



HAL
open science

Optimisation de la commande modale en optique adaptative : applications à l'astronomie

Eric Gendron

► **To cite this version:**

Eric Gendron. Optimisation de la commande modale en optique adaptative : applications à l'astronomie. Instrumentation et méthodes pour l'astrophysique [astro-ph.IM]. Université Denis Diderot (Paris 7), 1995. Français. NNT : . tel-01418424

HAL Id: tel-01418424

<https://hal.science/tel-01418424>

Submitted on 23 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Denis Diderot – Paris VII

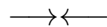
THESE

présentée
pour obtenir

Le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D. DIDEROT
Spécialité : ASTROPHYSIQUE ET TECHNIQUES SPATIALES

par

Eric Gendron



OPTIMISATION DE LA COMMANDE MODALE EN OPTIQUE
ADAPTATIVE : APPLICATIONS A L'ASTRONOMIE

soutenue le 13 Mars 1995 devant la Commission d'examen

Guy MONNET	Président
Pierre LENA	Directeur de thèse
Gerry GILMORE	Rapporteur
François RODDIER	Rapporteur
Jean-Paul GAFFARD	
Gérard LELIEVRE	
Christian PERRIER	
Gérard ROUSSET	

Table des matières

Introduction	4
1 Propriétés et limites de l'Optique Adaptative	10
1.1 Propriétés de la phase	13
1.1.1 Turbulence de type Kolmogorov	13
1.1.2 Les polynômes de Zernike et la turbulence atmosphérique . . .	16
1.1.3 Turbulence de type "marche aléatoire"	20
1.1.4 Les critères de qualité de l'image	24
1.1.5 Tilt, pente moyenne et autres basculements	30
1.1.6 La phase oui, mais sans piston	34
1.1.7 Les propriétés temporelles	37
1.2 Bruits de détection	44
1.2.1 Les phénomènes non paramétrables	46
1.2.2 Le fond de ciel	48
1.2.3 Seuillage en régime de bruit de photons	50
1.2.4 Conditionnement d'une matrice d'interaction	58
1.2.5 Propagation du bruit de mesure à travers une matrice	61
1.3 Sous-échantillonnage / sous-modélisation / repliement modal / cou- plage modal / discrétisation / erreur d'estimation	65
1.3.1 Généralités	65
1.3.2 Le repliement	68
2 Construction de la commande modale	75
2.1 Formalisme pour une commande modale	76
2.1.1 Equivalence entre front d'onde et vecteur	76
2.1.2 Décomposition sur une famille non orthonormée	78
2.1.3 Outils de création d'une base	83
2.2 Différentes bases de modes	86
2.2.1 Pourquoi chercher dans l'espace du miroir ?	88
2.2.2 Les bonnes propriétés	88
2.2.3 Efficacité de correction	90
2.2.4 Efficacité de l'analyse	94
2.2.5 Discussion sur la construction des modes, problème du tilt . .	95

2.3	Article A&A	97
2.4	Compléments sur l'optimisation du contrôle modal	108
2.4.1	Magnitude limite d'un mode	108
2.4.2	Choix de la fréquence d'échantillonnage	109
2.5	Fonctions de transfert du système	111
2.6	L'anisoplanétisme	116
2.6.1	Calcul du domaine d'isoplanétisme modal	117
2.6.2	L'optimisation modale et l'anisoplanétisme	118
2.7	Matrices de reconstruction optimales	121
2.7.1	Estimateur optimal	122
2.7.2	Exemples, cas particuliers	124
2.7.3	Calcul de C dans le cas général	127
3	Résultats expérimentaux	129
3.1	Files circulaires	130
3.2	Interpréter les données du Hartmann	130
3.2.1	Analyse de la turbulence	131
3.2.2	Dépouillements statistiques	145
3.3	Le bruit de mesure	151
3.3.1	Quelques statistiques	151
3.3.2	Quelques cas particuliers	153
3.4	Article: Résultats de l'algorithme d'optimisation modale.	155
3.4.1	Article: Astronomical adaptive optics II: Experimental results of an optimized modal control	155
3.4.2	Quelques compléments	170
3.5	Propriétés de la phase corrigée	172
3.5.1	Spectre temporel des fluctuations corrigées	172
3.5.2	Qualité temps réel des images	174
3.5.3	Reconstruction de la réponse impulsionnelle, le défi	176
3.6	Images	177
3.7	L'hypothèse de la turbulence gelée	182
3.7.1	Généralités	182
3.7.2	Article: Mise en évidence expérimentale de l'hypothèse de Tay- lor.	183
3.8	Optimiser, avant d'optimiser modalement	191
3.8.1	Généralités	191
3.8.2	Choix de l'étoile de calibration, méthode d'observation	195
3.8.3	Les paramètres importants	198
	Conclusion	201
4	Annexes	204
4.1	Seuillage	204

4.2	Projection d'une déformée symétrique de révolution sur les modes de Zernike	208
-----	---	-----

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers l'équipe ComeOnPlus, et tout particulièrement envers Pierre Léna qui m'a permis d'y entrer et m'a suivi, avec patience, au long de cette thèse. Un grand merci à Laserdot et à l'ANRT pour avoir accepté de me financer pendant 3 ans. Mes premiers balbutiements dans le domaine de l'optique adaptative au bâtiment Lyot¹ (qui en ces temps reculés n'arborait pas encore cet acronyme), je les ai faits grâce à la compagnie de Jean-Gabriel C., à qui je dois beaucoup: dommage qu'il ait du partir si vite du projet. J'ai profité avidement des conseils de Fabien M.. J'ai eu plaisir à discuter avec Vincent CdF., Jean-Marie M., Eric T., Sen W., et j'ai eu au Despa le soutien de Pierre G., Daniel R., François L. ... et bien d'autres; merci à Claude M. pour faire régner dans le bâtiment une bonne humeur permanente; Jacqueline T., Agnès F., Christine D. au secrétariat qui ont enduré mes retards administratifs ... merci à tous et toutes.

Je veux dire à mon pote François R., avec toute la pudeur des amitiés viriles, que les mois passés ensemble au bâtiment Lyot restent pour moi les plus riches qui soient.

A Laserdot je remercie Jean-Paul G. de m'avoir accueilli, je n'oublie pas Corinne B., Pascal J., Jean-Marie L., Patrick G., ainsi que tous les gens que j'ai pu rencontrer et qui ont fait preuve de sympathie envers le thésard erratique.

Gérard R. n'a jamais épargné son temps pour passer avec moi des heures de discussions et de formation sur la manip; grâce à lui j'ai pu par la suite la prendre en main. Grâce à lui, à Pierre-Yves M., Phillipe C., Didier R., Thierry M., j'ai pu installer et tester mes programmes, lors de cette fameuse mission d'Avril 91. Certains d'entre eux ont supporté mes phases d'apprentissage du C et de 'vi' !... En effet Jean-Marc (C.), j'aurais moi aussi aimé trouver plus de temps pour travailler avec toi: il faudra que nous y remédiions un jour.

Puis vient le temps du service militaire qui fut en fait civil, merci à Fritz M. pour m'avoir accueilli à l'Eso pendant 16 mois, à Norbert H., Bertrand K., Michel F., Erika S., Michèle P., Gérardo A., Bernard B., Jean Q., Marc Z.... je suis sûr d'oublier ici un grand nombre de personnes. Je regrette de n'avoir pas travaillé plus tôt avec Oskar vdL.; j'ai été impressionné par l'efficacité et la qualité scientifique de son travail. Enfin, j'espère que Fredo et Tonton Zig savent à quel point ces mois passés auraient été fades sans leur indispensable présence.

¹Laboratoire d'Interférométrie Infrarouge et d'Optique Turbulente

De retour au bâtiment Lyot après cette absence, j'ai travaillé avec Olivier L., Jean-Pierre V., Guy P., Olivier M. Qu'ils sachent tous les quatre combien je les apprécie. Merci à Jean-Luc B. d'avoir su assurer la gestion un peu lourde d'un contrat qui nous dépassait tous.

Bien qu'il ait totalement perdu l'usage de la lecture hors d'une fenêtre X-Windows, je tiens à remercier DL² sur cette feuille A4 pour avoir créé les bases d' "optimC"³, pour avoir géré le système informatique du bâtiment. Je tiens à ne pas le remercier pour m'avoir appris de force `emacs` et `Tcl`⁴.

Enfin je dois dire merci et bravo à tous les gens qui ont eu l'amabilité d'accepter de lire et juger ce pavé un peu indigeste, merci à Gerry Gilmore et François Roddier pour la rapidité de leur rapport, merci à Jean-Paul Gaffard, Gérard Lelièvre, Guy Monnet, Christian Perrier, merci à Pierre Léna et Gérard Rousset pour les relectures soignées de ces 200 pages.

Merci enfin à mes parents pour m'avoir donné la possibilité de faire ces études.

Avec ces remerciements je viens de passer en revue quatre années, et une foule de gens. Je voudrais bien que les 4 ans qui viennent ressemblent à ces 4 ans passés. Comme je l'ai écrit dans les *news*⁵ à la fin de la dernière nuit de la dernière mission ComeOnPlus effectuée dans le cadre de cette thèse, *"La nuit vient à finir et le désert impose sa masse sombre au rougeoiement qui naît. Le vent cesse, et comme chaque matin le même cri du même oiseau se perd dans le vide et se mêle au silence. La plaine s'étire enfin, le monde inspire et monte vers l'aurore, l'horizon hurle ses couleurs. Il fera bientôt jour, et le spectacle du jour, comme hier et comme demain, explose dans les prunelles fatiguées de l'observateur qui doit maintenant penser à faire le backup des données. Comme hier et comme demain, alors que pourtant ce run est si particulier. Rien à voir avec un run habituel. Je regretterai les aurores de La Silla, je regretterai cette foutue belle manip."*

Vous aurez compris que si cette thèse représente une masse importante de travail, j'ai toujours pris du plaisir à travailler avec l'équipe ComeOnPlus, et quatre ans après le début de la thèse cette petite larme en est le témoignage; cette manip n'aurait pas été aussi belle sans l'élan permanent qui lui a été conféré par une équipe aussi soudée et motivée. Prions pour qu'elle reste ainsi, mais surtout merci à ceux qui font des efforts pour cela.

²Laurent D., marque déposée, ©1990

³Programme de gestion souple de fonctions dans lequel j'ai pu implanter les fonctions de traitement de données de front d'onde, dont l'optimisation modale

⁴Quoique je nourrisse secrètement l'espoir d'arriver à ne pas l'apprendre totalement

⁵Texte, écrit de façon rituelle, envoyé par courrier électronique à une vaste liste de distribution au cours des missions ComeOnPlus, et décrivant les résultats et l'état d'avancement de ladite mission. Le contenu du texte est écrit sous l'emprise conjuguée de la fatigue et des humeurs du moment. Ces dernières, piannotant sur la gamme allant de l'extase plannante à la rage forcenée en passant par la tourista géante, confèrent en général au discours un style inhabituel pour un texte scientifique, oscillant entre poésie, mauvais goût, humour pas drôle et faute d'orthographe.

Introduction

L'air chaud qui se dégage au dessus du feu de bois semble acquérir une consistance, il apparaît presque palpable, à faire ainsi ondoyer et vibrer les formes devant lesquelles il s'élève, à jouer ainsi avec la lumière, la chaleur et les remous. C'est le jeu préféré de l'air, et ce dernier est très turbulent, n'en déplaise à l'astronome. Le mélange de masses d'air de températures différentes n'exerce pas seulement son art sur la lumière au-dessus des feux de bois ou des cheminées. Il s'escrime depuis des millénaires à faire scintiller les étoiles, qui apparaissent à l'astronome sous une forme tenant plus du feu follet que de l'objet astronomique. Le phénomène est bien connu de l'astronome amateur : le corps du flexible de déclenchement de l'appareil photo solidement coincé entre l'index et le majeur, le pouce armé sur le déclencheur dans la position du percuteur, l'oeil scrute les infimes frissons qui courent sur le limbe de la lune à son premier quartier. Ils vont s'arrêter. Une seconde, peut-être deux ... pas plus. L'atmosphère reprend son souffle et la turbulence qui l'animait semble alors se figer. C'est dans cet instant ténu, dans cette seconde immobile, que le judas écrase le poussoir en rompant le silence, pour réaliser la photo exceptionnelle. Mais il faut être vif, avoir l'oeil exercé, ça ne dure pas, vous racontent ceux qui ont déjà réussi l'exploit.

L'atmosphère turbulente a cela de positif qu'elle met les gens, les équipes, les instruments et les connaissances au même niveau, les anxieux peuvent être rassurés. La résolution est limitée à une valeur constante pour tous, partout la même, pour tous les télescopes, par décret autoritaire et unilatéral émanant de la bonne volonté du ciel, chacun s'y soumettant bon gré, mal gré. Bien sûr il y a les fraudeurs, quelques-uns qui s'entêtent à aller se percher quelques milliers de mètres au-dessus des vertes prairies pour se défaire de ces mêmes milliers de mètres d'air turbulent. Mais qu'y gagnent-ils ? L'astronomie aurait-elle pu s'arrêter là, au sommet d'une montagne rasée, recueillant des photons dont on n'aurait jamais pu savoir s'ils venaient d'ici plutôt que de la seconde d'arc d'à côté ? Ce serait mal connaître Horace W. Babcock (1953) et Vladimir P. Linnick (1957), qui émettent indépendamment dans les années 50 l'idée d'un système ingénieux qui n'est pas sans rapport avec le reste de ce document; certainement pas parce qu'il est ingénieux, mais parce qu'il s'agit d'un système d'optique adaptative.

L'idée de Babcock est que si l'image au foyer d'un télescope nous apparaît dis-

tordue, il doit exister un moyen de lui redonner forme si l'on connaît la manière dont elle a été déformée. Pour fixer les idées, on peut imaginer que la transformation subie par les images stellaires après la traversée de l'atmosphère turbulente est similaire à l'image de l'astre que renverrait un miroir déformant. En conséquence, il suffit de trouver le miroir déformant "inverse" de celui auquel équivaut la turbulence pour rétablir l'image originale. Mais l'atmosphère évolue rapidement au cours du temps : la déformation imprimée à l'onde lumineuse évolue en quelques dizaines de millisecondes. Ce n'est donc pas un miroir déformant dont on aura besoin pour corriger le front d'onde, mais plutôt un miroir *déformable*, de manière à évoluer conjointement avec les facéties de la turbulence atmosphérique. Il reste maintenant à analyser la perturbation qui a pris naissance au sein des multiples strates atmosphériques, pour être à même de piloter correctement notre miroir déformable. Cette analyse ne peut se faire sur l'image finale de l'astre déformé, car l'information sur la structure exacte de la perturbation y est perdue. L'analyse se fait en amont. Tel et tel rayons lumineux, issus d'un point donné de l'astre observé, parallèles au départ puisque l'astre est optiquement à l'infini, sont amenés à perdre leur parallélisme pendant leur traversée des couches turbulentes. Ils entrent donc dans l'ouverture du télescope, la pupille, sous des incidences différentes : c'est cette propriété que l'analyseur utilise pour sonder la perturbation. La pupille du télescope est donc optiquement découpée en petites zones, ou sous-pupilles, à l'intérieur desquelles est analysée la direction précise d'arrivée des photons. Physiquement, l'analyseur se compose essentiellement d'un réseau de microlentilles dont chacune, définissant une sous-pupille, forme une image individuelle de l'objet ; chaque image se meut d'un mouvement propre par rapport à ses voisines, sous l'influence des perturbations. Ce réseau d'images tremblotantes est recueilli par un détecteur dont le signal, traité en temps réel par un ordinateur puissant, servira à contrôler le miroir déformable. Malheureusement lorsque Babcock écrit cette idée en 1953, la technologie des miroirs déformables, des ordinateurs temps réel et des détecteurs n'est pas prête pour faire face aux performances requises. Mais pendant vingt années, l'idée germe et prend racine.

C'est en 1977 aux Etats-Unis, que Hardy (Hardy et al. 1977) met au point le premier système d'optique adaptative. On sait maintenant que les développements dans le domaine furent principalement soutenus par les programmes de défense; aussi l'optique adaptative ne prend-elle pas d'emblée le chemin de l'astronomie. Puis en 1986 en France naît le système COMEON , opérationnel en 1989, dédié à l'astronomie. Comme veut l'indiquer l'acronyme, COMEON est développé techniquement par la société Laserdot (ex laboratoires CGE), l'Observatoire de Meudon, l'European Southern Observatory (ESO) et l'ONERA. Le but est de valider le principe de l'optique adaptative en astronomie, et de faire de cette expérience un prototype pour le *Very Large Telescope* (VLT) de l'ESO. En effet, l'impulsion initiale de ce programme (Roddier & Léna 1984) lui fut communiquée avant tout en raison de la nécessité de démontrer la faisabilité du cophasage complet des télescopes pour l'interférométrie, celle-ci étant une condition *sine qua non* du programme VLT. C'est

pourtant dans le domaine de l'imagerie que COMEON s'exprimera réellement par la suite. Les premiers résultats en imagerie (Rousset et al. 1990, Rigaut et al. 1991) sont encourageants et le but du simple prototype sera dépassé. COMEON évolue alors progressivement vers COMEONPLUS . Alors que COMEON était un système comptant 20 sous-pupilles et un miroir déformable à 19 actionneurs, COMEONPLUS aura 32 sous-pupilles, 52 actionneurs, un ordinateur plus puissant et grâce aux Laboratoires d'Electronique Phillips (LEP), nouveaux partenaires du consortium, il sera doté d'un détecteur (Electron-bombarded CCD, ou Ebccd) des plus performants. Enfin en 1995, COMEONPLUS se transforme en ADONIS (ADaptive Optics Near Infrared System), qui voit encore les performances de son ordinateur s'accroître, et se munit d'un système de gestion intelligent qui l'amènera au rang d'un véritable instrument dédié à l'observation astronomique.

Aujourd'hui dans le monde, pas moins de 6 autres projets ont vu le jour et 13 sont en phase de réalisation. L'optique adaptative a tenu ses promesses, et le développement des grands télescopes de cette fin de siècle ne se fera pas sans elle (Thompson 1994, Fontanella et al. 1991). Le coût d'une optique adaptative est dérisoire devant le coût des télescopes, l'amélioration de la qualité des images est sans pareille, le gain apporté est profitable dans tous les domaines: imagerie (Léna 1994b) mais aussi interférométrie (Rousset et al.1991, Mariotti 1993), spectroscopie, coronographie (Malbet et al. 1993), techniques speckle.

Sur ce tableau, un peu trop parfait, se profile une ombre. L'optique adaptative utilise le flux provenant de l'objet observé pour analyser le front d'onde perturbé. Mais un point qui caractérise bien le monde des objets stellaires est la faiblesse du flux lumineux reçu. L'optique adaptative doit découper spatialement le flux dans les différentes sous-pupilles, et temporellement en tranches de quelques millisecondes pour cerner l'état de l'atmosphère à un moment donné. Malgré des détecteurs capables de fonctionner en comptage de photons, il existe un seuil à partir duquel l'optique adaptative ne peut plus rien car le flux reçu dans ce petit laps de temps et d'espace est trop faible. A ce concept est associé le nom de magnitude limite du système, que l'on cherchera toujours à faire reculer en astronomie. Quels sont les moyens ? Certes on peut améliorer les détecteurs, ou l'optique, mais lorsque l'on possède déjà les meilleurs composants qui soient il faut se résoudre à limiter les performances du système: augmenter le temps d'intégration de l'analyseur de front d'onde (donc perdre en résolution temporelle), augmenter la surface des sous-pupilles (donc en réduire le nombre), en un mot accroître ce petit volume spatio-temporel qui sert de base à l'analyse de manière à ce que suffisamment d'information y soit contenue, même à faible flux. Mais les conséquences semblent dramatiques: il est, dans l'état de l'art, difficile d'imaginer de changer le nombre de sous-pupilles pour chaque objet, ce qui imposerait de revoir à chaque fois le nombre d'actionneurs du miroir. En un mot, c'est le dimensionnement entier du système qui semble en cause: soit le système est peu ambitieux et la magnitude limite sera élevée, soit le système dans son état brut est très performant à fort flux, doté d'un grand nombre d'actionneurs,

mais il ne pourra pas aller vers les magnitudes élevées. Telle est l'approche qui se présentait à moi lorsque j'ai débuté cette thèse.

Le contenu de cette thèse s'inscrit dans ce contexte: quels sont les paramètres généraux qui dimensionnent le système d'optique adaptative, et comment les gérer et les optimiser pour que celui-ci soit adapté aux conditions d'observations; quelle sera alors la performance atteinte dans tel ou tel cas de figure. Un outil puissant pour l'étude des perturbations atmosphériques est la décomposition modale (Wang & Markey 1978). C'est-à-dire que le front d'onde perturbé sur la pupille peut être exprimé comme une somme pondérée de différents modes spatiaux, dont les rapports signal sur bruit et les comportements temporels varient en fonction du mode et des conditions d'observation (Léna 1990). Au départ utilisée comme un moyen d'étude, la décomposition modale, appliquée au système, peut devenir un moyen d'action: la commande modale. Associée à l'optimisation dont je parlais au début de ce paragraphe, je lui donne le nom d'*optimisation modale*, et elle constitue le fil conducteur de cette thèse. Enfin, l'objet de travail et de test qui lui sert de support est l'instrument COMEONPLUS, installée sur le télescope de 3.60 m de L'ESO à l'Observatoire de La Silla (Chili).

Conjointement, la recherche autour de ce thème m'a poussé à comprendre plus en détail quelques-uns des mécanismes de l'analyse modale et des concepts associés. Cette thèse n'a donc pas été écrite dans le seul but de savoir optimiser une expérience particulière, mais aussi de savoir analyser les comportements et les vices d'un système à travers une analyse modale, de pouvoir prévoir ses comportements, de pouvoir interpréter les résultats expérimentaux correctement, de ne plus dire "nous ne savons pas" face à un problème de reconstruction, face à certains modes plus ou moins mal corrigés, face à un spectre dont la forme est inattendue, face à une méthode de reconstruction à choisir, face à un système qu'il faut dimensionner, face à une turbulence qui n'a jamais entendu parler de Monsieur Kolmogorov, face à un bruit de mesure plus grand que prévu, face à des images exécrables malgré la qualité du seeing, et face à un nombre croissant d'astronomes demandeurs d'images hautement résolues.

Cette thèse comprend trois chapitres.

Dans le premier chapitre j'analyse le mal avant de parler du remède; je parle de l'atmosphère turbulente avant de parler de l'optique adaptative. Je décris les connaissances générales sur la turbulence atmosphérique, j'ajoute quelques remarques personnelles. J'y parle également des propriétés de l'image non corrigée; des liens qui unissent image et erreur de phase. Je décris également les propriétés temporelles de la phase turbulente telles qu'on les connaît et j'y ajoute les propriétés temporelles de cette même phase vue à travers le filtre que représente notre analyseur. Puis j'aborde les problèmes de bruit de mesure causés par la limitation du flux; ils sont cruciaux pour le problème qui nous intéresse. Je rappelle aussi les règles de propagation du bruit à travers une matrice de commande. Enfin le dernier paragraphe est dédié à

l'analyse du repliement spatial dans la reconstruction du front d'onde.

Le deuxième chapitre traite de la construction de la commande modale, et de son optimisation. Pour optimiser et adapter le système face aux conditions d'observation, je joue sur une adaptation spatiale à travers le choix d'une base de décomposition modale permettant de différencier les comportements des fréquences spatiales mises en jeu, et je joue sur l'aspect temporel à travers le choix d'une bande passante de correction adaptée à chaque mode spatial. L'ensemble de cette optimisation doit permettre d'ajuster les capacités de correction du système de manière à cerner les composantes spatiale et temporelle du signal turbulent réellement utiles, noyées au milieu du bruit de mesure. De cette façon, le système devient en quelque sorte à géométrie variable, pouvant prendre les formes d'un système correcteur de tilt le plus simple, jusqu'au système complet utilisant chacun de ses degrés de liberté lorsque les conditions de flux et de turbulence le permettent. Je décris tout d'abord le formalisme associé à l'aspect modal qui sera utilisé tout au long de ce chapitre. Je traite ensuite du choix de la base de modes utilisée, ainsi que de la justification de la séparation des domaines spatiaux et temporels dans l'algorithme de l'optimisation modale. Ce dernier sera exposé dans l'article A & A "Astronomical adaptive optics: I. Modal control optimization", qui constitue le coeur de ce chapitre. Je compléterai ensuite cet article par des précisions sur l'aspect modal de la magnitude limite, sur les fonctions de transfert temporelles du système et sur l'optimisation modale face au problème de l'anisoplanétisme.

Dans le troisième chapitre j'applique l'optimisation modale à un instrument réel: COMEONPLUS . La méthode d'application que j'ai choisie a conduit à mettre en oeuvre l'algorithme particulier décrit au chapitre précédent; celui-ci prend sa source dans l'étude préalable des données issues de l'analyseur de front d'onde que j'ai pu effectuer. Je voudrais faire parcourir au lecteur certains points de cette analyse, et le conduire à travers les obstacles auxquels j'ai été confronté; je montre comment l'algorithme de l'optimisation modale les détourne. Je ferai une large parenthèse sur l'analyse expérimentale du bruit de mesure, puis je présenterai un article soumis à A & A "Astronomical adaptive optics: II. Experimental results of an optimized modal control", sur les résultats expérimentaux de la commande modale optimisée; c'est le centre du chapitre. Je compléterai cet article par des précisions sur les propriétés de la phase corrigée par l'optique adaptative, et par un aperçu des images corrigées et de la façon dont elles sont liées aux conditions d'observation (et donc de correction). Je comparerai souvent les prédictions formulées par l'optimisation modale aux résultats. Puis je parlerai d'un sujet particulier dont la mise en évidence a été effectuée grâce aux dépouillements des données de l'analyseur: il s'agit de l'hypothèse de la turbulence gelée. Je le traiterai à travers un article, "Evidence for a Taylor atmospheric turbulence observed with adaptive optics", soumis à *Experimental Astronomy*. Pendant les semaines où j'ai eu l'occasion de faire fonctionner un système d'optique adaptative, j'ai dû conseiller les astronomes, j'ai dû réfléchir à certaines méthodes d'optimisation non plus modales, mais concernant l'optimisation

générale du système. C'est de cet ensemble de détails dont je parle pour conclure.

NOTE: Les paragraphes rappelant des notions générales, des propriétés déjà connues à travers la littérature ou des concepts non originaux sont écrits dans une fonte droite; le reste du texte est imprimé dans la fonte habituelle.

Chapitre 1

Propriétés et limites de l'Optique Adaptative

Entrons dans le domaine de l'optique adaptative, ce chapitre est là pour nous en ouvrir les portes. Non pas tant les portes magistrales, ouvrant déjà vastement leurs larges battants sur les impeccables perspectives d'ancestrales lois créées par quelques Titans de la turbulence atmosphérique, je n'en ai point l'ambition. Le circuit que je propose dans ce chapitre passe plutôt par les portes dérobées, côté cour ou côté jardin, les coulisses, l'envers du décor.

Dans un premier temps, je rappelle quelques propriétés connues de la phase turbulente. Ces notions étant par la suite incessamment citées et utilisées, j'ai voulu en reporter ici une partie, même si l'on en trouve moult références et rappels dans l'ensemble de la littérature gravitant autour du thème de la turbulence atmosphérique. Ces notions ont pour nom les propriétés de la turbulence de type Kolmogorov. Irrémédiablement associés à celle-ci depuis 1976, j'en parlerai, les polynômes de Zernike entrent dans l'histoire –la nôtre–, et puisque leur nom est mentionné 98 fois dans cette thèse je me devais il me semble d'en faire la présentation; présentation d'eux-mêmes, comme de leurs propriétés mathématiques et de leurs caractéristiques vis-à-vis des perturbations. Ces notions sont connues, mais je ne pourrai m'empêcher d'ajouter quelques précisions qui, si elles apparaissent au travers des équations données dans la littérature, peuvent cependant ne pas immédiatement sauter aux yeux du lecteur. Certaines propriétés soulignées pourront paraître anodines: je m'efforcerai d'en montrer l'importance à travers des exemples.

Puis j'exposerai quelques propriétés nouvelles, celles de l'outil de travail "Zernike" face à une turbulence de type marche aléatoire. Pourquoi cette écart soudain, pourquoi faire faux bond à l'option de sécurité, la saine turbulence Kolmogorov ? Parce que notre but est de comprendre avant tout et que l'on sait –au moins par expérience–, que la nature a plus d'un tour dans son sac pour faire faux bond à nos projets. Je ne veux pas attendre d'avoir atteint le chapitre 3 sur les résultats expérimentaux

pour m'apercevoir que la turbulence peut ne pas être de type Kolmogorov. Pour être capable de raisonner avec les atouts en main, donnons-nous les outils nécessaires.

Enfin il sera temps de glisser l'œil à l'oculaire, je veux dire d'avoir un aperçu de l'image. Thème connu, je ne l'aborderai pas différemment des célèbres auteurs qui l'ont fait avant moi: l'image s'aborde plus aisément dans le plan de Fourier. Quelques brefs rappels sur la FTM, et je passerai à la forme de l'image longue pose dont je donnerai une nouvelle expression approchée. Je terminerai ce paragraphe par le rapport de Strehl, dont l'estimation pose souvent les pires problèmes puisque l'on ne peut en général y avoir accès sans une simulation complète de l'image et donc du processus qui l'a formée. J'en donnerai donc, là encore, une nouvelle expression approchée et j'exposerai quelques caractéristiques de son comportement en fonction de l'erreur de phase puisque c'est cette dernière grandeur que je manie le plus fréquemment ici.

Mon but dans cette thèse a été de converger vers une méthode de contrôle du miroir qui puisse être vue comme étant modale, puis d'optimiser son action. Dans la recherche de ce but, il a été nécessaire d'analyser les différences entre des méthodes de reconstruction variées, et en particulier la possibilité de division de la correction en différents modes. Les modes de basculement ont immédiatement pris dans cette optique une place particulière, étant donné la disproportion entre leur simplicité apparente et la complexité de reconstruction. Maintenant, le concept de contrôle modal autorise facilement le contrôle de n'importe quel mode sur un ou plusieurs miroirs, séparément ou pas. Cependant, ce n'est pas pour autant qu'il faut renoncer à comprendre ce que recèle le terme de basculement, pourquoi on ne mesure pas le tilt en mesurant le déplacement de l'image mais plutôt la pente moyenne, laquelle revêt un caractère modal plus large qu'il n'y paraît. C'est donc une parenthèse sur un des modes les plus basiques qui soit en optique adaptative que je fais dans cette section, et je citerai une application amusante liant le tilt aux mesures du Hartmann.

Après cette digression et pour en terminer avec les propriétés spatiales de la phase dans le plan pupille je parlerai du mode ignoré du plus grand nombre en optique adaptative, le mode piston. Non par pitié subite pour le rejeton, mais parce que j'avoue moi aussi l'avoir ignoré jusqu'à rencontrer des problèmes de convergence dans le calcul d'une matrice de covariance de phase. Sachant que ledit calcul sera exposé au chapitre 2, j'ai préféré prévenir que guérir, et certaines conclusions sur la phase sans piston, non dénuées d'intérêt, seront exposées. Je montre par exemple que la variance de phase non corrigée ne peut pas être uniforme sur la pupille.

Je termine la section sur la phase par les propriétés temporelles: l'optimisation modale requiert en effet des connaissances dans tous les domaines. Je rappellerai les propriétés générales telles que l'on peut les trouver dans la littérature, et à partir de celles-ci je pousserai le développement dans une direction nouvelle, pour les extrapoler aux propriétés de la même phase, mais vue à travers notre analyseur. Ce paragraphe est absolument nécessaire pour interpréter correctement nos données expérimentales.

Ce dernier point évoqué fera la transition avec la section suivante, puisque c'est ainsi que s'achève la visite du côté noble du plan des microlentilles. A partir de maintenant nous suivons les photons et passons du côté instrumental pour traiter en particulier du bruit de mesure. Comme toujours pour commencer, je parlerai de l'état de l'art dans le domaine, puis je commenterai en ajoutant des remarques directement puisées dans l'expérience que COMEONPLUS m'a permis d'acquérir. Que le lecteur me pardonne ces digressions: il s'apercevra en lisant le chapitre 2 que ce bruit de mesure à propos duquel je développe ici tant d'arguments théoriques est dans la pratique évalué par une mesure et non grâce à l'appui de ces arguments. Pourtant le but de ce paragraphe est triple. C'est d'abord une mise en garde, car il démontre la précarité des formules classiques d'évaluation du bruit. C'est ensuite un support pour celui qui doit développer un nouveau système: il y a dans ce chapitre matière à réflexion et j'espère avoir développé suffisamment d'arguments pour permettre à un utilisateur potentiel d'orienter ses investigations dans la bonne direction. C'est enfin une aide, pour comprendre l'influence des différents paramètres qui conditionnent ce bruit de mesure et savoir les gérer correctement: dans un système d'optique adaptative, dont la performance est intégralement suspendue au bruit de mesure, il ne sert à rien de développer force algorithmes d'optimisation si l'on ne commence pas par optimiser les plus simples détails, j'aurai l'occasion d'en reparler. Le bruit de mesure en fait partie, et je le considère comme partie intégrante de l'optimisation modale. Et puisque le bruit entre dans le système, suivons-le.

Nous arrivons alors à la matrice de commande, que le bruit traverse en subissant la reconstruction, pour en ressortir finalement sous la forme d'une erreur de phase. Cette matrice de commande, déterminante dans la propagation du bruit, n'est que le reflet de la matrice d'interaction du système. Je parlerai au paragraphe 1.2.4 de la qualité des matrices d'interaction sur les polynômes de Zernike, avec en arrière-pensée l'idée de s'en servir pour effectuer des dépouillements a posteriori sur la phase, pour caractériser la turbulence, et sachant que les conclusions que je tire sur ces matrices sont également valables pour les matrices d'interaction du système réel. Enfin, je rappellerai les concepts de la propagation du bruit à travers la matrice de commande elle-même, en reprenant les idées déjà connues dans un premier temps, puis je comparerai et discuterai la propagation du bruit lorsque varie le nombre de sous-pupilles.

Le tout dernier paragraphe de ce chapitre sera dédié principalement au repliement spatial lors de la reconstruction. Celui-ci est évoqué dans l'article Astronomy & Astrophysics présenté dans la section 2.3, mais sans plus. J'ai jugé utile de le développer ici. Il entre parfaitement dans le champ d'application du contrôle modal, et c'est un problème sous-jacent dans tout système d'optique adaptative. Si son influence n'a pas encore éclaté au grand jour, c'est parce que d'autres problèmes le masquent –le bruit de mesure en particulier. Au fur et à mesure des progrès de l'optique adaptative, c'est ce phénomène qui limitera les performances. Je ne pouvais le passer sous silence ici, d'autant que ce phénomène est peu cité dans la littérature et que s'il peut

rester dans l'ombre pour les petits systèmes, il en sera autrement pour des systèmes plus importants, tel que le VLT.

Alors, poussons la porte de l'optique adaptative, essayons-nous les pieds sur le paillason avant d'entrer car c'est là un noble domaine, et surtout ... attention à la marche.

1.1 Propriétés de la phase

1.1.1 Turbulence de type Kolmogorov

Je rappelle dans cette section quelques propriétés connues de la phase turbulente selon Kolmogorov, car ces notions seront par la suite incessamment citées et utilisées. La question de la validité de l'hypothèse Kolmogorov a été maintes fois posée à l'occasion de colloques divers. La réponse est pour certains affirmative sans réserve possible, alors que la prudence inspire à d'autres un ton plus modéré ; trois articles illustrent la discorde qui peut encore régner sur le sujet. Le premier, de T. Stewart Mc Kechnie (Mc Kechnie 1992) paraît dans JOSA en Novembre 1992. Il remet en question quasiment toutes les propriétés bien connues de la phase selon Noll (Noll 1976) et Roddier (Roddier 1981). En Janvier 1993 Tatarskii (Tatarskii & Zavorotny 1993) réagit à ce premier article et oppose à Mc Kechnie une sévère riposte. Mc Kechnie (Mc Kechnie 1993) n'attendra que quelques mois pour contre-attaquer: les deux derniers papiers paraîtront dans les mêmes Communications du JOSA de Novembre 1993, laissant finalement le lecteur dans l'embarras. Voici un bref résumé des lois de la turbulence selon Kolmogorov, dont il vaut mieux être informé avant d'avoir à faire un choix.

L'atmosphère terrestre est le siège de mélanges de masses d'air de vitesses et de températures différentes. L'énergie née de la friction à l'interface de ces masses d'air se dissipe en faisant naître un écoulement turbulent où des tourbillons chaotiques d'air autorisent cette dissipation par scission progressive en tourbillons de taille inférieure. Plusieurs grandeurs caractérisent cet écoulement. En effet, il existe une échelle maximale au-delà de laquelle les tourbillons ne sont plus isotropes ou deviennent inexistant, c'est l'échelle externe, notée L_0 . A l'inverse, il existe une échelle minimale l_0 en dessous de laquelle les tourbillons cessent de se scinder et dissipent leur énergie par viscosité. Entre ces deux limites, Kolmogorov (1941) définit le domaine inertiel dans lequel la turbulence, développée tridimensionnellement, est homogène et isotrope, et dans lequel la densité spectrale d'énergie varie en $k^{-11/3}$, k étant la norme du vecteur tridimensionnel de fréquence spatiale \vec{k} . Il a été démontré que le spectre des fluctuations d'indice de réfraction a de même un spectre de puissance en $k^{-11/3}$. Ce spectre n'est pas intégrable sur l'ensemble des fréquences spatiales, il contient une énergie "infinie". On a alors recours au spectre de Von Karmann $\Phi_n(\vec{k})$ qui permet, outre l'apport d'un palliatif au

handicap précédemment cité, d'introduire la limitation physique imposée par l'échelle externe. Son expression est

$$\Phi_n(\vec{k}) = 0.033 C_n^2 \left(k^2 + \left(\frac{1}{2\pi L_0} \right)^2 \right)^{-11/6} \quad (1.1)$$

Lorsque $(1/L_0)$ tend vers 0 on retrouve le spectre en $0.033 C_n^2 k^{-11/3}$.

La contrepartie dans l'espace des distances de ce spectre tridimensionnel de l'espace de Fourier est la fonction de structure, tridimensionnelle également, de l'indice de réfraction:

$$\begin{aligned} D_n(\vec{r}) &= \langle (n(\vec{x}) - n(\vec{x} + \vec{r}))^2 \rangle \\ &= C_n^2 r^{2/3} \end{aligned} \quad (1.2)$$

On définit également la fonction de covariance par $B_n(\vec{r}) = \langle n(\vec{x})n(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$. L'intérêt de la fonction de covariance est que le spectre $\Phi_n(\vec{k})$ en est la transformée de Fourier. L'inconvénient est que la plupart du temps $B_n(\vec{0})$ n'est pas défini, lorsque ce n'est pas $B_n(\vec{r})$ tout entier. On préfère pour cela la fonction de structure de phase, plus physique, qui est définie dans tous les cas, et qui se relie facilement à la fonction de covariance par $D_n(\vec{r}) = 2B_n(\vec{0}) - 2B_n(\vec{r})$. Ainsi, on passera du spectre à la fonction de structure de l'indice par

$$\begin{aligned} D_n(\vec{r}) &= 2 \int_{\text{espace}} \Phi_n(\vec{k}) (1 - \cos(2\pi \vec{k} \vec{r})) d^3 \vec{k} \\ &= 4 \int_{\text{espace}} \Phi_n(\vec{k}) \sin^2(\pi \vec{k} \vec{r}) d^3 \vec{k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cette précédente équation, vraie non seulement dans notre cas mais également à chaque fois qu'il s'agit de faire correspondre en général spectre de puissance et fonction de structure, a généralement plus de chances d'être définie que la relation classique de Fourier; c'est pourquoi on la préférera chaque fois que l'occasion se présentera.

Mais ces grandeurs tridimensionnelles ne sont pas accessibles à l'observateur, qui ne perçoit d'elles que leurs effets sur le front d'onde après la traversée des couches turbulentes. D'autre part dans ce qui suit on négligera toujours les phénomènes de propagation qui modifient graduellement l'amplitude du front d'onde par diffraction de Fresnel. C'est l'hypothèse de la turbulence proche. La différence de chemin optique subie par un rayon traversant la couche est proportionnelle à l'indice intégré le long du trajet. Le calcul conduit à une fonction de structure bidimensionnelle de l'indice intégré qui varie alors en $|\vec{r}|^{5/3}$ et non plus selon une puissance $|\vec{r}|^{2/3}$. On aboutit ainsi à une des fonctions primordiales caractérisant cette turbulence, qui est la fonction de structure de phase dans le plan pupille de l'instrument. C'est la même fonction de structure après propagation depuis la source de perturbations jusqu'à l'instrument car la fonction de cohérence de l'onde est invariante par diffraction de Fresnel.

Cette fonction de structure de phase se définit comme la variance de la phase au point \vec{r} en prenant pour référence la phase en 0, c'est-à-dire

$$D_\phi(\vec{r}) = \langle (\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} + \vec{r}))^2 \rangle \quad (1.4)$$

Dans l'hypothèse Kolmogorov, qui suppose une turbulence homogène et isotrope la fonction D_ϕ ne dépend que du module de \vec{r} . La densité spectrale de puissance des fluctuations de phase associée à cette fonction de structure est appelée spectre de Wiener et de manière générale il est relié à D_ϕ par la relation

$$D_\phi(\vec{r}) = 4 \int_{\text{plan}} \Phi_\phi(\vec{k}) \sin^2(\pi \vec{k} \vec{r}) d^2 k \quad (1.5)$$

Dans l'hypothèse d'une turbulence Kolmogorov sans échelle externe on a

$$D_\phi(\vec{r}) = 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1.6)$$

et

$$\Phi_\phi(\vec{k}) = (0.023/r_0^{5/3}) k^{-11/3} \quad (1.7)$$

Cette fonction D_ϕ croît indéfiniment, mais elle tend asymptotiquement (et physiquement 'assez vite') vers une limite finie (deux fois l'intégrale du spectre de Von Karman) lorsque l'échelle externe est finie. L'expression de D_ϕ lorsque $1/L_0 \neq 0$ est donnée par Chassat (Thèse 1992). On notera que $D_\phi(\alpha \vec{r}) = \alpha^{5/3} D_\phi(\vec{r})$. Cette propriété est caractéristique d'une turbulence Kolmogorov. Plus généralement, une fonction de structure où une dilatation de l'échelle des distances équivaut à une dilatation de l'amplitude dénote un phénomène à caractéristiques fractales.

Ces équations font apparaître un paramètre clé de la turbulence, qui est la longueur de cohérence r_0 , introduit par Fried (Fried 1966). C'est le diamètre du télescope (circulaire et non obturé) dont l'intégrale de la FTM (égale à $\frac{\pi r_0^2}{4\lambda^2}$) est égale à l'intégrale de la FTM d'un télescope infini limité par l'atmosphère. Pour conduire ce calcul par rapport aux variables statistiques de la turbulence, il est nécessaire de se donner un modèle pour la fonction de structure de phase. Si cette dernière sature, l'intégrale de la FTM d'un télescope infini limité par l'atmosphère ne converge pas. Il est alors dénué de sens de calculer la valeur de la longueur de cohérence, mais ce handicap est plus lié à la forme mathématique du problème qu'à sa nature physique. En effet le r_0 n'est susceptible de caractériser qu'un phénomène de nature entièrement fractale. Or les phénomènes qui nous intéressent sont de l'ordre de grandeur de r_0 plutôt que de L_0 . La présence d'une échelle externe n'affecte que très peu la nature des images à courte longueur d'onde, notre but n'est pas d'avoir un paramètre caractérisant *toutes* les échelles spatiales de la turbulence mais seulement celles du domaine inertiel. Donc pour calculer r_0 il est impératif de baser le calcul sur une turbulence sans échelle externe, quitte à "prolonger" artificiellement le domaine inertiel au-delà de ses limites réelles. Dans ce cas donc, pour une turbulence pleinement développée, l'expression du r_0 en fonction du profil de la turbulence est

$$r_0 = \left[0.423 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (\cos(\gamma))^{-1} \int C_n^2(z) dz \right]^{-3/5} \quad (1.8)$$

ce qui montre que r_0 est proportionnel à $\lambda^{6/5}$.

Je terminerai avec l'expression de la variance des fluctuations de l'angle d'arrivée sur une pupille circulaire de diamètre D . On notera, malgré l'apparition de λ dans la formule, que cette expression est achromatique.

$$\langle \alpha^2 \rangle = 0.17 \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1.9)$$

En présence d'une échelle externe non négligeable, Fante (1975) donne

$$\langle \alpha^2 \rangle = 0.17 \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \left[1 - 1.49 \left(\frac{D}{L_0} \right)^{1/3} \right] \quad (1.10)$$

1.1.2 Les polynômes de Zernike et la turbulence atmosphérique

Cette section introduit les polynômes de Zernike et leurs propriétés. Pourquoi eux plutôt que d'autres ? Parce qu'ils constituent l'outil de base de l'"opticien adaptatif", je vais en parler d'ici peu. J'en montrerai la forme et les propriétés déjà connues, j'en montrerai surtout les propriétés vis-à-vis de la turbulence Kolmogorov que nous venons de décrire (section 1.1.1), et qui font leur renommée. Tout cela est connu, mais j'ajouterai de temps à autre quelques remarques propres. J'utiliserai souvent ces concepts dans le reste de cette thèse.

Propriétés

Principalement depuis 1976, date de la parution de l'article de R.J. Noll, les polynômes de Zernike sont entrés dans le monde de l'optique adaptative pour y tenir une place de choix. On apprécie à la fois leur support circulaire, leurs propriétés d'orthogonalité, l'adéquation des premiers modes avec les principales premières aberrations optiques et la ressemblance des ces premiers modes avec les modes propres de l'atmosphère. On apprécie l'expression analytique déterminée par Noll (1976) donnant les variances et les covariances des coefficients dans le cas d'une turbulence de type Kolmogorov pleinement développée, ainsi que l'expression des dérivées premières de chaque polynôme en fonction des autres. On apprécie enfin l'expression simple de leur transformée de Fourier, de sorte qu'ils servent de base à une multitude de calculs et de simulations sur la turbulence. Utilisés de façon intensive dans le domaine de l'optique adaptative, ils ont alors tendance à être irrémédiablement associés à l'atmosphère comme s'ils n'existaient que par elle.

Je précise bien, non à l'intention de ceux qui connaissent bien ces polynômes mais à l'intention des astronomes qui se plongent dans le domaine de l'optique adaptative, que l'ensemble des polynômes de Zernike est avant tout un outil mathématique qui n'a pas de rapport avec le phénomène turbulent. Pas plus que la transformée de Fourier avec le cri des dauphins, même si cette dernière représente un outil de prédilection pour l'étudier.

Ces polynômes peuvent être normalisés de différentes manières selon les auteurs (Born et Wolf 1965, Noll 1976). On utilise en optique adaptative, et dans cette thèse, l'expression donnée par Noll (1976):

$$\begin{aligned} m \neq 0 \quad Z_{i \text{ pair}}(r, \theta) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \cos(m\theta) \\ Z_{i \text{ impair}}(r, \theta) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \sin(m\theta) \\ m = 0 \quad Z_i(r, \theta) &= \sqrt{n+1} R_n^0(r) \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec $0 \leq r \leq 1$, avec $0 \leq \theta < 2\pi$, et où

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{-1^s (n-s)!}{s![(n+m)/2-s]![(n-m)/2-s]!} r^{n-2s} \quad (1.12)$$

On voit qu'à un polynôme $Z_i(r, \theta)$ sont associés les indices n et m , avec $0 \leq m \leq n$ et n et m de même parité. Ces deux nombres sont appelés respectivement le degré radial et le degré azimutal. En parcourant le pourtour du cercle unité, le mode "oscille" m fois; en parcourant un diamètre, on se déplace sur une fonction polynomiale du rayon r de degré n . Dans cette thèse on définira un polynôme de Zernike soit par la donnée de l'indice global Z_i soit par les deux indices $Z_{n,m}$. Au couple (n, m) correspondent le polynôme d'indice $i = n(n+1)/2 + m + 1$ et le polynôme d'indice $i - 1$ si $m \neq 0$. L'indice i est distribué de la façon suivante par rapport aux degrés n et m :

n	Degré azimutal m				
	0	1	2	3	4
0	Z_1 1 Piston				
1		Z_2, Z_3 $2r \cos \theta$ $2r \sin \theta$ Tip-Tilt			
2	Z_4 $\sqrt{3}(2r^2 - 1)$ Defocus		Z_5, Z_6 $\sqrt{6}r^2 \cos 2\theta$ $\sqrt{6}r^2 \sin 2\theta$ Astigmatisme		
3		Z_7, Z_8 $\sqrt{8}(3r^3 - 2r) \cos \theta$ $\sqrt{8}(3r^3 - 2r) \sin \theta$ Coma		Z_9, Z_{10} $\sqrt{8}r^3 \cos 3\theta$ $\sqrt{8}r^3 \sin 3\theta$ Coma Tri.	
4	Z_{11} $\sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$ Abb. sphérique		Z_{12}, Z_{13} $\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \cos 2\theta$ $\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \sin 2\theta$		Z_{14}, Z_{15} $\sqrt{10}r^4 \cos 4\theta$ $\sqrt{10}r^4 \sin 4\theta$

Il existe également une expression analytique de la transformée de Fourier des polynômes de Zernike :

$$\begin{aligned}
Q_i(k, \beta) &= (-1)^{(n-m)/2} i^m \sqrt{2n+2} \cos(m\beta) \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} && \text{si } m \neq 0 \text{ et } j \text{ pair} \\
\text{ou} & && \\
&= (-1)^{(n-m)/2} i^m \sqrt{2n+2} \sin(m\beta) \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} && \text{si } m \neq 0 \text{ et } j \text{ impair} \\
\text{ou} & && \\
&= \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} && \text{si } m = 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Concernant la décomposition de la phase, celle-ci est aisée en raison des propriétés d'orthogonalité. Soit R le rayon de la pupille. La phase s'écrit

$$\phi(Rr, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(r, \theta) \tag{1.14}$$

Les polynômes sont sans unité et les coefficients a_i portent donc l'unité de la phase, des radians. Il convient de noter que le nombre de radians portés par un coefficient donné sont des *radians rms sur la pupille*, correspondant à la perturbation de phase apportée par le mode concerné.

Du fait de l'orthogonalité entre modes, qui s'écrit

$$\delta_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta Z_i(r, \theta) Z_j(r, \theta) \tag{1.15}$$

la valeur du i^{eme} coefficient de la décomposition est

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \phi(Rr, \theta) Z_i(r, \theta) \\
&= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \phi(r, \theta) Z_i(r/R, \theta)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Ces polynômes sont orthogonaux, mais ils perdent en revanche leur orthogonalité sur une pupille obturée. L'orthogonalité n'est conservée quelle que soit la taille de l'occultation, qu'entre les modes d'ordre azimutal (m) différent. Par exemple, la famille formée des tilts, défocalisation et astigmatismes est-elle orthogonale sur toute pupille obturée. On perd cette propriété en ajoutant la coma ($m = 1$ comme le tilt). Ainsi, l'ensemble des polynômes de même ordre azimutal (tous les polynômes d'une même colonne) constituent un espace vectoriel, et ces différents espaces sont toujours orthogonaux entre eux, et non corrélés.

La forme des premiers polynômes est très connue (fig. 1.1). En revanche, on connaît moins la forme générale des polynômes d'ordre élevé, par exemple au-delà du centième mode (fig. 1.2). Ces polynômes ont tendance à prendre des valeurs prédominantes principalement sur les bords de la pupille au fur et à mesure que l'ordre croît. Ce

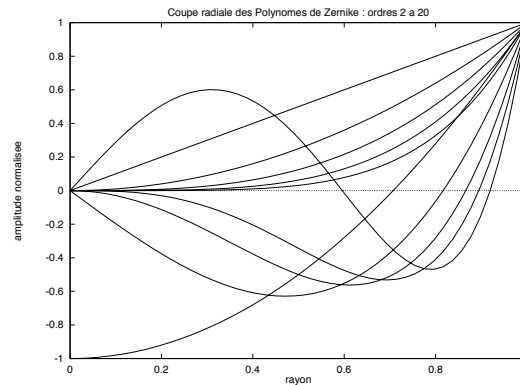


Figure 1.1: Coupe radiale des polynômes de Zernike Z_2 à Z_{20} . À comparer avec les polynômes Z_{100} à Z_{120} .

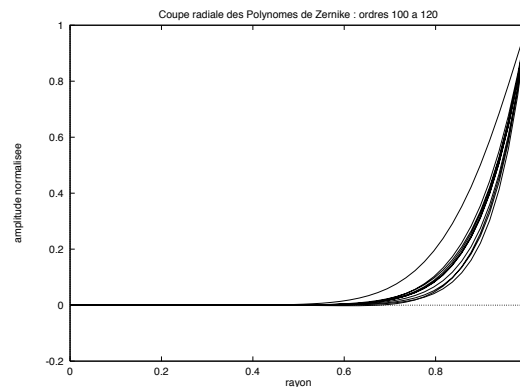


Figure 1.2: Coupe radiale des polynômes de Zernike Z_{100} à Z_{120} . Les polynômes deviennent de plus en plus 'plats' au centre et à fortes valeurs sur les bords de la pupille. Dans une simulation, les problèmes de précision numérique apparaîtront avant tout sur les bords.

phénomène est souvent responsable des erreurs de calcul numériques sur les bords de la pupille dans les simulations avec les polynômes de Zernike.

Propriétés vis-à-vis de la turbulence Kolmogorov

J'expose maintenant les propriétés qui font la renommée des polynômes de Zernike: le comportement statistique de leurs coefficients vis à vis de la turbulence de type Kolmogorov. Ce court paragraphe est puisé dans (Noll 1976).

Noll a déterminé une expression analytique des variances et covariances des coefficients de la décomposition modale sur les polynômes de Zernike d'un front d'onde respectant l'hypothèse de Kolmogorov. Seuls les polynômes de même degré azimutal m (appartenant à une même *colonne* du tableau) et de même type (sinus ou cosinus) sont corrélés dans la turbulence atmosphérique. Deux polynômes appartenant à des ordres azimutaux

différents (colonnes différentes) ne peuvent pas être corrélés. Tous les polynômes de même degré radial ont une variance identique. La relation déterminée par Noll est la suivante:

$$\langle a_{n,m} a_{n',m} \rangle = \frac{2.2698 (-1)^{(n+n'-2m)/2} \sqrt{(n+1)(n'+1)} \Gamma(\frac{n+n'-5/3}{2})}{\Gamma(\frac{n-n'+17/3}{2}) \Gamma(\frac{n'-n+17/3}{2}) \Gamma(\frac{n+n'+23/3}{2})} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \quad (1.17)$$

Je précise que la constante 2.2698 change suivant les auteurs, en raison de fluctuations dans la précision numérique. On trouve 2.24243 (Wang & Markey 1978), 2.2698 (Roddiier N. 1990), 2.256 (Chassat, Thèse 1992). On prendra donc soin dans toute simulation de ne pas mélanger des données (telles que la variance totale de phase par exemple) provenant de sources différentes.

Décomposition sur les modes d'un miroir

Je présente ici une méthode particulière et originale de décomposition des fonctions d'influence des actuateurs d'un miroir sur la base des polynômes de Zernike, car ce type de calcul intervient dans de nombreuses simulations. L'intérêt de la méthode que j'expose est de permettre la réduction de la masse des calculs à effectuer lorsque chaque déformée est symétrique de révolution. En effet, pour calculer la projection des déformées (symétriques de révolution) des actuateurs d'un miroir sur une base de modes en $P(r) \cos(m\theta)$ (les polynômes de Zernikes en sont un cas particulier), il suffit de calculer la projection d'un actuateur situé sur l'axe des abscisses: la projection des actuateurs se trouvant à la même distance du centre et pivotés d'un angle θ_o se déduit par une simple multiplication par un facteur $\cos(m\theta_o)$. La démonstration est exposée en annexe 4.2. La méthode est déjà utile pour un miroir déformable où le maillage des actuateurs est cartésien, elle prend tout son sens pour un miroir déformable à maillage hexagonal.

1.1.3 Turbulence de type "marche aléatoire"

Parce qu'il n'existe pas que des turbulences de type Kolmogorov, je montre de manière nouvelle à l'intérieur de cette section les propriétés statistiques des coefficients de décomposition des polynômes de Zernike pour une turbulence de type "marche aléatoire". C'est un autre modèle de turbulence qui, s'il n'a pas de fondement physique tel que pour l'hypothèse Kolmogorov, représente un motif possible de perturbation aléatoire, où la cohérence spatiale du front d'onde est plus réduite que dans le cas Kolmogorov. Je fais donc cette étude dans le but de savoir comment cela va agir sur le spectre modal des polynômes de Zernike; sera-t-il totalement transfiguré ou à peine modifié, et de quelle manière. C'est seulement après avoir répondu à ces questions que nous serons aptes à le reconnaître dans les données expérimentales.

L'article de Bester et al. (1992) est un témoignage vivant d'exemples de turbulence de type non Kolmogorov. En particulier le type de turbulence "marche aléatoire" y est cité. La fonction de structure de phase associée à ce type de perturbations est (Bester et al. 1992) :

$$D_\phi(\vec{r}) = \langle (\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} + \vec{r}))^2 \rangle = D_o \frac{r}{r_o} \quad (1.18)$$

Le spectre $\Phi(k)$ des fluctuations est lié à cette fonction par la relation

$$D_\phi(\vec{r}) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Phi(k) (1 - \cos(2\pi \vec{k} \cdot \vec{r})) d\vec{k} \quad (1.19)$$

Il est possible de vérifier¹ que le spectre correspondant à cette fonction de structure de phase est

$$\Phi(k) = \Phi_o \frac{1}{r_o} k^{-3} = \frac{D_o}{8\pi^2} \frac{1}{r_o} k^{-3} \quad (1.21)$$

L'exposant -3 est caractéristique de ce type de turbulence. La décroissance moins rapide que la "turbulence Kolmogorov" traduit sa moins grande cohérence spatiale.

De même que l'on connaît grâce à Noll (1976) le spectre modal d'une turbulence Kolmogorov sur les polynômes de Zernike, je veux dans ce paragraphe obtenir la formule (1.30), à savoir une expression du spectre modal d'une turbulence de type "marche aléatoire". Je procède exactement de la même manière que Noll. J'écris la valeur des coefficients des polynômes en fonction du front d'onde:

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int \phi(R\vec{r}) \cdot Z_i(\vec{r}) d\vec{r} \quad (1.22)$$

Les fonctions $Z_i(\vec{r})$ que j'utilise ici valent 0 en dehors de la pupille, ce qui permet de se passer de la fonction pupille. J'élève ce coefficient au carré et je moyenne sur les évènements:

$$\langle a_i^2 \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int \int \langle \phi(R\vec{r}) \phi(R\vec{r}') \rangle \cdot Z_i(\vec{r}) \cdot Z_i(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \quad (1.23)$$

Comme l'écrit Noll (Noll 1976, Eq. (24)), la même équation peut s'écrire dans l'espace de Fourier

$$\langle a_i^2 \rangle = \int \int \langle \Phi(\vec{k}/R, \vec{k}'/R) \rangle \cdot Q_i^*(\vec{k}) \cdot Q_i(\vec{k}') d\vec{k} d\vec{k}' \quad (1.24)$$

¹L'équation 1.19 est simple à évaluer si l'on connaît la relation

$$2\pi J_o(u) = \int_0^{2\pi} \cos(u \cos(t)) dt \quad (1.20)$$

avec, je le rappelle dans notre cas,

$$\Phi(\vec{k}/R, \vec{k}'/R) = \Phi_o \frac{R}{r_o} k^{-3} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (1.25)$$

On peut donc intégrer sur \vec{k}' ce qui conduit à

$$\langle a_i^2 \rangle = \Phi_o \frac{R}{r_o} \int |Q_i^2(\vec{k})|^2 k^{-3} d\vec{k} \quad (1.26)$$

À ce stade, on fait intervenir l'expression de la transformée de Fourier des polynômes de Zernike. On a

$$\begin{aligned} |Q_i^2(\vec{k})|^2 &= 2\cos^2(m\beta) (n+1) \frac{J_{n+1}^2(2\pi k)}{\pi^2 k^2} \\ &\text{ou} \\ &= 2\sin^2(m\beta) (n+1) \frac{J_{n+1}^2(2\pi k)}{\pi^2 k^2} \\ &\text{ou} \\ &= (n+1) \frac{J_{n+1}^2(2\pi k)}{\pi^2 k^2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dans tous les cas, l'intégration par rapport à β de 0 à 2π fait apparaître un facteur 2π . Donc, en remplaçant 1.27 dans 1.26 et en intégrant sur β on obtient

$$\langle a_i^2 \rangle = \Phi_o \frac{2R}{\pi r_o} (n+1) \int_0^\infty J_{n+1}^2(2\pi k) k^{-4} dk \quad (1.28)$$

Fort heureusement, des tables d'intégrales nous donnent

$$\int_0^\infty J_{n+1}^2(2\pi k) k^{-4} dk = \frac{256 \pi^2}{3(4n^2 - 1)(2n + 3)(2n + 5)} \quad (1.29)$$

La formule se réduit donc à une expression simple:

$$\langle a_i^2 \rangle = \Phi_o \left(\frac{D}{r_o} \right) \pi \frac{256 (n+1)}{3(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \quad (1.30)$$

J'ai donc montré que l'expression cherchée est en fait une fonction rationnelle en n^{-3} . Encore, la décroissance du spectre sur les polynômes de Zernike est moins forte que pour la turbulence de type Kolmogorov (en $n^{-3.66}$) à cause de la plus faible cohérence spatiale. Le spectre est comparé avec le modèle Kolmogorov sur la figure 1.3, la variance de phase étant la même (normalisée à 1) dans les deux cas. Les deux spectres sont très différents. Mais il est possible de trouver une valeur pour l'échelle externe (de l'ordre de cinq fois la taille de la pupille d'après Winker (1991)) telle que, appliquée sur le modèle Kolmogorov, l'on vienne quasiment retrouver le modèle 'marche aléatoire' sur les 30 premiers polynômes de Zernike. Il convient donc d'être prudent dans le dépouillement de données expérimentales, et le critère permettant

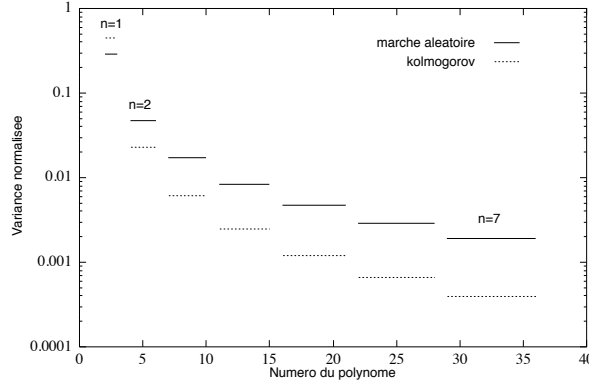


Figure 1.3: Spectre modal d'une turbulence de type "marche aléatoire" sur les polynômes de Zernike. Comparaison avec la turbulence de type Kolmogorov pleinement développée. Les variances de chaque polynôme ont été divisées par l'énergie totale du spectre: les deux spectres portent donc la même variance de phase, normalisée à 1.

de vraiment différencier les deux modèles est sûrement l'analyse du spectre des fluctuations d'angle d'arrivée qui sera en f^{-3} au lieu de $f^{-11/3}$.

Partant de cette expression, je calcule l'énergie totale du spectre, c'est la somme des $\langle a_i^2 \rangle$. Je les somme à partir du tilt (a_2) sans tenir compte du mode piston (a_1). Il y a $(n+1)$ polynômes Z_i par degré radial n , ce qui fait que la série à évaluer est

$$\sum_{i=2}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle = \Phi_o \left(\frac{D}{r_o} \right) \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{256 (n+1)^2}{3(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \quad (1.31)$$

Je développe le terme général de la série en facteurs premiers de la manière suivante

$$\frac{256 (n+1)^2}{3(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{4}{(2n-1)} - \frac{4}{3(2n+1)} + \frac{4}{3(2n+3)} - \frac{4}{(2n+5)} \quad (1.32)$$

Si l'on réécrit cela comme la somme de 4 séries

$$v_n = b_n - \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n - e_n \quad (1.33)$$

on voit que $b_{n+3} = e_n$ et que $c_{n+1} = d_n$. On ré-ordonne les termes pour profiter de cette propriété, et il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = b_1 + b_2 + b_3 + \sum_{i=1}^{\infty} (b_{i+3} - e_i) - \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} (c_{i+1} - d_i) \quad (1.34)$$

Toutes les sommes infinies sont nulles et il reste

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = b_1 + b_2 + b_3 - \frac{1}{3}c_1 = \frac{256}{45} \quad (1.35)$$

et en reportant, je montre donc que

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle &= \Phi_o \left(\frac{D}{r_o} \right) \frac{256 \pi}{45} = 17.872 \Phi_o \left(\frac{D}{r_o} \right) \\ &= D_o \left(\frac{D}{r_o} \right) \frac{32}{45 \pi} = 0.22635 D_o \left(\frac{D}{r_o} \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'énergie infinie contenue dans le spectre vient du mode piston, comme pour la turbulence de type Kolmogorov. On notera que l'on peut retrouver directement la toute dernière équation en calculant l'intégrale du carré de la phase centrée sur la pupille, à partir de la fonction de structure de phase. Le calcul a été fait et vérifié; il conduit effectivement au même résultat. Peu intéressant, il n'a pas été reproduit ici.

