



HAL
open science

Etude des modes gravito-inertiels dans les étoiles en rotation rapide

Boris Dintrans

► **To cite this version:**

Boris Dintrans. Etude des modes gravito-inertiels dans les étoiles en rotation rapide. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paul Sabatier Toulouse 3, 1999. Français. NNT : . tel-01432135

HAL Id: tel-01432135

<https://hal.science/tel-01432135>

Submitted on 11 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE III
THÈSE DE DOCTORAT DE L'U.P.S.

Spécialité : Astrophysique

*Etude des modes gravito-inertiels
dans les étoiles en rotation rapide*

par Boris Dintrans

Soutenue le 6 décembre 1999 devant le jury d'examen:

- Mme Annie Baglin Examineur
- M. Leo Maas Examineur
- Mme Janine Provost Rapporteur
- M. Michel Rieutord Directeur de thèse
- M. Lorenzo Valdetaro Examineur
- Mme Sylvie Vauclair Présidente
- M. Jean-Paul Zahn Rapporteur

Nous parcourons du regard les innombrables millions d'années passées et nous voyons le vouloir-vivre lutter avec force pour sortir de la vase laissée par la marée, lutter de forme en forme et de pouvoir en pouvoir, ramper puis marcher avec confiance sur la terre ferme, lutter de génération en génération pour la conquête de l'air, s'enfoncer dans l'obscurité des profondeurs; nous le voyons se retourner contre lui-même, poussé par la rage et la faim, et de nouveau reprendre forme, une forme de plus en plus élaborée, de plus en plus semblable à nous, poursuivant implacablement son projet inouï jusqu'à ce que son être batte enfin dans notre cerveau et dans nos artères... Il est possible de croire que tout ce passé n'est que le commencement d'un commencement, et que tout ce qui est et a été n'est que le premier reflet de l'aube. Il est possible de croire que tout ce que l'esprit humain a jamais accompli n'est que le rêve qui précède l'éveil... De notre lignée, des esprits vont surgir qui nous regarderont, dans notre petitesse, afin de nous connaître mieux que nous ne nous connaissons nous-mêmes. Un jour viendra, un jour dans l'infinie succession des jours, où des êtres encore latents dans nos pensées et cachés dans nos flancs se dresseront sur cette Terre comme on se dresse sur un piédestal, et riront et tendront leurs mains parmi les étoiles.

H. G. Wells, *The Discovery of the Future*.

Remerciements

Mes premiers remerciements iront bien évidemment à Michel pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de m'encadrer durant ces trois années sur ce sujet original. Travailler sous sa direction fut très enrichissant, aussi bien d'un point de vue scientifique qu'humain. Qu'il me permette ici d'exprimer la fierté qu'est la mienne de l'avoir eu comme directeur de thèse.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Lorenzo pour les multiples discussions que nous avons eues dans le domaine numérique. Sa patience devant mes questions quasi-existentielles sur le code a été remarquable. Le fait de m'associer au prix Cray m'a de plus touché et je le remercie pour cette attention.

Merci à Sylvie d'avoir accepté la présidence de mon Jury et de m'avoir opportunément guidé dans mes études toulousaines.

Janine et Jean-Paul ont bien voulu rapporter mon travail et je les en remercie chaleureusement; leurs commentaires ont ainsi grandement contribué à clarifier certains points du manuscrit.

Merci aussi à Annie et Léo pour leur présence dans ce Jury.

Les discussions à bâtons rompus que j'ai pu avoir avec Katia Ferrière, Corinne Charbonnel, Claude Catala, Gabrielle Berthomieu, Bertrand Georgeot, Susan Friedlander et bien d'autres ont indéniablement contribué à ce travail et je les en remercie.

Une thèse implique la lecture d'une multitude d'articles et de livres et je tiens à remercier notre bibliothécaire, Dominique Gaste, pour l'efficacité de l'aide qu'elle m'a gentiment fournie lors de mes recherches bibliographiques. Un petit clin d'oeil aussi à Josiane, Anne-Marie, Dominique et Marie-Claude pour leurs sauvetages lors de mes naufrages administratifs, ainsi qu'à Axel et Aake pour leurs rôles dans l'obtention de ma bourse Marie-Curie.

Je tiens à remercier Michel Blanc pour son appui dans l'aventure tarbaise entreprise dans la dernière ligne droite. Merci à l'équipe Bass2000 de Bagnères pour son accueil, ainsi qu'à José-Philippe Pérez pour ses conseils pédagogiques.

Je remercie Geneviève pour le soutien constant et précieux qu'elle m'a témoigné durant cette thèse, qui lui doit beaucoup. Un grand merci aussi à Sylvestre dont les encouragements ne m'ont jamais fait défaut.

Enfin, je voudrais remercier ma femme Stéphanie pour son infinie indulgence dans les moments de doute, comme d'euphorie. Supporter un conjoint-thésard n'est assurément pas chose facile... Je lui dédie donc ce travail, qui est aussi un peu le sien.

Contents

Remerciements	v
Liste des figures	ix
1 Introduction à la dynamique des étoiles en rotation	1
1.1 Les effets de la rotation sur la structure interne	1
1.2 Les effets de la rotation sur les oscillations stellaires	3
1.2.1 Les théories perturbatives	3
1.2.2 Les théories non-perturbatives	5
1.3 Plan	6
2 La méthode du tracé de rayon	9
2.1 Le problème du billard classique	9
2.1.1 Présentation du problème	9
2.1.2 Pourquoi calculer les orbites ?	9
2.1.3 Résultats pour le billard circulaire et le stade	12
2.2 Les modes de gravité bidimensionnels	13
2.2.1 Quelques propriétés générales	13
2.2.2 Notion de problème hyperbolique mal posé	15
2.2.3 Modes de gravité dans un bassin parabolique bidimensionnel	17
3 Un premier modèle Boussinesq	27
3.1 Description de l'état d'équilibre	27
3.2 Les équations pour les oscillations	28
3.3 La force de Coriolis comme force de rappel	30
3.4 Propriétés mathématiques de l'opérateur gouvernant les oscillations	32
3.4.1 Rappel sur les modes de gravité	33
3.4.2 Cas avec rotation	34
3.5 Calcul des orbites de caractéristiques	36
3.5.1 La méthode numérique	36
3.5.2 Résultats: orbites ergodiques, attracteurs et orbites piégées	39
3.6 Calcul des modes propres avec diffusion	42
3.6.1 Formulation du problème aux valeurs propres généralisé	43
3.6.2 La grille de collocation de Gauss-Lobatto	45
3.6.3 Optimisation de la taille mémoire du problème itératif	48
3.6.4 Résultats	50

Publication 1 :	<i>Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell</i> , Dintrans, Rieutord & Valdetaro, 1999, <i>J. Fluid Mech.</i> , 398	57
4	Un second modèle anélastique	85
4.1	Présentation de l'approximation anélastique	85
4.1.1	Une approche qualitative	85
4.1.2	Un exemple avec l'étoile homogène	86
4.1.3	Les équations anélastiques avec rotation	91
4.2	Le modèle d'étoile à l'équilibre	93
4.2.1	Choix du code de calcul pour la structure interne	93
4.2.2	La projection des profils sur la grille de Gauss-Lobatto	94
4.2.3	Nécessité d'une grille radiale multi-domaine	97
Publication 2 :	<i>Oscillations of a rotating star: a non-perturbative theory</i> , Dintrans & Rieutord, 2000, <i>Astron. & Astrophys.</i> , 354	99
5	Conclusions et perspectives	113
	Annexes	115
A	La théorie WKB	115
A.1	Une application idéale à un problème de Sturm-Liouville	115
A.2	Un problème de Sturm-Liouville modifié	117
B	Equations aux dérivées partielles du second ordre	119
B.1	Définition du type	119
B.2	Equation des caractéristiques	119
B.3	Utilisation des caractéristiques	121
C	L'interface graphique IDL pour le calcul des orbites	125
D	Alice au Pays des Harmoniques Sphériques	129
D.1	Définition et expressions pour $\ell = 0, 1, 2$	129
D.2	Quelques propriétés	130
D.3	Développements sur les Y_ℓ^m et opérateurs associés	130
D.4	Projections de la force de Coriolis et du tenseur des contraintes	132
E	Les méthodes itératives	135
E.1	Problématique	135
E.2	Principe de la méthode de la puissance	136

Liste des figures

1.1	2
1.2	3
1.3	5
2.1	10
2.2	12
2.3	13
2.4	16
2.5	18
2.6	20
2.7	21
2.8	22
2.9	23
2.10	24
2.11	25
2.12	26
3.1	31
3.2	35
3.3	39
3.4	41
3.5	51
3.6	54
3.7	56
4.1	89
4.2	94
4.3	95
4.4	96
4.5	98
A.1	116
A.2	117
B.1	121
C.1	126

E.1 137

Chapter 1

Introduction à la dynamique des étoiles en rotation

Nous présentons dans cette introduction quelques-uns des principaux effets de la rotation sur la dynamique de l'étoile, en insistant tout particulièrement sur son influence au niveau des oscillations stellaires qui constitue le sujet de cette thèse.

1.1 Les effets de la rotation sur la structure interne

La rotation modifie la structure de l'étoile *via* principalement les quatre effets suivants (*e.g.* Endal & Sofia, 1976):

- les forces centrifuges diminuent la gravité effective en tout point de l'étoile qui n'est pas situé sur l'axe de rotation. En conséquence, l'équation de l'équilibre hydrostatique devient

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \Phi + \Omega^2 s \vec{e}_s$$

où ρ est la densité, P la pression, Φ le potentiel gravitationnel, Ω le taux de rotation et s la distance à l'axe de rotation.

- comme la force centrifuge n'est pas, en général, parallèle à la force de gravité, les surfaces équipotentielles perdent leur symétrie sphérique.
- le flux radiatif variant avec la gravité effective locale, celui-ci n'est plus constant sur les surfaces équipotentielles. C'est le fameux théorème de von Zeipel (1924) qui stipule qu'une étoile en rotation ne peut être en équilibre thermique. Ce déséquilibre thermique donne naissance à des mouvements méridiens de matière à grande échelle dans la zone radiative de l'étoile; c'est la circulation méridienne dite "d'Eddington-Sweet", en hommage à Eddington (1925) qui fut le premier à en suspecter l'existence et à Sweet (1950) qui en fournit la première description précise en donnant notamment une estimation de son temps caractéristique; *i.e.*

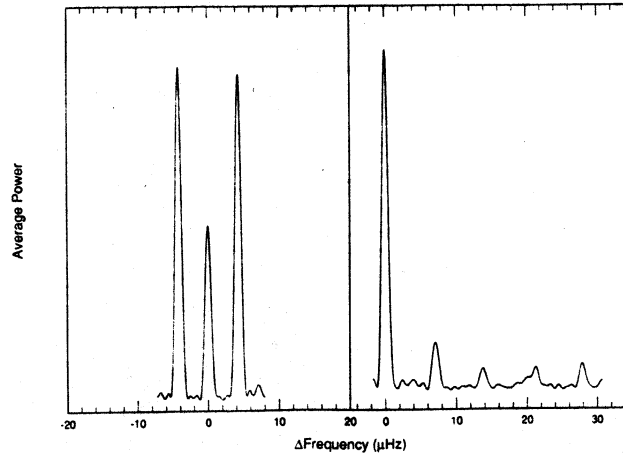


Figure 1.1: Levée de la dégénérescence en m due à la rotation pour les modes de gravité de la naine blanche PG 1159-035. Les trois pics à gauche correspondent à $m = 0, m = \pm 1$ pour un mode de degré $\ell = 1$ tandis que les cinq pics de droite correspondent à $m = 0, m = \pm 1$ et $m = \pm 2$ pour un mode de degré $\ell = 2$. Tiré de Winget *et al.* (1991).

$$T_{circul} = T_{KH} \left(\frac{\Omega^2 R^3}{GM} \right)^{-1}, \quad T_{KH} = \frac{GM^2}{LR}$$

où T_{KH} correspond au temps de Kelvin-Helmholtz (*e.g.* Zahn, 1993, p.598). Cette circulation a d'importantes conséquences: (i) sur le transport de moment angulaire du cœur vers la surface de l'étoile où il est évacué *via* le vent stellaire¹; (ii) sur les processus de mélange des éléments chimiques car, du fait précisément de ce transport de moment angulaire, une rotation différentielle s'installe et de la forte turbulence, synonyme elle aussi de transport efficace, apparaît².

Ces différents effets ont été intensément étudiés et confirmés *via* la résolution numérique des équations de la structure interne avec rotation; on pourra, par exemple, se reporter à la série suivante d'articles récents traitant ces différents points Maeder (1997), Meynet & Maeder (1997), Maeder & Zahn (1998) et Maeder (1999).

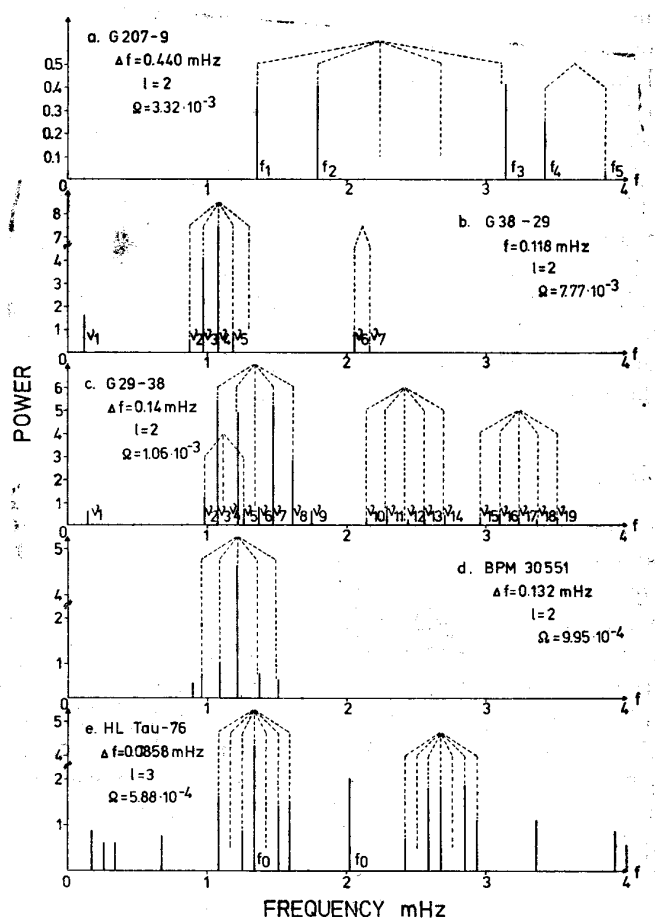


Figure 1.2: Identique à la figure 1.1 pour des modes de gravité de degré $\ell = 2$ ou $\ell = 3$ correspondant aux cinq naines blanches variables suivantes: G 207-9 (Robinson & McGraw, 1976), G 38-29 et G 29-38 (McGraw & Robinson, 1975), BPM 30551 (McGraw, 1977) et HL Tau-76 (Fitch, 1973). Tiré de Chlebowski (1978).

1.2 Les effets de la rotation sur les oscillations stellaires

1.2.1 Les théories perturbatives

Alors que l'influence de la rotation sur la structure interne de l'étoile a été étudiée dès les années 1920, il a fallu attendre encore une trentaine d'années pour voir apparaître les premiers travaux concernant ses effets sur les oscillations stellaires (Ledoux, 1945; Cowling

¹C'est d'ailleurs cette perte *inévitabile* de moment angulaire due au vent à la surface qui contrôle la vigueur de la circulation méridienne, et non simplement le taux de rotation comme nous pourrions de prime abord le supposer (Zahn, 1992).

²On observe en effet qu'une étoile double synchronisée avec son compagnon (*i.e.* une étoile dont la perte de moment angulaire par vent est *nécessairement* infime du fait de la contrainte orbitale de synchronisation) a une abondance en lithium supérieure à celle d'une étoile identique mais isolée et pour laquelle la perte de moment est beaucoup plus importante (Zahn, 1994).

& Newing, 1949; Ledoux, 1951). Ces travaux reposent en fait sur une théorie perturbative à l'ordre $\mathcal{O}(\Omega)$ de la rotation et conduisent tout trois à l'expression suivante pour la fréquence du mode d'oscillation dans le repère en co-rotation:

$$\sigma_{n\ell m} = \sigma_{n\ell}^{(0)} + C_{n\ell m}^I \Omega, \quad C_{n\ell m}^I = m \frac{\int_0^R \rho (2\xi_r \xi_h + \xi_h^2) r^2 dr}{\int_0^R \rho [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_h^2] r^2 dr}$$

où $\sigma_{n\ell}^{(0)}$ correspond à la fréquence du mode sans rotation de degré ℓ et d'ordre radial n ; m est le nombre azimutal tel que $-\ell \leq m \leq +\ell$ et (ξ_r, ξ_h) sont les composantes respectivement radiale et horizontale du déplacement lagrangien. Pour un mode de gravité d'ordre n élevé, on a $\xi_h \gg \xi_r$ soit

$$\sigma_{n\ell m} \simeq \sigma_{n\ell}^{(0)} + \frac{m}{\ell(\ell+1)} \Omega \Rightarrow \left| \sigma_{n\ell m} - \sigma_{n\ell}^{(0)} \right| = \frac{|m|}{\ell(\ell+1)} \Omega$$

et on obtient alors $(2\ell+1)$ nouvelles fréquences régulièrement espacées autour de $\sigma_{n\ell}^{(0)}$. Les figures 1.1 et 1.2 illustrent ce phénomène³ dans le cas des modes de gravité de naines blanches variables *en rotation lente* (PG 1159-035 sur la figure 1.1, G 207-9, G 38-29, G 29-38, BPM 30551 et HL Tau-76 sur la figure 1.2). On voit clairement apparaître des structures fines dans les spectres en fréquence correspondant à la levée de dégénérescence en m de modes de degré $\ell = 1$, $\ell = 2$ ou $\ell = 3$.

Dans le cas d'étoiles variables en rotation plus rapide que celle des naines blanches précédentes, les structures fines observées dans le spectre ne peuvent plus être reproduites par de simples décalages rotationnels à l'ordre $\mathcal{O}(\Omega)$; *i.e.* $|\Delta\sigma| \neq |m|\Omega/\ell(\ell+1)$. Dès lors, nous devons au minimum inclure l'ordre $\mathcal{O}(\Omega^2)$ dans le développement perturbatif de la fréquence du mode et on a:

$$\sigma_{n\ell m} = \sigma_{n\ell}^{(0)} + C_{n\ell m}^I \Omega + C_{n\ell m}^{II} \Omega^2$$

Trouver l'expression analytique du coefficient de second ordre $C_{n\ell m}^{II}$ n'est pas simple. En effet, $C_{n\ell m}^I$ est facilement calculable puisque, d'après la théorie perturbative d'un opérateur hermitique, il correspond simplement à la valeur moyenne de l'opérateur de perturbation sur les fonctions propres *non-perturbées* $\vec{\xi}^{(0)}$. De la même manière, une partie de la correction à l'ordre $\mathcal{O}(\Omega^2)$ fait intervenir ces $\vec{\xi}^{(0)}$ mais une contribution supplémentaire due aux états perturbés $\vec{\xi}^{(1)}$ (*i.e.* les états au premier ordre en rotation) apparaît. C'est cette correction qui est précisément délicate à calculer car ces $\vec{\xi}^{(1)}$, qui correspondent à des combinaisons linéaires des $\vec{\xi}^{(0)}$, conduisent à des intégrales de couplage complexes. Les trois approches théoriques suivantes ont été développées pour trouver $C_{n\ell m}^{II}$:

- la première, qui est *a priori* la plus compliquée, consiste à construire explicitement ces intégrales puis à en prendre la limite asymptotique correspondant à des modes

³On note l'analogie profonde avec l'effet Zeeman observé en mécanique quantique où l'action d'un champ magnétique lève la dégénérescence en m_J des niveaux d'énergie d'un atome à J fixé; *i.e.* un niveau E_J donne naissance à $(2m_J+1)$ nouveaux niveaux correspondant à $-J \leq m_J \leq +J$, J étant le moment cinétique total de l'atome et m_J est associé à sa projection sur l'axe de rotation (*e.g.* Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973, p.839).

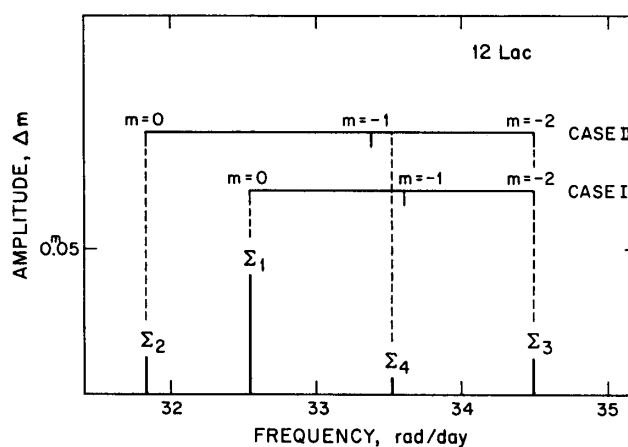


Figure 1.3: Identification des modes d'oscillations de l'étoile variable (du type β Cephei) 12 Lacertae (observations provenant de Jerzykiewicz, 1978). Du fait d'une rotation rapide, les décalages rotationnels ne sont plus simplement équidistants et la correction $\mathcal{O}(\Omega^2)$ doit être prise en compte. Le cas I est une étude de Smith (1980) et le cas II est de Saio (1981) d'où vient cette figure.

d'oscillations d'ordre n élevés. Ainsi, on ne calcule pas *stricto-sensu* ces intégrales; la contrepartie étant qu'on obtient uniquement la correction de second-ordre valable dans la limite $n \rightarrow +\infty$ (Chlebowski, 1978).

- la seconde possibilité, proposée à l'origine par Hansen *et al.* (1978), est de résoudre numériquement les équations pour $\vec{\xi}^{(1)}$. Dès lors, on évite les développements en série sur les $\vec{\xi}^{(0)}$ mais on n'obtient pas d'expression analytique pour C_{nlm}^{II} . Saio (1981) et Engelbrecht (1986) ont utilisé cette méthode pour étudier les variables en rotation rapide du type β Cephei (*cf.* Fig. 1.3).
- la dernière solution, qui est sans aucun doute la plus facile à mettre en œuvre, consiste à partir des équations avec rotation valables *dans la limite asymptotique* $n \rightarrow +\infty$. On travaille alors directement sur des fonctions propres asymptotiques et on aboutit, *via* l'application d'une condition de quantification de la phase, à une expression pour C_{nlm}^{II} . C'est par cette méthode que Dziembowski & Goode (1992) ont proposé une démonstration (trop ?) simple du coefficient de second-ordre qu'Aerts & Krisciunas (1996) ont utilisé par la suite pour identifier les modes d'oscillations de l'étoile variable en rotation rapide 9 Aurigae (qui est du type γ -Doradus). On doit toutefois noter que cette expression ne correspond pas au coefficient (lui-aussi calculé dans la limite asymptotique) trouvé par Chlebowski (1978). Nous proposons, dans une annexe de notre second article (Dintrans & Rieutord, 2000), une démonstration du coefficient C_{nlm}^{II} basée sur une théorie WKB appliquée au système d'équations de Berthomieu *et al.* (1978) valable pour des modes de gravité d'ordres élevés. Nous retrouvons alors bien le coefficient de Chlebowski (avec une petite correction) mais non celui de Dziembowski & Goode.

1.2.2 Les théories non-perturbatives

Devant l'augmentation continue de la puissance des super-calculateurs, il est désormais possible de calculer directement les fréquences d'oscillations d'une étoile en prenant en compte un (voire plusieurs) terme de rotation dans les équations de la dynamique. La principale difficulté numérique vient du fait que les modes ayant des degrés ℓ différents sont à présent couplés à cause de la force de Coriolis. On obtient ainsi un système infini d'équations différentielles fortement couplées numériquement difficile à résoudre.

Clément, dans une série de cinq articles couvrant une vingtaine d'années, a utilisé cette approche non-perturbative pour trouver les modes propres d'étoiles en rotation rapide (Clement, 1981, 1984, 1986, 1989, 1998). Incluant la force de Coriolis dans les équations pour les oscillations, il a calculé (*via* des méthodes numériques classiques de "shooting" ou de relaxation) les fréquences d'oscillations d'étoiles polytropiques ou de modèles stellaires plus compliqués en rotation. De la même manière, Lee & Saio (1987) et Lee & Baraffe (1995) ont calculé les modes propres d'une étoile en rotation rapide, de masse respectivement égale à $5M_{\odot}$ et $10M_{\odot}$, et située sur la séquence principale. Cependant, ces études numériques n'ont été réalisées qu'avec au mieux une dizaine d'harmoniques sphériques pour Clément et seulement deux harmoniques sphériques pour Lee et al. !

Une autre stratégie, adoptée par exemple par Berthomieu *et al.* (1978), consiste à étudier les modes de gravité d'ordre radial n élevé (*i.e.* des modes à très basses fréquences) se propageant dans une étoile en rotation rapide. Dans ce cas, la variation de la fluctuation eulérienne de densité peut être négligée dans l'équation de conservation de la masse (cela revient en fait à appliquer l'approximation anélastique; *cf.* Dintrans & Rieutord, 2000) et on aboutit à un système restreint d'équations différentielles couplées pour ξ_r, ξ_h et P' . En utilisant alors une formulation matricielle, ces auteurs sont arrivés à un simple problème aux valeurs propres généralisé qu'ils ont résolu soit analytiquement *via* la méthode dite "d'Olver", soit numériquement en calculant directement les valeurs et vecteurs propres.

1.3 Plan

Cette thèse présente une modélisation des oscillations d'étoiles en rotation rapide. Devant la difficulté numérique inhérente à l'introduction de la rotation dans la dynamique, nous avons développé une nouvelle approche originale pour appréhender les propriétés d'un fluide en rotation. La méthode consiste à calculer les trajectoires des caractéristiques de l'opérateur mixte gouvernant les oscillations. La forme de l'orbite finale est alors d'une importance capitale pour notre problème; en particulier, l'apparition d'attracteurs pour les caractéristiques conduit à des solutions singulières qui désorganisent complètement le spectre d'oscillation, rendant par la même l'identification des modes problématique.

Nous commencerons donc par exposer au second chapitre la méthode du tracé de rayon *via* l'étude des deux exemples suivants: (*i*) le problème d'une particule se déplaçant librement à l'intérieur d'un billard; (*ii*) le problème des modes de gravité bidimensionnels se propageant dans un bassin parabolique uniformément stratifié. Nous verrons que l'étude des trajectoires de la particule pour le billard et des caractéristiques pour les modes de gravité permet d'obtenir de précieuses informations concernant notamment la forme des modes propres.

Le troisième chapitre est consacré à notre premier modèle Boussinesq d'un fluide stratifié en rotation rapide et confiné dans une couche sphérique ou une sphère pleine. Nous dériverons dans un premier temps les équations pour les oscillations dans le repère en corotation en incluant la force de Coriolis. Nous négligerons ce faisant l'autre grande force liée à la rotation qu'est la force centrifuge. Celle-ci n'agit en fait que de manière indirecte sur les ondes qui se propagent dans le fluide puisqu'elle modifie la structure d'équilibre, c'est-à-dire la géométrie du conteneur, et génère un écoulement dû à la baroclinicité de la configuration. Nous négligerons dans cette thèse cet effet et nous intéresserons plutôt aux effets dominants dûs à la force de Coriolis. Nous appliquerons alors la fameuse méthode du tracé de rayons à notre problème (*i.e.* nous calculerons les trajectoires des caractéristiques) et montrerons qu'il existe trois types d'orbites. En calculant les modes propres avec diffusion, nous découvrirons alors le lien fascinant qui existe entre l'orbite de caractéristiques et la structure du mode propre associé. Nous en déduirons d'importantes conséquences pour le spectre d'oscillation avec ou sans diffusion (*cf.* Dintrans *et al.*, 1999).

Le quatrième chapitre porte sur une application de ce travail au cas d'une étoile ZAMS de $1.5M_{\odot}$ en rotation rapide dont les propriétés sont proches de celle d'une variable du type γ -Doradus. Développant un second modèle anélastique, nous montrerons premièrement qu'un simple développement perturbatif à l'ordre $\mathcal{O}(\Omega^2)$ échoue dès que la rotation devient inférieure à environ trois jours. Abandonnant alors cette approche perturbative, nous calculerons les orbites de caractéristiques et obtiendrons les mêmes liens que précédemment entre le type de l'orbite et la forme du mode propre correspondant. Les conclusions sur le spectre avec ou sans diffusion seront ainsi identiques à celles obtenues dans le cadre de notre premier modèle Boussinesq (*cf.* Dintrans & Rieutord, 2000).

En annexe se trouvent les descriptions des méthodes mathématiques et numériques que nous avons utilisées tout au long de nos recherches, avec notamment une présentation de l'interface graphique IDL mise au point pour calculer les orbites de caractéristiques.

Chapter 2

La méthode du tracé de rayon

Dans ce chapitre, nous présenterons deux exemples d'application de la méthode du tracé de rayon: le premier exemple concerne l'étude des billards en mécanique classique; le second exemple est directement tiré de l'océanographie puisqu'il s'agit d'une étude des modes de gravité à deux dimensions se propageant dans un bassin parabolique uniformément stratifié.

2.1 Le problème du billard classique

2.1.1 Présentation du problème

Le système physique se compose d'une particule se déplaçant librement dans un plan limité par une courbe fermée. Sa trajectoire consiste en une succession de réflexions sur les bords, celles-ci étant supposées spéculaires¹ et élastiques (*i.e.* l'énergie de la particule, et par conséquent sa vitesse, restent constantes). Entre deux impacts, la particule évolue en ligne droite et sa trajectoire est décrite par la série des positions et directions successives de chaque impact. Pour cela, chaque réflexion est repérée par son abscisse curviligne s sur le bord et l'angle α par rapport à la tangente locale (*cf.* Fig. 2.1gauche). L'espace des phases associé est donc de dimension deux et on choisit comme variables canoniques le couple (s, p) où $p = \cos \alpha$ représente l'impulsion tangente.

2.1.2 Pourquoi calculer les orbites ?

Un diagnostic sur l'intégrabilité

L'étude des trajectoires dans l'espace des phases revient à calculer l'orbite de la particule. Cette étude est de première importance car le diagnostic sur l'intégrabilité ou non du système dépend justement de la forme de ces trajectoires. Hénon & Heiles (1964) ont ainsi recherché une éventuelle troisième intégrale du mouvement pour le problème à trois corps en regardant la forme des trajectoires obtenues dans l'espace des phases. Dans notre cas, si l'on obtient une courbe invariante refermée sur elle-même (*i.e.* la particule décrit une orbite strictement périodique), le système est intégrable. A l'inverse, si l'espace des phases se remplit de manière ergodique (*i.e.* l'orbite de la particule est chaotique), le système

¹L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, ces deux angles étant pris par rapport à la normale locale au bord.

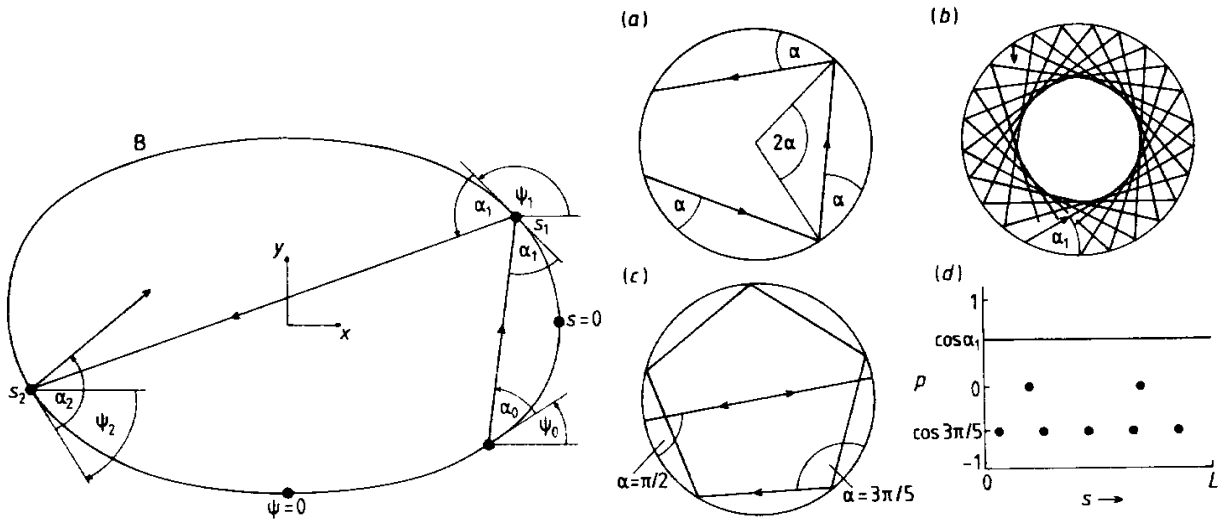


Figure 2.1: Géométrie du billard classique avec la définition des coordonnées s et α (gauche). Le billard circulaire avec les deux types d'orbites observées (droite): ergodique (b) et strictement périodique (c). L'espace des phases associé (d) montre clairement que ce billard est intégrable. Tiré de Berry (1981).

est non-intégrable et son évolution sera chaotique. Evidemment, le cas d'un chaos faible pour lequel l'espace des phases serait constitué à la fois de courbes fermées et de régions ergodiques est envisageable. On a donc le schéma suivant:

calcul de l'orbite \rightarrow "remplissage" de $(s, p) \rightarrow$ intégrabilité ou non-intégrabilité ?

Passage aux billards quasi-classiques: Bohr-Sommerfeld ou formule de la trace ?

La recherche de l'intégrabilité d'un système classique (*i.e.* la recherche de courbes invariantes dans l'espace des phases) est un passage obligé si l'on veut par la suite quantifier ce système. Soit par exemple la question suivante: quelles sont, pour un billard pris dans la limite quasi-classique, les états d'énergie E_n et les fonctions d'onde associées Ψ_n solutions de l'équation de Schrödinger $\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$? On rappelle que la limite quasi-classique d'un système quantique correspond au cas où les longueurs d'onde λ de De Broglie des particules du système deviennent très petites devant la dimension caractéristique L déterminant les conditions du problème concret²; *i.e.* on a

$$\lambda = 2\pi \frac{\hbar}{p} \ll L \quad (2.1)$$

où p est l'impulsion de la particule et $\hbar = h/2\pi$, h étant la constante de Planck. Si l'on suppose que la fonction d'onde associée à la particule possède n nœuds (où n est un nombre

²De la même manière, l'optique géométrique est la limite de l'optique ondulatoire lorsque la longueur d'onde tend vers zéro.

quantique), alors $\lambda \sim \mathcal{O}(1/n)$ et la limite quasi-classique s'applique aux fonctions d'onde ayant beaucoup de nœuds. Dans notre cas, la fonction d'onde d'un billard quasi-classique a la forme suivante (Landau & Lifchitz, 1988, p.32):

$$\Psi = \mathcal{A} \exp \frac{i}{\hbar} S \quad \text{avec} \quad S = \int_{s'}^s p ds \quad (2.2)$$

où S représente l'action mécanique de la particule et \mathcal{A} une fonction d'amplitude, ces deux fonctions étant supposées varier lentement. Dire que l'on prend la limite quasi-classique revient à dire que la phase S/\hbar varie rapidement, soit $\hbar \rightarrow 0$. Compte tenu de la définition de λ (*i.e.* $\lambda = 2\pi\hbar/p$), ceci correspond bien à une longueur d'onde de De Broglie tendant vers zéro ³.

Nous cherchons donc à obtenir les niveaux d'énergie E_n , et accessoirement les fonctions d'onde associées Ψ_n , du billard quasi-classique. Deux cas sont alors possibles:

- si le billard classique est *intégrable*, on peut montrer (*via* un développement de S en puissance de \hbar/i) que l'action vérifie la relation de quantification de Bohr-Sommerfeld suivante (voir *e.g.* Landau & Lifchitz, 1988, p.201):

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint p_n ds = n + \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow +\infty \quad (2.3)$$

où l'intégrale se calcule sur chaque orbite classique qui est périodique dans l'espace des phases (s, p) . L'impulsion p_n pouvant être facilement reliée à E_n , on obtient ainsi directement les niveaux d'énergie quantifiés cherchés.

- si le billard classique est *non-intégrable* (*i.e.* chaotique), la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld ne s'applique plus et nous devons utiliser la formule de la trace suivante due à Gutzwiller (Gutzwiller, 1990, p.294):

$$\sum_n \delta(E - E_n) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{o.p.} C_{o.p.} \exp \frac{i}{\hbar} S_{o.p.} \quad (2.4)$$

où le symbole *o.p.* signifie "orbite périodique", $S_{o.p.} = \oint p ds$ est l'action associée à chacune de ces orbites et $C_{o.p.}$ correspond à un coefficient de stabilité de la trajectoire. Alors qu'une seule orbite périodique intervenait dans le calcul d'un niveau d'énergie E_n pour un système classique intégrable, le cas non-intégrable est plus complexe: pour chaque niveau E_n , la sommation dans le membre de droite fait intervenir toutes les orbites classiques qui sont périodiques dans l'espace des phases (s, p) !

Nous voyons donc que le calcul des orbites classiques par la méthode du tracé de rayon se justifie pleinement lorsque l'on veut étudier le système quasi-classique correspondant: (i) il permet de conclure sur l'intégrabilité ou non du système classique et donc de choisir entre la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld ou la formule de la trace de Gutzwiller intervenant dans le calcul des niveaux d'énergie E_n ; (ii) il permet de trouver toutes les

³On note, d'après la forme de Ψ , que la limite quasi-classique n'est rien d'autre qu'une approximation WKB des fonctions d'onde ayant un nombre quantique n de nœuds élevé (*cf.* annexe A).

orbites classiques périodiques qui jouent un rôle de premier plan aussi bien dans le cas intégrable que dans le cas non-intégrable.

2.1.3 Résultats pour le billard circulaire et le stade

Berry (1981) a calculé les orbites pour différentes formes de billards: le billard circulaire, elliptique, en ovale et finalement le billard en forme de stade (ou stade de Bunimovitch). Pour chaque configuration, il a calculé les orbites pour différentes valeurs de l'énergie et en a déduit les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases. Les figures 2.1(droite) et 2.2 illustrent les résultats obtenus respectivement pour le billard circulaire et le stade de Bunimovitch:

- le billard circulaire est *intégrable*. Si l'angle α est tel que $\alpha = \pi m/q$ avec m, q nombres premiers entiers (soit α est une fraction rationnelle de π), l'orbite est strictement périodique et se résume à une série de points invariants dans le plan (s, p) (cas c sur la Fig. 2.1droite). Si α est un irrationnel multiple de π , l'orbite de la particule est ergodique conduisant à une ligne invariante parallèle à l'axe s dans le plan (s, p) (cas b sur la Fig. 2.1droite). Dès lors, le calcul des niveaux d'énergie quantifiés du billard circulaire quasi-classique se fera à partir de la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld (2.3).
- le stade de Bunimovitch, qui est une déformation du billard circulaire, est ergodique et *non-intégrable*. Les orbites de la particule sont majoritairement chaotiques et remplissent la totalité du plan (s, p) (cas d sur la Fig. 2.2). Nous appliquerons alors la formule de la trace de Gutzwiller (2.4) pour trouver les niveaux E_n dans la limite quasi-classique.

Le problème du billard classique nous fournit donc un premier exemple d'application de la méthode du tracé de rayon: le diagnostic sur l'intégrabilité du système classique découle de l'étude des orbites dans l'espace des phases obtenues par itération des réflexions successives de la particule; le passage à la limite quasi-classique repose sur les orbites périodiques intervenant dans la relation de Bohr-Sommerfeld ou la formule de la trace de Gutzwiller. Nous allons maintenant présenter un second exemple d'application de cette méthode au problème de la propagation de modes de gravité bidimensionnels dans un domaine borné.

2.2 Les modes de gravité bidimensionnels

2.2.1 Quelques propriétés générales

Nous allons étudier les ondes de gravité à deux dimensions se propageant dans un fluide incompressible uniformément stratifié. Dans l'approximation Boussinesq, le système d'équations linéarisées gouvernant les oscillations est le suivant (*e.g.* Turner, 1973, p.22):

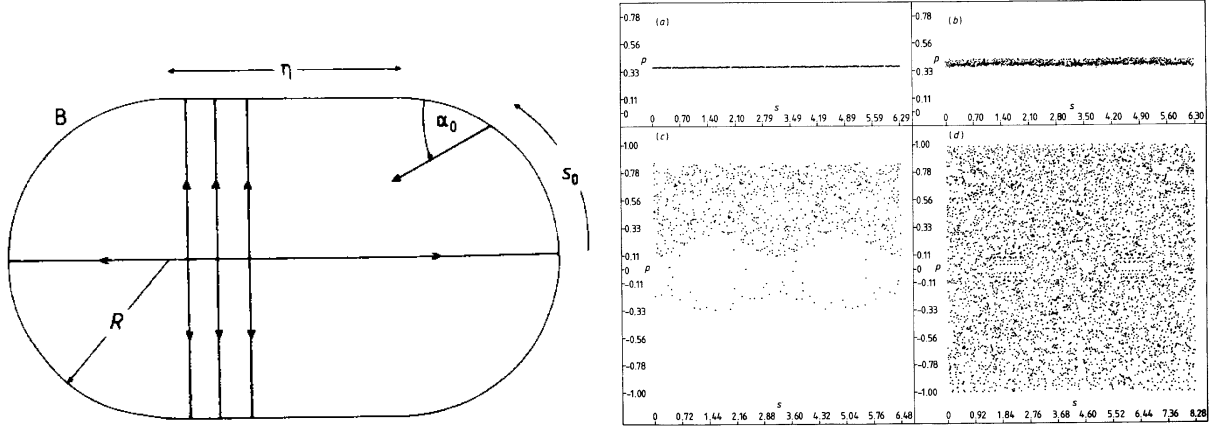


Figure 2.2: Le stade de Bunimovitch (gauche). Espace des phases associé pour différents η (droite): (a) $\eta = 0.001$, (b) $\eta = 0.01$, (c) $\eta = 0.1$ et (d) $\eta = 1$. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du billard circulaire (*i.e.* qu'on augmente η), des orbites chaotiques apparaissent et le plan (s, p) se remplit de points répartis ergodiquement: le stade est un billard ergodique non-intégrable. Tiré de Berry (1981).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} + g' &= 0, \\ \frac{\partial g'}{\partial t} - N^2(z)w &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

où (u, w) sont les composantes de la perturbation de vitesse selon (x, z) , P' la fluctuation eulérienne de pression, $\rho(z)$ le champ de densité à l'équilibre, $g' = g\rho'/\rho$ avec ρ' fluctuation eulérienne de densité et N la fréquence de Brunt-Väisälä supposée constante et telle que

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (2.6)$$

Eliminant la pression P' , g' et la composante u , on obtient l'équation vérifiée par w seulement:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

Nous cherchons des solutions du type ondes planes monochromatiques de la forme $w(x, z, t) = \mathcal{A} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ où $\vec{k} = (k_x, k_z)$ est le vecteur d'onde, ω la fréquence angulaire (appelée

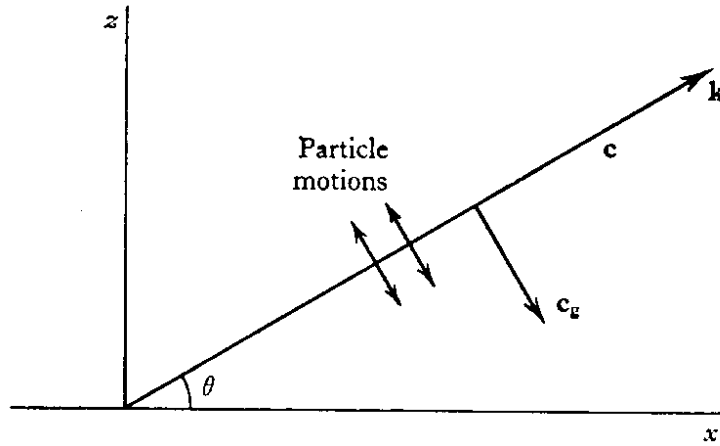


Figure 2.3: Vecteur d'onde \vec{k} , vitesse de phase \vec{c} et vitesse de groupe \vec{c}_g pour une onde de gravité plane à deux dimensions. Tiré de Turner (1973).

aussi pulsation de l'onde; par la suite, l'usage fait que nous la désignerons simplement par fréquence de l'onde) et \mathcal{A} une amplitude constante. L'équation (2.7) conduit alors à la relation de dispersion suivante:

$$\omega = N \left(\frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2} \right)^{1/2} = N \cos \theta \quad (2.8)$$

où θ est l'angle entre l'horizontale et \vec{k} (cf. Fig. 2.3). Le spectre des modes de gravité est donc borné par N ; *i.e.* on aura toujours $\omega < N$ (le cas $\omega = N$ pour $\theta = 0$ étant impossible car la vitesse de groupe de l'onde serait nulle; cf. ci-dessous). De plus, nous retrouvons que les ondes de gravité sont dispersives puisque la vitesse de phase $c = \omega/k = (N/k) \cos \theta$ dépend de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. La vitesse de groupe \vec{c}_g , qui donne la direction de propagation de l'énergie, est quant à elle donnée par:

$$\vec{c}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}; \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right) = \frac{N}{k} (\sin^2 \theta; -\sin \theta \cos \theta) \quad (2.9)$$

soit

$$\vec{c}_g \cdot \vec{k} = \frac{N}{k} \begin{vmatrix} \sin^2 \theta & \\ & \\ -\sin \theta \cos \theta & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k \cos \theta \\ \\ k \sin \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

L'énergie se propage perpendiculairement à la phase le long de rayons faisant un angle $\alpha = \pi/2 - \theta = \sin^{-1}(\omega/N)$ avec l'horizontale.

Pour une onde se propageant dans un domaine borné, une solution du type onde plane s'avère impossible et on devra résoudre l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{N^2 - \omega^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

où on a posé $w(x, z, t) = w(x, z) \exp i\omega t$. Cette équation linéaire aux dérivées partielles est du type hyperbolique car on a (*cf.* annexe B)

$$\Delta = 4 \frac{\omega^2}{N^2 - \omega^2} > 0 \quad \text{puisque} \quad \omega < N \quad (2.12)$$

et on en déduit l'équation différentielle vérifiée par les deux familles de caractéristiques réelles (*cf.* équation B.8):

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\omega}{(N^2 - \omega^2)^{1/2}} = \pm \frac{1}{[(N/\omega)^2 - 1]^{1/2}} \quad (2.13)$$

Or, nous avons vu que l'énergie de l'onde se propageait localement le long de rayons faisant un angle α (tel que $\sin \alpha = \omega/N$) avec l'horizontale. Si l'on se place sur un de ces rayons, cet angle est aussi donné par:

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{[(N/\omega)^2 - 1]^{1/2}} \quad (2.14)$$

qui est exactement la même relation obtenue en se plaçant sur une caractéristique "ascendante" (*cf.* équation 2.13). La direction de propagation de l'énergie coïncide ainsi avec celle des caractéristiques qui sont, comme dans le cas des modes inertiels, des droites (si $N = cte$). Ceci illustre l'analogie profonde qui existe entre les modes de gravité se propageant dans un milieu uniformément stratifié et les modes inertiels (Rieutord & Noui, 1999).

2.2.2 Notion de problème hyperbolique mal posé

Habituellement, l'équation gouvernant la structure spatiale d'un mode propre est *elliptique*. Par exemple, les perturbations eulériennes de densité d'une onde acoustique se propageant dans un domaine borné vérifient l'équation linéaire aux dérivées partielles suivante (*e.g.* Rieutord, 1997, p.117):

$$\Delta \rho' - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta \rho' + \frac{\omega^2}{c_s^2} \rho' = 0 \quad \text{avec} \quad c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \quad (2.15)$$

où la dépendance temporelle des modes propres est de la forme $\exp i\omega t$ et c_s^2 est le carré de la vitesse du son dans le milieu. Comme le type d'une équation aux dérivées partielles ne dépend que de ses termes de plus haut degré (*cf.* annexe B), celle-ci a le même type que l'équation de Laplace; *i.e.* elle est *elliptique*.

A l'inverse, nous avons vu que les modes de gravité se propageant dans un domaine borné vérifient une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique (*cf.* équation 2.12). Le fait que cette équation soit du type hyperbolique et non du type elliptique ne poserait aucun problème mathématique si cette hyperbolicité était en *espace* et en *temps*. En effet, nous savons qu'un problème hyperbolique n'est mathématiquement bien posé que dans le cas d'un problème avec conditions initiales (*i.e.* du type Cauchy). Classiquement, l'équation de propagation unidimensionnel d'une onde est un problème hyperbolique bien posé: on se donne la forme de la solution ainsi que sa dérivée au temps $t = 0$ (*i.e.* $f(x, 0)$ et $f'(x, 0)$) et on laisse évoluer, sans contrainte supplémentaire, le système pour des temps $t > 0$ (voir l'exemple numérique en annexe B). Pour un problème qui est hyperbolique *spatialement*,

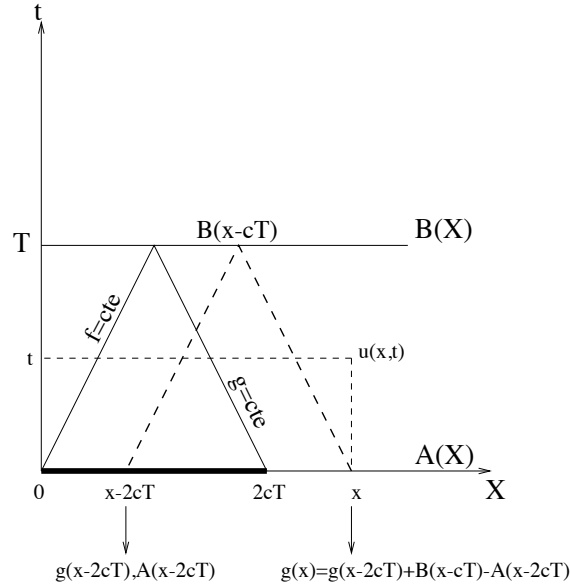


Figure 2.4: Illustration d'un problème hyperbolique mal posé: on impose à la solution $u(x, t)$ de l'équation d'onde (2.16) de vérifier deux conditions à des temps différents $t = 0$ et $t = T$. Du fait de la relation (2.20), il faut alors sur-déterminer $u(x, t)$ en se donnant la fonction $g(x)$ dans l'intervalle $[0, 2cT]$.

les conditions que doit satisfaire la solution ne sont plus des conditions initiales mais des conditions de bords. On peut, par exemple, imposer des conditions du type Dirichlet où l'on fixe les valeurs de la solution sur le contour $\partial\mathcal{D}$ délimitant le domaine (*e.g.* $f = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$). Un tel problème est mathématiquement mal posé car la forme des solutions (s'il y en a !) dépend étroitement de la géométrie du conteneur. Typiquement, des solutions singulières et/ou des spectres continus peuvent apparaître. Pour illustrer notre propos, nous allons prendre l'exemple suivant tiré de Rieutord (1997).

Nous partons de l'équation de propagation unidimensionnelle suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

Cette équation est hyperbolique en espace et en temps et admet des solutions générales de la forme

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2.17)$$

Classiquement, on impose les deux conditions initiales $u(x, 0) = h(x)$ et $\partial u / \partial t = 0$ pour $t = 0$ (ce sont ces deux conditions que nous avons prises dans l'annexe B) et on trouve finalement

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [h(x - ct) + h(x + ct)] \quad (2.18)$$

Maintenant, que se passe-t-il si nous demandons à $u(x, t)$ de satisfaire deux conditions prises à des temps différents $t = 0$ et $t = T$? Par exemple, nous imposons que

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = A(x) &= f(x) + g(x), \\ u(x, T) = B(x) &= f(x - cT) + g(x + cT). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

On peut alors montrer que la fonction g doit nécessairement vérifier la relation suivante:

$$\boxed{g(x) = g(x - 2cT) + B(x - cT) - A(x - 2cT)} \quad (2.20)$$

c'est-à-dire que $g(x)$ doit être préalablement connue dans l'intervalle $[0, 2cT]$. Se donner deux conditions limites ne suffit donc plus et il faut en quelque sorte sur-déterminer la solution ! Lorsqu'on étudie une équation hyperbolique dans un domaine borné, on rencontre exactement ce type de situation. Il faut se donner à l'avance une partie de la solution dans un ou plusieurs intervalles dits "fondamentaux" pour connaître la structure du mode propre dans tout le domaine. C'est ce que nous allons voir maintenant en nous penchant sur le cas des modes de gravité bidimensionnels confinés dans un bassin parabolique.

2.2.3 Modes de gravité dans un bassin parabolique bidimensionnel

Expression de la carte du bassin parabolique

Maas & Lam (1995) (noté par la suite ML95) ont étudié, dans l'approximation Boussinesq, les modes de gravité bidimensionnels basses fréquences se propageant dans un bassin uniformément stratifié de manière stable (avec $N^2 = -(g/\rho)d\rho/dz = cte$) dont la forme peut être parabolique, rectangulaire, semi-elliptique ou trapézoïdale. Du fait de leurs basses fréquences (*i.e.* $\omega = N \cos \theta \ll N$ soit $\theta \simeq \pi/2$), la phase (respectivement l'énergie) se propage quasiment à la verticale (respectivement l'horizontale). Exploitant la relation d'incompressibilité, on introduit la fonction de courant $\Phi(x, z, t)$ telle que

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.21)$$

et on aboutit à l'équation suivante pour la structure spatiale d'un mode propre de fréquence ω (on pose $\Phi(x, z, t) = \psi(x, z) \exp i\omega t$):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.22)$$

qui est identique à l'équation (2.11) pour des modes basses fréquences. Si l'on prend la demi-largeur L du bassin comme échelle de longueur pour x et $\omega L/N$ comme échelle de longueur pour z , on obtient l'équation adimensionnée suivante pour $\psi(x, z)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.23)$$

Cette équation est hyperbolique en espace dans tout le domaine et admet des solutions générales de la forme

$$\psi(x, z) = f(x - z) + g(x + z) \quad (2.24)$$

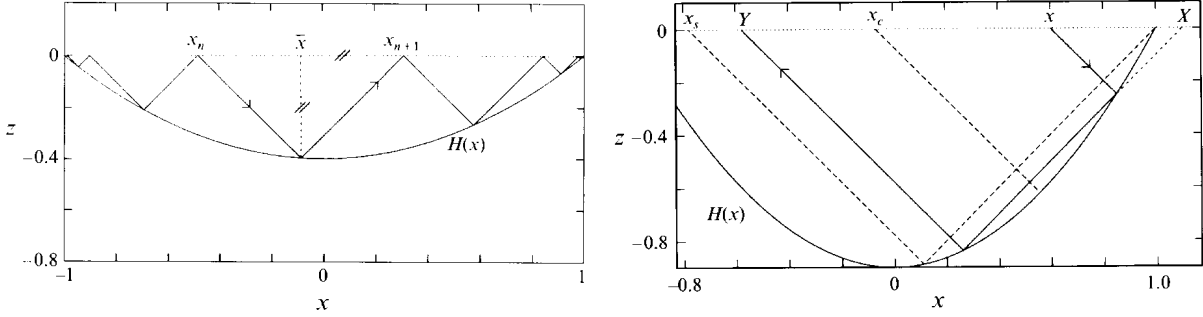


Figure 2.5: Géométrie d'un bassin parabolique sous-critique pour $\tau = 0.4 < 1/2$ (gauche) et super-critique pour $\tau = 0.9$ (droite), le fond étant donné par $z = -H(x) = -\tau(1 - x^2)$. Dans le cas sous-critique, les caractéristiques convergent toujours vers un des deux coins du bassin tandis qu'elles peuvent *a priori* se propager partout dans le cas super-critique. Les points x_s et x_c , correspondant à des réflexions particulières, sont respectivement donnés par $x_s = (2/\tau) - 3$ et $x_c = (3/4\tau) - \tau$. Tiré de ML95.

où $x \pm z = cte$ sont les caractéristiques. Les conditions du type Dirichlet sur le contour du domaine sont simples: on impose que $\psi(x, z) = 0$ à la surface et au fond du conteneur défini par $z = -H(x)$. La condition à la surface entraîne que

$$\psi(x, 0) = f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -g(x) = F(x) \quad (2.25)$$

soit

$$\boxed{\psi(x, z) = F(x - z) - F(x + z)} \quad (2.26)$$

tandis que la condition sur le fond du bassin donne

$$\psi[x, -H(x)] = 0 \Rightarrow \boxed{F[x + H(x)] = F[x - H(x)]} \quad (2.27)$$

On voit donc qu'une fois la topographie du bassin connue *via* la fonction $H(x)$, on est à même de construire la fonction $F(x)$ à partir de la relation (2.27). En fait, cette relation définit la "carte" du bassin puisqu'elle associe à chaque point $x_n = x - H(x)$ le point $x_{n+1} = x + H(x)$ tel que $F(x_{n+1}) = F(x_n)$. Comme F est constante sur les caractéristiques $x \pm z$, on peut en déduire la fonction de courant $\psi(x, z)$ dans tout le domaine moyennant l'utilisation de (2.26).

