustractifs. E2 propose quatre carrés magiques à compléter.

Une seule variable : le chiffre des unités de a est supérieur au chiffre des unités de b dans deux calculs proposés à l'exercice de la page 13 et à celui de la page 53.

Techniques, éléments de technologie et ostensifs attendus

Le texte proposé dans le livre du professeur indique que :

« -Si le chiffre des unités du nombre de départ est plus grand que le nombre à enlever, on utilise le répertoire soustractif : $8-6=2$; $158-6=152$
 -Sinon, on décompose le nombre à enlever en faisant apparaître le chiffre des unités du nombre de départ : $403-8=403-3-5$ » (passage à la centaine inférieure).

La première technique τ_{1010} est **décrite, expliquée à partir d'un exemple**. Elle n'est pas justifiée mathématiquement. Le calcul de $158 -$ n'est pas réécrit en utilisant une décomposition de 158 ($158 - 6 = 150 + 8 - 6$), et il n'est pas mentionné qu'il est « suffisant » de s'intéresser aux chiffres des unités car le nombre de dizaines du résultat sera inchangé.

En revanche, la seconde technique τ_{A10} est **décrite, expliquée et justifiée** à partir d'un exemple. Un travail de réécriture de calcul est proposé : $403 - 8 = 403 - 3 - 5$.

La technique τ_{N10C} n'est pas suggérée pour effectuer les calculs proposés à l'étape E3, alors que, si nous nous référons aux thèmes¹²⁵ proposés en calcul mental, les élèves l'ont déjà rencontrée.

Le tableau ci-dessous résume les éléments relevés :

T a—□ Avec $5 \leq \square \leq 8$	
Si le chiffre des unités de a est supérieur à □	Si le chiffre des unités de a est inférieur à □
τ_{1010} Pas de référence directe à Θ_D	τ_{A10} Référence directe à Θ_D
Ostensifs : écriture chiffrée	

Tableau 5.10 : techniques, éléments de technologie et ostensifs attendus par les auteurs d'Euro Maths CE2(2010) pour effectuer T a—□

¹²⁵ Ces thèmes sont :

- table d'addition
- ajout et retrait de nombres inférieurs à 10 ou de multiples de 10
- Encadrement d'un nombre par des multiples de 10
- Décomposition additive d'un nombre
- Retrancher 9

- $T_{a-\square 0}$ avec $\square \leq 5$

Les deux exercices proposés dans le manuel sont reprographiés ci-dessous :

Ajouter ou soustraire un multiple de 10				
$72 + 10$	$20 + 136$	$10 + 127$	$115 + 20$	$92 + 20$
$86 - 10$	$95 - 20$	$112 - 10$	$146 - 20$	$88 - 20$

Figure 5.21 : Exercice 2.2 (Euro Maths CE2, 2010, p. 13)

Ajouter ou soustraire un multiple de 10				
$238 + 20 = \dots$	$40 + 346 = \dots$	$60 + 143 = \dots$	$50 + 278 = \dots$	$467 + 30 = \dots$
$456 - 30 = \dots$	$305 - 20 = \dots$	$512 - 40 = \dots$	$274 - 60 = \dots$	$128 - 50 = \dots$

Figure 5.22 : Exercice 2.2 (Euro Maths CE2, 2010, p. 53)

Variables de commande

En analysant tous les calculs de $a - b$, présents dans le manuel de l'élève aux étapes E1 et E3, on constate que a est compris entre 86 et 146 puis compris entre 128 ? et 512 ? et b est inférieur ou égal à 20 puis supérieur ou égal à 20 et inférieur à 60.

Variables didactiques

Une seule variable: le chiffre des dizaines de a est toujours supérieur ou égal au chiffre des dizaines de b dans l'exercice correspondant à l'exercice de la page 13, en revanche, dans l'exercice correspondant à la page 53, pour trois calculs, il est inférieur au chiffre des dizaines de b .

Techniques attendues

En nous référant au livre du professeur, nous constatons que les auteurs n'attendent qu'une seule technique qui consiste à calculer avec les nombres de dizaines :

« $146 - 20$. On peut opérer directement sur le nombre de dizaines. 14 dizaines moins 2 dizaines, c'est 12 dizaines. $146 - 20 = 126$ »

(Livre du professeur, Euro Maths CE2, 2010, p.54 et p. 92)

Technologies attendues

En se référant à l'extrait du livre du professeur, cité ci-dessus, on constate que la technique τ_{CONV} est justifiée en convertissant les nombres donnés en chiffres, en unités de numération.

En résumé :

$T_{a-\square 0}$ $80 \leq a \leq 500$	
Si le chiffre des dizaines de a est supérieur à \square	Si le chiffre des dizaines de a est inférieur à \square
τ_{CONV}	
τ_{CONV} est justifiée en utilisant les unités de numération.	

Tableau 5.11 : techniques, éléments de technologie et ostensifs attendus par les auteurs d'Euro Maths CE2(2010) pour effectuer $T_{a-\square 0}$

- $T_{a+...=b}$

Ce type de tâche est abordé dans l'exercice 1 des étapes 1 et 3, ainsi que dans l'étape 3 sous différentes formes (table d'addition, carré magique, série d'additions à trou). Nous reproduisons les exercices considérés avant de les analyser.

Tables d'addition

Reproduis et complète ces tables d'addition.

+	5	7	4	6
3				
8				
6				
9		16		

+		5		8
6	13			
		10		
8			12	
				17

+	3		6	
			13	
4		12		
	8			
2				11

Figure 5.23 : exercice 1 (Euro Maths CE2, 2010, p. 13)

Reproduis et complète ces tables d'addition.

+	7	9	6	8
5				
8				
9				
7		16		

+	9			7
	18			
7		15		
6			11	
				15

+		6	9	
3				8
			15	
		13		
5	9			

Figure 5.24 : exercice 1 (Euro Maths CE2, 2010, p. 53)

La tâche consiste à compléter le tableau à double entrée. Il faut donc connaître le fonctionnement de celui-ci : savoir qu'un nombre situé au croisement de la $n^{\text{ième}}$ ligne et de la $p^{\text{ième}}$ colonne correspond à la somme du nombre situé au croisement de la première colonne et de la $n^{\text{ième}}$ ligne et du nombre situé au croisement de la première ligne et de la $p^{\text{ième}}$ colonne.

Analyse des premiers tableaux proposés page 13 et page 53 (figure 5.7 et 5.8)

Les nombres choisis en première ligne, première colonne étant inférieurs à 9, leurs sommes font partie du répertoire additif à mémoriser. La technique attendue est donc de donner directement le résultat du calcul τ_{REP} .

Analyse des seconds et troisièmes tableaux proposés page 13 et page 53 (figure 5.7 et 5.8)

Les nombres ne sont pas tous inscrits sur la première ligne et sur la première colonne. L'élève doit les déterminer en résolvant une addition à un trou, mais, là encore, les nombres proposés se rapportent aux tables d'addition, donc la technique attendue (τ_{REP}) consiste à donner directement le résultat.

Carré magique

Reproduis ce carré et complète-le avec les nombres proposés pour qu'il devienne un carré magique.

Figure 5.25 : exercice 2 (Euro Maths CE2, 2010, p. 37)

Le livre du maître indique que l'objectif de la tâche est de s'entraîner à automatiser certains calculs, des additions, des additions à trou ou des soustractions. Une fois compris le fonctionnement du carré magique, l'activité demande, par rapport aux tables d'addition précédentes, de trouver quel nombre chercher en premier. Il faut donc passer en revue les lignes, les colonnes et les diagonales pour savoir dans quel ordre effectuer les calculs. Prenons l'exemple de ce carré magique. Le premier calcul à effectuer est la somme des nombres inscrits sur la diagonale. On trouve 39. On peut alors calculer le terme manquant sur la première colonne ou la seconde ligne en effectuant $35 + \dots = 39$ ou $39 - 35 =$.

Les nombres inscrits sur la gauche permettent de valider la réponse.

Additions à trou

Trouver un complément				
$17 + \dots = 20$	$25 + \dots = 30$	$34 + \dots = 40$	$43 + \dots = 50$	$56 + \dots = 60$
$12 + \dots = 20$	$28 + \dots = 30$	$31 + \dots = 40$	$47 + \dots = 50$	$51 + \dots = 60$

Figure 5.26 : exercice 2.4 (Euro Maths CE2, 2010, p. 13)

Trouver un complément			
$30 + \dots = 100$	$40 + \dots = 100$	$63 + \dots = 100$	$78 + \dots = 100$
$150 + \dots = 200$	$280 + \dots = 300$	$310 + \dots = 400$	$450 + \dots = 500$
$400 + \dots = 1\ 000$	$3\ 500 + \dots = 4\ 000$	$4\ 200 + \dots = 5\ 000$	$2\ 500 + \dots = 4\ 000$

Figure 5.27 : exercice 2.4 (Euro Maths CE2, 2010, p. 53)

En analysant tous les calculs de recherche de complément de b à a proposés dans le manuel on constate qu'il s'agit de déterminer :

- 1) Le complément d'un nombre de deux chiffres au multiple de 10 le plus proche
- 2) Le complément d'un multiple de 10 à 100, d'un multiple de 10 à la centaine la plus proche
- 3) Le complément d'un multiple de 100 au millier le plus proche.

Technique attendue

Les auteurs précisent dans le livre du professeur qu'il s'agit :

« -d'utiliser le répertoire mémorisé des compléments à dix et de l'adapter aux nombres. $17+\dots=20$; $7+3=10$ donc $17+3=20$;
 - d'étendre le répertoire mémorisé des compléments à 10 aux compléments à 100 ou à 1000. $3500+\dots=4000$; $500+\dots=1000$ donc $3500+500=4000$ ».
 (Livre du professeur, Euro Maths CE2, 2010, p.54 et p. 92)

- $T_{a-\square 0}$ avec $\square=1$ ou $\square=2$ ou $\square=5$

Les deux exercices reprographiés ci - dessous sont dans le manuel :

Ajouter ou soustraire un nombre compris entre 10 et 20				
$60 + 12$	$78 + 17$	$65 + 16$	$96 + 14$	$59 + 13$
$60 - 12$	$78 - 17$	$65 - 16$	$96 - 14$	$59 - 13$

Figure 5.28 : exercice 2.5 (Euro Maths CE2, 2010, p.13)

Ajouter ou soustraire un nombre compris entre 10 et 20				
$45 + 17 = \dots$	$158 + 11 = \dots$	$12 + 387 = \dots$	$218 + 15 = \dots$	$17 + 192 = \dots$
$238 - 14 = \dots$	$482 - 18 = \dots$	$319 - 15 = \dots$	$325 - 13 = \dots$	$345 - 17 = \dots$

Figure 5.29 : exercice 2.5 (Euro Maths CE2, 2010, p.53)

Variables de commande et variables didactiques

En analysant tous les calculs de $a - b$, présents dans le manuel de l'élève aux étapes 1 et 3, on constate que a est compris entre 59 et 96 (page 13) puis compris entre 238 et 482 (page 53).

Une seule variable : le chiffre des unités de a est supérieur au chiffre des dizaines de b dans deux calculs correspondant à l'exercice proposé page 13.

Techniques et éléments de technologie attendus

En nous référant au livre du professeur, nous constatons que les auteurs privilégient :

« les procédures utilisées au cours du jeu de piste. »
 (Livre du professeur, Euro Maths CE2, 2010, p.54)

Ces procédures en se référant au tableau 5.9 correspondent à τ_{N10} et τ_{A10} . En utilisant pour ostensifs les écritures chiffrées, τ_{N10} et τ_{A10} ont été décrites, expliquées et justifiées grâce à une réécriture de calculs.

- T_{a-b} avec b nombre à trois chiffres

La rencontre avec cette nouvelle tâche se fait à l'étape 21. Le problème posé consiste à calculer $1257-1163$ par écrit, seul ou avec un camarade, puis à étudier trois techniques employées par trois camarades imaginaires.

La première technique est celle d’Alice reprogrammée ci-après

• Alice effectue une addition à trou.

Pour calculer $1\,257 - 1\,163$, je cherche ce que je dois ajouter à $1\,163$ pour aller à $1\,257$ en faisant des sauts.



$1\,163 \xrightarrow{+7} 1\,170 \xrightarrow{\dots} \dots \xrightarrow{\dots} \dots$

donc $1\,163 + \dots = 1\,257$

Figure 5.30 : extrait découverte (Euro Maths CE2, 2010, p. 46)

Cette technique consiste à effectuer une addition à trou ($\tau_{\text{SOUS/ADD}}$). Elle est illustrée par un schéma sur lequel on peut lire un nombre initial (le nombre que l’on soustrait) et une suite d’opérateurs additifs. Seul, le premier opérateur est donné, l’élève doit retrouver les autres opérateurs additifs manquants pour « arriver pas à pas » au nombre final (1257).

La seconde technique est celle de Théo

• Théo soustrait $1\,163$ pas à pas.

$1\,257 \xrightarrow{-1\,000} \dots \xrightarrow{-100} \dots \xrightarrow{-60} \dots \xrightarrow{-3} \dots$

donc $1\,257 - 1\,163 = \dots$



Figure 5.31 : extrait découverte (Euro Maths CE2, 2010, p. 46)

Cette technique τ_{N10} consiste à calculer la différence entre 1257 et 1163, en soustrayant le plus grand multiple de 1000, puis de cent, puis de dix et les unités simples isolées de 1163. Elle s’appuie sur la connaissance d’une technique pour enlever un nombre entier de milliers, de centaines et de dizaines, et un nombre inférieur à 10. Elle est illustrée par un schéma sur lequel on peut lire un nombre initial (le nombre auquel on soustrait) et une suite d’opérateurs soustractifs. Sur ce schéma, le nombre initial et les opérateurs soustractifs sont indiqués, l’élève doit trouver les résultats intermédiaires pour « arriver pas à pas » au nombre final.

La dernière technique est celle de Piotr

• Piotr emploie la soustraction « à la russe ».

J'utilise la conservation des écarts.



$1\,257 - 1\,163$

$\dots \xrightarrow{+7} \dots - 1\,170 \xrightarrow{+30} \dots - 1\,200$

donc $1\,257 - 1\,163 = \dots$

Figure 5.32 : extrait découverte (Euro Maths CE2, 2010, p. 46)

Cette technique a été abordée à l'étape précédente, l'étape 20 que nous présentons au paragraphe suivant (paragraphe 2 portant sur le calcul posé). L'étape 20 introduit la propriété de conservation des écarts qui sera utilisée en calcul mental (étape 21) et en calcul posé (étape 22). Avec cette technique, pour effectuer $1257 - 1163$, l'élève doit en fait effectuer $1294 - 1200$. Les codes « couleurs » ainsi que les opérateurs additifs mentionnés sur « la droite » doivent l'aider à effectuer le calcul pas à pas.

Pour finir sur cette étape 21, les auteurs soulignent dans le livre du professeur (p. 86) que pour conclure avec les élèves, on peut indiquer trois techniques pour effectuer une soustraction : $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$ ¹²⁶, τ_{NIO} et une technique qu'ils nomment technique à la « russe » et qui s'appuie sur la propriété des écarts. Ils préconisent de faire noter sur le cahier de l'élève un exemple d'utilisation de chaque technique et proposent cinq exercices d'application. Le premier exercice consiste à mettre en œuvre $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$, les trois suivants imposent l'utilisation tour à tour de $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$, τ_{NIO} et de la technique à la « russe » sur deux calculs. Le dernier est un problème de transformation à résoudre par la technique de son choix.

Nous exposerons une synthèse des éléments relevés suite à l'analyse de chaque type de tâches relatif au calcul mental, après avoir analysé l'organisation mathématique et didactique propre au calcul posé.

2. Calcul soustractif posé

Avant d'introduire τ_{ALG} l'algorithme de la soustraction posée, basée sur la propriété de conservation des écarts (étape 25), les auteurs ont programmé une première rencontre avec la propriété de conservation des écarts à l'étape 20¹²⁷.

Nous revenons sur ce moment de rencontre afin d'avoir une vision plus globale de la construction du bloc relatif à Θ_{AN} .

- ***Rencontre avec la propriété de conservation des écarts (Etape 20)***

Nous conduisons l'analyse des tâches proposées aux élèves en nous référant aux intentions et objectifs énoncés dans le livre du professeur. La première question doit conduire l'enseignant à formuler la conclusion suivante après comparaison des réponses des élèves :

¹²⁶ Pour $\tau_{\text{SOUS/ADD}}$, les auteurs indiquent « *qu'on peut s'aider en s'appuyant sur la droite numérique.* » (Livre du professeur, CE2, 2010, p.86).

¹²⁷ L'étape 20 est suivie d'une étape en calcul réfléchi (étape 21) qui permet de réinvestir la propriété de conservation des écarts pour effectuer une tâche du type $Ta-b$ avec b nombre à trois chiffres. Cette étape 21 a été analysée au paragraphe précédent (III.3.1).

« La différence d'âge entre deux personnes ne change pas au cours de leur vie. » (Ibid., p. 83)

La seconde question doit amener l'enseignant à exposer une technique basée sur la propriété de conservation des écarts:

« Faire une translation de 3 ans sur leurs âges : Camille aura 20 ans dans trois ans, sa grand-mère aura alors trois ans de plus (76 ans). »

(Ibid., p. 83)

La troisième question doit permettre à l'enseignant d'introduire la technique à la « russe » sur un exemple :

« Faire lire et commenter le contenu de la bulle du furet. Rapprocher ce commentaire du choix d'Alice :

Alice choisit d'ajouter 20, car $480+20=500$ et il est aisé de soustraire 500.

$2612-480 = (2612+20) - (480+20) = 2632-500 = 2132.$ »

(Ibid., p. 83)

1 Maman dit qu'elle a 31 ans de plus que moi. Évidemment, elle avait 31 ans quand tu es né! Et l'année prochaine, combien aura-t-elle de plus que moi?

Quelle va être la réponse du grand-père de Théo ?

2 Camille a 17 ans, sa grand-mère en a 73. Et quand Camille aura 20 ans, sa grand-mère en aura 76 !

3 Alice dit que pour calculer facilement l'écart entre 2 612 et 480, il suffit d'ajouter 20 aux deux nombres.

a. Explique pourquoi Alice choisit d'ajouter 20.
b. Utilise sa remarque pour calculer $2\ 612 - 480$.

L'écart ne change pas si on ajoute le même nombre aux deux termes de la soustraction.

Figure 5.33 : situation de découverte de la propriété de conservation des écarts (Euro Maths CE2, 2010, p. 45)

Nous en déduisons que la propriété de conservation des écarts est **formulée dans le registre de la langue** par un personnage « le furet ». L'introduction, par la suite, de la technique « à la russe »¹²⁸ pour effectuer plus simplement un calcul **justifie l'utilisation de la propriété de conservation des écarts d'un point de vue pragmatique**. La non- utilisation

¹²⁸ La technique « à la russe » est dérivée de τ_{AN} . Elle consiste à remplacer le nombre qu'on soustrait par sa dizaine ou centaine supérieure et à rajouter la différence au premier nombre.

par les auteurs de la droite numérique pour matérialiser la translation et le manque d'écarts intermédiaires pour arriver à un calcul du type $2612-480=(2612+20)-(480+20)=2632-500=2132$ montrent que OM2 et OM4 ne sont pas convoquées localement.

Pour permettre aux élèves de s'entraîner à utiliser la propriété de conservation des écarts en calcul mental, les auteurs donnent au total six calculs¹²⁹ sur les étapes 20 et 21. Tous les calculs portent sur des « grands nombres ». La propriété n'est pas réinvestie pour effectuer $a - b$ avec a et b nombres à deux chiffres.

- *Introduction de l'algorithme de la soustraction posée (Etape 25)*

1 Calcule : $845 - 683$.

2 Voici une nouvelle technique de soustraction :

1

$$\begin{array}{r} 845 \\ - 683 \\ \hline \end{array}$$

5 u moins 3 u, c'est 2 u.

2

$$\begin{array}{r} 845 \\ - 683 \\ \hline \end{array}$$

4 d moins 8 d, ce n'est pas possible.

3

$$\begin{array}{r} 845 \\ +10 \\ \hline 855 \\ - 683 \\ \hline \end{array}$$

On ajoute 1 c à 683, pour garder le même écart.

On ajoute 10 d à 845. 14 d moins 8 d égalent 6 d.

10 dizaines, c'est une centaine : l'écart est conservé.

À toi de terminer la soustraction. Compare au résultat que tu as trouvé à la question 1.

Figure 5.34 : découverte de la technique usuelle (Euro Maths CE2, 2010, p. 54)

Les élèves ont à effectuer, individuellement, le calcul de $845-683$ en ligne. Le livre du professeur spécifie qu'il leur est demandé (consigne orale) d'utiliser la technique¹³⁰ de leur choix. A la question 2, les élèves ont à lire silencieusement chaque vignette, puis à reprendre ce travail avec un camarade, avant que l'enseignant ne propose une correction collective.

¹²⁹ Calculs proposés à l'étape 20 : $425 - 97$; $1748 - 360$; $1357 - 170$.

Calculs à effectuer avec la technique « à la russe » à l'étape 21 : $2536 - 258$; $1860 - 358$.

Calculs à effectuer avec la technique de son choix (étape 21) : $1910 - 1828$; $1953 - 1891$; $1907 - 1834$.

¹³⁰ Il nous semble que le nombre 683 n'est pas assez proche¹³⁰ de 700 pour qu'une majorité d'élèves pensent à utiliser la technique à la « russe ». Ce rapprochement permettrait de rapprocher par la suite l'algorithme de la technique à la Russe.

Le mode d'emploi de cette technique algorithmique est détaillé étape par étape. A chaque étape correspond une vignette. Il est clair, en observant les deux premières¹³¹, que le calcul se fait chiffre à chiffre, de haut en bas, en partant de la droite. La signification des chiffres inscrits dans les colonnes est donnée en commentaire¹³². Au niveau de la troisième vignette, le commentaire indique les ajouts qu'il faut faire pour poursuivre le calcul. Un code (couleur bleue et plus petite police) est utilisé pour indiquer les 10 dizaines qu'on ajoute à 845 et la centaine qu'on ajoute à 682. Il semble aller de soi que cet ajout se note respectivement dans la colonne des dizaines et dans la colonne des centaines. Le fait de terminer le calcul est à la charge de l'élève. Il manque, en fait, une quatrième vignette avec pour commentaire « $8c-7c$, c'est c » pour terminer d'effectuer le calcul posé en colonne.

Le livre du professeur précise les modalités envisageables au moment de la correction :

*« Reprendre vignette par vignette le scénario de la technique. Attirer l'attention des élèves sur le cas où la soustraction n'est pas possible, à la 2^e vignette (4 dizaines moins huit dizaines), et sur la méthode présentée à la 3^e vignette. **Les élèves doivent comprendre** qu'on ajoute le même nombre aux deux termes (10 dizaines et 1 centaine) et donc que l'écart ne change pas. Faire lire la bulle du furet. » (Ibid., p. 93)*

Les auteurs insistent donc sur la nécessité de donner du sens aux retenues en s'appuyant sur la propriété de conservation des écarts et sur le principe décimal et de position de notre système de numération écrite. La bulle du furet permet de justifier l'ajout de dix dizaines (qui correspond à une centaine) aux deux termes du calcul soustractif.

Par la suite, les auteurs précisent aussi (en lien avec la question 3) :

« Qu'il est possible de vérifier si le calcul d'une soustraction est juste en en faisant l'addition qui lui correspond. Ex : $845-683=162$ et $162+683=845$. » (Ibid., p. 93)

Nous en concluons que plusieurs fonctions de la technologie, **expliquer, justifier, contrôler** sont visées à travers cette étape. Pour que l'élève s'entraîne, plusieurs types de tâches sont proposés :

¹³¹ Il n'est pas fait allusion à la technique de l'addition posée qui pourtant s'effectue aussi en commençant par calculer le chiffre des unités du résultat.

¹³² La formulation des commentaires laisse supposer que l'élève connaît la signification des symboles u, d, c.

- ✓ Effectuer des soustractions posées¹³³ : dix tâches au total. Pour chaque calcul, l'emplacement des retenues n'est pas indiqué (les soustractions ne sont pas « préparées »).
- ✓ Poser, effectuer et contrôler des soustractions données en ligne¹³⁴ : trois tâches au total.
- ✓ Poser, effectuer et contrôler des soustractions données « textuellement »¹³⁵ : une tâche.

Nous récapitulons ci-après le nombre de soustractions où les retenues valent dix, respectivement cent ou mille :

	Valeur des retenues : 10	Valeur des retenues : 100	Valeur des retenues : 1000
Nombre de soustractions posées avec deux retenues	7/10	6/10	5/10
Nombre de soustractions à poser avec deux retenues	3/4	3/4	1/4

Nous constatons qu'il y a des calculs qui nécessitent plusieurs couples de retenues (12/55).

¹³³ Sur dix soustractions posées:

- deux calculs $a - b$ avec a et b nombres à trois chiffres
- trois calculs $a - b$ avec a et b nombres à quatre chiffres
- cinq calculs $a - b$ avec a nombre à quatre chiffres et b nombre à trois chiffres

¹³⁴ Sur trois soustractions en ligne à poser:

- un calcul $a - b$ avec a et b nombres à trois chiffres
- deux calculs $a - b$ avec a nombre à quatre chiffres et b nombre à trois chiffres

¹³⁵ Tâche proposée ; « mille-deux-cent-quinze moins deux-cent-vingt-huit. »

III.4. Complétude de l'organisation mathématique

Nous commençons par montrer les liens entre les différentes organisations locales à travers un schéma avant d'évoquer les principaux recouvrements entre l'organisation mathématique conçue par les auteurs d'Euro maths et celle construite au chapitre 3.

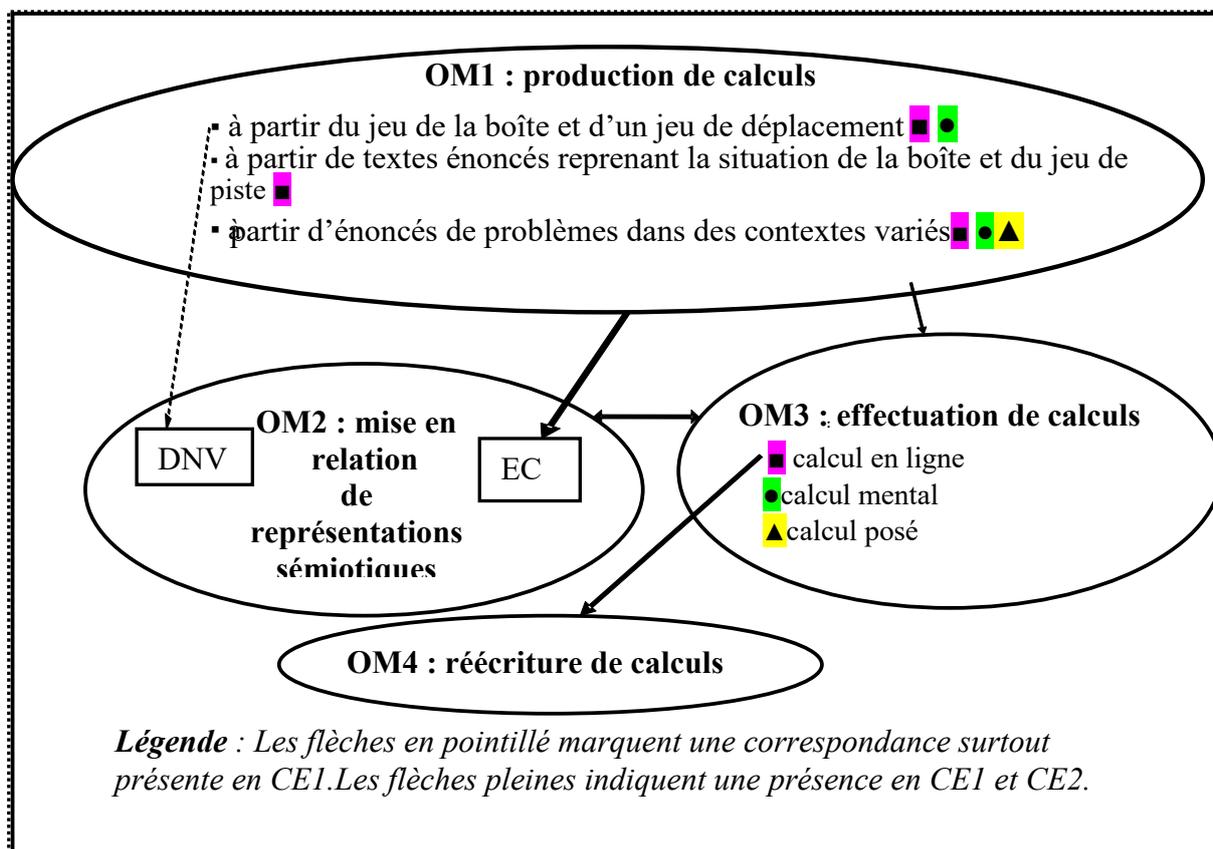


Figure 5.35 : liens entre les différentes organisations mathématiques d'Euro Maths CE1(2001)&CE2 (2012)

Nous constatons que les calculs attendus sont de la forme $a + b = x$; $a - b = x$; $a + x = b$, x étant l'inconnue. En CE1, ces calculs sont instruits pour modéliser deux situations de jeu, le déplacement sur une piste de nombres et le jeu de la boîte, puis servent à modéliser des problèmes de transformation, combinaison et comparaison (en référence à Vergnaud). Les contextes proposés sont variés et l'accent est mis sur la recherche de « l'écart » entre deux nombres.

Par ailleurs, les représentations sémiotiques utilisées sont majoritairement les écritures chiffrées, même si l'axe ou la droite numérique sont utilisés ponctuellement. Les écritures

chiffrées servent pour écrire dès le début du CE1 des calculs en ligne et pour noter le résultat des calculs.

D'autre part, l'effectuation des calculs (OM3) a une place centrale. Quatre types de tâches sont étudiés en CE1, $T_{a-\square}$ avec $\square \leq 5$, $T_{a-\square 0}$ avec $\square \leq 5$, $T_{a-\square \square}$ avec $10 \leq \square \leq 15$ ou $20 \leq \square \leq 25$ et $T_{a+..=b}$. Pour chaque type de tâches, une seule technique est mise en avant¹³⁶. Ainsi la technique séquentielle τ_{N10} est décrite, expliquée et mise en œuvre systématiquement pour soustraire un nombre compris entre dix et quinze, alors que la technique τ_{N10C} , qui est rattachée à la même technologie Θ_D , n'est pas signalée. De même, τ_{1010} , pourtant efficace sur de nombreux calculs soustractifs « sans retenue », est ignorée. Les mêmes choix sont reconduits en CE2, hormis qu'après avoir introduit la propriété de conservation des écarts, les auteurs introduisent une technique dérivée¹³⁷ de τ_{AN} , en calcul mental pour effectuer $a - b$ et avec a et b nombres à trois chiffres, et τ_{ALG} en calcul posé. Le lien entre les deux techniques est cependant peu exploité.

En complément, un travail de réécriture des calculs (OM4) est suggéré dans le livre du professeur, mais peu de tâches sont réellement proposées aux élèves sur les deux années CE1 et CE2.

IV. Apports de l'analyse praxéologique des manuels

Cette étude montre des différences notoires entre les organisations mathématiques et didactique retenues par les auteurs *d'Euro Maths* (2001 & 2010) et *Outils pour les Maths* (2012). Nous les rappelons brièvement avant de revenir sur les propositions établies en conclusion de l'étude des pratiques spécifiques conduite au chapitre 4.

- *Analyse comparée des organisations mathématiques des deux manuels*

Au niveau de la production de calculs OMI : au niveau de la continuité des apprentissages, deux situations, le jeu de la boîte et un déplacement sur une piste de nombres, sont présentées pour motiver la production de calculs de type $a + b = x$; $a - b = x$; $a + x = b$, dès le CE1 et reprises en CE2 par les auteurs *d'Euro Maths*. Les auteurs *d'Outils pour les Maths*, quant à eux, proposent en CE1, des énoncés de problèmes qui doivent amener l'élève à modéliser les

¹³⁶ $T_{a-\square}$ avec $\square \leq 5$, $T_{a-\square 0}$ avec $\square \leq 5$, $T_{a-\square \square}$ avec $10 \leq \square \leq 15$ ou $20 \leq \square \leq 25$ et $T_{a+..=b}$.

¹³⁷ Cette technique est dénommée technique à la « russe »

problèmes par une addition ou une soustraction. L'addition à trou n'est pas attendue par les auteurs.

Au niveau des représentations sémiotiques OM2 : les auteurs d'*Euro Maths* utilisent en majorité les écritures chiffrées et, de manière ponctuelle la droite numérique alors que les auteurs d'*Outils pour les Maths* utilisent en CE1 des dessins imagés de collection et peu les écritures chiffrées pour noter les calculs en ligne.

Au niveau de l'effectuation de calculs OM3 : les types de tâches propres à l'effectuation de calcul mental sont sensiblement les mêmes, pourtant les techniques étudiées pour un même type de tâches ne se recoupent pas toujours. Ainsi, pour effectuer $T_{a-\square}$, *Euro Maths* privilégie, quels que soient les chiffres du nombre a et du nombre à soustraire, l'utilisation de τ_{N10} , alors qu'*Outils pour les Maths* introduit une technique à portée limitée τ_{1010} . Autre différence sensible, *Outils pour les Maths* introduit τ_{N10C} (sans avoir étudié τ_{1010}) pour effectuer T_{a-9} , alors qu'*Euro Maths* n'étudie pas ce type de tâche particulier et n'introduit donc pas τ_{N10C} (en ayant introduit τ_{N10}). En somme, aucun des deux manuels n'étudie les deux techniques τ_{N10} et τ_{N10C} qui se réfèrent à la technologie Θ_D et un seul, *Outils pour les Maths*, étudie τ_{1010} qui se réfère à Θ_{DD} . Pour finir, *Outils pour les Maths* laisse vivre des techniques de comptage et amène les élèves à travailler sur des collections, sans privilégier l'usage des répertoires.

Au niveau du calcul posé, *Euro Maths* et *Outils pour les Maths* étudient la même technique τ_{ALG} de soustraction posée, mais *Euro Maths*, contrairement à *Outils pour les Maths* associe une technologie savante à la propriété de conservation des écarts, et justifie l'utilisation de la propriété de conservation des écarts d'un point de vue pragmatique, en introduisant une technique de calcul mental (la technique à la « russe ») pour effectuer T_{a-b} avec b nombre à trois chiffres.

Pour finir, *Outils pour les Maths* n'utilise pas d'ostensifs pour expliquer la mise en œuvre des techniques de calculs, alors qu'*Euro Maths* utilise les écritures chiffrées, l'axe ou la droite numérique en liaison avec τ_{N10} et $\tau_{ADD/SOUS}$.

Au niveau de la réécriture de calculs OM4 : la réécriture de calcul (OM4) est absente de l'organisation mathématique retenue par les auteurs *d'Outils pour les Maths* (2012) alors que le travail propre à la réécriture de calculs en ligne est amorcé par les auteurs *d'Euro Maths* (2001 & 2010).

- *Pistes envisageables pour l'ingénierie*

La place accordée à la réécriture de calculs par les auteurs *d'Euro Maths* et les liens que les auteurs organisent entre les différentes organisations mathématiques locales OM1, OM2 et OM3 sont plus proches de l'imbrication attendue en référence à l'organisation mathématique construite et présentée au chapitre 3. Nous irons cependant plus loin, en proposant des tâches de réécriture plus variées et moins isolées¹³⁸. Nous faisons l'hypothèse que, en justifiant mathématiquement les techniques de calculs, les élèves seront amenés à repérer les relations entre les nombres (respectivement entre l'addition et la soustraction) et à expliciter la nature de ces relations, et qu'ainsi, ils vont être amenés à les maîtriser et les évaluer.

Au niveau de l'organisation didactique, nous commencerons par proposer des types de tâche en calcul mental. Nous concevrons tout comme les enseignants A, B et C et les auteurs des séries d'exercices qui s'apparentent à des assortiments selon Genestoux (2002). Nous poserons les calculs en ligne (et non oralement), tout comme les auteurs *d'Euro Maths* (2001 & 2010) pour engager plus facilement un travail de réécriture.

Nous réinvestirons l'usage des techniques sollicitées pour effectuer $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square\theta}$, en développant le travail autour d'un type de tâche plus général T_{a-b} avec b nombre à deux chiffres. Cela nous permettra de motiver, tout comme le font les auteurs *d'Euro Math*, en adoptant un point de vue pragmatique, l'utilisation de τ_{AN} et de τ_{N10C} . Nous n'écarterons pas pour autant l'utilisation de τ_{N10C} car cette technique s'apparente à τ_{N10} , vu qu'elle s'appuie sur la même technologie Θ_D . De plus, n'oublions pas que cette technique a probablement été rencontrée en CE1 pour effectuer T_{a-9} et T_{a-11} (cf. II.2.1.c).

¹³⁸ Dans le chapitre 3, nous avons relevé quatre types de tâches :

- Transformer $a - b$ en $(a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_j + \dots + b_p)$ et inversement, avec a_i et b_j entiers naturels pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.
- Transformer $a - b$ en $a - (b_1 + b_2 + \dots + b_j + \dots + b_p)$ et inversement avec b_j entiers naturels pour $1 \leq i \leq p$.
- Transformer $a - b$ en $(a + c) - (b + c)$ ou $(a - c) - (b - c)$.
- Transformer $a - b = ?$ en $b + ? = a$ et inversement.

:

Avant d'enseigner le calcul posé en colonne, nous proposerons, comme les auteurs d'*Euro Maths (2010)*, un travail spécifique sur la propriété de conservation des écarts mais en l'enrichissant à partir des situations analysées au chapitre 4 (la règle cassée, la translation d'une bandelette). Nous introduirons comme ostensif la droite numérique pour matérialiser l'invariance par translation. Nous nous appuierons davantage sur τ_{AN} pour introduire τ_{ALG} , en proposant des calculs plus inducteurs (effectuer par exemple $262 - 37$ en ligne avant de le poser en colonne).

Au niveau du texte destiné à l'enseignant, nous expliciterons les techniques attendues, les ostensifs utilisables et les institutionnalisations locales, afin d'outiller les enseignants sur le plan cognitif. Au niveau de la composante médiative, tout comme les auteurs d'*Euro Maths* nous détaillerons les différents moments de l'étude au risque de, peut-être, figer les déroulements en classe. Pour contourner ce problème éventuel et réguler, nous demanderons des retours à chaque étape de la programmation (bilan oral ou écrit).

Pour conclure, cette analyse de ces deux organisations mathématiques et didactiques nous a permis de poursuivre notre réflexion sur les conditions à réunir pour rendre opérante l'ingénierie dont l'objet d'étude est présenté aux chapitres 6 et 7.

Chapitre 6

Présentation de l'ingénierie

L'objet de ce chapitre est de présenter l'ingénierie relative au calcul soustractif conçue pour le CE2. L'organisation mathématique envisagée est celle définie au chapitre 3. L'organisation didactique est étayée par les propositions formulées suite à l'étude des pratiques de l'enseignement ordinaire et des manuels (chapitres 4 et 5). Cette ingénierie, en tant que méthodologie de recherche, doit permettre de valider les hypothèses formulées sur l'utilisation des différentes fonctions de la technologie dans l'enseignement du calcul

soustractif au CE2. Elle doit apporter des éléments nouveaux, susceptibles de faire évoluer les insuffisances calculatoires des élèves, insuffisances qui se manifestent par la méconnaissance de certaines techniques, par un nombre de techniques restreint ou par l'utilisation de techniques qui ne sont pas adaptées aux buts visés.

Pour présenter l'ingénierie, nous commencerons par énoncer les conditions et les contraintes qui nous ont poussée à « apprêter »¹³⁹ d'une certaine manière le savoir à enseigner, afin qu'il puisse être effectivement enseigné dans une, voire plusieurs classes de CE2. Nous donnerons à la suite le plan retenu pour organiser l'étude sur une période continue et délimitée dans le temps. Ce plan montrera, pour chaque étape envisagée, les organisations mathématiques convoquées et plus précisément les types de tâches envisagés.

Dans le prolongement, après avoir présenté l'évaluation diagnostique, nous mènerons une analyse *a priori* de chaque organisation mathématique ponctuelle retenue. Cette analyse sera conduite en lien avec les hypothèses émises, sur la nécessité de rendre intelligibles les techniques, en développant plusieurs fonctions de la technologie, et ce à différents moments de l'étude.

I. Ébauche de l'ingénierie

Nous présentons l'agencement et la nature des séquences retenues au moyen de deux tableaux. Le premier tableau situe la programmation de l'ingénierie dans le temps et le second montre comment l'ingénierie émane de l'organisation mathématique de référence¹⁴⁰.

I.1. Agencement des séquences sur la durée de l'expérimentation

Pour répondre aux conditions et aux contraintes liées à la mise en œuvre de l'ingénierie, la première séquence est programmée en novembre, à titre indicatif. Au préalable, il est souhaitable que les enseignants aient consolidé la connaissance des répertoires additif et soustractif et la connaissance des nombres inférieurs à cent, afin d'engager dans la continuité, un travail en calcul mental, le calcul mental nécessitant des connaissances autour

¹³⁹ Cette idée d'apprêter le savoir est empruntée à Ravel (2003) qui qualifie ainsi l'étape de la transposition didactique interne qui consiste à passer du savoir à enseigner au savoir enseigné. « *Notons aussi que l'idée d'apprêtement du savoir est plus proche du rôle de l'enseignant que celle de transformation du savoir car dans l'action d'apprêter, la finalité de l'action de modification intervient : il s'agit de modifier le savoir à enseigner en vue d'une utilisation prochaine – en vue d'un enseignement effectif !* » (Ravel, 2003, p.6)

¹⁴⁰ Nous avons choisi cet ordre de présentation car le premier organigramme permet d'abord de donner une vision globale de l'ingénierie

de la décomposition-recomposition des nombres et de la numération décimale chiffrée. Une fois installée cette pratique, plusieurs séquences sont programmées autour de la production de calculs, afin de modéliser, entre autres, des problèmes de comparaison additifs, au sens de Vergnaud (1990), et de donner du sens à la notion d'écart. Dans le prolongement, la technique τ_{AN} basée sur la propriété de conservation des écarts sera mobilisée. La technique τ_{AN} a été décrite, expliquée et réinvestie, comme beaucoup d'autres techniques étudiées au préalable, pour effectuer des tâches du type T_{a-b} . L'enseignement d'une technique de la soustraction posée, basée sur la propriété de conservation des écarts (τ_{ALG}), fera l'objet de la dernière séquence de la programmation.

Le tableau présenté en figure 6.1 indique pour chaque séquence¹⁴¹, de la première à la septième, l'objectif visé et plus particulièrement le type de tâches convoqué. Il montre comment les séquences s'enchaînent les unes après les autres, sans interruption, et donne une idée de la durée de l'expérimentation. Il permet par ailleurs d'avoir un aperçu du découpage de chaque séquence (Sqj $1 \leq j \leq 7$) en deux, voire trois séances ($SiSqj$ $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 7$).

Effectuer un calcul soustractif, décrire la technique utilisée		Donner du sens à la notion d'écart et de différence		Découvrir, utiliser la propriété de conservation des écarts	Mobiliser les différentes techniques enseignées	Découvrir et utiliser l'algorithme
Sq1 $T_{a-\square}$	Sq2 $T_{a-\square 0}$	Sq3 $T_{Prod.Cal.}$	Sq4 $T_{Pro.Cal.}$	Sq5 $T_{Pro.Cal.}$	Sq6 T_{a-b}	Sq7 T_{a-b}
S1Sq1	S1Sq2	S1Sq3	S1Sq4	S1Sq5	S1Sq6	S1Sq7
S2Sq1	S2Sq2	S2Sq3	S2Sq4	S2Sq5	S2Sq6	S2Sq7
S3Sq1	S3Sq3	S3Sq3				
NOV. 5 jours	NOV. 5 jours	DEC. 5 jours	DEC. 5 jours	JANV. 5 jours	JANV. 5 jours	FEV. 5 jours
<p>Légende : les cinq blocs d'apprentissage de l'ingénierie sont indiqués sur la première ligne. A chacun d'eux correspond une voire deux séquences. Chaque séquence est découpée en une, deux voire trois séances qui s'enchaînent dans la durée.</p>						

Tableau 6.1 : présentation de l'ingénierie relative au calcul soustractif

¹⁴¹ Le tableau ne mentionne pas les deux évaluations effectuées avant et après l'expérimentation.

I.2. Imbrication des différentes organisations locales

Le second tableau, directement relié à l'organisation mathématique de référence, met en évidence les organisations mathématiques locales convoquées, les types de tâches sollicités, les techniques mises en œuvre, les ostensifs privilégiés et, pour finir, les fonctions des technologies mises en avant. Nous le présentons en figure 6.2 avant d'évoquer les raisons qui nous ont amenée à agencer de cette manière les différentes étapes.

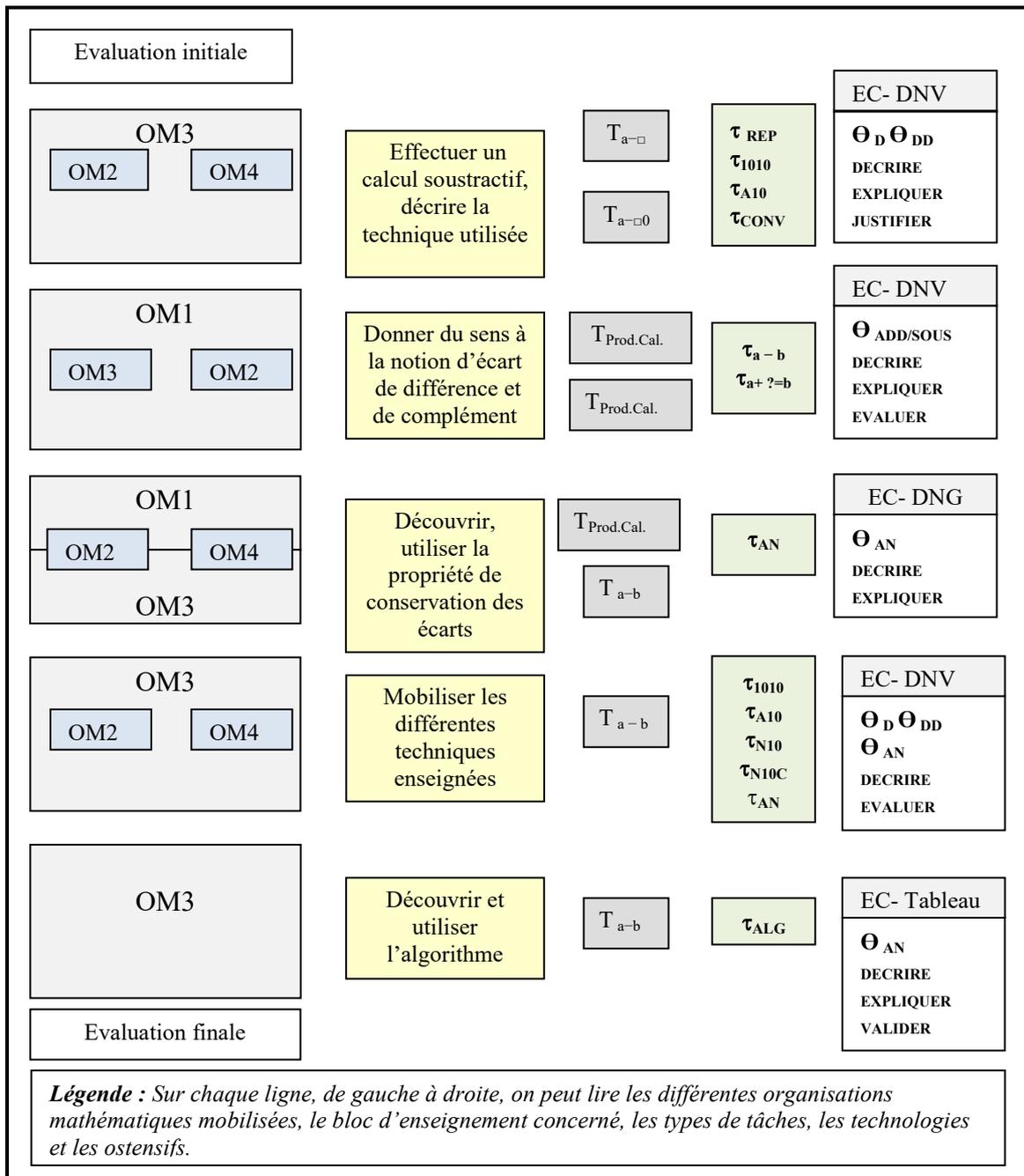


Tableau 6.2 : présentation de l'ingénierie relative au calcul soustractif et de ses différentes imbrications

Nous avons choisi, en lien avec les hypothèses engagées sur la nécessité de rendre intelligibles les techniques, de **ne pas dissocier, dès les premières séquences**, le travail lié à l'effectuation de calculs (OM3) de celui lié à la réécriture de calculs (OM4) et à l'association de représentations sémiotiques (OM2). L'utilisation **régulière** des écritures chiffrées, et éventuellement de la droite numérique vide, aux différents moments de l'étude (de la découverte à l'évaluation), va amener l'élève à décrire et expliquer (éventuellement justifier) la (les) technique(s) qu'il utilise pour effectuer tel ou tel calcul et, indirectement, à les maîtriser.

Soustraire *un nombre inférieur à cinq, soustraire dix, vingt, trente* sont des tâches étudiées en CE1. Dans le prolongement, nous commençons par l'étude des tâches de type $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$ sans majorer la valeur de \square . **Nous cherchons ainsi à limiter, voire à mettre en défaut l'utilisation d'une technique basée sur le comptage¹⁴² et privilégions, en fonction des variables numériques choisies, la mise en œuvre d'une technique choisie parmi τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{CONV} .** Même si la consolidation des répertoires (additif et soustractif) et un travail approfondi en numération sur les décompositions ont été engagés depuis le début de l'année scolaire, nous prévoyons (cf. figure 6.1) qu'il faudra plusieurs séances afin *d'assurer une utilisation efficace, robuste de chaque technique et la solidité de la technologie s'y référant* (Θ_D et Θ_{DD}).

Le travail sur l'**écart entre deux nombres s'effectue à partir** de problèmes additifs de comparaison (OM1). Il vise à construire le bloc technologico-théorique autour de $\Theta_{ADD/SOUS}$, avant d'introduire la **propriété de conservation des écarts dans le cadre de la mesure** et de l'utiliser pour effectuer des calculs soustractifs.

L'étude de *soustraire un nombre à deux chiffres* (T_{a-b}) amène à mobiliser suivant les valeurs de a et b, l'une ou l'autre des techniques étudiées en calcul mental, mais aussi à consolider les éléments propres aux technologies s'y référant. Pour finir et en lien avec τ_{1010} et τ_{AN} , nous **introduisons τ_{ALG}** pour effectuer un calcul soustractif posé.

¹⁴² Ces techniques sont peu économiques quand le nombre à soustraire est supérieur à cinq.

II. Présentation de l'évaluation diagnostique

L'évaluation (présentée en annexe D.0.1) est conçue pour avoir un aperçu des réussites calculatoires, des techniques et des justifications mobilisées par les élèves des classes concernées (OM3), une idée de la façon dont ils s'y prennent pour résoudre un problème additif (OM1), interpréter un schéma avec appui sur la droite numérique (OM2) ou réécrire un calcul (OM4). L'évaluation porte ainsi sur les types de tâches suivants : T_{a-b} , $T_{Trans.(lang./cal.)}$, $T_{Ass.(sch./cal.)}$ et $T_{Ass.(cal./cal.)}$. Le fait que les tâches de chaque type ne soient pas assez nombreuses et que le travail donné soit uniquement un travail écrit n'est pas suffisant pour connaître avec précision les techniques des élèves. L'évaluation, dans ce contexte, est un travail exploratoire qui permet d'établir un premier diagnostic, de repérer les praxéologies développées par les élèves. Dans les paragraphes suivants, nous étayons nos propositions en reprenant un à un les exercices en fonction du type de tâches qu'ils convoquent.

II.1. Exercices relatifs à T_{a+b} et T_{a-b}

Les quatre premiers exercices correspondent au type de tâches *additionner puis soustraire un nombre*. *A priori*, les calculs additifs doivent être exécutés rapidement, en s'appuyant sur des connaissances anciennes¹⁴³ et capacités retravaillées en classe de CE2. En revanche, les calculs soustractifs s'appuient sur des connaissances propres au CE1 qui n'ont pas été remobilisées en début d'année et risquent d'être moins bien réussis.

<p><u>Exercice1</u> Calcule mentalement :</p> <p>(a) $6+7 =$ (b) $193 + 10 =$ (c) $46 + 12 =$ (d) $428 + 5 =$ (e) $2 + 89 =$</p> <p><u>Exercice2</u> Calcule :</p> <p>(a) $\begin{array}{r} 37 \\ + 45 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 324 \\ + 35 \\ \hline \end{array}$</p>	<p><u>Exercice1</u> Connaissances requises: répertoire additif, passage à la dizaine, centaine supérieure, commutativité de l'addition. Techniques visées ¹⁴⁴: τ_{REP} (a) et (b) ; τ_{1010} (c) ; τ_{A10} (d) et (e).</p> <p><u>Exercice2</u> Connaissances requises: répertoire additif, groupement / échange en lien avec l'usage des retenues Technique visée: technique de l'addition posée avec (a) ou sans retenue (b).</p>
---	---

Tableau 6.3 : exercices relatifs à T_{a+b} (Ingénierie, ED)

¹⁴³ Connaissance du répertoire additif et techniques de calcul additif mental et posé en colonne.

¹⁴⁴ Tous les calculs peuvent être effectués en comptant (avec ou sans l'aide des doigts) ou en calculant mentalement l'opération en colonne. Il n'y a qu'en cas d'erreurs à un ou dix près que ces techniques seront éventuellement repérables. Il est possible de les faire émerger lors d'interactions.....

<p><u>Exercice3</u> Calcule mentalement :</p> <p>(a) $13 - 7 =$ (b) $203 - 10 =$ (c) $47 - 13 =$ (d) $421 - 3 =$ (e) $31 - 29 =$</p> <p><u>Exercice4</u> Calcule :</p> <p>(a) $\begin{array}{r} 57 \\ - 23 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 84 \\ - 27 \\ \hline \end{array}$</p>	<p><u>Exercice3</u> Connaissances requises: répertoire additif, passage à la dizaine, centaine inférieure. Techniques visées: τ_{REP} (a) et (b); τ_{1010} (c) τ_{A10} (d) et $\tau_{ADD/SOUS}$(e).</p> <p><u>Exercice4</u> Connaissances requises: répertoire soustractif, groupement / échange en lien avec l'usage des retenues Technique visée: technique de la soustraction posée avec et sans retenue.</p>
--	---

Tableau 6.4 : exercices relatifs à T_{a-b} (Ingénierie, ED)

II.2. Exercices relatifs à $T_{Pro.Cal.}$

Pour le type de tâches $T_{Pro.Cal.}$, nous donnons trois énoncés extraits d'*Outils pour les Maths* (CE1, 2010, p.3) qui correspondent à des problèmes additifs de comparaison, au sens de Vergnaud (1990). Nous cherchons à repérer parmi les élèves ceux qui produisent un calcul ou un schéma. Nous analysons par la suite le type de calcul qui intervient (additif, soustractif, addition à trou) ou le type de schéma (représentation imagée de collections privilégiant le comptage, schéma avec appui sur la droite numérique).

Les calculs à effectuer sont du même type que ceux proposés à l'exercice 1(a), l'exercice 3(a) et l'exercice 3(e).

<p><u>Exercice5</u></p> <p>(a) Simon a 13ans. Il en a 5 de moins que sa sœur Lucie. Quel âge a Lucie ?</p> <p>(b) Théo a 13 ans. Son frère Hugo a 7 ans. Quelle est leur différence d'âge ?</p> <p>(c) Le père de Flora a 42 ans ; sa mère a 37 ans. Combien le père de Flora a-t-il d'années de plus que sa mère ?</p>	<p>Technique visée: production d'un calcul</p> <p>(a) $13 + 5 =$ ou $\dots - 5 = 13$</p> <p>(b) $13 - 7 =$ ou $7 + \dots = 13$</p> <p>(c) $42 - 37 =$ ou $32 + \dots = 47$</p>
--	---

Tableau 6.5 : exercices relatifs à $T_{Trans.(lang./cal.)}$ (Ingénierie ED)

II.3. Exercices relatifs à $T_{Ass.(sch./cal.)}$ et $T_{Ass.(cal./cal.)}$

Une des tâches proposée relative à $T_{Ass.(sch./cal.)}$ consiste à associer à un schéma avec appui sur la droite numérique un calcul soustractif ou la recherche d'un complément.

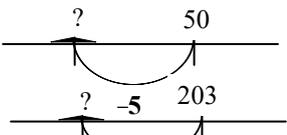
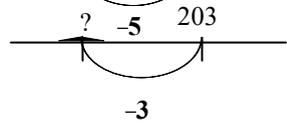
<p><u>Exercice 6</u></p> <p>(a) </p> <p>(b) </p>	<p>Technique visée:</p> <p>(a) Calculer $50 - 5$ ou $? + 5 = 50$</p> <p>(b) Calculer $203 - 3$ ou $? + 3 = 203$</p>
--	--

Tableau 6.6 : exercices relatifs à $T_{Ass.(sch./cal.)}$ (Ingénierie, ED)

En ce qui concerne le second type de tâches $T_{Ass.(cal./cal.)}$, nous donnons une première tâche qui consiste à associer à une écriture du type $a - 9$ une autre écriture arithmétique. Indirectement, nous souhaitons être en mesure, en fonction de ce que l'élève choisit, d'identifier la technique de calcul qu'il utilise.

<p><u>Exercice 7</u> Choisis le calcul que tu vas faire pour trouver le résultat de $24-9$. Entoure-le.</p> <p>$24 - 9$ ●</p> <ul style="list-style-type: none"> ● $24 - 4 - 5$ ● $24 - 10 + 1$ ● $25 - 10$ ● <i>Je ne sais pas</i> 	<p><u>Exercice 7</u></p> <p>Technique visée : le premier choix laisse supposer que l'élève utilise τ_{A10}, le second choix qu'il utilise τ_{N10C}, le troisième qu'il utilise τ_{AN}.</p>
--	---

Tableau 6.7 : exercices relatifs à $T_{Ass.(cal./cal.)}$ (Ingénierie, ED)

Pour conclure, les résultats de cette évaluation vont permettre de pointer les réussites et les difficultés opératoires des élèves, les techniques mobilisées sur certains types de tâches. L'évaluation finale permettra d'établir une comparaison, avant et après expérimentation de l'ingénierie sur le calcul soustractif.

III. Description et analyse *a priori* des séquences de l'ingénierie

L'ingénierie, telle que nous l'avons *apprêtée*, est découpée en plusieurs séquences qui s'enchaînent les unes aux autres sur la durée de l'ingénierie (cf. figure 6.1). Chaque séquence relève d'un type de tâches. Nous présentons pour chacune, la situation proposée (assortiment, problème) pour initier la rencontre avec le type de tâches visé (reprise ou première rencontre). Nous étudions, en fonction des variables didactiques de la situation, les techniques *a priori* et les éléments technologiques, bribes de discours, écritures mathématiques, schémas visés et qui participent à la construction du bloc technologico-théorique. Nous indiquons succinctement la gestion didactique proposée. D'autre part, nous intégrerons à l'analyse des moments d'institutionnalisation locale des contenus extraits des scénarios écrits à destination des enseignants.

III.1. Séquence relevant de $T_{a-\square}$ (Sq1)

Cette séquence (Sq1) s'inscrit dans la continuité du travail proposé en CE1 et en période1 de CE2 sur la numération décimale chiffrée et les opérations. Elle permet de revenir sur certains items de l'évaluation diagnostique¹⁴⁵ et devrait conduire l'ensemble des élèves à abandonner les techniques basées sur le comptage, pour adopter des techniques en partie

¹⁴⁵ Six items de l'évaluation diagnostique relèvent de $T_{a-\square}$.

nouvelles et poursuivre la construction des éléments technologiques se référant à Θ_D et Θ_{DD} . Cette séquence est au sens de Larguier¹⁴⁶, (2009) un *moment de reprise* dans le sens où il s'agit de :

«*Ne pas reprendre totalement l'étude du thème et s'efforcer de faire apparaître le nouveau à étudier par rapport à l'ancien* ». (Larguier, 2009, p. 28).

Elle est découpée en trois séances :

- ✓ La première séance (S1Sq1) vise à mettre en œuvre, décrire et expliquer τ_{1010} et τ_{A10} . Un travail sur la réécriture de calculs (OM4) et la production de schéma avec appui sur la droite numérique vide (OM2) est amorcé.
- ✓ La seconde séance (S2Sq1) permet de continuer à explorer $T_{a-\square}$ et d'introduire τ_{N10C} dans le cas particuliers où $\square=8$ ou $\square=9$.
- ✓ La troisième séance (S3Sq1) a pour objectif de poursuivre l'élaboration de τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} et la construction des blocs technologiques Θ_D et Θ_{DD} .

Dans les paragraphes suivants, nous présentons et donnons l'analyse *a priori* des situations proposées en séance 1 et 2.

III.1.1. Description et analyse de la reprise de $T_{a-\square}$

En lien avec les propositions retenues suite à l'observation des pratiques des enseignants B et C (cf. chapitre 4. III), nous proposons trois séries de quatre calculs que nous présentons dans la colonne de gauche du tableau 6.6. Nous précisons que les quatre premiers calculs sont donnés un à un, oralement. Pour chacun, l'élève dispose d'environ une à deux minutes pour écrire le résultat du calcul et décrire la technique mise en œuvre pour effectuer le calcul, en utilisant des mots, des calculs, des schémas¹⁴⁷. Après un temps collectif de restitution et d'échanges en classe entière, les mêmes modalités sont reconduites pour effectuer la seconde série et, pour finir, la troisième.

¹⁴⁶ Larguier cite avant de le réorganiser un texte de Chevillard extrait d'un cours donné dans le cadre de la formation initiale de Professeurs (2002) qui parle également de la reprise d'étude : « *Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du recommencement, mais de la reprise et de la poursuite de l'étude du thème.* » (Larguier, 2009, p. 28)

¹⁴⁷ Les résultats et les discours correspondants aux quatre calculs de chaque série sont à écrire sur un modèle de feuille de format prédéfini. (cf. annexe D.1.1).

Avant d'exposer les techniques *a priori* et les discours possibles des élèves, nous analysons la nature des calculs en jeu.

a) Nature des calculs en jeu

48 – 5	48 – 5
59 – 2	59 – 2
328 – 6	328 – 6
70 – 6	70 – 6
49 – 5	49 – 5
34 – 6	34 – 6
153 – 4	153 – 4
75 – 7	75 – 7
387 – 6	387 – 6
152 – 6	152 – 6
42 – 3	42 – 3
59 – 5	59 – 5

Tableau 6.8 : tâches de type $T_{a-\square}$ (Ingénierie, S1Sq1)

Dans la première série, les trois premiers calculs (entourés dans la colonne de droite) sont tels que le nombre à soustraire est inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. Le fait de proposer consécutivement trois calculs de même nature a pour but de faciliter la comparaison et de suggérer indirectement l'utilisation de τ_{1010} et de sa technologie Θ_{DD} . Cet ensemble s'apparente volontairement à un assortiment, au sens de Genestoux (2002). Le quatrième calcul, *l'intrus* de cette série de quatre, est tel que le nombre soustrait est supérieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait, pour permettre aux élèves, indirectement, de prendre connaissance des limites de l'utilisation de τ_{1010} . Cette tâche doit amener les élèves tentés d'effectuer $6 - 0$ afin de calculer $70 - 6$ à se rendre compte de leur erreur (76 est le résultat de $70 + 6$ et non de $70 - 6$). Trois tâches de la seconde série (entourées dans la colonne de gauche) permettent également de travailler la question du domaine de validité de τ_{1010} , et visent l'utilisation de la technique τ_{A10} ¹⁴⁸, technique séquentielle, qui s'appuie sur Θ_D . La troisième série vise à engager l'élève à distinguer les calculs qui relèvent de τ_{1010} de ceux qui relèvent d'une autre technique (en l'occurrence le deuxième et le troisième calcul).

¹⁴⁸ D'après l'étude sur les organisations mathématiques conduite au chapitre 5, deux manuels *Outils pour les Maths(2012)* et *Euro Math(2001)* introduisent en CE1, τ_{A10} pour effectuer des tâches de type $T_{a-\square}$.

b) Inventaire des techniques *a priori*

- *Pour le calcul n°1 : 48 – 5 (et les calculs n°2, n°3, n°5 ; et n°12)*

Trois techniques sont répertoriées dans l'organisation mathématique de référence :

- L'élève calcule $8 - 5$ et ajoute 40 à ce résultat ou il inscrit à la gauche de ce résultat, le chiffre des dizaines « 4 » qui lui est inchangé (τ_{1010}).
- L'élève cherche le complément de 5 à 48 ($\tau_{\text{SOUS/ADD}}$).
- L'élève pose le calcul en colonne (τ_{ALG}).

Deux autres techniques non adaptées sont possibles :

- L'élève décompte de un en un, cinq fois, à partir de 48.
- L'élève représente une collection imagée de 48 éléments puis barre 5 éléments et compte les éléments non barrés. Cette seconde technique est moins probable que celle qui consiste à décompter de un en un au vu de la taille du nombre 48.

- *Pour le calcul n°4 : 70 – 6 (et les calculs n°6, n°7, n°8, n°10 et n°11)*

Trois techniques sont répertoriées dans l'organisation mathématique de référence :

- L'élève calcule $10 - 6$ et ajoute à ce résultat 60. ($(\tau_{1010})'$).
- L'élève cherche le complément de 6 à 70. ($\tau_{\text{SOUS/ADD}}$).
- L'élève pose le calcul en colonne (τ_{ALG}).

Une autre technique est possible :

- L'élève décompte de un en un, six fois, à partir de 70.

Deux erreurs sont envisageables :

- L'élève calcule $6 - 0$ et ajoute 70 à ce résultat ou il inscrit à la gauche de ce résultat, le chiffre des dizaines « 7 ».
- L'élève calcule $7 - 6$ et inscrit à la droite de ce résultat, le chiffre « 0 ».

- *Pour le calcul n°6 : 34 – 6 (et les calculs n°4, n°7, n°8, n°10 et n°11)*

Une technique supplémentaire est répertoriée dans l'organisation mathématique de référence :

- L'élève soustrait 4 à 34 puis 2 à 30 (τ_{A10}).

Pour conclure, nous nous attendons à ce que les trois premiers calculs soient mieux réussis que les suivants. Nous pensons également que beaucoup d'élèves n'arriveront pas à décrire ni à expliquer sur leur feuille les techniques qu'ils ont mises en œuvre, cette tâche étant nouvelle à ce stade du projet (S1Sq1). Nous présentons ci-dessous des éléments de discours qui peuvent cependant permettre d'inférer l'utilisation de τ_{1010} , $(\tau_{1010})'$ et τ_{A10} .

c) Éléments de discours envisageables

- *Pour inférer l'utilisation de τ_{1010} (calcul n°1 : 48 – 5)*
 - Sur la feuille, le calcul $8 - 5 = 3$ est inscrit.
 - Sur la feuille, il est fait allusion au chiffre des unités, le mot est employé ou le symbole u est noté. Le chiffre des dizaines est signalé directement ou indirectement (« je mets le 4 devant »).
 - Sur la feuille, la décomposition canonique de 48 est écrite $48 = 40 + 8$, ou l'élève précise qu'il va ajouter à 3, le nombre 40.

Par conséquent, un calcul sur les chiffres des unités ou une décomposition canonique du nombre auquel on soustrait, au moyen des unités de numération ou des écritures chiffrées, permet d'inférer l'utilisation de τ_{1010} .

- *Pour inférer l'utilisation de $(\tau_{1010})'$ (calcul n°4 : 70 – 6)*
 - Sur la feuille, le calcul $10 - 6 = 4$ est inscrit.
 - Sur la feuille, il est fait allusion au chiffre des unités, le mot est employé ou le symbole u est noté. Le chiffre des dizaines est signalé directement ou indirectement (« je mets le 6 devant »).
 - Sur la feuille, la décomposition de 70 est écrite $70 = 60 + 10$, ou l'élève précise qu'il va ajouter à 4 le nombre 60.

Tout comme pour τ_{1010} , le calcul de la différence entre dix et le nombre à soustraire, ou la décomposition du nombre auquel on soustrait en une décomposition additive (ayant pour terme dix ou une dizaine) permettent de repérer l'utilisation de $(\tau_{1010})'$.

- *Pour inférer l'utilisation de τ_{A10} (calcul n°6 : 34 – 6)*
 - Sur la feuille, le calcul $34 - 4$ est indiqué ainsi que celui de $30 - 2$.
 - Sur la feuille, un schéma avec appui sur un axe est tracé. Deux bonds correspondants à - 4 et - 2 sont matérialisés.

Dans la première proposition l'élève décompose le nombre à soustraire en tenant compte du chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. Il peut éventuellement écrire des égalités fausses en chaîne du type $34 - 4 = 30 - 2 = 28$. A partir du moment où le calcul permet d'identifier les deux calculs intermédiaires et l'utilisation du nombre pivot 30, nous en déduisons que l'élève a utilisé τ_{A10} . Dans la seconde proposition, l'élève utilise un autre ostensif, celui correspondant à la droite numérique pour décrire la technique τ_{A10} .

d) Construction du bloc technologico-théorique relevant de Θ_D et Θ_{DD}

Les éléments technologiques retenus ont été choisis en fonction des techniques et des discours sur les techniques que les élèves vont mettre en œuvre et produire *a priori*. Ces éléments seront communiqués aux enseignants des classes A et B, dans la proposition de

scénario relative à la séquence 1. Nous les avons reprographiés en figure 6.3 et figure 6.4.

Nous trouvons en rapport avec τ_{1010} :

<p>règle écrite</p> <p>justification avec décomposition</p> <p>justification orale avec UN</p>	<p>3) 328-6 ? Après exploration, mise en commun, l'enseignant écrit la règle et la justification :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>On calcule directement 8-6 puis on ajoute 320</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\begin{aligned} 328-6 &= 320+8-6 \\ &= 320+2 \\ &= 322 \end{aligned}$ </div> <p>Suggérez à un élève de justifier oralement avec UN</p>
--	---

Figure 6.1 : extrait des éléments relevant de Θ_{DD} (Ingénierie, S1Sq1)

La formulation retenue¹⁴⁹ pour décrire le mode d'emploi de la technique (fonction décrire de la technologie) sur un exemple de calcul montre qu'il faut effectuer un calcul sur les chiffres des unités et ajouter au résultat obtenu le nombre de dizaines du nombre auquel on soustrait.

Pour expliquer la technique et la justifier mathématiquement, nous proposons une tâche de réécriture de calcul, en utilisant les écritures chiffrées puis les unités de numération.

L'ostensif utilisé est un arbre. Nous trouvons en rapport avec τ_{A10} :

<p>justification avec décomposition</p> <p>illustration avec DNV</p>	<p>2) 34-6 ? Exploration</p> <p>Attention, il risque d'y avoir pour erreur 32, car l'élève utilise la règle précédente ou beaucoup de procédures basées sur le comptage.</p> <p>Il faut passer dans les rangs pour voir si certains élèves ont dit qu'ils commençaient par soustraire quatre ou tracé une droite numérique.</p> <p>Suivant ce qu'ils ont fait, on peut expliciter la règle qui consiste à passer par la dizaine entière en utilisant les expressions numériques :</p> $\begin{aligned} 34-6 &= 34-4-2 \\ &= 30-2 \\ &= 28 \end{aligned}$ <p>On peut aussi introduire la droite numérique pour expliciter les deux sauts</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>Prévoir aussi une autre procédure qui consiste à décomposer 34 en 20+14 et à calculer 20+14-6</p>
--	--

Figure 6.2 : extrait des éléments relevant de Θ_D (Ingénierie, S1Sq1)

En lien avec τ_{A10} , nous avons montré dans l'analyse *a priori*, que certains élèves risquaient d'appliquer à tort τ_{1010} pour des calculs qui ne s'y prêtent pas. C'est pourquoi nous commençons par signaler dans le scénario *l'erreur courante* qu'il faut éviter de laisser

¹⁴⁹ Dans la marge de droite, nous avons employé le mot « règle » pour désigner ce qui correspond au mode d'emploi de la technique. Ce mot, devrait retenir davantage l'attention des enseignants et les inciter à être très précis dans la formulation retenue.

s'installer. L'explication de τ_{A10} passe par une réécriture du calcul en ligne. La droite numérique vide (DNV) est introduite pour illustrer la manière dont il est possible de décomposer le calcul initial, en considérant un nombre pivot (ici le multiple de dix inférieur au nombre à soustraire).

III.1.2. Consolidation de τ_{1010} , τ_{A10} et introduction de τ_{N10C}

Pour cette seconde séance (S2Sq1), trois nouvelles séries de quatre calculs intégrant les tâches *soustraire 8 ou 9* sont données. Les modalités proposées dans le scénario seront volontairement identiques à celles envisagées pour mettre en œuvre S1Sq1 : l'élève aura à effectuer le calcul proposé et à décrire la technique qu'il a utilisée. L'enseignant, à partir de l'ensemble des discours produits, développera en lien avec Θ_D et Θ_{DD} , les différentes fonctions de la technologie - motiver, faciliter, expliquer, évaluer - au moyen d'ostensifs adaptés - écritures chiffrées, unités de numération, droite numérique. L'objectif étant à terme de faire évoluer les compétences calculatoires des élèves et de développer des capacités de flexibilité et d'adaptabilité et de raisonnement.

a) Nature des calculs envisagés

437 – 5
321 – 5
54 – 9
325 – 9
643 – 7
521 – 9
65 – 8
122 – 8
49 – 5
153 – 9
269 – 8
342 – 8

Tableau 6.9 : tâches de types $T_{a-\square}$ (Ingénierie, S2Sq1)

Dans les deux premiers calculs, 437 – 5 et 321-5 (respectivement les deux derniers 269 – 8 et 342 – 8) la redondance de la tâche *soustraire 5* (respectivement *soustraire 8*) est « choisie » pour revenir indirectement sur les conditions d'application de τ_{1010} . Dans les calculs suivants, l'objectif est d'introduire τ_{N10C} et de s'entraîner à l'utiliser tout comme τ_{A10} , (τ_{1010})' et τ_{1010} en explicitant les éléments de technologie se référant à Θ_D ou Θ_{DD} au moyen des ostensifs introduits à la séance précédente.

b) Inventaire des techniques *a priori* et éléments de discours attendus

Les élèves qui utiliseront pour cette séance une technique basée sur le comptage, une représentation imagée de collection, une addition à trou ou l’algorithme de la soustraction posée seront sans doute moins nombreux. Davantage d’élèves chercheront à mettre en œuvre les techniques nouvelles, introduites préalablement¹⁵⁰, et se serviront des ostensifs introduits en S1Sq1 pour les décrire.

En résumé, pour le calcul de $325 - 9$, nous envisageons **trois techniques** répertoriées dans l’organisation mathématique de référence :

- L’élève soustrait 5 à 325 puis 4 à 320 (τ_{A10}).
- L’élève soustrait 10 à 325 puis ajoute 1 à 315 (τ_{N10C}).
- L’élève calcule $15 - 9$ et ajoute au résultat 310 (τ_{1010}).

Nous attendons deux discours pour inférer l’utilisation de τ_{N10C} :

- Sur la feuille, le calcul le calcul de $325 - 10$ est indiqué ainsi que celui de $315 + 1$.
- Sur la feuille, un schéma avec appui sur un axe est tracé. Deux bonds correspondants à -10 et $+1$ sont matérialisés.

Par conséquent, un calcul, même sous la forme de plusieurs égalités erronées en chaîne ($325 - 9 = 325 - 10 = 315 + 1 = 316$) ou montrant deux calculs intermédiaires décrits sur la droite numérique (l’un correspondant à moins dix et l’autre à plus un), permet d’inférer l’utilisation de τ_{N10C} .

c) Construction du bloc technologique-théorique relevant de τ_{N10C}

Les éléments retenus ont été communiqués aux enseignants des classes A et B dans la proposition de scénario relative à la séquence 1. Nous les avons reprographiés en figure 6.3

<p>règle</p> <p>Justification avec décomposition</p> <p>Illustration avec DNV</p>	<p>3) Troisième calcul 325-9</p> <p>Pour soustraire 9, on soustrait 10 et on ajoute 1 au résultat.</p> $325-9=325-10+1$ $=315+1$ $=316$
--	--

Figure 6.3 : extrait des éléments relevant de Θ_D (Ingénierie, S2Sq1)

¹⁵⁰ Certaines, vu que le répertoire soustractif et les compétences pour décomposer les nombres sont à cette période de l’année à consolider, risquent de ne pas être maîtrisées et d’entraîner des erreurs de calcul, d’où la nécessité de les travailler.

Pour conclure sur le travail proposé en S1Sq1 et S1q2, nous souhaitons que dans un travail de co-construction avec l'enseignant, à partir d'un enchaînement de séries de calculs bien choisis, l'élève enrichisse son répertoire de techniques. Notre intention est de l'amener à être capable, de façon réfléchie, en fonction du calcul proposé, à choisir et appliquer correctement l'une d'entre elles. Ce travail, ponctué de moments d'institutionnalisation locale et d'évaluation, est poursuivi sur une, voire deux séances (cf. scénario de S3Sq1 proposées en annexe D.1.2).

III.2. Séquence relevant de $T_{a-\square 0}$ (Sq2)

Cette séquence (Sq2) sollicite le répertoire de techniques soustractives élaboré en séquence Sq1 et une connaissance approfondie des règles de formation et d'écriture du système de numération parlée et du système de numération décimale. En effet, le fait d'arriver à calculer mentalement $43-6$ ne garantit pas le fait d'arriver à calculer $430-60$, et, pour finir, $435-60$. Pour effectuer le dernier calcul, l'élève est amené éventuellement à effectuer des tâches de troncature et de conversion d'unités en dizaines d'unités, avant même d'appliquer une technique de calcul soustractive.

Nous avons découpé cette séquence en trois séances :

- ✓ la particularité des séances 1 et 2 est de s'intéresser au calcul de $a - b$, avec a et b deux multiples de dix¹⁵¹, et de programmer une *reprise*, au sens de Larguier (2009), de ce type de tâches.
- ✓ à l'inverse dans la séance 3, le nombre auquel on soustrait n'est pas nécessairement un multiple de dix¹⁵².

III.2.1. Description et analyse de la reprise de $T_{\square\square 0-\square 0}$

Pour chaque séance, les modalités retenues sont celles choisies pour étudier le type de tâches $T_{a-\square}$, présentées au paragraphe III.1. Nous exposons rapidement les calculs relatifs à S1Sq2, avant d'exposer les techniques *a priori* et les discours attendus.

¹⁵¹ A l'écrit, le format du calcul est $\square\square 0-\square 0$.

¹⁵² A l'écrit, le format du calcul est $\square\square\square-\square 0$.

a) Nature des calculs en jeu

50 – 10
100 – 10
310 – 10
240 – 10
520 – 20
70 – 50
180 – 50
130 – 40
210 – 60
740 – 50
350 – 70
500 – 70

Tableau 6.10 : tâches de types $T_{a-\square 0}$ (Ingénierie, S1Sq2)

Les calculs n°1, n°2 et n°6 correspondent à des faits numériques connus. D'autres peuvent se ramener directement à des faits numériques connus, en décomposant le nombre auquel on soustrait en un multiple de cent plus un multiple de dix (calculs n°3, n°4, n5 et n°7), ou en appliquant directement τ_{1010} . Le calcul n°12 peut se rapprocher de cette catégorie car il suffit de décomposer 500 en $400 + 100$ ou d'appliquer $(\tau_{1010})'$ pour trouver le résultat. Les calculs n°8, n°9, n°10 et n°11 sont plus difficiles à effectuer¹⁵³. Nous présentons pour l'un d'entre eux, $350 - 70$, les techniques *a priori* et les discours permettant d'inférer ces techniques.

b) Inventaire des techniques *a priori*

• Pour le calcul de $350 - 70$

Cinq techniques sont répertoriées dans l'organisation mathématique de référence :

- L'élève calcule $350 - 50 - 20$ (τ_{A10}).
- L'élève calcule $350 - 100 + 30$ (τ_{N10C}).
- L'élève cherche le complément de 70 à 350 ($\tau_{\text{SOUS/ADD}}$).
- L'élève convertit 350 et 70 en dizaines d'unités et calcule $35 - 7$ (τ_{CONV}).
- L'élève calcule $150 - 70$ et ajoute au résultat 200 ($(\tau_{1010})'$).

Deux autres techniques sont envisageables. La deuxième mène à un résultat erroné.