Pour finir, il faut aussi ne pas oublier que la notion de r_0 est évidemment à revoir dans ce cas. Si l'on applique la définition de Fried, le r_0 est le diamètre du télescope pour lequel on a égalité entre sa résolution et la résolution d'un télescope infini limité par l'atmosphère. Le calcul conduit alors à préciser la constante D_o . Je trouve $D_o = 4\sqrt{2}$.

1.1.4 Les critères de qualité de l'image

J'expose dans ce paragraphe des notions connues concernant la formation des images; c'est ici un des rares cas où j'en parlerai, je n'y reviendrai qu'au chapitre 3: le reste de cette thèse traite plus souvent de l'erreur de phase dans le plan pupille qui conditionne directement la qualité de l'image. Ce paragraphe est donc comme un pont entre cette phase turbulente et l'image.

La fonction de transfert de modulation

Je rappelle dans ce paragraphe quelques propriétés connues de la Fonction de Transfert de Modulation (FTM), déjà largement abordée par Fried (1966), Wang (1977) ou Roddier (1981).

La FTM pour une onde plane passant à travers le milieu turbulent s'écrit comme la moyenne sur les événements de l'autocorrélation du champ électrique complexe sur la pupille du télescope, aux unités près. Soient $P(\vec{r})$ la fonction pupille, valant 1 à l'intérieur de la pupille (qui peut bien sûr être dotée d'une occultation centrale si besoin est) et 0 ailleurs. Le vecteur \vec{r} , de coordonnées polaires (r, θ) , parcourt la pupille. Soit D le diamètre du télescope et d le diamètre de l'occultation centrale. En négligeant la scintillation, on a

$$FTM(\vec{\rho}/\lambda) = \frac{1}{S} \left\langle \int_{d/2}^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{i\phi(\vec{r})} e^{-i\phi(\vec{r}+\vec{\rho})} P(\vec{r}) P(\vec{r}+\vec{\rho}) r dr d\theta \right\rangle \quad (1.37)$$

A l'aide de la relation $\langle e^{ix} \rangle = e^{-\langle x^2 \rangle}$ (relation supposant que x est gaussienne et centrée), et en introduisant la fonction de structure de phase (voir équation (1.4)) on obtient

$$FTM(\vec{\rho}/\lambda) = e^{-\frac{1}{2}D_\phi(\vec{\rho})} \frac{1}{S} \int_{d/2}^{D/2} \int_0^{2\pi} P(\vec{r}) P(\vec{r} + \vec{\rho}) r dr d\theta \quad (1.38)$$

Pour éviter toute confusion, je précise que le vecteur $\vec{\rho}$, de coordonnées polaires (ρ, θ) parcourt un domaine circulaire de rayon D . Cette équation est valide à condition que la fonction de structure de la phase soit *indépendante du point considéré*. On voit que cette équation est formée de deux parties. L'exponentielle qui définit la partie turbulente, et la fonction de transfert optique (FTO) du télescope. On peut donc écrire

$$FTM(\vec{\rho}/\lambda) = e^{-\frac{1}{2}D_\phi(\vec{\rho})} FTO(\vec{\rho}/\lambda) \quad (1.39)$$

Image longue pose d'un point source

Le but de ce paragraphe est de donner une expression approchée originale de l'image longue pose. Pourquoi ? Parce que cette dernière est la transformée de Fourier de la FTM; son calcul est donc simple, mais pas immédiat. Lorsque l'on désire employer son expression dans le contexte d'une simulation ou d'une application numérique, il peut alors être utile de pouvoir la remplacer par une expression approchée. Ou encore, n'entend-on pas souvent dire que la tache de seeing est une gaussienne ? C'est faux dès que l'on s'éloigne du voisinage du centre de l'image, comme l'expression suivante va le montrer.

Je propose l'approximation suivante pour l'image longue pose non corrigée pour un *télescope de diamètre infini*:

$$I(r) = 0.778 \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^2 \frac{3(r_0 r / \lambda)^2 + 9}{100(r_0 r / \lambda)^{17/3} + 10(r_0 r / \lambda)^4 + 33(r_0 r / \lambda)^2 + 9} \quad (1.40)$$

avec r dans la même unité que λ/r_0 . L'intégrale de cette fonction est normalisée à 1, de sorte que l'unité de $I(r)$ est le flux par arcseconde carrée (si l'unité de r est l'arcseconde), exprimé comme une fraction du flux total. J'ai déduit cette expression empirique, à partir de la transformée de Hankel de la fonction de transfert longue pose de l'atmosphère. Lorsque le diamètre est suffisamment petit pour ne plus être négligeable, il faut convoluer cette expression par la psf du télescope. Il est même encore possible d'inclure dans cette psf les aberrations du télescope. L'approximation précédente est en $r^{-11/3}$ quand $r \rightarrow \infty^2$. Cela signifie que le profil de l'image décroît certes très vite, mais néanmoins bien moins vite qu'un profil gaussien. Par contre il décroît plus vite que le profil d'Airy classique $(J_1(\pi r)/r)^2$ dont l'enveloppe³ est

²La transformée de Hankel exacte de $-3.44r^{5/3}$ est $-3.44 \frac{\Gamma(11/6)}{\pi^{8/3}\Gamma(-5/6)} k^{-11/3} = 0.02288k^{-11/3}$, qui est l'expression asymptotique exacte du profil de la tache image.

³ $J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - 3\pi/4)$ quand $x \rightarrow \infty$, merci à O. Lai.

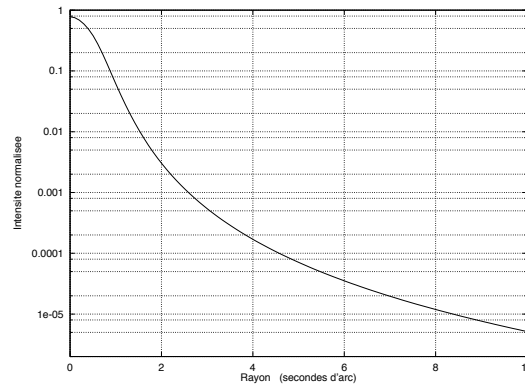


Figure 1.4: Profil normalisé de l'image longue pose théorique obtenue avec un télescope de diamètre infini limité uniquement par l'atmosphère, dans l'hypothèse d'une turbulence de type Kolmogorov pleinement développée. La valeur de λ/r_0 est de 1 arcseconde. Les abscisses sont exprimées en arcsecondes.

$\frac{2}{\pi^2}r^{-3}$. D'où l'importance de convoluer cette approximation par la psf du télescope si l'on s'intéresse à la partie lointaine du halo.

Il faut être prudent avec l'expression asymptotique du profil expérimental puisque celui-ci peut être entaché des erreurs dues à la diffusion. L'article de King (1971) donne un exemple de mesure d'un tel profil, et a été repris dans l'article de Roddier (1981). Néanmoins la mesure expérimentale de sa décroissance est certainement la meilleure méthode pour vérifier la validité de l'hypothèse Kolmogorov sur les petites échelles spatiales, et donnera une bien meilleure précision que ne le ferait un analyseur.

Le rapport de Strehl, nouvelle méthode d'évaluation

Toujours dans la lignée des paramètres synthétisant la description de l'image, je rappelle tout d'abord au lecteur la définition du rapport de Strehl. Je rappelle les différentes expressions approchées qui existent et qui le lient à l'erreur résiduelle de phase, ainsi que leur domaine de validité. Puis je propose une expression empirique originale permettant de calculer sa valeur dans le cas non corrigé pour toute valeur de r_0 . Parce que je sais que de nombreux lecteurs de cette thèse n'auront de cesse de s'enquérir du rapport de Strehl plutôt que de l'erreur résiduelle de phase, je discute les relations étroites qui les lient.

La plus simple description du rapport de Strehl est le rapport entre la valeur de l'image au centre du champ et la valeur qu'aurait eu cette image si elle n'avait été limitée que par l'optique -supposée parfaite- du télescope. Vu dans l'espace de Fourier, ce rapport

est aussi celui de l'aire de la FTM à celle de la FTO, à savoir

$$SR = \frac{\int_0^D \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}D_\phi(\vec{\rho})} FTO(\vec{\rho}/\lambda) \rho d\rho d\theta}{\int_0^D \int_0^{2\pi} FTO(\vec{\rho}/\lambda) \rho d\rho d\theta} \quad (1.41)$$

Etant données les hypothèses de validité de cette formule (D_ϕ doit être une fonction indépendante du point considéré), celle-ci n'est valable que dans certains cas. Pour les faibles aberrations, une expression du rapport de Strehl est

$$SR = e^{-\sigma_\phi^2} \quad (1.42)$$

où σ_ϕ^2 est la variance de phase sur la pupille, en rd^2 .

Dans quelles conditions cette approximation est-elle valable ? Supposons que le résidu de phase soit à très haute fréquence spatiale, c'est-à-dire que la phase soit décorrélée d'un point à l'autre sur la pupille, et de variance homogène. Alors la fonction de structure de phase vaut $D_\phi(\vec{\rho}) = 2\sigma_\phi^2$ partout (sauf $D_\phi(\vec{0})$ qui vaut 0). En remplaçant $D_\phi(\vec{\rho})$ dans l'expression (1.41) on obtient immédiatement $SR = e^{-\sigma_\phi^2}$, qui, pour cette occasion, est une expression exacte quelle que soit la variance de phase, petite ou grande. Les choses changent radicalement pour le domaine de validité lorsque la phase devient corrélée, comme on va le voir dans le paragraphe suivant, où l'on se propose de donner une expression empirique du rapport de Strehl de l'image non corrigée.

Revenons donc au cas de la turbulence de type Kolmogorov, pour lequel j'ai effectué le calcul du rapport de Strehl pour une pupille circulaire non obturée, et sur une large gamme de rapports D/r_0 . Les résultats sont présentés sur les figures 1.5 et 1.6. Lorsque la variable D/r_0 devient grande (typiquement $D/r_0 > 10$), le rapport de Strehl varie comme $(r_0/D)^2$. Pour de petites valeurs (typiquement $D/r_0 < 0.8$), le Strehl varie comme $SR = e^{-\sigma_\phi^2}$ avec $\sigma_\phi^2 = 1.03(D/r_0)^{5/3}$. J'ai cherché comment 'raccorder' ces deux régimes à l'aide d'une expression empirique. La formule à laquelle j'ai abouti est la suivante:

$$SR = \frac{1}{1 + 0.3\frac{D}{r_0} + \left(\frac{D}{r_0}\right)^2} \quad (1.43)$$

et permet d'approximer la vraie fonction avec, dans le pire des cas, une erreur *relative* de 0.05. Bien évidemment cette formule n'est pas unique et n'a pas la prétention de représenter la meilleure approximation possible. Autre cas de figure, avec les mêmes hypothèses mais avec une occultation centrale de la pupille telle que celle du 3 mètres 60 de La Silla (occultation centrale de 1.57 mètres de diamètre), le Strehl tend vers $1.2357(r_0/D)^2$. Les petites valeurs sont elles aussi modifiées. On pourra alors utiliser la bonne approximation suivante (mieux que 0.005 d'erreur relative quel que soit D/r_0):

$$SR = \frac{1.2357}{1.2357 + 0.7\left(\frac{D}{r_0}\right)^{1.5} + \left(\frac{D}{r_0}\right)^2} \quad (1.44)$$

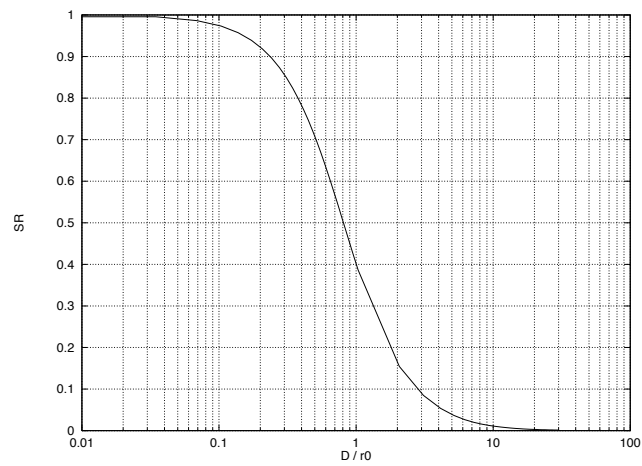


Figure 1.5: Rapport de Strehl en fonction de D/r_0 pour une turbulence Kolmogorov pleinement développée. Pupille circulaire sans occultation centrale.

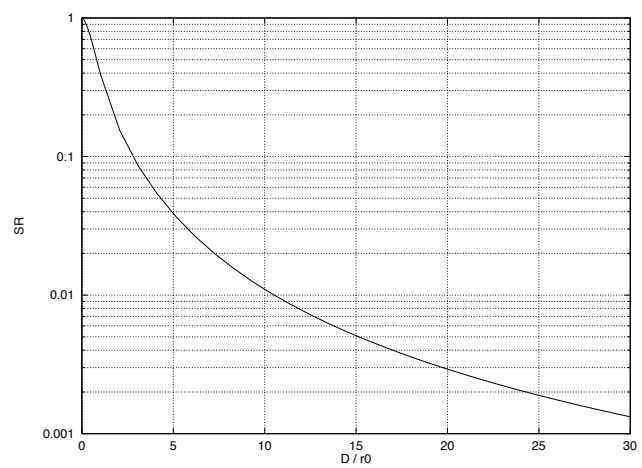


Figure 1.6: Rapport de Strehl en fonction de D/r_0 pour une turbulence Kolmogorov pleinement développée. Pupille circulaire sans occultation centrale.

On constate donc que, à variance constante, la corrélation de la phase joue un rôle primordial dans le rapport de Strehl. En régime asservi, est-il possible de calculer un D/r_0 équivalent et de calculer le SR de cette manière ? Ou peut-on établir un lien entre la variance résiduelle de phase et le rapport de Strehl ? Un exemple numérique permet de se faire une idée de la chose. Pour un $D/r_0 = 30$ et une correction parfaite jusqu'au 21^{ième} polynôme de Zernike la variance résiduelle de phase donnée par Noll (1976) est $\Delta_{22} = 6.0 \text{ rd}^2$ et le rapport de Strehl associé donné par Wang & Markey (1978) est $SR = 0.0053$. D'un autre côté une turbulence non asservie avec un $D/r_0 = 2.9$ équivaut comme dans le cas précédent à 6.0 rd^2 de distorsion de phase, mais le rapport de Strehl est alors $SR = 0.098$, toujours d'après Wang & Markey (1978). Ainsi, à variance de phase constante, les rapports de Strehl diffèrent presque d'un facteur 20 dans cet exemple. Il est donc tout à fait possible de trouver des exemples où une variance de phase plus faible peut produire un rapport de Strehl plus mauvais. Le rapport de Strehl est certes dépendant de la variance résiduelle de phase, mais il dépend aussi de la corrélation de la phase à travers la pupille, surtout lorsque l'erreur de phase devient grande.

phase	D/r_0	σ_ϕ^2	SR
non corrigé, Kolmogorov	2.9	6.0 rd^2	9.8%
non corrigé, marche aléatoire	-	6.0 rd^2	3.7%
21 Zernikes corrigés, Kolm.	30	6.0 rd^2	0.5%
spectre spatial blanc	-	6.0 rd^2	0.25%

Détermination expérimentale Les lignes qui suivent affirment ma désapprobation envers les méthodes, couramment utilisées, de détermination du rapport de Strehl d'une image au sortir de la caméra d'imagerie, et qui consistent à simuler la tache limitée par la diffraction associée au système, et à comparer sa valeur maximale avec celle de l'image. Je présente une méthode différente originale, bien que sa simplicité extrême me donne des scrupules à utiliser ce mot.

La simulation de la tache limitée par la diffraction associée au système est souvent longue, et je conseillerais plutôt l'emploi d'une formule théorique donnant la hauteur de cette tache de diffraction en 0, lorsque l'énergie de celle-ci est normalisée à 1. La formule est la suivante:

$$\frac{\pi}{4}(1 - o^2)/u^2 \quad (1.45)$$

le paramètre u étant la valeur de λ/D exprimé en pixels et o l'occultation centrale normalisée. Et si l'image a été enregistrée à travers un filtre large bande il suffit d'intégrer l'expression précédente par rapport à u sur la bande spectrale considérée. On montre très simplement que l'expression devient $\frac{\pi}{4}(1 - o^2)/u_1 u_2$, les u_1 et u_2 étant les valeurs extrêmes de u pour la bande spectrale. Ou encore, on pourra dire que la longueur d'onde équivalente est la moyenne *géométrique* des bornes de la bande spectrale. Une application numérique donne $0.7288/\lambda_{\mu\text{m}}^2$ avec la caméra SHARP pour le 3.6m de l'ESO (occultation centrale normalisée $o = 1.57/3.60$), soit

bande	$\frac{\pi}{4}(1 - o^2)/u^2$
K	0.100
H	0.178
J	0.310

On notera que le plus souvent, le facteur limitant la précision du calcul du rapport de Strehl est la détermination du “zéro” de l'image expérimentale puisque cela affecte la valeur du flux total calculé, et donc sa normalisation.

1.1.5 Tilt, pente moyenne et autres basculements

Je présente ici une brève analyse des modes de basculement. Pourquoi cette place particulière, alors que le concept de contrôle modal autorise maintenant facilement – on le verra plus tard – le contrôle de n'importe quel mode sur un ou plusieurs miroirs, séparés ou pas. C'est par curiosité d'une part. Et d'autre part parce que je montre là qu'un phénomène simple en apparence peut cacher des choses plus complexes. Je conclurai par une application originale, qui donne la fluctuation d'angle d'arrivée dans une sous-pupille, lorsque le tilt est compensé sur la globalité de la pupille.

Décomposée sur la base des polynômes de Zernike, la phase suit un spectre modal dont les tilts occupent 88% de l'énergie. En effet comme le souligne Fried (Fried 1994), la fonction de structure de phase est en $r^{5/3}$, il suffirait qu'elle soit en $r^{6/3}$ pour que les perturbations ne soient que tilts purs. L'expression du tilt, au sens de Zernike, est un mode valant $Z_2(x, y) = 2x$, et le coefficient a_2 qui lui revient est déterminé par

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\text{pupille}} 2x \phi(x, y) dx dy \quad (1.46)$$

Le tilt ainsi engendré est un tilt de a_2 radians rms sur la pupille, allant de $2a_2$ radians d'excursion de phase d'un bord de la pupille à $-2a_2$ radians à l'autre bord. Traduit en chemin optique puis en angle d'arrivée, on détermine que le déplacement de l'image associé à ce tilt est de $\alpha_2 = \frac{2a_2}{\pi} \frac{\lambda}{D}$ c'est-à-dire environ $0.7a_2$ fois le diamètre à mi-hauteur de la tache d'Airy.

D'un autre côté, la déviation du centre de gravité de l'image est donné par

$$\vec{\alpha} = \frac{\lambda}{2\pi S} \int_{\text{pupille}} \nabla \phi(x, y) dx dy = \frac{\lambda}{2\pi S} \oint_{\text{contour pupille}} \phi(M) \vec{n}(M) dl \quad (1.47)$$

ce qui montre que la position du centroïde de l'image ne dépend que de la phase sur le *contour* de la pupille. A l'inverse le coefficient a_2 dépend de la phase *partout*, ce qui prouve que si le tilt déplace effectivement le centroïde, tout déplacement de ce dernier n'est pas forcément imputable au tilt seul. Comme il l'a déjà été dit ailleurs dans cette thèse, tous les polynômes en $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$ ont la propriété de déplacer le centroïde, respectivement en x ou en y . La relation entre le coefficient d'un polynôme

et le déplacement du centre de gravité est

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2(n+1)}\lambda}{\pi D} a_n \quad (1.48)$$

Elle se démontre en remplaçant dans l'équation (1.47) la fonction $\phi(M)$ par la valeur du Zernike $Z_{n,1}(1, \theta)$ sur les bords de la pupille, le vecteur $\vec{n}(M)$ par le vecteur de composantes $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, et en intégrant de 0 à 2π .

Donc, pour ne plus commettre d'erreur, on parlera du *tilt* pour désigner le mode plan qui minimise l'erreur quadratique de phase sur la pupille, et de la *pente moyenne* pour l'intégrale du gradient de la phase sur la pupille. Cet effet a déjà été mentionné par différents auteurs, tels que Yura & Tavis (1985), Churnside et al. (1985), Primot et al. (1990) ou Christou (1991). Cependant, Tyson (1991) soutient précisément l'inverse, en disant que le tilt est le seul mode à pouvoir déplacer le centre de gravité: c'est un avis qu'il est seul à partager.

On se propose dans la suite de déterminer l'erreur sur le tilt lorsqu'il est corrigé en prenant pour coefficient de correction a'_2 l'information déduite de la pente moyenne. Dans ces conditions, tout polynôme de Zernike $Z_{n,1}$ d'amplitude $a_{n,1}$ passe pour un tilt d'amplitude $a'_2 = \frac{a_{n,1}}{2} \sqrt{2(n+1)}$. L'erreur totale commise est donc $a'_2 - a_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n,1} \sqrt{2(n+1)}$. et la variance est

$$\langle (a'_2 - a_2)^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{p=3}^{\infty} \langle a_{n,1} a_{p,1} \rangle \sqrt{(n+1)(p+1)} \quad (1.49)$$

L'application numérique dans le cas de la turbulence Kolmogorov donne $\langle (a'_2 - a_2)^2 \rangle = 0.007611(D/r_0)^{5/3}$, ce qui représente 1.67% de la variance d'un tilt. Les différentes variances et coefficients de corrélation prennent les valeurs suivantes:

$\langle a_2^2 \rangle$	$0.453623 (D/r_0)^{5/3}$
$\langle a_2'^2 \rangle$	$0.423431 (D/r_0)^{5/3}$
$\langle (a'_2 - a_2)^2 \rangle$	$0.007611 (D/r_0)^{5/3}$
$\langle a_2 a_2' \rangle / \langle a_2^2 \rangle$	0.95833

Ainsi, il est incorrect de dire que l'on mesure le tilt avec un détecteur 4 quadrants. On mesure la position du centre de gravité, c'est-à-dire une grandeur reliée à la pente moyenne. Il en est de même si l'on moyenne les pentes données par chaque sous-pupille du Hartmann car en effet la somme des pentes est égale à la somme des intégrales curvilignes de la phase sur le contour des sous-pupilles, ce qui est encore égal à l'intégrale curviligne de la phase sur le pourtour du Hartmann, c'est-à-dire sur le pourtour de la pupille.

N'y a-t-il aucune grandeur mesurable dans le plan image qui soit reliée au tilt ? Lorsque l'excursion de phase est petite -à grande longueur d'onde- et qu'un speckle brillant est visible dans l'image, Mc Kechnie (Mc Kechnie 1992) montre que la position du maximum correspond au point de focalisation de l'onde plane qui s'ajuste

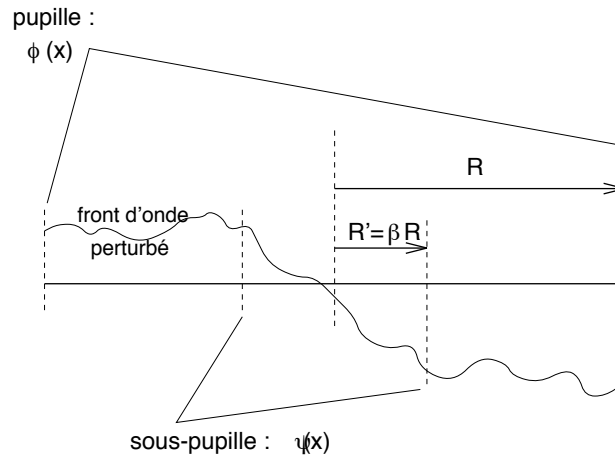


Figure 1.7: Description des notations et variables utilisées dans la détermination de la variance de l'angle d'arrivée dans une sous-pupille.

au mieux au sens des moindres carrés au front d'onde incident, c'est-à-dire le tilt. On retiendra donc que la pente moyenne est associée au centroïde, le maximum d'intensité (lorsqu'il n'y a qu'un speckle) est associé au tilt.

Relation entre tilt sur la pupille et sur une sous-pupille

Le but de ce paragraphe est d'estimer l'atténuation des fluctuations d'angle d'arrivée dans une sous-pupille lorsque l'on corrige le tilt sur la pupille entière, c'est une application du paragraphe qui précède. Le calcul n'est pas aisé si l'on se donne une pupille circulaire et une sous-pupille de forme et d'emplacement arbitraires. Aussi, je restreins le cas à une pupille et une sous-pupille circulaires centrées l'une sur l'autre.

Dans ces conditions, on peut utiliser les polynômes de Zernike pour décomposer le front d'onde sur la pupille et sur la sous-pupille. Le fil conducteur de la démonstration qui suit est le suivant: le front d'onde sur la sous-pupille $\psi(\rho, \theta)$ s'exprime de manière linéaire en fonction du front d'onde sur la pupille $\phi(\rho, \theta)$ (toute combinaison linéaire de fronts d'onde ϕ_1, ϕ_2, \dots génère la même combinaison pour ψ_1, ψ_2, \dots). Donc, si l'on arrive à trouver la matrice de passage de la décomposition modale de ϕ vers ψ , le problème est pour ainsi dire résolu.

On a R le rayon de la pupille et R' le rayon de la sous-pupille. On veut écrire ψ et ϕ tels que

$$\phi(\rho, \theta) = \sum_i a_i Z_i(\rho/R, \theta) \quad \text{et} \quad \psi(\rho, \theta) = \sum_i a'_i Z_i(\rho/R', \theta) \quad (1.50)$$

et comme il y a égalité entre ϕ et ψ sur la sous-pupille on peut écrire, en posant

$r = \rho/R'$ et en posant $\beta = \frac{R'}{R}$ (voir Fig. 1.7)

$$\sum_i a_i Z_i(\beta r, \theta) = \sum_i a'_i Z_i(r, \theta) \quad (1.51)$$

et on a donc

$$a'_i = \frac{1}{\pi} \int \sum_j a_j Z_j(\beta r, \theta) Z_i(r, \theta) \quad (1.52)$$

Etant donné que les fonctions $\cos(m\theta)$ sont orthogonales entre elles (idem pour $\sin(m\theta)$) on peut écrire

$$a'_{n,m} = \sum_p a_{p,m} \int_0^1 R_p^m(\beta r) R_n^m(r) r dr \quad (1.53)$$

On peut exprimer le polynôme $R_p^m(r)$ comme $\sum_i^p z_i r^i$, les coefficients z_i étant donnés par l'équation (1.12). Ainsi l'expression ci-dessus se résume à

$$a'_{n,m} = \sum_p a_{p,m} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^n \frac{z_i z_j \beta^i}{i+j+2} \quad (1.54)$$

On s'intéresse ici aux fluctuations d'angle d'arrivée, et seuls les polynômes de Zernike d'ordre azimutal $m = 1$ sont concernés. Si l'on n'étudie que les fluctuations selon un seul axe on peut encore se limiter aux polynômes en $\cos \theta$ (je rappelle que j'ai fait l'hypothèse d'avoir une sous-pupille centrée sur la pupille). Soit donc \vec{a} le vecteur dont les composantes sont les coefficients de décomposition de ϕ sur les polynômes en $\cos \theta$, et \vec{a}' pour ψ . En appelant T_β la matrice dont les éléments sont les $T_{np} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^n \frac{z_i z_j \beta^i}{i+j+2}$, on peut écrire $\vec{a}' = T_\beta \vec{a}$ et tout n'est plus qu'une question de calcul matriciel. Soit $\vec{\omega}$ le vecteur dont la i^{eme} composante est $\sqrt{2(i+1)}$. La pente moyenne du front d'onde se déduit de l'équation (1.48) : on obtient $\alpha = \frac{\lambda}{\pi D} \vec{\omega}^t \vec{a}$.

Pour le calcul sur la sous-pupille on remplace D par βD , et ainsi la pente moyenne sur la sous-pupille est donnée par $\alpha' = \frac{\lambda}{\pi \beta D} \vec{\omega}^t T_\beta \vec{a}$ et sa variance est donc

$$\langle \alpha'^2 \rangle = \frac{\lambda^2}{\pi^2 \beta^2 D^2} \vec{\omega}^t T_\beta \langle \vec{a} \vec{a}^t \rangle T_\beta^t \vec{\omega} \quad (1.55)$$

En remplaçant $\langle \vec{a} \vec{a}^t \rangle$ par la matrice de covariance des coefficients des polynômes de Zernike telle que donnée par Noll (1976), on trouve

$$\langle \alpha'^2 \rangle = f(\beta) \frac{\lambda^2}{D^2} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1.56)$$

La fonction $f(\beta)$ est un polynôme en β qui, numériquement, se rapproche d'autant mieux de $0.17\beta^{-1/3}$ que l'on considère plus de modes dans la matrice $\langle \vec{a} \vec{a}^t \rangle$. La

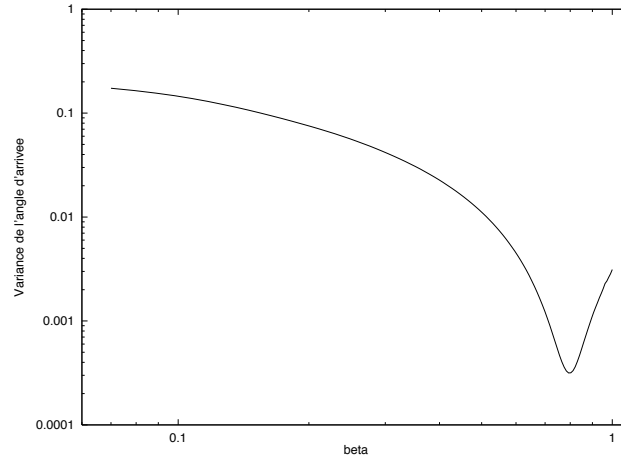


Figure 1.8: Fonction $f(\beta)$ (voir équation (1.56)) en fonction de β , quand le tilt est parfaitement compensé sur la pupille entière.

convergence est ‘quasi immédiate’ près de $\beta = 1$ et s’affine progressivement pour les petites valeurs de β . Pour $\beta = 1$ on retrouve la formule classique $\langle \alpha'^2 \rangle = 0.17 \frac{\lambda^2}{D^2} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}$ proposée par Tatarskii (1971).

Supposons que le tilt soit parfaitement corrigé sur la pupille. Il suffit de mettre à 0 la ligne et la colonne correspondant au tilt dans la matrice $\langle \vec{a}\vec{a}^t \rangle$. La fonction $f(\beta)$ est illustrée sur la figure 1.8. Il faut au moins prendre en compte les polynômes jusqu’à l’ordre $n = 21$ pour avoir une bonne précision jusqu’à $\beta \approx 0.1$. On vérifie à nouveau que pour $\beta = 1$ la fluctuation d’angle d’arrivée n’est pas nulle puisque tilt et pente moyenne sont deux grandeurs distinctes. En revanche, il est étonnant de constater que le tilt mesuré sur la pupille correspond avec une précision étonnante à la pente moyenne, mais sur une sous-pupille de diamètre $\beta \approx 0.797$.

A titre d’application numérique utilisant la figure 1.8, on notera que dans le cas de COMEONPLUS ($\beta \approx 0.15$) on a une réduction d’un facteur 3 de la variance de l’angle d’arrivée dans les sous-pupilles lorsque l’on corrige le tilt sur la pupille.

1.1.6 La phase oui, mais sans piston

Du fait que le mode piston n’a aucune influence sur l’image, il est systématiquement ignoré en optique adaptative. Ce paragraphe montre qu’il a cependant sa place dans la structure de la phase turbulente sur la pupille. De plus, l’étude sert de support pour certains calculs du chapitre suivant. Et enfin, les propriétés originales que je montre m’ont paru importantes sans que j’ai eu l’occasion de les rencontrer auparavant.⁴ Aussi je les inscris dans ce dernier paragraphe sur la structure spatiale

⁴La non-uniformité de $\langle \psi(x)^2 \rangle$ sur la pupille a été constatée et étudiée de manière indépendante par J.M. Conan et décrite dans sa thèse.

de la phase turbulente.

On a souvent l'habitude de parler de la phase en général en omettant le mode piston, et pour plusieurs raisons. La plus simple à invoquer est que le mode piston n'a aucune influence sur la qualité d'image. Une des raisons cachées est que la variance du mode piston est infinie dans l'hypothèse d'une turbulence à caractéristiques fractales sans échelle externe. Soit $\phi(x)$ la phase du front d'onde incident. Il est impossible de parler de $\langle \phi(x)^2 \rangle$ car cette quantité n'est pas définie. Il est de même impossible de parler de $\langle \phi(x).\phi(y) \rangle$. Ces quantités sont néanmoins couramment employées dans la littérature, et ce non pas parce que l'échelle de turbulence est toujours finie (ce serait un argument qui permettrait de justifier leur utilisation mais ce n'est pas la bonne raison) mais parce que la phase dont parlent les opticiens non-interférométristes est toujours

$$\psi(x) = \phi(x) - \frac{1}{S} \int_P \phi(u) du \quad (1.57)$$

c'est-à-dire la phase définie sur la pupille du télescope et qui a une valeur moyenne nulle (le support P de l'intégrale désigne la pupille). Dans ces conditions $\langle \psi(x)^2 \rangle$ existe, ainsi que $\langle \psi(x).\psi(y) \rangle$: je voudrais ici obtenir une expression de ces quantités, qui interviennent sans cesse en optique adaptative. Une grandeur qui ne subit pas les effets du mode piston est la fonction de structure de phase $D_\phi(x, y) = \langle (\phi(x) - \phi(y))^2 \rangle$. Le calcul de la valeur de la covariance de la phase s'effectue ainsi:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(x) - \frac{1}{S} \int_P \phi(u) du \\ &= \frac{1}{S} \int_P \phi(x) - \phi(u) du \end{aligned} \quad (1.58)$$

On multiplie l'expression précédente par $\psi(y)$ et l'on moyenne sur les évènements:

$$\langle \psi(x).\psi(y) \rangle = \frac{1}{S^2} \int_P \int_P \langle (\phi(x) - \phi(u))(\phi(y) - \phi(v)) \rangle du dv \quad (1.59)$$

On utilise le produit remarquable $2(x - u)(y - v) = -(x - y)^2 + (x - v)^2 + (u - y)^2 - (u - v)^2$ pour obtenir

$$\langle \psi(x).\psi(y) \rangle = \frac{1}{2S^2} \int_P \int_P -D_\phi(x, y) + D_\phi(x, v) + D_\phi(y, u) - D_\phi(u, v) du dv \quad (1.60)$$

On peut séparer cette expression en 4 parties, et intégrer par rapport aux variables d'intégration les fonctions qui n'en dépendent pas:

$$\begin{aligned} \langle \psi(x).\psi(y) \rangle &= -\frac{1}{2}D_\phi(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2S} \int_P D_\phi(x, v) dv + \frac{1}{2S} \int_P D_\phi(y, u) du \\ &\quad - \frac{1}{2S^2} \int_P \int_P D_\phi(u, v) du dv \end{aligned} \quad (1.61)$$

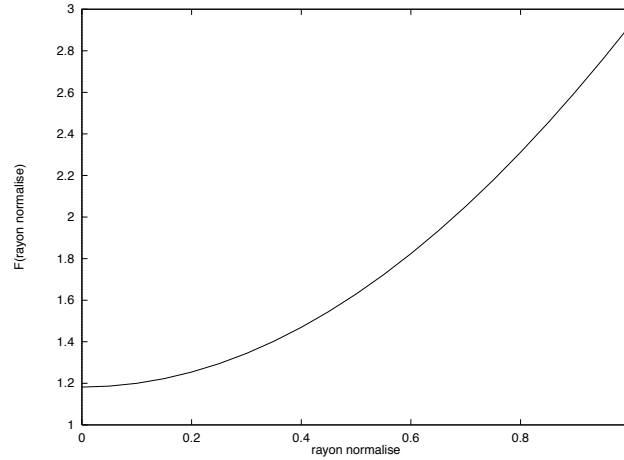


Figure 1.9: Représentation de la coupe à travers le diamètre de la pupille de la fonction $F(x)$ (voir texte). Les abscisses sont normalisées par rapport au rayon du télescope, les ordonnées exprimées en unités $(D/r_0)^{5/3}$.

J'introduis la fonction

$$F(x) = \frac{1}{S} \int_P D_\phi(x, u) du \quad (1.62)$$

qui permet d'alléger les calculs. Malheureusement je n'ai pu en obtenir une forme analytique. J'en donne une expression approchée à la fin de cette partie, et la figure 1.9 en donne une représentation. L'expression de la covariance de phase se transforme en

$$2 \langle \psi(x) \cdot \psi(y) \rangle = -D_\phi(x, y) + F(x) + F(y) - \frac{1}{S} \int_P F(u) du \quad (1.63)$$

Notons que lorsque $x = y$ cette expression se simplifie car le premier terme du membre de droite est nul, et les deux termes centraux sont égaux.

$$\langle \psi(x)^2 \rangle = F(x) - \frac{1}{2S} \int_P F(u) du \quad (1.64)$$

Le deuxième terme du membre de droite ne dépend pas de x . En revanche, le premier en dépend fortement. Cela montre un aspect étonnant à première vue de $\langle \psi(x)^2 \rangle$. La variance de phase sur la pupille n'est pas uniforme: elle est d'autant plus grande que l'on se rapproche du bord de la pupille. Une application immédiate -mais pas sérieuse- est par exemple la conception d'un miroir déformable: il faut prévoir une course plus importante pour les actuateurs sur la périphérie de la pupille. Bien que cette affirmation puisse paraître aberrante à première vue, c'est en fait ce qui est implicitement fait dans tout système par l'adjonction d'un miroir tip-tilt: celui-ci a une course nulle au centre et maximale sur les bords.

On note que si l'on intègre la valeur de $\langle \psi(x)^2 \rangle$ sur la pupille dans la relation

1.64 on doit retrouver la variance de phase de Noll ⁵ notée Δ_2 :

$$\Delta_2 = \int_P \langle \psi(x)^2 \rangle dx = \frac{1}{2S} \int_P F(x) dx \quad (1.65)$$

On peut donc remplacer dans la relation 1.64:

$$\langle \psi(x)^2 \rangle = F(x) - \Delta_2 \quad (1.66)$$

et également

$$\langle \psi(x)\psi(y) \rangle = -\frac{1}{2}D_\phi(x, y) + \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) - \Delta_2 \quad (1.67)$$

On peut également résoudre analytiquement $F(0) = 1.182 \left(\frac{D}{r_o}\right)^{5/3}$, d'où $\langle \psi(0)^2 \rangle = 0.15 \left(\frac{D}{r_o}\right)^{5/3}$. Une bonne approximation, parfaitement empirique, de $F(r)$ est $(1.1820 + 1.7414 (r/R)^{1.95}) \left(\frac{D}{r_o}\right)^{5/3}$.

L'intérêt de ce paragraphe est donc d'une part de prendre conscience que $\langle \psi(x)^2 \rangle$ n'est pas uniforme sur la pupille, et d'obtenir une expression de $\langle \psi(x)\psi(y) \rangle$.

1.1.7 Les propriétés temporelles

Cette section a pour but la présentation des propriétés temporelles de la phase turbulente, selon l'hypothèse Kolmogorov. Elle comprend deux parties distinctes. La première est une présentation de propriétés déjà bien connues. La deuxième partie traite des propriétés temporelles de la phase vue à travers un Shack-Hartmann, c'est une partie inédite. Je l'ai développée en raison de la discordance apparente entre les spectres temporels de la phase selon Kolmogorov et les spectres obtenus expérimentalement.

Théorie générale

Je présente ici les généralités concernant les propriétés temporelles de la phase. Ces notions seront réutilisées dans les chapitres suivants.

Les propriétés temporelles des fluctuations de phase que l'on trouve dans la littérature découlent toutes d'une hypothèse de base: l'hypothèse de Taylor (Taylor 1938), ou approximation de la turbulence gelée. Selon cette hypothèse, la turbulence est représentée comme un écran de phase gelé qui se translate à vitesse constante devant la pupille du télescope. J'en reparlerai plus en détail dans la section 3.7.1. On invoque souvent la justification de cette hypothèse par le fait que le milieu atmosphérique turbulent est

⁵On rappelle que $\Delta_2 = 1.03 \left(\frac{D}{r_o}\right)^{5/3}$

stratifié en une série de couches discrètes qui agissent comme autant d'écrans de phase. À chaque couche correspond une vitesse de vent, qui serait la vitesse de translation de l'écran dans l'approximation de Taylor.

De nombreux auteurs ont étudié les paramètres temporels de l'évolution turbulente. On peut citer dans l'ordre chronologique, et en étant sûr d'en oublier un grand nombre, Clifford (1971), Greenwood & Fried (1976), Hogge & Butts (1976), Fields (1983), Acton (1992), Conan et al. (1992), Madec et al. (1992), Roddier et al. (1993). Sont étudiés à travers ces articles les densités spectrales de puissance de la phase, ou de ses dérivées premières ou secondes, ou encore les spectres de puissance des coefficients des polynômes de Zernike, et tout ceci dans le cas d'ondes plane ou sphérique.

Je ne rentrerai pas dans le détail du calcul, car le sujet est couvert et il suffit de se référer à ces articles. Les calculs sont a priori assez rebutants et l'étude de certains cas particuliers fait parfois intervenir des développements analytiques complexes. Aussi, le meilleur article de synthèse sur le sujet est certainement celui de Conan et al. (1992), qui propose une théorie de calcul réunissant les différents cas de figure de calcul des spectres de puissance des multiples grandeurs attachées à la phase: coefficients de décomposition modale, angles d'arrivée -différentiels ou pas-, piston différentiel, courbure, etc.

Je voudrais donner ici non pas le calcul, mais une sorte de description vulgarisée de la démarche permettant d'obtenir les résultats.

Tout d'abord, Conan fait remarquer que les différentes grandeurs associées à la phase et dont on cherche le spectre peuvent toutes s'exprimer comme une convolution entre l'écran de phase et une fonction (ou une distribution) donnée. Représentons-nous la phase comme un écran de phase infini au dessus de la pupille. Pour connaître la valeur en tout point de la décomposition modale, il suffit de convoluer cet écran par le mode considéré. Pour en connaître l'angle d'arrivée en tout point, c'est une convolution d'abord par la dérivée de $\delta(x)$, puis par la fonction pupille⁶.

Une fois obtenue en tout point la fonction cherchée, il suffit de faire une 'coupe' dans ce champ scalaire (que Conan appelle G): cela correspond à identifier les points qui passent au dessus de la pupille lorsque l'écran de phase se translate avec le temps (hypothèse de Taylor). Cette coupe est donc le signal temporel correspondant à la grandeur cherchée. Il n'y a maintenant plus qu'à autocorréler ce signal, une transformée de Fourier nous en fournira alors le spectre.

Trois propriétés permettent de simplifier l'approche. D'abord, en raison de l'invariance des propriétés statistiques de la phase par rapport aux variables d'espace, l'autocorrélation de la 'coupe' équivaut à la coupe de l'autocorrélation. Ensuite, l'autocorrélation du produit de convolution de deux fonctions est égale à la convolution des fonctions d'autocorrélation des deux fonctions. Enfin, la traduction dans l'espace de Fourier d'une coupe dans l'espace 'image' n'est autre qu'une intégration de la transformée de Fourier le long d'une direction perpendiculaire à la coupe.

⁶On rappelle que le produit de convolution est associatif

À partir de maintenant la démarche peut entièrement être décrite dans l'espace de Fourier. Le spectre de puissance de la phase est multiplié par le spectre de puissance de la 'fonction convolutive', et intégré le long de la direction perpendiculaire à la direction du vent.

Je rappelle les principales grandeurs données par Conan:

phase ϕ		-8/3	
$\frac{\partial\phi}{\partial x}$		-2/3	
différence de phase	-2/3	-8/3	
angle d'arrivée (pente moyenne)	-2/3	-11/3	
piston	-8/3	-17/3	
angle d'arrivée différentiel	+4/3	-2/3	-11/3
piston différentiel	-2/3	-8/3	-17/3
tilt de Zernike	-2/3	-17/3	
$Z_{n,0}$	0	-17/3	
autres polynômes de Zernike	≥ 0	-17/3	

La pente à basse fréquence des polynômes de Zernike d'ordres plus élevés que le tilt est variable. Excepté pour les polynômes d'ordre azimutal $m = 0$ (symétriques de révolution) qui sont en f^0 à basse fréquence, la pente basse fréquence des autres polynômes dépend de la direction du vent (Conan et al. 1992).

On notera qu'à haute fréquence la pente du spectre est d'autant plus raide qu'elle est vue à travers un système qui moyenne la phase. En moyennant la phase ou sa dérivée sur une ouverture, on 'perd' une puissance 3 dans l'exposant. Donc tout ce qui se rattache à l'aspect modal (moyenne de la phase) passe de -8/3 à -17/3, et ce qui se rattache à l'angle d'arrivée (moyenne de la dérivée) passe de -2/3 à -11/3.

Concernant l'angle d'arrivée, la zone basse fréquence où l'on observe une pente $-2/3$ est une zone où la sous-pupille se comporte comme un bon approximateur de la dérivée de la phase. Au-delà de cette zone, les structures du front d'onde qui donnent lieu à la décroissance en $-11/3$ sont des structures de taille comparable ou inférieure à la taille de la sous-pupille.

Les propriétés temporelles de la phase vue à travers un Shack-Hartmann

Je me propose ici de calculer le spectre théorique des fluctuations des coefficients des polynômes de Zernike, tels que reconstruits à travers un Shack-Hartmann. C'est je pense un travail inédit, que j'ai développé en raison de la discordance entre les spectres temporels des coefficients modaux de la phase selon Kolmogorov, et les mêmes spectres obtenus expérimentalement (j'y reviendrai dans le chapitre 3). Ce désaccord a reçu des tentatives d'explications basées sur la structure stratifiée complexe de l'atmosphère, la non-application de l'hypothèse de Taylor et le repliement

spatial, qui, bien que plausibles, n'expliquaient à mon avis pas la constance du désaccord et ne quantifiaient pas la proportion de chaque hypothèse. L'étude faite dans ce chapitre met fin au doute pesant sur ces notions.

L'analyseur est vu comme un opérateur linéaire entre la phase et le coefficient modal reconstruit. En effet, on reconstruit ce coefficient h par une combinaison linéaire des pentes p_i données par l'analyseur, c'est-à-dire

$$h = \sum_i c_i p_i \quad (1.68)$$

Chaque pente p_i n'étant autre que le gradient (en x ou en y) de la phase intégré sur une sous-pupille. On peut donc passer du champ scalaire de la phase $\phi(x, y)$ au champ scalaire des $h(x, y)$ par une convolution. Ainsi, l'approche de Conan (1992) peut être suivie.

Si l'on définit $\Pi(x)$ comme étant la fonction "porte", a le côté des sous-pupilles, et (x_i, y_i) les coordonnées des centres des sous-pupilles, la reconstruction par le Shack-Hartmann est équivalente à une convolution entre la dérivée de la phase et la fonction

$$\sum_{i=1}^{nb \ ssp} \Pi\left(\frac{x - x_i}{a}\right) \Pi\left(\frac{y - y_i}{a}\right) c_i \quad (1.69)$$

dont la transformée de Fourier est

$$F(\nu, \eta) = \sum_i^{nb \ ssp} c_i e^{-2i\pi x_i \nu} e^{-2i\pi y_i \eta} \frac{\sin(\pi a \nu)}{\pi \nu} \frac{\sin(\pi a \eta)}{\pi \eta} \quad (1.70)$$

On trouve le spectre cherché par:

$$S(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu, \eta)|^2 (\nu^2 + \eta^2)^{-11/6} \eta^2 d\nu \quad (1.71)$$

Je remplace $F(\nu, \eta)$ par son expression, en "sortant" de l'intégrale les termes indépendants de ν . Il vient

$$S(\eta) = \frac{2 \sin^2(\pi a \eta)}{\pi^4} \int_0^{+\infty} \sin^2(\pi a \nu) \left| \sum_i^{nb \ ssp} c_i e^{-2i\pi(x_i \nu + y_i \eta)} \right|^2 \frac{(\nu^2 + \eta^2)^{-11/6}}{\nu^2} d\nu \quad (1.72)$$

A ce niveau de développement du calcul, il est aussi difficile de procéder à une intégration analytique que numérique. Numériquement, des problèmes de précision numérique apparaissent très vite lorsque η tend vers 0. Pour cette raison, il est nécessaire de modifier cette intégrale à l'aide d'un changement de variable permettant d'augmenter la résolution des points de calculs au voisinage de 0. Un bon choix consiste à faire le changement de variable $\nu = e^t$. On obtient alors

$$S(\eta) = \frac{2 \sin^2(\pi a \eta)}{\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(\pi a e^t) \left| \sum_i^{nb \ ssp} c_i e^{-2i\pi(x_i e^t + y_i \eta)} \right|^2 \frac{(e^{2t} + \eta^2)^{-11/6}}{e^t} dt \quad (1.73)$$

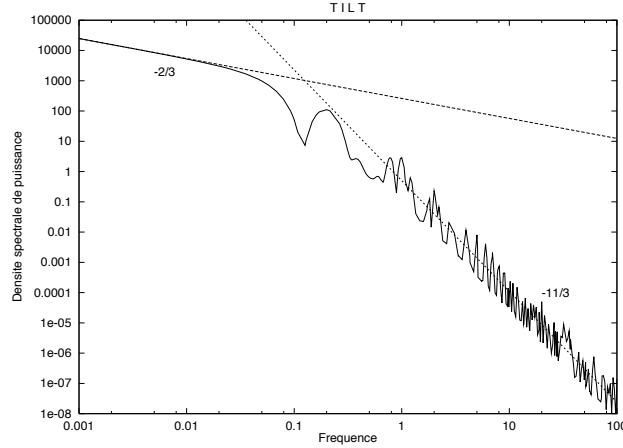


Figure 1.10: Spectre du coefficient du tilt, tel que reconstruit avec un Hartmann 7×7 doté d'une occultation centrale de diamètre 0.436. La matrice de commande est obtenue par calcul de l'inverse généralisée d'une matrice d'interaction à 35 polynômes de Zernike (2 à 36).

Les figures 1.10 à 1.12 illustrent les spectres de différents modes reconstruits par un Hartmann similaire à celui de COMEONPLUS : 7×7 sous-pupilles, et une occultation centrale de 0.436 fois le diamètre de la pupille. Les coefficients de la matrice de commande sont obtenus en calculant l'inverse généralisée d'une matrice d'interaction à 35 polynômes de Zernike (Z_2 à Z_{36}). Seule la Fig. 1.13 est calculée pour un Hartmann de 15×15 avec 77 polynômes de Zernike, la géométrie de la pupille restant inchangée. Les spectres obtenus sont édifiants. Ils règlent pour de bon le problème de la pente haute fréquence mesurée sur les systèmes COMEON et COMEONPLUS. En effet la simulation prouve que la pente haute fréquence théorique des fluctuations du mode reconstruit avec l'analyseur est proportionnelle à $f^{-11/3}$, et non à $f^{-17/3}$.

Interprétation physique Est-il possible, à partir d'une famille de signaux très corrélés entre eux (les fluctuations des pentes) et de même spectre en $-11/3$ à haute fréquence, d'obtenir par combinaison linéaire un signal en $-17/3$? Prenons deux pentes, $s_1(t)$ et $s_2(t)$. La transformée de Fourier sera notée $\tilde{\cdot}$. On sait donc que $\langle |\tilde{s}_1|^2 \rangle = \langle |\tilde{s}_2|^2 \rangle$ sont proportionnels à $f^{-11/3}$. Calculons $\langle |a \tilde{s}_1 + b \tilde{s}_2|^2 \rangle$. On posera $\tilde{s}_1 = |\tilde{s}_1| e^{i\phi_1}$ et de même pour \tilde{s}_2 .

$$\begin{aligned} \langle |a \tilde{s}_1 + b \tilde{s}_2|^2 \rangle &= \langle a^2 |\tilde{s}_1|^2 + b^2 |\tilde{s}_2|^2 + 2ab |\tilde{s}_1| |\tilde{s}_2| \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle \\ &= (a^2 + b^2) f^{-11/3} + 2ab \langle |\tilde{s}_1| |\tilde{s}_2| \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle \end{aligned} \quad (1.74)$$

Il faut, pour obtenir quelque chose de proportionnel à $f^{-17/3}$, que les $f^{-11/3}$ se compensent. Si $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ ne tend pas vers 1 à haute fréquence, il n'y a aucune chance de voir ce résultat arriver. En un mot, il est nécessaire que la distribution fréquentielle de la corrélation croisse avec la fréquence. Malheureusement, il en va

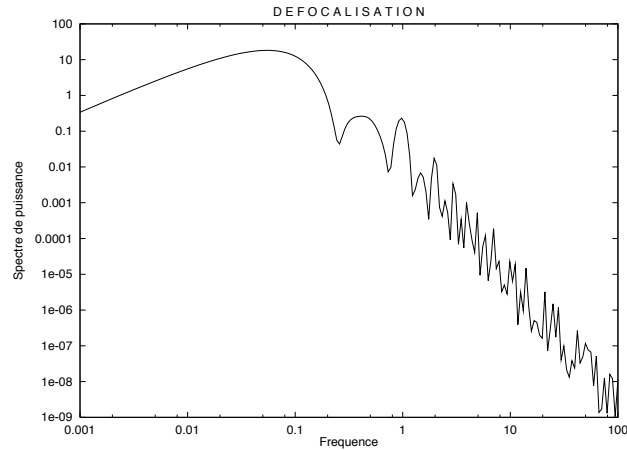


Figure 1.11: Spectre du coefficient de la défocalisation, tel que reconstruit avec un Hartmann 7×7 doté d'une occultation centrale de diamètre 0.436. Matrice de commande sur 35 polynômes de Zernike (2 à 36). La pente haute fréquence est en $f^{-11/3}$.

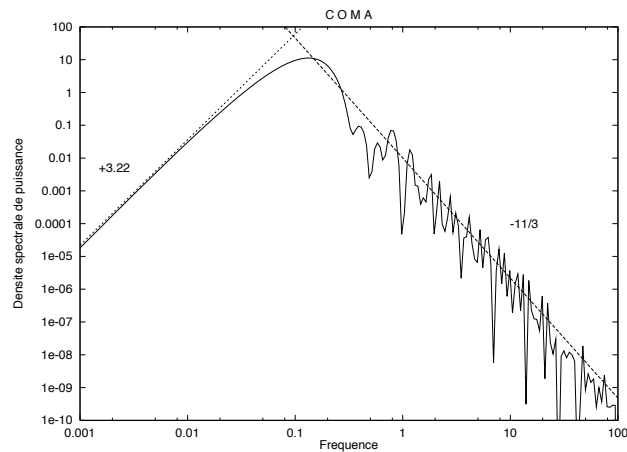


Figure 1.12: Spectre du coefficient de la coma, tel que reconstruit avec un Hartmann 7×7 doté d'une occultation centrale de diamètre 0.436. Matrice de commande sur 35 polynômes de Zernike (2 à 36).

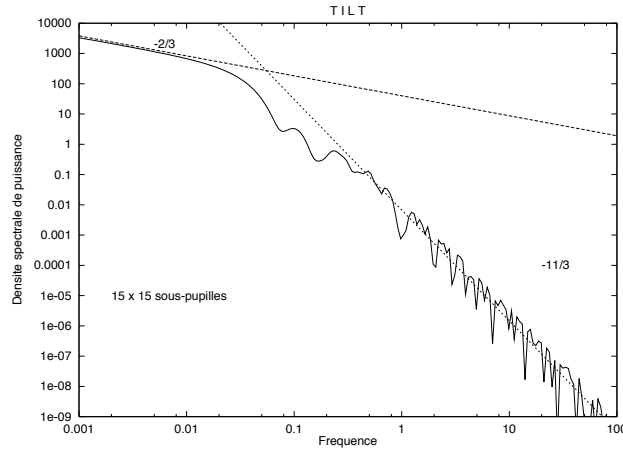


Figure 1.13: Spectre du coefficient du tilt, tel que reconstruit avec un Hartmann 15×15 doté d'une occultation centrale de diamètre 0.436. Matrice de commande sur 77 polynômes de Zernike (2 à 78).

précisément à l'inverse dans la turbulence. Comment les pentes de sous-pupilles voisines pourraient-elles être corrélées à haute fréquence, quand les structures responsables de ces hautes fréquences temporelles sont d'une échelle spatiale inférieure à la taille des sous-pupilles ? Ainsi, quelle que soit la combinaison linéaire effectuée sur les pentes, on n'obtiendra que des grandeurs dont le spectre à haute fréquence est en $f^{-11/3}$.

Imaginons néanmoins un Shack-Hartmann doté d'une infinité de sous-pupilles. En supposant une expérience idéale sans aucun bruit sur les mesures, on aurait alors accès au gradient exact de la phase. Dès lors, rien n'empêche de remonter à la phase et donc au tilt *exact*. Où se situe donc la limite entre notre Hartmann et celui-ci ? La réponse est simple. Après la fréquence de coupure du spectre des pentes $f_{pentes} \simeq V/2d$ ⁷, le spectre est dominé par des fluctuations non corrélées entre les sous-pupilles. En revanche, en deçà de f_{pentes} les fluctuations sont corrélées et c'est seulement dans cette zone que l'on peut espérer obtenir un spectre en $-17/3$ par combinaison linéaire des pentes. Sachant que la fréquence de coupure du tilt est de $f_{tilt} \simeq V/2D$,⁸ elle est inférieure à f_{pentes} d'un facteur égal au nombre de sous-pupilles. Ainsi, le comportement asymptotique en $-17/3$ n'est visible que dans une plage de fréquences $f_{tilt} < f < f_{pentes}$. Cette zone est d'autant plus large que le Shack-Hartmann comporte plus de sous-pupilles. En tenant compte de la largeur des zones de transition entre les différents régimes de fréquences (zones qui sont de l'ordre de grandeur de 1.5 décade), il faut donc au moins une trentaine de sous-pupilles pour pouvoir commencer à suspecter la présence du régime en $-17/3$. Aucun cas de figure à 30×30 sous-pupilles n'est illustré ici. En effet, le temps de calcul

⁷ V la vitesse du vent et d le diamètre de la sous-pupille

⁸ D le diamètre du télescope

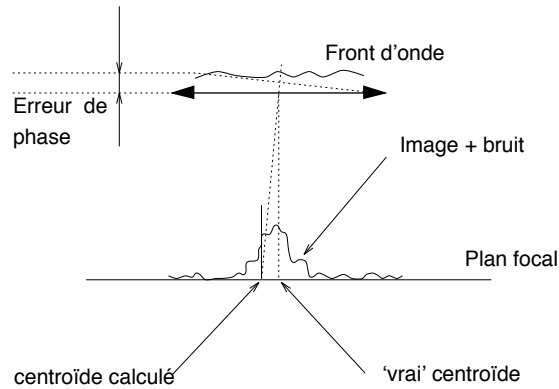


Figure 1.14: Représentation schématique de l'erreur de phase sur une sous-pupille.

devient prohibitif si l'on veut être certain de la précision atteinte. Un cas à 15×15 sous-pupilles est illustré figure 1.13, et montre que comme prévu cette configuration reste toujours insuffisante pour faire apparaître le comportement $-17/3$ souhaité.

Je montre dans la section 1.3.2 que cet effet est la traduction sur l'aspect temporel du repliement spatial dû à l'échantillonnage limité du senseur.

1.2 Bruits de détection

Cette section traite du bruit de mesure dans l'analyse de front d'onde dans le cas du Hartmann en l'abordant sous des angles multiples. Je le traite car comme je l'ai déjà dit, la compréhension et l'optimisation du phénomène me semblent aussi importantes que l'optimisation du contrôle modal. Je commence donc par les rappels théoriques bien connus qui s'imposent, puis je fais la liste des paramètres qui y font entorse. Dans cette liste je développerai plus particulièrement les effets du fond du ciel, du seuillage et des sous-pupilles éteintes. Le but est d'optimiser le système en tenant compte de leurs influences; je montre que ces effets sont dépendants de variables dont on a –ou on va avoir, prochainement avec ADONIS – la maîtrise.

Avant toute chose, le bruit étant un bruit de mesure, il s'exprime dans la même unité que la mesure. Le Shack-Hartmann mesure la différence de phase moyenne entre les bords de la sous-pupille, le bruit sera donc la variance sur la différence de phase moyenne, σ_ϕ^2 (Fig. 1.14). Il sera donné à la longueur d'onde d'analyse. S'agissant d'une variance sur une *phase*, il est proportionnel à λ^{-2} .

Les erreurs qui peuvent survenir dans l'analyse de front d'onde sont de plusieurs origines. Je veux parler dans ce paragraphe des erreurs sur la mesure de la position du centre de gravité des spots du Hartmann. La source principale d'erreur vient du nombre fini de photons reçus, faisant que le bruit de lecture du détecteur n'est pas négligeable, ou -limitation plus fondamentale- que le centroïde n'est pas déterminé avec une précision

infinie. Beaucoup d'auteurs ont écrit sur ce sujet (Rousset et al. 1987). Un document de synthèse résumant les différents cas de figure est donné par Rousset (Rousset 1994), en particulier d'après des travaux initiaux tirés de Rousset et al. (1987). On doit différencier deux fois deux cas de figure. Tout d'abord séparer deux régimes; l'un où le bruit de photon domine, l'autre où le bruit de lecture du détecteur est prépondérant. Pour chacun de ces deux cas il faut différencier les cas où la taille des spots formés au foyer de chaque sous-pupille est limitée par la turbulence ou par la diffraction.

Le tableau qui suit reprend l'article de Rousset (Rousset 1994):

	bruit de photon		bruit de lecture	
$d \gg r_0$	$\sigma_\phi^2 = \frac{\pi^2}{2} n^{-1} N_T^2 N_D^{-2}$ [1]	·	$\sigma_\phi^2 = \frac{\pi^2}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_s^4 N_D^{-2}$ [4]	·
	$= 7.2 n^{-1} (d/r_0)^2$ [2]	·	$= \frac{\pi^4}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_D^2 (d/r_0)^4$	·
	$= 2\pi n_o^{-1} r_0^{-2}$ [3]	·	$= \frac{\pi^4}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_D^2 [(d/r_0)^2 + (l/N_D)^2]^2$ ♣	♣
	$= 7.2 n^{-1} [(d/r_0)^2 + (l/N_D)^2]$ ♣ EBCCD, détecteur intensifié	♣	CCD nu, EBCCD avec fond de ciel	
$d \ll r_0$	$\sigma_\phi^2 = 7.2 n^{-1}$	·	$\sigma_\phi^2 = \frac{\pi^4}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_D^2$	·
	$= 7.2 n^{-1} [1 + (l/N_D)^2]$ ♣	♣	$= \frac{\pi^4}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_D^2 [1 + (l/N_D)^2]^2$ ♣ Analyseur IR	♣

avec les notations suivantes:

r_0 paramètre de Fried à la longueur d'onde d'analyse

n nombre de photoélectrons par sous-pupille et par trame

n_o nombre de photoélectrons par m^2 et par trame

d côté d'une sous-pupille

N_s^2 nombre *total* de pixels utilisés dans le calcul du centre de gravité (par exemple

$N_s^2 = \pi \frac{\lambda}{r_0}$ exprimé en pixels pour la tache de seeing)

N_T largeur à mi-hauteur du spot, en *pixels*

N_D valeur de λ/d exprimée en *pixels*

l largeur de l'objet à mi-hauteur, ou bien demi-largeur à la base, exprimée en *pixels*

σ_e valeur du bruit de lecture électronique ramené en nombre de photoélectrons par pixel.

Si le dispositif est intensifié, le rapport entre les deux est le gain.

· formule valide pour un objet ponctuel seulement

♣ formule valide pour un objet étendu

σ_ϕ^2 variance de phase, exprimée à la longueur d'onde d'analyse

[1] (Rousset 1994)

[2] (Cuby et al. 1990b)

[3] (Rigaut & Gendron 1992)

[4] (Rousset 1994). Voir hypothèses de calcul paragraphe 1.2.2

L'article de Séchaud et al. (1991) donne des formules de calcul de bruit pour les objets étendus similaires à celles données dans ce tableau. La séparation en deux régimes distincts, l'un $d \ll r_0$, l'autre $d \gg r_0$, permet de bien saisir les différences de comporte-

ment du bruit selon que l'on est ou non limité par la turbulence. Pour avoir une équation valable quel que soit le régime et la taille angulaire de l'objet on prendra

bruit de photon	bruit de lecture
$\sigma_\phi^2 = 7.2 n^{-1}[1 + (d/r_0)^2 + (l/N_D)^2]$	$\sigma_\phi^2 = \frac{\pi^4}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_D^2 [1 + (d/r_0)^2 + (l/N_D)^2]^2$

De plus, le bruit de photon existe même si le bruit de lecture domine, et vice-versa. Donc une expression du bruit tout à fait générale est simplement la somme des deux expressions précédentes.