ML95 ont d'abord étudié le cas d'un bassin parabolique défini par $H(x) = \tau(1 - x^2)$ avec $\tau = (N/\omega)D/L$ où D est la profondeur du bassin⁴. Il y a deux types de bassins paraboliques: (i) les bassins sous-critiques avec $\tau < 1/2$ pour lesquels les caractéristiques

⁴Avec cette définition, on voit que τ correspond à la fois à la période adimensionnée de l'onde de gravité et à la profondeur maximale du bassin atteinte en $z = -\tau$.

convergent systématiquement vers un des deux coins (Fig. 2.5gauche); (ii) les bassins super-critiques avec $\tau > 1/2$ pour lesquels les caractéristiques peuvent *a priori* se propager dans tout le domaine (Fig. 2.5droite). En fait, ce sont les bassins super-critiques qui sont les plus intéressants car le sens de propagation des caractéristiques peut changer au cours des réflexions sur le fond conduisant à une carte à deux dimensions: une dimension x_n repère la position de la réflexion n à la surface et une dimension $s = \pm 1$ donne le sens de propagation des rayons vers la droite ($s = 1$) ou vers la gauche ($s = -1$). On arrive ainsi à la carte bidimensionnelle $T(x_n, s)$ suivante (cf. ML95):

$$T(x_n, s) = \begin{cases} (X(x_n), s) & \text{pour } s = +1 \text{ et } -1 \leq x_n \leq x_s \\ (Y(x_n), -s) & \text{pour } s = +1 \text{ et } x_s \leq x_n \leq 1 \\ (-X(-x_n), s) & \text{pour } s = -1 \text{ et } -x_s \leq x_n \leq 1 \\ (-Y(-x_n), -s) & \text{pour } s = -1 \text{ et } -1 \leq x_n \leq -x_s \end{cases} \quad (2.28)$$

avec

$$\begin{cases} X(x_n) = -x_n - \frac{1}{\tau} + \left(\frac{4x_n}{\tau} + 4 + \frac{1}{\tau^2} \right)^{1/2} \\ Y(x_n) = \frac{2}{\tau} - x_n - 2X(x_n) \\ x_s = \frac{2}{\tau} - 3 \end{cases}$$

Un exemple de carte pour $\tau = 0.7$ est donné par la figure 2.6 où les quatre branches définies par (2.28) apparaissent clairement.

L'analogie avec les billards

L'expression de la carte du bassin parabolique étant maintenant connue, nous pouvons appliquer, comme dans le problème du billard classique, la méthode du tracé de rayon. On peut en effet rapprocher le calcul de l'orbite de caractéristiques se propageant dans un bassin parabolique au calcul de la trajectoire d'une particule libre se déplaçant dans un billard classique dont la forme serait parabolique. Ce qui nous intéresse dans notre cas est de trouver la fonction de courant $\psi_n(x, z)$ associée à la fréquence ω_n . Notre billard peut donc être vu comme la limite quasi-classique d'un billard parabolique; *i.e.* on aurait les correspondances suivantes:

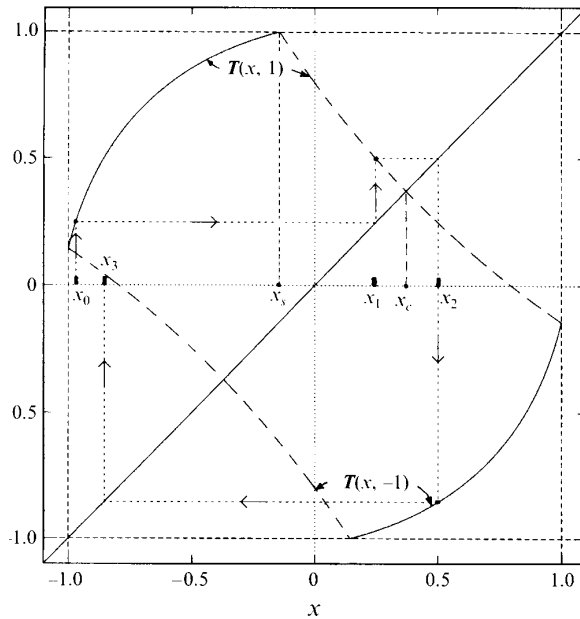


Figure 2.6: Carte $T(x_n, s)$ pour $\tau = 0.7$ avec un exemple d'itération à partir du point x_0 (*i.e.* la série x_0, x_1, x_2, x_3). Les courbes en trait plein indiquent que le sens de propagation s reste inchangé lors de la réflexion alors que celui-ci change sur les courbes en trait pointillé. Tiré de ML95.

billard quasi-classique	billard des modes de gravité 2D
$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n ; n \rightarrow \infty$	$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} - \frac{\omega_n^2}{N^2} \frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2} = 0$
niveaux d'énergie E_n	fréquences ω_n
fonctions d'onde Ψ_n	fonctions de courant ψ_n

En calculant les orbites périodiques, on pourrait alors remonter, *via* une règle de quantification du type Bohr-Sommerfeld ou du type formule de la trace de Gutzwiller, aux fréquences propres ω_n puis aux fonctions propres associées ψ_n .

On ne peut malheureusement pas pousser plus avant cette analogie car des différences fondamentales existent entre le problème du billard classique et celui des modes de gravité bidimensionnels se propageant dans un domaine borné:

- une loi de réflexion différente: comme les modes de gravité se propagent le long de droites faisant un angle constant avec la verticale, les caractéristiques se réfléchissent sur les bords avec une égale inclinaison par rapport à la verticale. A l'inverse, dans le cas d'un billard classique, les réflexions de la particule sont spéculaires (Fig. 2.7). Cette différence au niveau de la loi de réflexion a des conséquences très importantes:

- alors que l'angle α pouvait prendre toutes les valeurs possibles dans le billard classique, les caractéristiques ne peuvent prendre que deux directions, correspondant à $s = \pm 1$ pour

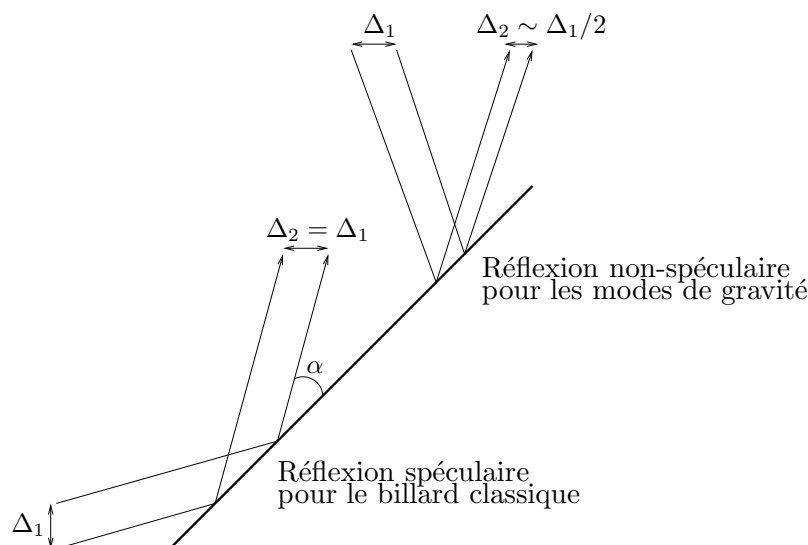


Figure 2.7: Les différentes lois de réflexion pour une particule dans un billard classique et pour les caractéristiques des modes de gravité bidimensionnels.

la carte $T(x_n, s)$, et la taille de l'espace des phases associé se réduit considérablement.

- dans le cas d'une réflexion spéculaire, la distance Δ entre deux rayons se conserve (*i.e.* $\Delta_2 = \Delta_1$ sur la Fig. 2.7). A l'inverse, nous observons sur cette même figure que cette distance n'est plus invariante si la réflexion est non-spéculaire; *i.e.* les rayons se rapprochent (respectivement s'éloignent si l'on effectue le trajet en sens inverse) et $\Delta_2 < \Delta_1$ (respectivement $\Delta_2 > \Delta_1$). Au cours de leurs réflexions successives, les caractéristiques des modes de gravité vont donc être tantôt focalisées, tantôt défocalisées: si la focalisation l'emporte en moyenne le long d'une orbite, nous obtiendrons un attracteur pour les rayons ! D'un point de vue mathématique, cela se traduit par le fait que l'exposant de Lyapunov associé à une trajectoire donnée peut être négatif. Pour une orbite comprenant N réflexions, cet exposant est défini par:

$$\Lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \left| \frac{\Delta_{2,i}}{\Delta_{1,i}} \right| \quad (2.29)$$

où $\Delta_{1,i}$ représente la distance respective entre deux rayons incidents et $\Delta_{2,i}$ la distance entre les deux rayons réfléchis. S'il y a focalisation (respectivement défocalisation) lors de la réflexion i , on aura $\Delta_{2,i}/\Delta_{1,i} < 1$ (respectivement $\Delta_{2,i}/\Delta_{1,i} > 1$) et la contribution à la somme (2.29) sera négative (respectivement positive). On obtient ainsi les scénarios suivants pour les orbites des modes de gravité:

- si la focalisation l'emporte durant les N réflexions, alors $\Lambda < 0$ et on aboutit à un attracteur.
- si la défocalisation l'emporte, alors $\Lambda > 0$ et l'orbite est chaotique.
- enfin, si focalisation et défocalisation se compensent exactement, on a $\Lambda = 0$ et l'orbite est soit ergodique, soit *strictement* périodique (*i.e.* elle se referme sur elle-même).

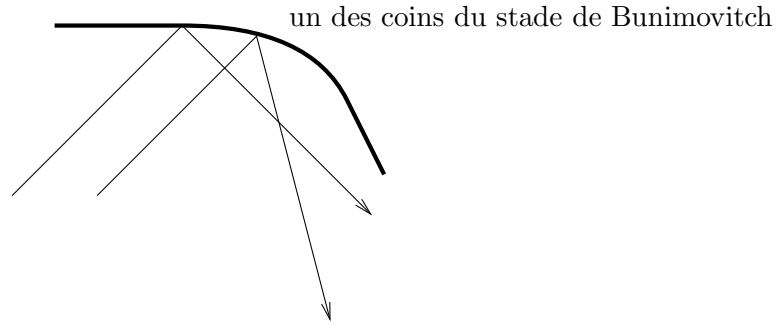


Figure 2.8: Principe de la défocalisation de deux rayons dans le stade de Bunimovitch. Celle-ci est due à la forme particulière du coin et non à la loi de réflexion comme dans l'exemple des modes de gravité.

Nous verrons par la suite que nous obtenons bien des orbites ergodiques et des attracteurs mais pas d'orbites qui soient chaotiques pour les modes de gravité se propageant dans un bassin parabolique. Cette absence de chaos est reliée au fait que les caractéristiques ne peuvent se propager que dans deux directions ($s = \pm 1$); cette contrainte, qui implique une réduction dramatique de la taille de l'espace des phases, suffit apparemment à empêcher l'émergence de chaos dans les trajectoires de rayons. Finalement, si l'on revient au cas des billards classiques, l'absence à première vue de focalisation/défocalisation pour les rayons impliquerait que les exposants de Lyapunov soient *a priori* tous strictement nuls. Ceci est vrai pour le billard circulaire mais ne l'est plus pour le stade de Bunimovitch où l'on observe des orbites chaotiques avec $\Lambda > 0$. La défocalisation des rayons sous-jacente à ce chaos ne peut être ici rattachée à la loi de réflexion et un autre mécanisme doit être invoqué. En fait, cette défocalisation repose sur la forme particulière du conteneur comme illustré par la figure 2.8: on voit que la séparation des deux rayons incidents est uniquement due à la forme du coin qui agit en quelque sorte comme une lentille divergente. En conclusion, nous aurons $\Lambda \leq 0$ pour les caractéristiques des modes de gravité et $\Lambda \geq 0$ pour les billards classiques.

- un type d'opérateur différent: nous pouvons aussi noter que les deux problèmes diffèrent quant au type de l'opérateur pour la fonction d'onde quasi-classique Ψ_n et la fonction de courant ψ_n . L'hamiltonien \hat{H} à deux dimensions de la particule libre quasi-classique est en effet donné par:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.30)$$

d'où la fonction d'onde Ψ_n satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_n \right) \Psi_n = 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad (2.31)$$

Le type de cette équation est donné par ses termes de plus haut degré (*cf.* annexe B) d'où la fonction d'onde vérifie une équation de type elliptique. Nous savons qu'un problème elliptique qui admet des conditions de bords du type Dirichlet est mathématiquement *bien posé* (*e.g.* l'équation de Laplace $\Delta f = 0$ avec $f = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$). A l'inverse, l'équation aux dérivées

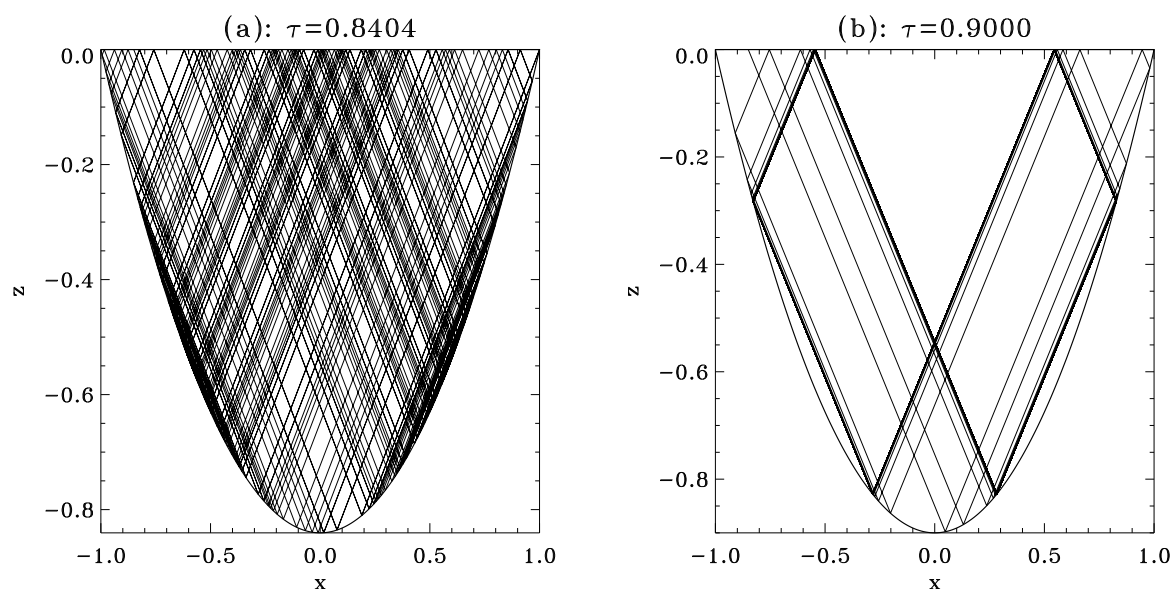


Figure 2.9: Réseaux de caractéristiques obtenus après cent réflexions à partir du point à la surface $x_0 = -0.85$ pour $\tau = 0.8404$ (a) et $\tau = 0.9$ (b). L'orbite (a) est ergodique tandis que l'orbite (b) est périodique (*i.e.* les caractéristiques convergent vers un attracteur).

partielles pour la fonction de courant est hyperbolique spatialement. Nous avons vu qu'un tel problème était mathématiquement *mal posé* puisqu'il implique une sur-détermination de la solution. Nos deux problèmes (*i.e.* le billard quasi-classique et le calcul des modes de gravité dans un domaine borné) ne sont donc pas mathématiquement équivalents mais font appel à des raisonnements semblables.

Les orbites du bassin parabolique

La figure 2.9 montre le résultat de l'itération de la carte $T(x_n, s)$ sur cent réflexions à partir du point $(x_0 = -0.85, s = +1)$ pour $\tau = 0.8404$ et $\tau = 0.9$. On observe deux types d'orbites: (*i*) soit l'orbite est ergodique, c'est-à-dire qu'elle remplit progressivement tout le bassin (cas a); (*ii*) soit les caractéristiques convergent vers un attracteur formé par une orbite périodique (cas b). Pour trouver la totalité des orbites ergodiques ainsi que des attracteurs, il est nécessaire de reproduire ces calculs pour chaque valeur de τ et le diagramme de Poincaré est un outil de visualisation efficace des résultats obtenus.

La construction d'un diagramme de Poincaré revient dans un premier temps à calculer, pour chaque valeur de τ , les abscisses x_n des réflexions successives à la surface. Ces x_n sont ensuite reportés en ordonnée du diagramme à deux dimensions (τ, x_n) . La figure 2.10 montre le diagramme de Poincaré obtenu en comptabilisant mille cent réflexions à la surface, les neuf cent premières ayant été enlevées afin de bien faire ressortir les comportements asymptotiques (les caractéristiques convergeant en effet plus ou moins rapidement vers un cycle limite). Qu'observons-nous alors ? Nous voyons que les attracteurs forment des bandes plus ou moins larges dans le spectre en τ ; en particulier toutes les orbites telles que

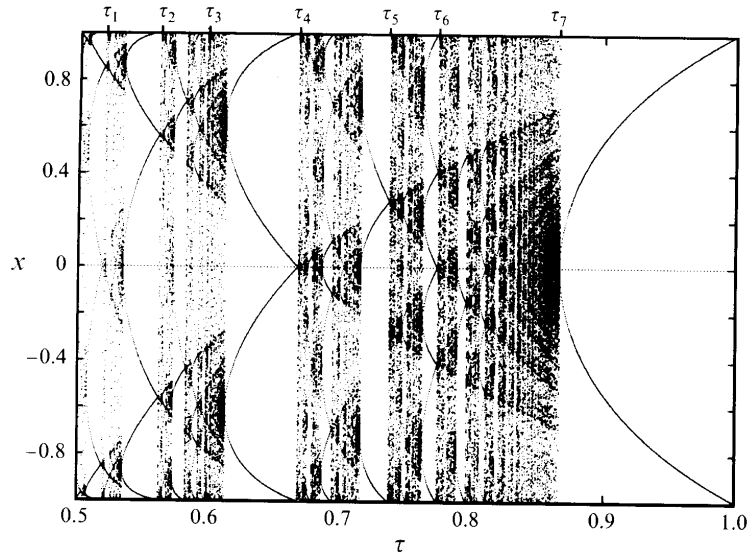


Figure 2.10: Diagramme de Poincaré pour le bassin parabolique avec mille cents réflexions à la surface; les neuf cents premières n'ayant pas été tracées pour bien faire ressortir les attracteurs. Tiré de ML95.

$\tau \gtrsim 0.87$ sont des cycles limites. Si l'on définit la période P d'une orbite comme étant le nombre de réflexions à la surface, alors tous les attracteurs contenus dans cette large bande sont de période $P = 2$ (cf. Fig. 2.9b). De plus, nous notons qu'une orbite ergodique est nécessairement de période infinie.

Maintenant que nous connaissons les orbites de caractéristiques pour chaque mode τ , nous devons être capables d'en déduire la fonction de courant $\psi(x, z) = F(x - z) - F(x + z)$. Cependant, comme l'équation (2.23) vérifiée par $\psi(x, z)$ est hyperbolique spatialement et que l'on impose des conditions de bords du type Dirichlet (i.e. $\psi(x, z) = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$), un problème de sur-détermination de la solution, identique à celui illustré par la figure 2.4, se pose. Il va donc falloir se donner préalablement la fonction $F(x)$ dans des intervalles dits fondamentaux afin de pouvoir reconstruire $\psi(x, z)$ à partir de l'orbite de caractéristiques.

Prenons par exemple le cas du mode $\tau = 0.9$. Nous savons, avec la figure 2.9b et le diagramme de Poincaré de la figure 2.10, que l'orbite associée à ce mode est périodique (de période $P = 2$). Comment trouver les intervalles fondamentaux où $F(x)$ doit être précisée ? La réponse réside dans l'étude précise des orbites de caractéristiques en fonction du point de départ x_0 à la surface. En effet, on voit sur la figure 2.11 qu'il existe deux intervalles fondamentaux $[-1, x_s]$ et $[x_c, -x_c]$: si l'on commence l'itération de l'orbite dans un des ces deux intervalles avec les deux sens possibles (i.e. $x_0 \in [-1, x_s]$ ou $x_0 \in [x_c, -x_c]$ avec $s = \pm 1$), on s'aperçoit que la totalité de la surface du bassin est échantillonnée, tout en ne repassant *jamais* dans l'intervalle fondamental de départ. Comme $F(x)$ est constante le long des caractéristiques, la méthode pour trouver $F(x_n)$ est simple: il suffit de "remonter" l'orbite de caractéristiques du point x_n considéré jusqu'au point x_0 se trouvant dans un des deux intervalles fondamentaux et on posera $F(x_n) = F(x_0)$!

La figure 2.12a montre l'allure de la fonction $F(x)$ à la surface, obtenue après avoir

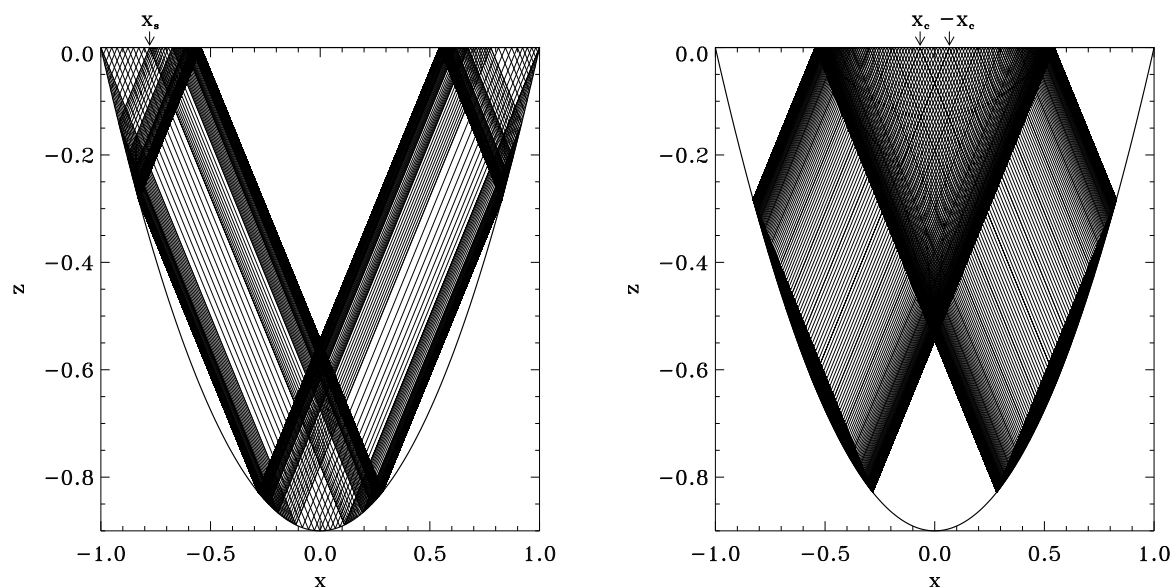


Figure 2.11: Intervalles fondamentaux du mode $\tau = 0.9$. La fonction $F(x)$ doit être précisée dans les deux intervalles $[-1, x_s]$ et $[x_c, -x_c]$ avec $x_s = 2/\tau - 3 \simeq -0.777$ et $x_c = 3/4\tau - \tau \simeq -0.066$. En effet, on voit que si l'on itère la carte $T(x_n, \pm 1)$ à partir de points x_0 compris dans ces deux intervalles, la surface du bassin est entièrement visitée par les caractéristiques (sans qu'il y ait pour autant une réflexion x_n dans l'intervalle fondamental de départ; *i.e.* $x_n \notin [-1, x_s]$ et $x_n \notin [x_c, -x_c]$ pour $n > 0$). La fonction F étant constante le long de l'orbite, on peut alors la calculer pour tout $x \in [-1, 1]$.

imposé que

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{1+x}{1+x_s} \right) && \text{pour } x \in [-1, x_s], \\ F(x) &= -\sin^2 \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{x}{x_c} \right) && \text{pour } x \in [x_c, -x_c] \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

dans les deux intervalles fondamentaux. On s'aperçoit alors qu'au fur et à mesure que l'on s'approche de l'attracteur ($x_n \rightarrow -0.55$ ou $x_n \rightarrow 0.55$), F varie de plus en plus rapidement tandis que son amplitude reste constante; *i.e.* on a

$$F(x) \sim \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dx} \rightarrow \pm\infty \quad \text{pour } x_n \rightarrow \pm 0.55 \quad (2.33)$$

Comme la fonction de courant n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire de $F(x)$, ces variations rapides se retrouvent dans le champ $\psi(x, z)$. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 2.12(b) où $\psi(x, z)$ a été calculée à partir de la fonction $F(x)$ précédente. On voit clairement que ψ varie elle aussi de plus en plus vite en se rapprochant de l'attracteur; *i.e.* de toutes petites échelles spatiales apparaissent le long du cycle limite final pour les

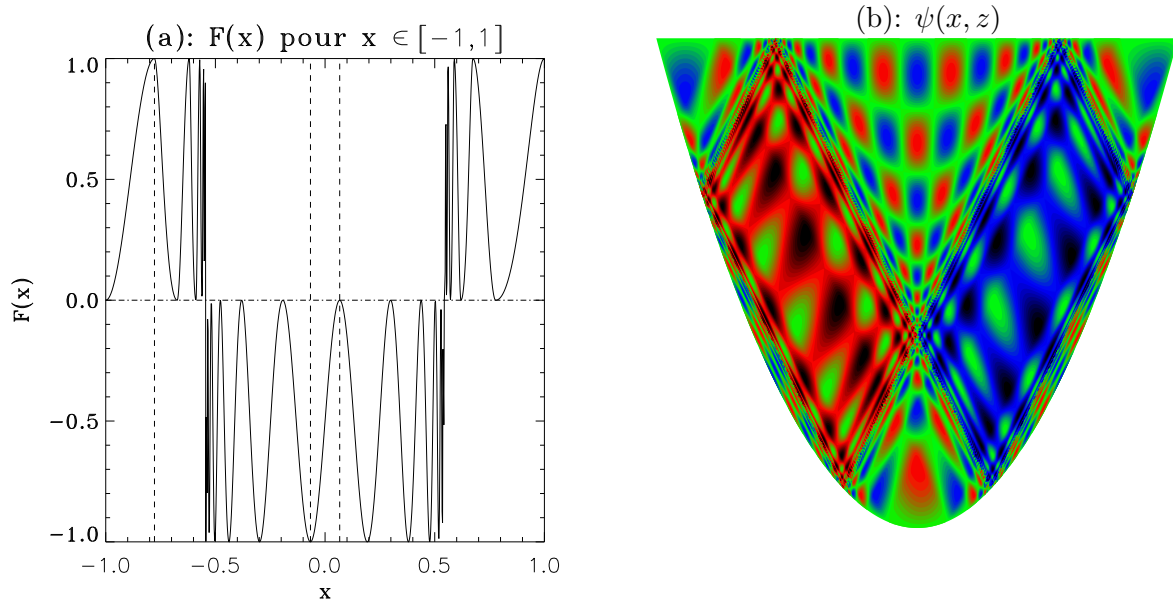


Figure 2.12: (a): construction de $F(x)$ à partir des deux intervalles fondamentaux $[-1, x_s]$ et $[x_c, -x_c]$. Dans ces deux intervalles, $F(x)$ est donnée par les relations (2.32). (b): contours de la fonction de courant associée.

caractéristiques. Comme le champ de vitesse est proportionnel au gradient de ψ , on en déduit donc que la vitesse doit diverger au niveau de l'attracteur !

Que se passe-t-il maintenant si l'orbite de caractéristique est ergodique ? La réponse est simple: comme la fonction F est constante le long des caractéristiques et que celles-ci remplissent tout le domaine, l'intervalle fondamental se résume ici à un simple point ! Définir en effet F en un point revient à la connaître partout à la surface puisque cette dernière est échantillonnée ergodiquement par le réseau de caractéristiques. Or, la fonction de courant est donnée par la différence $F(x - z) - F(x + z)$, *i.e.* la différence entre les valeurs de F portées par les deux caractéristiques se croisant au point (x, z) . Comme ces valeurs sont ici égales, $\psi(x, z)$ est identiquement nulle dans tout le domaine ! En conséquence, il n'existe pas de modes propres bidimensionnels associés aux orbites de caractéristiques ergodiques. Ce résultat est en fait généralisable à tout système hyperbolique à deux dimensions admettant des conditions limites du type Dirichlet (*cf.* Schaeffer, 1975).

Chapter 3

Un premier modèle Boussinesq

Nous avons montré dans le chapitre précédent l'utilité de la méthode dite du tracé de rayon *via* l'étude des deux problèmes suivants: (i) l'intégrabilité du billard circulaire et la non-intégrabilité du stade de Bunimovitch; (ii) les modes de gravité à deux dimensions se propageant dans un bassin parabolique uniformément stratifié. Nous allons maintenant présenter une première application de cette méthode dans le domaine des fluides en rotation et construire ainsi un premier modèle des modes gravito-inertiels se propageant dans un fluide incompressible stratifié de manière stable (résultats publiés dans l'article "Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell", Dintrans *et al.* (1999)).

3.1 Description de l'état d'équilibre

Cette approximation, que nous avons déjà employée lors de l'étude des modes de gravité bidimensionnels, est valable lorsque le fluide est quasi-incompressible; *i.e.* sa densité ne dépend que de la température *via* l'équation d'état suivante:

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3.1)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique (avec $\alpha\delta T \ll 1$) et T_0 la température à laquelle la densité est ρ_0 . Cette approximation est aussi souvent utilisée dans les études de convection thermique où: (i) la vitesse moyenne de l'écoulement est très petite devant la vitesse du son; (ii) l'échelle de hauteur de la configuration d'équilibre est grande par rapport à la dimension caractéristique du système (e.g. Spiegel & Veronis, 1960, Chandrasekhar, 1961, p. 16 ou Rieutord, 1997, p. 175).

Le champ de gravité, pour un fluide incompressible à symétrie sphérique, a une forme simple puisque l'équation de Poisson donne

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho_0 \Rightarrow \phi(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 \Rightarrow g(r) = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r \quad (3.2)$$

où $\phi(r)$ est le potentiel gravitationnel tel que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$. On voit donc que le champ de gravité est simplement proportionnel au rayon r ; *i.e.* $\vec{g} = -g_0\vec{r}/R$ où g_0 est la gravité à la surface $r = R$ et $\vec{r} = r\vec{e}_r$.

En ce qui concerne le champ de température à l'équilibre, celui-ci satisfait l'équation suivante:

$$\frac{DT_{eq}}{Dt} = \kappa \Delta T_{eq} + \mathcal{Q} = 0 \Rightarrow T_{eq}(r) = T_0 - \frac{\mathcal{Q}}{6\kappa} r^2 \quad (3.3)$$

où \mathcal{Q} représente la puissance des sources internes de chaleur et κ la diffusivité thermique supposée ici constante. Pour arriver à cette expression pour T_{eq} , nous avons supposé, à l'instar de Chandrasekhar (1961) ou plus récemment de Zhang (1995), que la distribution des sources internes de chaleur était uniforme. Ceci implique que le gradient de température est, comme la gravité, directement proportionnel au rayon et on a

$$\vec{\nabla} T_{eq} = \frac{dT_{eq}}{dr} \vec{e}_r = \beta \vec{r}/R \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{\mathcal{Q}R}{3\kappa} = \text{cte} \quad (3.4)$$

La stabilité de ce système vis-à-vis de la convection dépend du signe du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä (critère de Schwarzschild). Pour un fluide incompressible, la fréquence de Brunt-Väisälä est donnée par:

$$N^2(r) = g \left(\frac{1}{\Gamma_1 P_0} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dr} = \alpha g(r) \frac{dT_{eq}}{dr} = \alpha \beta g_0 \frac{r^2}{R^2} \quad (3.5)$$

et pour que le système soit stable, il faut que $N^2(r) > 0$ soit $\beta > 0$. D'après (3.4), cela signifie que $\mathcal{Q} < 0$ (*i.e.* on a des puits de chaleur) et que la température croît vers l'extérieur d'où la stabilité vis-à-vis de la convection.

Pour résumer, l'état d'équilibre du fluide Boussinesq est donc donné par:

$$\boxed{\vec{g}(r) = -g_0 \vec{r}/R, \quad \vec{\nabla} T_{eq}(r) = \beta \vec{r}/R, \quad N^2(r) = \alpha \beta g_0 r^2 / R^2 \text{ avec } \beta > 0} \quad (3.6)$$

3.2 Les équations pour les oscillations

On s'intéresse donc aux oscillations gravito-inertielles d'un fluide incompressible, stratifié de manière stable et en rotation rapide. Dans un repère en co-rotation, les équations linéarisées pour les perturbations sont données par:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} &= -\vec{\nabla} \left(\frac{P'}{\rho_0} \right) + \frac{\rho'}{\rho_0} \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_{eq} &= \kappa \Delta T'. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

où ρ', T', P' sont respectivement les fluctuations eulériennes de densité, température et pression; \vec{v} est la perturbation de vitesse et $\nu = \mu/\rho_0$ est la viscosité cinématique supposée ici constante. La rotation apparaît dans le repère en co-rotation *via* la force de repère

bien connue qu'est la force de Coriolis $2\Omega \times \vec{v}$. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de ce manuscrit, on sait que la rotation se manifeste aussi par le biais de la force centrifuge $\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Cette force n'agit cependant pas en tant que telle sur les ondes puisqu'elle modifie uniquement la structure d'équilibre de l'étoile, en la déformant légèrement par rapport à la forme sphérique qu'elle aurait sans rotation. Cet effet sur la géométrie du conteneur, et par ricochet sur la forme des modes d'oscillations qui s'y propagent, est $\mathcal{O}(\Omega^2)$. Nous limitant dans une première étape aux effets d'ordre un en la rotation (*i.e.* aux effets de la force de Coriolis), nous n'en avons pas tenu compte dans cette thèse.

Appliquer l'approximation Boussinesq à ce système revient:

- à négliger la contribution $\partial\rho'/\partial t$ devant $\text{div } \vec{v}$ dans l'équation de conservation de la masse; autrement dit, on filtre les ondes sonores du fait de l'incompressibilité du fluide.
- à relier les perturbations eulériennes de densité et de température en perturbant l'équation d'état (3.1); *i.e.* on a

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho_0} = -\alpha T' \quad (3.8)$$

On obtient alors le nouveau système suivant:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} &= -\vec{\nabla} \left(\frac{P'}{\rho_0} \right) + \alpha g_0 T' \frac{\vec{r}}{R} + \nu \Delta \vec{v}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + v_r \beta \frac{r}{R} &= \kappa \Delta T'. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

où l'on a tenu compte des expressions (3.6) pour les champs à l'équilibre.

Nous allons maintenant adimensionnaliser ce système en choisissant des échelles de temps, de longueur et de température. Une échelle de temps naturelle est imposée par l'inverse de la fréquence Coriolis $(2\Omega)^{-1}$, où le vecteur de rotation solide est donné par $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ avec $\Omega = cte$. Le rayon R correspondant à la surface du fluide sera pris comme échelle de longueur d'où l'échelle de vitesse sera égale à $2R\Omega$. Enfin, l'échelle de température sera donnée par $R\beta$ et on obtient les correspondances suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2\Omega \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \vec{v} = 2R\Omega \vec{u}, \quad T' = R\beta \Theta, \quad \frac{P'}{\rho_0} = 4R^2\Omega^2 \Pi, \quad r \equiv Rr$$

où nous avons gardé, par commodité, la lettre r pour représenter le rayon. Finalement, le système adimensionné s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \gamma} + \vec{e}_z \times \vec{u} &= -\vec{\nabla} \Pi + N^2 \Theta r \vec{e}_r + E \Delta \vec{u}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} + r u_r &= \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

où les trois nombres sans dimension E , \mathcal{P} et N^2 sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ll} E = \frac{\nu}{2\Omega R^2} & : \text{nombre d'Ekman} \\ \mathcal{P} = \frac{\nu}{\kappa} & : \text{nombre de Prandtl} \\ N^2 = \frac{\alpha\beta g_0}{4\Omega^2} & : \text{carré adimensionné de la fréquence de Brunt-Väisälä en } r = 1 \end{array} \right.$$

3.3 La force de Coriolis comme force de rappel

La rotation apparaît dans nos équations *via* la force de Coriolis $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$. Nous allons brièvement rappeler quelques propriétés concernant cette force et expliquer notamment son caractère de force de rappel. Pour cela, nous introduirons les notions de vorticité et de circulation pour aboutir finalement au théorème de Kelvin qui va nous permettre d'apprécier le rôle joué par cette force.

On définit le vecteur vorticité \vec{w} d'un élément fluide, animé d'une vitesse \vec{v} , par $\vec{w} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v}$. En étudiant l'évolution de cet élément au cours d'un déplacement infinitésimal $\delta\vec{r}$, on peut montrer que la vorticité peut être assimilée à un taux de rotation solide local; *i.e.* la variation de vitesse $\delta\vec{v}$ associée à la partie *anti-symétrique* du tenseur gradient de vitesse (celle qui n'est pas responsable de la déformation proprement dite de l'élément fluide) peut se mettre sous la forme suivante (e.g. Batchelor, 1981, p.79):

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} \times \delta\vec{r} \quad (3.11)$$

Si le fluide est déjà animé d'une rotation d'ensemble $\vec{\Omega}$, on doit alors introduire les notions de vorticité "relative" et "absolue":

$$\vec{w}_a = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v}_a = \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{w} + 2\vec{\Omega} \quad (3.12)$$

où \vec{w}_a est la vorticité absolue dans le repère fixe et \vec{w} la vorticité relative dans un repère en co-rotation; le terme $2\vec{\Omega}$, qui est en fait une vorticité résiduelle toujours présente, étant quant à lui qualifié de vorticité planétaire. Si l'on calcule le flux du vecteur vorticité absolue passant à travers une surface quelconque S emportée par le fluide, on a:

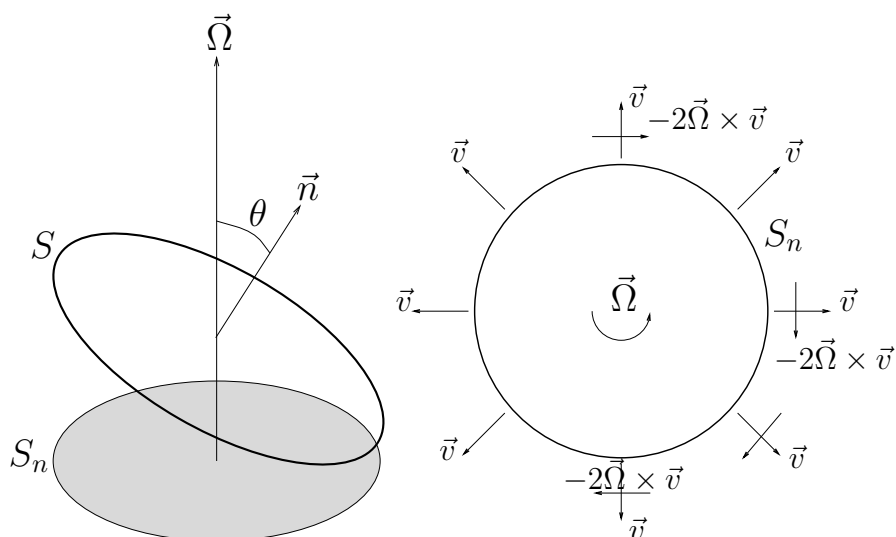


Figure 3.1: Projection de la surface S , inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe de rotation, dans un plan perpendiculaire à $\vec{\Omega}$ (gauche). Augmentation de la surface S_n *via* le champ de vitesse \vec{v} (droite). Pour satisfaire la contrainte du théorème de Kelvin, la force de Coriolis fait tourner l'élément fluide dans le sens inverse à $\vec{\Omega}$ et génère ainsi une circulation négative.

$$\underbrace{\iint_S \vec{w}_a \cdot \vec{n} dS}_{\Gamma_a} = \iint_S \vec{w} \cdot \vec{n} dS + \iint_S 2\vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \underbrace{\iint_S \vec{w} \cdot \vec{n} dS}_{\Gamma} + 2\Omega S_n \Rightarrow \Gamma_a = \Gamma + 2\Omega S_n$$

où S_n est la surface projetée dans un plan perpendiculaire au vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (*cf.* Fig. 3.1gauche). Or, l'application du théorème de Stokes conduit à

$$\Gamma_a = \oint_C \vec{v}_a \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} + 2\Omega S_n \Rightarrow \frac{d\Gamma_a}{dt} = \oint_C \frac{d\vec{v}_a}{dt} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + 2\Omega \frac{dS_n}{dt}$$

où l'on a utilisé la règle de dérivation d'une quantité emportée par le fluide (*e.g.* Rieutord, 1997, p.7) et C représente un contour fermé mobile avec le fluide. On voit donc que le flux de la vorticité est aussi relié à la circulation de la vitesse le long d'un contour fermé. D'après le théorème de Kelvin, on sait que la circulation absolue d'un fluide *parfait barotrope* et uniquement soumis à des forces dérivant d'un potentiel est une constante du mouvement (*e.g.* Rieutord, 1997, p.58); *i.e.*

$$\boxed{\frac{d\Gamma_a}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt} + 2\Omega \frac{dS_n}{dt} = 0}$$

C'est cette contrainte de la conservation de la circulation absolue qui est à la base de l'effet de rappel de la force de Coriolis. En effet, la contribution $d\Gamma/dt$ est dans ce cas égale à:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} - \underbrace{\oint_C \vec{\nabla} \left(\int \frac{dP}{\rho} \right) \cdot d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\oint_C \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l}}_{=0} \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$$

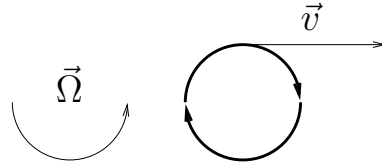
et le théorème de Kelvin entraîne que

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = - \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} + 2\Omega \frac{dS_n}{dt} = 0$$

Supposons maintenant que l'on augmente la surface S_n soit $dS_n/dt > 0$; ceci implique nécessairement que

$$- \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} < 0$$

soit la force de Coriolis génère une circulation *négative*; c'est-à-dire un mouvement de rotation dans le sens inverse à $\vec{\Omega}$ (cf. Fig. 3.1 droite). Ce mouvement de rotation en sens inverse se caractérise donc par un champ de vitesse induit $\vec{v}_i \propto -2\vec{\Omega} \times \vec{v}$. Or, ce champ \vec{v}_i va lui aussi donner naissance à une force de Coriolis $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}_i$ dirigée dans le sens opposé au champ \vec{v} de départ: on obtient bien un mécanisme de rappel visant à faire revenir la surface S_n à sa taille de départ ! Schématiquement, un élément fluide en rotation, écarté de sa position d'équilibre sous l'action d'un champ de vitesse \vec{v} , effectue la trajectoire suivante:



soit une trajectoire circulaire dans le sens inverse à la rotation ambiante et avec une période de rotation $\sim \Omega^{-1}$.

3.4 Propriétés mathématiques de l'opérateur gouvernant les oscillations

Les oscillations gravito-inertielles vérifient donc le système d'équations (3.10). Nous allons maintenant nous intéresser à l'aspect mathématique de ce problème en étudiant les propriétés de l'opérateur mixte qui gouverne ses oscillations dans la limite *adiabatique* $\nu = \kappa = 0$ (on note cependant que seule la configuration *hors-équilibre* sera considérée comme étant adiabatique, c'est-à-dire que le gradient de température à l'équilibre reste de la forme $\vec{\nabla} T_{eq} = \beta \vec{r}/R$ avec $\beta = -QR/3\kappa$). Dans cette optique, nous rappellerons dans un premier temps quelques propriétés concernant les modes de gravité; ceci nous permettra, par la suite, de bien appréhender les modifications qualitatives apportées par l'introduction de la rotation.

3.4.1 Rappel sur les modes de gravité

Sans rotation et dans la limite adiabatique $\nu = \kappa = 0$, le système (3.9) devient:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \left(\frac{P'}{\rho_0} \right) + \alpha g_0 T' \frac{\vec{r}}{R}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + v_r \beta \frac{r}{R} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

On choisit cette fois comme échelle de temps l'inverse du maximum de la fréquence de Brunt-Väisälä en $r = R$ soit, d'après (3.6), $(\alpha\beta g_0)^{-1/2}$ et on a les nouvelles correspondances suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha\beta g_0 \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \vec{v} = R\alpha\beta g_0 \vec{u}$$

tandis que les échelles de longueur et de température ne changent pas. Pour des modes propres dont la dépendance temporelle est de la forme $\exp(i\omega\gamma)$, on obtient alors le système adimensionné

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ i\omega \vec{u} &= -\vec{\nabla} \Pi + \Theta r \vec{e}_r, \\ i\omega \Theta + r u_r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

où ω représente la fréquence angulaire adimensionnée (la "vraie" fréquence angulaire étant égale à $(\alpha\beta g_0)^{1/2}\omega$). Éliminant la vitesse, on arrive à l'équation suivante pour la pression seule:

$$\Delta \Pi + \operatorname{div} \left(\frac{r^2}{\omega^2 - r^2} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \vec{e}_r \right) = 0 \quad (3.15)$$

Le type de cette équation ne dépend que de ses termes de plus haut degrés (*cf.* annexe B) qui sont égaux à

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{r^2}{\omega^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} + \dots = 0 \quad (3.16)$$

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques. On note qu'aucun terme de dérivation par rapport à φ n'apparaît car, si l'on suppose que la dépendance azimutale du mode propre est de la forme classique $\exp(im\varphi)$, alors on a $\partial/\partial\varphi \equiv im$ et $\partial^2/\partial\varphi^2 \equiv -m^2$ et toutes les dérivées en φ disparaissent.

Le type de l'équation (3.16) dépend du signe de la fonction $\Delta(r)$ telle que (*cf.* annexe B)

$$\Delta(r) = -\frac{4}{r^2} \left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right) \Rightarrow \text{hyperbolique pour } \Delta(r) > 0 \text{ soit } \omega < r \quad (3.17)$$

et l'on retrouve que le spectre des modes de gravité est borné par le maximum de la fréquence de Brunt-Väisälä puisqu'on a $\omega_{max} = 1$. De plus, la condition $\omega < r$ entraîne que le mode propre de fréquence ω sera piégé dans la couche sphérique comprise entre les rayons $r_c = \omega$ et $r = 1$. On retrouve que, du fait de la symétrie sphérique imposée par la force de rappel, les surfaces critiques des modes de gravité sont des *sphères concentriques*.

3.4.2 Cas avec rotation

L'étude du type de l'opérateur avec rotation est plus subtile car la prise en compte de la force de Coriolis introduit une symétrie cylindrique dans le problème. L'équation pour la pression seule se calcule par conséquent en coordonnées cylindriques, ce qui rend par la même le traitement de la force de gravité moins évident. On part donc du système (3.10), toujours écrit dans la limite adiabatique $\nu = \kappa = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ i\omega \vec{u} + \vec{e}_z \times \vec{u} &= -\vec{\nabla} \Pi + N^2 \Theta r \vec{e}_r, \\ i\omega \Theta + r u_r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Ce système a été étudié de manière détaillée par Friedlander & Siegmann dans une série d'articles théoriques publiés en 1982 (Friedlander & Siegmann, 1982a,b; Friedlander, 1982c). Avec rotation, l'équation vérifiée par la pression devient, toujours au plus haut degré (Friedlander & Siegmann, 1982a):

$$(N^2 z^2 - \omega^2) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial s^2} - 2szN^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial s \partial z} + (s^2 N^2 + 1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \dots = 0 \quad (3.19)$$

où (s, θ, z) représentent les coordonnées cylindriques habituelles. Comme précédemment, le type de cette équation dépend du signe de la fonction $\Delta(s, z)$ telle que

$$\Delta(s, z) = 4 [N^2(\omega^2 r^2 - z^2) + \omega^2(1 - \omega^2)] \quad \text{avec } r^2 = s^2 + z^2 \quad (3.20)$$

La condition $\Delta(s, z) = 0$ donne, comme dans le cas des modes de gravité, l'équation des surfaces critiques soit

$$\boxed{\frac{s^2}{\omega^2 - 1} + \frac{z^2}{\omega^2} = \frac{1}{N^2}} \quad (3.21)$$

Cette équation définit des coniques; *i.e.* les surfaces critiques, du fait du changement de symétrie du problème, perdent leur sphéricité. Suivant la valeur de la fréquence propre ω , deux grands types de surfaces apparaissent: (i) les surfaces critiques sont des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe de rotation si $\omega > 1$; (ii) ce sont des hyperboloïdes de révolution

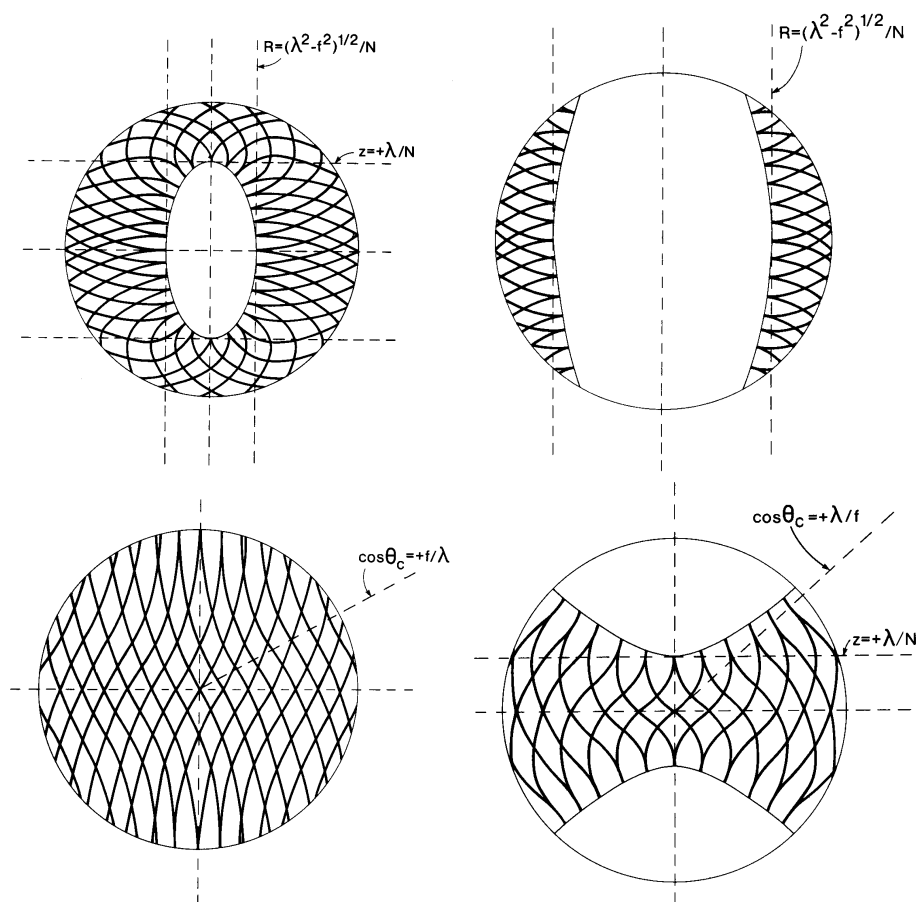


Figure 3.2: Formes des surfaces critiques et des caractéristiques pour les quatre types de modes (3.22) et (3.23) avec, respectivement de haut en bas, un mode E_1, E_2, H_1 et H_2 . L'angle $\theta_c = \cos^{-1} \omega$ définit la latitude critique où les caractéristiques sont perpendiculaires au rayon vecteur (ici $f = 1$ du fait de l'adimensionnalisation en temps choisie). Tiré de Friedlander & Siegmann (1982a).

si $\omega < 1$. On définit alors les quatre types de modes propres suivants (Friedlander & Siegmann, 1982a):

- deux types de modes dits “elliptiques” E_1 et E_2 selon que l'ellipsoïde de révolution coupe l'axe de rotation (type E_1) ou non (type E_2):

$$E_1 : \quad 1 < \omega < N \tag{3.22}$$

$$E_2 : \quad \max(1, N) < \omega < \sqrt{1 + N^2}$$

- deux types de modes dits “hyperboliques” selon que l'hyperboloïde de révolution est présent (type H_2) ou pas (type H_1) dans le domaine de propagation:

$$H_1 : \quad N < \omega < 1 \quad (3.23)$$

$$H_2 : \quad 0 < \omega < \min(1, N)$$

La figure 3.2 illustre la forme des surfaces critiques dans la sphère pleine pour les quatre types de modes possibles E_1, E_2, H_1 et H_2 . On voit en fait que les modes E_1 sont très proches des modes de gravité classiques:

- leur intervalle spectral “réel” est donné par $2\Omega < \sigma < N_{max}$ et correspond à celui des modes de gravité dans le cas sans rotation $\Omega = 0$.
- en présence de rotation, la surface critique sphérique des modes de gravité n’est déformée qu’au niveau de l’équateur et devient une ellipse.

De la même manière, les modes H_1 sont très proches des modes inertiels:

- leur intervalle spectral “réel” $N_{max} < \sigma < 2\Omega$ correspond à celui des modes inertiels dans le cas non stratifié $N_{max} = 0$.
- l’hyperboloïde critique se situant en dehors du domaine d’existence des ondes, ces modes se propagent, à l’instar des modes inertiels, dans une région qui est entièrement hyperbolique.

Des tracés de caractéristiques, établis à main levée, sont aussi visibles sur cette figure. Ces caractéristiques se propagent dans le domaine hyperbolique selon l’équation différentielle suivante (Friedlander & Siegmann, 1982a):

$$\boxed{\frac{dz}{ds} = \frac{szN^2 \pm \sqrt{\xi}}{\omega^2 - N^2z^2} \quad \text{avec} \quad \xi = N^2(\omega^2s^2 - z^2) + \omega^2(1 - \omega^2)} \quad (3.24)$$

et elles se réfléchissent à la fois sur les surfaces critiques¹ et la sphère externe. Notre premier travail va consister à calculer les orbites formées par les réflexions successives de ces caractéristiques; *i.e.* nous allons appliquer la méthode du tracé de rayon à notre problème.

3.5 Calcul des orbites de caractéristiques

3.5.1 La méthode numérique

Pour trouver les orbites de caractéristiques, la marche à suivre est à première vue simple: il suffit d’intégrer l’équation différentielle du premier ordre suivante:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{szN^2 \pm \sqrt{\xi}}{\omega^2 - N^2z^2} \Rightarrow z = z(s) \quad (3.25)$$

¹On note que ces réflexions sur les surfaces critiques se passent à angle droit puisque ces dernières correspondent à $\xi = 0$.

et nous notons ce faisant que les caractéristiques ne correspondent pas ici simplement à des droites comme c'est le cas avec les modes de gravité bidimensionnels étudiés à la section 2.2.3 du chapitre précédent ou les modes inertiels (Rieutord & Valdettaro, 1997). Elles forment des courbes compliquées et leurs réflexions successives ne sont pas analytiquement calculables comme dans Maas & Lam (1995). En fait, cette intégration n'est pas triviale, eu égard notamment à l'existence des surfaces critiques, et nous allons présenter quelques unes des difficultés numériques qui se posent.

Le problème des réflexions critiques

La complication majeure vient du fait que notre opérateur est maintenant de type *mixte* et non uniquement hyperbolique. En effet, la présence de surfaces critiques dans le domaine de propagation complique grandement le calcul des orbites. Intégrer une équation différentielle du premier ordre *via* une méthode de Runge-Kutta classique est *a priori* facile, même lorsqu'on doit tenir compte de réflexions sur des bords "physiques". Par exemple, intégrer une caractéristique jusqu'à ce qu'elle touche la sphère externe en $r = 1$ ne pose aucun problème particulier puisqu'il suffit d'arrêter l'intégration dès que $s^2 + z^2 = 1$!