- L'élève décompte de dix en dix, sept fois, à partir de 350.
- L'élève calcule $7 - 5$ et en déduit que le résultat est 320 (abus de τ_{1010}).

¹⁵³ le chiffre des dizaines du nombre à soustraire étant inférieur au chiffre des dizaines du nombre auquel on soustrait.

c) Éléments de discours attendus

- *Pour inférer l'utilisation de τ_{CONV} (calcul 350 – 70)*
 - Sur la feuille, le calcul de 35–7 est indiqué.
 - Sur la feuille, il est fait allusion au chiffre des dizaines, le mot est employé ou le symbole d est noté.

Nous supposons par conséquent que l'élève peut indiquer sur sa feuille un calcul de type $T_{a-\square}$ sans mentionner le fait qu'il a converti au préalable des unités en dizaines d'unités.

d) Construction du bloc technologico-théorique relevant de τ_{CONV}

Les éléments retenus ont été communiqués aux enseignants des classes A et B dans la proposition de scénario relative à la séquence2 (Sq2). Nous avons reprographié un extrait en figure 6. 4.

Règle	3) 350–70 ? correction avec règle formulée par écrit illustration avec DVN et justifications.	
	Je calcule 350–50 et Je soustrais encore 20 au résultat	Je calcule 35d–7d. Je convertis le résultat en unités.

Figure 6.4 : extrait des éléments relevant de τ_{CONV} (Ingénierie, S1Sq2)

Pour conclure, cette séance (S1Sq2) ainsi que la suivante¹⁵⁴ (S2Sq2) vont permettre d'élaborer la technique τ_{CONV} qui consiste à effectuer une tâche du type $T_{a-\square}$ pour effectuer une tâche du type $T_{\square\square 0-\square 0}$. Nous proposons dans le paragraphe suivant l'analyse *a priori* de la troisième séance .

III.2.2. Description et analyse de la rencontre avec $T_{\square\square\square-\square 0}$

Dans ces trois séries de quatre calculs, nous avons regroupé (et entouré) les calculs pour lesquels le chiffre des dizaines du nombre auquel on soustrait est supérieur au chiffre des dizaines du nombre que l'on soustrait. Ci-après, nous étudions les techniques *a priori* en fonction de cette variable didactique.

¹⁵⁴ Le scénario relatif à cette séance est en annexe D.2.1.

352 – 10	352 – 10
423 – 20	423 – 20
261 – 40	261 – 40
125 – 30	125 – 30
137 – 50	137 – 50
418 – 20	418 – 20
531 – 50	531 – 50
241 – 30	241 – 30
357 – 50	357 – 50
324 – 90	324 – 90
121 – 40	121 – 40
328 – 30	328 – 30

Tableau 6.11 : tâches relatives à T_{a-c0} (Ingénierie, S3Sq2)

a) Assortiment et inventaire des techniques *a priori*

- *Pour le calcul n°3 : 261–40 (et les calculs n°1, n°2, n°8 et n°9)*

- L'élève calcule $61 - 40$ et ajoute à ce résultat 200.
- L'élève calcule $260 - 40$ et ajoute à ce résultat 1.
- L'élève calcule $6 - 4$ dizaines et laisse inchangés les chiffres des centaines et des unités.
- L'élève calcule $26 - 4$, puis convertit ce nombre de dizaines en unités avant d'ajouter au résultat 1.

Toutes ces techniques s'appuient sur la technologie savante Θ_{DD} . Pour les justifier, nous décomposons 261 de différentes manières en utilisant les écritures chiffrées ou les unités de numération avant de réécrire le calcul :

- $261 - 40 = 200 + 61 - 40 = 200 + 21 = 221$
- $261 - 40 = 260 + 1 - 40 = 260 - 40 + 1 = 220 + 1 = 221$
- $261 - 40 = 2c + 6d + u - 4d = 2c + (6 - 4)d + u = 2c + 2d + u = 221$
- $261 - 40 = 26d + u - 4d = (26 - 4)d + u = 22d + u = 221$

- *Pour le calcul n°4 : 125–30 (et les calculs n°5, n°6, n°7 et n°12)*

- L'élève calcule $125 - 25 - 5$.
- L'élève calcule $125 - 20 - 10$.
- L'élève calcule $12 - 3$, puis convertit ce nombre de dizaines en unités avant d'ajouter au résultat 5.

Le premier et le second calcul correspondent à la mise en œuvre de la technique τ_{A10} , à partir d'un nombre pivot différent (100 respectivement 105)¹⁵⁵.

¹⁵⁵ Dans le premier cas, le nombre pivot correspond à la centaine entière du nombre auquel on soustrait. Dans le second cas, le nombre à soustraire est décomposé en une somme de multiples de dix.

Le troisième calcul $12 - 3$ correspond à la différence du nombre de dizaines d'unités de 125 et du nombre de dizaines d'unités de 30.

b) Éléments de discours associés au calcul de $125 - 30$

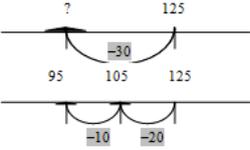
4) 125-30 ? Exploration

→ Les élèves ont calculé $125-25$ et ont soustrait 5 au résultat. On peut amorcer une justification avec décomposition :

$$125-30=125-25-5$$

$$=100-5$$

→ Les élèves ont calculé $125-20$ et ont soustrait 10 au résultat. On peut proposer une justification avec décomposition ou avec DNV



→ Les élèves ont calculé $12-3$ et ajouté 5 à 90. On peut proposer une justification en utilisant les écritures de numération

$$125-30=12d+5u-3d$$

$$=9d+5u$$

Figure 6.5 : extrait des éléments relatifs au calcul de $125-30$ (Ingénierie, S3Sq2)

En conclusion, pour effectuer une tâche du type $T_{a-\square}$, il est possible de convertir les deux nombres en dizaines d'unités afin de se ramener à une tâche du type $T_{a-\square}$, ou de réécrire le calcul en décomposant additivement le premier terme ou le second terme du calcul. Suivant le calcul en jeu et les propositions des élèves, une voire deux techniques¹⁵⁶ peuvent être expliquées et justifiées, en utilisant l'un des ostensifs introduits dès la première séance de l'ingénierie. Le travail proposé sur les deux premières séquences, vise à ce que l'élève mobilise un répertoire de techniques soustractives pour effectuer des tâches de plus en plus complexes, *soustraire un nombre à un chiffre, soustraire un multiple de dix*, afin d'acquérir des automatismes, de la flexibilité et une habileté calculatoire.

III.3. Séquence relevant de $T_{\text{Prod.Cal.}}$ (Sq3)

Dans cette séquence qui relève d'un *moment de reprise* au sens de Larguier¹⁵⁷ (2009), vu que les élèves ont déjà été amenés en CE1 (cf. étude conduite au chapitre 4) à *produire des calculs* pour résoudre des problèmes additifs, nous présentons un problème de comparaison au sens de Vergnaud (1990) pour amener *une nouvelle mise en scène des savoirs*

¹⁵⁶ Balayer l'ensemble des propositions pour chaque calcul, nous semble trop chronophage et contre-productif.

¹⁵⁷ « Lorsqu'un thème du numérique a déjà été en partie enseigné, soit au collège soit lors d'une rencontre précédente en seconde, j'appelle reprise du numérique le moment de l'enseignement où ce thème, ou bien des sujets liés à ce thème, interviennent de nouveau et sont actualisés dans des thèmes de l'enseignement de cette classe. La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés auparavant. » (Larguier, 2009, p.31).

institutionnalisés auparavant autour de τ_{a-b} et $\tau_{a+?} = b$ Nous nous appuyons sur les connaissances préalables des élèves pour construire le bloc théorique relatif à $\Theta_{ADD/SOUS}$. Le contexte proposé, mesure de longueur, est choisi pour induire l'utilisation de l'ostensif *droite numérique*¹⁵⁸ afin de visualiser l'écart entre deux nombres (cf. chapitre 2).

III.3.1. Description et analyse de la reprise de $T_{Prod.Cal}$.

Le problème proposé est construit à partir d'un énoncé extrait d'*Euro Maths* CE1 (2001) présenté et analysé au chapitre 5. Les données numériques ont été modifiées pour que l'effectuation des calculs soustractifs ne soit pas un obstacle et que les élèves soient amenés à utiliser les techniques étudiées en Sq2.

Les objectifs poursuivis s'apparentent à ceux formulés par les auteurs d'*Euro Maths*¹⁵⁹. Plus précisément, le savoir visé renvoie à la technologie $\Theta_{ADD/SOUS}$: en effet, nous cherchons à établir qu'il est équivalent de rechercher le complément de a à b ou de rechercher la différence entre b et a.

a) Énoncé du problème et techniques *a priori*



Le saut de Marie mesure 40cm de plus que celui de Nicolas. Celui de Jeanne mesure 50cm de moins que celui de Thomas. Audrey saute 30cm de moins que Jeanne.

Questions

- 1) Complète le tableau avec les informations.
- 2) Quel est l'écart entre le saut d'Audrey et le saut de Thomas ?
- 3) Quel est l'écart entre le saut de José et le saut de Thomas ?

Figure 6.6 : problème relatif à $T_{Prod.Cal}$ (Ingénierie, S1Sq3)

¹⁵⁸ La DNV a été introduite auparavant pour illustrer les étapes d'un calcul soustractif.

¹⁵⁹ « *Se familiariser avec la notion d'écart, de différence, de distance dans différents contextes. Trouver des procédures pour calculer des écarts.* » (Livre du maître, *Euro maths* CE1, 2001, p.145)

Les trois premières tâches qui permettent de répondre à la première question consistent à rechercher, étant donné un référent 195 (respectivement 260 et 210) et une comparaison positive 40 (ou respectivement négative 50 et 30), à calculer l'autre référent.

Les deux autres tâches qui permettent de déterminer l'écart consistent à trouver les comparaisons entre deux nombres.

- **Pour calculer le saut de Marie**, l'élève produit l'écriture $195 + 40$.

L'élève peut poser l'addition en colonne ou en ligne, ou donner directement le résultat. Il peut aussi proposer un schéma avec appui sur la droite numérique.

- **Pour calculer le saut de Jeanne**, l'élève calcule $260 - 50$ ou cherche le complément de 50 à 260.

L'élève peut poser la soustraction ou l'addition à trou en colonne ou en ligne, ou donner directement le résultat. Il peut aussi proposer un schéma avec appui sur la droite numérique

- **Pour calculer le saut d'Audrey**, l'élève calcule $210 - 30$ ou cherche le complément de 30 à 210.

Les erreurs de calculs seront probablement plus nombreuses (franchissement de la centaine entière).

Les tâches relatives aux questions 2 et 3 consistent à rechercher, étant donné deux nombres 180 et 260 (respectivement 245 et 260), la valeur de la comparaison.

- **Pour calculer l'écart entre le saut d'Audrey et le saut de Thomas** L'élève calcule $260 - 180$ ou cherche le complément de 180 à 260. Là encore, l'élève peut poser la soustraction ou l'addition à trou en colonne ou en ligne ou donner directement le résultat. Il peut aussi décrire les calculs effectués sur la droite numérique.

- **Pour calculer l'écart entre le saut de José et de Thomas**, les calculs sont similaires.

b) Constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$

Selon les modalités prévues dans la proposition de scénario, les élèves vont résoudre le problème et présenter leurs recherches. Deux techniques, τ_{a-b} ou $\tau_{a+\dots=b}$ seront décrites et expliquées. Le fait de matérialiser le résultat sur un schéma avec appui sur une droite numérique pourrait favoriser le rapprochement entre ces deux techniques. L'ostensif droite numérique est un élément constitutif du bloc technologico-théorique relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$.

Nous reprographions ci-dessous l'extrait de la proposition de scénario communiqué aux enseignants :

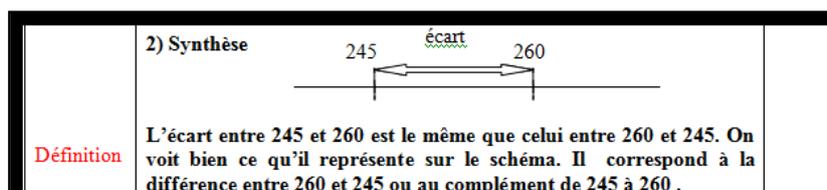


Figure 6.7 : extrait des éléments relevant de $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$ (Ingénierie, S1Sq3)

L'écart entre deux nombres est matérialisé par une double flèche¹⁶⁰. Le texte destiné aux enseignants suggère de mentionner oralement :

- que l'écart entre 245 et 260 est le même que celui entre 260 et 245, pour éviter que les élèves pensent qu'il y a un ordre d'énonciation à respecter.
- que l'écart correspond à la différence entre 260 et 245 ou au complément de 245 à 260.

III.3.2. Consolidation du bloc relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$

Pour poursuivre la construction du bloc technologico-théorique relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$, nous proposons un problème faisant intervenir deux comparaisons successives et relevant du même contexte que celui proposé en S1Sq3 :

*Le saut de A mesure a cm. Le saut de B mesure x cm de plus que celui de A.
Le saut de C mesure y cm de plus (respectivement y de moins que) le saut de B. Quel est l'écart entre le saut de A et celui de C ?*

De ce problème sont générés quatre énoncés¹⁶¹ qui prennent en compte la valeur de la comparaison entre le saut de C et le saut de B (positive ou négative), et les valeurs des variables didactiques correspondant aux nombres x et y .

Problème 1 : $a = 165$; $x = 40$ et $y = 60$	Le saut de A mesure a cm. Le saut de B mesure x cm de plus que celui de A. Le saut de C mesure y cm de plus que le saut de B. Quel est l'écart entre le saut de A et celui de C ?
Problème 2 : $a = 120$; $x = 80$ et $y = 60$ Problème 3 : $a = 155$; $x = 40$ et $y = 60$ Problème 4 : $a = 170$; $x = 60$ et $y = 60$	Le saut de A mesure a cm. Le saut de B mesure x cm de plus que celui de A. Le saut de C mesure y cm de moins que le saut de B. Quel est l'écart entre le saut de A et celui de C ?

Tableau 6.12 : problèmes relatifs à $T_{\text{Prod.Cal}}$ (Ingénierie, S2Sq3)

¹⁶⁰Ce code fait référence à la manière de coder des distances sur certains plans. Le fait que l'écart entre deux nombres corresponde à « une longueur » est d'ailleurs l'objet de Sq4.

¹⁶¹ Pour chaque énoncé, nous avons changé les prénoms des enfants qui correspondent à A, B et C et fait le choix de ne pas proposer d'illustration.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont se dire que pour trouver l'écart entre la longueur du saut de A et de celui de C, il faut connaître *a priori* la longueur des sauts de A et de C. La longueur du saut de A est une donnée de l'énoncé. La longueur du saut de C se déduit des données en chaîne du problème¹⁶².

Peu d'élèves vont sans doute directement chercher l'écart entre A et C, en effectuant une opération sur les écarts donnés dans l'énoncé, et produire les calculs suivants

Problème 1 : écart entre A et C : $40 + 60$

Problème 2 : écart entre A et C : $80 - 60$

Problème 3 : écart entre A et C : $60 - 40$

Problème 4 : écart entre A et C : $60 - 60$

Dans ces conditions, représenter les différentes longueurs de saut sur un schéma avec appui sur la droite numérique nous semble un bon levier pour rendre intelligible la technique qui permet de trouver l'écart, sans chercher à déterminer une mesure de saut intermédiaire. Nous avons intégré à cet effet le schéma que nous reproduisons en figure 6.8 dans la proposition de scénario donnée aux enseignants.

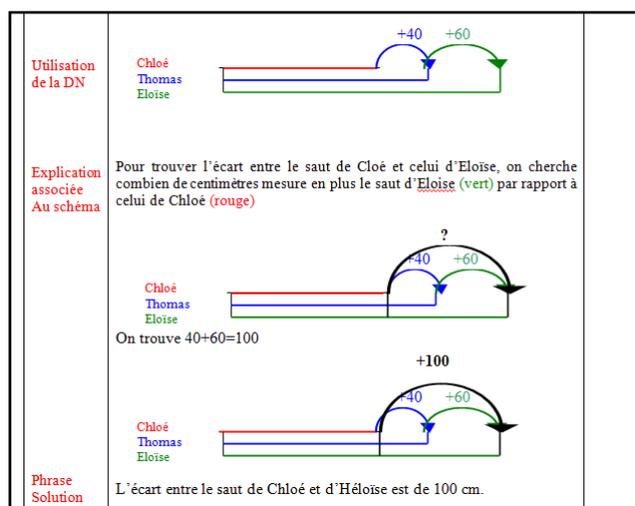


Figure 6.8 : extrait des éléments relevant de Θ ADD/SOUS (Ingénierie, S2Sq3)

Pour poursuivre ce travail dans la troisième et dernière séance de cette séquence (S3Sq3) dont le scénario est proposé en annexe D.3.1, nous avons donné quatre autres problèmes de comparaison, extraits d'*Euro Maths* CE1(2001) et *Outils pour les Maths* (2012), présentés et analysés en annexe D.3.2.

¹⁶² Ils vont donc être amenés à produire les calculs suivants

Problème 1 : longueur de C : $165 + 40 + 60$; écart entre A et C : $265 - 100$ ou $165 + \dots = 265$.

Problème 2 : longueur de C : $120 + 80 - 60$; écart entre A et C : $140 - 120$ ou $120 + \dots = 140$.

Problème 3 : longueur de C : $155 + 40 - 60$; écart entre A et C : $155 - 135$ ou $135 + \dots = 155$.

Problème 4 : longueur de C : $170 + 60 - 60$; écart entre A et C : $160 - 160$ ou $160 + \dots = 160$.

III.4. Séquence relevant de $T_{\text{Prod.Cal.Mes.}}$ (Sq4)

Dans cette séquence, la tâche principale¹⁶³ relève de la production de calculs (OM1). Nous mettons en œuvre la situation de *la règle cassée*, présentée et analysée dans le cadre de l'observation participative (cf. chapitre 4). Cette situation, dans un contexte de mesure *effective* de longueur, est prévue pour renforcer la construction du bloc théorique relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$ et pour créer des conditions favorables¹⁶⁴ à l'introduction de la propriété de conservation des écarts. Cette séquence est découpée en deux séances. La première séance (S1Sq1) est construite sur le même modèle que celle décrite et analysée au chapitre 4 (§ IV.1.3). Nous joignons en annexe D.4.1 la proposition de scénario donnée aux enseignants.

Dans la seconde séance (S2Sq4), nous donnons une règle cassée aux élèves pour mesurer la longueur de « vrais objets », tels qu'une pince à linge en plastique, une cartouche d'encre, un morceau de bambou.... Le fait de participer à un jeu d'équipe pour déterminer en un temps record le plus de réponses exactes devrait amener les élèves à effectuer et contrôler mentalement et rapidement¹⁶⁵ des tâches relevant de $T_{a-\square}$, en mettant en œuvre τ_{a-b} ou $\tau_{a+\dots=b}$ (cf. annexe D.4.1).

III.5. Séquence relevant de $T_{\text{Prod.Cal.Mes.}}$ et de T_{a-b} (Sq5)

Cette séquence vise à établir la propriété de conservation des écarts, dans le contexte de la mesure, et à montrer en quoi cette propriété est efficace pour effectuer certaines tâches de type $T_{a-\square}$. Elle est découpée en deux séances.

La première séance (S1Sq5) correspond au moment de *la première rencontre* avec la propriété. Elle est construite à partir de la situation *translation d'une bandelette*, proposée dans le cadre de l'observation participative des pratiques de l'enseignement ordinaire, présentée et analysée au chapitre 4 (cf. § : III.I.). Nous précisons dans le paragraphe suivant,

¹⁶³ Même si les deux autres organisations OM2 et OM3 vont être convoquées pour traduire l'énoncé, interpréter un schéma avec appui sur la droite numérique graduée et pour effectuer un calcul.

¹⁶⁴ Ces conditions sont décrites et analysées au chapitre 4 (§IV).

¹⁶⁵ En effet, les règles sont cassées à trois, huit ou neuf centimètres et les douze objets ont été choisis de telle sorte que leurs mesures influent sur les techniques :

- cinq objets ont une mesure inférieure à 5cm (à trois millimètres près)
- trois objets ont une mesure inférieure à 10cm (à trois millimètres près)
- deux objets ont une mesure respective de 17cm et de 22cm (à trois millimètres près)
- un objet (la cordelette) a une mesure de 35cm (à trois millimètres près).

les modifications apportées en vue de créer des conditions favorables à la construction du bloc technologico-théorique relatif à Θ_{AN} .

III.5.1. Première rencontre avec la conservation des écarts

a) Enoncé du problème

Chaque élève dispose d'une règle graduée en centimètres et de deux bandelettes A et B. Après avoir lu la consigne et échangé avec un camarade, il doit renseigner le tableau et interpréter les résultats qu'il obtient.

Complète le tableau de mesure qui correspond à la bandelette A que tu as :		
Je pose l'extrémité de la bandelette gauche sur la graduation.	Je lis le nombre qui correspond à la graduation de l'autre extrémité.	J'indique par un calcul soustractif la longueur de la bandelette.
8		
10		
20		

**Les trois calculs sont-ils égaux ?
Pourquoi ?**

Tableau 6.13: découverte de la propriété de conservation des écarts (Ingénierie, S1Sq5)

b) Techniques et éléments constitutifs du bloc relatif à Θ_{AN}

La majorité des élèves doit être capable de compléter le tableau correspondant à la bandelette A puis à la bandelette B¹⁶⁶, donc de produire après chaque mesurage, un calcul soustractif.¹⁶⁷ Afin d'éviter les problèmes de compréhension de consigne, la proposition de scénario (cf. annexe D.5.1) suggère de renseigner, en classe entière, les éléments de la première ligne. La plupart des élèves, pour pouvoir comparer les calculs, vont les effectuer. Il est cependant attendu que certains élèves justifient l'égalité en évoquant le fait que la même bandelette a simplement été mesurée après avoir été posée à différents endroits de la règle graduée. Pour appuyer cet argument, nous suggérons de refaire la manipulation (avec ou sans tableau interactif), de l'illustrer avec un schéma avec appui sur la droite numérique graduée, puis de réécrire les calculs (tâche propre à OM4).

¹⁶⁶ Pour la bandelette B, les nombres correspondants aux graduations de gauche sont volontairement choisis dans l'ordre décroissant.

¹⁶⁷ Cette compétence ayant été travaillée et évaluée au cours de S1Sq4 et S2Sq4.

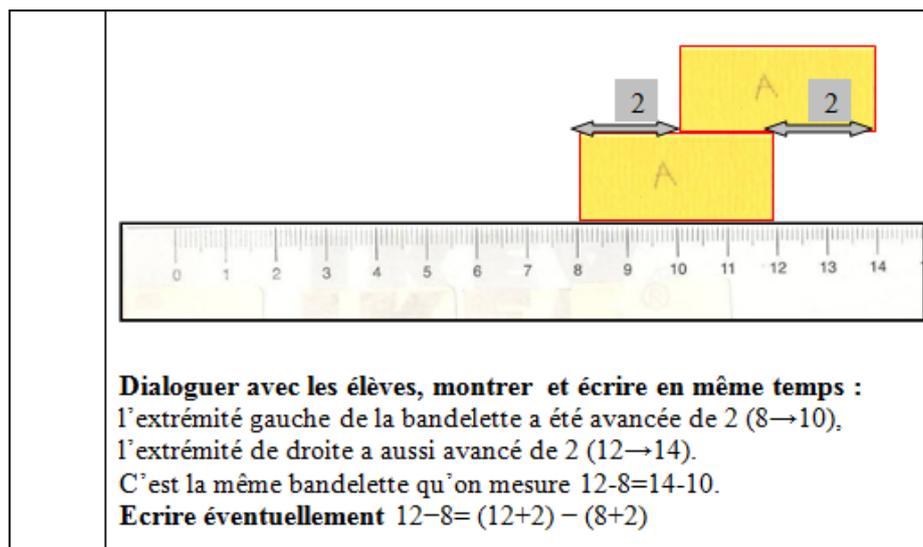


Figure 6.9: extrait des éléments relevant de Θ_{AN} (Ingénierie, S1Sq5)

Après avoir contrôlé les mesures de la bandelette B, constaté l'égalité des calculs et argumenté en translatant la bandelette, nous formulons la propriété relative à la propriété de conservation des écarts (cf. annexe D.5.1). Pour créer des conditions¹⁶⁸ qui vont permettre aux élèves de mettre en œuvre cette propriété et motiver son utilisation, nous engageons alors un travail sur les équivalences d'écritures arithmétiques.

c) Travail sur les équivalences d'écritures arithmétiques

La tâche est présentée collectivement avant d'être proposée par groupe de deux. Une différence, en l'occurrence $53 - 18$, est inscrite sur une étiquette¹⁶⁹ et affichée au tableau. D'autres différences, $43 - 8$, $53 - 20$, $55 - 20$ sont données une à une. La tâche consiste à les comparer à $53 - 18$ ¹⁷⁰ et à justifier la réponse apportée.

Pour conclure, trier parmi plusieurs différences choisies¹⁷¹ celles qui sont égales amène à comparer terme à terme les nombres considérés et à énoncer la propriété de conservation des écarts (la différence entre deux termes est inchangée si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chacun des deux termes). C'est également un bon moyen de repérer celle(s) de ces différences qui sont plus économiques que d'autres quand il s'agit d'effectuer le calcul. L'objectif de la seconde séance (S2Sq5) s'inscrit dans la continuité car

¹⁶⁸ Lors des expérimentations dans le cadre des observations participatives, aucune tâche propre à OM4 n'avait été donnée aux élèves.

¹⁶⁹ L'étiquette est sur fond coloré et disposée dans un cadre.

¹⁷⁰ En cas d'égalité, elles sont placées dans le même cadre que $53 - 18$.

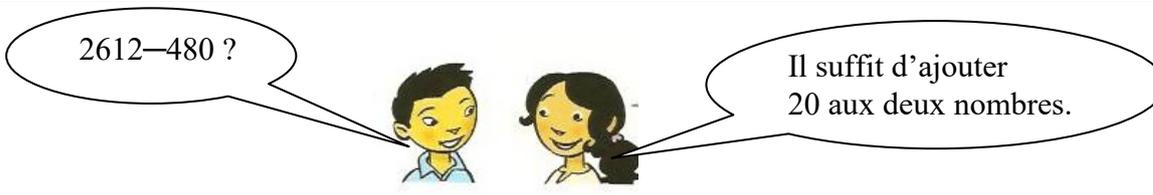
¹⁷¹ L'exercice proposé à la suite est construit en partant de la différence $37 - 29$. Il est présentée en annexe D.5.2.

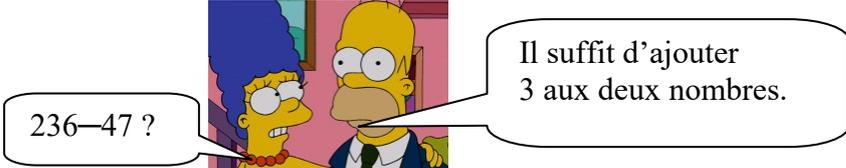
ce n'est plus une tâche d'association mais de transformation d'écritures arithmétiques qui est demandée (tâche propre à OM4).

III.5.2. Construction du bloc technologico-théorique relevant de τ_{AN}

Comme annoncé à la fin du paragraphe précédent, l'élève doit réécrire un calcul soustractif en ajoutant (respectivement soustrayant) le même nombre aux deux termes avec l'objectif de rendre celui-ci plus facile à effectuer. Pour motiver, décrire et expliquer la technique τ_{AN} nous nous sommes inspirée de la situation de découverte donnée par les auteurs d'*Euro-Maths* CE2 (2010) présentée à la figure 5.17. Nous présentons et analysons la proposition retenue dans le scénario distribué aux enseignants (cf. annexe D.5.1).

- *Enoncé introductif à la mise en œuvre de τ_{AN}*


<p>1) Pourquoi Alice choisit-elle d'ajouter 20 aux deux nombres pour calculer plus facilement 2612-480 ? 2) Utilise la remarque d'Alice pour trouver le résultat de 2612-480.</p>

<p>1) Pourquoi Thomas choisit-il de soustraire 1 aux deux nombres pour calculer plus facilement 147-21 ? 2) Utilise la remarque de Thomas pour trouver le résultat de 147-21.</p>

<p>1) Pourquoi Simpson choisit-il d'ajouter 3 aux deux nombres pour calculer plus facilement 236-47 ? 2) Utilise la remarque de Simpson pour trouver le résultat de 236-47.</p>

<p>1) Pourquoi Maeva choisit-elle d'ajouter 1 aux deux nombres pour calculer plus facilement 216-89 ? 2) Utilise la remarque de Maeva pour trouver le résultat de 216-89.</p>

Tableau 6.14: tâches introductives à la mise en œuvre de τ_{AN} pour effectuer $a - b$ (Ingénierie, S2Sq5)

Les vignettes sont projetées une à une. Entre deux projections, les élèves sont invités à répondre individuellement et par écrit aux deux questions posées.

- *Techniques a priori*

- La première question permet de repérer quels sont les élèves capables d'expliquer en quoi le fait d'ajouter ou de soustraire 20 (respectivement aux calculs 1 ou 3) permet en effet de calculer plus facilement. La réponse attendue sous-entend que *soustraire 500 (respectivement 20, 50 et 90)* revient à soustraire un nombre entier de dizaines.
- La seconde question permet de repérer les élèves qui appliquent correctement la propriété de conservation des écarts et calculent $2632 - 500$ et non $2612 - 500$ (respectivement $146 - 20$ et non $147 - 20$ ou $148 - 20$). Elle permet aussi de repérer ceux qui réécrivent les calculs et ceux qui donnent directement les résultats.

La phase de restitution et de synthèse permet de décrire, motiver et expliquer la technique τ_{AN} à partir de quatre calculs particuliers. L'élève va ensuite s'exercer en résolvant deux assortiments (cf. annexe.D.5.2). Pour le premier, la tâche consiste à trouver la valeur qu'il faut ajouter ou soustraire aux deux nombres. Le fait d'ajouter ou de soustraire est imposé¹⁷². Pour le second assortiment, la tâche consiste à réécrire le calcul en ligne puis à l'effectuer.

III.6. Séquence de calcul mental relevant de T_{a-b} (Sq6)

La séquence 6 est élaborée pour améliorer la fiabilité et l'efficacité des techniques et des technologies étudiées pour effectuer une tâche $T_{a-\square\square}$. Elle est découpée en deux séances. La première séance (S1Sq6) doit conduire à *faire le point sur ce que vaut ce qui a été appris*, pour reprendre les termes de Chevallard¹⁷³. Des tâches des types $T_{a-\square}$, $T_{a-\square 0}$ et $T_{a-\square\square}$ sont proposées. Les calculs donnés sont choisis pour revenir sur l'ensemble des techniques du répertoire et rappeler des résultats technologiques¹⁷⁴. Dans la seconde séance (S2Sq6), nous mettons en œuvre la situation *facile / pas facile*, présentée et analysée dans le cadre de

¹⁷² Exemple de consigne :

Calcul n°1 : 603-91 J'ai soustrait aux deux nombres.

¹⁷³ « En pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point » : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine ce que vaut ce qui a été appris, ce moment de vérification qui, malgré les souvenirs d'enfance n'est nullement une invention de l'École, participe en fait de la « respiration » même de toute activité humaine. » (Chevallard, 1999, p.255).

¹⁷⁴ Par résultats, nous entendons le mode d'emploi de la technique, une de ces illustrations avec appui sur la droite numérique, un moyen de l'expliquer par une réécriture de calculs.

l'observation des pratiques participatives (cf. chapitre 4 §IV.1.2). Nous ne revenons pas sur l'analyse *a priori* de ces deux séances. Nous joignons la proposition de scénario donnée aux enseignants en annexe D.6.1.

III.7. Séquence de calcul posé visant l'installation de τ_{ALG} (Sq7)

Cette séquence, la dernière de la programmation, vise à installer la technique de la soustraction posée qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts (τ_{ALG}). Nous présentons et donnons l'analyse *a priori* de la situation de découverte de τ_{ALG} et de la situation *calculateur/correcteur*, conçue pour amener les élèves à contrôler leurs résultats.

III.7.1. Analyse de la découverte de τ_{ALG}

Dans un premier temps, les élèves ont à effectuer individuellement, sur leurs ardoises, deux calculs notés en ligne 78 – 25 et 82 – 38. Nous faisons l'hypothèse, étant donné que l'objet de la séquence 6 était de s'entraîner à effectuer mentalement une tâche du type T_{a-b} , que l'ensemble des élèves arrivera à effectuer correctement le premier calcul en utilisant τ_{1010} (respectivement τ_{N10}). La plupart des élèves produira des discours faisant intervenir les écritures chiffrées ou des schémas avec droite numérique nous permettant d'inférer l'utilisation de l'une ou l'autre des techniques. Pour le second calcul, 38 étant choisi volontairement proche de 40, multiple de dix, nous nous attendons à ce que les techniques τ_{N10C} et τ_{AN} soient encore plus présentes que la technique τ_{N10} . Par ailleurs, nous espérons inférer leur présence grâce à des égalités du type $82 - 38 = 84 - 40$ (respectivement $82 - 38 = 82 - 40 + 2$).

Dans un second temps, après avoir recensé les différentes techniques dans un tableau, l'objectif de la séance est annoncé. Il s'agit d'apprendre à poser ces deux calculs en colonne. Le mode d'emploi de la technique de la soustraction posée sans retenue est alors donné (cf. proposition de scénario présenté en annexe D.7.1) et le lien entre cette technique et τ_{1010} est explicité. Une même approche conduit à donner le mode d'emploi de la technique de la soustraction posée avec retenue (cf. figure 6.12) et à expliciter le lien entre τ_{ALG} et τ_{AN} .

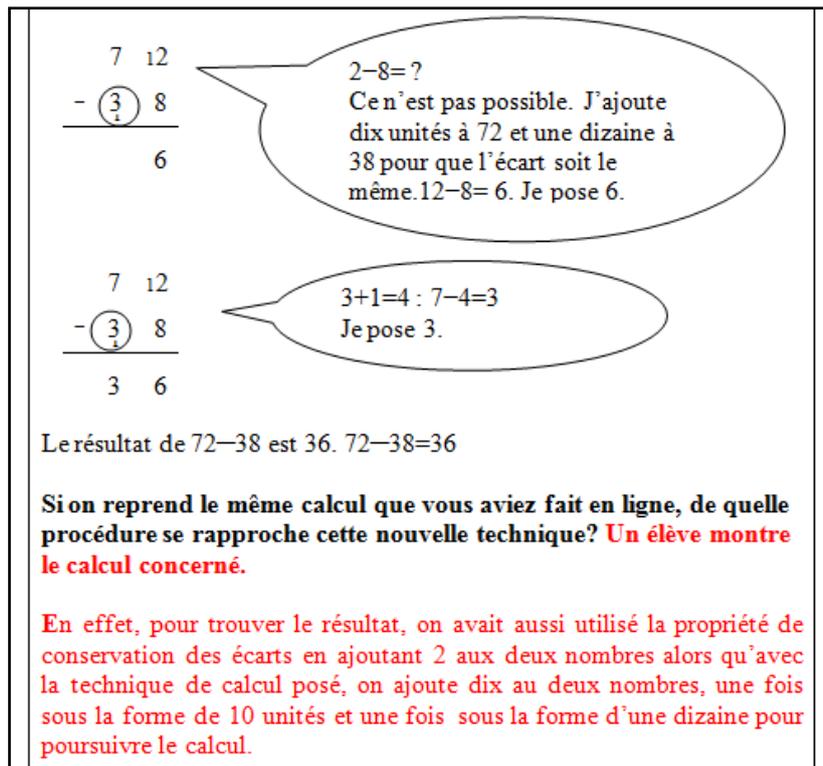


Figure 6.9: mode d'emploi de τ_{ALG} et lien avec τ_{AN} (Ingénierie, S1Sq7)

Dans l'approche que nous avons choisie, le fait qu'on puisse ajouter un autre nombre, *dix*, que le nombre *deux* aux deux termes de la différence ne devrait pas poser de difficulté¹⁷⁵. En revanche, la raison pour laquelle, *dix* a été choisi (et non pas *deux*, *trois*, *quatre*, ...) est liée au principe de position de la numération décimale. Une première retenue permet de marquer le *dix* qu'on ajoute au premier terme dans la colonne de droite. Une seconde retenue permet de marquer le *dix* qu'on ajoute au second terme dans la colonne qui précède celle de droite. La raison de choisir *dix* est de faciliter la mise en œuvre de la technique, en automatisant un geste. Placer 1 en haut devant le chiffre des unités de rang n , et 1 en bas sous le chiffre des unités de rang $n+1$ quels que soient les deux nombres en jeu, est un ostensif qui tente de conserver la mémoire de la technologie.

Dans la continuité, nous avons programmé un moment de travail de la technique en donnant à effectuer des soustractions¹⁷⁶ où les retenues pouvaient désigner *cent*. Nous avons

¹⁷⁵ La technique τ_{AN} est *a priori* installée. Beaucoup de calculs ont été effectués et les élèves, par expérience, savent qu'on peut ajouter ou soustraire le même nombre à une différence pour effectuer avec plus de « facilité » le calcul.

¹⁷⁶ Cinq soustractions sans (respectivement avec) retenues : $83 - 56$; $453 - 56$; $453 - 125$; $178 - 65$; $362 - 137$; et $132 - 27$; $495 - 257$; $157 - 73$; $423 - 351$; $504 - 42$. Nous revenons au paragraphe suivant sur les erreurs possibles.

amené les élèves à contrôler leurs résultats. Rechercher l'ordre de grandeur du résultat avant même d'effectuer le calcul est une proposition intéressante quand les nombres du calcul soustractif s'y prêtent¹⁷⁷. Vérifier par un calcul additif présente, en contre partie, l'avantage d'être fiable à ce niveau de scolarité.¹⁷⁸ Reste cependant à s'assurer que l'élève va poser le calcul additif attendu. En ce sens, l'utilisation de la droite numérique¹⁷⁹, nous semble pertinent pour illustrer l'équivalence entre $b + c = a$ et $a - b = c$.

III.7.2. Analyse de la situation *calculateur/ correcteur*

L'enjeu de la situation est de vérifier l'usage de la technique τ_{ALG} et de sa technologie. L'élève, en jouant tour à tour le rôle de calculateur et d'évaluateur, devrait améliorer sa propre maîtrise de τ_{ALG} . Dans un premier temps il reçoit une vignette¹⁸⁰ correspondant au calcul n°1, $491 - 108$ ou au calcul n°2, $451 - 38$.

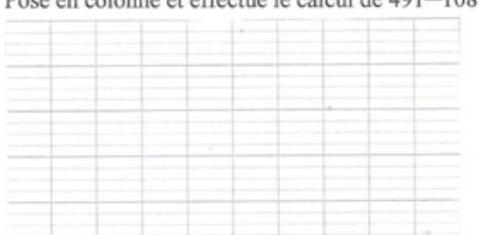
<p>Pose en colonne et effectue le calcul de $491-108$</p> 	<p>Pose en colonne et effectue le calcul de $451-38$</p> 
Calcul n°1	Calcul n°2

Tableau 6.15: exemples de calcul à effectuer avec τ_{ALG} (Ingénierie, S2Sq5)

- *Nature des calculs en jeu*

- Le chiffre des unités du nombre que l'on soustrait est supérieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. Le calcul posé avec τ_{ALG} nécessite la présence de deux retenues placées par convention à gauche du chiffre des unités du premier nombre auquel on soustrait, et sous le chiffre des dizaines du nombre à soustraire.
- La somme du chiffre des dizaines plus un est inférieure au chiffre des centaines du nombre à soustraire. D'autres retenues ne sont pas nécessaires.

¹⁷⁷Cette recherche peut s'avérer difficile à ce niveau de scolarité (trouver deux arrondis et soustraire mentalement).

¹⁷⁸ La technique de l'addition posée étant généralement maîtrisée par la majorité des élèves.

¹⁷⁹ La droite numérique est un élément constitutif du bloc relatif à $\Theta_{ADD/SOUS}$ introduit en séquence 3.

¹⁸⁰ Les calculs sont inscrits sur des vignettes avec du papier quadrillé pour permettre à l'élève de poser plus facilement l'opération en colonne. Ces vignettes seront ensuite collées sur une fiche correctrice.

- *Erreurs envisageables en lien avec la technologie non correctement utilisée*

- Pour le calcul n°2 : les chiffres de même rang ne sont pas alignés les uns sous les autres.
- Pour les deux calculs : l'élève trouve 7 comme chiffre des unités du résultat. Il effectue le calcul dans le sens où c'est possible : $8-1 = 7$ et n'inscrit pas de retenues.
- Pour les deux calculs : l'élève note une seule retenue affectée au chiffre des unités du nombre auquel il soustrait. Le chiffre des dizaines du résultat est faux.
- Pour les deux calculs : l'élève note correctement les deux retenues, mais il ne les intègre pas dans son calcul.
- Pour les deux calculs : l'élève note correctement les deux retenues, mais il n'en intègre qu'une correctement. C'est surtout celle qui est posée dans la colonne des dizaines qui risque de poser problème. L'élève peut l'oublier ou ajouter 1 au chiffre des dizaines du premier nombre.
- Pour les deux calculs : l'élève note correctement les deux retenues. Il les intègre correctement, mais il ne maîtrise pas le répertoire soustractif et commet une erreur de calcul.
- Pour le calcul n°2 : l'élève trouve pour résultat un nombre à deux chiffres. Il ne termine pas son calcul.

- *Présentation de la fiche corrective*

La fiche est reproduite dans le tableau 6.16 (page suivante). Nous précisons que le correcteur n'a pas effectué au préalable le calcul qu'il doit corriger. Il vient juste d'effectuer un calcul de même type. Notre objectif est ainsi de l'amener, en lui donnant à analyser une production qui n'est pas la sienne, à adopter une démarche réflexive sur son propre travail. Il va être amené à trouver un ordre de grandeur, lire et interpréter le mode d'emploi de la technique τ_{ALG} , contrôler le résultat en posant une addition.

- *Recherche de l'ordre de grandeur du résultat*

Le nombre auquel on soustrait est de la forme $\square\square 1$, pour faciliter la recherche d'un arrondi. Le nombre que l'on soustrait a son chiffre des unités égal à 8, pour que l'arrondi soit la dizaine entière supérieure. La recherche se ramène à effectuer un calcul relativement simple de la forme $\square\square 0 - \square 0$. Nous faisons l'hypothèse que peu d'élèves vont répondre à cette question. Beaucoup d'élèves, parmi ceux qui répondent, vont plutôt effectuer le calcul en ligne (presque par habitude).

Nom du calculeur : Nom du correcteur :																	
Colle la vignette que vient de te donner ton camarade dans cette case.	Donne un ordre de grandeur du calcul soustractif effectué par ton camarade :																
Complète la fiche en mettant pour chaque item « 1 » s'il n'y a pas d'erreurs et « 0 » sinon																	
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Le nombre le plus grand est écrit en premier</td> <td style="width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Le signe – est bien placé</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Les chiffres des unités sont alignés sous les chiffres des unités, les chiffres des dizaines sous les dizaines, les chiffres des centaines sous les centaines.....</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">La présence des retenues se justifie</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Les retenues sont bien placées</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Le chiffre des unités du résultat est juste</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Le chiffre des dizaines du résultat est juste</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Le chiffre des centaines du résultat est juste</td> <td></td> </tr> </table>		Le nombre le plus grand est écrit en premier		Le signe – est bien placé		Les chiffres des unités sont alignés sous les chiffres des unités, les chiffres des dizaines sous les dizaines, les chiffres des centaines sous les centaines.....		La présence des retenues se justifie		Les retenues sont bien placées		Le chiffre des unités du résultat est juste		Le chiffre des dizaines du résultat est juste		Le chiffre des centaines du résultat est juste	
Le nombre le plus grand est écrit en premier																	
Le signe – est bien placé																	
Les chiffres des unités sont alignés sous les chiffres des unités, les chiffres des dizaines sous les dizaines, les chiffres des centaines sous les centaines.....																	
La présence des retenues se justifie																	
Les retenues sont bien placées																	
Le chiffre des unités du résultat est juste																	
Le chiffre des dizaines du résultat est juste																	
Le chiffre des centaines du résultat est juste																	
Pose une addition pour vérifier le résultat																	
Le résultat du camarade est-il juste ou faux ?																	

Tableau 6.16 : fiche correctrice pour une soustraction posée en colonne, effectuée avec τ_{ALG} (ingénierie, S2Sq5)

- *Mode d'emploi de la technique*

Certains élèves risquent de ne pas comprendre la façon de coder les réponses. Certains risquent d'être pointilleux sur la place du signe moins (trop à gauche, non écrit sur la seconde ligne du calcul), sur l'alignement des chiffres des unités, des dizaines ou des centaines (exactement au dessous les uns des autres). La question relative à la présence et à la place des retenues est probablement difficile à interpréter. Les questions sur les calculs des chiffres des unités, dizaines et centaines seront bien comprises et montreront si le correcteur sait lui-même mobiliser les répertoires soustractifs.

- *Contrôle du résultat*

Certains élèves risquent d'ajouter les deux nombres du calcul initial ou de soustraire au premier nombre le résultat de la soustraction. Beaucoup vont poser le calcul attendu et vont l'effectuer correctement. Pour conclure, la situation *calculateur/correcteur* permet de revenir sur les différentes fonctions de la technologie et prépare à un travail d'autocorrection que tout calculateur doit théoriquement mené.

IV. Présentation de l'évaluation finale (EF)

L'évaluation finale (EF) est conçue pour comparer les techniques et les éléments de technologie présents avant et après expérimentation pour effectuer des types de tâches du type $T_{a-\square}$, $T_{a-\square 0}$, T_{a-b} et $T_{\text{Pro.Cal}}$. En étudiant les calculs intermédiaires, les calculs réécrits, les schémas avec appui sur la droite numérique vide, elle devrait permettre d'identifier les techniques mobilisées par les élèves pour effectuer tel ou tel calcul et de mesurer l'étendue des blocs technologico-théoriques. Elle donnera également la possibilité de savoir, quelle(s) technique(s) enseignée(s) reste(nt) peu utilisée(s) par une majorité d'élèves.

Les calculs posés devraient être mieux réussis et effectués avec τ_{ALG} . Rappelons qu'au moment de l'évaluation diagnostique, les élèves étaient censés connaître une technique de calcul posé, étudié en CE1, mais que les enseignants n'avaient pas re-convoqué ce type de tâches. Plusieurs questions visent aussi à évaluer la présence d'éléments théoriques se référant à Θ_{AN} . Contrairement à l'évaluation diagnostique, nous ne cherchons pas à connaître la manière dont les élèves modélisent un problème de comparaison additive, au sens de Vergnaud (1990), hors contexte de la mesure. Notre choix correspond à la recherche de la mesure d'une bandelette après translation sur la droite numérique graduée.

IV.1. Exercices relatifs à $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$

Les deux premiers exercices correspondent au type de tâches *soustraire mentalement un nombre inférieur à dix et soustraire un multiple de dix*. *A priori*, les quatre premiers calculs devraient être réussis et les productions devraient montrer que les élèves ont abandonné les techniques basées sur le comptage. Les seconds calculs sont plus difficiles à effectuer, sauf si l'élève prend en compte la nature des nombres en jeu et utilise une technique adaptée.

<p><u>Exercice1</u> Effectue chaque calcul. Explique ta procédure :</p> <p>(a) 348 – 6 (b) 235 – 6 (c) 429 – 9 (d) 315 – 8</p>	<p><u>Exercice1</u> Techniques attendues : $\tau_{1010}, \tau_{A10}, (\tau_{1010})', \tau_{N10C}$ et τ_{AN}.</p> <p>Ostensifs : EC, EUN et DNV.</p> <p>Discours sous forme de réécriture de calculs ou de schéma avec appui sur la droite numérique.</p>
---	---

Tableau 6.17 : exercices relatifs à $T_{a-\square}$ (Ingénierie, EF)

<p><u>Exercice2</u> Effectue chaque calcul. Explique ta procédure :</p> <p>(a) 203 – 10 (b) 281 – 60 (c) 315 – 20 (d) 463 – 90</p>	<p><u>Exercice2</u> Techniques attendues : $\tau_{CONV}, \tau_{1010}, \tau_{A10}, (\tau_{1010})', \tau_{N10C}$ et τ_{AN}.</p> <p>Ostensifs : EC, EUN et DNV.</p> <p>Discours sous forme de réécriture de calculs ou de schéma avec appui sur la droite numérique.</p>
---	--

Tableau 6.18 : exercices relatifs à $T_{a-\square 0}$ (Ingénierie, EF)

IV.2. Exercices relatifs à T_{a-b}

Nous avons donné quatre calculs à effectuer en ligne (exercice 3) et cinq calculs (exercice 4 et 5)¹⁸¹ à effectuer en colonne. Les tâches proposées, même si elles sont peu nombreuses, devraient montrer que l'élève fait preuve d'adaptabilité en calcul mental. En calcul posé, les soustractions avec retenue devraient être mieux réussies que celles de l'évaluation diagnostique. L'élève doit être maintenant en mesure de vérifier l'exactitude de son résultat et de donner la signification des retenues, en lien avec le principe de position de la numération décimale et la propriété de conservation des écarts.

<p><u>Exercice3</u> Effectue chaque calcul. Explique ta procédure :</p> <p>(a) 67 – 43 (b) 83 – 24 (c) 63 – 17 (d) 31 – 29</p>	<p><u>Exercice1</u> Techniques attendues : $\tau_{1010}, \tau_{N10}, \tau_{A10}, (\tau_{1010})', \tau_{N10C}$ et τ_{AN}.</p> <p>Ostensifs : EC, EUN et DNV.</p> <p>Discours sous forme de réécriture de calculs ou de schéma avec appui sur la droite numérique.</p>
---	---

Tableau 6.19 : exercices relatifs à T_{a-b} (ingénierie, EF)

¹⁸¹ Dans le premier exercice, les trois opérations sont déjà posées en colonne, à l'inverse dans le second exercice, l'élève doit les poser avant de les effectuer.

<u>Exercice 4</u> (a)	(b)	(c)	<u>Exercice 4</u> <i>Techniques attendues</i> : τ_{ALG} .																																	
<table border="1"> <tr><td></td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>-</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		9	2	-	2	8				<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>7</td><td>7</td></tr> <tr><td>-</td><td></td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		1	7	7	-		3	4					<table border="1"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>-</td><td></td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		2	3	1	-		2	5					
	9	2																																		
-	2	8																																		
	1	7	7																																	
-		3	4																																	
	2	3	1																																	
-		2	5																																	

Tableau 6.19 bis : exercices relatifs à T_{a-b} (ingénierie, EF)

<u>Exercice 5</u> On considère le calcul 342 – 128 (a) Donne un ordre de grandeur du résultat (b) Pose la soustraction en colonne et effectue le calcul (c) Vérifie le calcul en posant une addition <u>Exercice 6</u> (a) Pose et effectue en colonne 172 – 45 . Quelle est la valeur de chaque retenue ? (b) Pose et effectue en colonne 418 – 153 . Quelle est la valeur de chaque retenue ?	<u>Exercice 5</u> <i>Techniques attendues</i> : (a) technique pour effectuer $T_{a-□0}$. (b) τ_{ALG} . (c) $\tau_{ADD/SOUS}$. <u>Exercice 6</u> <i>Technique attendue</i> : τ_{ALG} . <i>Élément théorique relatif à Θ_{AN}</i> : Signification des retenues suivant « leur place » dans l'opération posée.
---	---

Tableau 6.19.bis bis : exercices relatifs à T_{a-b} (ingénierie, EF)

IV.3. Exercices relatifs à $T_{Pro. Cal.}$

Pour le type de tâches $T_{Pro. Cal.}$, nous choisissons un problème inspiré de la situation *mesurer avec une règle cassée*. Pour déterminer la mesure de la bandelette, vu que sur le schéma l'axe n'est pas gradué, les élèves sont amenés à mobiliser un calcul soustractif ou à rechercher un complément. Pour rechercher la valeur de la graduation située sur la droite, après translation, ils peuvent appliquer directement la propriété de conservation des écarts ou utiliser la mesure qu'ils viennent de déterminer.

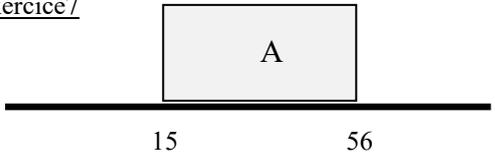
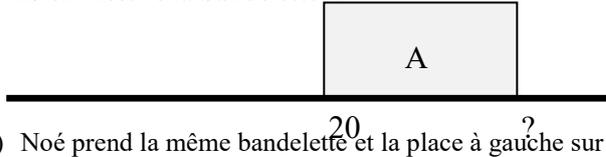
<u>Exercice 7</u>  (a) Océane mesure la bandelette A avec une règle cassée en centimètres. Elle lit les nombres 15 et 56. Combien mesure la bandelette A?  (b) Noé prend la même bandelette et la place à gauche sur la graduation 20. Combien va-t-il lire à droite, pourquoi ?	<u>Exercice 7</u> <i>Techniques attendues</i> : (a) $56 - 15$ ou $15 + \dots = 56$. La bandelette mesure 41cm. (b) L'élève utilise la valeur correspondant à la longueur de la bandelette et trouve 61 ($20 + 41 = 61$) ou L'élève lit la valeur de la translation cinq ($15 \rightarrow 20$) et translate le nombre 56 ($56 + 5 = 61$).
--	---

Tableau 6.20 : exercice relatifs à $T_{Pro. Cal.}$ (ingénierie, EF)

IV.4. Exercices relatifs à $T_{\text{Ass.}(cal./cal.)}$

En ce qui concerne le type de tâches $T_{\text{Ass.}(cal./cal.)}$ propre à OM4, nous donnons une tâche similaire à celle donnée en évaluation diagnostique (cf. : tableau 6.7) qui consiste à associer à une écriture du type $43 - 17$ une autre écriture arithmétique équivalente. Indirectement, nous serons en mesure, en fonction de l'écriture arithmétique choisie par l'élève, de repérer s'il associe cette tâche à τ_{AN} et repère la valeur ajoutée à chaque terme de la différence.

<p><u>Exercice 8</u> Choisis le calcul que tu vas faire pour trouver le résultat de $24-9$. Entoure-le.</p> <p style="text-align: center;">$43 - 17$</p> <ul style="list-style-type: none"> ● $243 - 217$ ● $40 - 14$ ● $43-18$ ● $46 - 20$ 	<p><u>Exercice 8</u> Technique attendue : le premier, le second et le quatrième choix laisse supposer que l'élève reconnaît τ_{AN}. Seul le dernier est vraiment économique.</p>
---	--

Tableau 6.21 : exercice relatif à $T_{\text{Ass.}(cal./cal.)}$ (ingénierie, EF)

V. Conclusion

L'ingénierie que nous proposons a été conçue à partir du modèle théorique défini au chapitre 3. Les observations non participatives et participatives, ainsi que l'étude des manuels conduite au chapitre 5, nous ont permis de définir des conditions assurant *a priori* la viabilité de l'ingénierie dans l'enseignement ordinaire.

L'ensemble des sept séquences de l'ingénierie devrait amener les élèves à décrire, expliquer, évaluer et justifier mathématiquement un ensemble de techniques de calcul soustractif sur les entiers naturels, en introduisant, entre autres, un travail régulier et progressif sur les écritures numériques. C'est avec cet objectif que nous mobilisons à chaque séquence d'enseignement, une organisation mathématique *principale* liée à la production ou à l'effectuation de calculs (OM1 ou OM3), et que nous sollicitons en *parallèle* un travail propre à la mise en relation de représentations sémiotiques ou de réécriture de calculs (OM2 et OM4).

Notre challenge est de proposer, dès la première séance de la première séquence un travail de réécriture de calculs en utilisant les décompositions des nombres et de présenter par la suite, presque systématiquement des séries de calculs, en adaptant les valeurs des variables didactiques pour que l'élève redécouvre, découvre et s'entraîne à utiliser plusieurs techniques en appui sur différentes technologies savantes. Certes, nous proposons également des

situations comme *mesurer avec une règle cassée*, mais là encore, le but est de motiver l'émergence de la technique τ_{AN} qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts.

Dans chaque proposition de scénario, nous avons essayé d'être précise sur les tâches à prescrire, sur les techniques attendues, sur les moments d'institutionnalisation locale pour indiquer les fonctions de la technologie « nécessaires » au regard des hypothèses de recherche. Les analyses *a priori* relatives à chaque organisation mathématique ponctuelle, intègrent ces éléments. L'objet du chapitre suivant, le chapitre 7, est d'analyser l'organisation mathématique et didactique effectivement enseignée dans les classes A et B à partir des propositions émises au chapitre 6.

Chapitre 7

Présentation de l'expérimentation et des analyses

L'objet de ce chapitre est d'étudier les scénarii mis en place par les enseignants à partir de l'ingénierie proposée et d'évaluer au regard du cadre d'analyse mis en place l'impact sur les apprentissages des élèves. Ce sera l'occasion de tester la validité des hypothèses de recherche sur la nécessité d'amener les élèves à mettre en œuvre, décrire et évaluer différentes techniques relatives à quatre technologies savantes, dont une en appui sur la propriété de conservation des écarts afin d'effectuer des tâches de types T_{a-b} .

L'analyse *a posteriori* est d'abord centrée sur les pratiques des enseignants. Il s'agit d'une part de préciser leurs organisations didactiques, d'autre part d'étudier l'intégration des différentes organisations mathématiques dans leur projet, en interaction avec les élèves, pour produire des calculs (OM1), transformer et associer des représentations sémiotiques (OM2), effectuer et réécrire des calculs soustractifs (OM3 & OM4).

L'analyse *a posteriori* s'appuie sur les analyses *a priori* des séquences de l'ingénierie, conçues autour d'organisations mathématiques ponctuelles (cf. § 6.III). Elle expose et questionne les techniques, les ostensifs et les éléments de technologie que les enseignants et les élèves de chaque classe utilisent et réinvestissent d'une séquence à l'autre¹⁸². Elle permet *in fine*, en comparant les similitudes et les variations de résultats obtenus d'une classe à l'autre, de mesurer l'impact des scénarii utilisés par chaque enseignant sur les apprentissages des élèves.

I. Choix méthodologiques de recueil et d'analyse de données

I.1. Organisation des expérimentations et recueil des données

Les expérimentations¹⁸³ dans la classe d'Adèle et dans la classe de Bertrand¹⁸⁴ se sont déroulées de novembre 2015 à janvier 2016. Sept séquences de deux voire trois séances de quarante-cinq minutes environ, ont été mises en œuvre par chaque enseignant, à partir des propositions de scénario présentées en annexe D. Nous avons assisté chaque semaine en tant qu'observatrice, à une voire deux séances dans chaque classe. Nous ne sommes intervenue que très exceptionnellement à la demande d'un enseignant ou d'un élève.

Pour chaque classe, nous avons recueilli comme données :

- ✓ les réponses des élèves aux évaluations diagnostique et finale, les feuilles de calculs selon le modèle indiqué, renseignées individuellement (cf. annexe D1.1), les écrits associés à la production et à l'effectuation de calculs correspondant à des recherches par binômes,
- ✓ Des notes personnelles et des notes prises par les enseignants des classes A et B,
- ✓ Des plans de classe,

¹⁸² L'objet d'étude étant la viabilité de l'ingénierie propre au calcul soustractif, nous menons séparément et parallèlement les deux analyses avant de comparer les résultats obtenus.

¹⁸³ Nous ne revenons pas sur les conditions de l'expérimentation évoquées au chapitre 6 (cf. § 6.I)

¹⁸⁴ Adèle (enseignante de la classe A) et Bertrand (enseignant de la classe B) ont été présentés au chapitre 4, §III.1

- ✓ les enregistrements vidéo (avec une caméra orientée vers le tableau) des séances pendant les phases de lancement, de synthèse et d'institutionnalisation locale et, avec des caméras orientées sur un, deux, quatre, voire l'ensemble des élèves pendant les phases de recherche.

I.2. Méthodologie d'analyse

Nous organisons l'analyse comme suit en deux temps. Dans un premier temps, *pour chaque séquence*, construite autour d'une organisation ponctuelle (cf. figure 6.2), nous analysons les séances correspondant à différents moments de l'étude : ***moment de la première rencontre avec une tâche d'un type nouveau, moment de construction du bloc technologico-théorique, moment de travail de la technique, moment d'institutionnalisation.*** Nous effectuons ensuite un premier visionnage et découpage de chaque séance, pour isoler la phase de présentation de la tâche, les phases de travail individuel ou en binômes, les phases de mise en commun, et identifier le contrat didactique sous-jacent¹⁸⁵. Les productions des élèves¹⁸⁶ sont rassemblées pour recenser les techniques mises en œuvre au cours des phases de recherche. L'objectif est de repérer si toutes les techniques envisageables¹⁸⁷ ont été prises en compte et d'étudier, parmi les présentes, celles qui sont pertinentes, non viables ou éventuellement erronées. Parallèlement, nous inventorions les ostensifs utilisés par les élèves et les éléments de technologie présents, toujours en lien avec l'analyse *a priori*.

Dans un second temps, notre méthode d'analyse se veut proche de celle adoptée par Hersant (2004), méthode qui caractérise *le cours dialogué* comme une pratique d'enseignement.

« Cette méthode d'étude, que nous avons utilisée plus largement par ailleurs, est mise en œuvre dans l'article sur un exemple traité de façon détaillée. Elle nous permet de dégager des caractéristiques du cours dialogué au niveau de la façon dont le professeur exploite la situation de départ, de la façon dont il utilise les interventions des élèves pour faire avancer son projet, de la part de responsabilité qu'il laisse aux élèves –ou à certains élèves– en fonction du statut didactique du savoir, de la façon dont il gère –dans le temps et dans la manière– l'institutionnalisation des connaissances. (Hersant, 2004, p.3)

¹⁸⁵ Les conditions mises en place par l'enseignant jouent un rôle sur l'ensemble des productions des élèves. D'où la nécessité d'analyser si possible deux mises en œuvre en parallèle pour repérer les variabilités et les similitudes d'une classe à l'autre.

¹⁸⁶ Ce rassemblement est facilité quand les productions sont écrites.

¹⁸⁷ Ces techniques envisageables ont été recensées au moment de l'analyse *a priori*.

Nous analysons, en nous arrêtant sur certains *épisodes*¹⁸⁸ et sur leur enchaînement, les fonctions de la technologie mises en avant, le but recherché et la forme associée. Nous repérons, en lien avec les interventions de l'enseignant, les éléments du bloc technologico-théorique présents, semi ébauchés et absents. Nous notons pour finir si des moments forts d'institutionnalisation locale sont instaurés, ou si ceux-ci sont ponctuels et diffus.

Nous analysons, à partir des productions des élèves et des transcriptions des vidéos, si les techniques étudiées sont de plus en plus maîtrisées par l'ensemble des élèves et si elles finissent par acquérir une forme stable et routinière. Nous cherchons en parallèle à repérer si l'utilisation de certains ostensifs est systématisé (du côté élève, du côté enseignant) et si les éléments du bloc technologico-théorique initialement ébauchés ou absents sont intégrés et agrégés aux éléments initiaux.

I.3. Plan suivi pour conduire l'analyse

L'ingénierie est découpée en cinq blocs d'enseignement¹⁸⁹ qui s'enchaînent les uns aux autres sur la durée de l'ingénierie (cf. figure 6.1). Chaque bloc permet d'enrichir une organisation mathématique locale, par exemple l'effectuation de calculs (OM3) pour le premier bloc, en lien avec les autres organisations mathématiques locales (OM2 et OM4 pour le premier). Afin de conduire l'analyse de l'ingénierie, nous reprenons ce découpage en cinq blocs. Cela permet d'avoir une vision globale des effets de l'imbrication des différentes organisations mathématiques locales sur les apprentissages des élèves et d'obtenir une analyse semi-globale, chaque bloc étant lui-même découpé en séquences qui relèvent chacune d'un type de tâches particulier (cf. figure 6.2). Pour finir, nous confrontons les résultats obtenus aux évaluations initiale et finale.

II. Effectuer un calcul soustractif, décrire la technique utilisée

Nous rappelons que ce premier bloc doit conduire l'ensemble des élèves à abandonner les techniques basées sur le comptage et les engager à décrire les techniques qu'ils mettent en œuvre pour effectuer une tâche de type $T_{a-\square}$ et de type $T_{a-\square 0}$.

¹⁸⁸ « Un épisode correspond à une unité d'objet mathématique d'interaction » (Hersant, 2004, p.8).

¹⁸⁹ Les cinq blocs sont : effectuer un calcul soustractif, décrire la technique utilisée; donner du sens à la notion d'écart et de différence ; découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts ; mobiliser les différentes techniques enseignées ; découvrir et utiliser l'algorithme.

L'analyse *a posteriori* des productions des élèves sur l'ensemble des deux séquences du bloc, sur une durée de trois semaines, montrera les effets du travail engagé sur les techniques, les ostensifs et les éléments de technologie mobilisés par les élèves. Elle permettra également d'évaluer si le travail engagé autour de la réécriture de calculs est accessible aux élèves et utilisé pour valider les techniques. L'analyse des déroulements effectifs dans la classe A et dans la classe B renseignera sur la part de responsabilités laissée aux élèves dans la construction du savoir et indiquera quels sont les éléments des blocs technologico-théoriques relatifs qui sont omniprésents ou simplement ébauchés.

II.1. Séquence relevant de Ta-□ (Sq1)

Nous conduisons l'analyse *a posteriori* de la séquence 1, en suivant la méthodologie d'analyse présentée au paragraphe I.2, à partir des explications écrites données par les élèves et des échanges observés pendant les trois séances réalisées pour effectuer différentes tâches de type T_{a-□}.

II.1.1. Consignes et modalités de travail

Nous avons observé la mise en œuvre de S1Sq1 dans les deux classes A et B. Notre analyse est faite à partir des deux transcriptions écrites, proposées en annexe E.1.1 et E.1.2 et des travaux d'élèves que nous avons recueillis dans chaque classe.

- *Consignes*

	Classe A	Classe B
Durée	2 min	3 min
Modalités	Collectif et oral	Collectif et oral
Supports		feuille de calculs à renseigner (cf. annexe D1.1) projetée à l'aide du TBI

Adèle et Bertrand, comme prévu dans le scénario (annexe D.1.2), avant de donner quatre calculs, un à un, oralement, $48 - 5$; $59 - 2$; $328 - 6$ et $70 - 6$, ont insisté sur le fait qu'il fallait trouver le résultat du calcul mais également expliquer par écrit la procédure utilisée¹⁹⁰. Adèle n'a pas spécifié qu'il était envisageable de réaliser un schéma mais interdit de poser des opérations. En revanche, Bertrand s'est montré exhaustif sur la nature des types de discours attendus et sur les ostensifs utilisables.

¹⁹⁰ Dans les transcriptions M désigne l'enseignant et E l'élève.

M : « Vous allez expliquer ici (elle *montre où*), comment vous faite votre calcul, soit avec des mots soit en mettant un calcul. Voilà, ce que vous faites dans votre tête vous l'expliquez ici (elle *montre où*), et le grand carré, là, c'est pour mettre la... (Elle le *montre*) ».

Es : « La réponse » (Répliques 6 et 7, annexe E.1.1)

- *Modalités de travail*

	Classe A	Classe B
Durée	10 min	13 min
Modalités	Individuel et écrit	Individuel et écrit
Supports	feuille de calculs à renseigner (cf. annexe D1.1)	feuille de calculs à renseigner (cf. annexe D1.1)

Durant la phase de recherche relative aux quatre premiers calculs, Adèle précise :

« *Si on compte sur ses doigts, on a le droit de le mettre. On est en CE2, en début d'année, cela ne pose pas de problème.* » (Réplique 15, annexe E.1.1)

Indirectement, l'enseignante légitime le comptage à ce niveau de la progression. Bertrand, quant à lui, en circulant dans les rangs a signalé par trois fois sa satisfaction au regard de la diversité¹⁹¹ des techniques employées, sans pour autant les indiquer.

II.1.2. Techniques relatives à la première série de calculs

Au regard de l'ensemble des productions écrites, on constate que dans les deux classes, quand un élève ne décrit pas la technique utilisée pour effectuer le premier calcul, il ne le fait pas pour les calculs suivants. Quand un élève choisit une technique pour effectuer le premier calcul, il la reconduit, et utilise presque mot pour mot les mêmes phrases ou le même schéma pour ces explications.

- *Pour le calcul de 48 – 5 et les calculs de 9 – 2 et 328 – 6*

		Classe A (17 productions)				Classe B (29 productions)	
Techniques répertoriées		Nombre de productions	Résultats arrondis en %	Techniques répertoriées		Nombre de productions	Résultats arrondis en %
	τ_{1010}		3/17		18%	τ_{1010}	
$\tau_{SOUS/ADD}$				$\tau_{SOUS/ADD}$		2/29	7%
τ_{ALG}		12/17	71%	τ_{ALG}			
Autres	Comptage			Autres	Comptage		
	Imagée				Imagée	2/29	7%
	Non identifiée	2/17	11%		Non identifiée	12/29	41%

Tableau 7.1 : techniques pour effectuer 48 – 5
(Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

Sur l'ensemble des classes A et B, le comptage n'apparaît pas comme technique déclarée (aucune production n'y fait référence). La technique posée est première dans la classe A¹⁹². Dans la classe B, près d'un élève sur deux produit un discours qui ne permet pas d'identifier la technique qu'il emploie. Les autres discours permettent de repérer que la technique

¹⁹¹ Répliques 11, 12 et 13 de l'enseignant de la classe B (annexe E.1.2).

¹⁹² L'enseignante n' a pas spécifié que de poser le calcul en colonne était interdit.

principale est la technique attendue, soit τ_{1010} . Analysons plus précisément les discours en question.

- *Discours permettant d'inférer l'utilisation de τ_{1010}*

Sur les deux classes, seize élèves sur quarante-six (environ 35%) ont, d'après leurs productions, utilisé τ_{1010} . Sur douze productions (12/16), le calcul effectué sur les chiffres des unités est mentionné grâce à un calcul en ligne ou un arbre de calcul ou une phrase. Nous reprogrammions ci-dessous trois d'entre elles.

	<p>L'élève utilise les unités de numération et indique par une phrase le calcul effectué.</p>
	<p>L'élève utilise les écritures chiffrées et pose les calculs en ligne pour décrire et valider sa technique.</p>
	<p>L'élève utilise les écritures chiffrées et un arbre à calcul pour décrire et valider sa technique..</p>

Figure 7.1 : exemples de discours permettant d'inférer l'utilisation de τ_{1010} (Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

Sur les quatre productions restantes :

- deux élèves (2/16) mentionnent le calcul effectué sur le chiffre des unités et se préoccupent du chiffre des dizaines de 43. Ils valident par la suite leurs techniques.

	<p>L'élève désigne le chiffre des dizaines par un indicateur de lieu « devant ».</p>
	<p>L'élève indique que le 3 correspond à trois unités et le 4 correspond à quatre dizaines en utilisant les codes u et d pour écrire le résultat (4d3u).</p>

Figure 7.1 (bis): exemples de discours permettant d'inférer l'utilisation de τ_{1010} (Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

Deux autres élèves (2/16) mentionnent le calcul effectué sur le chiffre des unités et se préoccupent du 40 obtenu en décomposant additivement 48.

	<p>L'élève indique le premier calcul qu'il a effectué. Même s'il écrit $3-5$, nous devinons qu'il s'agit de $8-5$ et précise qu'il ajoute 40 à ce résultat sans expliquer pourquoi.</p>
	<p>L'élève explique qu'il décompose 8 en $3+5$ pour calculer $8-5$, puis cherche à simplifier $3+5-5$. Il ne barre qu'un « 5 » sur les deux. Il explicite qu'il « garde » le nombre 40 auquel il ajoute 3 pour trouver le résultat.</p>

Figure 7.1 (bis bis) : exemples de discours permettant d'inférer l'utilisation de τ_{1010} (Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

- *Pour le calcul de 70-6*

Sur les deux classes, seulement six élèves sur 46, parmi ceux qui disent ce qu'ils font, soit environ 13%, ont, d'après leurs explications écrites, utilisé (τ_{1010})' qui semblait pourtant « naturelle » grâce à l'oralisation. Sur cinq productions (5/6), le calcul $10-6$ est mentionné grâce à un calcul en ligne, et sur une production (1/6) l'élève évoque « la dizaine ». Nous regraphions ci-dessous deux d'entre elles.

	<p>L'élève indique grâce à une phrase qu'il a soustrait 6 à « la » dizaine pour trouver le résultat. Il ajoute 60 sans le dire, mais commet une erreur de calcul.</p>
	<p>L'élève explique qu'il a utilisé $10-6=4$, puis ajouté à ce résultat 60 pour trouver le résultat de $70-6$.</p>

Figure 7.2 : exemples de discours permettant d'inférer l'utilisation de (τ_{1010})' (Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

Pour conclure, cette première série de calculs a permis de faire émerger pour bon nombre d'élèves majoritairement dans la classe B, les techniques attendues, τ_{1010} pour 35%, et (τ_{1010})' pour 13%. Les élèves qui sont arrivés à produire un discours permettant d'inférer leurs techniques mentionnent le calcul qu'ils effectuent sur les chiffres des unités ou un calcul de la forme $10 - \square$.

II.1.3. Fonctions de la technologie relatives à τ_{1010} et (τ_{1010})' pendant la phase de mise en commun

En lien avec nos hypothèses de recherche, nous recherchons dans les interactions entre élèves/élèves et élèves/enseignants, les fonctions de la technologie mises en avant par Adèle et Bertrand.

- *Fonctions de la technologie relatives à τ_{1010} pour la classe A*

Pour conduire notre analyse nous nous appuyons sur un extrait de la transcription proposée en annexe E.1.1, reproduit dans l'encadré présenté ci-dessous :

*L'enseignante a écrit le calcul à effectuer en ligne 48-5 au tableau.
E : 8 moins 5 ça fait 3 du coup ça fait 43. La maîtresse écrit la réponse 43 et relie le 8 au 5.
M : 8 moins 5, ça fait 3 dans les unités. Tu ne changes pas le 4.
E : Parce qu'il n'y a pas de changement de dizaine.
M : Là il n'y a pas de dizaines. La maîtresse montre l'espace devant le 5. Donc rien ne change au niveau des dizaines. Elle montre le « 4 » de 48 et le « 4 » de 43.*

Adèle a écrit le calcul à effectuer en ligne. Un élève donne directement la réponse en explicitant le fait qu'il calcule $8 - 5$. Adèle s'empare de cette information et note la réponse 43 en reliant le chiffre 8 et le chiffre 5 puis elle effectue un schéma :

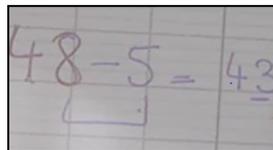


Figure 7.3 : schéma effectué par Adèle relatif à la mise en œuvre de τ_{1010} (Classe A, ingénierie, S1Sq1)

Le schéma s'apparente à un arbre à calcul. Elle explique que le chiffre 3 est le chiffre des unités du résultat, et indique que le chiffre des dizaines du résultat est 4, qu'il ne change pas.

Cette intervention permet de **décrire et de valider la technique**. L'ostensif utilisé proposé est le même que celui envisagé par un élève (de la classe B) pour décrire sa technique (cf.fig 6.1). La technique et la technologie associée se résument à écrire en ligne, de la droite vers la gauche, un calcul que les élèves ont l'habitude de poser en colonne. En revanche, ce discours ne permet pas d'**évaluer** la technique, **par comparaison** à d'autres techniques, entre autres celle basée sur le comptage (47, 46, 45, 44, 43).

- *Fonctions de la technologie relatives à τ_{1010} pour la classe B*

Analysons maintenant pour la classe B, un des épisodes extrait de la transcription présentée en annexe E.1.2 qui se réfère toujours au calcul de $48 - 5$:

E2 : Moi j'ai fait 40 plus 8 après j'ai fait moins 5 et ça fait 43.
 M : Vous avez compris ce qu'il a fait. C'est bien noté sur sa feuille. Il sait que 48 c'est $40+8$, ensuite il a juste fait $8-5$. Tu as fait $8-5$. Tu as trouvé 3, tu as ajouté 40.
 40.

L'enseignant interroge un élève qui explique oralement qu'il a décomposé 48 en 40 plus 8. Il valide ce discours et le reformule, en mettant en avant les deux étapes qui consistent à décomposer 48 en la somme de 40 et de 8, et de soustraire 5 à 8. Ce discours sur la technique permet de **décrire la technique et la technologie ainsi que d'expliquer la technique**. En revanche, vu que les échanges sont uniquement verbaux et oraux, il n'est pas évident que l'ensemble des élèves ait accès à ce travail de réécriture.

- *Fonctions de la technologie relatives à $(\tau_{1010})'$ pour la classe B*

Nous nous intéressons pour conduire notre analyse à un épisode, extrait de la transcription proposée en annexe E.2.2 que nous reproduisons dans l'encadré ci-après, qui se réfère au calcul de $70 - 6$:

M : OK, le problème sur ce calcul là, on ne pouvait pas utiliser la même stratégie que juste avant. Emma l'a vu de suite puisqu'elle s'est trompée. J'ai 0 unité ici, je ne peux pas enlever 6 donc il fallait trouver autre chose. Là, ici, l'idée pour faire ce genre de calcul, c'est ce que tu viens de dire, 70, je le décompose en .. *Le maître écrit $70 = +10$* .
 Qu'est ce que je mets devant le 10 ?
 Es : 60
 M : C'est-à-dire que tu mets une dizaine à part. *Le maître termine d'écrire le calcul : $70-6 = 60+10-6$* et là je m'occupe de ce calcul là. *Il entoure $10-6$* . 10 moins 6, ça fait 4 et donc là on obtient.
 Es : 64.
 M :OK.

Après avoir formulé pourquoi il n'était pas possible d'utiliser τ_{1010} pour effectuer le calcul de $70-6$, Bertrand s'appuie sur la proposition d'une élève pour **expliquer** la technique utilisée en précisant les deux étapes du calcul à suivre, décomposer 70 en $60+10$ et calculer $10-6$. Il **facilite** la mise en œuvre de la technique en organisant par écrit les différentes étapes du calcul et en rappelant un fait numérique connu « $10-6$ », et la **valide** : ici l'enseignant a transformé le calcul initial en un calcul équivalent à $70-6$ et l'a effectué $70-6 = 60+10-6$.

Pour conclure, les enseignants des classes A et B, s'appuient sur certaines propositions d'élèves qui ont mis en œuvre τ_{1010} ou $(\tau_{1010})'$ pour expliciter les différentes fonctions de la technologie associée à Θ_{DD} .

II.1.4. Techniques relatives aux calculs de 34 – 6, 153 – 4 et 75 – 7

Dans cet assortiment de trois calculs, comme annoncé dans l'analyse *a priori* (cf. chapitre 6. III.I), l'objectif visé est d'introduire la technique τ_{A10} pour effectuer trois calculs consécutifs, choisis de telle sorte que le chiffre des unités du premier nombre soit inférieur au second nombre. Nous recensons dans le tableau 7.2 les techniques utilisées par les élèves des classes A et B, à partir de leurs productions pour effectuer 34 – 6.

Ces résultats montrent qu'un grand nombre d'élèves de chaque classe, environ 70%, n'arrivent pas, par écrit, à ce stade de la progression (S1Sq1), à produire un discours qui permet d'inférer la technique qu'ils mettent en œuvre. Au demeurant, dans chaque classe, il y a « peu » de résultats inexacts, environ 30% (6/18 dans la classe A et 8/29 dans la classe B).

		Classe A (18 productions)				Classe B (29 productions)			
Techniques répertoriées		Nombre de productions	Résultats arrondis en en %	Techniques répertoriées		Nombre de productions	Résultats arrondis en %		
		$(\tau_{1010})'$	2/18		11%		$(\tau_{1010})'$	2/29	7%
		τ_{A10}	1/18				τ_{A10}	4/29	13%
		$\tau_{SOUS/ADD}$					$\tau_{SOUS/ADD}$		
		τ_{ALG}					τ_{ALG}		
Autres dont erronées		Comptage	1/18	4%	Autres dont erronées		Comptage		
		Imagée					Imagée	1/29	
		τ_{1010}	2/18	11%			τ_{1010}	1/29	
		Non identifiée	12/18	66%			Non identifiée	21/29	72%

Tableau 7.2 : Techniques pour effectuer 34 – 6
(Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

Autre constat, uniquement trois élèves sur quarante-six ont, d'après leurs productions, utilisé $(\tau_{1010})'$, alors que cette même technique vient d'être présentée en groupe classe. C'est peut-être dû au fait que la technique $(\tau_{1010})'$ a été inférée sur un calcul oralisé comme celui de 70 – 6, *soixante-dix moins six*, qui permet d'entendre *soixante* et *dix moins six*, alors que

l'oralisation du calcul $34 - 6$ ne permet pas d'entendre *quatorze moins six*. La technique, τ_{A10} , quant à elle, est identifiable sur cinq productions¹⁹³ que nous rephotographions ci-après.