D'autre part, il faut noter que le facteur 7.2 ici est approximatif. C'est un facteur 2π pour certains, $\pi^2/2$ pour d'autres. Tout dépend des hypothèses (autant dans le cas bruit de photon que bruit de lecture) prises pour le calcul. Ce dernier fait intervenir le moment d'ordre 2 de la distribution d'intensité des spots, lequel n'existe en général pas ! En effet la variance associée à une distribution en forme de tache d'Airy n'est pas définie, à moins de seuiliser cette tache, ou de se limiter à un nombre fini d'anneaux, ou encore de l'approximer par une gaussienne (qui a l'avantage de faire converger manu militari les intégrales les plus récalcitrantes). Bref il faut à un moment ou à un autre passer par une hypothèse simplificatrice qui traduit empiriquement et de manière globale la limitation de champ de l'analyseur autant que le seuillage quasi obligatoire appliqué à l'image. Cette hypothèse est à l'origine de la fluctuation du coefficient multiplicatif selon les auteurs, l'un n'ayant pas forcément plus raison que l'autre. De même, le paramètre l qui tient compte de la taille angulaire propre de l'objet est déclaré ici comme la largeur de l'objet à mi-hauteur, ou bien sa demi-largeur à la base. Derrière ce flou se cache en fait un nombre qui n'est pas sans rapport avec le moment d'ordre 2 de la distribution d'intensité de l'objet. Si l'objet s'apparente à une gaussienne, alors $l = \text{FWHM}$ est un bon compromis. Si l'objet est plutôt 'empâté' à la base, $l = 2 \text{ FWHM}$, voire 3, n'est pas une valeur stupide. Ce flou généralisé n'existe pas seulement dans ces lignes mais aussi dans la réalité, et c'est pourquoi les valeurs du bruit peuvent varier d'un facteur 2 d'une nuit et d'un expérimentateur à l'autre.

Ce paragraphe représente donc l'état des connaissances générales en matière de bruit de mesure. Lorsque l'on fait allusion à un détecteur limité par le bruit quantique, c'est à une formule en n^{-1} que l'on pense aussitôt; par le bruit de lecture, en n^{-2} . J'espère prouver par la suite qu'il ne faut pas s'arrêter là: l'expression expérimentale réelle du bruit recèle plus de subtilités.

1.2.1 Les phénomènes non paramétrables

Contrairement au paragraphe précédent qui présente les choses sous leur aspect idéal, je présente ici quelques-uns des divers phénomènes qui sont souvent oubliés dans

l'évaluation théorique du bruit. L'expérience sur le terrain que j'ai pu acquérir avec COMEONPLUS m'a particulièrement fait prendre conscience de leur importance. Ne sont-ils vraiment pas paramétrables ? En fait la vilenie de leur mode d'action rend la tâche ingrate au point de décourager d'avance les plus acharnés, surtout quand on sait qu'ils dépendent souvent de paramètres auxquels on n'a pas accès.

1. La réponse impulsionnelle des intensificateurs joue un rôle important dans le cas de la limitation par le bruit de lecture, puisque le bruit de mesure est extrêmement dépendant de la taille angulaire des spots. Le constructeur des intensificateurs donne le plus souvent la MTF. Celle-ci ne vaut que pour un montage optomécanique parfait. Dans le cas de COMEONPLUS, où l'analyseur fort flux est équipé de deux tubes intensificateurs, la moindre erreur dégrade très vite cette MTF qui se traduit par une taille d'objet l non nulle et difficile à évaluer.
2. Le Shack-Hartmann est formé de microlentilles carrées plaquées sur une pupille circulaire ce qui conduit inévitablement à obturer certaines sous-pupilles, les privant ainsi d'une partie du flux. Elles ne se comportent donc pas comme leurs voisines du point de vue du bruit. Dans le cas de COMEONPLUS le seuillage de l'image est le même pour toutes les sous-pupilles. Si le seuillage est adapté pour la majorité des spots, il ne l'est pas pour les sous-pupilles obturées. Cet effet a souvent conduit à adopter un compromis de manière à laisser suffisamment de flux aux sous-pupilles obturées quitte à seuiller 'un peu trop bas' les autres. Ce compromis étant réalisé à la main, il dépendait malheureusement de l'habileté de l'expérimentateur.
3. Le bruit de lecture du détecteur n'est pas spatialement décorrélé. La conséquence de cet effet est un bruit de mesure différent entre les directions x et y . La constatation de ce phénomène est courante sur COMEONPLUS.
4. La largeur du spot, même si elle n'est pas élargie par la réponse impulsionnelle du tube intensificateur, ne suit pas forcément précisément une loi en $1/r_0$. La structure de la turbulence n'est pas toujours de type Kolmogorov. On a déjà vu (mission COMEONPLUS de Juillet 93 notamment) des cas où une moitié de la pupille présentait des spots 'sains' alors qu'ils étaient bien plus larges dans l'autre moitié du Hartmann. L'effet est dû au seeing de dôme, incontestablement. Sa présence est parfois détectable car évidente. Parfois elle ne l'est pas.
5. La dispersion de gain de l'intensificateur est un élément important de tout intensificateur de brillance à base de galette de micro-canaux. Cette dispersion se traduit par un facteur de bruit multiplicatif $\sqrt{1 + \sigma_g^2/g^2}$, σ_g étant la fluctuation du gain g .

6. Le fond du ciel est rarement négligeable à partir du moment où la référence est de magnitude supérieure à $m_V \approx 11$.
7. Le courant d'obscurité de la photocathode et les ions contribuent également à accroître ce bruit.

Ces multiples effets coexistent toujours. Les amplitudes varient mais la probabilité pour qu'ils soient tous négligeables en même temps est en fait assez faible. Dans tous les cas rien ne peut contribuer à réduire le bruit: il est clair que quel que soit le phénomène mis en jeu, il y a toujours détérioration du signal. Ainsi dans la confrontation avec l'expérience il existera toujours un décalage; le bruit mesuré expérimentalement ne peut qu'être supérieur au bruit théorique.

1.2.2 Le fond de ciel

Parmi les paramètres précédents, la luminosité du fond de ciel dans le visible est certainement un de ceux qui apparaît très gênant à chaque observation. F. Rigaut (Thèse 1992) l'a déjà mentionné dans sa thèse. Mais COMEONPLUS est un instrument infra-rouge et est donc utilisé en période de pleine lune. Ce paragraphe en fait découvrir les conséquences.

La formule $\frac{\pi^2}{3} n^{-2} \sigma_e^2 N_s^4 N_D^{-2}$ (voir tableau précédent) est valable pour un bruit de lecture ou tout autre 'bruit de fond'. Le paramètre N_s^2 représente le nombre de pixels total sur lequel est fait le calcul du centre de gravité, c'est-à-dire le nombre de pixels où l'on voit 'dépasser' le bruit de fond non seillé. Mais le calcul de cette formule fait implicitement les hypothèses suivantes:

1. Dans le calcul du centre de gravité on néglige la fluctuation d'intensité du signal total intégré, et l'intégrale du bruit -tantôt positif tantôt négatif- est assimilée à 0.
2. Le bruit est non corrélé entre deux pixels quelconques.
3. La variance du bruit est la même pour chaque pixel.

Comme on peut le comprendre intuitivement sur la figure 1.15, le bruit de lecture du détecteur est masqué partout par l'application d'un seuil, sauf là où se trouve le signal. Donc la prise en compte du bruit de lecture du détecteur se fera sur le nombre N_s^2 de pixels effectivement couverts par la tache image. Concernant les photons venant du fond du ciel, si le détecteur est intensifié le fond du ciel peut apparaître partout dans la sous-pupille, malgré l'application du seuil. Donc c'est un bruit dont la variance par pixel est totalement différente de celle du bruit de lecture du détecteur; en somme la variance du bruit dépend de la position du pixel, selon que celui-ci se trouve ou non dans le spot éclairé. C'est la première entorse faite aux

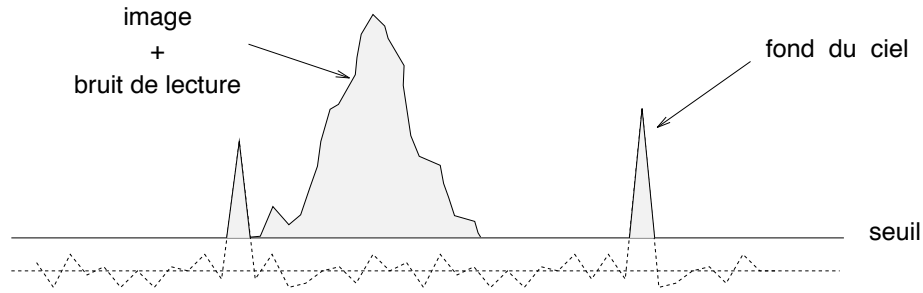


Figure 1.15: Représentation schématique du profil d'une image reçue sur l'analyseur (cas d'un détecteur intensifié). Voir texte.

hypothèses énoncées plus haut (la deuxième étant que la fluctuation du signal total n'est plus forcément négligeable, mais nous en reparlerons). Heureusement elle est contournable car on peut démontrer qu'il est possible d'ajouter la variance de l'erreur associée aux deux phénomènes, à condition de prendre le bon N_s^2 dans chaque cas.

Faisons une application numérique rapide en s'appuyant sur l'exemple de COMEONPLUS utilisé avec l'EBCCD. Le champ de l'analyseur est de $6''$ de diamètre soit $29''^2$, l'échelle de $0.75''$ par pixel. Dans le visible, $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ et le diamètre de la sous-pupille est $d = 51\text{ cm}$. Prenons $r_0 = 15\text{ cm}$. Prenons, comme toujours une transmission totale de 0.2, un rendement quantique de 0.1 sur une bande spectrale de $0.3\mu\text{m}$, un temps d'intégration de 10 ms, supposons le fond du ciel de magnitude 18 arcsec^{-2} , un bruit de 300 e^- et une intensification d'un facteur 1500. Enfin prenons un objet ponctuel de magnitude $m_V = 12$. On a donc pour l'objet $25\text{ phe}^-/\text{ssp}/\text{trame}$, et seulement $3\text{ phe}^-/\text{ssp}/\text{trame}$ pour le fond du ciel, c'est-à-dire $0.06\text{ phe}^-/\text{ssp}/\text{trame}/\text{pixel}$ en moyenne. Suivant une loi poissonnienne, la variance est égale à la moyenne et ce flux équivaut à un détecteur dont le bruit de lecture serait de $\sigma_e^2 = 0.06$. Le bruit de photons associé à l'objet est alors de 3.7 rd^2 d'après les formules classiques. Le bruit de lecture venant du détecteur contribue pour seulement 0.02 rd^2 . Le bruit dû au fond du ciel est de 10.9 rd^2 , il est prépondérant. Certes la magnitude de 18 arcsec^{-2} peut-elle sembler exagérée puisque l'on trouve dans (Allen 1976, Léna 1986) des nombres plus proches de $m_V = 21\text{ arcsec}^{-2}$. Mais ces nombres sont donnés dans la bande V seulement, ils ne considèrent pas la fluorescence de O_2 à $0.7619\mu\text{m}$, ($6 \cdot 10^9\text{ photons.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{sr}^{-1}$), et ils ne considèrent que l'émission propre du ciel nocturne dans des conditions photométriques, alors que COMEONPLUS est utilisé quel que soit l'état du ciel, même voilé, et étant considéré comme un instrument infra-rouge il est de plus systématiquement utilisé en période de pleine lune. J'ai effectué des tests photométriques sur le fond du ciel (3 Septembre 93, $9^{\text{h}}05\text{ TU}$) qui ont montré que $5.8\text{ photoélectrons/sous-pupille/trame}$ ont été détectés à une fréquence d'échantillonnage de 50 Hz à 17 degrés de la pleine lune (éclairage 0.95). Cela porte à une magnitude de $18 \pm 0.5\text{ arcsec}^{-2}$ le fond du ciel. Il y a donc tout lieu de surveiller ce paramètre, qui peut fausser les estimations d'un ordre de grandeur.

1.2.3 Seuillage en régime de bruit de photons

Poursuivons dans la même lignée que le paragraphe précédent, et allons un peu plus loin. Je veux maintenant mettre en évidence l'importance du seuillage et de ses caractéristiques.

Le seuillage des spots du Hartmann est une opération fréquemment utilisée. Elle a pour but premier d'éliminer le bruit de lecture du détecteur et elle permet de se débarrasser des problèmes de précision dans la soustraction du courant d'obscurité. En somme c'est un nettoyage préalable rapide de l'image. Le terme de seuil signifie ici que l'on retire la valeur du seuil à tous les pixels de l'image, et l'on assigne les pixels négatifs à une valeur nulle.

Voici la problématique: Reprenons l'exemple du paragraphe qui précède: la magnitude du halo de seeing de l'étoile de magnitude $m_V = 12$ sur le bord du diaphragme de champ (2" de rayon) équivaut (au minimum, car j'ai négligé l'influence de la FTO de la sous-pupille) à une magnitude 19 arcsec^{-2} , ou 18 pour un $r_0 = 10 \text{ cm}$. Intuitivement, on se doute qu'il ne suffit pas d'avoir un détecteur où le bruit de lecture équivalent est quasi-inexistant pour pouvoir réellement appliquer les formules de calcul de bruit dans l'hypothèse de la limitation par le bruit de photon. Ces formules supposent un écart-type de l'erreur proportionnel à la largeur à mi-hauteur de la tache image: c'est négliger totalement les pieds de la tache, c'est-à-dire que ceux-ci ont implicitement été supposés seuillés. Disposant d'un détecteur intensifié, il faut alors placer le seuil –toujours intuitivement– à une hauteur au moins égale à 1 "photoélectron intensifié". Mais après un tel seuillage, le calcul du centroïde n'est alors basé que sur la moitié des photoélectrons reçus (d'après une simulation). Donc à faible flux, l'opération de seuillage n'est pas innocente et influe significativement sur le bruit de mesure.

Pour étudier le problème, on supposera un détecteur parfait, impliquant que l'on soit uniquement limité par le bruit quantique du signal. L'image dans le plan focal des microlentilles se définit d'une part par la distribution de la répartition spatiale statistique de l'arrivée des photons dans le plan image (qui est en fait une image longue pose de l'image corrigée du tilt) et d'autre part à chaque point de cette distribution est associée la loi d'arrivée des photons qui suit une statistique Poissonienne ayant pour moyenne la valeur de la distribution à l'endroit considéré multipliée par le nombre total de photons. Le seuillage entraîne une modification des deux lois qui caractérisent l'image. La quantité de signal en un point ne suit plus une loi de Poisson, ce qui modifie d'une façon non triviale la distribution spatiale d'intensité. Le paragraphe suivant étudie la moyenne de la loi de Poisson seuillée.

Calcul de la moyenne de la loi de Poisson seuillée

Le but de ce paragraphe est de donner une expression de la moyenne de la loi de Poisson après seuillage. Ce calcul s'avère malheureusement complexe, et il est difficile de le mener à terme analytiquement. On le trouvera détaillé en annexe 4.1. Je n'ai reporté ici que quelques cas particuliers dans lesquels l'expression générale se simplifie.

La variable a désigne la moyenne de la loi Poissonienne, s désigne le seuil et $m(a, s)$ désigne la moyenne de la loi de moyenne a seuillée à s .

Lorsque le nombre de photons est faible ($a \ll 1$), on a

$$m(a, s) \approx \frac{a^{s+1}}{(s+1)!} \quad (1.75)$$

En revanche pour un grand nombre de photons on a

$$m(a, s) \approx a - s \quad (1.76)$$

C'est dans ce cas particulier que l'on pourra approximer la moyenne des images seuillées par l'image moyenne seuillée.

Pour le cas $a = s$ alors

$$m(s, s) = e^{-s} \frac{s^{s+1}}{s!} \quad (1.77)$$

Il est amusant de remarquer que l'on a, de manière empirique mais néanmoins avec une excellente précision

$$m(s, s) \approx s^{0.53}/2.72 \quad (\text{pour } 1 < s < 50) \quad (1.78)$$

On citera également quelques cas particuliers:

- $m(a, 1) = a - 1 + e^{-a}$
- $m(a, 2) = a - 2 + e^{-a}(2 + a)$
- $m(a, 3) = a - 3 + e^{-a}(3 + 2.a + a^2/2)$
- $m(a, 4) = a - 4 + e^{-a}(4 + 3.a + a^2 + a^3/6)$
- $m(a, 5) = a - 5 + e^{-a}(5 + 4.a + 3.a^2/2 + a^3/3 + a^4/24)$

Je propose deux exemples qui vont illustrer les équations précédentes.

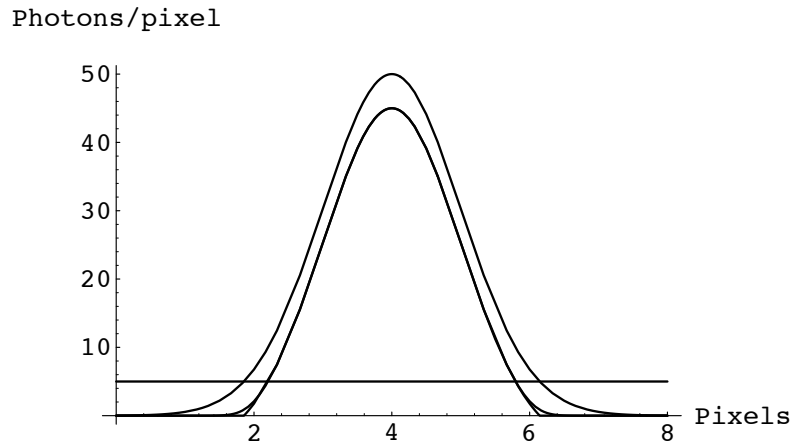


Figure 1.16: Dans l'ordre, de 'haut' en 'bas', profils de l'image moyenne non seuillée, de la moyenne des images seuillées à 5 photons/pixel, et de l'image moyenne seuillée à 5 photons/pixel.

Exemple: gaussienne seuillée Prenons l'exemple d'une tache de profil gaussien avec une largeur à mi-hauteur de 2 pixels. La figure 1.16 donne le profil de l'image moyenne non seuillée, de la moyenne des images seuillées à 5 photons/pixel, et de l'image moyenne seuillée. On note que l'approximation de l'image moyenne seuillée est très proche de la moyenne des images seuillées (celle-ci est tellement bien confondue avec la moyenne des images seuillées qu'elle est à peine visible sur le schéma !), en raison du grand nombre de photons dans la tache image de départ (ici 125 photons dans la sous-pupille).

Autre exemple: galaxies à noyau actif Le cas de l'asservissement sur des objets tels que les galaxies à noyau actif est un point dur dans l'optimisation du niveau de seuillage par l'expérimentateur. Un profil moyen typique de ce type d'objets ressemble à celui représenté sur la figure 1.17. Il est constitué d'un halo qui recouvre l'intégralité de la sous-pupille, surmonté par un cœur central plus ou moins étendu (quelques secondes d'arc). Seul le cœur participe à l'information sur le centre de gravité de l'image, d'où l'idée de seuiller fortement au moins jusqu'au niveau du halo (voir fig. 1.17). Une telle entreprise apparaît décevante puisqu'à l'œil sur l'écran rien ne semble se passer, excepté une réduction globale du flux sur l'ensemble de l'image. L'explication est donnée par la figure 1.17, qui donne la moyenne du profil des images seuillées. On a beau seuiller très haut, un fond important persiste sur l'ensemble de la sous-pupille, il n'est jamais possible de l'éliminer totalement. La différence entre seuillage de l'image moyenne et moyenne des images seuillées est ici très grande car le nombre de photons est petit.

Conclusion: pour les objets brillants le seuillage permet d'éliminer efficacement les pieds de la tache, que celle-ci soit étendue ou pas. En revanche il ne constitue pas

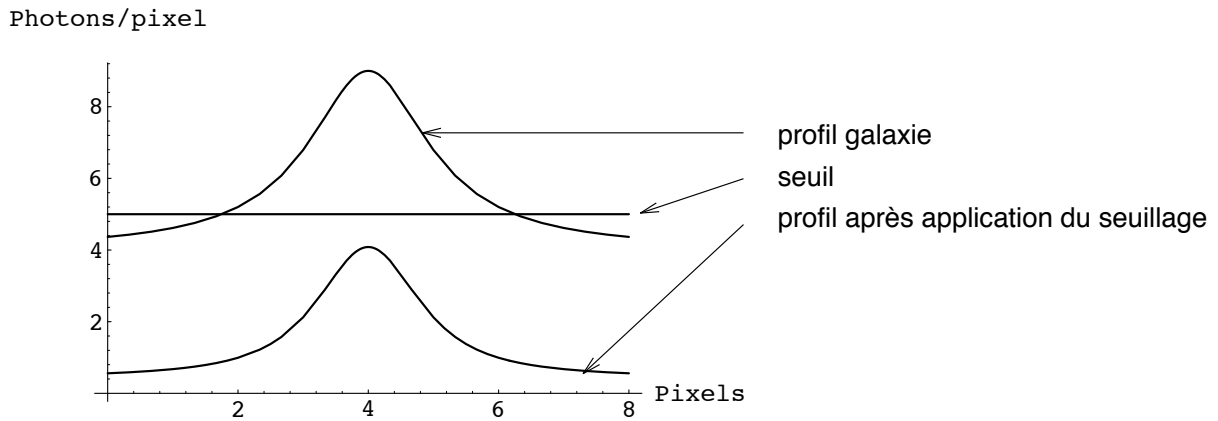


Figure 1.17: Profil de l'image (galaxie à noyau actif par exemple) moyenne non seuillée (en haut), et de la moyenne des images seuillées à 5 photons/pixel (en bas).

une solution pour éliminer les pieds de la tache sur les objets faibles, surtout s'ils sont étendus: il est certes nécessaire, mais il n'autorise pas à raisonner comme on le fait lorsque le nombre de photons est grand.

Variance du centroïde, seuillage 'net'

Le but de ce paragraphe est de présenter deux exemples d'optimisation du niveau de seuillage sur des objets brillants. Je montre qu'en dépit de l'abondance de flux reçu, il existe un niveau de seuil optimal non nul. Le calcul est fait pour deux cas particuliers de formes de tache image: l'exemple d'une gaussienne et l'exemple d'une tache à décroissance plus lente, en $1/r^2$.

J'ai obtenu une expression analytique de l'estimation de l'erreur sur la position du centre de gravité de l'image en fonction du seuil appliqué et de la forme des spots. Les calculs, un peu longs, ont été reportés en annexe 4.1

Tache gaussienne La tache s'écrit $\frac{\phi_o}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}$, où ϕ_o est le flux total, et $h_o = \frac{\phi_o}{2\pi\sigma^2}$ est la "hauteur" de la tache à l'origine, c'est une densité de photoélectrons, par exemple exprimée en *photoe⁻/pixel*. L'erreur Σ^2 sur la variance du centroïde est

$$\Sigma^2 = \frac{1}{2\pi h_o} \frac{1 - u + u \ln(u) - u \ln^2(u)/2}{1 - u + u \ln(u)} \quad (1.79)$$

où la variable u est la valeur du seuil normalisé à la hauteur de la tache en son centre, h_o .

Le tracé de $\Sigma(u)$ fait clairement apparaître un minimum. La résolution numérique de l'équation indique que ce minimum est atteint en $u = 0.0680168$ et vaut 0.897012.

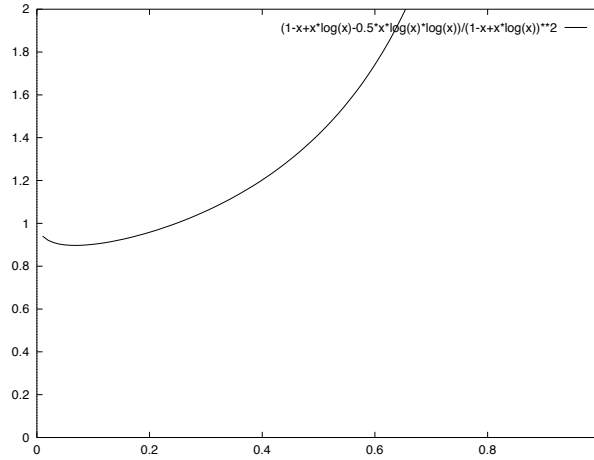


Figure 1.18: Variance en fonction du seuil pour une gaussienne d'écart-type et de flux unité. L'équation de la courbe est $\frac{1-u+u \ln(u)-u \cdot \frac{\ln^2(u)}{2}}{(1-u+u \ln(u))^2}$

Donc la stratégie optimale consiste à placer le seuil à 6.8% de la hauteur de la gaussienne, et dans ce cas le bruit est d'environ $0.9 \frac{\sigma^2}{\phi_o}$, c'est-à-dire $0.142764/h_o$.

Tache en $1/x^2$ On refait exactement le même calcul que précédemment, en supposant une équation de la tache en $\frac{h_o}{1+(r/l)^2}$. Les deux paramètres qui définissent ce spot sont donc sa hauteur à l'origine h_o et sa largeur à mi-hauteur $2l$. On considère la variable u égale au seuil normalisé par la hauteur de la tache en son centre. Alors,

$$\Sigma^2 = \frac{1}{4\pi h_o} \frac{1-u^2+2u \ln(u)}{u(u-1-\ln(u))^2} \quad (1.80)$$

Le tracé de $\Sigma(u)$ fait encore clairement apparaître un minimum. La résolution de l'équation indique que ce minimum est atteint en $u = 0.191527$ et vaut 0.223379 . Donc la stratégie optimale consiste à placer le seuil à 19% de la hauteur de la tache, et dans ce cas le bruit est d'environ $0.22/h_o$.

Ainsi, même pourvu d'un détecteur parfait limité par le bruit de photon il se révèle nécessaire d'effectuer un seuillage. Celui-ci est d'autant plus "haut" et plus "nécessaire" que la tache image comporte des pieds importants.

Application au cas d'ADONIS

L'optimisation du seuil en fonction de l'objet observé n'est donc pas forcément simple, puisqu'elle fait entrer en jeu des paramètres multiples et souvent inconnus. Le seuillage peut aller du plus simple (sur COMEONPLUS par exemple, même seuil pour toutes les sous-pupilles, et de valeur uniforme à l'intérieur de chacune d'entre

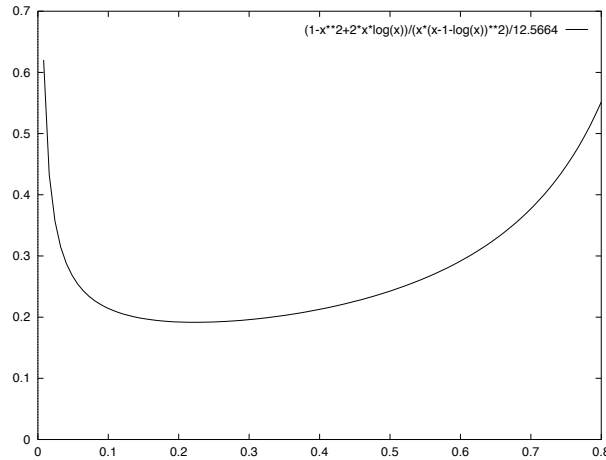


Figure 1.19: Variance en fonction du seuil pour une tache en $1/(1+x^2)$. L'équation de la courbe est $\frac{1}{4\pi h_\sigma} \cdot \frac{1-u^2+2u \ln(u)}{u(u-1-\ln(u))^2}$.

elles) au plus compliqué: dans ADONIS est prévu un seuillage indépendant pour chaque sous-pupille et éventuellement non constant à l'intérieur. Le problème est maintenant d'en savoir ajuster les valeurs.

Dans ADONIS le système de contrôle peut obtenir les images provenant du détecteur de l'analyseur, chose qui était alors impossible dans COMEONPLUS. Il est donc possible de calculer le profil moyen de chaque spot, d'évaluer le nombre total de photoélectrons grâce à une calibration préalable du signal reçu par photoélectron, et enfin de calculer le moment d'ordre 2 de cette distribution seuillée. Travaillant avec des détecteurs intensifiés, on ne seuille généralement pas au-dessus de 5 photoélectrons par pixel; l'expérience acquise avec COMEONPLUS le confirme. Cela autorise à utiliser les cinq formules données dans le paragraphe 'Cas particulier' du chapitre 1.2.3. Bien que l'expérience démontrera vite, comme dans le cas COMEONPLUS, que le meilleur seuil est toujours de l'ordre d'un cinquième de la hauteur de la tache, cet algorithme pourra s'avérer utile dans le cas d'objets complexes et étendus.

Enfin, pour les objets tels que les galaxies à noyau actif où domine un fond important il est souhaitable d'utiliser un seuil différent entre le centre et les ailes de l'image de manière à éliminer celles-ci. Cela revient à utiliser un diaphragme de champ plus petit, centré différemment pour chaque sous-pupille sur les pentes de référence. La taille du champ de vue peut également être déterminée d'après les images brutes issues de l'analyseur.

Concernant l'utilisation d'un seuil augmentant progressivement du centre vers le bord du champ, celui-ci doit obligatoirement être à symétrie centrée sur les pentes de références, afin d'éviter tout biais. Une loi de croissance optimale en fonction du type de l'objet reste à trouver. Il faut être conscient que ce genre de montage

entraîne des effets non linéaires et que l'objet apparaît toujours plus près du centre qu'il ne l'est réellement. La 'force de rappel' de l'asservissement décroissant avec la distance, ce peut être une source de décrochage.

Extinction des spots: la fin de l'optique adaptative

Ce paragraphe est une étude des phénomènes qui apparaissent lorsque le flux reçu dans une sous-pupille est intégralement en-dessous du seuil. A ce moment-là, aucun signal n'est disponible pour effectuer quelque calcul que ce soit, et l'algorithme de commande décide que le centroïde du spot coïncide précisément avec la position de référence. L'erreur commise dans ce cas est donc *exactement* égale au signal, et l'hypothèse de non-corrélation entre signal et bruit n'est plus vérifiée. De plus, lorsqu'une sous-pupille n'est plus éclairée, les pentes en x et en y se trouvent être *simultanément* et *systématiquement* mises à la même valeur (0,0): il y a donc corrélation entre ces deux pentes. Ces propriétés sont pour le moins inhabituelles et modifient totalement le comportement de l'optique adaptative, précipitant celle-ci vers la magnitude limite.

L'extinction de certaines sous-pupilles entraîne un biais dans l'estimation de la variance du signal. J'appelle e la probabilité d'extinction d'une sous-pupille. Recevant un nombre donné de photons N par sous-pupille, j'aurais bien avancé que e n'est autre que $\exp(-N)$ mais l'application d'un seuil, l'effet de la scintillation et la présence de cirrus me poussent à une prudence que je ne saurais assez recommander; le nombre N peut fluctuer. De plus, la mesure expérimentale de e est aisée. La variance des fluctuations du centroïde en x est $\frac{1}{n} \sum_1^n x_i^2$, mais en moyenne un nombre $e.n$ de ces valeurs seront nulles. Donc la variance est réduite d'un facteur $1 - e$. En fait c'est le spectre entier qui subit cette atténuation. En effet, c'est comme si l'on avait multiplié le signal par un masque valant 1 partout, sauf à certains endroits, aléatoirement distribués, où il vaut 0 parce qu'aucun signal n'a été reçu. Raisonnons sur les autocorrélations, dont le spectre de puissance est la transformée de Fourier. Quelle est la fonction d'autocorrélation de ce masque ? En 0, elle vaut $1 - e$, car c'est la probabilité pour qu'un point du masque multiplié par lui-même soit égal à 1. Ailleurs, c'est $(1 - e)^2$ car c'est la probabilité pour qu'un point du masque multiplié par un autre vaille 1. Une autre façon de voir cette autocorrélation est de la représenter comme la somme de deux fonctions: la première valant $(1 - e)^2$ partout, la deuxième valant $(1 - e) - (1 - e)^2 = e(1 - e)$ en 0, et 0 ailleurs. Or, si l'on écrit l'expression de l'autocorrélation du signal multiplié par le masque, on s'aperçoit que l'on a le droit d'écrire qu'elle est égale au produit des autocorrélations du signal et du masque. Passons immédiatement au spectre de puissance associé $R(f)$: c'est le spectre initial $S(f)$ multiplié par $(1 - e)^2$, auquel on ajoute un niveau constant valant $e(1 - e)$ fois la variance totale du spectre initial, soit

$$R(f) = (1 - e)^2 S(f) + e(1 - e) \int S(f) df$$

$$\propto S(f) + \frac{e}{1-e} \int S(f) df \quad (1.81)$$

et dont on peut vérifier que l'énergie totale est bien la variance initiale multipliée par $(1-e)$. Donc, que s'est-il passé ? Le signal turbulent a été virtuellement atténué, et ce qui en a disparu s'est transformé en bruit.

On retiendra donc de cette démonstration que l'extinction des sous-pupilles n'est rien d'autre qu'un fléau pour l'optique adaptative. En effet l'algorithme qui sert de base à l'optimisation de la commande modale se base en particulier sur les spectres de puissance des fluctuations de phase. S'ils sont biaisés, le résultat de l'optimisation sera effectivement biaisé. Mais peut-on vraiment affirmer qu'il y a là un biais, puisque finalement le spectre $R(f)$, aussi incorrect qu'il puisse paraître, représente précisément la manière dont le système *voit* la turbulence. Certes il se fourvoie, mais ce n'est ni un asservissement modal, ni zonal ni autre qui changera d'un iota les perturbations d'entrée dans la boucle. Si le système doit être optimisé, je persiste à croire qu'il doit l'être sur le spectre $R(f)$ et non $S(f)$, ou qu'il faut renoncer. Bien sûr il y a certaines solutions:

- réduire la fréquence d'échantillonnage si c'est encore possible, c'est une des solutions actuellement adoptées.
- réduire le nombre de sous-pupilles (c'est certainement là la meilleure approche).
- réagir en temps réel et prendre une décision moins brutale qu'une remise à 0 sur à la valeur à renvoyer lorsqu'une sous-pupille est éteinte. On pourrait penser déterminer cette valeur à partir des valeurs précédentes, à travers un filtre itératif par exemple. Ce filtre devra être étudié sérieusement, car à titre d'exemple le filtrage basique qui consiste à remplacer la valeur manquante par la valeur précédente s'avère désastreux, il crée un bruit supplémentaire en $1/f$. Il ne s'agit donc pas de mettre n'importe quoi à la place des valeurs absentes.

Je terminerai cette brève étude en développant un peu la dernière idée évoquée: mettre n'importe quoi à la place des valeurs absentes. Après tout pourquoi pas, pourquoi ne pas mettre une valeur aléatoire, obéissant à une loi statistique de moyenne nulle et de variance adéquate, décorrélée de quoi que ce soit, et ce afin de simuler l'impact d'un photon absurde, venu du fond du ciel ou d'ailleurs, du bruit du détecteur, des pieds de la tache image ou du courant d'obscurité de la photocathode, comme cela arrive fréquemment (rappelons-nous l'exemple du flux de photons issu du fond du ciel: il s'agit de plusieurs photons par trame). On peut très vite montrer que, à part augmenter encore un peu plus le niveau de bruit, une telle opération ne résoud en rien le problème de l'absence de flux, le simple bon sens permettait de s'en douter. Le spectre du signal reste $R(f)$, avec un peu plus de bruit. Dès lors, que faut-il conclure lorsqu'une sous-pupille reçoit *réellement*

le photon absurde dont nous parlions à l'instant, celui-là même venu du fond du ciel ou d'ailleurs, du bruit du détecteur, des pieds de la tache image ou du courant d'obscurité de la photocathode ? Ce photon là a exactement la même influence et les mêmes propriétés que le nombre aléatoire incohérent que nous aurions pu rajouter sur l'extinction d'une sous-pupille. La conclusion est que le phénomène de biais dans le spectre de puissance peut se manifester bien avant la première extinction de certaines sous-pupilles. Le problème n'est donc pas de savoir s'il y a du flux ou pas dans la sous-pupille, mais plutôt de savoir si le signal reçu est, oui ou non, corrélé avec le phénomène turbulent. Tous les événements pour lesquels il ne l'est pas contribuent à accroître ϵ , qui n'est pas seulement la probabilité que soit éteinte une sous-pupille, mais la probabilité pour qu'il n'y ait parmi le flux reçu aucun photon transportant de l'information à propos du phénomène turbulent. Quelle est cette probabilité ? Elle dépend de tout. Du flux, du bruit, de leurs caractéristiques respectives. On reverra cet effet dans le chapitre sur les résultats expérimentaux.

1.2.4 Conditionnement d'une matrice d'interaction

Avant de parler de la propagation à travers une matrice de commande, je veux faire une parenthèse sur le conditionnement de la matrice d'interaction, car l'un ne va pas sans l'autre.

J'appelle conditionnement d'une matrice D le rapport entre les valeurs propres maximale et minimale de la matrice $(D^t D)$. Ce nombre croît avec la difficulté d'inversion. Par exemple, au fur et à mesure que l'on rajoute des modes de Zernike à la matrice d'interaction D , le conditionnement se détériore (il croît), et l'on atteint tôt ou tard un nombre critique de polynômes n_c à partir duquel la matrice $(D^t D)$ n'est plus inversible, au moins à la précision de la machine près. Dans tous les cas, même si la matrice paraît inversible il est bon d'en surveiller le conditionnement: une valeur trop élevée traduit généralement un malaise dans la position physique du problème, il est alors bon de réduire le nombre de polynômes considérés, ou de revoir la base choisie.

D'un autre côté, la limite entre le bon et le mauvais conditionnement est généralement assez franche à en juger par l'exemple qui suit. Celui-ci est un échantillon assez représentatif des nombreux cas de figure qui peuvent se présenter. Le tableau suivant indique le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ de la matrice $D^t D$ pour un Shack-Hartmann à 7×7 sous-pupilles avec une occultation centrale relative de 0.436 (telle que sur le 3.6m de l'ESO). Il indique aussi la somme de l'inverse des valeurs propres, qui est le coefficient de propagation global du bruit (nous allons le voir très prochainement).

Ordre radial	Nombre	$\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$	$\sum 1/\lambda_i$
4	14	35.7	0.46094
5	20	65.2	0.56474
6	27	85.7	0.66602
7	35	119.1	0.85445
8	44	1343.	3.139
9	54	1510.	6.965

Tout se passe bien jusqu'à l'ordre radial $n = 7$ où les valeurs de propagation du bruit et le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ croissent régulièrement, de manière presque proportionnelle au nombre de polynômes pris en compte. Puis à l'ordre 8 les choses changent, le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ augmente d'un facteur 10 et conjointement la propagation globale du bruit se trouve accrue d'un facteur presque 4. Pourtant, la matrice est très facilement inversible. Le mode responsable de ce désastre se décompose sur 7 polynômes de Zernike: tous les polynômes à symétrie centrale (au nombre de 4) et les polynômes de degré radial 4 (au nombre de 3). Le mode créé est pratiquement nul sur l'ensemble de la pupille, sauf sous l'occultation centrale. Il est bien évidemment compréhensible qu'il soit invisible pour l'analyseur.

Ainsi, pour connaître le nombre maximum de polynômes acceptables dans la reconstruction, on regardera de près le facteur $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

On peut également vouloir choisir la base des polynômes de reconstruction en prenant les polynômes de Zernike dans un ordre particulier, plutôt que dans l'ordre classique imposé par leur indice. Mais le choix dépend alors du type de turbulence que l'on veut reconstruire. J'anticipe sur le chapitre 2.7: si l'on calcule la matrice optimale C (voir 2.7) de reconstruction sur les polynômes de Zernike pour une turbulence Kolmogorov et sans bruit de mesure, il peut être intéressant de savoir quels modes cette matrice privilégie ou néglige. Un mode négligé signifie que même s'il est présent dans le front d'onde initial il ne sera pas reconstruit, ou seulement en partie. Les termes diagonaux de la matrice $C.D$ donnent donc une estimation du 'degré de confiance' que l'on peut avoir dans les différents polynômes. La figure 1.20 montre ces coefficients jusqu'au numéro 300. En sélectionnant les polynômes correspondants par exemple aux 44 meilleurs 'coefficients de confiance', on obtient une matrice donnant un facteur de propagation de bruit de 1.06 et un conditionnement de 107.9. Les 44 polynômes sélectionnés sont alors les suivants:

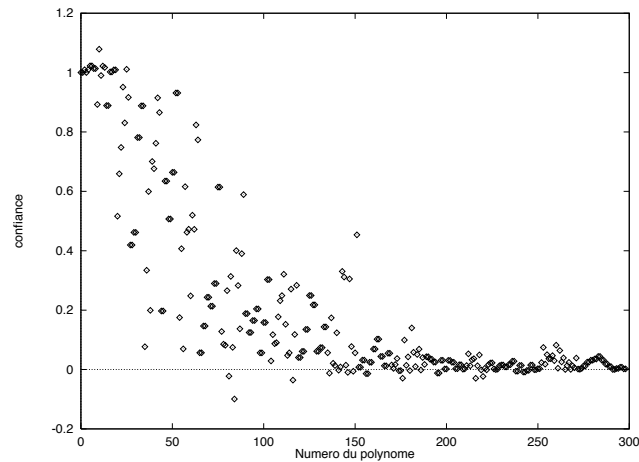


Figure 1.20: Termes diagonaux de la matrice $C.D$, D étant la matrice d'interaction entre polynômes de Zernike et analyseur, C étant une matrice de reconstruction optimale pour une turbulence Kolmogorov et sans bruit de mesure. L'analyseur est un Hartmann 7×7 avec occultation centrale d'un diamètre relatif de 0.436.

1											
	2										
4	3	5									
	7	8	9	10							
11		12	13	14	15						
	16		18		20	21					
		23	24	25	26	27	28				
					33	34	35	36			
					41	42	43	44	45		
			48	49			52	53	54	55	
				59						65	66

On retiendra donc qu'en général on ne peut courir plusieurs lièvres à la fois, c'est-à-dire que plus on veut reconstruire de polynômes, plus le terme de propagation du bruit va augmenter. Néanmoins, on prendra toujours soin de bien vérifier le conditionnement des matrices que l'on utilise, car c'est un test simple qui permet d'assurer d'entrée de jeu un comportement 'correct' de la reconstruction. Dans le système COMEONPLUS par exemple, le conditionnement fluctue entre 200 et 250. Un nombre supérieur trahit généralement un système mal aligné, ou un problème qui aurait surgi pendant la calibration de la matrice d'interaction. Si l'on n'est pas forcément toujours en mesure de caractériser ou de calculer proprement l'influence du bruit dans la reconstruction, le conditionnement informe au moins immédiatement sur la position du problème. Maintenant, le paragraphe 1.2.5 étudie plus en détail l'influence de la matrice sur le bruit de reconstruction.

1.2.5 Propagation du bruit de mesure à travers une matrice

La matrice de commande est l'étape qui traduit le bruit de mesure en un bruit sur le front d'onde reconstruit. Je présente dans ce paragraphe les notions de propagation de bruit à travers une matrice de commande. Celles-ci sont des notions connues. Je donne ensuite des exemples, sur les polynômes de Zernike, et discute quelques propriétés des coefficients de propagation.

La propagation du bruit à travers une matrice de commande est un phénomène bien connu, cité depuis longtemps par différents auteurs tels que Primot (Thèse 1989) ou Cubalchini (1979). Je résume brièvement. On entend par 'signal' les valeurs qui seraient mesurées par l'analyseur de surface d'onde si l'on pouvait disposer d'un flux illimité et d'un détecteur qui ne sature pas. On entend par 'bruit' la différence entre le signal et ce que l'on mesure réellement lorsque le nombre de photons est limité. Le bruit est un phénomène additif au signal, et s'exprime dans la même unité. Un point essentiel est que ce bruit ne soit pas corrélé avec le signal, de manière à pouvoir être traité séparément. J'appelle M la matrice à travers laquelle se propage le bruit. En entrée c'est un bruit \vec{b} et \vec{n} en sortie. On peut écrire en règle générale que

$$M.\vec{b} = \vec{n} \quad (1.82)$$

Lorsque les bruits sur les différents points de mesure sont corrélés, on a

$$\langle \vec{n}.\vec{n}^t \rangle = M. \langle \vec{b}.\vec{b}^t \rangle .M^t \quad (1.83)$$

La première simplification, d'ordinaire assez justifiée, est de considérer que le bruit n'est pas corrélé entre deux points de mesure de l'analyseur de surface d'onde. Cela conduit à écrire que $\langle \vec{b}.\vec{b}^t \rangle$ est une matrice diagonale. La matrice $\langle \vec{n}.\vec{n}^t \rangle$ n'est pas diagonale pour autant. Intéressons-nous à la variance des composantes de \vec{n} . On a

$$\langle n_i^2 \rangle = \sum_k m_{ik}^2 \langle b_k^2 \rangle \quad (1.84)$$

c'est-à-dire que l'on passe du vecteur de la variance des bruits en entrée au vecteur de la variance des bruits en sortie par une multiplication matricielle simple: la matrice en question est la matrice M dont tous les éléments ont été élevés au carré.

Poussons plus loin la simplification en faisant l'hypothèse que tous les $\langle b_k^2 \rangle$ sont égaux. On a alors

$$\langle n_i^2 \rangle = \langle b^2 \rangle . \sum_k m_{ik}^2 \quad (1.85)$$

et le terme $\sum_k m_{ik}^2$ est le coefficient de propagation cherché. Il est égal à la somme des carrés des coefficients de chaque ligne de M . On peut énoncer la même chose plus élégamment en disant que les coefficients de propagation du bruit sont les termes diagonaux de la matrice $M.M^t$.

Si l'on suppose que la matrice M est une matrice de commande calculée d'après l'inverse généralisée d'une matrice d'interaction D (c'est toujours le cas dans le système COME-ONPLUS), on a $M = (D^t \cdot D)^{-1} D^t$ et donc $M \cdot M^t = (D^t \cdot D)^{-1}$. Intéressons-nous à la somme des erreurs $\sum_i \langle n_i^2 \rangle$. Dans l'équation qui suit, $Tr(A)$ désigne la trace (somme des termes diagonaux) d'une matrice A .

$$\sum_i \langle n_i^2 \rangle = \langle b^2 \rangle Tr(M \cdot M^t) = \langle b^2 \rangle Tr((D^t \cdot D)^{-1}) \quad (1.86)$$

L'opérateur trace possède la propriété suivante: $Tr(AB) = Tr(BA)$. En diagonalisant la matrice A on peut écrire $Tr(A) = Tr(B^t \cdot \lambda \cdot B) = Tr(B \cdot B^t \cdot \lambda) = Tr(\lambda)$. Cela signifie que la somme des éléments diagonaux d'une matrice est aussi la somme de ses valeurs propres. Si maintenant les λ_i sont les valeurs propres de $D^t \cdot D$, on a donc

$$\sum_i \langle n_i^2 \rangle = \langle b^2 \rangle \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \quad (1.87)$$

On comprend donc immédiatement l'importance des modes mal identifiés par l'analyseur (modes à faible valeur propre) dans la propagation du bruit. De plus, le calcul sur différents cas de figure montre que lorsqu'une matrice est mal conditionnée, non seulement les modes responsables du mauvais conditionnement ont un coefficient de propagation de bruit déplorable, mais *tous* les autres modes souffrent également d'un mauvais coefficient $p(i)$.

Coefficients de propagation du bruit dans le cas des polynômes de Zernike

La valeur *rms* du bruit de mesure $\sqrt{\langle b^2 \rangle}$ est exprimée en radians par sous-pupille, puisque c'est l'erreur commise sur la différence de phase entre les deux bords de la sous-pupille. On veut pouvoir écrire

$$\langle n_i^2 \rangle = p(i) \cdot \langle b^2 \rangle \quad (1.88)$$

avec $\sqrt{\langle n_i^2 \rangle}$ représentant une erreur de phase rms sur la pupille, en radians.

Ayant choisi ces conventions, la matrice d'interaction entre les polynômes de Zernike et le Hartmann dépend de la géométrie relative du système (nombre de sous-pupilles, taille relative de l'occultation centrale) mais ne dépend pas de la taille absolue de la pupille. C'est pourquoi les coefficients $p(i)$ ne dépendent eux aussi que de la géométrie relative du système sans dépendre de sa taille effective absolue.

Quelques exemples de ces coefficients sont donnés dans la table 1.1. Son examen montre que les coefficients de propagation du bruit ne dépendent que faiblement du nombre de sous-pupilles, suffisamment faiblement pour que l'on prenne l'habitude de dire qu'ils n'en dépendent pas. En pratique, les $p(i)$ atteignent leur valeur nominale

Table 1.1: Coefficients de propagation du bruit sur les polynômes de Zernike pour les 21 premiers modes, pour des analyseurs à 5×5 , 7×7 , 9×9 et 15×15 sous-pupilles respectivement sur une famille de 20, 27, 44 et 77 polynômes. Le télescope est supposé sans occultation centrale.

No	$5 \times 5 / 20$ poly.	$7 \times 7 / 27$ poly	$9 \times 9 / 44$ poly	$15 \times 15 / 77$ poly
2	0.09330	0.09680	0.09620	0.09158
3	0.09330	0.09680	0.09620	0.09158
4	0.02392	0.02276	0.02257	0.02045
5	0.03378	0.03421	0.03540	0.03223
6	0.03486	0.04023	0.03773	0.03266
7	0.01591	0.01264	0.01218	0.01139
8	0.01591	0.01264	0.01218	0.01139
9	0.02026	0.02013	0.01981	0.01687
10	0.02026	0.02013	0.01981	0.01687
11	0.00751	0.00889	0.00886	0.00719
12	0.00590	0.00920	0.00995	0.00733
13	0.00596	0.00871	0.00788	0.00706
14	0.00981	0.01326	0.01676	0.00981
15	0.00980	0.01391	0.01157	0.01086
16	0.00991	0.00628	0.00582	0.00525
17	0.00991	0.00628	0.00582	0.00525
18	0.00614	0.00526	0.00590	0.00529
19	0.00614	0.00526	0.00590	0.00529
20	0.00886	0.00899	0.00953	0.00709
21	0.00886	0.00899	0.00953	0.00709
Total	0.4403	0.45137	0.44960	0.40286

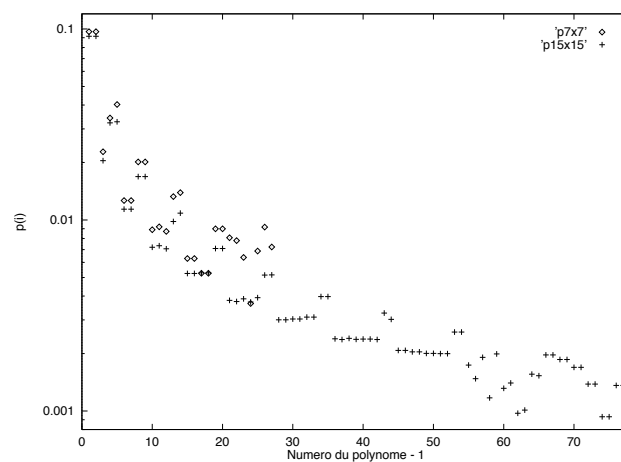


Figure 1.21: Comparaison des coefficients de propagation du bruit pour un Shack-Hartmann 7×7 sur 27 modes, et un 15×15 sur 77 modes.

pour les modes suffisamment bien échantillonnés par le Hartmann. Etant donné que l'on prend toujours soin de travailler avec des familles de modes correctement échantillonnés, les $p(i)$ correspondent généralement assez bien à leur valeur nominale. La figure 1.21 compare les coefficients de propagation du bruit dans deux cas de figure: un Shack-Hartmann 7×7 sur 27 modes, et un 15×15 sur 77 modes. Pour le cas 15×15 , alors que les coefficients $p(2)$ à $p(55)$ suivent une progression régulière, on devine un désordre certain qui s'empare des coefficients $p(56)$ à $p(78)$. Ces derniers, moins bien échantillonnés que les autres, voient leurs coefficients s'écarter de la valeur nominale. Quelle est cette valeur nominale ? Rigaut (Rigaut & Gendron 1992) donne une formule empirique pour les coefficients $p(i)$ lorsque le nombre de sous-pupilles tend vers l'infini:

$$\begin{cases} p_{n,m} = 0.295 (n+1)^{-2.05} & \text{if } n = m \\ p_{n,m} = 0.174 (n+1)^{-2.00} & \text{if } n \neq m \end{cases} \quad (1.89)$$

Épilogue sur le bruit

On a vu dans la section 1.2 que lorsque l'analyse de front d'onde est limitée par le bruit de photons, alors l'erreur de phase par sous-pupille peut s'écrire $\sigma_\phi^2 = 2\pi n_o^{-1} r_0^{-2}$, où n_o est le nombre de photoélectrons par m^2 . Donc, si le bruit est indépendant de la taille des sous-pupilles⁹ et que les coefficients de propagation du bruit le sont aussi, alors l'erreur sur la reconstruction du front d'onde ne dépend pas du nombre de sous-pupilles. C'est un résultat important. Cependant, on retiendra qu'en raison des effets instrumentaux dont j'ai parlé précédemment (fond du ciel, seuil, etc) il devient faux quand on s'approche de niveaux de flux de l'ordre de quelques photoélectrons par sous-pupille, car il existe un certain nombre de photons en dessous duquel les formules classiques (en $1/n$) deviennent fausses, et où le bruit augmente plus vite que $1/n$ à cause des effets pervers tels que l'extinction des sous-pupilles, le seuillage mal adapté ou le fond du ciel. En réduisant le nombre de sous-pupilles, on peut espérer regagner ou tout au moins se rapprocher du régime de validité des formules classiques.

⁹Lorsque l'on réduit la taille des sous-pupilles il semblerait normal que le bruit augmente. Il n'en est rien, et cela tient à la définition du bruit, qui s'exprime dans même unité que la grandeur mesurée par le Hartmann: la différence de phase moyenne entre les deux bords de la sous-pupille. La variance de l'erreur sur la détermination angulaire de la position du centroïde augmente, mais l'erreur sur la différence de phase moyenne est constante.

1.3 Sous-échantillonnage / sous-modélisation / repliement modal / couplage modal / discrétisation / erreur d'estimation

Ce chapitre traite du repliement spatial lors de la reconstruction de front d'onde. Mais avant de développer ce sujet, j'aborderai le problème général de nomenclature concernant ce phénomène. En optique adaptative, il n'y a pas moins de cinq 'repliements' si l'on s'accorde à croire les différents auteurs qui ont écrit sur le sujet.

1.3.1 Généralités

Chacun des effets cités dans le titre correspond certainement à un fait précis, encore faut-il que les différents auteurs emploie le même pour chaque chose, et que le passage de l'anglais au français s'effectue sans distorsion (ou avec les mêmes à l'aller qu'au retour). Bref, ce n'est malheureusement pas toujours le cas et il règne parfois sur le sujet un certain flou, lorsque ce n'est pas une incompréhension totale.

En anglais, on trouvera les termes suivants: spatial or temporal undersampling, spatial or temporal aliasing, cross-coupling, discretization error, fitting error, undermodeling error, estimation error. On s'accordera à les traduire respectivement en français par sous-échantillonnage spatial ou temporel, repliement spatial ou temporel, couplage, erreur de discrétisation, erreur d'ajustement, erreur de sous-modélisation, erreur d'estimation.

En 1979, Ronald Cubalchini publie dans JOSA "Modal wavefront estimation from phase derivative measurements". En 1981, Hermann publie dans JOSA "Cross-coupling and aliasing in modal wavefront estimation", et Southwell en 1982 publie dans un colloque SPIE "What's wrong with cross-coupling in modal wave-front estimation ?".

Voici en résumé ce que dit Cubalchini: lorsque l'on accroît le nombre de polynômes de Zernike dans la matrice d'interaction, l'erreur propagée sur un mode particulier change. Reconstruire ou non la coma modifie radicalement l'erreur propagée sur le tilt et cela parce que les mesures ne sont pas orthogonales entre elles, d'où le terme de *cross-coupling* employé. Cubalchini appelle "mesure" la valeur exacte de la dérivée exacte de la phase au centre de la sous-pupille. Il est conscient du fait que dans un Shack-Hartmann on ne mesure pas la dérivée en un point mais au contraire on la moyenne sur une zone donnée. Il approche le problème en disant que la valeur donnée par le Shack-Hartmann est certes la valeur de la dérivée de la phase en un point précis du front d'onde, mais situé quelque part aléatoirement à l'intérieur de la sous-pupille alors qu'il est attendu au centre. D'où le nom d'*instrumental error*.

L'approche de Hermann est la suivante: il construit une matrice d'interaction avec

s polynômes de Zernike et dont les colonnes sont remplies par la valeur exacte de la dérivée des polynômes de Zernike en différents points de la pupille. Il inverse cette matrice (inverse généralisée $(D^t D)^{-1} D^t$ classique) et s'aperçoit à juste titre que s'il tente de reconstruire le front d'onde créé par des mesures provenant d'un polynôme d'ordre supérieur à s , la solution trouvée par ladite matrice est une combinaison des s premiers polynômes. Il appelle cet effet *cross-coupling*, en précisant néanmoins qu'il entend ce terme dans un sens tout à fait différent de celui que lui a donné Cubalchini en 1979 dans JOSA. Puis il fait la remarque suivante: un front d'onde combinaison linéaire de plusieurs modes peut générer un vecteur de mesures rigoureusement nul. C'est parce que les vecteurs de mesure associés à chacun de ces modes sont linéairement dépendants. Cette dépendance linéaire, Hermann la nomme *aliasing*.

Enfin en 1982 Southwell remet les choses à leur place. Il annonce en introduction qu'il lui semble assez clair qu'une matrice créée à partir d'un jeu limité de modes semble déficiente lorsqu'il s'agit de reconstruire des données générées à partir d'un espace de fonctions totalement différent: "cross coupling is a consequence of fitting an incomplete set of functions to the data and is not caused by nonorthogonality". Et il montre que lorsque le nombre de modes est décent par rapport au nombre de mesures (pour éviter d'avoir à faire avec une matrice singulière -l'aliasing de Hermann- ce qui fausse tout le problème) il n'y a aucun *cross-coupling* parmi les modes reconstruits par la matrice. Puis il définit la notion d'*undermodeling*, qui supprime les notions précédentes de *cross-coupling*. Enfin, il mentionne l'*undersampling*, cas où certains modes inconnus de la matrice de commande (car généralement porteurs de fréquences spatiales élevées par rapport aux possibilités du système) interfèrent dans la reconstruction et sont interprétés comme étant des modes d'ordre bas. Il appelle ce phénomène *aliasing*, conséquence de l'*undersampling*, par analogie avec la théorie de l'information.

Les trois exemples précédents sont une expression véhémement de la discordance qui règne parfois entre l'appellation des différents phénomènes.

Néanmoins l'approche de Southwell, qui semble parfaitement saine et à laquelle je souscris sans réserve, est en parfait accord avec l'approche modale.

On pourra résumer ainsi:

- **le sous-échantillonnage spatial ou temporel:** Rien de très spécial, le phénomène est porteur d'information qui est détériorée par l'échantillonnage. La seule mise en garde est que le terme d'échantillonnage n'est pas pris au sens mathématique, car il peut s'agir d'un échantillonnage par un ccd (donc échantillonneur-bloqueur, puisqu'il y a une intégration), ou par une sous-pupille (échantillonnage par intégration sur une petite surface).
- **l'erreur de discrétisation:** Erreur commise lors de la substitution d'un échantillon provenant d'une grandeur intégrée, par une valeur de la grandeur

en un point. Je commets une erreur de discrétisation si je décrète par exemple que la valeur du signal dans une sous-pupille est la valeur de la dérivée du front d'onde au centre de la sous-pupille. Il peut y avoir erreur de discrétisation sans pour autant y avoir sous-échantillonnage.

- le **couplage**: Je prends un exemple. Supposons que l'on reconstruise la phase sur la base des polynômes de Zernike, puis on la projette sur la base des modes du miroir. Cette approche fait effectivement apparaître le *cross-coupling*. Physiquement, cela signifie que si l'on présente à l'analyseur un mode particulier du système, il va d'abord être reconstruit sur la base des polynômes de Zernike; ce n'est donc qu'une approximation. Puis cette approximation va se trouver projetée sur les modes du miroir, et des commandes vont être générées pour s'adapter aux erreurs d'ajustement qui ont été commises entre le mode initial et sa reconstruction sur la base des polynômes de Zernike. On retrouvera donc, dans le front d'onde résultant, d'autres modes en plus du mode initial, générés par couplage. On appelle donc couplage le phénomène d'interférence entre deux ou plusieurs *modes du système*. La méthode précédemment décrite pour le calcul d'une matrice de commande est évidemment parfaitement déconseillée: le passage par un espace intermédiaire pour revenir dans l'espace de départ est un des moyens les plus sûrs de perdre de l'information. Il existe néanmoins des méthodes perfectionnées et astucieuses de construction de matrices de commande qui conduisent à des matrices à couplage: par exemple toute matrice basée sur la maximisation de vraisemblance est à ranger dans cette catégorie. En effet ces matrices utilisent les couplages entre modes précisément dans le même sens que la turbulence corrèle les coefficients desdits modes, d'où leur efficacité.

Pour finir, la définition la plus précise du couplage est évidemment la définition mathématique. Soit C la matrice de commande. Soit D la matrice d'interaction entre le senseur et les mêmes modes que ceux reconstruits par C . Il y a couplage lorsque $C.D$ n'est pas diagonale. Notons que si C est l'inverse généralisée de D , on a $C = (D^t D)^{-1} D^t$ et donc $C.D = (D^t D)^{-1} D^t D = 1$. Cela prouve les qualités de l'inverse généralisée en matière de non-couplage. On prendra un soin particulier à éviter le couplage dans tout système asservi.

- le **repliement**: Supposons que l'on contrôle le miroir déformable avec une matrice de commande calculée à partir de l'inverse généralisée d'une matrice d'interaction formée à partir d'une certaine base de modes. Il n'y a aucun couplage parmi ces derniers. En revanche, tout mode extérieur à cet espace va provoquer une excitation de ces modes. C'est le phénomène de repliement. Cet effet est négligeable -en relatif- pour les 'petits' systèmes d'optique adaptative, mais ses conséquences deviennent de plus en plus gênantes à mesure que croissent les dimensions du système. Il est largement développé dans la section 1.3.2.

- **l'erreur d'ajustement:** (fitting error) la variance de phase résiduelle minimale qu'il puisse exister entre un front d'onde donné (ou un mode, ou n'importe quelle fonction) et sa meilleure approximation possible par combinaison linéaire d'une famille de modes donnée (laquelle pourra se résumer à un seul mode dans certains cas). Souvent, on emploie le terme d'erreur d'ajustement pour désigner non pas l'erreur de phase mais le *front d'onde* résiduel lui-même, générateur de ladite erreur.
- **l'erreur de sous-modélisation:** la moyenne des erreurs d'ajustement entre les fronts d'onde appartenant au phénomène turbulent et la famille des modes du système considéré. En d'autres termes l'erreur de phase résiduelle imputable au miroir déformable seul.
- **l'erreur d'estimation:** terme très pratique; je laisse le choix au lecteur.

La liste n'est pas exhaustive. Il faudrait également un terme pour nommer les erreurs instrumentales: l'irrégularité du bord des microlentilles (ou les bulles ?) qui font que l'on ne mesure pas vraiment l'intégrale du gradient de la phase, les déformées des actuateurs qui ne sont pas forcément toutes identiques et conformes à ce que l'on croit. Mais est-ce vraiment une erreur instrumentale, ou seulement notre inaptitude à pouvoir modéliser parfaitement notre système ?

1.3.2 Le repliement

Ce paragraphe est important à mon avis, car je n'ai jamais rencontré dans la littérature un article traitant clairement le sujet. Cette partie est originale et n'a été puisée dans aucun ouvrage existant; je sais cependant que nous sommes nombreux (JM. Conan, F. Rigaut, ...) à avoir la même approche, indépendamment les uns des autres. Le sujet est brûlant, il fallait donc l'écrire. D'autant que le point est crucial en optique adaptative.

Le système d'optique adaptative a un nombre N fini de degrés de liberté, chacun d'entre eux étant associé à un mode. Chacun de ces modes du miroir est parfaitement identifiable par le système par le biais de la matrice d'interaction. Or, le front d'onde turbulent est parfaitement aléatoire et sa décomposition modale exacte ne se suffit pas des N modes du miroir, mais elle nécessite de l'exprimer sur des modes externes au système. Le phénomène à quantifier est le suivant: les modes externes sont traités, via les mesures, comme s'il s'agissait de modes du miroir; quelle est l'erreur de phase associée à ce phénomène pour chaque mode du miroir ?

Le phénomène, lié à la matrice de commande, dépend du nombre de modes introduits dans la matrice d'interaction. Prenons un exemple. Souhaitant reconstruire les 9 premiers Zernike avec un Hartmann 7×7 , il existe -au moins- deux façons de procéder. Calculer l'inverse de la matrice d'interaction des polynômes de Zernike 2

à 10, ou calculer l'inverse de la matrice d'interaction des polynômes de Zernike 2 à 36 et n'utiliser dans cette inverse que les 9 premières lignes. Dans le premier cas, l'influence des polynômes d'ordre plus élevé que le 10^{ième} n'a pas été introduit ; leur effet sur les mesures étant inconnu du système, celui-ci les confondra immédiatement avec les modes 2 à 10. En revanche dans le second cas le système est "informé" de l'effet de tous les modes, au moins jusqu'au numéro 36. Ainsi seuls les modes d'ordre supérieur au 36^{ième} auront cet effet néfaste sur la reconstruction. Donc la base de modes à partir de laquelle la reconstruction est définie a une influence déterminante sur le repliement.