A l'inverse, intégrer cette caractéristique jusqu'à ce qu'elle touche une surface critique est numériquement plus compliqué car cette surface est définie par $\xi = 0$: si l'intégration n'est pas *exactement* stoppée quand $\xi = 0$, on risque de se retrouver dans le domaine elliptique où $\xi < 0$. Comme l'équation différentielle (3.25) fait intervenir un terme en $\sqrt{\xi}$, on voit tout de suite que dépasser la surface critique conduit irrémédiablement à prendre la racine d'un nombre négatif, aussi petit soit-il: l'intégrateur Runge-Kutta s'arrête alors instantanément et ne peut repartir !

Choix de l'algorithme d'intégration

Une première solution à ce délicat problème est la suivante: lors de l'intégration d'une caractéristique, on calcule à chaque pas la valeur de ξ . Pour être précis, on calcule en fait à chaque pas la distance minimale d_{min} à la surface critique; *i.e.* la distance orthogonale à cette surface. Dès que d_{min} devient inférieure à une distance donnée à l'avance (par ex. $d_0 = 10^{-4}$), on diminue fortement le pas d'intégration. On reprend alors celle-ci jusqu'à ce que ξ soit très proche de 0, par exemple, $\xi = 10^{-8}$. On considère à ce moment la surface critique atteinte et on repart en sens inverse avec une nouvelle caractéristique. C'est cette méthode que nous avons dans un premier temps appliquée. Il est inutile de dire que le temps de calcul d'une orbite devenait rapidement prohibitif dès que le nombre de réflexions était important (typiquement de l'ordre de quelques centaines) ou que l'on voulait des réflexions critiques très précises.

Abandonnant cette méthode à base de projections orthogonales, nous avons utilisé une nouvelle approche qui s'est avérée finalement être la bonne: elle consiste à calculer *préalablement* le point de réflexion sur la surface critique puis à intégrer *sur une grille donnée* la caractéristique entre le point de départ et ce point de réflexion. Pour ce faire, nous utilisons les deux programmes suivants inclus dans la librairie scientifique NAG (Numerical Algorithms Group):

1. le programme D02BHF intègre, *via* une méthode Runge-Kutta d'ordre quatre, un

système différentiel du premier ordre sur un intervalle donné jusqu'à ce qu'une certaine fonction $g(s, z)$, définie par l'utilisateur, soit nulle.

2. le programme D02BBF intègre, lui aussi *via* une méthode Runge-Kutta d'ordre quatre, un système différentiel du premier ordre sur une grille donnée par l'utilisateur et retourne la solution sur cette grille.

A priori, ces deux programmes intègrent chacun au moins une fois l'équation différentielle (3.25) entre le point de départ et la surface critique. L'astuce vient du fait que l'on ne demande pas à D02BHF de nous donner à chaque pas d'intégration la solution $z = z(s)$. D02BHF peut par conséquent utiliser un grand pas d'intégration tant que la fonction $g(s, z)$ est "loin" d'être nulle. Par contre, dès que $g(s, z) \sim 0$, D02BHF diminue le pas d'intégration pour trouver précisément le point (s, z) où g s'annule. Une fois le point de réflexion (s_c, z_c) connu, on construit une grille uniforme en s avec un nombre donné de points et on intègre, *via* le programme D02BBF, la caractéristique depuis (s_0, z_0) jusqu'à (s_c, z_c) . Cette seconde étape a les deux avantages suivants:

- l'atout le plus évident réside dans le fait de pouvoir se donner à l'avance la grille d'intégration: si nous voulons juste connaître la forme de l'orbite, nous mettrons peu de points de grille et le temps d'intégration résultant en sera diminué d'autant.
- un second avantage vient du fait que l'intégration de la caractéristique entre (s_0, z_0) et (s_c, z_c) n'est pas toujours nécessaire. Lorsqu'on voudra, à l'instar des modes de gravité bidimensionnels du chapitre précédent (*cf.* Fig. 2.10), calculer le diagramme de Poincaré des modes gravito-inertiels, nous n'aurons en effet pas besoin de connaître la forme des orbites entre les points de réflexion successifs. Seules nous intéresseront les positions de ces dites réflexions (*i.e.* la série des $[s_c, z_c]$) et nous n'aurons pas à appeler le programme D02BBF d'où un gain substantiel en temps de calcul !

Choix de la variable d'intégration

Un autre problème que nous avons rencontré dans le calcul des orbites de caractéristiques concerne le choix de la variable d'intégration. En effet, intégrer une équation différentielle par une méthode du type Runge-Kutta implique d'avoir une variable d'intégration dont les variations sont nécessairement monotones; *i.e.* la variable d'intégration ne peut que croître ou décroître. Or, nous avons déjà noté que les modes elliptiques E ressemblent fortement à des modes de gravité perturbés par la rotation tandis que les modes hyperboliques H correspondent plutôt à des modes inertiels perturbés par la stratification. En conséquence, la symétrie sous-jacente des modes E est de type sphérique alors que celle des modes H est de type cylindrique.

On se rend compte dès lors que choisir le rayon cylindrique s ou la coordonnée z comme variable d'intégration pour le calcul des orbites elliptiques ne convient pas. En effet, nous voyons avec la figure 3.3(a) que ces variables ne sont pas monotones le long des caractéristiques elliptiques. En fait, comme la symétrie sous-jacente de ces orbites est sphérique, seul le rayon r est strictement monotone le long des caractéristiques elliptiques donc r sera pris comme variable d'intégration dans le calcul des orbites elliptiques. Ceci nous oblige alors à faire le changement de variable $(s, z) \rightarrow (r, \theta)$ dans l'équation différentielle

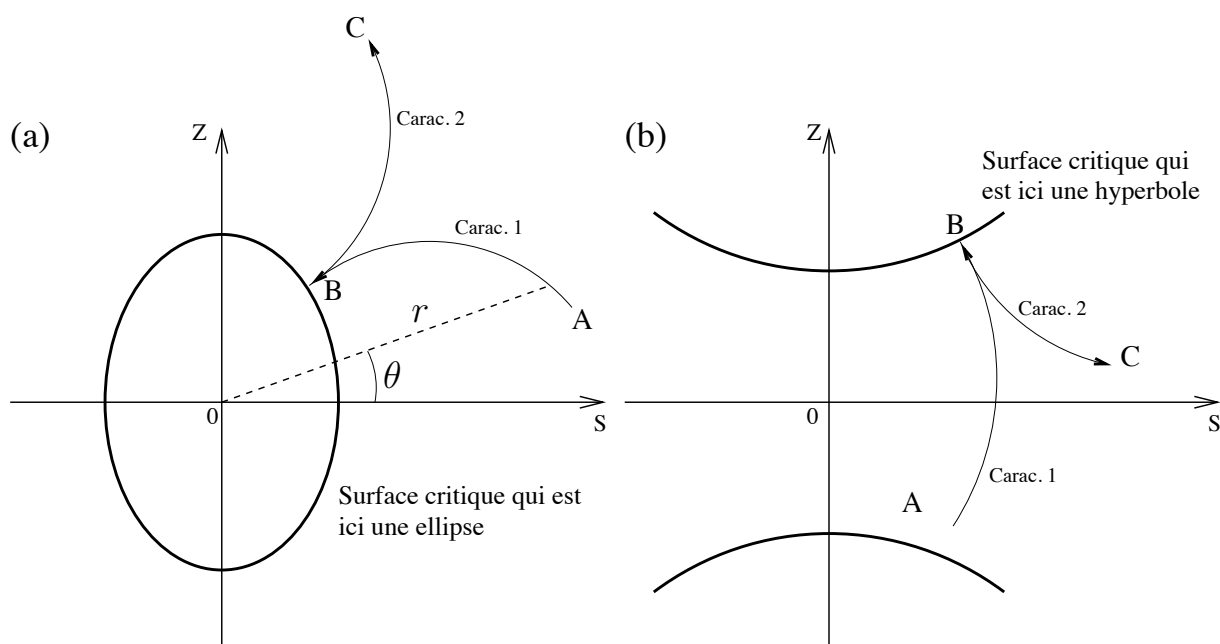


Figure 3.3: Illustration du problème du choix de la variable d'intégration dans le cas d'une orbite elliptique (a) et hyperbolique (b). Dans le cas elliptique (a), les variables cylindriques (s, z) ne peuvent être prises comme variable d'intégration car z n'est pas monotone sur le trajet $A \rightarrow B$, de même que s sur le trajet $B \rightarrow C$. En fait, nous voyons que seul le rayon r est monotone sur ces deux trajets et pourra être pris comme variable d'intégration pour ces orbites. De la même manière, nous voyons que seul z est monotone pour l'orbite hyperbolique (b) et sera pris comme variable d'intégration dans ce cas.

(3.25), avec $s = r \cos \theta$ et $z = r \sin \theta$ où θ est la latitude. Nous aurons donc à intégrer la nouvelle équation suivante:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\Xi - \tan \theta}{r(1 + \Xi \tan \theta)} \quad \text{avec} \quad \Xi = \frac{szN^2 \pm \sqrt{\xi}}{\omega^2 - N^2z^2} \quad (3.26)$$

La symétrie sous-jacente des orbites hyperboliques est cylindrique, ce qui implique que la variable d'intégration soit s ou z . Mais la figure 3.3(b) montre que ce ne peut être s car cette coordonnée n'est pas strictement monotone (le long du trajet AB , par exemple). La coordonnée z , qui est strictement monotone sur les deux trajets, sera donc prise comme variable d'intégration et nous aurons à intégrer l'équation différentielle suivante:

$$\frac{ds}{dz} = \frac{\omega^2 - N^2z^2}{szN^2 \pm \sqrt{\xi}} \quad (3.27)$$

3.5.2 Résultats: orbites ergodiques, attracteurs et orbites piégées

Les résultats concernant les orbites des modes gravito-inertiels dans l'approximation Boussinesq ont été publiés dans la première partie de notre article Dintrans *et al.* (1999). Ils s'appuient sur l'utilisation intensive de l'interface graphique IDL que nous avons mise

au point pour les calculs des trajectoires de caractéristiques (*cf.* l'annexe C pour une présentation de cette interface). Nous en résumons ici les principales conclusions.

Les trois types d'orbites

Nous avons donc étudié les orbites de caractéristiques se propageant: (*i*) dans une couche sphérique de rapport d'aspect $\eta = 0.35$; ce rapport, déjà utilisé dans Rieutord & Valdettaro (1997), correspond au noyau liquide de la Terre supposé stratifié de manière stable; (*ii*) dans une sphère pleine. Des exemples d'orbites elliptiques E_1, E_2 et hyperboliques H_1, H_2 calculées dans la couche sphérique, sont donnés par la figure 1 de Dintrans et al. Trois types d'orbites apparaissent alors:

1. l'orbite peut être ergodique, c'est-à-dire qu'elle remplit la totalité du domaine hyperbolique (Fig. 1d).
2. les caractéristiques peuvent converger vers un attracteur, définissant ainsi une orbite périodique (Fig. 1b,1c,1e).
3. enfin, les caractéristiques peuvent converger vers un coin, formé par l'intersection entre la surface critique et les sphères externe ou interne, et l'orbite est piégée (Fig. 1f).

Les diagrammes de Poincaré

Afin d'étudier toutes les orbites pour une stratification donnée N , nous avons ensuite tracé les diagrammes de Poincaré pour les quatre types de modes E_1, E_2, H_1 et H_2 . Dans le cas des modes de gravité bidimensionnels du chapitre précédent, le diagramme de Poincaré était construit en relevant, pour chaque orbite correspondant à une valeur du paramètre τ , la position x_n des réflexions successives à la surface (*cf.* Fig. 2.10). Dans notre cas et pour la couche sphérique, nous avons choisi d'enregistrer les co-latitudes θ_n des réflexions sur la sphère interne en $r = \eta$ pour les modes H et sur la sphère externe en $r = 1$ pour les modes E . Dans la sphère pleine, nous ne pouvions évidemment que prendre les co-latitudes des réflexions sur la sphère en $r = 1$.

Les diagrammes de Poincaré (ω, θ_n) sont donnés dans l'article par les figures 2a,2b et 2c pour la couche sphérique et les figures 6a,6b et 7 pour la sphère pleine. On observe alors que:

- les orbites ergodiques (qui correspondent ici à un grand nombre de points pour une valeur donnée de ω) dominant, et ce aussi bien dans la couche sphérique que dans la sphère pleine.
- quelques bandes d'attracteurs (qui correspondent à un petit nombre de points de réflexion en ordonnée) apparaissent parmi ces orbites ergodiques. En particulier, la bande la plus large que nous ayons trouvé ($\Delta\omega \sim 0.1$) appartient aux modes elliptiques E et est située autour de $\omega \sim 1.1$ (*cf.* Fig. 2c et l'exemple de la Fig. 1e).
- les orbites piégées au niveau des coins formés par les intersections entre une surface critique et une sphère délimitant le domaine apparaissent comme des régions

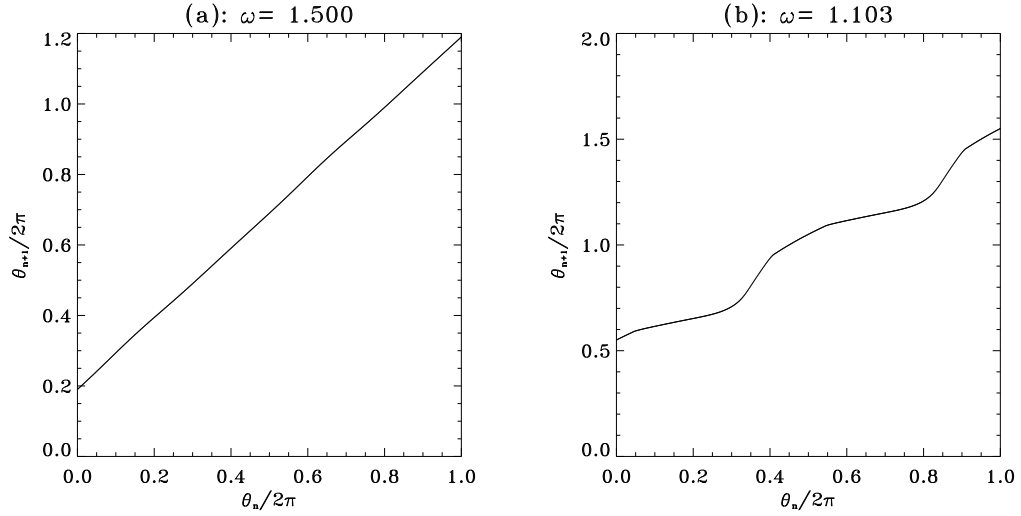


Figure 3.4: Cartes $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ pour une orbite ergodique (a) et un attracteur (b).

d'accumulation de points (*cf.* Fig. 2b et 2c). Dans le cas des modes E_2 ($\max(1, N) < \omega < \sqrt{1 + N^2}$), nous notons que les caractéristiques sont *toujours* piégées dans un de ces coins (Fig. 2c). A l'inverse, dans le cas des modes hyperboliques H_2 , l'accumulation de points n'est pas continue et quelques bandes blanches sont visibles dans le diagramme de Poincaré de la figure 2b. Toutes les orbites telles que $\omega < \eta N$ devraient être normalement piégées au niveau de la sphère interne. Ces quelques bandes blanches, qui sont bien dans la région $\omega < \eta N$, indiquent pourtant que ce piégeage n'est pas systématique; *i.e.* certaines orbites correspondent à des attracteurs (*cf.* l'exemple de la Fig. 1c). A l'aide d'un petit calcul donné dans l'annexe A de l'article, nous expliquons cette absence de piégeage de la manière suivante: il ne peut y avoir de piégeage des caractéristiques que si au moins une réflexion sur la sphère interne se passe à une latitude *supérieure* à la latitude critique. En conséquence, s'il existe un cycle limite pour les caractéristiques dont toutes les réflexions sur la sphère interne se passent *en-dessous* de la latitude critique, le piégeage n'est pas possible et l'orbite peut être périodique. A l'inverse, si l'orbite est ergodique, il y aura nécessairement au moins une réflexion interne *au-dessus* de la latitude critique et le piégeage sera inévitable !

Pour résumer cette étude des trajectoires de caractéristiques, nous avons obtenu les trois types d'orbites suivants: ergodique, périodique sous la forme d'un attracteur et focalisé dans un coin. Ce faisant, du fait de la précision finie des machines de calcul, comment pouvons-nous être sûrs qu'une orbite est ergodique et non pas périodique avec une très longue période ?

Les exposants de Lyapunov des orbites E_1

Pour illustrer ce problème, nous avons tracé les exposants de Lyapunov des orbites elliptiques dans la couche sphérique avec $N = 2.5$ (Fig. 2d). Cet exposant a été déjà défini au

chapitre précédent (*cf.* relation 2.29); dans notre cas, nous avons

$$\Lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \ln \left| \frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_n} \right| \quad (3.28)$$

où N est le nombre total de réflexions de l'orbite, θ_n la co-latitude du rebond n sur la sphère externe et $d\theta_{n+1}/d\theta_n$ la dérivée locale de la carte $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ (voir *e.g.* Maas & Lam, 1995). Pour calculer Λ_N , il nous suffit d'additionner *le long d'une orbite* les dérivées locales de la carte.

La figure 3.4 illustre deux exemples de cartes associées à des modes elliptiques E_1 pour une orbite ergodique (a) et un attracteur (b), les dérivées de ces deux cartes étant tracées sur la figure 3 de l'article. On observe que dans le cas d'une orbite ergodique, la dérivée fluctue très faiblement autour de 1 (*cf.* Fig. 3a) et l'exposant est très proche de zéro (ici, $\Lambda_\infty = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \ln f' d\theta \sim 5 \times 10^{-4}$). A l'inverse, dans le cas d'un attracteur, la dérivée locale est plus souvent inférieure que supérieure à 1 (*cf.* Fig. 3b) et les contributions négatives l'emportent dans la somme (3.28): l'exposant Λ_N est franchement négatif (*cf.* Fig. 2d de l'article au niveau de la plus large bande de cycles limites pour $\omega \simeq 1.1$).

L'image physique qui ressort de tout cela est qu'une orbite visite des régions sur la sphère externe qui sont plus ou moins contractantes; *i.e.* on a les scénarios suivants

- si les caractéristiques n'arrêtent pas de rebondir dans des régions fortement contractantes (*i.e.* où $f' = d\theta_{n+1}/d\theta_n \ll 1$), la trajectoire converge vers un attracteur et l'exposant de Lyapunov associé est négatif.
- si ces caractéristiques visitent des intervalles tantôt faiblement dilatants ($f' \lesssim 1$), tantôt faiblement contractants ($f' \gtrsim 1$), l'orbite finale sera soit ergodique, soit périodique mais de très longue période. L'exposant de Lyapunov sera quasiment nul et, en fait, guère différent de Λ_∞ . En pratique, on considérera qu'une orbite est ergodique dès que $\Lambda_\infty \leq 10^{-4}$.

3.6 Calcul des modes propres avec diffusion

La question qui vient maintenant à l'esprit est la suivante: quel est le lien entre les orbites que nous venons de calculer et les modes propres correspondants? Nous avons déjà un début de réponse au vu des résultats obtenus au chapitre précédent pour les modes de gravité bidimensionnels se propageant dans un bassin parabolique super-critique uniformément stratifié. Nous avons en effet obtenu dans ce cas les résultats suivants:

- l'orbite des caractéristiques (qui sont des droites) peut être ergodique ou périodique.
- la fonction F , qui intervient dans l'expression de la fonction de courant $\psi(x, z)$ *via* $\psi(x, z) = F(x - z) - F(x + z)$, montre des variations de plus en plus rapides au fur et à mesure que l'on s'approche d'un attracteur (*cf.* Fig. 2.12a). Ces oscillations à petite échelle se retrouvent alors directement dans le champ $\psi(x, z)$ (*cf.* Fig. 2.12b). Comme $\vec{v} \propto \vec{\nabla}\psi$, cela signifie que la vitesse diverge le long de l'attracteur.

- aucun mode propre bidimensionnel n'est associé à une orbite ergodique car l'intervalle fondamental se réduit dans ce cas à un simple point; *i.e.* la fonction de courant est nécessairement nulle dans tout le domaine.

Nous allons voir que nous aboutissons, dans le cas des modes gravito-inertiels 3D, à la même conclusion en ce qui concerne les attracteurs (ce résultat sera de plus étendu aux orbites piégées). Par contre, une différence majeure existe pour les orbites ergodiques puisque des modes propres non identiquement nuls peuvent leur être associés.

3.6.1 Formulation du problème aux valeurs propres généralisé

Trouver les modes propres gravito-inertiels avec diffusion revient à résoudre numériquement le système d'équations suivant:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ \lambda \vec{u} + \vec{e}_z \times \vec{u} &= -\vec{\nabla} \Pi + N^2 \Theta r \vec{e}_r + E \Delta \vec{u}, \\ \lambda \Theta + r u_r &= \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

où l'on cherche des solutions dont la dépendance temporelle est de la forme $e^{\lambda \gamma}$ avec $\lambda = \tau + i\omega$ (ω et τ correspondant respectivement à la fréquence et au taux d'amortissement du mode). La première étape consiste à éliminer la pression en prenant le rotationnel de l'équation pour la vitesse et nous obtenons le nouveau système suivant pour \vec{u} et Θ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ \lambda \overrightarrow{\operatorname{Rot}} \vec{u} + \overrightarrow{\operatorname{Rot}}(\vec{e}_z \times \vec{u}) &= N^2 \overrightarrow{\operatorname{Rot}}(\Theta r \vec{e}_r) - E \overrightarrow{\operatorname{Rot}}^3 \vec{u}, \\ \lambda \Theta + r u_r &= \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Les conditions limites

- sur la vitesse: appliquer une condition limite du type rigide (*i.e.* $\vec{u} = \vec{0}$) n'est pas réaliste à l'intérieur d'une étoile. Nous choisirons donc une condition du type surface libre soit (*e.g.* Rieutord, 1997, p.31):

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{e}_r &= 0 \Rightarrow u_r = 0, \\ \vec{e}_r \times ([\sigma] \vec{e}_r) &= \vec{0} \Rightarrow \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

où $[\sigma]$ représente le tenseur des contraintes adimensionné (*cf.* annexe D.4).

• sur la température: nous supposons que les sphères limitant le domaine fluide sont des conducteurs parfaits; *i.e.* qu'elles peuvent absorber un flux de chaleur quelconque tout en restant à température constante. Nous posons donc $\Theta = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$.

Les équations radiales couplées

Nous allons maintenant projeter les champs de vitesse \vec{u} et de température Θ sur une base d'harmoniques sphériques (*cf.* annexe D pour une présentation générale des Y_ℓ^m):

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} u_m^\ell(r) \vec{R}_\ell^m + v_m^\ell(r) \vec{S}_\ell^m + w_m^\ell(r) \vec{T}_\ell^m, \\ \Theta(r, \theta, \varphi) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} t_m^\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques usuelles et \vec{R}_ℓ^m , \vec{S}_ℓ^m et \vec{T}_ℓ^m sont définis par (D.2).

La projection sur les harmoniques sphériques du système (3.30), *via* les relations de l'annexe D, va nous donner les équations radiales couplées vérifiées par u_m^ℓ , w_m^ℓ et t_m^ℓ . Le champ radial v_m^ℓ est en effet éliminé au profit de u_m^ℓ par le biais de l'équation de la divergence puisque l'on a:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_m^\ell)}{dr} - \ell(\ell+1) \frac{v_m^\ell}{r} = 0 \Rightarrow v_m^\ell = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left(r \frac{du_m^\ell}{dr} + 2u_m^\ell \right)$$

et on obtient le système radial suivant où apparaissent les couplages $(\ell, \ell \pm 1)$ dûs à la force de Coriolis:

$$\left. \begin{aligned} E\Delta_\ell w_m^\ell + \left[\frac{im}{\ell(\ell+1)} - \lambda \right] w_m^\ell &= \\ -A_{\ell,m} r^{\ell-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{u_m^{\ell-1}}{r^{\ell-2}} \right) - A_{\ell+1,m} r^{-\ell-2} \frac{d}{dr} \left(r^{\ell+3} u_m^{\ell+1} \right), \\ E\Delta_\ell \Delta_\ell (r u_m^\ell) + \left[\frac{im}{\ell(\ell+1)} - \lambda \right] \Delta_\ell (r u_m^\ell) &= \\ B_{\ell,m} r^{\ell-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{w_m^{\ell-1}}{r^{\ell-1}} \right) + B_{\ell+1,m} r^{-\ell-2} \frac{d}{dr} \left(r^{\ell+2} w_m^{\ell+1} \right) + N^2 \ell(\ell+1) t_m^\ell, \\ \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta_\ell t_m^\ell - \lambda t_m^\ell &= r u_m^\ell. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

où les coefficients de couplage $(A_{\ell,m}, B_{\ell,m})$ et l'opérateur Δ_ℓ sont donnés par

$$A_{\ell,m} = \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}}, \quad B_{\ell,m} = \ell^2(\ell^2 - 1)A(\ell, m), \quad \Delta_\ell = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous utilisons l'expression du tenseur des contraintes sur la base des harmoniques sphériques qui est donnée dans l'annexe D.4. La projection des conditions sur la vitesse (3.31) et la température conduit alors à:

$$u_m^\ell = 0, \quad \frac{d^2(r u_m^\ell)}{dr^2} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{w_m^\ell}{r} \right) = 0, \quad t_m^\ell = 0 \quad (3.34)$$

Le problème aux valeurs propres généralisé

Pour une valeur fixée de m , le système (3.33) et les conditions limites (3.34) conduisent, selon la parité de la solution recherchée, à deux familles infinies d'équations différentielles fortement couplées en $\ell, \ell \pm 1$; *i.e.* une première famille sera engendrée par $\ell = |m|, |m| + 2, |m| + 4, \dots$, la seconde par $\ell = |m| + 1, |m| + 3, |m| + 5, \dots$ (*cf.* annexe D.2).

Ce faisant, l'infinité de la série des $(u_m^\ell, w_m^\ell, t_m^\ell)$ nous incite à utiliser un formalisme vectoriel, c'est-à-dire que l'on organise cette série sous la forme d'un vecteur $\vec{\psi}_m$ tel que:

$$\vec{\psi}_{m^+} = \begin{pmatrix} u_m^m \\ t_m^m \\ w_m^{m+1} \\ u_m^{m+2} \\ t_m^{m+2} \\ w_m^{m+3} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{\psi}_{m^-} = \begin{pmatrix} w_m^m \\ u_m^{m+1} \\ t_m^{m+1} \\ w_m^{m+2} \\ u_m^{m+3} \\ t_m^{m+3} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

où $|m| = m$ (on a pris $m \geq 0$) et les vecteurs $\vec{\psi}_{m^+}$ et $\vec{\psi}_{m^-}$ correspondent respectivement à une solution symétrique ou antisymétrique par rapport à l'équateur. Le système (3.33) et les conditions limites (3.34) peuvent donc être réécrits sous la forme matricielle suivante:

$$\mathcal{A} \vec{\psi}_{m^\pm} = \lambda_m \mathcal{B} \vec{\psi}_{m^\pm} \quad (3.36)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux opérateurs différentiels complexes que nous devons discrétiser. Nous obtenons ainsi un problème aux valeurs propres du type "généralisé" et trouver les modes propres gravito-inertiels avec diffusion revient à trouver les valeurs propres λ_m et les vecteurs propres associés $\vec{\psi}_{m^\pm}$.

3.6.2 La grille de collocation de Gauss-Lobatto

Pour discrétiser \mathcal{A} et \mathcal{B} , les deux méthodes suivantes sont envisagées:

- on peut utiliser un schéma aux différences finies; par exemple, la discrétisation au second ordre de la dérivée seconde d'une fonction f sur une grille uniforme r_i avec $i = 0, 1, 2, \dots, N$ conduit à:

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} \right)_i \equiv \frac{1}{(\Delta r)^2} [f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}] \Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} = \mathcal{D} f$$

où Δr est le pas de grille et \mathcal{D} est une matrice tridiagonale.

- l'autre solution consiste à développer les fonctions radiales inconnues u_m^ℓ, w_m^ℓ et t_m^ℓ sur une base de fonctions orthogonales. En utilisant alors la méthode dite de "collocation", la discrétisation des termes de dérivée revient à construire des matrices de dérivation dont les coefficients sont calculés à partir des dérivées des fonctions constituant la base orthogonale (Canuto *et al.*, 1988, p.42).

Nous avons choisi de discrétiser \mathcal{A} et \mathcal{B} *via* une méthode de collocation spectrale sur une base de polynômes de Chebyshev. Le polynôme de Chebyshev de degré k , noté $T_k(x)$, est donné par (*e.g.* Press *et al.*, 1994, p.184):

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) \Rightarrow \begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_3(x) = 2x^2 - 1 \\ T_4(x) = 4x^3 - 3x \\ \vdots \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1 \end{cases}$$

où x est une variable nécessairement comprise entre $[-1, 1]$. Le polynôme de degré N admet N zéros situés aux points

$$x_j = \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(j - \frac{1}{2} \right) \right], \quad j = 1, 2, \dots, N$$

tandis que ses $N + 1$ *extrema* (lieux où $T_N(x) = \pm 1$) sont situés en

$$x_j = \cos \left(\frac{\pi}{N} j \right), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

Pour calculer l'approximation d'une fonction f variant rapidement, choisir comme points de grille les x_j où $T_N(x)$ s'annule n'est pas très judicieux car le polynôme ne change pas de valeur entre les points x_j et x_{j+1} . À l'inverse, choisir les points où $T_N(x)$ est maximum ou minimum est particulièrement approprié car le polynôme passera de ± 1 à ∓ 1 entre x_j et x_{j+1} et pourra ainsi plus facilement reproduire les variations rapides de f . L'ensemble des points $x_j = \cos(\pi j/N)$ avec $j = 0, 1, \dots, N$ forme donc la bonne grille radiale; c'est la grille de Gauss-Lobatto et on a:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x_j) \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & \dots & T_N(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & \dots & T_N(x_1) \\ T_0(x_2) & T_1(x_2) & \dots & T_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_0(x_N) & T_1(x_N) & \dots & T_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

soit

$$f_j = T_{jk} a_k \quad \text{avec} \quad T_{jk} = \cos \left(\frac{\pi}{N} jk \right), \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.37)$$

et les coefficients a_k sont donnés par (Canuto *et al.*, 1988, p.9):

$$a_k = \frac{2}{N} \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=0}^N \frac{f_j}{\alpha_j} \cos\left(\frac{\pi}{N}jk\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

où

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq j \leq N-1 \\ 2 & \text{si } j = 0 \text{ ou } j = N \end{cases}$$

Pour calculer la dérivée f' , on part du développement (3.37) et on utilise l'expression (3.38) pour éliminer les coefficients a_k soit

$$f'_j = \sum_{k=0}^N T'_{jk} a_k = \sum_{k=0}^N T'_{jk} \left[\frac{2}{N} \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\ell=0}^N \frac{f_\ell}{\alpha_\ell} T_{\ell k} \right] = \frac{2}{N} \sum_{\ell=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{1}{\alpha_k \alpha_\ell} T'_{jk} T_{\ell k} f_\ell$$

d'où

$$f'_j = \sum_{\ell=0}^N \mathcal{D}_{j\ell} f_\ell \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_{j\ell} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\alpha_k \alpha_\ell} T'_{jk} T_{\ell k} \quad (3.39)$$

où T'_{jk} représente la dérivée du polynôme de Chebyshev de degré k évaluée aux points de collocation. La dérivée première de f sur la grille de collocation sera simplement donnée par le produit matriciel $f' = \mathcal{D}f$ où \mathcal{D} représente la matrice de dérivation de taille $(N+1)$ construite à partir du produit $T'_{jk} T_{\ell k}$. La discrétisation des opérateurs différentiels \mathcal{A} et \mathcal{B} se réduit donc au calcul de \mathcal{D} puis à des produits matriciels pour les dérivées d'ordre supérieur à l'unité; *i.e.* on a par exemple $\partial^2/\partial r^2 \equiv \mathcal{D}^2$. Nous devons néanmoins tenir compte du fait que les polynômes de Chebyshev sont définis sur $[-1, 1]$ et un changement de variable doit être préalablement effectué pour passer de $r \in [\eta, 1]$ à la variable $x \in [-1, 1]$ soit:

$$x = \frac{r - 0.5(1 + \eta)}{0.5(1 - \eta)} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} r = \eta \Rightarrow x = -1 \\ r = 1 \Rightarrow x = +1 \end{cases} \quad (3.40)$$

La méthode de dérivation sur une grille de collocation est bien évidemment supérieure à un simple schéma aux différences finies. Lors du calcul de f'_i , le produit $\mathcal{D}_{j\ell} f_\ell$ fait en effet intervenir toutes les valeurs de f sur la grille de collocation alors qu'un schéma aux différences finies du second ordre ne fait appel qu'aux valeurs de f sur les points voisins $i, i \pm 1$! Prenons par exemple le cas de l'équation de la chaleur unidimensionnelle suivante (exemple tiré de Canuto *et al.*, 1988, p.7) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad f(x, 0) = \sin \pi x$$

dont la solution analytique est $f(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$. Si l'on compare, pour un nombre donné N de points de grille, les erreurs maximales commises avec un schéma aux différences

finies du second ordre et avec une méthode de collocation sur une base de Chebyshev, on obtient le tableau suivant:

N	collocation	différences finies
8	4.58 (-4)	6.44 (-1)
10	8.25 (-6)	3.59 (-1)
12	1.01 (-7)	2.50 (-1)
14	1.10 (-9)	1.74 (-1)
16	2.09 (-11)	1.35 (-1)

où les nombres entre parenthèses correspondent à 10^0 . L'erreur que l'on fait avec seize points de grille est $\sim 10^{-11}$ pour une méthode de collocation et $\sim 10^{-1}$ pour le schéma aux différences finies ! De plus, elle est diminuée d'environ sept ordres de grandeur dans le cas spectral si on multiplie le nombre de points par deux alors qu'elle n'est divisée que par quatre dans le cas des différences finies. Nous devons plutôt augmenter considérablement l'ordre du schéma aux différences finies (avec les problèmes inhérents de codage que cela suppose) pour espérer arriver à des précisions similaires à celles d'une méthode de collocation.

3.6.3 Optimisation de la taille mémoire du problème itératif

Structure des matrices

Prenons par exemple le cas d'un mode symétrique $m = 0^+$. Le système d'équations radiales (3.33) et les conditions limites (3.34) donnent:

$$\left. \begin{aligned}
 E\Delta_\ell w_m^\ell - \lambda w_m^\ell = \\
 -A_{\ell,m} r^{\ell-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{c_m^{\ell-1}}{r^{\ell-1}} \right) - A_{\ell+1,m} r^{-\ell-2} \frac{d}{dr} \left(r^{\ell+2} c_m^{\ell+1} \right), \\
 E\Delta_\ell \Delta_\ell c_m^\ell - \lambda \Delta_\ell c_m^\ell = \\
 B_{\ell,m} r^{\ell-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{w_m^{\ell-1}}{r^{\ell-1}} \right) + B_{\ell+1,m} r^{-\ell-2} \frac{d}{dr} \left(r^{\ell+2} w_m^{\ell+1} \right) + N^2 \ell(\ell+1) t_m^\ell, \\
 \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta_\ell t_m^\ell - \lambda t_m^\ell = c_m^\ell, \\
 c_m^\ell = 0, \quad \frac{d^2 c_m^\ell}{dr^2} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{w_m^\ell}{r} \right) = 0, \quad t_m^\ell = 0 \quad \text{pour } r = \eta, 1.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

où l'on a posé $c_m^\ell = r u_m^\ell$. Le vecteur propre correspondant à ce mode est de la forme $w^1, c^2, t^2, w^3, c^4, t^4, \dots$ (l'indice $m = 0$ est omis par commodité d'écriture). Ce faisant, les

développements en série sur la base d'harmoniques sphériques et la grille de collocation de Chebyshev doivent être tronqués. Nous choisissons de nous arrêter à l'ordre L pour les Y_ℓ^m et à l'ordre N_r pour les $T_k(r)$ d'où le vecteur propre $\vec{\psi}_{0+}$ a la forme suivante:

$$\vec{\psi}_{0+} = \begin{pmatrix} w^1 \\ c^2 \\ t^2 \\ w^3 \\ c^4 \\ t^4 \\ \vdots \\ w^{L-1} \\ c^L \\ t^L \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{\psi}_{0+} = \begin{pmatrix} w^1 \\ t^2 \\ c^2 \\ w^3 \\ t^4 \\ c^4 \\ \vdots \\ w^{L-1} \\ t^L \\ c^L \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

et on aurait, par exemple pour w^1 , le développement suivant sur la grille de collocation:

$$w^1(r_i) = \sum_{k=0}^{N_r} a_k T_k(r_i)$$

Nous notons cependant que ce développement (*i.e.* les coefficients a_k) ne sera pas utilisé en pratique dans la résolution numérique car nous travaillons dans l'espace physique en ce qui concerne la partie radiale des champs. Le développement sur la grille de collocation de Chebyshev nous permet en effet de discrétiser les opérateurs différentiels en restant dans l'espace physique. A l'inverse, en développant sur les harmoniques sphériques, nous nous plaçons dans un espace spectral pour la partie angulaire. Pour revenir dans l'espace physique, afin par exemple de calculer la composante radiale u_r du champ de vitesse au point (r, θ, φ) , nous devons sommer les contributions de chaque harmonique; *i.e.*

$$u_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=2}^L \frac{c_m^\ell}{r} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad \text{avec} \quad \ell = 2, 4, 6, \dots, L$$

où les c_m^ℓ sont directement donnés dans $\vec{\psi}_{0+}$.

Deux types de vecteurs $\vec{\psi}_{0+}$, correspondant aux deux arrangements (3.42), sont possibles pour une même résolution numérique. La figure 3.5 montre que cette organisation est en fait loin d'être anodine:

- si l'on choisit d'arranger le vecteur propre selon la série $(w^1, c^2, t^2, w^3, c^4, t^4, \dots, t^L)$, on voit que la matrice \mathcal{A} admet cinq blocs de bandes (Fig. 3.5a).
- si l'on choisit l'arrangement $(w^1, t^2, c^2, w^3, t^4, c^4, \dots, c^L)$, *i.e.* si l'on permute les couples (c^ℓ, t^ℓ) , on se rend compte que \mathcal{A} ne comporte plus que quatre blocs de bandes (Fig. 3.5b) !

Lorsqu'on utilise une méthode dite "directe" pour résoudre le problème $\mathcal{A}\vec{\psi} = \lambda\mathcal{B}\vec{\psi}$ (on cherche à obtenir tout le spectre en λ), le fait que \mathcal{A} soit une matrice à quatre ou cinq blocs de bandes n'a aucune importance. L'algorithme de calcul des valeurs propres (par exemple l'algorithme QZ donné dans l'annexe E) travaille en effet sur la totalité des matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} ; *i.e.* toute la matrice \mathcal{A} est chargée en mémoire. Autrement dit, l'algorithme QZ ne préserve pas la structure à bandes des matrices. Cet inconvénient n'est pas propre à ce type d'algorithme puisqu'aucune méthode numérique directe ne fait appel à l'heure actuelle à un stockage par bande. Cette "gourmandise" en mémoire limite donc sérieusement la taille possible des matrices. De plus, on note que le temps de calcul devient lui aussi rapidement problématique car celui-ci croît comme la puissance quatrième de M (*i.e.* $T_{calc} \propto M^4$ où M correspond à l'ordre de la matrice, qui est ici proportionnel au produit $(N_r + 1) \times L$). Ces deux contraintes, à la fois sur la mémoire et sur le temps de calcul, valident ainsi l'utilisation des méthodes dites "itératives" pour la résolution numérique des grands systèmes matriciels.

Le gain en mémoire pour la méthode itérative d'Arnoldi

Nous présentons, dans l'annexe E, les principales caractéristiques des méthodes itératives utilisées dans la résolution des problèmes aux valeurs propres de grande taille. Elles sont appliquées lorsque l'on cherche à obtenir uniquement un tout petit nombre de valeurs propres λ (avec leurs vecteurs propres associés $\vec{\psi}$) au voisinage d'un point donné dans le plan complexe. Leur avantage majeur (hormis celui, évident, du gain en temps de calcul) réside dans le fait qu'elles conservent la structure à bandes des matrices; autrement dit, le programme itératif chargera uniquement les coefficients non-nuls de la matrice \mathcal{A} qui sont situés au niveau des bandes (et non la totalité des coefficients comme ce serait le cas avec une méthode directe). Dès lors, économiser une bande sur \mathcal{A} nous permet de gagner environ 20% en mémoire pour une même résolution itérative ! Si nous comparons par exemple la taille mémoire prise par le programme itératif avec cent cinquante harmoniques sphériques et polynômes de Chebyshev (*i.e.* $L = 150$ et $N_r = 150$), nous obtenons le tableau suivant:

Vecteur propre	Nbre de blocs de bandes	Mémoire (Mb)
$w^\ell, c^{\ell+1}, t^{\ell+1}$	5	420
$w^\ell, t^{\ell+1}, t^{\ell+1}$	4	345

soit effectivement une économie en mémoire de l'ordre de 20%.

3.6.4 Résultats

Le lien entre le type de l'orbite et le mode propre avec diffusion

Le résultat majeur que nous avons obtenu dans le cadre de ce premier modèle concerne le lien entre le type de l'orbite de caractéristiques et la structure du mode propre avec diffusion correspondant. Utilisant la méthode itérative, nous avons tout d'abord cherché les modes axisymétriques 0^+ associés aux attracteurs trouvés à partir des diagrammes de Poincaré (*cf.* Fig. 2 de l'article). Nous nous sommes entre autre intéressés aux modes elliptiques E_1 situés autour de $\omega \sim 1.1$ pour $N = 2.5$; *i.e.* aux modes dont nous savions que l'exposant de Lyapunov de la trajectoire de caractéristiques était fortement négatif (*cf.* Fig.

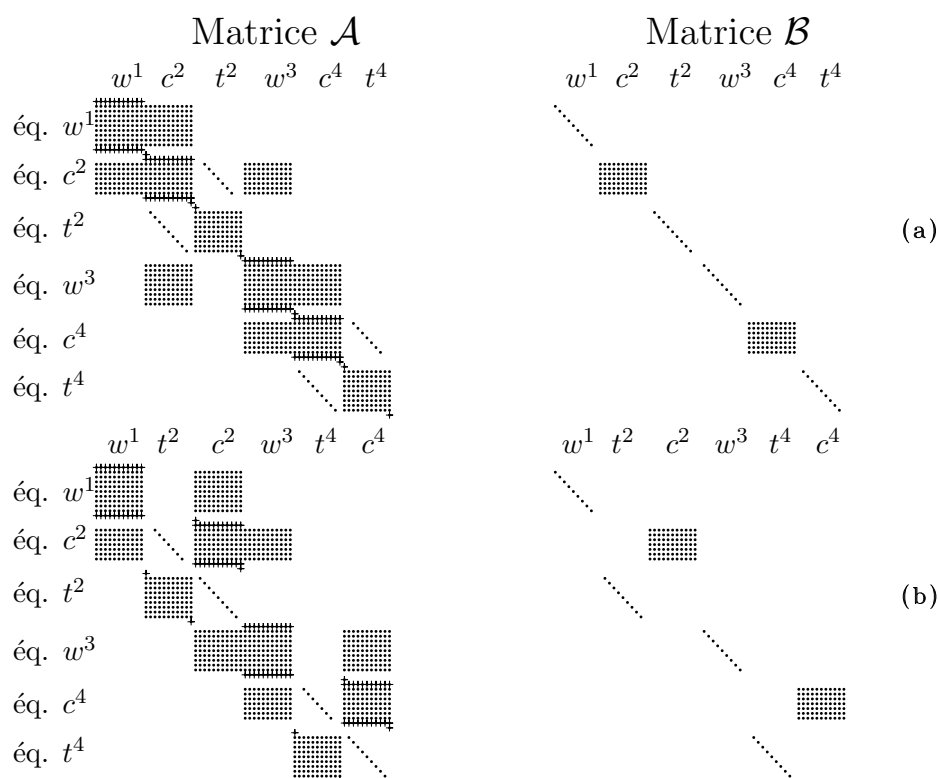


Figure 3.5: Structures des matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} pour $L = 4$ et $N_r = 10$. Les points correspondent aux coefficients matriciels non nuls et les croix en sur-impression marquent les positions dans la matrice des conditions limites en $r = \eta$ et $r = 1$. En fonction de l'arrangement choisi pour le vecteur propre $\vec{\psi}$, la matrice \mathcal{A} contiendra soit cinq blocs de bandes (cas a avec $\vec{\psi} = [w^1, c^2, t^2, w^3, c^4, t^4]$), soit quatre blocs de bandes (cas b avec $\vec{\psi} = [w^1, t^2, c^2, w^3, t^4, c^4]$). Economiser un bloc de bande sur \mathcal{A} est très intéressant si l'on utilise précisément un stockage par bande et l'on arrive ainsi à diminuer, pour une même résolution, la charge en mémoire d'environ 20% !

2d). En traçant les contours de l'énergie cinétique, de la dissipation visqueuse, de l'énergie thermique et de la dissipation thermique dans un plan méridien, nous avons alors découvert le résultat fascinant illustré par les figures 4a,4b et 4c: la structure d'un mode avec diffusion dont l'orbite de caractéristiques est un attracteur se compose d'un ensemble de couches de cisaillement internes qui sont *exactement* alignées le long du cycle limite ! Autrement dit, c'est l'orbite de caractéristiques (ici un attracteur) qui va directement donner la forme du mode propre correspondant (la position des couches de cisaillement internes) !

Ce résultat, à première vue surprenant, confirme en fait les prédictions faites au chapitre précédent sur les modes de gravité bidimensionnels se propageant dans un bassin parabolique. Nous y avons en effet observé la structure particulière que prenait la fonction de courant $\psi(x, z)$ au niveau du cycle limite pour les caractéristiques sous-jacentes (*cf.* Fig. 2.12); *i.e.* la fonction ψ variait de plus en plus rapidement au fur et à mesure que l'on se rapprochait

de l'attracteur. Comme $\vec{v} \propto \vec{\nabla}\psi$, nous avons alors prédit que la vitesse devait diverger à cet endroit. C'est bien ce que nous avons observé dans le cas des modes gravito-inertiels à trois dimensions associés aux orbites périodiques: l'énergie cinétique augmente fortement au niveau de l'attracteur, tout en restant finie du fait des processus dissipatifs à l'œuvre (*i.e.* les dissipations visqueuse et thermique).

De la même manière, nous avons montré que les modes associés aux orbites qui étaient piégées dans un coin étaient à leur tour confinés au niveau du point de focalisation (Fig. 4d et 5a). Le fait que les caractéristiques soient capturées par le coin convergent conduit en quelque sorte à la même contrainte géométrique que dans le cas d'un attracteur: les petites échelles spatiales qui sont présentes dans cette région impliquent elles aussi une divergence du champ de vitesse et un point de focalisation pour l'énergie cinétique (respectivement thermique) et la dissipation visqueuse (respectivement thermique) se forme.

La différence fondamentale avec le cas bidimensionnel se situe au niveau des orbites quasi-périodiques. Nous avons vu qu'il n'existait pas de mode de gravité à deux dimensions dont l'orbite de caractéristiques associée était ergodique (*i.e.* une orbite qui remplirait la totalité du bassin parabolique). Dans le cas tridimensionnel, ceci n'est plus valide puisque nous avons trouvé que les orbites ergodiques donnaient naissance à des solutions non-identiquement nulles dans le domaine. Nous obtenons en fait les deux types de résultats suivants pour ces orbites: (*i*) si le mode est de type H_1 ou H_2 , la singularité dans le champ de vitesse présente au niveau de la latitude critique se propage le long des caractéristiques (Stewartson & Rickard, 1969). Nous observons alors des réseaux denses de couches de cisaillement internes (Fig. 5c de l'article) qui rappellent fortement les solutions obtenues dans le cas des modes inertiels par Rieutord & Valdettaro (1997). Du fait de leurs hautes fréquences spatiales, ces modes correspondent à des solutions fortement amorties; (*ii*) si le mode est de type E_1 , il n'existe pas de latitude critique dans le domaine et aucune singularité ne se propage. Les orbites ergodiques conduisent alors à des modes propres à grande échelle qui sont faiblement amortis (Fig. 5d).

En résumé, nous avons obtenu les équivalences suivantes entre le type de l'orbite et le mode propre correspondant avec diffusion:

- des modes singuliers sont associés aux attracteurs et aux orbites qui sont piégées par un coin convergent. La divergence de la vitesse sur le cycle limite ou le point de focalisation est contrebalancée par l'action des processus dissipatifs (viscosité et/ou diffusivité thermique).
- des modes réguliers à grande échelle sont associés aux orbites ergodiques de type E_1 mais non à celles de type H_1 et H_2 . Dans ce dernier cas, une singularité (sur le champ de vitesse) se propage le long de la trajectoire quasi-périodique et engendre un réseau de fines couches de cisaillement internes.

La forme du spectre avec diffusion

Cette classification des solutions en deux ensembles régulier/singulier se retrouve dans le spectre avec diffusion puisque les taux d'amortissement associés diffèrent totalement. Si nous regardons par exemple le cas des deux modes H_1 et E_1 des figures 5c et 5d de l'article, nous nous apercevons que le mode singulier est approximativement cent fois plus amorti

que le mode régulier à nombre d'Ekman identique (ici $E = 10^{-8}$). Dès lors, une séparation claire au niveau des taux d'amortissement doit être visible sur la distribution des valeurs propres dans le plan complexe $(\omega, E/|\tau|)$.

C'est ce que nous pouvons effectivement voir sur la figure 10 de l'article où le spectre complet des modes gravito-inertiels a été calculé (*via* l'algorithme QZ) pour $E = 10^{-6}$, $\mathcal{P} = 1$ et $N = 2.5$:

- la partie “droite” du spectre (*i.e.* $1.15 \lesssim \omega$) correspond aux orbites quasi-périodiques E_1 (*cf.* le diagramme de Poincaré de la figure 2c et les exposants de Lyapunov de la figure 2d). Les modes associés à ces orbites sont réguliers et conduisent à des valeurs propres faiblement amorties.
- à l'inverse, la partie “gauche” du spectre (*i.e.* $\omega \lesssim 1.15$) correspond aux modes singuliers fortement amortis. En particulier, nous notons que la bande d'attracteurs située autour de $\omega \sim 1.1$ (*cf.* Fig. 2c et 2d) apparaît clairement dans la distribution sous la forme d'un groupe compact de valeurs propres ayant un taux d'amortissement moyen environ dix à cent fois supérieur à celui des solutions régulières voisines.

De plus, nous constatons que les valeurs propres des modes réguliers s'organisent le long de familles à deux dimensions: une première dimension correspond au degré ℓ du mode tandis que la seconde donne son ordre n (*i.e.* son nombre de nœuds radiaux; *cf.* Fig. 9 de l'article). Autrement dit, nous sommes en présence d'un opérateur presque séparable en (r, θ) similaire à celui des modes de gravité; *i.e.* ses valeurs propres $\lambda_{\ell n}$ se répartissent en fonction des nombres quantiques possibles ℓ et n .

Pourtant, cette organisation à deux dimensions disparaît dans la partie singulière du spectre. Comment pourrions nous en effet définir le nombre de nœuds radiaux d'un attracteur ? Si l'on prend par exemple le cas des modes singuliers de la figure 4, nous notons qu'un couplage fort apparaît entre les variables r et θ : la distribution d'énergie cinétique dans le plan méridien ne peut être reproduite par un produit simple de deux fonctions séparables; *i.e.* $E_c(r, \theta) \neq f(r)g(\theta)$. Il est par conséquent normal que les valeurs propres correspondant aux solutions singulières soient distribuées de manière chaotique puisqu'elles n'obéissent à aucune règle de quantification précise sur, par exemple, le nombre de nœuds radiaux des fonctions propres associées: le problème n'est plus séparable !

La forme du spectre dans la limite adiabatique: le cas des modes singuliers

Nous pouvons intuitivement prévoir que la forme du spectre va radicalement changer dans la limite adiabatique: en l'absence d'un processus efficace de dissipation pouvant s'opposer à la divergence de la vitesse (au niveau des attracteurs et/ou des points de focalisation), les solutions singulières ne peuvent physiquement exister. Le spectre sans diffusion doit par conséquent être “vide” dans les intervalles correspondant aux modes singuliers !

Il est numériquement difficile d'étudier précisément la limite asymptotique d'un mode singulier. La méthode est au demeurant simple puisqu'il nous suffit, pour un nombre de Prandtl \mathcal{P} donné, de diminuer progressivement la viscosité (*via* le nombre d'Ekman E) et d'observer l'évolution: (*i*) de la valeur propre du mode, c'est-à-dire de ω et de τ ; (*ii*) de la structure du mode, par exemple sa distribution d'énergie cinétique dans un plan méridien.

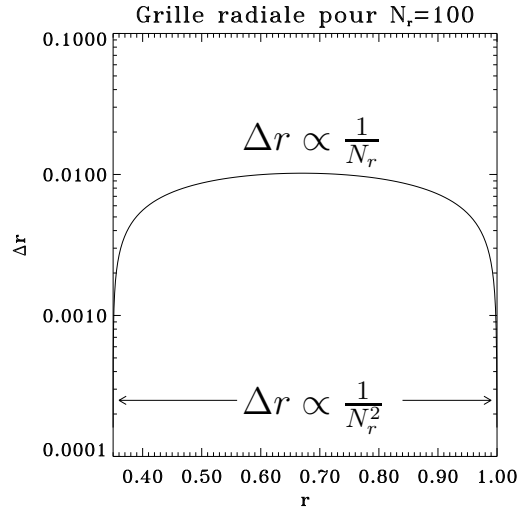


Figure 3.6: Variations du pas de grille Δr en fonction de r pour $\eta = 0.35$ et $N_r = 100$.

La principale difficulté vient du fait que l'épaisseur δ des couches de cisaillement internes dépend précisément de la viscosité, selon les mêmes lois d'échelles que celles trouvées par Gans (1983) pour les modes inertiels (*cf.* l'annexe C de l'article pour une généralisation de ces lois au cas stratifié); *i.e.* on a :

$$\delta \sim \mathcal{O}(E^{1/4}) \quad \text{ou} \quad \delta \sim \mathcal{O}(E^{1/3})$$

La validité de ces comportements d'échelle a été vérifié en traçant, à deux nombres d'Ekman différents $E_1 = 10^{-6}$ et $E_2 = 10^{-7}$, la dissipation visqueuse d'un mode singulier 0^+ de type E_1 (Fig. 13 de l'article). Sa structure se compose de trois couches de cisaillement (Fig. 13b) dont les épaisseurs évoluent différemment avec E : la couche centrale varie comme $\delta \sim \mathcal{O}(E^{1/3})$ tandis que les des deux couches adjacentes varient comme $\delta \sim \mathcal{O}(E^{1/4})$ (Fig. 13c). Ces couches de cisaillement en $E^{1/4}$ et $E^{1/3}$ sont typiques aux fluides visqueux en rotation puisqu'elles se rencontrent aussi dans le cas d'écoulements stationnaires emprisonnés entre: (i) deux disques coaxiaux en rotation dont l'un tourne légèrement plus vite que l'autre (Stewartson, 1957); (ii) deux sphères concentriques en rotation quasi-identique (Proudman, 1956; Stewartson, 1966). Dans ce dernier cas, on note qu'une couche supplémentaire en $E^{2/7}$ est possible.

Nous savons d'autre part que la grille de collocation de Gauss-Lobatto n'est pas homogène; *i.e.* que le pas d'une grille ayant N_r points varie comme $\Delta r \sim 1/N_r^2$ sur ses bords et comme $\Delta r \sim 1/N_r$ en son milieu (Fig. 3.6). Si nous voulons, par exemple, décrire la structure d'une couche de cisaillement interne telle que $\delta \sim \mathcal{O}(E^{1/3})$ et $r \sim 0.5$ (c'est le cas qui est numériquement le plus défavorable), nous devons prendre au minimum $N_r \sim E^{-1/3}$ points de grille d'où le tableau suivant:

Nbre d'Ekman E	Nbre de points N_r	Mémoire (Mb)
10^{-5}	46	109
10^{-6}	100	345
10^{-7}	215	1352

où la mémoire nécessaire est donnée pour une même résolution angulaire $L = 150$. On voit que diminuer d'un ordre de grandeur le nombre d'Ekman revient environ à multiplier la taille de notre problème matriciel d'un facteur quatre² ! En pratique, le nombre d'Ekman minimum que nous avons pu atteindre, dans les cas les plus favorables, est $E_{min} \sim 10^{-8}$.