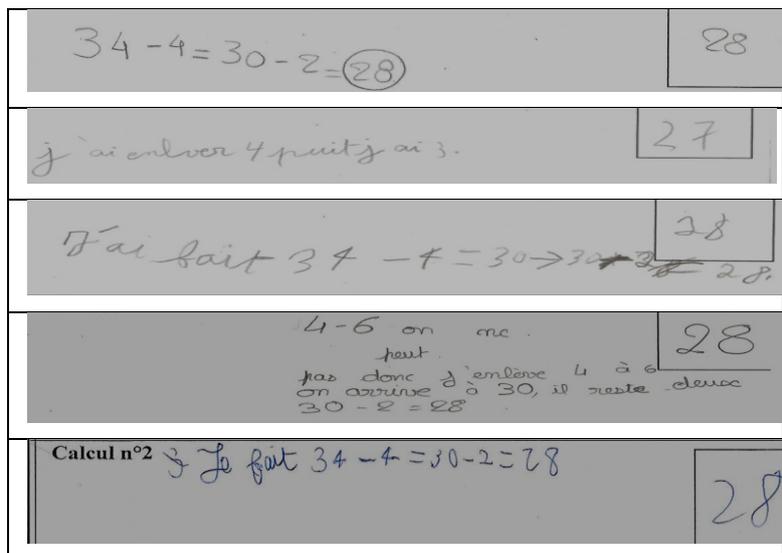


Figure 7.4: exemples de production permettant d'inférer l'utilisation de τ_{A10} (Classe A et B, ingénierie, S1Sq1)

Ces productions montrent que les élèves ont écrit le calcul initial en utilisant de façon incorrecte des égalités en chaîne ($34 - 6 = 34 - 4 = 30 - 2$) ou utilisé deux égalités consécutives ($34 - 4 = 30$ et $30 - 2 = 28$). On peut remarquer que, sur aucune production, le calcul n'est écrit de façon économique ($34 - 6 = 34 - 4 - 2$).

Nous notons également qu'un élève de la classe A utilise un ostensif proche de celui proposé dans le scénario (cf. annexe D.1.2). Nous le rephotographions en figure 7.3 bis.

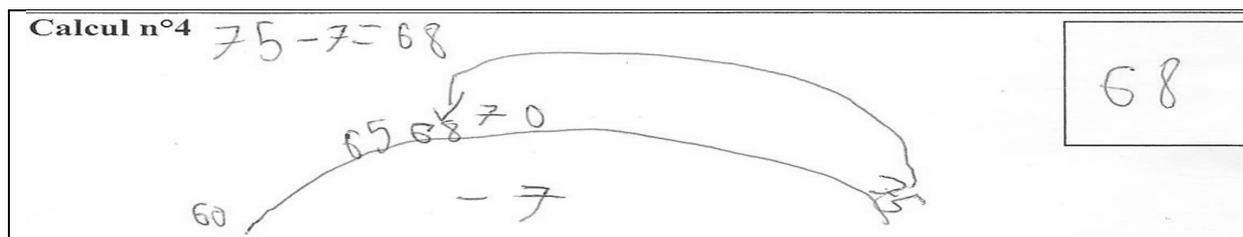


Figure 7.4 bis : exemple de production permettant d'inférer l'utilisation de τ_{A10} (Classe A, ingénierie, S1Sq1)

II.1.5. Construction du bloc technologico-théorique relevant de τ_{A10}

La construction du bloc technologico-théorique a été amorcée lors de la correction des deux premiers calculs $34 - 6$ et $153 - 4$. Un extrait de dialogue, présenté dans l'encadré ci-dessous entre Adèle et les élèves de la classe A, montre les éléments - ostensifs et fonctions

¹⁹³ L'ensemble des productions de ces cinq élèves pour la première série de calculs est rephotographié en annexe E.1.3.

de la technologie - qui participent à sa construction dans l'organisation mathématique enseignée de la classe A.

La maîtresse trace une ligne et place à droite le nombre 75.

M : Combien j'en enlève d'abord ? Sacha ? *Sacha se tait, une dizaine de doigts sont levés.* Maxime ?

E : 5. *La maîtresse marque une flèche vers la gauche et note dessous -5.*

M : Cela nous intéresse de faire un arrêt où ?

E : 70. *La maîtresse écrit 70 à l'extrémité de la flèche.*

M : il fallait enlever sept et on a enlevé cinq. *La maîtresse montre sept doigts avec ses mains.*

E : 2

M : et soixante-dix moins deux, on sait. La maîtresse *entoure le résultat.*

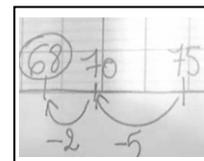
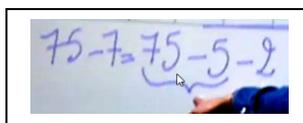
M : on peut écrire $75-7=75-5-2$. *La maîtresse écrit le calcul au tableau*

M : 75 moins 5, ça fait ?

E(s) : 70

M : 70 moins 2, ça fait ?

E(s) : 68.



Adèle introduit comme ostensif la droite numérique vide. Pour mémoriser les valeurs 5 et 7 et trouver le complément de 5 à 7, elle passe par une représentation imagée des collections en montrant les doigts de ses deux mains. Nous pouvons nous questionner sur la place attribuée aux répertoires soustractifs et aux compléments dans la classe A. Dans la classe B, Bertrand s'appuie également sur les propositions des élèves pour introduire deux ostensifs, la droite numérique vide et les écritures chiffrées, afin de décrire et d'expliquer la technique (cf. annexe E.1.4).

II.1.6. Impact et portée de la mise en œuvre de Sq1

Dans un premier temps, en nous appuyant sur les discours¹⁹⁴ produits par les élèves à chaque séance de la séquence 1, nous examinons les techniques prédominantes pour effectuer une tâche de type $Ta-\square$ suivant la valeur de a et \square .

a) Répartition de l'utilisation de τ_{1010} sur l'ensemble de la séquence

Nous répertorions pour chaque classe A et B les techniques mises en œuvre pour effectuer les trois calculs suivants¹⁹⁵ :

$387 - 6$ (premier calcul de la troisième série de S1Sq1)

$49 - 6$ (premier calcul de la troisième série de S2Sq1)

¹⁹⁴ Nous mentionnons pour chaque discours les ostensifs utilisés par l'élève.

¹⁹⁵ Ces trois calculs sont volontairement tels que le nombre à soustraire est inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait (valeur d'une variable didactique).

Les résultats obtenus pour la classe A (respectivement pour la classe B) sont donnés en pourcentage¹⁹⁶ et présentés en figure 7.4 et figure 7.5. Ci-dessous, nous spécifions à quoi correspondent les codes utilisés sur le graphique, et la signification des termes retenus pour qualifier les techniques non répertoriées et répertoriées dans l'organisation mathématique de référence.

Les données de la première séance correspondent aux pavés situés au premier plan, ceux de la seconde séance aux pavés situés au second plan et ceux de la dernière séance aux pavés situés à l'arrière plan.

Non identifiable : l'élève a effectué le calcul mais n'a rien écrit sur sa feuille ou le discours est présent mais trop général pour permettre l'identification de technique de calcul.

Comptage : l'élève a expliqué qu'il décomptait de un en un à partir du nombre initial.

Comptage (collection) : l'élève a dessiné une collection d'éléments et barré le nombre d'éléments à soustraire.

Imagée (DNV) : l'élève a représenté son calcul sur la DNV sans que celle-ci lui serve réellement pour effectuer son calcul.¹⁹⁷

Algorithme : l'élève a posé l'opération en colonne.

Addition : l'élève a cherché le complément du nombre à soustraire au nombre initial.

t1010 : l'élève a utilisé τ_{1010} .

tN10C (EC) : l'élève a utilisé τ_{N10C} et comme ostensifs, les écritures chiffrées.

tN10C (DNV) : l'élève a utilisé τ_{N10C} et comme ostensifs, la droite numérique vide.

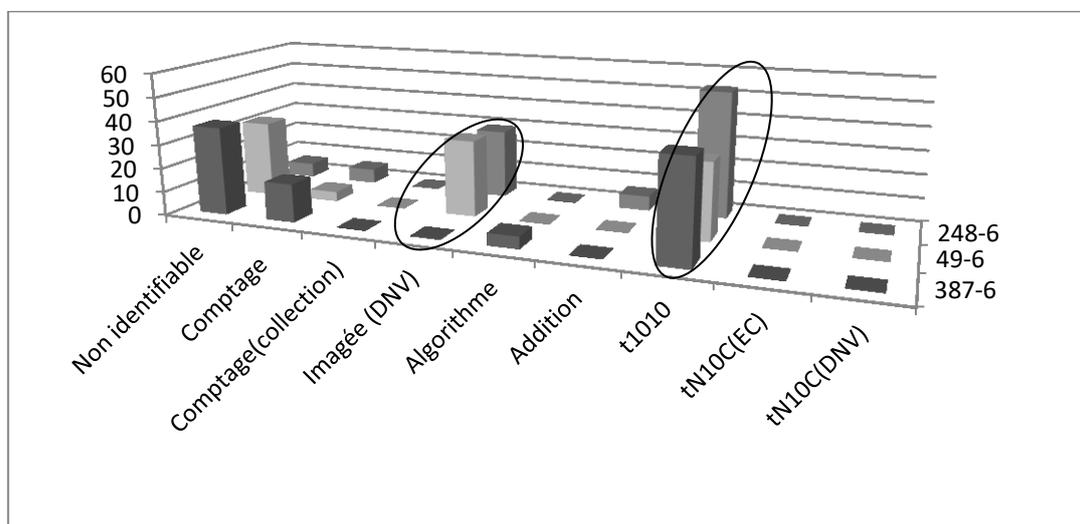


Figure 7.5 : répartition des techniques en lien avec τ_{1010} (Classe A, Sq1)

¹⁹⁶ L'effectif de chaque classe étant différent (19, respectivement 29), les pourcentages permettent de comparer les données d'une classe à l'autre.

¹⁹⁷ Des exemples sont donnés par la suite (II.1.2.c).

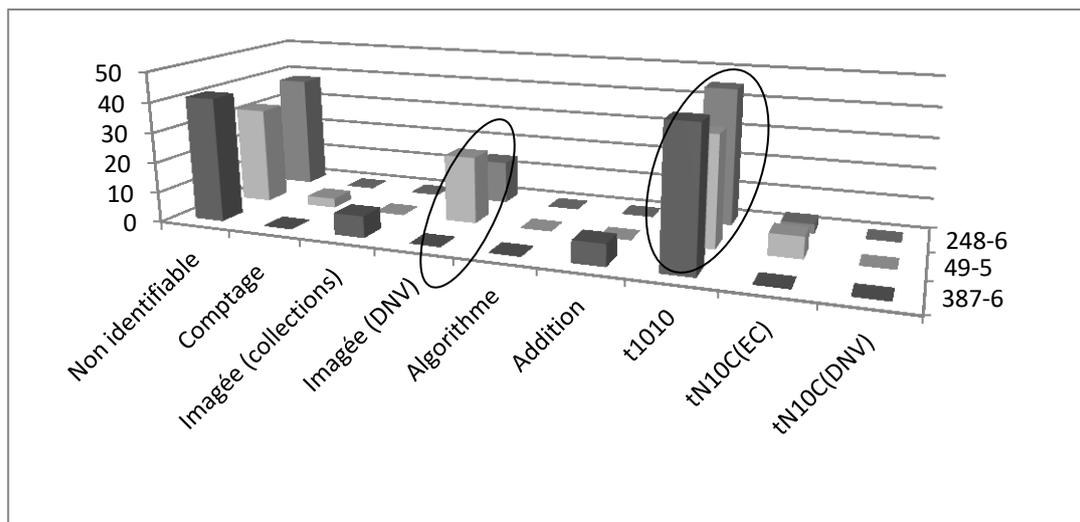


Figure 7.6 : répartition des techniques en lien avec τ_{1010} (Classe B, Sq1)

La lecture des deux graphiques montre que les élèves ont compris la consigne d'expliciter, même si la part de productions ne permettant pas d'inférer une technique reste conséquente. Les techniques sans avenir diminuent (imagées avec des collections, basée sur l'algorithme ou sur le comptage). En revanche, un geste « parasite », qui consiste uniquement à noter le calcul sur la droite numérique vide, apparaît.

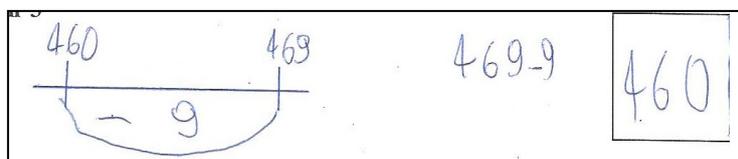


Figure 7.7 : exemple de production avec l'ostensif DNV pour noter le calcul (Classe B, S3Sq1)

Cette intrusion semble liée à l'ostensif droite numérique vide (DNV) utilisée pour décrire le mode d'emploi de deux techniques séquentielles τ_{A10} et τ_{N10C} . Dans l'ensemble, l'utilisation de la technique visée, τ_{1010} , est légèrement en hausse sur la durée de la séquence dans les deux classes.

b) Répartition de l'utilisation de τ_{A10} sur l'ensemble de la séquence

Pour mesurer l'évolution des techniques en lien avec τ_{A10} , nous construisons à nouveau deux graphiques, en reprenant les mêmes codes que ceux utilisés au paragraphe II.1.2.a), à partir des productions des élèves se référant aux deux calculs suivants¹⁹⁸ :

¹⁹⁸ Ces deux calculs sont volontairement tels que le nombre à soustraire est supérieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait (valeur d'une variable didactique). Nous n'étudions pas de données relatives à un calcul de la seconde série car les assortiments proposés visaient surtout l'utilisation de τ_{N10C} .

- 152 – 6 (deuxième calcul de la troisième série de S1Sq1)
- 155 – 6 (premier calcul de la troisième série de S3Sq1)

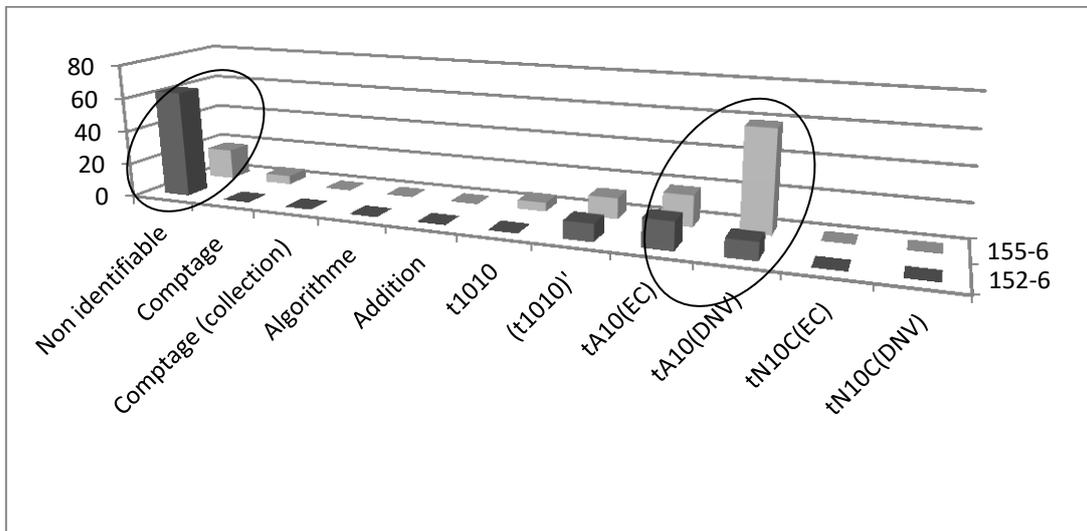


Figure 7.8 : répartition des techniques en lien avec τ_{A10} (Classe A, Sq1)

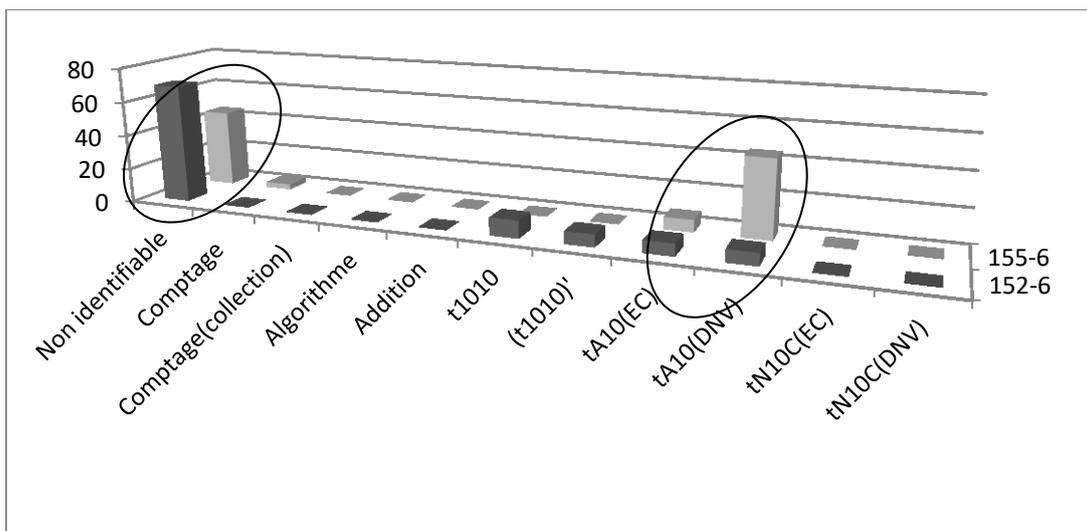


Figure 7.9 : répartition des techniques en lien avec τ_{A10} (Classe B, Sq1)

La lecture des deux graphiques montre que le pourcentage de productions non explicites a diminué sensiblement dans la classe B et fortement dans la classe A. Les techniques non viables ont disparu. Il ne reste plus que un ou deux élèves par classe qui utilisent à tort τ_{1010} , et un même nombre d'élèves qui utilisent à bon escient (τ_{1010})'. La majorité des élèves met en œuvre τ_{A10} . Près de la moitié produisent sur leurs feuilles un schéma avec appui sur la droite numérique vide. Cet ensemble de résultats nous amène à impacter positivement la mise œuvre de la première séquence. Afin de nuancer cependant ces

résultats, nous relevons dans les productions des élèves, les erreurs et les maladresses, naissantes ou persistantes, qui transparaissent dans certaines productions de la séance 3.

c) Typologie des erreurs et des maladresses relevées à la séance 3 (S3Sq1)

Nous analysons les productions qui permettent d'inférer une technique relative aux calculs $248 - 6$; $155 - 6$; $469 - 9$; $325 - 8$, en distinguant les erreurs - provenant de l'utilisation d'une technique inadaptée, d'une technique adaptée non maîtrisée, d'une technique adaptée « presque » maîtrisée - des maladresses qui n'influent pas sur l'exactitude du résultat.

- *Utilisation abusive de τ_{1010}*

Calcul n°4
325 - 8

$$325 - 8 = 323$$

3

323

Cette erreur liée à l'utilisation abusive de τ_{1010} est présente (deux fois) sur une seule feuille de calculs renseignée (1/45).

- *Utilisation abusive d'une technique séquentielle*

Calcul n°4
325 - 8

$$325 - 8 = 317$$

3

317

Cette utilisation d'une technique séquentielle, peu économique en l'occurrence au vu du calcul à effectuer $325 - 8$, est présente quatre fois (respectivement une fois) sur deux feuilles de calculs renseignées (2/45).

- *Erreur de calcul*

Calcul n°4
325 - 8

$$325 - 8 = 315$$

3

315

Cette erreur est présente une seule fois sur une seule feuille de calculs renseignée (1/45). L'élève, au calcul précédent, a décomposé 9 en $10 - 1$, alors qu'ici, il décompose 8 en $10 - 3$.

- *Réécriture de calculs erronée*

248 - 6

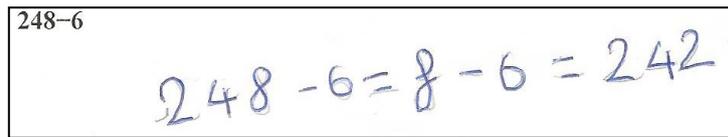
$$248 - 6 = 242$$

6

242

Cette erreur liée à une réécriture erronée des calculs, sans tenir compte de l'équivalence des

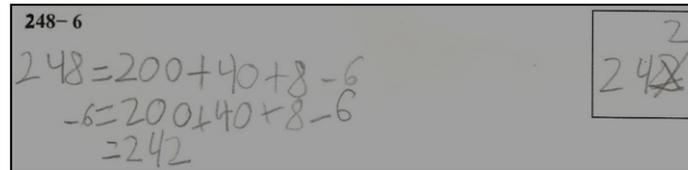
résultats est présente (une seule fois) sur une seule feuille de calculs renseignée (1/45).



248-6

$$248 - 6 = 8 - 6 = 242$$

Cette erreur liée à une réécriture erronée des calculs, sans tenir compte de l'équivalence des résultats, est présente (une seule fois) sur une seule feuille de calculs renseignée (1/45).



248-6

$$248 = 200 + 40 + 8 - 6$$
$$-6 = 200 + 40 + 8 - 6$$
$$= 242$$

Cette erreur liée à une réécriture erronée des calculs, sans tenir compte de l'équivalence des résultats est présente (deux fois) sur une seule feuille de calculs renseignée (1/45).

Pour conclure l'analyse de la mise en œuvre de la séquence 1 de l'ingénierie, les calculs donnés et les modalités proposées ont donné l'occasion aux élèves de *réécrire un calcul*, d'utiliser un nouvel ostensif, *la droite numérique vide*, et d'*effectuer* des tâches de type $T_{a-\square}$. L'analyse des données recueillies montre des changements sur l'ensemble de la séquence ; davantage d'élèves arrivent à se détacher *du comptage* en décrivant leurs techniques, qu'elles soient reliées aux technologies savantes Θ_{DD} ou Θ_D .

II.2. Séquence relevant de $T_{a-\square 0}$ (Sq2)

Pour l'analyse de cette séquence, nous nous focalisons sur la rencontre avec $T_{a-\square 0}$ dans le cas où a n'est pas un multiple de dix (S3Sq2). Au préalable, nous exposons les principales techniques que les élèves utilisent pour effectuer une tâche du type $T_{a-\square 0}$ avec a multiple de dix (S1Sq2&S2Sq2), en relevant les erreurs et les maladroesses locales. Parallèlement, nous prélevons les éléments de technologie mis en avant par l'enseignant de la classe B pour renforcer les compétences calculatoires des élèves et faire évoluer leur(s) rapport(s) au savoir.

Nous nous appuyons, pour conduire l'analyse *a posteriori* sur la transcription écrite de S1Sq2 mise en œuvre dans la classe B (cf. Annexe E.2.1) et des travaux d'élèves que nous avons photographiés pendant la mise en œuvre de la séance.

II.2.1. Analyse *a posteriori* des techniques et technologies ($T_{\square\square 0-\square 0}$)

Nous mettons en parallèle, pour chaque technique¹⁹⁹ présentée oralement par un élève afin d'effectuer une tâche de type $T_{\square\square 0-\square 0}$, l'expertise conduite par l'enseignant. Nous questionnons la pertinence et le degré d'accessibilité des éléments de technologie qui ressortent de ce *cours dialogué*.

- *Utilisation de τ_{REP} pour 50 – 10*

M : Le premier calcul c'est cinquante moins dix. Maelle ?
E1 : J'ai trouvé quarante. Je sais qu'en dessous c'est quarante.
M : Elle le sait. C'est le répertoire.

Il semble que l'élève récite la suite des multiples de dix, dans l'ordre croissant, de bas en haut. L'enseignant valide la technique en lien avec la connaissance du *répertoire*. Ce mot *répertoire* n'est pas repris par la suite. L'enseignant préfère alors évoquer la convocation de faits numériques connus.²⁰⁰

- *Utilisation de $\tau_{ADD/SOUS}$ pour 50 – 10*

E2 : Quarante plus dix égal cinquante.
M : Toi tu as fait une addition à trou. Un nombre plus dix égal à cinquante, quel est ce nombre ?
E2 : Quarante.
M : D'accord.

L'élève a décomposé additivement le nombre cinquante en faisant apparaître le nombre dix. L'enseignant en déduit que l'élève a utilisé $\tau_{ADD/SOUS}$ et valide cette technique.

- *Utilisation de τ_{CONV} pour 50 – 10*

E3 : J'ai enlevé une dizaine et ça fait quarante.
M : Tu savais que cinquante c'est cinq dizaines. Cinq dizaines moins une dizaine, cela fait quatre dizaines.

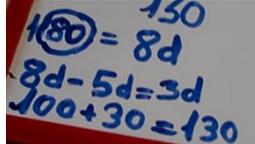
L'élève indique qu'il soustrait une dizaine. L'enseignant convertit alors le premier nombre du calcul en dizaines pour ramener le calcul initial sur des unités à un calcul sur des dizaines. Cette technique τ_{CONV} est systématiquement reprise par la suite²⁰¹. Cependant, certains élèves peuvent la confondre avec une technique qui consiste à calculer sur les chiffres des dizaines (τ_{1010}). En effet, quand nous analysons les répliques reprographiées ci-dessous ou les deux productions également reprographiées ci-dessous :

¹⁹⁹ L'ordre de présentation des techniques suit l'ordre du déroulement des échanges. Dans les transcriptions, E1 est le premier élève à communiquer oralement sa technique, E2, le second élève, E3 le troisième, ...etc. M désigne l'enseignant.

²⁰⁰ M : « Tu le sais par cœur ». (réplique 92, annexe E.2.1)

²⁰¹ Répliques 47, 52, 61, 77, 100 (annexe E.2.1).

E30 : « J'ai fait huit dizaines moins cinq dizaines plus cent, c'est cent-vingt. »
M : « Leane a converti cent-quatre-vingt en dix huit dizaines et comme dix huit dizaines égal dix dizaines plus huit dizaines, elle calcule huit moins cinq. Elle trouve cent-trente. »

Calcul sur le chiffre des dizaines	Calcul sur le nombre de dizaines
	

Nous constatons que l'enseignant n'insiste pas vraiment sur les différences majeures entre les deux techniques car il se base sur la présence du mot *dizaine* ou du symbole *d* pour inférer une conversion qui n'y est pas toujours.

- *Utilisation d'une technique basée sur le comptage pour 50 – 10*

M : Est-ce qu'il y en a qui ont compté sur leurs doigts. Non surtout pas. Enlever dix, c'est simple.

L'enseignant évalue négativement cette technique qui consiste à compter de un en un. En revanche, il encourage la technique qui consiste à compter à rebours de dix en dix en faisant référence au jeu du furet que les élèves connaissent.²⁰²

- *Utilisation de la DNV pour 50 – 10*

M : Est-ce qu'il y en a qui ont fait autrement?
E5 : J'ai fait un schéma.
M : Tu as fait un schéma. Quoi comme schéma ?
E5 : Cinquante moins dix. J'ai mis cinquante au départ après j'ai mis moins un, ça fait quarante-neuf, moins neuf, ça fait quarante.
M : C'est compliqué.

L'enseignant évalue négativement l'ostensif utilisé ou la technique utilisée avec l'ostensif. Il met en avant son inutilité et sa complexité (répliques 28, 33, 44 et 66). Il conclut en certifiant qu'il faut l'*abandonner* (réplique 68, annexe E.2.1).

- *Utilisation de τ_{1010} pour 520 – 20*

E25 : Cinq-cents-vingt, je l'ai divisé en cinq-cents. *Le maître interrompt l'élève.*
M : Tu l'as décomposé, tu ne l'as pas divisé.
E25 : 500, je l'ai décomposé
M : Attends, je vais l'écrire. *Le maître réécrit le calcul sous la dictée de l'élève.*

²⁰² Répliques 36, 37 et 38 :

M : « Est-ce qu'il y en a qui se sont servis du petit jeu du furet qu'on avait fait ? C'était quoi le jeu du furet ? »
E(10) : « En fait, tu disais 20, il fallait ajouter 10, moi je disais 30, Jade elle a dit 40 ».
M : « On l'avait fait dans ce sens mais on l'avait aussi fait dans l'autre sens. »

E25 : cinq-cents-vingt moins vingt égal cinq-cents plus vingt moins vingt. Vingt moins vingt, zéro.

L'enseignant utilise la proposition²⁰³ de l'élève reprographiée ci-dessous pour réécrire le calcul et valider la technique.

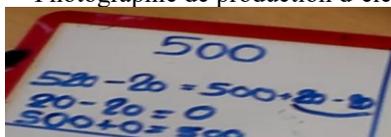
- *Utilisation de τ_{A10} pour 130 – 40*

E31 : J'ai fait un schéma. Cent trente moins trente, cent. Cent moins dix, quatre-vingt-dix. M: *Le maître affiche une diapositive préparée avec un schéma avec appui sur la droite numérique.* Tu as toi aussi utilisé cette procédure.

L'enseignant n'explique pas pourquoi l'utilisation d'une technique séquentielle pour effectuer $130 - 40$ se justifie ici, alors qu'elle ne se justifiait pas pour effectuer $180 - 50$. Il ne précise pas pourquoi le choix du nombre pivot 100 est pertinent. Il ne propose pas de remplacer le schéma avec appui sur la droite numérique par une réécriture de calcul et ne demande pas à un élève de produire justement l'écriture qui s'appuie sur la *décomposition* du nombre 40 en $30 + 10$.

Pour conclure sur un plan global, les phases de restitution et de synthèse ont permis aux élèves, volontaires ou désignés par l'enseignant, d'exposer les techniques qu'ils avaient mises en œuvre pour effectuer tel ou tel calcul. En contrepartie, l'enseignant a pris le temps d'écouter, de reformuler et de valider chaque technique exposée. Ainsi, une procédure de comptage et une procédure imagée ont été disqualifiées, alors que d'autres techniques ont été retenues. La lecture de la transcription de la séance dans son intégralité montre que l'enseignant s'adresse tour à tour à un élève mais que l'ensemble des élèves ne participe pas. Les justifications sont énoncées les unes après les autres. Elles sont pertinentes pour un interlocuteur qui connaît les éléments de technologie mis en avant. Est-ce le cas pour un élève qui a des connaissances encore fragiles au niveau des répertoires, de la numération et des opérations ? La proposition de scénario est certainement à améliorer (annexe E.2.1). Avec le recul, elle se prête (involontairement) à un morcellement du savoir en exposant les techniques attendues, les unes après les autres.

²⁰³ Photographie de production d'élève correspondant à la réécriture de calcul :



II.2.2. Analyse *a posteriori* des techniques et technologies ($T_{\square\square-\square 0}$)

Pour conduire cette analyse, nous nous appuyons sur les productions des élèves correspondants à trois calculs de la troisième série dans les classes A et B ($357 - 50$, $324 - 90$ et $328 - 30$)

- *Pour le calcul de $357 - 50$*

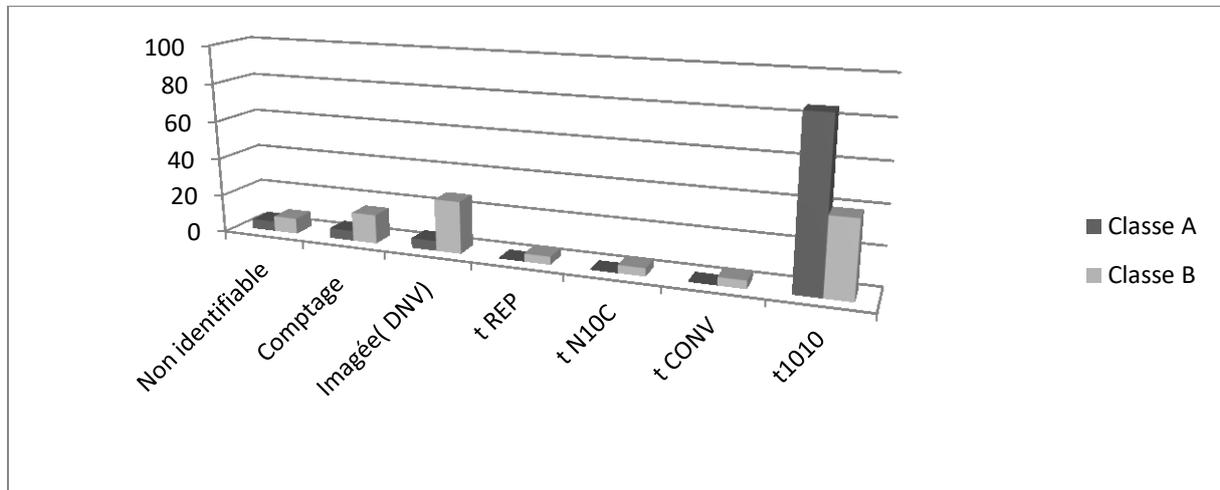


Figure 7.10 : répartition en pourcentage des techniques présentes pour calculer $357 - 50$ (classe A et B, S3Sq3)

La lecture de ce graphique montre que la technique principale dans la classe A est τ_{1010} . En analysant de plus près les productions, on voit que parmi les élèves qui utilisent τ_{1010} :

- Dans la classe A, treize élèves (13/15) effectuent un calcul sur les chiffres des dizaines et l'indiquent par un schéma ou une phrase.
- Dans la classe B, *a contrario*, uniquement deux élèves parmi sept (7/29) effectuent directement un calcul sur les chiffres des dizaines.

Ces différences s'expliquent en partie par un élément constitutif du bloc théorico-théorique relatif à τ_{1010} qui n'est présent que dans la classe A. Il s'agit du schéma reproduit systématiquement par Adèle et utilisé en séance 2 (cf.figure7.3) afin de désigner le calcul à effectuer sur les chiffres des dizaines.

- *Pour le calcul de 324–90*

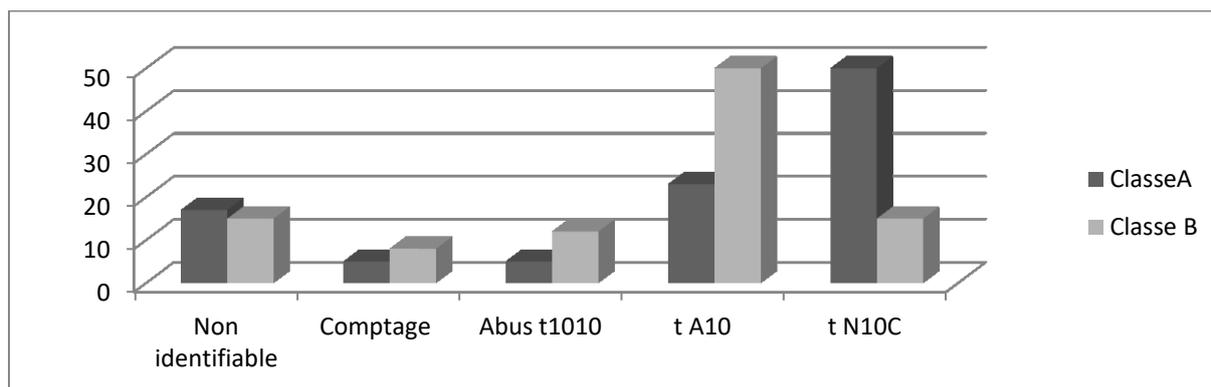


Figure 7.11 : répartition en pourcentage des techniques présentes pour calculer 324 – 90 (classe A et B, S3Sq3)

Dans la classe A, la proportion d’élèves à avoir utilisé τ_{N10C} est plus élevée. Or, si nous regardons de plus près les productions des deux classes, il s’avère que cette technique τ_{N10C} est beaucoup plus « sûre » que la technique τ_{A10} . En effet, les élèves qui ont cherché à décomposer 90 additivement ne sont que trois sur quatorze à avoir trouvé un résultat correct. Les erreurs relevées montrent que les élèves cherchent à utiliser un nombre pivot multiple de dix. Ils soustraient donc 4 (respectivement 24) et n’arrivent pas à trouver le complément de 4 à 90 (respectivement de 24 à 90) ou n’arrivent pas à effectuer 300-86 (respectivement 300-66).

- *Pour le calcul n°3 : 328–30*

Huit élèves sur dix-huit dans la classe A contre treize élèves sur dans la classe B, soit environ la moitié des élèves dans chaque classe, utilise τ_{A10} pour effectuer le calcul. Nous répertorions dans le tableau suivant les décompositions de 30, choisies par les élèves pour mettre en œuvre τ_{A10} et le nombre correspondant de réponses exactes.

τ_{A10}	21 productions au total	Résultats exacts
$328 - 20 - 10$	7/21	7/7
$328 - 28 - 2$	5/21	5/5
$328 - 8 - 22$	1/21	0/1
Autres décompositions	9/21	0/9

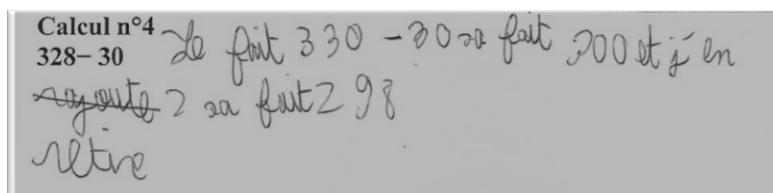
Tableau 7.3 : différentes mises en œuvre de τ_{A10} pour le calcul de 328 – 30

Au vu du nombre important de réponses inexactes, dix sur vingt et une, il semblerait que certains élèves, n'arrivent pas à écrire une décomposition²⁰⁴ du nombre à soustraire en fonction du nombre auquel on soustrait. Parmi les élèves qui trouvent la réponse exacte, trois seulement sur quarante-sept utilisent τ_{CONV} et un seul une technique par compensation τ_{N10C} .



A handwritten calculation in a box: $32d + 8u - 3d = 298$. The 'd' and 'u' are likely placeholders for digits.

Figure 7.12 : exemple de production permettant d'inférer l'utilisation de τ_{CONV} pour le calcul de $328 - 30$ (classe A, S3Sq2)



Handwritten notes for the calculation of 328 - 30: "Calcul n°4 328-30 Je fait 330 - 30 ça fait 300 et j'en ajoute 2 ça fait 298 retire".

Figure 7.13: exemple de production permettant d'inférer l'utilisation de τ_{N10C} pour le calcul de $328 - 30$ (classe A, S3Sq2)

II.3. Retour sur les hypothèses de recherche

La séquence 2 a permis aux élèves de mettre en œuvre, suivant les valeurs des variables didactiques, différentes techniques pour effectuer des tâches de type $T_{a=0}$. Le fait qu'ils aient eu, comme²⁰⁵ en séquence 1, à *expliquer par écrit leurs procédures*, les a conduits à réécrire un calcul en ligne ou sur la DNV pour décrire le mode d'emploi de chaque technique. La variété des productions permet de couvrir l'ensemble des ostensifs et des techniques envisageables, et de repérer parmi elles, les « attendues ».

Pour chaque calcul, les élèves, portés volontaires ou désignés par l'enseignant, ont communiqué leurs techniques face au groupe classe. Bertrand, après les avoir laissés s'exprimer, ne les amène que très rarement à valider leurs réponses par renvoi de la réponse à un autre élève. C'est lui qui explique et évalue. Il prend en charge les fonctions de la technologie correspondante en introduisant de façon ostensive des éléments se référant à la connaissance du répertoire additif ou soustractif, aux propriétés du système de numération et des opérations. L'enseignant relève et corrige ainsi les erreurs éventuelles et valorise les productions correctes. La part de responsabilités laissée aux élèves dans la construction du savoir est ainsi réduite. Le cours, dans ces conditions, est une suite d'institutionnalisations

²⁰⁴ Ces élèves décomposent 30 en $15 + 15$, en $28 + 10$, $28 + 8$, en $20 + 2$.

²⁰⁵ Les élèves sont plus nombreux à s'investir dans cette tâche nouvelle qui convoque OM2 & OM3.

ponctuelles reliées à une suite de calculs. Il s'apparente en ce sens à un cours dialogué (Hersant, 2014). Les techniques, pour finir, ne peuvent que difficilement s'agréger complètement autour des deux technologies savantes Θ_{DD} et Θ_D . Dans ces conditions, il est possible que certains élèves n'intègrent pas la nécessité de décomposer l'un des deux termes ou les deux termes du calcul afin de rendre celui-ci plus accessible.

Les données recueillies montrent que, dans le cas où le nombre auquel on soustrait est un multiple de dix, les élèves arrivent, après plusieurs séries de calculs, à utiliser τ_{1010} , τ_{CONV} , τ_{A10} à bon escient et avec succès. Certains cependant se compliquent parfois la tâche, en voulant introduire à tout prix un schéma avec appui sur la droite numérique vide, allant même jusqu'à soustraire le nombre à soustraire puis soustraire zéro. Cette pratique peut alerter sur une forme de contrat didactique mal compris, donnant lieu à un glissement métacognitif et méta-didactique (cf. chapitre 2.III.3).

Dans le cas où a n'est pas un multiple de dix, de sérieuses difficultés persistent ou apparaissent malgré de nombreuses explications et recommandations de l'enseignant. Beaucoup d'élèves n'arrivent pas à effectuer le calcul dès qu'une centaine entière doit être franchie. Plutôt que d'utiliser τ_{CONV} , ils choisissent d'utiliser τ_{A10} , en pensant à tort que le nombre pivot est nécessairement cette même centaine entière qu'il faut franchir. C'est ainsi que pour effectuer, par exemple $437 - 50$, ils vont effectuer $437 - 37$ et se trouver bloqués par la suite. En effet, pour poursuivre le calcul, il reste à déterminer le complément de 37 à 50 et à calculer $400 - 13$, donc à produire et effectuer deux calculs moins *faciles* que le premier. *A contrario*, une bonne partie des élèves arrivent à décrire les techniques qu'ils emploient en utilisant les ostensifs présentés dès la première séance (écritures chiffrées, unités de numération et droite numérique) et montrent une réelle motivation pour communiquer leurs techniques à l'oral, pendant les phases de synthèse.

III. Donner du sens à la notion d'écart, de différence et de complément

Nous cherchons à déterminer si le travail sur l'écart entre deux nombres effectué à partir de problèmes additifs de comparaison (Sq3) et de la situation de *la règle cassée* (Sq4) permet de construire le bloc technologico-théorique autour de $\Theta_{ADD/SOUS}$ et de créer des

conditions favorables pour introduire la propriété de conservation des écarts dans le cadre de la mesure.

III.1. Analyse *a posteriori* en lien avec les problèmes de comparaison

Nous analysons les techniques des élèves pour résoudre un problème de comparaison (puis de double comparaison), au sens de Vergnaud (1999), dans un contexte lié à la mesure. En corrélation, nous questionnons l'usage de la droite numérique comme élément constitutif du bloc $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$.

III.1.1. Problème de comparaison (S1Sq3)

Nous redonnons l'énoncé du problème construit à partir d'un énoncé extrait d'*Euro Maths* CE1 (2001), avant de conduire l'analyse *a posteriori* de la situation (S1Sq3) mise en œuvre dans les deux classes A et B en nous appuyant sur les transcriptions écrites, proposées en annexes E.3.1 et E.3.2, et les travaux d'élèves que nous avons recueillis dans chaque classe.

Découverte



Le saut de Marie mesure 40cm de plus que celui de Nicolas. Celui de Jeanne mesure 50cm de moins que celui de Thomas. Audrey saute 30cm de moins que Jeanne.

Questions

- 1) Complète le tableau avec les informations.
- 2) Quel est l'écart entre le saut d'Audrey et le saut de Thomas ?
- 3) Quel est l'écart entre le saut de José et le saut de Thomas ?

a) Consignes et modalités de travail

	Classe A	Classe B
Durée	9 min	4 min
Modalités	Collectif et oral	Collectif et oral
Supports	Illustration et informations	Illustration puis informations

Dans la classe A, Adèle questionne longuement les élèves afin de faire ressortir l'ensemble des informations prélevées sur l'image et dans le texte, alors que dans la classe B, Bertrand s'intéresse plutôt à la situation de mesurage évoquée par l'illustration²⁰⁶.

²⁰⁶ « M: Vous voyez ici, il y a une règle graduée qui va permettre de mesurer. *Le maître montre la toise.* » Réplique 16, annexe E.3.2.

b) Techniques, éléments de technologie présents

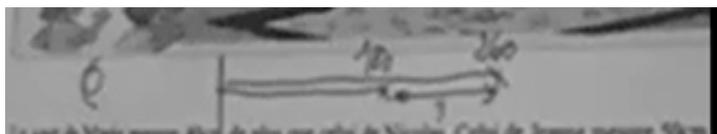
- *Pour le calcul des différentes longueurs de saut*

Dans les deux classes, tous les binômes ont trouvé les longueurs demandées en calculant pour la plupart des différences²⁰⁷. La phase de restitution qui a suivi a été très longue dans la classe A (10 minutes contre 5 minutes dans la classe B). Adèle a accordé beaucoup d'importance aux différentes techniques mises en œuvre pour effectuer $195 + 40$, $260 - 50$ et $210 - 30$.

- *Pour le calcul des écarts entre des longueurs de saut*

Dans la classe A, la phase de recherche a été interrompue par Adèle au bout de trois minutes car elle a estimé les élèves en difficulté²⁰⁸. Vu la nature de ses interventions (réplique 70 et 76) que nous retranscrivons ci-après, il semblerait qu'elle juge nécessaire de donner la signification du mot « écart » et de proposer un schéma, afin de faciliter la modélisation du problème.

M : Allez, je dessine le saut d'Audrey et le saut de Thomas. Ce qu'on vous demande c'est l'écart. L'écart c'est entre ça et ça. *L'enseignante montre sur son schéma, l'intervalle entre 180 et 260.* Ce qu'on vous demande c'est combien il y a de centimètres entre 180 et 260.



Très vite, Adèle passe à la correction (3 min de recherche) et s'appuie sur une première proposition d'élève pour traduire le schéma précédent par une addition à trou.

M : « *La maîtresse montre sur son schéma en parlant.* Tu t'es dit, ce qu'a fait Audrey plus la partie rouge, cela fera le saut de Thomas. » (Réplique 76, annexe E.3.1).

Une seconde élève interrogée lui propose ensuite de calculer l'écart en effectuant une soustraction. Adèle avec une démarche d'ostension, va alors montrer que la différence marquée en rouge sur le schéma correspond au complément.

« E : J'ai fait 260 moins 180.

M : Ce n'est pas bête, regardez toute cette longueur là, moins cette longueur là, il va rester la partie rouge. *Elle montre sur le schéma.* » (Réplique 80 et 81, annexe E.3.1).

Pour finir, Adèle s'éloignera complètement du scénario initial pour comparer la taille de deux enfants et visualiser leur différence de taille.

Dans la classe B, Bertrand a mis directement les quatorze binômes au travail et corrigé, au bout de 3 minutes, le calcul du premier écart entre le saut d'Audrey et celui de

²⁰⁷ Un seul binôme a proposé une addition à trou pour calculer la longueur du saut de Thomas.

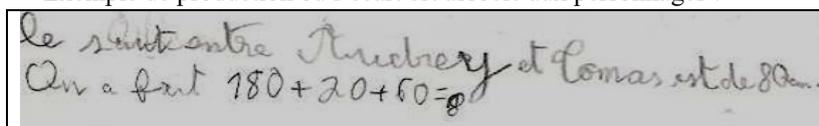
²⁰⁸ M : « J'ai l'impression qu'il y a des élèves qui sont bloqués. » (Réplique 68, annexe E.3.1)

Thomas. Sur l'ensemble des quatorze productions que nous avons recueillies avant que les élèves n'aient pris la correction, nous constatons que :

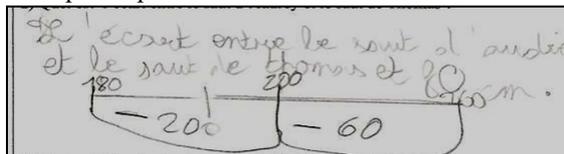
- Huit binômes ont trouvé l'écart (résultat juste) en recherchant un complément.
- Quatre ont trouvé l'écart (résultat juste) en calculant une différence.
- Un binôme a donné la réponse exacte sans indiquer sa procédure.
- Un binôme n'a rien trouvé.

Ces résultats montrent que les élèves ont su traiter la question sans solliciter l'aide de l'enseignant. Dans ce contexte de mesure de longueur, ils ont donné une signification à l'écart et trouvé le résultat en effectuant une addition à trou ou une soustraction. En analysant plus précisément chaque production, nous constatons une grande différence au niveau des discours proposés par les élèves. La moitié des élèves (7/14) écrivent uniquement le calcul qu'ils ont effectué. Les autres (7/14), associent à un calcul ou un schéma en appui avec la droite numérique une phrase réponse plus ou moins complète. Nous présentons en annexe E.3.2 leurs sept productions. A partir de ces productions, nous constatons que l'écart représente pour tous les élèves (7/7) une mesure (un nombre exprimé en cm). Il est associé simplement aux personnages²⁰⁹ (3/7) ou aux sauts des personnages (3/7). Sur une seule production (1/7), il n'est plus relié au contexte, mais relié au calcul qui a permis de le trouver. Bertrand pendant la correction, ne revient pas sur ces différences de formulation. Il vise surtout à faire ressortir les deux techniques retenues pour déterminer l'écart, une *en allant* vers l'avant et l'autre *en reculant*²¹⁰. La séance se termine par la projection d'une diapositive préparée par l'enseignant et reprographiée ci-dessous, accompagnée du commentaire que nous retranscrivons en bas de page (cf.²¹¹)

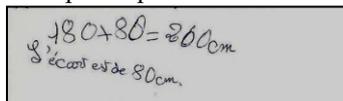
²⁰⁹ Exemple de production où l'écart est associé aux personnages :



Exemple de production où l'écart est associé aux sauts des personnages :



Exemple de production où l'écart est une mesure :



²¹⁰ Réplique 61 de l'enseignant « Il a fait 180 plus 80 égal 260, donc l'écart est bien de 80 cm » et réplique 64 de l'enseignant « Toi tu es parti dans l'autre sens. Tu as fait moins 260 moins 60, moins 20. Annexe E.3.2

²¹¹ « Vous avez vu certains pour trouver la réponse ont fait une addition et certains ont fait une soustraction. Que l'on fasse une addition ou une soustraction, on a trouvé quinze. L'enseignant fait le geste : qu'on aille dans un sens ou un autre, on a trouvé le même résultat donc la petite conclusion, c'est que l'écart entre 245 et 260 c'est le

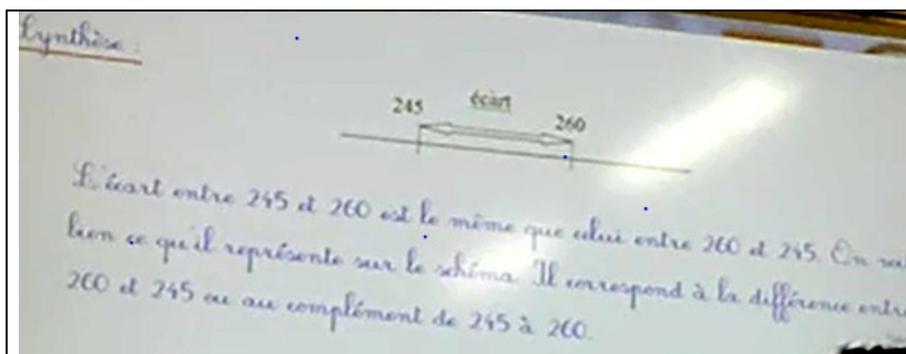


Figure 7.13 : éléments de technologie relatifs $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$ dans la classe B (S1Sq3)

Bertrand, à partir d'un exemple particulier, institutionnalise le fait que les deux techniques *addition à trou* et *soustraction* permettent indifféremment de calculer l'écart entre deux nombres. Il utilise dans la continuité la droite numérique vide qui servait comme support pour décrire le mode d'emploi d'une technique séquentielle pour visualiser l'écart entre deux nombres, puis donne directement, dans le prolongement trois écarts à calculer²¹². Adèle fait autrement, elle préfère différer ce temps de travail sur les techniques τ_{a-b} et $\tau_{a+?=b}$. Nous présentons les résultats obtenus pour chaque classe en annexe E.3.3. Il est intéressant de noter que les élèves ont tenu compte la nature des nombres en jeu. Environ les trois-quarts dans chaque classe ont choisi τ_{a-b} quand b était un multiple de dix, alors qu'ils ont privilégié $\tau_{a+?=b}$ quand b n'était pas un multiple de dix et a relativement proche de b.

III.1.2. Problème de double comparaison (S2Sq3)

Nous examinons, dans la continuité du travail proposé en première séance, les techniques utilisées par les élèves pour résoudre des problèmes de double comparaison posés dans un contexte de la mesure, avant de revenir sur l'usage de la droite numérique comme ostensif du bloc relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$.

- *Pour le premier problème : composé de deux comparaisons positives*

Problème 1

Le saut de Chloé mesure 165cm. Le saut de Thomas mesure 40 cm de plus que celui de Chloé. Celui d'Héloïse mesure 60cm de plus que celui de Thomas.

Quel est l'écart entre le saut de Chloé et celui d'Héloïse ?

L'analyse des productions des élèves des deux classes donne comme résultats :

même que celui entre 260 et 245. Cela correspond bien à la différence entre 260 et 245 ou au complément de 245 à 260. On a deux stratégies possibles différentes, soit on fait une addition à trou, soit on fait une soustraction mais dans les deux cas, on trouvera obligatoirement si on ne s'est pas trompé le bon résultat. D'accord. » Réplique, annexe E.3.2.

²¹²

	Classe A (10 Productions)	Classe B (15 Productions)
Réponses correctes au problème 1	4/10	9/15

Parmi les **treize productions correctes** du problème 1 (4 en classe A et 9 en classe B) nous relevons une seule fois la technique qui consiste à effectuer un calcul direct **sur les écarts**. Nous présentons ci-dessous la production en question :

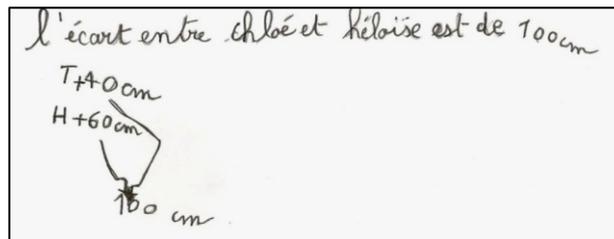


Figure 7.14 : production associée à problème de composé de comparaisons positives (S2Sq3)

Sur onze productions (11/13), les élèves ont cherché la longueur du saut d'Héloïse (265cm), en donnant comme résultat intermédiaire explicitement ou non le saut de Thomas (205cm), puis trouvé l'écart entre 165 et 265.

Sur six d'entre elles (6/12) les élèves ont expliqué leurs démarches en écrivant une suite de calculs.	$165\text{ cm} + 40\text{ cm} = 205$ $205\text{ cm} + 60 = 265$ $265 - 100 = 165$ L'écart entre le saut de Chloé et le saut d'Héloïse est 100.
Sur trois d'entre elles (3/12) les élèves ont expliqué leurs démarches en appui sur la droite numérique	Quel est l'écart entre le saut de Chloé et celui d'Héloïse ? 160 cm
Sur deux d'entre elles (2/12) les élèves ont expliqué leurs démarches en utilisant un tableau de scores qu'ils ont légendé.	 L'écart entre le saut d'Héloïse et le saut de Chloé est de 100cm

Figure 7.14 bis : productions associées à problème de composé de comparaisons positives (S2Sq3)

Sur la dernière production (1/13), les élèves ont écrit une phrase réponse sans donner d'explications. En revanche, les élèves qui n'ont pas réussi à trouver la réponse correcte au premier problème ont cherché sur leurs productions (12/25 productions) :

- uniquement la longueur du saut d'Héloïse en effectuant $165+40$ (2/12)
- l'écart entre 60 et 165 (3/12) ou l'écart entre 40 et 165(1/12) ou l'écart entre 100 et 165 (2/12)
- ajouté tous les nombres de l'énoncé (1/12)
- rien fait (1/12) ou effacé (1/12) ou inscrit « 12200 » (1/12).

Ces erreurs mettent en évidence des difficultés dans la compréhension de l'énoncé. Les élèves ont utilisé les données numériques sans les rattacher aux relations en jeu entre les données du problème. 40 et 60 correspondaient à la valeur de deux comparaisons positives, or, ils ont fait comme s'il s'agissait de la longueur de sauts.

- *Pour le second problème : composé d'une comparaison positive et d'une comparaison négative*

Problème 2

Le saut de Mathilde mesure 120cm. Le saut de Yan mesure 80 cm de plus que celui de Mathilde. Celui de Sarah mesure 20cm de moins que celui de Yan.
Quel est l'écart entre le saut de Mathilde et celui de Sarah ?

L'analyse des productions des élèves des deux classes donne comme résultats :

	Classe A (10 Productions)	Classe B (15 Productions)
Réponses correctes au problème 2	3/10	5/15

Le nombre de réponses correctes a diminué. Certains binômes n'ont pas eu le temps de terminer leurs calculs ou n'ont pas lu attentivement les informations. Ils ont supposé que les deux comparaisons étaient positives, ce qui était le cas pour le problème précédent.

- *Pour le troisième problème : composé d'une comparaison positive et d'une comparaison négative*

Problème 3

Le saut de Charlotte mesure 155cm. Le saut de Lucas mesure 40 cm de plus que celui de Charlotte. Celui de Diana mesure 60cm de moins que celui de Lucas.
Quel est l'écart entre le saut de Charlotte et celui de Diana ?

L'analyse des productions des élèves des deux classes donne comme résultats :

	Classe A (10 Productions)	Classe B (15 Productions)
Réponses correctes au problème 3	5/10	7/15

Dans les deux classes, si on compare les résultats des problèmes 2 et 3 qui font intervenir une comparaison positive puis négative, on remarque que le nombre de réponses correctes a augmenté (de +2 dans la classe A et de +2 dans la classe B). Cette augmentation est probablement due au fait que Bertrand et Adèle ont corrigé au préalable les problèmes 1 et 2.

Les erreurs relevées sur l'ensemble des productions relatives au problème 3 (13/25) sont les suivantes :

- erreur de calcul (2/13)
- la longueur du saut de Lucas (1/13) ou la longueur du saut de Diana (2/13) sont les seuls à avoir été calculés.
- confusion entre la longueur du saut de Diana et l'écart (1/13).
- représentation imagée des trois sauts sans calcul de longueurs (3/13).
- résultat effacé (1/13) ou de 1300 (1/13) ou correspondant à l'écart entre 155 et 60 (1/13).
- Ajout de tous les nombres de l'énoncé (1/13).

En comparant la nature de ces erreurs avec celles commises pour la résolution du problème 1, on retrouve le fait d'ajouter toutes les données, de ne calculer que la longueur d'un saut ou deux sauts, de ne pas donner de résultat ou d'écrire un nombre (1300) sans rapport avec les données de l'énoncé. On ne retrouve plus le calcul de l'écart entre la mesure de la longueur d'un saut et la valeur de la comparaison. On trouve maintenant deux productions qui s'approchent de la solution car la technique de calcul est correcte, et trois schémas (des segments qui représentent des longueurs, ce qui est en accord avec le contexte du problème) proches de celui de l'enseignante de la classe A.

Au niveau des productions correctes dans la classe B, les élèves utilisent toujours les mêmes ostensifs (écriture chiffrée, droite numérique, segments) pour décrire leurs techniques. Dans la classe A, neuf binômes sur dix (9/10) utilisent maintenant un schéma s'approchant de celui proposé par l'enseignante. Ces schémas prennent bien en compte les données de l'énoncé et servent la résolution comme le montrent les deux exemples de productions reprographiées ci après :

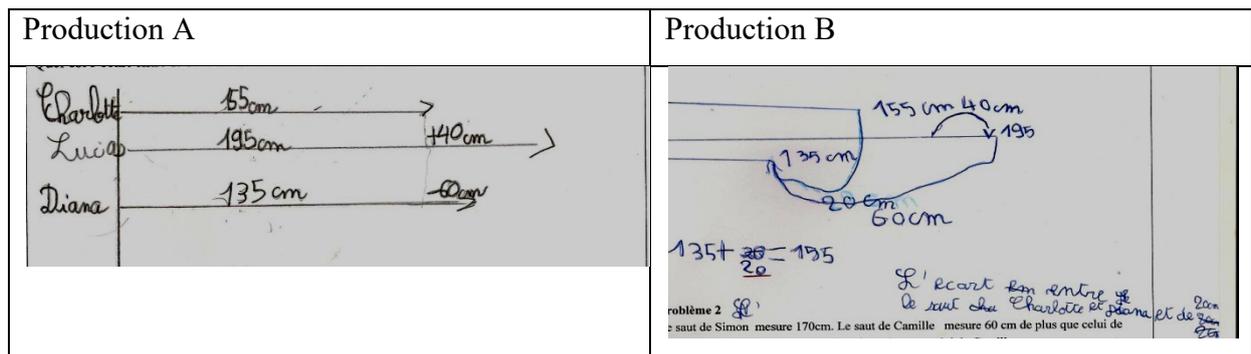


Figure 7.15 : productions associées aux problèmes de composé de comparaison positive et négative (S2Sq3)

Sur la production A : l'élève trace trois flèches et indique sur chacune, sans délimiter réellement de segments, la longueur des sauts correspondants à ceux de Charlotte, Lucas et Diana. Les valeurs des comparaisons qu'elles soient positives ou négatives sont inscrites à la droite des premiers nombres.

Sur la production B : l'élève trace un segment et indique sa longueur 155cm. Dessous, il trace un second segment et indique au moyen d'une flèche que celui-ci mesure 40cm de plus que le premier. Il calcule alors sa longueur et trouve 195cm, nombre qu'il inscrit sur la droite. Le troisième segment tracé de 135cm correspond, comme indiqué par une autre flèche à un segment qui mesure 60 cm de moins que le second. Pour finir, l'écart est calculé au moyen d'une addition à trou et porté « au bon endroit » sur le schéma.

- *Pour le quatrième problème : composé d'une comparaison positive et d'une comparaison négative*

Problème 4

Le saut de Simon mesure 170cm. Le saut de Camille mesure 60 cm de plus que celui de Simon. Celui d'Hélène mesure 60cm de moins que celui de Camille.
Quel est l'écart entre le saut de Simon et celui d'Hélène ?

On constate que les élèves qui ont trouvé la solution du problème 4 sont ceux qui ont trouvé la solution du problème 3. Aucun binôme, ici encore n'a raisonné directement à partir des écarts. Tous préfèrent déterminer la mesure du deuxième et du troisième saut afin de calculer l'écart entre le premier et le troisième.

III.1.3. Usage de la droite numérique comme élément constitutif du bloc relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$

Adèle, en circulant dans la classe pendant que les élèves résolvent le premier problème, constate qu'aucun binôme n'a réalisé un schéma pour visualiser l'écart et suggère alors aux élèves d'en faire un. Cette intervention joue un rôle sur la tâche prescrite et oriente la recherche vers l'effectuation d'une tâche de type $T_{\text{Trans.}(lang./sch.)}$ plutôt que de type $T_{\text{Trans.}(lang./cal.)}$. Elle réduit le champ des ostensifs utilisables. Elle modifie le contrat didactique. C'est pourquoi le premier élève interrogé, alors qu'il a écrit $60 + 40 = 100 + 165$ sur sa feuille, propose à l'enseignante de faire un dessin pour répondre à ses attentes. Le second élève interrogé abonde aussi dans ce sens en réemployant le terme technique « d'écart » alors qu'il a trouvé le résultat en commençant par calculer la longueur du saut du second personnage de l'histoire.

Adèle introduit une à une des sous-tâches explicites qu'elle effectue. C'est ainsi qu'elle représente le premier saut en prélevant sa longueur dans le texte, puis qu'elle compare cette longueur à la longueur du second saut avant de tracer ce dernier juste en-dessous du premier. La comparaison et la disposition spatiale sont amenées « naturellement », cependant elles peuvent ne pas être accessibles et intelligibles pour tous les élèves. L'aide apportée par l'enseignante est au sens de Robert²¹³ (2013), une aide à fonction procédurale. Les résultats ne sont pas discutés et la technique mise en œuvre est rattachée au contexte. La valeur de généralité n'est pas recherchée.

Nous faisons l'hypothèse que l'usage de la droite numérique pour visualiser l'écart entre deux nombres n'est pas devenue une aide constructive pour certains élèves de la classe A. La correction du problème 1 étant trop éloignée de ce que les élèves avaient cherché par eux-mêmes est trop calquée sur l'énoncé du problème, donc pas assez décontextualisée. N'ayant pas assisté à la correction dans la classe B, nous ne pouvons pas relativiser ces résultats et mesurer l'impact de la proposition de scénario sur la mise en œuvre de la séance.

²¹³ Robert distingue les aides à fonction procédurale des aides à fonction constructive en ces termes : « Les aides dites à fonction procédurale, jouent sur les tâches prescrites elles-mêmes, en modifiant strictement les activités par rapport à celles prévues à partir de l'analyse a priori de l'énoncé [...]. Les autres, aides dites « à fonction constructive, ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter. » (Robert, 2013, p.53)

III.2. Analyse a posteriori de la situation de la règle cassée (Sq4)

Nous conduisons l'analyse *a posteriori* de la situation de la *règle cassée* (S1Sq4) avec l'intention de mettre en perspective les résultats obtenus avec ceux de l'expérimentation conduite en 2011(chapitre 4). Cette comparaison permettra de repérer si le fait d'amorcer la construction du bloc théorique relatif à $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$ en séquence 3 a des répercussions sur les techniques des élèves et les éléments de technologie présents. L'analyse *a posteriori* de la situation de jeu proposée en séance 2 (S2Sq4) a pour objet de montrer que les conditions dans lesquelles l'élève mesure avec une règle cassée, ici, en l'occurrence, pour faire gagner son équipe, a des effets sur les techniques qu'il choisit.

III.2.1. Analyse a posteriori de la situation de la règle cassée

a) Techniques et éléments de technologie présents

- *Consignes et modalités de travail*

	Classe A	Classe B
Durée	4 min	4 min
Modalités	Collectif et oral	Collectif et oral
Supports	Une règle cassée par élève et l' énoncé projetée à l'aide du TBI	Une règle cassée par élève et l' énoncé projetée à l'aide du TBI.

Dans les classes A et B, les enseignants, ont distribué une règle cassée à chaque élève avant de recueillir leurs remarques et d'établir que :

- les règles n'étaient pas graduées de la même manière sur chaque face. Sur l'une on pouvait constater que l'unité était le centimètre, alors que sur l'autre, l'unité était le pouce.
- les règles ne commençaient pas par la graduation *zéro*. Ni le *zéro*, ni le *un* n'étaient inscrits.

Ce constat établi, les enseignants ont donné la consigne et précisé que, pour donner la longueur de chaque segment, il fallait trouver une *stratégie* (terme employé par l'enseignant de la classe B) ou *réfléchir* (terme employé par l'enseignante de la classe A).

- *Analyse des productions d'élèves*

Classe A (17 productions)			Classe B (27 productions)		
Les trois longueurs sont exactes. On lit « 5cm, 3cm et 8cm ». L'unité est signalée.	8	47%	Les trois longueurs sont exactes. On lit « 5cm, 3cm et 8cm ». L'unité est signalée.	16	60%
Les trois nombres sont obtenus par une simple lecture de graduation. Les élèves ne prennent pas en compte le fait que la règle ne commence pas à	4	23%	Les trois nombres sont obtenus par une simple lecture de graduation. Les élèves ne prennent pas en compte le fait que la règle ne commence pas à	4	14%

zéro.			zéro.		
Une, voire, deux ou trois mesures sont inexactes. Il n'est pas possible de savoir pourquoi sans informations complémentaires.	5	30%	Une, voire, deux ou trois mesures sont inexactes. Il n'est pas possible de savoir pourquoi sans informations complémentaires.	7	26%

Tableau 7.4 : Techniques présentes pour mesurer avec une règle cassée (Classe A et B, ingénierie, S1Sq4)

Au regard de ces résultats, on a environ la moitié des élèves de chaque classe ou plus qui a cherché une technique prenant en compte le fait que la règle est cassée. Le travail de groupe proposé par la suite permet de repérer les élèves qui arrivent à contrôler leurs résultats et qui sont capables d'expliquer aux autres avec des gestes et des mots, la technique qu'ils ont mise en œuvre pour mesurer les segments.

- *Analyse des techniques et des éléments de technologie présents*

Pour conduire cette analyse, nous nous référons aux échanges que nous avons filmés entre les élèves dans un premier temps, et les élèves et l'enseignant dans un second temps (annexe E.4.1). Il en ressort que, très vite, les élèves qui s'étaient contentés de « bien placer » leur règle à une extrémité du segment et de lire le nombre correspondant à la seconde extrémité ont abandonné cette façon de faire. La plupart des élèves qui avaient trouvé un résultat correct ont mis en œuvre des techniques basées sur le comptage²¹⁴ jusqu'à ce qu'un élève de la classe B explique une technique différente :

E : « Moi j'avais une règle qui commençait à deux centimètres. J'ai remplacé le deux centimètres par le zéro. J'ai mesuré, cela faisait sept, Je sais que l'écart entre le 2 et le 7, c'est cinq centimètres. » Réplique 13, annexe E.1.4

technique dont s'empare Bertrand:

M : « Qu'est-ce qu'il a fait ? Je peux l'écrire : $7 - 2 = 5$ ». Réplique 14, annexe E.1.4.

et qu'il institue par la suite :

M : « Ce qu'on veut au final, c'est cela. Vous avez un écart à calculer, vous faites une soustraction ». Réplique 20, annexe E.1.4.

Remarquons que, dans la classe A, les derniers échanges sont du même ordre. Adèle institue également l'addition à trou ou la soustraction pour calculer un écart.

²¹⁴ Exemples de techniques basées sur le comptage :

« Je n'ai pas compté le trois (première graduation entière de la règle) car je me suis dis que le trois, c'était le zéro, un deux, trois, quatre, cinq, cela fait cinq centimètres.» Un autre élève explique qu'il a pris un carreau ici (une unité) et qu'il l'a reporté puis qu'il a compté le nombre d'intervalles. (annexe E.4.1)

b) Résultats et mise en perspective

- *Résultats relatifs au degré d'appropriation des élèves*

En confrontant ces résultats à ceux qui s'appuient sur l'expérimentation conduite dans le cadre des observations participatives et présentés au chapitre 4, nous retrouvons le fait qu'il est difficile de « penser » le calcul de $b - a$ quand la tâche consiste à mesurer un segment dont les extrémités ont pour abscisses a et b . En effet, les techniques privilégiées par les élèves sont principalement basées sur le comptage. En revanche, il est à noter que, quelle que soit la technique utilisée, davantage d'élèves associent la recherche d'une mesure à la recherche de l'écart entre deux nombres en utilisant spontanément l'expression écart au moment de l'annonce de leurs résultats. Ce constat nous semble une avancée, à relier à la construction du bloc $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$ amorcée en séquence 3²¹⁵. Autre apport, les élèves des classes A et B, proposent à l'enseignant de calculer l'écart en utilisant τ_{b-a} ou $\tau_{a+\dots=b}$ et montrent ainsi le lien qu'ils établissent entre les deux techniques.

Le second résultat, qui ressort de ces nouvelles expérimentations comme de celle effectuées précédemment est l'apport essentiel du travail de groupe proposé à la suite du travail individuel. Le fait d'avoir collecté l'ensemble des résultats dans un tableau avant d'harmoniser ces mêmes résultats est favorable et amène les élèves à valider les techniques, comparer leurs coûts et justifier le fait que les longueurs des segments sont égales, quelle que soit la règle cassée utilisée.

- *Résultats relatifs au degré d'appropriation de la situation par les enseignants*

Même si l'enjeu pour l'enseignant reste de valider les techniques proposées par les élèves, et d'accepter celles basées sur le comptage qui permettent, au vu de la taille des segments, de trouver assez rapidement les mesures, les enseignants des classes A et B s'appuient davantage dans ces nouvelles expérimentations, sur les propositions des élèves pour associer à l'action de mesurer la recherche d'un écart en utilisant τ_{b-a} ou $\tau_{a+\dots=b}$. En ce sens, le fait d'inscrire la situation de la règle cassée dans la continuité de la séquence 3 clarifie les objectifs visés.

²¹⁵ Les élèves ont probablement effectué un rapprochement entre les segments représentés sur leur feuille énoncé et les segments représentant les sauts et les écarts entre les différents sauts matérialisés à la séance précédente (S2Sq3).

III.2.2. Analyse *a posteriori* de la situation de jeu

Nous avons assisté aux déroulements effectifs dans les classes A et B. Le fait qu'il y ait eu plusieurs équipes de quatre élèves (au total sept équipes dans la classe B), plusieurs objets par équipe à mesurer et une feuille de scores à renseigner a modifié les comportements des élèves. Ils étaient pris par le jeu et se trouvaient très motivés par la recherche de résultats. Ils semblaient, à première vue, quand nous circulions de groupe en groupe peu enclins à communiquer et à comparer leurs techniques. Nos multiples interventions pour les inciter à verbaliser ont certainement faussé les résultats. Le fait est que nous avons repéré des élèves qui comptaient avec leurs doigts pour mesurer les objets de petite taille et qui interrogés, nous ont prouvé qu'ils calculaient pour trouver la taille du morceau de bambou (objet de 17 cm). Pour la bandelette, nous avons vu un groupe d'élèves mettre bout à bout deux règles cassées en faisant coïncider le vingt et un de l'une avec le onze de l'autre, afin de compter de un en un jusqu'à 31. Retour sur le choix des tailles d'objets : nécessité d'avoir des objets de grande taille, sinon retour au comptage

Pour conclure, l'ensemble des conditions réunies, un contexte de mesure trop omniprésent, un choix inadapté pour la taille des objets, n'a pas incité vraiment les élèves à calculer pour relever le défi et mesurer rapidement les douze objets.

III.3. Apports de $T_{\text{Pro. Cal.}}$ au niveau de la construction de $\Theta_{\text{ADD/SOUS}}$

Le travail effectué autour de la production de calculs à partir des problèmes de comparaison s'est avéré complexe pour les élèves et peu motivant pour les binômes qui n'arrivaient pas à s'appropriier les énoncés et à produire les calculs additifs ou soustractifs adaptés. Probablement que l'introduction des doubles comparaisons, au vu des difficultés des élèves, a été amenée trop tôt, alors que la notion d'écart n'était pas assez installée. Dans ces conditions, la co-construction du savoir est d'autant plus compromise.

La situation de la règle cassée semble *robuste* au sens de Robert (2007), et permet aux élèves d'être davantage réceptifs à la notion d'écart. Avec des valeurs de longueurs de segments à mesurer inférieures à dix, et dans un contexte de jeu, elle favorise l'utilisation de techniques basées sur le comptage. Des valeurs de longueur à mesurer au delà de vingt centimètres favoriseraient l'utilisation de τ_{b-a} ou $\tau_{a+...=b}$ et permettraient d'établir le lien existant entre ces deux techniques.

IV. Découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts

Comme annoncé au chapitre 6, une variante de la situation *translation d'une bandelette* présentée au chapitre 4 a été choisie pour motiver la rencontre avec la propriété de conservation des écarts et amener directement un travail sur les équivalences d'expressions numériques. L'analyse *a posteriori* de la première séance de la séquence cinq (S1Sq5) va permettre de mesurer les effets des modifications de la situation *translation d'une bandelette* sur l'implication des élèves dans la construction du bloc technologico-théorique relatif à Θ_{AN} .

L'analyse *a posteriori* de la seconde séance de la séquence cinq (S2Sq5) va permettre d'analyser si les différents exercices proposés (trois au total) permettent à l'ensemble des élèves de s'approprier le mode d'emploi de la technique τ_{AN} basée sur la propriété de conservation des écarts pour effectuer des calculs soustractifs posés en ligne. L'analyse des productions des élèves et des échanges observés pendant les temps de correction permettra également de pointer les éléments institutionnalisés qui ont contribué ou fait défaut à une avancée de la construction de la technologie Θ_{AN} .

IV.1. Analyse *a posteriori* de l'émergence de τ_{AN}

Afin de tester si les conditions mises en place sont favorables pour amorcer la construction du bloc technologico-théorique relatif à Θ_{AN} , nous allons, dans un premier paragraphe, en fonction des productions d'élèves et des retranscriptions des séances S1Sq5 dans la classe A et dans la classe B (annexe E.5.1 et annexe E.5.2), évaluer si les élèves

- ✓ se sont impliqués dans la tâche de mesurage de la bandelette et ont été capables d'interpréter les résultats obtenus
- ✓ ont formulé eux-mêmes la propriété de conservation des écarts
- ✓ sont arrivés à appliquer la propriété de conservation des écarts pour associer deux calculs soustractifs égaux.

IV.1.1. Analyse des déroulements effectifs de la situation *translation d'une bandelette modifiée*

Les enseignants des deux classes ont suivi la proposition de scénario. Ils ont donné la consigne et renseigné la première ligne du tableau, avant de proposer un travail par

binômes²¹⁶. La tâche qui consiste à mesurer une bandelette à différents endroits de la règle graduée en donnant le résultat sous la forme de calculs soustractifs est bien réussie. Aucune erreur n'est relevée sur les dix (respectivement quatorze) productions de la classe A (de la classe B). Les deux autres questions portant sur la comparaison et l'interprétation des résultats, quand elles sont traitées, (18/24), donnent deux types de réponse :

- Les élèves effectuent les calculs soustractifs et trouvent *quatre* à chaque fois. Ils en déduisent que les calculs sont égaux (13/24). Exemples de productions :

Les trois calculs sont-ils égaux ? *Oui*
 Pourquoi ? *Parce que $12-8=4$ / $14-10=4$ et $24-20=4$*

Les trois calculs sont-ils égaux ? *Oui*
 Pourquoi ? *car tout les résultats font 4.*

- Les élèves indiquent que la longueur de la bandelette est invariante par translation (5/24).

Les trois calculs sont-ils égaux ? *Oui*
 Pourquoi ? *Parce que la bandelette A mesure la même taille*

Les trois calculs sont-ils égaux ? *Oui*
 Pourquoi ? *parce que ce n'importe quel distance c'est toujours la même longueur.*

Au niveau de la formulation de la propriété de conservation des écarts et de son application, on note que :

- *Dans la classe A*

La première élève interrogée, avec une formulation approximative, « *Oui, parce que la bandelette ne bouge pas.* » (Réplique 2, annexe E.5.1), avance le fait que les trois résultats sont égaux car ils correspondent à la longueur d'une même bandelette « translitée ». Plutôt que de s'appuyer directement sur cette intervention et suivre la proposition de scénario, Adèle cherche à convaincre les élèves que l'écart est constant, en changeant de situation et de

²¹⁶ Extrait de l'énoncé donné aux élèves (S1Sq5) :

1) Complète le tableau de mesure qui correspond à la **bandelette A** que tu as.

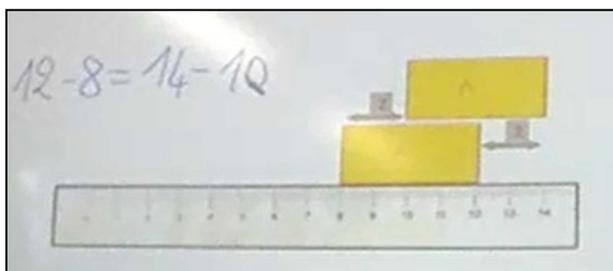
Je pose l'extrémité de la bandelette gauche sur la graduation.	Je lis le nombre qui correspond à la graduation de l'autre extrémité.	J'indique par un calcul soustractif la longueur de la bandelette.
8		
10		
20		

Les trois calculs sont-ils égaux ? Pourquoi ?

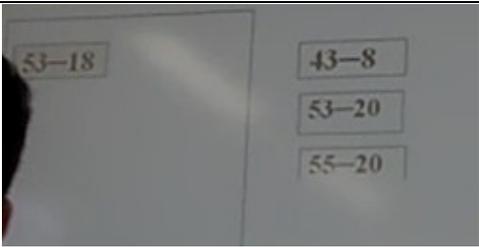
contexte.²¹⁷ Elle préfère comparer la taille de deux élèves à l'instant « t » et dans dix ans en supposant que chacun d'eux aura grandi de 40 cm. Elle n'engage pas un travail de réécriture de calculs soustractifs et ne formule pas la propriété de conservation des écarts. Aucune généralisation n'est envisagée.