Mais il est clair que ce phénomène est également lié au sous-échantillonnage de l'analyseur. Plus on possède de mesures, plus on peut introduire de modes dans la matrice d'interaction sans risquer le problème de la non-inversibilité. En rajoutant des modes, on gagne du terrain vers les hautes fréquences spatiales, estimant du même coup plus précisément les basses fréquences. La comparaison avec le théorème de Shannon s'impose alors. En effet, le phénomène vient du fait que les hautes fréquences spatiales se replient sur les basses. Mais avec ici une subtilité en plus: dans le cas général l'équivalent modal de la fréquence de Nyquist n'est pas uniquement déterminée par l'échantillonneur (le Hartmann); ce dernier ne fait qu'imposer une limite supérieure. Elle est définie par le choix des modes servant de base à la reconstruction. De plus, rien n'empêche de construire une matrice d'interaction sur les polynômes de Zernike en prenant par exemple pour base les polynômes 11 à 15. Dans ce cas, ce seront les hautes fréquences (modes 16 à l'infini), mais avant tout les basses (modes 2 à 10) qui vont se replier sur les moyennes fréquences (11 à 15).

L'enseignement à tirer de cela est qu'il faut introduire dans la matrice d'interaction le maximum d'information possible, à commencer par les modes qui ont la variance maximale dans la turbulence de manière à ce que les autres, qui, on le sait, vont se replier sur les premiers, se replient avec une variance minimale.

Enfin, considérons le cas de COMEONPLUS, avec un analyseur à 7×7 sous-pupilles, et 50 degrés de liberté physiques réels. Cela conduit à une matrice d'interaction à 50 colonnes. Dans le cas des polynômes de Zernike on sait qu'en ajoutant des modes par ordre croissant de leur indice on progresse avec la fréquence spatiale, sans laisser de 'trou' fréquentiel. Sommes-nous certains dans le cas de COMEONPLUS que les modes du miroir ne présentent pas de 'trou' en fréquence spatiale ? Sommes-nous certains que l'équivalent modal de la fréquence de Nyquist du Hartmann a été atteinte par le miroir ? Ne sommes-nous pas dans un cas similaire à celui cité plus haut, où voulant reconstruire 10 polynômes de Zernike nous inversons une matrice d'interaction calculée uniquement sur ces 10 polynômes, alors qu'il était plus intéressant d'en considérer un maximum ? Certainement, si. Et la justification est simple: nous avons 64 mesures, et seulement 50 degrés de liberté. Il y a donc 14 degrés de liberté inexploités parmi les mesures qui peuvent encore nous permettre de différencier 14 modes 'non connus' par le système qui peuvent être à plus haute ou plus basse fréquence spatiale que les plus haut ordres du miroir, et qui vont se

replier sur nos 50 degrés de liberté. Ce n'est pas parce que l'on ne possède que 50 degrés de liberté physiques bien réels que l'on n'a pas le droit de s'imaginer qu'il n'en existe pas 14 autres, qui, même si l'on ne sait pas les générer, doivent être différenciés des 50 premiers.

Faisons une étude purement spatiale du phénomène. Les effets temporels associés seront introduits après. Etant donné les calculs mis en jeu, je considère ici l'exemple simple d'un système d'optique adaptative muni d'un Hartmann à 7×7 sous-pupilles, et muni d'un miroir dont les 27 actuateurs seraient les polynômes de Zernike Z_2 à Z_{28} . J'appelle D la matrice d'interaction du système, et D^+ l'inverse généralisée de D . Rappelons que l'on a $D^+ \cdot D = Id$. Soit D_∞ la matrice d'interaction entre le senseur et *tous* les polynômes de Zernike. Soit $\vec{\phi}_\infty$ le front d'onde décomposé sur l'ensemble des polynômes de Zernike, $\vec{\phi}$ le front d'onde constitué seulement des 27 premières composantes de $\vec{\phi}_\infty$ et $\vec{\phi}_\perp$ le front d'onde constitué de tous les polynômes autres que ceux de Z_2 à Z_{28} . Le front d'onde $\vec{\phi}_\perp$ représente tous les modes qui vont se replier. On a $\vec{\phi}_\infty = \vec{\phi} + \vec{\phi}_\perp$. C'est bien sûr $\vec{\phi}$ que l'on désire obtenir pour commander le miroir, à partir des mesures générées par $\vec{\phi}_\infty$. Or, ces mesures ne sont rien d'autre que $D_\infty \vec{\phi}_\infty$ et le front d'onde reconstruit par le système sera déduit de ces mesures par le biais d'une multiplication par D^+ , soit $D^+ D_\infty \vec{\phi}_\infty$. L'erreur entre le front d'onde ainsi reconstruit et l'estimation correcte $\vec{\phi}$ est:

$$\begin{aligned}
 D^+ D_\infty \vec{\phi}_\infty - \vec{\phi} &= D^+ \cdot D_\infty \vec{\phi}_\infty - D^+ \cdot D \vec{\phi} \\
 &= D^+ \cdot (D_\infty \vec{\phi}_\infty - D \vec{\phi}) \\
 &= D^+ \cdot (D_\infty \vec{\phi}_\infty - D_\infty \vec{\phi}) \\
 &= D^+ \cdot D_\infty \vec{\phi}_\perp
 \end{aligned} \tag{1.90}$$

La matrice $D^+ \cdot D_\infty$ caractérise le repliement des ordres supérieurs sur les premiers modes. Cette matrice est représentée sur la figure 1.22. On note immédiatement que les 27 premières colonnes forment une matrice identité, ce qui dénote l'absence de couplage ou de repliement entre ces modes. Les coefficients non nuls des colonnes 28 à l'infini (189 ici) correspondent à l'effet de repliement. On remarque toutefois que le phénomène de repliement n'est pas totalement anarchique: seuls les polynômes qui ont même parité d'ordre azimutal se replient l'un sur l'autre: cette propriété n'est valable que grâce à la géométrie cartésienne et aux symétries de notre analyseur. Il est enfin important de remarquer que les coefficients de repliement n'ont absolument pas tendance à tendre vers 0 avec l'ordre des polynômes, au contraire. Si le Shack-Hartmann est néanmoins capable d'analyser les perturbations atmosphériques de la phase, c'est parce que le spectre modal de ces perturbations est suffisamment décroissant.

Reste donc à quantifier l'effet du repliement dans le cas particulier de la turbulence atmosphérique. On peut calculer la variance de l'erreur due au repliement pour chaque mode en analysant les termes diagonaux de la matrice de covariance de

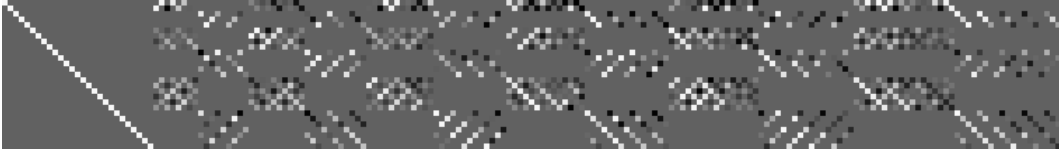


Figure 1.22: Représentation de la matrice $D^+.D_\infty$. Chaque “pixel” représente un terme de la matrice. Le schéma compte 64 pixels de haut sur 189 de large, puisque $D^+.D_\infty$ est de dimension 64×189 . La valeur de chaque terme est codée en niveau de gris. Le gris qui couvre la majorité des coefficients est la valeur 0, le blanc vaut 1, le noir -1. D a été calculée sur 27 polynômes de Zernike (2 à 28), et D_∞ est tronquée à 189 polynômes.

l’erreur, à savoir

$$D^+.D_\infty < \vec{\phi}_\perp \vec{\phi}_\perp^t > > D_\infty^t D^{+t} \quad (1.91)$$

Le résultat est représenté sur la figure 1.23. Les points représentent la variance de phase de l’erreur due au repliement pour chaque mode corrigé. On voit que l’erreur de repliement reste sensiblement constante de sorte que de le rapport entre variance non corrigée (en trait plein) et variance de l’erreur de repliement s’amenuise rapidement avec le degré du mode. Partant d’environ 5000 pour les tilts, ce rapport se retrouve à 10 pour les modes 22 à 28. Le cumul des erreurs sur chaque mode est de $0.0027668(D/r_0)^{5/3}$, à comparer avec le résidu de Noll $\Delta_{29} = 0.01594(D/r_0)^{5/3}$. Ce dernier, dominant environ d’un facteur 6 est largement prédominant. Ainsi, pour un système corrigeant 27 polynômes de Zernike, le repliement n’est pas un vrai problème. Tout d’abord, même si le système était parfait, le résidu des modes d’ordre plus élevé est supérieur à l’erreur de repliement ce qui rend vain d’essayer de compenser cette erreur. Ensuite, les erreurs dues au bruit s’ajoutent, et elles sont elles aussi du même ordre de grandeur. Finalement la bande passante limitée du système finit de faire oublier le repliement puisque comme on va le voir plus loin, elle ne se contente pas de le rendre négligeable, mais en plus elle diminue son effet.

Comment évoluent les choses pour des systèmes de taille plus importante ? Certes, le niveau moyen de l’erreur de repliement par mode (voir figure 1.23) *diminue* lorsque le système devient plus important; l’erreur totale due au repliement décroît. Des études assez détaillées menées à l’Onera ont en effet montré que même pour des grands systèmes l’erreur de sous-modélisation domine par rapport à l’erreur de repliement. La conclusion, communément admise, est donc que dans tous les cas l’erreur de repliement reste un terme négligeable.

Pourtant, que dire de la valeur de l’erreur de repliement sur un mode donné par rapport à la variance de phase non corrigée de ce même mode ? Je n’ai pas entrepris d’étude poussée pour répondre à cette question, qui reste encore ouverte. Les études menées à l’Onera ne permettent pas de répondre totalement à la question, mais suggèrent que l’erreur de repliement associée à un mode donné soit toujours inférieure à sa variance initiale. Cependant, à l’inverse, des considérations qualitatives me font penser que ce rapport doit s’amenuiser au fur et à mesure que les

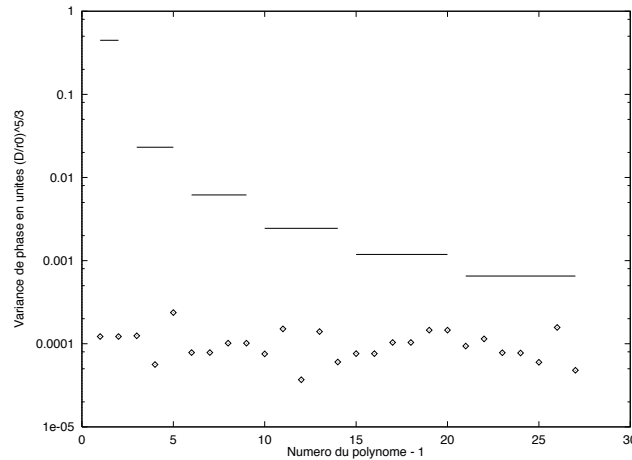


Figure 1.23: Les points représentent le spectre modal de l’erreur due au repliement spatial. La courbe en trait plein représente le spectre modal de la turbulence sur les polynômes de Zernike. L’ordonnée est la variance de phase sur la pupille, en unités $(D/r_0)^{5/3}$.

dimensions du système croissent, et dans le pire des cas envisager que pour des systèmes très importants l’erreur de repliement –bien que très faible– sur certains modes d’ordres élevés puisse être supérieure à leur variance non corrigée, rendant du même coup leur correction caduque. C’est un point de vue non démontré et discutable, mais les arguments qui me conduisent à cette conclusion sont les suivants: les termes de la matrice $D^+.D_\infty$ qui causent le repliement (voir figure 1.22) sont “à peu près” toujours du même ordre de grandeur: celui de l’unité. Ils n’ont pas tendance à tendre vers 0 avec l’ordre des polynômes. L’erreur de repliement sur les modes corrigés d’ordres élevés est déterminée par le spectre des modes non corrigés:

- + Si celui-ci est fortement décroissant, (cas des *petits* systèmes) l’erreur de repliement est liée aux quelques modes dont la variance est la plus importante après le dernier mode corrigé par le système: ce ne sont donc que quelques modes, identifiables, qui se replient. Et puisque le spectre est fortement décroissant, l’erreur de repliement est alors petite devant la variance non corrigée du dernier mode du système.

- + Si le spectre des modes non corrigés est faiblement décroissant, (cas des *grands* systèmes) l’erreur de repliement est la somme de nombreux termes: une foule de modes se replient, et leur variance, bien que petite, est du même ordre que celle du dernier mode du système, précisément parce que la décroissance du spectre est faible. Donc l’erreur de repliement, comparée à la variance des derniers modes corrigés, peut être importante.

Enfin dernier argument, l’erreur de repliement est dans l’absolu d’autant plus “visible” que la bande passante du système est grande, et que les autres erreurs (bruit de mesure en particulier) sont faibles: ce sont là deux points caractéristiques d’un grand système (soit parce qu’on a un très grand télescope, soit parce qu’on a une étoile artificielle). En résumé, les erreurs de repliement, négligeables pour les “petits” systèmes, ne le sont plus pour les systèmes plus grands. Dans ces derniers il

est possible que les derniers modes du système soient rendus inutilisables en raison du repliement, même si la valeur totale de celui-ci décroît avec la taille du système.

Je n'ai pas quantifié par des simulations l'approche précédente, et cette vision des choses m'est propre; je ne peux pas pour l'instant justifier mathématiquement la validité de cette hypothèse, qui est avant tout une intuition basée sur les constatations issues des premiers résultats de l'étude du repliement. C'est en tous cas ce résultat que je m'attendrais à trouver à l'issue d'une étude quantitative; un résultat contraire me surprendrais. Néanmoins, cette étude quantitative reste à faire pour être complet. Elle devra par exemple être obligatoirement effectuée pour un système tel que le VLT. Le pas suivant à franchir est de calculer la matrice de covariance des erreurs de repliement (j'ai donné la méthode à l'équation 1.91) et de la diagonaliser, afin d'obtenir les principaux modes les plus sensibles au repliement, de manière à pouvoir les filtrer.

Finalement, avant l'étude temporelle, je terminerai avec une interprétation plus physique du phénomène. Le Shack-Hartmann mesure le gradient de la phase, intégré sur chaque sous-pupille. Le déplacement du centroïde au foyer des microlentilles peut s'exprimer, venant de ce qui précède et compte tenu du théorème du gradient, comme l'intégrale curviligne de la phase sur le contour de la sous-pupille. Aussi la position du centroïde ne dépend-elle que de la valeur de la phase sur les *bords* de la sous-pupille, et les valeurs à l'intérieur n'influencent que la forme du spot et non son centre de gravité. Il est donc permis à la phase de faire 'ce qu'elle veut'¹⁰ à l'intérieur des sous-pupilles, le front d'onde reconstruit ne changera pas d'un pouce. Peut-on dire que ce sont ces fluctuations de phase, ignorées du Hartmann, qui créent le repliement ? Non. Et le plus souvent -au sens statistique du terme- l'analyseur a raison de les ignorer. Il ne peut les ignorer lorsque ces petites perturbations se produisent sur le pourtour des sous-pupilles. Elles sont alors prises pour plus grosses qu'elles ne sont réellement, et c'est là la source du repliement. Il faut le voir plus comme une sensibilité exagérée du Shack-Hartmann aux petites perturbations qui viennent à passer sur le pourtour des sous-pupilles, plutôt que comme une absence de sensibilité aux perturbations internes aux sous-pupilles. L'analyse temporelle va confirmer cette vision des choses.

Analysons l'aspect temporel de cette erreur¹¹. A quoi faut-il s'attendre ? Raisonnons avec les mains: le repliement est causé par l'action conjuguée d'une infinité de modes d'ordre élevé, chacun caractérisé par un spectre temporel dont la fréquence de coupure croît avec le degré du mode. Si cette fréquence de coupure était constante, on ajouterait des spectres de puissance en $f^{-17/3}$ (en supposant qu'il n'y a pas corrélation entre les modes), et il y aurait des raisons de penser que le spectre de cette erreur suive de même une loi en $f^{-17/3}$. Mais avec l'augmentation de la

¹⁰tant qu'elle le fait dans les limites décentes de l'hypothèse Kolmogorov ou assimilé

¹¹Je précise bien que je parle de l'analyse temporelle des coefficients modaux de l'erreur associée au repliement spatial. Il n'est nullement question de repliement temporel.

fréquence de coupure avec le degré du mode, on peut penser que le cumul va favoriser les hautes fréquences et créer un spectre décroissant 'moins vite' que $f^{-17/3}$. Bref, l'erreur de repliement est causée par des modes à fluctuations rapides donc l'erreur va se retrouver en priorité à haute fréquence.

Quantifions ce qui précède et pour cela considérons l'exemple de la reconstruction d'un mode par un Shack-Hartmann dans un cas de turbulence monocouche pleinement développée de caractère Kolmogorov respectant l'hypothèse de Taylor et une source ponctuelle à l'infini. Dans ces conditions le spectre du mode est en $-17/3$ à haute fréquence (voir chapitre 1.1.7). Il suffit de calculer le spectre théorique du mode reconstruit par le biais du Hartmann, et de faire la différence. Or on sait (voir chapitre 1.1.7) qu'après reconstruction basée sur une combinaison linéaire des mesures du Shack-Hartmann, le spectre du mode n'est pas le spectre théorique escompté : son comportement est en $-11/3$ à haute fréquence. La différence est si nette qu'il n'est même pas besoin de la calculer: ces spectres ne sont comparables qu'à basse fréquence. A plus haute fréquence, le rapport entre les deux puissances est en f^2 -ce qui est énorme- et il faut bien admettre que l'on ne mesure plus là les fluctuations du mode mais une quantité tout à fait différente. Ce que l'on mesure est l'effet des petites perturbations de phase en transit sur le contour des sous-pupilles, et dont le spectre est en $-11/3$ (spectre des fluctuations d'angle d'arrivée). Cette différence ne s'explique que par l'erreur due au repliement spatial.

On retiendra donc qu'avec un Hartmann le spectre temporel de l'erreur de repliement spatial est, quel que soit le mode reconstruit, à peu près nul avant la fréquence de coupure du mode, et en $f^{-11/3}$ après. De manière générale, pour un analyseur quelconque, le spectre temporel de l'erreur de repliement spatial suit une loi identique à la loi de puissance des mesures de l'analyseur. C'est $f^{-11/3}$ pour un Hartmann, ce sera $f^{-5/3}$ pour un analyseur de courbure. De plus la puissance dans le domaine temporel de l'erreur due au repliement spatial est quasiment nulle avant la fréquence de coupure du mode reconstruit. Utilisant un système possédant une bande passante de correction temporelle limitée, on n'introduit dans la boucle qu'une fraction de l'erreur de repliement; fraction d'autant plus petite que la bande passante est faible.

Est-il intéressant de se doter d'un système d'optique adaptative composé d'un faible nombre de points de mesure -i.e. de degrés de liberté- et d'une très grande bande passante ? Certainement, oui. Mais l'argument qui permet de répondre positivement à cette question n'est certes pas parce que le système corrigera mieux les hautes fréquences temporelles. Tout au contraire, l'information que ce système ira chercher à haute fréquence est systématiquement fautive. Si un tel schéma est intéressant, c'est pour deux raisons. La première parce que l'atténuation des basses fréquences sera plus importante, la deuxième parce que à bande passante égale la surintensité dans la fonction de réjection du système sera plus faible.

Chapitre 2

Construction de la commande modale

Ayant parcouru dans le chapitre précédent une variété de points qui intéressent l'optique adaptative en général, nous avons en quelque sorte observé ces phénomènes, en les expliquant, les détaillant, les quantifiant. L'attitude était passive, même si l'on sentait, sous-jacent, le désir de mieux connaître l'ennemi avant d'agir. Dans ce chapitre, nous agissons.

Action donc, sortons tout d'abord les armes de l'ombre. Je présenterai le formalisme qui va nous servir de base dans tout ce chapitre. Il ne sera plus question de front d'onde mais de vecteur. Les vecteurs de base de décomposition du front d'onde, nous les créerons. Le creuset sera un espace vectoriel; dans la réalité c'est le miroir déformable. Pour changer de point de vue nous changerons de base. Pour estimer un front d'onde nous le projetterons sur un sous-espace. Pour éviter les divergences de l'asservissement nous filtrerons, nous diagonaliserons. La première partie de ce chapitre décrit ce formalisme nouveau mais aussi et surtout les moyens de s'en servir.

Dans la deuxième partie je présente les critères qui rendent optimale une base de modes; comment l'on doit les calculer et quels sont les propriétés qui font leur efficacité. La discussion de ces critères fait apparaître l'intérêt de la décomposition modale.

Ayant le formalisme et les modes en main, je présente ensuite l'article A & A qui définit l'algorithme d'optimisation de la commande modale sur un système d'optique adaptative, face au bruit de mesure.

L'article sera complété par certaines précisions sur les fonctions de transfert du système puisque le thème y est peu abordé. Il sera également complété par une section traitant de l'optimisation de la fréquence d'échantillonnage, puis par une section sur l'optimisation modale face au problème de l'anisoplanétisme.

Enfin, si cette thèse se cantonnait à l'optimisation de la reconstruction de phase

dans un système d'optique adaptative, il y aurait un manque. Car s'il est un domaine plus délicat encore à traiter, c'est l'optimisation de la reconstruction de phase, tout court. J'ai donc voulu élargir la recherche, car on a besoin de reconstruire la phase hors d'un système d'optique adaptative pour de multiples raisons. Ce peut être simplement pour l'étudier, ce peut être pour l'appliquer à la déconvolution (Primot, Thèse 1989), ce peut être pour reconstituer la psf associée, et caetera. Je parle donc dans la dernière partie de ce chapitre de matrices de reconstruction optimales, j'étudie le moyen de les calculer et j'étudie leurs caractéristiques dont je montre l'aspect modal.

2.1 Formalisme pour une commande modale

Cette section introduit l'ensemble du formalisme associé à la commande modale, et les moyens de l'utiliser. Il en présente également l'intérêt.

Le front d'onde perturbé est représenté par sa phase $\phi(r, \theta)$. C'est une fonction continue, définie sur un support borné qui est l'ouverture du télescope, à savoir un disque obturé. On a l'habitude de décomposer ce front d'onde sur une base de fonctions de telle manière qu'il s'écrive comme une somme pondérée de fonctions $M_i(r, \theta)$, elles aussi des fonctions continues et définies sur la pupille. A titre d'exemple, des fonctions couramment employées en optique adaptative pour cette décomposition sont les polynômes de Zernike: leurs propriétés ont été décrites dans la section 1.1.2, et on les sait "pratiques" pour effectuer cette décomposition. Cependant, nous allons voir que l'on peut trouver un double intérêt à décomposer la phase sur une autre base de fonctions. Premièrement la décomposition elle-même est un atout qui permet de passer d'une fonction de deux variables à une liste de coefficients: cela facilite dans de nombreux cas le traitement de l'information. Deuxièmement la nouvelle base de décomposition, si elle est choisie astucieusement en fonction du problème, peut s'avérer être mieux adaptée au traitement, ou à la modélisation, ou à la correction effectuée. Ce type de décomposition sera intensivement utilisé dans cette thèse, et pour le manier facilement un certain formalisme y est associé. Il permet en outre de manipuler mentalement les différents concepts qui permettent de réfléchir à la construction d'une base de modes.

2.1.1 Equivalence entre front d'onde et vecteur

La transformation du front d'onde en un vecteur est certainement le point de départ de la commande modale. L'intérêt est de pouvoir se servir ensuite de la puissance de l'algèbre linéaire pour manipuler les concepts de base de modes, de décomposition modale, etc. Ce paragraphe présente dans un premier temps l'équivalence entre front d'onde et vecteur et définit quelques notations.

Nous serons par la suite amenés à décomposer sans cesse la phase sur des familles de modes. On transforme alors ce front d'onde en une série de coefficients, que l'on peut imaginer être les composantes d'un vecteur. Au vecteur \vec{u} est associé un front d'onde $U(r, \theta)$ par le biais de la relation

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow U(r, \theta) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot M_i(r, \theta) \quad (2.1)$$

Je garderai toujours le même type de notation: le vecteur est en minuscule surmonté d'une flèche et le mode associé porte la même lettre, en majuscule. La nature exacte de la flèche \longleftrightarrow dans l'équation précédente n'est pas aussi anodine qu'il y paraît. C'est en fait une relation linéaire (étant donné qu'à $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est associé $\lambda U(r, \theta) + \mu V(r, \theta)$) d'un sous-espace dans un autre sous-espace. Mais gare, puisque si la famille des M_i est liée, deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} distincts peuvent engendrer le même $U(r, \theta)$.

L'ensemble des fonctions continues et définies sur la pupille forme un espace vectoriel, très "grand", que j'appelle \mathcal{E} . Le nombre de dimensions n'est pas fini. A l'intérieur de \mathcal{E} , le sous-espace vectoriel engendré par les n fonctions $M_i(r, \theta)$ a, lui, *au plus* n dimensions. Il en a précisément n lorsque l'on a la chance que les M_i forment une famille libre, et dans ce cas la famille forme une base. C'est dans tous les cas un sous-espace de l'espace \mathcal{E} . En revanche l'espace vectoriel auquel appartient \vec{u} est toujours un espace à n dimensions. C'est par exemple l'espace des commandes du miroir. Dans l'espace des commandes le produit scalaire est défini de manière classique, à savoir $\vec{u}^t \cdot \vec{v} = \sum u_i v_i$. Dans l'espace \mathcal{E} , c'est $\int U(r, \theta) V(r, \theta)$.

Il ne faut pas confondre le front d'onde, vecteur de \mathcal{E} , et le vecteur commande qui lui est associé.

Décrire la forme du miroir en donnant la valeur des tensions de chaque actuateur, c'est exprimer le front d'onde dans la base canonique de l'espace des commandes. Les valeurs des tensions sont représentées sous la forme d'un vecteur colonne.

Décrire la forme du miroir en donnant la valeur de chaque mode du miroir, c'est exprimer le front d'onde dans une base particulière de l'espace des commandes. Les valeurs de l'amplitude de chaque mode sont représentées sous la forme d'un vecteur colonne.

Décrire la forme du miroir en donnant l'équation $\phi(r, \theta)$ de sa surface (quand elle existe) c'est exprimer le front d'onde dans \mathcal{E} sans choisir de base particulière, simplement en donnant le vecteur de \mathcal{E} .

Décrire la forme du miroir en donnant sa décomposition sur les polynômes de Zernike, c'est exprimer le front d'onde dans \mathcal{E} en choisissant les Zernike comme base particulière.

Dans l'espace \mathcal{E} , un vecteur est une combinaison linéaire de fonctions. Une famille de vecteurs est une liste de combinaisons linéaires de fonctions.

Dans l'espace des commandes, un vecteur est une combinaison linéaire de commandes. Une famille de modes est une liste de ces vecteurs, c'est-à-dire une matrice. On parlera donc par exemple couramment d'une matrice de modes M exprimée dans une base donnée. Par défaut, elle sera exprimée dans la base canonique des commandes.

Désormais nous allons nous permettre quelques incorrections afin d'alléger le vocabulaire. Par base, on entend "base d'un sous-espace de \mathcal{E} ". Par espace du miroir on entend "le sous-espace de \mathcal{E} généré par les commandes du miroir". Par orthogonalité on entend orthogonalité au sens du produit scalaire dans \mathcal{E} . En fait, on aimerait pouvoir établir une bijection entre les commandes et les fonctions de base de l'espace du miroir. Cela sera fait lorsque l'on aura trouvé une véritable base de fonctions de cet espace et que l'on y aura associé les commandes correspondantes. On ne manipulera jamais de fonctions en tant que telles, mais des vecteurs de commandes représentant ces fonctions.

2.1.2 Décomposition sur une famille non orthonormée

Le but de ce paragraphe est d'introduire les notions permettant de manipuler n'importe quel front d'onde et de pouvoir le décomposer sur telle ou telle famille de modes. Je présente les méthodes générales et les variables qui permettent d'effectuer cette opération, dont nous aurons par la suite couramment besoin. L'une de ces variables est la matrice de covariance géométrique d'une famille de modes, dont je présente immédiatement la définition et les propriétés.

Matrice de covariance géométrique d'une famille de modes, propriétés

La matrice de covariance géométrique d'une famille de modes permet, entre autres, le calcul des variances et covariances de phase associées à n'importe quels fronts d'ondes sans avoir à les expliciter comme des fonctions, mais en les définissant comme des vecteurs. Ce paragraphe décrit la matrice et les propriétés qui lui sont associées.

On possède donc une famille de modes $M_i(r, \theta)$, avec $1 \leq i \leq n$, qui n'ont a priori aucune propriété spéciale. On appelle matrice de covariance géométrique de la base la matrice Δ dont les termes sont

$$\Delta_{ij} = \int_{pupille} M_i(r, \theta) M_j(r, \theta) r dr d\theta \quad (2.2)$$

Cette matrice a été introduite en particulier par J-P. Gaffard dans (Gaffard & Boyer 1987). On démontre facilement un certain nombre de propriétés qui valent la peine d'être citées:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \quad \vec{u}^t \Delta \vec{v} = \vec{v}^t \Delta \vec{u} = \int_{pupille} V(r, \theta). U(r, \theta) r dr d\theta$. Une fois Δ calculée, cette propriété, extrêmement utile, permet de calculer tous les produits scalaires voulus entre modes du miroir, sans connaître la forme des fonctions d'influence de chaque actuateur.
2. Si B est une famille de modes exprimés sur une famille dont la matrice de covariance est Δ , alors $B^t \cdot \Delta \cdot B$ est la matrice de covariance de la famille B .
3. Si $B^t \cdot \Delta \cdot B = \text{Identité}$, B est une base orthonormée.
4. $\forall \vec{u} \quad \vec{u}^t \Delta \vec{u} = \int_{pupille} U^2(r, \theta) r dr d\theta \geq 0$ Il en découle que Δ est définie non-négative. Les valeurs propres de Δ sont donc obligatoirement positives ou nulles. Tout mode $U(r, \theta)$ associé à une valeur propre nulle est donc nul, $U(r, \theta) = 0$.
5. **Inversibilité:** Δ est inversible si elle ne possède pas de valeur propre nulle. Cela signifie que le jeu de modes à partir duquel est construite Δ est bien une *base*.
6. Pour que Δ ait une valeur propre nulle, il faut et il suffit que certains modes soient combinaison linéaire d'autres modes, dans l'espace \mathcal{E} . Un exemple éclaire la situation: la matrice Δ associée aux actionneurs du miroir déformable COMEONPLUS est inversible, car aucun actionneur ne peut faire ce que fait un autre. En revanche, la matrice Δ associée à l'ensemble "miroir déformable + miroir tip-tilt" n'est pas inversible, car à l'instar du miroir tilt, le miroir déformable est également capable par lui-même de produire un tilt. On peut donc avoir un jeu de commandes non-nulles qui produisent un front d'onde nul. Ce jeu de commandes est bien sûr un sous-espace vectoriel de l'espace des commandes, et il est associé à une valeur propre nulle.

Pour être tout à fait correct, le bémol à rajouter à ce qui vient d'être dit est que dans le cas COMEONPLUS la valeur propre "nulle" en question n'est pas nulle puisque le tilt du miroir déformable est légèrement "bosselé", mais simplement très petite. Cela suffit néanmoins à assurer la non-inversibilité si l'on travaille avec une routine d'inversion peu performante. Avec des routines plus performantes on peut arriver à inverser; mais l'effort ne sert à rien car la solution est évidemment numériquement très instable. Bref, la famille de modes manque d'indépendance linéaire pour être une base.

Décomposition sur une famille quelconque

Les paragraphes précédents ont permis de définir des notions qui vont faciliter l'expression de la décomposition d'un front d'onde sur une famille de modes quelconques. Ce paragraphe fait le tour de la question, et présente certains cas particuliers.

On se donne une famille de fonctions, les M_i , qui peuvent être aussi bien n polynômes de Zernike sur une pupille obturée que les actuateurs du miroir déformable. Ces fonctions ne sont ni forcément normées, ni forcément orthogonales. De plus, on ne supposera même pas que cette famille est une base, de manière à pouvoir discuter ce cas particulier. On veut pouvoir écrire la phase

$$\phi(r, \theta) = \sum_{i=1}^n a_i M_i(r, \theta) + \phi_{\text{residuel}} \quad (2.3)$$

avec ϕ_{residuel} aussi petit que possible au sens des moindres carrés de manière à maximiser le rapport de Strehl (Hermann 1992) pour ϕ_{residuel} . On vise à minimiser la quantité

$$\sigma^2 = \int (\phi - \sum_1^n a_i M_i)^2 \quad (2.4)$$

et l'on dérive pour cela par rapport aux a_k , en cherchant le zéro.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma^2}{\partial a_k} \\ &= 2 \int (\phi - \sum_1^n a_i M_i) M_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

ce qui donne

$$\forall k \quad \int \phi M_k = \sum_1^n a_i \int M_i M_k \quad (2.6)$$

J'appelle $\vec{\rho}$ le vecteur dont les composantes sont les termes $\int \phi M_k$. Les termes $\int M_i M_k$ seront appelés Δ_{ik} et forment la matrice Δ . J'appelle \vec{a} le vecteur qui a pour composantes les a_i . Tout cela défini, la relation précédente prend la forme simple

$$\vec{\rho} = \Delta \vec{a} \quad (2.7)$$

Finalement, tout tient dans cette équation. Les variables connues sont $\vec{\rho}$ et Δ , l'inconnue est \vec{a} . On serait tenté d'écrire $\vec{a} = \Delta^{-1} \vec{\rho}$ mais encore faut-il s'assurer de l'inversibilité de Δ (voir paragraphe 2.1.2, propriétés 5 et 6).

La famille n'est pas une base La matrice Δ n'est donc pas inversible. On a souvent tendance dans ces cas-là à aller chercher de puissantes méthodes d'inversion. C'est inutile et il faut bien comprendre que cela n'a rien d'insurmontable. La non-inversibilité est simplement liée à une caractéristique bassement matérielle de la famille choisie: plusieurs vecteurs sont en fait les mêmes. Qui aurait l'idée de décomposer un front d'onde sur un tilt et un autre tilt ?! Donc si l'on se trouve dans ce cas-là, il faut revoir la famille choisie. C'est ce qui est fait dans COME-ONPLUS, où l'on choisit délibérément le tilt du miroir tip-tilt plutôt que celui du miroir déformable; le choix est dicté ici par des impératifs mécaniques. Il en sera

généralement toujours de même dans les cas pratiques. Par exemple si l'on pouvait disposer d'un miroir additionnel pour corriger la défocalisation, la matrice Δ aurait 3 valeurs propres nulles: 2 tilts plus 1 défocalisation. On verra plus tard comment construire une base, avec les propriétés voulues.

La famille est une base Dans ce cas la matrice Δ est inversible, et la relation est donc

$$\vec{a} = \Delta^{-1} \vec{\rho} \quad (2.8)$$

On a de plus de brillantes propriétés:

$$\begin{aligned} \int_{pupille} \phi_{residuel} \cdot M_k &= \int (\phi - \sum_1^n a_i M_i) M_k \\ &= \int \phi M_k - \sum_1^n a_i \int M_i M_k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

en vertu de l'équation 2.6. Cela signifie que le front d'onde résiduel est orthogonal à *tout* vecteur de base, donc orthogonal¹ à l'espace généré par cette base.

Autre propriété concernant la variance de la phase sur la pupille:

$$\int \phi^2 = \vec{a}^t \cdot \Delta \cdot \vec{a} + \int \phi_{residuel}^2 \quad (2.10)$$

L'intégrale $\int \phi_{residuel}^2$ correspond à l'erreur de sous-modélisation.

La famille est une base orthonormée Les $M_i(r, \theta)$ jouissent de la propriété suivante:

$$\frac{1}{S} \int_{pupille} M_i(r, \theta) M_j(r, \theta) r dr d\theta = \delta_{ij} \quad (2.11)$$

ce qui rend la matrice Δ diagonale: $\Delta = \text{Id}$. La variable S est la surface de la pupille.

Dans ces conditions, la relation 2.8 devient triviale et le coefficient a_i s'écrit

$$\frac{1}{S} \int_{pupille} M_i(r, \theta) \phi(r, \theta) r dr d\theta = a_i \quad (2.12)$$

Lorsque la pupille est le cercle unité alors $S = \pi$, et l'on reconnaît les formules classiques couramment utilisées pour les polynômes de Zernike (section 1.1.2). De plus,

$$\frac{1}{S} \int \phi^2 = \vec{a}^t \cdot \vec{a} + \frac{1}{S} \int \phi_{residuel}^2 \quad (2.13)$$

$$= \sum_1^n a_i^2 + \frac{1}{S} \int \phi_{residuel}^2 \quad (2.14)$$

¹Notons que le terme orthogonal est ici employé au sens du produit scalaire $\int f_i f_j$ entre deux fonctions.

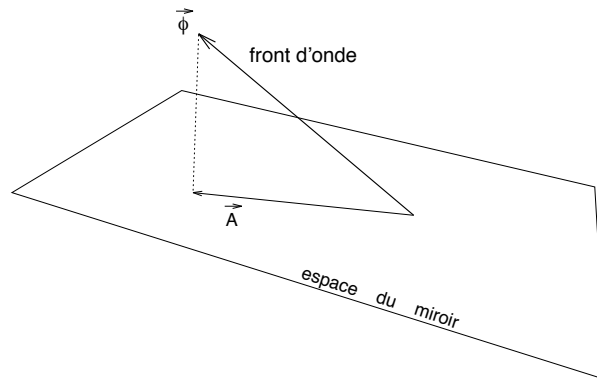


Figure 2.1: Décomposition de ϕ sur le sous-espace généré par les commandes. Le vecteur résiduel $\phi_{residuel} = \vec{\phi} - \vec{A}$ est orthogonal à ce sous-espace.

qui est la formule simple qui caractérise toute base orthonormée: la variance de phase s'exprime comme la somme des variances des coefficients de chaque mode (plus l'erreur de sous-modélisation évidemment).

Interprétation géométrique

Les notions que nous venons de voir peuvent paraître abstraites. Ce paragraphe leur redonne une forme connue, en les interprétant géométriquement.

A chacune des commandes du système correspond une fonction de \mathcal{E} . A l'ensemble des commandes correspond une famille de fonctions qui génère un sous-espace de \mathcal{E} . C'est ce sous-espace que nous allons représenter géométriquement. La décomposition d'une surface sur une famille de modes peut se représenter géométriquement comme une projection orthogonale du vecteur ϕ de \mathcal{E} sur le sous-espace de fonctions généré par les commandes (fig. 2.1). Grâce à cette représentation simple on comprend aisément par exemple comment les projections respectives de deux modes orthogonaux peuvent ne pas être orthogonales.

On voit parfois posé le problème de la reconstruction de front d'onde d'une manière particulière: reconstruire celui-ci sur les polynômes de Zernike, puis décomposer sur la base voulue. Ce type de reconstruction passant par une base particulière est mauvais, il suffit pour s'en convaincre de regarder la figure 2.2. L'erreur entre \vec{A} et \vec{B} (voir fig. 2.2) est d'autant plus grande que $\vec{\phi}$ devient orthogonal au sous-espace des fonctions d'influence. Elle est d'autant plus petite que $\vec{\phi}$ se rapproche de l'intersection des deux sous-espaces. En un mot, l'erreur prédomine en général pour les hautes fréquences spatiales. L'interprétation géométrique permet de s'apercevoir de ce fait -qui se démontre mathématiquement- sans faire aucun calcul.

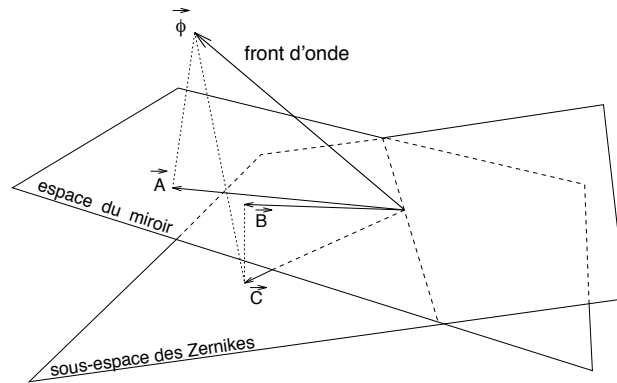


Figure 2.2: Le front d'onde est projeté orthogonalement directement sur le sous-espace du miroir, en \vec{A} . L'erreur entre \vec{A} et $\vec{\phi}$ est alors minimale. En revanche, en reconstruisant le front d'onde sur un sous-espace généré par un nombre fini de polynômes de Zernike (du même ordre de grandeur que le nombre de fonctions d'influence du miroir) on obtient une estimation différente, en \vec{C} . En projetant cette dernière sur le sous-espace du miroir on obtient en \vec{B} une estimation biaisée du front d'onde totalement différente de l'estimation correcte \vec{A} .

2.1.3 Outils de création d'une base

Je définis ici des procédures intégrant les notions que nous venons de voir, et qui constituent des outils pour construire telle ou telle base de modes. Cette section met en pratique les notions détaillées aux paragraphes précédents.

On veut créer une base d'un sous-espace du miroir, comprenant certains modes. Le fil conducteur dirigeant la méthode pour y arriver est le suivant: d'abord obtenir une famille génératrice de cet espace, puis extraire de cette famille des vecteurs orthogonaux. Quand on ne peut plus en extraire, on tient une base.

Première étape: détermination de modes particuliers On voudra souvent créer des bases de modes dont certains modes sont imposés tels que tilts, piston, défocalisation ou autres. Ces modes sont calculés à partir de l'équation 2.8. Les modes tilts et piston utilisés dans COMEONPLUS depuis Décembre 1992 ont été déterminés exactement de cette manière, les déformées ont été fournies par Laserdot d'après des simulations aux éléments finis et il a été tenu compte des différentes sensibilités des actuateurs.

Cette opération est la seule opération qui nécessite de travailler sur les formes réelles des surfaces car ensuite tout peut se faire à partir de matrices.

Détermination d'une base orthonormée La méthode initiale est due à J.P Gaffard (Gaffard & Boyer 1987), qui proposait de diagonaliser la matrice Δ calculée

sur les déformées des actuateurs. En effet, diagonaliser Δ conduit à écrire

$$\begin{cases} B^t \cdot \Delta \cdot B = \lambda \\ B^t \cdot B = \text{Identite} \end{cases} \quad (2.15)$$

où λ est une matrice diagonale, la matrice des valeurs propres. D'après la propriété 2 du paragraphe 2.1.2, la matrice λ est la matrice de covariance de la base B . Elle est diagonale et d'après la propriété 3 la base B est donc orthogonale: il suffit de normaliser les modes par un coefficient $1/\sqrt{\lambda}$ pour avoir une base orthonormée.

Le point important est ici l'information apportée par les valeurs propres nulles. Une valeur propre nulle signifie que la famille des actuateurs est "redondante", qu'il y a des actuateurs "en trop" dont on n'a aucun besoin. Dans ce cas, les modes de base de l'espace du miroir se limitent aux modes associés à des valeurs propres non nulles.

J'ajoute que cette méthode donne *une seule* base orthonormée du sous-espace du miroir dans \mathcal{E} . Or tout espace vectoriel à au moins 2 dimensions possède une *infinité* de bases orthonormées. La particularité de la base obtenue avec cette méthode se tient dans la deuxième équation $B^t \cdot B = Id$. Si B est exprimée dans la base des actuateurs du miroir, l'équation $B^t \cdot B = Id$ signifie que les modes sont également orthogonaux *dans l'espace des commandes*. La double contrainte imposée par l'orthogonalité selon deux produits scalaires fait l'unicité de cette base. On peut sortir de ce cas particulier et étendre cette méthode à un cas plus général: la matrice Δ peut être calculée sur n'importe quelle famille. On n'est pas forcé de calculer Δ sur les actuateurs du miroir. Et là, on a accès à toutes les bases orthonormées voulues, avec en prime la possibilité de choisir le deuxième critère, l'orthogonalité dans l'espace de commandes, ou des mesures, ou des covariances statistiques. Le choix sera discuté plus tard.

Détermination d'une base comprenant des modes particuliers La philosophie est de déterminer une base de l'espace orthogonal au sous-espace engendré par ces modes particuliers. Afin de ne pas trop s'embrouiller dans des considérations théoriques qui ont tendance à rendre le problème assez abstrait, je prend directement l'exemple de COMEONPLUS . On veut créer une base de modes orthonormés dans l'espace du miroir et contenant par exemple une défocalisation, à partir d'une famille génératrice de cet espace. Cette dernière sera par exemple la famille des 52 actuateurs du miroir. Des 52 modes que l'on veut, on est sûr d'en avoir déjà 1, la défocalisation; les 51 autres modes génèrent un espace à 51 dimensions orthogonal à cette défocalisation. Une famille génératrice de cet espace est facile à obtenir: il suffit de retirer la composante de défocalisation à tous les actuateurs. On s'y prend comme suit: \vec{d} est la défocalisation, \vec{a} un actuateur et Δ la matrice de covariance des \vec{a} . On veut priver \vec{a} de sa composante sur \vec{d} , c'est-à-dire trouver $\vec{a}' = \vec{a} - x \vec{d}$ tel que

$$(\vec{a} - x \vec{d}) \cdot \Delta \cdot \vec{d} = 0 \quad (2.16)$$

ce qui implique

$$\vec{a}' = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \Delta \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \Delta \cdot \vec{d}} \vec{d} \quad (2.17)$$

La famille des \vec{a}' contient 52 éléments, tous orthogonaux à la défocalisation. Ils génèrent donc un espace à 51 dimensions, puisque la 52ième est prise par la défocalisation. Il suffit maintenant de se ramener au dernier cas du précédent paragraphe; on calcule la matrice Δ de cette famille. Celle-ci, une fois diagonalisée, montrera 51 valeurs propres non nulles correspondant à 51 modes formant une base orthonormée orthogonale à la défocalisation, et une valeur propre nulle qui est là pour attester du fait que parmi les 52 modes initiaux il y avait 1 degré de liberté manquant.

Evidemment, ce scénario est valable non seulement pour la défocalisation mais pour tout autre mode: tilts, piston, etc.

Diagonalisation simultanée La diagonalisation est un changement de base qui vise à exprimer une transformation selon ses axes propres qui sont les vecteurs propres. La matrice de changement de base est une rotation. Il existe en fait une infinité de bases B dans lesquelles une matrice peut s'exprimer sous une forme diagonale. Seule l'une d'entre elles vérifie $B \cdot B^t = 1$. Il peut néanmoins être utile de s'intéresser à d'autres bases dans lesquelles la matrice est diagonale, sans pour autant avoir $B \cdot B^t = 1$. En effet cette dernière équation sur les vecteurs propres exprime une contrainte mathématique qui correspond obligatoirement à une contrainte physique qui, elle, n'est pas toujours souhaitée. On désirera donc dans certains cas changer de base pour exprimer une matrice sous une forme diagonale en ayant en même temps non pas $B \cdot B^t = 1$ mais $B \cdot \Gamma \cdot B^t = 1$ (avec Γ symétrique, définie et strictement positive) qui est plus général. En fait, $B \cdot B^t = 1$ suggère une orthonormalisation des vecteurs propres au sens du produit scalaire classique entre vecteurs alors que $B \cdot \Gamma \cdot B^t = 1$ est également une orthonormalisation mais sur un produit scalaire particulier. (J'anticipe un peu: Γ sera souvent une matrice de covariance géométrique pour forcer l'orthonormalité entre modes, et C sera une matrice de covariance statistique pour générer des modes non corrélés.)

Soient donc une matrice C et une matrice Γ , chacune symétrique et définie positive. On désire

$$\begin{cases} B^{-1} \cdot C \cdot B^{t-1} = \Sigma \text{ (diagonale)} \\ B^t \cdot \Gamma \cdot B = Id \end{cases} \quad (2.18)$$

Cette opération est classique en algèbre linéaire. Cependant, peu d'algorithmes sont décrits dans la littérature, et il faut savoir effectuer cette diagonalisation à partir d'opérations plus simples. Cela permet également de vérifier pas à pas le bon déroulement des opérations et la dispersion des valeurs propres, choses qui peuvent s'avérer utiles lorsque la taille des matrices devient conséquente. On procèdera donc ainsi:

1. Diagonaliser $M^t \cdot \Gamma \cdot M' = D^2$ où D est la “racine carrée” de la matrice diagonale des valeurs propres. La matrice M' est la matrice des vecteurs propres, disposés en colonne.
2. Diviser les vecteurs propres par la racine de leur valeur propre, c'est-à-dire calculer la matrice des modes $M = M' \cdot D^{-1}$. Les modes M sont toujours en colonne.
3. Calculer $C' = M^{-1} \cdot C \cdot M^{t-1}$.
4. Diagonaliser $A^t \cdot C' \cdot A = \Sigma$.
5. Calculer $B = M \cdot A$.

On vérifie que l'on a bien les propriétés attendues:

$$\begin{aligned}
 B^{-1} \cdot C \cdot B^{t-1} &= (M \cdot A)^{-1} \cdot C \cdot (M \cdot A)^{t-1} \\
 &= A^t \cdot M^{-1} \cdot C \cdot M^{t-1} \cdot A \\
 &= A^t \cdot C' \cdot A \\
 &= \Sigma
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned}
 B^t \cdot \Gamma \cdot B &= (M \cdot A)^t \cdot \Gamma \cdot (M \cdot A) \\
 &= A^t \cdot M^t \cdot \Gamma \cdot M \cdot A \\
 &= A^t \cdot D^{-1} \cdot M^t \cdot \Gamma \cdot M' \cdot D^{-1} \cdot A \\
 &= A^t \cdot D^{-1} \cdot D^2 \cdot D^{-1} \cdot A \\
 &= A^t \cdot A \\
 &= Id
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

On sait donc maintenant créer une base de n'importe quel sous-espace de \mathcal{E} et en particulier le sous-espace associé au miroir déformable. Cette base peut comprendre un nombre quelconque de modes de notre choix (tilts, piston, autres ...) que l'on sait orthonormer entre eux. On sait déduire les autres modes pour qu'ils soient orthogonaux aux premiers et orthogonaux entre eux. Enfin on sait également imposer, dans n'importe quel sous-espace généré par les modes sus-cités (ou par d'autres !) imposer une double orthogonalité, au sens de notre produit scalaire “courant” et d'un autre, au choix (ce peut être l'indépendance statistique, l'orthogonalité des mesures, etc).

2.2 Différentes bases de modes

L'une des premières choses à laquelle on va penser avant d'optimiser la commande est le choix de la base des modes. Mais est-il raisonnable d'envisager une base de

modes fixe et bien définie, indépendante des conditions de turbulence ? C'est la question à laquelle cette section va répondre.

A travers les échantillons de turbulence acquis grâce à COMEONPLUS , l'analyse des modes propres de l'atmosphère montre que ceux-ci sont à la merci du caractère non stationnaire de la turbulence. La majorité de l'énergie turbulente est contenue dans les basses fréquences temporelles des fluctuations. Dès lors, toute matrice de covariance des mesures s'écarte très facilement de la théorie (Kolmogorov): non à cause de l'écart réel entre la nature exacte de cette turbulence et sa nature supposée, mais parce que les termes de covariance entre les mesures ne convergent pas facilement au cours du temps en raison de la non-stationnarité. Sur cet effet prépondérant vient se greffer d'autre part une grande sensibilité à tout phénomène externe modifiant l'isotropie des perturbations de phase sur la pupille. La pratique montre en effet qu'il est quasiment impossible d'obtenir des modes stables au cours du temps à partir des matrices de covariance des mesures. Supposons que l'on déduise de ces mesures une autre grandeur: coefficients modaux divers, valeur de la phase en différents points ou autres. Etant donné que le passage des mesures de l'analyseur à n'importe quelle grandeur proportionnelle associée à la phase se fait de manière linéaire, la matrice de covariance statistique qui y est associée présentera les mêmes caractéristiques que la matrice de covariance statistique des mesures quant à sa sensibilité vis-à-vis de la non-stationnarité.

Dans le cas, extrême, où la présence d'une échelle externe suffisamment étroite couplée à des conditions atmosphériques particulièrement stables et à un dépouillement portant sur une large échelle de temps permettraient d'obtenir des modes corrects -dans les limites de barres d'erreur encore à préciser- ces modes contiennent alors une information globale sur la nature spatiale de la turbulence ; une information intégrée qui ne rend alors plus compte des propriétés temporelles. Une telle procédure conduit de nouveau à la séparation des caractéristiques spatiales et temporelles du phénomène, un schéma que l'on voudrait éviter si l'on veut se placer dans le cas idéal d'une optimisation spatio-temporelle réelle. On voit alors s'en dessiner le principe; il est nécessaire d'obtenir une information modale distribuée sur le spectre temporel des fluctuations. Partant des constatations portant sur la précarité de la détermination de modes stables à cause de la non-stationnarité, à ajouter au risque et à la dépense de temps d'acquisition et de calcul pour extraire une quantité croissante d'information, puisque la méthode est d'autant plus demandeuse d'information qu'elle vise à une optimisation pointue, à comparer au besoin qui est d'avoir un algorithme robuste et rapide, j'ai donc choisi d'imposer une séparation entre les domaines spatial et temporel, quitte à devoir par la suite itérer en analysant les propriétés statistiques de l'erreur résiduelle. Par la suite, l'expérience a montré qu'effectivement le choix précis de la base des modes, lorsque celle-ci est proche de l'optimum, n'influence pas au premier ordre la valeur du minimum de l'erreur de phase.

2.2.1 Pourquoi chercher dans l'espace du miroir ?

Supposons que l'on ait choisi une autre base, comme celle des polynômes de Zernike, dont la dénomination explicite n'est ici qu'un prétexte pour parler d'une base quelconque. On aura donc une matrice de reconstruction sur les polynômes de Zernike M_1 , puis il faudra interpoler le front d'onde reconstruit avec la surface du miroir déformable. Il est de bon goût que cette interpolation soit linéaire. Ainsi, quelle que soit la base choisie on passe des coefficients des polynômes aux modes du miroir par une matrice M_2 . Bilan, on passe quoi qu'il arrive des mesures du Hartmann aux modes du miroir par une matrice $M_3 = M_2.M_1$. Cela revient à commander non pas les polynômes de Zernike mais des modes du miroir qui ne sont qu'une interpolation des polynômes. Et comment les commander, sinon qu'en en construisant la matrice d'interaction, en l'inversant et ainsi de suite. On revient alors à la procédure classique de la commande modale, où les modes choisis sont la *projection des polynômes de Zernike* sur le miroir, et non les modes de Zernike eux-mêmes.

En somme, en raison du fait que l'on dispose d'un miroir déformable comme moyen d'action sur la phase, il n'y a pas d'intérêt à utiliser une base de reconstruction externe à l'espace de ce miroir puisque tôt ou tard la phase reconstruite sera exprimée sur ledit miroir. C'est tout le contraire d'une reconstruction de phase a posteriori, où l'on doit rechercher la meilleure base de reconstruction dans le plus vaste espace possible, puisque à ce moment tout est encore permis.

2.2.2 Les bonnes propriétés

Plus qu'une liste des propriétés intéressantes des modes, c'est une justification de l'intérêt de la commande *modale* que fait ce paragraphe.

Faisons donc le choix des modes dans l'espace du miroir. Ce choix est-il important ? Seulement si certaines contraintes pèsent sur la reconstruction. Si l'on a parfaitement confiance dans chaque degré de liberté commandé (pas de bruit, pas de repliement, pas d'effet temporel, pas d'anisoplanétisme) alors toutes les bases sont strictement équivalentes. La source de comportements particuliers parmi les différentes bases de modes est la présence de problèmes dans la reconstruction. On étudie donc l'aspect temporel dans la base modale ; restent le bruit, le repliement et l'anisoplanétisme. Ce dernier sera traité à part. Quelles sont les propriétés que doit posséder la base de modes choisie pour la commande ? Un bon mode est un mode qui permet de retirer au front d'onde une grande quantité de variance de phase, en introduisant par propagation le moins de bruit possible et dont la reconstruction soit facile de manière à éviter le repliement. Il n'est évidemment pas possible de conférer à *tous* les modes tant de bonnes propriétés, au contraire. Plus certains modes posséderont ces bonnes propriétés, plus les modes restants vont se trouver être l'antithèse des premiers : et c'est là l'intérêt. Identifier un ou quelques modes qui n'effectuent pratiquement aucune correction sur la phase en introduisant un maximum de bruit et d'erreur de

repliement est réellement profitable. On sait immédiatement que ces modes devront être filtrés, et c'est une information capitale. La meilleure base n'est donc pas celle où tous les modes sont "bons": c'est impossible, car la variance de phase totale qu'ils se partagent est limitée, ainsi que la variance totale du bruit propagé. La meilleure base est celle qui présente le plus large éventail possible dans la qualité de correction des modes. Une base de "bonne qualité" sera par exemple un jeu de modes où les derniers sont les plus "mauvais" possible. L'anti-exemple est la base zonale des actuateurs, où tous les degrés de liberté sont équivalents ou presque.

Il est enfin une propriété qui, si elle n'est pas nécessaire dans l'absolu, est nécessaire dans le cas de l'optimisation modale, il s'agit de l'orthogonalité entre modes. L'erreur résiduelle totale s'exprime en effet comme la somme des produits de chaque élément de Δ par chaque élément de la matrice de covariance statistique des modes, c'est-à-dire

$$\epsilon = \sum_{i,j} \langle a_i a_j \rangle \Delta_{ij} \quad (2.21)$$

Choisir un mode et minimiser $\langle a_i^2 \rangle$ pour réduire ϵ ne va pas obligatoirement dans le bon sens si le terme $\langle a_i a_j \rangle$ est fortement négatif (avec $\Delta_{ij} > 0$). Les matrices Δ et $\langle a_i a_j \rangle$ sont toutes deux symétriques, définies et strictement positives mais on peut montrer que ces propriétés ne représentent pas une condition suffisante pour assurer que la minimisation de l'erreur sur chaque mode minimise effectivement l'erreur totale. La petite simulation qu'illustre la figure 2.3 le montre. J'ai supposé ici deux modes, liés avec un coefficient de corrélation de -0.70. La fonction d'erreur résiduelle en fonction de la bande passante est simulée par une simple parabole; le fait n'a pas d'importance. La matrice Δ vaut 1 sur la diagonale, 0.7 en dehors. On voit que trouver l'optimum pour chaque mode ne correspond pas à l'optimum réel. Mais cette simulation suggère plusieurs remarques:

- Pour trouver un cas de figure où ce genre de situation se produise, j'ai déjà dû rechercher une condition particulière sur les coefficients de Δ et de la matrice de covariance statistique. Il faut un écart assez grand entre les variances des deux modes, un coefficient de corrélation assez important et de signe opposé à la covariance géométrique des modes. C'est-à-dire qu'en prenant des coefficients au hasard on a toutes les chances que cela n'arrive pas.
- Le fait que le coefficient de corrélation doive être de signe opposé à la covariance géométrique des modes rend le phénomène encore plus improbable, car si le terme de covariance géométrique est par exemple positif cela signifie que les deux modes se "ressemblent" et qu'il y a donc toutes les chances pour que le coefficient de corrélation statistique soit, lui aussi, positif.
- Le graphe des courbes de niveau de l'erreur résiduelle de phase suggère la manière d'aborder le problème pour optimiser sur une base non orthogonale: d'abord optimiser la bande passante de correction du mode de plus grande

variance, et simuler la correction effective de ce mode sur la file circulaire. Ensuite seulement, optimiser le deuxième mode et ainsi de suite. Mais cela requiert de calculer l'erreur résiduelle totale à chaque itération: la méthode devient très lourde.

Malgré ces considérations, pour une double raison de rigueur mathématique autant que de prudence, le calcul de l'optimisation modale dans COMEONPLUS /ADONIS s'effectue actuellement sur une base de modes orthogonaux. Notons que le calcul de l'erreur résiduelle de phase se résume à une simple sommation des erreurs modales individuelles dans deux cas de figure: soit les modes sont orthogonaux, soit leurs coefficients sont non corrélés (Eq. (2.21)). Cette deuxième condition est beaucoup plus difficile à remplir que la première d'un point de vue expérimental puisqu'elle suppose une connaissance a priori sur la nature de la turbulence. On revient à nouveau sur le problème de la variabilité des coefficients $\langle a_i a_j \rangle$ face à un phénomène non stationnaire. C'est pourquoi elle a été abandonnée.

2.2.3 Efficacité de correction

Ce paragraphe définit quelles sont les notions que cache le terme "efficacité de correction".

L'efficacité de correction d'un mode est déterminée par la quantité de variance de phase retirée au front d'onde turbulent lorsque le mode a été corrigé au sens théorique du terme (ni bruit, ni repliement ni autre). Les modes ayant une efficacité maximale de ce point de vue sont les modes provenant de la décomposition en modes de Karhunen-Loeve (KL) du processus. J'attire l'attention du lecteur sur le fait qu'en optique adaptative on a tendance à nommer abusivement "Karhunen-Loeve", comme s'il s'agissait d'une dénomination unique, la décomposition en Karhunen-Loeve du front d'onde turbulent sur une pupille circulaire selon les lois dictées par l'hypothèse Kolmogorovienne. C'est là une restriction farouche de la décomposition en KL, appliquée ici à un cas particulier. La décomposition en KL, terme plus général, est une opération qui consiste à décrire un processus aléatoire comme une somme de fonctions (modes) ayant la double propriété d'être orthogonaux et non corrélés entre eux. On peut donc calculer la décomposition en KL associée à n'importe quel processus, en particulier on peut réduire le front d'onde à sa projection sur le sous-espace du miroir et calculer la décomposition en KL à l'intérieur de cet espace. Notons que cette opération n'a rien à voir avec la projection des KL (au sens Wang & Markey) sur l'espace du miroir.

Les modes provenant de la décomposition en KL possèdent une propriété intéressante. Le premier d'entre eux, celui dont l'efficacité de correction est la plus grande vis-à-vis de ses voisins, est aussi le mode dont l'efficacité de correction est maximale dans l'absolu -pour le phénomène aléatoire concerné bien entendu. Puis le deuxième mode est celui dont l'efficacité de correction est maximale après que le premier ait

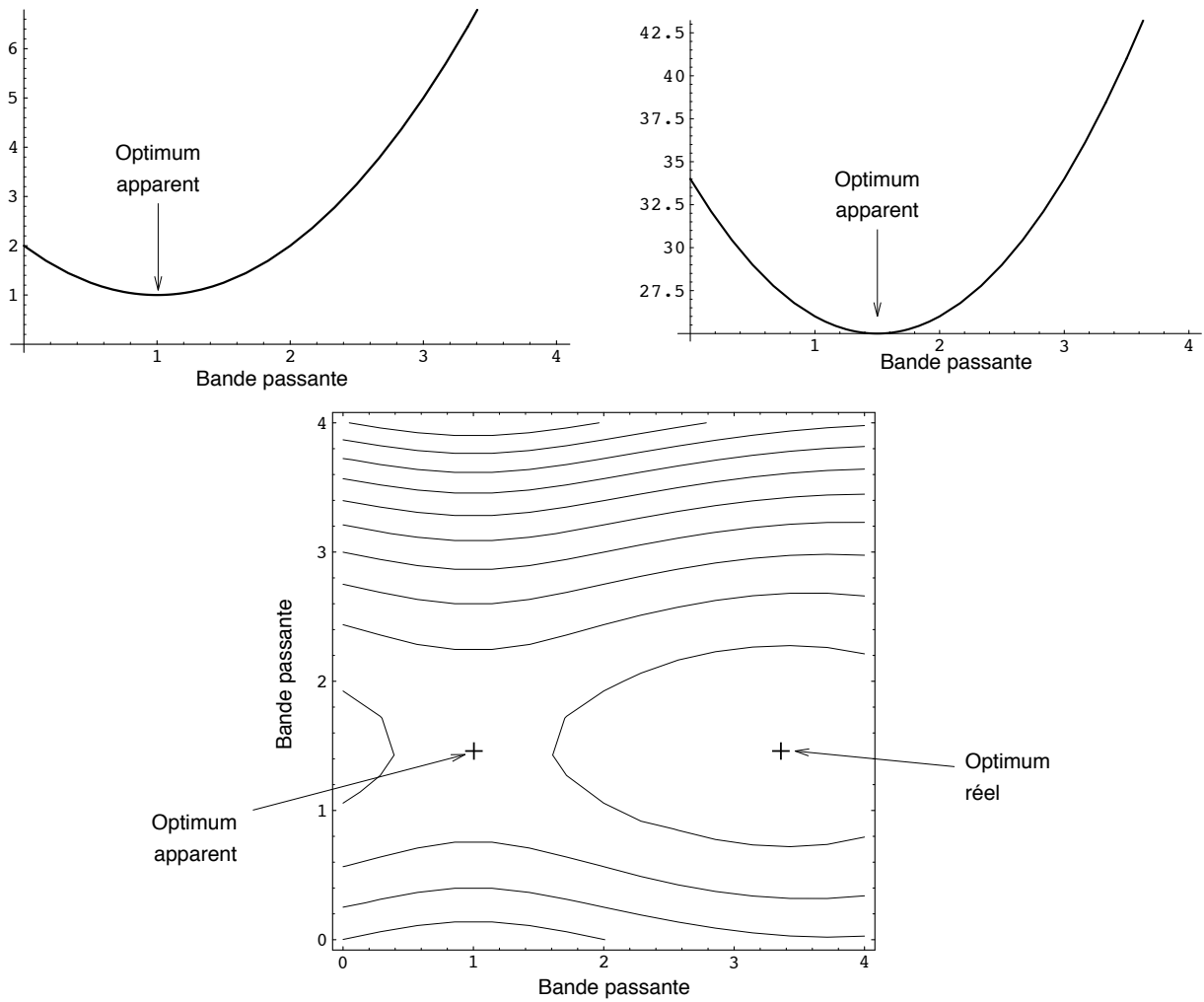


Figure 2.3: Simulation de l'erreur résiduelle de phase générée par deux modes fortement corrélés géométriquement, et statistiquement anti-corrélés. L'optimisation indépendante de l'erreur résiduelle de phase sur chaque mode ne correspond pas à l'optimum réel.