L'évolution de ω et $|\tau|$ avec le nombre d'Ekman, pour un mode singulier E_1 , est illustrée par la figure 14 de l'article. Son taux d'amortissement suit une loi de puissance du type $|\tau| \sim E^{1/3}$ alors que sa fréquence ω décroît lentement avec E . L'exposant $1/3$ apparaissant dans la loi d'évolution pour $|\tau|$ peut facilement s'expliquer si l'on note que la plus petite échelle que nous puissions trouver dans le domaine est $\delta \sim \mathcal{O}(E^{1/3})$. Si l'on suppose que la dissipation visqueuse l'emporte sur la dissipation thermique, le taux d'amortissement du mode est grossièrement donné par:

$$|\tau| \sim E \frac{\int_V (\sigma_{ij})^2 d^3r}{\int_V u^2 d^3r} \sim \frac{E}{\delta^2} \quad \text{soit} \quad |\tau| \sim E^{1/3} \quad \text{si} \quad \delta \sim \mathcal{O}(E^{1/3})$$

où l'on a exploité le fait que le tenseur des contraintes σ_{ij} , qui est proportionnel au gradient de la vitesse (cf. annexe D.4), varie comme $\sigma_{ij} \sim \partial u / \partial r \sim u / \delta$ au niveau d'une couche de cisaillement.

Cette dépendance en $E^{1/3}$ n'est pas toujours aussi idéalement observée, comme nous pouvons le voir sur la figure 15 où les taux d'amortissement de trois modes singuliers de type H_2 suivent des lois de puissance différentes en fonction du nombre d'Ekman (*i.e.* $|\tau| \sim E^a$ avec $a = 0.16, 0.81, 0.57, 0.90, 0.92, \dots$). Du fait de cette non-universalité de l'exposant a , des bifurcations entre modes apparaissent lorsque la viscosité diminue. Ces bifurcations, qui sont aussi observées dans le cas des modes inertiels (Rieutord & Valdettaro, 1997), ne sont pourtant pas systématiques puisqu'elles ne sont pas visibles sur la figure 14. En fait, elles peuvent être vues comme un régime transitoire lorsque $E \rightarrow 0$; *i.e.* on a le scénario suivant:

- le mode interagit au départ avec ses plus proches voisins si ces derniers n'ont pas exactement la même loi de puissance sur $|\tau|$ que lui. Au cours de ces bifurcations, son taux d'amortissement ainsi que sa fréquence changent (Fig. 3.7).
- le régime asymptotique s'installe en-dessous d'un nombre d'Ekman critique; *i.e.* le taux d'amortissement du mode se met à suivre *exactement* une loi de puissance du type $|\tau| \sim E^{1/2}$ ou $|\tau| \sim E^{1/3}$. Les bifurcations s'arrêtent et la fréquence évolue lentement, sans pour autant tendre vers une valeur limite précise, à l'image du mode de la figure 14. L'épaisseur δ des couches de cisaillement internes diminue suivant les lois $\delta \sim E^{1/4}$ ou $\delta \sim E^{1/3}$ et la structure du mode tend vers le cycle limite final. A viscosité nulle, il est clair que le mode propre ne peut exister car son support se

²On peut en effet facilement s'apercevoir que la mémoire nécessaire est $\propto N_r^2$.

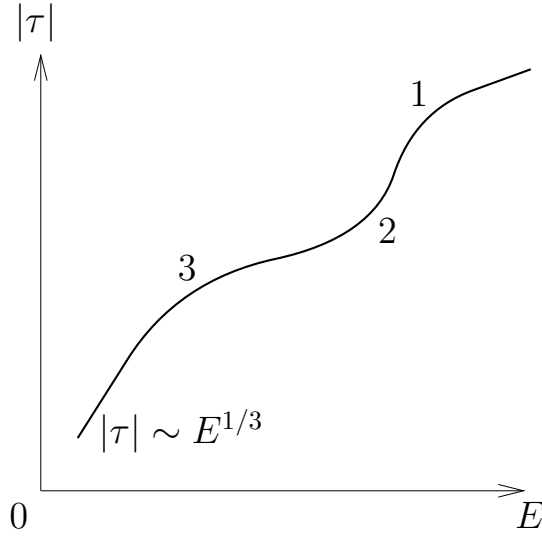


Figure 3.7: Illustration du régime transitoire d'un mode singulier lorsque l'on fait décroître le nombre d'Ekman E . Les chiffres 1, 2 et 3 indiquent les positions des bifurcations que subit le mode avant d'atteindre le régime asymptotique où $|\tau| \sim E^{1/3}$.

résumerait à une simple ligne. Le champ de vitesse, qui serait alors semblable à une distribution, cesserait d'être de carré sommable: le spectre doit donc *nécessairement* se vider de ses modes singuliers dans la limite adiabatique !

La forme du spectre dans la limite adiabatique: le cas des modes réguliers

L'étude de la limite asymptotique des modes réguliers est bien plus facile à mener que celle des modes singuliers car leur structure est indépendante de la viscosité; *i.e.* on a

$$|\tau| \sim E \frac{\int_V (\sigma_{ij})^2 d^3r}{\int_V u^2 d^3r} \sim E \quad \text{car} \quad \sigma_{ij} \sim \mathcal{O}(1)$$

Ceci est illustré par la figure 11 de l'article où le profil radial de la dissipation visqueuse d'un mode régulier a été tracé pour les deux valeurs du nombre d'Ekman $E_1 = 10^{-5}$ et $E_2 = 10^{-9}$. Nous n'avons pas besoin de remettre ces profils à l'échelle (comme nous l'avons fait sur la figure 13) car leur forme ne dépend plus de la viscosité. Par conséquent, le taux d'amortissement de ce mode décroît *linéairement* avec E tandis que sa fréquence tend vers une valeur asymptotique précise correspondant à la solution à $E = 0$ (Fig. 12 de l'article). Le spectre sans diffusion *dans la couche sphérique* est donc uniquement composé des modes réguliers de type E_1 associés aux orbites quasi-périodiques !

Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell

By **B. DINTRANS**¹, **M. RIEUTORD**^{1,2} AND **L. VALDETTARO**³

¹Observatoire Midi-Pyrénées, 14 av. E. Belin, F-31400 Toulouse, France

²CERFACS, 42, Avenue Coriolis, F-31057 Toulouse, France

³Dip. di Matematica, Politecnico di Milano, Piazza L. da Vinci, 32, 20133 Milano, Italy

(Received 28 April 1998 and in revised form 9 June 1999)

The properties of gravito-inertial waves propagating in a stably stratified rotating spherical shell or sphere are investigated using the Boussinesq approximation. In the perfect fluid limit, these modes obey a second-order partial differential equation of mixed type. Characteristics propagating in the hyperbolic domain are shown to follow three kinds of orbits: quasi-periodic orbits which cover the whole hyperbolic domain; periodic orbits which are strongly attractive; and finally, orbits ending in a wedge formed by one of the boundaries and a turning surface. To these three types of orbits, our calculations show that there correspond three kinds of modes and give support to the following conclusions: First, with quasi-periodic orbits are associated regular modes which exist at the zero-diffusion limit as smooth square-integrable velocity fields associated with a discrete set of eigenvalues, likely dense in some subintervals of $[0, N]$, N being the Brunt-Väisälä frequency. Second, with periodic orbits are associated singular modes which feature a shear layer following the periodic orbit; as the zero-diffusion limit is taken, the eigenfunction becomes singular on a line tracing the periodic orbit and is no longer square-integrable; as a consequence the point spectrum is empty in some subintervals of $[0, N]$. It is also shown that these internal shear layers contain the two scales $E^{1/3}$ and $E^{1/4}$ as pure inertial modes (E is the Ekman number). Finally, modes associated with characteristics trapped by a wedge also disappear at the zero-diffusion limit; eigenfunctions are not square-integrable and the corresponding point spectrum is also empty.

1. Introduction

Gravito-inertial waves are waves that propagate in a rotating stably stratified fluid. When studying the dynamics of stars, such waves are important as they are good candidates for transporting angular momentum and chemical elements in stably stratified regions such as radiative zones (see Kumar P. and Quateart E.(1997) and Zahn J.-P., Talon S. and Matias J.(1997)). Still in the astrophysical context, the variability of certain rapidly rotating stars such as γ Doradus (Balona L. A., Böhm T., Foing B. H., Ghosh K. K., Janot-Pacheco E., Krisciunas K., Lagrange A.-M., James S. D., Baudrand J., Catala C., Dreux M., Felenbok P. and Hearnshaw J. B.(1996)) cannot be understood with perturbative analysis of pure gravity modes as commonly done on slowly rotating stars (see Unno W., Osaki Y., Ando H. and Shibahashi H.(1979)); a possible explanation is that such pulsations result from the excitation of gravito-inertial modes. In the geophysical context, such waves are also of interest, especially in oceans where they should play an important part in mixing processes (Maas L., Benielli D., Sommeria J. and Lam F.-P.(1997)).

The properties of the oscillations of a rotating stratified fluid in a container have been investigated only recently (Friedlander S. and Siegmann W.(1982a)). Stewartson K. and Walton I.(1976) attacked this problem in the limiting case of a thin shell. They found that the existence of singular solutions is connected with the strength of the stratification, a result which we confirm for the general case. Friedlander & Siegmann (1982a, 1982b) and Friedlander S.(1982) were the first to report on the general properties of such modes, showing in particular the mixed nature of the partial differential equations governing the perfect fluid oscillations. They demonstrated that when the Brunt-Väisälä frequency is proportional to the radial distance, the turning surface separating the hyperbolic domain from the elliptic one is either a hyperboloid or an ellipsoid. Then, the asymptotic case of weak stratification was investigated more thoroughly by Friedlander S.(1987).

The aim of the present paper is to further investigate the properties of gravito-inertial modes and, we hope, give a better understanding of their complicated dynamics. It extends our work on pure inertial waves in a spherical shell, hereafter referred to as paper I (Rieutord M. and Valdetaro L.(1997)). As in that paper, we restrict ourselves to axisymmetric modes, but we shall see that our conclusions are general.

Pure mathematical approaches are difficult because linearized Euler equations are degenerate elliptic and no general spectral theorem applies (S. Friedlander, private communication); in addition, the problem's variables are not separable, rendering the analysis intractable; we thus turn towards numerical solutions of modal equations that include viscosity and thermal diffusivity. Thanks to a powerful eigenvalue solver, we have been able to explore a wide range of viscosities and diffusivities and therefore to give a good picture of gravito-inertial modes in the limit of a perfect fluid. We recall that astrophysical or geophysical situations always require very small diffusivities.

Our results may be summarized as follows : as the perfect fluid limit is approached, most of the modes become singular and only a countable set of regular modes may survive in some region of the spectrum. By regular modes we understand solutions of the inviscid equations with at least a continuous square-integrable velocity field. Singular solutions are all other types of velocity fields which do not meet the above requirements. In fact, singular modes are modes whose characteristics are focused towards an attractor: a wedge (formed by turning surfaces and boundaries) or a periodic orbit; their velocity field is not square-integrable ; they usually also contain a singularity on the axis and possibly one at the critical latitude, but these two singularities are square-integrable. Our results give strong evidence that the regular or singular nature of modes can be determined from purely geometric considerations based on the paths of characteristics.

This classification of modes has far reaching consequences for the dynamics of stars : regular modes are the best candidates for driving pulsations of variable stars since they are the least damped, while singular modes will be efficient at transporting angular momentum or, more generally, at mixing. Such modes may be excited by various effects such as the kappa-mechanism, tidal forcing or turbulent plumes of a neighbouring convection zone.

The ratio of the inner radius to the outer radius of the shell, η , is set in most cases to 0.35. This is the geometry of the radiative zone of a three solar mass star as well as the geometry of the liquid core of the Earth, although this latter application, which we consider in ?, is not to be taken literally since this body may be stably stratified only in a small fraction of its volume (Lister J. and Buffett B.(1995), ?).

The plan of the paper is the following : After setting out the equations of the system and recalling the method we use for solving them (section 2), we first investigate the different ways characteristics behave (section 3.1) as a function of frequency and stratification. After a classification of the different behaviours, we inspect the corresponding

numerical solutions of the partial differential equations and show how the propagation of characteristics influences the shape of the modes (section 3.2). The evolution of mode patterns as viscosity or thermal diffusion are decreased is also considered (section 3.3). We lastly present a study of the distribution of eigenvalues in the complex plane (section 3.4). We conclude with a general discussion on inertial and gravito-inertial modes as well as on the immediate implications in astrophysics.

2. Formulation

2.1. The equations using the Boussinesq approximation.

For the sake of simplicity, we consider a spherical shell where heat sinks are uniformly distributed so that the temperature gradient is of the form $\beta\vec{r}/R$, β being a positive constant and R the outer radius of the shell. Using the Boussinesq approximation, we are led to consider a gravity field of the form $\vec{g} = -g_0\vec{r}/R$, g_0 being the acceleration due to gravity at $r = R$. Such a configuration has been employed several times in the past for studies of convection[†] in spherical geometry (see Chandrasekhar S.(1961) or more recently Zhang K.K.(1995)). In order to easily connect the present results with those of paper I, we use the same length and time scales. These are the radius of the outer shell R for the length scale and $(2\Omega)^{-1}$ for the time scale; Ω being the angular velocity ($\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$). Equations of perturbations in a rotating frame are well known and we directly write their non-dimensional linearized form:

$$\begin{cases} \lambda\vec{u} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\nabla\Pi + N^2\Theta\vec{r} + E\Delta\vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \lambda\Theta + ru_r = \frac{E}{\mathcal{P}}\Delta\Theta \end{cases} \quad (2.1)$$

where we assumed a time-dependence of the form $\exp(\lambda t)$; we will often write the complex eigenvalue $\lambda = \tau + i\omega$, τ being the damping rate and ω the frequency. The variables \vec{u} , Π and Θ are respectively the velocity, reduced pressure and temperature perturbations. E denotes the Ekman number, \mathcal{P} the Prandtl number and N the dimensionless Brunt-Väisälä frequency with

$$E = \frac{\nu}{2\Omega R^2}, \quad \mathcal{P} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad N^2 = \frac{\alpha\beta g_0}{4\Omega^2} \quad (2.2)$$

where ν is the kinematic viscosity, κ is the thermal diffusivity, α is the coefficient of volume expansion and g_0 and β are respectively the gravity and temperature gradients at $r = 1$. The fluid's stratification is stable; therefore, $N^2 > 0$.

As in paper I, we use stress-free boundary conditions for the velocity. Such conditions are more realistic for applications to stars or planets; they prove also to be more convenient for showing internal shear layers of the solutions. Thus on both shells:

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_r = \vec{0} \quad \text{and} \quad \vec{e}_r \times ([\sigma]\vec{e}_r) = \vec{0} \quad (2.3)$$

with $[\sigma]$ being the stress tensor and \vec{e}_r the unit radial vector. Concerning the boundary conditions on temperature, we assumed for simplicity a perfect conductor on both shells. Thus $\Theta = 0$ on the inner and outer shells.[‡]

[†] In this case heat sinks are replaced by heat sources.

[‡] Actually, the use of insulating boundary conditions introduces only minor differences from solutions presented below as no thermal boundary layer exists.

2.2. Numerics

Following Rieutord (1987,1991), we expand the velocity and temperature on spherical harmonics as

$$\vec{u} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} u_m^\ell(r) \vec{R}_\ell^m + v_m^\ell(r) \vec{S}_\ell^m + w_m^\ell(r) \vec{T}_\ell^m, \quad \Theta = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} t_m^\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (2.4)$$

where $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ denotes the normalized spherical harmonics and

$$\vec{R}_\ell^m = Y_\ell^m(\theta, \phi) \vec{e}_r, \quad \vec{S}_\ell^m = \nabla Y_\ell^m, \quad \vec{T}_\ell^m = \nabla \times \vec{R}_\ell^m$$

Taking the curl of the momentum equation and projecting on the vectorial harmonics \vec{R}_ℓ^m and \vec{T}_ℓ^m , we obtain the radial equations satisfied by $u_m^\ell(r)$, $w_m^\ell(r)$ and $t_m^\ell(r)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E\Delta_\ell w_m^\ell + \left[\frac{im}{\ell(\ell+1)} - \lambda \right] w_m^\ell = \\ \quad -A(\ell, m)r^{\ell-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{u_m^{\ell-1}}{r^{\ell-2}} \right) - A(\ell+1, m)r^{-\ell-2} \frac{d}{dr} \left(r^{\ell+3} u_m^{\ell+1} \right) \\ \\ E\Delta_\ell \Delta_\ell (r u_m^\ell) + \left[\frac{im}{\ell(\ell+1)} - \lambda \right] \Delta_\ell (r u_m^\ell) = \\ \quad B(\ell, m)r^{\ell-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{w_m^{\ell-1}}{r^{\ell-1}} \right) + B(\ell+1, m)r^{-\ell-2} \frac{d}{dr} \left(r^{\ell+2} w_m^{\ell+1} \right) + N^2 l(l+1) t_m^\ell \\ \\ \frac{E}{p} \Delta_\ell t_m^\ell - \lambda t_m^\ell = r u_m^\ell \end{array} \right. \quad (2.5)$$

where

$$A(\ell, m) = \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}}, \quad B(\ell, m) = \ell^2(\ell^2 - 1)A(\ell, m), \quad \Delta_\ell = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

The boundary conditions for radial functions are now :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^\ell = \frac{\partial^2 r u_m^\ell}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_m^\ell}{r} \right) = 0 \\ \\ t_m^\ell = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Formally, the system (2.5) may be written as

$$\mathcal{M}_A \vec{\psi}_m = \lambda \mathcal{M}_B \vec{\psi}_m, \quad (2.7)$$

where \mathcal{M}_A and \mathcal{M}_B are two differential operators and λ is the complex eigenvalue associated with eigenvector $\vec{\psi}_m$

$$\vec{\psi}_{m+} \begin{array}{c} u_m^m(r) \\ t_m^m(r) \\ w_m^{m+1}(r) \\ u_m^{m+2}(r) \\ t_m^{m+2}(r) \\ \vdots \\ \vdots \end{array}, \quad \text{or} \quad \vec{\psi}_{m-} \begin{array}{c} w_m^m(r) \\ u_m^{m+1}(r) \\ t_m^{m+1}(r) \\ w_m^{m+2}(r) \\ u_m^{m+3}(r) \\ \vdots \\ \vdots \end{array}.$$

Here $\vec{\psi}_{m+}$ and $\vec{\psi}_{m-}$ denote respectively symmetric or antisymmetric solutions with respect to the equator. The differential eigenvalue problem (2.7) is discretized in the radial direction using the values of the $\vec{\psi}_m$ on the Gauss-Lobatto grid associated with Chebyshev polynomials. After truncating at order L for the spherical harmonics basis and at order N_r for the Chebyshev basis, the problem becomes a generalized algebraic eigenvalue problem whose dimension is of order $L \times N_r$. Two algorithms will then be used:

- (a) the QZ algorithm for computing the whole spectrum of complex eigenvalues λ and the associated eigenvectors $\vec{\psi}_m$;
- (b) the incomplete Arnoldi-Chebyshev algorithm for computing some pairs $(\lambda, \vec{\psi}_m)$ around a given value of λ (Arnoldi W.E.(1951), Saad Y.(1992)).

All the results of these computations (section 3.2 and following) have been obtained for $m = 0$ modes.

3. Results

3.1. Turning surfaces and paths of characteristics

3.1.1. Turning surfaces and mode classification

In the case of pure inertial modes, the inviscid pressure equation (i.e., the Poincaré equation) is hyperbolic in the whole domain. The characteristics associated with this hyperbolic problem form a web of straight lines which reflect on the boundaries and propagate in the whole shell (see [I]). Adding a stratification deeply modifies this structure by making the pressure operator of mixed type with elliptic and hyperbolic regions separated by a turning surface. The equation of this surface was first derived by Friedlander S. and Siegmann W.(1982b). It reads

$$\frac{s^2}{\omega^2 - 1} + \frac{z^2}{\omega^2} = \frac{1}{N^2} \quad (3.1)$$

where (s, z) are cylindrical coordinates. According to the values of (ω, N) , this surface is either a hyperboloid or an ellipsoid. Following Friedlander and Siegmann, we distinguish four types of modes:

- two “hyperbolic modes”, hereafter called *H*-modes, with hyperboloidal turning surfaces:

$$\begin{aligned} H_1 : & \quad N < \omega < 1 \\ H_2 : & \quad 0 < \omega < \min(1, N) \end{aligned} \quad (3.2)$$

for which the turning surface is respectively outside or inside the shell.

- two “elliptic modes”, hereafter called *E*-modes, with ellipsoidal turning surfaces:

$$\begin{aligned} E_1 : & \quad 1 < \omega < N \\ E_2 : & \quad \max(1, N) < \omega < \sqrt{1 + N^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

for which the hyperbolic region respectively encompasses the rotation axis or not.

These four types of modes are illustrated in figure 1 for a shell with $\eta = 0.35$. The curved characteristics now reflect both on the boundaries and on turning surfaces; they are solutions of the following differential equation (Friedlander S. and Siegmann W.(1982b)):

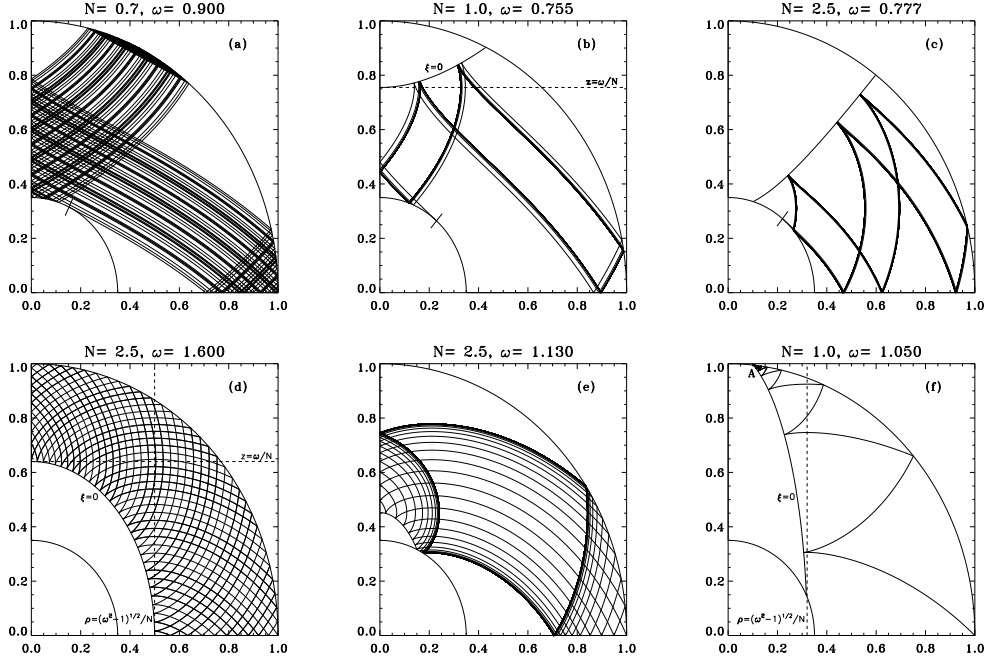


FIGURE 1. Paths of characteristics for H_1 -modes (a), H_2 -modes (b) and (c), E_1 -modes (d) and (e), and E_2 -modes (f). The tick on the inner shell marks the critical latitude $\sin \vartheta_c = \omega$. The apex of the turning surface $\xi = 0$ is on the axis at $z_c = \omega/N$. The semi-minor axis for E -modes is at $s = \sqrt{\omega^2 - 1}/N$. A hundred reflections have been drawn on each diagram.

$$\frac{dz}{ds} = \frac{zsN^2 \pm \xi^{1/2}}{\omega^2 - N^2z^2}, \quad \xi = \omega^2N^2s^2 + (1 - \omega^2)(\omega^2 - N^2z^2) \quad (3.4)$$

We note that the turning surface (3.1) corresponds to $\xi = 0$ and that characteristics are normal to it.

Non-axisymmetric modes share the same characteristics and turning surfaces as axisymmetric ones, since the inclusion of a $\exp(im\phi)$ -dependence does not modify the second-order derivative terms. The following results on characteristics' paths are therefore independent of this symmetry.

3.1.2. Paths of characteristics

A simple way to investigate the properties of solutions of the inviscid equations is to compute the paths of characteristics in the fluid's volume. Such an approach has also been considered by Maas L. and Lam F.-P.(1995) in the case of internal gravity waves confined in a two dimensional parabolic basin.

The paths of characteristics, as shown by figure 1, may be better represented by a map $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ where θ_n is the colatitude of the n th reflection point. Contrary to the case treated by Maas and Lam, however, no analytical expression is known for our maps which are, in addition, not continuous functions for H -modes. The representation with Poincaré diagrams appears to be the most convenient one. The four different cases are illustrated in figure 2.

The first result shown by these figures is the dominance of very long-period orbits for which reflection points seem to be distributed over all angles. Such orbits may also

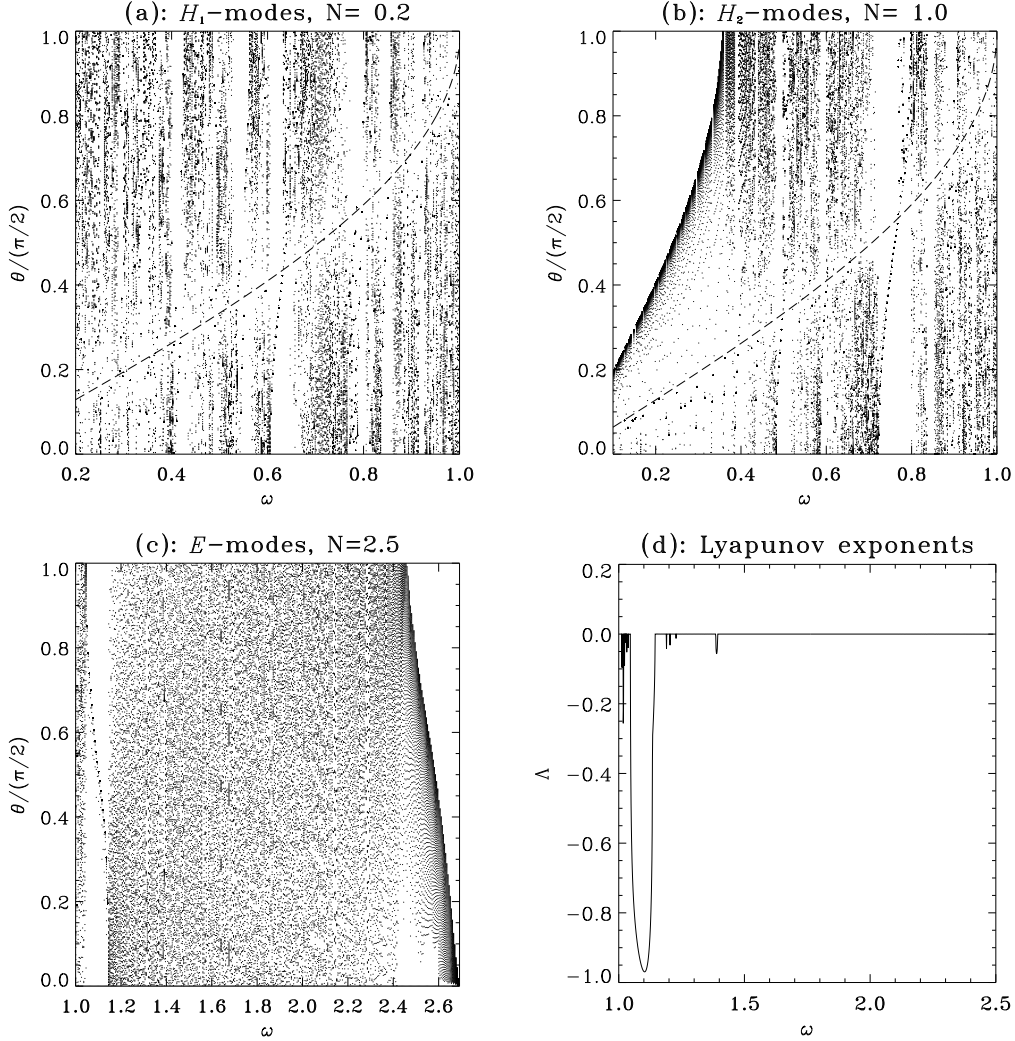


FIGURE 2. (a) and (b) Poincaré diagrams for H -modes: for each value of ω we plot all the colatitudes of reflection points of the orbit on the inner sphere; for legibility we plot only a hundred points per frequency. Note the absence of reflections near the critical latitude emphasized by a dashed line; such a latitude acts as a repeller as noticed by Maas L. and Lam F.-P.(1995). Most of the trajectories seem quasi-periodic except those confined in some limit cycle bands. In figure (b), a clear accumulation of points denotes the presence of a wedge formed by the turning surfaces and the inner sphere. (c) Poincaré diagrams for E -modes with a hundred reflections on the outer sphere. A large band of periodic orbits with $1.046 \lesssim \omega \lesssim 1.145$ appears but quasi-periodic orbits are still the most numerous. (d) The Lyapunov exponent clearly exhibits the bands of periodic orbits. The absence of points at frequencies $2.4 \lesssim \omega \lesssim N$ is an artefact of plotting, for E_1 -characteristics are quasi-focused near the pole since the turning ellipsoid is almost tangent to the outer sphere.

be quasi-periodic or ergodic and therefore may never close. The distinction between very long-period orbits and ergodic ones is difficult numerically. In fact, one can never be sure, using numerical calculations, that an orbit is of ergodic type, because of the finite precision of the computation. Nevertheless, we found, as did Maas L. and Lam F.-P.(1995), that the Lyapunov exponent, defined along a trajectory by

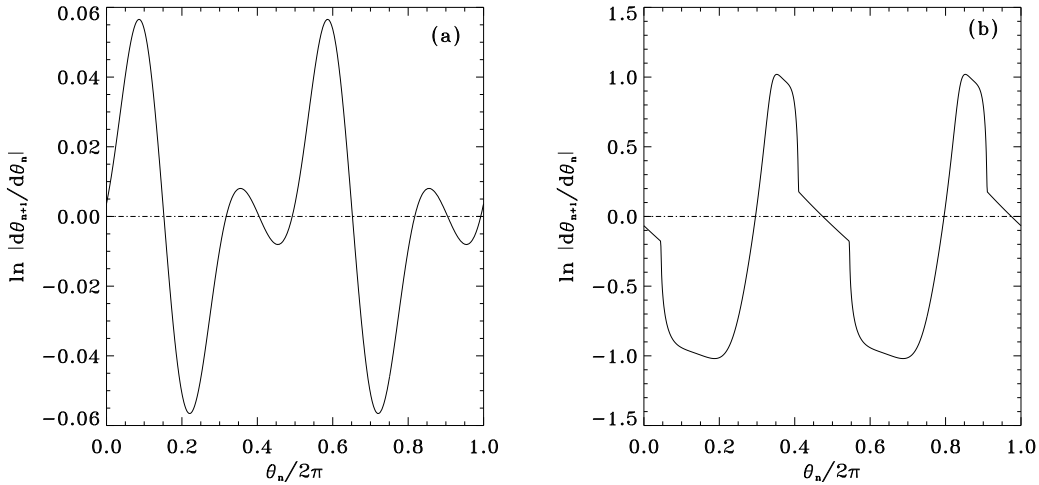


FIGURE 3. Logarithm of the map derivative for a very long period orbit with $\omega = 1.500$ (a) and for a periodic orbit with $\omega = 1.103$ (b).

$$\Lambda_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}-1} \ln \left| \frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_n} \right| \quad (3.5)$$

is a good indicator of both (i) the period of the final orbit and (ii) the transient of reflections needed to reach this orbit.

The first point is illustrated by figure 2d, which gives Lyapunov exponents for the E -modes with $N = 2.5$. Some bands of periodic orbits with negative Lyapunov exponents clearly emerge, especially the ones for frequencies such that $1.046 < \omega < 1.145$. We observe the correspondence between these bands of periodic orbits and the narrow vertical white ones in the Poincaré diagram 2c. Moreover, the similar white bands appearing in the Poincaré diagrams 2a and 2b also correspond to periodic orbits. It is worth noting that these periodic orbits are all strong attractors with $\Lambda < 0$ while other systems, like gravity modes in a rectangular or semi-elliptic basin, have periodic orbits with $\Lambda = 0$ (see Maas L. and Lam F.-P.(1995)). In our case we did not detect such orbits, however. A unique period P (defined as the number of reflections on the outer sphere) is associated with each of these bands. We obtain $P = 1$ for the band near $\omega \sim 1.1$ with $\Lambda_{min} \simeq -0.97$, $P = 2$ for those at $\omega \sim 1.4$ with $\Lambda_{min} \simeq -5.57 \times 10^{-2}$ and $P = 4$ for those at $\omega \sim 1.2$ with $\Lambda_{min} \simeq -1.12 \times 10^{-2}$.

In fact, the low absolute value of the Lyapunov exponents outside the preceding bands of frequencies may be understood by plotting the function $\ln |d\theta_{n+1}/d\theta_n|$. As shown in figure 3a, a very long period orbit results from the almost perfect matching between contracting intervals (*i.e.*, intervals where $\ln |d\theta_{n+1}/d\theta_n| < 0$) and expanding ones. In this case, computing the corresponding Lyapunov exponent along a trajectory from its definition (3.5) is not possible because of the extreme slowness of the convergence of the series. However, assuming the θ_n 's are evenly distributed in $[0, 2\pi]$ for such orbits, an estimation of Λ may be obtained from

$$\Lambda \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f' d\theta$$

where f' is the map derivative. For a very long orbit, such as that of figure 3a, we find $\Lambda \sim 5 \times 10^{-4}$. Since $\ln f' \sim -5 \times 10^{-2}$, the value of the integral clearly shows the almost perfect compensation between contracting and expanding intervals. This situation contrasts much with the short-period orbits, such as the one of figure 3b, where contracting intervals get the better of the expanding ones, leading to a rapid convergence. Fortunately enough, the above mentioned difficulties for long-period orbits are, however, of little consequence to the physics of the corresponding modes as will be shown below (§3.2.2); since no practical difference will appear between long-period orbits and quasi-periodic ones, we shall call quasi-periodic orbits all those with $|\Lambda| \lesssim 10^{-4}$.

The second result shown by plots in figure 2 is the trapping of characteristics by the wedge formed by the intersection of the turning surfaces and the boundaries. This convergence of characteristics in a wedge is systematic for E_2 -modes and may occur for H_2 -modes. This phenomenon has been noticed several times in the past either with pure internal or inertial waves (see Wunsch C.(1969), Greenspan H.P.(1969)). For E_2 -modes, the wedge is located on the outer sphere at a latitude ϑ_w given by

$$\sin \vartheta_w = \frac{\omega}{N} \sqrt{1 + N^2 - \omega^2} \quad (3.6)$$

This wedge exists for all E_2 -modes and characteristics are always trapped by it.

For H_2 -modes, a “trapping wedge” is formed only when the apex of the hyperboloidal turning surface is inside the inner shell; *i.e.*, when

$$\omega \leq \eta N$$

As a consequence, if $\eta N > 1$, all H_2 -modes face a trapping wedge in the hyperbolic domain. In such a case, it is worth asking whether or not any characteristic in the hyperbolic domain will end in the wedge as for E_2 -modes. The answer is no: contrary to the case of E_2 -modes, some periodic orbits can coexist with the wedge, as is illustrated by figure 1c; of course no quasi-periodic orbit exists.

The existence of periodic orbits together with the presence of a trapping wedge may be understood easily if one notes that trapping occurs only if the characteristics hit the inner shell at a latitude greater than the critical one, as demonstrated in appendix A. As may be surmised, the probability of trapping (or the cross-section of the wedge) is an increasing function of the angle made by the apex of the wedge and the critical latitude; this angle is given by

$$\delta\theta = \arcsin \left(\omega \sqrt{1 + \frac{1 - \omega^2}{(\eta N)^2}} \right) - \arcsin \omega \quad (3.7)$$

We note that $\delta\theta \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ which means that the probability of trapping decreases as stratification increases.

To summarize the behaviour of characteristics, we note that they either converge toward an attractor, which may be a periodic orbit or a wedge formed by the turning surfaces and the boundaries, or wander indefinitely on a quasi-periodic orbit. We shall now investigate the corresponding eigenmodes by solving the equations that include viscosity and thermal diffusion.

3.2. Gravitoinertial modes with diffusion and viscosity

To present the structure of eigenmodes, we show, as in paper I, plots of kinetic energy (E_k) and viscous dissipation (D_{visc}), and we complete those by plots of potential energy

(E_{th}) and thermal dissipation (D_{th}); these latter quantities give a good representation of the temperature field. The expression of these quantities is given by

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}u^2, & D_{visc} = \frac{E}{2} [s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{\phi\phi}^2 + 2(s_{r\theta}^2 + s_{r\phi}^2 + s_{\theta\phi}^2)] \\ E_{th} = \frac{1}{2}\Theta^2, & D_{th} = \frac{EN^2}{\rho} |\nabla\Theta|^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

where s_{ij} are the components of the rate-of-strain tensor in spherical coordinates (r, θ, ϕ) .

3.2.1. H -modes

Figures 4a and 4b show two H -modes, one being associated with the attractor (periodic orbit) displayed in figure 1d. The agreement between the inviscid and viscous patterns is fascinating. The thickness of the pattern is a combined effect of viscosity and thermal diffusion and is controlled by the largest of these two parameters. As will be shown below, the structure of the rays is nested shear layers.

A dark line starting near the critical latitude appears on the plots of the temperature fluctuations. This is a property of the reflection of such waves which prevents a radial propagation of characteristics from the critical latitude (Phillips O. M.(1963)). As the velocity is essentially parallel to characteristics, and as $\Theta \propto u_r$, the temperature plots show the absence of radial velocity at the critical latitude.

Figure 5a displays the eigenfunction of a mode for which characteristics are trapped in a wedge formed by the hyperboloid and the inner shell. We note the concentration of the eigenfunction near the wedge. Such a mode is also very strongly damped due to the high spatial frequencies generated by the converging characteristics[†].

H -modes corresponding to a quasi-periodic orbit in a shell seem to be very close to pure inertial modes associated with such orbits; they show a dense web of rays which we associate with the propagation of the critical latitude singularity along the characteristics (see figure 5c). We think that such modes illustrate the problem examined by Stewartson K. and Rickard J.(1969) : characteristics following a quasi-periodic orbit scan the whole domain and therefore cannot avoid touching the critical latitude. As shown by Stewartson and Rickard, an integrable singularity in the velocity field develops and propagates everywhere in the shell. The scale and the amplitude are of course bounded by diffusive effects. Note, however, that the results of Stewartson and Rickard were obtained in the case of non-axisymmetric modes in the thin shell limit. We believe however that their result extends to axisymmetric modes. Axisymmetric modes in a thin shell do not exist at zeroth order (in thickness of the shell) if the frequency is not vanishing; they therefore require terms of higher order to be dealt with. Stewartson and Rickard did not consider them, as their calculation would be more complex, but it is likely that they possess the same type of singularity. When the shell's thickness is of order unity, no difference should be visible in this respect between axisymmetric and non-axisymmetric modes.

3.2.2. E -modes

E -modes display the same kind of patterns as H -modes but with noticeable differences, however. Among the similarities we observe very spectacular E_1 -modes tracing periodic orbits with shear layers (figure 4c) as well as E_2 -modes with the energy concentrated near the wedge formed by the turning surface and the outer sphere (figure 4d). However, an important difference appears for modes associated with quasi-periodic orbits. Such

[†] A wave propagating towards the wedge experiences an increase in wavenumber at each reflection implying a divergence of scale at the wedge position.

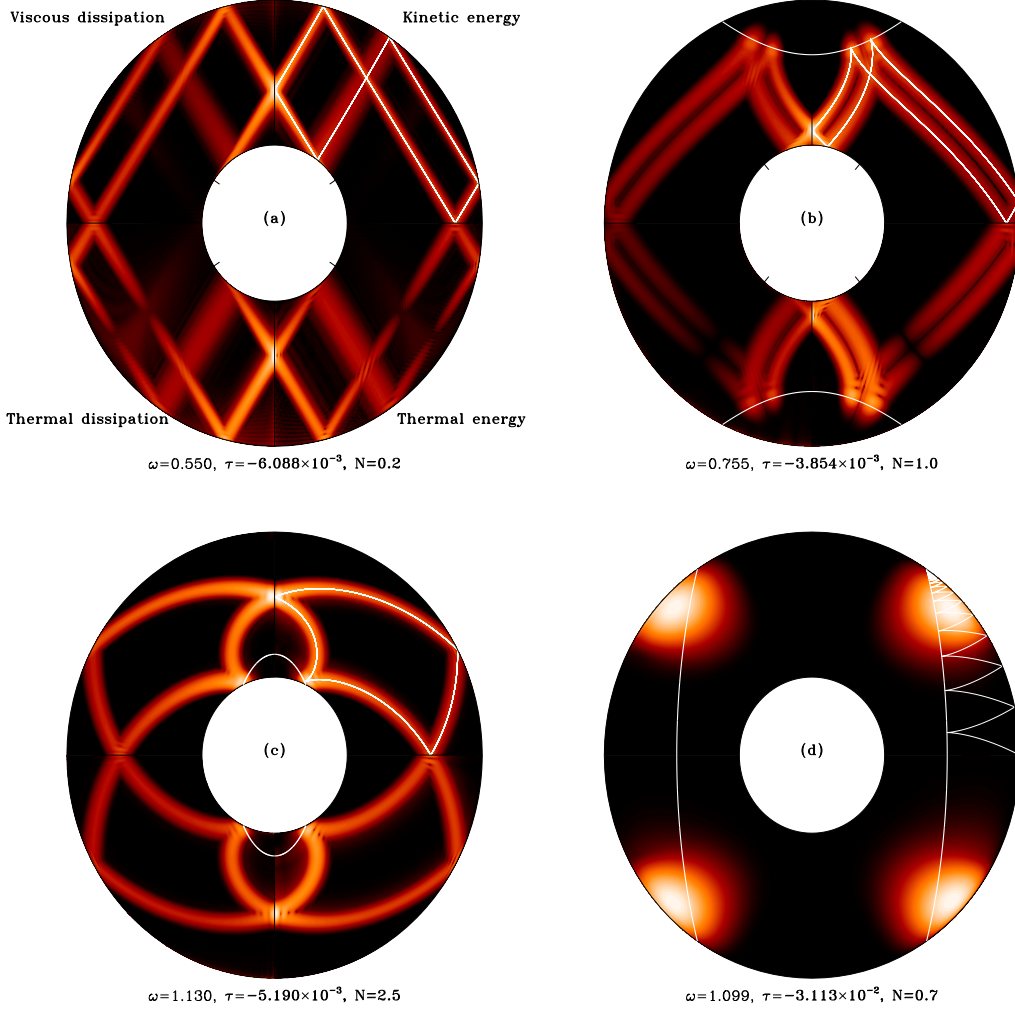


FIGURE 4. (a) H_1 -mode with $N < \omega < 1$. (b) H_2 -mode with $0 < \omega < \min(1, N)$. (c) E_1 -mode with $1 < \omega < N$. (d) E_2 -mode with $\max(1, N) < \omega < \sqrt{1 + N^2}$. The white path superimposed on the kinetic energy plot corresponds to the characteristic trajectory. For each plot $\mathcal{P} = 1$ and $E = 10^{-7}$ except $E = 5 \times 10^{-6}$ for (d).

modes display large-scale patterns which are independent of the diffusive properties of the fluid: they remain almost unchanged when the perfect fluid limit is taken. As a consequence, these modes are always the least-damped of the whole spectrum. These properties contrast much with the equivalent H -modes which display very small scales and are therefore more strongly damped. We interpret this difference as the consequence of the disappearance of the following two constraints: first, the absence of a critical latitude means that the eigenfunction does not have to cope with any singularity; second, no focusing along an attractor occurs. Therefore, they may remain smooth even at zero viscosity (see figure 5c, 5d). Of course, this conclusion needs to be modified if the orbit is an attractor of very long period. In this case the zero viscosity limit is not smooth, but we conjecture that the effects of the map will be noticeable only when the viscosity

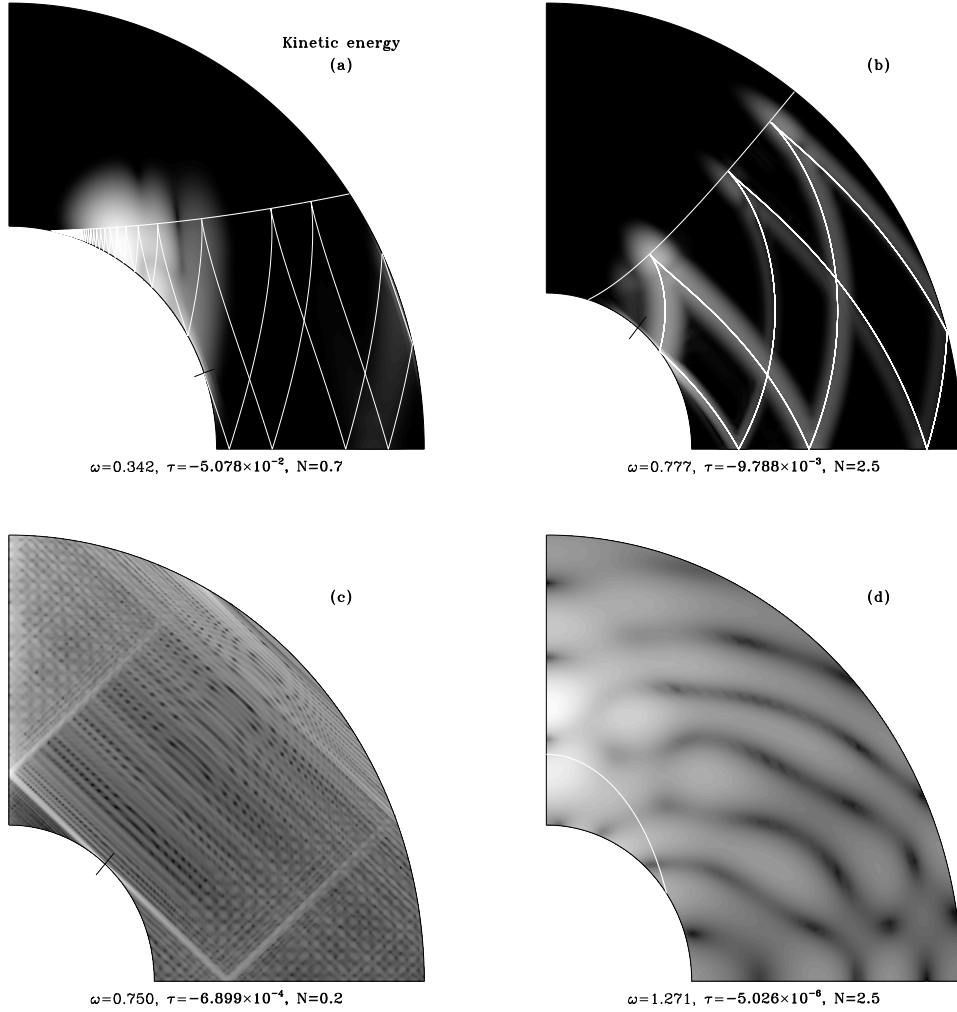


FIGURE 5. (a) an H_2 -mode associated with characteristics trapped in a wedge on the inner shell ($\eta = 0.5$, $E = 10^{-6}$). (b) an H_2 -mode associated with an attractive periodic orbit; note the existence of a wedge ($E = 10^{-7}$). (c) an H_1 -mode associated with a quasi-periodic orbit ($E = 10^{-8}$). (d) a regular E_1 -mode associated with a quasi-periodic orbit ($E = 10^{-8}$); note the difference in scale with the mode in (c). For all the modes $\mathcal{P} = 1$. The resolution for singular modes (a,b,c) is $L = 310$, $N_r = 150$ and $L = 80$, $N_r = 60$ for the regular mode (d).

is small enough that shear layers along characteristics do not interact. Since such shear layers scale with $E^{1/4}$, very long orbits with, say, a period of 10^5 will appear if the Ekman number is less than 10^{-20} which is (astro)physically irrelevant. From the numerical point of view, the use of a finite resolution (less than 10^5) makes the map invisible for numerical solutions of the inviscid equations. As these solutions remain on large scales, they differ very slightly from their viscous counterparts (as long as the Ekman number is larger than 10^{-20}). For these reasons, we think that a distinction between quasi-periodic orbits and very long period ones is physically irrelevant.

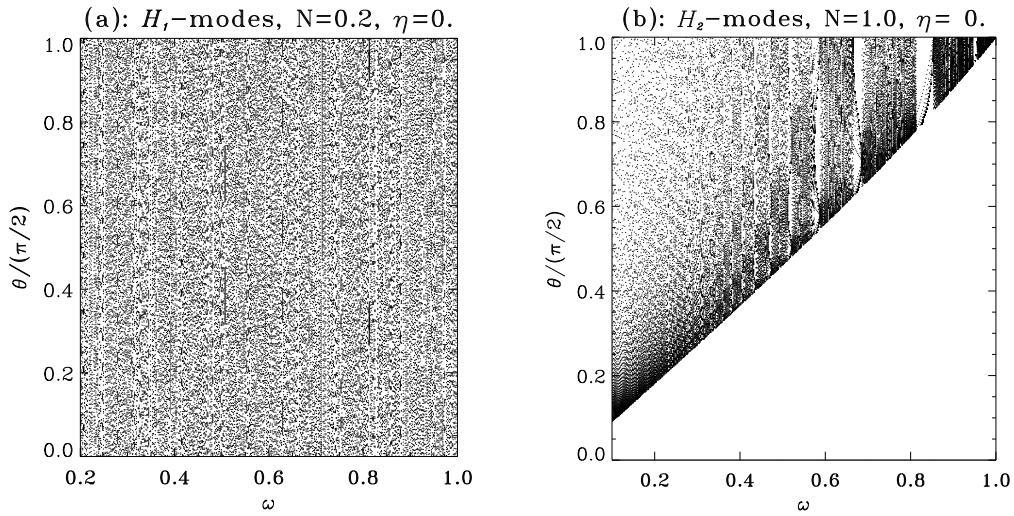


FIGURE 6. Poincaré diagrams of H -modes in the stratified full sphere. About two hundred reflections on the sphere for the H_1 -modes and on the turning hyperboloids for H_2 -modes have been used. All H_1 -modes seem quasi-periodic, which permits the existence of regular solutions. Some limit cycle bands appear with the H_2 -modes still leading to a mixing of regular and singular solutions.

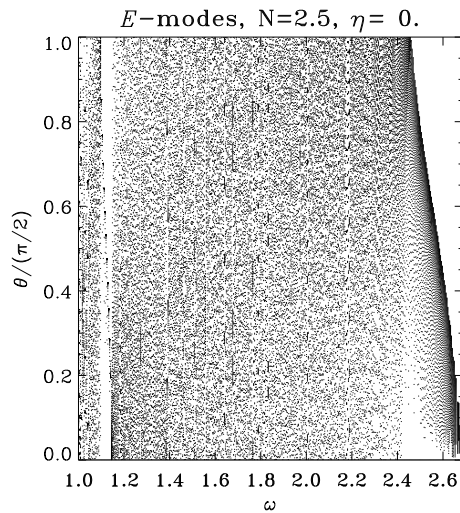


FIGURE 7. Poincaré plot for E -modes in a stratified full sphere; note the frequency band of periodic orbits $1.096 \lesssim \omega \lesssim 1.146$ as in the shell; note however that the band is narrower.

3.2.3. The full sphere

When $\eta = 0$, it has been well known since the work of Bryan G.(1889) that pure inertial modes exist when viscosity is set to zero. We give some results here which describe the structure of the modes when stratification is included and which further illustrate the mechanisms we have described above for the relation between characteristics orbits and the shape of the eigenfunctions.

It may be shown that for the full unstratified sphere, periodic orbits are such that

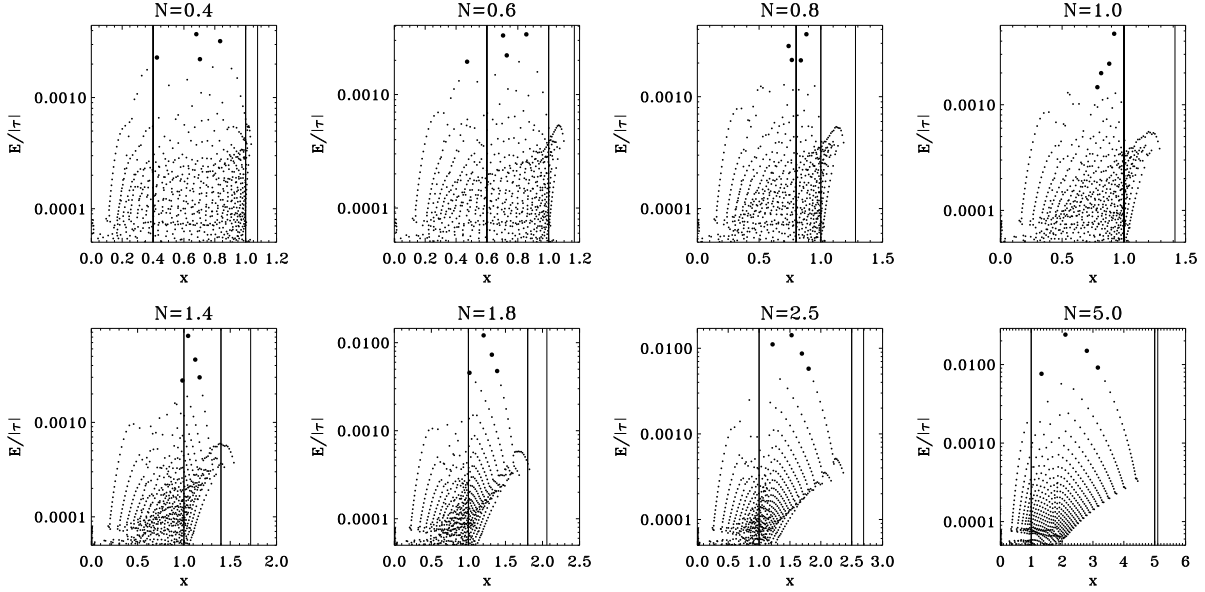


FIGURE 8. Variations of the eigenvalues distribution with the Brunt-Väisälä frequency N ($E = 10^{-5}$ and $\mathcal{P} = 1$); the resolution is $L = 50$ and $N_r = 40$. The solid vertical lines mark the limits of the hyperbolic and elliptic intervals given by (3.2) and (3.3). The thick dots emphasize the four least-damped modes. In each figure, approximately 700 eigenvalues are plotted.

$\omega = \sin(p\pi/q)$ with p and q integers, while quasi-periodic orbits are associated with irrationals r such that $\omega = \sin(r\pi)$. One may also show that the least-damped axisymmetric inertial mode (with $\omega = \sqrt{3/7}$) is associated with a quasi-periodic orbit, but we think that this is true for most of the modes. Hence, pure inertial modes give a good example of the association of quasi-periodic orbits with regular modes.

When a stratification is imposed, most of the modes remain regular. This may be seen on Poincaré maps of figures 6 and 7 where quasi-periodic orbits appear to be the most numerous. When the spatial structure of the modes associated with such orbits is computed, they indeed appear as perfectly regular functions. The critical latitude on the outer sphere does not generate a singularity as this latitude cannot be reached by a grazing characteristic.

However, as shown by Poincaré maps, periodic orbits also exist in some narrow bands and, as in the shell case, they are associated with singular modes whose energy concentrates along the orbit. In the same way, trapping of E_2 -modes in a wedge remains in the full sphere case, thus nothing is changed concerning singular modes in comparison with the shell case.

3.3. Spectra

We now briefly turn to the spectral side of gravito-inertial modes, and for this purpose we have computed, using the QZ algorithm, the whole spectrum of the discretized equations (2.7) for different stratifications, N .

Figure 8 presents the eigenvalue distributions in the complex plane ($\omega, E\tau^{-1}$); it clearly shows the four spectral bands (3.2) and (3.3) as well as the bounding of frequencies by $\sqrt{1 + N^2}$. H_1 -modes and E_2 -modes only exist for Brunt-Väisälä frequencies of the order of the Coriolis frequency (*i.e.*, when $N \sim 1$); for large stratifications (or slow rotations), the spectrum is dominated by gravity modes slightly perturbed by rotation (E_1 -modes).