- *Dans la classe B*

Bertrand s'appuie sur l'intervention d'un élève, « *Parce que la bandelette A fait toujours la même taille* » (réplique2, annexe E.5.2) pour montrer qu'il est possible de savoir, avant même d'effectuer les trois calculs $12 - 8$, $14 - 10$ et $24 - 20$, que ceux-ci ont le même résultat qui correspond à la longueur de la bandelette. Souhaitant écrire $12 - 8 = 14 - 10$, il demande à quel calcul est égal douze moins huit.²¹⁸ Deux réponses spontanées sont données, douze moins huit égale douze moins quatre moins quatre et douze moins huit égale douze moins dix plus deux, ce à quoi Bertrand répond « vous mélangez » (réplique 10, annexe E.5.2)²¹⁹. Une fois obtenue la réponse attendue, douze moins huit égale quatorze moins dix, conformément à la proposition de scénario, il projette une diapositive qui montre que, dans le contexte, le nombre deux ajouté aux deux termes de la différence correspond à la valeur de la translation :



Par la suite, comme proposé dans le scénario, Bertrand se détache du contexte de la mesure pour amener une tâche préparatoire à la réécriture de calculs. L'extrait ci-dessous montre comment il formule la consigne (réplique 24, annexe E.5.2)



M : Vous avez la soustraction suivante $53 - 18$, je veux qu'un enfant aille me placer une étiquette dont le résultat serait le même que celui là. Je ne veux pas de calculs. On évite de calculer. Cela a un lien avec ce qu'on vient de faire juste avant.

²¹⁷ « J'ai trouvé un exemple pour vous aider à comprendre cela. Flora tu viens, Valentin, tu viens. L'écart de taille est à peu près de cela. » Réplique 14, annexe E.5.1.

²¹⁸ « Douze moins huit, c'est égal à quel autre calcul ? » Réplique 6, annexe E.5.2.

²¹⁹ **L'enseignant sous-entend probablement** que les élèves cherchent à mettre en œuvre τ_{A10} ou τ_{N10C} .

Cette consigne vise à ce que les élèves repèrent quels sont les calculs soustractifs que l'on peut associer, sans chercher à les effectuer, en mettant en œuvre la propriété de conservation des écarts. Concrètement, les élèves ont à déplacer l'étiquette qui convient et par la suite à justifier leur choix. La première élève interrogée déplace $43 - 8$ mais n'arrive pas à répondre quand Louis lui demande comment elle est passée de 53 à 43. Est-ce dû au fait que la question la déstabilise ? A-t-elle vu une analogie entre 43 et 53 (le 3 et le 3) ainsi qu'une analogie entre 18 et 8 (le 8 et le 8), sans se questionner davantage ? A-t-elle considéré en premier lieu les nombres 18 et 8 ? Est-ce le terme employé « passer » qui n'évoque pas l'action d'ajouter ou de soustraire ? Le fait est que la question posée à l'ensemble du groupe trouve réponse, « *On enlève une dizaine* » (réplique 27, annexe E.5.2), et que Bertrand, à partir de cet exemple, donne un mode d'emploi de la technique qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts :

M : « J'ai enlevé le même nombre aux deux termes, j'ai enlevé dix à chaque fois. Est-ce que j'ai eu besoin de faire le calcul de tête ? Non, je sais que le résultat est le même. » réplique 30, annexe E.5.2.

IV.1.2. Retour sur la situation translation de bandelette modifiée

La proposition de scénario n'a pas été suivie par Adèle. Pour elle, la situation *translation de bandelette*, même si les élèves trouvent que l'écart est constant par translation, n'est pas assez convaincante. Elle introduit donc un exemple pris dans un contexte plus familier *comparaison de taille* pour illustrer cette même propriété. *A contrario*, Bertrand suit la proposition de scénario. Il s'appuie exclusivement sur la situation *translation de la bandelette* pour amener le travail sur l'équivalence des expressions numériques et formuler la propriété de conservation des écarts. Un premier décalage montre que les élèves ne voient pas l'utilité, vu les expressions en jeu $12 - 8$ et $14 - 10$, du travail de réécriture engagée. Ils ne répondent pas ou répondent à côté. Un second incident montre que les élèves arrivent à associer deux expressions numériques équivalentes, sans pour autant être capables d'indiquer le nombre qu'ils ont ajouté ou soustrait aux deux termes de la différence. Loin d'ignorer ces incidents, Bertrand gère le premier en faisant valoir un réinvestissement ultérieur du travail effectué en calcul mental, et le second en donnant le mode d'emploi de la technique basée sur la propriété de conservation des écarts. Ces constats montrent que les interventions de l'enseignant sont nécessaires pour rendre accessible le savoir visé.

Pour conclure, le fait que les calculs soustractifs produits à partir de l'activité de mesurage portent sur des nombres inférieurs à vingt rend leur réécriture caduque. Il faudrait

manipuler de grandes bandelettes (mesurant au-delà de vingt centimètres) et les translater sur un mètre et non sur un double décimètre, pour obtenir sept à huit calculs qui méritent d'être comparés. Dans un second temps, la proposition de scénario donnée aux enseignants pour conduire ce travail sur les équivalences d'expressions numériques, même si elle est intéressante au niveau de la composante médiative, n'est pas assez porteuse sur le plan cognitif. Les réponses *a priori* des élèves²²⁰ qui permettraient d'inférer l'utilisation de τ_{AN} ou d'une autre technique (τ_{N10C} par exemple) font défaut.

IV.2. Analyse *a posteriori* de l'installation de τ_{AN}

Dans la continuité du travail précédent sur l'équivalence des expressions numériques, trois exercices ont été proposés à l'ensemble des élèves pour installer τ_{AN} . Nous allons prélever en fonction des productions des élèves des deux classes et des échanges observés pendant les mises en commun effectuées dans la classe A (annexe E.5.4), et étudier si les élèves arrivent à :

- ✓ Motiver sur un exemple donné l'utilisation de τ_{AN} .
- ✓ Choisir une valeur pour la translation (nombre qu'on ajoute ou qu'on soustrait aux deux termes du calcul soustractif) adaptée au calcul donné
- ✓ Translater les deux nombres du calcul initial
- ✓ Effectuer une tâche de type $T_{a-\square 0}$.

Cette analyse conduit à identifier les difficultés des élèves pour effectuer chaque sous-tâche et à caractériser les aides apportées par Adèle au moment des corrections. Elle renseigne sur les types de tâches à convoquer, les éléments théoriques à instituer, les ostensifs à privilégier pour assurer à terme la maîtrise de la technique τ_{AN} .

²²⁰ Extrait de scénario :

Est-ce que le résultat de $43-8$ est le même que celui de $53-18$?

On attend « oui » car on a ajouté dix aux deux nombres.

On place alors l'étiquette dans le tableau.

IV.2.1. Difficultés relevées dans la mise en œuvre de τ_{AN}

Comme annoncé précédemment, nous relevons les difficultés rencontrées par les élèves pour :

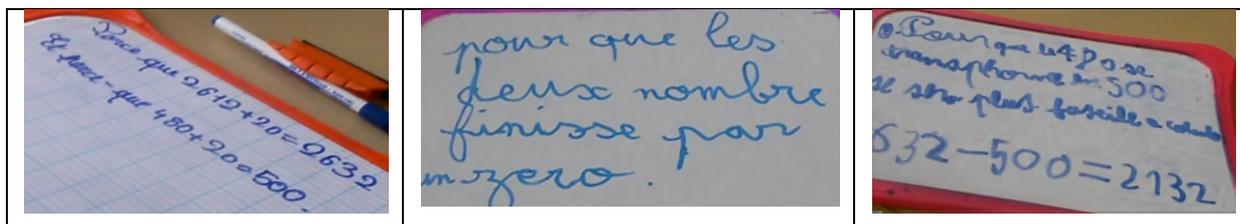
- *Motiver sur un exemple donné, l'utilisation de τ_{AN}*

Pour identifier les difficultés des élèves, nous nous basons sur les réponses apportées au premier exercice (premier item) reproduit ci-après et sur les échanges présents pendant la première mise en commun (cf. annexe E.5.1).

Exercice 1 Item 1 : le premier calcul est donné en ligne : $2612 - 480$. Alice propose d'ajouter 20 aux deux nombres.

- 1) Pourquoi Alice choisit-elle d'ajouter 20 aux deux nombres pour calculer plus facilement $2612 - 480$?
- 2) Utilise la remarque d'Alice pour trouver le résultat de $2612 - 480$.

Nous constatons que peu d'élèves ont renseigné la première question. De mémoire, nous avons photographié les trois productions présentes (3/15, l'effectif est de 15 dans la classe A) :



- Sur la première production, l'élève ne motive pas l'utilisation de τ_{AN} . Il se contente de calculer les nombres translétés.
- Sur la seconde production, l'élève extrapole en indiquant que les deux nombres (après ajout) vont être deux multiples de dix. Implicitement, il a vu l'intérêt de soustraire un multiple de dix.
- Sur la troisième production, l'élève, en indiquant que le second nombre se *transforme en* 500 et en précisant que ce sera plus facile à calculer, motive l'utilisation de τ_{AN} .

Pendant la correction du premier item, Adèle ne suit pas la proposition de scénario²²¹. Elle n'interroge qu'un seul élève, l'auteur de la seconde production. Elle ne discute pas la

²²¹ Extrait de la proposition scénario :

3) Après avoir écouté les propositions des élèves, conclure en disant qu'Alice a raison car on ne change pas le calcul quand on ajoute 20 aux deux nombres (c'est la propriété de conservation des écarts qu'on a vu la dernière fois). Quand on ajoute 20 à 480, on obtient 500, un nombre entier de centaines, ce qui est plus facile à soustraire.

proposition (pourtant erronée) et ne demande pas aux autres élèves de l'enrichir, voire de la reformuler²²². Elle la valide indirectement en passant à autre chose, en l'occurrence la justification de τ_{AN} .

Pour conclure, il aurait peut-être été préférable de donner à effectuer aux élèves dans un premier temps, le calcul auquel était confronté Alice ($2612 - 480 = ?$) à effectuer aux élèves. Certains l'auraient trouvé compliqué, d'autres non, notamment ceux qui auraient appliqué une technique déjà rencontrée τ_{N10C} pour l'effectuer ($2612 - 480 = 2612 - 500 + 20$). Cela aurait permis de comparer éventuellement la mise en œuvre des deux techniques τ_{AN} et τ_{N10C} sur cet exemple particulier ($2612 - 480 = ?$) et de constater qu'en l'occurrence, pour chacune d'entre elles, on *remplace* 480 par 500 sans oublier soit de compenser ce retrait (pour τ_{N10C}), soit d'ajouter également 20 à 2612 (pour τ_{AN}).

- *Choisir une valeur pour la translation adaptée au calcul*

Nous nous basons sur les productions des élèves recueillies dans les classes A et B pour effectuer les exercices 2 et 3²²³. Les résultats sont très différents d'une classe à l'autre (cf. annexe E.5.4) et d'un exercice à l'autre.

Dans la classe A, l'exercice 2, malgré sa consigne fermée et les conseils d'Adèle²²⁴, « *vous regardez le second nombre du calcul pour vous aider à trouver le nombre manquant* », n'est pas réussi par la moitié des élèves. Ces élèves n'arrivent pas à choisir une valeur adéquate pour la translation.

Pour effectuer $5200 - 170$,
Deux élèves (2/8) proposent d'ajouter 3 aux deux nombres. On peut supposer qu'ils ont repéré le chiffre des dizaines, 7 de 170 et chercher le complément de 7 à 10.
Deux élèves (2/8) proposent d'ajouter 7 aux deux nombres. On peut supposer qu'ils ont repéré le chiffre des dizaines 7, et sans chercher plus loin, ont ajouté ce nombre.

²²² L'enseignante n'introduit pas un terme spécifique (multiple de cent, centaine entière, nombre entier de centaines) pour désigner *le nombre qui finit par un zéro*. Elle préfère désigner 500 un peu plus loin comme un *nombre pratique*. « Quand on voit un calcul pas facile à calculer, on va essayer de rapprocher le second nombre d'un nombre plus pratique. » Réplique 22, annexe E.5.1.

²²³ Exercice 2 : $312 - 98$; $5200 - 170$; $603 - 91$ et $435 - 103$.

Exercice 3 : $256 - 19$; $547 - 101$; $170 - 98$ et $1420 - 390$.

²²⁴ Nous n'avons pas eu de retour sur la mise en œuvre de la séance dans la classe de Bertrand. En revanche, nous retranscrivons la consigne donnée par Adèle : « Regardez le calcul n°1. Quelle différence avec avant ? On n'a plus les personnages et en dessous qu'est ce qu'il y a d'écrit. On progresse dans la difficulté. Il y a écrit si on doit ajouter ou enlever. Quel est le nombre que l'on doit regarder pour savoir si on ajoute ou si on enlève ? Lequel, le premier ou le deuxième ? A chaque fois vous regardez le deuxième, A vous de compléter la phrase à trou d'écrire le nouveau calcul et de mettre la réponse dans le carré au bout. »

Trois élèves (3/8) proposent d'ajouter 1 aux deux nombres, 1 étant la valeur de la translation correspondant au calcul précédent ($603 - 91$).
Un élève (1/8) propose d'ajouter dix.

Pendant la mise en commun, Adèle ne s'appuie pas assez sur les productions erronées pour provoquer les échanges. Elle ne cherche pas à cibler les difficultés des élèves. Elle interroge volontairement une élève qui a choisi pour valeur de la translation un nombre adéquat (30) et su effectuer $5230 - 200$. L'exercice 2 fini, Adèle présente l'exercice 3 en demandant expressément aux élèves d'utiliser τ_{AN} ²²⁵. Les résultats montrent que quatre élèves (4/15) ont encore des difficultés pour déterminer le nombre adéquat qu'il faut soustraire ou ajouter aux deux termes du calcul.²²⁶ Nous faisons l'hypothèse qu'il aurait été préférable, de relever pour un calcul donné (par exemple $170 - 98$) , l'intégralité des écritures proposées par les élèves²²⁷ ($172-100$; $171-99$; $140-68$. $170-100$; $140-68$), avec l'objectif d'amener les élèves à comparer chacune d'entre elles, puis à valider eux-mêmes celle(s) qui semble(nt) opportune(s). Ce travail aurait permis de reprendre un travail sur les expressions numériques équivalentes conduit au préalable (S1Sq5) et de généraliser : à chaque fois, le second nombre du calcul est transformé en une dizaine ou une centaine entière (un nombre rond, un nombre qui se termine par zéro pour reprendre les expressions utilisées par les élèves).

Pour conclure, ces constats nous amènent à intégrer le fait que τ_{AN} est plus complexe à apprendre que l'algorithme de la soustraction posée (τ_{ALG}). Pour τ_{ALG} , l'élève n'a pas de choix de nombres à faire : il s'agit d'ajouter 10 ou 100 ou 1000 au nombre de départ. En revanche pour τ_{AN} (en général), le choix du nombre adéquat est à la charge de l'élève. Les tâches dépassent donc en complexité celles nécessaires pour τ_{ALG} . Il aurait fallu, dans l'ingénierie, rester plus modeste dans la familiarisation avec τ_{AN} : par exemple toujours proposer le nombre à ajouter ou le laisser choisir parmi trois nombres mais éviter de laisser, dans une première approche, l'élève face à un choix total.

²²⁵ La consigne donnée par Adèle est la suivante : « Pour le travail suivant, vous n'avez plus cette petite phrase à compléter. Il faut toujours regarder le deuxième nombre du calcul et voir comment il faut le transformer pour obtenir un nombre sympathique. Soit on ajoute, soit on enlève mais il faut expliquer ce qu'on fait. »

²²⁶ Ne sachant rien sur les conditions dans lesquelles les exercices 2 et 3 se sont déroulés et au vu du décalage entre le premier (très bien réussi) et le second (peu traité), nous n'intégrons pas les résultats de la classe B à cette analyse.

²²⁷ Exemples de calcul proposés par les élèves de la classe A pour calculer $170 - 98$: $172-100$; $171-99$; $140-68$. $170-100$; $140-68$.

- *Traduire les deux nombres du calcul initial*

Cette tâche est bien réussie dans l'ensemble²²⁸. Nous faisons l'hypothèse que la situation *translation d'une bandelette*, le travail sur l'équivalence des expressions numériques, les explications d'Adèle en tout début de séance pour revenir sur une erreur de ce type²²⁹ ont permis aux élèves d'être vigilants au moment d'appliquer la propriété de conservation des écart.

- *Effectuer une tâche du type $T_{a-\square 0}$*

Cette tâche est bien réussie par les élèves qui ont su écrire le calcul sous la forme $a - \square\square 0$. Seules, quelques erreurs qui s'apparentent à des étourderies sont présentes sur cinq productions.

IV.2.2. Pistes pour consolider le bloc relatif à Θ_{AN}

L'analyse des réussites et des difficultés rencontrées par les élèves pour mettre en œuvre τ_{AN} , montre que la propriété de conservation des écarts est bien appliquée et efficace, à partir du moment où les élèves trouvent comment traduire les deux nombres du calcul initial. Nous faisons l'hypothèse que :

- ✓ Comparer différentes propositions pour un même calcul amènerait à repérer les propositions économiques de celles qui ne le sont pas.
- ✓ Utiliser un vocabulaire spécifique en CE2, dizaine entière, centaine entière pour désigner les nombres qui *finissent par zéro ou qui sont ronds* permettrait, d'instituer plus facilement la technique²³⁰ qui consiste à écrire le calcul en transformant les deux nombres du calcul, afin que le second nombre soit un multiple de dix.
- ✓ Motiver l'utilisation de τ_{AN} en proposant des calculs où la mise en œuvre est utile (au même titre que la mise en œuvre de τ_{N10C}) et d'autres qui peuvent s'effectuer directement, tendrait à développer l'adaptabilité du calculeur²³¹.

²²⁸ En analysant l'intégralité des productions de la classe A, une erreur de ce type est présente sur trois productions.

²²⁹ M : « Tu n'as pas le droit. Tu as juste enlevé un à celui là. Elle montre le nombre cent-quarante-sept. Ce n'est plus le même écart. Si toi tu grandis de un centimètre et Valentin de zéro, est-ce qu'il y aura le même écart ? » Attention, on enlève ou on rajoute aux deux nombres, sinon, il y en a un qui est jaloux et ce n'est plus le même résultat. Ca marche, troisième exemple. » Réplique 38, annexe E.5.3.

²³⁰ Cette technique est introduite par les auteurs d'*Euro Maths* en CE2 sous le nom de technique à la « russe ».

²³¹ Certains des calculs proposés pouvaient s'effectuer directement (exemple : $435 - 103$). Aucun élève n'a fait une remarque à ce propos.

V. Mobiliser les différentes techniques enseignées pour effectuer T_{a-b}

Nous proposons une analyse *a posteriori* du *moment de travail* de chaque technique enseignée et des résultats technologiques²³² s'y référant, en nous basant sur les écrits relevés au tableau et les échanges pendant la correction d'une série de quatre tâches de type T_{a-b} (extrait de S1Sq6 mise en œuvre dans la classe A et dans la classe B retranscrits en annexe E.6.1 et en annexe E.6.2), et sur les productions de quatre élèves, obtenues suite à la mise en œuvre de la situation *facile/ pas facile* (productions reprographiées en annexe E.6.3). Ces productions de quatre élèves, après analyse, rendent compte de la diversité des productions des élèves de la classe A. Leur nombre est limité à quatre afin d'établir plus facilement des comparaisons entre elles.

Les premières données nous montrent quels sont les techniques et les éléments technologiques institutionnalisés par Adèle et par Bertrand pour effectuer un calcul donné. Les secondes données nous permettent de repérer quels sont les savoirs partagés et ceux qui sont peu ou mal mobilisés par les élèves. Mais au-delà de l'évaluation des acquis des élèves, l'analyse permet d'engager une réflexion autour de l'organisation mathématique elle-même, en l'occurrence sur l'ensemble des techniques et des savoirs technologiques enseignés.

V.1. Analyse *a posteriori* des techniques, des technologies, des ostensifs mobilisés

Nous repérons les techniques et les éléments technologiques véhiculés et institutionnalisés pendant la correction d'une série de quatre calculs²³³.

a) A l'occasion d'une correction d'exercice

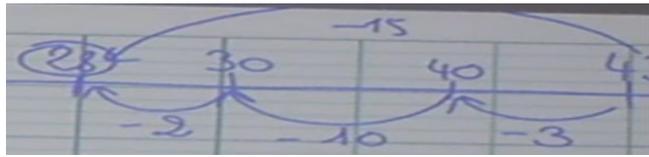
- 43 – 15

Adèle, tout comme Bertrand, s'appuie sur la proposition d'un élève qui suggère d'effectuer $43 - 3 - 10 - 2$ (respectivement $43 - 3 - 2 - 10$). Tous deux écrivent sous la dictée de cet élève chaque pas du calcul et chaque résultat intermédiaire, en s'appuyant sur la droite numérique vide.

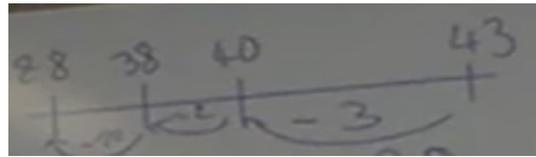
²³² Les techniques du répertoire sont τ_{1010} , τ_{A10} , τ_{N10} , τ_{N10C} et τ_{AN} . Les résultats technologiques correspondent au mode d'emploi de chaque technique, à son domaine de validité, à sa justification.

²³³ Les calculs ont été donnés oralement les uns après les autres (2 minutes par calcul). Les élèves avaient à leur disposition ardoise et feutre pour noter de calculs intermédiaires, faire un schéma, ... et écrire le résultat.

Photographie du tableau de la classe A



Photographie du tableau de la classe

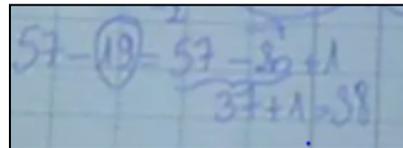


Par la suite, Adèle sans vraiment expliquer pourquoi, suggère aux élèves de commencer par soustraire dix et propose un second schéma avec appui sur la droite numérique.

Bertrand, quant à lui, interroge un second élève qui lui propose de calculer quarante-huit moins vingt (τ_{AN}). Il écrit en ligne le calcul correspondant, $43 - 15 = 48 - 20$ mais ne valorise pas plus que cela la seconde technique. La même technique τ_{N10} et les mêmes ostensifs sont privilégiés dans les deux classes pour effectuer $43 - 15$.

- **57 - 19**

Adèle, après avoir mis en œuvre τ_{N10} insiste auprès des élèves pour avoir une proposition différente. Elle obtient finalement une technique par compensation (τ_{N10C}) et écrit le calcul correspondant au tableau :



Voulant aussi mettre en œuvre τ_{AN} , elle aide un élève à formuler le mode d'emploi de cette technique. Bertrand, quant à lui, interroge directement un élève qui propose de calculer cinquante-huit moins vingt (τ_{AN}) ; il valorise cette fois-ci cette proposition ; il la valide en précisant qu'il est facile d'ajouter *un* aux deux termes du calcul initial :

« Là je pense que quand on voit dix-neuf, c'est vraiment ce qu'il faut faire. Ce n'est pas compliqué d'ajouter un aux deux nombres. D'accord ? » Réplique 8, annexe E.6.2.

- **62 - 27**

Adèle sur proposition d'élèves, mobilise successivement τ_{AN} , τ_{N10} , τ_{N10C} et utilise un schéma avec appui sur la droite numérique pour rendre compte des deux dernières. Bertrand commence à indiquer qu'il n'est pas possible de mobiliser τ_{1010} avant de mettre en œuvre τ_{N10} , en écrivant le calcul correspondant $62 - 27 = 62 - 2 - 20 - 5$.

- **87 - 34**

Adèle et Bertrand valident directement l'utilisation de τ_{1010} et proposent un schéma qui montre le calcul effectué sur les chiffres des unités et des dizaines.

Photographie du tableau de la classe A

$$87 - 34 = 53$$

Photographie du tableau de la classe B

$$87 - 34 = 53$$

Pour conclure, pour un calcul donné, les techniques privilégiées sont les mêmes dans les deux classes. Pour expliquer une technique, Bertrand utilise plus facilement la réécriture de calculs. *A contrario*, dès que la technique est séquentielle, Adèle s'appuie sur la droite numérique vide.

b) A l'occasion de la situation *facile/pas facile*

Nous cherchons à savoir quel est le niveau d'adhésion à l'ensemble des techniques enseignées dans la classe A, en analysant les productions de quatre élèves²³⁴ lors de deux tâches que nous rappelons. La première consiste à trier les calculs qui semblent faciles de ceux qui ne semblent pas faciles. La seconde tâche, facultative, consiste à s'aider en effectuant les calculs sur une feuille de brouillon distribuée à cet effet. Il est à noter que celle-ci a été effectuée par la totalité des élèves et qu'ils ont été nombreux à décrire les techniques qu'ils avaient mises en œuvre.

- *Analyse de l'activité de tri*

Nous précisons que les dix étiquettes étaient données dans le désordre. Nous avons pris soin de ne pas les classer en fonction du type de tâches ($T_{a-\square}$ ou $T_{a-\square\square}$) ou des valeurs prises par les variables didactiques présentes (cf. analyse *a priori* conduite au chapitre 4).

Les résultats présentés dans le tableau 7.5 amènent à penser que ce n'est pas parce qu'un élève estime qu'un calcul soustractif est difficile qu'il ne sait pas l'effectuer (cas de Mathilde et de Flora). En revanche, nous constatons que dans la plupart des cas, quand l'élève estime le calcul facile à effectuer, il trouve un résultat exact (c'est notamment vrai pour Mathilde). Autre constat, les quatre élèves estiment tous (à une exception près pour un calcul près) que $238 - 5$, $87 - 30$, $97 - 34$ et $60 - 4$ sont faciles à effectuer, probablement parce qu'une technique de résolution a été automatisée. Mais pour infirmer ou confirmer ce point, venons-en à l'analyse des techniques utilisées par chaque élève.

²³⁴ L'enseignant de la classe B ne nous a pas donné les productions des élèves de sa classe. Nous rappelons que ces productions sont choisies afin de rendre compte de la diversité des productions des élèves de la classe A. Leur nombre est limité à quatre afin d'établir plus facilement des comparaisons entre elles.

	Mathilde	Eloïse	Valentin	Flora
238 – 5	FAC.	FAC.	FAC.	FAC.
87 – 30	FAC.	FAC.	FAC.	FAC.
97 – 34	FAC.	FAC.	FAC.	DIF.
60 – 4	FAC.	FAC.	FAC.	FAC.
72 – 6	DIF.	DIF.	FAC.	FAC.
852 – 9	DIF.	DIF.	FAC.	FAC.
73 – 29	DIF.	DIF.	FAC.	DIF.
31 – 28	DIF.	DIF.	FAC.	DIF.
41 – 17	DIF.	DIF.	FAC.	DIF.
43 – 25	DIF.	DIF.	DIF.	DIF.

Légende : FAC. (respectivement DIF.) signifie que l'élève a collé l'étiquette du calcul correspondant dans la colonne des calculs qu'il estime faciles (respectivement difficiles) à effectuer. La trame de la cellule est gris foncé (respectivement blanche) quand l'élève trouve le résultat exact (respectivement inexact). La trame est gris clair quand l'élève n'a pas effectué le calcul.

Tableau 7.5 : résultats relatifs à l'estimation de la difficulté à effectuer $a - b$
(Quatre élèves de la classe A, Sq6)

- *Analyse des techniques et des ostensifs utilisés par les élèves.*

	Mathilde	Eloïse	Valentin	Flora
238 – 5	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
87 – 30	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
97 – 34	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{N10} (DNV)
60 – 4	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{REP}	τ_{REP}
72 – 6	τ_{A10} (DNV)	τ_{A10} (DNV)	τ_{A10} (EC)	τ_{A10} (DNV)
852 – 9	τ_{A10} (DNV)	τ_{A10} (DNV)	τ_{N10C} (EC)	τ_{AN}
73 – 29	τ_{N10} (DNV)	τ_{A10} (DNV)	τ_{N10C} (EC)	τ_{AN}
31 – 28	τ_{N10} (DNV)	τ_{A10} (DNV)	τ_{N10C} (EC)	τ_{AN}
41 – 17	τ_{N10} (DNV)	τ_{A10} (DNV)	Non fait	τ_{AN}
43 – 25	τ_{N10} (DNV)	τ_{A10} (DNV)	τ_{N10C} (EC)	τ_{N10} (DNV)

Légende : Dans chaque cellule, la technique utilisée est indiquée. Pour les techniques séquentielles, les ostensifs (DNV pour droite numérique et EC pour écritures chiffrées) sont précisés. La trame de la cellule est gris foncé (respectivement blanche) quand l'élève trouve le résultat exact (respectivement inexact). La trame est gris clair quand l'élève n'a pas effectué le calcul.

Tableau : 7.6 : techniques répertoriées pour effectuer $a - b$
(Quatre élèves de la classe A, Sq6)

Le nombre de techniques mises en œuvre est variable d'un élève à l'autre. En l'occurrence, **Héloïse** est la seule élève qui ne mobilise que deux techniques τ_{1010} et τ_{A10} et qui par conséquent, est en difficulté pour effectuer l'ensemble des calculs données. Au vu de ses productions (annexe E.6.3), comme sur l'exemple reprographié ci-dessous, on voit qu'elle décompose correctement le nombre à soustraire en fonction d'un nombre pivot qui correspond à la dizaine entière du nombre auquel elle soustrait mais qu'ensuite elle cherche à soustraire un nombre à deux chiffres (25), sans décomposer ce nombre en dizaines entières et unités isolées ($25=20+5$).

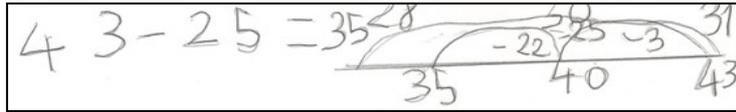


Figure 7.16 : exemple de production associée à l'utilisation de τ_{A10}
(Classe A, ingénierie, S2Sq6)

Mathilde utilise systématiquement et de façon efficace τ_{N10} pour soustraire un nombre à deux chiffres, quand le calcul nécessite de franchir une dizaine entière. Les schémas qu'elle effectue montrent qu'elle décompose astucieusement le nombre à soustraire et qu'elle effectue sans erreur les calculs intermédiaires qui correspondent à des tâches de type $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$.

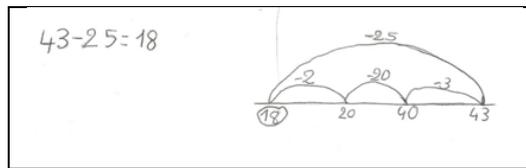


Figure 7.17 : exemple de production associée à l'utilisation de τ_{N10}
(Classe A, ingénierie, S2Sq6)

Valentin et Flora, quant à eux, utilisent pour chaque calcul, une des techniques les plus adaptées du répertoire. Leurs explications tout en étant très personnelles sont claires, précises et attestent d'une compréhension de la technique

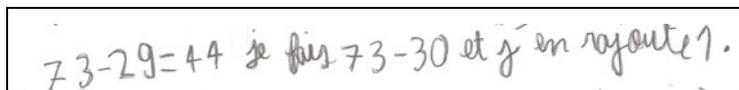


Figure 7.18 : exemple de production associée à l'utilisation de τ_{N10C}
(Classe A, ingénierie, S2Sq6)

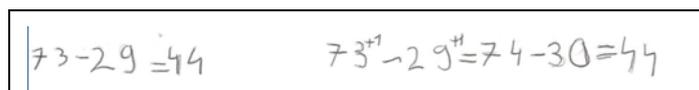


Figure 7.19 : exemple de production associée à l'utilisation de τ_{AN}
(Classe A, ingénierie, S2Sq6)

Pour conclure, il est nécessaire qu'Héloïse arrive à effectuer $T_{a-\square}$ avec *facilité*, qu'elle s'approprie notamment τ_{N10} . Décomposer le nombre à soustraire en une somme de deux termes, ne suffit pas pour obtenir des calculs intermédiaires faciles à exécuter. Pour Mathilde, même si ces résultats sont exacts, il sera utile qu'elle n'automatise pas l'usage d'une seule technique τ_{N10} , et qu'elle réalise que le fait d'utiliser systématiquement la droite numérique vide pour indiquer les étapes du calcul est plus coûteux que d'utiliser pour ostensif, les écritures chiffrées.

V.2. Réflexion autour des techniques enseignées et des ostensifs

Les techniques enseignées permettent aux élèves qui les maîtrisent d'effectuer *avec intelligence* (Artigue, 1990) une tâche de type $T_{a-\square}$. Sont-elles trop nombreuses pour des élèves de CE2 qui ne les maîtrisent pas encore ? Le choix d'instituer par exemple deux techniques pour effectuer une tâche de type $T_{a-\square}$ est-il pertinent ? Au cas, où il faudrait choisir de déterminer des techniques cruciales à enseigner pour le calcul soustractif en général et vers le calcul posé, tout en assurant une certaine cohérence, quelles techniques seraient à privilégier ?

De notre point de vue: $\tau_{ADD/SOUS}$ est la plus « naturelle » (définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels) même si la recherche du complément peut être couteuse; τ_{1010} et τ_{N10} sont incontournables (l'une car elle est facile d'accès, l'autre car elle peut s'appliquer contrairement à la première quelque soit le calcul en jeu); τ_{N10C} ne peut être ignorée (τ_{N10C} étant un prolongement bien utile pour effectuer avec commodité certains calculs, notamment quand un des deux nombres est proche d'un multiple de dix); (τ_{1010}) s'impose en vue d'enseigner l'algorithme de la soustraction posée en colonne basée sur la décomposition; τ_{AN} s'impose en vu d'enseigner l'algorithme de la soustraction posée mettant en œuvre la propriété de conservation des écarts.

De même pour le choix des ostensifs, nous avons fait l'hypothèse que la droite numérique était efficace pour illustrer les différentes étapes d'un calcul au moment de la rencontre avec les techniques séquentielles, mais son utilisation prolongée ne fait-elle pas obstacle à l'apprentissage, en faisant croire aux élèves qu'ils calculent alors qu'ils notent des nombres sans réellement les contrôler ? De plus, ne freine-t-elle pas un travail progressif et régulier sur les écritures numériques ?

Ces questions sont essentielles pour évaluer la pertinence de l'ingénierie, nous y répondrons après avoir analysé *a posteriori* le travail effectué pour installer l'algorithme de la soustraction posée qui s'appuie sur la propriété de conservation des écarts. Le fait d'avoir choisi cet algorithme étant un argument prédominant dans le choix de l'organisation mathématique de référence et, par conséquent, des techniques enseignées.

VI. Découvrir et utiliser l’algorithme de la soustraction par conservation des écarts

Nous conduisons l’analyse *a posteriori* du *moment de découverte* de la technique de la soustraction posée τ_{ALG} , basée sur la propriété de conservation des écarts et d’une situation proposée *calculateur / correcteur* pour travailler, valider et contrôler la technique. Cette analyse doit permettre au premier niveau, de revenir sur le choix des situations proposées sur l’ensemble de la séquence 7, et, à un second niveau, d’évaluer l’organisation mathématique locale construite autour de l’effectuation du calcul soustractif mental et posé. La question est de savoir si le bloc technologico-théorique construit autour de Θ_{DD} et de Θ_{AN} est suffisamment solide et l’organisation didactique adaptée, pour permettre à l’ensemble des élèves d’acquérir à terme, après un moment de travail sur τ_{ALG} , une maîtrise suffisante de τ_{ALG} .

VI.1. Analyse a posteriori de la rencontre avec τ_{ALG}

Nous avons observé la mise en œuvre de S1Sq7 dans les deux classes A et B. Notre analyse est faite à partir des deux transcriptions écrites, proposées en annexe E.7.1 et E.7.2.

Adèle et Bertrand ont suivi le déroulement proposé dans le scénario, en commençant par demander aux élèves d’effectuer les deux calculs $78 - 25$ et $82 - 38$ posés en ligne avant de procéder à la correction et d’annoncer aux élèves l’objectif de la séance, apprendre à poser en colonne une soustraction.

- *Présentation du mode d’emploi de τ_{ALG}*

A chaque étape du calcul correspond un geste. Chaque geste est accompagné d’une explication orale d’ordre pratique afin d’installer des habitudes. Tout ce qui est fait concrètement est détaillé (mettre un chiffre par case, aligner les chiffres, tracer à la règle,...). Nous retrouvons, au niveau du langage, la concision chez Bertrand et la profusion de recommandations dans le discours d’Adèle²³⁵. Les nombres pour Adèle sont et restent *concrets*, souvent associés indirectement à des collections d’objets. C’est ainsi que la gestion de la retenue se fait en ces termes :

« *Le dix qu’on a ici, on le retrouve en bas. Le dix, on va le mettre au dessous du trois dans un sac.* » (Réplique 28, annexe E.7.1)

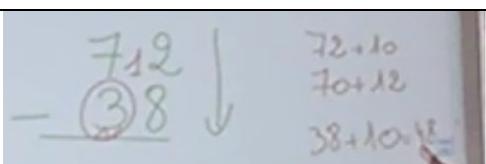
1. ²³⁵ « Pour que ce soit bien propre » (réplique 5) ; « Attention on descend, ce n’est pas comme pour l’addition » (réplique 12) ; « Pour les soustractions, les retenues, elles marchent par deux. On entoure le *trois* et le *un* pour les mettre ensemble » (réplique 29) Annexe E.7.1.

Bertrand *a contrario*, s'appuie sur la proposition d'un élève²³⁶ qui se souvient de la technique apprise en CE1. Il valide le vocabulaire utilisé par l'élève, *on rajoute une dizaine* sans introduire le terme de retenue.

- *Explication de la signification des retenues*

Adèle, dès le début des échanges doit reprendre un élève qui lui propose d'ajouter un au chiffre des unités du premier auquel on soustrait, afin de calculer le chiffre des unités du résultat. Sans questionner les autres élèves du groupe classe, elle rectifie et indique qu'on ajoute dix au premier nombre et dix au second nombre, pour conserver l'écart. Plutôt que d'écrire les retenues directement, elle fait référence à la technique τ_{AN} utilisée précédemment pour effectuer le même calcul en ligne.

M : On va faire comme si on faisait soixante-douze plus dix mais comme tout à l'heure, on va ajouter dix à trente-huit pour conserver l'écart.



Bertrand, quant à lui, attend que le calcul soit fini d'être effectué en colonne, pour amener²³⁷ les élèves à comparer τ_{ALG} et τ_{AN} . La question ne suscite pas réellement l'intérêt des élèves, vu qu'elle n'est pas rattachée à un besoin spécifique. Peut-être que si Bertrand avait projeté la diapositive avec l'ensemble des techniques mises en œuvre pour corriger le calcul effectué précédemment en ligne, il aurait recentré l'attention des élèves et mieux exploité le fait que τ_{ALG} , tout comme τ_{AN} s'appuie sur la propriété des écarts.

Pour conclure, les explications données par les deux enseignants permettent de justifier la présence des retenues. Le fait que la première retenue inscrite dans la colonne des unités corresponde à dix unités est expressément formulé par Adèle²³⁸. En revanche, il n'est pas expressément dit que la seconde retenue, placée dans la colonne des dizaines, vaut une

²³⁶ Mode d'emploi proposé par un élève et validé par Bertrand :

	<p>Quelqu'un d'autre, Théo ? E4 : Deux moins huit, je ne peux pas. M : Qu'est-ce qu'on fait ? E4 : On rajoute une dizaine à deux. M : Viens, je te laisse l'écrire. <i>L'élève écrit la retenue.</i> M : Et ensuite ? E4 : Il faut ajouter une dizaine au trois. <i>L'élève écrit la retenue précédée du signe +.</i> M : Vas y. L'élève calcule mentalement et écrit quatre.</p>
--	--

²³⁷ « M : Ecoutez bien ma question. Quelle est la stratégie que avons-nous étudiée qui se rapproche le plus de ce que nous avons fait avant ? *Les élèves se taisent.*

M : On a vu avant quatre stratégies. Quelle est celle qui se rapproche le plus de ce que Théo explique.

E : Celle où on ajoute dix aux deux nombres. » (Répliques 28,29 et 30, annexe E.7.2)

²³⁸ Dans la classe B, la retenue correspond à une dizaine et non à dix unités.

dizaine. Les élèves perçoivent-ils dans ces conditions qu'un même signe, suivant la place qu'il occupe, n'opère pas de la même manière qu'une fois il vaut dix unités, et l'autre fois une dizaine d'unités ?

- *Moyen de vérifier le résultat*

La question de la vérification du résultat est abordée spontanément par un élève de la classe B. Cette vérification est effectuée mentalement, sous le contrôle de l'enseignant qui précisera que, certes, on peut effectuer une addition mais qu'il faut s'assurer de l'effectuer correctement. Aucun des enseignants n'utilisera par la suite, comme suggéré dans le scénario, l'ostensif, droite numérique pour établir l'équivalence entre $b + c = a$ et $a - b = c$.

VI.2. Analyse a posteriori de la situation *calculateur/ correcteur*

Nous nous appuyons sur la transcription de la séance conduite dans la classe B (cf. annexe E.7.3) et sur les productions écrites des élèves des deux classes pour conduire l'analyse *a posteriori* de la situation *calculateur /correcteur*.

Comme envisagé dans le scénario, Bertrand donne à un élève le calcul $491 - 108$ à effectuer en colonne et à son voisin de table le calcul $451 - 38$ à effectuer également en colonne. Au bout de trois minutes, quand tous les élèves ont fini de chercher, il projette la fiche *calculateur/correcteur* et explique le travail à effectuer. La phase de recherche a duré environ dix minutes. Beaucoup d'élèves ont interpellé l'enseignant car ils n'arrivaient pas à donner un ordre de grandeur du résultat. Les autres tâches ont été effectuées en autonomie. Nous analysons les productions obtenues.

- *Mettre en œuvre τ_{ALG}*

Classe A (16 productions)			Classe B (28 productions)		
Résultat exact	11	69%	Résultat exact	19	68%

- *Evaluer l'exactitude du résultat*

Classe A (16 productions)			Classe B (28 productions)		
Evaluation correcte	15	93%	Evaluation correcte	25	89%

La tâche qui consiste à repérer les erreurs du calculateur a été très bien réussie dans les deux classes. Les élèves ont su vérifier chacun des items et coder correctement les erreurs courantes (erreur de calcul au niveau du chiffre des unités, respectivement des dizaines, non prise en compte des retenues) comme en attestent les trois productions reprographiées en annexe E.7.3.

- *Donner un ordre de grandeur du résultat*

Classe A (16 productions)			Classe B (28 productions)		
Ordre de grandeur exact	9	57%	Ordre de grandeur exact	20	71%

Ces résultats ne sont pas significatifs dans la classe B car l'enseignant a beaucoup aidé les élèves. Il a d'ailleurs fait un point sur cette question en fin de séance. Dans la classe A, un élève (nous pensions qu'il y en aurait davantage) a effectué le calcul initial en utilisant τ_{AN} et trouvé ainsi directement le résultat ($491 - 108 = 493 - 110 = 383$).

- *Vérifier le résultat*

Classe A (16 productions)			Classe B (28 productions)		
Addition posée	13	81%	Addition posée	23	88%

Ceux qui n'arrivent pas à vérifier le résultat refont une soustraction ou ajoutent les deux nombres du calcul soustractif initial.

Pour conclure, la situation *calculateur/correcteur* s'est avérée constructive dans le sens où elle a permis à chaque élève de mettre en œuvre et de valider la technique τ_{ALG} . Même si la fiche donnée aux élèves semblait d'accès difficile, le fait de la présenter collectivement au groupe classe a permis à l'enseignant d'expliquer une à une les consignes et de laisser par la suite les élèves chercher en autonomie. En revanche, afin d'éviter de surcharger le travail de l'élève, nous aurions pu distribuer la fiche mais préciser aux élèves qu'ils n'étaient pas tenu de donner l'ordre de grandeur du résultat, que renseigner la fiche dans sa totalité viendrait par la suite.

VI.3. Analyse *a posteriori* du bloc construit autour de Θ_{DD} et de Θ_{AN}

La mise en œuvre de la situation choisie pour introduire τ_{ALG} montre l'intérêt d'avoir élaboré et consolidé le bloc relatif à Θ_{DD} et de Θ_{AN} au préalable. Les élèves habitués à réécrire un calcul soustractif en ligne en utilisant la propriété de conservation des écarts ont découvert qu'on utilisait la même propriété pour effectuer un calcul en colonne. L'ajout de *dix* aux deux nombres pour conserver l'écart, a été ainsi justifié en référence à une pratique déjà installée, celle de τ_{AN} . Le fait que les élèves n'aient pas eu d'initiatives dans la construction de l'algorithme et que le même signe ait été choisi, le 1 de la retenue, alors qu'il n'opère pas de la même façon suivant la place qu'il occupe, rend la construction de τ_{ALG} fragile. Reste à évaluer si les gestes appris pour effectuer un calcul soustractif posé en colonne seront opérants. D'où l'intérêt de donner aux élèves des moyens pour contrôler et vérifier

leurs calculs en effectuant une addition et en recherchant éventuellement un ordre de grandeur du résultat. La situation *calculateur/correcteur* proposée à cet effet nous semble adaptée à différents moments du processus de construction.

VII. Résultats aux évaluations diagnostique et finale

Dans ce paragraphe, nous donnons les résultats obtenus aux évaluations diagnostique et finale présentées et analysées au chapitre 6 (cf. § II et §VI). La comparaison permet d'avoir une vision des effets de l'imbrication des différentes organisations mathématiques locales sur les apprentissages des élèves et de déterminer l'évolution des techniques et des éléments technologiques mis en œuvre par les élèves pour effectuer différents types de tâches et déterminer les difficultés persistantes. Les tableaux de données sont présentés en annexe F pour l'évaluation diagnostique et G pour l'évaluation finale.

- *Résultats relatifs à $T_{a-\square}$ (annexe F et annexe G.1)*

Nous constatons que la première tâche, $13 - 7$ donnée en évaluation diagnostique (ED) a été globalement bien réussie dans les deux classes. Quatre élèves dans chaque classe n'ont pas trouvé les résultats corrects (4/19 et 4/28). A l'inverse, $421 - 3$ n'est réussie que dans la classe A. Sans avoir d'informations permettant d'inférer les techniques utilisées par les élèves, il est difficile d'interpréter les résultats.

Les tâches proposées²³⁹ en évaluation finale du type T_{a-b} avec $a \geq 200$ et $b \geq 6$ devaient permettre de vérifier que les élèves utilisaient les techniques enseignées et ne privilégiaient pas le comptage.

Les résultats sont très satisfaisants à plusieurs titres :

- ✓ Les élèves ont été capables d'utiliser les écritures chiffrées ou de s'appuyer sur la droite numérique vide pour expliquer leurs techniques. Au total cinq calculs sur soixante-quatorze (5/74) dans la classe A et onze calculs sur cent-quatorze (11/114) dans la classe B sont sans explication.
- ✓ Un seul élève dans chaque classe utilise le comptage.
- ✓ La grande majorité des élèves ont trouvé les résultats corrects aux quatre calculs : un seul élève dans la classe A (respectivement deux dans la classe B) a plus de deux résultats incorrects sur quatre calculs.
- ✓ Les techniques mentales et soustractives enseignées sont mobilisées à bon escient et bien représentées (τ_{1010} ; τ_{N10C} ; τ_{A10} ; τ_{AN}).

²³⁹ Les calculs étaient : $348 - 6$; $235 - 6$; $429 - 9$ et $315 - 8$.

- *Résultats relatifs à $T_{a-\square 0}$ (annexe F et annexe G.2)*

Nous avons donné la même tâche 203 – 10, à effectuer aux évaluations diagnostique et finale. Les résultats sont nettement meilleurs à l'évaluation finale. Vingt réponses justes sur quarante-huit (20/48) à l'évaluation diagnostique, contre trente-huit réponses justes (38/48) à l'évaluation finale. La plupart des élèves des deux classes, pour soustraire dix, ont soustrait trois puis sept. Ils ont mis en œuvre τ_{A10} avec ou sans appui sur la droite numérique vide.

Les résultats obtenus aux deux derniers calculs 321 – 60 et 463 – 90 montrent que chaque classe est constituée de deux groupes d'élèves. Un groupe constitué de dix-sept élèves (17/48) qui n'arrive pas à mettre en œuvre avec efficacité τ_{N10} ou τ_{A10} ou τ_{AN} ou τ_{N10C} et un groupe de trente-et un élèves (31/48) qui maîtrise parfaitement toutes les techniques du répertoire et qui, de surcroît, arrive à évaluer l'ensemble des techniques du répertoire. Les élèves de ce groupe trouvent un moyen économique d'effectuer les calculs en ligne en utilisant τ_{N10C} ou τ_{AN} .

- *Résultats relatifs à $T_{a-\square\square}$ (annexe F et annexe G.3 et G7)*

Nous avons, là encore, donné la même tâche, 31 – 29, à effectuer aux deux évaluations. Les résultats sont nettement meilleurs à l'évaluation finale. Dix-sept réponses justes sur quarante-six (17/46) à l'évaluation diagnostique, contre vingt-six réponses justes à l'évaluation finale (26/46). La plupart des élèves des deux classes ont utilisé τ_{N10C} ou τ_{AN} ²⁴⁰. Un seul élève sur quarante-huit a mis en œuvre $\tau_{ADD/SOUS}$.

Les erreurs constatées viennent, dans l'ensemble, d'un choix inapproprié de technique. Par exemple, effectuer 63–17 en choisissant un et un seul nombre pivot, le nombre 60, s'avère compliqué à gérer au vu des deux calculs intermédiaires à effectuer (trouver le complément de 3 à 17 ; calculer 60–14).

- *Résultats relatifs à $T_{a-\square\square}$ (calcul posé en colonne, annexe F et annexe G.4 et G5)*

Nous rappelons, pour expliquer les résultats obtenus aux évaluations diagnostiques (au total, cinq réponses justes sur quarante-six (5/46)), que les enseignants des deux classes n'avaient pas revu l'algorithme de la soustraction posée avec leurs élèves de CE2. Les résultats aux évaluations finales sont globalement satisfaisants: 79% des élèves de la classe A (15/19) et 75% des élèves de la classe B (21/27) arrivent à effectuer une soustraction avec retenues en mettant en œuvre τ_{ALG} .

²⁴⁰ Un exercice spécifique, qui consistait à associer deux expressions numériques équivalentes a été donné (exercice 8 annexe D.0.2). Les résultats sont difficilement exploitables car dans la classe B, les élèves n'ont pas répondu à la seconde question (cf. annexe F.2).

En revanche, une partie infime des élèves (aucune réponse correcte dans la classe A (0/19) et neuf réponses correctes dans la classe B (9/27)) répond correctement à la question portant sur la « valeur » des retenues. Les réponses erronées montrent que, pour certains élèves, les retenues, quelle que soit la place qu'elles occupent dans le calcul posé en colonne (en haut et en bas), valent toujours dix, alors que, pour d'autres élèves, leur valeur est fonction de la place occupée dans le calcul posé en colonne (en haut un et en bas dix). Dans le second cas, les élèves ne font pas de rapprochement avec la propriété de conservation des écarts. Pour finir, alors que la question de l'ordre de grandeur du résultat est assez bien traitée, les deux classes confondues (trente-trois réponses justes sur quarante-six (33/46)), beaucoup d'élèves n'arrivent pas à vérifier leurs résultats en posant l'addition adéquate (vingt-cinq réponses justes sur quarante-six (25/46)). La tâche qui consiste à vérifier une soustraction posée en posant l'addition correspondante n'a pas été assez travaillée.

- *Résultats relatifs à $T_{\text{Prod.Cal.}}$ (annexe F et annexe G.6)*

Pour le type de tâches $T_{\text{Pro.Cal.}}$, nous étudions les résultats obtenus à l'évaluation finale²⁴¹ au problème inspiré de la situation *mesurer avec une règle cassée*. Les résultats sont peu satisfaisants. Beaucoup d'élèves, quinze sur quarante-six (15/46) ont additionné les deux nombres et n'ont pas cherché l'écart entre ces deux nombres. Deux élèves ont même mesuré la longueur de la bandelette sans tenir compte du fait que le schéma n'était pas à l'échelle. Pour trouver la valeur de la seconde graduation, après translation, seulement deux élèves (2/46) ont formulé la propriété de conservation des écarts. Les autres (15/46) ont préféré ajouter à la valeur de la première graduation, la longueur de la bandelette.

Pour conclure, les résultats obtenus aux évaluations finales²⁴² montrent un enrichissement des compétences et des connaissances développées par les élèves en calcul soustractif. La grande majorité des élèves, plus des trois quarts, les deux classes confondues, arrivent à communiquer avec précision, en réécrivant le calcul ou en utilisant la droite numérique, le mode d'emploi des différentes techniques travaillées pour effectuer des tâches de type $T_{a-\square}$, $T_{a-\square 0}$ et $T_{a-\square\square}$. La majorité des élèves (31/48) arrive également à choisir une technique adaptée pour effectuer un calcul posé en ligne. En calcul posé en colonne, les calculs sur les nombres à deux, voire trois chiffres sont effectués correctement par les trois quarts des élèves. Reste à généraliser l'usage de la technique sur des calculs à trois ou quatre

²⁴¹ Les problèmes posés à l'évaluation initiale portaient sur un tout autre contexte. Les résultats obtenus sont en annexe F. 1 et annexe F.2

²⁴² Pour confirmer ces résultats, une évaluation différée en fin d'année aurait gagnée à être posée.

chiffres, à deux, voire quatre retenues, en posant des calculs de type $651 - 234$, $658 - 274$, $651 - 274$ et à revenir sur la signification des retenues. Autant pour le premier calcul, $651 - 234$, l'ajout porte sur le premier chiffre à droite de 651, il s'agit d'un ajout de dix à 1 et pour compenser d'un ajout d'une dizaine à 5. Autant pour le second calcul, $658 - 274$, l'extension de la description de la technique n'est pas si simple : l'ajout porte sur le second chiffre de 658. On peut dire qu'il s'agit d'un ajout de 10 à 5, mais il s'agit alors d'un ajout de 10 dizaines à 5 dizaines, compensé par l'ajout d'une centaine à 2.

Pour finir, d'autres orientations et changements méritent d'être envisagés pour rendre l'ingénierie plus viable et plus efficace dans l'enseignement ordinaire. Nous les évoquons dans la conclusion générale.

Conclusion générale

Une question sur le choix de la technique opératoire de la soustraction, soulevée en formation continue par des enseignants du premier degré, nous a conduite à déterminer les enjeux de l'enseignement du calcul soustractif sur les entiers naturels dans sa globalité, sans dissocier calcul mental et calcul posé et à analyser les difficultés des élèves (difficultés à mettre en œuvre, à décrire et justifier une technique adaptée au calcul posé) et les erreurs persistantes (calculer chiffre à chiffre dans le sens où c'est possible, ne pas poser de retenues).

L'objectif poursuivi dans la thèse a été le suivant : concevoir et évaluer l'impact sur les apprentissages des élèves d'une ingénierie propre au calcul soustractif, visant à amener les élèves à décrire, expliquer, évaluer et justifier mathématiquement un ensemble de techniques de calcul soustractif sur les entiers naturels, en introduisant, entre autres, un travail régulier et progressif sur les écritures numériques.

Nos premières questions ont porté sur la construction d'une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif sur les entiers naturels. En suivant une approche écologique (Artaud, 1997), nous avons motivé l'existence de quatre organisations mathématiques locales qui s'imbriquent au moins partiellement entre elles. Nous revenons sur cette construction au paragraphe 1.

Ce modèle théorique nous a servi pour fonder l'organisation mathématique de l'ingénierie, analyser les organisations mathématiques à enseigner proposées par les auteurs d'*Euro Maths (2001 & 2010)* et d'*Outils pour les Maths (2012)* en CE1 et en CE2, ainsi que pour « reconstruire » les parcours cognitifs de séances de calcul mental observées dans trois classes de CE2. Nous présentons au paragraphe 2 les éléments saillants que l'étude a permis de relever.

Les éléments que nous avons prélevés, ainsi qu'une meilleure connaissance des habitudes et des contrats mis en œuvre par les enseignants, nous ont servi à apprêter le savoir à enseigner. Dans le paragraphe 3, nous montrons comment nous avons conçu les cinq blocs²⁴³ d'enseignement de l'ingénierie, en rapport avec l'organisation mathématique de référence.

L'expérimentation nous a conduite, au vu de la manière dont les enseignants se sont appropriés les diverses propositions de scénarii de chacun des blocs de l'ingénierie, à interroger nos choix de mise en scène des savoirs et à envisager d'éventuelles modifications. Dans le paragraphe 4, nous revenons sur cette question de la recherche des conditions de viabilité de l'ingénierie.

Dans le paragraphe 5, au vu de l'évolution des pratiques des élèves, nous rendons compte des effets de la mise en œuvre de l'ingénierie sur les compétences des élèves pour effectuer un calcul soustractif mental ou posé.

Pour finir, nous revenons sur les limites de ce travail de thèse et proposons quelques pistes pour poursuivre le travail de recherche engagé sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif sur les entiers naturels à l'école élémentaire.

²⁴³ Les cinq blocs sont : effectuer un calcul soustractif, décrire la technique utilisée; donner du sens à la notion d'écart et de différence ; découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts ; mobiliser les différentes techniques enseignées ; découvrir et utiliser l'algorithme.

I. La construction d'une organisation mathématique de référence sur le calcul soustractif

L'étude épistémologique et didactique menée au chapitre 2 de la thèse nous a conduite à mettre en évidence quatre organisations mathématiques locales : OM1, construite autour de la production de calculs additifs et soustractifs, OM2 convoquée par OM1, basée sur la mise en relation de différentes représentations sémiotiques (expressions mathématiques, schémas associés à la droite numérique), OM3 propre à l'effectuation des calculs, mental ou posé en colonne, et OM4 convoquée par OM3, centrée sur la réécriture de calculs.

En affinant notre analyse des genres et des types de tâches propres à l'effectuation de calculs (OM3), nous avons montré que le calcul soustractif, mental et posé est fédéré par quatre technologies savantes, Θ_{DD} , Θ_D , $\Theta_{ADD/SOUS}$ et Θ_{AN} . Les deux premières, Θ_{DD} et Θ_D , engendrent des techniques basées sur la décomposition des deux termes du calcul (τ_{1010} et $(\tau_{1010})'$) ou des techniques séquentielles basées sur la décomposition d'un seul terme (τ_{A10} , τ_{N10} et τ_{N10C}). La troisième technologie $\Theta_{ADD/SOUS}$ produit une technique qui consiste à rechercher le complément de a à b pour calculer a – b. La quatrième technologie, Θ_{AN} , génère une technique τ_{AN} , basée sur la propriété de conservation des écarts, qui consiste à ajouter ou soustraire un même nombre au deux termes du calcul, et l'algorithme τ_{ALG} de la soustraction posée basée sur la même propriété, qui consiste à ajouter un multiple de dix au deux termes du calcul.

Nous avons également utilisé comme ostensifs les écritures chiffrées, les arbres à calcul, la droite numérique vide ou graduée, pour montrer les différentes étapes d'un calcul, visualiser l'écart entre deux nombres, expliquer voire valider la technique envisagée. D'autres fonctions de la technologie ont été relevées, notamment celle qui consiste à motiver la technique (en analysant la nature et la taille des nombres en jeu) ou à l'évaluer en considérant sa portée (nous pensons à τ_{1010}) ou en la comparant à d'autres (τ_{N10} généralisable, τ_{N10C} et τ_{AN} supérieures, quand le nombre à soustraire est proche d'un multiple de dix).

C'est à partir de l'organisation mathématique de référence que nous avons construite que nous avons étudié les organisations mathématiques à enseigner proposées par les auteurs d'*Euro Maths* (2001&2010) et d'*Outils pour les Maths* (2012) en CE1 et en CE2, et reconstruit les parcours cognitifs correspondant à des séances de calcul mental observées dans

deux classes de CE2. Nous donnons les résultats saillants de cette étude au paragraphe suivant.

II. La caractérisation des différentes OM locales dans certains manuels et dans les pratiques des enseignants observés

Nous commençons par l'étude des manuels destinés à l'élève et des guides destinés au professeur d' *Euro Maths* (2001&2010) et d' *Outils pour les Maths* (2012) en CE1 et en CE2, avant de revenir sur les pratiques des enseignants observés en calcul mental.

a) Etude des manuels

- *Les organisations mathématiques locales présentes et leurs liens*

Les deux manuels proposent un travail conséquent au niveau de la *production de calculs* (OM1) et de *l'effectuation de calculs* (OM3) et associent parfois à ce travail une mise en relation des représentations sémiotiques (OM2). En revanche, *la réécriture de calcul* (OM4) est absente de l'organisation mathématique retenue par les auteurs d' *Outils pour les Maths*, alors que le travail propre à la réécriture de calculs en ligne est amorcé par les auteurs d' *Euro Maths*. Globalement, la mise en évidence des liens entre les organisations locales est plus marquée dans *Euro Maths* que dans *Outils pour les Maths*, même si l'imbrication entre les organisations mathématiques n'est pas toujours lisible. Il semblerait que, dans l'ensemble, les tâches proposées aux élèves soient souvent juxtaposées (produire, effectuer, éventuellement récrire) sans qu'il soit précisé clairement dans le guide du professeur ce que l'une apporte à l'autre et réciproquement. Par exemple, récrire permet d'effectuer, d'expliquer, voire de valider éventuellement, une technique.

- *Le choix des ostensifs*

Les auteurs d' *Euro Maths* utilisent principalement les écritures chiffrées et, de manière ponctuelle, la droite numérique vide, alors que les auteurs d' *Outils pour les Maths* utilisent, surtout en CE1, des dessins imagés de collections et éventuellement les écritures chiffrées pour noter les calculs en ligne.

- *Les techniques attendues pour effectuer un calcul soustractif*

Pour les deux manuels, les types de tâches propres à *l'effectuation de calcul mental* (OM3) sont sensiblement les mêmes. En revanche, les techniques à enseigner pour un même type de tâches ne se recoupent pas toujours. *Outils pour les Maths* laisse vivre des techniques de comptage en proposant de nombreux calculs où le nombre à soustraire est *un* ou *deux* ou *trois*.

Contrairement à *Euro Maths*, les auteurs introduisent T_{a-9} et institutionnalisent alors τ_{N10C} pour soustraire un nombre à deux chiffres ($T_{a-\square\square}$).

En calcul mental, *Euro Maths* privilégie l'utilisation de τ_{N10} , alors qu'*Outils pour les Maths* introduit une technique à portée limitée τ_{1010} . Aucun des deux manuels n'étudie les deux techniques, τ_{N10} et τ_{N10C} qui se réfèrent à la technologie Θ_D et un seul manuel, *Outils pour les Maths*, étudie τ_{1010} qui se réfère à Θ_{DD} . Les auteurs d'*Euro Maths* introduisent par ailleurs en CE2 une technique (cas particulier de τ_{AN}) basée sur la propriété de conservation des écarts qu'ils dénomment technique à la « russe » et qui consiste, pour effectuer $a - b$, à ajouter aux deux termes du calcul, le complément de b à la dizaine entière supérieure à b .

En calcul posé, les deux manuels étudient la même technique τ_{ALG} de soustraction posée, les auteurs d' *Euro Maths* ayant au préalable introduit et utilisé la propriété de conservation des écarts pour effectuer $Ta-b$ avec b nombre à trois chiffres en calcul mental.

- *Les reprises ou les rencontres avec de nouveaux types de tâches*

Les moments de reprise ou de rencontre avec de nouveaux types de tâches en calcul mental sont très souvent mis en scène à partir d'assortiments au sens de Genestoux (2002), pour *Outils pour les Maths*. Les auteurs d'*Euro Maths* proposent alternativement des situations modélisant des jeux (celui de la boîte ou du déplacement sur une piste) et des assortiments.

- *Les éléments théoriques présents*

Il apparaît dans l'ensemble que les connaissances théoriques et didactiques destinées au maître sont plus développées par les auteurs d'*Euro Maths*. Les auteurs d'*Outils pour les Maths* ne précisent pas les techniques *a priori* attendues des élèves et ne donnent que très peu d'éléments pour expliquer et valider les techniques de calcul mental et posé. Les institutionnalisations locales mettent surtout en avant le mode d'emploi des techniques.

b) Etude des pratiques des enseignants observés

Les entretiens que nous avons menés avec deux enseignants expérimentés de CE2, Adèle et Bertrand, avant de réaliser des observations non participatives et participatives dans leurs classes (cf. chapitre 4, §III.1), avaient montré que tous deux accordaient beaucoup d'importance au calcul mental, à sa valence pragmatique et cherchaient à créer avant tout des automatismes chez les élèves.

L'analyse des organisations mathématiques enseignées, dans les classes respectives d'Adèle et Bertrand, suite à des observations non participatives (cf. chapitre 4) a montré que celles-là étaient proches du modèle à enseigner proposé par *Outils pour les Maths (2012)*. A l'échelle d'une séance, les modalités choisies pour permettre aux élèves de s'entraîner à calculer mentalement, étaient dérivées du procédé La Martinière. Les types de tâches donnés par les enseignants étaient semblables et les techniques attendues étaient basées sur la décomposition des nombres (τ_{1010} , τ_{1A10} et τ_{N10C}), et sur le comptage dans la classe d'Adèle. Seuls les ostensifs, désignations orales des nombres et écritures chiffrées pour écrire les calculs étaient utilisés ; peu d'éléments théoriques étaient institutionnalisés. Des temps collectifs étaient consacrés à la correction. Ces temps permettaient à l'occasion, quand un élève interrogé donnait une réponse incorrecte, d'exposer le mode d'emploi d'une, voire deux techniques.

La propriété de conservation des écarts n'était pas établie en amont, afin de construire le bloc technologico-théorique Θ_{AN} et d'introduire une technique de calcul mental (τ_{AN}) ainsi que l'algorithme de la soustraction posée en colonne (τ_{ALG}).

III. La construction d'une ingénierie en accord avec l'organisation mathématique de référence

L'ingénierie que nous avons construite a été conçue à partir de l'organisation mathématique de référence. Les éléments prélevés, suite aux observations non participatives et participatives dans trois classes de CE2, ainsi que l'analyse de manuels nous ont servi pour *apprêter* l'ingénierie, en essayant de prendre en compte les contraintes et les conditions de l'enseignement ordinaire. Nous revenons sur les questions d'adaptabilité au paragraphe suivant.

L'ingénierie est composée de cinq blocs d'enseignement. Le premier bloc, *effectuer un calcul soustractif, décrire la technique utilisée*, engage les élèves à effectuer des types de tâches propres à OM3, $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$ qui ne sont pas nouveaux pour les élèves. En revanche, nous avons émis l'hypothèse que le fait d'associer, en parallèle à l'effectuation de calculs (OM3), un travail sur les représentations sémiotiques (OM2) et un travail de réécriture des calculs (OM4) est un levier pour amener chaque élève à construire, pas à pas, sa propre maîtrise des techniques de calcul. La question du *comment as-tu fait ?* au sens de Vermersch (1994), conduit l'élève à expliciter au moyen des ostensifs de son choix, des éléments

théoriques de plus en plus nombreux (à l'écrit comme à l'oral) et à communiquer de mieux en mieux la technique mise en œuvre à l'ensemble de la classe.

L'imbrication des organisations mathématiques locales de l'organisation mathématique de référence participe également à la construction des blocs 2 et 3 de l'ingénierie, *donner du sens à la notion d'écart et de différence, découvrir, utiliser la propriété de conservation des écarts*. Ceux-ci mobilisent principalement la production de calcul (OM1) et l'effectuation des calculs (OM3), en lien avec la mise en relation de représentations sémiotiques (OM2) et la réécriture de calculs (OM4), et permettent d'introduire la propriété de conservation des écarts dans le contexte de la mesure, avant de généraliser son utilisation en calcul mental (introduction de τ_{AN}), pour finir par l'utiliser en calcul posé (introduction de τ_{ALG}).

Un autre élément crucial de l'organisation mathématique de référence, que nous avons intégré à l'ingénierie à travers les propositions de scénarii, fait appel à l'utilisation des ostensifs comme les écritures chiffrées, les unités de numération, les arbres de calcul, pour justifier mathématiquement toutes les techniques et la droite numérique vide ou graduée pour illustrer la mise en œuvre de techniques séquentielles (τ_{N10} et τ_{N10C}) ou de la technique basée sur la propriété de conservation des écarts (τ_{AN}).

IV. La recherche de conditions de viabilité dans l'enseignement ordinaire

La mise en œuvre effective de l'ingénierie dans les classes d'Adèle et Bertrand permet de revenir sur les situations des différents blocs d'enseignement de l'ingénierie et de s'interroger sur l'adaptation des situations au niveau de la composante médiative et sur le plan cognitif (que ce soit des problèmes ou des suites d'items à calculer), dans le but d'envisager des améliorations ou des modifications au niveau des choix de mise en scène des savoirs et de l'écriture des scénarii.

- *Premier et troisième bloc : situations visant principalement à s'exercer à calculer mentalement (OM3)*

La plupart des situations proposées dans les scénarii²⁴⁴ des premier et troisième blocs avaient une composante médiative inspirée de celle observée à l'occasion des observations non participatives : les élèves avaient à effectuer trois séries de quatre calculs. Pour chaque calcul, ils devaient décrire la technique qu'ils mettaient en œuvre. Sur un ensemble de quatre calculs, trois s'apparentaient volontairement à un assortiment, au sens de Genestoux (2002), et étaient choisis pour inférer l'utilisation d'une technique²⁴⁵ « τ_a ». Le quatrième calcul, *l'intrus* de la série, correspondait à un même type de tâches, mais pouvait être effectué en utilisant une autre technique de résolution plus adaptée que « τ_a ».

Les moments de synthèse entre deux séries de calculs ont montré qu'Adèle et Bertrand étaient attachés à ce que les élèves restituent le mode d'emploi des différentes techniques qu'ils avaient mises en œuvre. Ainsi, de nombreux échanges entre élèves et enseignant se sont succédés, sous le contrôle et la responsabilité de l'enseignant, permettant d'expliquer et de valider chaque technique. Chaque moment de synthèse, autant dans la classe A que dans la classe B, s'apparentait à un cours dialogué, au sens de Hersant (2010). Les éléments théoriques présents dans les différents scénarii ont été transposés dans chaque classe. Au niveau des ostensifs, Bertrand, au fil des séances, a privilégié les écritures chiffrées, et Adèle, les schémas avec appui sur la droite numérique.

Une autre situation, *facile/pas facile*²⁴⁶, a été mise en œuvre (S2 Sq6). Le fait de confronter les élèves à une pluralité de points de vue, et de faire le point sur l'ensemble des techniques apprises a été bien intégré par Adèle et Bertrand.

Pour conclure, les conditions créées autour des situations propres à l'effectuation des calculs, construites autour des séries de calculs, sont viables dans l'enseignement ordinaire et adaptées au contenu visé (découvrir une technique, installer une technique, construire le bloc technologico-théorique correspondant). Cependant elles n'impliquent pas tous les élèves (en particuliers ceux qui connaissent peu les tables d'addition, de soustraction, les compléments et ont des connaissances fragiles en numération) pendant les temps de recherche individuelle et au moment du cours dialogué. Pour qu'elles soient davantage appropriées à l'ensemble des

²⁴⁴ Précisément les scénarii des séances S1Sq1, S2Sq1, S3Sq1, S1Sq2, S2Sq2, S3Sq2 et S1Sq6

²⁴⁵ τ_a est éventuellement τ_{1010} , $(\tau_{1010})'$, τ_{N10} , τ_{N10C} , $\tau_{ADD/SOUS}$ ou τ_{AN} .

²⁴⁶ La première consiste à trier les calculs qui semblent faciles de ceux qui ne semblent pas faciles.

élèves, des séries de calculs différents, mieux ciblées suivant les difficultés pourraient être proposées et effectués en alternance (avec ou sans aide) et corrigées de façon « moins » frontale. A l'inverse, la situation plus ponctuelle, *facile / pas facile* a permis de créer une dynamique et de revenir sur les techniques « apprises » même si des modifications méritent d'être apportées (nombre et nature des calculs à donner, formulation des consignes, ...).

- *Second bloc : situations visant principalement à produire des calculs (OM1) dans le but de construire le bloc relatif à $\Theta_{ADD/SOU}$ et ultérieurement Θ_{AN}*

Lors de la première séance de la séquence 3, les élèves ont été invités à résoudre (en binômes) un problème de comparaison extrait d'*Euro Maths (2001)* et, dans le prolongement en séance 2, à résoudre (toujours en binômes) trois problèmes de double comparaison. Autant le problème extrait d'*Euro Maths (2001)* et les problèmes de double comparaison ont été porteurs dans la classe de Bertrand au vu des productions des élèves (riches, variées avec des erreurs exploitables), autant les mêmes énoncés donnés dans les mêmes conditions (recherche par binôme) ont été contre-productifs dans la classe d'Adèle. L'aide procédurale, au sens de Robert (2003) amenée par Adèle n'a pas permis aux élèves de prendre des initiatives, d'essayer, de réajuster et de contrôler leurs résultats. Il est donc difficile de se prononcer sur la viabilité de la situation dans l'enseignement ordinaire. Son intégration dépend essentiellement du contrat didactique établi entre enseignant et élèves.

Lors de la séquence 4, la situation de *la règle cassée* et la situation *challenge* ont été expérimentées dans les deux classes. Les enseignants se sont appropriés avec facilité la composante médiative des scénarii. Les déroulements effectifs dans les deux classes donnent des résultats comparables au niveau de l'analyse *a posteriori*, et montrent que, sur le plan cognitif, des modifications sont nécessaires. Les mesures des segments à mesurer sont à changer (proposer des segments de longueur supérieurs à 20 cm) pour amener les élèves à abandonner les techniques basées sur le comptage.

- *Quatrième bloc : situations visant à introduire et à utiliser la propriété de conservation des écarts en calcul mental*

La situation *translation de la bandelette* et les situations qui ont suivi étaient très guidées. Bertrand a suivi la proposition de scénario et formulé de façon ostensive la propriété de conservation des écarts, en s'appuyant sur la manipulation et le schéma illustrant la translation de la bandelette. Adèle a également présenté la propriété de façon ostensive, mais s'est détachée totalement du scénario pour s'appuyer sur une situation qu'elle jugeait plus concrète

et proche du vécu des élèves (cf. chapitre 7, §IV.1). Les modifications, déjà apportées à la situation de la *translation des bandelettes* conduite dans le cadre des observations participatives, n'ont pas suffi pour créer des conditions favorables pour amener les élèves à formuler la propriété de conservation des écarts dans un contexte autre que celui de la mesure. L'activité qui consiste à rechercher des expressions numériques équivalentes à $a - b$, de la forme $(a + n) - (b + n)$ a été proposée, faute d'avoir retravaillé à partir de situation comme celle de Le Poche présentée au chapitre 3 (§ V.1.1) ou retravaillé à partir des nouvelles propositions des auteurs d'*Euro Maths* (CE1, 2011), afin de trouver une situation plus adaptée pour atteindre l'objectif fixé.

- *Cinquième bloc : situations visant à installer l'algorithme de la soustraction posée basé sur la propriété de conservation des écarts (τ_{ALG})*

La première situation (S1Sq7) conçue pour que les élèves s'interrogent et établissent « eux-mêmes » un rapprochement entre τ_{AN} et τ_{ALG} est à reprendre. Les déroulements respectifs, dans les deux classes, montrent qu'avec la mise en scène proposée la question du pourquoi est vite résolue par l'enseignant « on ajoute dix aux deux nombres pour conserver l'écart » et détournée au profit du comment « on met une retenue ici et une retenue là ». Le fait que les élèves n'aient pas eu d'initiatives dans la construction de l'algorithme rend la construction de cet algorithme fragile. La situation *calculateur/correcteur* proposée à la suite, pour donner aux élèves des moyens de contrôler et de valider leurs résultats, même si elle a été difficile à mettre en place dans les deux classes²⁴⁷, est adaptée à l'objectif visé et facilement exploitable²⁴⁸ en classe.

V. Effets de l'ingénierie sur les praxéologies des élèves

Les retombées de la mise en œuvre de l'ingénierie sur les compétences des élèves sont perceptibles, au regard de l'évolution de leurs productions sur l'ensemble des séances, et au vu des résultats obtenus aux évaluations finales.

Alors que sur les premières séances, très peu d'élèves arrivaient à décrire la technique qu'ils mettaient en œuvre pour effectuer un calcul et se contentaient d'indiquer le résultat du

²⁴⁷ Les élèves n'avaient jamais auparavant repéré et codé des erreurs, donner l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul soustractif.

²⁴⁸ La fiche distribuée aux élèves peut-devenir une fiche autocorrective.

calcul, la grande majorité des élèves, plus des trois quarts, les deux classes confondues, arrivent aux évaluations à indiquer avec précision, en réécrivant le calcul ou en réalisant un schéma avec appui sur la droite numérique, le mode d'emploi de la technique.

Une autre retombée possible de l'ingénierie est de constater qu'environ les deux tiers des élèves (31/48), au fil des séquences de l'ingénierie et en particulier aux évaluations finales sont capables de choisir une technique adaptée pour effectuer $a - b$ en fonction des valeurs de a et de b (b étant un nombre à deux chiffres). Leurs productions permettent en effet d'inférer l'utilisation de τ_{1010} , de τ_{N10} et de τ_{N10C} ou τ_{AN} .

Le tiers des élèves restant (17/48), au vu des résultats aux évaluations finales a encore des difficultés pour effectuer $a - b$ avec b nombre à deux chiffres. Soit ils utilisent systématiquement τ_{1010} , sans tenir compte de son domaine de validité, soit ils réalisent un schéma. Le schéma avec appui sur la droite numérique fait « écran ». Ecran, car les élèves en traçant une ou deux flèches, en notant éventuellement sur la droite numérique vide le multiple de dix inférieur au nombre auquel on soustrait, produisent des signes et ne vont pas « jusqu'au bout » de leurs calculs. Ils ont rempli tacitement le contrat qui consiste à ne pas utiliser une pratique basée sur le comptage et à ne pas poser mentalement l'opération en colonne, mais n'arrivent pas à gérer et effectuer les calculs intermédiaires.

Un dernier résultat porte sur l'usage et la maîtrise de l'algorithme de la soustraction posée en colonne. Environ soixante -quinze pour cent des élèves (36/46) arrivent à appliquer correctement la technique aux items posés en évaluation finale (calculs sur des nombres de trois chiffres). En revanche, nous avons fait l'hypothèse que le fait de construire au préalable le bloc technologico-théorique autour de Θ_{AN} et de $\Theta_{ADD/SOU}$ permettrait aux élèves de donner la signification des retenues et de vérifier leurs calculs en posant une addition. Les productions obtenues à l'évaluation finale révèlent beaucoup de confusion et amènent éventuellement à questionner de nouveau la « posture cognitive » générée par l'utilisation de l'algorithme selon Thompson (1999) (cf. chapitre 2 §IV.1).

VI. Limites et perspectives

Même si l'ingénierie construite et mise en œuvre dans deux classes de CE2 a eu des effets globalement positifs sur les compétences des élèves en calcul soustractif, il nous semble important de revenir sur ce qu'elle n'a pas permis d'atteindre, pour engager quelques pistes de réflexion et ouvrir des perspectives ...

- *Pas assez de différenciation pédagogique, pas de co-construction du savoir autour de la technologie relative à la propriété de conservation des écarts (Θ_{AN})*

Le travail régulier et progressif sur les écritures numériques même s'il s'est avéré « porteur » pour la majorité des élèves n'a pas été convaincant pour permettre à un tiers des élèves de progresser et d'arriver à calculer en ligne $a - b$ avec b nombre à deux chiffres. L'introduction de l'ostensif droite numérique, même s'il permet de visualiser les étapes d'un calcul, n'aide pas l'élève à effectuer le calcul à proprement parler. De même, le fait d'explorer d'emblée plusieurs techniques, avant de stabiliser l'usage de certaines d'entre elles, n'est pas forcément bénéfique pour tous les élèves. Autre limite, les situations proposées pour construire le bloc technologico-théorique autour de la technologie relative à la propriété de conservation des écarts (Θ_{AN}), étaient trop fermées et laissaient peu d'initiatives aux élèves.

- *Des pistes de réflexion, des perspectives...*

Ce travail de thèse n'est qu'un début. Afin de concevoir une ingénierie qui *vise à amener les élèves à décrire, expliquer, évaluer et justifier mathématiquement un ensemble de techniques de calcul soustractif sur les entiers naturels*, des questions sur l'organisation mathématique à enseigner méritent d'être approfondies. Le travail régulier sur les écritures numériques peut-il être mené en amont, et réinvesti en calcul additif, multiplicatif ? La droite numérique est-elle une aide dans le processus de conceptualisation ? Les techniques à enseigner sont-elles trop nombreuses ? Faut-il les hiérarchiser de la plus naturelle à la plus coûteuse ou mettre en avant leur complémentarité ?

D'autres questions concernant l'organisation didactique peuvent être soulevées : faut-il jumeler l'étude du calcul additif avec l'étude du calcul soustractif ? Faut-il programmer de façon linéaire les cinq blocs de l'ingénierie ? Quelles situations didactiques méritent d'être retravaillées, pour être expérimentées à nouveau par les mêmes enseignants, par d'autres enseignants ?