été corrigé, et ainsi de suite. Les KL sont donc répandus et utilisés -à chaque fois que faire se peut- ou tout au moins mentionnés principalement en raison de cette caractéristique, puisque grâce à elle l'utilisation d'un minimum de modes (degrés de liberté) apporte un maximum d'efficacité de correction. Ainsi, si l'on doit posséder un miroir à 10 degrés de liberté, mieux vaut qu'ils soient le plus proche possible des KL. Mais poursuivons le raisonnement de la cascade des variances, successivement maximales, portées par chaque mode. Dans un espace de dimension finie tel que l'espace du miroir, on arrive tôt ou tard au dernier mode, dont obligatoirement l'efficacité est minimale, et ce d'une manière absolue, puisque tous les autres ont retiré le maximum. De même pour l'avant dernier, dont l'efficacité est encore minimale quand le dernier a été corrigé. Cette caractéristique est d'importance puisqu'elle assure la plus grande dispersion possible entre les efficacités des modes, propriété précisément souhaitée dans le cadre de l'optimisation modale.

Matrice de covariance statistique, calcul, décomposition en Karhunen-Loeve

J'aurais peut-être renvoyé ce paragraphe en annexe s'il ne m'avait été posé cent fois au cours de ma thèse la question concernant la méthode de calcul de la matrice de covariance statistique des modes. La voici donc.

La méthode est toujours la même dès lors qu'il s'agit d'obtenir des modes non corrélés: diagonaliser la matrice de covariance statistique de la famille de modes de départ. La matrice diagonale alors obtenue n'est rien d'autre que la matrice de covariance statistique de la nouvelle base, donnée par les vecteurs propres. Etant diagonale, les modes sont non corrélés.

Par exemple, Nicolas Roddier (Roddier N. 1990) a exposé une méthode de simulation de la turbulence atmosphérique par tirage aléatoire des coefficients des KL, eux-mêmes obtenus par diagonalisation de la matrice de covariance des coefficients des polynômes de Zernike. Cette méthode a l'avantage d'être simplifiée grâce à la connaissance de la forme analytique de la matrice de covariance donnée par Noll (1976).

Pour calculer la décomposition en KL dans un espace restreint de dimension finie, le plus délicat est de calculer correctement la matrice de covariance de la famille de modes qui nous sert de base dans cet espace. Malgré les performances étonnantes de certaines stations de travail récentes, ce calcul reste généralement assez long (intégrales multiples). Suffisamment en tout cas pour que l'on essaye de le simplifier. Parmi les simplifications utiles, l'une d'elles est de constater que lorsque l'on connaît la matrice de covariance statistique d'une base quelconque de modes, on peut déduire la matrice de covariance de n'importe quelle autre base du même espace par une manipulation matricielle primaire. Cela donne envie, pour un miroir déformable donné (i.e. pour un espace donné), de calculer la matrice de covariance statistique

des actuateurs une bonne fois pour toutes, les autres bases seront déduites de ce premier calcul. Or, les actuateurs n'étant pas des fonctions à moyenne nulle sur la pupille, il convient d'être prudent.

Soit $d_i(\vec{r})$ un mode, qui peut être simplement la déformée d'un actuateur. On supposera dans tous les cas cette fonction normée sur la pupille ($\int_{pupille} d_i^2 = 1$). La projection du front d'onde sur cette déformée s'écrit

$$h_i = \int_{pupille} \phi(\vec{r}) d_i(\vec{r}) d^2\vec{r} \quad (2.22)$$

Il convient d'être conscient, à ce stade, que le coefficient h_i trouvé ne permet pas d'écrire $\phi = \sum_i h_i d_i$ puisque les d_i ne sont pas orthogonales: on utilisera donc plus tard la relation 2.8 pour obtenir la véritable décomposition. Pour l'instant, on a

$$\langle h_i h_j \rangle = \int_{pupille} \int_{pupille} \langle \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r}') \rangle d_i(\vec{r}) d_j(\vec{r}') d^2\vec{r} d^2\vec{r}' \quad (2.23)$$

On manipule plus facilement la fonction de structure de phase que la covariance de la phase. On la fait donc apparaître, et l'on obtient

$$\begin{aligned} 2\langle h_i h_j \rangle &= \int_{pupille} d^2\vec{r}' d_j(\vec{r}') \int_{pupille} \langle \phi^2(\vec{r}) \rangle d_i(\vec{r}) d^2\vec{r} \\ &+ \int_{pupille} d^2\vec{r} d_i(\vec{r}) \int_{pupille} \langle \phi^2(\vec{r}') \rangle d_j(\vec{r}') d^2\vec{r}' \\ &- \int_{pupille} \int_{pupille} D_\phi(\vec{r} - \vec{r}') d_i(\vec{r}) d_j(\vec{r}') d^2\vec{r} d^2\vec{r}' \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si les d_i sont des modes de moyenne nulle sur la pupille, alors les deux premiers termes faisant intervenir la variance de la phase sont nuls, quelle que soit la valeur de $\langle \phi^2(\vec{r}) \rangle$. Il vient donc

$$\langle h_i h_j \rangle = -\frac{1}{2} \int_{pupille} \int_{pupille} D_\phi(\vec{r} - \vec{r}') d_i(\vec{r}) d_j(\vec{r}') d^2\vec{r} d^2\vec{r}' \quad (2.25)$$

Si les d_i sont les déformées des actuateurs, il faut supposer que la phase considérée est la phase *sans piston*, et il faut se reporter à l'équation 1.66 pour avoir une expression de $\langle \phi^2(\vec{r}) \rangle$, car en dépit des apparences cette valeur dépend en effet de \vec{r} .

Le pendant de l'équation 2.24 dans l'espace de Fourier utilise le spectre de Wiener $\Phi_\phi(\vec{k})$. On a

$$\langle h_i h_j \rangle = \int \Phi_\phi(\vec{k}) \tilde{d}_i(\vec{k}) \tilde{d}_j(\vec{k}') d^2\vec{k} \quad (2.26)$$

La formule semble plus simple, mais n'oublions pas que cette fois-ci le support d'intégration est infini (en 2-D) avec quelques problèmes de précision de calcul en 0 où il peut être nécessaire de resserrer l'échantillonnage puisque $\Phi_\phi(\vec{k})$ est proportionnel à $|k|^{-11/3}$. Donc l'emploi de l'une ou l'autre formule dépend du contexte dans lequel elle est utilisée.

Soit Δ la matrice de covariance géométrique des fonctions d_i (c'est-à-dire $\Delta_{ij} = \int d_i d_j$).

Soit donc maintenant une famille de modes définis sur les actionneurs, et représentée par la matrice F . Soit \vec{f} le vecteur dont les composantes sont les f_i , coefficients de décomposition de la phase sur les modes F . On a $F\vec{f} = \Delta^{-1}\vec{h}$ (voir 2.1.2). La matrice F n'est pas toujours inversible, simplement parce qu'elle n'est pas obligatoirement carrée: il peut y avoir moins de modes que d'actionneurs. On a alors

$$\vec{f} = (F^t \cdot \Delta \cdot F)^{-1} F^t \cdot \Delta \cdot \Delta^{-1} \vec{h} = (F^t \cdot \Delta \cdot F)^{-1} F^t \vec{h} \quad (2.27)$$

d'où l'on peut en déduire

$$\langle \vec{f} \vec{f}^t \rangle = (F^t \cdot \Delta \cdot F)^{-1} F^t \langle \vec{h} \vec{h}^t \rangle F (F^t \cdot \Delta \cdot F)^{-1} \quad (2.28)$$

Cette équation se simplifie de manière triviale lorsque F est inversible, ou encore plus simplement lorsque F est la matrice identité, c'est-à-dire que la famille choisie est la base canonique des actionneurs.

2.2.4 Efficacité de l'analyse

Rien ne sert d'essayer de corriger un mode dont l'efficacité de correction est grande, si celui-ci n'est pas correctement analysé par le senseur. En quels termes faut-il caractériser la sensibilité de tel ou tel mode ? La réponse suit.

Un critère peut être de le caractériser par la norme (carrée) des mesures pour une excitation donnée, l'excitation pouvant être mesurée par la variance de phase du mode sur la pupille, ou par la norme des commandes. Notons que l'on peut obtenir des résultats très différents en fonction de l'emploi de l'un ou l'autre de ces deux derniers critères. Prenons l'exemple des actionneurs centraux, sous l'obstruction centrale du secondaire. Seuls les pieds de la déformée dépassent sur la partie utile de la pupille. Pour obtenir une valeur de variance de phase donnée il est alors nécessaire d'appliquer une forte tension de commande. Dans ces conditions, le rapport entre norme des mesures et norme des commandes est petit: en effet puisque ces actionneurs sont placés dans une partie obturée de la pupille, l'analyseur ne les voit pas d'où une sensibilité apparente très faible vis-à-vis de la tension appliquée. Mais une telle assertion est injuste puisque certes l'analyseur ne voit rien ou peu de choses, mais les effets sur l'image sont de toute façon eux-aussi minimes. Ces derniers sont caractérisés par la valeur ms de la phase. Et là, le rapport entre norme des mesures et valeur ms de phase est comparable aux autres actionneurs: l'analyseur n'est pas plus aveugle à la détérioration de l'image causée par ces actionneurs que par les autres.

Soit D la matrice d'interaction. Elle contient toute l'information quant à la sensibilité de l'analyseur à tel ou tel mode. La matrice d'interaction lie commandes \vec{a} et mesures \vec{s} par la relation $D\vec{a} = \vec{s}$. On a alors $\vec{a}^t D^t D \vec{a} = |\vec{s}|^2$. Ainsi la double

diagonalisation de la matrice $D^t D$ telle que

$$\begin{cases} M^t \cdot D^t D \cdot M = \lambda \\ M^t \cdot \Delta \cdot M = Id \end{cases} \quad (2.29)$$

fait apparaître une base de vecteurs propres qui sont des modes orthonormés, et dont la valeur propre associée caractérise la sensibilité vis à vis de l’analyseur.

En réalité, afin de simplifier le problème on diagonalise souvent la matrice $D^t D$ dans la base canonique des actionneurs,

$$\begin{cases} M^t \cdot D^t D \cdot M = \lambda \\ M^t \cdot M = Id \end{cases} \quad (2.30)$$

et les modes M obtenus sont souvent appelés les *modes de commande* du système. L’intérêt d’une telle opération est de faire apparaître les modes à valeur propre nulle (ou très faible). Dans le cas de COMEONPLUS, ils sont au nombre de deux. L’un est un mode *piston*, dans le sens où tous les actionneurs poussent (ou tirent) dans la même direction. L’autre est un mode où, avec la géométrie d’un damier, les actionneurs poussent (cases blanches) et tirent (noires) alternativement. Cette configuration est caractéristique d’un système où les actionneurs sont placés dans les coins de chaque sous-pupille. Le mode est en général appelé “mode gaufre” (Wild et al. 1994a,b), il a reçu les dénominations de “mode push-pull” ou “piston dégénéré” au sein de l’équipe COMEONPLUS. Cette dernière dénomination se comprend lorsque l’on sait que expérimentalement, les modes gaufre et piston ne sont jamais totalement séparés. Le sous-espace engendré est bien le même que celui engendré par un piston “pur” et un mode gaufre “pur”, mais ils sont toujours plus ou moins mêlés dans la pratique. Quoi qu’il en soit, ces deux modes ne sont pas des modes “locaux” mais ils intéressent toute la pupille. C’est pourquoi dans les deux cas de diagonalisation précédents on obtient (à peu près) les mêmes résultats concernant ces deux modes.

2.2.5 Discussion sur la construction des modes, problème du tilt

Comment réunir simultanément toutes les propriétés que nous venons d’énoncer ? C’est la question à laquelle répond ce paragraphe.

Réunir orthogonalité et efficacité de correction se fait par la double diagonalisation de la matrice de covariance statistique et de la matrice Δ . Mais la base ainsi engendrée contient des modes indésirables tels que piston et mode gaufre. Leur présence affecte directement la propagation du bruit sur tous les modes, il est nécessaire de les filtrer. Si le mode piston est toujours plus ou moins égal à lui-même quelle que soit la configuration optique exacte du système, il n’en est pas de même pour le mode gaufre qui y est très sensible. Pour des raisons optomécaniques, ce dernier est généralement très dissymétrique.

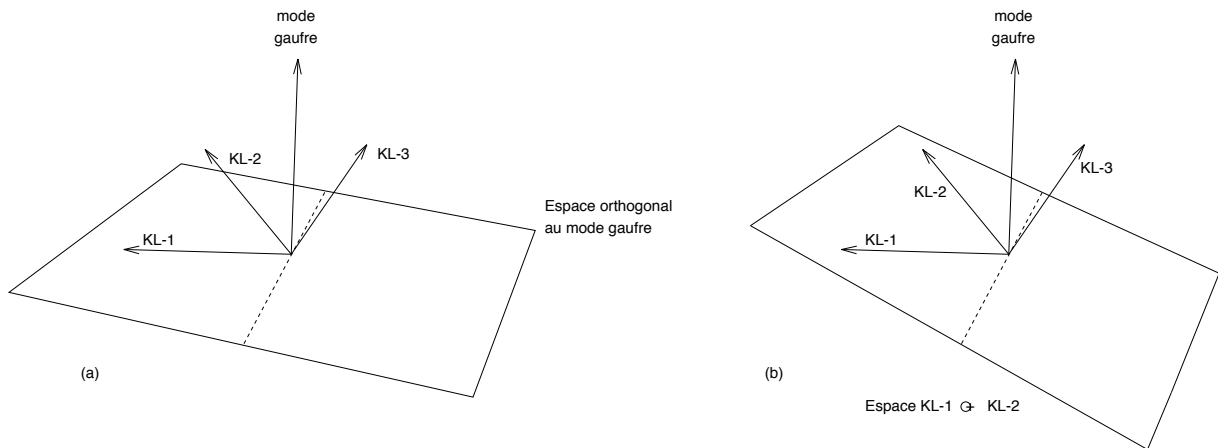


Figure 2.4: Le mode gaufre, très dissymétrique, n'est pas forcément orienté selon les axes propres naturels de la turbulence (vecteurs kl_1 , kl_2 , kl_3): afin d'en éviter l'introduction dans la commande, il n'est pas nécessaire de se placer dans un sous-espace orthogonal à celui-ci, puisque cette opération risque de faire perdre l'avantage d'avoir des modes dirigés selon les mêmes directions que les kl (voir fig a). En effet, une condition suffisante est de se placer dans un espace *supplémentaire* au mode gaufre.

La première idée qui semble logique est de se placer dans un espace orthogonal à l'espace engendré par ces modes, et d'opérer la double diagonalisation des matrices de covariance géométrique et statistique. A première vue la méthode marche certes très bien puisque le conditionnement de la matrice et la propagation du bruit sont réduits à un niveau très correct. Mais la comparaison, à l'œil, de la forme des premiers modes et des KL du miroir, déçoit. Tout simplement parce que les KL initiaux, quelle que soit leur fréquence spatiale, et en particulier les modes d'ordre bas, ne sont pas forcément orthogonaux au mode gaufre expérimental. Imposer l'orthogonalité par rapport à ce dernier fait se placer dans un espace d'où est absent tout mode possédant par exemple des points ou des axes de symétrie. L'analyse des valeurs propres obtenues après diagonalisation montre effectivement que la correction des premiers modes ainsi que la dispersion sont moins bonnes: on perd en efficacité de correction, car l'orthogonalité au mode gaufre est une contrainte trop forte. Cette méthode a été essayée pendant la mission d'Avril 1993.

L'autre méthode de construction essayée pendant la même période est l'utilisation de modes issus de la matrice de reconstruction optimale théorique (voir section 2.7) du système. Cette matrice reconstruit la phase analysée à travers le Hartmann, en privilégiant les modes intéressants -à tous points de vue- pour la correction, et en délaissant les autres. J'ai donc calculé les KL associés à la phase reconstruite par cette matrice. Mais les propriétés sont telles que la matrice optimale peut reconstruire, d'après les corrélations avec les autres modes, le mode gaufre sans même le voir. Donc la méthode ne fait pas apparaître spécifiquement de mode gaufre ou piston.

Comment éliminer ces modes gaufre et piston ? Une remarque simple permet de s'aiguiller vers la solution. Pour que le système de modes soit viable, il suffit que ces modes ne puissent engendrer ni piston ni mode gaufre. Cela ne veut pas dire que tout mode leur sera orthogonal. Simplement, l'espace cherché doit être un *supplémentaire* de l'espace des modes invisibles. L'*orthogonalité* est une contrainte trop forte, qui brise la symétrie et pousse à s'orienter vers des directions différentes de celles des axes propres de la turbulence. Le petit schéma (figure 2.4) illustre ce propos. A l'inverse, en choisissant un espace supplémentaire orienté selon les KL naturels du miroir et assez éloigné du mode gaufre on conserve tous les avantages des KL sans risquer d'introduire un mode invisible. Le conditionnement de la matrice d'interaction modale et le coefficient global de propagation du bruit permettent de vérifier si l'espace choisi est suffisamment éloigné des modes "dangereux".

Dans la pratique, les choses se déroulent donc ainsi:

- construction d'une base orthonormée, orthogonale au piston et aux tilts. Piston et tilts s'entendent ici comme "les modes produits par le miroir déformable qui s'ajustent au mieux (au sens des moindres carrés) à un piston théorique et à des tilts théoriques". On démontre facilement que la base choisie est également orthogonale au piston et aux tilts théoriques.
- calcul des KL à l'intérieur de cet espace.
- identification du mode le plus proche du mode gaufre, et suppression de ce dernier.
- vérification du conditionnement de la matrice et du terme de propagation du bruit.

2.3 Article A&A

Ce paragraphe présente l'article "Astronomical adaptive optics: I. Modal control optimisation", soumis au journal *Astronomy & Astrophysics*. Il y est présenté l'algorithme de l'optimisation modale tel qu'il est implanté dans COMEONPLUS et ADONIS. J'ai décrit plus haut le formalisme de la commande modale, j'ai décrit le choix des modes, l'article qui suit plonge au cœur du problème pour optimiser les variables touchant à l'aspect temporel du problème. Je mentionne également ici qu'en Novembre 1994 est paru un article dans *JOSA* (Ellerbroek et al. 1994) qui traite précisément du même sujet: optimiser la bande passante du système pour chaque mode spatial de commande.

Astronomical adaptive optics

I. Modal control optimization

E. Gendron^{1,2} and P. Léna¹

¹ Observatoire de Paris et Université Paris VII, U.R.A. CNRS 264, F-92195 Meudon Cedex, France

² Laserdot, Route de Nozay, F-91460 Marcoussis, France

Received 15 March 1994 / Accepted 12 April 1994

Abstract. The value of adaptive optics (AO) for astronomy no longer needs to be demonstrated. To match the extreme requirements of astronomy in terms of resolution and sensitivity requires us to optimize an AO system to a great variety of situations. In particular, this paper addresses the case of low flux levels and shows that the final image quality can be improved by adapting the spatial and temporal correction performance of the AO system. The wavefront is considered as a weighted sum of spatial modes. Each mode has an individual behavior characterized by its signal to noise ratio and correlation time. Taking this into account leads us to attribute a specific, optimized correction bandwidth to each mode. To apply this optimization method to a practical use of adaptive optics, one proposes a scheme where all the required inputs are collected by the AO system itself. The method becomes entirely independent of theoretical assumptions about the turbulence.

Key words: atmospheric effects – methods: data analysis – telescopes – techniques: miscellaneous

1. Introduction

Recent developments have shown the application of adaptive optics (AO) to astronomical observation and its great potential for the use of large ground based telescopes as well as for multi-aperture interferometry (Léna 1994a; 1994b). A number of potential strategies remain open for discussion in the design of the most efficient instrument. While the unanimous goal is to compensate for the atmospheric turbulence and ultimately restore an image being diffraction limited or close to it, a number of parameters do restrict what can be practically achieved in terms of energy concentration in the diffraction limited core of the image: vertical and temporal structure of the atmospheric turbulence, magnitude of the reference source, wavelength of sensing and wavelength of observation, performance of the wavefront

sensor, isoplanatic field, etc. Some of these limitations may be relaxed by the prospect of using an artificial star as reference (Fugate et al. 1991; Primmerman et al. 1991), a possibility already demonstrated, but even then most of the considerations developed here still apply. In addition to these basic external parameters, some internal system parameters such as sampling frequency and time lag in the servo loop also influence the final image quality.

The perturbed wavefront over the pupil may be considered as the superposition of spatial modes with increasing spatial frequency and showing different temporal behaviour, while a correcting system is described by its number of degrees of freedom, ranging from a few (Roddier et al. 1991) to several hundred in systems developed for Defense applications (Fugate 1992).

It has been suggested (Léna 1990) to consider a strategy using a modal control of the AO system, where the latter is optimized for any given particular observation by an adjustment of its internal parameters: temporal response, number of corrected modes or others. The goal is to obtain the best image quality, measured with a criterium to be defined, using at best all the available information. In other words, the system is not only adaptive to the instantaneous state of the atmospheric turbulence, but its internal configuration is also adaptive to the particular observation being carried out. This modal control is an extensive concept already explored.

Most of the AO systems work in closed loop. They consist of a wavefront sensor, a real-time processor and one or several deformable mirrors. A control matrix defines the control voltages applied to the mirror. The goal is to optimize this matrix in terms of system characteristics and observing conditions. The optimization parameters may be determined from measurements made before closing the loop, as the turbulence may be non-stationary, and more generally the observing conditions may change with time. Although a number of articles deal with optimum reconstruction methods or matrices (Fried 1977; Southwell 1980; Wallner 1983) most of them address the open-loop case.

This paper discusses the theory in the closed loop case, focusing on the temporal aspects of the problem, and presents a

Send offprint requests to: E. Gendron

method of applying it to a real case. Section 2 gives the overview of modal control optimization. In Sect. 3, a physical approach and detailed analysis of an optimization scheme are given. Section 4 enumerates the parameters and instrumental constraints encountered in a practical case, namely an AO system installed on a telescope for astronomical observation. Section 5 describes the optimization behavior, as seen from the observer's point of view, i.e. in terms of parameters such as seeing conditions or wind velocity.

2. Modal control

This section recalls the overall components and general configuration of an AO system and defines some important concepts to be used later.

2.1. Vocabulary and notation

Mirror controls stands for the set of driving signals applied to the mirror.

The term *measurement* stands for the wave-front slope measurements, i.e. the set of the displacements of the spots of the Shack-Hartmann wavefront sensor (WFS).

Modes will be used to name any family of functions $M_i(x, y)$ representing some spatial wave-front deformations over the pupil area. The *mirror modes* are a special case, described in Sect. 2.2.4.

Table 1 summarizes the notation.

2.2. The modes

2.2.1. The perturbed wavefront

Neglecting scintillation (Roddiér 1981), the instantaneous electric field amplitude is assumed to be constant over the pupil and is simply characterized by its phase $\phi(x, y)$ defined over the pupil area. It is convenient to expand ϕ on some basis of functions $M_i(x, y)$ so that it can be written at any given time

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \cdot M_i(x, y) \quad (1)$$

The Zernike polynomials (Noll 1976) and the Karhunen-Loeve polynomials have been widely used for this purpose (Wang et al. 1978) but any other basis -orthonormal or not- of modes M_i may be of interest.

Then any incident wavefront becomes a vector \mathbf{z} whose components are z_1, \dots, z_{∞} . The z_i are time-dependent variables. The vector \mathbf{z} belongs to a vector space \mathcal{E} of an infinite number of dimensions.

2.2.2. The mirror

Let us assume a deformable mirror with a actuators corresponding to a degrees of freedom. These actuators can physically be distributed along the beam into several independent mirrors (for

Table 1. Notation

Quantity	Signification
x, y	cartesian coordinates in the pupil plane
r, θ	polar coordinates in the pupil plane
$\phi(x, y)$	phase deformation
$\langle \dots \rangle$	time average value of ...
\mathbf{u}	vector \mathbf{u} (bold character)
u_i	i^{th} component of \mathbf{u}
\mathcal{E}	vector space of the functions defined over the pupil area
\mathcal{M}	“mirror space”: see Sect. 2.2.4
D	interaction matrix between the mirror and the sensor
D_{∞}	see 2.2.3
D^+	$(D^t D)^{-1} D^t$, mode control matrix
U^t	transpose of a matrix U
U^{-1}	inverse of a matrix U
\mathbf{u}^t	transpose of a vector \mathbf{u}
$r_0(\lambda)$	Fried's parameter at wavelength λ
q	number of measurements on the WFS
\mathbf{s}	measurement vector from the WFS
a	number of degrees of freedom of the mirror
a'	dimension of the mirror space \mathcal{M}
\mathbf{z}	control vector of the modes
\mathbf{n}	noise vector on the centroid position
\mathbf{m}	noise vector on the mode coefficients
σ_n^2	variance (or spectrum level) of the noise on the centroid position
$p(i)$	propagation coefficient of the noise, from the WFS to the i^{th} mode coefficient
T_c	sampling period
h_{cor}	rejection transfer function, called correction transfer function here
H_{cor}	$\ h_{\text{cor}}\ ^2$
h_n	transfer function between the noise input and the noise sent on the mirror mode controls
H_n	$\ h_n\ ^2$

example one or several deformable mirrors and a tip-tilt dedicated mirror). The wavefront phase variation induced by an actuator deformation under a given voltage is called the *actuator influence function*. It is important that the phase variations be linear in terms of the applied voltages. This assumption is usually well verified for existing mirrors when the amplitude is kept reasonably low (a few micrometers).

Hence, the set of the phase deformations the mirror can produce is composed of all the linear combinations of the actuator influence functions. It is a vector space, subspace of \mathcal{E} . Immediately a question arises, what is the dimension of this subspace. Owing to a degrees of freedom, the dimension is a if the a basic influence functions are linearly independent. Although this may be true from a theoretical point of view, they may not be *sufficiently* independent in the practical case. A typical example of this situation occurs when the deformable mirror is able to produce a tilt, as does the tilt mirror.

Hence some redundant configurations may exist ; they reduce the dimension of the generated subspace, i.e. the actual number of degrees of freedom. The choice between the useful and the redundant modes is imposed by the system capability to produce them correctly or not. Finally, this leads us to choose a basis for the mirror subspace. It is essential to restrict the mirror controls to a set of modes corresponding to some basic vectors of the actual generated subspace in \mathcal{E} .

2.2.3. Limitations introduced by the sensor

The wavefront sensor is the element of the system that measures the perturbed wavefront. For simplicity the choice is made of a Shack-Hartmann type, composed of a lenslet array conjugated with a pupil plane and making images on a detector. The displacement of each spot is measured from a reference position corresponding to a plane wave. This displacement is proportional to the averaged phase gradient over the subaperture. This quantity is called the wavefront slope. The set of the q slopes can be written as a vector \mathbf{s} of dimension q forming the input vector to the system. An important condition is that \mathbf{s} be linear in terms of the incident wavefront. Then there exists a linear relation between \mathcal{E} and the vector space of \mathbf{s} . Let associate an interaction matrix D_∞ with this linear map so that $D_\infty \cdot \mathbf{z} = \mathbf{s}$. This matrix should theoretically have an infinite number of columns characterizing the sensor response to the basic vectors of \mathcal{E} .

The more practical, classical interaction matrix D is experimentally measured on the system itself and determines the relation between the mirror and the sensor. It characterizes the same linear map as D_∞ , but is restricted to the mirror control subspace. It will be used below to compute the control matrix (2.3.1).

A limitation introduced by the sensor is that some mirror deformations can produce a null or a very small response on the WFS because the sensor cannot detect them with a sufficient accuracy -a piston mode for example. The locution *invisible modes* will be used to refer to those modes. They correspond to the eigenvectors of $(D^t \cdot D)$ having a zero eigenvalue, or very a small one in the practical case.

2.2.4. The mirror modes

The goal is to work in a mirror subspace free of redundant modes, and free of invisible modes. The useful set of mirror controls is the vector space \mathcal{M} which is a subspace of \mathcal{E} , generated by the mirror controls and excluding the redundant and invisible modes. The first step is to determine a basis containing no redundant vectors. The second step is to measure the interaction matrix D' between this basis and the sensor. Hence, the invisible modes can be extracted by computing the eigenvalues and eigenvectors of $(D'^t \cdot D')$ (Boyer et al. 1990). The last step is to build a basis of the orthogonal complement of the subspace of the invisible modes, this complement being the mirror space \mathcal{M} . Its dimension will be called a' . The term *mirror modes* will be used for *any basic vector set* of this space. There exist an in-

finite number of such choices. Some examples are described by Gendron (1993).

2.3. The control matrix

2.3.1. Definition

From now on, D will refer to the interaction matrix between the mirror modes and the sensor. The mirror is controlled from the measurements by a relation $\mathbf{z} = D^+ \cdot \mathbf{s}$ where D^+ is called the control matrix. The control matrix can be found from the least-square solution minimizing $\|\mathbf{s} - D \cdot \mathbf{z}\|$, leading to the generalized inverse of D

$$D^+ = (D^t \cdot D)^{-1} \cdot D^t \quad (2)$$

which can always be found here because D has full column rank, due to the suppression of the invisible modes (see 2.2.4). Note that this matrix ensures the minimization of the measurement norm, which is characteristic of a closed loop system.

2.3.2. The wave-front sensor noise

Due to the finite number of photons available for wavefront sensing, noise appears on the wavefront sensor measurements. It is convenient to define the noise as the error on the wavefront phase difference between the edges of the subaperture. Two noise regimes are usually distinguished: quantum noise and detector read-out noise. In the case of a Shack-Hartmann type sensor equipped with a photon noise limited detector, the noise expression (Rigaut 1992) is

$$\sigma_n^2 (\text{rd}^2) = \frac{2\pi}{r_0^2(\lambda) \cdot N} \quad (3)$$

where N is the number of photoelectrons per frame and unit area. The noise is independent of the subaperture size. It becomes less simple in the case of a read-out noise limited detector and is given as

$$\sigma_n^2 (\text{rd}^2) = \frac{16}{3} \left[\frac{\sigma_e}{G_s n_s \epsilon^3} \right]^2 \quad (4)$$

in (Rousset et al. 1987), where σ_e is the electronic noise expressed as the number of equivalent photoelectrons, G_s the average value of the peak of the image, n_s the number of pixels in one direction used for centroiding, ϵ the ratio between the spot diameter and the subaperture width.

In any case the noise has quite a number of interesting properties: it is additive, has a zero average and a flat temporal spectral density so that it can be fully characterized by its spectrum level or its variance; it is uncorrelated between two subapertures and between two orthogonal measurements in one subaperture. It will be assumed that the noise variance is the same for each subaperture.

2.3.3. Noise propagation through the control matrix

In order to evaluate the signal-to-noise ratio (SNR) characteristics of the modes it is convenient to introduce the noise propagation coefficients. They are defined as the ratio between the noise variance propagated through the control matrix and the input noise variance. Let $\mathbf{m} = D^+ \mathbf{n}$, where \mathbf{n} is the noise vector on the centroid position, and obeying the properties listed above. The covariance matrix $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^t \rangle$ reduces to a diagonal matrix with σ_n^2 on the diagonal, and this leads to the covariance matrix of \mathbf{m} :

$$\langle \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^t \rangle = D^+ \cdot \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^t \rangle \cdot D^{+t} = \sigma_n^2 \cdot (D^+ \cdot D^{+t}) \quad (5)$$

Using Eq. (2) leads to

$$\langle \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^t \rangle = \sigma_n^2 \cdot (D^t \cdot D)^{-1} \quad (6)$$

Moreover, the variance of the i^{th} component of \mathbf{m} can be written as $\langle m_i^2 \rangle = p(i) \cdot \sigma_n^2$, where the searched coefficients $p(i)$ are the diagonal terms of $(D^t \cdot D)^{-1}$:

$$p(i) = (D^t \cdot D)^{-1}_{ii} \quad (7)$$

Rigaut (1992) has derived an expression of the $p(i)$ for the Zernike polynomials, when the number of subapertures tends towards infinity. In order to establish that the $p(i)$ are nearly independent of the number of subapertures, the propagation coefficients have been computed for Shack-Hartmann sensors with various numbers of subapertures, from 5×5 to 15×15 . The coefficient $p(i)$ converges very rapidly towards the theoretical limit when the number of subapertures increases. In fact, it reaches this limit as soon as the mode is sufficiently well sampled by the Shack-Hartmann grid. This condition of correct sampling must always be filled for the modes to be corrected.

In Sect. 3.1 the theoretical value for the noise propagation coefficients on the Zernike polynomials will be used. For the polynomials of the form $Z_{k,p}(r, \theta) = P_k(r) \cdot \cos(p\theta)$, Rigaut (1992) gives

$$\begin{cases} p_{k,p} = 0.295 (k+1)^{-2.05} & \text{if } k = p \\ p_{k,p} = 0.186 (k+1)^{-2.00} & \text{if } k \neq p \end{cases} \quad (8)$$

3. The optimization scheme

3.1. A physical approach

This section gives a heuristic justification of the possibility to optimize the modal control, derived from the actual physical constraints, and describes the resulting command.

When a faint star is used as reference, the noise may increase indefinitely. For a very faint star, it may still be possible to correct for the tip-tilt, while higher order modes of high spatial frequencies will be difficult to reconstruct because they are buried in the WFS noise. This nevertheless requires a careful analysis, since the noise is a decreasing function of the mode order, as shown in Eq. (8).

What really matters is the signal-to-noise ratio (SNR) for each mode, SNR_i . It can be computed for the Zernike modes

Table 2. Normalized signal to noise ratios of the Zernike polynomials

Zernike mode	SNR_i
tilt	1.0
defocus (Z_4)	0.191
astigmatism (Z_5)	0.119
coma (Z_7)	0.0906
sph. abb. (Z_{11})	0.0561
Z_{60} (10^{th} order)	0.0132

by using the Eq. (8) and the expression of their variance in the atmospheric turbulence derived by Noll (1976). The turbulent modal spectrum drops off faster than the noise modal spectrum, so that the SNRs decrease with the mode order. As an example, the SNR for some different Zernike polynomials are given in Table 2 with a tilt SNR normalized to unity.

In order to be efficient, the correction should only be applied to the modes known with a sufficient SNR. The variance over the pupil area of the phase residual error is chosen as the image quality criterium. The modes are orthogonal, and the total error is the sum of the errors on each mode. Assuming that it is possible to act on any polynomial independently of others, the best correction is obtained when the phase residual error is reduced to a minimum for each mode. A mode has to be corrected only if the correction brings an improvement, i.e. if the error on this mode after correction is smaller than without correction.

How to compute the residual error? As demonstrated in Sect. 3.2 this error is mainly the sum of two terms: the first one is the remaining uncorrected phase left by the system due to the finite correction bandwidth, and the second represents the noise introduced in the loop. It may be noticed that both quantities are functions of the system bandwidth. The first term is a decreasing function tending towards 0, the second increases. It may then be that the sum reaches a minimum somewhere.

Hence the idea of modal filtering can be carried further: this is developed in Sect. 3.2, where a method to optimize the correction bandwidth for each mode is presented. This leads to an adaptive system, where the actual number of degrees of freedom is tuned in terms of the observing conditions. Open-loop WFS data taken on the reference source just before closing the loop are used to establish the latter and derive any parameter required for the optimization.

3.2. Loop description

The servo system works in closed loop, with a frequency transfer function $h_{\text{wfs}}(f)$ for the wavefront sensor detector, and $h_{\text{sys}}(f)$ for the system. A first order transfer function is assumed, including an integrator in the closed loop and a time delay between the measurement and the action corresponding to the WFS detector read-out time and the computation time. The actuator transfer function of the actuators is assumed to be perfect, equal to 1. The expressions of the two functions h_{sys} and h_{wfs} are $h_{\text{sys}}(f) = e^{-2i\pi\tau \cdot f} / 2i\pi \cdot f$ and

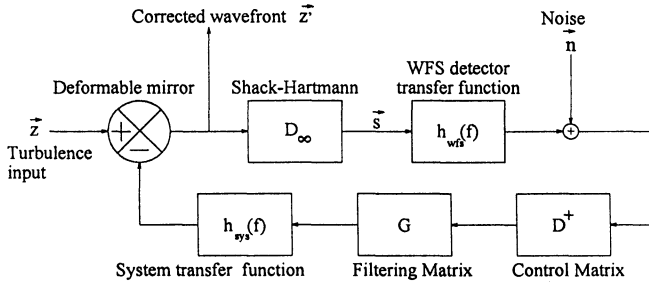


Fig. 1. Schematic representation of the control loop

$h_{wfs}(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T_e) \cdot e^{-i \cdot \pi \cdot \tau \cdot f}$, where T_e is the sampling period and τ the time delay. The open loop transfer function is then $h_{ol}(f) = h_{wfs}(f) \cdot h_{sys}(f)$.

In addition to the control matrix a diagonal filtering matrix G is applied. This means that the i^{th} mode reconstructed by D^+ will be filtered by the i^{th} coefficient g_i of G . In a closed loop system, this coefficient directly controls the mode correction bandwidth.

The input turbulent wavefront is \mathbf{z} . It is a vector, as described in Sect. 2.2.1. The corrected wavefront is denoted \mathbf{z}' . The wavefronts \mathbf{z} or \mathbf{z}' are time-dependent variables. They should be written $\mathbf{z}(t)$ - or $\mathbf{z}(f)$ if expressed in the Fourier space. However, \mathbf{z} will refer to them whatever the context, for the sake of brevity. The following equation can be derived from the loop figure:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} - h_{ol}(f) \cdot G \cdot D^+ \cdot D_\infty \cdot \mathbf{z}' + h_{sys}(f) \cdot G \cdot D^+ \cdot \mathbf{n} \quad (9)$$

The columns corresponding to the mirror modes are identical in D and in D_∞ . Moreover, Eq. (2) leads to $D^+ \cdot D = Identity$. Hence the columns of $D^+ \cdot D_\infty$ corresponding to the mirror modes form an identity matrix and any vector \mathbf{u} of the space \mathcal{M} obeys the relation

$$D^+ \cdot D_\infty \cdot \mathbf{u} = D^+ \cdot D \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (10)$$

This relation is false for $\mathbf{u} \notin \mathcal{M}$. Figure 2 makes this clearer.

Equation (10) allows us to invert Eq. (9) to find the corrected wavefront \mathbf{z}' as a function of the input turbulence, the noise, and the system characteristics.

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} - \frac{h_{ol}(f) \cdot G}{1 + h_{ol}(f) \cdot G} \cdot D^+ \cdot D_\infty \cdot \mathbf{z} - \frac{h_{sys}(f) \cdot G}{1 + h_{ol}(f) \cdot G} \cdot D^+ \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

The notation 1 stands for the identity matrix, and $\frac{A}{B}$ stands for $A \cdot B^{-1}$ when A and B are diagonal matrices. Let us define the matrix S as $S = D^+ \cdot D_\infty$, and express the i^{th} component z'_i of \mathbf{z}' .

$$\begin{aligned} z'_i &= \frac{1}{1 + h_{ol}(f) \cdot g_i} z_i - \frac{h_{ol}(f) \cdot g_i}{1 + h_{ol}(f) \cdot g_i} \cdot \sum_{j=a'+1}^{\infty} S_{ij} \cdot z_j \\ &\quad - \frac{h_{sys}(f) \cdot g_i}{1 + h_{ol}(f) \cdot g_i} \cdot \sum_{j=1}^p D_{ij}^+ \cdot n_j \end{aligned} \quad (12)$$

The right hand side of Eq. (12) comprises three terms. The first one is the corrected mode, corresponding to the uncorrected

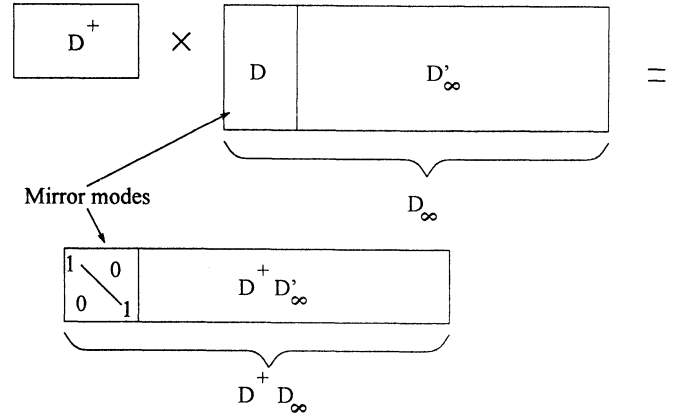


Fig. 2. Matrix product $D^+ \cdot D_\infty$. There is no cross-coupling between the mirror modes, each of them is perfectly identified by the system. This allows to control each mode separately

mode filtered by the rejection transfer function. The second term indicates the aliasing effects. It is only influenced by the modes orthogonal to the mirror subspace. The validity of the term ‘aliasing’ has already been discussed by Hermann (1981) or Southwell (1982). It is simply used here by analogy with the Fourier transform, to express that the modes of the orthogonal complement to the mirror space in \mathcal{E} (high spatial frequencies) may produce a response on the WFS (because of the incomplete WFS sampling), which will be interpreted by the system as mirror modes (lower frequencies). It is worth noticing that these errors are filtered by the closed loop transfer function.

Finally, the third term indicates the noise introduced in the system, which corresponds to the input noise propagated on the mode coefficient and filtered by a function nearly equal to the closed loop transfer function.

This equation demonstrates the possibility to modify the transfer function of a particular mode via g_i , without disturbing the other modes. It can easily be understood that under strong noise conditions the optimization will consist in tuning the gain - i.e. tuning the bandwidth - to reduce the induced noise and jointly the aliasing effect, to the detriment of the mode correction quality. The second term is usually small compared with the first, since the AO system is obviously designed to apply a useful correction. When the noise is important, the sum of the first poorly corrected term and the third term dominates in the equation compared with the aliasing term, whose importance is reduced by the noise optimization itself. It will consequently be assumed that the aliasing term of Eq. (12) can be neglected when working in a low flux regime. Then this equation can be rewritten

$$z'_i = h_{cor}(f, g_i) \cdot z_i - h_n(f, g_i) \sum_j D_{ij}^+ \cdot n_j \quad (13)$$

where h_{cor} is the rejection transfer function, i.e. the correction transfer function, and h_n the transfer function between the white noise in input and the noise actually sent to the active component. Since the noise is not correlated with the signal, the

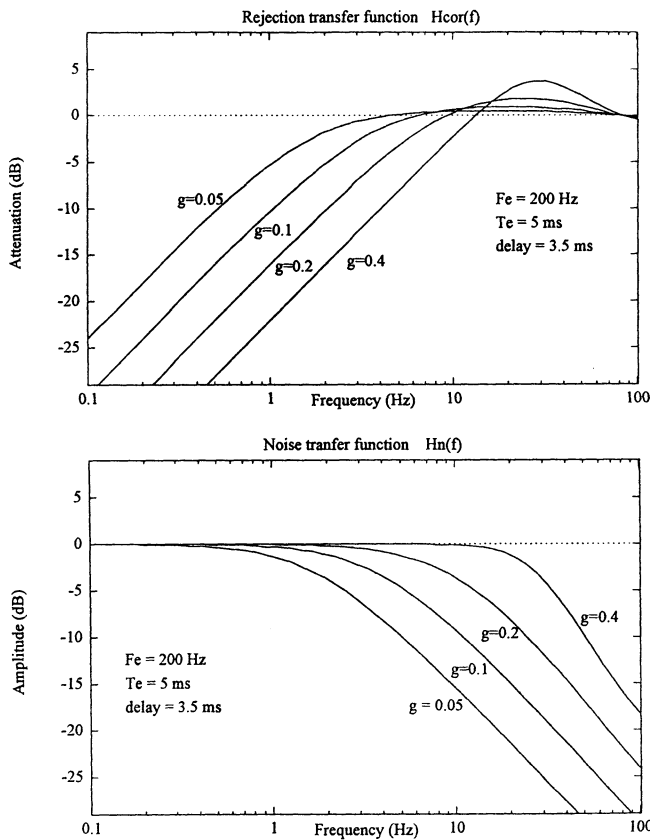


Fig. 3. Representation of the square modulus (expressed in decibels) of the functions H_{cor} and H_n in terms of the frequency (expressed in Hz), with the gain g as parameter. The loop includes a CCD, an integrator and a time delay. The conditions are a frame rate of $F_e = 200$ Hz and a time delay of $\tau = 3.5$ ms. The input turbulence power spectral density is multiplied by the function H_{cor} -usually called rejection transfer function- on output. The noise is multiplied by H_n

variance of z'_i is

$$\langle z_i'^2 \rangle = \int H_{\text{cor}}(f, g_i) \cdot \|z_i(f)\|^2 df + \int H_n(f, g_i) \cdot \|m_i(f)\|^2 df \quad (14)$$

The functions H_{cor} and H_n stand for the squared modulus of h_{cor} and h_n , and $m_i(f)$ is the noise on the mode i .

The quantitative behavior of H_{cor} and H_n versus the gain is illustrated by the simulation presented in Fig. 3.

4. Practical implementation of the optimization

The previous section has shown that it is possible to minimize the residual phase errors on z'_i by a proper choice of the gain g_i . In Eq. (14), z'_i depends on the noise on the mode coefficient m_i and on the state of the atmosphere z_i . In principle, the optimization is possible when these quantities are properly known for a given observation. It is therefore appropriate to derive a method to estimate them in open loop before applying the correction, assuming they are constant over the time interval considered.

4.1. Estimation of the noise

The problem is to evaluate the noise variance on the centroiding. Although some expressions of the noise variance have been derived (see 2.3.2), the actual regime of any real wavefront sensor is usually a superposition of quantum and read-out noise. In addition, let us enumerate some of the factors affecting the noise level above these fundamental noise sources: the application of a threshold on the sensor image, the spot widening by the intensifier point spread function, the intensifier gain dispersion, the observation of dissymmetrical extended objects, the sky background -changing with the proximity of the moon, or the object colour. This points to the need for a reliable, empirical method to directly measure the total noise.

The sensor gives a field of vectors measuring the phase gradient over the pupil aperture. Any function ϕ verifies $\text{rot}(\text{grad}(\phi)) = 0$. Hence a field of vectors \mathbf{v} for which $\text{rot}(\mathbf{v}) \neq 0$ is impossible to observe. Does this mean that some wavefront slope configurations cannot exist with a Shack-Hartmann? Unfortunately, due to the extended size of the subapertures, the microlenses average the phase gradient and make any arrangement of the field vector possible. Nevertheless, some configurations are generated by the turbulence with an infinitesimal probability. It is possible to find those special configurations by diagonalizing the theoretical covariance matrix $\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^t \rangle$ of the slope measurements \mathbf{s} . The correlation coefficients between two slopes can be computed with Eq. (24), presented in the Appendix. The diagonalization provides eigenvectors which are orthogonal and uncorrelated measurements. The eigenvalues indicate the variance of these configurations in the atmospheric turbulence. Hence the eigenvector associated with the lowest eigenvalue is the linear combination of the measurements for which the variance of the excitation by the turbulence is minimal. The basis change matrix B is the transpose of the matrix of the eigenvectors, for which $B \cdot B^t = B^t \cdot B = \text{Identity}$. Moreover, $B \cdot B^t$ is also the noise propagation matrix, any $p(i)$ is equal to 1; the eigenvalue is proportional to the SNR of the eigenvector.

Let examine a practical case of noise evaluation with a 7×7 subapertures Shack-Hartmann. Figure 4 exhibits the last eigenvector corresponding to this Shack-Hartmann geometry, computed from Eq. (24). The following conditions are assumed: a telescope of 3.6 m diameter, $r_o(\lambda) = 10$ cm at $\lambda = 500$ nm, an overall atmosphere, telescope and system transmission of 0.3, a detector efficiency of 0.1 over a spectral range of 400 nm, a sampling rate of 200 Hz, and a quantum noise limitation allowing us to use Eq. (3) for a rough numerical estimate. To obtain a SNR_i of 1 on the eigenvector previously discussed, i.e. that associated with the lowest eigenvalue, σ_n^2 leads to $N = 1600$ photocounts per frame and per subaperture, corresponding to a magnitude $m_v \approx 7.5$. For example, if $m'_v = 11$, the atmospheric impact on the eigenvector becomes negligible compared to the WFS noise effect, hence the measurement of the eigenvector fluctuation variance leads to a noise estimate with a 4% accuracy, as deduced from $m'_v - m_v$.

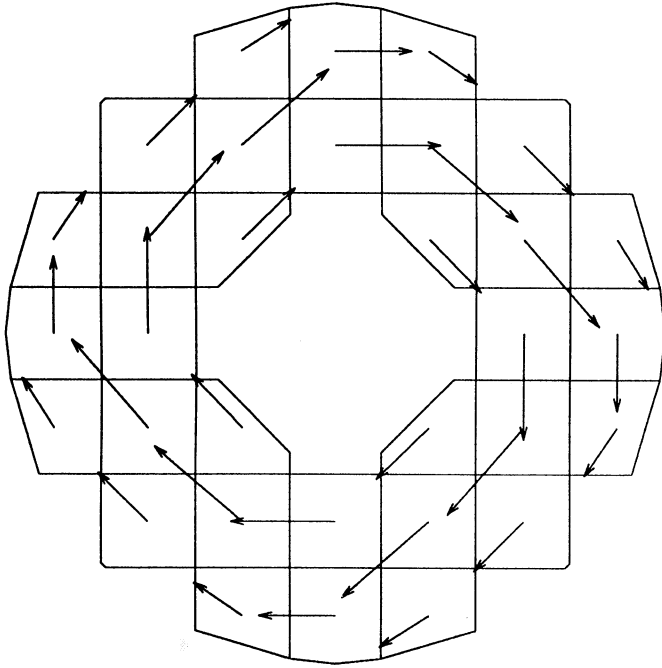


Fig. 4. Eigenvector of the covariance matrix of the slope measurements, associated with the smallest eigenvalue. The eigenvalue is proportional to the eigenvector SNR. For reference stars fainter than $m_v \approx 10$ the SNR is so low that measuring the variance of this eigenvector in the atmospheric turbulence is equivalent to measuring the noise variance. Here the Shack-Hartmann has 7×7 subapertures, and the central obstruction is 40% of the pupil diameter

The possibility to obtain a correct estimation of the noise level is hence demonstrated: in any case of noise regime (quantum noise, readout noise or other), it is simply deduced by measuring the variance of the fluctuations of the last eigenvector on a sequence of uncorrected wavefront slopes recorded on the reference object.

4.2. Estimation of the residual error

4.2.1. The residual error

The function $H_{\text{cor}}(f, g)$ and $H_n(f, g)$ only depend on the system characteristics: they can be measured or computed from a theoretical model. The term $p(i)$ is deduced from the control matrix. By recording a temporal sequence of uncorrected wavefront slopes from the Shack-Hartmann data before closing the loop, it is possible to deduce the noise σ_n^2 . It is also possible to reconstruct the temporal evolution of the mode coefficients, simply by multiplying by the control matrix D^+ . The temporal evolution of each mode is obtained, and a Fast Fourier Transform provides $\|\hat{z}_i(f)\|^2$. This quantity is the sum of the mode power spectrum density $\|z_i(f)\|^2$ and the noise $\|m_i(f)\|^2$, being both still unknown.

Due to the strong decrease of the turbulent spectrum at high frequencies, it is hopeless to fit the actual spectrum value under the noise, as it is hopeless to estimate the real noise at low

frequencies where turbulent effects dominate (Fig. 5). The positive counterpart of this negative point is that the high frequency part of the turbulent spectrum shape being under the noise, it has no weight in the value of $\langle z_i'^2 \rangle$. In the same way, the low frequency noise also only has a weak impact on it, since turbulence dominates. Hence Eq. (14) can be rewritten:

$$\langle z_i'^2 \rangle = \int H_{\text{cor}}(f, g_i) \cdot (\|\hat{z}_i(f)\|^2 - p(i) \cdot \sigma_n^2) df + p(i) \cdot \sigma_n^2 \cdot \int H_n(f, g_i) df \quad (15)$$

where each term is known. The only difference from Eq. (14) is that the random noise power spectral density has been replaced by a constant function with the appropriate amplitude $p(i)\sigma_n^2$.

The reason why $\langle z_i'^2 \rangle$ can be rewritten is not because the function $\|\hat{z}_i(f)\|^2 - p(i) \cdot \sigma_n^2$ is an estimate of $\|z_i\|^2$: this assumption would be false. However, the *integrals* are very close to each other; this will be shown by computing the difference δ between the true value (Eq. (14)) and this approximation (Eq. (15)).

4.2.2. Uncertainty on the estimate of the residual error

Making the assumption that the functions are known at some K discrete frequency samples f_k , the notations will be simplified: m_k stands now for the noise power spectral density at the k^{th} frequency sample f_k . H_{cor_k} and H_{n_k} are the values of the square modulus of the transfer functions at the same point. The average of the m_k is the noise variance $p(i) \cdot \sigma_n^2$, and the variance around this average value is $p^2(i) \cdot \sigma_n^4$. The quantity to evaluate is the difference between Eq. (14) and Eq. (15). Computing the mean square value gives

$$\delta^2 = \left\langle \left(\frac{1}{K} \sum_k (H_{\text{cor}_k} - H_{n_k}) \cdot (m_k - p(i) \cdot \sigma_n^2) \right)^2 \right\rangle \quad (16)$$

Since the m_k are not correlated, the expression becomes

$$\delta = \frac{p(i) \cdot \sigma_n^2}{K} \sqrt{\sum_k (H_{\text{cor}_k} - H_{n_k})^2} \quad (17)$$

Moreover, the functions H_{cor} and H_n always vary in an opposite way (Fig. 3): one equals 1 when the other is close to 0 and vice versa. This allows us to simplify Eq. (17), assuming that $(H_{\text{cor}_k} - H_{n_k})^2 \approx 1$. It gives

$$\delta = \frac{p(i) \cdot \sigma_n^2}{\sqrt{K}} \quad (18)$$

This expression shows that the uncertainty is independent of the gain g_i , and that the error can be lowered by increasing the number of points. A sampling frequency of 200 Hz and 10 seconds of turbulence recording provide $K = 1000$ points for the power spectrum estimate. This gives an error standard deviation about 30 times lower than the noise level.

4.3. Error minimization

Hence comes the gain optimization: the residual error can be computed from Eq. (15). In order now to optimize the gains, it is more convenient to differentiate Eq. (15) with respect to g_i under the integrals and to solve the equation:

$$\frac{d \langle z_i'^2 \rangle}{dg_i} = 0 = \int \frac{dH_{\text{cor}}}{dg_i} \cdot [\|\hat{z}_i\|^2 - p(i) \cdot \sigma_n^2] df + p(i) \cdot \sigma_n^2 \cdot \int \frac{dH_n}{dg_i} df \quad (19)$$

The quantities $\frac{dH}{dg}$ can be computed analytically, although they take a rather complex expression.

Solving Eq. (19) can be done by any method, for example the zero can be searched by dichotomy between two limits $g_i = 0$ and the maximum g_i ensuring loop stability (2.3 dB maxi. for the closed loop transfer function). The following section puts this method into practice.

4.4. Simulations

In order to illustrate the validity of the above approach, simulated cases are presented here. The atmospheric behavior often departs from a perfect Kolmogorov spectrum with infinite outer scale and full stationarity. As a matter of fact, numerous observations carried out with a particular system (the Come-On-Plus AO system, Rousset et al. 1993) give realistic inputs for the behavior of z_i . This will be treated in great detail in a forthcoming paper. Here the approach is restricted to a simple, ideal analytic description of the atmosphere.

4.4.1. Atmospheric model

A theoretical curve made of two power laws will be used for the mode fluctuation power spectra. The theoretical shapes are in $f^{-2/3}$ and $f^{-11/3}$ respectively at low and high frequencies. The limit between the two domains is set by the cutoff frequency f_c . There exist a number of simulations and theoretical explanations, or measurements of the power spectral density of the fluctuations of the modes (Clifford 1971 ; Hogge et al. 1976 ; Greenwood et al. 1976 ; Greenwood 1978 ; Fields 1983 ; Acton et al. 1992 ; Madec et al. 1992 ; Roddier et al. 1993). They do not always agree on the basic phenomenon. While some (Madec et al. 1992 ; Roddier et al. 1993) agree on a *theoretical* high-frequency behavior in $f^{-17/3}$, the most common values usually found are in $f^{-8/3}$ to $f^{-11/3}$. As stated in Greenwood (1978), “the spectral density could be almost anything”, since it depends on the wind velocity distribution along the C_n^2 profile. Then, the choice of spectra in $f^{-2/3}$ and $f^{-11/3}$ for low and high frequencies respectively, although somewhat arbitrary, may represent a good compromise among what can usually be measured at various sites. Figure 5 shows a simulation of the temporal spectrum of a particular mode (astigmatism) under 0.83'' seeing conditions with a noise variance corresponding approximately to a flux of 6 photocount $\text{m}^{-2} \text{frame}^{-1}$ with a quantum noise limited detector.

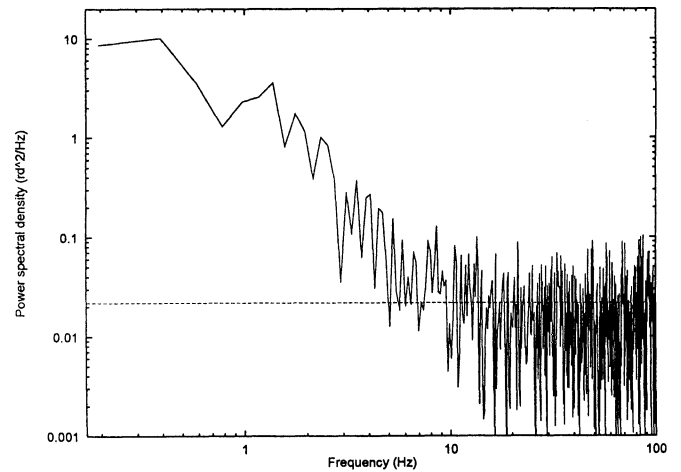


Fig. 5. Simulated spectrum of the astigmatism mode fluctuations, with $f^{-2/3}$ and $f^{-11/3}$ power laws, and a cutoff frequency of 1 Hz. The variance corresponds to a r_o of 12 cm on a 4 m telescope. Units are $\text{rd}^2 \text{Hz}^{-1}$ at 500 nm. The noise variance is $2.2 \text{ rd}^2 \text{Hz}^{-1}$, corresponding to a flux level of 6 photocounts $\text{m}^{-2} \text{frame}^{-1}$ with a quantum noise limited detector

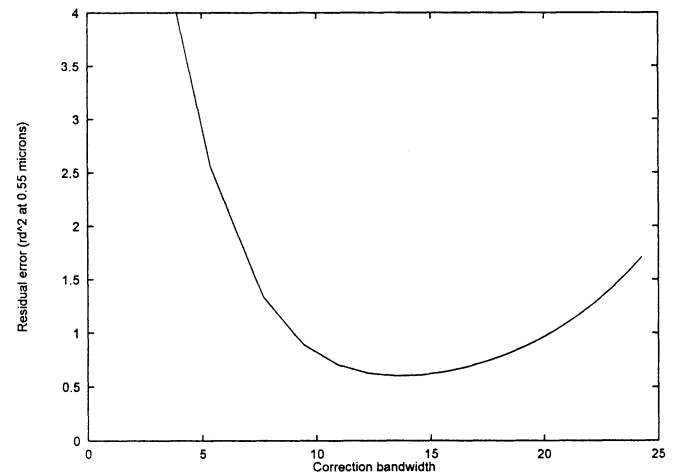


Fig. 6. Astigmatism residual phase error, expressed in rd^2 at 500 nm in terms of the correction bandwidth. The closed loop conditions are a 200 Hz sampling frequency, 2 ms time delay, an integrator in the loop. The noise variance is 2.2 rd^2 , corresponding to a flux level of 6 photocounts $\text{m}^{-2} \text{frame}^{-1}$ with a quantum noise limited detector

4.4.2. Results

Figure 6 shows the result $\langle z_i'^2 \rangle$ of Eq. (15) in terms of the correction bandwidth, applied to the data shown on Fig. 5. The closed loop conditions are detailed in the caption of Fig. 6. It clearly demonstrates the need for an optimization: a gain of a factor 2 on the residual error appears between the maximum (25 Hz) and the optimum bandwidth where the minimum of the error is reached, around 14 Hz (the correction bandwidths are given at 0 dB for the rejection transfer function). This optimum is very close to the intersection between the turbulent spectrum and the noise level.

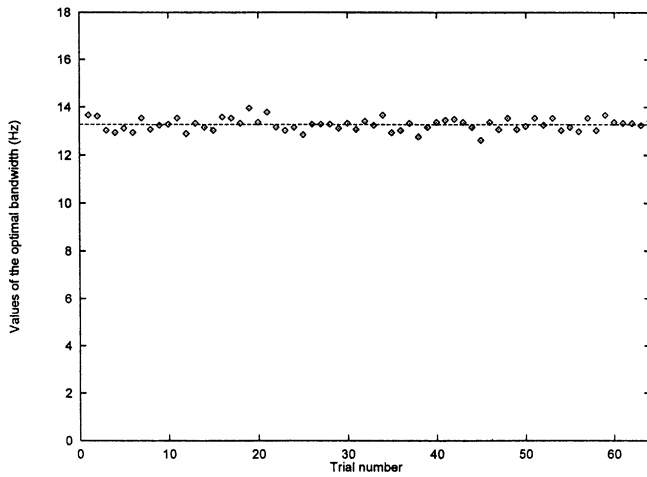


Fig. 7. Values of the optimized bandwidth in the same conditions as for the previous figure. The various values have been computed for some different noise realisations. The horizontal line indicates the averaged value

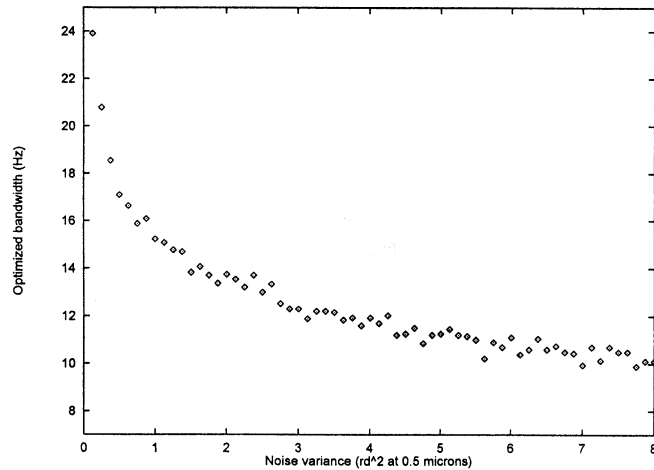


Fig. 8. Values of the optimized bandwidth in terms of the noise level. The input turbulence is a simulated spectrum of the astigmatism mode fluctuations, with some $f^{-2/3}$ and $f^{-11/3}$ power laws and a cutoff frequency of 1 Hz. The $r_o(500 \text{ nm})$ is 12 cm, on a 4 m telescope. Units of the noise variance are rd^2 at 500 nm. The closed loop conditions are a 200 Hz sampling frequency, 2ms time delay, an integrator in the loop

The test can be repeated keeping the same turbulence spectrum, but taking another random trial of the noise. The noise level is unchanged. The optimum gain is always found to be at the same location with a good accuracy. Moreover the hollow is sufficiently flat and smooth so that the errors on the determination of g_i have a negligible impact. Figure 7 illustrates the dispersion of the optimized gain values.

The impact of the noise level can now be studied. Figure 8 shows the values of the optimized bandwidth in terms of the noise variance. The turbulence conditions are the same as on Fig. 5, only the noise level is changed, from 0 to 7 rd^2 (at 500 nm).

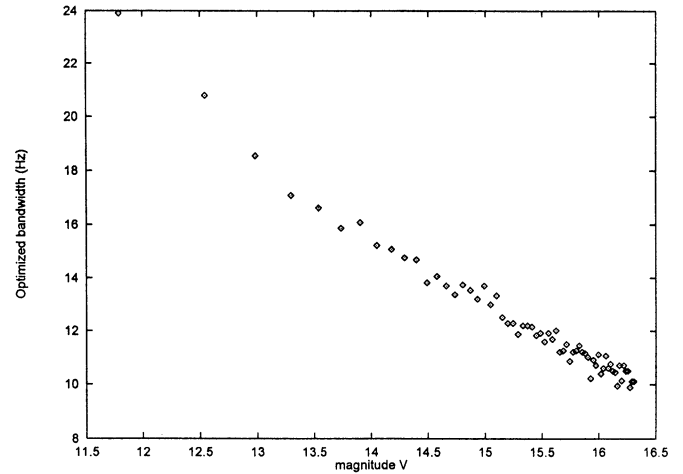


Fig. 9. Values of the optimized bandwidth in terms of the reference object magnitude. The input turbulence is a simulated spectrum of the Zernike astigmatism mode ($n = 2$, $m = 2$) fluctuations, with $f^{-2/3}$ and $f^{-11/3}$ power laws and a cutoff frequency of 1 Hz. The closed loop conditions are a 200 Hz sampling frequency, 2 ms time delay, an integrator in the loop. The quantum noise limitation has been assumed. The global optical throughput is 0.3, the quantum efficiency 0.1 on a spectral bandwidth of 400 nm. The telescope diameter is 3.6 m. $r_o(500 \text{ nm}) = 12 \text{ cm}$

This section has shown that it is possible to follow the approach described in Sect. 4.3, simply by feeding the equations with some quantities measured with the system before closing the loop. The optimum gain value found with this method is stable and reliable.