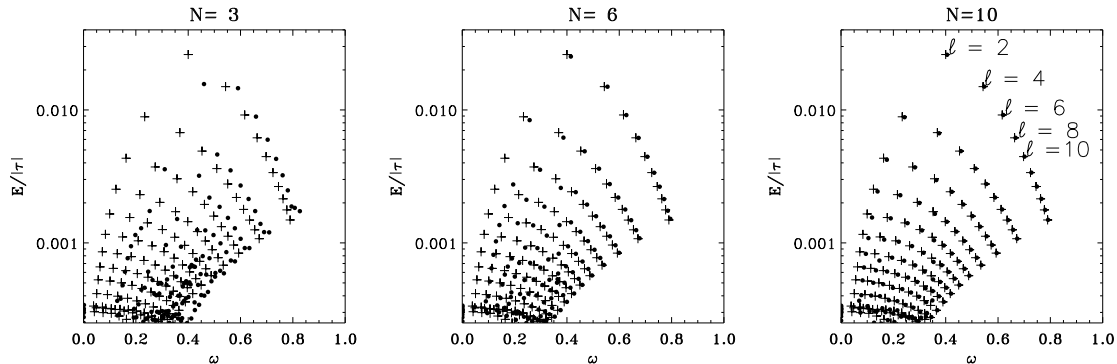


FIGURE 9. Distributions of eigenvalues in the complex plane with rotation (\bullet) and without rotation ($+$) for different N , frequency being rescaled between $[0, 1]$, $E = 10^{-5}$ and $\mathcal{P} = 1$. This figure shows the ordering of eigenvalues in families as the stratification is increased. Each family emphasizes a branch with fixed ℓ of the dispersion relation $\omega_{\ell,n}$.

The case of large stratifications $N \gg 1$ is further illustrated by figure 9. In this figure the asymptotic spectrum for $N = \infty$ is superposed on spectra with increasing stratification. It is clear that the difference between each pair of spectra is important for low-frequency modes, as expected. It also shows that rotation can be considered as a perturbation for large-scale gravity modes only if $2\Omega/N \lesssim 0.1$. We also see the difference between the spectrum of a separable operator (for pure gravity modes) where eigenvalues are well organized in families corresponding to a specific “quantum number” (the number of nodes in one direction) and the spectrum of a non-separable operator where eigenvalues seem randomly distributed.

One may wonder now how the behaviour of characteristics appears in the distribution of eigenvalues in the complex plane. Obviously quasi-periodic orbits associated with regular modes constitute the least-damped part of the spectrum and, as shown by figures 8 and 9, the regular part of the spectrum. Periodic orbits are associated with modes featuring a thin shear layer: they will be associated with eigenvalues with large damping rate. Therefore, if we consider the frequency bands appearing in Poincaré maps, we should find corresponding spectral bands in the complex plane. This is indeed what happens, as nicely shown by figure 10: the largest bands of periodic orbits centred on $\omega = 0.8$ or $\omega = 1.1$ clearly appear as sets of eigenvalues with real parts much larger than those of neighbouring regular modes. Other bands of periodic orbits also exist, but as they are narrower they appear only if the viscosity is low enough.

Finally, modes corresponding to orbits of characteristics trapped by a wedge are also strongly damped as those associated with periodic orbits; in figure 8, E_2 -modes may be easily identified.

3.4. The asymptotic laws

We now turn to one of the main questions of this subject; *i.e.*, the asymptotic behaviour of gravito-inertial modes as the Ekman number or the Prandtl number tends to zero. We recall that typical numbers in radiative zones of stars are $E \sim 10^{-16}$ and $\mathcal{P} \sim 10^{-8}$.

A convenient way to deal with this problem is to study the asymptotic behaviour of the damping rate τ as the Ekman number (or the Prandtl number) is decreased. We

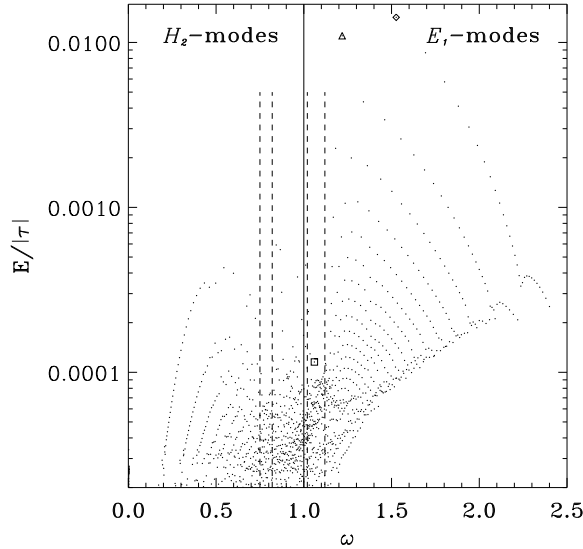


FIGURE 10. Same as figure 8 with $N = 2.5$, $E = 10^{-6}$ and a larger resolution $L = 60$ and $N_r = 60$. Approximately 1200 eigenvalues are plotted. The solid line $\omega = 1$ separates the H_2 - and E_1 - regions. The dotted lines correspond to limit cycle bands; note the one around $\omega \sim 1.1$ which already appeared in the Poincaré plot 2c. Symbols mark eigenvalues discussed in the text.

recall that (see appendix B)

$$\tau = -\frac{\mathcal{D}_{th} + \mathcal{D}_{visc}}{2(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{th})} = -\frac{E \int_{(V)} (s_{ij})^2 dV + (N^2/\mathcal{P}) \int_{(V)} (\nabla\Theta)^2 dV}{\int_{(V)} u^2 dV + N^2 \int_{(V)} \Theta^2 dV} \quad (3.9)$$

3.4.1. The limit $E=0$ at Prandtl number unity

The easiest case to deal with is the one of regular modes. For sufficiently small Ekman numbers the structure of eigenfunctions is independent of viscosity. This point is well illustrated by the mode displayed in figure 11 : as the Ekman number is decreased by four orders of magnitude the structure of the mode is hardly changed. In fact, the mode at $E = 0$ can be computed using a mild resolution. As expected and clearly shown by figure 12, the frequency tends to a limiting value ω_0 while the damping rate scales linearly with the Ekman number. Of course, as discussed in 3.2.2, if the corresponding orbit is not strictly quasi-periodic, ω_0 may not be the true limit but the disappearance of the smooth solution may occur at such a low Ekman number that it is not physically relevant.

If we now consider modes associated with periodic orbits, things are more involved. A pedagogical mode is displayed in figure 13 : such a mode features a shear layer centred on a one-loop periodic orbit. Quite clearly (see figure 14) its damping rate follows a power law $\tau \sim E^\alpha$ with $\alpha \sim 0.34$, while its frequency seems to tend toward an asymptotic value $\omega_0 \sim 1.05$. This behaviour is well understood when one examines the structure of the shear layers : nested shear layers appear with scale close to $E^{1/3}$ and $E^{1/4}$, which are reminiscent of Stewartson layers (see appendix C for a demonstration).

However, the value of the exponent close to one third may just be fortuitous since other modes show different values. Indeed, as shown by figure 15, such exponents may be quite different. In this figure it is clear that as the viscosity decreases eigenvalues interact in the complex plane. Such interactions result from the fact that exponents of damping

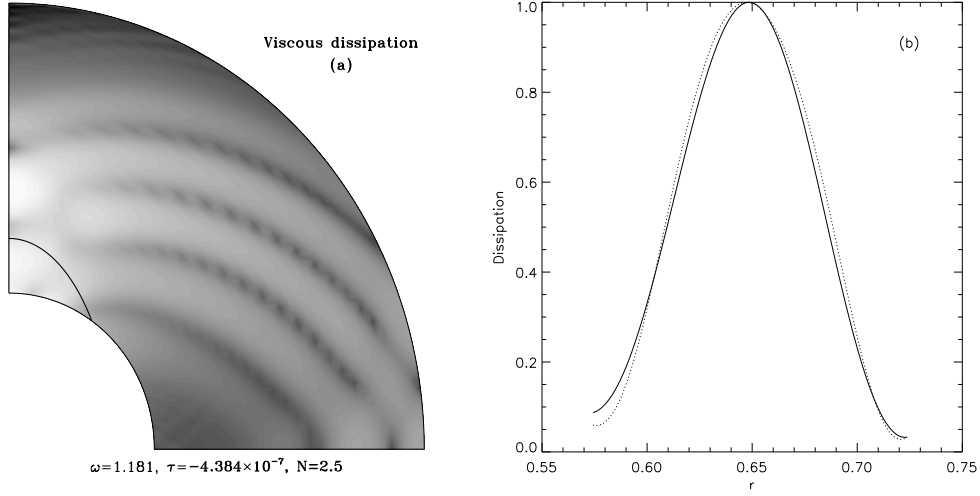


FIGURE 11. (a) Viscous dissipation of the E_1 -mode of fig. 12 with $E = 10^{-9}$ and $\mathcal{P} = 1$. (b) radial profiles of the viscous dissipation at the colatitude $\theta = 40^\circ$ for $E = 10^{-5}$ (solid line) and $E = 10^{-9}$ (dotted line): the width of the pattern remains constant.

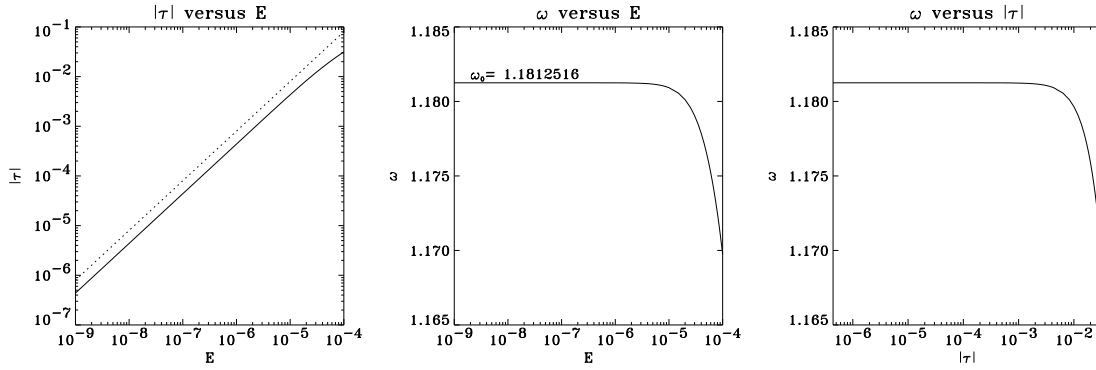


FIGURE 12. Evolution of $|\tau|$ and ω as E diminishes with $\mathcal{P} = 1$ for the regular E_1 -mode marked by a triangle in figure 10. The frequency slowly tends to its asymptotic inviscid value $\omega_0 = 1.1812516$. The dotted line corresponds to the law $|\tau| \propto E$.

rates are different while eigenfrequencies change very little with the Ekman number. For a pair of eigenvalues of similar imaginary parts, an Ekman number exists where damping rates will also be very similar, implying a strong interaction between the two eigenvalues; this usually leads to an exchange of eigenvectors. Such events, illustrated by figure 15, tend to support the idea, first raised in I, that modes may “bifurcate” ever and ever as viscosity tends to zero and that no limit exists. Contrarily, figure 14 would support the existence of a limit; such a limit being that the eigenmode at zero viscosity is non-zero only on the line drawn by the periodic orbit. We may reconcile these two behaviours if we admit that the successive bifurcations are in fact only a “transient” and that in the case of figure 15 the asymptotic régime is not reached yet.

Finally, modes trapped by a wedge show damping rates decreasing with the Ekman number with a law compatible with $E^{1/3}$. We surmise that this behaviour illustrates the fact that, as for inertial modes, the smallest scale of the velocity field is $\mathcal{O}(E^{1/3})$.

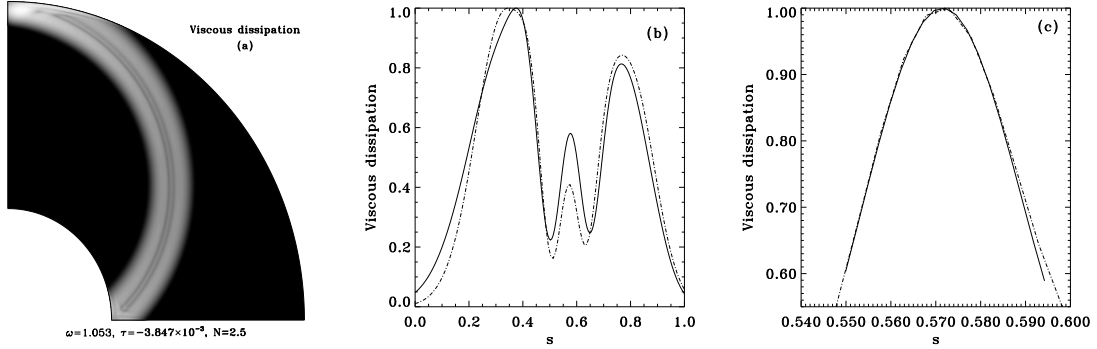


FIGURE 13. (a) Shape of the eigenfunction associated with the E_1 -mode examined in figure 14. Viscous dissipation is represented at $E = 10^{-7}$ and $\mathcal{P} = 1$. (b) profiles of the viscous dissipation at $z \simeq 0.5$ for $E = 10^{-6}$ (solid line) and $E = 10^{-7}$ (dotted line). There are three overlapping shear layers with different scalings. (c) A zoom of the central layer shows a scaling exponent of 0.31 (the scale for the dotted line was increased by a factor $(10^{-6}/10^{-7})^{0.31}$) while two other layers show a scaling exponent close to $1/4$.

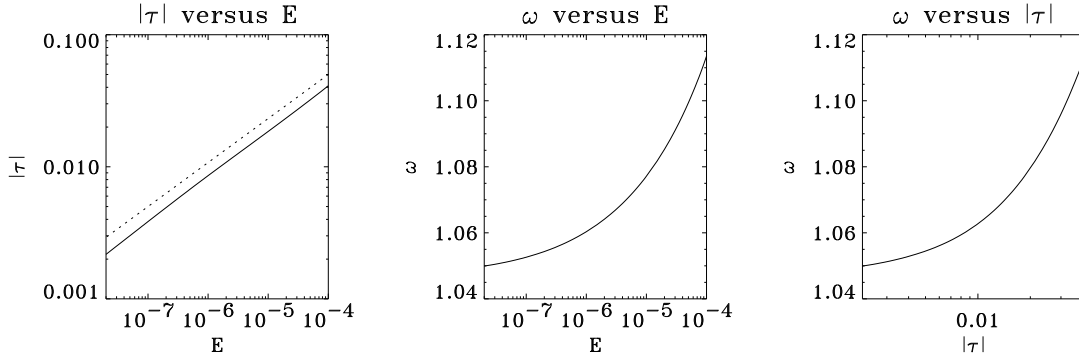


FIGURE 14. Same as fig. 12 with $\mathcal{P} = 1$ but for the singular E_1 -mode marked by a square in figure 10. The dotted line corresponds to the law $|\tau| \sim E^{1/3}$.

3.4.2. Varying the Prandtl number

In order to have a first impression of the effects of varying the Prandtl number, we computed the path in the complex plane of the eigenvalue corresponding to the least-damped mode when $E = 10^{-7}$ and $N = 2.5$. The Prandtl number was varied between 10^{-5} and 10^4 . As shown by figure 16, the case $\mathcal{P} = 1$ is very close to the asymptotic limit $\mathcal{P} = \infty$. In this limit, which finds applications in ocean dynamics, dissipation is only due to viscosity.

When stars are concerned, the interesting limit is $\mathcal{P} = 0$. However, one always has $E \ll \mathcal{P} \ll 1$ which means that the main contribution to the damping rate is due to heat diffusion. Figure 16 shows that as the Prandtl number is decreased, the damping rate first increases as \mathcal{P}^{-1} as expected for a regular mode, while the frequency remains constant. When $\mathcal{P} \sim 5 \times 10^{-5}$ the frequency changes dramatically. We think that this is the start of a new régime where $\mathcal{P} \lesssim E \ll 1$. In such a range of parameters, eigenvalues are distributed into two kinds of families: pure inertial modes and pure thermal modes. This corresponds to the decoupling of the temperature equation and the dynamic equation:

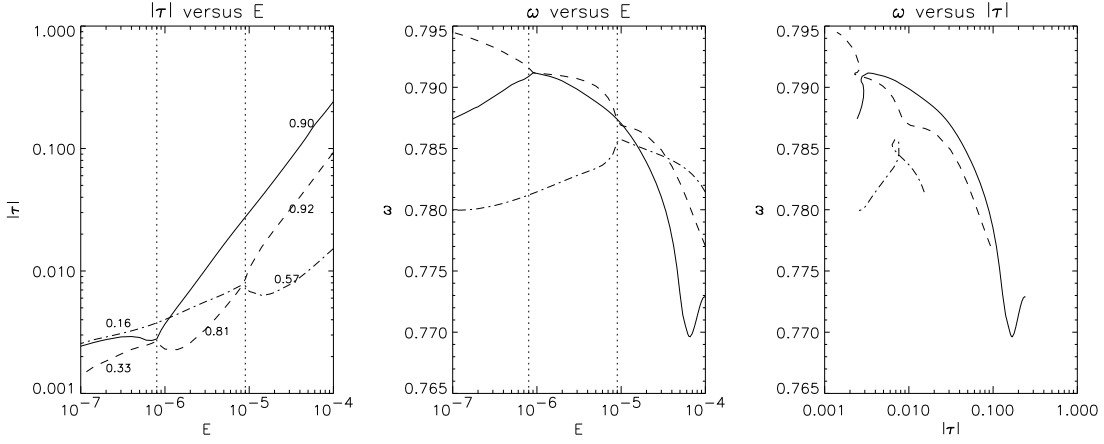


FIGURE 15. Path of three H_2 -eigenvalues in the complex plane for $N = 1$. The dotted lines mark the modes' interactions at $E = 8 \times 10^{-6}$ and $E = 8 \times 10^{-7}$. The numbers labelling the curves on the $|\tau|$ versus E plot are the exponents a of the closest power law $|\tau| \sim E^a$.

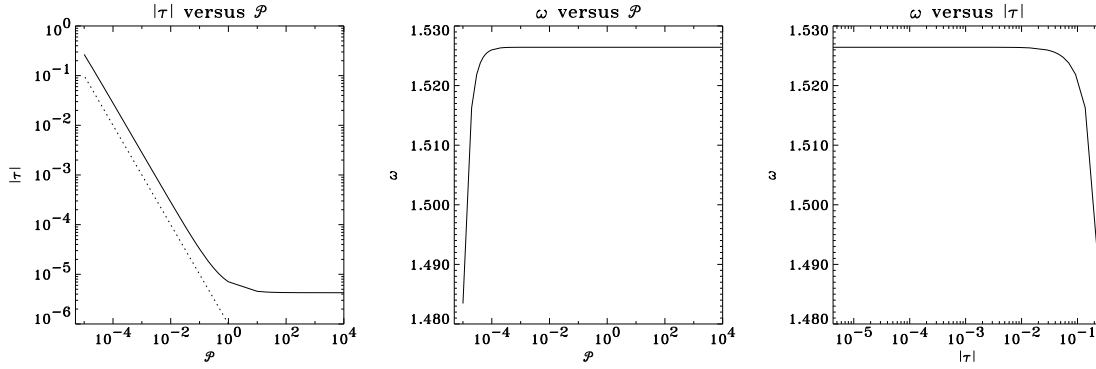


FIGURE 16. Evolution of $|\tau|$ and ω versus \mathcal{P} with $E = 10^{-7}$ and $N = 2.5$ for the least-damped E_1 -mode marked by a diamond in figure 10. The dotted line corresponds to the law $|\tau| \sim \mathcal{P}^{-1}$.

$$\begin{cases} \lambda \vec{u} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\nabla \pi + E \Delta \vec{u} \\ \lambda \Theta \simeq \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta \Theta \end{cases} \quad (3.10)$$

We shall not consider this case any further.

An interesting remark may be made in the case $E \ll \mathcal{P} \ll 1$: as heat diffusion is the main diffusive effect, it suggests that setting the Ekman number to zero while keeping E/\mathcal{P} finite is an efficient way of dealing with such a range of parameters. In the case of regular modes this is obviously true, but this also happens to be true for E_1 -modes associated with a limit cycle. However, singular H -modes cannot be computed with this limit; we shall develop this point in a following paper.

4. Discussion

4.1. Gravito-inertial modes

The numerical results we have presented in the preceding section enable us to have a glimpse of what could be the shape of the spectrum at (or close to) the zero diffusivity limit ($\nu = \kappa = 0$).

4.1.1. Regular modes

Regular modes are those for which the velocity field remains square-integrable and continuous. They are associated with a discrete set of eigenvalues; when the container is a shell their eigenfrequencies seem to be contained in the interval $[1, N]$ from which subintervals corresponding to periodic orbits of characteristics have been removed. In the remaining subintervals, eigenfrequencies are likely to be dense. If the container is a full sphere, regular modes may be found for frequencies in $[0, N]$ with the exclusion of some subinterval as above.

All the above numerical results lead us to believe that regular modes are associated with quasi-periodic orbits of characteristics; *i.e.*, orbits for which the Lyapunov exponent is strictly zero. However, the distinction between quasi-periodic orbits and very long period orbits is impossible numerically. Therefore, “regular modes” which we observe may be regular only if a slight amount of diffusion is included; we may indeed surmise that the attractor will appear if diffusivities are so low that shear layers associated with the attractors do not overlap. Thus periodic orbits with 10^4 reflection points would not show up as long as the Ekman number (or E/\mathcal{P}) is larger than 10^{-16} which is usually the case, even in stars.

It is interesting to note here that for strictly two-dimensional problems, regular modes are associated with periodic orbits of characteristics possessing a zero Lyapunov exponent. Examples given in Maas L. and Lam F.-P.(1995) in fact illustrate some mathematical results derived for two-dimensional systems by Bourgin D. and Duffin R.(1939), John F.(1941), Franklin J.(1972) and Schaeffer D.(1975). In these systems, eigenvalues are always infinitely degenerate and no velocity field is associated with quasi-periodic orbits. On the contrary, in three-dimensional systems eigenvalues seem to be associated with quasi-periodic orbits and are not degenerate as the full unstratified sphere or the cylinder cases suggest.

4.1.2. Singular modes trapped in a wedge

We have also encountered modes for which characteristics are trapped in a wedge formed by the boundaries and the turning surfaces. We expect that such modes will completely disappear in the zero-diffusion case. Indeed, it was shown by Ralston J.(1973) that when Poincaré equation is simplified into a wave equation, the set of eigenvalues corresponding to the cases where characteristics are trapped in a wedge (here made by the boundaries) is empty : eigenfunctions are no longer square-integrable. We conjecture that this result can be generalized to our case and that eigenvalues also disappear from the frequency bands corresponding to trapped characteristics. Hence, no eigenvalue should remain in the interval $[N, \sqrt{N^2 + 1}]$ when $\nu = \kappa = 0$; this also means, in mathematical terms, that the point spectrum of the operator is empty and only singular solutions associated with the continuous band $[N, \sqrt{N^2 + 1}]$ remain (?).

4.1.3. Singular modes associated with periodic orbits

We now turn to the most interesting modes : those for which the amplitude of the eigenfunction is concentrated along a periodic orbit. For such eigenvalues, the trajectories

of characteristics are endowed with a strictly negative Lyapunov exponent so that the associated map is contracting. When diffusion is taken into account, the contracting action of the map is balanced in some way by diffusive effects. The shape of the modes and, more precisely, the thickness of shear layers may be controlled by the value of the Lyapunov exponent.

In the limit $\nu = \kappa = 0$, the eigenfunctions (a distribution in fact) will be restricted to the line drawn by the periodic orbit. However, such eigenfunctions are in all likelihood not square-integrable. This property may be conjectured from the results of Maas L. and Lam F.-P.(1995); in the case investigated by these authors, two-dimensional gravity modes in a parabolic basin, the streamfunction associated with a periodic orbit can be constructed explicitly. Characteristics act as a mapping of an arbitrary function defined on a segment of the boundary. As the characteristics converge towards the attractor, the scale of the function is reduced while its amplitude is conserved. As a result, derivatives of the streamfunction, (*i.e.*, components of the velocity field) diverge. Hence, it is clear that the velocity field is not square-integrable and this explains the concentration of kinetic energy along the attractor. On the mathematical side this implies that no eigenvalue exists in bands of frequencies where periodic orbits are present; in other words, the point spectrum of the operator is empty and one is left with the continuous spectrum associated with singular solutions.

4.1.4. *Non-axisymmetric modes*

In the presentation of the results we concentrated on axisymmetric modes only. The generalization of our results to non-axisymmetric modes is straightforward however, if we recall the following two points: first, in a spherical geometry the azimuthal variable ϕ is separable from the two others (r, θ) , therefore modes with $e^{im\phi}$ dependence can be computed separately; second, the path of characteristics is independent of m as second-order derivatives do not contain this parameter. Thus singularities which arise because of the focusing of characteristics also appear in the meridional section of non-axisymmetric modes but are modulated by $e^{im\phi}$.

4.2. *Inertial modes*

In view of the preceding conclusions, we may understand somewhat better the results obtained in I for pure inertial modes. For such modes, eigenfunctions tracing a periodic orbit are much less evident. Results of paper I gave evidence in favour of the scenario with an infinite suite of bifurcations. In view of the behaviour of gravito-inertial modes, we may interpret our results in the following way : periodic orbits for pure inertial modes appear in rather narrow bands of frequencies, and in such bands the Lyapunov exponent is often small (in modulus); therefore, the asymptotic régime may be reached only at very low values of the Ekman number. The case of pure inertial modes is, quite surprisingly, less obvious than the case of gravito-inertial modes and will be reconsidered in a forthcoming paper.

4.3. *Astrophysical applications*

The above results have straightforward consequences as far as astrophysical applications are concerned. It is clear, for instance, that regular modes will be the best candidates for interpreting the pulsation spectrum of a rapidly rotating star, since least-damped modes will be most easily excited by the driving instabilities. Our results constrain the possible identifications for observed frequencies or the spectral bands to search for such modes.

Another conclusion concerns the transport properties of gravito-inertial modes. As mentioned in the introduction, waves are expected to play an important role in the ra-

diative zones of stars in transporting angular momentum or chemical elements. As far as angular momentum transport is concerned, waves of frequency close to the rotation one are most important. Our results show that for this range of frequencies, the spectrum essentially consists of singular modes (associated with periodic orbits) whose damping rate is much larger than that of regular modes. The time-scale on which angular momentum is transferred from one place to another will therefore be much different according to whether a singular or a regular mode is excited. This point will be developed in another forthcoming paper.

As a final conclusion to this paper, we should emphasize that our results, based on numerical experiments, are only conjectures on the mathematical properties of such an eigenvalue problem. We feel, however, that these conjectures can be demonstrated, but this is the subject of future work.

We thank Valerie Frayssé and Jean-Christophe Rioual for letting us use their eigenvalue solver. We also thank Gary Henderson, Leo Maas and Susan Friedlander for their careful reading of the manuscript. We acknowledge many fruitful discussions with our colleagues B. Georgeot, J. Sommeria and B. Valette. Most of the calculations have been carried out on the Cray C98 and Fujitsu VP300 of the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) which is gratefully acknowledged. The support of the GdR CNRS/IFREMER 1074 (Mécanique des Fluides Géophysique et Astrophysiques) and the EEC 'Human Capital and Mobility' contract No CHRX-CT94-0483 are also gratefully acknowledged.

Appendix A. Wedge focusing

The slope of characteristics of H_2 -modes propagating towards a wedge formed by the intersection of the turning hyperboloid and the inner shell are such that

$$\frac{dz}{ds} = \frac{zsN^2 - \xi^{1/2}}{\omega^2 - N^2z^2}, \quad \xi = \omega^2 N^2 s^2 + (1 - \omega^2)(\omega^2 - N^2 z^2)$$

Propagation towards the wedge is possible only if

$$\left| \frac{dz}{ds} \right|_{char} \geq \left| \frac{dz}{ds} \right|_{boundary}$$

as $\frac{dz}{ds} < 0$ the above inequality yields

$$\xi^{1/2} - zsN^2 > (\omega^2 - N^2z^2) \frac{s}{z}$$

After some algebra, we find the following relation:

$$(\omega^2 - N^2z^2)(\omega^2\eta^2 - z^2) < 0$$

which implies that $\omega^2\eta^2 - z^2 < 0$ on the inner boundary. As $z = \eta \sin \vartheta$, this condition is equivalent to:

$$\sin \vartheta > \omega \equiv \sin \vartheta_c \quad \Rightarrow \quad \vartheta > \vartheta_c \quad \text{with} \quad \vartheta \in [0, \pi/2] \quad (\text{A } 1)$$

where ϑ_c is the critical latitude.

Appendix B. Quadratic quantities

In this appendix we calculate the local energies and dissipations given by (3.8). We first rewrite the system (2.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\nabla \pi + N^2 \Theta \vec{x} + E \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + r u_r = \frac{E}{\mathcal{P}} \Delta \Theta \end{cases} \quad (\text{B1})$$

Multiplying the Navier-Stokes equation by \vec{u} and the energy equation by Θ , we find after integration:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{(V)} \frac{u^2}{2} dV + N^2 \int_{(V)} \frac{\Theta^2}{2} dV \right) = - \left(\frac{EN^2}{\mathcal{P}} \int_{(V)} |\nabla \Theta|^2 dV + \frac{E}{2} \int_{(V)} (s_{ij})^2 dV \right)$$

where $s_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$. Let $\mathcal{E}_k = \int_{(V)} \frac{u^2}{2} dV$ be the total kinetic energy, $\mathcal{E}_{th} = N^2 \int_{(V)} \frac{\Theta^2}{2} dV$ be the total potential energy, $\mathcal{D}_{th} = \frac{EN^2}{\mathcal{P}} \int_{(V)} |\nabla \Theta|^2 dV$ be the total thermal dissipation and $\mathcal{D}_{visc} = \frac{E}{2} \int_{(V)} (s_{ij})^2 dV$ be the total viscous dissipation, then we have

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{th}) = - (\mathcal{D}_{th} + \mathcal{D}_{visc}) \quad (\text{B2})$$

which shows that the total energy of the fluid's motion is damped out by the thermal and viscous dissipations. This equation is useful for testing the spectral convergence of eigenvectors since one may check the following relation between the eigenvector and the (real part of the) eigenvalue:

$$\tau = \frac{1}{2(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{th})} \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{th}) = - \frac{\mathcal{D}_{th} + \mathcal{D}_{visc}}{2(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{th})}$$

We note that these quadratic quantities may easily be expressed in terms of the radial functions of the spherical harmonic decompositions of the fields. Using the decompositions (2.4) of \vec{u} and Θ and the orthogonality relations between \vec{R}_ℓ^m , \vec{S}_ℓ^m and \vec{T}_ℓ^m , we have

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} \int_\eta^1 [|u_m^\ell|^2 + \ell(\ell+1) (|v_m^\ell|^2 + |w_m^\ell|^2)] r^2 dr \\ E_{th} = \frac{N^2}{2} \sum_{\ell, m} \int_\eta^1 |t_m^\ell|^2 r^2 dr \\ \mathcal{D}_{th} = \frac{EN^2}{\mathcal{P}} \sum_{\ell, m} \int_\eta^1 \left[\left| \frac{\partial t_m^\ell}{\partial r} \right|^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} |t_m^\ell|^2 \right] r^2 dr \\ \mathcal{D}_{visc} = E \sum_{\ell, m} \int_\eta^1 \left[3 \left| \frac{\partial w_m^\ell}{\partial r} \right|^2 + \ell(\ell+1) (|a_m^\ell|^2 + |b_m^\ell|^2) + \right. \\ \left. \ell(\ell^2-1)(\ell+2) (|v_m^\ell|^2 + |w_m^\ell|^2) / r^2 \right] r^2 dr \end{cases} \quad (\text{B3})$$

with $a_m^\ell = \frac{\partial v_m^\ell}{\partial r} + \frac{u_m^\ell - v_m^\ell}{r}$ and $b_m^\ell = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_m^\ell}{r} \right)$.

Appendix C. The scales of shear layers

We show here that the scales of shear layers associated with periodic orbits may be, as for inertial modes, $\mathcal{O}(E^{1/3})$ or $\mathcal{O}(E^{1/4})$.

We first assume that such shear layers are thicker than Ekman layers; *i.e.*, we assume that their width scales with E^a and $a < 1/2$. We also suppose that the Prandtl number is finite. With these assumptions and in the limit of vanishing Ekman numbers, we may neglect the diffusion term in the temperature equation and thus write $\Theta = -ru_r/\lambda$. Hence the dynamics of gravito-inertial modes is controlled by :

$$\begin{cases} \lambda \vec{u} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\nabla \Pi - \frac{N^2}{\lambda} ru_r \vec{r} + E \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{C } 1)$$

The form of such equations is similar to that of those controlling the dynamics of inertial modes; the additional term $-\frac{N^2}{\lambda} ru_r \vec{r}$ just changes the shape of characteristics and the size of the hyperbolic domain. Therefore, one should expect that the width of shear layers is the same as for inertial modes since the new term does not contain any derivative of the velocity field.

Let us formulate this reasoning in more mathematical terms. The equation of dynamics may be written as

$$\mathcal{L}(\vec{u}) = -\nabla P + E \Delta \vec{u} \quad (\text{C } 2)$$

where \mathcal{L} is a linear (but not differential) operator which reads :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \lambda + a \sin^2 \theta & -1 & a \sin \theta \cos \theta \\ 1 & \lambda & 0 \\ a \sin \theta \cos \theta & 0 & \lambda + a \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad a = N^2 r^2 / \lambda$$

We restrict our reasoning to axisymmetric modes and we introduce the meridional streamfunction $\psi(s, z)$ such that :

$$\vec{u} = \nabla \times (\psi \vec{e}_\theta / s) + v(s, z) \vec{e}_\theta$$

The θ -component of (C 2) and the θ -component of the curl of (C 2) yield :

$$(\lambda - E \Delta') v = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \nabla \times \{ \mathcal{L} [\nabla \times (\psi \vec{e}_\theta / s) + v \vec{e}_\theta] \} + E \Delta'^2 (\psi / s) = 0$$

where $\Delta' = \Delta - 1/s^2$. The second equation may be rewritten as :

$$\vec{e}_\theta \cdot \nabla \times \{ \mathcal{L} [\nabla \times (\psi \vec{e}_\theta / s)] \} - \frac{\partial v}{\partial z} + E \Delta'^2 (\psi / s) = 0$$

to which we apply the operator $\lambda - E \Delta'$; hence, it follows that

$$(\lambda - E \Delta') [\vec{e}_\theta \cdot \nabla \times \{ \mathcal{L} [\nabla \times (\psi \vec{e}_\theta / s)] \}] - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + E \Delta'^2 (\lambda - E \Delta') (\psi / s) = 0$$

We now write this equation using characteristics coordinates u_\pm (which are real only in the hyperbolic domain). The inviscid part of this equation is an Euler-Darboux equation of the form

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_+ \partial u_-} + f \frac{\partial \psi}{\partial u_+} + g \frac{\partial \psi}{\partial u_-} = 0$$

where f and g are functions of (u_+, u_-) ; when viscosity is taken into account and when only terms with highest derivatives are retained, then

$$E^2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial u_-^6} + \lambda E \frac{\partial^4 \psi}{\partial u_-^4} + \frac{\partial \psi}{\partial u_+ \partial u_-} + f \frac{\partial \psi}{\partial u_+} + g \frac{\partial \psi}{\partial u_-} + \dots = 0$$

along a characteristic $u_+ = \text{const.}$ It is easily seen that a distinguished limit exists if $\psi \equiv \psi((u_- - u_0)/E^{1/3})$. If the variations of $\partial \psi / \partial u_-$, due to inviscid balance along such a characteristic, are taken into account, then a scaling in $E^{1/4}$ also appears (see below). Therefore, as observed numerically (see fig. 13), shear layers associated with limit cycles possess (at least) two length scales $\mathcal{O}(E^{1/3})$ and $\mathcal{O}(E^{1/4})$.

We finally note that this result is quite general, as it is independent of the spatial variations of the Brunt-Väisälä frequency.

Appendix D. Addendum to paper I : $E^{1/4}$ shear layers

When studying the structure of pure inertial waves in I, it was shown that the thickness of some shear layers scales with $E^{1/4}$; such a scaling was first mentioned by Gans R. (1983) as another possibility to the more familiar $E^{1/3}$ scale. We show below how to derive more directly this other possible scale for internal shear layers.

It is well known that when viscosity is taken into account, pressure perturbations of damped inertial modes obey the general equation :

$$E^2 \Delta^3 P - 2E\lambda \Delta^2 P + \lambda^2 \Delta P + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{D } 1)$$

where $\lambda = \tau + i\omega$ as in the rest of the paper. We restrict ourselves to axisymmetric modes and introduce characteristic coordinates $u_{\pm} = \omega z \pm \alpha r$ with $\alpha = \sqrt{1 - \omega^2}$. Noting that $|\omega| \gg |\tau|$ when $E \rightarrow 0$, we can rewrite (D 1) as

$$E^2 \Delta^3 P - 2Ei\omega \Delta^2 P + \tau 2i\omega \Delta P + 4\omega^2 \alpha^2 \frac{\partial P}{\partial u_+ \partial u_-} - \frac{2\alpha^2 \omega^2}{u_+ - u_-} \left(\frac{\partial P}{\partial u_+} - \frac{\partial P}{\partial u_-} \right) = 0 \quad (\text{D } 2)$$

In the case of a ray where $\frac{\partial P}{\partial u_-} \gg \frac{\partial P}{\partial u_+}$, we noted in I that the inviscid equation leads to

$$\frac{\partial P}{\partial u_-} = \frac{f(u_-)}{\sqrt{u_+ - u_-}}$$

where f is an arbitrary function with a support scaling with the thickness of the layer.

We now look for a solution of (D 2) which contains this inviscid balance; *i.e.*, with P such that

$$P = \int \frac{f(u_-) du_-}{\sqrt{u_+ - u_-}}$$

Introducing the scaled variable $X = (u_- - u_0)/\delta$ with $\delta \ll 1$ and noting that $P \simeq \delta F(X)/\sqrt{u_+ - u_0}$, the leading order terms of (D 2) yield :

$$\frac{E^2}{\delta^6} \frac{\partial^6 F}{\partial X^6} - \frac{2i\omega E}{\delta^4} \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} + \frac{2i\omega \tau}{\delta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\alpha^2 \omega^2}{(u_+ - u_0)^2} F = 0$$

Assuming that the damping rate τ scales with E^a , where $a \geq 1/2$ (as observed numerically), the only distinguished limit is with $\delta = E^{1/4}$.

Hence, it is clear that internal oscillating shear layers are nested boundary layers as steady Stewartson layers.

REFERENCES

- ARNOLDI W.E. 1951 The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math.* **9** (1), 17–29.
- BALONA L. A., BÖHM T., FOING B. H., GHOSH K. K., JANOT-PACHECO E., KRISCIUNAS K., LAGRANGE A.-M., JAMES S. D., BAUDRAND J., CATALA C., DREUX M., FELENBOK P. AND HEARNSHAW J. B. 1996 Line profile variations in γ doradus. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **281**, 1315–1325.
- BOURGIN D. AND DUFFIN R. 1939 The dirichlet problem for the vibrating string equation. *Bull. Am. Math. Soc.* **45**, 851–859.
- BRYAN G. 1889 The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **180**, 187–219.
- CHANDRASEKHAR S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press.
- FRANKLIN J. 1972 Axisymmetric inertial oscillations of a rotating fluid. *J. Math. Anal. Appl.* **39**, 742–760.
- FRIEDLANDER S. 1982 Turning surface behaviour for internal waves subject to general gravitational fields. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21**.
- FRIEDLANDER S. 1987 Internal waves in a rotating stratified spherical shell: asymptotic solutions. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **89**.
- FRIEDLANDER S. AND SIEGMANN W. 1982a Internal waves in a contained rotating stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **114**, 123–156.
- FRIEDLANDER S. AND SIEGMANN W. 1982b Internal waves in a rotating stratified fluid in an arbitrary gravitational field. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **19**, 267–291.
- GANS R. 1983 Boundary layers on characteristic surfaces for time-dependent rotating flows. *J. Applied Mech.* **50**, 251–254.
- GREENSPAN H.P. 1969 On the inviscid theory of rotating fluids. *Studies in Applied Math.* **48**, 19–28.
- JOHN F. 1941 The Dirichlet problem for a hyperbolic equation. *Am. J. Math.* **63**, 141–154.
- KUMAR P. AND QUATEART E. 1997 Angular momentum transport by gravity waves and its effect on the rotation of the solar interior. *Astrophys. J.* **475**, L143–L146.
- LISTER J. AND BUFFETT B. 1995 How much of the Earth’s core would be stably stratified if $Nu < 1$? *Phys. Earth Plan. Int.* **91**, 17–30.
- MAAS L. AND LAM F.-P. 1995 Geometric focusing of internal waves. *J. Fluid Mech.* **300**, 1–41.
- MAAS L., BENIELLI D., SOMMERIA J. AND LAM F.-P. 1997 Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid. *Nature* **388**, 557–561.
- PHILLIPS O. M. 1963 Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. *Phys. Fluids* **6**, 513–520.
- RALSTON J. 1973 On stationary modes in inviscid rotating fluids. *J. Math. Anal. Appl.* **44**, 366–383.
- RIEUTORD M. 1987 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. I. Steady flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **39**, 163.
- RIEUTORD M. AND VALDETTARO L. 1997 Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **341**, 77–99.
- SAAD Y. 1992 *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Manchester University Press.
- SCHAEFFER D. 1975 On the existence of discrete frequencies of oscillation in a rotating fluid. *Studies in Applied Math.* **54**, 269–274.
- STEWARTSON K. AND RICKARD J. 1969 Pathological oscillations of a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **35**, 759–773.
- STEWARTSON K. AND WALTON I. 1976 On waves in a thin shell of stratified rotating fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **349**, 141–156.
- UNNO W., OSAKI Y., ANDO H. AND SHIBAHASHI H. 1979 *Non radial oscillations of stars*. University of Tokyo Press.
- WUNSCH C. 1969 Progressive internal waves on slopes. *J. Fluid Mech.* **35**, 131–144.

ZAHN J.-P., TALON S. AND MATIAS J. 1997 Angular momentum transport by internal waves in the solar interior. *Astron. & Astrophys.* **322**, 320–328.

ZHANG K.K. 1995 Spherical shell rotating convection in the presence of a toroidal magnetic field. *Proc. R. Soc. Lond.* **448**, 245–268.

Chapter 4

Un second modèle anélastique

Notre premier modèle Boussinesq nous a été très utile pour appréhender la dynamique compliquée des modes gravito-inertiels. Il n'est malheureusement pas applicable en l'état aux zones radiatives d'étoiles en rotation rapide où la fréquence de Brunt-Väisälä n'est pas proportionnelle au rayon; *i.e.* l'hypothèse d'incompressibilité est trop forte. Nous avons donc développé un nouveau modèle anélastique qui a l'avantage de prendre en compte un profil réaliste de densité tout en filtrant les ondes acoustiques qui ne nous intéressent pas. Ce travail a fait l'objet d'un second article intitulé "Oscillations of a rotating star: a non-perturbative theory" (Dintrans & Rieutord, 2000).

4.1 Présentation de l'approximation anélastique

4.1.1 Une approche qualitative

Le système d'équations linéaires gouvernant les oscillations adiabatiques d'une étoile sans rotation est donné dans l'approximation de Cowling (où les perturbations eulériennes du potentiel gravitationnel sont négligées; Cowling, 1941) par (*e.g.* Unno *et al.*, 1989, p.92):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} P' + \rho' \vec{g}, \\ P' &= c_s^2 \rho' - \frac{N^2}{g} \rho \xi_r. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

où ρ', P' sont respectivement les perturbations eulériennes de densité et de pression, ξ_r le déplacement lagrangien radial, ρ la densité à l'équilibre, \vec{g} le champ de gravité, N^2 la fréquence de Brunt-Väisälä et c_s^2 le carré de la vitesse du son tels que

$$N^2(r) = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad ; \quad c_s^2 = \frac{\Gamma_1 P}{\rho}$$

Si l'on cherche des solutions dont la dépendance temporelle est de la forme $\exp i\sigma t$, on obtient:

$$i\sigma\rho\vec{v} = -\vec{\nabla}P' + \rho'\vec{g} \quad \text{soit} \quad i\sigma\vec{\nabla}_\perp \cdot (\rho\vec{v}_\perp) = -\nabla_\perp^2 P' = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} P'$$

où le symbole \perp correspond à la direction horizontale et on a utilisé le fait que la fluctuation de pression pouvait se développer sur une base d'harmoniques sphériques Y_ℓ^m soit

$$P'(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} p_m^\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \Rightarrow \nabla_\perp^2 P' = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} P'$$

L'équation de conservation de la masse implique que $\vec{\nabla}_\perp \cdot (\rho\vec{v}_\perp) \sim -i\sigma\rho'$ et on obtient finalement

$$P' \sim \frac{\sigma^2 r^2}{\ell(\ell+1)} \rho' \Rightarrow \frac{P'}{c_s^2 \rho'} \sim \frac{\sigma^2 r^2}{\ell(\ell+1) c_s^2} \sim \left(\frac{\sigma}{S_\ell} \right)^2 \quad \text{avec} \quad S_\ell^2 = \ell(\ell+1) \frac{c_s^2}{r^2} \quad (4.2)$$

où S_ℓ^2 est le carré de la fréquence de Lamb qui correspond à la fréquence caractéristique des ondes acoustiques; *i.e.* $S_\ell \sim \text{mHz}$. Si l'on s'intéresse aux ondes de gravité se propageant dans l'étoile, on a $\sigma \sim \mu\text{Hz}$ d'où

$$\frac{P'}{c_s^2 \rho'} \sim \left(\frac{\mu\text{Hz}}{\text{mHz}} \right)^2 \sim 10^{-6}$$

ce qui signifie que la fluctuation eulérienne de pression ne contribue que très peu à celle de densité dans le cas d'une onde de gravité; *i.e.* on a d'après (4.1)

$$\boxed{\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2}{g} \rho \xi_r \simeq \frac{N^2}{g} \rho \xi_r} \quad (4.3)$$

4.1.2 Un exemple avec l'étoile homogène

Expression analytique des fréquences d'oscillations de l'étoile homogène

Afin d'illustrer la validité de l'approximation anélastique, intéressons-nous maintenant aux modes acoustiques et aux modes de gravité d'une étoile homogène de rayon R ; *i.e.* d'une étoile de densité ρ constante dont la configuration d'équilibre hydrostatique est donnée par:

$$g(r) = \frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi}{3} G\rho r, \quad P(r) = \frac{2\pi}{3} G\rho^2 R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (4.4)$$

Ce type d'étoile, développé à l'origine par Pekeris (1938), est très utile car il permet de tester des programmes de calcul des fréquences d'oscillations de modèles stellaires plus complexes (*e.g.* Brassard *et al.*, 1992). Pekeris a en effet dérivé l'expression analytique suivante pour les fréquences d'oscillations *adimensionnées* de l'étoile homogène (on pourra aussi se reporter à Cox, 1980, p.234):

$$\omega_{k\ell}^2 = \Delta_{k\ell} \pm \sqrt{\Delta_{k\ell}^2 + \ell(\ell+1)}, \quad \Delta_{k\ell} = \Gamma_1 \left[k \left(\ell + k + \frac{5}{2} \right) + \ell + \frac{3}{2} \right] - 2 \quad (4.5)$$

où les indices ℓ et $k = 0, 1, 2, \dots$ représentent le degré et l'ordre du mode d'oscillation. Les fréquences associées au signe (+) et (-) correspondent respectivement aux ondes acoustiques p et aux ondes de gravité g , ces dernières étant instables puisqu'on a (*cf.* définition 4.1.1):

$$N^2(r) = \frac{g}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} = -\frac{g}{c^2} < 0 \quad \forall r \quad (4.6)$$

ce qui, d'après le critère de stabilité de Schwarzschild, conduit bien à des modes g instables.

Les équations radiales couplées

Nous allons maintenant calculer numériquement les fréquences d'oscillations de l'étoile homogène, c'est-à-dire chercher les solutions du système suivant:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma^2 \vec{\xi} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P' - \frac{\rho'}{\rho} \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla} \phi', \\ \rho' &= -\rho \operatorname{div} \vec{\xi}, \\ P' &= c^2 \rho' + \rho \xi_r \frac{d\phi}{dr}, \\ \Delta \phi' &= 4\pi G \rho'. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

où l'on a posé $i\sigma \vec{\xi} = \vec{v}$ ($\vec{\xi}$ correspond au déplacement lagrangien). Ce système diffère de celui donné en (4.1) puisque nous ne négligeons pas cette fois-ci les perturbations eulériennes ϕ' du potentiel gravitationnel.

Nous prenons le temps dynamique de l'étoile $T_{dyn} = (R^3/GM)^{1/2}$ comme échelle de temps, son rayon R comme échelle de longueur et sa densité à l'équilibre $\rho = cte = 3M/4\pi R^3$ comme échelle de densité. On a ainsi les équivalences suivantes:

$$\sigma = T_{dyn}^{-1} \omega, \quad \vec{\xi} = R \underline{\xi}, \quad \phi' = \frac{R^2}{T_{dyn}^2} \underline{\phi}', \quad \rho' = \rho \underline{\rho}', \quad P' = \rho \frac{R^2}{T_{dyn}^2} \underline{P}'$$

et on projette les champs sans dimension sur les harmoniques sphériques (*cf.* l'annexe D):

$$\underline{\vec{\xi}} = \xi_m^\ell \vec{R}_\ell^m + h_m^\ell \vec{S}_\ell^m, \quad \underline{\rho}' = \rho_m^\ell Y_\ell^m, \quad \underline{P}' = p_m^\ell Y_\ell^m, \quad \underline{\phi}' = \phi_m^\ell Y_\ell^m$$

où on a tenu compte du fait que le champ $\vec{\xi}$ est, sans rotation, nécessairement sphéroïdal. On arrive alors aux équations radiales couplées suivantes:

$$\left. \begin{aligned}
\omega^2 \xi_m^\ell &= \frac{dp_m^\ell}{dr} + r\rho_m^\ell + \frac{d\phi_m^\ell}{dr}, \\
\omega^2 h_m^\ell &= \frac{p_m^\ell}{r} + \frac{\phi_m^\ell}{r}, \\
\rho_m^\ell + \frac{d\xi_m^\ell}{dr} + 2\frac{\xi_m^\ell}{r} - \ell(\ell+1)\frac{h_m^\ell}{r} &= 0, \\
p_m^\ell - \frac{5}{6}(1-r^2)\rho_m^\ell - r\xi_m^\ell &= 0, \\
\frac{d^2\phi_m^\ell}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi_m^\ell}{dr} - \ell(\ell+1)\frac{\phi_m^\ell}{r^2} - 3\rho_m^\ell &= 0.
\end{aligned} \right\} \implies \mathcal{A}\vec{\psi}_\ell = \omega^2 \mathcal{B}\vec{\psi}_\ell \quad \text{avec} \quad \vec{\psi}_\ell = \begin{pmatrix} \xi_m^\ell \\ h_m^\ell \\ \rho_m^\ell \\ p_m^\ell \\ \phi_m^\ell \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où les opérateurs différentiels \mathcal{A} et \mathcal{B} sont, comme dans le chapitre précédent, discrétisés sur une grille de collocation de Gauss-Lobatto comportant $(N_r + 1)$ points. Nous notons qu'un mode propre $(\omega_\ell^2, \vec{\psi}_\ell)$ sans rotation correspond à une valeur *unique* de ℓ , du fait précisément de l'absence de couplage en ℓ au niveau des équations radiales (4.8).

Les conditions limites

Nous imposons la régularité de nos solutions au centre de l'étoile soit:

$$\xi_m^\ell = 0, \quad h_m^\ell = 0, \quad \rho_m^\ell = 0, \quad p_m^\ell = 0, \quad \phi_m^\ell = 0 \quad \text{en} \quad r = 0$$

La condition de surface libre en $r = 1$ impose la continuité à la fois du potentiel gravitationnel (*i.e.* \vec{g} doit rester fini au passage de l'interface) et de \vec{g} . Cette dernière condition revient en fait à imposer la continuité de la perturbation lagrangienne $\delta\vec{g}$; *i.e.* on a

$$\delta\vec{g}_i = \delta\vec{g}_e \implies \vec{g}'_i(R) + \xi_r(R) \left(\frac{\partial \vec{g}'_i}{\partial r} \right)_R = \vec{g}'_e(R) + \xi_r(R) \left(\frac{\partial \vec{g}'_e}{\partial r} \right)_R$$

soit en passant au potentiel ϕ

$$\left(\frac{\partial \phi'_i}{\partial r} \right)_R + \xi_r(R) \left(\frac{\partial^2 \phi_i^0}{\partial r^2} \right)_R = \left(\frac{\partial \phi'_e}{\partial r} \right)_R + \xi_r(R) \left(\frac{\partial^2 \phi_e^0}{\partial r^2} \right)_R$$

Les termes à l'équilibre peuvent être calculés explicitement à partir de l'équation de Poisson pour ϕ_i^0 et ϕ_e^0 :

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi_i^0)}{dr^2} &= 4\pi G\rho \implies \phi_i^0(r) = \frac{GM}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) \quad \text{soit} \quad \left(\frac{d^2\phi_i^0}{dr^2} \right)_R = \frac{GM}{R^3} \\
\frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi_e^0)}{dr^2} &= 0 \implies \phi_e^0(r) = -\frac{GM}{R} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{d^2\phi_e^0}{dr^2} \right)_R = -\frac{2GM}{R^3}
\end{aligned} \right.$$

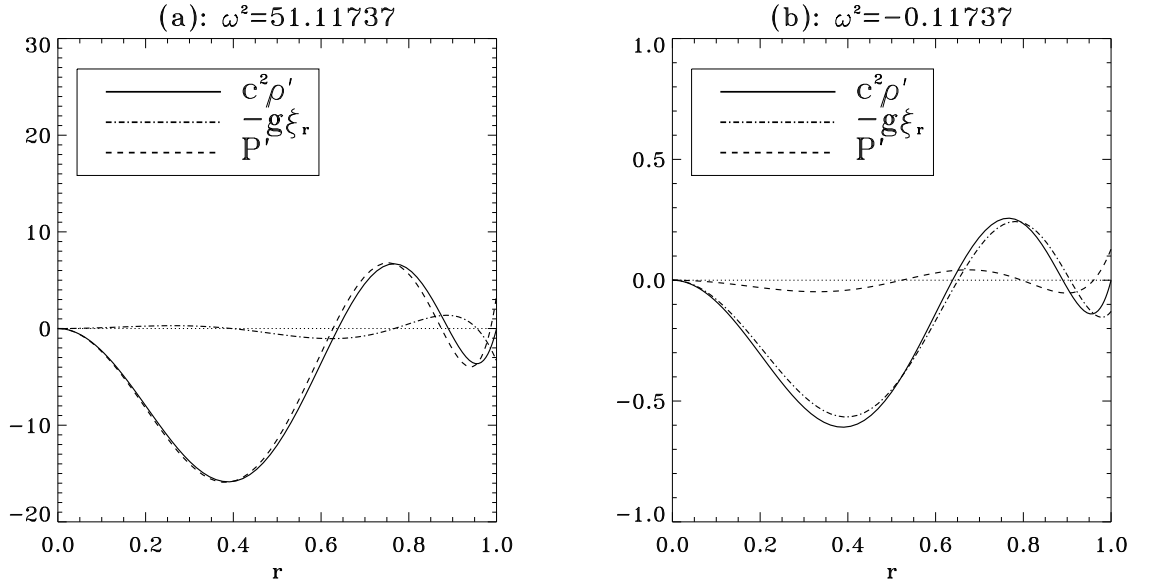


Figure 4.1: Comparisons des contributions P' et $(-g\xi_r)$ à la fluctuation eulérienne de densité ρ' telle que $c^2\rho' = P' - g\xi_r$ dans le cas d'un mode acoustique (a) et d'un mode de gravité instable (b) pour une étoile homogène. La fluctuation de densité est principalement due à celle de pression dans le cas acoustique alors que c'est le déplacement lagrangien qui contribue le plus dans le cas du mode de gravité.

d'où

$$\left(\frac{\partial\phi'_i}{\partial r}\right)_R + 3\frac{GM}{R^3}\xi_r(R) - \left(\frac{\partial\phi'_e}{\partial r}\right)_R = 0$$

La perturbation eulérienne ϕ'_e satisfait l'équation de Laplace soit, après projection sur les harmoniques sphériques,

$$\frac{d^2\phi_{m,e}^\ell}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi_{m,e}^\ell}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\phi_{m,e}^\ell = 0 \Rightarrow \phi_{m,e}^\ell(r) = \frac{C^\ell}{r^{\ell+1}} \quad (4.9)$$

et

$$\left(\frac{d^2\phi_{m,e}^\ell}{dr^2}\right)_R = -(\ell+1)\frac{\phi_{m,e}^\ell(R)}{R} = -(\ell+1)\frac{\phi_{m,i}^\ell(R)}{R} \quad (4.10)$$

où on a utilisé la continuité de ϕ à l'interface. La condition limite adimensionnée en $r = 1$ s'écrit donc:

$$3\xi_m^\ell + \frac{d\phi_{m,i}^\ell}{dr} + (\ell+1)\phi_{m,i}^\ell = 0 \quad (4.11)$$

Résultats numériques

L'approximation anélastique revient, d'après (4.3), à négliger pour un mode de gravité la contribution de la fluctuation eulérienne de pression à celle de densité; *i.e.* on a dans le cas de l'étoile homogène:

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r \simeq -\frac{g}{c_s^2} \xi_r \quad \text{soit} \quad c_s^2 \rho' = -g \xi_r \quad (4.12)$$

Pour illustrer la validité de cette approximation, nous avons calculé, *via* la méthode itérative, les modes propres de degré $\ell = 2$ qui sont solutions du système (4.8):

- la table 4.1 donne la liste des fréquences au carré $\omega_{k\ell}^2$ obtenues pour deux résolutions $N_r = 10$ et $N_r = 20$: l'accord avec les valeurs exactes calculées à partir de la formule analytique (4.5) est excellent, et ce même dans le cas d'une grille radiale n'ayant que dix points.
- les profils des quantités $(c^2 \rho', P', -g \xi_r)$ intervenant dans la relation (4.12) sont illustrés sur la figure 4.1 pour le mode acoustique p_2 (cas a) et le mode de gravité g_2 (cas b). On voit que la fluctuation eulérienne de densité est principalement due soit: (i) au terme de pression P' pour un mode acoustique; (ii) au terme avec le déplacement radial ξ_r pour un mode de gravité. Par conséquent, négliger dans ce dernier cas la contribution P' dans l'expression de ρ' , comme nous le faisons en appliquant l'approximation anélastique, est bien valide.