Une nouvelle visée de recherche serait alors d'engager un travail coopératif avec cinq, six professeurs du premier degré et de constituer un groupe de recherche. Cela supposerait de définir une nouvelle méthodologie et d'impliquer davantage les enseignants à la conception, à la mise en œuvre des différents moments de l'étude, de leur laisser plus de responsabilité pour « apprêter », selon Ravel (2003), le savoir à enseigner, et d'organiser des retours sur leurs pratiques. Le fait d'être confrontés aux mêmes contraintes institutionnelles et d'être impliqués dans un projet fédérateur, tourné vers la réussite des élèves, peut favoriser l'élaboration d'une ressource sur le calcul soustractif.

Références

- Arnaudies J.-M., Fraysse, H. (1989). *Cours de mathématiques, algèbre. Classe préparatoire Universitaire*. Dunod Université.
- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In Bailleul M., Comiti C., Dorier J.-L., Lagrange J.-B., Parzysz B., Salin M.-H. (Eds). *Actes de la 9^{ième} école d'été de didactiques des mathématiques*, (p. 100-139). Houlgate : ARDM et IUFM de Caen.
- Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives, *Repères-IREM*, 54, 23-39.
- Artigue, M. (2005). L'intelligence du calcul. In conférence à l'Université d'été de mathématiques, Saint Flour. Disponible en ligne : http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc (consulté le 11/07/15).
- Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.15-25). Grenoble : la Pensée Sauvage.

- Balas-Chanel, A. (2002). L'entretien d'explicitation. Accompagner l'apprenant vers la métacognition explicite, Eduquer. Disponible en ligne : <http://rechercheseducations.revues.org/159> (consulté le 16/07/2015).
- Balman, L. (2001). Etude d'un objet combinatoire : le graphe. *Petit x*, 56, 35-60.
- Baroody, A. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught? *Journal for research in mathematics education*, 21(4), 281-286.
- Bezout, E., Reynaud, M. (1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L. Reynaud*. Disponible en ligne : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table> (consulté le 11/07/15).
- Bobis, J., Bobis, E. (2005). The empty number line : Making children's thinking visible . Disponible en ligne: <file:///C:/Users/camille/AppData/Local/Microsoft/Windows/INetCache/IE/CFI21X57/Bobis%20J%20and%20E%202005.pdf> (consulté le 01/08/ 2015)
- Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M., Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12^{ième} Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 aout 2003* (p. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Boule, F., (1994-1995). Regards sur le calcul mental. *Grand N*, 58, 39-52.
- Boule, F., (1997). *Performances et démarches de calcul mental au cycle 3*. Thèse de doctorat. Villeneuve d'Asq, Presses universitaires du Septentrion.
- Bouvier A., George M., Le Lionnais F. (2005). *Dictionnaire des mathématiques*. PUF.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques*, 19(3), 303-336.
- Brousseau, G. (1997). Eviter les échecs prématurés : quelles conditions ? Quelles actions ? Quelles limites ? *Mathématiques de base pour tous* (p.33-46). Aleas éditions.
- Brousseau, G. (2000). Education et Didactique des mathématiques. Disponible en ligne : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/62/60/PDF/Mexico_2000_HAL.pdf (consulté le 11/07/15).

- Brousseau, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. Disponible en ligne : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf. (consulté le 15/12/ 2014).
- Bueno-Ravel, L., Lepoche, G. (2011). Situations de « référence » pour enseigner le numérique au cycle 2. *Actes du XXXVIII ième colloque de la COPIRELEM*. Dijon, 1-14.
- Butlen D., Charles-Pézar, M. (2000) Calcul mental et résolution de problèmes au début du collège. *Repères IREM* 41. 5-24
- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental, entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche Comté, Besançon.
- Butlen, D., Charles-Pézar, M. (2003). Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherche en Didactique des mathématiques*, 23(1), 41-78.
- Butlen, D., Charles-Pézar, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N*, 79, 7-32.
- Caron, F. (2007). Au cœur de « la calculatrice défectueuse » : un virus qu'on souhaiterait contagieux ! *Petit x*, 73, 71-82.
- Carpenter, T.-P., Franke, M.- L., Jacobs, V.-R., Fennema, E., Empson, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), 3-20.
- Castela, C., (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.
- Castela, C., Romo Vazquez, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.
- Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? Disponible en ligne : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf (consulté le 11/07/15).

- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques: l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'école d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle* (p.91-120). Clermont- Ferrand : IREM de Clermont - Ferrand.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Chevallard, Y. (2002), Organiser l'étude. 1: Structures & fonctions, *actes de la XI e école d'été de didactique des mathématiques*, (3-33), Grenoble : La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Disponible en ligne : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62 (consulté le 11/07/15).
- Chevallard, Y. (2006). La théorie anthropologique des faits didactiques devant l'enseignement de l'altérité culturelle et linguistique. Le point de vue d'un outsider. Disponible en ligne: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=70
- Clarke, D.-M. (2005). Written Algorithms in the primary years: Undoing the “good work”? *Making mathematics Vital. Proceedings of the twentieth Biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers edited by M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer*, (p. 93- 99).
- Coulange, L., Grugeon, B. (2008). Pratique enseignante et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-25.
- D'Enfert, R. (2003). *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours*. Edition INRP.
- De Corte, E., Verschaffel, L. (1987). The effect of structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for research in mathematics education*, 18 (5), 363-381.
- Diezmann, C. N., Lowrie, T., Sugars, L.A. (2010). Primary students' success on the structured number line. <http://eric.ed.gov/?id=EJ906683>. (consulté le 15/12/2014).
- Doritou, M., Gray, E. (2009). *Teachers' subject knowledge: the number line representation*. Disponible en ligne: <http://fractus.uson.mx/Papers/CERME6/wg10.pdf>. (Consulté le 15/12/14).

- Durpaire, J.-L., Bouysse, V., Hébrard, J., Leblanc, M., Saint-Marc, C., Sorbe, X. (2006). L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. *Rapport de l'Inspection générale de l'enseignement supérieur et de la Recherche*. N° 2006-034. Ministère de l'Éducation nationale, Enseignement supérieur, Recherche. Disponible en ligne : <http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf> (consulté le 11/07/2015).
- Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensées en mathématiques. *Actes du 32^{ième} colloque sur la formation des maîtres*, (67- 89). IREM de Strasbourg.
- Elia, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 45-66. IREM de Strasbourg.
- Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics*, 16, 411- 424.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T.-P., Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.
- Gagatsis, A., Shikalli, M., Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.
- Genestoux, F. (2002). Les assortiments didactiques. TD2 du thème 2. *Actes de la XI^{ème} Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 177-186). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Gobert, S. (2012). Conception sémiotique de l'ostension didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(3), 333-360.
- Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 443-471.
- Guinet, R. (1978). Histoire des techniques opératoires. *Grand N*, 14, 53-68.
- Heinze, A., Star, J.-R., Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540.
- Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2),

241-248, disponible en ligne : <https://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00450482/document>
(consulté le 11/07/15).

Klein, A.-S., Beishuizen, M., Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443- 464.

Larguier, M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession*. Université de Montpellier II. Sciences et Techniques du Languedoc.

Lebesgue, H. (1975, édition originale 1915). *La mesure des grandeurs*. Editions Albert Blanchard, Paris.

Lethielleux, C. (2001). *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux*. Bordas.

Lethielleux, C. (2001). *Le calcul mental au cycle des approfondissements*. Bordas.

Margolinas, C., Mercier, A., Rene de Cotret, S. (2007). Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques?* Actes des journées mathématiques INRP (p.25-36). Lyon : INRP.

Mariotti, M.-A. (2011). Artefacts et signes dans la théorie de la médiation sémiotique. *Actes de la XVI ième école d'été de didactique des mathématiques de Carcassonne, du 21 au 28 aout 2011*, (p.197-218). La pensée sauvage éditions.

Mariotti, M.-A., Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémantique: une ressource pour le professeur. *Le travail documentaire des professeurs, Ressources vives*, (p.91-107). PUR Réseau des Universités Ouest Atlantique.

Marjanović, M.M., Mandić, A.-N. (2009). Understanding algorithms of vertical addition and subtraction. *The teaching of mathematics*, XII (2), 57-72.

Maurel, M., Sackur, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, 85, 43-59.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

Noirfalise, A., Matheron, Y. (2009). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire. Les quatre opérations sur les nombres entiers*. Vuibert.

- Perrin-Glorian, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Perrin-Glorian, M-J. (2012). Eclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revue n°4. Novembre 2012*. Editeurs : C.Chambris, E. Mounier, P. Nebout, M-J. Perrin-Glorian.
- Peters, G. De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquiere, P., Verschaffel, L. (2012). Children's use subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies Mathematics*, 79, 335-349.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Rathgeb-Schnierer, E., Green, M. (2013). Flexibility mental calculation in elementary students from different math classes. *Actes du colloque CERME8*, Manavgat-Side, Antalya-Turkey. Disponible en ligne: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Rathgeb_Schnierer.pdf (consulté le 11/07/2015).
- Ravel, L. (2003). *Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Thèse de doctorat. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Education.
- Rinaldi, A-M. (2013). Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée. *Grand N*, 91, 93-119.
- Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Ed : Éditeur Fabrice Vandebrouck. Disponible en ligne: <http://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme1-complet/cours-Robert-Butlen-complet/docs-preparatoires/Robert%20EE16%20LA%20CLASSE%20DE%20MATHEMATIQUES-1.pdf> (consulté le 08/09/2016)
- Robert, A., Penninckx, J., Lattuati, M. (2013). Présentation d'un ouvrage. Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, 92, 49-56.

- Roditi, E.(2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 23(2), 183-216.
- Ross, S., Cotter, M.-P. (1987). Subtraction in the United States: An Historical Perspective, *Mathematics Educator*, 8 (1), 4-11.
- Rouche, N. (2007). Ils doivent savoir calculer. *Bulletin de l'APMEP*, 472, 678-686.
- Sackur, C, Assude, T., Maurel, M, Drouhard, J.-P., Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(1), 57-90.
- Sarrazy, B. (2007). Sens et algorithmes. Approche historico- critique de l'usage des algorithmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Actes du congrès international AREF, Strasbourg 2007*. Disponible en ligne : http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Bernard_SARRAZY_499.pdf (consulté le 11/07/15).
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies Mathematics*, 47, 145-173.
- Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.
- Teppo, A., Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis : the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education*, 46(1), 45-58.
- Thanheiser, E. (2010). Investigating further perspective teachers' conceptions of multi digit whole numbers: refining a framework. *Education studies in Mathematics*, 75, 241-251.
- Thompson, I. (1995). Calculation algorithms, Narrowing the Gap between Mental and Written Methods. Disponible en ligne: http://www.ianthompson.pi.dsl.pipex.com/index_files/narrowing%20the%20gap%20between%20mental%20computation%20strategies%20and%20standard%20written%20algorithms-icme10.pdf (consulté le 11/07/15).
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School November*, 2-4.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 29-47.

- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *The International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 581-590.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verchaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *The International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 581-590.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Learning from ‘didactikids’: an impetus for revisiting the empty number line*. *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 6–31.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2(3), 133-170.
- Vergnaud, G. (1997). Vérité des premiers apprentissages. Quoi faire ? Qu’attendre ? *Mathématiques de base pour tous?* (p.33-46), Aleas éditions.
- Vermersch, P. (1994) L’entretien d’explicitation. ESF éditeur.
- Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations in *F.K. Lester (Ed.) second handbook of research in mathematics teaching and learning* (p.557-628). New York Macmillan.

Manuels scolaires

- Euro Maths CE1 (2001), livre du maître, Paris : Hatier.
- Euro Maths CE1 (2001), manuel de l’élève, Paris : Hatier.
- Euro Maths CE2 (2010), livre du professeur, Paris : Hatier.
- Euro Maths CE2 (2010), manuel de l’élève, Paris : Hatier.
- J’apprends les maths CE2 (2003), fichier de l’élève, Paris : Retz.
- J’apprends les maths CE2 (2003), livre du maître, Paris : Retz.
- J’apprends les maths CE2 (2010), fichier de l’élève, Paris : Retz.
- J’apprends les maths CE2 (2010), livre du maître, Paris : Retz.
- Outils pour les Maths CE1(2012), guide du maître, Paris, Magnard
- Outils pour les Maths CE1(2012), manuel de l’élève, Paris, Magnard
- Outils pour les Maths CE2(2012), guide du maître, Paris, Magnard
- Outils pour les Maths CE2(2012), manuel de l’élève, Paris, Magnard
- ERMEL CE2 (2006), Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Paris : Hatier.

Textes des programmes, documents d’applications

- MEN (2002) Documents d’application des programmes : Mathématiques, cycle des approfondissements (cycle 3), Ministère de l’Éducation nationale, de l’Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l’enseignement scolaire, CNDP, 2002.
- MEN (2008) Programmes de l’école primaire : BO Hors série n°3 du 19 juin 2008

Glossaire et abréviations

1. Les écritures des nombres

EA : écriture additive d'un nombre. Exemple : $100 + 27, 250 + 4, \dots$

EAC : écriture additive canonique selon les puissances de dix. Exemple $200 + 50 + 4$.

EC : écriture en chiffres d'un nombre. Il s'agit de la désignation d'un nombre dans notre système de numération décimale. Exemple : 254.

EUN : écriture en unités de numération. Exemple : 254 s'écrit 2 centaines 5 dizaines 4 unités ou encore 25 dizaines 4 unités.

EUNC : écriture en unités de numération canonique. EUN pour laquelle le nombre d'unités de chaque rang est au plus égal à neuf. Exemple : 254 s'écrit 2 centaines 5 dizaines 4 unités.

Nom du nombre : il s'agit de la désignation d'un nombre, à l'écrit comme à l'oral, dans notre système de numération parlé usuel. Exemple : deux-cent-cinquante-quatre.

2. Les réécritures de calcul

Convertir : exprimer un nombre d'unités d'un certain rang en un nombre d'unités d'un autre rang.

Décomposer : remplacer un nombre par une écriture additive correspondant à ce nombre.

Exemple : $152 = 76 + 76$.

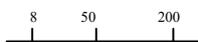
Décomposer canoniquement : remplacer un nombre par son écriture canonique suivant les puissances de dix. Exemple : $152 = 100 + 50 + 2$.

Droite numérique : droite numérique graduée ou vide.

DNG : droite numérique graduée.

DNV : droite numérique vide. Droite sur laquelle, les nombres sont placés en respectant l'ordre mais sans respecter la proportionnalité des distances entre les différentes graduations.

Exemple :



Réécrire : remplacer un calcul par un calcul équivalent.

Recomposer : remplacer l'écriture additive d'un nombre par son écriture chiffrée.

Exemple : $100 + 50 + 2 = 152, 76+76=152, \dots$

3. Les organisations mathématiques (OM)

OM1 : produire des calculs additifs ou soustractifs.

OM2 : traduire ou associer une expression mathématique en schéma associé à une droite numérique et inversement (OM2 est convoquée par OM1).

OM3 : effectuer un calcul mental ou posé en colonne.

OM4 : réécrire un calcul (OM4 est convoquée par OM3).

4. Les principaux types de tâches

$T_{\text{Prod. cal.}}$: un problème numérique additif étant proposé, il s'agit de produire un calcul qui permet de le modéliser.

$T_{\text{Ass. (cal. /sch.)}}$: associer un calcul soustractif à un schéma avec droite numérique et inversement.

$T_{\text{Ass. (cal. /lan.)}}$: associer un calcul soustractif à une expression mathématique verbale et inversement.

$T_{\text{Tra. (cal. /sch.)}}$: traduire un calcul soustractif par un schéma avec une droite numérique et inversement.

$T_{\text{Tra. (cal. /lan.)}}$: traduire un calcul soustractif par une expression mathématique verbale et inversement.

$T_{\text{Réé.cal.}}$: réécrire un calcul soustractif.

T_{a+b} : additionner les nombres a et b.

$T_{a+?=b}$: chercher le complément à a de b.

T_{a-b} : soustraire le nombre b au nombre a.

$T_{a-\square}$: soustraire un nombre inférieur à 10 au nombre a.

$T_{a-\square 0}$: soustraire un nombre entier de dizaines au nombre a.

$T_{a-\square\square}$: soustraire un nombre à deux chiffres au nombre a.

5. Les techniques pour effectuer un calcul soustractif

τ_{REP} : technique qui utilise les répertoires additifs et soustractifs, la connaissance des compléments et des doubles.

τ_{1010} : technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter.

Exemple : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3) = (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$.

$\tau_{(1010)}$: technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de \square_{1010} .

Exemple : $165 - 27 = (100 + 60 + 5) - (20 + 7) = (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$.

τ_{CONV} : technique qui consiste à exprimer un nombre d'unités d'un certain rang en un nombre d'unités d'un autre rang. Exemple : pour calculer $210 - 80$, on calcule $21 - 8$ dizaines.

τ_{N10} : technique séquentielle où on décompose canoniquement le nombre à soustraire.

Exemple : $125 - 23 = 125 - (20 + 3) = (125 - 20) - 3$.

τ_{A10} : technique séquentielle où on décompose le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer.

Exemples : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ ou $123 - 70 = 123 - (20 + 50) = (123 - 20) - 50$.

τ_{N10C} : technique séquentielle où on remplace le nombre à soustraire b par un multiple de dix ou de cent supérieur à b et où on compense le surplus.

Exemple : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$.

τ_{AN} : technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif. Exemple : $125 - 47 = (125 + 3) - (47 + 3)$.

$\tau_{\text{SOU/ADD}}$: technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou. Exemple : pour calculer $125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125.

τ_{ALG} : technique qui consiste à poser la soustraction en colonne avec l'algorithme qui utilise la propriété de conservation des écarts.

6. Les technologies savantes relatives aux techniques retenues

Θ_{DD} : la technologie s'appuie entre autre sur :

- **La décomposition de chacun des deux termes du calcul**

- La recomposition d'un nombre
- Les répertoires additifs et soustractifs
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale.
- Les propriétés de la soustraction relative à l'addition sur l'ensemble des entiers naturels :
 - ✓ $(n + p) - q = n + (p - q) = (n - q) + p = n + p - q.$
 - ✓ $n - (p + q) = (n - p) - q = n - p - q.$

Θ_D : la technologie s'appuie sur :

- **La décomposition de l'un des deux termes du calcul**

- La recomposition d'un nombre
- Les répertoires additifs et soustractifs
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale
- Les propriétés de la soustraction relative à l'addition sur l'ensemble des entiers naturels

Θ_{AN} : la technologie s'appuie sur :

- **L'ajout ou le retrait d'un même nombre aux deux termes du calcul**

- Les répertoires additifs et soustractifs
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale
- La propriété de conservation des écarts

$\Theta_{SOU/ADD}$: la technologie s'appuie sur :

- **La définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels**

- Les répertoires additifs et soustractifs
- Le principe décimal et le principe de position de la numération décimale
- Les propriétés de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels.

Annexes

I. Annexe A : Annexes relatives au chapitre 2

I.1. Annexe A : Planche de photographies d'extraits de manuels (1889-1974)

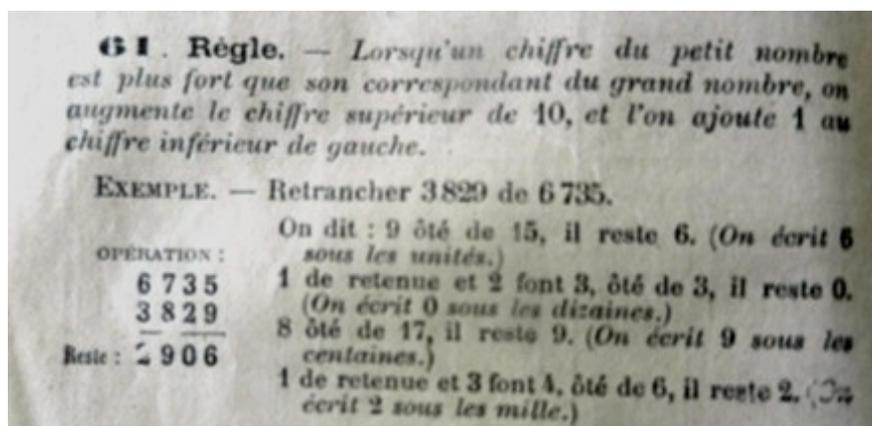


Figure 1: Nouvelle arithmétique des écoles primaires, Legrand (1889)

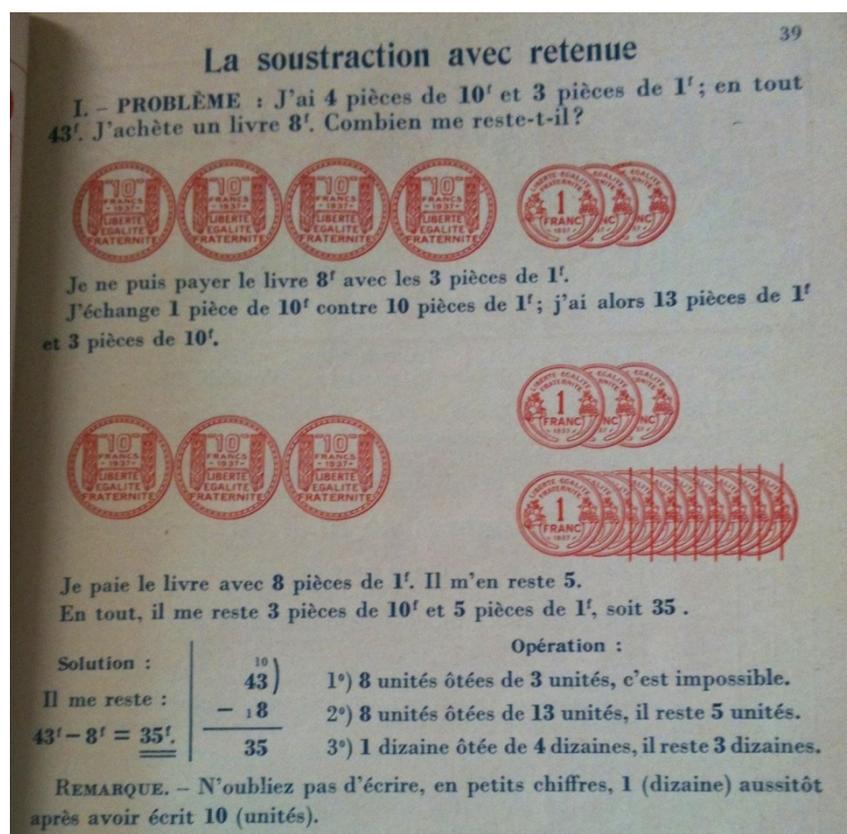


Figure 2 : Arithmétique, Duhem (1938)

LA SOUSTRACTION (avec retenue)

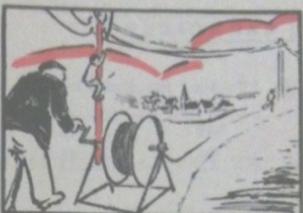
Revoir d'abord la page 24



Nicole a un ruban de 12 m de long. Elle en coupe 5 m. Combien de m lui reste-t-il?



Robert a une ficelle de 53 m de long. Il en donne 25 m à Jean. Combien de m lui reste-t-il?



Sur une bobine sont enroulés 432 m de fil électrique. On en coupera 246 m. Combien de m en restera-t-il?

Solution : Il restera 432 m — 246 m de fil sur la bobine.

Les unités sous les unités.	c. d. u.	Je dis :
Les dizaines sous les dizaines.	4 3 2	6 ôté de 2, cela ne va pas. 6 ôté de 12, il reste 6. J'écris 6 et je retiens 1.
Les centaines sous les centaines.	-2, 4, 6	1 + 4 = 5, ôté de 3, cela ne va pas. 5 ôté de 13, il reste 8. J'écris 8 et je retiens 1.
	1 8 6	1 + 2 = 3, ôté de 4, il reste 1. J'écris 1.

Réponse : Il restera 186 m de fil sur la bobine.

Figure 3: Par étapes, Mathieu et Huntzinger (1963)

18. Les nombres naturels : la soustraction (II)

PRÉPAREZ CES QUESTIONS :

- Peut-on calculer la différence de deux longueurs, si l'on a choisi comme unité pour la première le km, pour la deuxième, le mètre?
- Tracez deux traits de longueur 8 et 5 cm. Quelle est la **différence** de leur longueur? Prolongez chacun d'eux de 3 cm. Mesurez-les à nouveau. La différence a-t-elle changé?
- Deux camarades ont l'un 18 F, l'autre 13 F. Combien l'un a-t-il de plus que l'autre? On donne 4 F à chacun. La **différence** demeure-t-elle la même? Et si l'on donnait 6 F à l'un et 4 F à l'autre?
- Complétez en écrivant les nombres manquants. Que remarquez-vous?
 $26 - 12 = \cdot$ $(26 + 3) - (12 + 3) = \cdot - \cdot = \cdot$
 $57 - 25 = \cdot$ $(57 - 2) - (25 - 2) = \cdot - \cdot = \cdot$
 $68 - 34 = \cdot$ $(68 + 10) - (34 + 10) = \cdot - \cdot = \cdot$
- On peut écrire :
 $89 - 43 = \cdot$ ou bien : $89 = 43 + \cdot$ On peut écrire :
 $89 - 43 = \cdot$ ou bien : $89 = 43 + \cdot$
 $89 = 43 + (6 + 40)$ $89 = 43 + (7 + 39)$
 $89 = 43 + 46.$ $89 = 43 + 46.$
Donc : $89 - 43 = 46.$ Donc : $89 - 43 = 46.$

Calculez de même :

165 - 84	621 - 245	742 - 328
225 - 172	832 - 354	534 - 259

- Après une **augmentation**, un article coûte-t-il plus ou moins cher? Le prix auquel il se vendait **avant** l'augmentation était-il inférieur ou supérieur au prix actuel?

APRÈS LA LEÇON :

L'opération :	La preuve :	Je dispose les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines, etc., je n'oublie pas les retenues.
$\begin{array}{r} 111,5 \\ - 11,28 \\ \hline 0987 \end{array}$	$\begin{array}{r} 128 \\ + 987 \\ \hline 1115 \end{array}$	

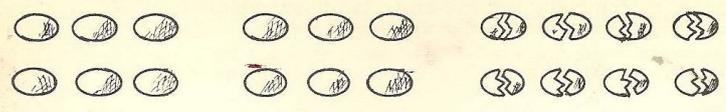
Figure 4 : Mathématiques au C.M., Mourjan, conforme à l'arrêté de 1970

50

**** SOUSTRACTION avec RETENUE**

S₄

- 1 -

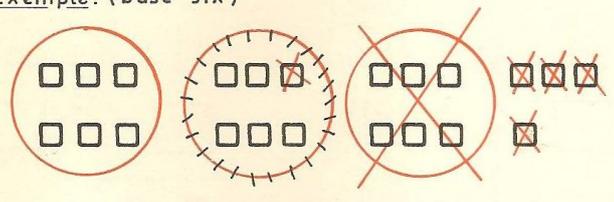


① Écris en base six { le nombre total d'œufs :
 le nombre d'œufs cassés :
 → Trouve le nombre d'œufs non-cassés :

xxx xxx	x
.....
-
.....

② EFFECTUE LES SOUSTRACTIONS

Exemple: (base six)



xxx	□
2	1 ₄
- 1	5
1	5

Figure 5 : Maths et calcul Eiller CE2 (1974)

II. Annexe B : Annexes relatives au chapitre 4

II.1. Annexe B.1 : Questionnaire préparatoire à l'entretien avec les enseignants des classes A, B et C (Janvier 2012)

- 1) Depuis combien d'années enseignes-tu ? Dans quelles écoles, à quel cycle, niveau de classes, as-tu enseigné ? As-tu parallèlement d'autres responsabilités administratives ou pédagogiques ?
- 2) Actuellement, tu as des élèves de CE2 ? Que penses-tu des programmes de 2008 ? Sont-ils ambitieux, trop ambitieux, équilibrés ? Eprouves-tu des difficultés, si oui lesquelles pour les mettre en œuvre ?
- 3) En début d'année as-tu consulté les résultats des évaluations CE1 pour te permettre d'avoir une idée des compétences acquises, en cours d'acquisition ou non acquises de tes élèves en mathématiques ?
- 4) Quelle importance accordes-tu au calcul mental, au calcul posé ?
- 5) Utilises-tu un manuel particulier pour préparer tes cours de mathématiques ? Y-a-t-il un manuel que tu affectionnes plus que les autres ?
- 6) As-tu déjà utilisé avec les élèves l'ordinateur, une calculatrice ou un boulier ? Ce matériel est-il disponible dans la classe, dans l'école ?
- 7) Penses-tu que tes élèves comprennent pourquoi il faut apprendre à calculer et si oui, de plusieurs manières ?
- 8) Comment choisis-tu les thèmes des séances de calcul mental ? Par exemple, les thèmes relatifs aux séances que j'ai pu observer ?
- 9) Comment décris-tu et expliquerais-tu à un débutant les modalités de travail en calcul mental ? Choix de l'ardoise, position du maître,
- 10) Comment choisis-tu tes séries de nombres ?
- 11) Pendant le temps consacré à l'aide individualisée, t'arrive-t-il d'aborder le calcul, qu'est-ce qui change dans ta pratique ?
- 12) Nous avons commencé à expérimenter des séances communes. Comment fais-tu pour t'approprier les scénarios ? A quoi accordes-tu le plus d'importance en premier ? Objectifs, déroulement, situation, ...
- 13) Est-ce que le fait d'être filmé t'incite à faire particulièrement attention à certaines choses ? Lesquelles ?
- 14) As-tu une demande particulière ?

II.2. Annexe B.2 : Tableau récapitulatif des situations proposées aux enseignants et mises en œuvre dans les classes A, B et C (Janvier 2012-Mars 2012)

S1	« Que sais-tu de la soustraction? » Objectif : repérer les connaissances et les représentations des élèves sur la soustraction.
S2	« Dépasser 100 » Jeu collectif de déplacement sur une piste « éloignée » afin de calculer rapidement et correctement $a - b$ avec $b \leq 6$ en évitant le comptage. Objectif : utiliser τ_{REP} , de τ_{1010} et de τ_{A10} .
S3	« Triple dés » Deux élèves jouent, un élève arbitre : il s'agit de trouver le plus rapidement possible la différence entre la somme des deux plus grands chiffres et le plus petit chiffre. Objectif : utiliser τ_{REP} .
S4	« Le passage à la dizaine inférieure » Objectif : A partir de calculs écrits en ligne, expliquer et justifier τ_{A10} .
S5	« Facile et pas facile » Objectif : estimer le degré de difficulté d'un calcul de type $a - \square$; $a - 0\square$; $a - \square\square$ et argumenter.
S6	« La règle cassée » Objectif : introduire la notion d'écart dans le cadre de la mesure.
S7	« Translater une bandelette et la mesurer » Objectif : introduire et formuler la propriété de conservation des écarts.
S8	« La taille des poupées ; La monnaie ; la différence d'âge » Objectif : utiliser la propriété de conservation des écarts dans d'autres contextes
S9	« La soustraction avec retenues » Objectif : comprendre la signification des retenues dans une soustraction posée avec τ_{REP} .

II.3. Annexe B. 3.1 : Scénario proposé aux enseignants relatif à la situation « facile, pas facile »

Première phase

Tâches principales : 1) évaluer la difficulté d'un calcul mental avant de le faire. Distinguer les calculs pour lesquels mentalement on dispose de techniques rapides et ceux qui mériteraient *a priori* d'être posés.

2) échanger avec un camarade.

Objectifs 1) repérer un calcul de type de $a-1$

2) repérer un calcul de type $a - n \times 10$

3) repérer un calcul de type $a-b$ quand dans a on entend b

Déroulement

Commencer à constituer les binômes, leur demander de sortir un stylo (**pas un crayon à papier**), distribuer la feuille d'exercices, leur demander d'écrire leurs deux noms sur la feuille et le nom de l'école.

Montrer sur le TBI la feuille énoncé qui servira pour la correction.

Adèle, à toi de recopier sur affiche ou au tableau les calculs pour les avoir sous les yeux au moment de la correction.

Expliquer la consigne : « On doit lire attentivement le calcul A puis entourer la lettre A si on est d'accord pour dire que ce calcul est facile à faire mentalement. Attention : On ne doit pas poser l'opération en colonne dans sa tête pour savoir si c'est facile ou pas. On n'est pas obligé non plus de faire le calcul pour savoir s'il est facile ou non ». Une fois qu'on s'est mis d'accord pour savoir si on entoure A ou si on ne l'entoure pas, on passe au calcul B et ainsi de suite...

Deuxième phase

Tâche principale : justifier son point de vue (facile/ non facile) à l'écrit puis oralement face au groupe classe.

Objectifs : 1) énoncer clairement la technique à laquelle on se réfère pour évaluer si un calcul est facile.

2) introduire une justification rigoureuse en se référant aux propriétés des nombres.

Déroulement

Quand les élèves ont fini de renseigner le tableau, l'enseignant propose à chaque binôme de justifier un, et un seul calcul correspondant à une lettre donnée. Il indique à chaque binôme la lettre correspondant au calcul à traiter : facile, non facile.

Ce travail effectué (rapide) le couple vient entourer ou non la lettre face au groupe classe et justifier sa réponse. Le groupe classe valide ou invalide la réponse.

Troisième phase

Tâche : écouter, regarder ce que dit ou ce qu'écrit l'enseignant au tableau ou sur le TBI

Objectif : introduire une justification rigoureuse en se référant aux propriétés des nombres.

II.4. Annexe B. 3.2 : Enoncé distribué à deux élèves relatif à la situation « facile, pas facile »

Exercice : Lire chaque calcul puis entourer la lettre qui lui correspond si vous pensez qu'il est facile à faire mentalement.

A	$67 - 1 =$
B	$78 - 29 =$
C	$148 - 10 =$
D	$198 - 8 =$
E	$45 - 28 =$
F	$770 - 20 =$
G	$32 - 2 =$
H	$93 - 5 =$
I	$357 - 129 =$
J	$45 - 5 =$
K	$1000 - 1 =$
L	$79 - 10 =$
M	$2021 - 21 =$
N	$2011 - 1 =$
O	$85 - 7 =$
P	$197 - 30 =$
Q	$55 - 5 =$
R	$291 - 158 =$
S	$1 - 1 =$
T	$750 - 40 =$

II.5. Annexe B.4 : Analyse *a posteriori* de la séance « règle cassée » extraite de Rinaldi (2013)

1) Analyse des techniques mises en œuvre pour mesurer avec une règle cassée

La phase de présentation du problème (3min40s) s'est passée comme prévue dans le scénario. La maîtresse, après avoir distribué une règle cassée à chacun, a demandé à l'ensemble des élèves ce qu'ils remarquaient :

M : « *Quelque chose de particulier à dire à propos de cette règle?* »

Les élèves ont remarqué qu'ils manquaient le zéro (transcription élèves), d'autres nombres comme le un, le deux, que la règle commençait à cinq, ..., qu'elle n'était pas entière. L'enseignante a acquiescé à chaque nouvelle suggestion puis insisté sur le fait que personne n'avait de règle sur laquelle était noté le zéro. Idée qu'elle a reprise juste avant de donner la consigne :

M : « *Vous avez une règle comme cela, sans le zéro. Il faut mesurer ce segment, ce segment et ce segment.* »

Cette phrase a une valeur locutoire (l'information apportée), illocutoire (l'enseignante dit les choses en y mettant le « ton ») et une valeur perlocutoire, d'après Sensevy (2007). Elle suggère le fait qu'il ne faut pas mesurer de la même manière qu'avec une règle usuelle graduée. Elle a certainement produit des effets sur certains élèves. Sans cette phrase, le jeu d'apprentissage aurait été différent. Moins d'élèves se seraient certainement questionnés et auraient cherché une nouvelle technique pendant la phase de recherche qui a duré environ 5 minutes. En effet en analysant les productions des 21 élèves, nous constatons que :

- Sur 9 productions : les trois **mesures** sont exactes. On lit « 5cm, 3cm et 8cm ». L'unité est indiquée.
- Sur une production, les trois mesures sont incorrectes car exprimées en pouce. L'élève n'a pas utilisé le bon côté de la règle.
- Sur 7 productions : les trois **nombres** sont obtenus grâce à une simple lecture. Les élèves ne prennent pas en compte le fait que la règle ne commence pas à zéro.
- Sur 4 productions : les mesures sont inexactes. Il n'est pas possible de savoir sans informations complémentaires comment l'élève a procédé.

Au regard de ces résultats, on a donc deux tiers d'élèves qui ont cherché une technique prenant en compte le fait que la règle est cassée. Le travail de groupe qui a suivi va permettre de repérer éventuellement quels sont les élèves qui ont contrôlé leurs résultats et sont capables d'expliquer aux autres avec des gestes et des mots la technique qu'ils ont mise en œuvre pour mesurer les segments.

2) Analyse des technologies associées aux techniques

Pour conduire cette analyse, nous nous référons au travail d'un groupe, que nous avons filmé. Dès le début des échanges, on observe l'investissement de Thibault. Il est convaincu de la justesse de ses résultats. Il prend le premier la parole, et explique comment il a procédé. Il essaye de convaincre Benoit et lui indique le principe de sa technique

« *Là, Benoit tu aurais du faire le zéro.* »

Sur ce, intervient Kylian. Il a recherché un zéro où il y en avait, c'est-à-dire sur l'autre face de l'objet règle. Il se qualifie lui même de malin car il a contourné la difficulté. L'argument que lui renvoient ses camarades est implacable:

« *Les centimètres ne sont pas aussi grands* »

Thibault réexplique sa technique en associant la récitation de la comptine à un pointage de graduation en graduation sur la face de la règle graduée en centimètres.

Benoît est alors convaincu et le reconnaît :

« *Oui, tu as le droit d'inventer cela* ».

Thibaut l'invite alors à appliquer lui-même sa technique, technique faible car l'élève a mis en place un comptage associé au geste mais sans arriver à justifier « mathématiquement » ce qu'il fait. Thalia entre indirectement en scène et montre qu'elle aussi est en train de mal tenir sa règle ou d'appliquer la façon de faire de Kylian. Benoit reprend l'argument lié au choix des unités : « *Tu as déjà vu des centimètres gros comme cela* ». Antony, sollicité par Thibault, intervient à son tour et dévoile sa technique qui consiste à faire comme si la règle n'était pas cassée. Elle ne sera pas invalidée par les autres élèves du groupe. Là, l'observateur intervient dans le but d'amener Thibault et Benoit à ré-expliquer leur technique. Sur ce, Benoit propose une autre formulation qui consiste à calculer :

« *Tu as 7 mais comme elle commence par 2 tu fais moins 2* ».

Ce discours ne peut pas encore être qualifié de technologie. En considérant le qualificatif introduit par Assude et Mercier (Assude, 2007), cette technique pourrait être qualifiée d'invisible car « $7-2$ » peut apparaître comme un simple résultat. Il manque la notion mathématique de distance entre deux points, d'écart entre deux nombres, comme éclairage théorique pour doter cette technique d'une technologie.

Pour finir, Thibault relance ses camarades Kylian et Antony. L'observateur invite les élèves à conclure et plus particulièrement Thibault à rendre compte au groupe classe de leurs échanges.

Nous aboutissons aux conclusions suivantes :

- Une erreur portant sur le choix de l'unité (pouce au lieu de centimètre) a été rectifiée prouvant que certains élèves, savent estimer, à quelle grandeur correspond un centimètre.

- Une technique non adaptée, celle qui consiste à faire comme si la règle n'était pas cassée, a été proposée mais aucun élève du groupe n'a cherché à la réfuter. Peut-être parce qu'il allait de soi qu'elle ne convenait pas puisqu'elle avait été présentée après une technique validée par au moins deux élèves et qui donnait des résultats numériques différents.

- Deux techniques pertinentes, pour mesurer un segment avec une règle cassée, sont ressorties mais nous les avons qualifiées de « faible » et « d'invisible » au regard du discours prononcé par les élèves et des gestes. La première consistant à compter de un en un les unités situées entre a et b. La seconde consistant à calculer directement « $b-a$ ».

3) Analyse de significations mathématiques émergentes en fin de séance

Pour analyser s'il y a émergence de signes mathématiques à partir des significations personnelles des élèves, commençons par reprendre le dialogue entre l'enseignante et Thibault face au groupe classe :

M : Voilà par exemple si on te demande de mesurer le a.

M : on met le 8 et la fin du segment s'arrête sur le 13. Il y en a, qui avaient écrit 13 centimètres. Et il est où le problème ?

T : ce n'est pas ça.

M : qu'est ce que tu comptes toi ?

T : les carreaux

M : Pas les carreaux, les intervalles.

T : les cases.

M : Vas y.

T : 1, 2, 3, 4, 5.

Ce dialogue commence par le rappel d'un consensus gestuel.

Les termes employés par l'enseignante « *fin, s'arrête* » laissent entendre qu'il y a « *un début* » et qu'on « *commence par* ». Les notions d'extrémités et de graduations sont présentes, dans un registre externe aux mathématiques.

L'élève va ensuite compter. Sans la question de l'enseignante, il n'aurait pas explicité la nature de ce qu'il compte. Il sait pourtant qu'il compte « *des carreaux* », « *des cases* ». La maîtresse valide la technique mais préfère dire à l'élève qu'il compte « *des intervalles* ».

Elève et enseignant se sont-ils vraiment accordés sur une signification mathématique ? Celle-ci est-elle assez précise ? Certes, on compte des intervalles, mais ceux-ci ont tous la même longueur : il s'agit en fait de la mesure unité. Ce terme « *unité* » est absent ainsi qu'une étape qui aurait pu consister à dire que le segment mesure 5 centimètres puisqu'on a compté cinq unités de un centimètre.

Regardons maintenant, un autre dialogue, toujours extrait de la phase de synthèse, dialogue entre l'enseignante et Benoît :

B : En fait moi au lieu de faire le zéro, c'est le deux, j'ai mesuré et après j'ai fait moins deux.

M : Tu as mesuré ?

B : il y a un 7. Là il y a un 2 donc dans ma tête je fais $7-2$.

M : $7-2$ et je trouve 5. $7-2$ c'est bien l'intervalle qu'il y a entre les deux nombres.

L'élève explique qu'il n'a pas utilisé la même technique que son camarade. Contrairement à lui, il « *fait moins deux* », il pose mentalement une soustraction.

La maîtresse réapplique la technique, refait les calculs de Benoît et ajoute que le résultat de l'opération correspond à « *l'intervalle qu'il y a entre les deux nombres* ». Un intervalle n'est pas un nombre. Une autre formulation aurait pu se baser sur la phrase suivante : « l'écart entre les deux nombres 2 et 7 correspond à la différence $7-2$ ». Nous pouvons faire l'hypothèse qu'un enrichissement du vocabulaire et de la manipulation²⁴⁹ aurait pu rendre la technique de Benoît visible. En conclusion, nous pouvons avancer que :

- L'enseignante a incité les élèves à produire plus de signes liés à l'utilisation de l'artefact qu'ils ne le faisaient spontanément. Les questions posées permettent d'associer des termes à des actions.

- L'enseignante a su sélectionner des aspects pertinents de significations partagées du point de vue du développement mathématique (schème de focalisation), pour la technique qui consiste à compter le nombre d'unités même si le vocabulaire employé n'a pas forcément été assez riche

- Pour la technique consistant à soustraire, celle-ci n'a pas été débattue.

²⁴⁹ Manipulation proposée dans l'analyse *a priori*, dans le paragraphe concernant les moyens de validation et de contrôle des techniques.

II.6. Annexe B.5 : Scénario relatif à la séance : « Translation d'une bandelette sur la DNG » (2012)

Matériel : 1 règle cassée graduée en centimètres aux environs de 6cm par enfant
1 bandelette pour l'exo 3 par enfant (à ne pas distribuer au début)
1 feuille d'exercice par enfant B8

Déroulement

Phase 1 : distribuer à chaque élève une règle cassée en expliquant que s'il reste des lettres (A, B,..) sur la règle, il ne faut pas en tenir compte. Toutes les règles sont coupées aux environs de onze cm.

Distribuer la feuille d'exercices et demander aux élèves de résoudre l'exercice 1 en réinvestissant ce qui a été vu à la séance précédente (ne pas imposer de techniques). Au bout de 5 à 8 minutes corriger en insistant sur le fait qu'on peut soustraire directement pour trouver l'écart entre les deux nombres qu'on lit aux extrémités du segment.

Tâche 1 : Mesurer les segments tracés en utilisant la règle graduée cassée.

Compétences visées :

- savoir placer la règle en tenant compte d'une graduation et de l'unité le centimètre
- savoir lire un résultat
- utiliser éventuellement une technique évoquée à la séance précédente : **la mesure correspond à la différence des deux nombres écrits aux extrémités.**
- savoir s'évaluer et prendre la correction

Phase 2 : sans utiliser la règle cassée qu'on vient de recevoir mais en utilisant la règle tracée sur la feuille, mesurer chaque bandelette eu utilisant un calcul soustractif.

Au bout de 5 à 8 minutes corriger en donnant le calcul soustractif.

Tâche 2 : donner la mesure de chaque bandelette en utilisant un calcul soustractif.

Compétences visées :

- savoir lire un schéma
- réinvestir le fait que **la mesure correspond à la différence des deux nombres écrits aux extrémités.**

Phase 3 : distribuer à chacun une bandelette et expliquer qu'il faut donner sa mesure en plaçant une de ses extrémités sur la graduation 12 puis 15 puis 20 et en utilisant à chaque fois un calcul soustractif.

Au bout de 5 à 8 minutes corriger en donnant le calcul soustractif.

Tâche 3 : donner la mesure de la bandelette en plaçant une de ses extrémités sur les graduations 12, 15, et 22 en utilisant à chaque fois un calcul soustractif.

Compétences visées :

- savoir placer la règle en tenant compte d'une graduation et de l'unité le centimètre
- savoir que **la mesure du segment correspond à la différence des deux graduations qui correspondent écrits aux extrémités du segment.**

Phase 4 : menée par la maîtresse ou le maître, très difficile à mener

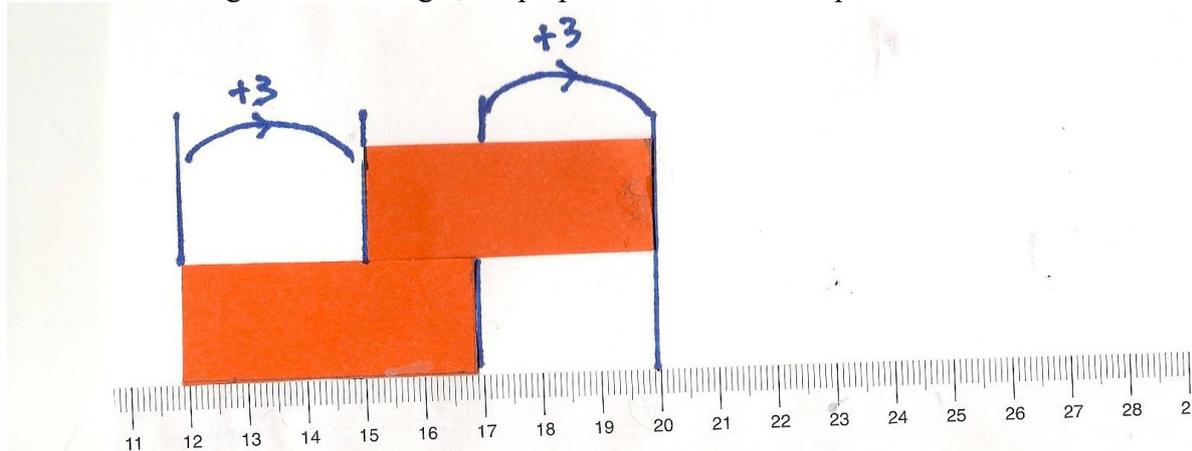
Tâche 4 : comparer des calculs et découvrir une propriété (10 min)

Cette propriété dite **de conservation des écarts** sera introduite par l'enseignant à partir des calculs précédents et du mesurage

Visualisons :

$$17-12=20-15$$

On translate le segment sur la règle, ce qui permet de visualiser que



Remarque : moi, j'ai pris deux bandelettes mais il est plus parlant d'en avoir une seule de la faire avancer de trois sur la règle et de repérer avec des couleurs que :

la première extrémité a avancé de 3 donc $12 \rightarrow 15$

la seconde extrémité a avancé de 3 donc $17 \rightarrow 20$

C'est le même segment qu'on mesure donc $17-12=20-15$

Question pratique : Peut-on faire la manipulation avec le TBI ? Sinon, il faut utiliser le mètre du tableau pour tracer une règle cassée partant de 12 et graduée en dm et fabriquer une bandelette de 50 cm de longueur pour que tous les enfants voient la translation.

Conclusion : La différence ne change pas si on **ajoute la même somme** aux deux nombres de départ (ici on a ajouté 3 à 12 et 3 à 17)

Quand on passe de la bandelette placée sur 12 à la bandelette placée sur 22 on a avancé de 10
 $12 \rightarrow 22$

$17 \rightarrow 27$

Le deuxième calcul correspond au rajout d'une dizaine $17-12 = (17+10)-(12+10)$

La différence ne change pas si on **ajoute la même somme** aux deux nombres de départ (ici on a ajouté 10 à 17 et 10 à 12)

III. Annexe C : annexes relatives au chapitre 5

III.1. Annexe C.1.1 : Organisations mathématiques associées à chaque exercice des doubles pages propres au calcul soustractif (Outils pour les Maths, CE1, 2012)

	Calculer mentalement des différences (1)
Exercice 1	OM3
Exercice 2	OM3
Exercice 3	OM3
Exercice 4	OM3
Exercice 5	OM3
Exercice 6	OM3
Exercice 7	OM3
Exercice 8	OM1 OM3
Exercice 9	OM3
Exercice 10	OM3
Exercice 11	OM3
Exercice 12	OM3
Exercice 13	OM3
Exercice 14	OM3
Exercice 15	OM3
Exercice 16	OM3
Exercice 17	OM3
Exercice 18	OM1 OM3
Exercice 20	OM1 OM3
Exercice 21	OM1 OM3
Exercice 22	OM1 OM3
Exercice 23	OM1 OM3
Exercice 24	OM1 OM3
Exercice 25	OM1 OM3

	Calculer mentalement des différences (2)
Exercice 1	OM3
Exercice 2	OM3
Exercice 3	OM3
Exercice 4	OM3
Exercice 5	OM3
Exercice 6	OM3
Exercice 7	OM1 OM3
Exercice 8	OM3
Exercice 9	OM3
Exercice 10	OM3
Exercice 11	OM3
Exercice 12	OM3
Exercice 13	OM3
Exercice 14	OM3
Exercice 15	OM1 OM3
Exercice 16	OM1 OM3
Exercice 17	OM1 OM3
Exercice 18	OM2 OM3

	Comprendre le sens de l'addition et de la soustraction
Cherchons	OM2
Exercice 1	OM3
Exercice 2	OM3
Exercice 3	OM2 OM3
Exercice 4	OM2
Exercice 5	OM3

	Choisir la bonne opération
Cherchons	OM1
Exercice 1	OM2
Exercice 2	OM2
Exercice 3	OM2
Exercice 4	OM2
Exercice 5	OM2
Exercice 6	OM1
Exercice 7	OM1
Exercice 8	OM1
Exercice 9	OM1
Exercice 10	OM1
Exercice 11	OM1
Exercice 12	OM1
Exercice 13	OM1
Exercice 14	OM1
Exercice 15	OM1
Exercice 16	OM1

	Soustraire deux nombres (1)
Cherchons	OM3
Exercice 1	OM3
Exercice 2	OM3
Exercice 3	OM3
Exercice 4	OM3
Exercice 5	OM3
Exercice 6	OM3
Exercice 7	OM1 OM3
Exercice 8	OM1 OM3
Exercice 9	OM1 OM3

	Soustraire deux nombres (2)
Cherchons	OM2OM3
Exercice 1	OM3
Exercice 2	OM3
Exercice 3	OM3
Exercice 4	OM3
Exercice 5	OM3
Exercice 6	OM3
Exercice 7	OM3
Exercice 8	OM3
Exercice 9	OM3

III.2. Annexe C.1.2 : Classification des problèmes selon leur type de Tâches (Vergnaud, 1990) répertoriés sur chaque double page d'Outils pour les Maths (CE1, 2012)

Calculer mentalement des différences (1)

Exercice 18	$T_{\text{trans neg } 32/x/11}$	$32 - 11$ ou $11 + \dots = 32$
Exercice 19	(a) $T_{\text{trans neg } 8/5/x}$ (b) $T_{\text{trans neg } 19/9/x}$ (c) $T_{\text{trans neg } 36/10/x}$ (d) $T_{\text{trans neg } 100/30/x}$	$8 - 5$ $19 - 9$ $36 - 10$ $100 - 30$
Exercice 20	(a) $T_{\text{trans neg } x/3/17}$ (b) $T_{\text{trans neg } x/10/29}$ (c) $T_{\text{trans neg } x/9/36}$ (d) $T_{\text{trans neg } x/11/34}$	$17 + 3$ $29 + 10$ $36 + 9$ $34 + 11$
Exercice 21	$T_{\text{comp } 13/5/x}$	$13 + 5$
Exercice 22	$T_{\text{comp } 30/22/x}$	$30 - 22$ ou $22 + \dots = 30$
Exercice 23	$T_{\text{comp } x/4/12}$	$12 - 4$ ou $4 + \dots = 12$
Exercice 24	$T_{\text{comp } 12/x/6}$	$12 - 6$ ou $6 + \dots = 12$
Exercice 25	$T_{\text{comp } 42/x/37}$	$42 - 37$ ou $37 + \dots = 42$

Calculer mentalement des différences (2)

Exercice 7	$T_{\text{trans pos } 200/x/417}$	$417 - 200$ ou $200 + \dots = 417$
Exercice 15	$T_{\text{comb } 50/x/160}$	$160 - 50$ ou $50 + \dots = 160$
Exercice 16	(a) $T_{\text{trans neg } x/4/15}$ (b) $T_{\text{trans neg } x/10/34}$ (c) $T_{\text{trans neg } x/2/58}$ (d) $T_{\text{trans neg } x/5/105}$	$15 + 4$ $34 + 10$ $58 + 2$ $105 + 5$
Exercice 17	(a) $T_{\text{trans pos } x/7/11}$ (b) $T_{\text{trans pos } x/6/25}$ (c) $T_{\text{trans pos } x/11/22}$ (d) $T_{\text{trans pos } x/15/30}$	$11 - 7$ $25 - 6$ $22 - 11$ $30 - 15$

Choisir la bonne opération

Cherchons	$T_{\text{trans neg } x/2/22}$	$22 + 2$
Exercice 1	$T_{\text{comp } 69/12/x}$	$69 + 12$ ou $69 - 12$
Exercice 2	$T_{\text{comp } 84/47/x}$	$84 + 47$ ou $87 - 47$
Exercice 3	$T_{\text{comb } 132/x/285}$	$285 + 132$ ou $285 - 132$
Exercice 4	$T_{\text{comb } 148/x/200}$	$200 + 148$ ou $200 - 148$
Exercice 5	$T_{\text{comb } 43/x/54}$	$54 + 43$ ou $54 - 43$
Exercice 6	$T_{\text{comb } 15/14/x}$	$15 + 14$
Exercice 7	$T_{\text{comb } 38/59/x}$	$38 + 59$
Exercice 8	$T_{\text{comb } 28/12/x}$	$28 - 12$ ou $12 + \dots = 28$
Exercice 9	$T_{\text{trans neg } 20/3/x}$	$20 - 3$
Exercice 10	$T_{\text{comp } x/23/45}$	$45 + 23$
Exercice 11	$T_{\text{trans pos } 149/50/35/x}$	$149 + 85$
Exercice 12	$T_{\text{comb } 42/7/x}$	$42 + 7$
Exercice 13	$T_{\text{trans neg } 172/58/x}$	$172 - 58$
Exercice 14	$T_{\text{comb } 1/12/6/3/2/x}$	$1 + 12 + 6 + 3 + 2$
Exercice 15	$T_{\text{trans neg } 60/48/x}$	$60 - 48$
Exercice 16	$T_{\text{trans neg et pos } 136/24/18/x}$	$136 - 24 + 18$

Soustraire deux nombres (1)

Exercice 7	$T_{\text{trans neg } 65/43/x}$	$65 - 43$
Exercice 8	$T_{\text{trans neg } 189/67/x}$	$189 - 67$
Exercice 9	$T_{\text{comb } 27/x/137}$	$137 - 27$ ou $27 + \dots = 137$

III.3. Annexe C.1.3 : Classification des types de tâches relatifs au calcul mental (Outils pour les Maths CE1, 2012)

	Calculer mentalement des différences (1)
Exercice 1 (25)	Ta-1
Exercice 2 (25)	Ta-2
Exercice 3 (25)	Ta-3
Exercice 4 (15)	Ta-1
Exercice 5 (15)	Ta-1
Exercice 6 (10)	Ta-3
Exercice 7 (15)	Ta-10
Exercice 8 (1)	Ta-10
Exercice 9 (15)	Ta-9
Exercice 10 (15)	Ta-11
Exercice 11 (5)	Ta-10
Exercice 12 (5)	Ta-9
Exercice 13 (5)	Ta-11
Exercice 14 (10)	Ta-10
Exercice 15 (10)	Ta-100
Exercice 16 (10)	Ta-10
Exercice 17 (10)	Ta-100
Exercice 18 (1)	Ta-11
Exercice 19 (4)	Ta-5 Ta-9 Ta-10 Ta-30
Exercice 20 (4)	Ta-3 Ta-10 Ta-9 Ta-11
Exercice 21 (1)	Ta+□
Exercice 23 (1)	Ta-22
Exercice 24 (1)	Ta-6
Exercice 25 (1)	Ta-b

	Calculer mentalement des différences (2)
Exercice 1(20)	Ta-20
Exercice 2(15)	Ta-100
Exercice 3(15)	Ta-20
Exercice 4(15)	Ta-50
Exercice 5(15)	Ta-200
Exercice 6(3)	Ta-200 Ta-400 Ta-600
Exercice 7(1)	Ta-200
Exercice 8(15)	Ta-500
Exercice 9(10)	Ta+..=10
Exercice 10(10)	Ta+..=100
Exercice 11(10)	Ta+..=1000
Exercice 12(12)	Ta-5 Ta-4 Ta-80
Exercice 13(4)	Ta-10 Ta-10 Ta-10 Ta-80
Exercice 14(4)	Ta-40 Ta-40 Ta-70 Ta-50
Exercice 15(1)	Ta-50
Exercice 16(4)	Ta+15 Ta+10 Ta+2 Ta+5
Exercice 17(4)	Ta+15 Ta+10 Ta+2 Ta+5
Exercice 18 (12)	Ta-10 Ta-5 Ta-10 Ta-2 Ta-10 Ta-5 Ta-100 Ta-10 Ta-4 Ta-20 Ta-10 Ta-100 Ta-10 Ta-3 Ta-50

III.4. Annexe C.1.4 : Classification des types de tâches relatifs au calcul mental (Outils pour les Maths CE2, 2012)

	Calculer mentalement des différences
Exercice 1 (6)	Ta-10
Exercice 2(5)	Ta-10
Exercice 3(1)	Ta-10
Exercice 4(6)	Ta-100
Exercice 5(5)	Ta-100
Exercice 6(6)	Ta-1000
Exercice 7 (6 ; 1 ; 3)	Ta-□0 ; Ta-□00 ; Ta-□□0
Exercice 8 (3, 4 ; 1)	Ta-□0 ; Ta-□00 ; Ta-□000
Exercice 9 (4 ; 4)	Ta-□0 ; Ta-□00
Exercice 10 (5 ; 3)	Ta-□000 Ta-□□00
Exercice 11(8)	Ta-9
Exercice 12(6)	Ta-9
Exercice 13 (4 ; 4)	Ta-19 Ta-99
Exercice 14(8)	Ta-90
Exercice 15(10)	Ta-11
Exercice 16 (6 ; 4)	Ta-□1 Ta-101
Exercice 18(8)	Ta-□8
Exercice 19(10)	Ta-15
Exercice 21(8)	Ta-□50
Exercice 22 (10 ; 10 ; 10)	Ta-5 Ta-10 Ta-50 Ta-100
Exercice 23 (7 ; 7 ; 7)	Ta-100 Ta-10 Ta-1000
Exercice 24(8)	Ta-□□
Exercice 25(8)	Ta-□□
Exercice 27(8)	Ta-□□
Exercice 28(8)	Ta-□□
Exercice 29(8)	Ta+□□

III.5. Annexe C.2.1 : Organisations mathématiques associées à chaque exercice des étapes relatives au calcul soustractif (Euro Maths, CE1, 2001)

	L'addition et la soustraction
Application (E12)	OM1-OM2-OM3
Exercice 1 (E12)	OM1-OM3
Exercice 2 (E12)	OM1-OM3
Exercice 3 (E12)	OM1-OM3
Exercice 4 (E12)	OM1-OM3
Exercice 5 (E12)	OM1-OM3
Exercice 6 (E12)	OM1-OM3
Exercice 7 (E12)	OM3
Exercice 8 (E12)	OM3
Application(E14)	OM1-OM2-OM3
Exercice 1(E14)	OM1-OM3
Exercice 2(E14)	OM1-OM3
Application (E21)	OM2-OM3
Exercice 1 (E21)	OM1-OM3
Exercice 2 (E21)	OM1-OM3
Exercice 3 (E21)	OM1-OM3
Exercice 4 (E21)	OM1-OM3
Exercice 5 (E21)	OM3
Exercice 6 (E21)	OM3
Application (E30)	OM1-OM2-OM3
Exercice 1 (E30)	OM1-OM3
Exercice 2 (E30)	OM1-OM3
Exercice 3 (E30)	OM1-OM3
Exercice 4 (E30)	OM1-OM3
Exercice 5 (E30)	OM1-OM3
Exercice 6 (E30)	OM1-OM3
Exercice 7 (E30)	OM3
Exercice 8 (E30)	OM3
Découverte (E43)	OM1- OM3
Exercice 1 (E43)	OM1-OM3
Exercice 2 (E43)	OM1-OM3
Exercice 3 (E43)	OM1-OM3
Exercice 4 (E43)	OM1-OM3
Exercice 5 (E43)	OM1-OM3
Exercice 6 (E43)	OM1-OM3
Découverte (E47)	OM1- OM3
Exercice 1 (E47)	OM1-OM3
Exercice 2 (E47)	OM1-OM3
Exercice 3 (E47)	OM1-OM3
Exercice 4 (E47)	OM1-OM3
Découverte (E64)	OM1- OM3
Exercice 1 (E64)	OM3
Exercice 2 (E64)	OM3
Exercice 3 (E64)	OM1-OM3
Exercice 4 (E64)	OM1-OM3
Exercice 5 (E64)	OM1-OM3
Exercice 6 (E64)	OM1-OM3

(Ei) correspond à l'étape i du manuel.

	La table d'addition
Application (E13)	OM3
Exercice 1 (E13)	OM3
Exercice 2 (E13)	OM3
Exercice 3 (E13)	OM3
Exercice 4 (E13)	OM3

	Calcul Réfléchi
Découverte (E15)	OM2-OM3-OM4
Exercice 1 (E15)	OM2-OM3-OM4
Exercice 2 (E15)	OM2-OM3-OM4
Exercice 3 (E15)	OM2-OM3-OM4
Exercice 4 (E15)	OM2-OM3
Exercice 5 (E15)	OM2-OM3
Exercice 6 (E15)	OM4
Exercice 7 (E15)	OM4
Exercice 8 (E15)	OM3
Exercice 9 (E15)	OM4
Découverte (E31)	OM2-OM3-OM4
Exercice 1 (E31)	OM2-OM3-OM4
Exercice 2 (E31)	OM2-OM3-OM4
Exercice 3 (E31)	OM2-OM3-OM4
Exercice 4 (E31)	OM2-OM3-OM4
Exercice 5 (E31)	OM3
Exercice 6 (E31)	OM3
Exercice 7 (E31)	OM3
Exercice 8 (E31)	OM3-OM4
Exercice 9 (E31)	OM3
Découverte (E65)	OM2-OM3-OM4

	Les nombres pour prévoir et vérifier
Application(E1)	OM1-OM3
Exercice 1 (E1)	OM1-OM3
Exercice 2 (E1)	OM1-OM3
Application(E2)	OM1-OM3
Exercice 1 (E2)	OM1-OM3
Exercice 2 (E2)	OM1-OM3

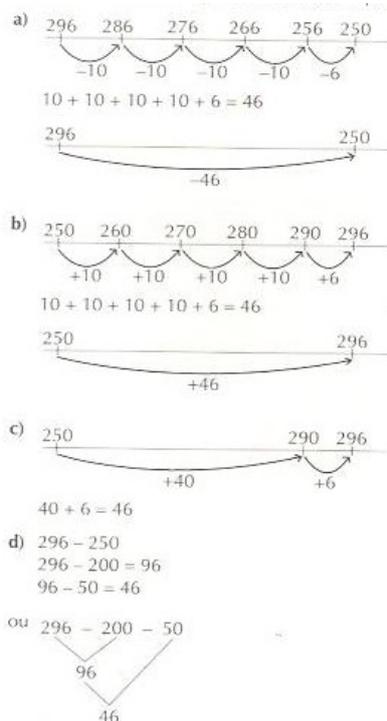
	S'entraîner à calculer
Exercice 1(E42)	OM3
Exercice 2 (E42)	OM3
Exercice 3 (E42)	OM3
Exercice 4 (E42)	OM3
Exercice 5 (E42)	OM3
Exercice 6 (E42)	OM3

	La calculatrice
Application(E20)	OM1-OM3
Exercice 1 (E20)	OM1-OM3
Exercice 2 (E20)	OM1-OM3
Exercice 2 (E20)	OM1-OM3
Application(E41)	OM1-OM3
Exercice 1 (E41)	OM3
Exercice 2 (E41)	OM3
Exercice 3 (E41)	OM1-OM3
Exercice 4 (E41)	OM1-OM3
Exercice 5 (E41)	OM1-OM3

III.6. Annexe C.2.2 : Analyse des exercices d'application relatifs au calcul de l'écart (Etape 64, Euro Maths, CE1, 2001, p.107)

1^{er} et 2^{ème} exercice : calcul de l'écart entre deux nombres

Dans le premier exercice, il s'agit de chercher l'écart entre a et b avec a supérieur à b (Calcule l'écart entre 296 et 250). Dans le second exercice, la même tâche est proposée mais avec a inférieur à b (Calcule l'écart entre 302 et 424). Les nombres a et b dans les deux cas sont relativement proches. Dans le livre du maître (page 146) seules les procédures correspondant au premier calcul sont explicitées. Elles sont au nombre de quatre. Nous les présentons ci-après en les caractérisant (en référence à l'OM) et en précisant les ostensifs utilisés.



La première technique (a) correspond à la recherche du complément entre 296 et 250, de proche en proche (retrait de dix en dix, puis de six). Elle utilise pour ostensif un axe (axe qui se différencie d'une droite numérique vide (DNV) car les nombres ne sont pas placés du plus petit au plus grand en respectant l'ordre conventionnel, de la gauche vers la droite). Les deux techniques (b) et (c) correspondent aussi à une recherche de complément mais elles mettent en jeu l'addition et s'appuient sur la DNV. La dernière technique (d) consiste à appliquer τ_{N10} . Elle est présentée en utilisant comme ostensif les écritures chiffrées par le biais d'une réécriture de calcul ou l'utilisation d'un arbre.

Figure 5.5: techniques pour trouver l'écart entre 296 et 250 (livre du maître CE1, 2001, p.146)

3^{ème} exercice : calcul de l'écart relié à la mesure du temps



Quelle est la date d'anniversaire de Thomas?

Figure 5.6 : Exercice 3 (Euro Maths CE1, 2001, p.107)

L'écart entre le jour « J », le jour où la lettre est écrite et la date d'anniversaire de Thomas est donné dans le corps de la lettre, il est de 18 jours. Si l'élève qui travaille individuellement (d'après le livre du maître p.147) repère cette donnée, il pourra modéliser la situation et calculer $3+18$ pour trouver la réponse. Pour ce faire, il peut par exemple surcompter de un, en un en se basant sur la comptine orale avec ou sans l'aide des doigts ou ajouter 2 à 18 et 1 à 20. Aucune procédure n'est mentionnée dans le livre du maître.

4^{ème} exercice : calcul de l'écart relié à un problème de comparaison



Qui a le plus de points?
 Combien de plus?

Figure 5.7 : Exercice 4 (Euro Maths CE1, 2001, p. 107)

Aucune procédure n'est mentionnée dans le livre du maître. Cependant, vu les nombres en jeu (264 et 386), toutes les techniques étudiées pour calculer l'écart entre 296 et 250 (exercice 1) sont applicables. L'élève peut chercher indifféremment :

- Le complément de 264 à 386
- la différence entre 386 et 264.

5^{ème} exercice : calcul de l'écart relié à un problème de distance

Observe le panneau indicateur et calcule la distance entre Mantes et Paris.

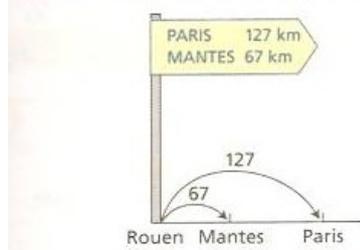


Figure 5.8 : Exercice 5 (Euro Maths CE1, 2001, p. 107)

Le problème consiste à interpréter le schéma, « voir » que la distance entre Mantes et Paris correspond au complément de 67 à 127 ou à la différence entre 127 et 67. Les auteurs évoquent ces deux procédures dans le livre du maître et suggèrent l'utilisation de la droite numérique pour illustrer des procédures de calcul « par sauts ». Notons cependant que le fait que le chiffre des unités de 127 et de 67 est le même (7) renforce la possibilité d'utiliser τ_{1010} ou τ_{CONV} (procédures non signalées par les auteurs).

6^{ème} exercice : calcul de l'écart relié à un contexte lié à la monnaie



Observe l'image. Écris le prix des rollers puis calcule ce que doit rendre le vendeur.

Figure 5.9 : Exercice 6 (Euro Maths CE1, 2001, p. 107)

Les données sont inscrites sur l'image. Dans le livre du maître, les auteurs privilégient toujours les mêmes techniques et utilisent les mêmes ostensifs.

- a) $72 + \dots = 100$
- b)

	+10	+10	+8	
72	82	92	100	
- c)

+8	+10	+10	
72	80	90	100
- d) $100 - 70 - 2 = \dots$

III.7. Annexe C.2.3 : Classification des types de tâches relatifs au calcul mental (exercices du manuel Euro Maths CE1, 2001)

	L'addition et la soustraction
Exercice 1 (E12)	T_{a-10}
Exercice 2 (E12)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 6 (E12)	$T_{46+..=56}$
Exercice 7 (E12) 4items	T_{a-10}
Exercice 8 (E12)4 items	$T_{a-\Box}$
Application(E14) 3items et 3items	$T_{a-1\Box}$ $T_{a+..=b}$
Exercice 2(E14)	T_{a-20}
Exercice 2 (E21)	$T_{a+..=b}$
Exercice 4 (E21)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 6 (E21) 4items	$T_{a-1\Box}$
Application (E30)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 2 (E30)	T_{a-26}
Exercice 3 (E30)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 5 (E30)	$T_{a+..=b}$
Exercice 6 (E30)	$T_{a+..=b}$
Exercice 7 (E30) 3items et 1 item	T_{a-20} T_{a-30}
Exercice 8 (E30) 4items	$T_{a-\Box}$
Découverte (E43)	$T_{a-\Box}$
Exercice 2 (E43)	$T_{a+..=b}$
Exercice 4 (E43)	T_{a-30}
Exercice 5 (E43)	$T_{a-\Box}$
Découverte (E50) 4items	$T_{a-\Box}$
Exercice 2 (E50)	$T_{a+..=b}$
Exercice 3 (E50)	T_{a-100}
Exercice 4 (E50)	$T_{a+..=b}$
Découverte (E64) 4items	$T_{a+..=b}$
Exercice 1 (E64)	$T_{a+..=b}$
Exercice 2 (E64)	$T_{a+..=b}$
Exercice 3 (E64)	$T_{a+..=b}$
Exercice 4 (E64)	$T_{a+..=b}$
Exercice 5 (E64)	$T_{a+..=b}$
Exercice 6 (E64)	$T_{a+..=b}$

	La table d'addition (E13)
Exercice2 (12items)	$T_{a+..=b}$ avec $b \leq 20$
Exercice4 (12items)	$T_{a+..=b}$ avec $b \leq 20$

(Ei) correspond à l'étape i du manuel.

	Calcul Réfléchi
Découverte (E15)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 2 (E15)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 3 (E15)	$T_{a-1\Box}$
Exercice 4 (E15)	$T_{a+.,=b}$
Exercice 5 (E15)	$T_{a+.,=b}$
Découverte (E31)	$T_{a-2\Box}$
Exercice 1 (E31)	$T_{a-3\Box}$
Exercice 4 (E31)	$T_{a-2\Box}$
Exercice 6 (E31) (10 items)	T_{a-20}
Exercice 9 (E31) (3et 2items)	$T_{a-\Box}$ T_{a-20}
Exercice 6 (E31)	OM3
Exercice 7 (E31)	OM3
Exercice 8 (E31)	OM3-OM4
Exercice 9 (E31)	OM3
Découverte (E63)	$T_{a+.,=b}$

	Les nombres pour prévoir et vérifier
Exercice 1 (E16)	$T_{a+.,=b}$
Exercice 2 (E16)	$T_{a+.,=b}$
Application(E32)	$T_{a+.,=b}$
Exercice 1 (E32)	T_{a-10}
Exercice 2 (E32)	T_{a-10}

	S'entraîner à calculer
Exercice1(E42)6 items	$T_{a-\Box}$
Exercice2 (E42) 4items	$T_{a-\Box}$
Exercice3 (3 et 1items)	$T_{a-\Box 0}$ et T_{a-120}
Exercice 4 (4items)	$T_{a+.,=b}$
Exercice 6 (1et 1item)	T_{a-20} et T_{a-35}

	La calculatrice
Application(E1)	$T_{a-\Box 0}$
Exercice 2 (E1)	$T_{a-\Box}$
Exercice 3 (E1)	$T_{a+.,=b}$
Exercice 4 (E1)	T_{a-10} et $T_{a-\Box}$
Application(E2)	$T_{a+.,=b}$
Exercice 1 (E2)	T_{a-40} et $T_{a-\Box}$
Exercice 2 (E2)	T_{a-100}
Exercice 3 (E2)	T_{a-20}
Exercice 4 (E2)	$T_{a+.,=b}$

III.8. Annexe C.2.4 : Organisations mathématiques associées à chaque exercice des étapes relatives au calcul soustractif (Euro Maths, CE2, 2010)

	Addition et soustraction
Découverte (E2)	OM1-OM2-OM3
Exercice 1 (E2)	OM1-OM3
Exercice 2 (E2)	OM1-OM3
Exercice 3 (E2)	OM3
Exercice 4 (E2)	OM1-OM3
Exercice 5 (E2)	OM1-OM3
Exercice 6 (E2)	OM2
Exercice 7 (E2)	OM3
Exercice 8 (E2)	OM3
Exercice 9 (E2)	OM2
Exercice 10 (E2)	OM1-OM3
Exercice 11 (E2)	OM1-OM3
Découverte (E3)	OM1-OM2-OM3
Exercice 1 (E3)	OM1-OM3
Exercice 2 (E3)	OM1-OM3
Exercice 3 (E3)	OM3
Exercice 4 (E3)	OM3
Découverte (E7)	OM1-OM3
Exercice 1(E7)	OM3
Exercice 2(E7)	OM3
Exercice 3 (E7)	OM1-OM3
Exercice 4 (E7)	OM1-OM3
Exercice 5 (E7)	OM1-OM3
Exercice 6 (E7)	OM2-OM3
Exercice 7 (E7)	OM1-OM3
Exercice 8 (E7)	OM1-OM3
Exercice 9 (E7)	OM1-OM3
Découverte(E21)	OM1- OM2-OM3
Exercice 1 (E21)	OM3
Exercice 2 (E21)	OM3
Exercice 3 (E21)	OM3
Exercice 4 (E21)	OM3
Exercice 5 (E21)	OM1-OM3

	Soustraction conservation des écarts
Découverte (E20)	OM1-OM3
Exercice 1 (E20)	OM3
Exercice 2 (E20)	OM3

(Ei) correspond à l'étape i du manuel.

IV. Annexe D : annexes relatives au chapitre 6

IV.1. Annexe D.0.1 : Evaluation diagnostique (ED)

Exercice 1 Calcule :

$6+7 =$

$193 + 10 =$

$46 + 12 =$

$428 + 5 =$

$2 + 89 =$

Exercice 2 Calcule :

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 4 \\ + \quad 3 \quad 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \quad 7 \\ + \quad 4 \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

Exercice 3

$13 - 7 =$

$203 - 10 =$

$47 - 13 =$

$421 - 3 =$

$31 - 29 =$

Exercice 4 Calcule :

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ - \quad 2 \quad 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \quad 3 \\ - \quad 1 \quad 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \quad 4 \\ - \quad 2 \quad 7 \\ \hline \end{array}$$

Exercice 7

Théo a 13 ans. Son frère Hugo a 7 ans. **Quelle est leur différence d'âge ?**

Simon a 13ans. Il en a 5 de plus que sa sœur Lucie. **Quel âge a Lucie ?**

Le père de Flora a 42 ans ; sa mère a 37 ans. **Combien le père de Flora a-t-il d'années de plus que sa mère ?**

Exercice 8 Choisis le calcul que tu vas faire pour trouver le résultat de $24-9$. Entoure-le.

$24-9$ •

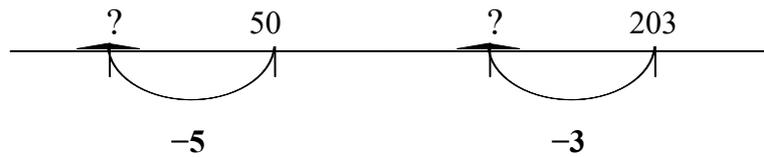
• $24-4-5$

• $24-10+1$

• $25-10$

• Je ne sais pas

Exercice 9 Quel nombre correspond au point d'interrogation ?



IV.2. Annexe D.0.2 : Evaluation finale (EF)

Exercice 1

Calcul n°1 348-6	<input type="text"/>
Calcul n°2 235- 6	<input type="text"/>
Calcul n°3 429 -9	<input type="text"/>
Calcul n°4 315- 8	<input type="text"/>

Exercice 2

Calcul n°1 203-10	<input type="text"/>
Calcul n°2 285- 60	<input type="text"/>
Calcul n°3 321 -60	<input type="text"/>
Calcul n°4 463- 90	<input type="text"/>

Exercice 3

Calcul n°1 67-43	<input type="text"/>
Calcul n°2 83- 24	<input type="text"/>
Calcul n°3 63 -17	<input type="text"/>
Calcul n°4 31-29	<input type="text"/>

Exercice 4

Effectue chaque soustraction posée en colonne

		9	2
	-	2	8
<hr/>			

	1	7	7
	-		3 4
<hr/>			

	2	3	1
	-		2 5
<hr/>			

Exercice 5

On considère le calcul $342-128$
 Donne un ordre de grandeur du résultat

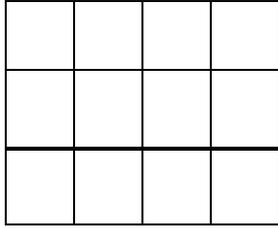
b) Pose la soustraction en colonne et effectue le calcul

<hr/>			

Vérifie ton calcul en posant une addition

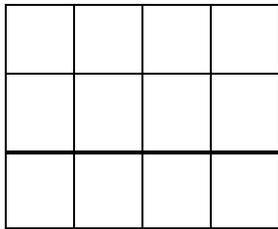
Exercice 6

a) Pose et effectue en colonne $172-45$



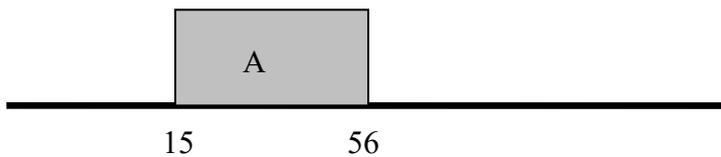
Quelle est la valeur de chaque retenue?

b) Pose et effectue en colonne $418-153$



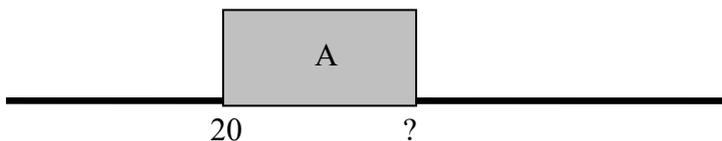
Quelle est la valeur de chaque retenue?