5. An observer's point of view

The above presentation discussed the optimization in terms of the quantities used in Sect. 3.2. The user of an AO system has a slightly different point of view, as he currently refers to common quantities such as the magnitude of the star, the seeing conditions, the wind velocity, etc. It is appropriate to show at least qualitatively how these parameters impact on the concept of optimization developed in this paper. These parameters are the reference object magnitude m_v , the r_o value, the wind velocity, the system sampling frequency and the anisoplanacity. It is assumed here for simplicity that the WFS is working in a photocounting regime in the V band.

5.1. The magnitude of the reference object

The magnitude of the reference object used to measure the wavefront is the most influential parameter since it imposes the noise variance. Figure 9 is the same as Fig. 8, but translated in magnitude units. As expected, the optimum bandwidth decreases with the magnitude because of the loss in SNR. For the 60th Zernike polynomial ($n = 10$, $m = 4$) the points have to be shifted 2.4 magnitudes towards the left.

5.2. The seeing conditions

The seeing conditions are characterized by the FWHM of the distorted image, equal to $0.97 \frac{\lambda}{r_o}$. The r_o variations not only influence the turbulent spectrum shape but also the noise level, since the image width is affected. Assuming the turbulence to be Kolmogorov, the amplitude of the atmospheric fluctuations is proportional to $r_o^{-5/3}$. Assuming Eq. (3) to be valid, the noise level is proportional to r_o^{-2} . The optimum bandwidth only depends on the noise level position with respect to the turbulence, and this varies as $r_o^{1/3}$. If the intersection is on the $-11/3$ slope, the optimum bandwidth will vary proportional to $r_o^{-1/11}$. A r_o variation from 20 cm to 5 cm only makes a variation of 12% on the bandwidth, which is negligible.

In conclusion, the optimized gains are roughly independent of the seeing conditions.

5.3. The wind velocity

Modifying the wind velocity changes the mode cutoff frequency. In order to keep the variance of the mode fluctuations constant, the increase of f_c has to go with a decrease of the global amplitude. On a log-log scale, this displaces the turbulent spectrum along a direction parallel to -1 decade/decade giving an optimum bandwidth proportional to $f_c^{8/11}$ if the intersection is on the $-11/3$ slope and $f_c^{-1/2}$ if on the $-2/3$ slope. Here things become extremely dependent on the spectrum shape, i.e. on the turbulence spatio-temporal characteristics. This cannot be treated with a model as simple as the one described in this paragraph: the evolution of the wind speed may modify the spectrum shape in various ways. The phase distortion comes from the contributions of different sources: several turbulent layers and dome seeing. Each of them may vary independently of the other, and modify the turbulence structure in a random manner.

5.4. The sampling frequency

With a quantum noise limited detector, the noise variance is proportional to the sampling frequency. This implies that this noise level on the mode spectrum is a constant independent of the sampling rate. The turbulence power spectrum is also independent of the sampling rate. Hence the choice of the best sampling rate is only linked to the system properties and not to the outer parameters. This leads us to make use of the maximal sampling frequency since the larger the sampling rate, the easier it will be to achieve the required bandwidth. But a limitation occurs when the number of photocounts per frame is so small that Eq. (3) becomes false: when no photon is received, the centroid of the spot cannot be determined. The noise takes another expression, depending on how the system reacts when no signal is received. As a conclusion, the sampling rate has to be set as high as possible, as soon as the lack of photons does not become a limitation for the system.

It is worth noticing this reasoning becomes false with a read-out noise limited detector: in this case the noise level increases with the sampling frequency.

5.5. The problem of isoplanicity

This paper has ignored the case where the reference object is distinct from the object to be imaged, although this in practice is a useful observing mode. Although it is possible to theoretically derive the effect of this anisoplanatic angle on the z'_i (Abitbol 1991), the derivation of this effect from actual AO system measurements has not yet been explored. It is therefore not possible to use the same approach as that given in Sect. 3.2, and the issue has been left aside in this paper.

6. Conclusion

The concept of modal control is not entirely new in AO theory, but its use as a tool for optimizing the system performance in astronomy on closed loop systems had not been investigated before.

We have demonstrated the need for the optimization: at low flux level, the image quality, characterized by the phase residual error, can be improved by reducing the system correction performance. In particular the temporal correction bandwidth of each mirror mode has to be adjusted. The goal was to derive an optimization method using data and parameters exclusively derived from the AO system itself. No assumption is made on the turbulence structure; everything is measured. Unfortunately, because of this restriction the case of the anisoplanatism problem, although similar, had to be left aside. For simplicity the study has been limited to the case of a Shack-Hartmann type wave-front sensor, but the method can be extended to any linear sensor.

The optimization process has been shown to be reliable, with no convergence problem. An optimized control matrix is computed before closing the loop, without requiring any extra real-time computation when the loop is closed. This leads to a flexible system where the number of degrees of freedom is gradually adjustable in terms of the observing conditions, from a full correction to a simple tilt correction at the limiting magnitude of the instrument.

However, there is no interest to keep on testing the method on simulated data since it is designed to be used on real systems. Simulated data do not properly take into account the effects of the dome seeing or the convection phenomena on the primary mirror. These effects may strongly depart from a Kolmogorov distribution. Fortunately, observations carried in 1992-1993 with the AO system Come-On-Plus provide a wealth of experimental data. They are the basis of a forthcoming paper which will compare the reality with the theoretical predictions made in the present one on the basis of simple assumptions.

Acknowledgements. The authors wish particularly to thank G. Rousset and S. Ridgway for helpful discussions, and all the members of the Come-On-Plus team. E. Gendron has been supported by a CIFRE PhD contract kindly provided by Laserdot and ANRT.

Appendix

Assuming the amplitude of the electric field is constant over the pupil area, the deviation angle s of the image is derived from the phase gradient by

$$\mathbf{s} = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\text{Aperture}} \nabla \phi \quad (20)$$

Using the theorem of the gradient leads to

$$s = \frac{\lambda}{2\pi S} \int_C \phi(M) \mathbf{n}(M) dl \quad (21)$$

The angle s is supposed to be measured along a particular direction. The integral is curvilinear along the aperture contour C , S is the aperture area, $\mathbf{n}(M)$ is the component of the vector normal to the contour at point M directed along the axis of measurement.

The correlation between the angles of arrival of two subapertures is computed. The subapertures are defined by the subscript i and j .

$$\langle s_i s_j \rangle = \frac{\lambda}{4\pi^2 S_i S_j} \int_{C_i} \int_{C_j} \langle \phi(M) \cdot \phi(M') \rangle \mathbf{n}_i(M) \mathbf{n}_j(M) dl dl' \quad (22)$$

One can write

$$\langle \phi(M) \cdot \phi(M') \rangle = -\frac{1}{2} D_\phi(MM') + \frac{\langle \phi^2(M) \rangle}{2} + \frac{\langle \phi^2(M') \rangle}{2} \quad (23)$$

where $D_\phi(MM')$ is the phase structure function value, and MM' stands for the distance between the points M and M' . The two last terms are constant and vanish in the curvilinear integral. Equation (22) becomes:

$$\langle s_i s_j \rangle = -\frac{\lambda}{8\pi^2 S_i S_j} \int_{C_i} \int_{C_j} D_\phi(MM') \mathbf{n}_i(M) \mathbf{n}_j(M) dl dl' \quad (24)$$

References

- Abitbol M., Ben-Yosef N., 1991, *Waves in random media* 2, 99
 Acton D.S., Sharbaugh R.J., Roehrig J.R., Tiszauer D., 1992, *Appl. Optics* 31, 4280
 Babcock H.W., 1953, *PASP* 65, 229
 Beckers J.M., 1993, *ARA&A* 31
 Boyer C., Michau V., Rousset G., 1990, *Proc. SPIE* 1237, 406
 Chassat F., 1989, *J. Optics (Paris)* 20, 13
 Clifford S.F., 1971, *JOSA* 61, 1285
 Fields D.R., 1983, *Appl. Opt.* 22, 645
 Fried D.L., 1977, *JOSA* 67, 370
 Fugate R.Q., Fried D.L., Ameer G.A., 1991, *Nature* 353, 144
 Fugate R.Q., 1992, In: Ulrich M.-H. (eds.) *ESO Conf. on Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, 407

- Gaffard J.P., Ledanois G., 1991, *Proc. SPIE* 1542, 34
 Gendron E., 1993, In: F. Merkle (eds.) *ICO Conf. on Active and Adaptive Optics*, 187
 Greenwood D.P., Fried D.L., 1976, *JOSA* 66, 193
 Greenwood D.P., 1978, *Proc. SPIE* 142, 91
 Greenwood D.P., Primmerman C.A., Murphy D.G., 1988, In: Ulrich M.-H. (eds.) *ESO Conf. on Very Large Telescopes and their Instrumentation*, 675
 Hermann J., 1981, *JOSA* 71, 989
 Hogge C.B., Butts R.R., 1976, *IEEE transaction on antennas and propagation* 24 No 2, 114
 Hubin N., Noethe L., 1993, *Science* 262, 1390
 Léna P., 1990, *Optique adaptative et VLT*, In: Alloin D., Léna P. (eds.) *Forum de l'Observatoire de Paris*, 1
 Léna P., 1994a, *Proc. SPIE* 2201
 Léna P., 1994b, In: Alloin D., J.-M. Mariotti (eds.) *Adaptive optics for astronomy*, NATO-ASI, Kluwer, 321
 Madec P.-Y., Conan J.-M., Rousset G., 1992, In: Ulrich M.-H. (eds.) *ESO Conf. on Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, 471
 Noll R.J., 1976, *JOSA* 66, 207
 Primmerman C.A., Murphy D.G., Page D.A., Zollars B.G., Barclay H.T., 1991, *Nature* 353, 141
 Rigaut F., Gendron E., 1992, *A&A* 261, 678
 Roddier F., 1981, In: Wolf E. (eds.) *Progress in Optics Vol. XIX*, 283
 Roddier F., Northcott M., Graves J.E., 1991, *PASP* 103, 131
 Roddier F., Northcott M., Graves J.E., McKenna D.L., 1993, *JOSA* 10 No. 5, 957
 Roddier N., 1990, *Proc. SPIE* 1237
 Rousset G., Primot J., Fontanella J.C., 1987, *Proc. LEST on Adaptive Optics in Solar Observations*, 17
 Rousset G., Beuzit J.-L., Hubin N. et al., 1993, In: Merkle F. (eds.) *ICO Conf. on Active and Adaptive Optics*, 65
 Southwell W.H., 1980, *JOSA* 70, 998
 Southwell W.H., 1982, *Proc. SPIE* 365, 97
 Wallner E.P., 1983, *JOSA* 73, 12
 Wang J.Y., Markey J.K., 1978, *JOSA* 68, 78

This article was processed by the author using Springer-Verlag L^AT_EX A&A style file version 3.

2.4 Compléments sur l'optimisation du contrôle modal

La présente section vise à préciser quelques compléments sur l'optimisation du contrôle modal qui n'ont pas eu l'occasion d'être développés dans l'article qui précède.

2.4.1 Magnitude limite d'un mode

Chaque mode possède une magnitude limite propre. Ce paragraphe développe cette idée.

On a vu que dans le cas où les performances de l'analyse de front d'onde sont réellement limitées par le bruit de photon, l'erreur de phase sur la reconstruction est la même quel que soit le nombre de sous-pupilles du Hartmann. Elle est donnée par $\sigma_\phi^2 = 2\pi n_o^{-1} r_0^{-2}$ (n_o est le nombre de photoélectrons par m^2 et par trame) si l'on suppose que la taille des sous-pupilles est grande devant r_0 . Ainsi limité par la turbulence et le bruit quantique, l'erreur de reconstruction ne dépend plus que du nombre de photons par aire de cohérence. C'est vrai pour l'erreur de reconstruction globale, c'est vrai aussi sur chaque mode; raisonnons donc par mode, que l'on supposera orthonormés. En se fixant une limite pour σ_i^2 (l'erreur de phase due au bruit portée par le mode i), on obtient alors un flux minimal de photons par mode. Un critère pour limiter σ_i^2 est que ce dernier ne dépasse pas la variance propre du mode dans la turbulence atmosphérique. Faisons une application numérique pour éclaircir les idées: diamètre du télescope 3.60m, $r_0 = 15$ cm, un rendement quantique de 0.1 sur une largeur de $200\mu\text{m}$ dans la bande V, un temps d'intégration de 10 ms et une turbulence de type Kolmogorov. Alors on a les résultats suivants:

mode	m_{lim}
tilt	19.6
défocalisation	18.0
astigmatisme	17.5
coma	17.2
aberration sphérique	16.7
Z_{20}	16.0

Ces magnitudes limites sont certes dépendantes du rendement quantique, de la largeur de sensibilité spectrale et du temps d'intégration. Mais la dépendance est identique pour chaque mode. De plus, ceux que j'ai considérés dans le tableau sont les polynômes de Zernike mais la valeur de m_{lim} ne change pas -ou peu- si l'on prend les modes du miroir, car une coma reste une coma qu'elle soit produite par le miroir de COMEON, de COMEONPLUS, ou par Z_7 . On pourra objecter avec raison que ceci est certainement vrai pour les ordres bas, pas pour les ordres élevés. En

effet, mais je cherche d'abord à raisonner ici avec les mains en parlant de nombre de degrés de liberté, plutôt qu'en invoquant précisément telle ou telle base de modes. Le fait est qu'à un flux de photons donné et un diamètre de télescope donné est associé un nombre maximum de degrés de liberté commandables, indépendamment du système. Donc forcément plus un système compte de degrés de liberté et plus il va être important d'optimiser ce dernier, plus la plage de magnitude sur laquelle on va avoir à jouer va être importante. Dans le cas de COMEON, l'optimisation modale ne prenait son importance que dans les 3 dernières magnitudes avant la magnitude limite du système. Avec COMEONPLUS, l'optimisation commence à compter quelques 5 magnitudes avant la magnitude limite. Avec le VLT c'est la gamme complète qui sera concernée par l'optimisation.

2.4.2 Choix de la fréquence d'échantillonnage

Un point dont l'article sur l'optimisation modale ne parle pas est la stratégie à choisir concernant la fréquence d'échantillonnage à utiliser dans tel ou tel cas de figure. Je vais tout d'abord présenter le côté idéal des choses, avant de faire la présentation réelle du cas expérimental.

Le cas idéal est le cas où on est limité par le bruit quantique. Evidemment, on devine que le cas pratique sera plutôt limité par le bruit de lecture, ou autre. Quoi qu'il en soit, la densité spectrale de puissance des fluctuations reste inchangée quelle que soit la fréquence d'échantillonnage F_e ; seul le niveau de bruit qui baigne ce spectre va évoluer. Cette constatation simple est le point de départ de la réflexion qui suit.

Limitation par le bruit de photons

En régime limité par le bruit de photons, la variance du bruit varie proportionnellement à la fréquence d'échantillonnage. Comme la variance est l'intégrale de la densité spectrale de puissance, et que l'on intègre jusqu'à la fréquence de Shannon, proportionnelle à F_e , il s'en suit que le *niveau* du bruit est une donnée *constante*. Les choses sont donc d'une rare simplicité, puisque augmenter la fréquence d'échantillonnage équivaut à ne rien faire spectralement, à peu de choses près. Tout juste étendre fréquemment le domaine du bruit. La bande passante optimale de correction, elle, ne change pas. Puisque les choses sont claires côté mesure, regardons ce qui advient côté système. Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée et plus la fonction de transfert de correction peut présenter une bande passante élevée. Ou encore, pour une bande passante à 0 dB de la fonction de correction fixée, l'atténuation à basse fréquence est d'autant meilleure et la surtension d'autant moins forte que F_e est grande. Il en est de même pour la fonction de transfert en boucle fermée, dont les qualités s'améliorent avec la fréquence d'échantillonnage. Ainsi la réponse

est claire, la limitation par le bruit de photons impose d'utiliser la plus grande fréquence d'échantillonnage possible.

Limitation par le bruit de lecture

Le problème devient à peu près aussi complexe qu'il était simple dans le cas précédent. Etant inversement proportionnel au nombre de photons au carré, le *niveau* spectral du bruit se comporte alors linéairement avec la fréquence d'échantillonnage F_e . Fait amusant, on a besoin d'une bande passante de correction d'autant plus faible que la fréquence d'échantillonnage est grande: mais dans ce cas la correction se dégrade à grands pas. Inversement, elle s'améliore donc si l'on réduit la fréquence d'échantillonnage mais il est alors demandé une bande passante plus grande. Elle s'améliore, jusqu'à ce que l'erreur de sous-modélisation temporelle prenne le relais et la fasse à nouveau croître. Le problème est complexe car il dépend totalement de la forme de la fonction de transfert du système en fonction de la fréquence d'échantillonnage. On ne peut pas le simuler simplement car il y aurait en fait *une* fréquence d'échantillonnage par mode: le choix de la bonne fréquence doit se faire en fonction de l'erreur résiduelle totale. Celle-ci impose de faire des hypothèses complètes quant à la structure spatiale et temporelle de la turbulence, et dépend plus que jamais des conditions précises d'observation: flux, bruit de lecture, seeing et temps de corrélation.

Il y a donc deux façons de procéder dans la pratique:

1. enregistrer des séquences de turbulence non asservies pour différentes fréquences d'échantillonnage, appliquer l'optimisation sur chacune et comparer les résultats
2. enregistrer une séquence de turbulence non asservie avec une fréquence d'échantillonnage assez basse et simuler les files à fréquence plus élevée, simplement en élevant le niveau du bruit sur le spectre et en le "complétant" à plus haute fréquence. Il est dans ce cas nécessaire d'avoir une bonne connaissance de la loi de variation du bruit en fonction de la fréquence.

Ces méthodes n'ont jamais été testées sur COMEONPLUS, car l'analyseur censé être limité par le bruit de lecture (analyseur fort flux Reticon) n'a qu'une unique fréquence d'échantillonnage disponible, alors que l'EBCCD qui est limité par le bruit de photon possède une gamme de fréquences d'échantillonnage. Néanmoins, à l'avenir il sera absolument nécessaire de pratiquer une telle politique d'optimisation, car on se rend compte de plus en plus que l'EBCCD n'a des performances d'analyse effectivement conformes aux prédictions théoriques de la limitation par le bruit de photons que dans des cas bien ciblés où le fond du ciel est négligeable et où le seuil n'a pas à être ajusté bizarrement. Or il se trouve que ce genre de situation est rare.

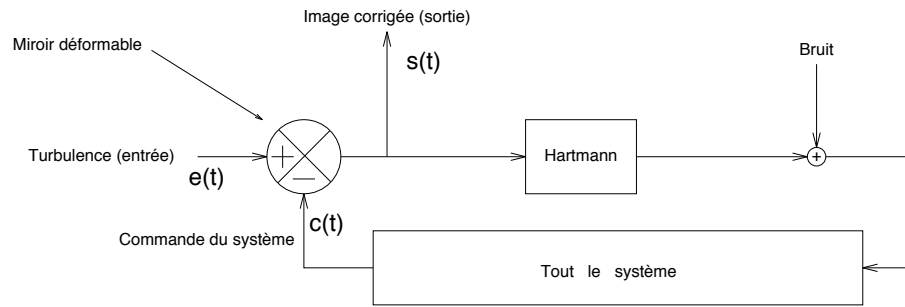


Figure 2.5: Description schématique d'un système d'optique adaptative.

2.5 Fonctions de transfert du système

L'article qui précède (section 2.3) ne décrit que très succinctement les fonctions de transfert temporelles du système. Cette section ajoute quelques précisions et quelques compléments sur le vocabulaire, ainsi que sur les définitions des différentes bandes passantes.

En premier lieu le lecteur aura noté qu'il n'est question, dans l'article présenté à la section 2.3, que de fonctions de transfert *analogiques*, alors que nous travaillons avec un système échantillonné. La raison principale est la simplification que cette approximation apporte dans les calculs. Il a bien sûr été montré par ailleurs expérimentalement qu'il n'est pas déraisonnable de faire cette approximation: il y a un bon accord entre les fonctions de transfert mesurées et les fonctions de transfert prédites par le modèle analogique. Un bon accord ne veut certes pas dire égalité, mais la source principale de divergence vient avant tout de la mauvaise modélisation de certains composants du système tels que la fonction de transfert des intensificateurs ou les différences éventuelles de fonctions de transfert entre modes, plutôt que de l'approximation analogique/numérique.

J'ajoute que l'approximation analogique/numérique est d'autant mieux vérifiée que la fréquence d'échantillonnage est élevée. De plus, à fréquence d'échantillonnage donnée, l'approximation est meilleure pour les basses fréquences. En particulier le domaine de fréquences qui intéresse la bande passante de correction du système est toujours bien modélisé. S'il y a une différence, c'est avant tout à plus haute fréquence qu'elle va se manifester. Il y aurait donc tout lieu de se préoccuper de ce problème si le spectre des perturbations n'était que faiblement décroissant. Sachant qu'il chute très rapidement, et que l'essentiel de la correction se passe à basse fréquence j'ai admis que l'on pourrait toujours adopter cette approximation.

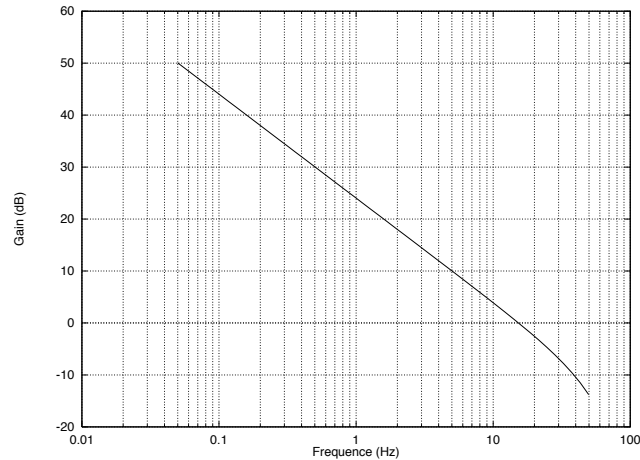


Figure 2.6: Fonction de transfert en boucle ouverte du système. Description, illustration.

Représentation du système d’optique adaptative, conventions

Je représente le système comme schématisé sur la figure 2.5. Comme on ne s’intéresse qu’aux fonctions de transfert des modes et que celles-ci sont indépendantes les unes des autres (grâce aux propriétés de l’inverse généralisée: voir article section 2.3), je ne représente le système que pour un seul des coefficients modaux. Celui-ci est appliqué à l’entrée du système, $e(t)$. Il dépend du temps, mais nous nous intéresserons surtout à sa transformée de Fourier notée \tilde{e} , je me débarrasse de la dépendance en f pour alléger les notations. La commande \tilde{c} est soustraite à l’entrée \tilde{e} par le biais du miroir déformable, et le résultat est \tilde{s} , qui est en général appelé *signal d’erreur*, mais qui est pour nous l’image corrigée et donc la sortie “intéressante” du système. Il faut mentionner que cette façon de voir les choses est propre à l’optique adaptative.

Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est $H_{ol} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{s}}$. Le but dans notre système est d’avoir $c = e$, de telle manière qu’on ait $s = 0$ (s’aider de la fig. 2.5). Mais $s = 0$ implique que H_{ol} prenne des valeurs infinies, puisque c est non nul. Dans la réalité la valeur ne sera pas infinie mais on comprend au moins pourquoi $H_{ol}(f)$ doit prendre des valeurs très grandes. Physiquement c’est avant tout un intégrateur (auquel s’ajoutent les fonctions de transfert des autres éléments: analyseur, miroir, retard pur, etc), donc c’est une fonction décroissante dont le module carré est pratiquement en $1/f^2$: d’où des valeurs très importantes à basse fréquence, tendant vers l’infini quand f tend vers 0.

On définit la *bande passante en boucle ouverte à 0dB*, qui est la fréquence où le module de H_{ol} est égal à 1. Je montre un exemple sur la figure 2.6.

Cette fonction décrit donc la manière dont va être traitée temporellement l’information du signal donné par le Hartmann pour se transformer en une commande sur le miroir

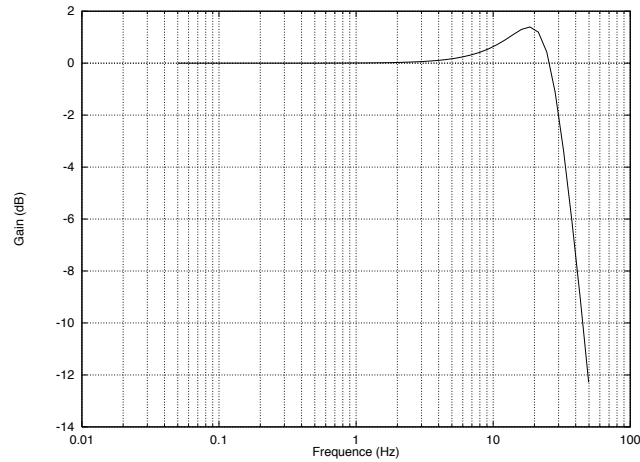


Figure 2.7: Exemple de fonction de transfert en boucle fermée du système. Conditions: intégrateur simple (gain 0.3) avec retard (2 ms), fonction de transfert du ccd prise en compte, fréquence d'échantillonnage: 100 Hz.

déformable. Que le système soit bouclé ou pas cette fonction ne change pas: c'est une caractéristique intrinsèque du système. C'est toujours d'elle dont on partira pour décrire les autres fonctions de transfert.

Un dernier mot enfin sur le gain modal: c'est un facteur multiplicatif dans H_{ol} . Donc la modification apportée est une simple translation verticale du graphe de la fonction sur la figure 2.6. Mais on voit déjà que la bande passante à 0 dB dépend de ce gain. On verra plus loin pour quel gain précis on la donne en général.

Fonction de transfert en boucle fermée

Nous allons maintenant voir la relation qui existe entre l'entrée \tilde{e} et la commande \tilde{c} . Dans le système idéal on aimerait évidemment avoir $\tilde{c} = \tilde{e}$. Le rapport entre \tilde{e} et \tilde{c} est défini par la fonction de transfert en boucle fermée, qui est par définition $H_{bf} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{e}}$. Sa déduction de H_{ol} s'effectue d'après la figure 2.5. Dans la relation $\tilde{c} = \tilde{s}.H_{ol}$, il suffit de remplacer \tilde{s} par $\tilde{e} - \tilde{c}$, et on obtient

$$\frac{\tilde{c}}{\tilde{e}} = H_{bf} = \frac{H_{ol}}{1 + H_{ol}} \quad (2.31)$$

A basse fréquence, où H_{ol} est grand, on trouve effectivement $H_{bf} \approx 1$. La largeur de la zone sur laquelle cette approximation est vérifiée croît avec le gain. Une représentation du module de H_{bf} est donnée sur la figure 2.7. On note qu'une partie de la fonction de transfert en boucle fermée est supérieure à 1: certaines fréquences sont amplifiées. La valeur maximale de ce pic d'amplification croît également avec le gain. Un critère qui assure la stabilité de la boucle est de ne pas dépasser 2.3 dB pour la valeur de ce maximum. Le gain modal pour lequel cette valeur est atteinte est le gain maximum

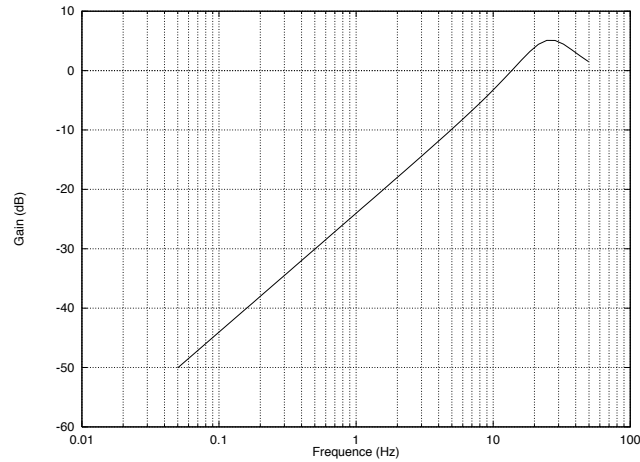


Figure 2.8: Exemple de fonction de transfert de correction du système. C'est la fonction importante pour l'optique adaptative. Conditions: intégrateur simple (gain 0.3) avec retard (2 ms), fonction de transfert du ccd prise en compte, fréquence d'échantillonnage: 100 Hz.

tolérable par le système. C'est à partir de ce gain qu'on définit les bandes passantes maximales pour les différentes fonctions de transfert H_{ol} , H_{bf} , H_{cor} . Le retard pur entre la mesure et la commande (dû à la lecture du détecteur et au temps de calcul) tient une grande part de responsabilité dans l'amplitude de cette amplification, et on atteint d'autant plus vite les 2.3 dB que le retard est important; le pendant immédiat est que les différentes bandes passantes s'en trouvent amoindries.

La bande passante de cette fonction est souvent définie à -3 dB (la fréquence à partir de laquelle la fonction H_{bf} passe au-dessous de -3 dB). Cette définition donne généralement des valeurs très grandes, bien plus grandes que la bande passante à 0 dB en boucle ouverte. Si elle est donc très bonne pour l'image de marque du système, elle ne représente cependant pas une grandeur physique intéressante comme la fonction de transfert de correction, que nous allons voir ci-après.

Fonction de transfert de correction

Il ne s'agit pas là de son vrai nom, mais la dénomination "fonction de transfert de correction" est plus parlante. Comme je l'ai déjà dit, en automatique le signal d'erreur \tilde{s} représente rarement une fin en soi, contrairement au cas présent où il se trouve être la grandeur qui nous intéresse. La fonction de transfert de correction est définie par $H_{cor} = \frac{\tilde{s}}{e}$. C'est l'état des fluctuations du mode après correction, par rapport à ses fluctuations en entrée. C'est donc à mon avis *la* grandeur intéressante en optique adaptative, et s'il y a une bande passante à définir et à retenir, ce sera sur cette fonction.

Tout d'abord son expression est

$$\frac{\tilde{s}}{e} = H_{cor} = \frac{1}{1 + H_{ol}} \quad (2.32)$$

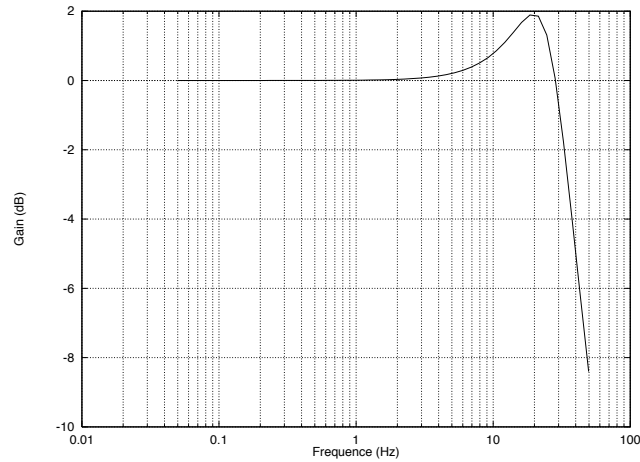


Figure 2.9: Exemple de fonction de transfert du bruit du système. Conditions: intégrateur simple (gain 0.3) avec retard (2 ms), fonction de transfert du ccd prise en compte, fréquence d'échantillonnage: 100 Hz.

A basse fréquence, où H_{ol} est grand, on aura $H_{cor} \approx 1/H_{ol} \approx 0$. Ces basses fréquences sont d'autant mieux atténuées, et ce sur une plage plus large, que le gain modal est élevé. La figure 2.8 montre un exemple d'une telle fonction. On notera certes l'atténuation à basse fréquence, mais on prendra soin de remarquer aussi l'amplification à plus haute fréquence. Celle-ci est d'autant plus importante que le gain est élevé.

J'ai rarement eu l'occasion de voir une bande passante définie sur cette fonction dans le cadre de l'optique adaptative hors de l'équipe COMEON. Je choisis généralement la bande passante à 0 dB pour la caractériser. Malheureusement, des trois bandes passantes définies c'est certainement celle qui prend la valeur la plus petite. Ce n'est pas très bon pour la notoriété d'un système, mais cela n'est pas ici notre souci.

Fonction de transfert du bruit

Cette dernière fonction de transfert est particulière, je l'ai introduite pour les besoins de l'optimisation modale. Elle lie le spectre des fluctuations du bruit injecté dans la commande aux fluctuations du bruit en entrée. Un rapide calcul permet de montrer qu'elle est égale à

$$H_{br} = \frac{H_{sys}}{1 + H_{ol}} \quad (2.33)$$

où H_{sys} est la fonction de transfert en boucle ouverte *sans* la fonction de transfert temporelle de l'analyseur.

Un exemple est donné sur la figure 2.9. On notera la ressemblance avec la fonction de transfert en boucle fermée (le rapport des deux est un sinus cardinal, qui vaut presque 1 dans la zone qui nous intéresse).

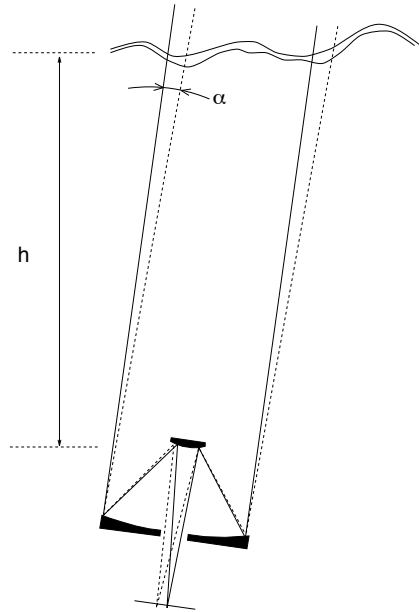


Figure 2.10: Problème de l'anisoplanétisme. L'écran de phase turbulent à l'altitude h perturbe d'une manière différente chaque point du plan image. Ainsi la correction de phase à apporter sur le miroir primaire pour un objet donné n'est pas la même que pour l'objet voisin, distant d'un angle α . Cet effet est d'autant plus marqué que h est grand puisqu'il dépend de la distance $h\alpha$, qui est le décalage entre les projections de la pupille sur la couche turbulente suivant l'une et l'autre des directions d'observation.

2.6 L'anisoplanétisme

L'anisoplanétisme est un problème qui survient lors de l'observation d'un objet autre que celui qui sert de référence à l'asservissement. La figure 2.10 résume le principe. Pour des références sur le sujet on citera principalement Chassat (1989), Abitbol (Abitbol & Ben-Yosef 1991) ainsi que la thèse de F. Chassat (1992) dont le sujet commun est l'étude modale de l'anisoplanétisme. Ainsi le sujet est couvert et je me contenterai seulement d'en résumer brièvement les points principaux.

Le champ d'isoplanétisme est défini par l'angle à partir duquel la corrélation des psf instantanées associées aux deux directions d'observation passe en dessous d'un certain seuil. Cela conduit à un angle d'isoplanétisme (rayon du champ isoplanétique) qui peut s'écrire sous la forme $\theta_0 \propto \frac{r_0(\lambda)}{h}$ (Roddier 1981). Puisque θ_0 est défini à partir d'un critère absolu sur l'image (ou sur la FTM dans certains cas), il dépend impérativement de la longueur d'onde d'observation. Mais cette approche ne rend compte que de l'aspect global de l'anisoplanétisme, sans pénétrer le cœur du sujet qui intéresse l'optique adaptative, à savoir la distribution modale sur le front d'onde de cette perte de corrélation.

Abitbol comme Chassat l'ont montré, la corrélation des modes d'ordre élevé en fonction de la séparation chute plus vite que les modes porteurs de basses fréquences spatiales.

D'où l'utilité, pour un angle donné entre objet et référence, de calculer cette corrélation pour chaque mode et de filtrer ceux pour lequel elle est trop basse. Ces études ont été faites par Abitbol et Chassat sur les polynômes de Zernike, mais l'approche générale reste valable pour n'importe quelle base. Le problème du propriétaire d'un système d'optique adaptative est d'appliquer ces résultats à son système. Les modes utilisés n'étant pas les polynômes de Zernike, les calculs sont à reprendre dans le cas des modes d'un miroir déformable. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

2.6.1 Calcul du domaine d'isoplanétisme modal

Le but de ce paragraphe est de calculer le domaine d'isoplanétisme associé à chaque mode de correction pour les raisons précédemment indiquées.

Dans un premier temps, on restreint l'étude à une base de modes orthogonaux de telle manière que l'expression de la composante sur un mode ne soit qu'une simple projection. L'étude en fonction du profil de turbulence $C_n^2(h)$ sera faite progressivement en étudiant l'effet de l'anisoplanétisme dans une couche fine, puis en intégrant par la suite le long du profil.

Supposons donc un angle $\vec{\alpha}$ entre la référence et la direction d'imagerie. L'angle est donné comme un vecteur pour tenir compte des deux dimensions. La pupille, de rayon R , se projette suivant les deux directions d'observation sur la couche turbulente située à une hauteur h au-dessus du sol en deux endroits différents, distants de $h \cdot \vec{\alpha}$. Si l'on définit le vecteur \vec{x} comme ce déplacement normalisé par rapport à la taille de la pupille, on a

$$\vec{x} = \frac{h}{R} \cdot \vec{\alpha} \quad (2.34)$$

Enfin, le i^{eme} mode du miroir sera une fonction notée $M_i(\vec{r})$, définie sur l'ensemble du plan, et nulle en dehors de la pupille.

L'expression de la décomposition de la phase se trouvant sur la pupille pour la direction d'observation \vec{x} est

$$h_i(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int \phi(R\vec{r} + R\vec{x}) M_i(\vec{r}) d^2\vec{r} \quad (2.35)$$

Notons que l'on reconnaît dans cette équation la convolution de la phase par le mode $M_i(\vec{r})$.

On a alors, en notant $h_i = h_i(\vec{0})$,

$$\langle h_i h_j(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int \int \langle \phi(R\vec{r}' + R\vec{x}) \phi(R\vec{r}) \rangle M_i(\vec{r}) M_j(\vec{r}') d^2\vec{r}' d^2\vec{r} \quad (2.36)$$

On fait apparaître la fonction de structure de phase toujours à partir de la même relation

$$\langle \phi(R\vec{r}' + R\vec{x}) \phi(R\vec{r}) \rangle = \langle \phi^2(R\vec{r}' + R\vec{x}) \rangle + \langle \phi^2(R\vec{r}) \rangle - \frac{1}{2} D_\phi(R(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{x})) \quad (2.37)$$

Encore une fois, en prenant soin de ne considérer que des modes à *valeur moyenne nulle*, les intégrales doubles contenant des termes en $\langle \phi^2 \rangle$ sont nulles. Il reste alors

$$\langle h_i h_j(\vec{x}) \rangle = -\frac{1}{2\pi^2} \int \int D_\phi(R(\vec{r}' + \vec{x} - \vec{r})) M_i(\vec{r}) M_j(\vec{r}') d^2\vec{r} d^2\vec{r}' \quad (2.38)$$

En notant \otimes le produit de convolution, on peut en fait écrire

$$\langle h_i h_j(\vec{x}) \rangle = -\frac{1}{2\pi^2} M_i(\vec{r}) \otimes M_j(\vec{r}) \otimes D_\phi(R\vec{r}) \quad (2.39)$$

Le calcul se fait plus facilement dans l'espace de Fourier en prenant le spectre de Wiener (voir Eq. (1.7), section 1.1.1) comme transformée de Fourier de D_ϕ . Cependant il faut prendre garde au risque de divergence en 0, puisque ce spectre est en $|k|^{-11/3}$ (k est la fréquence spatiale) dans l'hypothèse Kolmogorov. Si l'on se base sur l'exemple des polynômes de Zernike, le module carré de leur TF en 0 est en $|k|^{2n}$, n étant le degré radial. Ainsi, le produit de l'ensemble est en $|k|^{2n-11/3}$, ce qui rend nécessaire d'avoir $n \geq 2$ pour avoir un exposant positif. C'est-à-dire que les tilts, en particulier, (degré radial $n = 1$) posent un problème de calcul. Ne parlons même pas du mode piston, dont on évacue implicitement la présence. On aura donc grand intérêt à se placer dans une base orthogonale aux tilts. En effet, le tilt du mode peut aussi être vu comme son moment d'ordre 1, qui est encore la dérivée première de sa TF à l'origine. Si le mode est orthogonal au tilt, alors cette dernière est nulle et il ne reste dans le développement limité que le terme en k^2 (ou éventuellement un terme d'ordre encore plus élevé). Donc le module carré est en $|k|^4$, ce qui assure toutes les facilités de convergence dans le calcul numérique. Corollaire: la valeur de l'échelle externe, caractérisée par le comportement du spectre de Wiener à l'origine, prend une importance considérable dans le profil de corrélation du tilt alors qu'elle est à peu près insignifiante pour les autres modes: le point est longuement développé dans la thèse de Chassat.

A titre d'exemple, les figures 2.11 et 2.12 montrent la valeur de la corrélation respectivement du mode tilt et d'un mode du miroir ressemblant à un astigmatisme. On notera que les valeurs de la corrélation du tilt sont très différentes suivant un axe ou l'autre. Ce phénomène est bien connu, voir pour cela la thèse de F. Chassat. Pour les modes d'ordres plus élevés, la corrélation prend une forme de plus en plus proche de la symétrie de révolution lorsque l'ordre des modes croît. On notera enfin que ces courbes ne dépendent pas de la longueur d'onde.

2.6.2 L'optimisation modale et l'anisoplanétisme

Cette section est tout d'abord une discussion sur l'association de l'hypothèse de Taylor, du retard de commande et de l'anisoplanétisme: la façon d'aborder le problème pour l'anisoplanétisme a rendu ces trois phénomènes couplés. Puis je discute l'algorithme d'optimisation du contrôle modal face à l'anisoplanétisme.

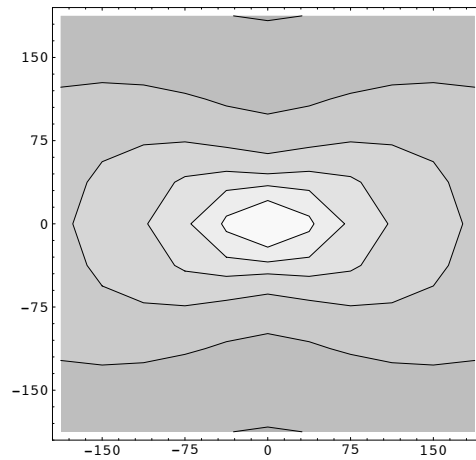


Figure 2.11: Les abscisses et ordonnées de ce schéma sont des angles (en arcsecondes) représentant la séparation entre l'objet et la référence, placée en (0,0). Le schéma représente la corrélation en fonction de la position de l'objet par rapport à la référence. Les contours sont des courbes d'égalité de corrélation, choisis comme multiples de 0.1. Les niveaux de gris sont d'autant plus clairs que la corrélation est élevée. Les hypothèses sont une couche unique à $h = 10km$, une turbulence de type Kolmogorov pleinement développée, un télescope de diamètre 3.60m avec une obstruction centrale de 1.57m. Le mode considéré est un tilt.

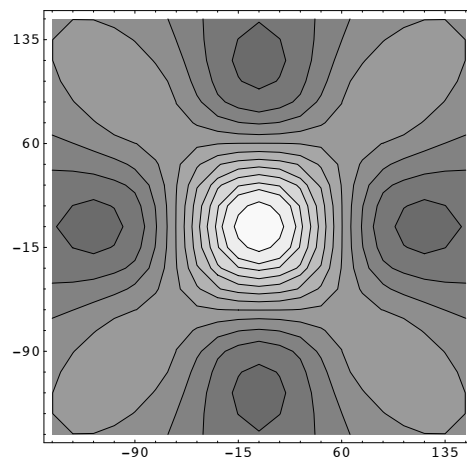


Figure 2.12: Voir explication figure précédente. Ici le mode considéré est un mode du miroir COMEONPLUS, proche d'un astigmatisme.

Hypothèse de Taylor, retard de commande et anisoplanétisme.

Voici le problème: l'hypothèse de Taylor, ou hypothèse de la turbulence gelée, est une hypothèse selon laquelle le front d'onde apparaît perturbé par une couche turbulente agissant comme un écran de phase se translatant à vitesse constante \vec{v} au-dessus de la pupille du télescope. Nous allons voir que cette hypothèse pouvait être plus ou moins bien respectée (Gendron & Léna 95) (voir paragraphe 3.7.1). Dans les cas où elle se trouve l'être, l'association de l'hypothèse de Taylor et du retard de commande τ dans la boucle d'asservissement entre la mesure et l'action provoque une perte de corrélation du front d'onde qui se calcule comme un terme d'anisoplanétisme, $\langle h_i \cdot h_i(\vec{v}\tau/R) \rangle$. Je veux simplement, dans ce paragraphe, comparer les termes $h\alpha$ et $\tau\vec{v}$.

Si l'on veut calculer les effets conjugués de l'anisoplanétisme et du retard de commande, il suffit de déplacer la figure de corrélation d'une quantité $\vec{v}\tau/R$. Faisons une application numérique: $|\vec{v}| = 20$ m/s, $\tau = 2$ ms, $R = 1.80$ m. Alors $|\vec{v}|\tau/R = 2.2 \cdot 10^{-2}$. Le terme équivaut à un angle anisoplanétique de $0.8''$ pour une couche à 10 km, à rapprocher des figures 2.11 et 2.12. Il est de plus d'un ordre de grandeur inférieur aux champs d'isoplanétisme modaux, signifiant que l'observation dans une direction amont de la direction du vent pour compenser le retard de commande ne peut apporter qu'un gain très faible.

L'optimisation modale

Je décris ici l'algorithme de l'optimisation du contrôle modal face à l'anisoplanétisme.

Le travail précédent (paragraphe 2.6.1) est valable pour une couche turbulente unique. Etant donné que les différentes couches sont indépendantes, on peut ajouter les figures de corrélation, chacune pondérée par la valeur du $C_n^2(h)$ de la couche associée. Cela suppose d'avoir une idée du profil de turbulence, ou au moins une idée de la position et de l'amplitude des couches prépondérantes. Mesurer ces paramètres à l'aide de l'analyseur seul n'est pas possible, il est donc nécessaire d'obtenir le $C_n^2(h)$ par une méthode extérieure. Une fois celui-ci connu, le profil de corrélation global pour un mode est la somme, pondérée par $C_n^2(h)$, des profils de corrélation dilatés d'une manière inversement proportionnelle à la hauteur de la couche.

Une fois obtenu le profil global de corrélation, il faut décider si le mode doit, ou non être conservé dans la commande. Je n'ai pas mené d'étude sur la répartition spectrale temporelle de la décorrélation anisoplanétique, de telle sorte que l'optimisation de la bande passante de correction se réduit ici à une commande en tout ou rien, tout étant la correction optimisée du point de vue du flux sur la référence. Le critère est alors de savoir si le mode apporte ou pas une correction. A l'erreur de phase commise

sur le mode en raison du bruit et de la bande passante de correction limitée, il faut ajouter le terme d'anisoplanétisme. Mais tous les termes d'erreur sont étroitement mêlés (G. Rousset, Communication privée 1991) (Rigaut, Thèse 1992). Appelons a_α le coefficient modal dans la direction α de l'objet, \hat{a}' le coefficient modal reconstruit d'après les mesures de l'analyseur sur la référence, avec $\hat{a}' = \hat{a} + b$, b étant le bruit d'analyse introduit dans la boucle et \hat{a} le coefficient modal estimé portant les erreurs dues à la reconstruction et au filtrage temporel. Il faut alors avoir la condition de correction efficace: $\langle a_\alpha^2 \rangle \geq \langle (a_\alpha - \hat{a}')^2 \rangle$, qui conduit à

$$\langle a_\alpha^2 \rangle \geq \langle (a_\alpha - \hat{a}')^2 \rangle \Rightarrow \frac{\langle a_\alpha \hat{a}' \rangle}{\langle \hat{a}'^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} \quad (2.40)$$

Cette condition fait intervenir la corrélation entre le coefficient modal exact dans la direction de l'objet et le coefficient modal reconstruit par le Hartmann et entaché des erreurs de filtrage temporel. Il faut alors faire l'hypothèse que le coefficient de corrélation trouvé au paragraphe précédent vaut également pour la corrélation entre ces deux coefficients.

L'optimisation modale en fonction des paramètres (profil vertical de $C_n^2(h)$ et caractéristiques temporelles à l'intérieur de chaque couche) déterminant l'anisoplanétisme, présentée sous cet angle, n'est certainement pas aussi précise que l'optimisation en fonction du flux. Mais d'un autre côté ces paramètres ne sont pas accessibles et doivent être estimés sur des bases théoriques ou à travers des données statistiques. Ils pourraient être estimés grâce à des mesures indépendantes de la corrélation du mouvement d'images des composantes d'étoiles doubles, mais la précision sur le profil lors de l'inversion est limitée.

Devant la difficulté d'estimation des paramètres nécessaires à ce type d'optimisation, l'algorithme n'a pas été implanté sur COMEONPLUS .

2.7 Matrices de reconstruction optimales

Je parle dans la dernière partie de ce chapitre de matrices de reconstruction optimales, j'étudie le moyen de les calculer et j'étudie leurs caractéristiques dont je montre l'aspect modal. Je ne voulais pas seulement m'arrêter au cas de l'optimisation dans un système d'optique adaptative, parce que ce n'est pas le seul cas où une optimisation entre en jeu dans une reconstruction de phase. Ce chapitre prouve qu'il existe des méthodes puissantes de reconstruction, et l'analyse des propriétés et des mécanismes mis en jeu par ces méthodes est intéressante car elle débouche sur de plus larges perspectives, telles que l'optimisation des miroirs adaptatifs par exemple.

De nombreux algorithmes existent, pour la reconstruction de la phase à partir des mesures d'un Hartmann. Certaines méthodes procèdent par itérations comme par exemple la méthode de F. et C. Roddier (Roddier & Roddier 1991), ou les

méthodes de reconstruction pour miroirs segmentés qui impliquent de retrouver le piston par continuité des différents segments (algorithmes généralement itératifs). Mais la plupart sont linéaires, et se présentent donc sous la forme d'un produit matriciel; que ce soit en temps réel en optique adaptative (matrice inverse généralisée d'une matrice d'interaction expérimentale) ou en optique active (même principe), ou que ce soit pour reconstruire la phase a posteriori, différents auteurs tels que Bakut (1994) ont cherché une matrice répondant à un algorithme Bayésien optimal, Wallner (1983) ou Angel (1994) ont également cherché une matrice optimale. Les méthodes directes d'intégration du champ de vecteurs fourni par le Hartmann sont également des méthodes linéaires, et peuvent s'écrire sous la forme de matrices. La raison principale de l'emploi généralisé de ces méthodes matricielles vient des propriétés particulières de linéarité du senseur lui-même. Ainsi, c'est sans perte de généralité que l'on peut poser le problème de la reconstruction du front d'onde de la manière suivante: étant donnée une série de mesures, déterminer la pondération optimale à appliquer à celles-ci pour estimer au mieux les paramètres du front d'onde qui leur a donné naissance. Cela sous-entend la fabrication d'un estimateur optimal. La solution a, à ma connaissance, été énoncée en premier par Wallner (1983) dans le cas de l'optique adaptative. Néanmoins, la formulation faite par Wallner de cet estimateur n'est pas simple à première vue. Dans les sections qui suivent je voudrais d'abord rappeler la construction de cet estimateur, vue sous un angle modal et dans un cadre un peu plus général que celui utilisé par Wallner. On trouve dans la thèse de F. Chassat (1992, paragraphe 3.6.1) l'expression exacte de cet estimateur, tirée de (Brucq 1988). Pour plus de détails, cette dernière référence donne les hypothèses exactes du calcul de cet estimateur dont l'emploi peut s'étendre à des domaines plus vastes que le cas de la reconstruction de phase.

2.7.1 Estimateur optimal

Cette section présente l'estimateur optimal. Je le présente ici appliqué au cas qui nous intéresse, et je développe le calcul sous une forme qui m'est propre.

Le but est d'estimer le front d'onde en commettant une erreur minimale sur la phase au sens des moindres carrés. Les données de départ sont les mesures de l'analyseur représentées sous la forme d'un vecteur \vec{s} , et on se propose d'estimer le front d'onde sur une base finie de modes, donc sous la forme d'un vecteur $\vec{\phi}$. Quelle que soit la base choisie pour l'expression de ce front d'onde, l'erreur quadratique de phase s'exprime en général $\vec{\phi}^t \cdot \Delta \cdot \vec{\phi}$ où Δ est la matrice de covariance (géométrique) de la base (voir 2.1.2). On cherche les coefficients de la matrice C telle que $\vec{\phi} = C \cdot \vec{s}$. Cette égalité est malheureusement impossible à satisfaire, et l'on se contentera donc de minimiser l'erreur faite, c'est-à-dire $\vec{\phi} - C \cdot \vec{s}$. On serait tenté d'écrire que l'on va minimiser $\langle |\vec{\phi} - C \cdot \vec{s}|^2 \rangle$ pour avoir, en moyenne, la plus petite erreur possible. L'attention est attirée sur deux points. Tout d'abord, la norme du vecteur ainsi calculée ne représente en rien -dans le cas général- la variance de phase, mais unique-

ment la somme des carrés des composantes du vecteur d'erreur. Cette quantité se trouve être égale à la variance de phase si l'on a choisi une base orthonormée. Ainsi, pour ne pas perdre de généralité on va donc minimiser

$$\langle (\vec{\phi} - C.\vec{s})^t . \Delta . (\vec{\phi} - C.\vec{s}) \rangle \quad (2.41)$$

Le deuxième point est qu'il ne faut surtout pas penser que la quantité décrite dans l'équation précédente est à elle seule égale à l'erreur de phase faite sur le front d'onde. En effet, le vecteur $\vec{\phi}$ n'a qu'un nombre fini de composantes et ne représente que la projection du *vrai* front d'onde sur le sous-espace vectoriel des $\vec{\phi}$. Conscients de ce fait, certains se demanderont alors s'il est juste de minimiser l'erreur par rapport à $\vec{\phi}$ plutôt que l'erreur par rapport au *vrai* front d'onde. La réponse est oui sans ambiguïté car l'erreur $\vec{\phi} - C.\vec{s}$ est orthogonale à l'erreur entre $\vec{\phi}$ et le *vrai* front d'onde². Par ailleurs, cette remarque anodine pose les bases d'une simplification singulière par rapport à l'approche de Wallner, puisqu'elle autorise à travailler uniquement dans le sous-espace vectoriel des $\vec{\phi}$, sans ce soucier du front d'onde réel "entier". Les calculs s'en trouvent simplifiés.

Ainsi, il faut développer l'équation (2.41), dériver par rapport à un coefficient de C , arranger un peu les termes en tenant compte du fait que Δ est symétrique, et en présentant le résultat sous forme matricielle on obtient ainsi l'équation (2.43).

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle (\vec{\phi} - C.\vec{s})^t . \Delta . (\vec{\phi} - C.\vec{s}) \rangle \\ &= \langle \vec{\phi}^t . \Delta . \vec{\phi} \rangle - \vec{s}^t . C^t . \Delta . \vec{\phi} - \vec{\phi}^t . \Delta . C . \vec{s} + \vec{s}^t . C^t . \Delta . C . \vec{s} \\ &= \langle \vec{\phi}^t . \Delta . \vec{\phi} \rangle - 2 \vec{\phi}^t . \Delta . C . \vec{s} + \vec{s}^t . C^t . \Delta . C . \vec{s} \\ &= \sum_i \sum_j \langle \phi_i \phi_j \rangle \Delta_{ij} - 2 \sum_i \sum_j \sum_k \langle \phi_i s_k \rangle C_{jk} \Delta_{ij} \\ &\quad + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_p \Delta_{ij} C_{ik} C_{jp} \langle s_k s_p \rangle \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial C_{mn}} &= -2 \sum_i \langle \phi_i s_n \rangle \Delta_{im} + \sum_j \sum_p \Delta_{mj} C_{jp} \langle s_n s_p \rangle + \sum_i \sum_p \Delta_{im} C_{ik} \langle s_k s_n \rangle \\ &= -2 \sum_i \Delta_{mi} \langle \phi_i s_n \rangle + 2 \sum_j \sum_p \Delta_{mj} C_{jp} \langle s_p s_n \rangle \\ &= -2 \left[\Delta \langle \vec{\phi} . \vec{s}^t \rangle \right]_{mn} + 2 \left[\Delta C \langle \vec{s} . \vec{s}^t \rangle \right]_{mn} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial C_{mn}} = 0 &\Rightarrow \Delta . \langle \vec{\phi} . \vec{s}^t \rangle = \Delta . C . \langle \vec{s} . \vec{s}^t \rangle \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\Delta . \langle \vec{\phi} . \vec{s}^t \rangle = \Delta . C . \langle \vec{s} . \vec{s}^t \rangle \quad (2.43)$$

Le problème de l'inversibilité de Δ est discuté au chapitre 2.1.2. Δ est une matrice symétrique, en général inversible. La matrice $\langle \vec{s} . \vec{s}^t \rangle$ est également inversible, et ce

²puisque par définition l'erreur entre $\vec{\phi}$ et le *vrai* front d'onde est orthogonale à l'espace des $\vec{\phi}$, et que $C.\vec{s}$ appartient à cet espace.

d'autant mieux que le bruit sur les mesures est élevé³. Ainsi, on a

$$C = \langle \vec{\phi} \cdot \vec{s}^t \rangle \cdot \langle \vec{s} \cdot \vec{s}^t \rangle^{-1} \quad (2.44)$$

où je rappelle que $\vec{\phi}$ est le front d'onde effectif exprimé sur la base choisie, et \vec{s} sont les mesures effectives incluant bien sûr le bruit, les erreurs d'anisoplanétisme ou encore les erreurs temporelles. Notons qu'il y a équivalence entre cette dernière équation et l'égalité $\langle (C\vec{s} - \vec{\phi}) \cdot \vec{s}^t \rangle = 0$. Que signifie physiquement cette dernière égalité ? Simplement qu'il n'existe strictement aucune corrélation entre l'erreur $(C\vec{s} - \vec{\phi})$ et la mesure \vec{s} . En conséquence, l'analyse de l'erreur ne peut rien apprendre de plus que la mesure ne nous ait déjà appris. Cette erreur n'en contient plus aucune information, parce que toute l'information a été utilisée: cela prouve bien l'optimalité de C .

Les performances de cette matrice sont dignes d'être soulignées. Capable de reconstruire la coma d'après une simple mesure de tilt sur la pupille, ou capable de reconstruire le piston avec un Shack-Hartmann, le calcul de C et l'étude de ses caractéristiques offrent un champ d'investigations qui permet de comprendre comment effectuer une bonne optimisation. En effet, bien que possédant a priori des aptitudes exceptionnelles, la matrice C construite ainsi ne "fonctionne" pas en boucle fermée où priment les aspects temporels. Bien sûr il est possible d'introduire cet aspect dans C en prenant pour vecteur de mesure \vec{s} non plus seulement les mesures à l'instant présent mais aussi la série de mesures antérieures. Mais le problème ne peut plus être traité en temps réel étant donné la taille des matrices mises en jeu. De plus, il est nécessaire de prendre en compte, pour qu'une telle analyse soit rentable, un grand nombre de mesures antérieures représentant une mémoire du passé supérieure au temps de corrélation de la turbulence. En effet, la force de la matrice C est de puiser l'information dans les moindres corrélations qui existent entre chaque coefficients. Si on ne prend en compte, en plus de la trame présente, qu'une seule trame antérieure, les corrélations sont pratiquement toutes égales à l'unité. La seule source de décorrélation est le bruit de mesure. Dans ces conditions, le conseil que promulgue C –à travers l'analyse de ses coefficients que j'ai pu en faire– est de moyenner les deux trames ! On aurait pu intuitiver la chose à moindre frais.

2.7.2 Exemples, cas particuliers

Je veux maintenant montrer les étonnantes propriétés de C . Après quelques brèves remarques, j'appliquerai le résultat trouvé à un senseur de front d'onde 4 quadrants, puis à un Hartmann. Je discute avant tout les propriétés mises en évidence.

L'équation (2.44) montre qu'il y a indépendance entre le nombre de variables à reconstruire dans $\vec{\phi}$ et le nombre de mesures. Il n'y a jamais de problème d'inversion. Il pourrait être légitime de vouloir reconstruire 300 polynômes de Zernike avec un

³Puisque toutes les valeurs propres se trouvent augmentées de la valeur de la variance du bruit

Shack-Hartmann à 2×2 sous-pupilles. Ce miracle n'est que tout à fait relatif, puisqu'il est clair que les corrélations entre le 300^{ième} Zernike et les mesures du Hartmann seront infiniment petites, d'où des bordées de zéros dans la matrice C . Ainsi, cette matrice ne reconstruit uniquement que la partie de la phase que le senseur est capable d'apprécier correctement. Donc, en se plaçant pour $\vec{\phi}$ dans le plus grand espace possible, C donne aussi la réponse à la question "quel est le meilleur sous-espace de modes que peut apprécier le senseur ?", ou bien "combien de polynômes de Zernike est capable de reconstruire un Hartmann 7×7 , et lesquels?". Le prix à payer pour obtenir ces réponses est, malgré une expression (2.44) simple, une masse assez imposante de calculs.

Compensation optimale de la phase avec un 4 quadrants

Afin de profiter au maximum des possibilités de C , donnons-nous pour espace de mesure l'espace le plus petit qui soit, à savoir une mesure du centroïde de l'image sur la pupille (4 quadrants). En revanche donnons-nous pour $\vec{\phi}$ le plus grand espace possible, à savoir tous les polynômes de Zernike qui ont une influence sur le déplacement du centre de gravité de l'image, propriété que le tilt n'est pas seul à posséder. En effet tous les polynômes en $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$ déplacent le centre de gravité de l'image. Considérons les polynômes en $Z_n(r, \theta) = P_n(r) \cos(\theta)$ et la pente en x . La matrice $\langle \vec{s}^t \cdot \vec{s} \rangle^{-1}$ est réduite à une constante: l'inverse de la variance des fluctuations d'angle d'arrivée. La relation entre le coefficient d'un polynôme et le déplacement du centre de gravité est $\alpha = \frac{\sqrt{2(n+1)\lambda}}{\pi D} a_n$ et la variance des a_n est donnée par Noll (1976) dans le cas d'une turbulence Kolmogorov. Le calcul de C est donc immédiat.

Regardons le produit matriciel $\phi = C\vec{s}$ de plus près. La matrice C ne contient qu'une colonne, dont chaque coefficient est multiplié par la valeur de la mesure, puis appliqué sur chacun des polynômes correspondants. En somme le vecteur colonne décrit par C est un mode particulier et le front d'onde résultat n'est que le produit de la mesure par ce mode, qui est le mode de correction optimal de la phase pour la correction avec un détecteur quatre quadrants. Ce mode ressemble à un tilt très légèrement "ondulé".

Compensation optimale de la phase avec un Shack-Hartmann

On se donne comme point de départ le senseur, un Shack-Hartmann. Pour simplifier l'approche, prenons pour espace des fronts d'onde l'espace entier des fonctions continues sur la pupille avec comme base non pas les polynômes de Zernike mais simplement la donnée de la valeur de la phase en tout point de la pupille. Cette approche est mathématiquement incorrecte, mais on peut imaginer que grâce à l'échelle interne de la turbulence le spectre spatial des fluctuations est borné, ce qui permet de définir un pas d'échantillonnage à partir duquel on échantillonne correctement

le front d'onde perturbé sans perte d'information. Ainsi on décrit la phase par la donnée d'un nombre suffisant de points sur la pupille.

Le calcul conduit à une matrice C contenant autant de colonnes que l'analyseur fournit de mesures. Chacune de ces colonnes représente un mode, la i^{ieme} contenant $\phi_i(x, y)$. Et la signification physique du produit matriciel $\phi = C\vec{s}$ est la suivante

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n s_i \phi_i(x, y) \quad (2.45)$$

c'est-à-dire que les mesures servent directement de coefficients de pondération aux fonctions $\phi_i(x, y)$ pour aboutir au front d'onde optimal. Idéalement, si l'on possédait un miroir dont les déformées des actuateurs fussent les $\phi_i(x, y)$, il suffirait de "câbler" directement chaque actuateur sur les mesures correspondantes du Hartmann, "fil à fil", le contrôle étant dans ce cas diagonal.

Il semble que l'on ait fait un pas en arrière puisque la démonstration précédente tend à première vue à prouver que le meilleur contrôle est à caractère zonal ! Il n'en est rien et l'on se doit de noter deux choses. D'une part la famille des fonctions $\phi_i(x, y)$ dépend totalement de la turbulence, du bruit, de l'angle anisoplanétique et des (éventuels) effets temporels et dans chaque mode est inclus un coefficient de gain qui n'a rien d'arbitraire. D'autre part la démarche ne tient que pour un système en boucle ouverte. Néanmoins, le sous-espace ainsi généré correspond bien à la base optimale de reconstruction pour l'analyseur choisi.