Mode ($\ell = 2$)	$N_r = 10$	$N_r = 20$	Valeur exacte
p_0	8.38244802131878	8.38244802131873	8.38244802131873
p_1	26.2287565553230	26.2287565553230	26.2287565553230
p_2	51.1173769148990	51.1173769148989	51.1173769148990
p_3	82.7391836982811	82.7391836982811	82.7391836982811
p_4	120.857254208492	121.049566472436	121.049566472436
p_5	168.736308809240	166.036136711675	166.036136711675
g_0	-0.71578135465206	-0.71578135465206	-0.71578135465206
g_1	-0.22875655532295	-0.22875655532295	-0.22875655532295
g_2	-0.11737691489899	-0.11737691489899	-0.11737691489899
g_3	-0.07251703161442	-0.07251703161442	-0.07251703161442
g_4	-0.04964298054970	-0.04956647243644	-0.04956647243644
g_5	-0.03516817767454	-0.03613671167511	-0.03613671167511

Table 4.1: Modes propres du modèle homogène.

4.1.3 Les équations anélastiques avec rotation

Différence avec l'approximation subsismique

Dans un repère en co-rotation, les équations anélastiques gouvernant les oscillations adiabatiques s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\rho\vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \times (\rho\vec{v}) &= -\vec{\nabla}P' - N^2(\rho\xi_r)\vec{e}_r, \\ \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} &= \rho\vec{v}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

où nous avons négligé la dérivée partielle en temps $\partial\rho'/\partial t$ qui apparaissait dans l'équation de conservation de la masse du système (4.1); *i.e.* nous filtrons *de facto* les ondes sonores. Ce faisant, nous notons que nos équations diffèrent sur ce point avec celles données par De Boeck *et al.* (1992). Dans leur modèle, De Boeck *et al.* se sont inspirés de l'approximation "subsismique" utilisée en géophysique pour décrire les oscillations basses-fréquences se propageant dans le noyau liquide de la Terre (Smylie & Rochester, 1981; Friedlander, 1985). Ces auteurs gardent ainsi la dérivée temporelle de ρ' et trouvent la relation suivante:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) &= 0 \\ \rho' &\simeq \frac{N^2}{g}\rho\xi_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{N^2}{g}\rho v_r + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{N^2}{g}v_r + \operatorname{div}\vec{v} + v_r\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = 0$$

Si l'on reprend le cas de l'étoile homogène pour laquelle $\rho = cte$, cette équation devient

$$\frac{N^2}{g}v_r + \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

et négliger (N^2v_r/g) devant le terme de divergence revient à dire que

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \gg \frac{N^2}{g}v_r \Rightarrow n \gg \left| \frac{N^2}{g} \right| \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial r} \sim \mathcal{O}(n)$$

où n est le nombre de nœuds radiaux de v_r . Supprimer le terme (N^2v_r/g) revient ainsi à affirmer que v_r est une fonction de haut degré; *i.e.* $n \gg 1$. D'après les relations (4.4) et (4.6), on a pour l'étoile homogène:

$$\left| \frac{N^2}{g} \right| = \frac{1}{c^2} \sim \frac{1}{1-r^2} \quad \text{d'où} \quad n \gg \frac{1}{1-r^2}, \quad r \in [0, 1]$$

ce qui, hormis près de la surface en $r \sim 1$, est bien vérifié dès que $n \geq 5 - 10$. Ce faisant, le problème de la validité de notre approximation au niveau de la surface ne s'est pas posé

car les modes gravito-inertiels que nous avons étudiés se propageaient principalement dans une zone radiative profonde (*cf.* le diagramme de propagation de la figure 1 de l'article). Une étude approfondie des différences entre les approximations anélastique et subsismique a donné lieu à une publication dans MNRAS (Dintrans & Rieutord, 2001).

Les équations adimensionnées

Lorsqu'on regarde le système (4.13), on constate que l'on peut s'affranchir, au niveau de la résolution numérique, du champ de densité ρ à l'équilibre en posant $\vec{p} = \rho\vec{v}$; *i.e.* on travaille non plus avec la vitesse mais plutôt avec la quantité de mouvement soit

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{p} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \times \vec{p} &= -\vec{\nabla} P' - N^2 \varepsilon_r \vec{e}_r, \\ \frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t} &= \vec{p}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

où $\vec{\varepsilon} = \rho\vec{\xi}$. Cette formulation est très pratique car elle nous permet d'éliminer, comme au chapitre précédent, un champ radial à l'aide de l'équation sur la divergence. On choisit le temps dynamique T_{dyn} de l'étoile comme échelle de temps et son rayon R comme échelle de longueur et on obtient le système adimensionné suivant:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ i\omega \vec{u} + f \vec{e}_z \times \vec{u} &= -\vec{\nabla} \pi - N^2 \zeta_r \vec{e}_r, \\ i\omega \zeta_r &= u_r. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

où le paramètre f est égal à

$$f = 2\Omega T_{dyn} = 4\pi \frac{T_{dyn}}{T_{rot}} \quad (4.16)$$

L'intensité de la rotation de l'étoile dépend donc de la valeur de f ; *i.e.* une étoile en rotation lente comme le Soleil sera telle que $f \sim 10^{-2}$ alors que les rotateurs rapides du type γ -Doradus correspondront à $f \sim 10^{-1}$. On note que la valeur maximale théorique pour f correspond à la limite képlérienne où accélération centrifuge et gravité se contrebalanceraient exactement à la surface de l'étoile soit

$$R\Omega^2 = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \frac{1}{T_{dyn}} \quad \text{soit} \quad f_{max} = 2$$

Cette valeur est évidemment une limite supérieure car l'étoile ne survivrait pas à de tels taux de rotation. Nous prendrons en fait $f_{max} = 0.1$, ce qui correspond à une période de rotation de l'ordre du jour pour notre étoile test.

Les équations radiales couplées et les conditions limites

Les équations radiales couplées sont obtenues, comme précédemment, par projection des champs sur les harmoniques sphériques; *i.e.* on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda w_m^\ell = f \left\{ A_{\ell,m} \left[r \frac{du_m^{\ell-1}}{dr} + (2-\ell)u_m^{\ell-1} \right] + A_{\ell+1,m} \left[r \frac{du_m^{\ell+1}}{dr} + (\ell+3)u_m^{\ell+1} \right] + i \frac{m}{\Lambda} w_m^\ell \right\} \\ \lambda \left[r^2 \frac{d^2 u_m^\ell}{dr^2} + 4r \frac{du_m^\ell}{dr} + (2-\Lambda)u_m^\ell \right] = \Lambda N^2 \zeta_m^\ell + f \left\{ B_{\ell,m} \left[(\ell-1)w_m^{\ell-1} - r \frac{dw_m^{\ell-1}}{dr} \right] \right. \\ \left. - B_{\ell+1,m} \left[(\ell+2)w_m^{\ell+1} + r \frac{dw_m^{\ell+1}}{dr} \right] + i \frac{m}{\Lambda} \left[r^2 \frac{d^2 u_m^\ell}{dr^2} + 4r \frac{du_m^\ell}{dr} + (2-\Lambda)u_m^\ell \right] \right\} \\ \lambda \zeta_m^\ell = u_m^\ell \end{array} \right.$$

où $\Lambda = \ell(\ell+1)$. En ce qui concerne les conditions limites, une petite subtilité apparaît au niveau de la surface car la condition mécanique classique sur la pression, *i.e.* $\delta P = 0$, est incompatible avec l'approximation anélastique. En effet, on aurait:

$$\delta P = P' + \xi_r \frac{dP}{dr} = P' - \rho g \xi_r = 0 \Rightarrow \omega^2 \zeta_h \sim \zeta_r \quad \text{car} \quad P' \sim \omega^2 \zeta_h$$

or l'approximation anélastique impose quant à elle que $\zeta_r \propto \omega^2/N^2$. Comme $|N^2|$ diverge à la surface, $\zeta_r \rightarrow 0$ *nécessairement*. Nous ne prendrons donc pas $\delta P = 0$ mais plutôt la condition compatible avec notre approximation soit $\zeta_r = 0$ pour $r = 1$.

4.2 Le modèle d'étoile à l'équilibre

4.2.1 Choix du code de calcul pour la structure interne

La compressibilité apparaît donc dans nos équations *via* les profils à l'équilibre $\rho(r)$ et $N^2(r)$. Pour les obtenir, nous avons utilisé les deux programmes de calcul de modèles stellaires suivants:

- le premier programme a consisté en une version, améliorée par nos soins, du code de calcul d'une étoile ZAMS de Hansen & Kawaler (1994). Les principales modifications que nous avons apportées ont concerné: (i) la taille de la grille radiale, initialement bridée à deux cent points, et qui est maintenant laissée à la discrétion de l'utilisateur; (ii) le système d'entrée des données, assez lourd, a été avantageusement remplacé par l'interface graphique IDL illustrée par la figure 4.2. Un programme additionnel de calcul des fréquences d'oscillations adiabatiques (dans l'approximation de Cowling) du modèle ZAMS de sortie a été aussi mis à jour pour tenir compte des modifications apportées à la grille radiale. Ce second programme, qui est basé sur une méthode classique de "shooting", est écrit pour les variables Y_1 et Y_2 de Dziembowski (1971).

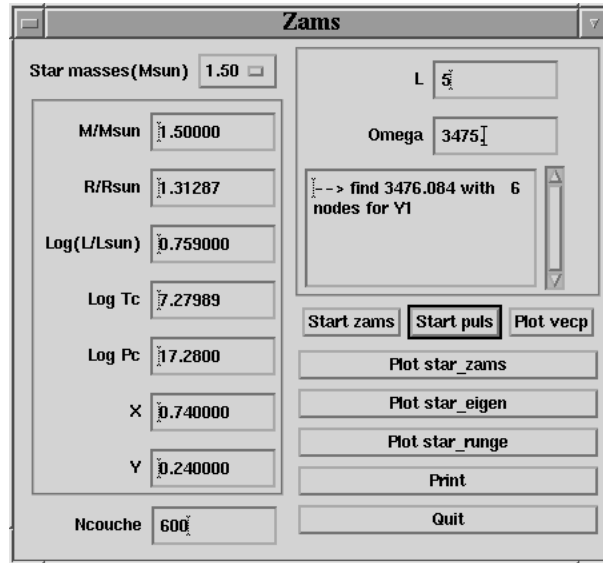


Figure 4.2: Interface graphique IDL pour le calcul d’un modèle ZAMS à l’équilibre à partir de la version améliorée du code de Hansen & Kawaler (1994). L’utilisateur entre la masse de l’étoile (*via* le menu déroulant *Star masses*) ainsi que le nombre de points de grille (champ *Ncouche*) et les paramètres optimaux sont automatiquement sélectionnés. Un programme de calcul des fréquences d’oscillations adiabatiques (basé sur une méthode de “shooting”) pour un degré ℓ et un shift ω donnés est aussi disponible (*cf.* le coin supérieur droit de l’interface).

- le second programme de calcul de structure interne que nous avons utilisé est le code d’évolution stellaire CESAM de Morel (1997). Après quelques tests de comparaison sur une étoile de $1.5M_{\odot}$, nous avons définitivement choisi de calculer notre modèle à l’équilibre avec ce code et non avec celui dérivé de Hansen & Kawaler (1994), ce dernier étant trop imprécis au niveau de la zone convective en surface.

La masse de notre étoile de référence (*i.e.* $M = 1.5M_{\odot}$) a été choisie¹ afin de reproduire au mieux les contraintes observationnelles sur $\log g$ et T_{eff} tirées d’un échantillon de quatorze nouvelles étoiles γ -Doradus découvertes récemment à partir des données Hipparcos (Aerts *et al.*, 1998). Sa structure est illustrée par le diagramme de propagation de la figure 1 de l’article: son coeur convectif est surmonté d’une large zone radiative (*i.e.* $0.13 \leq R/R_* < 0.86$) qui est située en-dessous d’une petite région convective à la surface.

4.2.2 La projection des profils sur la grille de Gauss-Lobatto

Une fois obtenus les profils radiaux $\rho(r)$ et $N^2(r)$ *via* CESAM, nous avons dû les projeter sur la grille radiale de Chebyshev. Le problème du choix de l’algorithme de projection s’est alors posé et les deux méthodes suivantes ont été testées: (*i*) soit on calcule directement les

¹La sélection a porté sur un ensemble d’étoiles ZAMS dont les masses variaient entre $1M_{\odot}$ et $2M_{\odot}$.

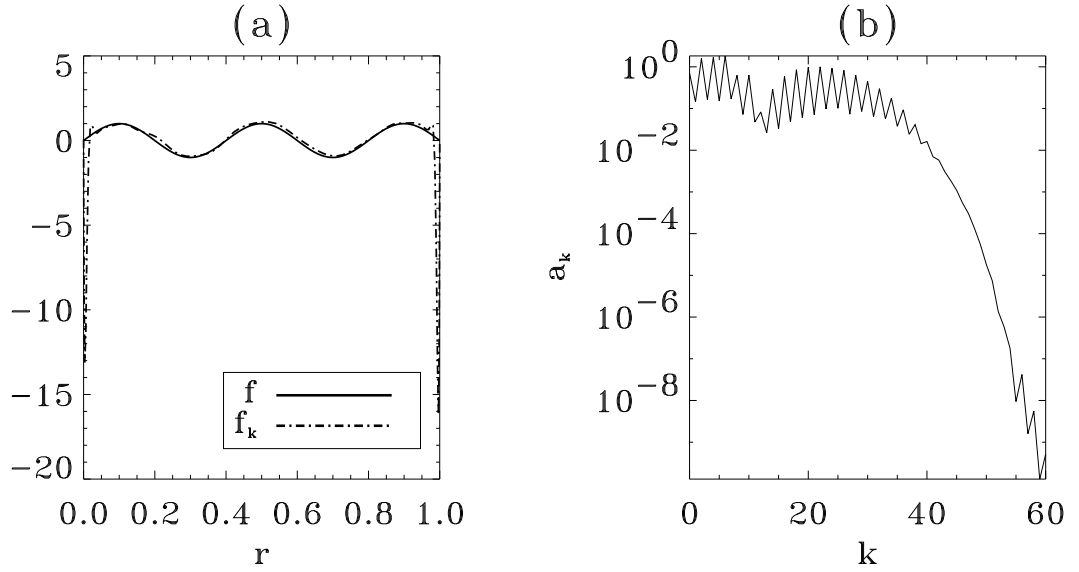


Figure 4.3: Illustration des limites de la méthode de projection d'une fonction radiale à partir des coefficients a_k . La fonction $f(r) = \sin(5\pi r)$ est donnée au départ sur une grille uniforme avec $np = 60$. Sa reconstruction sur une grille de Gauss-Lobatto avec $N_r = 100$ fait apparaître des discontinuités sur les bords (a) et le spectre en a_k converge difficilement (b).

coefficients a_k de Chebyshev et on en déduit les valeurs des profils sur les points de la grille de collocation; (ii) soit on utilise une interpolation à base de “splines” cubiques.

- la projection via les coefficients a_k : c'est la méthode qui semble *a priori* la plus simple et la plus “élégante”. Supposons par exemple que l'on ait à projeter une fonction radiale $f(r)$ initialement donnée sur une grille uniforme comportant $(np + 1)$ points r_j . Le calcul des coefficients a_k se fera de la manière suivante:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{np} a_k T_k(x_j) \Rightarrow a_k = \sum_{j=0}^{np} T_{kj}^{-1} f_j$$

où T_{kj} représente le polynôme de Chebyshev de degré k exprimé au point x_j (en faisant le changement de variable 3.40). Une fois les coefficients a_k connus, on peut facilement projeter f sur la grille de collocation en faisant:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{np} a_k T_k(x_j) \quad \text{où} \quad x_j = \cos\left(\frac{\pi}{N_r} j\right)$$

La seule difficulté apparente réside dans le calcul de la matrice inverse T_{kj}^{-1} ; cette inversion pouvant par exemple s'appuyer sur une factorisation *LU* de T_{kj} (e.g. Press *et al.*, 1994, p.40).

Malheureusement, cette méthode de projection échoue si la fonction $f(x)$ de départ est définie sur une grille qui n'est pas celle de Gauss-Lobatto. Prenons par exemple le cas suivant: on se donne la fonction $f(r) = \sin(5\pi r)$ et on calcule les coefficients a_k en utilisant une grille uniforme de soixante et un points ($np = 60$). On projette ensuite f sur une grille de Gauss-Lobatto de cent un points ($N_r = 100$) à partir de ces coefficients soit

$$f_k(x_j) = \sum_{k=0}^{np} a_k \cos\left(\frac{\pi}{N_r} jk\right) \quad \text{avec} \quad x_j = \cos\left(\frac{\pi}{N_r} j\right), \quad j = 0, 1, \dots, N_r$$

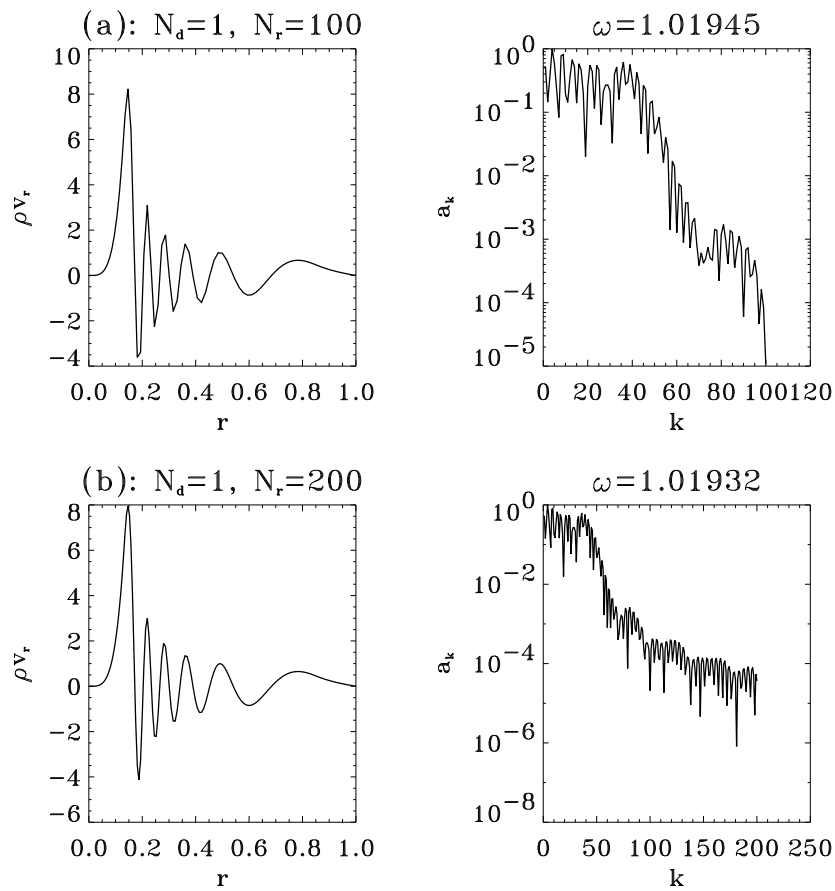


Figure 4.4: Inadaptation d'une grille radiale mono-domaine pour décrire un mode de gravité piégé dans la zone radiative centrale. Le fait de multiplier le nombre de points de grille d'un facteur deux (on passe du cas a avec $N_r = 100$ au cas b avec $N_r = 200$) n'augmente quasiment pas la convergence spectrale des a_k (qui reste $\sim 10^{-5}$) car les points supplémentaires se répartissent surtout situés dans les zones convectives où la solution varie par définition peu.

La forme de la fonction projetée f_k est illustrée par la figure 4.3: des discontinuités apparaissant sur les bords (Fig. 4.3a), ce qui signifie que le spectre en a_k n'est pas bien convergé (Fig. 4.3b). Ces problèmes de reconstruction viennent du fait que les coefficients a_k sont

calculés à partir d'une grille dont l'uniformité ne reproduit pas du tout le maillage serré de la grille de Gauss-Lobatto sur les bords (on rappelle que $\Delta r \propto 1/N_r^2$ pour $r \sim 0, 1$; cf. Fig. 3.6). Autrement dit, cette uniformité initiale implique un manque d'information sur la fonction $f(x)$ au niveau des bords et devient vite rédhibitoire lorsqu'on calcule des coefficients a_k d'ordre k élevé; ceci se traduit par le fait que la matrice T_{jk} est mal conditionnée. Comme les profils $\rho(r)$ et $N^2(r)$ calculés par CESAM sont précisément donnés sur une grille quasi-uniforme pour $r \sim 0.5$, la méthode de projection basée sur le calcul des coefficients a_k n'est pas valide.

• l'interpolation via des "splines" cubiques: la philosophie de cette méthode est totalement différente de la précédente puisqu'elle consiste à faire l'interpolation linéaire suivante (e.g. Press *et al.*, 1994, p.107)

$$f = Af_i + Bf_{i+1} + Cf_i'' + Df_{i+1}''$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & B = 1 - A \\ C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{i+1} - x_i)^2, & D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{i+1} - x_i)^2 \end{cases}$$

Donc si l'on veut connaître la fonction $f(x)$ sur un point x_j de la grille de Gauss-Lobatto, il suffit de l'interpoler entre les points x_i et x_{i+1} de la grille uniforme de départ avec $x_i < x_j < x_{i+1}$. Nous avons utilisé pour cela les deux programmes suivants: (i) le premier est tiré de la librairie de splines cubiques "Curfit" développée par Dierckx (1993). Celui-ci donne les meilleurs résultats mais est, en contrepartie, le plus lourd à implémenter (avec pas moins de dix sous-programmes !); (ii) le second, plus simple d'utilisation, provient du code de calcul des fréquences adiabatiques de Hansen & Kawaler (1994).

4.2.3 Nécessité d'une grille radiale multi-domaine

En utilisant les propriétés mathématiques de l'opérateur mixte gouvernant les oscillations, nous démontrons dans l'annexe A.1 de l'article que les modes de gravité sans rotation sont piégés entre deux sphères concentriques de rayon r tel que $N(r) = \omega$ (ω étant la fréquence du mode et $N(r)$ le profil radial de la fréquence de Brunt-Väisälä ; voir aussi la section 3.4 au troisième chapitre). Ce piégeage a d'importantes conséquences numériques:

- les fonctions propres vont brusquement varier au niveau des rayons r tels que $N(r) = \omega$. En fait, dans les régions où l'opérateur devient de type elliptique (*i.e.* où $N(r) < \omega$), elles décroissent de manière quasi-exponentielle (cf. Fig. 3 de l'article).
- la grille de Gauss-Lobatto, dans sa configuration mono-domaine, n'est pas optimale pour décrire un mode de gravité se propageant dans la zone radiative située au centre de l'étoile. En effet, nous avons vu que le pas de grille variait comme $1/N_r^2$ sur les bords et comme $1/N_r$ au milieu (cf. Fig. 3.6). Par conséquent, nous décrirons très bien la structure du mode de gravité dans les zones convectives en $r \sim 0$ et $r \sim 1$ mais

non en $r \sim 0.5$ qui est précisément l'endroit où le mode a la plus grande amplitude ! Par conséquent, ajouter des points de grille ne nous sera pas d'un grand secours car cela reviendra en fait à ajouter surtout des points sur les bords (figure 4.4).

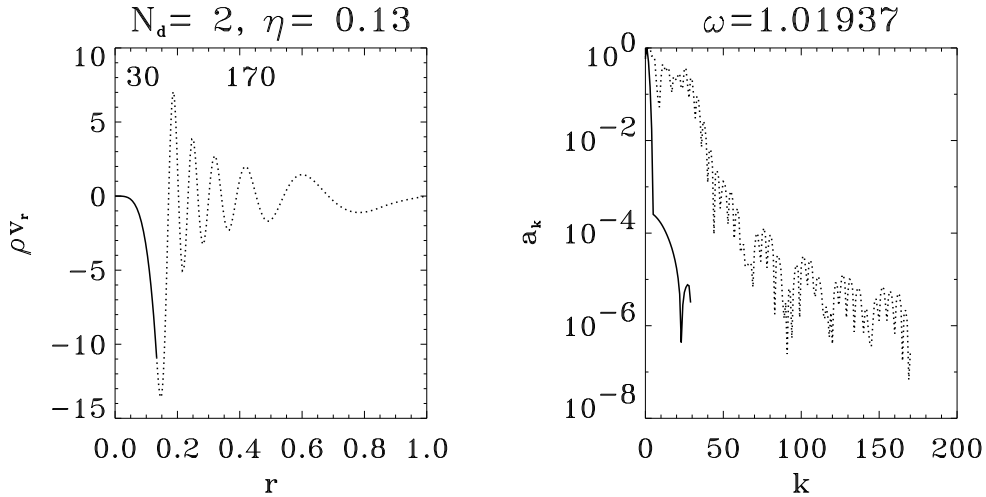


Figure 4.5: Grille radiale multi-domaine avec $N_r = 200$ points, la jonction entre les deux domaines étant située en $r = \eta = 0.13$. On n'utilise que trente points pour décrire le mode dans le cœur convectif, ce qui permet d'échantillonner correctement les variations rapides de la fonction propre au bas de la zone radiative. On gagne ainsi deux ordres de grandeur au niveau de la convergence spectrale ($\sim 10^{-7}$) par rapport au cas (b) de la figure 4.4 !

La solution consiste à travailler avec une grille radiale multi-domaine, c'est-à-dire que l'on colle deux (voire trois) grilles de Gauss-Lobatto les unes à la suite des autres. L'avantage immédiat est que l'on peut raccorder deux grilles aux endroits où les fonctions propres varient rapidement; *i.e.* au niveau des interfaces entre les zones convectives et la zone radiative. Le pas Δr sera alors très fin dans ces régions ($\Delta r \propto 1/N_r^2$) et la convergence spectrale en sera grandement améliorée (figure 4.5).

Oscillations of a rotating star: a non-perturbative theory

Boris Dintrans¹ and Michel Rieutord^{1,2}

¹ Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue E. Belin, 31400 Toulouse, France

² Institut Universitaire de France

Received/Accepted

Abstract. Nonradial gravity modes of a $1.5M_{\odot}$ rotating ZAMS star are investigated using the anelastic approximation. Formulating the oscillation equations as a generalized eigenvalue problem, we first show that the usual second-order perturbative theory reaches its limits for rotation periods of about three days. Studying the rapid rotation régime, we develop a geometric formalism based on the integration of the characteristics of the governing mixed-type operator. These characteristics propagate in the star interior and the resulting web can be either ergodic (the web fills the whole domain) or periodic (the web reduces to an attractor along which characteristics focus). We further show the deep relation existing between the orbits of characteristics and the corresponding eigenmodes: (i) with ergodic orbits are associated regular eigenmodes which are similar to the usual gravity modes; (ii) with periodic orbits are associated singular eigenmodes for which the velocity diverges along the attractor. If diffusivity is taken into account, this singularity turns into internal shear layers tracing the attractor. As a consequence, the classical organization of eigenvalues along families with fixed (ℓ, n) disappears and leaves the place to an intricate low-frequency spectrum.

Key words: stars: oscillations - stars: rotation - γ Doradus

1. Introduction

Following the pioneering work of Ledoux (1951), the influence of the rotation on nonradial oscillations is generally achieved by the means of a perturbative theory, i.e. oscillation frequency in the co-rotating frame is written as

$$\sigma_{n\ell m} = \sigma_{n\ell}^{(0)} + C_{n\ell m}^I \Omega + C_{n\ell m}^{II} \Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3) \quad (1)$$

where $\sigma_{n\ell}^{(0)}$ is the unperturbed frequency of a mode with degree ℓ and radial order n , m is the azimuthal number

such that $-\ell \leq m \leq \ell$, $C_{n\ell m}^I$ and $C_{n\ell m}^{II}$ are two splitting coefficients depending on the non-rotating solution and Ω is the uniform rotation rate. For slowly rotating stars such as the Sun or many white dwarfs, the second-order effects of rotation are negligible leading to Zeeman-like multiplets which allow to infer both the mode degrees ℓ and the mean rotation rate Ω (see e.g. the study of the white dwarf PG 1159-035 by Winget et al. (1991)).

In the case of rapidly rotating variable stars, the observed multi-periodic spectra do not show uniform spacings and second-order (at least) effects of rotation on the splitting need to be taken into account. This was realized for instance with multiperiod β Cephei stars (Saio, 1981; Engelbrecht, 1986), δ Scuti stars (Breger et al., 1999; Pamyatnykh et al., 1999) or γ Doradus stars (Aerts and Krisciunas, 1996); the splitting coefficient $C_{n\ell m}^{II}$ being calculated from the theoretical works of Saio (1981) or Dziembowski & Goode (1992).

Another possibility, first proposed by Clement (1981), to deal with rapid rotations is the computation of eigenfrequencies with rotation terms directly inserted in the linearized dynamical equations. However, because of the spherical harmonics coupling, this leads to a large system of coupled equations which is hardly tractable. In addition, the convergence of eigenfrequencies becomes doubtful for high-order g-modes for which rotation effects are especially significant (Clement, 1998). Lee & Saio (1987), with a similar non-perturbative approach, computed the gravity eigenmodes of a $10 M_{\odot}$ main-sequence star by including the Coriolis term but using only two spherical harmonics. Their main conclusion is that avoided crossings, similar to those caused by evolution effects (Aizenman et al., 1977), occur among eigenmodes as the rotation increases. In a following paper, Lee & Baraffe (1995) examined the pulsational stability of rotating OB stars by computing the nonadiabatic oscillations of a $5 M_{\odot}$ and a $10 M_{\odot}$ main-sequence stars still using two spherical harmonics. They also found similar avoided crossings and showed that the second-order effects of rotation are

Send offprint requests to: dintrans@obs-mip.fr

not so effective at influencing the pulsational stability of the oscillations.

In our preceding paper, Dintrans et al. (1999) (hereafter referred to as [I]) have been able to compute the gravito-inertial modes of a stably stratified rotating spherical shell with much more spherical harmonics (up to 300). Using the Boussinesq approximation (i.e. the fluid is assumed to be quasi-incompressible), the Brunt-Väisälä frequency is simply proportional to the radial distance and many mathematical results are known (Friedlander & Siegmann (1982a; 1982b)). On this problem, we discovered a new fascinating feature of rapidly rotating fluids, namely the preponderant part played by the underlying characteristics of the governing mixed-type operator. In fact, we showed that the shape of eigenfunctions are deeply connected to the characteristic orbits. When focusing occurs (i.e. characteristics can be attracted along a limit cycle), many eigenmodes shape internal discontinuities which have important spectral consequences since the classical ordering of eigenvalues with fixed (n, ℓ) disappears.

In this paper, we adopt a more realistic model based on the anelastic approximation to study the gravito-inertial oscillations of a $1.5 M_{\odot}$ zero age main-sequence rotating star obtained from the evolutionary code CESAM of Morel (1997). The star parameters are: $R = 1.427R_{\odot}$, $\log g = 4.304$, $\log(L/L_{\odot}) = 0.481$, $\log T_e = 3.805$, $X = 0.74$ and $Z = 0.02$; they correspond to those of a typical γ Doradus star. Rotation first perturbs g-modes (owing to their larger periods) therefore γ Doradus stars are among the best candidates to test the influence of rotation on stellar oscillations. Since the work of Balona et al. (1994), they have been identified as a new group of pulsating stars (see Handler & Krisciunas (1997) for a representative list and Aerts et al. (1998) for the latest observations with Hipparcos). They are located upon or just above the main sequence, near the cool border of the δ Scuti instability strip (with a mean spectral type F0V) and the observed periods of oscillations range from 0.2 d up to 3 d. Typical rotational velocities are 60 km/s (from 18 up to 185 km/s) which corresponds to mean rotation periods from 0.5 up to 4 days (e.g. 0.96 d for γ Dor, Balona et al. (1996)). Thus second-order corrections in the development (1) are not negligible, especially when $\sigma_{n\ell}^{(0)} \sim \Omega$.

The aim of this paper is first to show the limits of the second-order perturbative theory applied to a low-frequency gravity mode and then show how to compute non perturbatively the modes of oscillation of a rotating star. In Sect. 2, we present our anelastic model and the numerical methods we use to solve the associated generalized eigenvalue problem. We illustrate in Sect. 3.1 the capability of this non-standard approach by computing gravity modes without rotation. In Sect. 3.2, we start from a high-order g-mode with $\ell = 5$ and $n = 21$ and apply an increasing rotation rate through the Coriolis force. This large radial order n allows us to use asymptotic limits for the splitting coefficients $C_{n\ell m}^I$ and $C_{n\ell m}^{II}$. We then show

that the difference between the true eigenfrequency and its second-order approximation gets so large for γ Doradus-like rotation régimes ($2\Omega/\sigma \sim 0.1$) that modes identification is not possible with approximated values.

Therefore, letting apart the perturbative approach, we investigate in Sect. 3.3 the case of rapid rotations through the geometrical formalism used in [I], i.e. we integrate the differential equation for the characteristics of the mixed-type operator governing the nonradial oscillations. We find both ergodic orbits, where the web of characteristics fills the whole domain, and periodic orbits, where the characteristics focus along an attractor. Computing the corresponding eigenmodes in Sect. 3.4 reveals us once again the deep relation existing between the orbits of characteristics and the shape of the associated eigenfunctions. As a consequence, the spectrum appears to be roughly divided in two parts: (i) one part corresponds to eigenvalues with $\sigma \gtrsim 2\Omega$ organized along families with fixed (ℓ, n, m) , associated with ergodic orbits, and which may be identified as gravity modes perturbed by rotation; (ii) the other part corresponds to a chaotic distribution of eigenvalues with $\sigma \lesssim 2\Omega$, associated with attractors, and which may be identified as inertial modes perturbed by buoyancy. Finally, we conclude in Sect. 4 with some outlooks of our results.

2. The anelastic model

As shown in paper [I], the modes which are the most perturbed by rotation are those for which $\sigma \lesssim 2\Omega$ where σ is the mode frequency and 2Ω is the Coriolis frequency. The typical rotation period for γ Doradus-type stars is about one day which leads to $2\Omega \sim 150\mu\text{Hz}$. At such rotation rate, only low-frequency gravity modes are strongly modified by rotation. Since the frequency of a gravity mode decreases with increasing order n (see e.g. Unno et al. (1989)), rotation first perturbs high-order gravity modes.

Because of their low frequency, these modes propagate in quasi-hydrostatic equilibrium, i.e. with very small pressure fluctuations. This justifies the use of the anelastic approximation where pressure fluctuations hardly contribute to density fluctuations; hence, in the adiabatic limit, we have

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2}{g} \rho \xi_r \simeq \frac{N^2}{g} \rho \xi_r$$

whereas the filtering of acoustic waves in the conservation of mass equation leads to

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Here N^2 denotes the square of the Brunt-Väisälä frequency and ξ_r the radial Lagrangian displacement. We note that a very similar approximation has been used by De Boeck et al. (1992) to study the low-frequency g-modes of non-rotating stars; this work is in fact based on the so-called subseismic approximation used in geophysics (Smylie and Rochester, 1981; Friedlander, 1985). The only difference

with our anelastic model concerns the conservation of mass equation where these authors kept the term N^2/gu_r coming from the time derivative $\partial\rho'/\partial t$. In fact, this term can be neglected as we will show in a following paper. Finally, the high radial order allows us to use the Cowling approximation (Cowling, 1941) where the perturbations in the gravitational potential are neglected.

Let us now choose the star's radius for the length scale, the dynamical time $T_{dyn} = (R^3/GM)^{1/2}$ for the time scale and assume a time-dependence of the form $\exp(i\sigma t)$. In addition, as we shall concentrate on the effects of Coriolis force, we will discard all centrifugal effects and assume the star spherical. Then, in the adiabatic limit, the non-dimensional linearized equations for gravito-inertial eigenmodes in a co-rotating frame are given by

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \lambda \mathbf{u} + f(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) &= -\nabla P' - N^2 \zeta_r \mathbf{e}_r \\ \lambda \zeta_r &= u_r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where P' denotes the non-dimensional reduced pressure, $\mathbf{u} = \rho \mathbf{v}$ the non-dimensional momentum, $\zeta_r = \rho \xi_r$ and $\lambda = i\omega$ with $\omega = \sigma T_{dyn}$. The rotation appears through the Coriolis term $f(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u})$ where the parameter f is related to the ratio between the dynamical time scale and the rotation period as

$$f = 4\pi \frac{T_{dyn}}{T_{rot}} = 2\Omega \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (3)$$

In the solar case, we have $f_\odot \sim 10^{-2}$ whereas a typical value for rapidly rotating stars is $f \sim 10^{-1}$. For instance, the minimum rotation period observed for γ Doradus stars is of about one day. As the dynamic time scale of our test star is $T_{dyn} \simeq 37$ mn, it leads to $f_{max} \approx 0.3$ which is the maximum f -value considered later on.

At the star center, we impose the regularity of the velocity and hence of the Lagrangian displacement. At the surface, things are more involved since, as suggested by De Boeck et al. (1992), the classical free surface condition $\delta P = 0$ is not compatible with the anelastic approximation. This approximation indeed requires that the radial component of the Lagrangian displacement is such as $\xi_r \propto \omega^2/N^2$. As $|N^2|$ becomes very large near the surface, it means that ξ_r must vanish which is incompatible with the condition $\xi_r \sim \omega^2 \xi_h$ resulting from $\delta P = 0$ (ξ_h being finite and non-zero at the surface). Therefore we impose $\xi_r = 0$ and then $\zeta_r = 0$ at $r = 1$.

2.1. Numerics

Following Rieutord (1987; 1991), we expand the momentum and radial displacement perturbations on spherical harmonics as:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} u_m^\ell(r) \mathbf{R}_\ell^m + v_m^\ell(r) \mathbf{S}_\ell^m + w_m^\ell(r) \mathbf{T}_\ell^m \\ \zeta_r = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \zeta_m^\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \end{cases}$$

where $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ denotes the normalized spherical harmonics and

$$\mathbf{R}_\ell^m = Y_\ell^m(\theta, \phi) \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_\ell^m = \nabla Y_\ell^m, \quad \mathbf{T}_\ell^m = \nabla \times \mathbf{R}_\ell^m \quad (4)$$

The radial equations coupling $u_m^\ell(r)$, $w_m^\ell(r)$ and $\zeta_m^\ell(r)$ are obtained by projecting the vorticity equation on \mathbf{R}_ℓ^m and \mathbf{T}_ℓ^m :

$$\left. \begin{aligned} \lambda w_m^\ell &= f \left\{ A_{\ell,m} \left[r \frac{du_m^{\ell-1}}{dr} + (2-\ell)u_m^{\ell-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + A_{\ell+1,m} \left[r \frac{du_m^{\ell+1}}{dr} + (\ell+3)u_m^{\ell+1} \right] + i \frac{m}{\Lambda} w_m^\ell \right\} \\ \lambda \left[r^2 \frac{d^2 u_m^\ell}{dr^2} + 4r \frac{du_m^\ell}{dr} + (2-\Lambda)u_m^\ell \right] &= \Lambda N^2 \zeta_m^\ell + \\ &\quad f \left\{ B_{\ell,m} \left[(\ell-1)w_m^{\ell-1} - r \frac{dw_m^{\ell-1}}{dr} \right] \right. \\ &\quad \left. - B_{\ell+1,m} \left[(\ell+2)w_m^{\ell+1} + r \frac{dw_m^{\ell+1}}{dr} \right] \right. \\ &\quad \left. + i \frac{m}{\Lambda} \left[r^2 \frac{d^2 u_m^\ell}{dr^2} + 4r \frac{du_m^\ell}{dr} + (2-\Lambda)u_m^\ell \right] \right\} \\ \lambda \zeta_m^\ell &= u_m^\ell \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

where $\Lambda = \ell(\ell+1)$ and

$$A_{\ell,m} = \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}} \quad ; \quad B_{\ell,m} = \ell^2(\ell^2 - 1)A(\ell, m) \quad (6)$$

We also project the boundary conditions on spherical harmonics and obtain

$$\begin{cases} u_m^\ell = w_m^\ell = \zeta_m^\ell = 0 & \text{at } r = 0 \\ \zeta_m^\ell = 0 & \text{at } r = 1 \end{cases}$$

The system (5) may be written formally as

$$\mathcal{M}_A \psi_m = \lambda \mathcal{M}_B \psi_m \quad (7)$$

where λ are the complex eigenvalues associated with the eigenvectors ψ_m and $\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B$ denote two differential operators. The solutions can be symmetric (ψ_{m+}) or anti-symmetric (ψ_{m-}) with respect to the equator as

$$\psi_{m+} \begin{cases} u_m^m(r) \\ \zeta_m^m(r) \\ w_m^{m+1}(r) \\ u_m^{m+2}(r) \\ \zeta_m^{m+2}(r) \\ \vdots \end{cases} \quad \text{or} \quad \psi_{m-} \begin{cases} w_m^m(r) \\ u_m^{m+1}(r) \\ \zeta_m^{m+1}(r) \\ w_m^{m+2}(r) \\ u_m^{m+3}(r) \\ \vdots \end{cases}$$

The operators \mathcal{M}_A and \mathcal{M}_B are discretized on a multi-domain Gauss-Lobato grid associated with Chebyshev polynomials leading to matrices of size about $L \times N_r$ where L and N_r are respectively the truncation orders on spherical harmonics and Chebyshev basis. The equilibrium Brunt-Väisälä profile $N^2(r)$ is also projected on the radial grid by the means of a cubic spline interpolation (Dierckx, 1993).

Two computations have been used to solve the generalized eigenvalue problem (7):

1. a direct computation based on the QZ algorithm which gives the whole spectrum of eigenvalues λ .
2. an iterative computation based on the incomplete Arnoldi-Chebyshev algorithm which gives some pairs (λ, ψ_m) around a given value of λ .

3. Results

3.1. Pure gravity modes and propagation diagram

A classical approach to compute nonradial p or g-modes without rotation consists in solving a two-point boundary value problem. This is achieved for instance by the means of shooting methods (Hansen and Kawaler, 1994) or relaxation methods with finite-difference equations (Osaki and Hansen, 1973; Osaki, 1975). It is only recently that the formulation of the oscillation equations as a generalized eigenvalue problem has been proposed (see e.g. Pesnell (1990) which used the secant method of Castor (1971)). For our problem where infinitely many equations are coupled, the use of shooting or relaxation methods is not convenient; we therefore preferred the generalized eigenvalue problem formulation. However, as this method has not often been used in the past, we find useful to show its capability on the standard case of gravity modes of a non-rotating star.

Without rotation, the toroidal component w_m^ℓ of the velocity along \mathbf{T}_ℓ^m decouples and the system (5) reduces to the following simple form:

$$r^2 \frac{d^2 \zeta_m^\ell}{dr^2} + 4r \frac{d\zeta_m^\ell}{dr} + (2 - \Lambda) \zeta_m^\ell = -\Lambda \frac{N^2}{\omega^2} \zeta_m^\ell \quad (8)$$

with boundary conditions $\zeta_m^\ell = 0$ at $r = 0$ and $r = 1$. From this second-order differential equation for ζ_m^ℓ , it is easy to show that oscillations are trapped in radiative

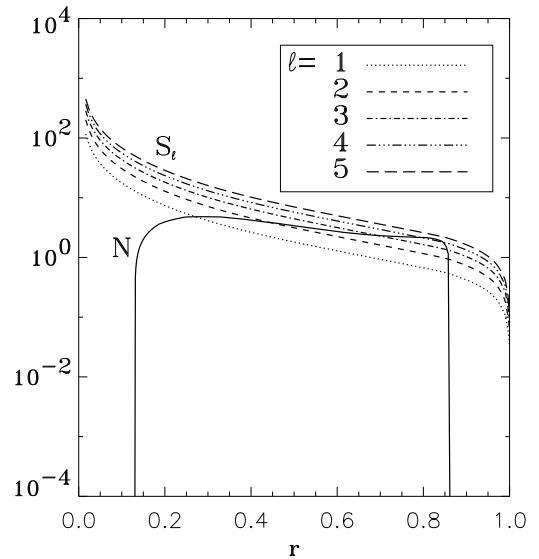


Fig. 1. Propagation diagram which gives the Brunt-Väisälä frequency profile and the Lamb frequency $S_\ell = \sqrt{\ell(\ell+1)}c_s/r$ profile for various ℓ in units of $(GM/R^3)^{1/2}$. Note the convective core which occupies about 13% of the star interior and the surface convective zone.

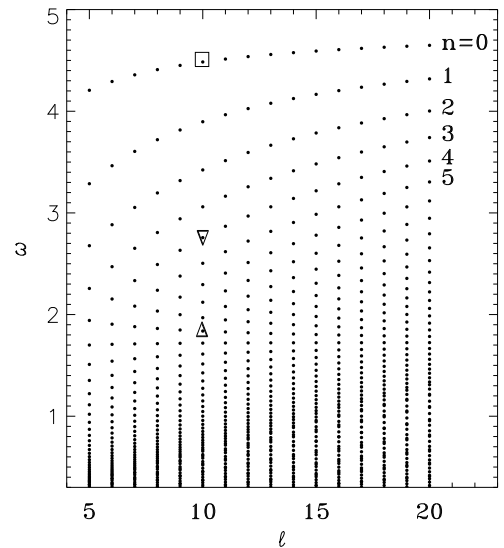


Fig. 2. Spectrum of pure gravity modes for $\ell = 5, 20$. The structures of the three modes labelled \square, ∇ and \triangle at $\ell = 10$ are plotted in figure 3. The order n gives the number of nodes in the radial direction of the associated eigenvectors.

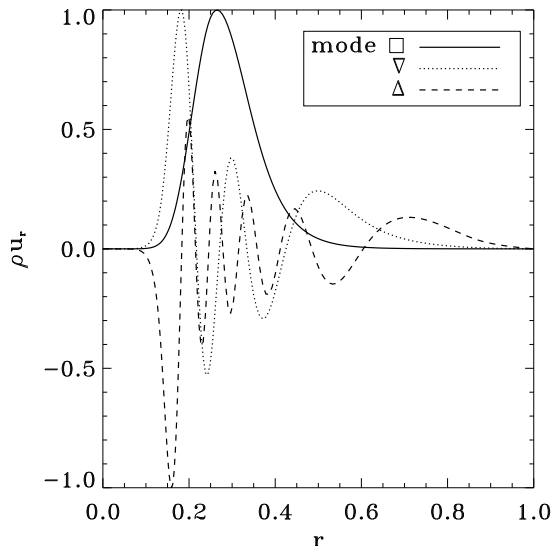


Fig. 3. Associated normalized eigenvectors for the three modes labelled \square, ∇ and \triangle at $\ell = 10$ from fig. 2. These modes respectively admit 0, 4 and 9 nodes in the radial direction. Note the left shifting of the eigenfunctions as the frequency decreases because of the change of the turning radius r_0 given by $N(r_0) = \omega$.

zones between concentric spheres of radius r_0 such as $|\omega| = N(r_0)$ and, consequently, that the spectrum of pure gravity modes is bounded by N_{max} . The usual demonstration is achieved via a local analysis of a high-order mode using a WKB method (see e.g. Unno et al. (1989)). We propose in appendix (A.1.) a more general demonstration based on the study of the mixed-type operator governing the global oscillations; this demonstration being later on extended to the rotating case.

However, it is well known that a second condition of trapping exists for gravity modes, namely $|\omega| < S_\ell(r)$ where S_ℓ is the Lamb frequency. As we use the anelastic approximation, this second trapping due to acoustic effects is not reproduced. Therefore, we should define a critical ℓ -value to ensure that the condition $|\omega| < S_\ell(r)$ is also verified. It is achieved by the means of the propagation diagram given by figure 1. We show in this diagram that $N(r) < S_\ell(r)$ for $\ell \geq 5$. As gravity modes propagate in the region $|\omega| < N(r)$, it means that the condition $|\omega| < S_\ell(r)$ is always satisfied for these ℓ and then ensures that the anelastic approximation is valid as long as the radial order n is high enough.

Figure 2 shows the spectrum of pure gravity modes obtained by a QZ computation for $5 \leq \ell \leq 20$. As expected, the spectrum is bounded by $N_{max} \sim 4.7$. To each ℓ corresponds a set of eigenvalues which are characterized by the number of node in the radial direction of their associated eigenvectors. This is illustrated in figure 3 which gives the corresponding eigenvectors for the three modes labelled \square, ∇ and \triangle in figure 2 at $\ell = 10$. The dimension-

less mode frequencies are respectively $\omega_\square \simeq 4.485$ (first mode in the frequency order), $\omega_\nabla \simeq 2.756$ (fourth mode) and $\omega_\triangle \simeq 1.837$ (tenth mode). The first mode has no node, the fifth mode as four nodes and the tenth mode as nine nodes; we thus recover that the number of nodes increases as the frequency decreases.

3.2. The limits of the second-order theory

The equation (1) rewritten in non-dimensional form reads

$$\omega_{th} = \omega_{n\ell}^{(0)} + C_1 f + C_2 f^2 + \mathcal{O}(f^3) \quad (9)$$

where the rotation is now characterized by the free parameter f . We calculate in appendix B the splitting coefficients C_1 and C_2 by the means of a WKB theory applied to a low-frequency mode with $n \rightarrow +\infty$ and $\omega \rightarrow 0$; hence we find

$$\begin{cases} C_1 = \frac{m}{2\Lambda} \\ C_2 = \frac{1}{\omega_{n\ell}^{(0)}} \left\{ \frac{2\Lambda - 3}{2(4\Lambda - 3)} - m^2 \left[\frac{\Lambda - 3}{\Lambda(4\Lambda - 3)} + \frac{1}{8\Lambda^2} \right] \right\} \end{cases}$$

which are, except for a small second-order correction, the coefficients given by Chlebowski (1978)¹.

As a pedagogical example for testing the robustness of the asymptotic development (9), we have chosen a very low-frequency eigenvalue, such as $\omega_{n\ell}^{(0)} \sim 0.520$ with $\ell = 5$ and a high radial order $n = 21$. It corresponds to a gravity mode with a period $T_{osc} \simeq 0.31$ d ($\nu = 37.3\mu\text{Hz}$). Thus, eleven new eigenvalues $\omega_{n\ell m}$ corresponding to the $2\ell + 1$ possible m -values should be observed as f increases, whereas the symmetry $+/-$ of each mode is imposed as $m = 0^-, \pm 1^+, \pm 2^-, \pm 3^+, \pm 4^-, \pm 5^+$ because of the parity of the non-rotating eigenvector.

Figure 4 shows the splitting of the non-rotating eigenvalue $\omega_{21,5}^{(0)}$ as f increases. As expected, we observe eleven new eigenvalues. Comparing these eigenvalues with the approximated ones ω_{th} predicted by (9) allows us to test the second-order perturbative theory. It is achieved in figure 5 where the relative errors $|\omega_{21,5m} - \omega_{th}|/\omega_{21,5m}$ have been plotted as f increases.

We first show that the accuracy benefit induced by the second-order correction depends on the m -value. For instance at $f = 10^{-3}$, the agreement with the true eigenvalue is about a thousand times better for $|m| = 1$ when the second-order correction is taken into account. On the contrary, we just get a five times more precise theoretical eigenvalues for $|m| = 5$. In addition, we note that this accuracy difference tends to be less pronounced as the rotation increases since the precision benefit is just about one hundred times at $f = 0.1$ for $|m| = 1$ while the improvement is still by a factor 5 in the case $|m| = 5$. It means that

¹ Conversely, the asymptotic formula (117) given by Dziembowski & Goode (1992) is not compatible with our results.

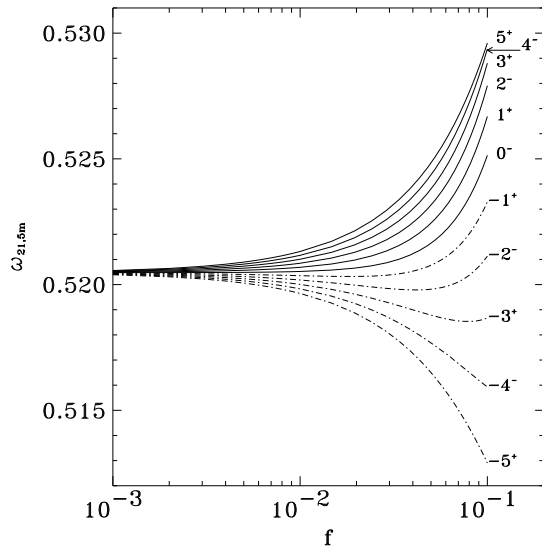


Fig. 4. Rotational splittings of the eigenvalue $\omega_{21,5}^{(0)}$ as f increases. Eleven new eigenvalues appear according to $m = 0^-, \pm 1^+, \pm 2^-, \pm 3^+, \pm 4^-, \pm 5^+$.

among the non-axisymmetric modes, the large-scale ones (i.e. with a small m) are the most sensitive to rotation. In other words, taking into account a second-order correction leads to an improvement of the eigenvalues with small $|m|$ whereas those with large $|m|$ are not much improved.

As long as the difference between the true eigenvalues and the perturbative ones are smaller than the frequency resolution of the observations, the perturbative theory remains useful, i.e. the identification of the observed frequency with its counterpart calculated from the development (9) is possible. For instance, the expected precision on eigenfrequencies measured by the satellite COROT is about $0.1\mu\text{Hz}$ (Michel, 1998). For a gravity mode with $\nu = 37.3\mu\text{Hz}$, it corresponds to a relative error of about 10^{-3} . Thus, using figure 5, it is clear that the first-order perturbative theory becomes rapidly inapplicable since the relative errors equal 10^{-3} for $f \sim 4 \times 10^{-2}$ if $|m| = 1, 2, 3, 4$ and for $f \sim 8 \times 10^{-2}$ if $|m| = 5$. It corresponds respectively to rotation periods of about eight and four days. As a typical rotation period is about one day for γ Doradus stars, it means that second-order corrections (at least) are necessary to understand the observed frequency splittings of these stars. We note that the case $m = 0$ is less affected since corrections are $\mathcal{O}(f^2)$.

Unfortunately, it turns out that the second-order perturbative theory also reaches its limits for γ Doradus-like rotations in the case $m \neq 0$. In fact, for $f = 0.1$ (i.e. a rotation period of about three days), the second-order approximation is in error of $\sim 5 \times 10^{-4}$, a value very close to COROT's precision. Thus, in order to increase once again the accuracy of the theoretical eigenvalues (this accuracy being already improved of about hundred times

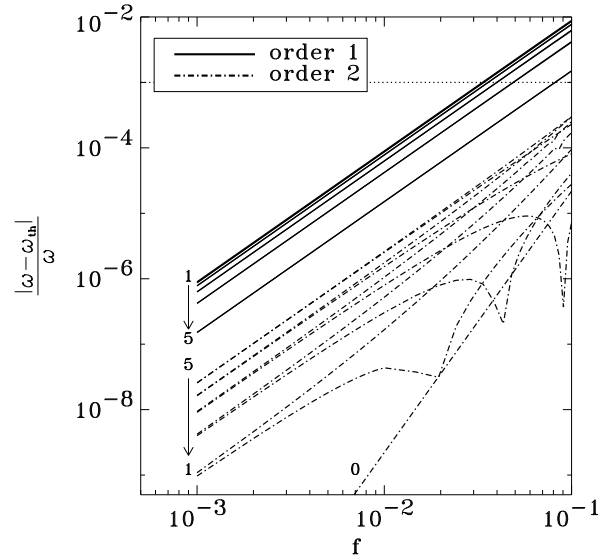


Fig. 5. Relative errors $|\omega_{21,5m} - \omega_{th}|/\omega_{21,5m}$ as the rotation increases. Here ω_{th} are the first- or second-order approximations given by the development (9) whereas $\omega \equiv \omega_{n\ell m}$ are the computed ones. The numbers denote the $|m|$ -values.

when second-order corrections is taken into account at $f = 0.1$), a third-order perturbative theory seems necessary for such rotations (see Soufi et al. (1998) for a first attempt in this direction). However, as shown by this latter work, developments of the third-order approximation are quite cumbersome and therefore make the use of a non-perturbative theory preferable.