Exercice 7



Océane mesure la bandelette A avec une règle cassée en centimètres. Elle lit les nombres 15 et 56.

Combien mesure la bandelette A?



Noé prend la même bandelette et la place à gauche sur la graduation 20.

Combien va-il lire à droite, pourquoi ?

Exercice 8

Relis les égalités qui correspondent à $43-17$. Entoure celle que tu choisis pour effectuer le calcul de $43-17$.

- $243-217$
- $40-14$
- $43-18$
- $46-20$

IV.3. Annexe D.1.1 : Modèle de feuille de calculs (S1Sq1)

Calcul n°1	<input type="text"/>
Calcul n°2	<input type="text"/>
Calcul n°3	<input type="text"/>
Calcul n°4	<input type="text"/>

Les calculs peuvent être donnés oralement ou notés sur la feuille. L'élève inscrit le résultat dans le carré et décrit la technique qu'il a employée dans le cadre réservé à cet effet. Pour des raisons d'ergonomie, une feuille format paysage, prise dans le sens de la longueur correspond à deux modèles de feuilles de calculs.

IV.4. Annexe D.1.2 : Proposition de scénario Sq1

Objectifs :

<i>Séance 1</i>	<i>Séance 2</i>	<i>Séance 3</i>
Introduire τ_{1010} et τ_{A10}	Introduire τ_{N10C} et s'entraîner à utiliser τ_{A10} et τ_{1010}	S'entraîner à utiliser τ_{A10} , τ_{1010} et τ_{N10C} .
Faire produire des expressions numériques équivalentes en décomposant un des deux nombres	S'entraîner à produire des expressions numériques équivalentes et des schémas avec appui sur la droite numérique « vide »	S'entraîner à produire des expressions numériques équivalentes et des schémas avec appui sur la droite numérique « vide »
Introduire un schéma avec appui sur la droite numérique « vide »		

Conception de la séquence : Les trois séances sont construites sur le même modèle, seuls les calculs proposés, en fonction des variables numériques choisies vont influencer sur les techniques envisageables et sur le choix de produire des expressions numériques équivalentes ou des schémas avec appui sur la droite numérique « vide ».

Modalités pour chaque séance: Trois séries de quatre calculs sont proposés par l'enseignant à chaque séance (voir feuille C-Sq1)

Attentes en termes de connaissances : ▪ répertoire additif et soustractif

- connaissance de la dizaine entière ou centaine entière inférieure et supérieure à un nombre de deux chiffres ou trois chiffres
- écrire en écriture chiffrée un nombre donné à l'oral et réciproquement

- décomposer, recomposer un nombre
- transposer des techniques vues pour l'addition

Attentes en termes de capacités : ▪ abandonner une procédure basée sur le comptage pour calculer directement à partir des nombres

- produire des écritures additives, des schémas, un texte pour expliciter sa procédure de calcul
- adapter sa procédure en fonction des nombres donnés
- contrôler son résultat

Attentes en termes d'attitudes : ▪ écouter, respecter une consigne, chercher seul un résultat, communiquer sa procédure par écrit et à l'oral

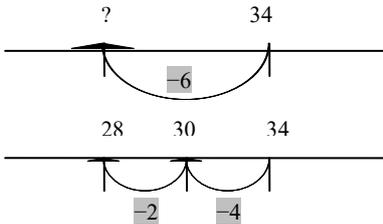
- s'intéresser à d'autres procédures, abandonner éventuellement sa procédure
- rentrer dans le registre des écritures symboliques

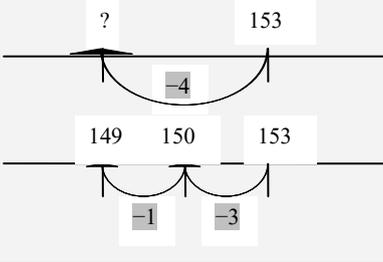
Nouveau : techniques, réécrire le calcul en décomposant un des deux nombres, utiliser la droite numérique vide.

S1Sq1

Matériel : 3 feuilles E1-Sq1 par élève, 1 ardoise par élève, fiche de calcul C-Sq1 pour le maître

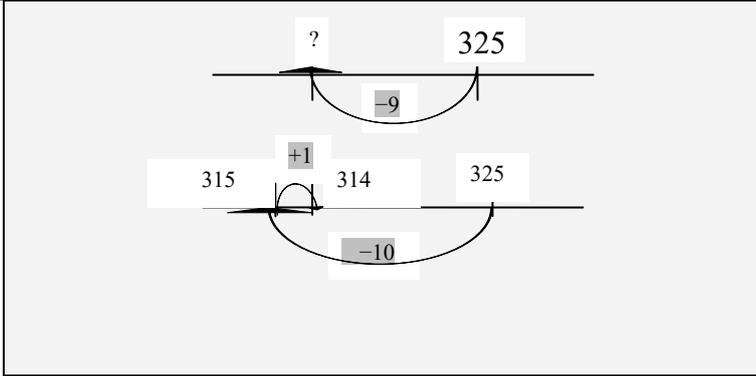
durée	Modalités	Déroulement
3 min	Groupe collectif Oral	<p>Aujourd’hui, on va calculer des différences</p> <p>Distribution de la feuille E1 et d’un crayon, d’une ardoise et d’un feutre</p> <p>Consigne : L’enseignant précise qu’il va donner oralement quatre calculs à faire. Il montre la feuille E1 et explique son utilité : « Après avoir écrit votre prénom, pour chaque calcul, vous expliquez comment vous l’avez fait (avec vos mots, en utilisant d’autres calculs, avec un schéma) ». Dans la case à droite, au bout de la ligne, vous écrivez le résultat. »</p> <p>Au bout de quatre calculs, vous recopiez vos résultats sur l’ardoise et je ramasse vos feuilles pour les donner à Anne-Marie.</p> <p>Reformulation de la consigne par un ou deux élèves.</p>
8 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la première série et renseignement de la feuille .
2 min	Transition	Recopier sur l’ardoise, donner sa feuille
10 min	Groupe collectif Oral	<p>Exploitation collective, mise en commun, structuration</p> <p>1) Premier calcul</p> <p>Le maître redonne oralement le calcul à faire, le note au tableau $48-5$, regarde les ardoises levées et donne le bon résultat.</p> <p>Il interroge un ou deux élèves qui se seraient trompés puis un élève qui ne s’est pas trompé. Son objectif est de faire expliciter les procédures, d’interroger, de communiquer jusqu’à ce qu’il trouve un élève qui n’a pas utilisé le comptage.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p>Pour effectuer $48-5$, on calcule $8-5$ puis on ajoute à ce résultat 40.</p> </div> <p>On a trouvé $8-5$ car on connaît les tables de soustraction ou on sait que $5+3=8$ ou on sait que le complément à 5 de 8 est 3.</p> <p>2) Deuxième calcul $59-2$</p> <p>Oui</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p>On calcule directement $9-2$ puis on ajoute 50</p> </div> <p>car $59=5d9u=5d9u -2u =5d7u$</p> <p>3) Troisième calcul $328-6$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p>On calcule directement $8-6$ puis on ajoute 320</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-top: 10px;"> $\begin{aligned} 328-6 &= 320+8-6 \\ &= 320+2 \\ &= 322 \end{aligned}$ </div> <p>Suggérez à un élève de justifier oralement avec UN</p>

	<p>orale avec UN Règle</p> <p>Justification avec décomposition</p> <p>justification orale avec UN</p>	<p>Mise en commun, permettant de prendre en compte différentes solutions ; Mini bilan après le 3^e calcul</p> <p>4) Quatrième calcul 70-6</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> On calcule mentalement 10-3 et on ajoute 60 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> car $70-3 = 60+10-3$ $= 60+7$ $= 67$ </div> <p>Autre solution avec décomptage car valeur de la variable didactique non adaptée. Changement d'énoncé et montrer inadaptation de l'autre technique canonique;</p> <p>Suggérez à un élève de justifier oralement avec UN</p>
2 min	Transition	<p>Distribuer une autre feuille E1 et effacer l'ardoise. Consigne : « Nous allons procéder de la même manière avec quatre nouveaux calculs, vous cherchez dans votre tête, vous expliquez sur la feuille, vous recopiez le résultat sur l'ardoise. »</p>
6 min	Individuel/Ecrit	Recherche des calculs, donnés un à un, de la seconde série.
10 min	<p>Groupe collectif Oral</p> <p>Rappel de la règle et de sa justification.</p> <p>justification avec décomposition</p> <p>illustration avec DNV</p>	<p>Exploitation collective, mise en commun, structuration</p> <p>1) 49-3 idem valeur de la variable didactique non adaptée.</p> <p>49- 5 (ou 6)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> Pour effectuer 49-3, on calcule mentalement 9-3 et on ajoute 40. car $49-3 = 40+9-3$ $= 40+6$ $= 46$ </div> <p>2) 34-6</p> <p>Attention, il risque d'y avoir pour erreur 32, car l'élève utilise la règle précédente ou beaucoup de procédures basées sur le comptage.</p> <p>Il faut passer dans les rangs pour voir si certains élèves ont dit qu'ils commençaient par soustraire quatre ou tracé une droite numérique.</p> <p>Suivant ce qu'ils ont fait, on peut expliciter la règle qui consiste à passer par la dizaine entière en utilisant les expressions numériques :</p> <p>$34 - 6 = 34 - 4 - 2$</p> 

		<p>Prévoir aussi une autre procédure qui consiste à décomposer 34 en 20+14 et à calculer 20+14-6.</p> <p>3) 153-4</p> <p>Pour soustraire 4, comme 153 a pour chiffre des unités 3, on commence par soustraire 3 puis on soustrait 1.</p>  <p>$153-4 = 153-3-1$ $= 150-1$ $= 149$</p> <p>3) 75-7 Correction avec la DNV ou les EA ou les deux suivants le temps qu'il reste sachant que les élèves ont encore une série à effectuer.</p>
	Règle	
	justification avec DNV	
	justification avec décomposition	
2 min	Transition	Distribuer une autre feuille E1, effacer l'ardoise et la ranger. Consigne : « Nous allons procéder de la même manière avec quatre nouveaux calculs, vous cherchez dans votre tête, vous expliquez sur la feuille. »
8 min	Individuel/Ecrit	Recherche des calculs, donnés un à un, de la troisième série . Ramasser la feuille pour AMR
2min	Fin de la séance	Ramasser la feuille pour AMR, à l'oral donné en même temps les résultats et les procédures.

Bilan : Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse reprenant :

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mises en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » du scénario.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait
- les points forts de la séance
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

	Justification avec DNV	 <p>4) Quatrième calcul 84-9 Application de τ_{N10C} et justification au choix avec décomposition ou DNV.</p>
2 min	Transition	Effacer l'ardoise, je vais vous proposer quatre autres calculs.
5 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la seconde série.
5 min	Groupe collectif règle Pas de justification ETAYAGE	<p>Pour les deux premiers calculs on énonce la règle qui correspond à τ_{N10C} : « Pour soustraire 9, on soustrait 10 et on ajoute 1 au résultat. »</p> <p>Pour les deux autres calculs, on cherche à faire énoncer la règle : « Pour soustraire 8, on soustrait 10 et on ajoute 2 au résultat. »</p>
2 min	Transition	Je vais vous proposer quatre autres calculs par écrit. Distribuer la feuille E2 Vous calculez dans votre tête, vous notez le résultat et vous expliquer comment vous avez-fait.
6 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la troisième série.
2 min		Ramasser les feuilles pour AMR.

Bilan : Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse :

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait
- les points forts de la séance
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S3Sq1

Matériel : 1 feuille E3 et une feuille E3 bis par élève, ardoise, fiche de calcul C1 pour le maître

durée	Modalités	Déroulement
1 min	Groupe collectif oral	Aujourd'hui, on va calculer des différences Distribution d'une ardoise et d'un feutre Consigne : L'enseignant précise qu'il va donner oralement quatre calculs à faire, qu'il ne sera pas nécessaire d'écrire sa procédure. Reformulation de la consigne par un ou deux élèves.
5 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la première série.
10min	Groupe collectif Oral Règles et justifications	Faire expliciter oralement les règles utilisées. Les justifier au choix par décomposition ou DNV. 85-3 → τ_{1010} 123-4 → τ_{A10} 53-9 → τ_{N10C} 312-7 → τ_{A10}
5min	Transition	On range son ardoise et son feutre et on distribue une feuille E2 et un crayon par élève. Consigne : L'enseignant montre la feuille E3 et explique son utilité : « Après avoir écrit votre prénom, vous effectuez chaque calcul et vous expliquez comment vous l'avez fait (avec vos mots, en écrivant autrement le calcul, en utilisant la droite numérique) . Dans la case à droite, au bout de la ligne, vous écrivez le résultat. »
8 min	Individuel Ecrit	Renseignement de la feuille E3 .
5min	Transition	On ramasse les feuilles E3 pour AMR et on distribue la feuille E3bis. Consigne : L'enseignant précise qu'il faut écrire les nombres qui manquent pour que les explications soient complètes.
8 min	Individuel Ecrit	Renseignement de la feuille E 3bis.
2 min	Transition	On ramasse les feuilles E3 bis pour AMR.

Bilan sur la séquence à faire après analyse de l'évolution des procédures (règle appliquée et justifications données) à l'oral et à l'écrit.

AMR se charge de l'écrit ...

A vous de pointer, si possible, quatre ou cinq élèves dont la participation orale a évolué ou est restée atone sur l'ensemble de la séquence.

IV.5. Annexe D.2.1 : Proposition de scénario Sq2

Objectifs :

Séance 1	Séance 2	Séance 3
Dans le calcul de $a - b$, a et b sont deux dizaines entières. A l'écrit le format du calcul est $\square\square 0 - \square 0$.	Dans le calcul de $a - b$, a et b sont deux dizaines entières. A l'écrit le format du calcul est $\square\square 0 - \square 0$.	Dans le calcul de $a - b$, a est à trois chiffres et b est une dizaine entières. A l'écrit le format du calcul est $\square\square\square - \square 0$.
Introduire τ_{REP} Transposer τ_{1010} et τ_{A10} à des calculs d'un nouveau format ($\square\square 0 - \square 0$ à la place de $\square\square - \square$) Introduire τ_{CONV}	Transposer τ_{N10C} à des calculs d'un nouveau format ($\square\square 0 - \square 0$ à la place de $\square\square - \square$) et s'entraîner à utiliser τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} , τ_{CONV} et τ_{N10C}	Prendre en compte la décomposition de $\square\square\square$ en $\square\square 0 + \square$ pour appliquer les procédures précédentes. S'entraîner à utiliser τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} .
Réécrire un calcul en décomposant ou en convertissant. Utiliser un schéma avec appui sur la DNV pour expliciter les étapes d'un calcul.	S'entraîner à réécrire un calcul en décomposant ou en convertissant et à utiliser un schéma avec appui sur la DNV pour expliciter les étapes d'un calcul.	S'entraîner à réécrire un calcul en décomposant ou en convertissant et à utiliser un schéma avec appui sur la DNV pour expliciter les étapes d'un calcul.

Conception de la séquence : La séquence 2 est construite sur le même modèle que la séquence 1. Durant chaque séance :

→ On résout à la suite (mentalement ou en ligne, en tout cas sans poser) quatre calculs donnés oralement un à un.

→ Sur les quatre calculs de chaque série, deux, voire trois sont choisis pour une phase d'exploration. Les élèves explicitent les procédures en s'aidant éventuellement de décompositions, des UN ou de la DNV. Un grand travail d'étayage est mené par l'enseignant.

→ Sur les quatre calculs de chaque série, un, voir deux sont choisis pour une phase de structuration. L'enseignant énonce alors précisément la ou les règles utilisées et propose parfois une, voire plusieurs justifications. Les justifications ne sont pas toujours présentes pour que le rythme de la séance soit maintenu. Les règles sont formulées oralement ou notées explicitement au tableau.

→ Une séance ne correspond pas à la rencontre d'une technique mais permet la rencontre de plusieurs techniques.

→ Chaque séance permet de réinvestir des connaissances, de développer des capacités, d'adopter des attitudes afin de devenir de plus en plus performant (adaptabilité, exactitude, rapidité).

→ Un travail par écrit est demandé et ramassé en séances 2 et 3. Il permettra, pour chaque élève, de pointer la justesse du résultat, la procédure employée pour calculer, le choix du registre évoqué pour les explications. Ces évaluations formatives permettront de réorienter, réajuster les contenus d'enseignement ou de modifier les scénarios à venir.

Attentes en termes de connaissances :

et réciproquement

dizaine entière (numération orale)

entières

nombre en fonction de son nom ou de son écriture chiffrée

dix à un nombre à deux ou trois chiffres.

entières, de centaines entières et un nombre inférieur à dix.

- Ecrire en écriture chiffrée un nombre donné à l'oral
- Décomposer, recomposer un nombre
- Connaissance de la dizaine entière qui précède une
- Répertoire additif et soustractif sur les dizaines
- Connaissance du nombre de dizaines entières d'un
- Techniques pour soustraire un nombre inférieur à
- Techniques pour ajouter un nombre de dizaines

Attentes en termes de capacités : ▪ abandonner une procédure basée sur le comptage pour calculer directement à partir des nombres

avec DNV pour expliciter sa procédure de calcul

nombre inférieur à dix

dizaines entières

entières et d'unités isolées)

- utiliser les décompositions, utiliser les UN, les schémas
- adapter sa procédure en fonction des nombres donnés
- contrôler son résultat
- transposer des techniques vues pour soustraire un
- transposer des techniques vues pour additionner des
- convertir un nombre d'unités en nombre de dizaines

Attentes en termes d'attitudes : ▪ écouter, respecter une consigne, chercher seul un résultat, communiquer sa procédure par écrit et à l'oral

éventuellement sa procédure

- s'intéresser à d'autres procédures, abandonner
- rentrer dans le registre des écritures symboliques

Nouveau : répertoire sur les dizaines entières, différentes techniques, réécrire le calcul en convertissant, en décomposant, en utilisant la DNV.

S1Sq2

Matériel : une ardoise par élève, une fiche de calcul C-Sq2 pour l'enseignant

durée	Modalités	Déroulement
3 min	Groupe collectif oral	Aujourd'hui, on va calculer des différences. Sortez votre ardoise et votre feutre. Partager votre ardoise en quatre parties. Consigne : « Je vais donner oralement quatre calculs à faire. Sur l'ardoise, on peut s'aider en écrivant des choses (schéma, décomposition, calcul intermédiaire), mais on n'a pas le droit de poser le calcul en colonne. On peut aussi écrire directement le résultat. » Quand on corrigera, par contre, il faudra expliquer sa procédure.
4 min	Individuel	Recherche des calculs donnés un à un de la première série.

	Ecrit				
6min	Groupe collectif Oral	<p>1) 50–10 ? Exploration On demande aux élèves d’expliquer leurs procédures pour le premier calcul. →On rejette la procédure qui consiste à soustraire dix en comptant sur ces doigts. →On retient la procédure τ_{REP} qui consiste à chercher la dizaine entière qui précède cinquante en se remémorant la comptine des dizaines à rebours. 50, 40, →on retient la procédure τ_{CONV} qui consiste à chercher cinq dizaines moins une dizaine.</p> <p>2) 100–10 ? même type d’exploration</p> <p>3) 310–10 ? exploration →On risque d’avoir une procédure supplémentaire basée sur « ce qu’on entend « dix moins dix » $310-10=300+10-10$</p> <p>4) 240–10 ? structuration</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">On récite la comptine des dizaines à rebours à partir de 240.</td> <td style="width: 33%;">On calcule $24d-1d$ et on convertit le nombre en unités.</td> <td style="width: 33%;">On calcule $40-10$ et on ajoute 200 au résultat.</td> </tr> </table>	On récite la comptine des dizaines à rebours à partir de 240.	On calcule $24d-1d$ et on convertit le nombre en unités.	On calcule $40-10$ et on ajoute 200 au résultat.
On récite la comptine des dizaines à rebours à partir de 240.	On calcule $24d-1d$ et on convertit le nombre en unités.	On calcule $40-10$ et on ajoute 200 au résultat.			
	Règles				
2min	Transition	Effacer l’ardoise. « Nous allons procéder de la même manière avec quatre nouveaux calculs. »			
4 min	Individuel/Ecrit	Recherche des calculs, donnés un à un, de la seconde série.			
6min	Groupe collectif Oral	<p>1) 520–20 ? Exploration On demande aux élèves d’expliquer leurs procédures. → On risque d’avoir une procédure basée sur le décomptage de dix en dix : 510, 500 →On risque d’avoir une procédure basée sur « ce qu’on entend « vingt moins vingt » qui explicitée à l’écrit donne $520-20=500+20-20$ =500 →On risque d’avoir, surtout si le calcul donné oralement a été écrit en ligne, le calcul de $52-2$, auquel cas l’élève implicitement a converti les deux nombres en dizaines.</p> <p>2) 70–50 ? Exploration et choix d’une règle On demande aux élèves d’expliquer leurs procédures. → On risque d’avoir une procédure basée sur le décomptage : 60, 50,40, 30 ,20. On l’invalidé car elle est longue et cause d’erreurs. → On privilégie τ_{REP}. On doit savoir soixante dix moins cinquante par cœur. → On risque d’avoir τ_{CONV}. 70–50 ? Je calcule $7d-5d$. Je trouve $2d$ donc 20. Bien insister sur le coût de cette procédure dans le cas présent</p> <p>3) 180–50 ? Correction du calcul avec règle et justifications</p>			

	<p>Règles et Justifications écrites</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <p>Je calcule $80-50$ et j'ajoute 100. Je trouve 130</p> $180-50=100+80-50$ $=100+30$ $=130$ </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <p>Je calcule $18d-5d$. Je convertis le résultat en unités.</p> $180-40=18d-5d$ $=10d+8d-5d$ $=10d+3d$ $=130$ </td> </tr> </table> <p>Si on connaît son répertoire additif sur les dizaines, cela semble moins économique de convertir.</p> <p>4) $130-40$? Exploration On demande aux élèves d'expliquer leurs procédures. → On risque d'avoir une procédure erronée : « Je calcule $40-30$ et j'ajoute 100. Je trouve 110. Utilisation abusive de la procédure précédente (τ_{1010}) → On risque d'avoir, d'autant plus que trente et quarante sont proches : « Je calcule $130-30$ et je soustraits encore 10. Je trouve 90. » Utilisation correcte de τ_{A10}</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $130-40=130-30-10$ $=100-10$ $=90$ </div> </div> <p>→ On risque d'avoir, je calcule $13d-4d$. J'obtiens 9d, 90.</p>	<p>Je calcule $80-50$ et j'ajoute 100. Je trouve 130</p> $180-50=100+80-50$ $=100+30$ $=130$	<p>Je calcule $18d-5d$. Je convertis le résultat en unités.</p> $180-40=18d-5d$ $=10d+8d-5d$ $=10d+3d$ $=130$
<p>Je calcule $80-50$ et j'ajoute 100. Je trouve 130</p> $180-50=100+80-50$ $=100+30$ $=130$	<p>Je calcule $18d-5d$. Je convertis le résultat en unités.</p> $180-40=18d-5d$ $=10d+8d-5d$ $=10d+3d$ $=130$			
2 min	Transition	Effacer l'ardoise. « Nous allons procéder de la même manière avec quatre nouveaux calculs. »		
4 min	Individuel/Ecrit	Recherche des calculs, donnés un à un, de la troisième série.		
6 min	Groupe collectif Oral	<p>1) $210-60$? Exploration → Invalider le décomptage (60 est $10+10+10+10+\dots$) → Accepter la conversion → Envoyer un élève pour illustrer τ_{A10} avec DVN et justifier avec décomposition</p> <p>2) $740-50$? Exploration et règle formulée oralement</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <p>Je calcule $740-40$ et je soustraits encore 10</p> </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <p>Je calcule $74d-5d$. Je dois alors calculer $74d-4d$ et soustraire encore d. Je convertis le résultat en unités.</p> </td> </tr> </table>	<p>Je calcule $740-40$ et je soustraits encore 10</p>	<p>Je calcule $74d-5d$. Je dois alors calculer $74d-4d$ et soustraire encore d. Je convertis le résultat en unités.</p>
<p>Je calcule $740-40$ et je soustraits encore 10</p>	<p>Je calcule $74d-5d$. Je dois alors calculer $74d-4d$ et soustraire encore d. Je convertis le résultat en unités.</p>			

	Règle	3) 350—70 ? correction avec règle formulée par écrit illustration avec DVN et justifications.						
	Justification	<table border="1"> <tr> <td>Je calcule 350—50 et Je soustrais encore 20 au résultat</td> <td>Je calcule 35d—7d. Je convertis le résultat en unités.</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> $350-70=350-50-20$ $=300-20$ $=280$ </td> </tr> <tr> <td></td> <td> $350-70=35d-7d$ $=35d-5d-2d$ $=30d-2d$ $=28d$ $=280$ </td> </tr> </table>	Je calcule 350—50 et Je soustrais encore 20 au résultat	Je calcule 35d—7d. Je convertis le résultat en unités.		$350-70=350-50-20$ $=300-20$ $=280$		$350-70=35d-7d$ $=35d-5d-2d$ $=30d-2d$ $=28d$ $=280$
Je calcule 350—50 et Je soustrais encore 20 au résultat	Je calcule 35d—7d. Je convertis le résultat en unités.							
	$350-70=350-50-20$ $=300-20$ $=280$							
	$350-70=35d-7d$ $=35d-5d-2d$ $=30d-2d$ $=28d$ $=280$							
		4) 500—70 ? Exploration et explicitation à l'oral d'une règle						
		<table border="1"> <tr> <td>Je calcule 100—30 et j'ajoute 400. Je trouve 430.</td> <td>Je calcule 10d—3d. J'ajoute 40d. Je trouve 43d</td> </tr> </table>	Je calcule 100—30 et j'ajoute 400. Je trouve 430.	Je calcule 10d—3d. J'ajoute 40d. Je trouve 43d				
Je calcule 100—30 et j'ajoute 400. Je trouve 430.	Je calcule 10d—3d. J'ajoute 40d. Je trouve 43d							
2min	Fin de la séance	Effacer et ranger les ardoises.						

Bilan : **Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:**

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S2Sq2

Matériel : une ardoise par élève, une fiche de calcul C-Sq2 pour l'enseignant et une feuille E1-Sq2 par élève

durée	Modalités	Déroulement
3 min	Groupe collectif oral	<p>Aujourd'hui, on va calculer des différences</p> <p>Sortez votre ardoise et votre feutre. Partager votre ardoise en quatre parties.</p> <p>Consigne : « Je vais donner oralement quatre calculs à faire. Sur l'ardoise, on peut s'aider en écrivant des choses (schéma, décomposition, calcul intermédiaire), mais on n'a pas le droit de poser le calcul en colonne. On peut aussi écrire directement le résultat. » Quand on corrigera, par contre, il faudra expliquer sa procédure.</p>
4 min	Individuel	Recherche des calculs donnés un à un de la première série.

	Ecrit							
6 min	Oral collectif	<p>La synthèse doit permettre de reformuler précisément les règles pour les deux premiers calculs :</p> <table border="1"> <tr> <td>780-60 ?</td> <td>250-60 ?</td> </tr> <tr> <td>« Je calcule 60-30. J'ajoute 700. Je trouve 730. »</td> <td>« Je calcule 350-50, j'obtiens 300. Je soustraits 10 à 300, j'obtiens 290. »</td> </tr> <tr> <td>« Je calcule 76d-3d. Je trouve 73d, 730. »</td> <td>« Je calcule 35d-6d. Je trouve 29d, 290. »</td> </tr> </table> <p>3) 350-90 ? Exploration Pour ce calcul, voir si certains élèves ont pensé à soustraire 100 et à ajouter 10</p> <p>Règle</p> <p>Structuration : « Pour soustraire 90, on soustrait 100 et on ajoute 10. »</p> <p>4) 110-90 ? Exploration Pour ce calcul, voir si certains élèves ont pensé à chercher le complément de 90 à 110 plutôt que d'appliquer τ_{N10C}</p> <p>Illustration avec DNV</p>	780-60 ?	250-60 ?	« Je calcule 60-30. J'ajoute 700. Je trouve 730. »	« Je calcule 350-50, j'obtiens 300. Je soustraits 10 à 300, j'obtiens 290. »	« Je calcule 76d-3d. Je trouve 73d, 730. »	« Je calcule 35d-6d. Je trouve 29d, 290. »
780-60 ?	250-60 ?							
« Je calcule 60-30. J'ajoute 700. Je trouve 730. »	« Je calcule 350-50, j'obtiens 300. Je soustraits 10 à 300, j'obtiens 290. »							
« Je calcule 76d-3d. Je trouve 73d, 730. »	« Je calcule 35d-6d. Je trouve 29d, 290. »							
2 min	Transition	Effacer l'ardoise. « Nous allons procéder de la même manière avec quatre nouveaux calculs. »						
4 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la seconde série.						
6 min	Oral collectif	<p>Mise en commun et rappel à l'oral des règles pour effectuer les quatre calculs</p> <p>150-70 → τ_{A10} ou τ_{CONV}</p> <p>930-30 → τ_{REP} ou τ_{CONV}</p> <p>160-80 → τ_{A10} ou τ_{CONV} ou τ_{N10C} ou τ_{REP}</p> <p>520-90 → τ_{A10} ou τ_{CONV} ou τ_{N10C}</p> <p>Plusieurs procédures à disposition pour</p> <p>La synthèse doit permettre de reformuler précisément les règles pour chaque calcul et d'insister sur la variété des procédures</p>						

	un même calcul.	envisageables. Exemple, si on sait que 160 est le double de 80, on peut directement dire que $160 - 80 = 80$
5min	Transition	On range son ardoise et son feutre et on distribue la feuille E1-Sq2 et un crayon par élève. Consigne : L'enseignant montre la feuille E1 et explique son utilité : « Après avoir écrit votre prénom, vous effectuez chaque calcul et vous expliquez comment vous l'avez fait (avec vos mots, en écrivant autrement le calcul, en utilisant la droite numérique). Dans la case à droite, au bout de la ligne, vous écrivez le résultat. »
6 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés par écrit sur la feuille.
5min	Fin de la séance	On ramasse les feuilles E1-Sq2 pour AMR.

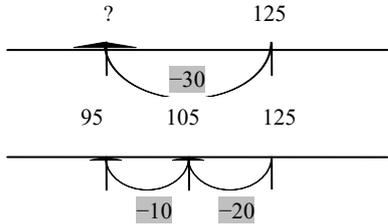
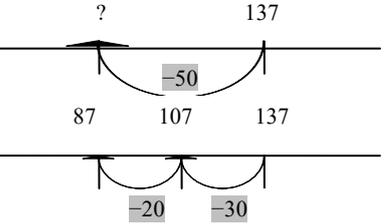
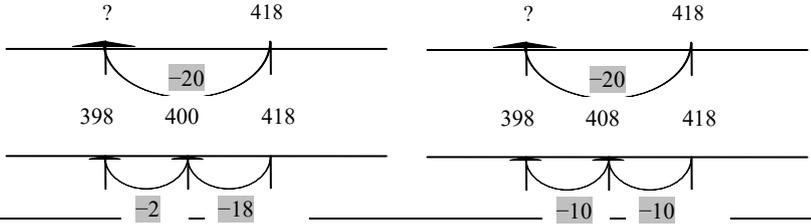
Bilan : **Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:**

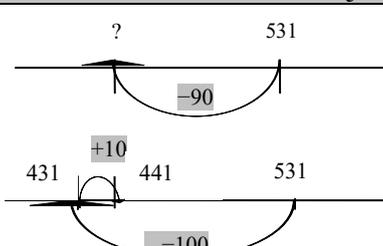
- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait
- les points forts de la séance
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S3Sq2

Matériel : une ardoise par élève, une fiche de calcul C-Sq2 pour le maître et une feuille E2-Sq2 par élève

durée	Modalités	Déroulement
3 min	Groupe collectif oral	Aujourd'hui, on va calculer des différences Sortez votre ardoise et votre feutre. Partager votre ardoise en quatre parties. Consigne : « Je vais donner quatre calculs à faire. Sur l'ardoise, on peut s'aider en écrivant des choses (schéma, décomposition, calcul intermédiaire), mais on n'a pas le droit de poser le calcul en colonne. On peut aussi écrire directement le résultat. » Quand on corrigera, par contre, il faudra expliquer sa procédure.
4 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la première série.
6 min	Oral collectif	1) $352 - 10$? Exploration → Les élèves ont trouvé directement le résultat → Les élèves ont calculé $350 - 10$ et on ajoute au résultat 2. 2) $423 - 20$? Exploration → Les élèves ont calculé $23 - 20$ et ont ajouté au résultat 400 (très probable). → Les élèves ont calculé $420 - 20$ et ont ajouté au résultat 3. → Les élèves ont calculé $20 - 20$ et ont ajouté au résultat, 400 puis 3.

		<p>3) $261-40$? Exploration → Les élèves ont calculé $61-40$ et ont ajouté au résultat 200 (très probable). On peut amorcer une justification avec décomposition : $261-40=200+60+1-40$ $=200+20+1$</p> <p>4) $125-30$? Exploration → Les élèves ont calculé $125-25$ et ont soustrait 5 au résultat. On peut amorcer une justification avec décomposition : $125-30=125-25-5$ $=100-5$</p> <p>→ Les élèves ont calculé $125-20$ et ont soustrait 10 au résultat. On peut proposer une justification avec décomposition ou avec DNV</p>  <p>→ Les élèves ont calculé $12-3$ et ajouté 5 à 90. On peut proposer une justification en utilisant les écritures de numération $125-30=12d+5u-3d$ $=9d+5u$</p>
4 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la seconde série.
6 min	Oral collectif Noter sur les ardoises la présence DNV Règle Justification avec DNG ETAYAGE Deux nombres pivot. Faut-il les	<p>1) $137-50$? Structuration avec règle et justifications Insister sur l'importance de 107, nombre pivot en faisant le schéma au tableau.</p> <p>Pour calculer $137-50$, je calcule $137-30$, et je soustraits au résultat 20.</p>  <p>2) $418-20$? Structuration avec règle et justifications</p> 

	<p>évoquer si les élèves ne les ont pas vus ?</p> <p>Règle</p>	$418-20=400+\boxed{18}-2$ $=400-2$ $=398$ $418-20=\boxed{418-10}-10$ $=408-10$ $=398$ <p>3) 531 - 90 ? Structuration avec règle et justifications</p> <p>531 - 90 ? On calcule 531 - 100 et on ajoute 10 au résultat.</p>  <p>4) 241 - 30 ? Structuration avec règle</p> <p>241 - 30 On calcule 41 - 30 et on ajoute 200 au résultat.</p>
5min	Transition	<p>On range son ardoise et son feutre et on distribue une feuille E2 et un crayon par élève.</p> <p>Consigne : L'enseignant montre la feuille E2 et explique son utilité : « Après avoir écrit votre prénom, vous effectuez chaque calcul et vous expliquez comment vous l'avez fait (avec vos mots, en écrivant autrement le calcul, en utilisant la droite numérique). Dans la case à droite, au bout de la ligne, vous écrivez le résultat. »</p>
2min	Fin de la séance	On ramasse les feuilles E2 pour AMR.

Bilan sur la séquence à faire après analyse de l'évolution des procédures (règles appliquées et justifications données) à l'oral et à l'écrit.

AMR se charge de l'écrit ...

A vous de pointer, si possible, quatre ou cinq élèves dont la participation orale a évolué ou est restée atone sur l'ensemble de la séquence.

IV.6. Annexe D.3.1 : Proposition de scénario Sq3

Objectifs :

Séance 1	Séance 2	Séance 3
<p>Produire un calcul permettant de modéliser un problème de comparaison.</p> <p>Utiliser la signification fonctionnelle du mot « écart » dans un contexte lié à la comparaison de longueurs de segments.</p> <p>Découvrir τ_{P10}</p> <p>S'entraîner à produire un schéma avec DNV.</p> <p>S'entraîner à utiliser les techniques τ_{REP}, τ_{I010}, τ_{A10} et τ_{N10C} pour effectuer un calcul de la forme $\square\square\square-\square 0$ ou $\square\square\square+\square 0$.</p> <p>S'entraîner à calculer un écart entre deux nombres donnés</p>	<p>Produire un calcul permettant de calculer un écart en fonction de deux autres écarts dans un problème de comparaison.</p> <p>S'entraîner à produire un schéma avec DNV.</p> <p>S'entraîner à utiliser les techniques τ_{REP}, τ_{I010}, τ_{A10} et τ_{N10C} pour effectuer un calcul de la forme $\square\square\square-\square 0$ ou $\square\square\square+\square 0$.</p>	<p>S'entraîner à produire un calcul permettant de modéliser un problème de comparaison.</p> <p>Utiliser la signification fonctionnelle des mots « écart, complément et différence » dans des contextes variés.</p> <p>S'entraîner à utiliser τ_{P10}, τ_{I010}, τ_{A10}.</p> <p>Introduire τ_{N10}</p> <p>S'entraîner à produire un schéma avec DNV.</p>

Conception de la séquence : La séquence 3 doit permettre aux élèves, en donnant du sens aux notions d'écart, de complément et de différence, de résoudre les problèmes proposés. L'enseignant montrera, que ces expressions mathématiques, employées dans des contextes variés sont liées. Comme en calcul mental et écrit en ligne, la DNV a été introduite, utilisée par les élèves, s'en servir dans cette séquence pour montrer à quoi correspond l'écart entre deux nombres, s'inscrit dans une continuité. L'écart entre a et b correspond à la distance entre les deux points d'abscisse a et b.

Le premier problème est un problème de comparaison de longueurs. L'illustration est très importante. La présence d'une toise permet de comprendre comment les mesures des sauts inscrites dans le tableau ont été prises. Les calculs proposés pour trouver les autres sauts sont du format $\square\square\square-\square 0$ ou $\square\square\square+\square 0$. Les techniques viennent d'être vues en classe.

→ Dans les trois séances, un travail à deux est proposé. Il est suivi d'un travail individuel écrit, ramassé pour analyse.

→ Les phases d'exploration permettront de montrer la diversité des procédures pour effectuer un calcul. L'utilisation de la DNV pour illustrer les étapes du calcul sera encouragée.

→ Beaucoup d'étayage de la part de l'enseignant est attendu autour des expressions « écart, différence, complément ». Bien symbolisé par une double flèche cette distance, cette différence, ce complément.

→ Les nombres proposés sont choisis pour que le calcul de l'écart soit « plus facile » en effectuant une soustraction ou une addition à trou.

→ Le fait d'utiliser τ_{P10} revient à décomposer le calcul en plusieurs étapes et à utiliser pour ce faire des dizaines entières ou des centaines entières comme nombres pivot. Les élèves peuvent transposer τ_{A10} et τ_{N10C} en raisonnant par analogie.

Attentes en termes de connaissances :

- Connaissance pragmatiques (saut en longueur, taille, anniversaire,...)
- Connaissance des significations fonctionnelles de l'addition et de la soustraction
- Connaissance de techniques pour ajouter ou soustraire un nombre de dizaines et un nombre inférieur à dix.

Attentes en termes de capacités :

- lire un texte et une illustration.
- produire un calcul
- écrire un calcul en ligne ou en colonne
- utiliser les schémas avec DNV ou les décompositions pour expliciter sa procédure de calcul
- adapter sa procédure en fonction des nombres donnés
- contrôler son résultat
- transposer des techniques de calcul déjà vues pour trouver un complément.

Attentes en termes d'attitudes :

- écouter, respecter une consigne
- chercher à deux et seul un résultat
- communiquer sa procédure par écrit et à l'oral
- s'intéresser à d'autres procédures
- abandonner éventuellement sa procédure

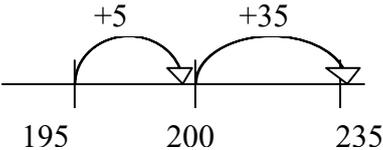
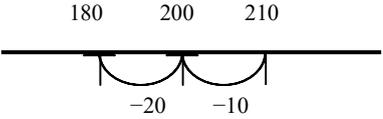
Nouveau : sens de l'écart- illustration de l'écart sur la DNV- composition d'écart- techniques τ_{P10} et τ_{N10}

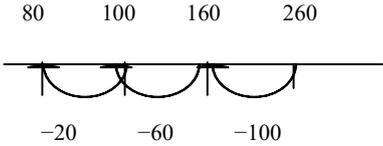
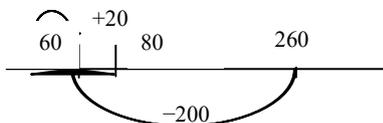
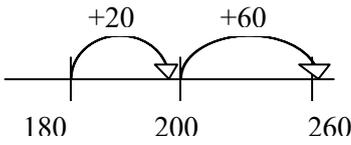
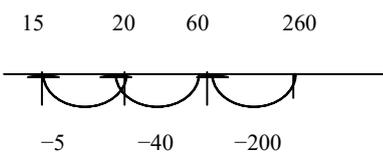
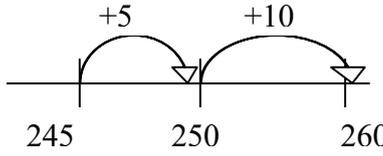
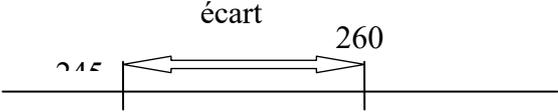
S1Sq3

Matériel : une ardoise ou un cahier de brouillon par élève, une fiche E1-Sq3 pour deux élèves, une fiche E2-Sq3 par élève.

Durée : environ 45 min

durée	Modalités	Déroulement
5 min	Groupe collectif oral	<p>Faire découvrir l'énoncé, de préférence sans les questions, en le projetant aux tableaux.</p> <p>Les enfants doivent :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ évoquer le saut en longueur (bac à sable, posture du joueur, règle graduée, score,...) ▪ les résultats déjà notés dans le tableau ▪ le nombre de participants ▪ les informations qui vont permettre de calculer les scores <p>« manquants »</p> <p>Poser des questions pour s'assurer qu'ils se sont approprié la situation (De quelle longueur est le saut de José ?, Que sait-on à propos du saut</p>

		de Marie en fonction de celui de Nicolas ?...) Faire lire la première question. Expliquer qu'il faut chercher les réponses à deux, qu'on peut écrire les calculs sur l'ardoise ou le cahier de brouillon.
3 min	Transition	Sortir son ardoise ou son cahier de la case, distribuer une feuille E1-Sq3 pour deux élèves.
6 min	A deux Ecrit	Recherche
6 min	Groupe collectif Oral	<p>1) Relever les réponses des élèves en écrivant les calculs qui correspondent à chaque saut</p> <p>Marie : $195+40=235$ Jeanne : $260-50=210$ Audrey : $210-30=190$</p> <p>2) Faire expliciter toutes les procédures pour trouver le résultat</p> <p>Marie</p> <p>ALG</p> $\begin{array}{r} 195 \\ + 40 \\ \hline \end{array}$ <p>Surcompt. 205, 215, 225, 235</p>  <p>τ_{A10} pour l'addition</p> $195+40=195+5+35=235$ <p>Jeanne</p> <p>ALG</p> $\begin{array}{r} 260 \\ - 50 \\ \hline \end{array}$ <p>Décompt 250, 240, 230, 220, 210</p> <p>Application de la règle : « Je calcule $60-10$ et j'ajoute au résultat 200 ».</p> <p>Audrey</p> <p>ALG</p> $\begin{array}{r} 210 \\ - 30 \\ \hline \end{array}$ <p>Décompt 210, 200, 190</p>  <p>τ_{A10}</p>
2 min	Transition	Synthèse : on a fait une addition et deux soustractions. On pouvait trouver les résultats sans poser le calcul en colonne. L'enfant qui saute

		le plus loin est Thomas, celle qui saute le moins loin est Audrey. A vous de chercher, toujours à deux, les réponses des deux autres questions.
4 min	A deux Ecrit	Recherche
4 min	Oral collectif	<p>1) Relever les réponses des élèves en écrivant les calculs qui correspondent à leur procédure</p> <p>Ecart entre le saut d'Audrey et de Thomas :</p> <p>▪ $260 - 180 = 80$</p>   <p>▪ $180 + ? = 260$</p>  <p>Ecart entre le saut de José et Thomas :</p> <p>▪ $260 - 245 = 15$</p>  <p>▪ $245 + ? = 260$</p>  <p>2) Synthèse</p>  <p>L'écart entre 245 et 260 est le même que celui entre 260 et 245. On voit bien ce qu'il représente sur le schéma. Il correspond à la différence entre 260 et 245 ou au complément de 245 à 260 .</p>
		<p>Soustraction</p> <p>Addition à trou</p> <p>Soustraction</p> <p>Addition à trou</p> <p>Définition</p>

min	Transition	Ranger son ardoise ou son cahier dans la case, distribuer une feuille E2-Sq3 par élève. Consigne : « A vous de calculer les écarts par la procédure de votre choix. Vous pouvez utiliser un schéma pour vous aider. »
6 min	Individuel Ecrit	Recherche
2 min	Transition	Ramasser les feuilles pour AMR
5min	Oral collectif	Correction premier calcul : soustraction Deuxième calcul : soustraction ou addition à trou Troisième calcul : addition à trou

Bilan : Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait
- les points forts de la séance
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S2Sq3

Matériel : une ardoise ou cahier de brouillon par élève, une fiche E3-Sq3 pour deux élèves, une fiche E4-Sq3 pour deux élèves.

Durée : environ 45 min

durée	Modalités	Déroulement
3 min	Groupe collectif Oral Consigne	Consigne : « Vous allez travailler par deux. Sortez chacun votre ardoise ou votre cahier de brouillon. Je vous distribue le travail à faire. Il y a deux problèmes à résoudre. Pour chaque problème, vous expliquez votre façon de procéder pour trouver le résultat. Vous pouvez écrire des calculs, utiliser la droite numérique. » Faire reformuler la consigne et la noter au tableau : « On explique sur la feuille comment on a procédé pour trouver le résultat. On rédige une phrase pour la réponse. »
10 min	A deux Ecrit	Recherche
10 min		Mise en commun pour le premier problème 1) Faire lire l'énoncé 2) Faire raconter la situation : Il y a trois enfants qui ont effectué des sauts en longueur. Redonner leurs prénoms Chloé, Thomas, Eloïse. Redonner les informations : Chloé (165cm) ; Thomas, saut de 40 cm de plus que celui de Chloé et Eloïse, saut de 60 cm de plus que celui de Thomas. 3) Interroger un groupe d'élèves qui a calculé la longueur de chaque saut : ▪ la longueur du saut de Thomas : $165+40=205$ $\tau_{1010} : 100+60+40+5$ Surcomptage : 175, 185, 195, 205 Addition posée en colonne

Utilisation de la DNV

- puis la longueur du **saut d'Éloïse** $205+60=265$
- et enfin l'écart entre les deux sauts par le calcul **d'une différence** ou la recherche **de complément** $165+?=265$

4) Interroger un autre groupe d'élèves qui a cherché en calculant directement à partir des écarts

$$60+40=100$$

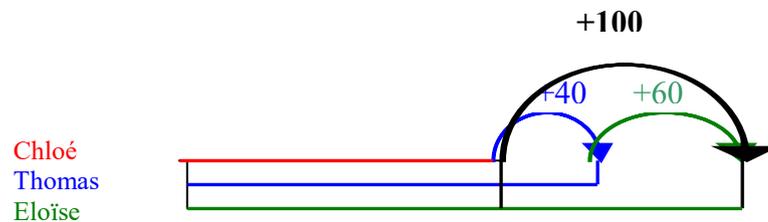
Illustrer cette procédure :



Pour trouver l'écart entre le saut de Chloé et celui d'Eloïse, on cherche combien de centimètres mesure en plus le saut d'Eloïse (vert) par rapport à celui de Chloé (rouge)



On trouve $40+60=100$



L'écart entre le saut de Chloé et d'Héloïse est de 100 cm.

Mise en commun pour le second problème

- 1) Faire lire l'énoncé
- 2) Faire raconter la situation
- 3) Interroger un groupe d'élèves qui **a calculé la longueur de chaque saut** :

- la longueur **du saut de Yan** : $120+80=200$
- puis la longueur **du saut de Sarah** $200-20=180$
- et enfin l'écart entre les deux sauts par le calcul d'une **différence** $180-120$ ou de la **recherche de complément** $120+?=180$.

3) Interroger un autre groupe d'élèves qui a cherché en calculant directement à partir des écarts

		80-20=60 .Illustrer cette procédure.
3 min	Transition Consigne	Ramasser les feuilles. Distribuer une feuille E-4 Sq3 pour deux élèves. « Vous allez résoudre à nouveau, deux problèmes. La consigne est la même que précédemment : « On explique sur la feuille comment on a procédé pour trouver le résultat. On rédige une phrase pour la réponse. » Si vous utilisez un schéma, prenez des crayons de couleur pour vous aider.
10 min	A deux Ecrit	Recherche
8 min	Oral collectif	Envoyer au tableau un ou deux couples pour chaque problème qui ont fait un schéma intéressant et leur demander de le refaire en s'aidant de leurs feuilles.
2min	Fin de la séance	Ramasser les feuilles pour AMR.

Bilan : Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:

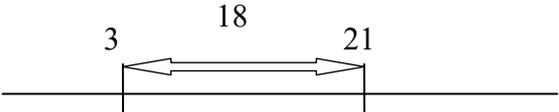
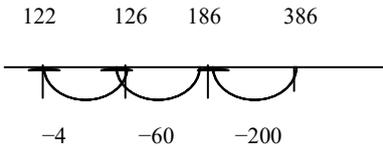
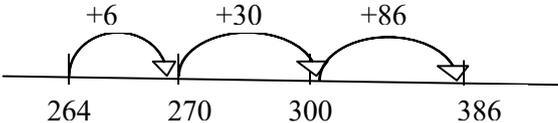
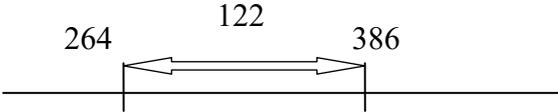
- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S3Sq3

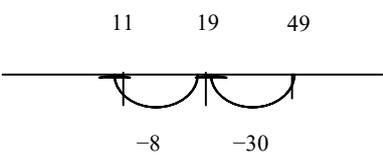
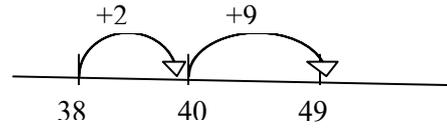
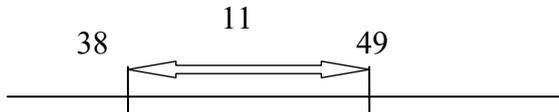
Matériel : une ardoise ou cahier de brouillon par élève, une fiche E5-Sq3 pour deux élèves, une fiche E6-Sq3 par élève

Durée : environ 45 min

durée	Modalités	Déroulement
3 min	Groupe collectif Oral Consigne	Consigne : « Vous allez travailler par deux. Sortez chacun votre ardoise ou votre cahier de brouillon. Je vous distribue le travail à faire. Il y a deux problèmes à résoudre. Pour chaque problème, vous expliquez comment vous avez trouvé la solution. Vous indiquez le calcul que vous avez fait. Attention, pour trouver le résultat, on n'a pas le droit de poser le calcul en colonne. On peut faire éventuellement un schéma pour s'aider. » Faire reformuler la consigne et la noter au tableau : On indique comment on trouve la solution. On n'a pas le droit de poser en colonne les opérations. On explique comment on s'y prend pour effectuer le calcul. On rédige une phrase pour la réponse.
8 min	A deux Ecrit	Recherche
8 min	Oral collectif	Mise en commun pour le premier problème 1) Faire lire la lettre à un élève.

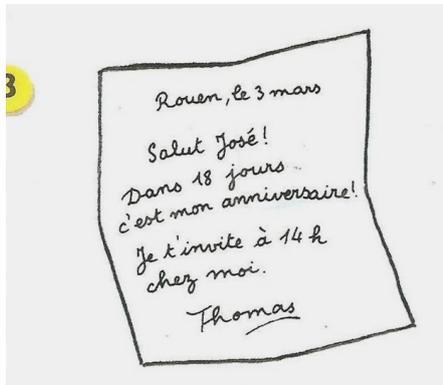
	<p>contexte de mesure du temps</p>	<p>2) Faire raconter la situation. 3) Envoyer un couple d'élèves pour qu'ils expliquent leur procédure. 4) Demander si d'autres élèves ont procédé autrement. 5) Valider $3+18=?$ ou $18+3=?$ 6) Accepter le surcomptage : 19,20,21 Accepter $18+3=18+2+1$ 7) Rédiger la phrase solution. 8) Introduire un schéma et l'interpréter</p>  <p>L'écart entre 3 et 21 correspond au nombre de jours qu'il y a entre aujourd'hui le 3 mars, jour où Thomas écrit la lettre et le 21 mars, jour de son anniversaire.</p> <p>Mise en commun pour le second problème</p> <p>1) Faire lire l'énoncé 2) Faire raconter la situation. 3) Demander à un élève d'expliquer sa procédure. 4) Demander à d'autres élèves d'expliquer leurs procédures. 5) Valider $386-264=?$ ou $264+?=386$ 6) Pour effectuer $386-264$, écouter toutes les propositions ▪ notamment celle qui consiste à faire $6-1$, $8-5$ mais la réfuter en expliquant qu'en ligne on calcule $300-200$, $80-60$, $6-4$ et qu'on ajoute les résultats</p> <p>▪Proposer aussi :</p>  <p>7) Pour effectuer $264+?=386$ écouter toutes les propositions, proposer si elle n'y est pas :</p>  <p>8) Rédiger la phrase solution 9) Introduire un schéma et l'interpréter</p>  <p>L'écart entre 264 et 386 correspond au nombre de points que la gagnante a de plus que la perdante.</p>
	<p>τ N10</p>	
	<p>τ P10</p>	
	<p>Contexte lié aux scores</p>	

3 min	Transition	<p>Distribuer une feuille E-4 Sq3 par élève.</p> <p>Consigne : « A vous de faire le même travail mais cette fois, seul, pour deux autres problèmes. N'oubliez pas d'écrire votre prénom. » On relit les consignes notées au tableau :</p> <p>On indique comment on trouve la solution.</p> <p>On explique comment on s'y prend pour effectuer le calcul.</p> <p>On n'a pas le droit de poser en colonne les opérations.</p> <p>On rédige une phrase pour la réponse</p>
8min	Individuel écrit	Recherche
8 min	Oral collectif	<p>Mise en commun pour le premier problème</p> <p>1) Faire lire l'énoncé</p> <p>2) Faire raconter la situation.</p> <p>3) Demander à un élève d'expliquer sa procédure.</p> <p>4) Demander à d'autres élèves s'ils ont fait autrement.</p> <p>5) Valider $168-15=?$ ou $15+?=168$</p> <p>6) Pour effectuer $168-15$, écouter toutes les propositions</p> <ul style="list-style-type: none"> notamment celle qui consiste à faire $6-1$, $8-5$ mais la réfuter en expliquant qu'en ligne on calcule $100-0$, $60-10$ et $8-5$ et qu'on ajoute les résultats $168-15=100+60+8-10-5$ $=100+50+3$ $=153$ <p>τ_{1010}</p> <p>▪Proposer aussi</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>7) Pour effectuer $15+?=168$ écouter toutes les propositions, proposer si elle n'y est pas :</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>8) Rédiger la phrase solution</p> <p>τ_{N10}</p> <p>9) Introduire un schéma et l'interpréter</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>L'écart entre 15 et 168 correspond à la différence de taille entre les deux singes.</p> <p>Mise en commun pour le second problème</p> <p>1) Faire lire l'énoncé</p> <p>2) Faire raconter la situation</p> <p>3) Envoyer un élève pour qu'il explique sa procédure</p> <p>τ_{P10}</p> <p>Contexte lié à la mesure de tailles</p>

	<p>τ_{1010}</p> <p>τ_{N10}</p> <p>τ_{P10}</p> <p>Contexte lié aux âges</p>	<p>4) Demander si d'autres élèves ont proposé d'autres calculs</p> <p>5) Valider $49 - 38 = ?$ ou $38 + ? = 48$</p> <p>6) Pour effectuer $49 - 38$ écouter toutes les propositions</p> <ul style="list-style-type: none"> notamment celle qui consiste à faire $4 - 3$, $9 - 3$ mais la réfuter en expliquant qu'en ligne on calcule $40 - 30$, $9 - 3$ et qu'on ajoute les résultats $49 - 38 = 40 + 9 - 30 - 8$ $= 10 + 1$ $= 11$ <p>Proposer aussi</p>  <p>7) Pour effectuer $38 + ? = 49$ écouter toutes les propositions, proposer si elle n'y est pas :</p>  <p>8) Rédiger la phrase solution</p> <p>9) Introduire un schéma et l'interpréter</p>  <p>L'écart entre 38 et 49 correspond à la différence d'âge entre le roi et la reine.</p>
5min	Fin de la séance	On ramasse les feuilles E4-Sq3 pour AMR.

Bilan sur la séquence à faire après analyse de l'évolution des procédures (règles appliquées et justifications données) à l'oral et à l'écrit.

IV.7. Annexe D.3.2 : Exercices relatifs à S3Sq3



Quelle est la date d'anniversaire de Thomas ?



Qui a le plus de points ?
Combien de plus ?



Quel est l'écart de taille entre ces deux singes ?



Le roi a 49ans. La reine a femme a 38 ans. Quelle est leur différence d'âge ?

IV.8. Annexe D.4.1 : Proposition de scénario Sq4

Objectifs :

Séance 1	Séance 2
Mesurer un segment en utilisant une règle cassée	Mesurer la longueur d'un objet ²⁵⁰ en utilisant une règle cassée
Exprimer la distance entre deux points d'abscisses respectives a et b ($a \leq b$) par la différence $b - a$	Utiliser les techniques τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} pour effectuer un calcul de la forme $\square - \square$.
	Effectuer un calcul rapidement et mentalement dans une situation concrète

Conception de la séquence : La séquence 4 permettra, en introduisant un artefact, « la règle cassée », d'exprimer l'écart entre a et b, matérialisé par le segment d'extrémités a et b, en calculant directement une différence.

→ Dans la première séance, un travail individuel suivi d'un travail de groupe permet de valider ou d'invalider certaines techniques de mesurage entre pairs (lecture directe, comptage de un en un des unités, changement de numérotation,...).

→ Dans la première séance, la mise en commun permettra de montrer que le calcul d'une différence se justifie et qu'il est plus économique qu'une technique basée sur le comptage.

→ Dans la seconde séance, le fait de proposer de mesurer la longueur de « vrais objets » en utilisant « sa propre règle cassée », de participer à un jeu d'équipe pour gagner un challenge doit motiver les élèves. Ceux-ci vont réinvestir les techniques qu'ils connaissent pour effectuer mentalement et rapidement un calcul soustractif.

Attentes en termes de connaissances :

- Connaissance pragmatique (aspect d'une règle non cassée graduée en cm)
- Connaissance de la signification de la longueur d'un segment
- Connaissance de la signification de la longueur d'un objet comme étant la longueur de la plus grande de ses trois dimensions.
- Connaissance de techniques pour déterminer l'écart entre deux nombres.

Attentes en termes de capacités :

- placer la règle en tenant compte d'une graduation
- lire un résultat de mesurage
- déterminer la longueur d'un segment par comptage, re-numérotage ou calcul d'une différence
- contrôler son résultat en estimant la longueur à vue d'œil
- appliquer la technique qui consiste à produire un calcul soustractif pour déterminer une longueur de segment
- effectuer mentalement et rapidement un calcul soustractif de la forme $\square - \square$ en utilisant les techniques τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} .

²⁵⁰ La longueur d'un objet est la longueur de la plus grande de ses trois dimensions en se référant à une définition commune.

- compléter un tableau à double entrée
- calculer un score en respectant un barème

Attentes en termes d'attitudes : ▪ écouter, respecter une consigne

▪ chercher seul une procédure
 ▪ expliquer oralement sa procédure au sein d'un groupe et argumenter

- s'intéresser à d'autres procédures
- abandonner éventuellement sa procédure
- coopérer au sein d'une équipe
- communiquer son score

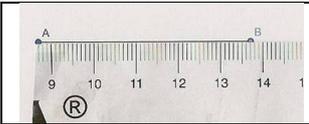
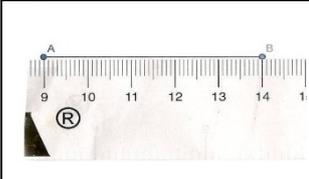
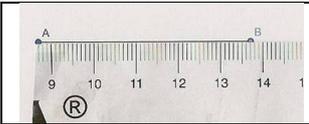
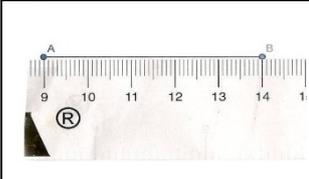
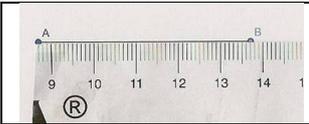
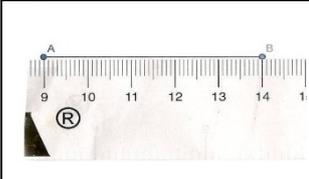
Nouveau : utilisation d'une règle cassée- production d'un calcul soustractif pour déterminer une longueur.

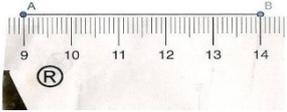
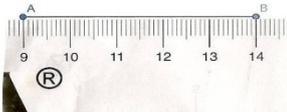
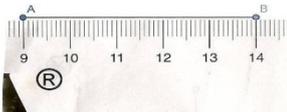
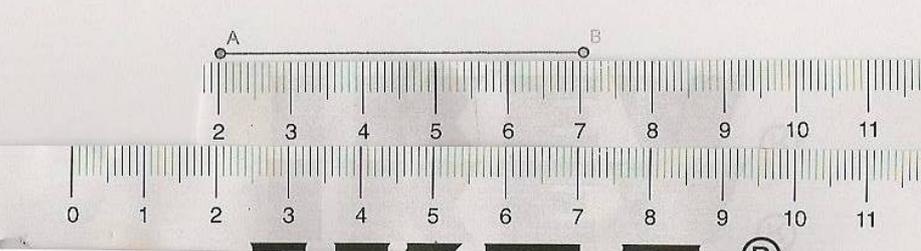
S1Sq4

Matériel :

- Une feuille de répartition pour le maître indiquant le nom des élèves ayant la règle cassée portant la lettre A, B, C, D ou E qui va servir aussi par la suite pour constituer des groupes de six chez Ludo, (resp4 chez Sophie), groupe hétérogène (la feuille n'est pas en pièce jointe)
- 4 (ou 6) règles cassées portant la lettre A (cassées à environ à 2 cm)
 4 (ou 6) règles cassées portant la lettre B (cassées à environ à 3 cm)
 4 (ou 6) règles cassées portant la lettre C (cassées à environ à 6 cm)
 4 (ou 6) règles cassées portant la lettre D (cassées à environ à 8 cm)
 3 (ou 5) règles cassées portant la lettre E (cassées à environ à 9 cm)
- Une feuille E1-Sq4 par élève.
- Un plan de classe indiquant l'emplacement des 5 groupes (le plan n'est pas en pièce jointe)
- Une feuille à remplir avec le nom des enfants E2-Sq2 pour le groupe des 6 (resp.4) élèves ayant eu la règle A (feuille en pièce jointe à compléter)
 Une feuille à remplir avec le nom des enfants E2-Sq2 pour le groupe des 6 (resp.4) élèves ayant eu la règle B (feuille en pièce jointe à compléter)
 Une feuille à remplir avec le nom des enfants E2-Sq2 pour le groupe des 6 (resp.4) élèves ayant eu la règle C (feuille en pièce jointe à compléter)
 Une feuille à remplir avec le nom des enfants E2-Sq2 pour le groupe des 6 (resp. 4) élèves ayant eu la règle D (feuille en pièce jointe à compléter)
 Une feuille à remplir avec le nom des enfants E2-Sq2 pour le groupe des 5 (resp. 3) élèves ayant eu la règle E (feuille en pièce jointe à compléter)
- Un tableau pour la synthèse à projeter (en pièce jointe)
- Deux règles, une non cassée et une cassée pour visualiser la technique correspondant à b-a

Durée : environ 50 min

durée	Modalités	Déroulement				
5 à 8 min	Groupe collectif oral	Distribuer suivant la feuille de répartition ,les règles cassées. Recueillir les remarques des élèves, faire ressortir que sur chaque règle, il y a deux cotés, un côté où la règle est graduée en centimètres, l'autre où elle est graduée en pouces ; que les règles ne commencent pas à zéro, que pour certaines il manque le 1,2,...				
2 min	Transition	Distribuer une feuille E1-Sq4 par élève.				
3 min	Groupe collectif oral	Ecrire son prénom Consigne : « Chacun vient de recevoir une feuille sur laquelle sont tracés trois segments. Il faut utiliser la règle que vous avez reçu (pas vos règle habituelle) pour indiquer la longueur de chacun de ses segments en centimètres. » Pour chaque segment vous écrivez votre résultat de façon bien visible à droite du segment.				
5 min	Seul écrit	Recherche				
4 min	Transition	Constituer les groupes en fonction des lettres sur les règles Demander à chaque élève de prendre sa règle, un crayon et sa feuille E1-Sq4 avant de se rendre à un endroit précis de la classe où il va retrouver les autres membres de son groupe (voir plan de classe). Distribuer E2-Sq4 par groupe (s'assurer que c'est la bonne feuille !).				
3 min	Groupe collectif oral	Consigne : « Dans chaque groupe, vous venez de recevoir un tableau. Sur la ligne correspondant à votre prénom, vous recopiez les résultats que vous avez noté sur votre feuille pour le segment a, le segment b et le segment c. Ensuite, tous ensemble, après avoir comparé vos résultats et expliqué vos procédures, vous donnez les mesures de longueur qui conviennent pour les segments a, b et c.				
8-10 min	Groupe de 4 ou 6	Recherche				
2 min	Transition	On retourne à sa place				
10 min	Groupe collectif Oral	Mise en commun L'enseignant remplit le tableau (pièce jointe) en interrogeant chaque groupe. Normalement, tous les groupes doivent avoir trouvé après discussion Trouvé 5cm, 3cm et 8cm. Il demande à plusieurs enfants d'expliquer leurs procédures (en fonction de ce qu'il a observé)				
		<table border="1"> <tbody> <tr> <td></td> <td>L'élève pose le bord de sa règle sur l'extrémité du segment. Il en déduit que le segment mesure 13 cm et 7 mm.</td> </tr> <tr> <td></td> <td>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9. Il en déduit sans tenir compte du fait qu'il n'est pas placé à « zéro » que le segment mesure 14 cm.</td> </tr> </tbody> </table>		L'élève pose le bord de sa règle sur l'extrémité du segment. Il en déduit que le segment mesure 13 cm et 7 mm.		L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9. Il en déduit sans tenir compte du fait qu'il n'est pas placé à « zéro » que le segment mesure 14 cm.
	L'élève pose le bord de sa règle sur l'extrémité du segment. Il en déduit que le segment mesure 13 cm et 7 mm.					
	L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9. Il en déduit sans tenir compte du fait qu'il n'est pas placé à « zéro » que le segment mesure 14 cm.					

		<div data-bbox="469 188 788 371">  </div> <div data-bbox="804 188 1402 371"> <p>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il compte de un en un, en s'aidant éventuellement de ses doigts, le nombre de centimètres et trouve 5 cm.</p> </div> <div data-bbox="469 371 788 555">  </div> <div data-bbox="804 371 1402 555"> <p>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il renumérote la règle en s'aidant éventuellement de ses doigts, le 9 devient le 0, le 10 devient le 1, ..., le 14 devient le 5.</p> </div> <div data-bbox="469 555 788 739">  </div> <div data-bbox="804 555 1402 739"> <p>L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il lit le nombre qui correspond à la graduation B pour en déduire directement que le segment mesure 14–9 cm.</p> </div> <p data-bbox="469 748 587 779">Synthèse</p> <p data-bbox="469 819 1402 927">On trouve la longueur du segment, l'écart entre les nombres 9 et 14 en cherchant le complément de 9 à 14 (c'est ce que certains ont fait en comptant de un en un) ou en calculant directement la différence 14–9.</p> <p data-bbox="469 967 1402 1039">Pour justifier la technique basée sur le calcul soustractif, on superpose une règle non cassée et une règle cassée.</p> <div data-bbox="469 1070 1402 1339">  </div> <p data-bbox="469 1375 1402 1482">7 cm correspondent à la longueur qu'on aurait en utilisant une règle habituelle, mais comme ici on utilise une règle cassée à deux, on enlève les deux centimètres de trop.</p>
2min	Fin de la séance	Ramasser les feuilles pour AMR. Ramasser les règles « cassées ».

Manipulation

Bilan : **Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:**

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S2Sq4

Matériel :

- Une feuille E 3-Sq4 par élève
- Une feuille de répartition pour le maître indiquant le nom des élèves qui vont travailler ensemble (quatre par équipe), groupe hétérogène (feuille non en pièce jointe)
- Un plan de classe pour placer les équipes de quatre (feuille non en pièce jointe)
- 29 (resp. 19) règles cassées (choisir éventuellement de distribuer celles qui sont cassées à 2 ou 3 aux élèves moins performants en calcul mental).
 - 7 (resp. 5) sachets contenant douze objets et une fiche de mesure à compléter par les membres de l'équipe (voir photo en document joint).
- Une fiche de corrigé (en pièce jointe).
- Un tableau permettant de noter les résultats des 7 (resp. 5) équipes à projeter au tableau ou à recopier au tableau (en pièce jointe).

Durée : environ 45 min

durée	Modalités	Déroulement
2 à 3 min	Groupe collectif oral	Distribuer à chaque élève une règle cassée et une feuille E3-Sq4. Bien préciser qu'il s'agit d'une phase de rappel. Consigne : en utilisant votre règle cassée, vous devez trouver la longueur de chaque segment en centimètres. Vous pourriez utiliser toutes les procédures qu'on a vu la dernière fois (comptage de un en un, re-numérotage) mais on préfèrerait que vous fassiez un calcul soustractif. Vous pouvez éventuellement l'écrire sur votre feuille.
4min	Ecrit Seul	Recherche
5min	Groupe collectif Oral Avec règle cassée en 3 Avec règle cassée en 5 Avec règle cassée en 9	Correction rapide Segment a  <p>Je place ma règle au point A en 3, je lis en B le nombre 6, je trouve 3 ($6-3=3$).</p> <p>Segment b  <p>Je place ma règle au point C en 5, je lis en B, le nombre 14, je trouve 9 ($14-5=9$)</p> <p>Segment c  <p>Je place ma règle au point E en 9, je lis en B, le nombre 16, je trouve 7 ($16-9=7$)</p> </p></p>
3 min	Transition	Ramasser les feuilles E3-Sq4 pour AMR. Demander aux élèves de

		garder uniquement leur règle cassée et un crayon. Constituer les groupes de quatre en fonction de la fiche de répartition et du plan de classe.
5 min	Groupe collectif Oral	Présentation du jeu. Chaque équipe va recevoir un sachet contenant 12 objets et une fiche de mesure avec le nom de son équipe. Tous les sachets contiennent les mêmes objets. Il y a un objet dont vous ne connaissez peut-être pas le nom , projeter sa photo, ou le décrire (sa tête n'est pas ronde mais hexagonale), c'est un tire fond. Dans chaque équipe, il faut vous mettre d'accord pour savoir qui mesure quoi et quel objet vous mesurez éventuellement à plusieurs. Attention, un objet a trois dimensions, la longueur correspond à la mesure la plus longue à vue d'œil (proposez de montrer la longueur d'une trousse, du bureau). Chaque mesure juste rapporte un point. L'équipe qui termine la première rapporte un bonus de trois points, celle qui termine deuxième rapporte un bonus de deux points, celle qui termine troisième rapporte un bonus d'un point.
8-10 min	Groupe de quatre	Recherche
2min	Transition	Quand tous les groupes ont fini, l'enseignant affiche le tableau de score.
8-10 min	Groupe oral	L'enseignant prend son corrigé (feuille en pièce jointe) et énonce pour le premier objet (la pince à linge en plastique) la mesure en centimètres, 9cm. Il demande à ceux qui ont trouvé un autre résultat de le dire. Ensemble on décide que toute mesure correspondant à 8cm 7mm, 8cm8mm, 8cm9mm, 9cm, 9cm1mm, 9cm2mm, 9cm3mm est correcte. Quand les élèves ont trouvé un résultat correct, ils inscrivent sur la ligne correspondant au nom de l'objet, une barre. Une discussion va s'engager pour la mesure de la cordelette blanche. La règle cassée n'étant pas assez grande un report de mesure était nécessaire. Quelle stratégie a été mise en place ? Quand les douze objets ont été nommés, que chaque mesure a été validée, chaque équipe calcule son score et l'indique à la classe. L'enseignant renseigne le tableau des scores.
2min	Fin de la séance	Ramasser les sachets avec les fiches de mesure à l'intérieur et les règles « cassées ».

Bilan sur la séquence à faire après analyse des procédures des élèves pour « mesurer ».

AMR se charge de l'écrit ...

A vous de pointer, si possible, quatre ou cinq élèves dont la participation orale a évolué ou est restée atone sur l'ensemble de la séquence.

IV.9. Annexe D.5.1 : Proposition de scénario Sq5

Objectifs :

Séance 1	Séance 2
Découvrir la propriété de conservation des écarts par translation sur la DNG et la formuler oralement.	Réécrire $a - b$, en un calcul plus simple, faisant intervenir la propriété de conservation des écarts.
Utiliser la propriété de comparaison des écarts pour établir l'égalité entre deux différences.	Utiliser τ_{AN} .

Conception de la séquence :

→ La séance 1 de la séquence 5, permettra, en translatant des bandelettes sur la DNG de découvrir la propriété de conservation des écarts. C'est une séance difficile à mener pour l'enseignant. Il faut jongler entre une formulation orale de la propriété, l'utilisation du registre des expressions numériques et l'utilisation de gestes pour montrer les effets de la translation. Il faut être précis sans être trop formel.

→ Le travail sur le repérage des calculs « équivalents » est présenté de façon ludique, par le biais de manipulation d'étiquettes. Toutefois, des explications orales de la part des élèves sont attendues.

→ Dans la seconde séance, les modalités (trois séries de calcul) sont proches de celles introduites en séquence 1&2 pour découvrir et s'entraîner à utiliser τ_{AN} .

Attentes en termes de connaissances :

- Connaissance d'une technique basée sur le calcul soustractif pour déterminer la longueur d'un segment.
- Connaissance de τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} .

Attentes en termes de capacités :

- placer la règle en tenant compte d'une graduation
- lire un résultat de mesurage
- déterminer la longueur d'un segment par calcul d'une différence
- comparer deux expressions numériques de la forme $a - b$ et $c - d$ en déterminant si $c = a + x$ et $d = a + x$ (respectivement $c = a - x$ et $d = b - x$)
- effectuer mentalement et rapidement un calcul soustractif en utilisant les techniques τ_{REP} , τ_{1010} , τ_{A10} et τ_{N10C} .

Attentes en termes d'attitudes : ▪ écouter, respecter une consigne

- chercher seul ou à deux une procédure
- expliquer oralement sa procédure au sein d'un groupe et argumenter
- s'intéresser à d'autres procédures
- abandonner éventuellement sa procédure
- coopérer au sein d'un binôme

Nouveau : propriété de conservation des écarts. Technique τ_{AN} .

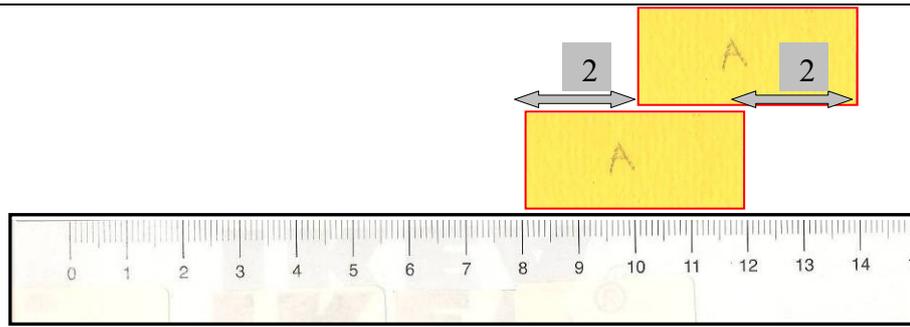
S1Sq5

Matériel :

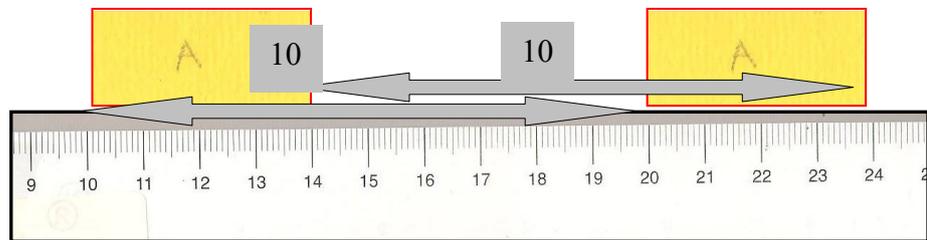
- Une règle non cassée par élève (de 30cm). Si les élèves ont un double décimètre, distribuer une règle cassée où les graduations de 21 à 27 sont apparentes.
- Une bandelette A et une bandelette B par élève (je les ai).
- Une feuille E1-Sq5 pour deux élèves.
- Une feuille E2-Sq5 pour deux élèves.
- Un jeu d'étiquettes E3-Sq5 pour deux élèves (je les ai).
- Un tube de colle par élève.
- P-Sq1 pour l'enseignant

Durée : environ 45 min

durée	Modalités	Déroulement									
5-6 min	Groupe collectif oral	<p>Distribuer à chaque élève une bandelette A et une bandelette B. Vérifier que chaque élève a une règle graduée de 30 cm (distribuer au besoin une règle cassée). Distribuer E1-Sq5 pour deux élèves. Consigne : « Vous allez travailler par deux. Chacun va mesurer seul sa bandelette en suivant les instructions qui sont sur la feuille qu'on vient de distribuer et compléter le tableau après discussion avec son camarade. »</p> <p>Le mieux est de projeter l'énoncé P-Sq5 et de compléter collectivement la première ligne du tableau après avoir laissé manipuler chaque élève.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Je pose l'extrémité de la bandelette gauche sur la graduation.</td> <td style="width: 33%;">Je lis le nombre qui correspond à la graduation de l'autre extrémité.</td> <td style="width: 33%;">J'indique par un calcul soustractif la longueur de la bandelette.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">12-8</td> </tr> </table> <p>Préciser ensuite de ne pas oublier la question qui porte sur la comparaison des calculs avant de changer de bandelette.</p>	Je pose l'extrémité de la bandelette gauche sur la graduation.	Je lis le nombre qui correspond à la graduation de l'autre extrémité.	J'indique par un calcul soustractif la longueur de la bandelette.	8	12	12-8			
Je pose l'extrémité de la bandelette gauche sur la graduation.	Je lis le nombre qui correspond à la graduation de l'autre extrémité.	J'indique par un calcul soustractif la longueur de la bandelette.									
8	12	12-8									
8 min	A deux Ecrit	Recherche									
8min	Groupe collectif oral	<p>1) <u>Exploration collective</u> Envoyer deux élèves compléter le premier tableau</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">8</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">12</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">12-8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">14</td> <td style="text-align: center;">14-10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">20</td> <td style="text-align: center;">24</td> <td style="text-align: center;">24-10</td> </tr> </table> <p>Demander si les calculs sont égaux et si oui pourquoi ? Accepter car « le résultat est le même » Suggérer (si l'argument ne vient pas) car « c'est la même bandelette qui a été déplacée sur la règle, c'est la même bandelette qui a été translaturée ».</p> <p>Montrer la manipulation avec le TBI, en affichant la règle virtuelle et en créant une bandelette de 4cm ou en s'aidant d'une bandelette en papier. Au pire, utiliser la figure ci-après (reproduite dans P-Sq5) qui est moins claire car elle utilise deux bandelettes (au lieu d'une qu'on déplace) mais qui permet quand même « d'illustrer » la translation et les conséquences sur les nombres aux extrémités de la bandelette.</p>	8	12	12-8	10	14	14-10	20	24	24-10
8	12	12-8									
10	14	14-10									
20	24	24-10									



Dialoguer avec les élèves, montrer et écrire en même temps :
 l'extrémité gauche de la bandelette a été avancée de 2 (8→10),
 l'extrémité de droite a aussi avancé de 2 (12→14).
 C'est la même bandelette qu'on mesure $12-8=14-10$.
 Ecrire éventuellement $12-8=(12+2)-(8+2)$
 Refaire la manipulation, toujours avec la bandelette A



Réengager le dialogue, montrer et écrire en même temps :
 l'extrémité gauche de la bandelette a été avancée de 10 (10→20),
 l'extrémité de droite a aussi avancé de 10 (14→24)
 C'est la même bandelette qu'on mesure $14-10=24-20$.
 Ecrire éventuellement $14-10=(14+10)-(10+10)$
 Enoncer la propriété :
 La différence ne change pas quand on **ajoute le même nombre** aux deux
 termes de la différence (ici on a ajouté **10** à 14 et **10** à 10).