A quoi ressemblent les fonctions $\phi_i(x, y)$? Le calcul montre que ce sont des fonctions très continues, très "lisses", strictement monotones, assez similaires les unes aux autres, ressemblant à des tilts. Chaque $\phi_i(x, y)$, bien que défini sur la pupille entière, est associé à une sous-pupille particulière. Sur la sous-pupille en question $\phi_i(x, y)$ est très proche d'un tilt, légèrement "ondulé" et courbé. Cette courbure se prononce plus nettement en allant hors de la sous-pupille et se transforme asymptotiquement en $r^{5/6}$ sur la pupille. Il est intéressant de noter que $\phi_i(x, y)$ ne tend pas vers zéro lorsque l'on s'éloigne du centre de la sous-pupille à laquelle il est associé, quelle que soit la taille de la pupille, et qu'il peut au contraire prendre des valeurs élevées. De ce fait il est demandé une grande précision dans le calcul de ces fonctions puisque leur combinaison linéaire lors d'une reconstruction de front d'onde fait intervenir un subtil jeu de soustraction et d'annihilation mutuelles de ces grandes valeurs pour ne jouer principalement que sur les faibles amplitudes des plus hautes fréquences spatiales.

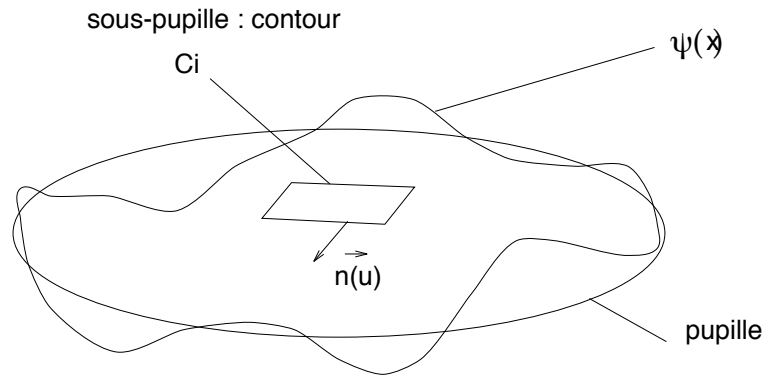
Un fait marquant est la valeur moyenne non nulle de ces fonctions sur la pupille. Chacune de ces fonctions contient du piston et par voie de conséquence le front d'onde reconstruit en contient également. Si ce piston n'était pas nécessaire, il ne serait pas là. En effet, le fait même de supposer une turbulence de type Kolmogorov implique une corrélation non nulle entre le piston et tout autre mode de symétrie de révolution, quelle que soit la valeur de l'échelle externe. Ainsi, la matrice optimisée

utilise l'information contenue dans les modes centro-symétriques que le senseur sait bien détecter (défocalisation en particulier) pour estimer le mode piston qui reste parfaitement invisible. Bien entendu, seule une fraction infime du piston est corrigée; mais du fait de son importance initiale la quantité absolue corrigée est comparable à celle des autres premiers modes. Etant un mode gênant en optique adaptative, il convient de supprimer ce mode piston d'autant plus qu'il risque de faire apparaître des problèmes numériques dans les calculs. Pour le supprimer, le front d'onde qu'il convient d'estimer n'est pas le front d'onde perturbé, mais le front d'onde perturbé *centré* sur la pupille. Cette opération pourtant simple modifie radicalement les propriétés statistiques de la phase sur la pupille et l'écriture de C s'en trouve modifiée. Les paragraphes suivants sont destinés aux détails des calculs dans différents cas de figure.

2.7.3 Calcul de C dans le cas général

On se propose ici de déterminer l'estimateur optimal C dans le cas où l'on a un Hartmann comme analyseur, et où l'on veut déterminer la phase sur une base la plus générale possible, sans piston.

Il convient de bien préciser les notations choisies et les grandeurs qu'elles représentent. La phase $\psi(x)$ représente la phase à valeur moyenne nulle sur la pupille. Les variables x et u sont bidimensionnelles. Les intégrales sur C_i sont des intégrales curvilignes sur le contour C_i qui est le pourtour de la $i^{\text{ème}}$ sous-pupille. La fonction $n(u)$ est une des composantes du vecteur $\vec{n}(u)$: ce dernier est le vecteur normal au contour C_i au point u . Le vecteur $\vec{\psi}$ est un vecteur dont les composantes sont les valeurs $\psi(x)$ sur la pupille.



On a

$$C = \langle \vec{\psi} \vec{s}^t \rangle \cdot \langle \vec{s} \vec{s}^t \rangle^{-1} \quad (2.46)$$

Le calcul de la matrice de covariance des mesures $\langle \vec{s} \vec{s}^t \rangle$ est décrit en annexe dans l'article présenté à l'intérieur de la section 2.3. Le point particulier est ici le calcul de $\langle \vec{\psi} \vec{s}^t \rangle$ que nous allons développer. Les composantes de \vec{s} sont les pentes données par chaque sous-pupille, chacune se calculant par l'intégrale curviligne de la phase

sur le contour de la sous-pupille (voir Eq. (1.47)). Un coefficient particulier de cette matrice $\langle \vec{\psi} \vec{s}^t \rangle$ s'écrit

$$S_i(x) = \langle \psi(x).s_i \rangle = \int_{C_i} \langle \psi(x).\psi(u) \rangle .n(u).du \quad (2.47)$$

Notons que l'on a

$$\int_{pupille} \langle \psi(x)\psi(u) \rangle dx = \langle \psi(u) \int_{pupille} \psi(x) dx \rangle = 0 \quad (2.48)$$

donc en conséquence la moyenne de $S_i(x)$ sera nulle sur la pupille, à savoir $\int_{pup} S_i(x) dx = 0$. Cette propriété nous sera utile.

Développons l'équation 2.47 grâce aux équations 1.62 et 1.63. On obtient

$$\begin{aligned} S_i(x) &= -\frac{1}{2} \int_{C_i} D_\phi(x, u).n(u).du + \frac{1}{2} \int_{C_i} F(u).n(u).du \\ &\quad + \frac{1}{2} F(x). \int_{C_i} n(u).du - \frac{1}{2} \int_{pupille} F(v)dv \int_{C_i} n(u).du \end{aligned} \quad (2.49)$$

Il faut noter que l'intégrale curviligne d'une fonction constante sur un contour fermé est nulle. L'équation précédente se simplifie alors en

$$\begin{aligned} S_i(x) &= -\frac{1}{2} \int_{C_i} D_\phi(x, u).n(u).du + \frac{1}{2} \int_{C_i} F(u).n(u).du \\ &= -\frac{1}{2} \int_{C_i} D_\phi(x, u).n(u).du + \text{conste} \end{aligned} \quad (2.50)$$

La fonction $F(u)$ (voir équation 1.62) est difficile à calculer. Fort heureusement ce n'est pas utile car, $S_i(x)$ est de moyenne nulle: on peut donc déterminer la constante de l'équation 2.50 simplement en centrant S_i , c'est le meilleur moyen de s'assurer de l'absence de piston. De plus, on peut remarquer d'après l'équation 2.50 que la valeur de $S_i(x)$ est égale à la valeur du déplacement du centre de gravité dans la i^{eme} sous-pupille quand la phase sur la sous-pupille en question est égale à $\phi(u) = -\frac{1}{2}D_\phi(x - u)$. La matrice optimale n'est donc rien d'autre que la transposée de la matrice d'interaction entre notre analyseur et le miroir dont les déformées des actuateurs auraient la forme de la fonction de structure de phase. S'il fallait choisir un miroir déformable qui s'ajuste parfaitement à notre analyseur, ce sont donc les fonctions $S_i(x)$ qu'il faudrait choisir.

Ce calcul permet donc d'obtenir les modes de correction optimaux pour un Shack-Hartmann donné, face à une turbulence Kolmogorov, sans pour cela déployer une masse considérable de calculs: chacun a déjà dans ses bibliothèques de simulation un programme de calcul de matrice d'interaction.

Je n'ai pas détaillé ici les calculs, mais l'expression de la matrice optimale de reconstruction peut également être calculée sur n'importe quelle base de modes, en particulier les polynômes de Zernike ou les actuateurs du miroir.

Chapitre 3

Résultats expérimentaux

L'objet de ce chapitre est de parcourir les données issues de l'instrument d'optique adaptative COMEONPLUS , pour y étudier sur le terrain la structure de la turbulence, et présenter l'action de l'optimisation du contrôle modal. Je parlerai rarement des données acquises par la caméra d'imagerie, puisque je m'intéresse plus spécialement au front d'onde. Donc lorsque je parle de données, il s'agit implicitement des données du calculateur de front d'onde.

Dans un premier temps je présenterai très succinctement ces données: leur appellation, leur format. Puis je décrirai, en prenant l'exemple d'un dépouillement complet d'une file circulaire, ce qu'il est possible de tirer des données, de quelle manière, et comment l'interpréter.

Je parlerai aussi d'un point qui me tient à cœur, le lecteur l'aura compris à travers la lecture des chapitres précédents, il s'agit du bruit de mesure. Cette section expose les résultats expérimentaux marquants.

Puis j'exposerai les résultats expérimentaux concernant l'optimisation du contrôle modal à travers l'article A & A , et j'y ajouterai quelques compléments sur quelques propriétés qualitatives de la phase corrigée, et sur les performances de l'optique adaptative. Je montrerai des profils d'images corrigés pour différents cas de flux lumineux, proches de la magnitude limite.

La section suivante sera l'objet d'une parenthèse qui n'est pas en rapport direct avec le contrôle modal, mais dont les applications potentielles sont intéressantes: il s'agit de l'hypothèse de Taylor. Je montrerai sa mise en évidence à travers un article présenté à *Experimental Astronomy*, et discuterai son domaine de validité.

Enfin je conclurai par une discussion sur l'optimisation. Non pas l'optimisation du contrôle modal, mais l'optimisation de quelques-uns des nombreux paramètres dont dépend la qualité d'un système d'optique adaptative.

3.1 Files circulaires

File circulaire: les raisons d'une telle dénomination sont historiques. En effet, la file circulaire est le point de départ de toute analyse de front d'onde dans COMEONPLUS . Elle trouve l'origine de son nom dans les premiers temps du système. Seule une habitude tenace de l'équipe à appeler ainsi ces fichiers de données est la cause de la perpétuation maladroite de cette appellation. La file circulaire est un fichier contenant les données brutes issues du calculateur de front d'onde. Le qualificatif "circulaire" provient du fait que les données sont enregistrées en mémoire de manière à ce que les plus récentes viennent constamment écraser les plus anciennes. Ces données sont issues du calculateur codées en entiers et sont stockées de même dans la file circulaire. Une constante de codage permet la conversion de ces entiers en un nombre de pixels.

La file est constituée d'une liste de paires de blocs de données. Le premier bloc contient les abscisses des centroïdes pour toutes les sous-pupilles, le second les ordonnées. La paire définit donc l'état de l'analyseur pour une trame donnée. La file circulaire n'est qu'une succession d'enregistrements de ce type, courant sur un certain nombre de trames. Tous les enregistrements sont contigus dans le temps.

3.2 Interpréter les données du Hartmann

Entre l'analyse théorique de la phase telle que décrite dans les articles de Noll ou Roddier et l'analyse du front d'onde perturbé vu à travers l'analyseur de COMEONPLUS , existe un monde. A partir d'un échantillonnage limité, autant spatialement que temporellement, le Shack-Hartmann ne décrit qu'une petite partie de la turbulente réalité. A l'observateur d'extrapoler le reste à partir du support offert par l'expérimentation, et avec les outils de la théorie. Le déséquilibre entre l'étroitesse du premier et l'abondance du second conduit parfois à de fausses conclusions.

L'origine de la préoccupation de l'interprétation des données du Hartmann tient beaucoup aux travaux initiaux réalisés à l'Onera, autant pour les applications liées à la déconvolution (Fontanella 1985, Thèse Primot, Primot et al. 1990) que pour la caractérisation des propriétés spatiales et temporelles de la phase (Madec et al. 1992) ou que pour la caractérisation de la correction après une optique adaptative (Rigaut et al. 1991).

Je voudrais montrer ici le soin qu'il faut apporter aux dépouillements des files circulaires. Pour cela je me servirai de plusieurs exemples de files.

3.2.1 Analyse de la turbulence

J'analyse dans cette section une file circulaire qui va servir de support pour la démonstration des outils d'analyse de la turbulence.

Le fichier f07020233.dp a été enregistré dans la nuit du 1er au 2 juillet 1993 à 2h33 TU, comme l'indique le nom qui lui a automatiquement été attribué par le calculateur. L'objet était PKS 1448 d'après les commentaires faits dans le cahier de suivi des files circulaires.

J'aurai l'occasion de mentionner l'importance du contexte dans le dépouillement des files circulaires dans la section 3.8.3; je commence cependant d'ores et déjà à soulever le problème. Ici le contexte est inconnu. Le cahier de la caméra infra-rouge ne contient aucune information supplémentaire. Les seuls indices sont l'analyseur utilisé qui est l'EBCCD, avec une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. L'objet de référence est une étoile inconnue, proche de PKS 1448 et de magnitude estimée à 11. Le commentaire tapé par l'expérimentateur dans l'en-tête de fichier lors de l'enregistrement de la file circulaire est "non asservi". On se trouve donc ici en présence d'un cas typique où il manque à ces données une foule de choses et de commentaires. C'est certainement ce genre de situation qui sera motivante pour doter ADONIS d'un système automatique et autonome d'archivage des opérations effectuées, ainsi que d'une trace continue des différentes variables du système.

Le bruit Examinons la qualité de la file, du point de vue du bruit. La détermination du bruit est faite pour chaque sous-pupille. L'algorithme de calcul est exposé dans l'article A & A de la section 3.4. Je le rappelle brièvement: les fluctuations du centroïde imputables à la turbulence et celles dues au bruit sont indépendantes et non corrélées, ce qui autorise à dire que l'autocorrélation temporelle de la somme est la somme des autocorrélations temporelles des deux phénomènes. L'autocorrélation temporelle du bruit étant un dirac, il est alors facile de séparer les deux puisque l'autocorrélation de la partie turbulente est une fonction continue à l'origine.

Le bruit moyen sur les sous-pupilles est de 0.050 pixels². Il est distribué comme suit sur le Hartmann (l'unité est le pixel², chaque couple de valeurs représente le bruit sur les pentes en x et en y):

		0.05235 0.03999	0.04746 0.02341	0.03906 0.03624		
	0.03920 0.02677	0.03166 0.01673	0.04965 0.02583	0.03961 0.02180	0.03161 0.02171	
0.07170 0.04397	0.02495 0.01545	0.05858 0.05579		0.16545 0.17657	0.02010 0.01644	0.05388 0.03829
0.06141 0.04199	0.03050 0.02466				0.03492 0.04813	0.04299 0.03561
0.06282 0.04557	0.03647 0.03168	0.06650 0.12758		0.15893 0.40864	0.02035 0.02489	0.06050 0.03577
	0.02865 0.04408	0.02453 0.03840	0.03437 0.04501	0.02022 0.02843	0.02137 0.02429	
		0.05341 0.04347	0.04788 0.03428	0.03677 0.01621		

On peut noter que les sous-pupilles centrales sont beaucoup plus bruitées que les autres. On remarque aussi parmi celles-ci que la sous-pupille centrale en bas à droite a un bruit sur la composante en y presque 3 fois plus important que sur la composante en x . Afin de s'assurer de la validité des résultats, on peut vouloir regarder de plus près les autocorrélations temporelles du signal dans ces sous-pupilles. Les autocorrélations de l'enregistrement des pentes numéro 14 et 44 sont présentées sur la figure 3.1. J'ai choisi l'exemple de ces deux pentes en particulier parce qu'elles sont entachées de bruits tellement différents (respectivement 0.0218 et 0.408 pixel², soit presque un rapport 20) qu'il est naturel de mettre en doute un tel fait. Je l'étudie donc de plus près. Nous constatons que l'on se trouve ici dans un cas où le bruit est très faible et où les conditions de turbulence sont rapides (nous allons le découvrir un peu plus loin): la façon d'approximer l'autocorrélation en 0 compte donc beaucoup dans la détermination du bruit. Une autre moyen de mesurer ce bruit est de l'estimer sur la partie haute fréquence du spectre temporel des fluctuations. Les figures 3.2 et 3.3 montrent les spectres associés avec, en pointillés, les niveaux de bruit déduits grâce à la méthode de l'autocorrélation. Ces derniers sont en parfait accord avec le niveau du bruit moyen du spectre pour la sous-pupille 44: 0.408 pixels² contre 0.42 pixels² d'après le spectre. Pour la pente 14, sur laquelle le bruit est faible, on trouve une énergie de 0.040 pixel² d'après la moyenne du spectre entre 25 et 50 Hz. Il faut soustraire à ce nombre l'énergie du spectre turbulent lui-même entre 25 et 50 Hz; je l'ai estimée à 0.007 pixel² d'après une approximation du spectre turbulent. Il reste donc 0.033 pixel² pour le bruit. La valeur trouvée grâce à l'autocorrélation était, je le rappelle, de 0.022 pixel².

Quelques remarques s'imposent:

- La limite de précision de la méthode de détermination du bruit est certes pratiquement atteinte dans ce cas. Les raisons sont la faiblesse du bruit et la rapidité de la turbulence. Pour les bruits très faibles, l'erreur relative sur la détermination *individuelle* du bruit par sous-pupille peut être non négligeable.
- Si l'erreur relative peut parfois être élevée, l'erreur absolue sur le bruit est

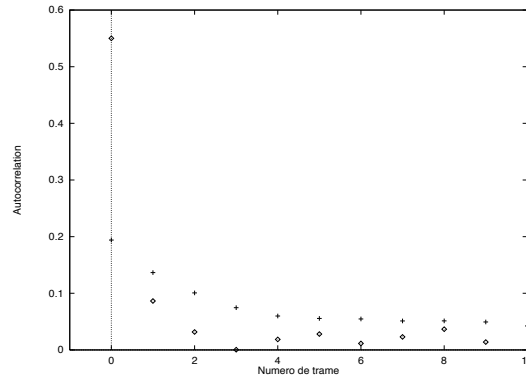


Figure 3.1: Autocorrélation de l'enregistrement temporel des pentes en y de deux sous-pupilles (14 et 44). Les enregistrements sont simultanés. On note le bruit singulièrement plus fort sur l'une des autocorrélations: elle correspond à la sous-pupille partiellement obturée placée au centre de l'analyseur.

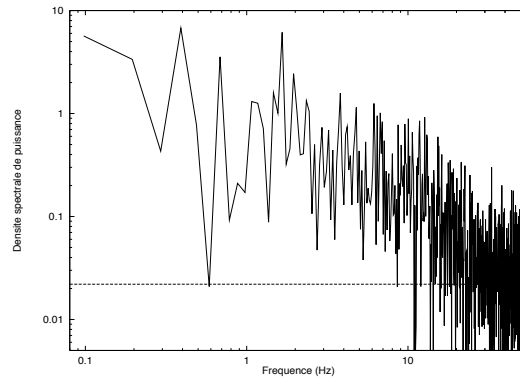


Figure 3.2: Densité spectrale de puissance de l'enregistrement de la pente en y de la sous-pupille 14. Le trait horizontal figure le niveau de bruit moyen trouvé par la méthode de l'extrapolation de l'autocorrélation à l'origine.

par contre très faible, et ne nuit donc pas à l'optimisation modale sachant que de toute façon les bandes passantes obtenues seront voisines de la valeur maximale.

- De plus, même si une erreur existe les résultats ne sont pas incohérents: les sens de variations des différents bruits sont parfaitement conservés et le niveau de bruit énorme de la pente 44 n'est pas un fantôme, il est bel et bien réel. Il en est de même pour les sous-pupilles centrales: leur niveau de bruit plus élevé n'est ni un artefact ni un hasard.

Etude du r_0 Passons à l'étude des conditions de seeing. Pour cela, il est primordial de connaître la sensibilité de l'analyseur, de manière à pouvoir exprimer en secondes

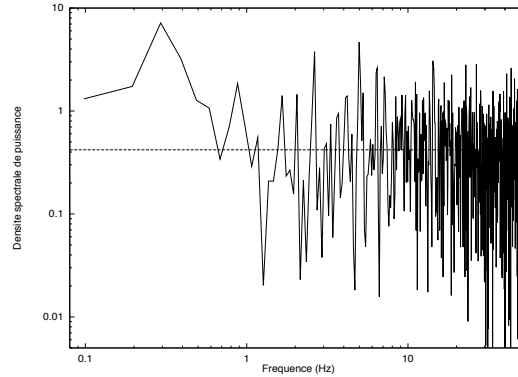


Figure 3.3: Densité spectrale de puissance de l'enregistrement de la pente en y de la sous-pupille 44. Le niveau de bruit est nettement supérieur à celui de la pente 14.

d'arc sur le ciel les déplacements du centroïde, à la base obtenu en pixels. J'insiste sur le point qui suit: en raison des différents changements optiques survenus sur l'analyseur, cette sensibilité (qui est directement liée au tirage¹ des microlentilles) n'a pas été consignée, en quelque endroit que ce soit. Ce tirage a-t-il sensiblement pu varier ? Oui, puisque l'ouverture des microlentilles ($f/48$ environ) interdit toute focalisation précise. Cet incident n'aura plus de raison de se reproduire, grâce à la présence de la tâche d'auto-calibration de l'analyseur qu'ADONIS est capable d'effectuer après tout changement optique. J'ai tenu à ce que ce paramètre soit indissociable des données (voir paragraphe 3.8.3). Heureusement, on peut avoir recours à un stratagème qui consiste à explorer la matrice d'interaction du miroir tip-tilt pour en déduire cette focale, connaissant la sensibilité du miroir tilt² lui-même. On trouve finalement une sensibilité de 0.79 ± 0.04 arcsec.pixel⁻¹ ce qui suppose une focale de 34 ± 2 mm. Les valeurs de r_0 ainsi déterminées sont 9.2 cm et 10.5 cm respectivement en x et en y , si l'on se fie à la variance moyenne des fluctuations d'angle d'arrivée (Eq. (1.9)) des spots (corrigée du bruit). Cette mesure est entachée des erreurs de poursuite dues au télescope. Elle est aussi affectée par la grande échelle de la turbulence. En utilisant une formule qui tient compte de l'échelle externe L_0 (Eq. (1.10)), on résout partiellement ces problèmes. On trouve alors

	L_0 (m)	r_0 (cm)(± 0.6 cm)
axe x (α)	138	7.9
axe y (δ)	28	7.8

Les valeurs du r_0 s'harmonisent tandis que l'échelle externe prend des valeurs très différentes suivant les axes. Cela prouve que le responsable de l'écart entre les valeurs en x et en y du r_0 initialement calculé est le tilt, et seulement lui. Dans le calcul qui

¹Distance entre le plan des microlentilles et le plan du détecteur

²Les mesures faites en Octobre 93 donnent, à 20° C, 39.12 ± 0.04 mV/Arcsec sur l'axe x et 38.39 ± 0.04 mV/Arcsec pour l'axe y .

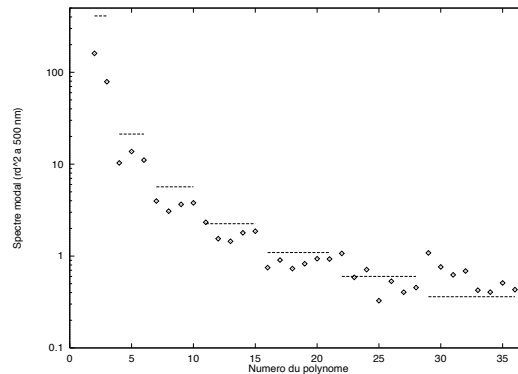


Figure 3.4: Spectre modal sur la base des polynômes de Zernike 2 à 36. La variance totale de phase est de 312 rd^2 pour les 35 premiers polynômes, dont 239 rd^2 pour le tip-tilt (77%). Les polynômes d’ordre plus élevé représentent 7.6 rd^2 . Les traits horizontaux représentent la loi de décroissance de la puissance des polynômes de Zernike pour une échelle externe infinie, et un r_0 de 6.2 cm. Une échelle externe d’une trentaine de mètres explique assez bien l’écart observé.

tient compte de l’échelle externe, le paramètre L_0 a “absorbé” les effets dus au tilt. Remarque amusante: la valeur de L_0 ne dépend pas de la sensibilité de l’analyseur. Maintenant, affirmer que les valeurs de L_0 ainsi déterminées correspondent à une échelle externe telle que définie dans la littérature est un pari quelque peu osé. On doit plutôt voir dans ce terme un paramètre qui absorbe tout ce qui peut venir influencer le mouvement d’image, et qui corrige –plus ou moins mal– ces effets. La correction apportée ainsi que la valeur de L_0 trouvée seraient valables si la turbulence était de type Kolmogorov.

La mise en évidence du caractère Kolmogorov peut se faire par exemple en calculant la fonction de structure de phase (pour laquelle il existe de multiples méthodes de calcul), ou bien en reconstruisant la phase sur les polynômes de Zernike et en comparant le spectre modal à celui attendu d’après la théorie. On sait déjà, avec le calcul du r_0 , qu’il faut s’attendre à un écart du tilt par rapport à la théorie. On peut suspecter une grande échelle d’une trentaine de mètres, la valeur $L_0 = 138 \text{ m}$ pouvant être imputée à la mauvaise poursuite du télescope. La figure 3.4 montre le spectre modal obtenu, sur la base des polynômes de Zernike. D’après Winker (Winker 1991), pour une échelle externe $L_0 \approx 30 \text{ m}$, on devrait avoir une atténuation d’un facteur ≈ 4.5 sur les tilts ($Z_{1,m}$), ≈ 2 sur la défocalisation et les astigmatismes ($Z_{2,m}$), ≈ 1.3 sur les $Z_{3,m}$, ≈ 1.15 sur les $Z_{4,m}$.

Une échelle externe d’une trentaine de mètres explique assez bien l’écart observé entre les données expérimentales et le spectre modal théorique de Noll sans échelle externe. On peut maintenant se convaincre que la grande échelle trouvée n’est pas simplement due à l’effet du guidage automatique du télescope (qui atténue le tilt), puisque l’atténuation porte également sur les modes d’ordres supérieurs. Elle

s'accorde assez bien avec le modèle de Winker (Winker 1991) pour les $Z_{1,m}$ à $Z_{4,m}$. Concernant les $Z_{n \geq 5,m}$ on note qu'il y a un excès de hautes fréquences spatiales. La cause est la matrice de reconstruction sur 35 polynômes de Zernike, qui reconstruit bien les 22 premiers, mais commet des erreurs de repliement conséquentes sur les polynômes 23 à 35. Un instrument implanté sur le site de La Silla détient les capacités d'aller explorer la turbulence sur une échelle spatiale plus courte: le moniteur de seeing (Sarazin & Roddier 1990). Avec deux sous-pupilles de 4 cm espacées de 20 cm, il mesure le r_0 correspondant à des échelles spatiales d'une moitié de "nos" sous-pupilles. Malheureusement ce soir-là les données ne furent pas sauvées. Que ceux qui pourraient voir ici l'origine de la sauvegarde automatique des données du moniteur de seeing ainsi que des données météorologiques dans ADONIS sachent qu'ils n'ont pas forcément tort.

Propriétés temporelles Intéressons-nous maintenant aux propriétés temporelles de la phase.

J'appelle le temps de corrélation des pentes la demi largeur à mi-hauteur de la moyenne des autocorrélations temporelles des fluctuations d'angle d'arrivée de chaque sous-pupille. Les autocorrélations sont corrigées de la variance du bruit, de manière à ne conserver que l'autocorrélation de la partie turbulente. Cette grandeur ne dépend pas de la longueur d'onde. J'y ferai souvent référence par la suite dans tout ce chapitre.

On obtient des temps de corrélation de 60 ms pour l'axe x et 30 ms pour y . Ne retrouverait-on pas encore l'influence du tilt en x ? (dont l'origine reste toujours pour l'instant plus ou moins indéterminée). La demi largeur à mi-hauteur de l'autocorrélation temporelle du tilt est 250 ms en x et 140 ms en y ; les choses se confirment. En soustrayant le tilt à chaque trame de la file circulaire, on trouve des temps de corrélation de 30 ms, en x comme en y . Il est à noter que ces chiffres indiquent une turbulence exceptionnellement rapide³.

Passons dans l'espace de Fourier et regardons les spectres, en commençant par le spectre moyen des pentes (figure 3.5).

On remarque une différence notable entre les deux spectres (figure 3.5 et 3.6) dans le comportement à basse fréquence (au-dessous de 1 Hz). Les spectres sont identiques pour le domaine des fréquences supérieures à 1 Hz. L'excès de basses fréquences sur la pente moyenne en x est due à la poursuite du télescope. L'énergie supplémentaire contenue dans le spectre de la pente en x par rapport à la pente en y , entre 0 et 1 Hz, est de 0.032 arcsec^2 ce qui correspond à une fluctuation d'environ 0.7 arcsec crête à crête.

³Pour fixer l'ordre de grandeur, les conditions moyennes à La Silla sont de 130 à 180 ms. On a une turbulence lente à partir de 250 ms, et les cas les plus lents sont de l'ordre de 400 à 500 ms. À l'inverse, une turbulence rapide oscille entre 40 et 80 ms.

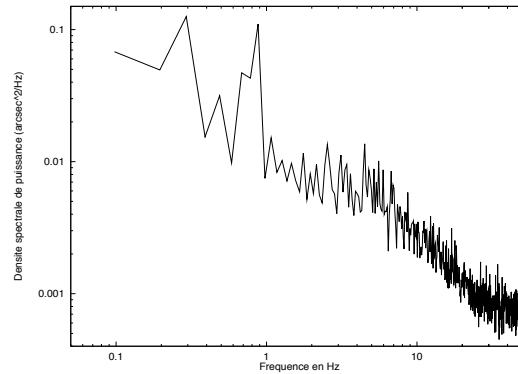


Figure 3.5: Densité spectrale de puissance moyenne des fluctuations d'angle d'arrivée selon la direction x . La fréquence de coupure est de l'ordre de 10 Hz. La pente haute fréquence s'approche assez bien par une fonction en $f^{-2.4}$. Concernant la pente à basse fréquence, il semble qu'il y ait deux régimes si on compare avec la pente en y . En effet, il y a un excès de basses fréquences visible en dessous de 1 Hz.

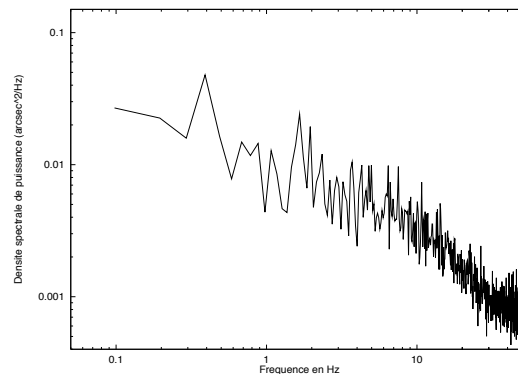
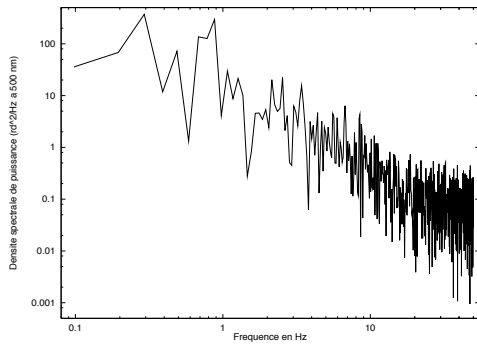
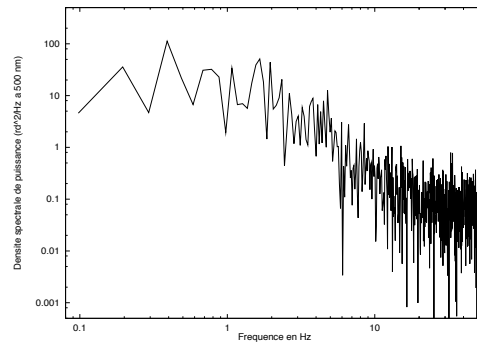


Figure 3.6: Densité spectrale de puissance moyenne des fluctuations d'angle d'arrivée selon la direction y . La fréquence de coupure est de l'ordre de 10 Hz. La pente haute fréquence s'approche assez bien par une fonction en $f^{-2.4}$. La pente à basse fréquence est approximativement en $f^{-0.5}$, c'est-à-dire que sa décroissance est inférieure au comportement en $f^{-2/3}$ attendu.


Figure 3.7: Tilt en x (Z_2 , $n=1$, $m=1$)

Figure 3.8: Tilt en y (Z_3 , $n=1$, $m=1$)

Le comportement du spectre à basse fréquence est proportionnel à $f^{-0.5}$ au lieu du $f^{-0.66}$ attendu: on retrouve là l'influence de l'échelle externe (précédemment déterminée $L_0 \approx 30$ m), qui peut être responsable de cet affaiblissement. La pente haute fréquence est en $f^{-2.4}$, et la fréquence de coupure estimée à environ 12 Hz.

Si l'on s'intéresse aux spectres des modes on voit apparaître des effets très particuliers. La section 1.1.7 rappelle quelques généralités à propos des propriétés temporelles de la phase, et on retrouve dans le cas traité ici un trait particulier du comportement prévu par la théorie: les pentes à basse fréquence sont "positives" pour certains modes, ce qui laisse à penser que l'on se trouve dans un cas de turbulence "monocouche". On devine sur les spectres des polynômes Z_{17} , Z_{14} , Z_{15} , Z_6 , Z_7 la fin de la partie croissante du spectre dans les basses fréquences. Néanmoins, clamer sans réserve que cet effet n'est autre que la juste traduction de la théorie enfin vérifiée sur un cas de turbulence monocouche serait pour le moins téméraire: en effet on observe sur la défocalisation (Z_4) ainsi que sur l'aberration sphérique (Z_{11}) ce même comportement, alors que la théorie ne le prévoit précisément pas pour ces modes ! La prudence est donc de mise, mais le phénomène s'explique tout de même facilement par la présence d'une échelle externe assez réduite, qui implique une atténuation des basses fréquences temporelles. Enfin, sur tous les spectres, on trouve trace d'une perturbation lente, se traduisant par une bosse à très basse fréquence en-dessous de 0.8 Hz, qui suggère une deuxième perturbation (ce pourrait par exemple être le résidu d'un régime convectif) qui s'ajoute à la perturbation principale.

La figure 3.23 représente la largeur de l'autocorrélation des coefficients de la décomposition modale sur les polynômes de Zernike en fonction du numéro du polynôme. On constate la décroissance rapide en fonction du degré du polynôme. Les derniers polynômes ont des temps de cohérence certainement inférieurs à la période d'échantillonnage, et la détermination est faussée par le repliement temporel.

Nombre de couches turbulentes Afin d'étudier le nombre de couches ayant participé à cette turbulence, on peut avoir recours au calcul de l'intercorrélacion spatio-temporelle des mesures (voir article présenté section 3.7.2). Le résultat est illustré sur la figure 3.24. Sans ambiguïté, on peut dire que la turbulence est générée

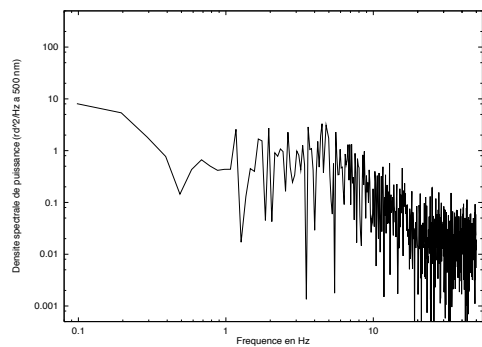


Figure 3.9: Défocalisation (Z_4 , $n=2$, $m=0$)

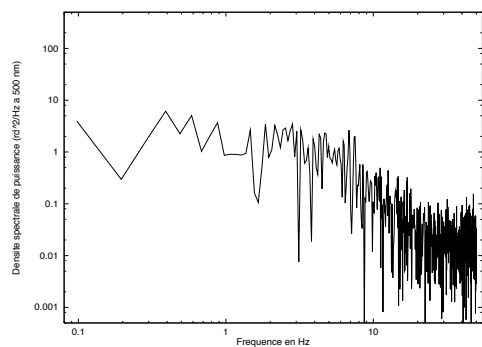


Figure 3.10: Astigmatisme \times (Z_5 , $n=2$, $m=2$)

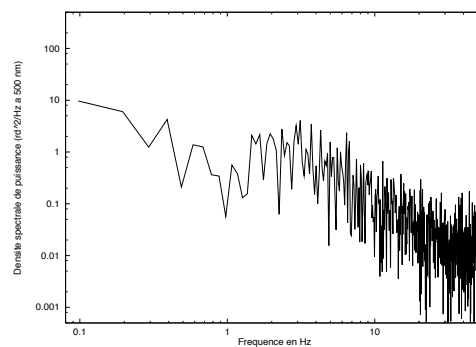


Figure 3.11: Astigmatisme $+$ (Z_6 , $n=2$, $m=2$)

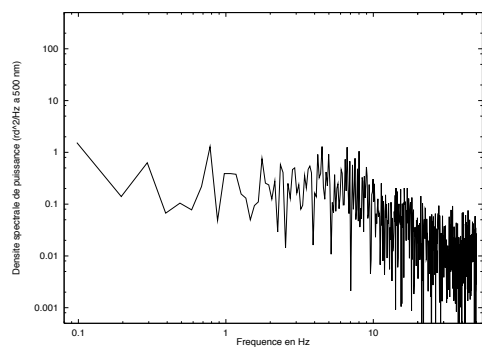


Figure 3.12: Coma en y (Z_7 , $n=3$, $m=1$)

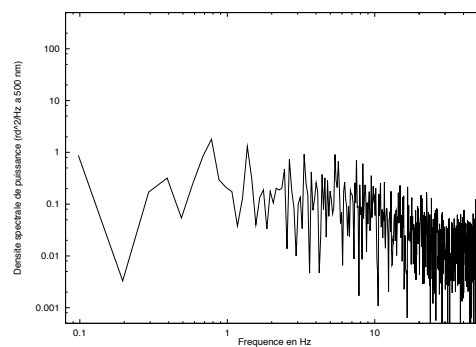


Figure 3.13: Coma en x (Z_8 , $n=3$, $m=1$)

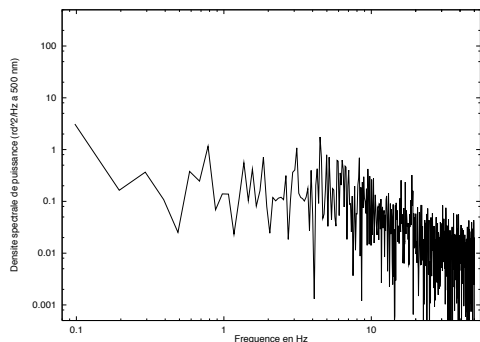


Figure 3.14: Trèfle (Z_9 , $n=3$, $m=3$)

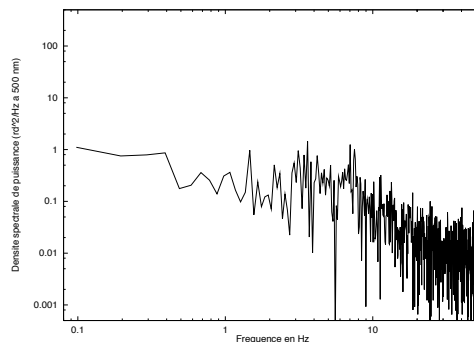


Figure 3.15: Trèfle (Z_{10} , $n=3$, $m=3$)

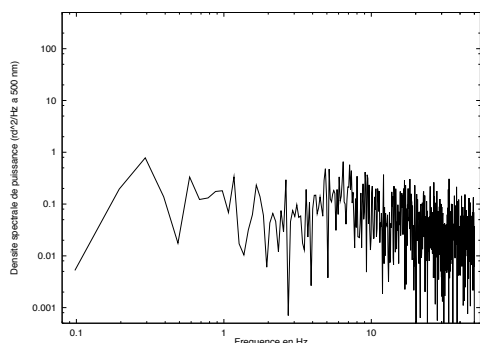


Figure 3.16: Aberration sphérique (Z_{11} , $n=4$, $m=0$)

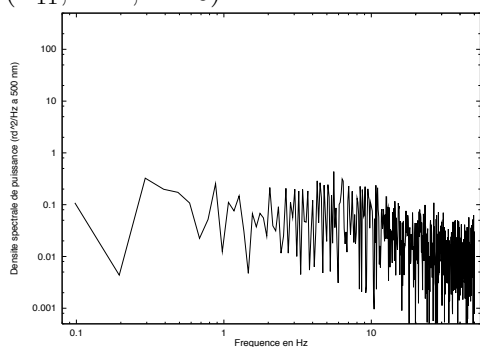


Figure 3.17: Z_{12} , ($n=4$, $m=2$)

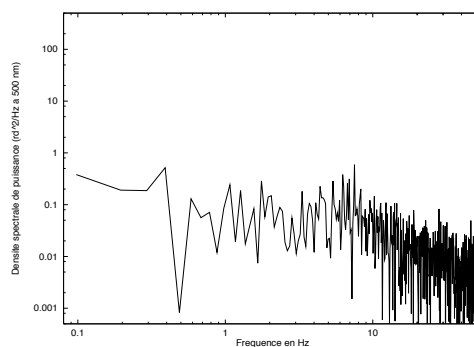


Figure 3.18: Z_{13} , ($n=4$, $m=2$)

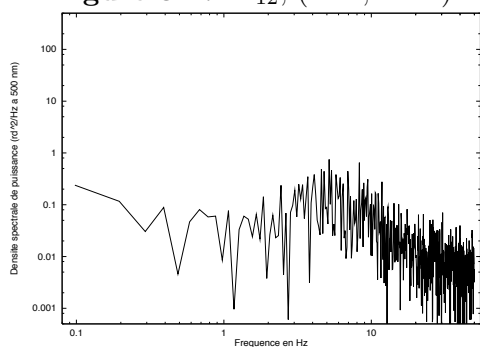


Figure 3.19: Z_{14} , ($n=4$, $m=4$)

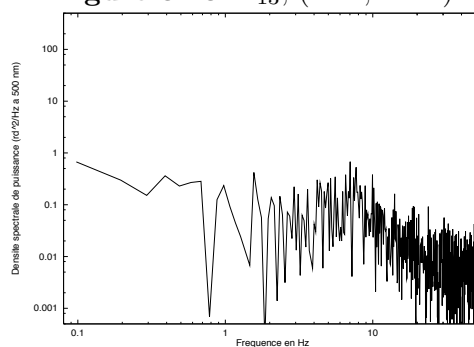


Figure 3.20: Z_{15} , ($n=4$, $m=4$)

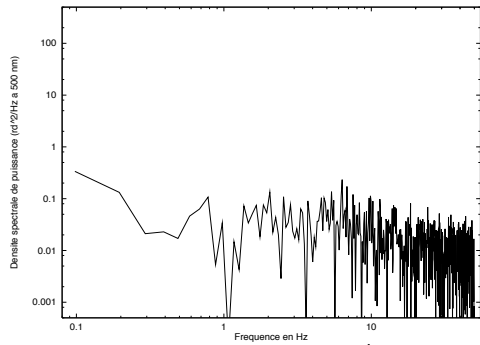


Figure 3.21: Coma en x 5^{ieme} ordre, (Z_{16} , $n=5$, $m=1$)

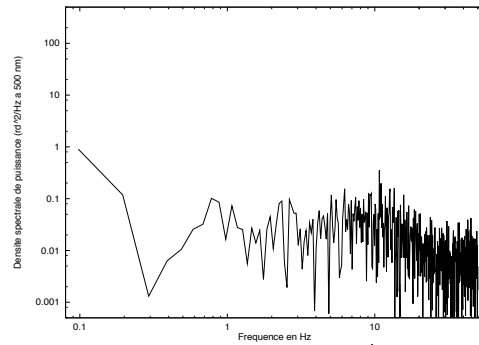


Figure 3.22: Coma en y 5^{ieme} ordre, (Z_{17} , $n=5$, $m=1$)

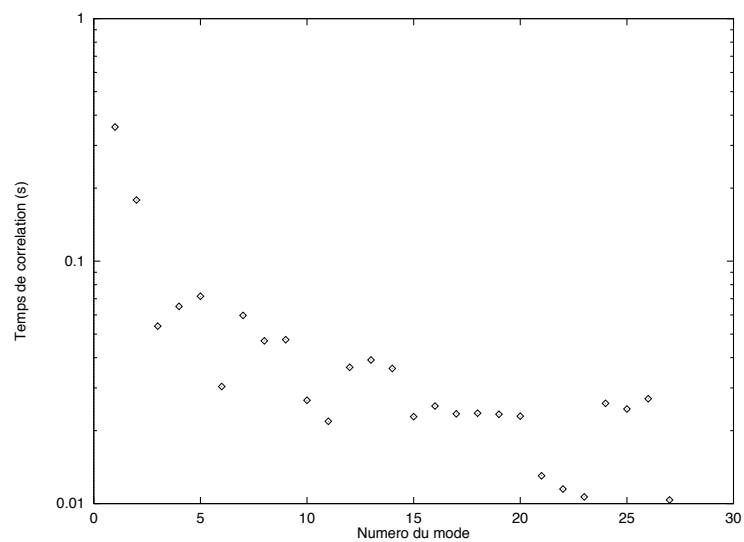


Figure 3.23: Temps de corrélation (largeur de l'autocorrélation du signal temporel) des coefficients de la décomposition modale sur les polynômes de Zernike.

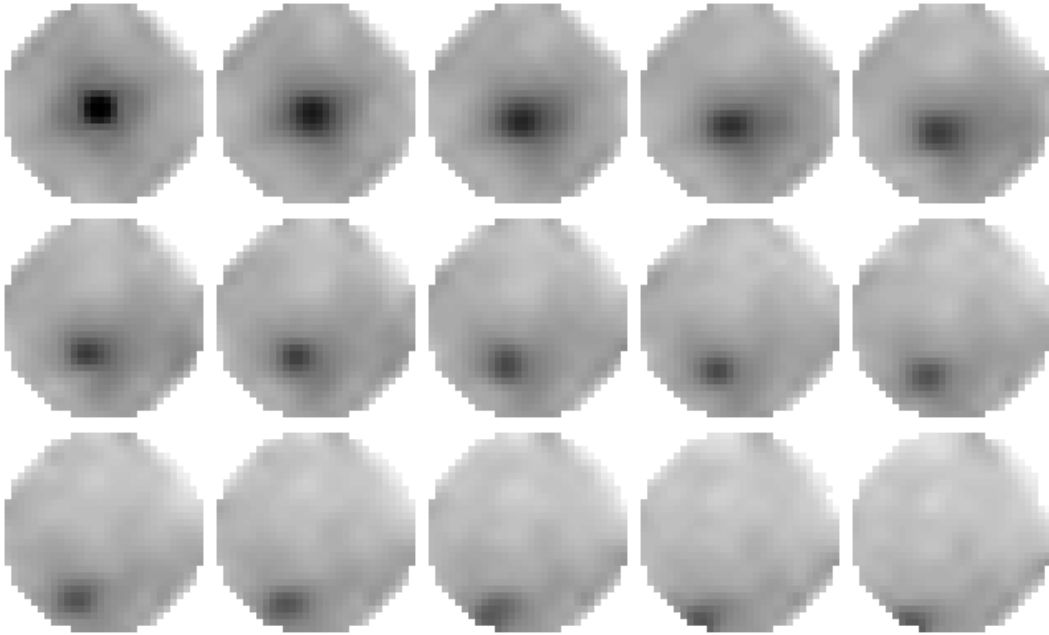


Figure 3.24: Intercorrélations moyennes des mesures, pour des intervalles de temps de 0 à 140 ms, par pas de 10 ms. On voit clairement un pic de corrélation se déplacer au cours du temps. La vitesse moyenne associée est de 13 m.s^{-1} ; l'angle est de 248° (dans le sens trigonométrique à partir de l'axe horizontal).

par une couche turbulente prédominante sur toutes les autres sources. Celle-ci se comporte un peu comme un écran de phase gelé (hypothèse de Taylor) se déplaçant à 13 m.s^{-1} . On comprend alors les temps de corrélation de 30 ms trouvés au début de cette étude.

Optimisation modale J'anticipe un peu sur l'article présenté dans la section 3.4, qui montre des exemples de détermination des gains optimaux dans différentes situations.

Observons donc maintenant le comportement de l'optimisation modale sur notre file circulaire. La figure 3.25 montre le gain modal optimal trouvé pour chaque mode. Les gains sont véritablement binaires. Il y a une claire différence entre les modes que le système est apte à corriger, et les modes dont la correction est hors de ses capacités. La majeure partie de cette différenciation incombe à l'aspect temporel, le bruit rentre très peu en ligne de compte.

On peut trouver étrange que l'optimisation modale ne pousse pas les gains au maximum lorsque la turbulence est rapide, puisqu'en effet en règle générale on s'attend à trouver des bandes passantes optimales variant dans le même sens que la vitesse de la turbulence. C'est vrai, à condition de ne pas dépasser une limite qui a été franchie dans notre cas. En effet, la fonction de transfert temporelle de correction

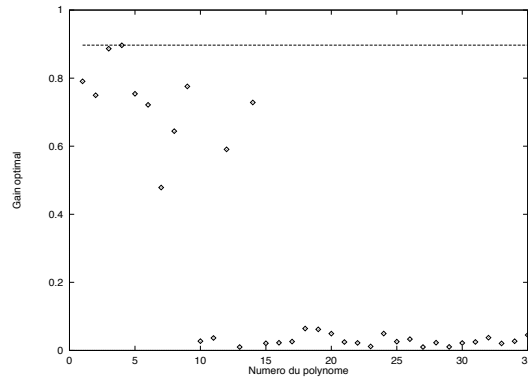


Figure 3.25: Gains modaux optimaux en fonction du numéro du polynôme de Zernike. Le gain maximum tolérable pour la stabilité de l’asservissement est 0.897 (indiqué par la ligne horizontale).

du système (voir section 2.5) présente une zone où elle est supérieure à 1 et où certaines fréquences temporelles sont amplifiées au lieu d’être corrigées (atténuées), et ce avec une amplification d’autant plus importante que le gain est élevé. La zone d’amplification se décale également à haute fréquence avec le gain. Lorsque le spectre contient suffisamment d’énergie à haute fréquence pour que celle-ci, amplifiée, soit supérieure à l’énergie turbulente qui a été soustraite par la correction des basses fréquences, on se trouve dans un cas où l’optimum est de ne pas corriger. On comprend aisément que le phénomène soit binaire, en effet:

- Plus on pousse le gain et plus l’erreur de phase décroît; on choisit alors le gain maximum. C’est par exemple ici le cas des tilts, et c’est le cas de tout mode lorsque l’on ne se trouve pas dans un cas extrême comme celui-ci.
- En poussant le gain on arrive à faire passer la zone d’amplification de la fonction de transfert au-delà du maximum d’énergie du spectre turbulent. Dans ce cas, après avoir augmenté avec le gain, l’erreur résiduelle de phase diminue, et l’on choisit le gain maximum. Ce cas, très particulier, est illustré par les figures 3.26 et 3.27.
- Si l’erreur de phase n’a pas décrû au-dessous de son niveau initial lorsque le gain est maximum, on choisit alors le gain minimal.

Les figures 3.26 et 3.27 donnent une illustration du cas intermédiaire, où l’erreur de phase croît dans un premier temps, puis décroît. Ce genre de cas particulier est néanmoins assez rare, et l’on se trouve généralement dans les cas extrêmes. On notera également que dans ce cas de figure tangent la correction est de toute façon assez mauvaise puisque l’on passe de 1.552 rd^2 dans le cas non corrigé à 1.256 rd^2 à l’optimum, soit tout de même 0.81 fois la variance initiale.

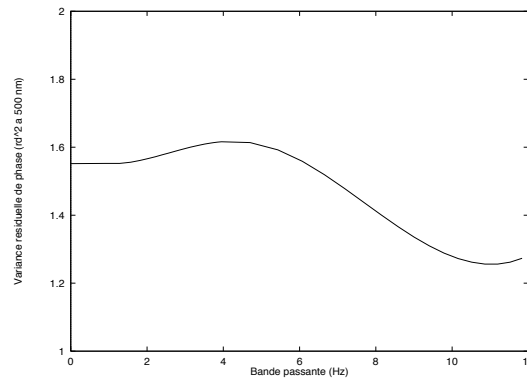


Figure 3.26: Erreur résiduelle de phase en fonction de la bande passante du système. Le mode choisi ici (polynôme Z_{14}) a un spectre très particulier vis-à-vis de la fonction de transfert du système. Jusqu'à 4 Hz l'erreur résiduelle croît car la distribution spectrale de l'énergie des fluctuations est quasiment nulle au-dessous de 3 Hz: ainsi les fluctuations à haute fréquence sont amplifiées sans qu'aucune fluctuation basse fréquence ne soit corrigée. Vers 11 Hz, la bande passante de correction est assez grande pour que la majeure partie de l'énergie des fluctuations soit inférieure à celle-ci. Dans ce cas le système corrige efficacement.

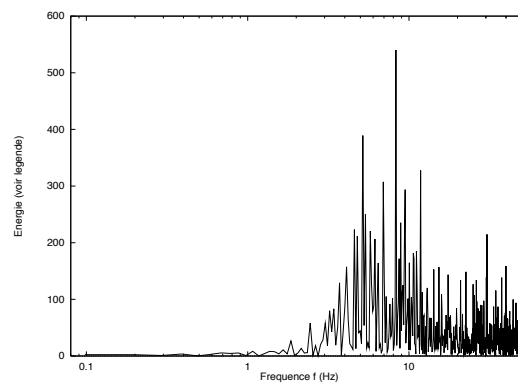


Figure 3.27: Energie des fluctuations du polynôme Z_{14} non corrigées. En ordonnée est portée la quantité $f \cdot \tilde{\phi}(f) / \int \tilde{\phi}(f) df$, sur une échelle linéaire. La fréquence f est en abscisse, en échelle logarithmique. L'avantage d'une telle représentation est que l'aire sous-tendue par la courbe dans un intervalle fréquentiel donné est proportionnelle à l'énergie des fluctuations contenue dans ledit intervalle.

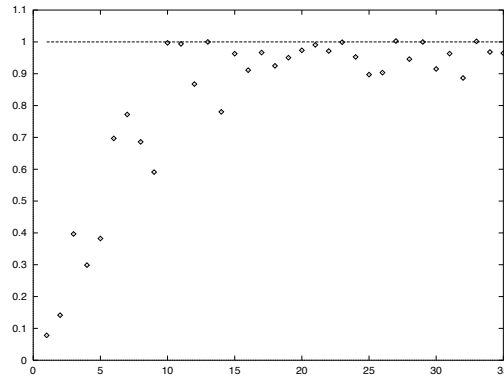


Figure 3.28: Rapport entre variances de phase corrigée et non corrigée pour chacun des polynômes de Zernike. Malgré un excellent rapport signal sur bruit, la correction est modeste en raison de la rapidité de la turbulence.

Efficacité de correction : Enfin, on peut avoir une idée de l’efficacité de la correction en comparant la variance résiduelle corrigée par rapport à la variance non corrigée (voir figure 3.28). On note qu’à partir du quinzième mode il n’y a plus aucune correction. Ces performances très limitées pour un rapport signal sur bruit aussi bon sont dues à la rapidité exceptionnelle de la turbulence. La variance non corrigée est de 312 rd^2 à $0.5\mu\text{m}$, l’optimisation modale prévoit une variance après correction de 68 rd^2 .

En conclusion, l’étude de cette file circulaire a permis de mettre en évidence différents phénomènes particuliers. Tout d’abord la non-uniformité du bruit sur les mesures. Ensuite la non-uniformité de la variance des tilts. La valeur de l’échelle externe et les conséquences sur le spectre modal, l’écart certain par rapport au modèle Kolmogorov. Le caractère “turbulence gelée” et monocouche de cette turbulence, et ses caractéristiques exceptionnellement rapides. Finalement, l’implication de ces différents facteurs sur le résultat de l’optimisation modale et sur l’efficacité de correction. Il faut noter que cette étude est facilitée par l’excellent rapport signal sur bruit des mesures. Mais si une seule remarque s’imposait ce serait la suivante: il aurait fallu utiliser une fréquence d’échantillonnage de 200 Hz puisque l’EBCCD le permet.

3.2.2 Dépouillements statistiques

Valeur du seeing et temps de corrélation.

Le but de ce court paragraphe est de montrer que si les missions se suivent, elles ne se ressemblent pas. Du moins en est-il ainsi au niveau des conditions de turbulence.

Les figures 3.29 et 3.30 montrent l’histogramme des valeurs de r_0 à $0.5\mu\text{m}$, sur l’ensemble des files circulaires non asservies enregistrées durant la mission. Atten-

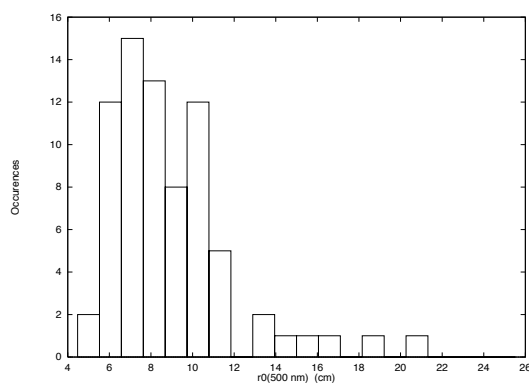


Figure 3.29: Histogramme des r_0 , mission de Mars 1994.

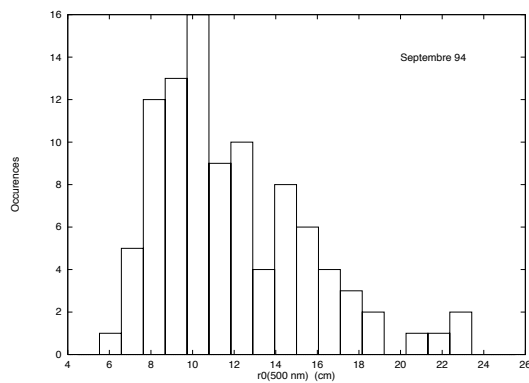


Figure 3.30: Histogramme des r_0 , mission de Septembre 1994.

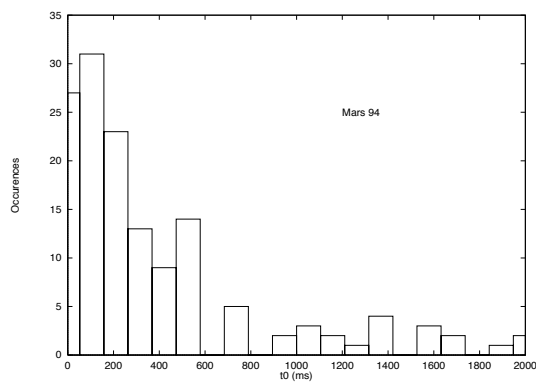


Figure 3.31: Histogramme des temps de corrélation des fluctuations d'angle d'arrivée dans les sous-pupilles; mission de Mars 1994.

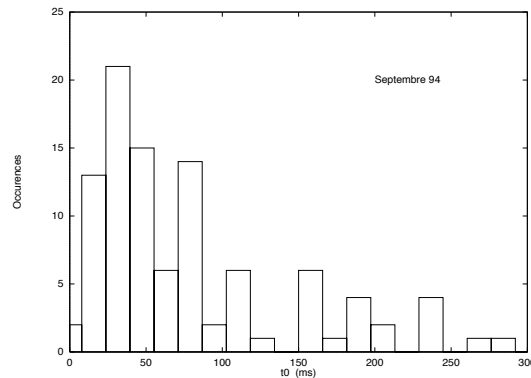


Figure 3.32: Histogramme des temps de corrélation des fluctuations d’angle d’arrivée dans les sous-pupilles; mission de Septembre 1994.

tion: les points de l’histogramme au-dessus de 16 cm sont des artefacts. Ils sont produits, comme je l’ai décrit dans le chapitre précédent dans la section traitant du bruit, par l’extinction de sous-pupilles: les files pour lesquelles le r_0 semble excellent sont *toujours* des données enregistrées à très faible flux. En mars, la moyenne se situe autour de 8 cm, elle est de 11 cm en septembre. Mais le r_0 varie toujours principalement entre 6 et 16 cm.

Les figures 3.31 et 3.32 montrent l’histogramme des valeurs des temps de corrélation des fluctuations d’angle d’arrivée dans les sous-pupilles. On notera la différence marquée entre les deux graphes. La mission de mars 94 présentait des temps de corrélation assez longs, fréquemment au-dessus de 100 ms, et quelques cas exceptionnels au-dessus d’une seconde. En septembre, les temps de corrélation restent en-dessous de 300 ms, et sont généralement inférieurs à 100 ms. Les valeurs les plus courantes avoisinent 40 ms.

Alors que le r_0 varie dans une plage comprises entre des bornes espacées d’un facteur 2 à 3, le temps de corrélation peut facilement varier sur des échelles d’un facteur 10. C’est pour cette raison que ses valeurs semblent déterminer si radicalement l’efficacité de la correction dans COMEONPLUS .

Structure de la turbulence

Ce paragraphe est une étude du comportement asymptotique des spectres temporels des fluctuations d’angle d’arrivée. La théorie prévoit une décroissance de la densité spectrale de puissance en $f^{-2/3}$ et $f^{-11/3}$ respectivement à basses et hautes fréquences, pour une turbulence monocouche de type Kolmogorov. Ce sont ces deux exposants que j’ai étudiés ici, afin de mieux caractériser la turbulence.

Attention, je n’ai point l’ambition de répondre à la question “la physique intrinsèque de la turbulence suit-elle ou ne suit-elle pas une loi Kolmogorov ?”: je

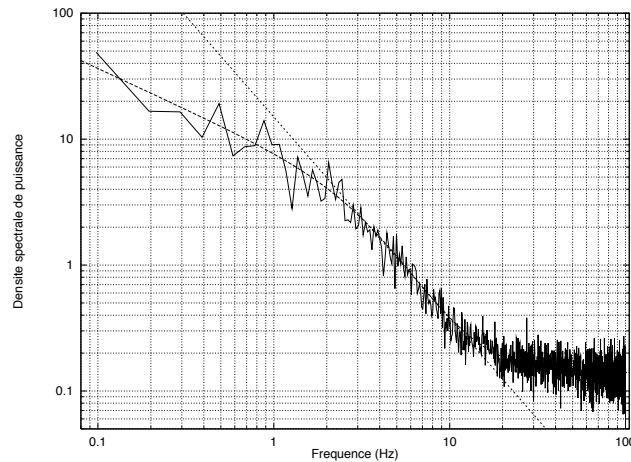


Figure 3.33: Exemple d’ajustement d’un modèle sur la densité spectrale de puissance des fluctuations d’angle d’arrivée. L’équation de la courbe qui s’ajuste au mieux au spectre de puissance est $0.14 + 3.4/((f/f_c)^{0.65} + (f/f_c)^{2.55})$, avec $f_c = 3.7$ Hz. Cela suggère donc une expression asymptotique du comportement à haute fréquence en $f^{-2.55}$. Pourtant, la décroissance du spectre au niveau du point d’inflexion sur le graphique n’est qu’en $f^{-1.6}$, comme le montre la droite (en log-log) d’équation $15 f^{-1.6}$.

discuterai certes ce point; mais mon but est avant tout ici de savoir si on peut, ou non, utiliser raisonnablement l’hypothèse d’une décroissance du spectre des fluctuations analogue à celle impliquée par les lois Kolmogoroviennes (même si la turbulence ne suit physiquement pas ces lois, qu’importe) ou s’il faut réviser le modèle du spectre. Le problème de la physique réelle du phénomène est à mon avis une question délicate, à laquelle il est impératif de répondre en y associant le domaine spatial de validité qui y correspond. La turbulence peut parfaitement être de type Kolmogorov, pour le domaine $1 \text{ cm} \rightarrow 50 \text{ cm}$ seulement, ou pour un autre. Il faut également avoir à l’esprit que la superposition de deux sources de turbulence, toutes deux suivant l’hypothèse Kolmogorov, produit un spectre qui n’a pas forcément un “aspect Kolmogorov” dans la zone de fréquences observables à partir de nos moyens. Mon but n’est donc pas de répondre sur la nature physique exacte de la turbulence, mais de caractériser le comportement des spectres observés.

Les histogrammes montrés par les figures 3.34 et 3.35 ont été calculés à partir de 66 files circulaires non asservies, ayant un niveau de bruit raisonnablement bas. Ces 66 files ont été choisies de manière à couvrir une période de plusieurs mois (plusieurs missions) et représentant un échantillon le plus large possible des conditions de turbulence observables. Les histogrammes montrent les pentes des spectres temporels des fluctuations d’angle d’arrivée respectivement à basses et hautes fréquences (j’appelle pente l’exposant α dans l’expression asymptotique $f^{-\alpha}$ du spectre). J’insiste sur le fait qu’une estimation de ces pentes n’est pas simple à obtenir. Par exemple, l’algorithme qui consiste à effectuer une régression linéaire sur les points du spectre compris entre la fréquence de coupure et le niveau de bruit donne

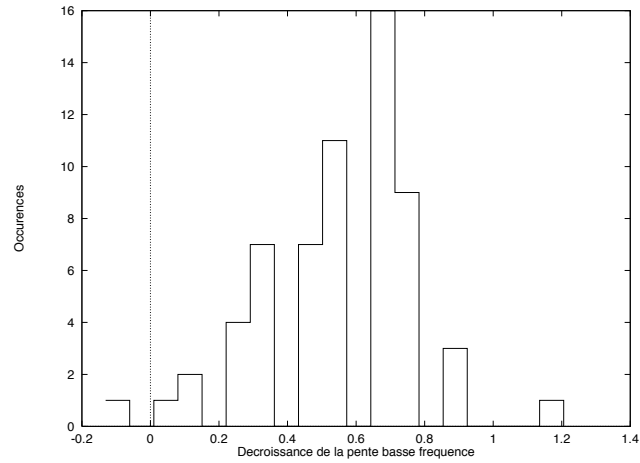


Figure 3.34: Histogramme des pentes des spectres temporels des fluctuations d'angle d'arrivée à basse fréquence. J'appelle pente l'exposant α dans l'expression asymptotique $f^{-\alpha}$ du spectre. Une turbulence de type Kolmogorov prédit $\alpha = 0.66$.