3.3. The web of characteristics

Restoring the rotation into the dynamics equations dramatically complicates the mathematical side of nonradial oscillations. For instance, we have shown that pure gravity modes propagate in a domain confined between concentric spheres of radius r_0 such as $N(r_0) = \omega$. It means that we deal with a governing operator of mixed type whose turning surfaces, according to the spherical symmetry of the gravity force, are spheres. With rotation, this operator remains of mixed type but the associated critical surfaces are no longer spherical owing to the cylindrical symmetry of the Coriolis force. The equation of turning surfaces reads now (see appendix A.2. for a demonstration):

$$\omega^2 r^2 (N^2 + f^2 - \omega^2) - f^2 N^2 z^2 = 0 \quad (10)$$

In paper [I] where $N(r) \propto r$, these surfaces are either ellipsoids for $\omega > f$ or hyperboloids for $\omega < f$. In the present case, we have a more intricate profile $N(r)$ and the shape of these surfaces is more complicated. However, the classification used in [I] (i.e. the E_1, E_2, H_1 and H_2 -modes) remains valid because it only depends on the spectral properties of the governing operator and not on the

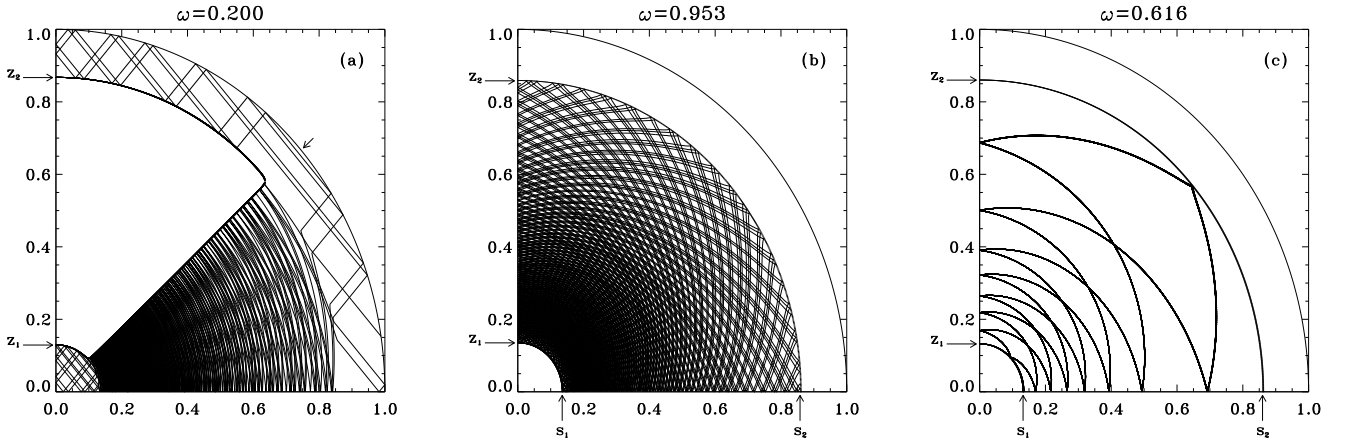


Fig. 6. Webs of characteristics for a \tilde{H}_2 -mode (a) and two \tilde{E}_1 -modes (b) and (c) at a given rotation rate $f = 0.3$. The s_i and z_i locations correspond to $N(s_i) = (\omega^2 - f^2)^{1/2}$ and $N(z_i) = \omega$. The arrow on the outer sphere in (a) marks the critical latitude $\sin \theta_c = \omega/f$ of \tilde{H}_2 -mode. Three hundred, one hundred and two hundred reflections have been drawn respectively in plots (a), (b) and (c) whereas the first hundred reflections in plot (c) has been removed to emphasize the final attractor.

equilibrium profiles (except for the Brunt-Väisälä one). Thus, we define the same four types of modes but we add a tilde to emphasize that the shape of the associated critical surfaces are different:

- the \tilde{E} -modes correspond to $\omega > f$ with the two sub-classes

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &: f < \omega < N_{max} \\ \tilde{E}_2 &: \max(f, N_{max}) < \omega < (f^2 + N_{max}^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

- the \tilde{H} -modes correspond to $\omega < f$ with the two sub-classes

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &: N_{max} < \omega < f \\ \tilde{H}_2 &: 0 < \omega < \min(f, N_{max}) \end{aligned} \quad (12)$$

In an astrophysical context, it is clear that the \tilde{H}_1 -modes cannot exist because $f < N_{max}$. In fact, with the Brunt-Väisälä profile given by fig. 1, it turns out that the \tilde{H}_1 -modes would only exist with $f \gtrsim 5$ which is larger than the keplerian limit $f = 2$. In the same way, the \tilde{E}_2 -modes are marginal because of the narrowness of their spectral interval (i.e. $\max(f, N_{max}) = N_{max}$ and $(f^2 + N_{max}^2)^{1/2} \sim N_{max}$ for $f \lesssim 0.3$). Therefore, only the \tilde{H}_2 - and \tilde{E}_1 -modes are relevant to stars and have been studied in this paper. We note that \tilde{E}_1 -modes correspond to classical gravity modes more or less perturbed by rotation.

Another new mathematical feature introduced by rotation concerns the characteristics of the governing operator. With rotation, these characteristics are defined by the following differential equation (see appendix A.2.):

$$\frac{dz}{ds} = \frac{N^2 s z \pm r \Gamma^{1/2}}{\omega^2 r^2 - N^2 z^2} \quad (13)$$

where Γ is given by

$$\Gamma = \omega^2 N^2 s^2 + (f^2 - \omega^2)(\omega^2 r^2 - N^2 z^2) \quad (14)$$

and (s, ϕ, z) denote the usual cylindrical coordinates. In [I], we have shown that many interesting properties of gravito-inertial modes can be deduced from the web of characteristics obtained after integrating (13). The characteristics, which reflect both on the boundaries and on the critical surfaces, indeed shape a web whose structure gives useful indications on the nature of the corresponding eigenfunctions. As the critical surfaces have presently more complicated forms, these patterns differ from those obtained in [I], especially with the \tilde{H}_2 -modes. However, this geometric approach keeps its relevance as it will be shown below.

Typical webs of characteristics associated with \tilde{H}_2 and \tilde{E}_1 -modes are illustrated in figure 6. We first note that the characteristics trajectories are very different: those associated with an \tilde{H}_2 -mode propagate both in the convective and radiative zones while those associated with an \tilde{E}_1 -mode remain trapped in the radiative zone. As $N^2(r) \sim 0$ in convective zones, the differential equation (13) becomes

$$\frac{dz}{ds} \simeq \pm \left(\frac{f^2 - \omega^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad (15)$$

and the characteristics are straight lines as in the pure inertial case (Rieutord and Valdetaro, 1997). On the other hand, for a mode with $\omega \sim f$, the differential equation (13) takes the form

$$\frac{dz}{ds} \simeq \left(1 \pm \frac{\omega}{N} \right) \frac{s z}{\frac{\omega^2}{N^2} r^2 - z^2} \quad (16)$$

In the radiative zone and when $N \gg \omega$, this equation reduces to

$$\frac{dz}{ds} \simeq -\frac{s}{z} \quad (17)$$

which means that characteristics are almost circles as illustrated by fig. 6a.

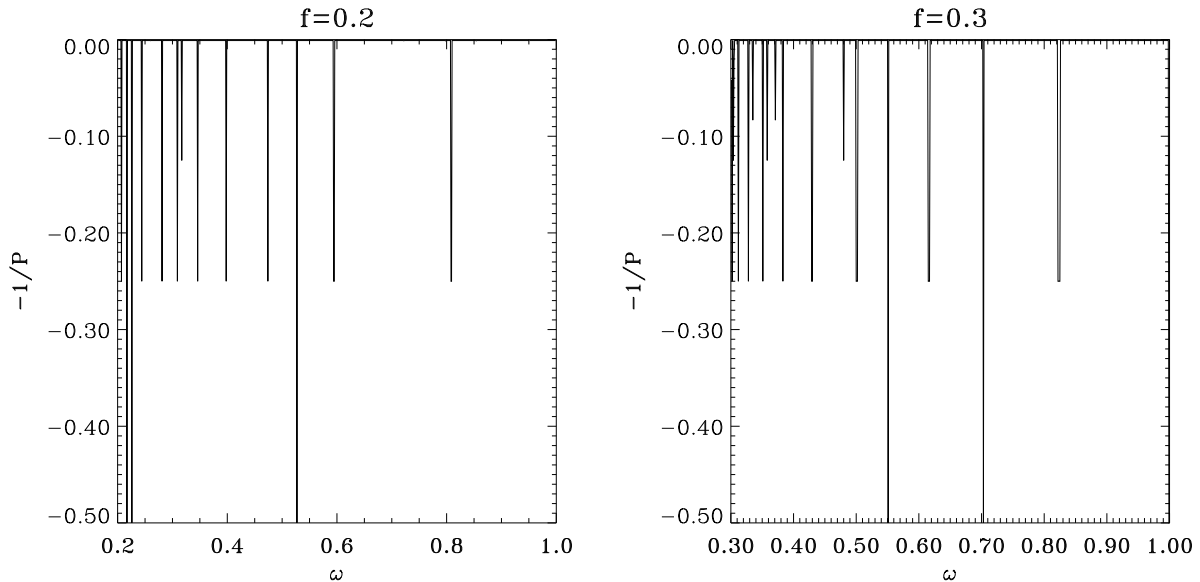


Fig. 7. Period diagrams for $f = 0.2$ and $f = 0.3$ and $\varepsilon = 10^{-5}$. Some bands of attractors appear but ergodic orbits largely dominate.

Following the paths of characteristics, we obtain two kinds of orbits: (i) ergodic orbits which fill the whole hyperbolic domain (fig. 6b), (ii) periodic orbits (hereafter referred to as attractors) along which characteristics focus (fig. 6c). In order to find all the attractors at a fixed rotation rate f , we used the period diagram introduced by Maas & Lam (1995). The period P of an orbit is defined as the smallest integer such that $|\theta_{N_0+P} - \theta_{N_0}| \leq \varepsilon$ where θ_i is the latitude of the i th-reflection point on the outer critical surface and ε a given accuracy. In practice, for each pattern, we first compute $N_0 = 1000$ reflections and iterate until the angular distance $|\theta_{N_0+P} - \theta_{N_0}|$ is less than or equal to $\varepsilon = 10^{-5}$, with a maximum of $P_m = 1000$ reflections. If the characteristics do not focus along a limit cycle then the period of the orbit is set equal to P_m whereas a lower period value means that focusing occurs. We note that the period and the length of an attractor are in fact the same. In addition, we have shown that the characteristics are almost circles in the radiative zone if $\omega \sim f$. Hence, the periods associated with \tilde{H}_2 -modes (i.e. $0 < \omega < \min(f, N_{max})$) are always very long and this is why only periods of \tilde{E}_1 -modes have been computed.

Figure 7 shows the period diagrams obtained for two values of the rotation rate f , says $f = 0.2$ ($T_{rot} \simeq 1.6$ d) and $f = 0.3$ ($T_{rot} \simeq 1$ d). As in Maas & Lam (1995), we have chosen to plot $-1/P$ instead of P to make the connection with the Lyapunov exponents computed in [I]. We obtain respectively 19 and 28 bands of periodic orbits for $f = 0.2$ and $f = 0.3$ for which $P < P_m$. Thus increasing the rotation deforms more and more the critical surfaces and the probability of focusing also increases. It is indeed important to note that no focusing occurs in the

non-rotating case; that is, all the orbits of pure gravity modes are ergodic².

In these bands, all the orbits show the focusing of characteristics along a limit cycle as illustrated by fig. 6(c). The largest band we found is the one centered around $\omega \simeq 0.825$ for $f = 0.3$, with width $\sim 10^{-3}$. The narrowness of these bands has important consequences as will be shown below. In addition, figure 7 shows that attractors concentrate around the frequency $\omega \sim f$. It suggests that only the low-frequency part of the spectrum is concerned by geometric focusing; a result already found in [I]. As a consequence, most of the orbits which are not in the régime $\omega \lesssim f$ seem to remain ergodic as shown in fig. 7.

3.4. Relation with eigenmodes

We have found, with the characteristic paths, that two kinds of orbits are possible: the first case corresponds to ergodic orbits which fill the whole hyperbolic domain whereas the second one corresponds to periodic orbits tracing attractors. In addition, the period diagrams have shown that the ergodic orbits are the most numerous. The last step consists in determining the relation between the orbits of characteristics and the eigenmodes solutions of the generalized eigenvalue problem (7).

The easiest case corresponds to ergodic orbits. As no focusing occurs for the characteristics, the associated eigenfunctions do not have to deal with any geometric constraint, except that of matching of the critical surfaces.

² We cannot exclude the possibility of strictly periodic orbits for which characteristics exactly fold back upon themselves; however, this kind of orbit has not been observed; either in the rotating or non-rotating case.

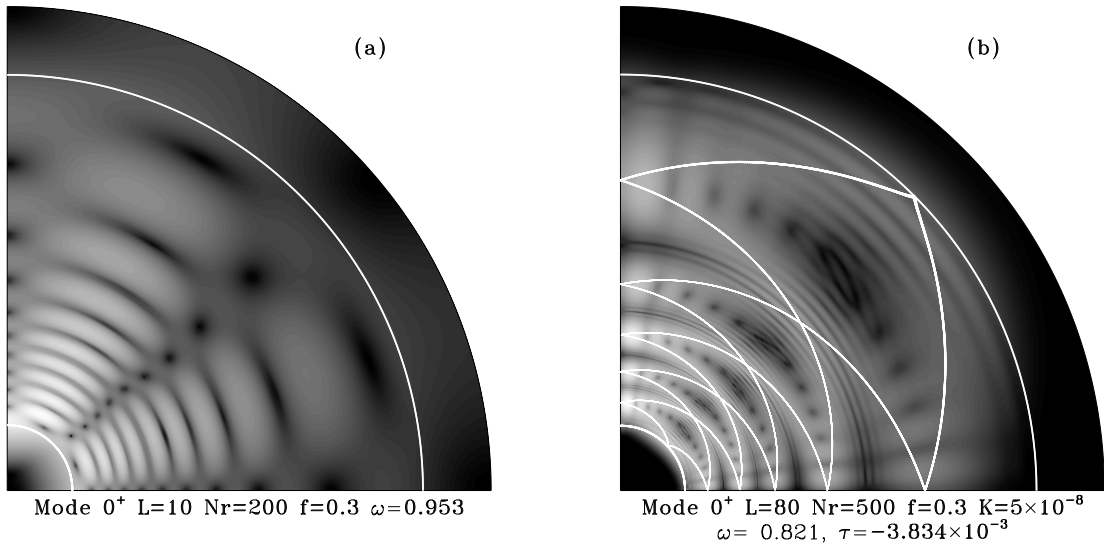


Fig. 8. Meridional sections of kinetic energy for two axisymmetric \tilde{E}_1 -modes ($m = 0^+, f = 0.3$) whom the orbit of characteristics is either ergodic (a) or periodic (b); the superimposed white lines showing the theoretical attractor in this latest case. To the ergodic orbit corresponds a regular eigenmode computable with low resolutions and without diffusion. On the contrary, a singular mode is associated with the periodic orbit and its computation requires the use of thermal diffusivity with large resolutions which leads to internal shear layers following the attractor.

Therefore, as in [1], these ergodic orbits should be associated with regular eigenmodes, i.e. with a smooth square-integrable velocity field. Figure 8(a) shows a good example of this association between ergodic orbits and regular eigenmodes. We have represented the kinetic energy distribution in a meridional plane for an axisymmetric \tilde{E}_1 -mode with $\omega \simeq 0.953$ and $f = 0.3$. At this frequency, we show in fig. 6(b) and fig. 7 that the underlying characteristics are ergodic. It means that an ergodic orbit leads to a regular eigenmode or, in other words, to a smooth velocity field without any discontinuity. We note that this result could be inferred from the non-rotating case since, as mentioned above, we found that a space-filling web of characteristics is associated with every computed gravity mode.

However, this correspondence between ergodic orbits and regular eigenmodes fails with the \tilde{H}_2 -modes. In this case, the hyperbolic domain can be separated in three independent regions (see fig. 6a):

- a first convective zone near the center. In fact, this region can be seen as a full unstratified sphere where pure inertial modes propagate. Since the work of Bryan (1889), we know that eigenmodes exist in this configuration and are probably associated with ergodic orbits (Rieutord et al., 1999).
- a radiative zone. Gravito-inertial modes propagate in this stably stratified shell and the orbits of the almost circular characteristics are either ergodic or periodic with very long periods. Hence, regular modes associated with ergodic orbits may exist.

- a second convective region below the surface. As near the center, inertial modes propagate once again while being now confined in a spherical shell. This new geometry (a shell instead of a full sphere) strongly changes the physics since, apart from a set of purely toroidal modes with $\omega = 1/(m + 1)$, no inertial modes exist in the adiabatic limit for this configuration (Rieutord et al., 1999) because all orbits focus more or less rapidly along an attractor.

Thus, it is clear that the surface convective zone poses a problem in the case of \tilde{H}_2 -modes. Starting from a regular eigenfunction associated with an ergodic orbit at the center, it is possible to find at the same frequency a regular eigenfunction with an ergodic orbit in the radiative zone. At this stage, we deal with a resonant coupling between an inertial mode and a gravity-like mode; this phenomenon being already observed by Lee & Saio (1987) in the case of a $10 M_{\odot}$ main-sequence star. But, as no regular eigenmode can be found near the surface, a global smooth eigenfunction existing in the whole domain is not possible. As a consequence, computation of global adiabatic \tilde{H}_2 -eigenmodes is not possible.

Finally, modes associated with attractors are necessarily singular with non square-integrable velocity fields. Maas & Lam (1995), studying the propagation of pure gravity modes in a two-dimensional parabolic basin, have shown that as the characteristics converge towards an attractor, the spatial scale of the associated function (here the streamfunction) tends to zero while keeping a constant amplitude. In our case, the equation of characteristics (13)

has been also derived from the streamfunction operator which means that the spatial scale of the streamfunction field also decreases as the limit cycle is approached. As $\mathbf{u} \propto \nabla\psi$, it means that the velocity diverges along the attractor and that the computation of the associated eigenmode is not possible without diffusion.

Therefore, we have taken into account the radiative damping of the eulerian temperature perturbations T' which, in the anelastic approximation, are related to the eulerian density perturbations ρ' by

$$\rho' = -\delta \frac{\rho}{T} T' \quad ; \quad \delta = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T^{-1}$$

and T' satisfies the following energy equation

$$\lambda T' + \frac{N^2}{\beta} u_r = \mathcal{K} \nabla^2 T' \quad ; \quad \beta = \delta \frac{\rho g}{T} \quad (18)$$

where we have neglected the derivative of the thermal diffusivity $\mathcal{K} = (4ac/3\kappa\rho)T^3$ (κ being the opacity). Restoring thermal diffusivity leads to internal shear layers tracing the periodic orbit, that is the growth of the velocity along the attractor is hindered by diffusive effects. If we suppose, as obtained in [I], that these shear layers scale with $\mathcal{K}^{1/4}$ then the frequency variations due to the radiative damping would be $\propto \mathcal{K}^{1/2}$. As seen in Sect. 3.3, the largest width of periodic orbit bands is $\sim 10^{-3}$; it means that these periodic modes will appear only if $\mathcal{K} \lesssim 10^{-6}$. Above this critical value, attractors cannot be detected. As in stars $\mathcal{K} \sim 10^{-12}$ in the radiative zone, attractors may exist but their computations are presently not feasible because of the needed resolution. We thus choose to take $\mathcal{K} = 5 \times 10^{-8}$ which allows us to both emphasize attractors and use an acceptable resolution.

Figure 8(b) shows the obtained \tilde{E}_1 axisymmetric eigenmode for $f = 0.3$ and $\omega \simeq 0.821$. As given by the period diagram at $f = 0.3$ in fig. 7, the characteristics focus along an attractor at this frequency. With diffusivity, this attractor yields internal shear layers which are well reproduced in the kinetic energy distribution. Then, as with the ergodic orbits, we obtain a direct correspondence between the periodic orbits and the associated eigenmodes with diffusion.

Finally, let us come back to the spectrum of gravito-inertial modes. Using the QZ algorithm, we computed the whole eigenvalue spectrum in the axisymmetric case $m = 0^+$ with $f = 0.3$ and $\mathcal{K} = 5 \times 10^{-5}$. This high \mathcal{K} -value has been necessary to compute eigenvalues with reasonable precision (QZ method leading to large full matrices). Figure 9 shows the obtained eigenvalue distribution in the complex plane $(\omega, \mathcal{K}/|\tau|)$.

We first note that the spectrum is bounded by $(N_{max}^2 + f^2)^{1/2} \sim N_{max} \simeq 4.7$; this limit being in fact almost the same than those deduced from the spectrum of pure gravity mode in fig. 2. In addition, we also find again the same organization of eigenvalues along branches with fixed ℓ in the region $\omega > f$; the location of an eigenvalue in a branch

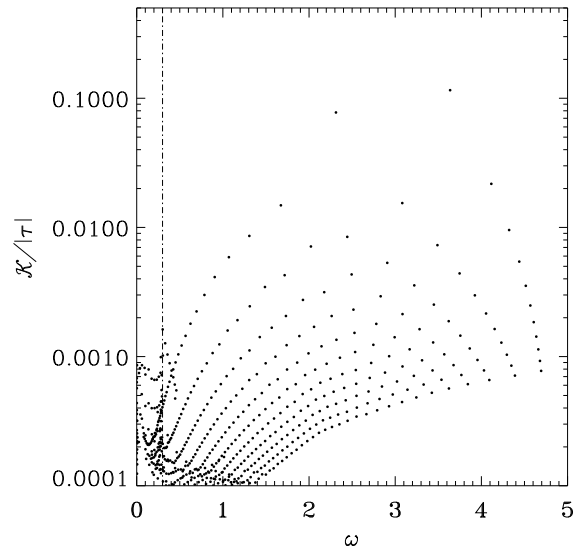


Fig. 9. Distribution in the complex plane $(\omega, \mathcal{K}/|\tau|)$ of the eigenvalues with $f = 0.3$, $m = 0^+$ and $\mathcal{K} = 5 \times 10^{-5}$. The resolution is $L = 22$ and $Nr = 100$.

still depends on the number of nodes in the radial direction of its associated eigenvector. Therefore, we show that \tilde{E}_1 -modes associated with ergodic orbits behave like gravity modes; the only differences being the new frequency range $[f, N_{max}]$ instead of $[0, N_{max}]$ and the existence of some singular eigenmodes due to attractors. We note moreover that the attractors bands are not visible in the spectrum (especially the largest around $\omega \sim 0.825$) because the thermal diffusivity \mathcal{K} is too high.

In fact, the main modification of the spectrum concerns \tilde{H}_2 -modes with $\omega < f$. For these frequencies, eigenvalues are not distributed along families which means that the 2D-organization with fixed (ℓ, n) is destroyed. We have shown that \tilde{H}_2 -modes are not regular in the surface convective zone and restoring diffusion leads to internal shear layers. As a consequence, we cannot associate a well defined ℓ -value with these eigenstructures and the corresponding highly-damped eigenvalues are now randomly distributed in the low-frequency part of the spectrum.

4. Conclusions

We have computed the gravito-inertial modes of a $1.5M_\odot$ rotating ZAMS star using the anelastic approximation. Restoring the rotation into the dynamic equations through the Coriolis force, we formulate the nonradial oscillation equations as a generalized eigenvalue problem. Thus we have both studied the low rotation régime with $2\Omega \ll \sigma$ and the rapid rotation one with $2\Omega \sim \sigma$ where Ω denotes the uniform rotation rate and σ the eigenfrequency.

Starting from a low-frequency gravity eigenmode and slowly increasing the rotation, we have first shown that the

usual second-order perturbative theory reaches its limits for rotation periods of about three days. Thus, in order to study more precisely the rapid rotation régime, we have developed a geometric approach based on the integration of the characteristics of the governing mixed-type operator. To the two types of modes which are astrophysically relevant correspond two kinds of orbits: (i) ergodic orbits which fill the whole hyperbolic domain, (ii) periodic orbits for which characteristics focus along an attractor. Computing the corresponding eigenmodes, we have proved the direct relation existing between the orbit type and the shape of the eigenfunctions:

- with ergodic orbits are associated regular eigenmodes, in the sense that the velocity field is smooth and square-integrable. It is the case with the ergodic \tilde{E}_1 -orbits ($\omega > f$) but not with the \tilde{H}_2 -ones ($\omega < f$).
- with periodic orbits are associated singular eigenmodes with no square-integrable velocity field. In fact, as the characteristics converge towards the attractor, the spatial scale of the streamfunction field rapidly decreases which means that the velocity diverges along the periodic orbit. Hence, computations of eigenmodes associated with attractors require the use of a radiative damping to smooth out the singularities of the velocity field. Its leads to internal shear layers tracing the attractor. Decreasing the thermal diffusivity also decreases the width of these shear layers therefore, as the adiabatic limit is taken, the shear layers are reduced to a simple line corresponding to the final limit cycle for the characteristics. Hence, the amplitude of the velocity field tends to infinity and no physical eigenmodes survive; i.e. the point spectrum of the operator may be empty in the subintervals corresponding to attractors.

Concerning the spectrum of gravito-inertial modes, its shape depends on the presence of diffusivity. In the limit of zero diffusivity, only the \tilde{E}_1 -eigenmodes associated with ergodic orbits may remain because of the vanishing of \tilde{H}_2 -modes ($\omega < f$) and \tilde{E}_1 -modes corresponding to attractors. With diffusivity, the ergodic \tilde{E}_1 -modes are the least-damped ones whereas those associated with attractors and the \tilde{H}_2 -modes are highly damped because of the small scales generated by internal shear layers aligned along the attractors. Hence, the spectrum is divided in two parts: (i) eigenvalues which both are in $[f, N_{max}]$ and correspond to ergodic orbits are distributed along families with fixed (ℓ, n, m) , (ii) those associated with attractors (some in $[f, N_{max}]$ and those in $[0, f]$) are randomly distributed.

Finally, the above results have direct astrophysical applications as far as eigenmodes associated with ergodic or periodic orbits are concerned. For instance, it is clear that regular \tilde{E}_1 -modes are the best candidates to explain the large scale oscillations of rapidly rotating stars. In fact, \tilde{E}_1 -modes with ergodic orbits behave similarly as the usual gravity modes. Eigenvalues seem to be easily identifiable since the 2D-organization with fixed (ℓ, n) remains valid.

In the case of singular \tilde{E}_1 or \tilde{H}_2 -modes associated with attractors, things are more involved. With diffusivity, these eigenmodes shape internal shear layers along the attractors leading to a high damping. Hence, these singular modes are promising vectors of angular momentum or chemical elements when the nonlinear régime is considered. Gravito-inertial waves have been already suspected to play an important part in the angular momentum redistribution in star's interiors (Lee and Saio, 1993; Kumar et al., 1999). But regular eigenfunctions have been always invoked as support of this transport. Because very small scales are generated along the attractors, singular modes would be more efficient to transfer angular momentum; an application in this direction will be developed in a forthcoming paper.

Acknowledgements. We first thank Pierre Morel for letting us use his stellar structure code CESAM and Lorenzo Valdetaro for his collaboration in the numerical part of this work. We also thank C. Catala, J.-P. Zahn, G. Berthomieu and J. Provost for many fruitful discussions. Most of the calculations have been carried out on the Cray C98 and Fujitsu VP300 of the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) which is gratefully acknowledged.

Appendix A: Properties of the mixed-type governing operator

A.1. Case without rotation: pure gravity modes

In this appendix, we derive the second-order differential equation for the meridional streamfunction of pure gravity modes and recover that oscillations are trapped between concentric spheres and the spectrum is bounded by N_{max} . We start from the system (2) by eliminating the Coriolis term:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ i\omega \mathbf{u} = -\nabla P' - N^2 \zeta_r \mathbf{e}_r \\ i\omega \zeta_r = u_r \end{cases}$$

where we have substituted λ with $i\omega$. We consider axisymmetric modes (i.e. $\partial_\phi = 0$) and introduce the meridional streamfunction $\psi(s, z)$ such as

(A1)

where (s, ϕ, z) are the usual cylindrical coordinates. Then, taking the ϕ -component of the curl of the momentum equation, we obtain

$$\begin{aligned} -i\omega \nabla^2 \left(\frac{\psi}{s} \mathbf{e}_\phi \right) &= \frac{\partial}{\partial s} (N^2 \zeta_r \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial z} (N^2 \zeta_r \sin \theta) \\ &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \right) (N^2 \zeta_r) \end{aligned}$$

where θ denotes the co-latitude whereas ζ_r is related to ψ by

$$\xi_r = \frac{1}{i\omega} \frac{1}{s} \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi$$

Substituting ξ_r , we obtain the following equation for the streamfunction alone

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = s \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{N^2}{\omega^2} \frac{1}{s} \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi \right] \quad (\text{A2})$$

As the type of a differential operator only depends on their leading order derivatives (see e.g. Zwillinger (1992)), we rewrite (A2) keeping second-order derivative terms only:

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + 2N^2 \cos\theta \sin\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial z} \\ & + (\omega^2 - N^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + F \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial z}, \psi \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

This operator changes type on the critical surface $\Gamma = 0$ where Γ is defined by

$$\Gamma = \omega^2 r^2 (N^2 - \omega^2) \quad (\text{A4})$$

and pure gravity modes only propagate in the hyperbolic domain defined by $\Gamma > 0$ (they are evanescent in the elliptic domain $\Gamma < 0$). As a consequence, the oscillations are trapped between concentric spheres of radius r_0 such as $N(r_0) = |\omega|$ and the spectrum of pure gravity modes is bounded by N_{max} .

A.2. Case with rotation: gravito-inertial modes

In this appendix, we calculate the new form of the governing mixed-type operator when rotation is taken into account and show how the critical surfaces and spectrum are modified compared to the non-rotating case. We start from the full system (2) with the Coriolis term:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ i\omega \mathbf{u} + f(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) = -\nabla P' - N^2 \zeta_r \mathbf{e}_r \\ i\omega \zeta_r = u_r \end{cases} \quad (\text{A5})$$

and restrict, as above, our attention to axisymmetric modes. Hence, the equation verified by the meridional streamfunction ψ (already defined in A1) is given by

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \left(1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \\ & s \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{N^2}{\omega^2} \frac{1}{s} \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

whereas taking the leading order terms leads to

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + 2N^2 \cos\theta \sin\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial z} \\ & + (\omega^2 - f^2 - N^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial z}, \psi \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

As expected by the cylindrical symmetry of the Coriolis force, we note that the only differences with the non-rotating case come from terms $\propto \partial^2 / \partial z^2$. Hence, the function Γ defining the turning surfaces on which the operator changes type is now given by

$$\Gamma = \omega^2 r^2 (N^2 + f^2 - \omega^2) - f^2 N^2 z^2 \quad (\text{A8})$$

It is then clear that the critical surfaces are no longer spherical as for pure gravity modes owing to the new term $-f^2 N^2 z^2$. Setting to zero this term shows in addition that the spectrum with rotation is bounded by $(N_{max}^2 + f^2)^{1/2}$; this limit being larger than those obtained in the non-rotating case. In the hyperbolic domain, a pair of real characteristics propagate following the differential equation

$$\frac{dz}{ds} = \frac{N^2 s z \pm r \Gamma^{1/2}}{\omega^2 r^2 - N^2 z^2} \quad (\text{A9})$$

Finally, we note that introducing an angular dependence of the form $\exp(im\phi)$ leads to the same equations for the critical surface and characteristics because the second-order terms are unchanged; the new term $\partial^2 / \partial \phi^2 \equiv -m^2$ being in fact of zero derivative order.

Appendix B: A second-order perturbative theory using WKB theory

In this appendix, we calculate the second-order splitting coefficients for a low-frequency gravity mode (i.e. $n \rightarrow +\infty$ and $\sigma \rightarrow 0$) and find a small correction to the second-order coefficient given in Chlebowski (1978). We start from the following dimensional anelastic equations for $\zeta = \rho \xi$ and P' :

$$\left. \begin{aligned} & \sigma^2 \zeta - i\sigma 2\Omega \mathbf{e}_z \times \zeta = \nabla P' + N^2 \zeta_r \mathbf{e}_r, \\ & \operatorname{div} \zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B1})$$

We expand ζ and P' on spherical harmonics as

$$\zeta = a_m^\ell \mathbf{R}_\ell^m + b_m^\ell \mathbf{S}_\ell^m + c_m^\ell \mathbf{T}_\ell^m \quad ; \quad P' = p_m^\ell Y_\ell^m$$

where \mathbf{R}_ℓ^m , \mathbf{S}_ℓ^m and \mathbf{T}_ℓ^m are given by (4). Hence, the projection of Coriolis force $\mathbf{e}_z \times \zeta$ reads

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\ell^m : \frac{1}{\Lambda} [\ell B_{\ell,m} c_m^{\ell-1} - (\ell+1) B_{\ell+1,m} c_m^{\ell+1} - im\Lambda b_m^\ell] \\ \mathbf{S}_\ell^m : \frac{1}{\Lambda} [B_{\ell,m} c_m^{\ell-1} + B_{\ell+1,m} c_m^{\ell+1} - im(a_m^\ell + b_m^\ell)] \\ \mathbf{T}_\ell^m : \ell A_{\ell,m} [a_m^{\ell-1} - (\ell-1)b_m^{\ell-1}] - \\ \quad (\ell+1) A_{\ell+1,m} [a_m^{\ell+1} + (\ell+2)b_m^{\ell+1}] - i \frac{m}{\Lambda} c_m^\ell \end{cases}$$

where $\Lambda = \ell(\ell + 1)$ and the coefficients $A_{\ell,m}$ and $B_{\ell,m}$ are given by (6). As we deal with low-frequency gravity modes, we now apply the same hierarchy between the radial functions $a_m^\ell, b_m^\ell, c_m^\ell$ and p_m^ℓ as in Berthomieu et al. (1978); that is

$$p_m^\ell \ll a_m^\ell \ll b_m^\ell \sim c_m^\ell$$

which leads to the following coupled equations

$$\begin{cases} a_m^\ell \simeq \frac{1}{\sigma^2 - N^2} \frac{dp_m^\ell}{dr} \\ b_m^\ell - \frac{i}{\Lambda} \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} (B_{\ell,m} c_m^{\ell-1} + B_{\ell+1,m} c_m^{\ell+1}) \simeq \frac{1}{\beta_{\ell,m} \sigma^2} \frac{p_m^\ell}{r} \\ c_m^\ell \simeq -i \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} [\ell(\ell-1) A_{\ell,m} b_m^{\ell-1} + (\ell+2)(\ell+1) A_{\ell+1,m} b_m^{\ell+1}] \\ \frac{da_m^\ell}{dr} \simeq \Lambda \frac{b_m^\ell}{r} \end{cases}$$

where

$$\eta = \frac{2\Omega}{\sigma} \quad \text{and} \quad \beta_{\ell,m} = 1 - \frac{m}{\Lambda} \eta$$

Hence, $c_m^{\ell\pm 1}$ are related to c_m^ℓ and $c_m^{\ell\pm 2}$ by

$$\begin{cases} c_m^{\ell-1} = -i \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} [(\ell-1)(\ell-2) A_{\ell-1,m} b_m^{\ell-2} + \Lambda A_{\ell,m} b_m^\ell] \\ c_m^{\ell+1} = -i \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} [\Lambda A_{\ell+1,m} b_m^\ell + (\ell+3)(\ell+2) A_{\ell+2,m} b_m^{\ell+2}] \end{cases}$$

and the couplings in the equation for b_m^ℓ can be formally written as

$$b_m^\ell \propto \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} c_m^{\ell\pm 1} \propto \left(\frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} \right)^2 (b_m^\ell; b_m^{\ell\pm 2}) \quad (\text{B2})$$

or, in the same way,

$$b_m^{\ell+2} \propto \left(\frac{\eta}{\beta_{\ell+2,m}} \right)^2 (b_m^\ell; b_m^{\ell+2}; b_m^{\ell+4}) \quad (\text{B3})$$

We then show, as in Dziembowski & Goode (1992), that the couplings $(\ell, \ell \pm 2)$ only contribute to the fourth order in Ω since substituting $b_m^{\ell\pm 2}$ in equation (B2) leads to

$$b_m^\ell \propto \left[\left(\frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} \right)^2 b_m^\ell; \frac{\eta^4}{\beta_{\ell,m} \beta_{\ell+2,m}} (b_m^\ell; b_m^{\ell+2}; b_m^{\ell+4}) \right]$$

which means that $c_m^{\ell\pm 1}$ can be approximated to second order by

$$c_m^{\ell-1} \simeq -i \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} \Lambda A_{\ell,m} b_m^\ell \quad \text{and} \quad c_m^{\ell+1} \simeq -i \frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} \Lambda A_{\ell+1,m} b_m^\ell$$

Therefore, b_m^ℓ and p_m^ℓ are related by

$$b_m^\ell = \frac{1}{\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m} \sigma^2} \frac{p_m^\ell}{r}$$

with

$$\alpha_{\ell,m} = 1 - \left(\frac{\eta}{\beta_{\ell,m}} \right)^2 (A_{\ell,m} B_{\ell,m} + A_{\ell+1,m} B_{\ell+1,m})$$

Moreover, we have to leading order in d/dr

$$\frac{da_m^\ell}{dr} \simeq \frac{1}{\sigma^2 - N^2} \frac{d^2 p_m^\ell}{dr^2}$$

and the final equation for the pressure alone reads

$$\frac{d^2 p_m^\ell}{dr^2} = \frac{\Lambda}{\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m}} \frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2} \frac{p_m^\ell}{r^2} \quad ; \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (\text{B4})$$

We now apply a WKB approximation for the radial function $p_m^\ell(r)$; that is

$$p_m^\ell(r) = \mathcal{A}(r) \exp i\mathcal{S}(r)/\delta \quad ; \quad \delta \rightarrow 0$$

where the amplitude $\mathcal{A}(r)$ and the phase $\mathcal{S}(r)$ are assumed to be slowly varying functions (see e.g. Bender & Orszag (1978)). Thus the WKB approximation of (B4) is

$$\sigma^2 \left(\frac{k^2}{\delta^2} \mathcal{A} - \mathcal{A}'' - 2i \frac{k}{\delta} \mathcal{A}' - i \frac{k'}{\delta} \mathcal{A} \right) = \frac{\Lambda}{\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m}} \frac{N^2}{r^2} \mathcal{A}$$

where $k = d\mathcal{S}/dr$. The largest term on the left-hand side is $k^2 \mathcal{A} \sigma^2 / \delta^2$ and must balance the right-hand side therefore a distinguished limit is $\delta \sim \sigma$. Hence we have

$$k = \pm \left(\frac{\Lambda}{\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m}} \right)^{1/2} \frac{N}{r} \quad \text{and} \quad \mathcal{A} \sim |k|^{-1/2}$$

and the phase function $\mathcal{S}(r)$ is given by

$$\mathcal{S}(r) = \pm \left(\frac{\Lambda}{\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m}} \right)^{1/2} \int^r N \frac{dt}{t}$$

Thus an approximate solution for the radial function $p_m^\ell(r)$ is

$$p_m^\ell(r) \sim |k|^{-1/2} \left(\mathcal{C}_1 \cos \frac{\mathcal{S}(r)}{\sigma} + \mathcal{C}_2 \sin \frac{\mathcal{S}(r)}{\sigma} \right)$$

where \mathcal{C}_1 and \mathcal{C}_2 are constants to be determined by boundary conditions. If we impose $p_m^\ell = 0$ at $r = 0$ and $r = 1$, we have

$$p_m^\ell(r) \sim \mathcal{C} |k|^{-1/2} \sin \frac{\mathcal{S}(r)}{\sigma} \quad \text{with} \quad \frac{\mathcal{S}(r)}{\sigma} = n\pi$$

or, in a similar manner,

$$\pm \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\Lambda}{\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m}} \right)^{1/2} \int^r N \frac{dt}{t} = n\pi$$

where n denotes an integer. If we apply the same WKB formalism to a high-order g-mode without rotation, we obtain the following well-known quantization rule for the non-rotating frequency σ_0 (see e.g. Unno et al. (1989))

$$\sigma_0 \sim \frac{\sqrt{\Lambda}}{n\pi} \int^r N \frac{dt}{t}$$

which means that

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = (\alpha_{\ell,m} \beta_{\ell,m})^{-1/2}$$

Calculating the right hand-side by the means of a second-order development in Ω/σ_0 finally leads to

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{m}{\Lambda} \frac{\Omega}{\sigma_0} + \left\{ \frac{2(2\Lambda - 3)}{4\Lambda - 3} - m^2 \left[\frac{4(\Lambda - 3)}{\Lambda(4\Lambda - 3)} + \frac{1}{2\Lambda^2} \right] \right\} \left(\frac{\Omega}{\sigma_0} \right)^2$$

We thus recover the splitting coefficients of Chlebowski (1978) with, however, an additional second-order correction equal to $-m^2/2\Lambda^2$.

References

- Aerts, C., Eyer, L., and Kestens, E., 1998, *A&A* 337, 790
Aerts, C. and Krisciunas, K., 1996, *MNRAS* 278, 877
Aizenman, M., Smeyers, P., and Weigert, A., 1977, *A&A* 58, 41
Balona, L. A., Böhm, T., Foing, B. H., and al., 1996, *MNRAS* 281, 1315
Balona, L. A., Krisciunas, K., and Cousins, A. W. J., 1994, *MNRAS* 270, 905
Bender, C. M. and Orszag, S. A., 1978, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mc Graw-Hill
Berthomieu, G., Gonczi, G., Graff, P., Provost, J., and Rocca, A., 1978, *A&A* 70, 597
Breger, M., Pamyatnykh, A. A., Pikall, H., and Garrido, R., 1999, *A&A* 341, 151
Bryan, G., 1889, *Phil. Trans. R. Soc. London* 180, 187
Castor, J. I., 1971, *ApJ* 166, 109
Chlebowski, T., 1978, *Acta Astron.* 28, 441
Clement, M. J., 1981, *ApJ* 249, 746
Clement, M. J., 1998, *ApJS* 116, 57
Cowling, T. G., 1941, *MNRAS* 101, 367
De Boeck, I., Van Hoolst, T., and Smeyers, P., 1992, *A&A* 259, 167
Dierckx, P., 1993, *Curve and surface fitting with splines*, Oxford University Press
Dintrans, B., Rieutord, M., and Valdetaro, L., 1999, *J. Fluid Mech.* 398, 271
Dziembowski, W. A. and Goode, P. R., 1992, *ApJ* 394, 670
Engelbrecht, C. A., 1986, *MNRAS* 223, 189
Friedlander, S., 1985, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 31, 151
Friedlander, S. and Siegmann, W. L., 1982a, *J. Fluid Mech.* 114, 123
Friedlander, S. and Siegmann, W. L., 1982b, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 19, 267
Handler, G. and Krisciunas, K., 1997, *Delta Scuti Newsletter* 11, 3
Hansen, C. J. and Kawaler, S. D., 1994, *Stellar interiors*, Springer-Verlag
Kumar, P., Talon, S., and Zahn, J.-P., 1999, *ApJ* in press
Ledoux, P., 1951, *ApJ* 114, 373
Lee, U. and Baraffe, I., 1995, *A&A* 301, 419
Lee, U. and Saio, H., 1987, *MNRAS* 224, 513
Lee, U. and Saio, H., 1993, *MNRAS* 261, 415
Maas, L. and Lam, F.-P., 1995, *J. Fluid Mech.* 300, 1
Michel, E., 1998, in H. Kjeldsen and T. R. Bedding (eds.), *The First MONS Workshop: Science with a Small Space Telescope*, Aarhus Universitet
Morel, P., 1997, *A&AS* 124, 597
Osaki, Y., 1975, *PASJ* 27, 237
Osaki, Y. and Hansen, C. J., 1973, *ApJ* 185, 277
Pamyatnykh, A., Dziembowski, W. A., Handler, G., and Pikall, H., 1999, *A&A* 333, 141
Pesnell, P., 1990, *ApJ* 363, 227
Rieutord, M., 1987, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 39, 163
Rieutord, M., 1991, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 59, 182
Rieutord, M., Georgeot, B., and Valdetaro, L., 1999, in preparation for *J. Fluid Mech.*
Rieutord, M. and Valdetaro, L., 1997, *J. Fluid Mech.* 341, 77
Saio, H., 1981, *ApJ* 244, 299
Smylie, D. and Rochester, M. G., 1981, *Phys. Earth & Planet. Inter.* 24, 308
Soufi, F., Goupil, M. J., and Dziembowski, W. A., 1998, *A&A* 334, 911
Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., and Shibahashi, H., 1989, *Nonradial oscillations of stars*, University of Tokyo Press
Winget, D. E., Nather, R. E., Clemens, J., and al., 1991, *ApJ* 378, 326
Zwillinger, D., 1992, *Handbook of differential equations*, Academic Press

Chapter 5

Conclusions et perspectives

The belief that enclosed continuous media always possess eigenmodes is deeply rooted... Internal-wave attractors, rather than eigenmodes, determine the response of a confined, stably stratified fluid over a broad range of vibration frequencies. Maas L., Benielli D., Sommeria J. and Lam F.-P. (1997).

Dans cette thèse, nous avons étudié l'influence que pouvait avoir la rotation sur les oscillations stellaires, en nous focalisant sur les effets de premier ordre dus à la force de Coriolis.

A cette fin, un premier modèle Boussinesq nous a permis d'étudier les oscillations d'un fluide quasi-incompressible en rotation rapide, stratifié de manière stable et confiné soit dans une couche sphérique, soit dans une sphère pleine. Appliquant la méthode du tracé de rayon, développée à l'origine pour le problème du billard classique, nous avons calculé les trajectoires des caractéristiques de l'opérateur mixte gouvernant les oscillations. Trois types d'orbites (*i.e.* l'orbite pouvait être ergodique, périodique sous la forme d'un attracteur ou piégée dans un coin convergent) ont ainsi été trouvés. Le résultat fascinant auquel nous sommes alors arrivés concerne le lien profond existant entre ces différentes orbites de caractéristiques et la structure du mode propre associé: (*i*) aux orbites ergodiques sont associés des modes qualifiés de "réguliers", en ce sens que le champ de vitesse correspondant est à grande échelle et de carré sommable; (*ii*) des modes singuliers sont associés aux attracteurs, c'est-à-dire que la divergence de la vitesse au niveau du cycle limite conduit à des couches de cisaillement internes alignées le long de l'attracteur; (*iii*) enfin, les orbites qui sont piégées dans un coin donnent elles-aussi naissance à des modes singuliers puisque toute l'énergie du mode se concentre alors dans ce coin. Tant qu'un processus dissipatif (*i.e.* viscosité et/ou diffusion thermique) vient contrebalancer cette divergence de la vitesse, qui existe aussi bien au niveau de l'attracteur qu'au niveau du coin, le mode propre est physiquement viable mais correspond alors à une solution fortement amortie. A l'inverse, dans la limite adiabatique, le spectre d'oscillation doit *nécessairement* se "vider" de ces solutions pathologiques et seuls restent les modes à grande échelle correspondant aux orbites de caractéristiques qui sont ergodiques.

Cherchant dans un second temps à appliquer ces résultats au cas d'une étoile variable du type γ -Doradus en rotation rapide, nous avons développé un nouveau modèle anélastique.

Nous avons premièrement montré qu’une théorie perturbative au second-ordre en rotation échouait dès que la période de rotation devenait inférieure à environ trois jours. Appliquant alors la même méthode géométrique que précédemment où nous cherchions les trajectoires de caractéristiques, quelques attracteurs ont été décelés parmi une majorité d’orbites ergodiques. Le calcul des modes propres avec diffusion associés à ces orbites nous a permis d’aboutir à des conclusions identiques à celles du modèle Boussinesq, à savoir: (i) les modes réguliers correspondent aux orbites ergodiques; (ii) les modes singuliers sont engendrés par les attracteurs. La forme du spectre diffère là encore radicalement selon la présence ou non de diffusion; *i.e.* la viabilité des modes singuliers dépend comme précédemment d’un processus dissipatif qui contrebalance la singularité dans le champ de vitesse.

Ces travaux devraient à présent être généralisés au cas d’une rotation différentielle. Quelle est, par exemple, la forme des caractéristiques ainsi que leurs trajectoires si la loi de rotation est de type cylindrique $\Omega = \Omega(s)$?

La prise en compte de la force centrifuge dans les équations de la structure d’équilibre est là aussi un sujet ouvert. En particulier, on peut *a priori* s’attendre à retrouver les mêmes types de liens entre les orbites ergodiques et les modes réguliers et les attracteurs et les modes singuliers. La géométrie du conteneur semble en effet ne pas intervenir ici puisque ces relations ont été observées aussi bien dans la couche sphérique que dans la sphère pleine. On peut aussi remarquer que, comme pour les modes inertiels (Rieutord, 1999), il est très probable que les attracteurs soient structurellement stables et ne changent que très peu si le conteneur passe d’une sphère à un ellipsoïde.

Une application “excitante” de ce travail de thèse concerne aussi les propriétés de transport dans les zones radiatives en rotation rapide, en relation par exemple avec le problème de la synchronisation des étoiles doubles de type précoce (ayant encore une zone radiative externe). Nous avons en effet montré qu’il pouvait exister des modes d’oscillations dont la structure se résumait en un ensemble de couches de cisaillement internes alignées le long de l’attracteur pour les caractéristiques. Il est clair que ces couches de cisaillement vont donner lieu à un transport très efficace d’éléments chimiques et/ou de moment angulaire dans le régime non-linéaire. Autrement dit, les ondes gravito-inertielles se propageant le long des attracteurs pourront devenir de formidables vecteurs de transport et les temps caractéristiques de ralentissement des zones radiatives en rotation en seront d’autant diminués !

Enfin, notre travail pourra être étendu aux autres étoiles variables en rotation rapide (comme les δ Scuti ou les ζ Ophiuchi) *via*, notamment, une modélisation précise du kappa-mécanisme.

Appendix A

La théorie WKB

A.1 Une application idéale à un problème de Sturm-Liouville

Cette théorie s'applique dans le cas d'une équation différentielle dont le terme de plus haut degré est multiplié par un petit paramètre ε (e.g. Bender & Orszag, 1978, p. 484). Soit par exemple le problème de Sturm-Liouville suivant:

$$f''(x) + \omega(x + \pi)^4 f(x) = 0, \quad f(0) = f(\pi) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Le but est de trouver une expression asymptotique pour ω et la fonction propre associée f quand $\omega \rightarrow +\infty$. On a alors

$$\varepsilon f'' = -(x + \pi)^4 f(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{1}{\omega} \rightarrow 0 \quad (\text{A.2})$$

L'idée est de chercher une solution de la forme

$$f \sim \mathcal{A}(x) \exp i\psi(x)/\delta, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (\text{A.3})$$

où $\mathcal{A}(x)$ et $\psi(x)$ sont respectivement des fonctions d'amplitude et de phase variant, par hypothèse, lentement avec x . On a alors:

$$\left. \begin{aligned} f' &\sim \left(\frac{d\mathcal{A}}{dx} + i\frac{k}{\delta}\mathcal{A} \right) \exp i\psi/\delta, \\ f'' &\sim \left(\frac{d^2\mathcal{A}}{dx^2} + 2i\frac{k}{\delta}\frac{d\mathcal{A}}{dx} + i\frac{\mathcal{A} dk}{\delta dx} - \frac{k^2}{\delta^2}\mathcal{A} \right) \exp i\psi/\delta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

où $k = d\psi/dx$ représente le nombre d'onde local avec $|k| \sim \mathcal{O}(1)$ puisque $\psi(x)$ varie lentement. Injectant ces expressions dans (A.2), on trouve:

$$\varepsilon \left(\mathcal{A}'' + 2i\frac{k}{\delta}\mathcal{A}' + i\mathcal{A}\frac{k'}{\delta} - \frac{k^2}{\delta^2}\mathcal{A} \right) = -(x + \pi)^4 \mathcal{A} \quad (\text{A.5})$$

avec $' \equiv d/dx$. Le plus grand terme en module dans le membre de gauche est $\varepsilon|\mathcal{A}|k^2/\delta^2$ et doit équilibrer le membre de droite qui lui est $\mathcal{O}(1)$ donc une limite distinguée est $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$; d'où

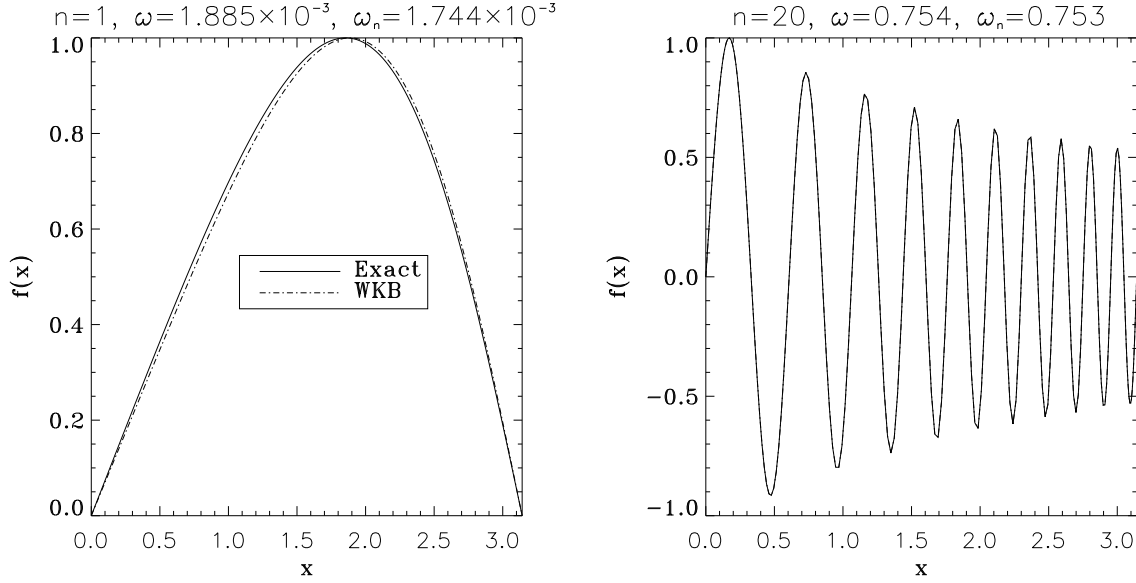


Figure A.1: Comparaison entre la solution exacte et la solution asymptotique (A.10) du problème de Sturm-Liouville $f_n'' = -\omega_n(x + \pi)^4 f_n$ pour $n = 1$ et $n = 20$. L'accord sur la fonction propre est excellent (même dans le cas $n = 1$) tandis que l'erreur relative $|\omega - \omega_n|/\omega$ est de $\sim 8\%$ pour $n = 1$ et de seulement $\sim 0.03\%$ pour $n = 20$.

$$k^2 \sim (x + \pi)^4 \Rightarrow k \sim \pm(x + \pi)^2 \quad (\text{A.6})$$

et l'équation vérifiée par la fonction amplitude $\mathcal{A}(x)$ est (on suppose que $\mathcal{A}'' \ll 1$)

$$2k\mathcal{A}' + \mathcal{A}k' \sim 0 \Rightarrow \mathcal{A} \sim |k|^{-1/2} \sim (x + \pi)^{-1} \quad (\text{A.7})$$

La fonction propre asymptotique f est donc

$$f \sim (x + \pi)^{-1} \left[C_1 \exp\left(\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x (t + \pi)^2 dt\right) + C_2 \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x (t + \pi)^2 dt\right) \right]$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer l'intégrale et trouver les constantes C_1, C_2 à partir des conditions limites. La condition $f(0) = 0$ donne $C_2 = -C_1$ soit

$$f \sim \frac{C}{x + \pi} \sin \left[\frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}} (x^3 + 3\pi x^2 + 3\pi^2 x) \right] \quad (\text{A.8})$$

La condition en $x = \pi$ nous permet de trouver l'expression de ω_n puisque

$$f(\pi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} = \frac{3}{7\pi^2} n \quad \text{soit} \quad \omega_n \sim \frac{9}{49\pi^4} n^2 \quad (\text{A.9})$$

et les expressions finales pour f_n et ω_n avec $n \rightarrow +\infty$ sont donc

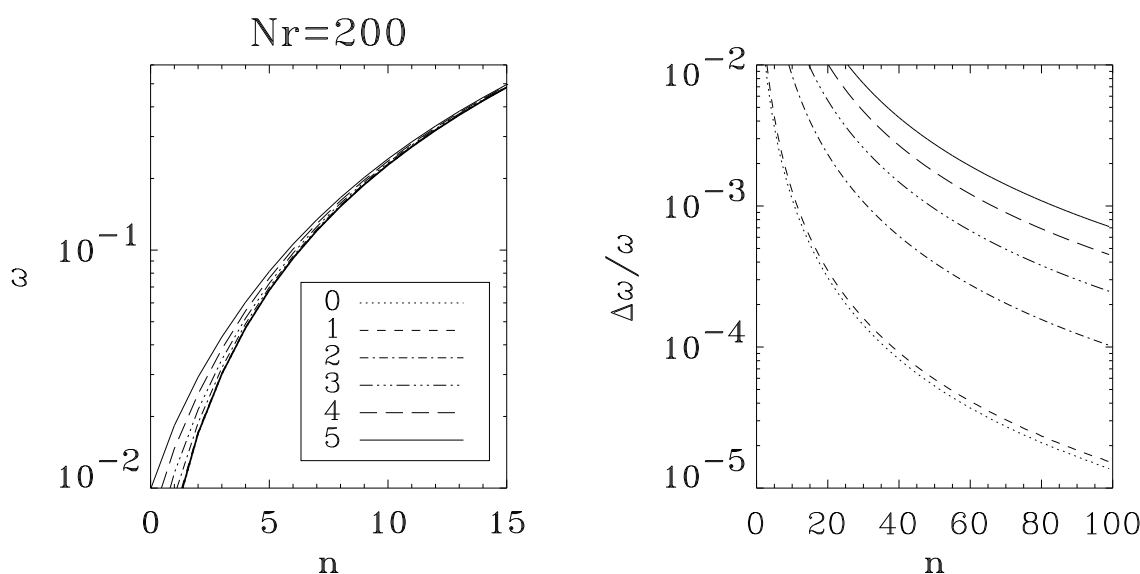


Figure A.2: (g) valeurs propres ω_n solutions de (A.11) pour différentes valeurs de la constante α ; la courbe en trait épais étant les approximations WKB (A.10). (d) Erreurs relatives $|\omega_n - \omega_{WKB}|/\omega_n$ en fonction du nombre de nœuds radiaux n de la fonction propre $f_n(x)$. Pour $\alpha = 1$, on voit que l'on doit avoir ~ 20 nœuds pour un accord à 10^{-3} sur ω_n alors qu'il nous faut prendre ~ 80 nœuds pour $\alpha = 5$ du fait de la condition $n \gg \alpha$; la limite asymptotique $n \rightarrow +\infty$ devenant alors numériquement plus difficile à atteindre.