Envoyer trois élèves compléter le second tableau

21	27	$27-21$
20	26	$26-20$
15	21	$21-15$

Conclure directement à partir des calculs soustractifs du tableau :
 ▪ on a enlevé 1 à 27 et 1 à 20, les différences $27-21$ et $26-20$ sont égales.
 ▪ on a enlevé 5 à 26 et 5 à 20, les différences $26-20$ et $21-15$ sont égales.

Redire la propriété :

Une différence ne change pas quand on **ajoute ou on soustrait le même nombre** aux deux termes.

Conclure : « Vous verrez, cette propriété est très utile en calcul mental et pour la soustraction posée. »

6 min	Oral collectif	<p>En attendant, on va chercher à savoir si deux différences sont égales. Projeter le tableau ci-dessous (reproduit en P-S1-Sq5) et montrer l'étiquette $43-8$</p> <div data-bbox="478 336 861 795" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <div data-bbox="491 376 646 430" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$53-18$</div> </div> <p>Est-ce que le résultat de $43-8$ est le même que celui de $53-18$? On attend « oui » car on a ajouté dix aux deux nombres. On place alors l'étiquette dans le tableau.</p> <div data-bbox="478 940 861 1265" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <div data-bbox="491 981 646 1034" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$53-18$</div> <div data-bbox="491 1070 646 1124" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$43-8$</div> </div> <p>On effectue deux autres recherches avec les étiquettes</p> <div data-bbox="526 1321 1204 1377" style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div data-bbox="529 1326 699 1377" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$55-20$</div> <div data-bbox="769 1326 938 1377" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$53-20$</div> <div data-bbox="1034 1326 1203 1377" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$53-20$</div> </div> <p>Après avoir expliquer pourquoi l'étiquette e convient pas, on complète le tableau :</p> <div data-bbox="478 1590 861 2004" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <div data-bbox="491 1630 646 1684" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$53-18$</div> <div data-bbox="491 1720 646 1774" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$43-8$</div> <div data-bbox="491 1841 646 1895" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$55-20$</div> </div>
-------	----------------	--

3min	transition	Distribuer un jeu d'étiquettes E3-Sq5 pour deux (je les ai) et E2-Sq5 pour deux. Demander aux élèves de sortir un tube de colle. Préciser que la consigne est écrite sur la feuille. La relire éventuellement.
5 min	Ecrit A deux	Recherche.
5min	Oral collectif	Corriger (tableau en P-S1-Sq5) en interrogeant plusieurs élèves, en formulant et reformulant la propriété de conservation des écarts.

Bilan : **Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:**

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

S2Sq5Matériel :

- Une ardoise et un feutre par élève.
- P-S2-Sq5 pour l'enseignant.
- Une feuille E4-Sq5 par élève.
- Une feuille E5-Sq5 par élève.

Durée : environ 40 min

durée	Modalités	Déroulement
10 min	Groupe collectif Oral et écrit individuel	<p>Sortez votre ardoise et votre feutre.</p> <p>1) Présentation et exploitation au tableau de la première situation.</p> <p>1) Faire lire l'énoncé et les questions (projetés au tableau).</p> <p>2) Faire raconter la situation : Il y a deux enfants, un garçon et une fille qui s'appelle Alice.</p> <p>Le garçon demande à Alice d'effectuer le calcul « $2612-480$ ».</p> <p>Elle a une idée, ajouter 20 aux deux nombres.</p> <p>On nous demande (première question) d'expliquer pourquoi c'est une bonne idée pour arriver à calculer plus facilement.</p> <p>On nous demande (deuxième question) de calculer en utilisant cette méthode.</p> <p>A vous de réfléchir et d'écrire ce que vous pensez sur votre ardoise puis de donner le résultat de $2612-480$ en utilisant la méthode d'Alice.</p> <p>3) Après avoir écouté les propositions des élèves, conclure en disant qu'Alice a raison car on ne change pas le calcul quand on ajoute 20 aux deux nombres (c'est la propriété de conservation des écarts qu'on a vu la dernière fois). Quand on ajoute 20 à 480, on obtient 500, un nombre entier de centaines, ce qui est plus facile à soustraire.</p> <p>4) IMPORTANT : écrire le calcul équivalent $2612-480= 2632 -500=2132$</p> <p>2) Présentation et exploitation au tableau de la seconde situation.</p> <p>1) Faire lire l'énoncé et les questions (projetés au tableau).</p> <p>2) Faire raconter la situation : Il y a deux enfants, une fille et un garçon qui s'appelle Thomas.</p> <p>La fille demande à Thomas d'effectuer le calcul « $147-21$ ».</p> <p>Il a une idée, soustraire 1 aux deux nombres.</p> <p>On nous demande (première question) d'expliquer pourquoi c'est une bonne idée pour arriver à calculer plus facilement.</p> <p>On nous demande (deuxième question) de calculer ensuite en utilisant cette méthode.</p> <p>A vous de réfléchir et d'écrire ce que vous pensez sur votre ardoise puis de donner le résultat de $147-21$ en utilisant la méthode de Thomas.</p> <p>3) Après avoir écouté les propositions des élèves, conclure en disant que Thomas a raison car on ne change pas le calcul quand on soustrait 1 aux deux nombres (c'est la propriété de conservation des écarts qu'on a vu la dernière fois). Quand on soustrait 1 à 21, on obtient 20, un nombre entier de dizaines, ce qui est plus facile à soustraire.</p> <p>4) IMPORTANT : écrire le calcul équivalent $147-21= 146 -20=126$.</p> <p>3) Présentation et exploitation au tableau des deux autres situations</p>

		avec les mêmes modalités.
2 min	Transition	Distribuer une feuille E4-Sq5 par élève. Préciser qu'il n'y a plus Alice, Thomas,...pour les aider. C'est à eux d'ajouter ou de soustraire un nombre auquel il pense pour faciliter le calcul, de l'indiquer dans la phrase « à trou » et d'effectuer le nouveau calcul.
5 min	Individuel écrit	Recherche
4min	Collectif Oral	Bien redire la phrase complète et noter « le nouveau calcul ». <u>Calcul n°1</u> J'ai soustrait 1 aux deux nombres , $603-91=602-90$ <u>Calcul n°2</u> J'ai ajouté 30 aux deux nombres , $5200-170=5230-200$ Calcul n°1 J'ai ajouté 2 aux deux nombres , $603-91=602-90$ Calcul n°1 J'ai soustrait 3 aux deux nombres , $435-103=432-100$
2min	Transition	Distribuer une feuille E5-Sq5 par élève. Préciser que sur la feuille, il n'y a plus qu'un calcul. Il n'y a plus d'aide. Pour indiquer comment ils ont trouvé le résultat, ils peuvent écrire la phrase « j'ai ajouté ou soustrait... » ou noté directement le nouveau calcul.
5 min	Individuel écrit	Recherche
2min	Fin de la séance	Ramasser les feuilles E4-Sq5 et E5-Sq5 pour AMR.

Bilan : **Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:**

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

IV.10. Annexe D.5.2 : Ecritures équivalentes S1Sq5

Parmi les sept étiquettes, deux ne correspondent pas au calcul de 37–29. Colle celles qui correspondent au calcul dans le tableau :

37–29

38–30

40–32

17–9

30–22

537–529

37–30

40–31

IV.11. Annexe D.5.3 : Série de calculs relatifs à τ_{AN} S2Sq5

Calcul n°1 603-91 J'ai soustrait aux deux nombres.	<input type="text"/>
Calcul n°2 5200-170 J'ai ajouté aux deux nombres.	<input type="text"/>
Calcul n°3 312 - 98 J'ai ajouté aux deux nombres.	<input type="text"/>
Calcul n°4 435- 103 J'ai soustrait aux deux nombres.	<input type="text"/>

IV.12. Annexe D.6.1 : Proposition de scénario Sq6

Objectifs :

Séance 1	Séance 2
<p>S'entraîner à utiliser τ_{REP}, τ_{1010}, τ_{A10}, τ_{AN}, τ_{N10} et τ_{N10C} pour soustraire un nombre à deux chiffres à un nombre à deux chiffres.</p> <p>Utiliser des calculs ou un schéma pour expliquer une procédure.</p>	<p>Expliciter la nature des nombres et les relations qui existent entre les deux nombres du calcul à effectuer.</p> <p>Envisager une ou plusieurs procédures avant même de commencer à calculer.</p>

Conception de la séquence : La séquence 6 doit permettre aux élèves de réviser les techniques qu'ils ont déjà étudiées pour effectuer des calculs de la forme $\square\square-\square$ ou $\square\square-\square 0$ et de transposer ces techniques pour effectuer un calcul de la forme $\square\square-\square\square$.

→ La première séance est construite sur le même modèle que les séances proposées en séquence 1 et 2 (trois séries de quatre calculs sont à effectuer. Entre deux séries, les techniques envisagées par les élèves et envisageables sont présentées, expliquées, justifiées grâce à des calculs ou à un schéma utilisant la DNV).

→ La seconde séance doit permettre aux élèves d'explicitier la nature des nombres et des relations qui existent entre les deux nombres d'un calcul et d'envisager une ou plusieurs procédures avant même de l'effectuer. Sa présentation est « ludique ». Le fait de dire « facile/difficile » va permettre d'avoir une posture « réflexive » et de favoriser les échanges entre pairs.

Attentes en termes de connaissances :

- Connaissance du répertoire additif et soustractif
- Connaissance de la dizaine entière qui précède ou succède un nombre de deux chiffres.
- Connaissance du nombre de dizaines entières d'un nombre en fonction de son nom ou de son écriture chiffrée
- Connaissances de techniques pour calculer $\square\square-\square$.
- Connaissances de techniques pour calculer $\square\square-\square 0$.

Attentes en termes de capacités :

- abandonner une procédure basée sur le comptage pour calculer directement à partir des nombres
- transposer des techniques vues pour soustraire un nombre inférieur à dix
- transposer des techniques vues pour soustraire des dizaines entières
- utiliser des calculs, des schémas avec DNV pour expliciter sa procédure de calcul
- adapter sa procédure en fonction des nombres donnés

Attentes en termes d'attitudes :

- écouter, respecter une consigne, chercher seul un résultat, communiquer sa procédure par écrit et à l'oral.
- s'intéresser à d'autres procédures, abandonner éventuellement sa procédure.
- utiliser le registre des écritures symboliques.

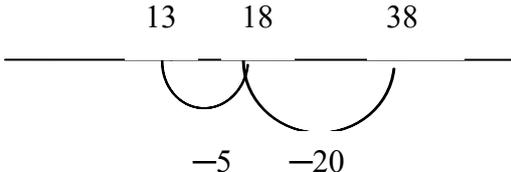
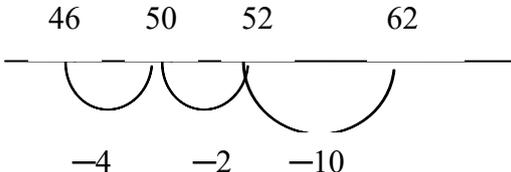
Nouveau : Forme du calcul : □□-□□- posture réflexive

S1Sq6

Matériel : une ardoise et un feutre par élève. La fiche de calcul C1 pour le maître

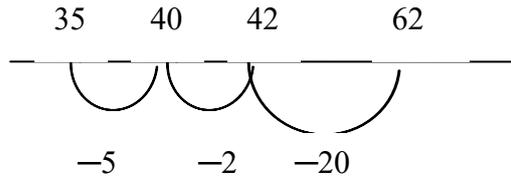
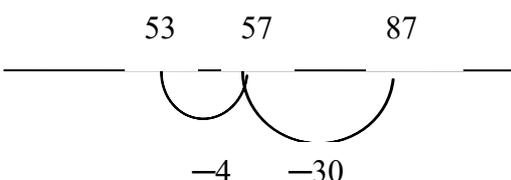
Durée : environ 35 min

durée	Modalités	Déroulement
2 min	Groupe collectif oral	<p>Aujourd’hui, on va calculer des différences. Vous pouvez, en fonction des calculs qu’on vous donne à effectuer essayer d’utiliser les procédures que vous connaissez déjà ou en proposer d’autres.</p> <p>Distribution d’une ardoise et d’un feutre</p> <p>Consigne : L’enseignant précise qu’il va donner, un à un, quatre calculs à faire, qu’il faut écrire à chaque fois le résultat sur l’ardoise. Il n’est pas obligatoire d’expliquer sa procédure par écrit. Il est par contre permis et même recommandé de s’aider en faisant un schéma ou d’autres calculs sur l’ardoise.</p> <p>Remarque pratique : il est préférable de partager le recto de l’ardoise en deux, par un trait horizontal et le verso en deux par un trait horizontal pour avoir plus de place pour la recherche (calculs, DNV,...)</p> <p>Reformulation de la consigne par un ou deux élèves.</p>
4 min	Individuel Ecrit	<p>Recherche des calculs donnés un à un de la première série. Repérer les élèves qui réécrivent le calcul, qui utilisent la DNV, ceux qui font « de tête », ceux qui comptent sur leurs doigts...</p>
5 min	Groupe collectif Oral	<p>Remarque qu’on a déjà effectué des calculs où il s’agissait de soustraire un nombre inférieur à dix.</p> <p>Demander aux élèves d’explicitement les procédures qu’ils ont utilisées. Les justifier par écrit en utilisant la décomposition pour τ_{1010} et une suite de calculs ou la DNV pour τ_{A10}.</p> <p>58-3 → τ_{1010} 42-5 → τ_{A10} 72-7 → τ_{A10} 50-6 → « presque » τ_{1010}</p>
1min	Transition	<p>On efface son ardoise. On se prépare à effectuer les calculs de la seconde série.</p>
4 min	Individuel Ecrit	<p>Recherche des calculs donnés un à un de la seconde série. Repérer les erreurs et les procédures utilisant la DNV.</p>

6 min	Groupe collectif Oral	<p>78-50 Remarquer qu'on a déjà vu comment soustraire un nombre entier de dizaines. Expliciter oralement les procédures utilisées.</p> <p>2) 78-52 Attendre les propositions des élèves</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ On espère avoir une procédure basée sur la recherche du résultat de « 7-5 » et le résultat de « 8-2 ». (τ_{1010}) La justifier en utilisant les EAC et (ou) les EUNC : ▪ On espère avoir une procédure séquentielle basée sur la décomposition canonique de 52 (τ_{N10}). C'est pourquoi au calcul précédent, on avait soustrait 50 à 78. Si elle n'est pas proposée, penser à l'introduire par une réécriture de calcul $78-52=78-50-2$ ou <p>au éventuellement au moyen de la DNV :</p> <div style="text-align: center;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> ▪ On aura peut-être $38-25 = 18-5$ basée sur la propriété de conservation des écarts. Ne pas l'introduire si elle n'est pas proposée. <p>62-10 62-16</p> <p>Repérer les élèves qui ont pour résultat 54 et qui ont soustrait 2 à 6. Insister sur la non adéquation de τ_{1010} dans ce calcul car 6 est supérieur à 2. Amener les élèves à proposer τ_{N10}. Illustrer la technique à l'aide de la DNV en utilisant trois « sauts ».</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Utiliser aussi la réécriture du calcul de 62-16 :</p> $ \begin{aligned} 62-16 &= 62 - 10 - 6 \\ &= 52 - 6 \\ &= 52 - 2 - 4 \\ &= 46 \end{aligned} $
-------	--------------------------	---

Utilisation de τ_{N10}

1 min	Transition	On efface son ardoise. On se prépare à effectuer les calculs de la troisième série.
5 min	Individuel Ecrit	Recherche des calculs donnés un à un de la troisième série. Repérer les erreurs et les procédures des élèves.
6 min	Groupe collectif Oral Utilisation de τ_{N10}	<p>1) 43–15 Repérer les élèves qui ont pour résultat 32 et qui ont soustrait 3 à 5. Insister encore une fois sur la non adéquation de τ_{1010} dans ce calcul car 5 est supérieur à 3. Demander aux élèves qui ont utilisé la DNV de présenter leur procédure. Proposer le schéma avec trois sauts</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>Utiliser aussi la réécriture du calcul de 43–15:</p> $ \begin{aligned} 43-15 &= 43 - 10 - 5 \\ &= 33 - 5 \\ &= 33 - 3 - 2 \\ &= 28 \end{aligned} $ <p>2) 57–19</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Interroger les élèves qui ont utilisé la compensation, $57-19=57-20+1$ ▪ Interroger les élèves qui ont utilisé la translation $57-19=58-20$ <p>Proposer ces deux procédures si elles n'ont pas été envisagées par les élèves en les guidant....</p> <p>3) 62–27 Trois procédures méritent d'être présentées :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ La compensation (τ_{N10C}) $62-27=62-30+3$ ▪ La translation (τ_{AN}) $62-27=65-30$ ▪ La séquentielle (τ_{A10}) si un élève la propose.

		<div style="text-align: center;">  </div> <p>4) 87-34 Deux procédures méritent d'être proposées</p> <ul style="list-style-type: none"> La séquentielle (τ_{A10}) <div style="text-align: center;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> basée sur la décomposition des deux nombres (τ_{1010}) $87-34=50+3=53$
1min	Fin de la séance	Effacer et ranger les ardoises.

Après cette séance, il est possible qu'il soit préférable de proposer (pour certains élèves) d'autres calculs pour renforcer leur compréhension et leur habilité avant la séance 2. C'est pourquoi, je joins une feuille de calculs **C2-S1bisSq6**, sans indiquer d'organisation pédagogique.

S2Sq6

Matériel : un jeu d'étiquettes E1- S2Sq6 par élève (je les aurai découpées).

Une feuille E2-S2Sq6 par élève (pour coller les étiquettes dans un tableau).

Un tube de colle par élève. Un crayon.

Une feuille A4 par élève

La fiche de « correction » P1-S2Sq6 pour le temps collectif.

Le tableau P2-S2Sq6 à projeter pour inscrire les calculs au moment de la synthèse.

Durée : environ 35 min

durée	Modalités	Déroulement
6 min	Groupe collectif oral	<p>1) S'assurer que chaque élève a un tube de colle sur sa table, un crayon et une feuille A4 sur laquelle il inscrit son nom .</p> <p>Consigne :</p> <ul style="list-style-type: none"> vous allez recevoir chacun quinze étiquettes que vous mettez en tas, devant vous, face cachée et un tableau avec deux colonnes (feuille E2-S2Sq6). L'afficher ou le montrer. Vous tirez une étiquette. Vous lisez le calcul, vous regardez attentivement les nombres vous effectuer le calcul sur votre grande feuille (A4) en vous aidant de calculs, de schéma ou directement.

		<ul style="list-style-type: none"> ▪ vous décidez « facile » ou « difficile ». ▪ une fois votre décision prise, vous collez l'étiquette dans la colonne correspondante. ▪ Vous passez au calcul suivant : ▪ Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'étiquettes sur votre table. <p>Reformulation de la consigne par un ou deux élèves.</p>
12 min	Individuel Ecrit	Repérer les élèves qui semblent calculer dans leur tête, ceux qui font systématiquement le calcul (directement, avec calculs ou DNV),ceux qui hésitent avant de coller,...
15 min	Groupe collectif Oral	<p>Afficher le tableau P2-S2Sq6 grâce au TBI. Utiliser la feuille correctrice P1-S2Sq6</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ pour discuter des calculs dans un ordre établi en fonction de leur format ▪ pour avoir un guide pour mener la synthèse (résultats et procédures attendues ou à mettre en avant). <p><u>Organisation</u></p> <p>Donner oralement le calcul qu'on va traiter.</p> <p>Demander aux élèves de repérer sur leur feuille dans quelle colonne (facile/non facile), ils ont placé le calcul.</p> <p>Demander aux élèves de lever le doigt quand ils ont jugé le calcul facile.</p> <p>Décider collectivement s'il est facile, entre « deux » ou difficile après avoir écouté un, deux, voir trois arguments (voir P1-S2Sq6).</p> <p>5) Inscrire le calcul dans la colonne facile, difficile, entre deux.</p>
2min	Fin de la séance	Ramasser les feuilles de calcul et les feuilles de tri pour AMR

Bilan : Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

IV.13. Annexe D.7.1 : Proposition de scénario Sq7

Objectifs :

Séance 1	Séance 2
<p>Découvrir l'algorithme de la soustraction posée avec ou sans retenues (soustraction de la forme $\square\square-\square\square$).</p> <p>Donner du sens aux retenues dans la soustraction posée en colonne</p> <p>S'entraîner à poser des soustractions en colonne</p>	<p>Reprendre l'algorithme de la soustraction posée avec ou sans retenues (soustraction de la forme $\square\square\square-\square\square\square$).</p> <p>Donner du sens aux retenues dans la soustraction posée en colonne</p> <p>Contrôler ou valider un résultat</p> <p>Utiliser un « mode d'emploi » qui reprend les différentes étapes de l'algorithme.</p>

Conception de la séquence :

→ La séance 1 inscrit le calcul posé dans le prolongement du calcul mental. Elle permet d'explicitier que dans une soustraction sans retenue, on effectue le calcul en décomposant canoniquement chaque nombre. Dans une soustraction avec retenue, on utilise « en plus » la propriété de conservation des écarts en ajoutant dix unités au plus grand nombre et une dizaine au nombre que l'on soustrait pour poursuivre le calcul.

→ Dans la seconde séance, les calculs ne sont plus du même format. Une retenue peut signifier dix dizaines ou une centaine. On insiste aussi sur les différentes modalités pour contrôler et valider un résultat (utilisation de la calculatrice, de l'ordre de grandeur, de l'addition). Dans la seconde phase de la séance, le fait d'être tour à tour « calculateur » et « correcteur » va motiver les élèves. La fiche corrective permettra de plus, de revenir sur tous les points abordés dans la séquence en les organisant.

Attentes en termes de connaissances :

- Connaissance de différentes techniques pour effectuer un calcul en ligne de la forme $\square\square-\square\square$, notamment de τ_{1010} et τ_{AN}
- Connaissance de la propriété de conservation des écarts
- Connaissance du répertoire additif et soustractif
- Connaissance de la technique posée de l'addition avec ou sans retenues

Attentes en termes de capacités :

- suivre différentes étapes pour effectuer un calcul
- expliciter les propriétés qui interviennent à différentes étapes d'un calcul

Attentes en termes d'attitudes :

- écouter, respecter une consigne
- chercher seul une procédure
- expliquer oralement sa procédure au sein d'un groupe et argumenter
- s'intéresser à d'autres procédures
- suivre un « mode d'emploi »

Nouveau : Technique τ_{ALG} - Fiche corrective

S1Sq7

Matériel :

- Une ardoise et un feutre par élève.
- Une feuille quadrillée par élève

Durée : environ 40 min

durée	Modalités	Déroulement															
1 min	Groupe collectif oral	Sortir votre ardoise et votre feutre. Vous allez avoir deux calculs à effectuer que je note au tableau 78–25 et 82 –38 . Sur le recto de votre ardoise, vous effectuez le premier calcul en expliquant votre procédure, avec des calculs ou un schéma. Sur le verso de l'ardoise, vous effectuez le second calcul en expliquant aussi votre procédure.															
3 à 4 min	Individuel écrit	Recherche : Repérer en fonction des explications notées sur l'ardoise s'il y a des élèves qui utilisent pour le premier calcul τ_{1010} ou τ_{N10} et pour le deuxième calcul, ceux qui utilisent à tort τ_{1010} ou à raison τ_{AN}, τ_{N10} et τ_{N10C}															
6 min	Groupe collectif Oral	<p>Le tableau ou la feuille TBI doivent être structurées et se présenter ainsi à la fin, car on y fera référence au moment de la soustraction posée en colonne :</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td colspan="2">78–25</td> <td colspan="3">82 –38</td> </tr> <tr> <td>Rédaction 1 ou 2</td> <td>Rédaction 3</td> <td>Rédaction 4 ou 5</td> <td>Rédaction 6</td> <td>Rédaction 7</td> </tr> <tr> <td>τ_{1010}</td> <td>τ_{N10}</td> <td>τ_{N10}</td> <td>τ_{AN}</td> <td>τ_{N10C}</td> </tr> </table> <p>1) Correction du premier calcul. a) Interroger un élève qui a procédé en calculant 8–5 et 70–20 (ou inversement) puis en additionnant 50+3 ou un élève qui a calculé 7d– 3d et 8u–5u 5 (ou inversement). Utiliser les EC ou les UN mais pas les deux registres pour ne pas alourdir la correction. Rédiger sur le tableau ou sur une page de TBI qui resservira au moment du calcul posé.</p> <p>Rédaction 1</p> $ \begin{array}{r} 78-52 = 70 + 8 - 50 - 2 \\ = 20 + 6 \\ = 26 \end{array} $ <p>OU Rédaction 2</p> $ \begin{array}{r} 78-25 = 7d + 8u - 2d - 5u \\ = 5d + 3u \\ = 53 \end{array} $	78–25		82 –38			Rédaction 1 ou 2	Rédaction 3	Rédaction 4 ou 5	Rédaction 6	Rédaction 7	τ_{1010}	τ_{N10}	τ_{N10}	τ_{AN}	τ_{N10C}
78–25		82 –38															
Rédaction 1 ou 2	Rédaction 3	Rédaction 4 ou 5	Rédaction 6	Rédaction 7													
τ_{1010}	τ_{N10}	τ_{N10}	τ_{AN}	τ_{N10C}													

b) Interroger un élève qui a procédé en calculant $78-20-5$.
S'il n'y en a pas, évoquer la procédure.

$$\begin{aligned}
 78-25 &= 78-20-5 \\
 &= 58-5 \\
 &= 53
 \end{aligned}$$

2) Correction du second calcul $72-38$

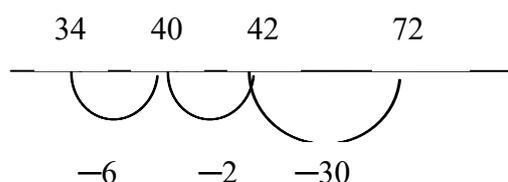
a) Interroger un élève qui a calculé $72-38$ en décomposant 38 avec un calcul ou en utilisant la DNV. Choisir entre les deux rédactions

Rédaction 4

$$\begin{aligned}
 72-38 &= 72-30-8 \\
 &= 42-8 \\
 &= 34
 \end{aligned}$$

OU

Rédaction 5



b) Interroger un élève qui a calculé $72-38$ en soustrayant 40 et en ajoutant 2

Rédaction 6

$$\begin{aligned}
 72-38 &= 72-40+2 \\
 &= 32+2 \\
 &= 34
 \end{aligned}$$

c) Interroger un élève qui a calculé $72-38$ en ajoutant 2 à 72 et 2 à 38 donc qui a utilisé la propriété de conservation des écarts.

Rédaction 7

$$\begin{aligned}
 72-38 &= 74-40 \\
 &= 34
 \end{aligned}$$

1 min	Individuel écrit	Distribuer une feuille à carreaux (j'en aurai éventuellement).
-------	------------------	--

<p>12 min</p>	<p>Collectif Oral /écrit</p> <p>Je ne sais pas si les élèves doivent regarder le maître enchaîner les étapes ou s'ils doivent sur leur feuille reproduire chaque étape du calcul presque simultanément.</p> <p>Remarque on peut dire aussi « j'écris 3 ».</p>	<p>Aujourd'hui, nous allons apprendre à calculer ces différences en posant le calcul en colonne. Reprenons le premier calcul $78-25$</p> <p>A. Qui m'indique ce que je dois faire ?</p> <p>1° Ecrire le plus grand nombre en premier</p> $\begin{array}{r} 78 \\ - \end{array}$ <p>2° Marquer le signe « - » sur une seconde ligne un peu décalé vers la gauche.</p> $\begin{array}{r} 78 \\ - \end{array}$ <p>3° Ecrire le nombre que l'on soustrait en alignant les chiffres : les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines</p> $\begin{array}{r} 78 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$ <p>4° Tracer un trait</p> $\begin{array}{r} 78 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$ <p>5° Trouver le chiffre des unités du résultat en soustrayant les unités,</p> $\begin{array}{r} 78 \\ - 25 \\ \hline 3 \end{array}$ <p>6° Trouver le chiffre des dizaines du résultat en soustrayant les dizaines.</p> $\begin{array}{r} 78 \\ - 25 \\ \hline 53 \end{array}$ <p>7° Le résultat de $78-25$ est 53. $78-25 = 53$.</p> <p>B. Si on reprend le même calcul que vous aviez fait en ligne, de quelle procédure se rapproche cette nouvelle technique?</p> <p>De τ_{1010}, en regardant la rédaction 1 ou la rédaction 2, on voit qu'on avait cherché séparément le nombre de dizaines et le nombre d'unités isolées puis qu'on avait recomposé le nombre.</p> <p>Reprenons le second calcul $72-38$</p> <p>A. Qui m'indique ce que je dois faire ?</p> <p>1° Ecrire le plus grand nombre en premier</p> $\begin{array}{r} 72 \\ - \end{array}$
---------------	---	--

2° Marquer le signe « - » sur une seconde ligne un peu décalé vers la gauche.

$$\begin{array}{r} 7 \quad 2 \\ - \end{array}$$

3° Ecrire le nombre que l'on soustrait en alignant les chiffres : les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines

$$\begin{array}{r} 7 \quad 2 \\ - 3 \quad 8 \end{array}$$

4° Tracer un trait

$$\begin{array}{r} 7 \quad 2 \\ - 3 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

5° Trouver le chiffre des unités

$$\begin{array}{r} 7 \quad 12 \\ - \textcircled{3} \quad 8 \\ \hline 6 \end{array}$$

2-8 = ?

Ce n'est pas possible. J'ajoute dix unités à 72 et une dizaine à 38 pour que l'écart soit le même. 12-8 = 6. Je pose 6.

6° Trouver le chiffre des dizaines

$$\begin{array}{r} 7 \quad 12 \\ - \textcircled{3} \quad 8 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$$

3+1=4 : 7-4=3
Je pose 3.

Le résultat de 72-38 est 36. 72-38=36

Si on reprend le même calcul que vous aviez fait en ligne, de quelle procédure se rapproche cette nouvelle technique? Un élève montre le calcul concerné.

En effet, pour trouver le résultat, on avait aussi utilisé la propriété de conservation des écarts en ajoutant 2 aux deux nombres alors qu'avec la technique de calcul posé, on ajoute dix au deux nombres, une fois sous la forme de 10 unités et une fois sous la forme d'une dizaine pour poursuivre le calcul.

C. Entraînement : A vous de poser en colonne et d'effectuer les trois soustractions suivantes :

83-56 ; 53-25. 178-65

5 min	Individuel écrit	Recherche. Aider les élèves qui n'ont pas intégré « le mode d'emploi » de la technique.
5 min	correction	Reprendre une à une les étapes de la soustraction en explicitant ce

	qu'on a fait et pourquoi on l'a fait.
--	---------------------------------------

Après cette séance, il est possible qu'il soit préférable de proposer (pour certains élèves) d'autres calculs pour renforcer leur compréhension et leur habileté avant la séance 2. C'est pourquoi, je joins une feuille de calculs **C1-S1bisSq7**, sans indiquer d'organisation pédagogique.

S2Sq7

Matériel :

- Une feuille quadrillée par élève
- Plusieurs calculatrices
- Une feuille E1-S2Sq7 pour la moitié des élèves (je les aurai découpées)
- Une feuille E2-S2Sq7 pour l'autre moitié des élèves (je les aurai découpées)
- Une feuille E3-S2Sq7 par élève
- Un tube de colle par élève

Durée : environ 45 min

durée	Modalités	Déroulement
1 min	Groupe collectif oral	Consigne : Sur votre feuille vous devez effectuer les deux calculs proposés 362–137 et 418–263 en les posant en colonne. Une fois que vous aurez fini réfléchissez à un moyen de vérifier vos résultats.
4 min	Ecrit individuel	Recherche. Repérer les erreurs
8min	Groupe collectif oral	<p>A. Correction du premier calcul 362–135 Insister à l'oral sur les différentes étapes du calcul (écrire le plus grand nombre en premier, aligner les chiffres des unités sous les unités, les chiffres des dizaines sous les chiffres des dizaines, les chiffres.....,commencer par calculer le chiffre des unités du résultat</p> <p>2)</p> $\begin{array}{r} 3612 \\ - 137 \\ \hline 5 \end{array}$ <p>3)</p> $\begin{array}{r} 3612 \\ - 1\textcircled{3}7 \\ \hline 25 \end{array}$ <p>4) Terminer d'effectuer le calcul en recherchant le chiffre des centaines</p> $\begin{array}{r} 3612 \\ - 1\textcircled{3}7 \\ \hline 225 \end{array}$

Insister sur le fait que 2–7 n'est pas possible **donc qu'on ajoute une dizaine d'unités à 362 et une dizaine à 137. 12–7=5, on pose 5**

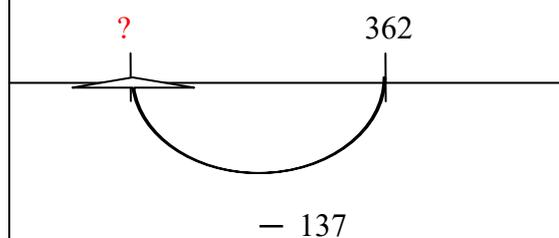
Insister sur les conventions le 1 petit devant le 2, le 1 ou +1 sous le 3 qu'on entoure.

Insister sur 3+1=4 ; 6–4=2. On pose 2

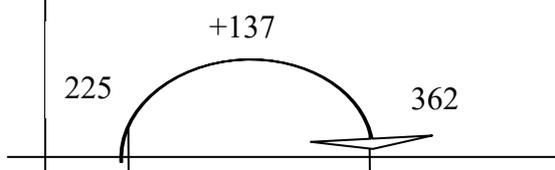
B. Aborder la question de la vérification du résultat.

A quelles méthodes avez-vous pensé ?

- La calculatrice **oui si on sait l'utiliser**
- Refaire le calcul en ligne **cela peut prendre du temps**
- Trouver un ordre de grandeur du résultat **cela peut être efficace**
Ici on remplace 362 par 360 et 137 par 140
 $360 - 140 = 220$
225 est proche de 220
- Additionner le nombre à soustraire et le résultat **oui la soustraction correspond à une addition à trou**
Amener cette méthode en illustrant le calcul effectué sur la DNV



On a trouvé $362 - 137 = 225$
Vérifions que $225 + 137 = 362$



On peut poser l'addition en colonne :

$$\begin{array}{r} 1 \\ 225 \\ + 137 \\ \hline 362 \end{array}$$

C. Correction du second calcul 418-263

Insister sur la **signification des retenues**

		$\begin{array}{r} 6 \quad 11 \quad 8 \\ - \quad \textcircled{2} \quad 6 \quad 3 \\ \hline 3 \quad 5 \quad 5 \end{array}$ <p>Insister sur le fait que 1-6 n'est pas possible donc qu'on ajoute une dizaine de dizaines à 618 et une centaine à 263. 11-6=5, on pose 5.</p> <p>Evoquer la vérification sans la rappelant les deux méthodes :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ recherche de l'ordre de grandeur 618-263 ≈ 620-260 ▪ calculer 355 + 263 (appui ou non sur la DNV).
2min	transition	Distribuer E1S2Sq7 à un élève et E2S2Sq7 à son binôme (voisin de table) Préciser aux élèves qu'on vient de leur distribuer une vignette sur laquelle ils doivent effectuer en colonne la soustraction proposée. Leur préciser aussi qu'ils n'ont pas la même soustraction que leur voisin.
2min	Ecrit Individuel	Recherche
1 min	Transition	Retourner sa vignette sur sa table et ne plus y toucher
5min	Oral collectif	Afficher grâce au TBI la fiche corrective E3S2Sq7 au tableau. Demander aux élèves s'ils comprennent ce qu'ils vont avoir à faire Mettre le nom du camarade qui donne la vignette (le calculateur) Mettre son nom sur la feuille (le correcteur) Coller la vignette du camarade Chercher un ordre de grandeur du résultat Traiter éventuellement un exemple 373-58≈370-60≈310 5) Lire chaque item et expliquer : on met 1 quand le calculateur ne s'est pas trompé Vérifier le résultat en posant une addition Traiter éventuellement un exemple Le camarade a trouvé que 373- 58=315 ; On cherche le résultat de 315+58, si ce résultat est 373 alors le calcul effectué est juste. 6) Indiquer si le calcul effectué par le camarade est juste ou faux.
2min	transition	Distribuer à chacun E3S2Sq7, Demander aux « voisins » d'échanger leurs vignettes. Donner le « top » départ
8 min	Individuel Ecrit	Recherche. Passer aider ceux qui ne comprennent pas les consignes.
1 min	Oral Collectif	Consigne : On échange les fiches E3S2Sq7 avec son voisin. On lit la feuille qui correspond à son propre calcul. On échange. En cas de désaccord, on appelle l'enseignant.
5 min	Oral A deux	Echanges. On observe ce qui se dit.
1min	Fin	Ramasser les feuilles pour AMR

Après cette séance, il est souhaitable de proposer (pour certains élèves) d'autres calculs soustractifs posés avant les évaluations . C'est pourquoi, je joins une feuille de calculs **C2-S2bisSq7**, sans indiquer d'organisation pédagogique.

Bilan : Pouvez- vous m'envoyer une courte synthèse portant sur:

- le décalage entre vos attentes et les compétences que les élèves ont mis en œuvre en reprenant les connaissances, capacités, attitudes énumérés « au début » de la fiche de préparation.
- le décalage entre ce que vous pensiez dire et faire et ce que vous avez fait.
- les points forts de la séance.
- les points à retravailler, à changer au niveau de la conception ou/et de la mise en œuvre.

V. Annexe E : annexes relatives au chapitre 7

V.1. Annexe E.1.1 : Transcription S1Sq1 (classe A)

Transition (environ 2 min30)

Les élèves rangent leurs pochettes de français.

1. M: On sort son ardoise et son feutre d'ardoise. L'ardoise vous la mettez sur le côté. L'ardoise et le feutre c'est pour tout à l'heure.

Consignes (environ 2 min)

La maîtresse est assise sur un le bord d'un bureau d'élève et tient à deux mains un paquet de feuilles.

1. M : Là on s'occupe de cette feuille. Aujourd'hui, on fait des soustractions. Lina, soustraction, quelle opération ?
2. E : moins.
3. M : moins d'accord.
4. E : Vous allez avoir une feuille comme cela à remplir. J'ai déjà entouré l'école A (*elle montre où*). Il faudra juste écrire votre nom, votre prénom (*elle montre où*). Je vais vous donner un calcul à faire. Le premier calcul, évidemment on le fait dans la première partie.
5. Vous expliquez ici (*elle montre où*), comme si vous parliez à Anne-Marie. Au lieu de parler, vous allez écrire.
6. M : Vous allez expliquer ici (*elle montre où*), comment vous faite votre calcul, soit avec des mots soit en mettant un calcul. Voilà, ce que vous faites dans votre tête vous l'expliquez ici (*elle montre où*), et le grand carré, là, c'est pour mettre la (*Elle le montre*)
7. Es : La réponse
8. M : La réponse
9. M : Ensuite je vous donne le second calcul. Même chose, on explique et on met la réponse. Nous on veut savoir ce qui se passe dans votre tête. Ca va ?
Pas de questions de la part des élèves
10. M : Alors les responsables des feuilles, vous pouvez distribuer.

Transition (Environ 1 min)

11. M: Nom prénom sur la feuille.
La maîtresse a un aparté avec un élève qui ne se sent pas bien.
12. M : Je vois que tu n'es pas en forme. Maman a dit qu'elle venait de chercher. Pour tes devoirs, on les a notés. Va l'attendre chez Mme L.

Recherche (environ 10 min)

13. M : Premier calcul, quarante-huit moins cinq. Quarante-huit moins cinq.
La maîtresse est assise et a un chronomètre dans la main.
14. M : c'est surtout l'explication qui compte.
15. M : Si on compte sur ses doigts, on a le droit de le mettre. On est en CE2, en début d'année, cela ne pose pas de problème. *L'enseignante circule un peu, sans faire le tour de la classe.*
16. M : Deuxième calcul. Vous êtes prêts ? Cinquante-neuf moins deux. Cinquante –neuf moins deux.
17. M : Vous avez le droit d'expliquer avec des mots. *Un élève murmure à la caméra, je n'arrive pas à expliquer. L'enseignante s'est rassise.*
18. M : On passe au troisième calcul, trois-cent-vingt huit moins six, trois-cent vingt huit moins six.
19. M : On passe au dernier. C'est bon pour tout le monde ?
20. M : Le dernier, soixante-dix moins six. Soixante-dix moins six.

Transition (environ 2 min)

21. M : voilà, comme Mme Rinaldi va ramasser les feuilles, vous allez recopier vos réponses sur votre ardoise. *L'enseignante fait un modèle au tableau qui reprend le modèle de la feuille.*
22. M : Juste la réponse sur l'ardoise. Mathilde, quand tu as fini, tu ramasses les feuilles des copains.

Synthèse (environ 18 min)

23. M : Maintenant cela va être très simple. On va reparler des calculs que vous aviez à faire. On va corriger ensemble. Chacun va essayer d'expliquer comment il a fait et on va voir s'il y a différentes méthodes. Le premier calcul c'était quarante-huit moins cinq. *La maîtresse se tourne et l'écrit en ligne au tableau. Elle se retourne.* Levez les ardoises qu'on voit les réponses. Il y a différentes réponses. Il y en a qui trouve 43, d'autres qui trouvent 53. Bon qui veut prendre la parole pour expliquer comment il a fait ? Héloïse ? Comment as-tu fait ?
24. E1 : Inaudible.
25. M : Tu as fait en colonne. Tu trouves 53. 48 moins quelque chose, on trouve un nombre plus grand ? Elle a dû faire quoi Héloïse ? Elle a du faire « plus ». Maxime à toi.
26. E2 : J'ai fait cinq moins trois, ça fait deux.
27. M : On a cinq au départ ? On a 48. Quelqu'un d'autre. Noé ?
28. E3 : 8 moins 5 ça fait 3 du coup ça fait 43. *La maîtresse écrit la réponse 43 et relie le 8 au 5.*
29. M : 8 moins 5, ça fait 3 dans les unités. Tu ne changes pas le 4.
30. E3 : Parce qu'il n'y a pas de changement de dizaine.
31. M : Là il n'y a pas de dizaines. *La maîtresse montre l'espace devant le 5.*
32. Donc rien ne change au niveau des dizaines. *Elle montre le « 4 » de 48 et le « 4 » de 43.*
33. C'est une manière de faire. C'est un peu ce qu'on a appris. Les autres qui ont posé ça, on ne sait pas le faire de tête ? Marion, tu veux nous dire comment tu as fait ?
34. E4 : J'ai fait pareil.
35. M : Tu as fait 8 moins 5 égal 3 (*la maîtresse l'écrit*) mais au lieu de dire que le « 4 » qui est là (*la maîtresse montre du doigt le « 4 » de 48*) Marion elle a fait différemment. Elle a dit le quarante qui est là (*la maîtresse montre le « 48 »*), on le rajoute derrière. *La maîtresse écrit sur la même ligne que $8-5=3$ l'égalité $3+40=43$.* Bien, ne vous inquiétez pas, on va revoir cela après. La méthode de Noé vous la reconnaissez ?
36. E(s) : Oui, c'est celle qu'on fait d'habitude. *Silence une élève en profite pour prendre la parole.*
37. E5 : Moi, j'ai fait cinq pour arriver à huit et j'ai ajouté quarante.
38. M : Et personne n'a fait j'en ai huit et j'en mange trois. *La maîtresse lève ses deux mains, montre huit doigts et en abaisse cinq.* Peut-être que quelqu'un a compté sur ses doigts. *La maîtresse abaisse ses doigts un à un et récite la comptine : 47, 46, 45, 44, 43.* Non personne tu as vu, ils sont trop forts. On passe au numéro 2. Le calcul du numéro 2, cinquante-neuf moins deux. *La maîtresse l'écrit.* Explication ?
39. Qui se lance ? Tu te lances Flora ?
40. E6 : 9 moins 2, ça fait 7.
41. M : Oui
42. E6 : Et 5 moins 0, ça fait 5.
43. M : Alors je refais le calcul en entier. *Elle écrit $59-02$ et relie 9 et 2.* Les unités, 9 moins 2, 7 et dans les dizaines (*la maîtresse relie le « 5 » de 59 au « 0 » de 02*), 5 moins 0, 5. Qui a fait autrement ? Noé lève le doigt.
44. E7 : Comme je le savais par cœur.
45. M : Tu savais quoi par cœur ?
46. E7 : 59 moins 2.

47. M : C'est possible. *Valentin lève le doigt.*
48. M : Valentin ?
49. E8 : J'ai fait comme Noé.
M : On peut aussi compter sur ses doigts. Elle abaisse un à un ses doigts. 58,57. C'est bon, on peut passer au calcul numéro 3. Le calcul numéro 3 c'était trois-cent-vingt-huit moins six. *La maîtresse écrit 328-6.* Ca se complique ou pas ?
50. Es : Non.
51. M : Montrez vos ardoises. Flora comment as-tu fait ?
52. E8 : 8 moins 6 ça fait 3.
53. M : Hoooo, ça fait mal. 8 moins 6 ça fait ?
54. E8 : 8 moins 6 ça fait 2, 2 moins 0 ça fait 2 et 8 moins 0 ça fait 8. *La maîtresse écrit en même temps que l'élève parle : 328-6=322 en reliant le 8 au 6.*
55. M : Qui veut expliquer ? Qui a fait la même chose ou quelque chose de différent ? Sacha ?
56. E9 : Moi, j'ai fait de tête.
57. M : C'est-à-dire en comptant sur tes doigts ? Comment ?
58. E9 : Dans ma tête. Comme je savais que 8 moins 6 ça fait 2 et bien j'ai ajouté le 320. 320+2, ça fait 322.
59. M : Très bien. Ecoutez, je vais noter l'explication de Sacha. Lui, il sait que trois-cent-vingt-huit égal trois-cent-vingt plus huit. *Elle note 320+8.* Après, on nous demande de faire moins six. Elle note 320+8-6. Il met ensemble le 8 -6 car comme il l'a dit de tête il sait de suite que ça fait 2. *Elle met une accolade sous le 8 et le 6 et écrit dessous à la place 2.* Le 320, il reste devant. *Elle écrit 320 devant « +2 ».* Trois-cent-vingt plus deux égal (*la maîtresse écrit =*) trois-cent vingt-deux (*elle écrit 322*).
60. M : En fait, c'est ce que vous faites tous quand on dit on fait 8 moins 6, 2 et « ça, ça » ne changent pas. *La maîtresse montre en même temps l'égalité précédente où elle avait relié le « 8 » du 328 et le « 6 » du 328 puis recopié à droite devant le « 2 » le « 32 » du 328 qui ne changeait pas.*
61. M : Dans la réalité c'est ce que vous faites. *Elle entoure de sa main, le calcul suivant correspondant à la décomposition de 328.* Vous avez vu, j'ai décomposé le 328, 320+8. On met ensemble les petits calculs qu'on sait bien faire. *Elle montre le « 6-2 », ça fait 2 ; Elle lit la dernière égalité en suivant chaque terme avec son doigt, 320+2, ça fait 322.* Oui, là, vous avez quasiment tout vu. On passe au dernier. Le dernier. Plus facile ou moins facile ? Pour Noé, aussi facile. Personne ne trouve que c'est moins facile ?
62. Es : Non.
63. M : Alors je peux effacer? *Elle efface.* Le dernier calcul, c'était 70 moins 6. *Elle le note au tableau.* Levez les ardoises qu'on voit les résultats. Là, on voit des réponses différentes. Des 67, des 64, des 76. Léna, on ne t'a pas entendu. Tu veux bien expliquer ?
E10 : inaudible
64. M : Toi tu as trouvé 74. Viens. *L'élève va se rendre au tableau près de la maîtresse.*
65. M : On arrête avec les bruits d'ardoise. Moi, je trouve que celui-là c'est un des plus compliqués. Toi aussi Radia. Allez vas y raconte.
66. E10 : 6 plus 4 ça fait 10.
67. M : Alors où est ce qu'il y a un 10 ?
68. E10 : 10 moins 4 ça fait 6. *La maîtresse écrit au tableau 6+4=10.*
69. M : Mais quel est le rapport avec ce calcul là ? *Elle montre 70-6.* Après tu m'as dit 70-6. *Elle écrit 70-6=.* Tu ne peux pas mettre un nombre qui finit par 4 ? Elle ne sait plus. Elle a trouvé 74. Tu te rappelles ou pas ? *L'élève retourne à sa place.* Moi je sais que cela va donner quelque chose qui se termine par 4. Toi comment tu as fait Esteban ?
70. E11 : Je suis parti de 70. Comme il y a un 0, enlever 6, on ne peut pas alors j'ai mis 6.
71. M : Tu as posé l'opération ?

72. M : Tu as fait comme cela, j'ai 0 bonbon, je ne peux pas en manger 6, alors je mets 6. Elle note l'opération en colonne. Et puis 7 moins 0 cela fait 7. Mais si tu as 0 bonbon, tu ne peux pas en enlever 6. On va voir plus tard que ce calcul là, il est impossible à faire. Il faut mettre des retenues. *Elle barre l'opération.* Maxime ?
73. M : Vous comprenez pourquoi il veut enlever 4 ? Noé ?
74. E13 : J'ai fait, bon, j'ai pris un paquet de dix en dessous et j'ai enlevé 6 dedans.
75. M : Tu as pris un paquet de 10. Je vois ce que tu veux dire. *La maîtresse trace un axe et inscrit 60 et 70 aux extrémités.*
76. E13 : Parce que 10 moins 4, ça fait 6 et après comme il fallait enlever une dizaine, j'ai enlevé une dizaine. Ca fait 64.
77. M : Noé, il fait ce qu'on fait d'habitude. On est dans les soixante-dix. On enlève quatre. On va tomber sur un nombre qui se termine par 4 et là on n'est plus dans les soixante-dix, on est dans les soixante. *La maîtresse montre son schéma.*
78. M : Je vais expliquer avec le calcul ce que fait Noé. Je vais effacer là pour faire de la place. Noé se dit, on a ce calcul à faire $70-6$. *Elle le marque au tableau.* Il sait que soixante-dix, c'est soixante plus dix. *La maîtresse écrit sous 70, $60+10$ en les reliant par une accolade.* Qu'est-ce qu'on connaît bien comme résultat, Sacha ?
79. E14 : Dix moins six égal quatre. On se retrouve avec soixante-quatre.
80. M : La maîtresse montre l'axe précédent. C'est exactement ce qu'on fait quand on passe à la dizaine inférieure. On ne l'a jamais fait ? Si, il n'y a pas personne qui l'a dessiné sur sa feuille.

V.2. Annexe E.1.2 : Transcription S1Sq1 (classe B)

Consignes (environ 3 min)

Sur le TBI est projeté sur la gauche la consigne et sur la droite, la feuille qui va être distribuée aux élèves.

1. M : Regardez bien vous allez avoir une petite feuille comme celle-ci. *Le maître la montre au tableau.* Elles sont ici. *Il les tient à la main et agite sa main.* Au cours de la séance, vous allez utiliser trois feuilles comme celles-ci. A chaque fois il y aura quatre calculs à faire.
2. Alors la première chose que l'on fait, on écrit son prénom et son nom sinon AM ne saura pas à qui elle appartient. Ensuite, je vais vous donner les calculs à l'oral. Vous n'avez pas à noter le calcul. Ils le notent ou pas. ?
3. AM : A priori non.
4. M : Vous ne notez pas le calcul. En revanche dans la case qui est à droite (*le maître montre la case*) vous notez le résultat. Ensuite ou avant, c'est comme vous voulez, vous allez devoir expliquer comment vous avez trouvé le résultat donc on utilise des mots, des calculs, des schémas. Attention interdit de poser le calcul en colonne. On ne veut pas voir d'opération posée. Vous pouvez expliquer votre calcul par une stratégie qu'on a déjà vu. Vous vous débrouillez. Donc on note son résultat. On explique. Est-ce que quelqu'un peut réexpliquer aux autres ce qu'il faut faire ? *Un élève se propose. Il lit presque la consigne écrite au tableau.*
5. E : D'abord, il faut écrire son prénom et le nom. Après on doit expliquer pour chaque calcul, il y a quatre cases, comment on a fait pour trouver le résultat du petit carré. On utilise des mots, des autres calculs et des schémas.
6. M : ou des schémas.
7. E : ou des schémas et on écrit le résultat dans le petit carré.
Interruption de la séance. Une enseignante vient poser une question au sujet du photocopieur.

Transition (environ 1 min)

8. M : Maxime Emeline, vous distribuez.
9. M : Allez, vous allez avoir deux minutes par calcul.

Recherche (environ 13 min)

10. M : Ecoutez bien quarante huit moins cinq. Quarante huit moins cinq, on explique bien comment on fait. *Le maître circule dans la classe.*
11. M : Il y a des choses intéressantes. Deuxième calcul : cinquante-neuf moins deux. On doit encore expliquer le résultat. Allez, cinquante-neuf moins deux. C'est pareil Maxime, on essaye d'expliquer. Il y en a qui ont de bonnes idées. On attend, s'il y en a qui n'ont pas fait leurs explications.
12. M : Intéressant-intéressant
13. M : troisième calcul, trois-cent-vingt-huit moins six, trois-cent-vingt-huit moins six. Les nombres sont plus grands. On doit être capable. Trois-cent-vingt-huit moins six. Interdit de poser en colonne. *Le maître circule dans la classe.*
14. M : Allez, on va passer au dernier calcul. Dernier calcul, écoutez bien, soixante-dix moins six, soixante-dix moins six.
15. M : on cherche le résultat, on explique après comment on a trouvé le résultat. Il y a différentes stratégies. Soixante-dix moins six, ce qui nous intéresse c'est l'explication.
16. M : ce qui nous intéresse, ce n'est pas forcément le résultat, c'est l'explication.

Transition (environ 3 min)

17. M : avant qu'on ramasse les feuilles, vous allez tous écrire assez gros les résultats sur l'ardoise. Vous notez assez gros pour que je puisse voir cela de loin.
18. M : Une fois que vous aurez écrit vos résultats Maxime et Emeline pourront passer ramasser les feuilles.

Synthèse (environ 16 min)

Sur le TBI, la page a été changée. Les quatre calculs qui viennent d'être faits sont notés en ligne avec un point d'interrogation à droite du signe égal.

19. M : on va reprendre chaque calcul et je vais demander à certains élèves d'expliquer comment ils ont fait. Le premier calcul c'était $48-5$. Levez l'ardoise. Je vois les résultats. On a que du bon. Je vais demander à certains enfants d'expliquer ce qu'ils ont fait. Ce qui nous intéresse c'est votre stratégie. Je vais en écouter plusieurs.
20. M : Comment as-tu fait Martin ?
21. E1 : Au début, j'ai fait heu 43 plus 5 égal 48 donc 48 moins 5 égal 43 .
22. M : D'accord, toi tu es passé par l'addition. Camiil ?
23. E2 : Moi j'ai fait 40 plus 8 après j'ai fait moins 5 et ça fait 43 .
24. M : Vous avez compris ce qu'il a fait. C'est bien noté sur sa feuille. Il sait que 48 c'est $40+8$, ensuite il a juste fait $8-5$. Tu as fait $8-5$. Tu as trouvé 3 , tu as ajouté.
25. M : tu as ajouté 40 .
26. M : Emeline
27. E3 : J'ai fait $48-6$, ça fait 44 . J'en ai rajouté 1 , ça fait 43 .
28. M : $44+1$, ça fait 43 ?
29. E3 : Ça fait 45 . $48-6$, ça fait 42 . J'en ai ajouté 1 ;
30. M : Elle a souvent fait plus un.
31. M : Une dernière Jibril
32. E4 : J'ai fait cinq pour aller à 8 , ça fait 3 .
33. M : On va passer au deuxième calcul. Levez juste pour que je regarde les résultats pour voir si tout le monde a eu bon. Oui, oui, oui. Tout est encore juste. Est-ce que d'autres peuvent expliquer comment ils ont fait ? Allez Ismael
34. E5 : J'ai fait 2 pour aller à 59 , ça fait 57 .
35. M : Tu es parti de 2 pour aller à 59 et tu as trouvé que cela faisait 57 . D'autres. Léane ?
36. E6 : Moi j'ai fait 9 moins 2 , ensuite j'ai ajouté le 50 et ça faisait 52 .
37. M : OK. Quelqu'un d'autre
38. E7 : J'ai fait 9 moins 2 et j'ai rajouté le 50 , ça fait 57 .
39. M : Allez sur le troisième. Relevez, j'ai vu qu'il y avait quelques erreurs. Amélie, j'ai vu 321 . Comment as-tu fait ?
40. E8 : J'ai pris 328 et j'ai gardé le 28 , j'ai retiré 6 des 8 et j'ai mis que ça faisait 321 .
41. M : Donc tu as gardé le 8 ou tu as gardé le 28 ? Tu as gardé le 8 . Tu as fait $8-6$. Tu as trouvé que ça faisait 1 . $8-6$ ça fait 1 ?
42. Es : Non ça fait 2 .
43. M : Tu as fait une petite erreur de calcul mais la stratégie est bonne. Toi Allina tu as trouvé aussi 323 . Tu as fait comment ?
44. E9 : J'ai enlevé 6 et j'ai trouvé 323 .
45. E10 : Elle a trouvé par hasard.
46. M : *En murmurant*, tu as trouvé comment ?
47. E : J'ai enlevé 6 .
48. M : Les bruits d'ardoise c'est désagréable.
49. M : Il y en a plusieurs qui ont décomposé 328 de façon additive. Depuis le début de l'année, on l'a fait souvent. Comment ça peut s'écrire aussi 328 ?

50. E11 : Trois centaines, deux dizaines, huit unités.
51. M : Oui. *Le maître écrit la réponse : $328=3c2d8u$.* Comment peut-on aussi décomposer 328 ?
52. E12 : Plus 300 plus 20 plus 8.
53. M : *Le maître écrit $328=300+20+8$.* Bon d'accord ça on maîtrise.
54. M : Quand on calcule $328-6$ on écrit. *Le maître écrit $328-6= 300+20+8$.* Et là je vais changer de couleur. Le maître écrit $328-6= 300+20+8-6$
55. E13: Et là je vais juste m'occuper de ce calcul là. *Le maître entoure $8-6$*
56. M : Là j'écris $328-6= 300+20+2$. Tout le monde est capable de retrouver 322.
57. M : AM, je l'avais préparé comme cela. *Le maître affiche l'écrit déjà préparé, où il a décomposé 328 en $320+8$ et utilisé des couleurs et des encadrés pour effectuer le calcul.*
58. M : C'est compliqué ou pas ? On va passer au dernier calcul. Il s'agissait de 70 moins 6. Allez levez les ardoises que je regarde.
59. M : OK OK , oui, oui. Emma, tu as trouvé 76, comment as-tu fait ?
60. E14 : On ne pouvait pas avec 0 donc j'ai mis 6 à la place de 0 et j'ai gardé le 7.
61. M : Je ne pensais pas que tu avais fait cela. Je pensais que tu t'étais trompé d'opération. Alisson?
62. E15 : Alors moi, j'ai additionné 6 et 4. J'ai que ça fait 70. Et du coup, c'était 70 moins 6. J'ai retiré 6 et après comme 70 plus 4 ça fait 10, en fait , c'est comme si on avait 20 et on en retire 6, ça fait 4 unités et 6 dizaines. Ça fait 64.
63. M : Comment tu as fait toi Ines ?
64. E16 : J'ai fait 10 moins 6, ça fait 4 donc 6+4 fait 10. Après avec les dizaines, j'ai vu que ça fait 64.
65. M : Donc là si tu enlèves 10 à 70, tu te retrouves à quel nombre ?
66. Es : 60
67. M : OK, le problème sur ce calcul là, on ne pouvait pas utiliser la même stratégie que juste avant. Emma l'a vu de suite puisqu'elle s'est trompé. J'ai 0 unités ici, je ne peux pas enlever 6 donc il fallait trouver autre chose. Là, ici, l'idée pour faire ce genre de calcul, c'est ce que tu viens de dire, 70, je le décompose en .. Le maître écrit $70= +10$. Qu'est ce que je mets devant le 10 ?
68. Es : 60
69. M : C'est-à-dire que mets une dizaine à part .*Le maître termine d'écrire le calcul : $70-6= 60+10-6$ et là je m'occupe de ce calcul là. Il entoure $10-6$.* 10 moins 6, ça fait 4 et donc là on obtient. 64. OK
70. M : Vous avez vu, il y a deux petites stratégies qu'il va falloir qu'on maîtrise. *Le maître affiche l'écrit préparé qui correspond au calcul qu'il vient de faire.*
71. M : Qui peut me rappeler la première stratégie qu'on a vu juste avant ? Je fais ça très rapidement pour que ce soit clair dans leurs têtes puisqu'à après, il va falloir qu'ils les réutilisent.
72. E17 : L'addition.
73. M : On a dit qu'on ne s'occupe que des unités.
74. M : Deuxième stratégie, le chiffre des unités est inférieur à ce nombre là. *Le maître montre.* Je ne peux pas faire 0 moins 6. Qu'est-ce que je fais ? Le nombre 70, je le décompose en 60 plus 10 et là je peux faire 10 moins 6. OK, ça va ou pas ?
75. On va passer à la deuxième étape, on va vous redonner une seconde feuille.

V.3. Annexe E.1.3 : Cinq feuilles de calcul renseignées permettant d'inférer l'utilisation de τ_{A10} (Classe A & B, S1Sq1, 2014)

Production élève 1

Calcul n°1	$(9-5=4) \times 49-5=44$	44
Calcul n°2	$34-4=30-2=28$	28
Calcul n°3	$453-3=450-1=449$	449
Calcul n°4	$75-5=70-2=68$	68

Production 2

Calcul n°1	9-5 sa fait 4 da coup 4+40=44 44	44
Calcul n°2	j'ai enlever 4 puis j'ai 3.	27
Calcul n°3	j'ai enlever 5 plus 1.	99
Calcul n°4	j'ai enlever 4 puis j'ai enlever 3.	68

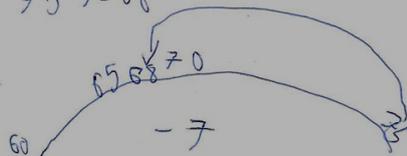
Production 3

Calcul n°1	J'ai fait $48 - 5 = 43 + 1 = 44$	44
Calcul n°2	J'ai fait $37 - 9 = 30 \rightarrow 30 - 2 = 28$	28
Calcul n°3		157
Calcul n°4		68

Production 4

Calcul n°1	$9 - 5 = 4$ je rajoute 40 et je trouve 44	44
Calcul n°2	$4 - 6$ on ne peut pas donc j'enlève 4 à 6 on arrive à 30, il reste deux $30 - 2 = 28$	28
Calcul n°3	$3 - 4$ on ne peut pas donc j'enlève 3 à 4 on arrive à 50, il reste un $50 - 1 = 49$ on rajoute 100	149
Calcul n°4	$5 - 7$ on ne peut pas donc j'enlève 5 à 7 on arrive à 70, il reste deux $70 - 2 = 68$	68

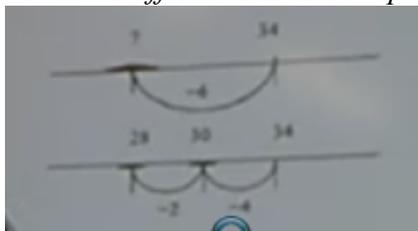
Production 5

Calcul n°1 $49 - 5 = 44$		44
Calcul n°2 $\text{Le point } 34 - 4 = 30 - 2 = 28$		28
Calcul n°3 $\text{Le point } 753 - 3 \text{ et j'm retire } 7$		749
Calcul n°4 $75 - 7 = 68$		68

V.4. Annexe E.1.4 : Construction du bloc technologique –théorique relatif à τ_{A10} (classe B, S1Sq1, 2014)

M : on va vous montrer une nouvelle stratégie qui va vous permettre à reculons comme l'a fait Jibril (Jibril à décompter de un en un, six fois à partir de 34) mais en décomposant intelligemment le nombre de retrouver le résultat. Regardez bien :

Le maître affiche le schéma « préparé » à l'avance sur le TBI.



M : Quand on dit $34-6$, on part de 34 et on recule de ..

E(s) : 6

M : donc on a vu qu'on ne pouvait pas faire $4-6$, qu'est-ce qu'on fait ? On va mettre un nombre repère ici qui va être la dizaine entière la plus proche de 34. Quand je pars de 34 et que j'arrive à 30, j'ai enlevé combien ?

E(s) : 4

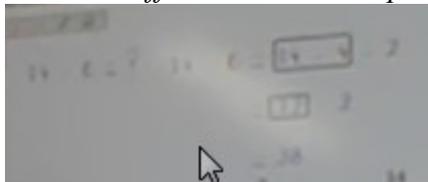
M : 4 sans calculer.

M : Une fois que j'ai retiré 4, au total j'ai à retirer 6, il ne me reste plus que combien à retirer ? 2

M : Quand je suis à 30 et que je dois retirer 2, je trouve très facilement le résultat qui est 28.

M : Regardez le petit calcul :

Le maître affiche le schéma « préparé » à l'avance sur le TBI.



V.5. Annexe E.2.1 : Transcription S1Sq2 (classe B)

Consigne (environ 2 min)

L'enseignant est devant le tableau avec la fiche du scénario à la main. Les élèves ont déjà sorti leurs ardoises et leurs feutres d'ardoise.

1. M : On va faire à nouveau des séries de quatre calculs. Est-ce qu'on a le droit de les poser en colonne ?
2. E(s) : Non
3. M : On n'a pas le droit de les poser en colonne.
4. M : Sur cette première série, vous notez uniquement le résultat par contre quand je vous demanderai ce que vous avez trouvé, il faudra expliquer comment vous avez fait. Evidemment il faut se souvenir de choses qu'on a vues auparavant.
5. M : Vous divisez l'ardoise en quatre et puis ensuite je lance le premier calcul.
6. M : Il y en a pour trois, quatre minutes. Une minute par calcul.
7. M : Tout le monde est prêt ? Il y a différentes stratégies de partage.

Recherche (environ 4 min)

8. M : Premier calcul, cinquante moins dix. On note le résultat. *Le maître circule dans la classe.*
9. M : Cela doit être très rapide normalement. On n'est pas obligé d'expliquer comment on a fait. On met juste le résultat.
10. M : Je donne le deuxième. Cela doit être rapide. Ecoutez bien. Cent moins dix. Cent moins dix
11. M : troisième calcul, trois cent dix moins dix. Trois cent dix moins dix.
12. M : Et le dernier, deux-cent-quarante moins dix. Deux-cent-quarante moins dix.

Restitution-correction (environ 12 min)

13. M : Je vais demander à certains enfants de donner leurs résultats et d'expliquer comment ils ont fait.
14. M : Le premier calcul c'est cinquante moins dix. Maelle ?
15. E1 : J'ai trouvé quarante. Je sais qu'en dessous c'est quarante.
16. M : Elle le sait. C'est le répertoire.
17. M : Est-ce qu'il y en a qui ont compté sur leurs doigts. Non surtout pas. Enlever dix, c'est simple. Amal ?
18. E2 : Quarante plus dix égal cinquante.
19. M : Toi tu as fait une addition à trou. Un nombre plus dix égal à cinquante, quel est ce nombre ? Quarante. D'accord. Leila ?
20. E3 : J'ai enlevé une dizaine et ça fait quarante.
21. M : Tu savais que cinquante c'est cinq dizaines moins une dizaine, cela fait quatre dizaines.
22. M : Est-ce qu'il y en a qui ont fait autre chose ou pas ?
23. E4 : J'ai fait un schéma.
24. M : Tu as fait un schéma. Quoi comme schéma ?
25. E4 : Cinquante moins dix ? J'ai mis cinquante au départ après j'ai mis moins un, ça fait quarante-neuf, moins neuf, ça fait quarante.
26. M : C'est compliqué.
27. E5 : J'ai fait cinquante moins douze, trente-huit, trente-huit plus deux, quarante.
28. M : C'est compliqué. C'est compliqué, c'est plus rapide de faire ce que tu fais ou ce qu'a fait Leane, Amae ? C'est quoi le plus rapide et où il y a le moins de risque d'erreurs ? C'est ce qu'elles font elles. Toi tu enlèves douze. C'est plus facile d'enlever dix que douze.

29. E6 : Moi j'ai fait quarante plus dix égal cinquante.
30. E7 : On l'a déjà dit.
31. M : Un dernier.
32. E8 : Cinquante moins onze, trente-neuf, trente-neuf plus un, quarante.
33. M : Attention, il faut vous simplifier la vie. Ce qu'on vous fait découvrir comme stratégies, c'est pour se simplifier la vie. Là ils complexifient. Ca c'est complexe. Ca c'est complexe.
L'enseignant montre les élèves qui ont enlevé douze et onze.
34. M : Le deuxième, c'était cent moins dix. Elixane, comment as-tu fait ?
35. E9 : Je suis parti d'une addition à trou. Quatre-vingt-dix plus dix égal cent.
36. M : Est-ce qu'il y en a qui se sont servis du petit jeu du furet qu'on avait fait ? C'était quoi le jeu du furet ?
37. E10 : En fait, tu disais 20, il fallait ajouter 10, moi je disais 30, Jade elle a dit 40.
38. M : On l'avait fait dans ce sens mais on l'avait aussi fait dans l'autre sens.
39. E(s) : moins.
40. M : Est-ce qu'il y en a qui se sont aidés de cela ? Mahe, cela doit être presque cela.
41. E11 : *Elle hoche la tête en signe d'assentiment.*
42. M : On s'était entraîné à retirer dix, donc peut-être que certains ont fait cela. Ismail ?
43. E12 : J'ai fait un schéma, trois cent-dix moins dix, j'arrive à trois-cent, j'enlève zéro et j'arrive à trois-cent.
44. M : Tu peux faire juste moins dix, quand tu enlèves zéro, tu n'enlèves rien. Emeline ?
45. E13 : trois cent dix moins dix, trois cent plus dix moins dix.
46. M : *Il prend le feutre et note au tableau le calcul correspondant.*
47. M : Est-ce qu'il y en a qui ont fait, dans trois-cent-dix, j'ai combien de dizaines ? Sarah ?
48. E14 : zéro.
49. M : Théo ?
50. E15 : une.
51. M : Raphael ?
- E16 : trente et une.
52. M : Est-ce qu'il y en a qui ont fait trente et une dizaines moins une dizaine. Est-ce que quelqu'un a fait comme cela ? Parce que Léa tu avais fait ainsi pour le premier calcul.
53. M : OK, personne, cela aurait été une possibilité.
54. *Le maître affiche sur le TBI la feuille préparée.*
55. E17 : Maître, j'ai fait un schéma.
56. M : Tu as fait un schéma mais est-ce qu'on a réellement besoin d'un schéma dans ce cas là.
Non.
57. M : Allez le dernier, deux-cent-quarante moins dix. Jibril ?
58. E18 : J'ai fait vingt-quatre moins un. Cela fait vingt-trois et j'ai ajouté un zéro.
59. M : vingt-quatre moins une banane.
60. E(s) : rire
61. E18 : vingt-quatre dizaines moins une dizaine, ça fait vingt-trois dizaines et j'ai ajouté un zéro.
62. M : *Le maître écrit le calcul correspondant au tableau.*
63. E19 : J'ai fait un schéma.
64. M : Je vois sur ton schéma, deux-cent-trente-cinq moins cinq, deux-cent-trente moins cinq, deux-cent-vingt-cinq.
65. E20 : J'ai fait un schéma, deux cent quarante moins un moins neuf.
66. M : Tout cela est compliqué. Toutes ces procédures, il faut les abandonner.
67. M : On a vu trois petites choses, ce qu'il faut retenir.
68. *Le maître affiche la diapositive déjà prête.*
69. M : Première chose qui peut lire. Kabil ?

70. E21 : Je peux réciter la comptine des dizaines en comptant à rebours à partir de 240.
71. M : A rebours, c'est-à-dire à l'envers.
72. M : Deuxième chose, je peux faire un calcul sur les dizaines. *Le maître affiche une diapositive déjà prête.*
73. M : La dernière, c'était la stratégie d'Emeline. Vas-y Emeline. Lis.
74. E22 : Je calcule quarante moins dix et j'ajoute au résultat deux-cent.

Consigne (1min)

M : On a vu trois stratégies de calcul différentes. On va refaire une série de calculs. Effacez votre ardoise. Maintenant, il va falloir trouver le résultat mais expliquer comment on a fait pour le trouver. Il faut s'aider de ce qu'on vient de voir. Vite, vite, partagez votre ardoise en quatre.

Recherche pour effectuer et expliquer sa technique (environ 6 min)

Calculs demandés oralement 520-20 ; 180-50 ; 70-50 ; 30-40

Restitution-correction (environ 12 min)

75. M : Cinq-cents-vingt moins vingt. Comment as-tu fait Martin ?
76. E23 : J'ai fait cinquante-deux dizaines moins deux dizaines, cinq-cents.
77. M : Tu as converti cinq-cent-vingt en cinquante-deux dizaines. Cinquante-deux moins deux, cinquante, cinquante dizaines, cinq cent. Est-ce que quelqu'un a fait autrement ? Mathilde ?
78. E24 : J'ai fait un schéma.
79. M : Montre-moi. Ha oui, tu as fait cinq cent vingt moins vingt, cinq-cents. Quelqu'un d'autre ? Léane ?
80. E25 : Cinq-cents-vingt, je l'ai divisé en cinq-cents. *Le maître interrompt l'élève.*
81. M : Tu l'as décomposé, tu ne l'as pas divisé.
82. E25 : cinq-cents, je l'ai décomposé
83. M : Attends, je vais l'écrire. *Le maître réécrit le calcul sous la dictée de l'élève.*
84. E25 : cinq-cents-vingt moins vingt égal cinq-cents plus vingt moins vingt. Vingt moins vingt, zéro.
85. M26 : Est-ce que quelqu'un a compté en reculant. Oui toi.
86. E27 : Je suis partie de cinq-cents-vingt, j'ai retiré dix, je suis arrivée à cinq-cents-dix, je suis arrivé à cinq cents. Très bien.
87. M : le deuxième.
88. E28 : soixante-dix moins cinquante c'est vingt.
89. M : Comment tu le sais ?
90. E29 : Je le sais.
91. M : Tu le sais par cœur.
92. M : Le troisième ?
93. E30 : J'ai fait huit dizaines moins cinq dizaines plus cent, c'est cent-vingt.
94. M : Leane a converti cent-quatre-vingt en dix huit dizaines et comme dix huit dizaines égal dix dizaines plus huit dizaines, elle calcule huit moins cinq. Elle trouve cent-trente.
95. M : dernier calcul, cent trente moins quarante.
96. E31 : J'ai fait un schéma. Cent trente moins trente, cent. Cent moins dix, quatre-vingt-dix.
97. M : *Le maître affiche une diapositive préparée avec un schéma avec appui sur la droite numérique.* Tu as toi aussi utilisé cette procédure. Quelqu'un a fait autrement ?
100. E32 : J'ai fait treize dizaines moins quatre dizaines, égal neuf dizaines. Quatre-vingt-dix.

V.6. Annexe E.3.1 : Transcription S1Sq3 (classe A)

Consignes(environ 9 min)

1. M : Voilà, je vous laisse découvrir le problème. L'enseignante projette l'illustration suivie des informations. *Les élèves lisent silencieusement le problème pendant une minute.*
2. M : Sacha, tu peux lire l'énoncé pour tout le monde.
3. E1 : *L'élève lit l'énoncé.*
4. M : Bon, c'est un problème qui concerne qui et que font-ils ?
5. E2 : Ils font des sauts dans le sable.
6. M : Comment on appelle ce sport, les enfants courent et après ils sautent dans le sable.
7. E3 : Du saut en longueur.
8. M : Evidemment plus ils sautent loin dans le sable, plus ils ont de chance de gagner. Qu'est ce qu'on sait d'autre sur ces enfants ?
9. E4 : On sait que Marie, elle a fait 40.
10. M : Viens montrer pourquoi tu parles de Marie.
11. E5 : *L'élève montre un fragment du texte en s'arrêtant après 40.*
12. M : Lis bien la phrase.
13. E6 : « de plus que Nicolas ».
14. M : Nicolas, il a fait combien ?
15. E7 : 180.
16. M : Viens nous montrer.
17. E7 : *L'élève vient montrer le score dans le tableau.*
18. M : Qu'est-ce qu'on sait d'autre ?
19. E8 : Jeanne a sauté 50cm de moins que Thomas.
20. M : Oui mais pour l'instant, on ne sait pas combien Thomas a sauté.
21. E9 : 260cm.
22. M : La maîtresse montre la case correspondante du tableau.
23. M : Que sait-on à propos du saut de José. Esteban ?
24. E10 : Il a sauté 245cm.
25. M : Du saut de Thomas ? Mathilde ? Eline ? Léa ? Allez les filles, on se réveille.
26. M : Que sait-on du saut de Marie ?
27. E11 : Elle a sauté 0cm.
28. M : Non on n'a pas encore écrit son score. Il va falloir l'écrire tout à l'heure. Mais on sait quelque chose sur le score de Marie. Rassurez-moi.
29. E12 : Que c'est 40cm de plus que celui de Nicolas.
30. M : Haaa. Donc elle a bien sauté Marie. Héloïse, a-t-on une information sur le saut de Jeanne ? Lina ?
31. E13 : 50 cm de moins que Thomas.
32. M : Je descends car il y a des questions après. La première, *la maîtresse la lit.*
33. M : Alors pour ce faire, vous allez travailler par deux comme pour l'anglais, une ardoise pour deux, un feutre pour deux.

Recherche (environ 8 min)

Synthèse (environ 10 min)

34. M : Qui veut nous expliquer comment il a trouvé le saut de Marie? Lina ?
35. E1 : J'ai fait Nicolas, il a fait 195cm plus 40cm.
36. M : Tu peux nous dire quelle phrase tu utilises de l'énoncé ?
37. E1 : *L'élève lit la phrase correspondante.*
38. M : Bien
39. E1 : J'ai pris 195 de Nicolas plus 40cm.

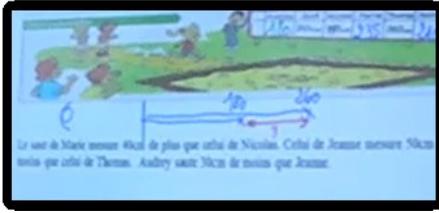
40. M : La maîtresse écrit le calcul en ligne $195+40=235$. Comment as-tu fait pour trouver le calcul sur ton ardoises.
41. E1 : J'ai fait $5+0$ égal 5, $9+4$ égal 13, j'écris 3 et je mets une retenue. $1+1$ égal 2.
42. M : Je suis sûre que d'autres élèves ont fait autrement pour trouver ce calcul. *La maîtresse s'énerve car un seul élève lève le doigt. Les autres ne sont pas concentrés dit-elle.* Valentin ?
43. E2 : J'ai pris les 5 du 195, je les ai mis au 35, cela faisait 40 et 190 plus 40, on sait mieux faire car il y a que les dizaines qui bougent et après tu es un peu perdu.
44. M : Elle trace une DNV et parle en même temps qu'elle marque les bonds. Tu es arrivé à 230, plus les cinq que tu avais retiré. Bon 235 ;
45. M : Bon Valentin, je ne suis pas sûr qu'il y en ait beaucoup qui arrive à faire comme toi mais toi si tu arrives dans ta tête, c'est super. Radia ?
46. E3 : J'ai fait 195, 205, 215, 225, 235.
47. M : Donc tu avances de dix en dix. Pas mal. Noé ?
48. E4 : J'ai fait plus cinq plus trente-cinq.
49. M : D'accord. Peut-être que certains ont posé aussi l'opération. Comme je n'avais rien dit au début.
50. E4 : En fait l'opération, c'est comme la méthode de Lyna ;
51. M : Ce qu'on veut vous montrer c'est qu'on n'est pas obligé de poser l'opération, on peut se débrouiller autrement. On passe au deuxième. Sacha ?
52. E5 : Jeanne elle a fait 50cm de moins que Thomas et Thomas, il a fait 260 et vu que 6 moins 5 ça fait 1 et que le 2 et le 0 ils ne changent pas, cela fait 210. Quelqu'un d'autre ?
53. E6 : Moi soixante moins cinquante ça fait vite dix et j'ai rajouté 200.
54. M : Oui. On va répondre à la dernière question ? Yannis ? Mathilde.
55. E7 : Nous on a fait l'axe/. Moins 30, moins 10 on arrive à 200, moins 20, on arrive à 180.
56. M : *La maîtresse trace le schéma avec appui sur la DNV.* Flora ?
57. E8 : 210 moins 10 moins 20.
58. M : Sans faire l'axe tu l'as fait dans ta tête.
59. M : On a plus besoin de poser tellement on a progressé en calcul mental. Quel est l'enfant qui saute le plus loin ?
60. E(s) : *Tous les élèves lèvent le doigt.*
61. E9 : Thomas.
62. M : le moins loin ?
63. E(s) : *Tous les élèves lèvent le doigt.*
64. E10 : Audrey .

Transition et consigne (environ 2 min)

65. M : Je vous donne la feuille. *La maîtresse distribue.* Vous allez mettre les nombres dans le tableau. Vous voyez on a répondu à la première question. Qui lit la seconde question ? Oui Léna.
66. E1 : *L'élève lit la question.*
67. M : Allez, chercher vos réponses.

Recherche par binômes (environ 3 min) et relance (environ 2 min)

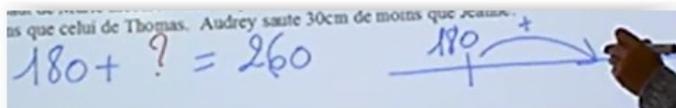
68. M : J'ai l'impression qu'il y a des élèves qui sont bloqués. Je vais vous faire un schéma au tableau. Thomas, il saute jusqu'ici, 260cm. Ensuite , c'est Audrey qui saute. Elle va faire un saut plus grand ou plus petit ?
69. E(s) : plus petit.
70. M : Allez, je dessine le saut d'Audrey et le saut de Thomas. Ce qu'on vous demande c'est l'écart. L'écart c'est entre ça et ça. *L'enseignante montre sur son schéma, l'intervalle entre 180 et 260.* Ce qu'on vous demande c'est combien il y a de centimètres entre 180 et 260. Est-ce que cela t'aide Flora?



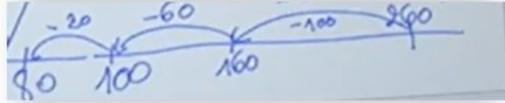
Recherche par binôme (environ 3 min)

Synthèse (environ 7 min)

71. M : Tout le monde a réfléchi au moins à la question 2. Vous allez poser vos stylos. La question 3, on la fera ensemble car c'est un peu la première fois qu'on fait cela. Laissez vos feuilles sous vos yeux et rangez vos stylos dans les trousse. La question c'était quel est l'écart entre le saut d'Audrey et de Thomas. Qui veut nous proposer ce qu'il a fait ? Yannis ?
E1 : 200
72. M : Pourquoi ?
73. E1 : Il se tait.
74. M : Tu n'as pas fait de calcul. 200, il est tombé du ciel. Cela ne m'intéresse pas. Radia, comment tu as fait ?
75. E2 : J'ai fait huit plus huit ça fait seize, donc on rajoute 8 pour aller vers 60 et 180 plus 180 égal 260.
76. M : *La maîtresse montre sur son schéma en parlant.* Tu t'es dit, ce qu'a fait Audrey plus la partie rouge, cela fera le saut de Thomas.
77. M : Elle écrit l'addition à trou correspondante et s'aide de la DNV pour trouver le nombre manquant.
- 78.



79. M : Constance, autre solution ?
80. J'ai fait 260 moins 180.
81. M ; Ce n'est pas bête, regardez toute cette longueur là, moins cette longueur là, il va rester la partie rouge. *Elle montre sur le schéma.*
82. M : *Elle écrit le calcul soustractif correspondant.* Et là comment tu procèdes.
83. E2 : Zéro moins zéro, ça fait zéro et huit moins six, ça fait deux.
84. M : On ne peut pas, c'est le 6 qui est devant.
85. E2 : On enlève une centaine.
86. M : Il faut passer par l'axe.
87. M : 260 moins 100, on arrive à 160. Il faut encore enlever 80. Donc on va encore enlever ?
88. E2 : 6
89. M : Heu
90. E2 : 60.
91. M : Et on arrive à
92. E2 : 2
93. M : Allez Constance, c'est ton calcul.
94. E2 : 100.
95. M : Et on enlève ?
96. E2 : 20.
97. M : Et on arrive à ?
98. E2 : 80.



99. M : Viens voir Flora, viens voir Mathilde. Mettez vous côte à côte. Y a-t-il un écart entre les deux ?
100. E(s) : Oui
101. M : Bien sure il vous saute aux yeux.
102. M : Qui vient nous montrer où est l'écart entre elles deux. Sacha ?
103. E1 : *Sacha montre avec ses mains.*
104. M : *La maîtresse montre entre ces deux mains.* Entre le haut de la tête de Mathilde, que je montre avec mon bras et le haut de la tête de Flora que je montre avec mon autre bras, il y a l'écart. C'est l'écart entre leurs deux têtes. Vous avez compris ?
105. M : Donc l'écart entre la taille de Flora et de Mathilde est le même que l'écart entre la tête de Mathilde et de Flora.
106. E2 : Cela fait à peu près une taille entre les deux.
107. M : Oui, ce n'est pas le plus important. Merci les filles.
108. M : Donc l'écart entre le saut d'Audrey et de Thomas est le même que l'écart entre le saut de Thomas et celui d'Audrey. Thomas, c'est de combien de centimètres en plus il a sauté par rapport à Audrey ou alors Audrey de combien de centimètres en moins elle a sauté par rapport à Thomas. On reprendra cela la prochaine fois. Gardez bien l'énoncé car on réfléchira à la troisième question où on vous demande de calculer un écart. On range dans la pochette.

V.7. Annexe E.3.2 : Transcription S1Sq3 (classe B)

Consigne (environ 4 min)

1. M : Vous allez voir au tableau, on va vous afficher un petit dessin. Il va falloir en parler, dire ce que vous voyez et peut-être avoir une idée de l'énoncé du problème car cela va être un problème. Je vous laisse observer.
2. M : Éva
3. E1 : du saut en hauteur.
4. M : Est-ce que c'est du saut en hauteur ?
5. E(s) : Non. C'est du saut en longueur.
6. M : Comment tu sais que c'est du saut en longueur ?
7. E2 : Car il doit sauter le plus loin possible, parce qu'il y a un grand bac à sable.
8. M : oui, un bac à sable. Qu'est-ce qu'il y a d'autre ?
9. E3 : des enfants et un tableau ?
10. M : Les enfants, ils sont combien ?
11. E(s) : 6
12. M : D'accord, ils sont six. Elle fait quoi celle-ci ? *Le maître montre l'enfant qui court.*
13. E(s) : Elle court.
14. M : On a oublié de parler de quelque chose sur le dessin qui dit qu'on va devoir mesurer.
15. E4 : On voit qu'ils font un concours.
16. M : Vous voyez ici il y a une règle graduée qui va permettre de mesurer. *Le maître montre la toise.*
17. M : A votre avis quel va être l'énoncé du problème ?
18. E5 : Combien elle va faire la fille qui court.
19. M : Il nous manque combien de performances ?
20. E6 : Trois.
21. M : Je vais vous mettre l'énoncé. On va regarder. Qui veut le lire ? Sarhra
22. E7 : *L'élève lit les informations.*
23. M : Est-ce qu'à partir des informations on va pouvoir trouver les performances manquantes ?
24. E(s) : oui.
25. M : Vous allez travailler par deux. Vous allez avoir une feuille avec l'énoncé pour deux. Vous avez le droit de faire des recherches sur ardoise ou cahier de brouillon.

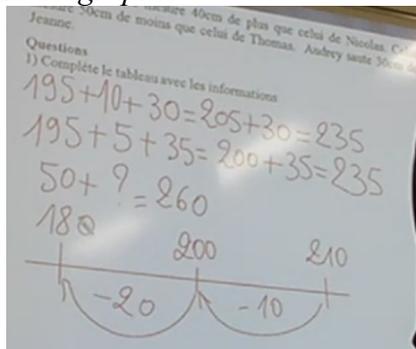
Recherche (environ 10 min)

Synthèse (environ 5 min)

26. M : J'aimerais qu'on me donne la performance de Marie et qu'on me dise comment on a fait ? Théo.
27. E : J'ai trouvé 235.
28. M : 235 quoi ?
29. E1 : cm
30. M : Comment tu as fait ?
31. E1 : 195 plus 5 égal 200, plus 35, égal 235.
32. M : Est-ce qu'il y en a qui ont fait autrement ?
33. E2 : J'ai posé en colonne.
34. E3 : Nous on a fait 195 plus 10, ça fait 205 plus 35, ça fait 245.
35. M : Qui me donne la performance de Jeanne ? Pas les mêmes. Martin ?
36. E4 : Jeanne elle fait 210cm car elle mesure 50cm de moins que Thomas et Thomas, il a 260cm et on sait que 50 plus 10 ça fait 60.

37. M : Toi tu as fait 50 plus un nombre égal 260. C'est ça ? Une addition à trou. Tu t'es dit $50+10=60$ et $60+100=160$. Est-ce qu'il y en a qui ont fait autrement ?
38. E5 : Nous on a retiré 50 à 60 et il nous restait 2 pour les centaines et on a ajouté le 2 pour les centaines, ça nous a fait 210.
39. M : Qui s'occupe d'Audrey ? Brayan et Léane.
40. E6 : On a fait un schéma. On a fait 210 moins dix, moins vingt. On a trouvé 180.

Photographie



Transition et consigne (environ 1 min)

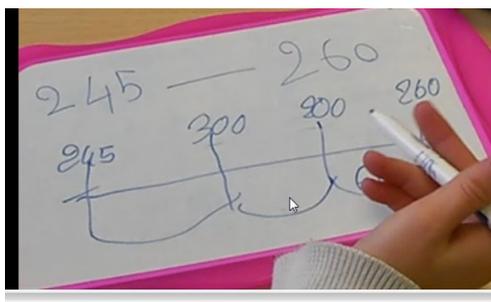
41. M : Ecoutez bien. Quelle est la seconde question. Quel est l'écart entre le saut d'Audrey et celui de Thomas ? Là vous expliquez sur la feuille.

Recherche par binômes (environ 3 min)

Synthèse (environ 3 min)

42. M : On fait la mise en commun. Il faut qu'on avance absolument. Thomas avait sauté combien de centimètres ? Qui me rappelle ? Théo ?
43. E1 : 260
44. M : Et Audrey avait sauté combien ?
45. E1 : 180.
46. M : Donc quand on vous demande de calculer un écart entre deux nombres, on a plusieurs possibilités. Je ne vais pas influencer. Alors qui peut me dire combien il a trouvé et comment il a fait. Théo, tu continues. Vas-y.
47. E1 : J'ai fait un schéma 180 plus
48. M : Attends, je vais le noter. Il trace un axe.
49. E1 : 180 plus 20. *Le maître écrit à gauche 180.*
50. M : Donc tu as ajouté combien ?
51. E1 : 20
52. M : Tu es arrivé à
53. E1 : 200.
54. M : Après j'ai rajouté 60.
55. M : Tu as ajouté 60 pour arriver à :
56. E1 : 260.
57. Donc quel est l'écart entre ces deux performances ?
58. E1 : 80cm
59. M : Comment as-tu fait pour trouver 80 ?
60. E1 : J'ai ajouté 20 et 60.
61. M : Il a fait 180 plus 80 égal 260, donc l'écart est bien de 80cm. *Le maître note le calcul en ligne.*
62. M : Est-ce que quelqu'un a fait autrement ?
63. E2 : *Il lève le doigt.*
64. M : Toi tu es parti dans l'autre sens. Tu as fait moins 260 moins 60, moins 20. C'est ça ? Allez, on passe à la dernière question.

Recherche (environ 2 min)



65. M : José c'est combien ?
66. E : 245
67. M : Et Thomas ?
68. E : 260.
69. M : alors pourquoi tu vas à 300 ?
70. M : Tu es sûre que 300 c'est un nombre compris entre 245 et 260 ? Et 200 tu es sûre qu'il est compris entre ces nombres ?
71. E : *L'élève efface les deux nombres*



72. M : Quels sont les nombres que tu connais entre 245 et 260 ?
73. E : ça fait 15.
74. M : Il faut passer par quel nombre ?
75. E : 255.
76. M : On reprend

Synthèse et institutionnalisation (environ 4 min)

77. M : Ryan, comment tu as fait ?
78. E1 : 245 plus 5 égal 250 plus 10 égal 260.
79. M : Oui donc quel est l'écart ?
80. E1 : 15
81. M : C'est 15. Ils ont fait cela. *Le maître fait un schéma avec appui sur la DNV en le commentant en même temps.* Ils sont partis de 245. Ils ont d'abord ajouté 5. Ils arrivent à 250 et ensuite pour aller à 260, ils ajoutent 10.
82. M : Autre chose mais rapidement, Jibril et Maeva ?
83. E2 : On a fait la même solution que Ryan et Anaëlle.
84. M : Emeline ;
85. E3 : On a fait un schéma. On a fait 245 plus 15 égal à 260.
86. M : Oui Ines, vous avez fait comment avec Samuel ?
87. E4 : On a fait 245 à aller à 255 c'est égal à 10 et 255 pour aller à 260, c'est égal à 5. 5 plus 10 c'est égal à 15.
88. M : Dernière chose sinon on n'aura pas le temps, Martin ?
89. E4 : Nous on a fait la même chose en calculant.

90. M : Alors on fait la petite conclusion.

91. M : *Il affiche la diapositive au tableau*

92. Vous avez vu certains pour trouver la réponse ont fait une addition et certains ont fait une soustraction. Que l'on fasse une addition ou une soustraction, on a trouvé quinze.

L'enseignant fait le geste : qu'on aille dans un sens ou un autre, on a trouvé le même résultat donc la petite conclusion, c'est que l'écart entre 245 et 260 c'est le même que celui entre 260 et 245. Cela correspond bien à la différence entre 260 et 245 ou au complément de 245 à 260. On a deux stratégies possibles différentes, soit on fait une addition à trou, soit on fait une soustraction mais dans les deux cas, on trouvera obligatoirement si on ne s'est pas trompé le bon résultat. D'accord.

V.8. Annexe E.4.1 : Transcription S1Sq4 (classe B)

Les élèves ont fini d'échanger au sein de chaque groupe. L'enseignant organise une mise en commun et 'une institutionnalisation locale.

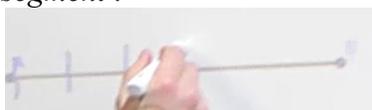
1. M : Par rapport au tableau que vous aviez à compléter, chacun a noté ces différentes mesures. Vous n'étiez pas d'accord au début. C'est là que vous avez du discuter, communiquer vos différentes stratégies pour trouver le bon résultat. Ce n'était pas toujours évident. Tu as trouvé combien pour le premier segment, Abdelakim ?
2. E1 : 5.
3. M : Tu avais trouvé 5 au départ.
4. E1 : Non, quatorze.
5. M : Pourquoi avais-tu trouvé quatorze ? Comment avais-tu fait pour mesurer ? Où est-ce que tu avais placé ta règle ? *L'élève montre*
6. M : Sa règle commençait un peu avant neuf. Il a placé l'extrémité de son segment sur le neuf et il a lu ce qui était là. *L'enseignant montre avec le doigt l'autre extrémité.*
7. M : Sa règle commençait un peu avant neuf. Il a placé l'extrémité de son segment sur le neuf et il a lu ce qui était là. *L'enseignant montre avec le doigt l'autre extrémité.*



8. M : il a lu quatorze. Est-ce que c'est juste.
9. E(s) : Non.
10. M : Est-ce qu'il a bien utilisé la règle ?
11. E(s) : oui, non.
12. M : oui sauf que est-ce que la première graduation, c'était le zéro ? Non , c'est le neuf. Cette méthode ne fonctionne pas. Qui a fait autrement ?
13. E1 : J'avais une règle qui commençait à deux. J'ai remplacé le deux par le zéro. J'ai mesuré mon segment, il faisait sept. L'écart entre le sept et le deux, c'est cinq.
14. M : Qu'est-ce qu'il a fait ? Je peux l'écrire, sept moins deux égal cinq. C'est pareil pour Abedlakim, quatorze moins neuf égal cinq.

$$\begin{array}{l} 14 - 9 = 5 \\ 7 - 2 = 5 \end{array}$$

15. E2 : j'ai fait six pour aller à onze
16. M : De six à onze, il y a un écart de cinq c'est cela ? Alex ? Oui
17. E3 : J'ai pris le carreau, j'ai mis un petit trait puis j'ai reporté le carreau.
18. M : Il a pris un centimètre. Il l'a reporté à coté, puis il l'a reporté, etc,.. *Le maître gradue le segment .*



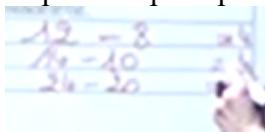
Après, il a compté.

19. M : Il y en a d'autres comme Jade qui ont placé leurs règles à huit. Ils ont dit le huit, c'est le zéro, le neuf, c'est le un, ...
20. M : Ce qu'on veut au final, c'est ça. *Le maître montre les calculs.* Vous avez un écart à calculer, vous faites une soustraction. Le dernier.
21. E4 : Moi j'ai commencé à 8, à la fin, j'ai lu seize et je sais que huit plus huit égal seize.
22. M : Lui, il a fait une addition à trou.

V.9. Annexe E.5.1 : Transcription S1Sq5 (classe A)

Les élèves responsables distribuent une bandelette A, une bandelette B à chacun et un énoncé pour deux. L'enseignante projette la consigne au tableau. Elle explique la manipulation qu'il faut faire pour mesurer et renseigne la première ligne du tableau. Les élèves sont ensuite invités à compléter les deux tableaux (travail en binôme). Au bout de dix-huit minutes, la question de la comparaison et de l'interprétation des résultats est posée.

1. M : Est-ce que les résultats sont égaux ? Marion?
2. E1 : Oui, parce que la bandelette ne bouge pas.
3. M : Ils sont égaux de combien.
4. E1 : après un temps de silence quatre.
5. M : La maîtresse effectue les calculs et note les résultats. Douze moins huit, ça fait quatre, quatorze moins dix ça fait quatre et vingt-quatre moins vingt, ça fait quatre. Qui a répondu à la question pourquoi ?



6. M : Pourquoi quand je mets ma règle ici je trouve douze, après quatorze..
7. E1 : La bandelette elle change pas, c'est les nombres qui changent.
8. E2 : La bandelette, elle ne va pas grandir, rapetisser.
9. M : Le calcul change quand on déplace la bandelette mais la longueur de la bandelette ne change pas. Elle reste toujours à quatre. Viens montrer pourquoi tu parles de Marie.
10. E5 : L'élève montre un fragment du texte en s'arrêtant après 40.
11. M : Mais regardez de là à là, on a déplacé de combien ? La maîtresse marque une flèche du huit au dix



12. E6 : de deux centimètres.
13. M : Regardez la réponse elle change aussi de deux centimètres. La maîtresse marque une flèche du douze au quatorze.



14. M : C'est normal, notre bandelette n'a pas changé. La maîtresse inscrit deux autres flèches de 10 à 20 et de 14 à 24. J'ai trouvé un exemple pour vous aider à comprendre cela. Flora tu viens, Valentin, tu viens. L'écart de taille est à peu près de cela.

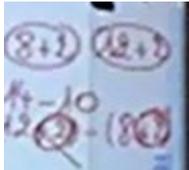


15. M : Dans trois ans, on va décider qu'ils vont grandir autant l'un que l'autre.
16. E7 : On va avoir la même différence de taille.
17. M : Allez, on va imaginer qu'on les remesure dans dix ans. Tu me prêtes ta chaise. Chaque élève monte sur une chaise et la maîtresse mesure la taille d'une chaise.



18. M : Chacun prend quarante-cinq centimètres, c'est comme tout à l'heure quand on déplaçait la bandelette, elle a pris quarante-cinq centimètres et lui, il a pris quarante-cinq centimètres. La différence va changer ou pas ? On vérifie.

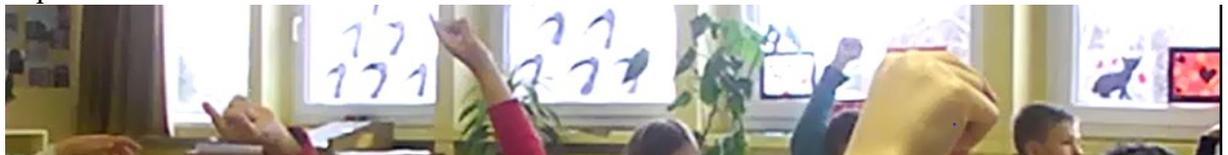
La maîtresse change de sujet et revient à la correction du tableau relatif à la bandelette B avant de s'intéresser à nouveau aux premiers calculs et d'écrire plusieurs égalités en les commentant.



19. M : On avait fait huit plus deux égal dix et douze plus deux égal quatorze, quatorze moins dix égal douze plus deux moins huit plus deux. Je vous présente quelque chose au tableau.



20. M : Je vous laisse regarder ce qu'il y a au tableau.
 21. M : Sans faire le calcul est-ce que vous pensez que cela est égal à cela. Elle montre l'étiquette $53 - 18$ et l'étiquette $43 - 8$.
 22. E8 : Oui.
 23. M : Il faut dire pourquoi. Qu'est-ce que tu en penses Lina ?
 24. E9 : Non dans le carré, c'est moins dix-huit et les autres, c'est pas moins dix-huit.
 25. M : Peut-être que les deux nombres changent aussi, un peu comme on a vu tout à l'heure. Alors pour ce faire, vous allez travailler par deux comme pour l'anglais, une ardoise pour deux, un feutre pour deux.
 26. E.9 : cinquante trois moins dix-huit, c'est comme quarante-trois moins huit, sauf qu'on a enlevé dix.
 27. M : On y est presque, entre cinquante-trois et quarante-trois, on a enlevé dix et entre dix huit et huit on a enlevé dix aussi. C'est comme si tout à l'heure à Flora et Valentin, ils réduisent tous les deux de dix centimètres. Donc celui là égal celui là.
 28. M : Elle montre l'étiquette correspondant à $53 - 20$.
 29. E.10 : cinquante-trois moins quelque chose au deux sauf que l'un c'est moins dix-huit et l'autre moins vingt. Ca peut pas faire la même chose.
 30. M : C'est vrai, le cinquante-trois lui ne change pas. On n'aura pas la même réponse . on s'occupe du dernier.

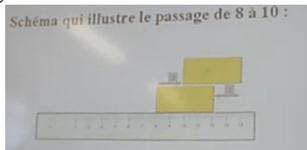


31. E11 : J'ai vu que cinquante- cinq, il fallait ajouter deux à cinquante-trois et dix-huit pour aller à vingt, il fallait aussi en ajouter deux.
 32. M : C'est comme si Flora avait pris deux centimètres et Flora aussi. C'est exactement l'exercice que l'on va faire ensuite.

V.10. Annexe E.5.2 : Transcription S1Sq5 (classe B)

Les élèves responsables distribuent une bandelette A, une bandelette B à chacun et un énoncé pour deux. L'enseignant projette la consigne au tableau. Il explique la manipulation qu'il faut faire pour mesurer et renseigne la première ligne du tableau. Les élèves sont ensuite invités à compléter les deux tableaux (travail en binôme). Au bout de dix-neuf minutes, la question de la comparaison et de d'interprétation des résultats est posée.

1. M : Est-ce que les trois calculs sont égaux ?
2. E1 : Oui.
3. M : Il fallait bien entendu répondre oui, quatre, quatre, quatre. Qui a une explication à proposer ? Pourquoi on était sûr, avant de chercher les résultats que les trois calculs étaient égaux. Ismail ?
4. E2 : Parce que la bandelette A fait la même taille.
5. M : Quelle était la consigne ? C'était de mesurer la bandelette A. Est-ce que la bandelette A est identique quelques soient les situations ? Oui, elle n'a pas changé. On ne l'a pas coupé, on ne l'a pas agrandie donc évidemment elle mesure (L'élève E1 murmure quatre) quatre centimètres. Quelles sont les égalités que l'on peut écrire (Silence) puisque notre résultat est égal à quatre à chaque fois.
6. M : Douze moins huit, c'est égal à quel autre calcul ?
7. E3 : douze moins quatre moins quatre.
8. M : Servez-vous de ce qui est là.
9. E4 : douze moins dix plus deux.
10. M : Vous mélangez-là. Quel autre calcul est égal à quatre ?
11. E5 : quatorze moins dix/.
12. M : *Le maître écrit* $12 - 8 = 14 - 10$. Qu'est-ce que je peux écrire d'autre ?
13. E5 : vingt-quatre moins vingt égal quatre.
14. Le maître complète $12 - 8 = 14 - 10 = 24 - 20$.
15. Regardez bien. Il affiche la diapositive qu'il a préparé.



16. E(s) : C'est beau !
17. M : C'est Anne-Marie qui l'a fait. J'ai repris son travail. Regardez bien.

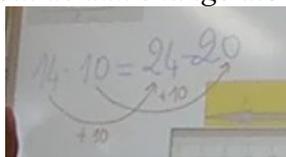


18. Si j'avance de deux là, j'avance de deux là donc je peux écrire $12 - 8 = 14 - 10$.
19. M : C'est exactement la même chose que là. *Le maître montre une seconde diapositive.* Je peux écrire $14 - 10 = 24 - 20$.

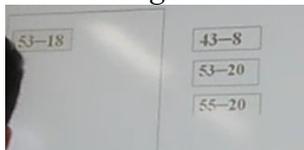


20. M : Pour passer de quatorze à vingt-quatre, j'ajoute
21. E(s) : dix.

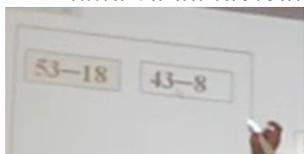
22. M : Et pour passer de dix à vingt, j'ajoute dix. *Le maître indique en faisant deux flèches l'ajout de dix. change alors de diapositive.*



23. M : Regardez bien. Vous allez voir juste après, cela évite de faire trop de calculs. On passe à la suite. *Il change alors de diapositive.*



24. M : Vous avez la soustraction suivante $53 - 18$, je veux qu'un enfant aille me placer une étiquette dont le résultat sera le même que celui là. Je ne veux pas de calculs. On évite de calculer. Cela a un lien avec ce qu'on vient de faire juste avant. Alixia, on va voir si tu as trouvé. *Alixia va au tableau.*



25. M : Explique, qu'as-tu fait pour passer de cinquante-trois à quarante-trois ?

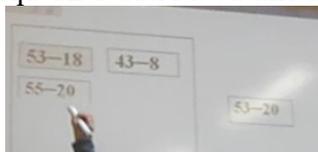
26. E6 : *L'élève au tableau se tait. Le maître se tourne vers les autres élèves.*

27. E7 : On enlève une dizaine.

28. M : Que fait-on pour passer de dix-huit à huit ?

29. E(s) : on enlève une dizaine.

30. M : J'ai enlevé le même nombre aux deux termes, j'ai enlevé dix à chaque fois. Est-ce que j'ai eu besoin de faire le calcul de tête ? Non, je sais que le résultat est le même. Est-ce que quelqu'un d'autre a vu une autre étiquette dont le résultat serait le même.



31. M : Qui est d'accord ? *Beaucoup d'élèves lèvent le doigt.*

32. E8 : J'ai ajouté deux à cinquante-trois et deux à dix huit.

33. M : Elle a ajouté le même nombre au deux termes. Elle a ajouté combien ?

34. E8 : Deux.

35. M : Elle est sûre sans calculer que c'est le même résultat. Est-ce que cela marche pour $53 - 20$? Le maître montre la dernière étiquette.

36. E(s) : Non.

37. E8 : on a déjà cinquante-trois.

38. M : On a le même nombre de départ.

39. E8 : on a dix-huit et vingt.

40. M : On a une différence de deux.

41. M : Choisissez le calcul qui vous permettra de trouver le résultat.

42. E9 : Cinquante-cinq moins vingt.

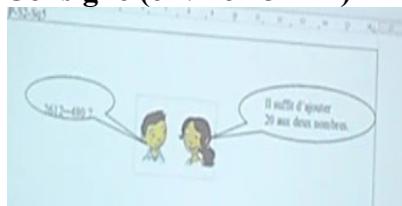
43. M : tout le monde est d'accord ou pas ?

44. E9 : Trente-cinq.

M : Je vous présente le travail à faire. Vous avez une fiche sur laquelle il y a $37 - 29$ et sept étiquettes. On ne colle que les étiquettes qui font le même résultat que celui de $37 - 29$. D'accord.

V.11. Annexe E.5.3 : Transcription S2Sq5 (classe A)

Consigne (environ 3 min)

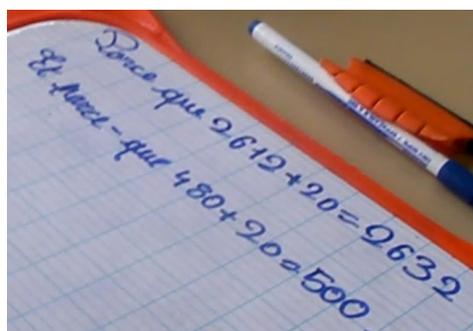
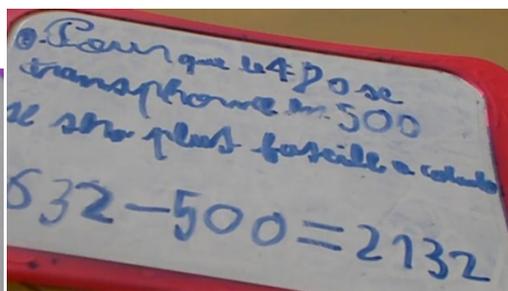
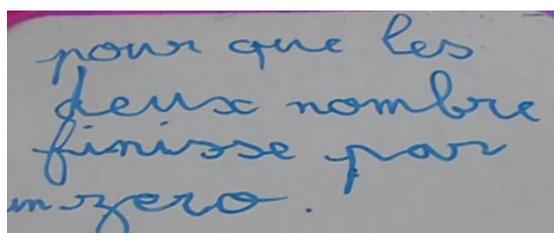


Sur le TBI est projeté l'énoncé du problème

1. M : Je vous laisse lire l'énoncé du problème projeté au tableau.
2. M : Est-ce que quelqu'un peut expliquer l'énoncé ?
3. E1 : Alice discute avec son copain. Il lui pose un calcul.
4. M : C'est quoi le calcul qu'il lui demande ?
5. E1 : Deux-mille-six-cent-douze moins quatre-cent-quatre-vingt ?
6. M : Brutalement c'est facile à faire comme cela ?
7. E(s) : Non.
8. M : On est d'accord. Qu'est-ce qu'elle lui répond Alice? Flora ?
9. E2 : *Flora lit le contenu de la bulle de droite.* Il suffit d'ajouter vingt aux deux nombres.
10. M : Première question, Flora, s'il te plait ?
11. E2 : *Flora lit la question du problème.*
12. M : Vous mettez votre avis, la réponse, sur votre ardoise. Et ensuite, *la maîtresse lit la seconde question.* Vous calculez en tenant compte de ce que vient de dire Alice. Est-ce qu'on pose les calculs en colonne? Non. Allez, je vous laisse deux minutes.

Recherche (environ 6 min)

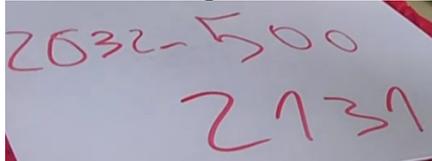
Nous présentons trois photographies de production d'élèves prises pendant cette phase de recherche.



Mise en commun (environ 4 min)

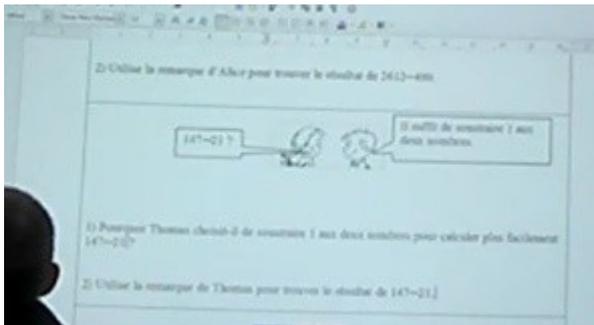
13. M : Pourquoi Valentin ?

14. E2 : Pour que cinq-cents-quatre-vingt soit un cinq-cents. Si les deux nombres se terminent par un zéro, c'est plus facile à calculer.
15. M : De calculer la différence.
16. M : Elle a le droit de faire cela ?
17. E(s) : Non
18. E(s) : Oui
19. M : C'est-à-dire que le résultat de la soustraction ne change pas si on ajoute ou si on retire le même nombre aux deux termes. Le quatre-cent-quatre-vingts va devenir cinq-cents et celui là, *la maîtresse montre le premier terme, levez les doigts. Eline ? Silence. Sacha ?*
20. E3 : Deux-mille-six-cent-trente-deux.
21. M : Allez, top chrono, on cherche le résultat sans poser.



22. M : Vous avez trouvé en moins de dix secondes. Alice avait raison ? Oui. C'est ce qu'on va faire aujourd'hui, Quand on voit un calcul pas facile à calculer, on va essayer de rapprocher le second d'un nombre plus pratique. D'accord, regardez le problème en dessous.

Deuxième item



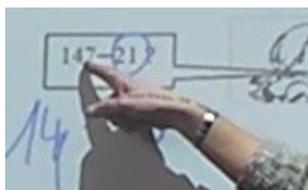
K

Après avoir lu et commenté, l'énoncé correspondant au second item, les élèves ont environ trois minutes pour répondre aux questions sur leurs ardoises. Au bout d'une minute, un élève pose une question.

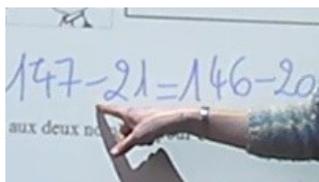
23. E4 : Ça veut dire quoi soustraire ?
24. M : Soustraire. Cela commence comme quel mot ?
25. E5 : Soustraction.
26. M : Soustraire, cela veut dire enlever.

Mise en commun (environ 3 min)

27. M : *L'enseignante relit la première question. Maxime ?*
28. E6 : L'élève parle très doucement et indique le nouveau calcul à effectuer.
29. M : Pour l'instant, on ne te demande pas le calcul. Margot, d'après toi.
30. E7 : C'est plus facile car le deuxième nombre, il va y avoir un zéro. C'est plus facile après pour calculer.
31. M : Vingt et un moins un, vingt et c'est plus facile à calculer. Alors Maxime, le cent-quarante sept, cela va devenir quoi si on lui enlève aussi un. L'enseignante montre les nombres du calcul initial.



32. E6 : cent-quarante-six.
33. M : Donc on peut écrire que cent-quarante-sept moins vingt et un égal cent-quarante-six moins vingt. *L'enseignante réécrit le calcul.* Egal combien, Maxime ?
34. E7 : Cent-vingt-six.
35. M : Vous êtes d'accord, c'était plus facile de faire ce calcul que de faire celui-là. *Elle montre le calcul en question.*



36. M : Marion l'a bien dit ? Pourquoi il a choisi de retirer un, pour faire apparaître vingt.
37. E8 : Maîtresse, moi, j'ai cent-quarante-sept et j'ai enlevé vingt et cela me fait de suite trouver la réponse.
38. M : Tu n'as pas le droit. Tu as juste enlevé un à celui là. Elle montre le nombre cent-quarante-sept. Ce n'est plus le même écart. Si toi tu grandis de un centimètre et Valentin de zéro, est-ce qu'il y aura le même écart ? Attention, on enlève ou on rajoute aux deux nombres, sinon, il y en a un qui est jaloux et ce n'est plus le même résultat. Ca marche, troisième exemple.

V.12. Annexe E.5.4 : Classement en fonction de trois types d'erreurs repérées pour effectuer un calcul soustractif avec τ_{AN} (S2Sq5)

Exercice 2

Classe A (effectif 15)	Nombre de réponses correctes	Nombre de réponses erronées	Nombre de réponses correspondant à un choix de translation erroné	Nombre de réponses avec la translation reportée sur uniquement le second terme du calcul soustractif	Nombre de réponses où le résultat de $a - \square 0$ est faux
5200 – 170	5/15	10/15	8/15	0/15	1/15
312 – 98	7/15	8/15	5/15	1/15	1/15

Classe B (effectif 23)	Nombre de réponses correctes	Nombre de réponses erronées	Nombre de réponses correspondant à un choix de translation erroné	Nombre de réponses avec la translation reportée sur uniquement le second terme du calcul soustractif	Nombre de réponses où le résultat de $a - \square 0$ est faux
5200 – 170	21/23	2/23	0/23	0/23	0/23
312 – 98	19/23	4/23	2/23	0/23	1/23

Exercice 3

Classe A (effectif 15)	Nombre de réponses correctes	Nombre de réponses erronées	Nombre de réponses sans explications (seul le résultat du calcul est indiqué)	Nombre de réponses correspondant à un choix de translation inadapté	Nombre de réponses avec la translation reportée sur uniquement le second terme du calcul soustractif	Nombre de réponses où le résultat de $a - \square 0$ est faux
170 – 98	10/15	5/15	0/15	4/15	1/15	0/15
1420 – 390	10/15	5/15	1/15	4/15	0/15	1/15

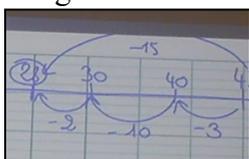
Classe B (effectif 23)	Nombre de réponses correctes	Nombre de réponses erronées	Nombre de réponses sans explications (seul le résultat du calcul est indiqué)	Nombre de réponses correspondant à un choix de translation erroné	Nombre de réponses avec la translation reportée sur uniquement le second terme du calcul soustractif	Nombre de réponses où le résultat de $a - \square 0$ est faux
170 – 98	10/23	13/23	13/23	0/23	0/23	0/23
1420 – 390	6/23	17/23	13/23	3/23	0/23	2/23

V.13. Annexe E.6.1 : Transcription S1Sq6 (classe A)

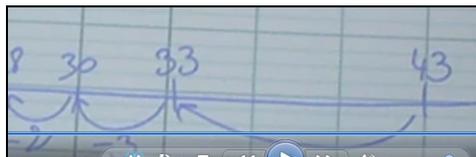
Les élèves ont effectué une série de quatre calculs soustractifs. La retranscription correspond au moment de mise en commun. L'enseignante pose le premier calcul en ligne et interroge une élève.

- $43 - 15$

1. M : Qui se lance ? Constance ?
2. E1 : J'ai enlevé trois, après j'ai enlevé une dizaine et après j'ai enlevé deux.
3. M : L'enseignante effectue un schéma avec appui sur la droite numérique pour illustrer les calculs indiqués. C'est bien et tu as trouvé ?
4. E1 : Vingt-huit.



5. M : Est-ce que quelqu'un a fait l'axe mais en faisant des bonds différents ? Personne ?
L'enseignante trace un nouvel axe et explique qu'elle aurait commencé par enlever dix puis trois et encore deux. C'est la même méthode de Constance sauf que j'ai pris un autre chemin.



6. C
7. M : Quelqu'un a-t-il fait autrement ? Noé ?
8. E2 : Je n'ai pas fait l'axe mais j'ai fait moins trois, moins dix et moins deux.
9. M : Comme Constance mais dans ta tête. On passe au suivant.

- $57 - 19$

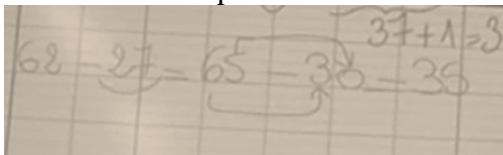
10. E3 : Maîtresse, il est plus facile que le premier.
11. M : Comment as-tu fait Flora ?
12. E4 : J'ai enlevé dix.
13. M : L'enseignante trace un axe, indique le bond de dix et le résultat intermédiaire 47. Ensuite ?
14. E4 : J'ai enlevé neuf.
15. M : Moins neuf, c'est facile à calculer ? Comment on peut faire Yanniss quand on est à quarante-sept.
16. E5 : On enlève sept et encore deux.
17. M : Pour enlever dix-neuf comment on peut faire autrement, Sacha ?
18. E6 : On enlève vingt et on rajoute un, ça fait trente-huit.
19. M : L'enseignante note le calcul au tableau.

- 20.
21. M : Comment tu as fait toi ?

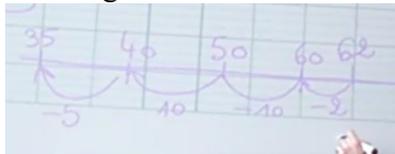
22. E7 : Moi j'ai fait moins vingt et j'ai rajouté un à cinquante-sept.
 23. M : Donc on a quel nombre ici Flora. L'enseignante montre le nombre 57.
 24. E8 : Cinquante-huit.
 25. M : Alors vous n'aviez pas pensé à cela ?
 26. E7 : Oui car la méthode de Flora est beaucoup plus longue.

- $62 - 27$

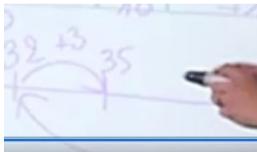
27. M : Qui trouve la solution rapidement ? L'enseignante compte les doigts levés et arrive à dix.
 Marion ?
 28. E8 : On fait moins trente.
 29. M : Celui là, il faut aussi lui faire plus trois. Elle montre le nombre 62. Annais ?
 30. E9 : Soixante-cinq.
 31. M : Combien à la fin ? Héline ?
 32. E10 : Trente cinq.



33. M : Qui a fait autrement ?
 34. E11 : J'ai fait moins deux, moins dix, moins dix et moins cinq.
 35. M : L'enseignante réalise le schéma correspondant :

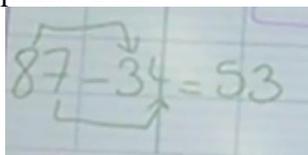


36. M : On peut aussi enlever trente et ajouter trois.



- $87 - 34$

37. M ; Qu'est ce qu'on peut faire ?
 38. E12 : Huit moins trois, ça fait cinq et sept moins quatre, ça fait trois, donc en fait ça fait cinquante-trois.

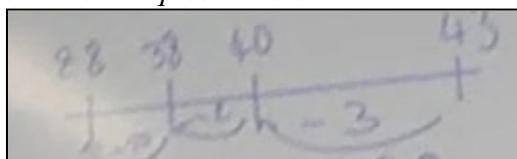


V.14. Annexe E.6.2 : Transcription S1Sq6 (classe B)

Les élèves ont effectué une série de quatre calculs soustractifs. La retranscription correspond au moment de mise en commun. L'enseignant affiche une page du tableau interactif sur laquelle sont posés les calculs en ligne.

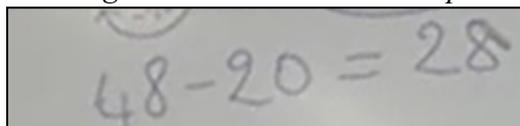
- $43 - 15$

1. M : Allez, vas y Thomas, je t'écoute.
2. E1 : J'ai fait quarante-trois moins trois, ça fait quarante, moins deux, trente-huit, moins dix, vingt-huit.
3. M : *L'enseignant effectue un schéma avec appui sur la droite numérique pour illustrer les calculs indiqués. Très bien. Jibril comment tu-as fait toi ?*



A number line from 0 to 45 with major ticks every 5 units. The number 43 is written above the line. A horizontal line is drawn below the number line, starting at 43 and ending at 28. Below this line, the number 15 is written, and a curved line connects it to the end of the horizontal line at 28, indicating a subtraction of 15 from 43.

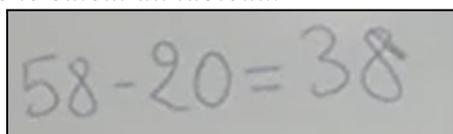
- 4.
5. E2 : J'ai fait quarante-huit moins vingt.
6. M : *L'enseignant note le calcul correspondant. Parfait, on passe au deuxième. Annael ?*



A handwritten equation: $48 - 20 = 28$.

- $57 - 19$

7. E3 : J'ai fait cinquante-huit moins vingt.
8. M : Là je pense que quand on voit dix-neuf, c'est vraiment ce qu'il faut faire. *L'enseignant note le calcul au tableau.*

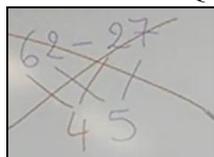


A handwritten equation: $58 - 20 = 38$.

Ce n'est pas compliqué d'ajouter *un* aux deux nombres. D'accord ? Allez le suivant.

- $62 - 27$

9. M : Soixante-deux moins vingt-sept ? Il y en a encore qui ont décomposé. Je monte très rapidement. Il y en a qui ont fait cela. *L'enseignant réalise un schéma. C'est bon cela ? Non, il barre le schéma. Qu'as-tu fait Elisa ?*



A number line from 0 to 65 with major ticks every 5 units. The number 62 is written above the line. A horizontal line is drawn below the number line, starting at 62 and ending at 35. Below this line, the number 27 is written, and a curved line connects it to the end of the horizontal line at 35. The entire diagram is crossed out with several diagonal lines.

10. E4 : J'ai fait soixante-deux moins deux égal soixante moins vingt égal quarante moins cinq égal trente-cinq. *L'enseignant réalise un arbre.*

$$\begin{array}{l}
 62 - 2 = 20 - 5 \\
 60 - 20 = 5 \\
 40 - 5 \\
 35
 \end{array}$$

11. M : Bien. Est-ce qu'on pouvait faire autre chose ? Alex ?
 12. E5: Moi j'ai fait soixante-deux moins trente, ça fait trente-deux et j'ai rajouté trois, cela fait trente-cinq. Est-ce que certains ont fait une translation ? Ou pas ?
 13. E6 : soixante-cinq moins trente.
 14. M : OK, il a ajouté trois aux deux nombres. Allez, on passe au dernier.

- $87 - 34$

15. M ; Yassim ?
 16. E7 : J'ai fait sept moins trois.
 17. M : tu t'es occupé des unités et après ?
 18. E7 : huit moins quatre.
 19. M : Tu t'es occupé des dizaines. *L'enseignant réalise un schéma.*

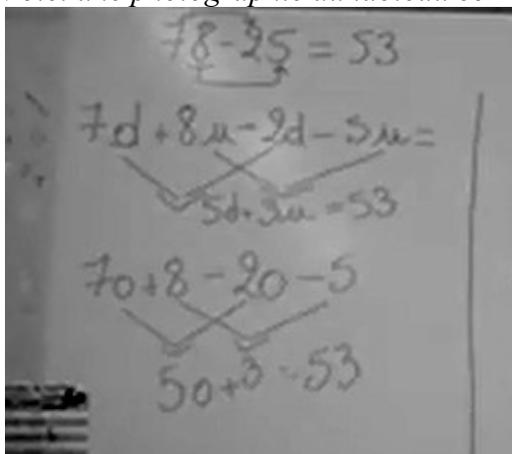
$$\begin{array}{r}
 87 - 34 \\
 \hline
 53
 \end{array}$$

20. M : Tu trouves cinquante-trois.

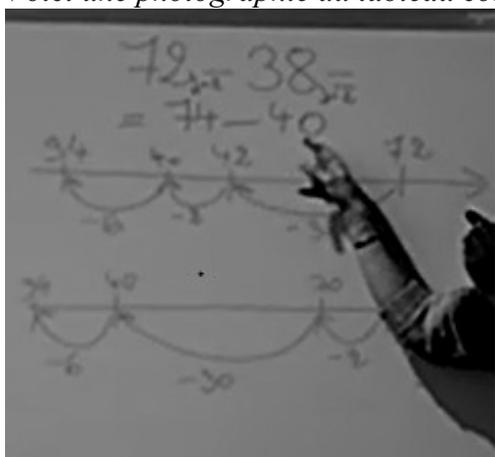
V.15. Annexe E.7.1 : Transcription S1Sq7 (classe A)

Les élèves sortent leurs ardoises. L'enseignante leur indique qu'ils vont avoir deux calculs à effectuer et qu'ils peuvent donner indiquer la technique qu'ils utilisent.

1. M : Premier calcul, soixante-dix-huit moins vingt-cinq ?
Alors que les élèves sont tous en train de chercher le résultat, l'enseignante pose le calcul en ligne au tableau. Au bout d'une minute, elle interrompt la recherche.
2. M : Est-ce que je peux donner le second calcul ?
3. E(s) : Oui.
4. M : Soixante douze moins trente-huit ?
La maîtresse partage son tableau en deux colonnes et pose le calcul en ligne. Au bout de quatre minutes, elle passe à la correction des deux calculs.
Voici une photographie du tableau correspondant à la correction du premier calcul :



Voici une photographie du tableau correspondant à la correction du premier calcul :



5. M : On va apprendre à poser ces opérations. On va faire les choses en même temps. Pour que ce soit bien propre, on va écrire un chiffre par case. Moi, je n'ai pas de cases mais cela va aller. On commence par écrire le nombre soixante-dix huit. En premier le chiffre des unités 8 et dans la case devant, le chiffre des dizaines, le huit. Vous faites en même temps que moi.
6. M : Maxime, on met quoi ?
7. E1 : le moins.
8. M : oui devant sur la ligne du dessous, le moins. Ensuite ?
9. E2 : Le vingt-cinq.

10. M : On fait très attention. Le chiffre des unités sous le chiffre des unités. On écrit d'abord le cinq. Ensuite, on trace un trait à la règle. Lena on fait quoi ?
11. E3 : Huit moins cinq.
12. M : Lena fort, on calcule le chiffre des unités. Huit moins cinq. Attention, on descend, ce n'est pas comme pour l'addition, interdit de calculer cinq moins huit. On ne sait pas le faire. Huit moins cinq, cela fait combien ?
13. E4 : trois.
14. M : Quand on s'est occupé de la colonne des unités, on s'occupe de quoi Seban ?
15. E5 : De la colonne des dizaines.
16. M : Sept moins deux ?
17. E5 : cinq ;
18. M : Voilà.

Voici une photographie du tableau correspondant au premier calcul posé :

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = \\ \checkmark \\ \underline{78} \\ - 25 \\ \hline 53 \\ 78 - 25 = 53 \end{array}$$

19. M : On s'occupe du second calcul. On écrit soixante-douze, le moins dessous et le vingt-huit. Le huit aligné avec le deux et le trois devant. On commence par quel calcul
20. E6 : Deux moins huit. On est obligé de descendre.
21. M : C'est impossible. Qu'est ce qu'on va faire pour s'en sortir ?
22. E7 : On enlève le deux du huit.
23. M : On enlève deux du huit.
24. M : Non, pas possible. Oubliez.
25. E8 : On ajoute un au deux.
26. M : Non, ce n'est pas *un* qu'on ajoute mais *dix*. *L'enseignante va pour marquer une retenue et interrompt son geste pour écrire à droite du calcul posé en colonne 72 + 10.*

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 38 \\ \hline \end{array}$$

27. M : On va faire comme si on faisait soixante-douze plus dix mais comme tout à l'heure, on va ajouter dix à trente huit pour conserver l'écart. On va mettre un petit *un* comme cela devant le deux. C'est comme si on faisait soixante-dix plus douze.

$$\begin{array}{r} 712 \\ - 38 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 72 + 10 \\ 70 + 12 \end{array}$$

28. M : Attention le dix qu'on a ici, on le retrouve en bas. Le dix, on va le mettre au dessous du trois dans un sac. Là on fait trente-huit plus dix égal quarante-huit. Tout à l'heure on dira trois plus un, le quatre, il est là. D'accord ?

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 38 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 72 + 10 \\ 70 + 12 \\ 38 + 10 \end{array}$$

29. M : Quand on met une retenue là, on la met là. Pour les soustractions, les retenues, elle marche par deux. On entoure le *trois* et le *un* pour les mettre ensemble.

30. M : On calcule . Douze moins huit égal combien ?

31. E8 : Quatre.

32. Et là ? L'enseignante montre la colonne des dizaines.

33. E9 : sept moins quatre.

34. M : On fait trois plus un égal quatre, sept moins quatre égal trois. Voilà, on a posé la soustraction avec retenues. Vous prenez votre stylo rouge, vous repassez les retenues et le sac, le petit cercle. Voilà, on a utilisé la méthode que vous connaissiez déjà. Le résultat ne change pas quand ajoute un même nombre aux deux nombres d'une soustraction. Cela vous le saviez.

35. On va faire des petits entraînements. Normalement vous avez compris pourquoi on peut mettre des retenues.

V.16. Annexe E.7.2 : Transcription S1Sq7 (classe B)

Les élèves sortent leurs ardoises. L'enseignant leur indique qu'ils vont avoir deux calculs à effectuer sur leurs ardoises et qu'ils doivent expliquer leurs procédures.

1. M : Premier calcul, soixante-dix-huit moins vingt-cinq. L'enseignant pose le calcul en ligne au tableau. Le deuxième, quatre-vingt-deux moins trente-huit. L'enseignant partage son tableau en deux colonnes et pose le second calcul en ligne.

Voici une photographie du tableau correspondant à la correction du premier calcul (après 7 minutes de recherche):

78 - 25 = ?
53
70 + 8 - (20 + 5)
70 - 20 + 8 - 5
50 + 3
53

Voici une photographie du tableau correspondant à la correction du premier calcul :

82 - 38 = ?
84 - 40 = 44
82 - 40 + 2 = 42 + 2
= 44
44 - 20 = 24
24 - 2 = 22

2. E(s): Oui.
3. M : On reprend ce calcul là, soixante-dix-huit moins vingt-cinq. Qui me dit ce que je fais faire pour le poser en colonne ? Maxime.
4. E1 : On écrit soixante-dix-huit.
5. M : Et après ?
6. E1 : On écrit le moins en dessous.
7. M : Après ?
8. E1 : On place le deux sous le huit. Pourquoi sous le huit ?
9. E1 : Parce que c'est une dizaine.
10. M : OK, on aligne bien les chiffres des dizaines sous les chiffres des dizaines. Continue.

11. E1 : Le cinq au dessous du huit.
 12. M : D'accord, unité sous unité.
 13. E1 : Je trace la barre.
 14. M : Avec quoi ?
 15. E1 : La règle.
 16. M : Comment on fait ?
 17. E2 : Huit moins cinq, trois. Sept moins deux, cinq.
 18. M : On fait le deuxième calcul. On détaille tout.
 19. E3 : On écrit quatre-vingt-deux. On écrit le huit sous le deux et le trois sous le huit. On trace le trait à la règle. L'enseignant répète ce que dit l'élève et écrit en même temps.
 20. M : Quelqu'un d'autre, Théo ?
 21. E4 : Deux moins huit, je ne peux pas.
 22. M : Qu'est-ce qu'on fait ?
 23. E4 : On rajoute une dizaine à deux.
 24. M : Viens, je te laisse la mettre. L'élève écrit la retenue.
 25. M : Et ensuite ?
 26. E4 : Il faut ajouter une dizaine au trois.
 27. M : Vas y. L'élève calcule mentalement et écrit quatre.

$$\begin{array}{r} 82 \\ - 38 \\ \hline 44 \end{array}$$

28. M : Ecoutez bien ma question. Quelle est la stratégie que avons-nous étudié avant qui se rapproche le plus de ce que nous avons fait avant ? Les élèves se taisent.
 29. M : On a vu avant quatre stratégies. Quelle est celle qui se rapproche le plus de ce que Théo explique.
 30. E5 : Celle où on ajoute dix aux deux nombres.
 31. M : Oui, on obtient quel nombre quand on ajoute dix à quatre-vingt-deux ?
 32. E6 : quatre-vingt-douze.
 33. M : Et quel nombre quand on ajoute dix à trente huit ?
 34. E6 : Quarante-huit.
 35. M : On a bien fait le même calcul. Est-ce qu'on est arrivé à effectuer la soustraction ?
 36. E7 : On peut vérifier.
 37. M : Comment on fait pour vérifier, tiens ?
 38. E7 : On fait huit plus quatre.
 39. E(s) : Non.
 40. M : Laissez là s'expliquer. Je fais ça plus ça. *Il montre le quatre correspondant au chiffre des dizaines.*
 41. E8 : Non celui d'à coté.
 42. M : Tu fais cela plus cela. Il montre dans la colonne des unités le 4 du résultat et le 8 de 38.
 43. E8 : Quatre plus huit, douze, deux et je retiens un. Quatre plus trois sept, plus un huit.
 44. M : Donc elle peut poser une addition pour vérifier. Cela ne veut pas dire qu'on a bon aux deux calculs, soit on s'est trompé sur les deux, pas de chance, soit on ne s'est pas trompé.

VI. Annexe F : annexes relatives aux évaluations diagnostiques

VI.1. Annexe F.1 : Résultats de l'évaluation diagnostique de la classe A

Les exercices proposés en évaluation diagnostique sont présentés en annexe D.0.1.

Dans le tableau qui suit, nous présentons les réponses codées des élèves de la gauche vers la droite aux items correspondant à T_{a+b} , T_{a-b} , $T_{Pro.Cal}$, $T_{Ass.(sch./cal.)}$ et $T_{Ass.(cal./cal.)}$.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.

9: réponse erronée.

0 : absence de réponse.

3 : réponse partiellement exacte.

	6+7	193+10	46+12	428+5	2+89	Alg sans	Alg avec		13-7	203-10	47-13	421-3	31-29	Alg sans	Alg avec	Alg avec		Dif	Com	Val Com		a-b-c-d	-5	-3
Radia	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	9	1	9	9		1	1	1		a	1	1
Lyna	1	1	1	1	9	1	1		1	1	9	9	9	1	9	9		3	3	3		c	1	1
Valentin	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1		b	1	1
Sacha	1	1	1	1	1	1	1		9	9	9	1	9	9	9	9		1	1	3		Ab	A	A
Lalia	1	1	1	9	9	1	1		1	9	1	9	9	1	9	9		1	9	9		d	9	9
Héline	1	9	1	1	1	1	9		1	9	1	9	9	1	9	9		3	9	9		a	9	1
Alexis	1	0	0	9	9	0	9		1	1	1	1	9	1	9	1		1	9	1		c	9	1
Léna	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	0	1	9	9		3	1	3		a	1	1
Mathilde	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	9	1	9	9		9	9	9		c	1	1
Constance	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	9	9		3	1	1		a	1	1
Noé	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	9	9		1	1	1		d	1	1
Esteban	1	9	1	9	1	1	1		1	9	9	1	9	1	9	9		3	1	3		A	A	A
Marion	1	1	1	1	1	1	1		1	0	1	1	1	1	9	9		1	1	3		a	1	1
Sacha P	1	1	1	1	1	1	1		9	9	1	1	1	1	1	1		1	1	1		a	1	1
Flora	1	1	1	1	1	1	1		1	9	1	1	9	1	1	1		0	1	1		a	1	1
Maxime	1	1	1	1	1	1	1		1	9	1	1	9	1	9	9		3	1	3		a	1	1
Guendal	1	1	1	1	1	1	1		9	9	1	9	9	1	9	9		9	3	9		d	1	1
Yanis	1	1	1	1	1	1	9		1	1	1	1	1	9	9	9		9	1	1		a	1	1
Eloise	1	1	1	1	9	1	1		1	9	9	1	9	1	9	9		1	9	9		a	1	1
Résultats 1-9-0-3	19-0-0-0	16-2-1-0	18-0-1-0	16-3-0-0	15-4-0-0	19-0-1-0	19-3-0-0		16-3-0-0	9-9-1-0	19-0-0-0	15-4-0-0	8-10-1-0	17-2-0-0	3-16-0-0	4-15-0-0		9-3-1-6	12-5-0-2	8-5-0-6			14-3-0	16-1-0

VI.2. Annexe F.2 : Résultats de l'évaluation diagnostique de la classe B

Les exercices proposés en évaluation diagnostique sont présentés en annexe D.0.1.

Dans le tableau qui suit, nous présentons les réponses codées des élèves de la gauche vers la droite aux items correspondant à T_{a+b} , T_{a-b} , $T_{Pro.Cal}$, $T_{Ass.(sch./cal.)}$ et $T_{Ass.(cal./cal.)}$.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9 : réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	6+7	193+10	46+12	428+5	2+89	Alg sans	Alg avec		13-7	203-10	47-13	421-3	31-29	Alg sans	Alg avec	Alg avec		Dif	Com_nos	ValCom		Calabcd	-5	-3
Emeline	1	9	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	9	9		1	1	1		c	9	9
Amélie	1	9	1	9	1	1	1		9	1	1	9	9	1	9	9		1	9	1		a	1	0
Kamil	1	1	1	1	1	1	1		1	9	9	1	9	1	9	9		1	3	3		c	1	1
Alex	1	9	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	9	9		1	1	1		a	1	1
Bryan	1	0	1	9	1	1	9		1	0	0	9	0	1	9	9		9	9	1		c	1	1
Ismail	1	1	1	9	1	1	1		1	1	1	1	9	1	9	9		1	1	3		b	1	1
Alina	1	1	1	9	1	1	1		9	9	9	1	9	1	9	9		1	3	3		a	1	1
Maeva	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	9	1	9	9		1	1	3		a	1	9
Jade	1	9	1	9	9	1	1		1	9	1	9	9	1	9	9		A	A	A		A	A	A
Fiona	1	0	1	9	1	1	1		1	0	0	9	9	9	9	9		9	3	0		a	1	1
Thomas	1	9	1	9	9	1	9		9	9	9	9	9	9	9	9		9	9	9		a	9	9
AbdelHakim	1	9	9	9	9	1	9		9	9	9	9	1	9	9	9		9	9	9		0	9	1
Yassine	1	1	1	9	1	9	1		1	9	9	9	1	9	9	9		1	9	9		a	9	9
Samuel	1	1	9	9	9	9	9		1	9	9	9	9	9	9	9		1	3	1		a	9	1
Emma	9	0	1	9	9	1	9		1	9	1	9	9	1	9	9		9	9	9		d	1	9
Théo	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	9	9	1	9	9		1	1	1		a	1	9
Ines	1	1	1	1	11	1	1		1	9	1	1	9	1	9	9		1	1	1		a	9	9
Amaé	1	9	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	9	9		1	9	1		a	9	9
Célia	1	9	1	9	1	1	1		1	9	9	1	9	1	9	9		1	1	1		a	1	1
Maxime	1	9	1	1	1	1	9		1	9	1	9	9	1	9	9		1	1	1		0	1	9
Sarah	1	9	1	9	1	1	1		1	9	9	1	9	1	9	9		9	9	9		b	1	1
Océane	1	9	1	9	1	1	1		1	9	1	1	9	1	9	9		1	1	1		b	1	1
Martin	1	1	1	1	1	1	1		9	1	9	1	1	1	9	9		1	1	1		b	1	1
Raphael	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	9	9		1	1	1		c	0	0
Anaëlle	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	9	9	1	9	9		9	9	1		a	1	1
Ewan	1	1	1	9	1	1	1		9	9	9	1	9	1	1	1		1	9	0		a	1	1
Jibril	1	1	1	1	1	1	1		1	9	1	1	1	1	9	9		1	3	1		c	9	9
Léane	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	9	1	9	9		1	1	1		a	1	1
Hélixane	1	1	1	1	1	1	1		1	9	1	9	1	1	1	1		1	1	1		b	1	1
Résultats 1-9-0-3	28-1-0-0	15-11-3-0	27-2-1-0	14-15-0-0	24-5-0-0	27-2-0-0	22-7-0-0		23-6-0-0	11-16-2-0	17-10-2-0	16-13-0-0	9-19-1-0	24-5-0-0	2-27-0-0	2-27-0-0		21-7-0-0	13-10-0-5	17-5-2-4			19-8 1-0	16-10-2-0

VII. Annexe G : annexes relatives aux évaluations finales

VII.1. Annexe G.1.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a-\square}$

Nous indiquons pour chaque calcul la technique mise en œuvre par l'élève et surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	348-6	235-6	429-9	315-8
Radia	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{A10}
Lyna	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Valentin	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{N10C}
Sacha	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{A10}
Lalia	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Héline	Pas d'exp.	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Alexis	DNV(-3-3)	DNV	DNV	DNV
Léna	τ_{1010}	Pas d'exp.	τ_{1010}	τ_{A10}
Mathilde	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Constance	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{AN}	τ_{AN}
Noé	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$
Esteban	τ_{1010}	Pas d'exp.	τ_{1010}	Pas d'exp.
Marion	τ_{1010}	Comp.	τ_{1010}	τ_{A10}
Sacha P	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{A10}
Flora	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Maxime	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$
Guendal	τ_{1010}	DNV (-5-1)	Pas d'exp	NF
Yanis	τ_{1010}	Pas d'exp	Pas d'exp	Comp.
Eloise	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	Pas d'exp	DNV τ_{A10}
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	19 - 0 - 0 - 0	16 - 3 - 0 - 0	19 - 0 - 0 - 0	18 - 1 - 0 - 0

VII.2. Annexe G.1.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a-\square}$

Nous indiquons pour chaque calcul la technique mise en œuvre par l'élève et surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	348-6	235-6	429-9	315-8
Emeline	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$ ou τ_{ALG}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Amélie	τ_{1010}	confus	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$ ou τ_{ALG}
Kamil	DNV	confus	τ_{1010}	DNV
Alex	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{N10C}
Bryan	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Ismail	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{1010}	τ_{N10C}
Alina	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV(-4-4)
Maeva	τ_{1010}	DNV(-3-3)	τ_{1010}	DNV(-5-3)
Jade	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV(-5-3)
Fiona	A	A	A	A
Thomas	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp
AbdelHakim	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Yassine	Comp.	Comp.	Comp.	Comp.
Samuel	DNV(-3-3)	DNV(-3-3)	DNV(-8-1)	DNV(-4-4)
Emma	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Théo	EC (-2-2-2)	DNV τ_{A10}	DNV(-8-1)	DNV τ_{A10}
Ines	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{AN}
Amaé	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$ ou τ_{ALG}	τ_{1010}	Pas d'exp.
Célia	τ_{AN}	τ_{AN}	τ_{AN}	τ_{AN}
Maxime	EC (-3-3)	EC (-3-3)	τ_{AN}	EC(-4-4)
Sarah	Comp	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp
Océane	τ_{AN}	DNV τ_{A10}	τ_{N10C}	τ_{N10C}
Martin	τ_{N10C}	DNV τ_{A10}	τ_{N10C}	DNV τ_{A10}
Raphael	τ_{N10C}	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{A10}
Anaëlle	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{1010}	τ_{AN}
Ewan	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Jibril	τ_{AN}	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}
Léane	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{1010}	$(\tau_{1010})'$ ou τ_{ALG}
Hélixane	A	A	A	A
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	26 - 1 - 0 - 0	15 - 11 - 3 - 0	27 - 2 - 1 - 0	14 - 15 - 0 - 0

VII.3. Annexe G.2.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a=0}$

Nous indiquons pour chaque calcul la technique mise en œuvre par l'élève et surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9: réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	203-10	285-60	321-60	463-90
Radia	Pas d'exp.	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Lyna	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV (-10-10-)	DNV (-10-10..)
Valentin	τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{A10}	τ_{N10C}
Sacha	τ_{A10}	τ_{1010}	DNV (-10-10-)	DNV τ_{A10}
Lalia	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	N.F	N.F
Héline	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Alexis	DNV(-3-5)	DNV	DNV	DNV
Léna	$(\tau_{1010})^?$	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Mathilde	τ_{ALG}	τ_{1010}	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Constance	τ_{ALG}	τ_{1010}	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Noé	τ_{REP}	τ_{1010}	τ_{CONV}	τ_{CONV}
Esteban	DNV(-3-5)	DNV	DNV	DNV
Marion	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV (-10-10,...)	DNV τ_{N10C}
Sacha P	τ_{REP}	τ_{REP}	τ_{A10}	τ_{N10C}
Flora	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV (-10-10-...)	DNV τ_{N10C}
Maxime	τ_{REP}	τ_{1010}	τ_{CONV}	τ_{N10C}
Guendal	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV (-10-10..)	DNV (-10-10,...)
Yanis	τ_{ALG}	τ_{1010}	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Eloise	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV -10-10,...)	DNV τ_{N10C}
Résultats 1-9-0-3	15-4-0-0	17-2-0-0	13-6-0-0	12-7-0-0

VII.4. Annexe G.2.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a=0}$

Nous indiquons pour chaque calcul la technique mise en œuvre par l'élève et surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	203-10	285-60	321-60	463-90
Emeline	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{AN}
Amélie	Pas D'exp.	τ_{1010}	Pas D'exp.	τ_{N10C}
Kamil	τ_{1010}	τ_{1010}	DNV	Confus EC
Alex	τ_{REP}	τ_{1010}	τ_{N10C}	τ_{N10C}
Bryan	Pas D'exp.	τ_{1010}	Pas D'exp.	Pas D'exp.
Ismail	τ_{CONV}	τ_{CONV}	τ_{CONV}	τ_{N10C}
Alina	DNV(-3-5)	DNV	DNV	DNV
Maeva	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Jade	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	DNV τ_{A10}
Fiona	A	A	A	A
Thomas	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp
AbdelHakim	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Yassine	Comp.	Comp.	Comp.	Comp.
Samuel	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	Confus EC	DNV τ_{A10}
Emma	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Théo	τ_{A10}	(-20-20..)	(-20-20..)	
Ines	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{AN}	DNV
Amaé	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Célia	τ_{A10}	(-20-20..)	(-20-20..)	τ_{AN}
Maxime	EC (-5-5)	EC (-30-30)	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Sarah	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp	Pas d'exp
Océane	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV(-30-60)	DNV(-60-30)
Martin	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{N10C}	τ_{N10C}
Raphael	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV(-30-60)	DNV(-60-30)
Anaëlle	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	τ_{N10C}	τ_{N10C}
Ewan	DNV	DNV	DNV	DNV
Jibril	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV(-30-60)	DNV(-60-30)
Léane	DNV τ_{A10}	τ_{1010}	DNV(-30-60)	τ_{N10C}
Hélixane	A	A	A	A
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	23 - 6 - 0 - 0	15 - 11 - 3 - 0	27 - 2 - 1 - 0	14 - 15 - 0 - 0

VII.5. Annexe G.3.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à $T_{a-\square\square}$

Nous indiquons pour chaque calcul la technique mise en œuvre par l'élève et surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	67-43	83-24	63-17	31-29
Radia	τ_{1010}	Pas d'exp.	$DNV\tau_{N10}$	Pas d'exp.
Lyna	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$
Valentin	τ_{1010}	τ_{N10C}	τ_{AN}	τ_{N10C}
Sacha	τ_{1010}	τ_{IN10C}	$DNV\tau_{N10}$	τ_{AN}
Lalia	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{AN}	τ_{AN}
Héline	τ_{1010}	τ_{ALG}	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Alexis	DNV	DNV	DNV	DNV
Léna	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.	τ_{AN}
Mathilde	τ_{1010}	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$
Constance	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{AN}
Noé	τ_{1010}	τ_{N10}	τ_{N10}	$\tau_{ADD/SOU}$
Esteban	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$
Marion	τ_{1010}	τ_{N10}	τ_{AN}	τ_{AN}
Sacha P	τ_{1010}	τ_{N10C}	τ_{AN}	τ_{AN}
Flora	τ_{1010}	τ_{N10}	τ_{N10C}	τ_{N10C}
Maxime	τ_{1010}	τ_{N10}	τ_{N10}	τ_{AN}
Guendal		$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$
Yanis	τ_{ALG}	τ_{1010}	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Eloise	τ_{1010}	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$	$DNV\tau_{N10}$
Résultats 1-9-0-3	15-4-0-0	17-2-0-0	13-6-0-0	12-7-0-0

VII.6. Annexe G.3.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{a-\square\square}$

Nous indiquons pour chaque calcul la technique mise en œuvre par l'élève et surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9: réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	67-43	83-24	63-17	31-29
Emeline	τ_{AN}	τ_{AN}	τ_{AN}	τ_{AN}
Amélie	τ_{1010}	Confus	τ_{ALG}	τ_{ALG}
Kamil	τ_{1010}	DNV	DNV	DNV
Alex	τ_{1010}	τ_{N10C}	τ_{AN}	τ_{AN}
Bryan	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Ismail	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{N10C}	τ_{N10C}
Alina	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Maeva	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.	τ_{AN}
Jade	τ_{1010}	DNV τ_{N10}	DNV τ_{N10}	DNV τ_{N10}
Fiona	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{AN}
Thomas	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
AbdelHakim	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Yassine	COMP.	COMP.	COMP.	COMP.
Samuel	τ_{1010}	DNV τ_{N10}	τ_{AN}	N.F
Emma	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Théo	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{N10}	τ_{N10}
Ines	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{N10}	τ_{AN}
Amaé	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	DNV τ_{A10}	DNV τ_{A10}
Célia	τ_{1010}	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Maxime	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}	τ_{1010}
Sarah	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.	Pas d'exp.
Océane	DNV τ_{N10}	τ_{AN}	τ_{N10C}	τ_{AN}
Martin	DNV τ_{N10}	τ_{AN}	τ_{N10C}	τ_{AN}
Raphael	DNV τ_{N10}	τ_{AN}	τ_{N10}	τ_{AN}
Anaëlle	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{N10}	τ_{AN}
Ewan	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	DNV τ_{A10}	DNV τ_{A10}
Jibril	τ_{1010}	DNV τ_{A10}	τ_{AN}	τ_{AN}
Léane	τ_{1010}	τ_{AN}	τ_{AN}	Pas 'exp.
Hélixane	Ab	Ab	Ab	Ab
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	24 - 2 - 0 - 0	12 - 15 - 0 - 0	15 - 12 - 01 - 0	15 - 12 - 0 - 0

VII.7. Annexe G.4.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à T_{a-□□} posé en colonne

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9: réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	92-28	177-34	231-25
Radia	1	1	1
Lyna	1	1	1
Valentin	1	1	1
Sacha	1	1	1
Lalia	9	1	9
Héline	1	1	1
Alexis	9	1	9
Léna	1	1	1
Mathilde	1	1	1
Constance	1	1	1
Noé	9	1	1
Esteban	1	1	1
Marion	9	1	1
Sacha P	1	1	1
Flora	1	1	1
Maxime	1	1	1
Guendal	1	1	1
Yanis	1	1	1
Eloise	1	1	1
Résultats 1-9-0-3	15-4-0-0	17-2-0-0	13-6-0-0

VII.8. Annexe G.4.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à T_{a-□□} posé en colonne

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9: réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	92-28	177-34	231-25
Emeline	1	1	1
Amélie	1	1	1
Kamil	1	1	1
Alex	1	1	1
Bryan	9	1	9
Ismail	1	1	1
Alina	1	1	1
Maeva	1	1	1
Jade	1	1	1
Fiona	Ab	Ab	Ab
Thomas	9	1	9
AbdelHakim	9	1	9
Yassine	9	1	9
Samuel	9	1	9
Emma	9	1	9
Théo	1	1	1
Ines	1	1	1
Amaé	1	1	1
Célia	9	1	1
Maxime	1	1	1
Sarah	1	1	1
Océane	1	1	1
Martin	1	1	1
Raphael	1	1	1
Anaëlle	1	1	1
Ewan	1	1	1
Jibril	1	1	1
Léane	1	1	1
Hélixane	Ab	Ab	AB
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	20-7-0-0	27-0-0-0	21-6-0-0

VII.9. Annexe G.5.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à la technologie associée à τ_{ALG}

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9: réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	Ordre de grandeur	Addition	Valeurs des retenues
Radia	1	9	9
Lyna	1	9	0
Valentin	1	1	3
Sacha	1	9	3
Lalia	1	9	0
Héline	1	9	9
Alexis	9	0	0
Léna	1	1	9
Mathilde	1	1	3
Constance	1	1	3
Noé	1	1	3
Esteban	9	9	3
Marion	1	0	3
Sacha P	1	1	3
Flora	0	1	0
Maxime	1	1	9
Guendal	1	1	9
Yanis	1	1	0
Eloise	1	1	0
Résultats 1-9-0-3	16-2-1-0	8-11-0-0	0-5-6-8

VII.10. Annexe G.5.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à la technologie associée à τ_{ALG}

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9: réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	Ordre de grandeur	Addition	Valeurs des retenues
Emeline	1	1	1
Amélie	1	1	3
Kamil	1	1	3
Alex	1	1	1
Bryan	1	1	0
Ismail	1	1	1
Alina	0	9	0
Maeva	1	1	1
Jade	1	1	3
Fiona	Ab	Ab	Ab
Thomas	0	9	0
AbdelHakim	0	9	0
Yassine	0	9	0
Samuel	0	9	0
Emma	0	9	3
Théo	1	1	1
Ines	1	1	1
Amaé	1	1	3
Célia	0	9	0
Maxime	0	9	0
Sarah	0	9	1
Océane	1	1	1
Martin	1	1	1
Raphael	0	1	0
Anaëlle	1	1	0
Ewan	1	1	3
Jibril	1	1	3
Léane	1	9	3
Hélixane	Ab	Ab	Ab
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	17 - 10 - 0 - 0	17 - 10 - 0 - 0	9 - 10 - 0 - 8

VII.11. Annexe G.6.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à T_{Prod.Cal}

Nous indiquons pour chaque question le calcul effectué par l'élève ou le nombre qu'il a indiqué sur sa production. Nous surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	Mesure de la bandelette	Lecture de la graduation
Radia	2cm5mm 15+41=56	//
Lyna	41	//
Valentin	41	61
Sacha	56-15=39	39
Lalia	//	//
Héline	15+56=71	/
Alexis	//	//
Léna	15+41=71	41
Mathilde	15+56=71	20+71
Constance	15+56=71	//
Noé	56-15=41	Il va lire 61. 56+5=61
Esteban	56-15=41	41-20
Marion	41	20+41
Sacha	56-15=41	20+41=61
Flora	56-15=41	20+41=61
Maxime	15+?=56 41	//
Guendal	15+?=56 41	61
Yanis	15+56=71	20+71
Eloise	41	//
Résultats 1-9-0-3	10- 7-0-0	11- 8-0-0

VII.12. Annexe G.6.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à $T_{\text{Prod.Cal}}$

Nous indiquons pour chaque question le calcul effectué par l'élève ou le nombre qu'il a indiqué sur sa production. Nous surlignons en cas de résultat incorrect.

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	Mesure de la bandelette	Lecture de la graduation
Emeline	41	20+26
Amélie	15+41=56	20+41=61
Kamil	56-41	
Alex	15→56=41	20+41=61
Bryan	17	
Ismail	41	20+41=61
Alina	2cm6mm	22
Maeva	41	41-20
Jade	15+56	20
Fiona	Ab	Ab
Thomas	5	5
AbdelHakim	9	9
Yassine	71	26
Samuel	Ab	Ab
Emma	15+56=71	20+71
Théo	41	23
Ines	15+56=71 1	1
Amaé	41. J'ai compté 41cm	20+41
Célia	9	9
Maxime	41	61
Sarah	15-56=51	26
Océane	41	61 parce que j'ai ajouté 5 aux deux nombres.
Martin	41	61
Raphael	15+41=56	61
Anaëlle	41	56
Ewan	56+15	20+27=47
Jibril	15 pour aller à 56, 41	20 pour aller à 41
Léane	41	20+41=61
Hélixane	Ab	Ab
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	17 - 10 - 0 - 0	15 - 12 - 0 - 0

VII.13. Annexe G.7.1 : Résultats de l'évaluation finale de la classe A correspondant à T_{ASS} (cal/cal)

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
9: réponse erronée.
0 : absence de réponse.
3 : réponse partiellement exacte.

	Relier les égalités	Choisir l'égalité
Radia	9	0
Lyna	1	40-14
Valentin	1	1
Sacha	1	1
Lalia	1	243-217
Héline	1	0
Alexis	9	9
Léna	0	1
Mathilde	9	9
Constance	1	0
Noé	1	243-217
Esteban	1	9
Marion	1	1
Sacha	1	243-217
Flora	1	1
Maxime	1	0
Guendal	1	40-14
Yanis	1	40-14
Eloise	9	9
Résultats 1-9-0-3		

VII.14. Annexe G.7.2 : Résultats de l'évaluation finale de la classe B correspondant à T_{ASS} (cal/cal)

Le code choisi correspond à celui utilisé pour coder les réponses aux évaluations nationales.

1 : bonne réponse.
 9 : réponse erronée.
 0 : absence de réponse.
 3 : réponse partiellement exacte.

	Relier les égalités	Choisir l'égalité
Emeline	1	0
Amélie	1	0
Kamil	9	0
Alex	1	1
Bryan	1	0
Ismail	1	0
Alina	1	0
Maeva	1	0
Jade	1	0
Fiona	Ab	Ab
Thomas	9	0
AbdelHakim	1	0
Yassine	9	0
Samuel	9	0
Emma	9	0
Théo	1	0
Ines	1	0
Amaé	1	Tout entouré
Célia	1	0
Maxime	1	0
Sarah	Tout relié	0
Océane	1	1
Martin	1	1
Raphael	1	0
Anaëlle	1	0
Ewan	1	243-217
Jibril	1	0
Léane	1	0
Hélixane	Ab	Ab
Résultats 1 - 9 - 0 - 3	23-6-0-0	3_23-0-0