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) &\sim \frac{C}{x + \pi} \sin \left[\frac{n}{7\pi^2} (x^3 + 3\pi x^2 + 3\pi^2 x) \right], \\ \omega_n &\sim \frac{9}{49\pi^4} n^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Une comparaison entre la solution exacte du problème de Sturm-Liouville et son approximation WKB pour les cas $n = 1$ et $n = 20$ est illustrée sur la figure A.1.

A.2 Un problème de Sturm-Liouville modifié

Lorsqu'on applique la méthode WKB, on suppose que les fonctions d'amplitude $\mathcal{A}(x)$ et de phase $\psi(x)$ varient lentement avec x . Ceci nous a permis de voir que, dans l'équation (A.5), le terme dominant était celui en k^2/δ^2 et nous en avons déduit que $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$. Maintenant, que se passe-t-il si on ajoute un terme parasite $\mathcal{O}(k^2/\delta^2)$ dans le membre de gauche ?

Soit par exemple le problème de Sturm-Liouville modifié suivant:

$$f'' + \alpha f' = -\omega_n (x + \pi)^4 f \quad (\text{A.11})$$

où α est une constante. Appliquant le même formalisme que précédemment, on obtient l'équation WKB suivante:

$$\varepsilon \left[\mathcal{A}'' + 2i\frac{k}{\delta}\mathcal{A}' + i\mathcal{A}\frac{k'}{\delta} - \frac{k^2}{\delta^2}\mathcal{A} + \alpha \left(\mathcal{A}' + i\frac{k}{\delta}\mathcal{A} \right) \right] = -(x + \pi)^4 \mathcal{A} \quad (\text{A.12})$$

Le premier terme supplémentaire en $\alpha\mathcal{A}'$ ne pose pas de problème particulier car $\mathcal{A}' \sim \mathcal{O}(1)$. Par contre, celui en $\alpha k/\delta$ peut devenir gênant car on doit avoir

$$\frac{k^2}{\delta^2} \gg \alpha \frac{k}{\delta} \Rightarrow \frac{k}{\delta} \gg \alpha \quad (\text{A.13})$$

soit, si on reprend la limite $\delta \sim \sqrt{\varepsilon} \sim 1/n$,

$$nk \gg \alpha \quad \text{ou} \quad n \gg \alpha \quad \text{car} \quad k \sim \mathcal{O}(1) \quad (\text{A.14})$$

Cela signifie que les approximations WKB de ω_n et $f(x)$ seront d'autant meilleures que le nombre de nœuds radiaux n de $f(x)$ sera grand devant la constante α . Autrement dit, la limite asymptotique $n \rightarrow +\infty$ sera numériquement plus difficile à atteindre (figure A.2).

Appendix B

Equations aux dérivées partielles du second ordre

B.1 Définition du type

Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre en deux variables indépendantes (x, y) suivante:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Son type dépend du signe de la fonction $\Delta(x, y) = B^2 - 4AC$ (e.g. Zwillinger, 1998, p.33):

$\Delta(x, y)$	< 0	$= 0$	> 0	$< > 0$
Type	elliptique	parabolique	hyperbolique	mixte
Exemples	Eq. de Laplace	Eq. de diffusion	Eq. d'onde	Modes de gravité

On note que le type d'une équation aux dérivées partielles ne dépend que de ses termes de *plus haut degré*.

B.2 Equation des caractéristiques

Il est possible de transformer l'équation aux dérivées partielles (B.1) en un système d'équations ne faisant intervenir que des dérivées totales; cette simplification n'étant possible que le long de directions bien définies: les caractéristiques. On pose:

$$\mathcal{P} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathcal{Q} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mathcal{R} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathcal{S} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \mathcal{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{B.2})$$

et l'équation (B.1) s'écrit formellement

$$A\mathcal{R} + B\mathcal{S} + C\mathcal{T} + F = 0 \quad (\text{B.3})$$

L'idée est de chercher à éliminer les termes du second ordre \mathcal{R} et \mathcal{T} ; le terme en \mathcal{S} s'éliminant dans le calcul. Pour cela, on note que \mathcal{P} et \mathcal{Q} vérifient les relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} d\mathcal{P} = \mathcal{R}dx + \mathcal{S}dy &\Rightarrow \mathcal{R} = \frac{d\mathcal{P}}{dx} - \mathcal{S}\frac{dy}{dx}, \\ d\mathcal{Q} = \mathcal{S}dx + \mathcal{T}dy &\Rightarrow \mathcal{T} = \frac{d\mathcal{Q}}{dy} - \mathcal{S}\frac{dx}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.4})$$

d'où (B.3) devient

$$\mathcal{S} \left[A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C \right] - \left(A \frac{d\mathcal{P}}{dx} + F \right) \frac{dy}{dx} - C \frac{d\mathcal{Q}}{dx} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Si on impose que dy/dx soit tel que

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C = 0 \quad (\text{B.6})$$

alors (B.5) se réduit à l'équation de compatibilité

$$\left(A \frac{d\mathcal{P}}{dx} + F \right) \frac{dy}{dx} + C \frac{d\mathcal{Q}}{dx} = 0 \quad (\text{B.7})$$

qui est bien une équation ne faisant intervenir que des dérivées totales en d/dx .

L'équation (B.6) pour dy/dx définit des directions privilégiées, les caractéristiques, le long desquelles \mathcal{P} et \mathcal{Q} satisfont (B.7). Les courbes caractéristiques sont donc données par l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta(x, y)}}{2A}, \quad \Delta(x, y) = B^2 - 4AC} \quad (\text{B.8})$$

et leur nombre ainsi que leur nature dépendent du type de l'équation aux dérivées partielles de départ; *i.e.* on a:

- type hyperbolique ($\Delta > 0$): 2 familles de caractéristiques réelles.
- type parabolique ($\Delta = 0$): 1 famille de caractéristiques réelles.
- type elliptique ($\Delta < 0$): 2 familles de caractéristiques complexes.
- type mixte ($\Delta \ll 0$): mélange de caractéristiques réelles et complexes.

Donc on voit que le signe de $\Delta(x, y)$ donne non seulement le type de l'équation aux dérivées partielles mais aussi la nature de ses caractéristiques associées.

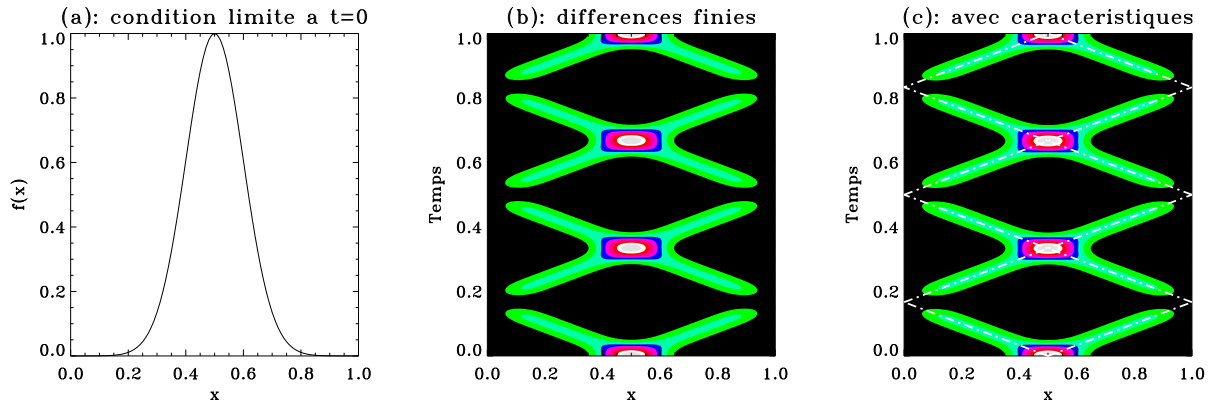


Figure B.1: Contours de $u^2(x, t)$ dans le plan (x, t) pour une vitesse $c = 3$ et une fonction $u(x, 0)$ en forme de gaussienne (a). L'équation d'onde (B.9) est itérée en utilisant: (b) un schéma aux différences finies; (c) les caractéristiques $x \pm ct$. Les rayons en pointillés blancs sur la figure (c) marquent un trajet pour 2 caractéristiques depuis $t = 0$.

B.3 Utilisation des caractéristiques

La méthode des caractéristiques

L'équation de compatibilité (B.7) est donc *uniquement* valable le long des caractéristiques et cette propriété a été exploitée pour résoudre numériquement des problèmes aux dérivées partielles hyperboliques; c'est la méthode dite "des caractéristiques". Voici les principales étapes de l'algorithme (e.g. Fletcher, 1991):

1. on intègre dans un premier temps deux caractéristiques jusqu'à ce qu'elles se croisent en un point (x_1, y_1) .
2. on obtient alors en ce point deux équations pour \mathcal{P} et \mathcal{Q} via l'équation de compatibilité exprimée sur les deux caractéristiques: on en déduit \mathcal{P}_1 et \mathcal{Q}_1 à partir de leurs valeurs initiales aux points de départ des deux caractéristiques.
3. on en déduit $u_1(x_1, y_1)$ grâce à la relation différentielle $du = \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy$.

Le passage en variables caractéristiques

Pour des problèmes hyperboliques simples du type équation d'onde, une résolution plus rapide est possible *via* l'utilisation des variables caractéristiques. Prenons par exemple l'équation d'onde à une dimension spatiale suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{c^2}, \quad F = 0 \quad (\text{B.9})$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde que l'on supposera ici constante. L'équation des caractéristiques (B.8) donne alors

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c} \Rightarrow x \pm ct = K = Cte \quad (\text{B.10})$$

On introduit alors les variables caractéristiques $\xi(x, t)$ et $\eta(x, t)$ telles que

$$\xi = x - ct \quad \text{et} \quad \eta = x + ct \quad (\text{B.11})$$

et l'équation pour $u(\xi, \eta)$ s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad \text{soit} \quad u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (\text{B.12})$$

où f et g sont deux fonctions à déterminer et qui restent constantes sur leurs caractéristiques respectives ($\xi = cte$ et $\eta = cte$). A $t = 0$, on impose les conditions initiales suivantes pour $u(x, t)$:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= h(x) = f(x) + g(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.13})$$

et on en déduit la forme finale pour $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [h_-(x - ct) + h_+(x + ct)] \quad (\text{B.14})$$

L'algorithme numérique est maintenant simple: en chaque point du plan (x, t) passent deux caractéristiques $x \pm ct$, chacune portant sa valeur h_+ et h_- prise au temps initial $t = 0$. On en déduit alors la valeur de $u(x, t)$ en ce point:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (h_- + h_+) \quad (\text{B.15})$$

De plus, si on impose que la fonction $u(x, t)$ s'annule sur les bords (*i.e.* $u(0, t) = u(1, t) = 0$ pour $t \geq 0$), il faut être attentif à la valeur h que l'on prend pour chaque caractéristique. En effet, à chaque réflexion en $x = 0$ ou $x = 1$, on a:

$$u = \frac{1}{2} (h_- + h_+) = 0 \Rightarrow h_- = -h_+ \quad (\text{B.16})$$

c'est-à-dire que la caractéristique émergente repart avec une valeur de h opposée à celle que portait la caractéristique incidente. Reste à "remonter" les deux caractéristiques passant par le point (x, t) qui nous intéresse jusqu'au temps $t = 0$ pour trouver la valeur h effectivement transportée ! Ce faisant, cela illustre bien la propagation le long des caractéristiques de la fonction $h(x)$ définie à $t = 0$.

La figure B.1 montre le résultat de l'itération en temps de l'équation d'onde (B.9) en utilisant les deux méthodes numériques suivantes:

1. un schéma aux différences finies du second ordre avec 100 points de grille en x et t (e.g. Zwillinger, 1998, p.748).

2. le passage par les caractéristiques $x \pm ct$ et le calcul de leurs réflexions successives en $x = 0$ et $x = 1$.

Comme on peut le voir, les deux méthodes donnent exactement le même champ $u^2(x, t)$.

Appendix C

L'interface graphique IDL pour le calcul des orbites

Dans cette annexe, nous présentons brièvement l'interface graphique IDL mise au point pour faciliter à la fois le lancement du calcul de l'orbite de caractéristiques et son tracé. Avant de commencer le calcul d'une trajectoire de caractéristiques, nous devons préciser les paramètres suivants:

- la forme du conteneur dans lequel vont se propager les caractéristiques (une sphère pleine ou une couche sphérique). On fixe pour cela le rapport d'aspect $\eta = R_i/R_e$ où R_i et R_e représentent respectivement les rayons des sphères interne et externe (*i.e.* $\eta = 0$ pour une sphère pleine et $0 < \eta < 1$ pour une couche sphérique).
- les valeurs de ω et de N .
- la caractéristique avec laquelle l'orbite doit partir. Nous avons ici deux choix possibles correspondant aux cas \pm dans les équations différentielles (3.26) et (3.27).
- le sens de départ sur la caractéristique choisie (comme la variable sens s dans l'expression de la carte (2.28) du bassin parabolique au chapitre 2). Là aussi, deux choix sont possibles: soit la variable d'intégration (r dans le cas d'une orbite elliptique, z dans le cas d'une orbite hyperbolique) augmente, soit elle diminue lors du premier pas d'intégration.
- la position du point de départ à partir duquel le calcul de l'orbite doit commencer. En fait, on choisira quasiment toujours de partir sur la sphère externe en ($r = 1, \theta = 0$) dans le cas elliptique. Dans le cas hyperbolique, on partira du même point ($z = 0, s = 1$) dans la sphère pleine tandis que l'orbite débutera sur la sphère interne, à la latitude critique $\theta_c = \cos^{-1} \omega$, dans la couche sphérique.
- les précisions désirées: (i) dans le calcul des réflexions sur les éventuelles surfaces critiques; (ii) dans la recherche des zéros de la fonction $g(s, z)$ lors de l'appel au programme D02BHF.
- enfin, nous devons donner le nombre total de réflexions désirées (ce nombre marquera le critère d'arrêt du calcul de l'orbite) ainsi que le nombre de points de grille lors

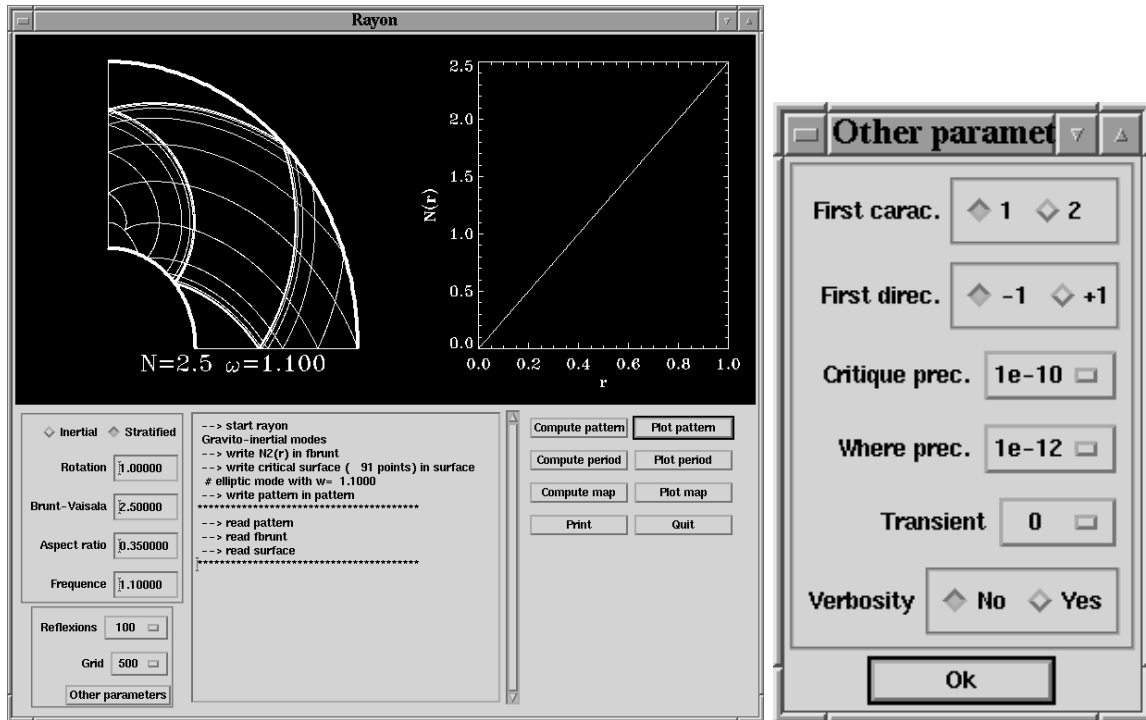


Figure C.1: Interface graphique avec menus déroulants sous IDL. Cette interface permet de lancer facilement le programme Fortran “rayon” (bouton *Compute pattern*) qui calcule l’orbite de caractéristiques à partir des données que l’utilisateur rentre simplement *via* les cases et menus appropriés (le menu *Other parameters* est par exemple visible à droite). En cliquant sur le bouton *Plot pattern*, l’orbite calculée ainsi que le profil de Brunt-Väisälä utilisé sont alors tracés dans la fenêtre graphique.

de l’intégration des caractéristiques dans le programme D02BBF. Incidemment, nous pouvons aussi demander à ce qu’un certain nombre de réflexions n’apparaissent pas dans l’orbite finale obtenue en sortie; ceci étant pratique lorsque l’on veut uniquement visualiser l’orbite finale (*i.e.* cela revient à fixer un “transient” de réflexions qui ne seront pas prises lors du tracé de l’orbite).

Nous voyons que nous avons à préciser environ dix paramètres pour chaque calcul d’orbite. Ce nombre relativement élevé d’entrées, propice à autant d’omissions et/ou mauvaises valeurs, nous à amener à mettre au point, dans le langage IDL, une interface graphique à base de menus déroulants. Cette interface est illustrée sur la figure C.1 et est composée des quatre parties suivantes:

1. la première partie, visible dans le coin en bas à gauche, est dédiée à la saisie des paramètres d’entrée, avec notamment le menu *Other parameters* (Fig. C.1 à droite).
2. la seconde partie centrale, non accessible à l’utilisateur, est une fenêtre d’affichage des diverses actions du code de calcul Fortran et du code de tracé IDL.

3. la troisième partie, située à droite, permet de lancer divers programmes Fortran (dont celui qui calcule l'orbite, *cf.* bouton *Compute Pattern*) puis de lancer le tracé de l'orbite obtenue (*cf.* *Plot Pattern*).
4. enfin, la quatrième partie correspond à la fenêtre graphique barrant tout le haut de l'interface. Nous traçons dans cette fenêtre l'orbite calculée ainsi que le profil de fréquence de Brunt-Väisälä utilisé (dans le modèle Boussinesq, on rappelle que $N(r) = N \times r$ avec $N = cte$).

Appendix D

Alice au Pays des Harmoniques Sphériques

D.1 Définition et expressions pour $\ell = 0, 1, 2$

Les harmoniques sphériques normalisées $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ sont les fonctions propres qui sont associées à la valeur propre $-\ell(\ell+1)$ du laplacien sphérique défini sur la sphère unité; *i.e.* elles vérifient

$$\frac{\partial^2 Y_\ell^m}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_\ell^m}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1)Y_\ell^m = 0, \quad \int_{4\pi} Y_\ell^m (Y_{\ell'}^{m'})^* d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques habituelles et le nombre quantique m est tel que $-\ell \leq m \leq +\ell$. Leur expression générale, valable pour $m \geq 0$ ou $m < 0$, est (voir *e.g.* Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973, p.694):

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \right]^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ P_\ell^{|m|}(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \frac{d^m P_\ell(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \end{array} \right.$$

où $P_\ell^{|m|}$ est la fonction de Legendre associée. On trouve ainsi pour $\ell = 0, 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}, \quad Y_1^0 = \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \cos \theta \\ Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}, \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}, \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{array} \right.$$

D.2 Quelques propriétés

Relations de récurrence

- pour $Y_\ell^m \Rightarrow \cos \theta Y_\ell^m = \alpha_\ell^k Y_k^m$, $\sin \theta Y_\ell^m = \frac{\beta_k^\ell}{k(k+1)} N_\theta^{k,m}$, $k = \ell \pm 1$

- pour $N_\theta^{\ell,m} = \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \Rightarrow \cos \theta N_\theta^{\ell,m} = \gamma_\ell^k N_\theta^{k,m}$, $\sin \theta N_\theta^{\ell,m} = \beta_\ell^k Y_k^m$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_\ell^{\ell-1} = \alpha_{\ell-1}^\ell = \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}, \quad \alpha_{\ell+1}^\ell = \sqrt{\frac{\ell^2(\ell+1)^2 - m^2}{(2\ell+3)(2\ell+1)}} \\ \beta_{\ell-1}^\ell = (\ell-1)\alpha_{\ell-1}^\ell, \quad \beta_{\ell+1}^\ell = -(\ell+2)\alpha_{\ell+1}^\ell \\ \gamma_\ell^{\ell-1} = \frac{\ell+1}{\ell}\alpha_\ell^{\ell-1}, \quad \gamma_\ell^{\ell+1} = \frac{\ell}{\ell+1}\alpha_\ell^{\ell+1} \end{array} \right.$$

Parité

L'opération de parité revient, en coordonnées sphériques, à faire les substitutions suivantes:

$$r \Rightarrow r \quad ; \quad \theta \Rightarrow \pi - \theta \quad ; \quad \varphi \Rightarrow \pi + \varphi$$

On peut alors montrer que l'application de cette opération sur les Y_ℓ^m conduit à (voir *e.g.* la démonstration dans Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973, p.691):

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

Autrement dit, la parité des harmoniques sphériques ne dépend que de ℓ et est indépendante de m : elles sont paires pour ℓ pair et impaires pour ℓ impair. Nous aurons donc, pour un m donné, deux séries possibles en ℓ selon la parité voulue: $\ell = |m|, |m| + 2, |m| + 4, \dots$ et $\ell = |m| + 1, |m| + 3, |m| + 5, \dots$

D.3 Développements sur les Y_ℓ^m et opérateurs associés

Tout champ vectoriel \vec{u} ou scalaire Θ peut être développé sur une base d'harmoniques sphériques de la façon suivante (Rieutord, 1987):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} u_m^\ell(r) \vec{R}_\ell^m + v_m^\ell(r) \vec{S}_\ell^m + w_m^\ell(r) \vec{T}_\ell^m, \\ \Theta(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} t_m^\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \end{array} \right\} \quad (\text{D.1})$$

où $\vec{R}_\ell^m, \vec{S}_\ell^m$ et \vec{T}_ℓ^m sont les harmoniques sphériques vectorielles données par:

$$\vec{R}_\ell^m = Y_\ell^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r \quad ; \quad \vec{S}_\ell^m = \vec{\nabla} Y_\ell^m \quad ; \quad \vec{T}_\ell^m = \vec{\nabla} \times \vec{R}_\ell^m \quad (\text{D.2})$$

et elles vérifient les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \int_{4\pi} \vec{R}_\ell^m \cdot \vec{S}_{\ell'}^{m'} d\Omega &= \int_{4\pi} \vec{R}_\ell^m \cdot \vec{T}_{\ell'}^{m'} d\Omega = \int_{4\pi} \vec{S}_\ell^m \cdot \vec{T}_{\ell'}^{m'} d\Omega = 0, \\ \int_{4\pi} \vec{R}_\ell^m \cdot (\vec{R}_{\ell'}^{m'})^* d\Omega &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \\ \int_{4\pi} \vec{S}_\ell^m \cdot (\vec{S}_{\ell'}^{m'})^* d\Omega &= \int_{4\pi} \vec{T}_\ell^m \cdot (\vec{T}_{\ell'}^{m'})^* d\Omega = \ell(\ell+1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.3})$$

On note que le champ vectoriel $u_m^\ell \vec{R}_\ell^m + v_m^\ell \vec{S}_\ell^m$ apparaissant dans le développement (D.1) est le champ “sphéroïdal” tandis que $w_m^\ell \vec{T}_\ell^m$ représente le champ “toroïdal”. Si l'on revient dans la base sphérique $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$, le champ \vec{u} est donné par:

$$\vec{u} = \begin{cases} u_r = u_m^\ell Y_\ell^m \\ u_\theta = v_m^\ell N_\theta^{\ell,m} + w_m^\ell N_\varphi^{\ell,m} \\ u_\varphi = w_m^\ell N_\varphi^{\ell,m} - w_m^\ell N_\theta^{\ell,m} \end{cases} \quad \text{où} \quad N_\varphi^{\ell,m} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \varphi} = \frac{im}{\sin \theta} Y_\ell^m \quad (\text{D.4})$$

Lorsqu'on travaille dans la base $(\vec{R}_\ell^m, \vec{S}_\ell^m, \vec{T}_\ell^m)$, il faut redéfinir l'action des opérateurs vectoriels usuels tels que div ou $\overrightarrow{\text{Rot}}$. Pour cela, il faut projeter ces opérateurs sur la sphère unité *via* le calcul d'intégrales de la forme (pour le rotationnel par exemple)

$$\int_{4\pi} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{u} \cdot \vec{R}_\ell^m d\Omega \quad ; \quad \int_{4\pi} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{u} \cdot \vec{S}_\ell^m d\Omega \quad ; \quad \int_{4\pi} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{u} \cdot \vec{T}_\ell^m d\Omega$$

et on obtient ainsi les actions sur les fonctions radiales $(u_m^\ell, v_m^\ell, w_m^\ell)$ uniquement. On trouve alors:

$$\text{div} \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_m^\ell)}{dr} - \ell(\ell+1) \frac{v_m^\ell}{r}$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{u} = \left[\ell(\ell+1) \frac{w_m^\ell}{r}, \frac{1}{r} \frac{d(r w_m^\ell)}{dr}, -z_m^\ell \right], \quad z_m^\ell = \frac{1}{r} \frac{d(r v_m^\ell)}{dr} - \frac{u_m^\ell}{r}$$

$$\Delta \vec{u} = \left\{ \Delta_\ell u_m^\ell - \frac{2}{r^2} \left[u_m^\ell - \ell(\ell+1) v_m^\ell \right], \Delta_\ell v_m^\ell + 2 \frac{u_m^\ell}{r^2}, \Delta_\ell w_m^\ell \right\}, \quad \Delta_\ell = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}^3 \vec{u} = \left[-\ell(\ell+1) \frac{\Delta_\ell w_m^\ell}{r}, -\frac{1}{r} \frac{d(r \Delta_\ell w_m^\ell)}{dr}, \Delta_\ell z_m^\ell \right]$$

D.4 Projections de la force de Coriolis et du tenseur des contraintes

La force de Coriolis

La force de Coriolis projetée sur la base vectorielle d'harmoniques sphériques $(\vec{R}_\ell^m, \vec{S}_\ell^m, \vec{T}_\ell^m)$ devient (Rieutord, 1987):

$$\vec{e}_z \times \vec{u} = \left[\beta_k^\ell w_m^k, \gamma_k^\ell w_m^k - \frac{im}{\ell(\ell+1)}(u_m^\ell + v_m^\ell), -\gamma_k^\ell v_m^k - \frac{imw_m^\ell + \beta_\ell^k}{\ell(\ell+1)} \right]$$

où $k = \ell \pm 1$ et les coefficients $\gamma_{\ell \pm 1}^\ell$ sont donnés par

$$\gamma_{\ell-1}^\ell = \frac{\ell-1}{\ell} \alpha_{\ell-1}^\ell, \quad \gamma_{\ell+1}^\ell = \frac{\ell+2}{\ell+1} \alpha_{\ell+1}^\ell$$

Le tenseur des contraintes pour un fluide incompressible

Pour un fluide incompressible tel que $\text{div } \vec{u} = 0$, le tenseur des contraintes adimensionné σ_{ij} est donné par:

$$\sigma_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$$

soit en coordonnées sphériques (*e.g.* Rieutord, 1997, p.311):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{\tan \theta} \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \right) \end{array} \right.$$

En remplaçant u_r, u_θ et u_φ par leurs expressions sur les harmoniques sphériques (*cf.* D.4), on obtient la projection du tenseur des contraintes d'un fluide *incompressible* sur Y_ℓ^m soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = 2 \frac{du_m^\ell}{dr} Y_\ell^m \\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{du_m^\ell}{dr} Y_\ell^m + \frac{1}{r} (v_m^\ell X_\ell^m + w_m^\ell Z_\ell^m) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{du_m^\ell}{dr} Y_\ell^m - \frac{1}{r} (v_m^\ell X_\ell^m + w_m^\ell Z_\ell^m) \\ \sigma_{r\theta} = s_m^\ell N_\theta^{\ell,m} + q_m^\ell N_\varphi^{\ell,m} \\ \sigma_{r\varphi} = s_m^\ell N_\varphi^{\ell,m} - q_m^\ell N_\theta^{\ell,m} \\ \sigma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} (v_m^\ell Z_\ell^m - w_m^\ell X_\ell^m) \end{array} \right.$$

où

$$s_m^\ell = \frac{dv_m^\ell}{dr} + \frac{1}{r} (u_m^\ell - v_m^\ell), \quad X_\ell^m = 2 \frac{\partial N_\theta^{\ell,m}}{\partial \theta} + \ell(\ell+1) Y_\ell^m, \quad Z_\ell^m = 2 \frac{\partial N_\varphi^{\ell,m}}{\partial \theta}$$

$$v_m^\ell = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left(r \frac{du_m^\ell}{dr} + 2u_m^\ell \right)$$

Appendix E

Les méthodes itératives

Nous présentons brièvement dans cette annexe le principe de l'algorithme de la puissance qui est à la base des méthodes dites "itératives" appliquées aux problèmes aux valeurs propres de grande taille (e.g. Chatelin, 1988, p.160).

E.1 Problématique

Soit le problème aux valeurs propres suivant:

$$\mathcal{A}\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi} \tag{E.1}$$

où \mathcal{A} est une matrice réelle non-symétrique de grande taille (typiquement d'ordre $\sim 10^4 - 10^5$); *i.e.* au sens de Chatelin (1988), un problème aux valeurs propres est dit de grande taille lorsqu'il est beaucoup moins cher en mémoire et en temps de calcul de rechercher seulement les valeurs et vecteurs propres désirés plutôt que la totalité de ceux-ci.

En effet, on applique classiquement une méthode dite "directe" qui nous donne le spectre complet des λ avec/sans leurs vecteurs propres associés $\vec{\psi}$. Pour cela, on utilise par exemple l'algorithme QR (respectivement QZ) si la matrice \mathcal{A} est réelle (respectivement complexe):

1. on factorise \mathcal{A} en une forme Hessenberg supérieure \mathcal{H} , c'est-à-dire en une matrice n'ayant que des zéros en-dessous de la sous-diagonale; par exemple, pour une matrice d'ordre quatre

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

et les spectres de \mathcal{A} et \mathcal{H} sont identiques. L'avantage de la forme Hessenberg est qu'elle est conservée par l'algorithme QR; l'espace de travail pour une telle matrice étant $\mathcal{O}(n^2)$ alors qu'il est $\mathcal{O}(n^3)$ pour la matrice générale \mathcal{A} d'ordre n .

2. on décompose la matrice \mathcal{H} en $\mathcal{H} = \mathcal{Q}\mathcal{R}$ où \mathcal{Q} est orthogonale ($\mathcal{Q}\mathcal{Q}^T = I$) et \mathcal{R} est une matrice triangulaire supérieure.
3. on applique enfin une succession de transformations orthogonales sur \mathcal{H} soit

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{Q}_s \mathcal{R}_s \Rightarrow \mathcal{H}_{s+1} = \mathcal{R}_s \mathcal{Q}_s = \mathcal{Q}_s^T \mathcal{H}_s \mathcal{Q}_s \Rightarrow \mathcal{H}_{s+2} = \mathcal{Q}_{s+1}^T \mathcal{Q}_s^T \mathcal{H}_s \mathcal{Q}_s \mathcal{Q}_{s+1}$$

et, quand $s \rightarrow \infty$, \mathcal{H}_s converge vers une matrice dont les valeurs propres sont isolées soit sur la diagonale, soit dans des blocs 2×2 alignés sur la diagonale.

Connaître la totalité du spectre est donc numériquement coûteux, aussi bien en temps qu'en mémoire. Qui plus est, hormis le cas d'une étude statistique des valeurs propres, la connaissance de tout le spectre n'est pas nécessairement utile. Par exemple, dans l'étude de l'apparition de l'instabilité convective en fonction du nombre de Rayleigh, on a plutôt besoin de suivre l'évolution des parties réelles d'une ou de quelques valeurs propres et non la totalité de celles-ci. De même, lorsque nous étudions la limite asymptotique non visqueuse des modes gravito-inertiels, nous devons suivre une valeur propre donnée en faisant décroître le nombre d'Ekman E (*i.e.* la viscosité). C'est précisément l'avantage des méthodes itératives que de permettre d'accéder à quelques couples $(\lambda, \vec{\psi})$ solutions du problème aux valeurs propres (E.1).

Il existe trois types de méthodes itératives: (i) la méthode dite de "l'itération de sous-espace"; (ii) la méthode d'Arnoldi qui est une généralisation aux matrices non-hermitiennes ($\mathcal{A}^* \neq \mathcal{A}$) de la méthode de Lanczos; (iii) la méthode de Jacobi-Davidson. La philosophie des premières méthodes est en fait la même, à savoir qu'elles reposent toutes deux sur la méthode dite "de la puissance" que nous allons maintenant détailler.

E.2 Principe de la méthode de la puissance

Cas sans shift

La méthode de la puissance est un algorithme simple qui permet de trouver très rapidement la valeur propre de plus grand module ainsi que son vecteur propre associé. En effet, si on se donne un vecteur initial $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a le théorème suivant (Chatelin, 1988, p.139):

$$\vec{q}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \Rightarrow \vec{q}_k = \frac{\mathcal{A}\vec{q}_{k-1}}{|\mathcal{A}\vec{q}_{k-1}|} \quad \text{alors} \quad |(\vec{q}_k)^* \cdot \mathcal{A}\vec{q}_k - \lambda_1| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \text{ pour } k \geq 1$$

où on a supposé que le spectre est tel que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_n| \geq 0$. Donc \vec{q}_k tend vers le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 de plus grand module. Prenons l'exemple suivant:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \{1, 2, 3\}$$

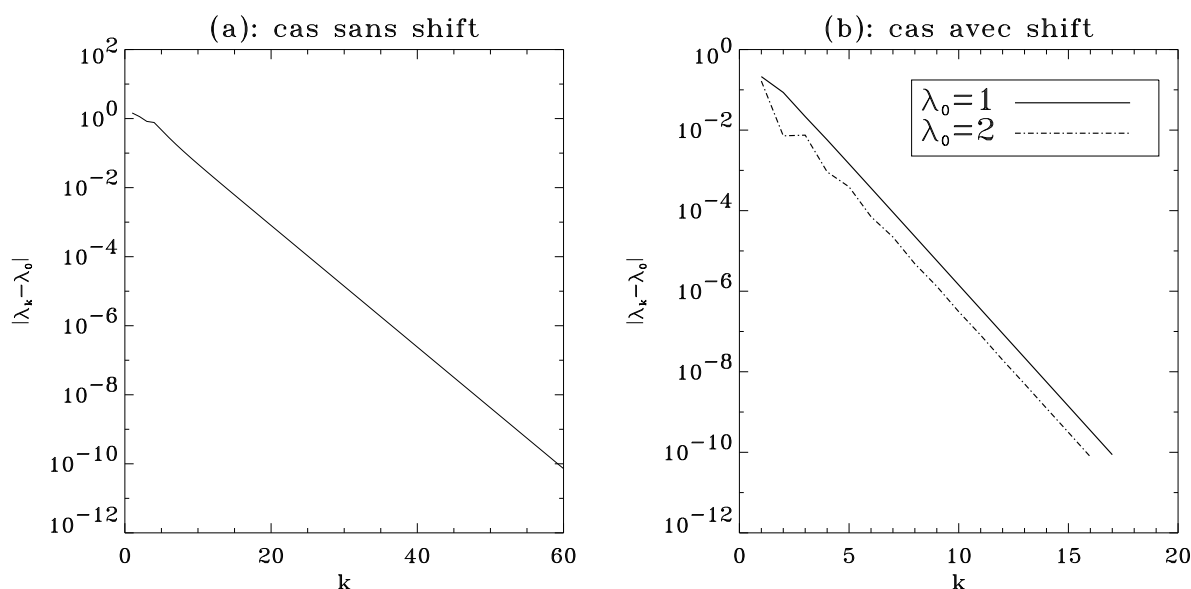


Figure E.1: Illustration de la méthode de la puissance. (a) cas sans shift où la valeur propre $\lambda_k = (\vec{q}_k)^* \cdot \mathcal{A} \vec{q}_k$ tend vers celle de plus grand module $\lambda_0 = 3$ au fur et à mesure qu'on itère k . (b) cas avec shift $\sigma = 1.2$ et $\sigma = 2.2$; la valeur propre λ_k tendant alors respectivement vers $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_0 = 2$. Dans les deux cas (a) et (b), le vecteur initial \vec{u} était égal à $\vec{u} = (1; 1; 1)$ et l'itération en k a été arrêté dès que $|\lambda_k - \lambda_0| \leq 10^{-10}$.

Si on applique cette méthode, on doit donc avoir $\lambda_k = (\vec{q}_k)^* \cdot \mathcal{A} \vec{q}_k \rightarrow 3$, ce qu'on observe bien sur la figure E.1(a) où nous sommes partis du vecteur $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Evidemment, un critère d'arrêt de l'itération en k doit être choisi, c'est-à-dire que nous devons définir un critère de convergence pour λ_k . Dans notre cas, le critère retenu est simple puisque l'itération en k cesse dès que l'on a $|\lambda_k - \lambda_0| \leq 10^{-10}$.

Cas avec shift

Il est possible de calculer, *via* l'utilisation de la technique du "shift-invert", les autres valeurs propres du spectre de manière itérative. Supposons en effet que nous voulions calculer la valeur propre $\lambda = 2$ de l'exemple précédent. Pour cela, on pose:

$$\lambda = \sigma + \frac{1}{\mu}$$

où σ est un shift donné proche de $\lambda = 2$. Le problème aux valeurs propres devient alors

$$(\mathcal{A} - \sigma I)^{-1} \vec{\psi} = \mu \vec{\psi}$$

et on se ramène au calcul de la valeur propre μ de plus grand module correspondant à $\lambda \simeq \sigma$. Reprenant l'algorithme de la méthode de la puissance, on a:

$$\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{q}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \Rightarrow \vec{q}_k = \frac{(\mathcal{A} - \sigma I)^{-1} \vec{q}_{k-1}}{|(\mathcal{A} - \sigma I)^{-1} \vec{q}_{k-1}|}, \quad k \geq 1$$

On voit que l'on a maintenant à résoudre un système d'équations linéaires puisque nous devons trouver \vec{q}_k tel que

$$(\mathcal{A} - \sigma I) \vec{q}_k = \vec{q}_{k-1} \quad \text{puis normaliser} \quad \vec{q}_k \equiv \frac{\vec{q}_k}{|\vec{q}_k|}$$

En pratique, on effectue d'abord une factorisation LU de la matrice $(\mathcal{A} - \sigma I)$ puis on résout, pour chaque itération k , le système linéaire $(\mathcal{A} - \sigma I) \vec{q}_k = \vec{q}_{k-1}$ et on normalise la solution \vec{q}_k . Comme on peut le voir sur la figure E.1(b), on converge alors rapidement vers la valeur propre μ la plus grande en module correspondant à la valeur propre λ la plus proche du shift σ de départ.

La méthode d'itération de sous-espace est en fait une généralisation de la méthode de la puissance. On se donne au départ une base quelconque de vecteurs \vec{u}_i pour $i = 1, r$ et on construit à chaque itération k une base orthonormale Q_k du sous-espace engendré par les r vecteurs $(\mathcal{A}^k \vec{u}_1, \mathcal{A}^k \vec{u}_2, \mathcal{A}^k \vec{u}_3, \dots, \mathcal{A}^k \vec{u}_r)$. On montre alors (e.g. Chatelin, 1988, p.135) que le spectre de la matrice $B_k = Q_k^T \mathcal{A} Q_k$ d'ordre r tend vers les r valeurs propres dominantes cherchées. Autrement dit, cette méthode généralise bien celle de la puissance puisqu'elle repose sur le même principe d'itération en puissance de \mathcal{A} tout en donnant accès aux r valeurs propres dominantes et non simplement à l'unique valeur propre de plus large module.

En ce qui concerne la méthode d'Arnoldi, elle s'inspire là encore de l'algorithme de la puissance mais elle est plus subtile car elle passe d'abord par une projection de \mathcal{A} sur le sous-espace de Krylov associé $\mathcal{K}_m = (\vec{u}, \mathcal{A}\vec{u}, \mathcal{A}^2\vec{u}, \mathcal{A}^3\vec{u}, \dots, \mathcal{A}^{m-1}\vec{u})$ où \vec{u} est un vecteur arbitraire donné. Cette méthode consiste donc à construire une base orthonormale V_m de \mathcal{K}_m puis la matrice de Hessenberg supérieure \mathcal{H}_m résultat de la projection de \mathcal{A} sur \mathcal{K}_m . Les valeurs propres dominantes de \mathcal{A} sont alors simplement données par la diagonalisation de \mathcal{H}_m *via*, par exemple, l'algorithme QR ou QZ ! Cette méthode revient donc à diagonaliser une petite matrice de Hessenberg \mathcal{H}_m d'ordre m (avec typiquement $m \sim 40$); cette matrice contenant uniquement l'information qui nous intéresse dans la matrice de départ \mathcal{A} . Comme la taille de \mathcal{H}_m est bien plus petite que celle de \mathcal{A} (on rappelle que la taille de \mathcal{A} est $\sim 10^4 - 10^5$), on gagne ainsi à la fois en mémoire et en temps de calcul. C'est cette méthode que nous avons utilisée *via* le programme ARNCHEB développé au CERFACS par Valérie Frayssé et Jean-Christophe Rioual (Rioual, 1997).

Bibliography

- AERTS, C., EYER, L. & KESTENS, E. 1998 The discovery of new γ Doradus stars from the HIPPARCOS mission. *Astron. & Astrophys.* **337**, 790–796.
- AERTS, C. & KRISCIUNAS, K. 1996 Mode identification of the slowly pulsating FOV star V398 Aurigae (9Aur). *Mon. Not. R. astr. Soc.* **278**, 877–882.
- BATCHELOR, G. K. 1981 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BENDER, C. M. & ORSZAG, S. A. 1978 *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Mc Graw-Hill.
- BERRY, M. V. 1981 Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'. *Eur. J. Phys.* **2**, 91–102.
- BERTHOMIEU, G., GONCZI, G., GRAFF, P., PROVOST, J. & ROCCA, A. 1978 Low-Frequency Gravity Modes of a Rotating star. *Astron. & Astrophys.* **70**, 597–606.
- BRASSARD, P., PELLETIER, C., FONTAINE, G. & WESEMAEL, F. 1992 Adiabatic properties of pulsating DA White dwarfs. III. A finite-element code for solving nonradial pulsations equations. *ApJS* **80**, 725–752.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press.
- CHATELIN, F. 1988 *Valeurs propres de matrices*. Masson.
- CHLEBOWSKI, T. 1978 Nonradial oscillations of slowly rotating white dwarfs. *Acta Astronomica* **28**, 441–463.
- CLEMENT, M. J. 1981 Normal modes of oscillation for rotating stars. I. The effect of rigid rotation on four low-order pulsations. *Astrophys. J.* **249**, 746–760.
- CLEMENT, M. J. 1984 Normal modes of oscillation for rotating stars. II. Variational solutions. *Astrophys. J.* **276**, 724–736.
- CLEMENT, M. J. 1986 Normal modes of oscillation for rotating stars. III. Variational calculations with an improved set of basis vectors. *Astrophys. J.* **301**, 185–203.

- CLEMENT, M. J. 1989 Normal modes of oscillation for rotating stars. IV. Nonaxisymmetric variational solutions for $15M_{\odot}$ models. *Astrophys. J.* **339**, 1022–1037.
- CLEMENT, M. J. 1998 Normal modes of oscillation for rotating stars. V. A new numerical method for computing nonradial eigenfunction. *Astrophys. J.* **116**, 57–74.
- COHEN-TANNOUJJI, C., DIU, B. & LALOË, F. 1973 *Mécanique quantique*. Hermann.
- COWLING, T. G. 1941 The non-radial oscillations of polytropic stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **101**, 367–375.
- COWLING, T. G. & NEWING, R. A. 1949 The oscillations of a rotating star. *Astrophys. J.* pp. 149–158.
- COX, J. P. 1980 *Theory of stellar pulsation*. Princeton University Press.
- DE BOECK, I., VAN HOOLST, T. & SMEYERS, P. 1992 The subseismic approximation for low-frequency modes of the Earth applied to low-degree, low-frequency g-modes of non-rotating stars. *Astron. & Astrophys.* **259**, 167–174.
- DIERCKX, P. 1993 *Curve and surface fitting with splines*. Oxford University Press.
- DINTRANS, B. & RIEUTORD, M. 2000 Oscillations of a rotating star: a non-perturbative theory. *Astron. & Astrophys.* **354**, 86–98.
- DINTRANS, B. & RIEUTORD, M. 2001 A comparison of the anelastic and subseismic approximations for low-frequency gravity modes in stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **324**, 635–642.
- DINTRANS, B., RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 1999 Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell. *J. Fluid Mech.* **398**, 271–297.
- DZIEMBOWSKI, W. A. 1971 Nonradial oscillations of evolved stars. I. Quasiadiabatic approximation. *Acta Astronomica* **21**, 289–306.
- DZIEMBOWSKI, W. A. & GOODE, P. R. 1992 Effects of differential rotation on stellar oscillations: a second-order theory. *Astrophys. J.* **394**, 670–687.
- EDDINGTON, A. S. 1925 Circulating currents in rotating stars. *The Observatory* **48**, 73.
- ENDAL, A. S. & SOFIA, S. 1976 The evolution of rotating stars. I. Method and exploratory calculations for a $7m_{\odot}$ star. *Astrophys. J.* **210**, 184–198.
- ENGELBRECHT, C. A. 1986 Mode identification of Beta Cephei stars in NGC 3293. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **223**, 189–206.
- FITCH, W. S. 1973 The triply periodic white dwarf HL Tau-76. *Astrophys. J. Letters* **181**, L95–L98.
- FLETCHER, C. A. J. 1991 *Computational techniques for fluid dynamics. Volume I*. Springer-Verlag.

- FRIEDLANDER, S. 1982c Turning surface behaviour for internal waves subject to general gravitational fields. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21**, 189–200.
- FRIEDLANDER, S. 1985 Stability of the subseismic wave equation for the Earth's fluid core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **31**, 151–167.
- FRIEDLANDER, S. & SIEGMANN, W. L. 1982a Internal waves in a contained rotating stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **114**, 123–156.
- FRIEDLANDER, S. & SIEGMANN, W. L. 1982b Internal waves in a rotating stratified fluid in an arbitrary gravitational field. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **19**, 267–291.
- GANS, R. 1983 Boundary layers on characteristic surfaces for time-dependent rotating flows. *J. Applied Mech.* **50**, 251–254.
- GUTZWILLER, M. C. 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag.
- HANSEN, C. J., COX, J. P. & CARROLL, B. W. 1978 The quasi-adiabatic analysis of nonradial modes of stellar oscillation in the presence of slow rotation. *Astrophys. J.* **226**, 210–221.
- HANSEN, C. J. & KAWALER, S. D. 1994 *Stellar interiors*. Springer-Verlag.
- HÉNON, M. & HEILES, C. 1964 The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astron. J.* **69**, 73–79.
- JERZYKIEWICZ, M. 1978 Nonradial oscillations of the β Cephei star 12 Lacertae. *Acta Astronomica* **28**, 465–469.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. 1988 *Physique théorique. Tome 3. Mécanique quantique*. Mir Moscou.
- LEDOUX, P. 1945 On the radial pulsation of gaseous stars. *Astrophys. J.* **102**, 143–153.
- LEDOUX, P. 1951 The nonradial oscillations of gaseous stars and the problem of Beta Canis Majoris. *Astrophys. J.* **114**, 373–384.
- LEE, U. & BARAFFE, I. 1995 Pulsational stability of rotating main sequence stars: the second order effects of rotation on the nonadiabatic oscillations. *Astron. & Astrophys.* **301**, 419–432.
- LEE, U. & SAIO, H. 1987 Low-frequency oscillations of uniformly rotating stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **224**, 513–526.
- MAAS, L. & LAM, F.-P. 1995 Geometric focusing of internal waves. *J. Fluid Mech.* **300**, 1–41.
- MAAS L., BENIELLI D., SOMMERIA J. AND LAM F.-P. 1997 Observation of an internal wave attractor. *Nature* **388**, 557–561.
- MAEDER, A. 1997 Stellar evolution with rotation. II. A new approach for shear mixing. *Astron. & Astrophys.* **321**, 134–144.

- MAEDER, A. 1999 Stellar evolution with rotation IV: von zeipel's theorem and anisotropic losses of mass and angular momentum. *Astron. & Astrophys.* **347**, 185–193.
- MAEDER, A. & ZAHN, J.-P. 1998 Stellar evolution with rotation. III. Meridional circulation with μ -gradients and non-stationarity. *Astron. & Astrophys.* **334**, 1000–1006.
- MCGRAW, J. T. 1977 Southern hemisphere ZZ Ceti stars: the new variable L 19-2 and BPM 30551. *Astrophys. J. Letters* **214**, L123–126.
- MCGRAW, J. T. & ROBINSON, E. L. 1975 G 29-38 and G 38-29: two new large-amplitude variable white dwarfs. *Astrophys. J. Letters* **200**, L89–L93.
- MEYNET, G. & MAEDER, A. 1997 Stellar evolution with rotation. I. The computational method and the inhibiting effect of the μ -gradient. *Astron. & Astrophys.* **321**, 465–476.
- MOREL, P. 1997 Cesam: a code for stellar evolution calculations. *Astron. & Astrophys. Suppl. Series* **124**, 597–614.
- PEKERIS, C. L. 1938 Nonradial oscillations of stars. *Astrophys. J.* **88**, 189–199.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P. 1994 *Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- PROUDMAN, I. 1956 The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid Mech.* **1**, 505–516.
- RIEUTORD, M. 1987 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. I. steady flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **39**, 163–182.
- RIEUTORD, M. 1997 *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson.
- RIEUTORD, M. 1999 A note on inertial modes in the core of the earth. *Phys. Earth Plan. Int.* **sous presse**.
- RIEUTORD, M. & NOUI, K. 1999 On the analogy between gravity modes and inertial modes in spherical geometry. *Eur. Phys. J. B* **9**, 731–738.
- RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 1997 Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **341**, 77–99.
- RIOUAL, J.-C. 1997 Calcul de valeurs propres d'une matrice non-hermitienne et de grande taille par la méthode d'Arnoldi-Chebyshev. Développement du code ARNCHEB. *Rapport du stage de fin d'études ENSEEIHT*.
- ROBINSON, E. L. & MCGRAW, J. T. 1976 Observations of variable white dwarfs: one new variable and 35 nonvariables. *Astrophys. J. Letters* **207**, L37–L40.
- SAIO, H. 1981 Rotational and tidal perturbations of nonradial oscillations in a polytropic star. *Astrophys. J.* **244**, 299–315.

- SCHAEFFER, D. 1975 On the existence of discrete frequencies of oscillation in a rotating fluid. *Studies In Applied Math.* **54**, 269–274.
- SMITH, M. A. 1980 Pulsational mode-typing in line profile variables. III. Multimode behaviour in 12 Lacertae. *Astrophys. J.* **240**, 149–160.
- SMYLIE, D. & ROCHESTER, M. G. 1981 Compressibility, core dynamics and the subseismic wave equation. *Phys. Earth Plan. Int.* **24**, 308–319.
- SPIEGEL, E. A. & VERONIS, G. 1960 On the boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. J.* **131**, 442–447.
- STEWARTSON, K. 1957 On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.* **3**, 17–26.
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. Part 2. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.
- STEWARTSON, K. & RICKARD, J. A. 1969 Pathological oscillations of a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **35**, 759–773.
- SWEET, P. A. 1950 The importance of rotation in stellar evolution. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **110**, 548.
- TURNER, J. S. 1973 *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press.
- UNNO, W., OSAKI, Y., ANDO, H., SAIO, H. & SHIBAHASHI, H. 1989 *Non radial oscillations of stars*. University of Tokyo Press.
- VON ZEIPEL, H. 1924 The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses. *Mon. Not. R. astr. Soc.* **84**, 665.
- WINGET, D. E., NATHER, R. E., CLEMENS, J. C. & AL. 1991 Asteroseismology of the DOV star PG 1159-035 with the Whole Earth Telescope. *Astrophys. J.* **378**, 326–346.
- ZAHN, J.-P. 1992 Circulation and turbulence in rotating stars. *Astron. & Astrophys.* **265**, 115–132.
- ZAHN, J.-P. 1993 *Instabilities and turbulence in rotating stars*. Elsevier Science Publishers B. V.
- ZAHN, J.-P. 1994 Rotation and lithium depletion in late-type binaries. *Astron. & Astrophys.* **288**, 829–841.
- ZHANG, K. 1995 Spherical shell rotating convection in the presence of toroidal magnetic fields. *Proc. R. Soc. Lond.* **448**, 245–268.
- ZWILLINGER, D. 1998 *Handbook of differential equations*. Academic Press.