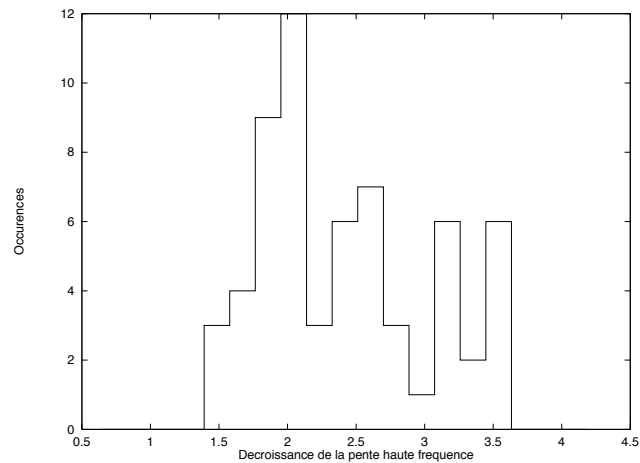


Figure 3.35: Histogramme des pentes des spectres temporels des fluctuations d'angle d'arrivée à haute fréquence. J'appelle pente l'exposant β dans l'expression asymptotique $f^{-\beta}$ du spectre. Une turbulence monocouche de type Kolmogorov prédit $\beta = 3.66$.

de mauvais résultats, en sous-estimant nettement cette pente. En effet, la zone de transition entre les deux régimes est très large; elle est de l'ordre de 1.5 décade. Il ne faut pas non plus négliger le niveau de bruit, qui influe sur presque 0.5 décade avant son intersection avec le spectre turbulent. Ces deux paramètres jouent dans le même sens: une réduction apparente de la pente haute fréquence (voir l'exemple figure 3.33). L'algorithme que j'ai utilisé est l'approximation du spectre en log-log par la fonction empirique suivante:

$$S(f) = \frac{S_o}{(f/f_c)^\alpha + (f/f_c)^\beta} + b \quad (3.1)$$

où b est le niveau de bruit, f_c la fréquence de coupure qui sépare les deux régimes, α et β les pentes basses et hautes fréquences, et S_o un coefficient de normalisation qui définit l'amplitude générale du spectre.

L'histogramme de la pente à basse fréquence présente un maximum assez net vers 0.65. Je crois donc qu'on peut pencher en faveur de la validité de l'hypothèse Kolmogorov, au moins pour les échelles spatiales supérieures à la taille des sous-pupilles, à savoir 51 cm. Cependant, elle ne serait vérifiée -si tel est le cas- que dans 30 à 40 % des cas. Dans 50 à 60 % des cas la pente est inférieure à 0.6: cela peut parfaitement être imputable à l'échelle externe. Enfin dans 5 % des cas elle semble supérieure à 0.8, cela peut provenir d'un mauvais suivi du télescope (il y a des micro-tremblements de terre en permanence: le point est d'importance pour un grand télescope observant à la limite de diffraction) ou de tout autre effet perturbant le tilt (turbulence à l'intérieur de la cage Cassegrain ?); je ne peux non plus exclure un manque de robustesse dans certains cas difficiles de mon algorithme d'ajustement.

Concernant la pente à haute fréquence, les choses sont plus délicates car, comme je l'ai déjà dit la valeur de celle-ci est très difficile à dégager de manière précise en raison de la largeur de la zone de transition au niveau de la fréquence de coupure, et de la présence du bruit. J'ai donc décidé de rapporter l'histogramme des pentes à haute fréquence tel que je l'ai obtenu. Mais cet histogramme est à prendre avec d'innombrables précautions: en particulier le pic le plus important (pente ≈ 2) me semble un artefact, après une analyse au cas par cas de quelques-uns de ces spectres. Il correspond à des échantillons où une multitude d'approximations différentes sont envisageables, où la zone disponible pour évaluer la pente de l'aile haute fréquence est très réduite. Dans ces conditions, l'algorithme que j'ai mis au point semble dériver et plutôt converger vers des faibles valeurs, proches de 2. Il ne s'agit pas de prendre ce chiffre à la lettre. En revanche, les pics centrés sur 2.6 et 3.5 correspondent à des cas bien réels. Dans environ 30 % des cas la pente à haute fréquence se trouve entre 3 et 3.6. Le reste du temps elle avoisine 2.5 ou 2.7. Aucun cas de figure avec des pentes plus fortes que 3.6 n'a été décelé. La présence de spectres où la pente haute fréquence est faible (≈ 2.6) implique que les perturbations soient riches en hautes fréquences spatiales, bien plus que ne le prévoieraient les lois de Kolmogorov. S'agit-il là d'un "empilement" de sources de turbulences diverses ?

S'agit-il d'un autre type de perturbation ? En particulier, Mc Kechnie (1992) fait état de perturbations dont l'échelle externe ne dépasserait pas la moitié d'un mètre. Une telle hypothèse me séduit parce qu'elle va en faveur d'un éclatement des spots de l'analyseur, amplifiant par là considérablement le bruit de mesure, sans pour autant être réellement mesurable par le Hartmann. Néanmoins, on voit qu'on dispose, par le biais de l'optique adaptative, d'un moyen de sondage de la turbulence. On voit aussi qu'il est la plupart du temps faux de considérer une décroissance des fluctuations d'angle d'arrivée en $-\frac{11}{3}$, comme la théorie Kolmogorov le prévoit.

3.3 Le bruit de mesure

Je me suis déjà efforcé de l'annoncer dans le chapitre théorique sur le bruit de mesure, de nombreux paramètres influent sur ce bruit et viennent perturber son comportement par rapport aux variables qui sont d'habitude censées le régir. Je le souligne particulièrement dans l'article A & A (section 3.4), une estimation du bruit correcte est importante dans l'algorithme de l'optimisation de la commande. Les premiers essais d'optimisation effectués sur COMEON étaient simplistes. Je pensais à l'époque qu'en appliquant les formules théoriques de calcul de bruit je pouvais l'estimer assez précisément. Non seulement l'estimation était fautive, mais elle l'était suffisamment parfois pour s'en rendre compte à l'œil nu. De cette expérience proviennent les différentes méthodes d'estimation réelle du bruit, et la surprenante variété des résultats obtenus engage à les comparer à la théorie. C'est ce que je fais dans les sections qui suivent.

3.3.1 Quelques statistiques

Je veux tout d'abord prouver que le bruit mesuré généralement avec COMEONPLUS ne suit pas les prédictions formulées par la théorie de limitation par le bruit de photon du flux incident.

Je ne veux pas dire que dans certains cas, sous des conditions particulières d'observation, en prenant les soins et précautions *nécessaires*, avec un ajustement précis du système on n'arrive pas à obtenir un niveau de bruit proche de celui prédit par la théorie, ou même dont les écarts seraient explicables et quantifiables. Je veux parler ici du niveau de bruit mesuré par le système pendant une période normale d'observations astronomiques. Pour cela j'ai extrait des missions de Juillet et Octobre 1993 143 files circulaires sur lesquelles j'ai calculé le bruit, que j'ai représenté en fonction du nombre de photons supposés avoir été reçus par sous-pupille et par trame (voir figure 3.36). Le terme supposé a son importance puisque le flux photonique n'a pas été mesuré pour toutes ces files, il est simplement déduit ici d'après la magnitude catalogue des objets observés: les barres d'erreur, si elles étaient représentées,

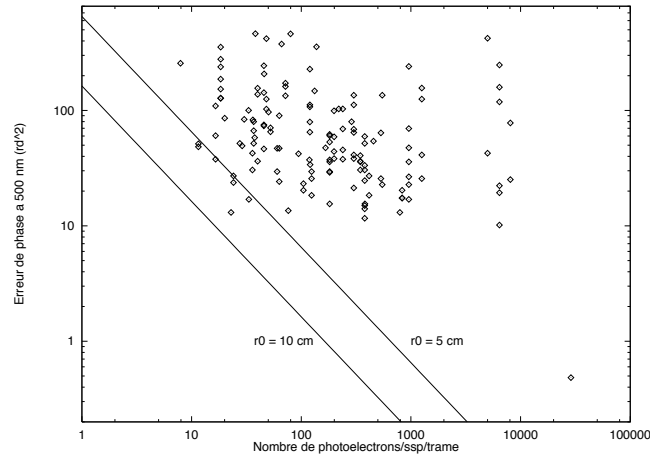


Figure 3.36: Valeur du bruit de mesure exprimée en rd^2 en fonction du nombre estimé de photoélectrons par trame et par sous-pupille. Les données sont brutes, tous r_0 et tous objets confondus. Les droites représentent la valeur de l’erreur de mesure théorique $(7.2n^{-1}(d/r_0)^2)$ pour un détecteur supposé limité par le bruit de photon, pour des r_0 de 5 et 10 cm à $0.5\mu\text{m}$.

seraient autant en “hauteur” qu’en “largeur”. Les données sont brutes, c’est-à-dire qu’il n’y a aucune différenciation entre objets ponctuels ou étendus, aucune différenciation parmi les conditions variées de seeing, aucune différenciation dans le type d’analyseur.

Les données expérimentales ne concordent pas, et de loin, avec les prédictions théoriques *dans l’hypothèse de la limitation par le bruit quantique*. Je ne montre pas cette courbe pour dénoncer la discordance évidente: je la discuterai après plus en détail. Je montre cette courbe pour signifier qu’on ne peut pas, pour l’instant, baser un article traitant des performances générales d’un système d’optique adaptative sur une simple formule quantifiant l’effet du bruit de photon.

Il faut tirer deux conclusions.

- D’une part je pense qu’il est nécessaire de réviser le champ d’application des formules classiques de calcul du bruit de mesure. Celles-ci ne sont valables que pour des flux importants et dans ce cas le bruit déterminé est si faible que la moindre source d’erreur supplémentaire devient prédominante. A faible flux il est impératif de considérer que le calcul du centroïde est fait sur un nombre de pixels couvrant en diamètre non pas 2 mais 4 à 5 fois la largeur à mi-hauteur de la tache image.
- D’autre part ce graphe montre que tout n’est pas acquis, et qu’il reste un effort important à accomplir dans l’optimisation des analyseurs. Je reste convaincu qu’il est nécessaire de développer en laboratoire un banc d’étude du bruit (source faible calibrée ajustable, avec turbulence), d’autant que l’arrivée d’A-

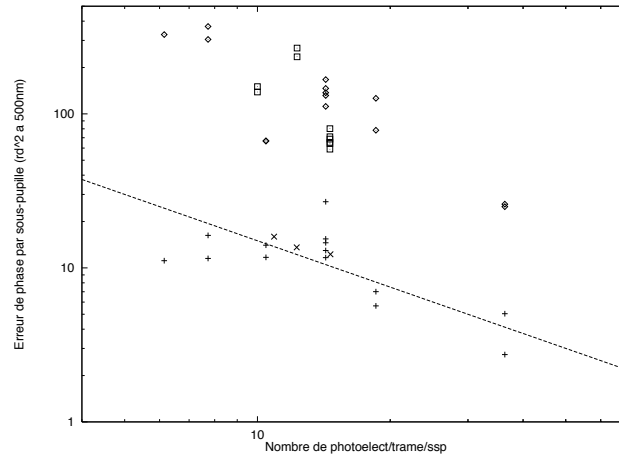


Figure 3.37: Valeur du bruit de mesure exprimée en rd^2 en fonction du nombre estimé de photoélectrons par trame et par sous-pupille. Les carrés et losanges sont des points obtenus expérimentalement. Les croix représentent la valeur théorique du bruit calculée pour les paramètres (flux/trame/ssp, valeur du seeing et bruit de lecture) relatifs à chacun des points expérimentaux.

DONIS offre des moyens encore inexploités pour affiner les paramètres de calcul en temps réel du centroïde: il s'agit de savoir maîtriser ces moyens.

3.3.2 Quelques cas particuliers

L'objet de ce paragraphe est de détailler le niveau de bruit obtenu pour quelques objets ponctuels dont le flux est précisément connu, ainsi que les conditions de turbulence.

J'ai effectué des mesures de bruit sur des étoiles, en calibrant le flux et le r_0 ; les résultats sont présentés sur la figure 3.37 (carrés et losanges). La même figure présente aussi (croix) les valeurs théoriques du bruit pour les conditions expérimentales associées à chacun des points de mesure. J'ai ajusté le niveau de seuillage à chaque fois, de manière à être optimisé comme pour des conditions d'asservissement. Les 24 points présentés ici couvrent plusieurs fréquences d'échantillonnage, de 35 à 200 Hz. Les conditions de numérisation et d'intensification du signal sont homogènes pour tous les points de mesure. Les données ont été enregistrées dans des conditions photométriques stables (pas de variation de flux). Les valeurs théoriques sont calculées en appliquant les formules données dans le tableau général de la section 1.2. J'ai estimé le bruit de lecture de l'EBCCD à 250 électrons/pixel, (ce qui le rend quasiment négligeable, étant donnée l'intensification apportée par le tube).

On constate que l'application brutale de la théorie ne permet pas d'expliquer correctement le niveau de bruit obtenu. L'écart, déjà grand, se creuse encore à faible nombre de photoélectrons par trame (au-dessous de 10 photoélectrons); cela

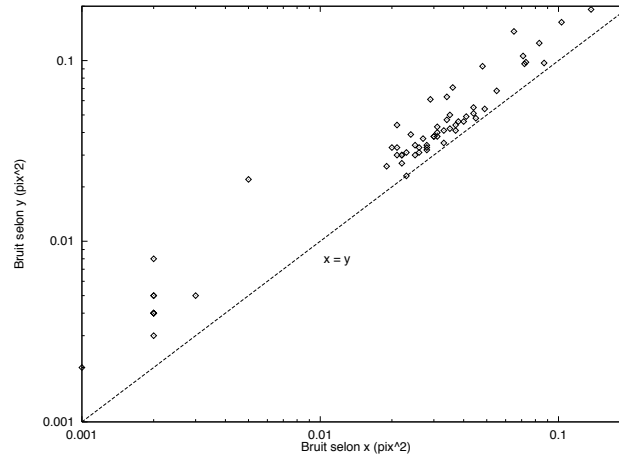


Figure 3.38: Etude statistique du bruit de mesure (exprimé en pixels²) de l’analyseur fort flux Reticon. La figure représente le bruit sur les pentes en y en fonction du bruit sur les pentes en x . La droite en pointillés représente $x = y$. On remarque que le nuage de points est décalé, signifiant que le bruit en y est statistiquement plus important que le bruit en x . Le décalage est d’environ 15%.

s’explique assez facilement par l’effet mentionné dans la section 1.2.3 dans le paragraphe traitant de l’extinction des spots: le r_0 est surestimé, ce qui conduit à sous-estimer la valeur théorique du bruit. Les points théoriques au-dessous de 10 photoélectrons ne doivent donc pas être considérés. La dépendance du bruit en fonction du nombre n de photoélectrons par trame est en n^{-1} dans le cas théorique de la limitation par le bruit quantique. Sur la courbe expérimentale, la dépendance est intermédiaire entre n^{-1} et n^{-2} , ce qui prouve qu’un facteur extérieur intervient fortement.

Peut-il s’agir du bruit du détecteur ? Les figures 3.38 et 3.39 esquissent la réponse. Elle représentent le bruit sur les pentes en y en fonction du bruit sur les pentes en x , et montrent qu’il existe un écart statistique entre les deux. Je ne vois à ce jour aucune explication possible de ce biais excepté l’effet de la lecture du détecteur lui-même. Si on compare les résultats pour les deux analyseurs EBCCD et Reticon, on s’aperçoit que le biais est constant pour le Reticon, alors qu’il augmente avec le bruit dans le cas de l’EBCCD. J’interprète cela dans le sens suivant: à fort flux l’EBCCD n’est pas limité par le bruit de lecture, mais celui-ci devient non négligeable si le flux diminue. De plus, je pense que le phénomène que l’on entrevoit ici n’est que la partie émergée de l’iceberg, puisque le biais détecté n’est que le reflet de la *différence* entre les impacts du bruit de lecture suivant les axes x ou y , et non l’impact du bruit lui-même. Si ce bruit de lecture était rigoureusement isotrope et homogène, nous aurions beau avoir un détecteur fonctionnant en régime de bruit de lecture, nous ne le verrions pas.

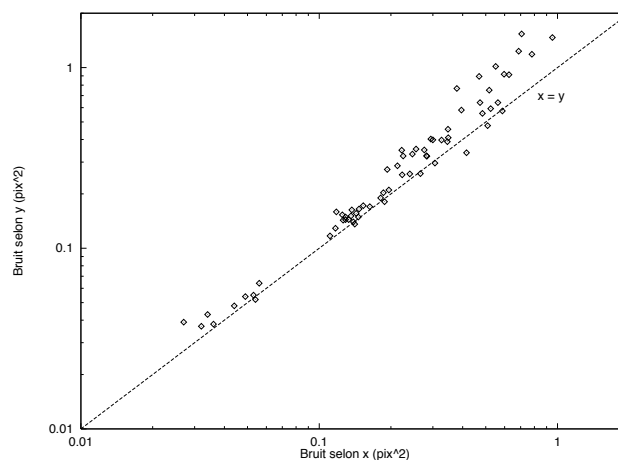


Figure 3.39: Etude statistique du bruit de mesure (exprimé en pixels²) de l'analyseur Ebccd. La figure représente le bruit sur les pentes en y en fonction du bruit sur les pentes en x . La droite en pointillés représente $x = y$. On notera cette fois-ci que le décalage est d'autant plus grand que le bruit est élevé.

3.4 Article: Résultats de l'algorithme d'optimisation modale.

Ce paragraphe est constitué de l'article paru dans *Astronomy & Astrophysics*, et présente une vue générale des résultats de l'optimisation modale.

3.4.1 Article: Astronomical adaptive optics II: Experimental results of an optimized modal control

Astronomical adaptive optics.

II. Experimental results of an optimized modal control*

E. Gendron^{1,2} and P. L  na¹

¹ Observatoire de Paris et Université Paris VII, U.R.A. CNRS 264, F-92195 Meudon Cedex, France

² Laserdot, Route de Nozay, F-91460 Marcoussis, France

Received September 16; accepted October 25, 1994

Abstract. — A previous paper discussed the possible improvement of the image quality given by an adaptive optics (AO) system by optimizing its spatial and temporal correction performance. Considering the perturbed wavefront as a weighted sum of spatial modes, this optimization leads us to attribute a specific correction bandwidth to each mode, depending on its signal to noise ratio and correlation time. These parameters are related to the particular observation being carried out as they depend on the magnitude, colour and extension of the reference source, on the seeing conditions and on the system characteristics. In this article these considerations are verified on the basis of experimental data provided by the wave-front analyser of the AO system ComeOnPlus. Algorithms to process the wavefront data are described and their performance and robustness are discussed. The results are analysed and the efficiency of the AO system is derived in terms of the reference source magnitude and atmospheric conditions.

Key words: atmospheric effects — methods: data analysis — telescopes — techniques: miscellaneous

1. Introduction

In a previous theoretical paper (Gendron & Léna 1994a), hereafter Paper I, the optimization of modal control applied to an astronomical adaptive optics (AO) system was described.

Such optimization aims to adapt various parameters of the system (number of degrees of freedom or modes, temporal response, gains of the loop) to the observing conditions (e.g. magnitude of the reference source, intensity and speed of turbulence) in order to minimize the residual phase error. This error is directly linked to the image Strehl ratio at small values, but beyond a value of 1 rd² the image quality becomes a more complex function of it. We however choose this criterium since in any case the flatter the wavefront, the better is the image (Hermann 1992). Moreover, the phase minimization criterion is well suited for modal analysis.

The principle of modal optimization, as described in our Paper I and experimentally demonstrated here, is independently proposed in a recent theoretical paper (Ellerbroek et al. 1994). These authors choose to optimize jointly the modes and the correction bandwidths, while in our approach the modes are selected beforehand to best fit

the atmospheric conditions and then the correction bandwidth for each mode is optimized.

The particular AO system ComeOnPlus (Gendron et al. 1991; Hubin et al. 1992; Rousset et al. 1993; Rousset et al. 1994), extensively operated on the 3.6 m telescope at La Silla (Chile) between 1992 and 1994 is briefly described in Sect. 3. It provided a wealth of experimental data covering a wide range of observing conditions.

In Sect. 4 a variety of system behaviours related to various turbulence states of the atmosphere is described. Since a key issue in modal optimization is related to the noise introduced in the wavefront measurements made by the wavefront sensor (WFS), several methods for evaluating this contribution are presented in Sect. 5.

In Sect. 7, the effectiveness of the optimization scheme, as described in Paper I, is analysed for various observing conditions encountered during a number of astronomical runs.

2. Notation

For consistency with the previous paper, the notation used throughout this paper is summarized in Table 1.

*Based on observations collected at the European Southern Observatory, La Silla, Chile, with the ComeOnPlus adaptive optics system on the 3.6-m telescope

Table 1. Notation

Quantity	Signification
f	frequency
t	time
F_e	sampling frequency
T_e	sampling period ($1/F_e$)
τ	time delay between measurement and control
$h_{\text{wfs}}(f)$	transfer function of the WFS
$h_{\text{sys}}(f)$	transfer function of the rest of the system
$h_{\text{ol}}(f)$	open loop transfer function
g_i	modal gain number i
$r_0(\lambda)$	Fried's parameter at wavelength λ
L_0	outer scale of the turbulence
τ_0	correlation time
H_{cor}	square modulus of the system correction transfer function
H_n	square modulus of the transfer function between the noise input and the noise sent on the mirror mode controls
$T(f)$	spectra of the mode coefficient fluctuations due to the atmospheric turbulence
$B(f)$	spectra (white) of the mode coefficient fluctuations due to the noise
b_0	level of $B(f)$
b	(wrong) estimation of b_0
$-u$	exponent of the asymptotic behavior of $T(f)$ at high frequency ($T(f) \propto f^{-u}$)
ν	correction bandwidth
ν_0	optimum correction bandwidth
ν_w	wrong optimum correction bandwidth
$\epsilon(\nu)$	calculated residual phase error on a mode versus correction bandwidth
$\epsilon_0(\nu)$	actual residual phase error on a mode versus correction bandwidth

3. The adaptive optics system ComeOnPlus

3.1. The instrument

The AO system ComeOnPlus is installed on the ESO 3.6 m telescope of La Silla (Chile). It is equipped with a piezostack type deformable mirror with 8×8 actuators forming a regular grid on the pupil. Only 52 of the actuators are used. Figure 1 shows the geometry of the actuators.

Two Shack-Hartmann type WFS are available on the optical bench. The first is dedicated to high flux reference sources (visual magnitude $m_V \lesssim 10$). It is based on a 100×100 intensified Reticon photodiode array, with a sampling rate of 200 Hz. The second one, dedicated to fainter references ($m_V \gtrsim 10$), is an Electron-Bombarded CCD (EBCCD) (Cuby et al. 1990) acting as a photon-counting device. This detector functions like a first generation intensifier tube, with a thinned back-side bombarded CCD in place of the classic phosphor screen. Its main advantages are the total lack of remanence and dispersion

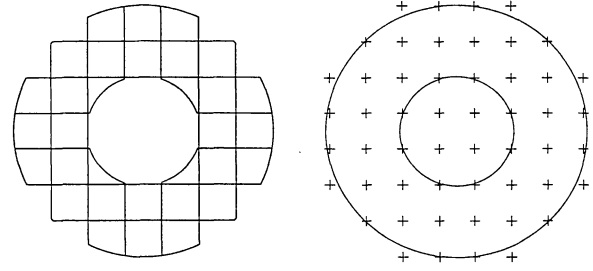


Fig. 1. Wavefront sensor (left) and mirror (right) geometry of the ComeOnPlus AO system. The crosses stand for the actuator position

of the intensification gain. The value of the latter can be set between 1800 and 2000 depending on the high voltage. The sampling frequency is adjustable from 25 to 200 Hz without modifying the read-out time. Both WFS have 7×7 subapertures. Only 32 subapertures out of 49 are useful, providing 64 independent slope measurements on the wavefront. The geometry is shown in Fig. 1. The diameter of the pupil is 3.6 m with a central obscuration of 1.57 m.

3.2. The control loop

The control algorithm of ComeOnPlus consists of an integral compensator. Although the AO system discretizes the temporal signals, only continuous signals will be considered here, since the correction bandwidth remains small compared to the sampling frequency. Hence the transfer function due to the temporal filtering of the detector can be written

$$h_{\text{wfs}}(f) = \text{sinc}(\pi f T_e) \cdot e^{-i\pi f T_e} \quad (1)$$

The transfer function formed by the integral compensator, the modal gain g_i and by the time delay τ is

$$h_{\text{sys}}(f, g_i) = g_i \cdot \frac{F_e e^{-2i\pi\tau f}}{2i\pi f} \quad (2)$$

The product of those functions form the open-loop transfer function $h_{\text{ol}}(f, g_i) = h_{\text{wfs}}(f) \cdot h_{\text{sys}}(f, g_i)$. We define the rejection transfer function (here called correction transfer function) as

$$H_{\text{cor}}(f, g_i) = \left| \frac{1}{1 + h_{\text{ol}}(f, g_i)} \right|^2 \quad (3)$$

and the transfer function between the white noise at input and the noise output on the mirror mode controls

$$H_n(f, g_i) = \left| \frac{h_{\text{sys}}(f, g_i)}{1 + h_{\text{ol}}(f, g_i)} \right|^2 \quad (4)$$

3.3. The data

When running, the system provides two sets of data. Images of the source which are weakly time dependent (Rigaut et al. 1991), and the data flowing from the wavefront computer. This paper primarily considers the latter. They consist of the two coordinates for each of the 32 spots of the WFS. At each sampling period this vector of 64 components is computed and stored. As this quantity represents the local wavefront slopes at each subaperture, it is called a *slope frame*. A set of slope frames is called a *slope set*. This terminology will be used below. Data can be recorded while the loop is either closed or open. The number of frames in a slope set is a power of 2, and all the slope frames it contains are sequential in time, hence there are no missing data. Unfortunately, there are various experimental limitations inherent to the system that affect the quality of the data.

Some examples are illustrated by Figs. 2 and 3. They represent the tilt value versus time. ‘Incidents’ are visible on these records and come from parasitic discharges in the tube or from mistakes made by the system operator. Such events are common and remain unnoticed unless special action is taken: the slope sets corresponding to Figs. 2 and 3 can go through the whole modal control optimization algorithm as described in Paper I, through r_0 and τ_0 computation or through the noise level computation without giving either aberrant, nor true results. Hence, in order to ensure the reliability of the data, all the slope sets have to be carefully pre-processed through an ‘incident detector’ and defective slope sets are eliminated.

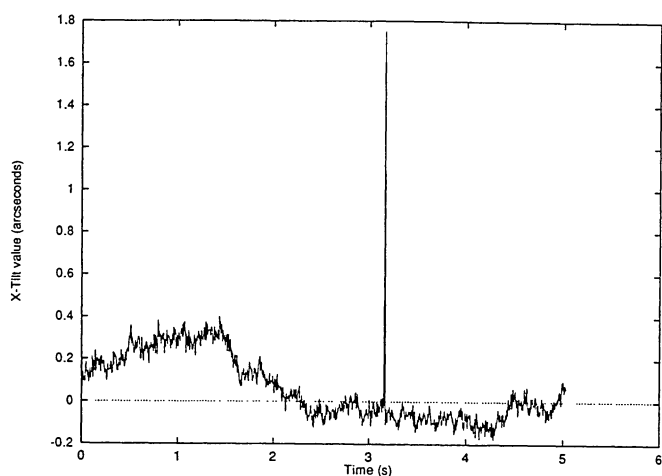


Fig. 2. Tilt value (units are arcseconds) versus time. The artefact may come from a ion surge or a parasitic discharge on the intensifier high-voltage

Another limitation is introduced by the WFS: its field of view has a radius of 3 arcsec, while the telescope pointing accuracy is about 0.5 arcsec. It may happen in open loop that a spot spreads into a detector zone dedicated to

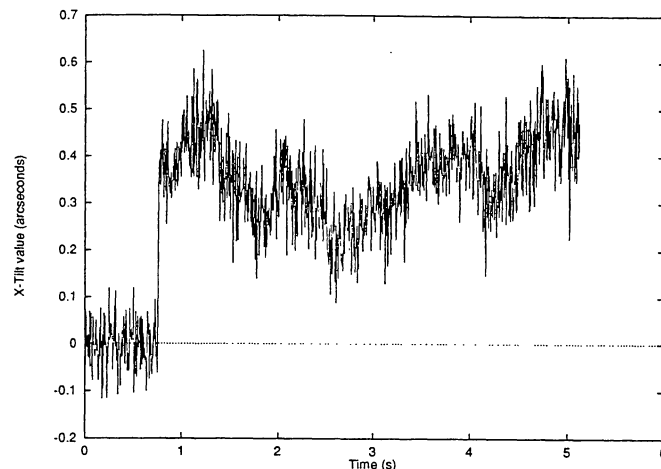


Fig. 3. Tilt value (units are arcseconds) versus time. A break is clearly visible in the record. It separates a servoed zone from an uncorrected one. This artefact comes from a mistake of the operator

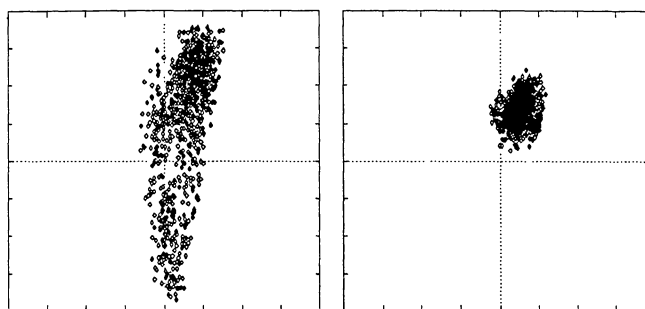


Fig. 4. Trace of the wander of two spots of the SH sensor. The borders represent the limit of the subaperture field. The ticks indicate the pixel borders. On the right, an example of a normal behavior. On the left, the abnormal behavior is produced by a spot entering in the zone reserved to another

the neighbouring spot, even before reaching the 3 arcsec limit imposed by the field diaphragm. Nothing prevents such an event from happening.

Figure 4 is an illustration of what happens in such a case: this modifies the cross-correlation between the centroid fluctuations, leading to a biased estimate of the modal decomposition of the wavefront. In order to avoid this problem, open loop data may be weakly ‘tilt-servoed’ with a correction bandwidth of about 0.1 Hz. In addition, the telescope aberrations are compensated by applying the adequate static driving voltages on the active mirror.

4. Turbulence structure from experimental data

4.1. General considerations

Many articles dealing with AO system performance assume a particular turbulence model, the Kolmogorov one

being extensively used. Unfortunately, the ComeOnPlus measurements have shown that this model is not always applicable. The turbulence structure is sometimes more sophisticated. The local seeing is often significantly non-Kolmogorov. This term encapsulates all the wavefront perturbations occurring near the telescope: the dome seeing, the primary mirror seeing and all the local convective effects. These effects depend on the telescope position, on the temperature difference between inside and outside the dome, and are extremely difficult to predict or model in practice. They are a source of anisotropic perturbations over the pupil. As an example, Fig. 8 shows the variance of the noise value over all the subapertures. As more extensively discussed in Sect. 5.3, it suggests that in some cases, the usual hypothesis upon which some parameters remains uniform over the pupil is incorrect. The variance of the angle of arrival may also be inhomogeneous over the pupil.

These remarks lead one to promogulate whenever possible the direct use of observed quantities to optimize the modal control, rather than a priori models.

4.2. Temporal power spectra and autocorrelations

An important quantity in the power spectral densities of the modes is the behavior at high temporal frequency since it determines the autocorrelation profile near the origin. According to several authors (Madec et al. 1992; Conan et al. 1992; Roddier et al. 1993) this behavior should be in $f^{-17/3}$ for a single turbulent layer, a plane wave, and Kolmogorov-type turbulence. As Madec et al. (1992) state, this behavior has never been observed in data obtained with the ComeOnPlus system. The steepest decrease ever seen is close to $f^{-11/3}$, but this is very difficult to characterize.

The power spectrum is related to the autocorrelation profile via a Fourier transform. The behavior of the autocorrelation $A(t)$ near the origin guess some indication about the high frequency slope value. We want to evaluate $A(0) - A(t)$ near the origin as a series in t . The low-frequency part of the spectrum only contributes to it in t^2 , or smoother (t^4 , etc). Sharper patterns can only be produced by the high-frequency regime of the spectrum in f^{-u} , which is linked to the autocorrelation $A(t)$ by

$$A(t) = \int f^{-u} \cdot \cos(2\pi ft) df \quad (5)$$

When the spectrum drops off faster than f^{-3} , its influence on the autocorrelation profile $A(0) - A(t)$ near the origin is somewhat smoother than t^2 and is then sufficiently steep to be overridden by the low frequencies contribution.

We assume $3 > u > 1$. The integral in Eq. (5) is not defined because of f^{-u} when f tends towards 0. Although incorrect since $A(0)$ does not exist, a way to work around

this is to write

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0) - \int f^{-u} \cdot (1 - \cos(2\pi ft)) df \\ &= A(0) - 2 \int f^{-u} \cdot \sin^2(\pi ft) df \\ &= A(0) + \frac{(2\pi)^u}{4 \Gamma(u) \cos(u \frac{\pi}{2})} |t|^{u-1} \end{aligned} \quad (6)$$

This shows that a high-frequency regime in f^{-u} generally creates an autocorrelation profile in $a|t|^{u-1} + b|t|^2 + o(|t|^3)$, a characterizing the energy contained in the high frequency part, and b in the low frequency part. Hence, the autocorrelation profile is always close to a parabola. This property will be used in Sect. 5.

5. Noise determination

In Paper I, the importance of a proper knowledge of the noise was underlined. The noise comes from the finite number of photocounts received on the WFS detector. It is usually a superposition of photon noise and read-out noise of the detector. We study hereafter the precision of different methods of measuring this noise level.

5.1. Methods to measure the noise

To properly implement the modal control optimization, a reliable method to determine the noise is essential. We compare here the performance of two methods. The first one is described by Gendron & Léna (1994a): it derives the noise from the variance of a special configuration of the slope measurements which is very unlikely to be caused by the atmosphere, but to the contrary most likely to be due to the above mentioned noise sources. This approach, called method (a) below, has the disadvantage of providing only a global noise value averaged over the pupil.

An alternative method was originally proposed by Rousset (1992), and allows one to compute the noise at each subaperture. It uses the fact that since the noise is uncorrelated between successive frames, its time autocorrelation is a Dirac function. Moreover, it is not correlated with the fluctuations caused by the atmosphere (namely the turbulent signal). Hence, the time autocorrelation of the centroid position within one particular subaperture is the sum of the actual turbulent signal autocorrelation plus the noise autocorrelation, since noise and signal are independent. The signal autocorrelation is affected by the noise only at the origin. Hence, a fit of the autocorrelation near the origin by a parabola (see Sect. 4.2) allows one to determine the signal variance without noise contribution (see Fig 5). The noise variance is deduced from the total value at origin, minus the parabola value. This method will be called method (b) hereafter.

It is worth noticing that methods (a) and (b) do not use the same physical principles. Comparing their results

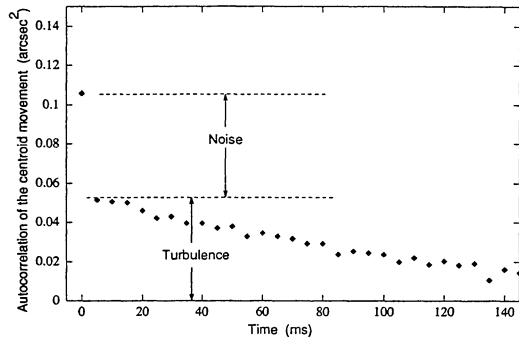


Fig. 5. The autocorrelation of the WFS measurement fluctuations is the sum of the noise autocorrelation (Dirac) and of the actual turbulent wavefront slope autocorrelation. Experimental data. The conditions are $r_0=10.5$ cm, $\tau_0=80$ ms, $F_e=200$ Hz. The average noise over the whole Shack-Hartmann is 0.082 arcsec²

may be instructive and is the subject of the next paragraph.

5.2. Comparison of methods

As both methods were designed to be adequate on simulated data, their applicability to real data is of interest. In this case, the non-uniformity of the noise sources over the pupil may introduce differences (see Sect. 5.3).

In Fig. 6 is plotted the noise determined with method (a) versus the averaged noise derived with method (b), using 73 slope sets covering five consecutive nights. One notices a weak dispersion near the full correlation straight line.

Making the reasonable assumption that both methods show independent dispersion as they are based on different principles (one uses temporal properties while the other uses spatial properties of the noise), the squares of the standard deviation may be added and the total dispersion is cumulative of both: hence, the standard deviation of each method is estimated by taking half the value shown in Fig. 6.

Figure 7 shows the result, by plotting the following quantity: logarithm of the ratio of noise variances determined by (a) and (b). This histogram shows a standard deviation of 0.16. Either methods lead to an error in the noise estimate which is therefore $0.11 (= 0.16/\sqrt{2})$ times the noise variance.

Granted this quantitative equivalence of both methods, method (b) will be preferred to (a) as it reliably gives the noise in each subaperture, and therefore takes into account the various inhomogeneities described above.

Assuming from now on that the method (b) is reliable enough, it is possible to show different properties of the noise variance. This is the subject of Sect. 5.3.

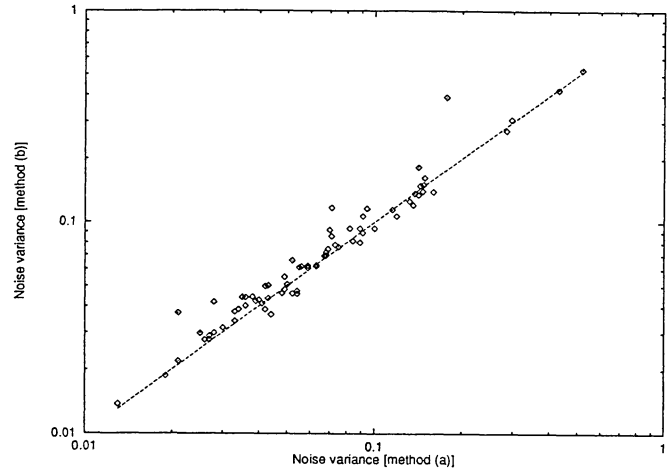


Fig. 6. Variance of the error on the determination of the spot centroid computed with the method (b) in terms of the one obtained with method (a). The straight line represents a full correlation. Since the two methods are based on different principles, the good agreement demonstrates their reliability

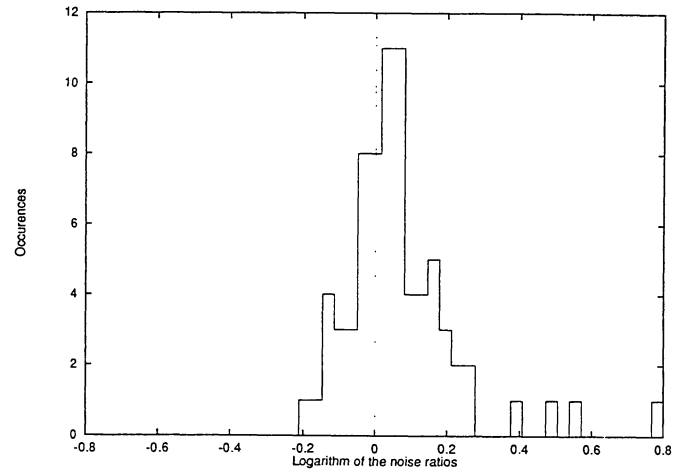


Fig. 7. Histogram of the logarithm of the ratios of the noise values determined by methods (a) and (b). The standard deviation associated to this distribution is 0.16

5.3. Noise inhomogeneity

One of the first obvious properties is the dispersion between the different subapertures. Figure 8 illustrates such a dispersion. The graph has been computed from a slope set of 1024 frames covering 5.12 seconds. The correlation time of the spot fluctuations being between 60 and 70 ms, it remains small compared to the length of the record. Hence, the non-uniformity does not come from a lack of averaging. The heterogeneous structure does exist permanently and can be found on several sets of data taken in the same conditions.

Possible causes for this dispersion are numerous. The inner subapertures, given their smaller area, are systemat-

ically noisier than the others. A local turbulence internal to the dome or to the telescope for thermal exchange reasons may produce localized turbulent eddies on the pupil, making some spots asymmetrical and wandering in particular directions, hence leading to different noise variances. Finally, a number of factors could affect the symmetry of the spot images, such as the residual static aberrations of the primary mirror and of the sensing optical channel, the non-uniformity of the detector and of the intensifier point-spread function, the aberrations of the micro-lenses, the shape of the subapertures (diffraction effects). Unfortunately, the raw images coming from the detector of the WFS are not stored in ComeOnPlus. It is then difficult to establish a link between these fluctuations on the noise values and the shape of the spots. The information contained in the centroid fluctuations is not sufficient to properly interpret this.

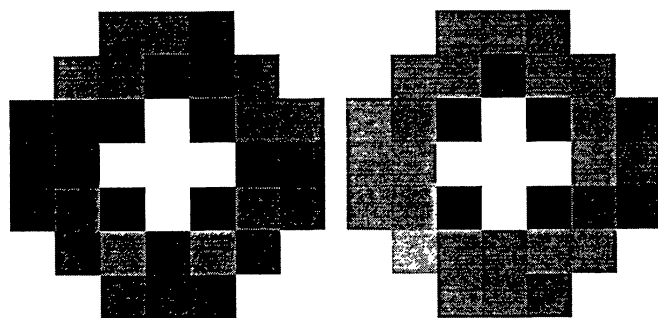


Fig. 8. Each “pixel” represents the localisation of a subaperture of the Hartmann and the grey level the noise variance in it. The left picture stands for the x directions, the right one the y . The noise variance ranges from 0.011 to 0.038 arcsec²

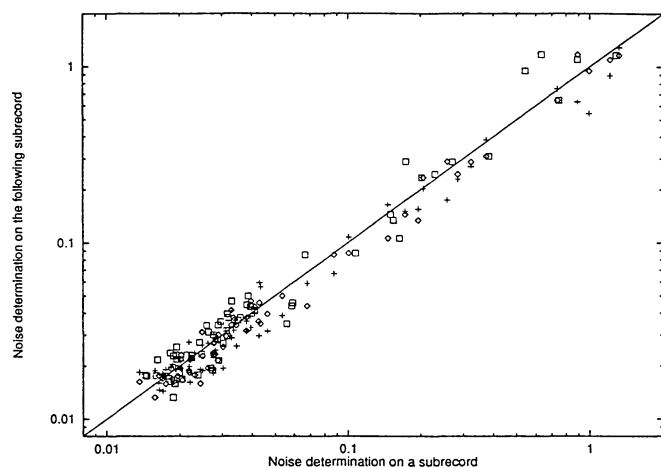


Fig. 9. Noise determination on one subrecord of 1024 frames versus the noise determination on the following subrecord

The dispersion pattern does not change when the noise is evaluated in different parts of a unique long slope set.

Figure 9 is obtained from a slope set of 8192 frames, recorded at a 200 Hz sampling rate. This represents a total time window of 41 s. The set has been subdivided into 8 subsets of 1024 frames each, and the calculus of the noise variance has been done on each of these subsets. Here it is proposed to show that the inhomogeneities found with method (b) are significant, and not due to random fluctuations. For this, the noise results obtained on one subset are compared with the ones from the following subset. The results are plotted in Fig. 9. Numbering the subsets from 1 to 8, the different plots represent the 64 noise values of subset 3 versus subset 1, 7 versus 4 and 8 versus 5. The dispersion along the full correlation line proves the dispersion of the noise over the pupil. The dispersion in a perpendicular direction to this line is due both to the limited accuracy of the method, and to the noise variation—even if weak—between the different subrecords. One can notice that this last dispersion is much weaker than the noise inhomogeneities.

We have now a good knowledge of the performance and the limitations of the noise determination method. This was needed, as the uncertainties on the noise level will be used as inputs to evaluate the performance of the optimization algorithm in Sect. 7.

6. The modes

The optimization process works in a manner independent of the set of modes which is chosen. Hence, this choice is not coupled with the optimization algorithm and remains arbitrary. However it is well known that some modes are better suited for atmospheric compensation than others (Wang & Markey 1978; Roddier et al. 1991) and moreover the mode set is constrained by the AO system configuration.

Hence, the choice of the modes set for the ComeOnPlus system is not arbitrary. The detailed computation procedure is beyond of the scope of this article ; only the general properties are described.

Modes such as Zernike polynomials (Noll 1976) or the modes obtained by the Karhunen-Loeve decomposition of the turbulence process (Wang & Markey 1978) are never used in real-time control. The modes are defined as a set of voltages to be applied to the mirror actuators. They are chosen to be orthogonal between each other in order that $\int_{\text{Pupil}} m_i(x, y) m_j(x, y) dx dy = \delta_{ij}$. This property allows the addition of the errors on each mode to obtain the total error. The modes are chosen to be statistically uncorrelated between each other. The computation is theoretical and assumes a Kolmogorov-type turbulence. This property leads to a mode set where the correction of one mode leads to the minimization of the global phase variance due to this mode. It is a kind of Karhunen-Loeve decomposition.

Some modes may happen to cause problems because the WFS is blind to them. Two well-known examples of

such modes are the piston mode and the waffle mode (Wild et al. 1994a, b). In fact, four modes belonging to this class are identified in the case of ComeOnPlus and suppressed from the correction.

Finally, the set of modes has to contain pure tip and tilt, to be corrected by the dedicated fast steering mirror. The deformable mirror is also able to produce the tip-tilt modes, but firstly their maximum amplitude is insufficient for atmospheric compensation and secondly they are redundant with the steering mirror. Hence, these tip and tilt modes of the deformable mirror are identified and also suppressed from the correction.

The total number of degrees of freedom of the ComeOnPlus system is 54 (52 actuators plus 2 given by the steering mirror), but only 48 degrees are actually controlled.

7. Modal control optimization

Once the noise determined it becomes possible to proceed, by using the general method of modal control optimization fully described in Paper I. We briefly recall here this optimization scheme and deduce the uncertainties on the optimum bandwidths and residual phase errors.

7.1. Optimization of the modal control

The wavefront is decomposed over a basis of spatial modes. Because each mode behaves differently, a particular correction bandwidth is associated with each one. This bandwidth is controlled by a coefficient called *modal gain*. The problem consists of finding the optimum gain for a given mode, knowing that the modes are not cross-coupled and that the optimum value leads to the minimum phase error on this mode (Gendron & Léna 1994a). The algorithm differentiates the error on the mode with respect to the modal gain and searches for a null value.

The input parameters required to compute the residual error (or its derivative) are the noise variance (or noise level) and the power spectral density of the mode fluctuations.

The system transfer function $h_{oi}(f, g_i)$ is known, at least in the ComeOnPlus case, it is accurately modeled. The sampling frequency and the unavoidable time lag between measurement and control are known and included in the mode transfer function.

The turbulence leads to a particular, possibly time-dependent, temporal power spectrum of the mode. To estimate it and use it as an input parameter in the optimization of the modal gains, it is necessary to record, before closing the servo-loop, an uncorrected slope set. This same recording provides (through method (b) described above) the noise variance estimate, including both the turbulence and the system noise.

After extracting these parameters, the residual error on one mode is computed by (see Paper I)

$$\epsilon_0(g) = \int H_{\text{cor}}(f, g) \cdot (T(f) + B(f) - b_0) df + b_0 \cdot \int H_n(f, g) df \quad (7)$$

The above equation stands for one particular mode i , and all the variables should be indexed with this subscript. It will be omitted below for the sake of brevity.

$\epsilon_0(g)$ is the residual phase error on the mode varying in terms of the modal gain g . $H_{\text{cor}}(f, g)$ is the correction transfer function of the system, depending on the frequency f and the modal gain g . $T(f)$ is the power spectral density of the mode fluctuations due only to the turbulence and $B(f)$ is the power spectral density of the noise propagated on the mode. b_0 is its average level, i.e. $b_0 = 2/F_e \int_0^{F_e/2} B(f) df$. For each mode, the residual error is the sum of the residual error produced by the finite correction bandwidth plus the error due to the noise (Eq. (7)). As these quantities vary in opposite sense with frequency, the sum may reach a minimum. In Paper I, it was shown that the rms uncertainty on this estimate of the residual error is $\frac{F_e}{2} b_0 / \sqrt{2K}$ where $2K$ is the number of frames used in the slope set.

The parameter searched for is the modal gain g , or the associated correction bandwidth ν since there is a one-to-one relation between them. In the following we refer to the latter, which has an obvious physical interpretation.

7.2. Uncertainty in the determination of the optimum bandwidth and influence on the residual error

Despite the precautions discussed above, the b_0 estimate may suffer from experimental errors, which in turn affect the uncertainty on the residual phase error. The purpose of what follows is to estimate the uncertainty on the optimum correction bandwidth ν and derive its effect on the optimized residual phase error. Let define $\epsilon(\nu)$ as the residual error computed with a noise level b instead of b_0 . We have

$$\epsilon(\nu) - \epsilon_0(\nu) = -(b - b_0) \cdot \int (H_{\text{cor}}(f, \nu) - H_n(f, \nu)) df \quad (8)$$

The quantity $\frac{F_e}{2} \alpha(\nu) = \int (H_{\text{cor}} - H_n)$ depends on the system only. Figure 10 shows some plots of $\alpha(\nu)$ versus ν for the sampling frequencies 100, 50 and 25 Hz. It shows that the variation of $\alpha(\nu)$ is small, and hence $\epsilon(\nu) - \epsilon_0(\nu) \approx -\frac{F_e}{2} (b - b_0)$ is nearly independent of ν .

Let define ν_0 as the actual optimum value, and expand $\epsilon(\nu)$ near ν_0 . It comes

$$\epsilon(\nu) = \epsilon_0(\nu_0) + \frac{\epsilon_0''(\nu_0)}{2} \cdot (\nu - \nu_0)^2 - (b - b_0) \cdot \alpha(\nu) \quad (9)$$

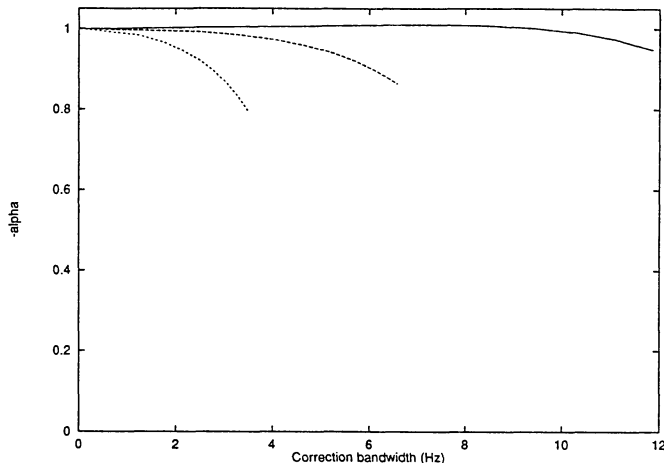


Fig. 10. Values of $\alpha(\nu)$ in terms of the correction bandwidth ν . The plain line corresponds to a sampling frequency of 100 Hz, the dashed line to 50 Hz and the dotted one to 25 Hz. For each sampling frequency, the curves are plotted up to the correction bandwidth leading to an unstable close loop. The function $\alpha(\nu)$ is nearly a constant and this approximation becomes better as the sampling frequency grows

In order to find the location of the minimum, expression (9) is differentiated with respect to ν . This leads to the wrong optimum value ν_w

$$\nu_w = \nu_0 + \frac{(b - b_0) \alpha'(\nu)}{\epsilon_0''(\nu_0)} \frac{F_e}{2} \quad (10)$$

Now, in order to compute the *actual residual error* when using the *wrong* optimum value ν_w given by Eq. (10), we replace Eq. (10) in (9) with $b = b_0$. It gives

$$\frac{\epsilon_0(\nu_w) - \epsilon_0(\nu_0)}{\epsilon_0(\nu_0)} = \frac{1}{2} (b - b_0)^2 \frac{1}{\epsilon_0(\nu_0) \cdot \epsilon_0''(\nu_0)} \alpha'^2(\nu) \left(\frac{F_e}{2} \right)^2 \quad (11)$$

Knowing we only need a rough estimate, a simple model has been used for the evaluation of $\epsilon_0(\nu_0) \cdot \epsilon_0''(\nu_0)$. The calculus is given in Appendix. One gets the expected quantity

$$\epsilon_0(\nu_0) \cdot \epsilon_0''(\nu_0) = b_0^2 \frac{u^2}{u - 1} \quad (12)$$

where u is the slope of the high frequency behavior of the spectrum (in f^{-u}).

When replaced in Eq. (11), it gives

$$\frac{\epsilon_0(\nu_w) - \epsilon_0(\nu_0)}{\epsilon_0(\nu_0)} = \frac{1}{2} \frac{u - 1}{u^2} \frac{(b - b_0)^2}{b_0^2} \alpha'^2(\nu) \left(\frac{F_e}{2} \right)^2 \quad (13)$$

Making the assumption that $\frac{F_e}{2} \alpha'(\nu) < 1$ is a reasonable value (common values are $\alpha'(\nu) \approx 0$ to 0.5 and $\alpha'(\nu) = 2$ is an extreme case) and taking $u \approx 3$ leads to

$$\frac{\epsilon_0(\nu_w) - \epsilon_0(\nu_0)}{\epsilon_0(\nu_0)} < 0.11 \left(\frac{b - b_0}{b_0} \right)^2 \quad (14)$$

and to

$$\frac{\nu_w - \nu_0}{\nu_0} = -0.33 \frac{b - b_0}{b_0} \quad (15)$$

As a numerical application, a relative error of 0.33 on the noise level -which is already a large value- gives a relative error of 0.10 on the optimum bandwidth ν_0 . The error on the calculated residual error is nearly the same than for the noise, i.e. 0.33 times the noise variance. The point is that the *actual* residual error only differs of about 1% from the expected value (4% in the really worst case). It means that it is possible to correctly tune the modal gain and to reach the optimum point with a good accuracy, without being able to determine the value of the actual residual error at this optimum with the same accuracy.

Readers of this article should not be alarmed by negative variances. Although these are clearly non physical, such things may happen since it is often required to subtract variances of given quantities from each others. In particular, when dealing with extremely noisy data the uncertainty on the noise estimate, even if not so large, may happen to be larger than the turbulent signal itself. We would like to insist on the fact that finding an absurd result for the value of the residual error -typically a negative value- does not mean that the value of the optimum bandwidth is wrong.

As an example, we propose to show the behavior of the optimum bandwidth when the noise is not properly determined. For this, the optimization process will be applied on the same set of data while giving as input different values for the noise level b , ranging from 0 to $2b_0$. Figure 11 shows the residual error versus the correction bandwidth for a coma-like mode, but similar results apply for any other mode. The input data come from experimental data, and the conditions are summarized in the caption. Although the entered noise value b varies over a large interval the position of the minimum changes slightly. Moreover the curve is very flat near ν_0 and the changes on the actual minimum value have only a tiny effect on the actual residual error value. For very large values of the noise, the residual error goes negative: although meaningless, this does not prevent the search for the minimum and gives a good value for the optimum.

8. Results

This section aims to present some results of the optimization in various situations. The results are entirely linked to the ComeOnPlus AO system and its environment. First a description of the experimental shape of the residual phase error versus ν_0 is given, then the robustness of the optimization process is discussed. Finally, we give an overview of the system correction capabilities for different stellar magnitudes.

Magnitudes of the reference source used in the following paragraphs are always given for the V band ($\lambda = 550$ nm).

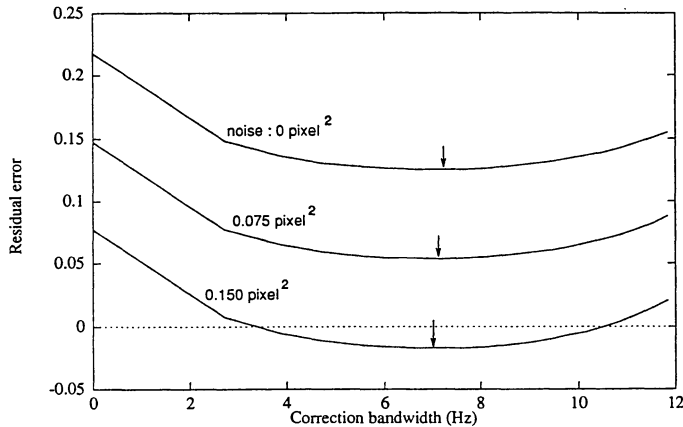


Fig. 11. Residual phase error (arbitrary units) versus the correction bandwidth for a coma-like mode. The parameter for each curve is the noise level b_0 (see Eq. 7). The true value is a noise of $b_0 = 0.075 \text{ pixel}^2$ on the centroid determination. The optimum value of the correction bandwidth only varies from 7 to 7.5 Hz. The conditions were a r_0 of 10.1 cm, a correlation time of 80 ms. The reference star magnitude is $m_V = 11.1$, the EBCCD was used

8.1. Residual error versus the correction bandwidth

As exemplified in Fig 11, the residual phase error versus the correction bandwidth $\epsilon(\nu)$ is always a smoothly-varying function despite the jerky aspect of the turbulence spectra. This is because each point of $\epsilon(\nu)$ depends on the entire turbulence spectrum. Hence cases with several minima have never been detected. The most complex cases have a maximum before reaching the minimum searched for, but this only happens in exceptional occasions when the turbulence is extremely fast.

8.2. Robustness of the optimization

We have already proven that the noise estimation and the way it enters into the optimization process acts as a second order effect in the accuracy of the results. We now propose to examine the influence of the turbulence parameters.

Two points have to be investigated. The first one is the robustness of the optimization process. Let assume the observing conditions to be constant, i.e. the key parameters such as the coherence length r_0 and time τ_0 are stable and the shape of the modes spectra do not change. Even with this unphysical conditions the optimization may give varying results simply because it is based on a particular sequence taken before closing the loop, which is a single realization of the phenomenon.

The second point is to evaluate the influence of the non-stationarity of the turbulence, since the optimum parameters are deduced from a sequence taken a given

instant *before* closing the loop and the atmosphere state may evolve during the observation.

Our concern here is to analyse the first point but unfortunately both aspects are systematically mixed when dealing with experimental data. A good test to study the robustness is to perform the optimization on several sequences of turbulence taken with identical conditions and at very close intervals in time. A typical number of frames needed for an optimization is 1024. As the system can record slope sets of 8192 frames, it is possible to subdivide one of them in 8 subrecords of 1024 frames and to look how the optimization behaves on each. In order to limit the number of plots, we choose to plot the correction bandwidths obtained for a subrecord versus the values averaged over the 8 subrecords, and superimpose all the results (Figs. 12 and 13). Slopes sets have been selected to cover different cases of observing conditions.

The first example will be called (A) below and is plotted in Fig. 12. It is a case with a good signal-to-noise ratio. The second one, called (B) (Fig. 13), is taken on a reference star of magnitude $m_V = 12.1$, leading to a bad signal-to-noise ratio. One may notice that in this last case, the correlation time of the fluctuations directed along one axis is 100 ms when it is 210 ms for the fluctuations directed along the perpendicular axis. The telescope inclination (29 degrees from the zenith) is responsible, together with the wind direction, for the anisotropy of these temporal characteristics, as the pupil projected on a particular turbulent layer no longer presents circular symmetry.

Table 2. Values of the Fried's parameter r_0 (cm), given at $\lambda = 500 \text{ nm}$, and of the correlation time along the x or y directions. The eight values correspond to eight subrecords of 1024 frames taken in a global slope set of 8192 frames

	1	2	3	4	5	6	7	8
(A)								
r_0	8.2	8.2	9.3	8.5	7.6	7.1	6.6	8.2
$\tau_{x/y}$	55	55	53	55	53	53	58	58
(B)								
r_0	10.7	10.7	10.8	9.9	10.3	10.3	10.3	9.9
τ_x	260	155	230	200	170	200	230	185
τ_y	85	100	85	90	90	100	105	90

Table 2 gives the r_0 and τ_0 values measured during the eight subrecords. The values of r_0 are deduced from the fluctuations of the angle of arrival σ_α^2 according to the formula given by Sante (1975).

$$\sigma_\alpha^2 = 0.17 \lambda^2 d^{-1/3} r_0^{-5/3} \left[1 - 1.49 \left(\frac{D}{L_0} \right)^{1/3} \right] \quad (16)$$

The term between brackets is the attenuation term due to the outer scale of turbulence L_0 . Two values of σ_α^2 (σ_α^2

for a subaperture and σ_α^2 for the entire telescope pupil) provide two equations allowing to solve for r_0 and L_0 .¹

The values of the wavefront correlation time τ_0 are the half width at half maximum of the autocorrelation function of the wavefront local slopes after removing tip and tilt.

Although the different subrecords have been taken very near in time, the atmospheric conditions did fluctuate, as shown on Table 2 (the error on each r_0 is less than 0.5 cm). However, the time interval between the beginning of the subrecords is 5.12 seconds in the case (A) and 14.6 seconds for (B). These are very short time scales, and it will be considered that these fluctuations are due to the random characteristics of the process, more than actual changes in the turbulence key parameters.

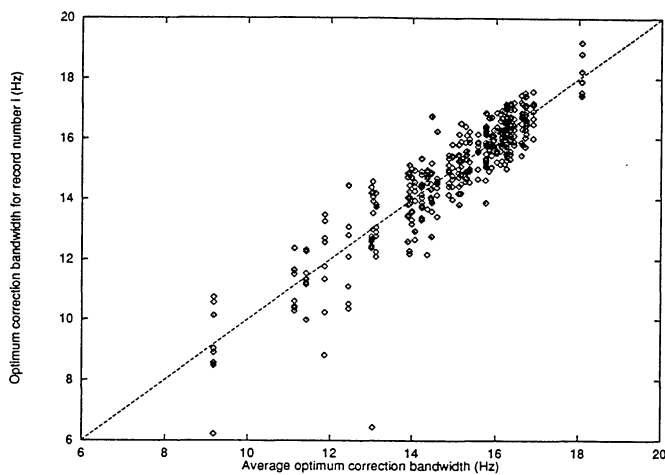


Fig. 12. Record (A). Optimum correction bandwidth computed on 8 slope sets of 5.1 seconds long, versus the averaged values. The conditions are a $r_0(500 \text{ nm}) = 8.1 \text{ cm}$, a correlation time of 55 ms. The sampling frequency is 200 Hz. The observed object is Titan, with a visual magnitude $m_V = 8.3$

The dispersion around the full correlation line does not appear to be so small. However, combining Eqs. (9), (21) and (22) proves that

$$\frac{\epsilon_0(\nu) - \epsilon_0(\nu_0)}{\epsilon_0(\nu_0)} \approx \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \quad (17)$$

Figure 14 exhibits the histogram of the values of $\frac{\epsilon_0(\nu) - \epsilon_0(\nu_0)}{\epsilon_0(\nu_0)}$ for the two previous cases (Figs. 12 and 13). It shows that for over 96% of the cases the relative accuracy is better than 0.04, and is better than 0.01 for 70% of the cases.

The relative precision increases with the signal to noise ratio. The dispersion is due to the combination of the

¹This method leads also to an independent determination of L_0 . With the above r_0 values we get $L_0 \simeq 13 \text{ m}$ for case (A) and $L_0 \simeq 75 \text{ m}$ for (B). Therefore, the system provides a tool to follow the outer scale evolution, although the method is sensitive to telescope tracking errors.

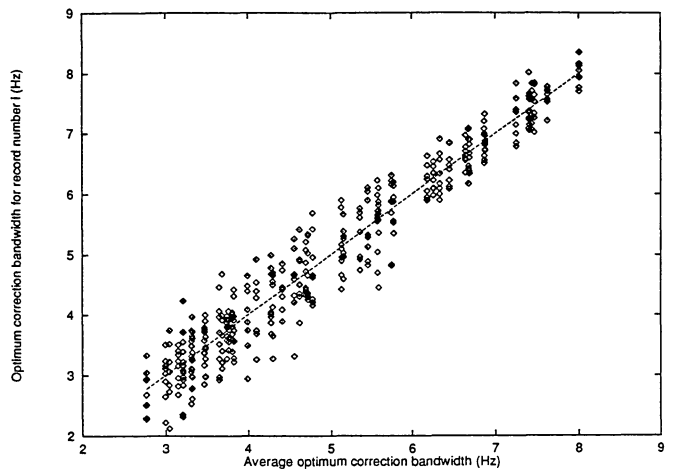


Fig. 13. Record (B). Optimum correction bandwidths computed on 8 successive slope sets of 14.6 seconds long, versus the averaged values. The conditions are a $r_0(500 \text{ nm}) = 10.1 \text{ cm}$, a correlation time of 100 ms and 210 ms depending on the fluctuations direction. The sampling frequency is 70 Hz. The star magnitude is $m_V = 12.1$

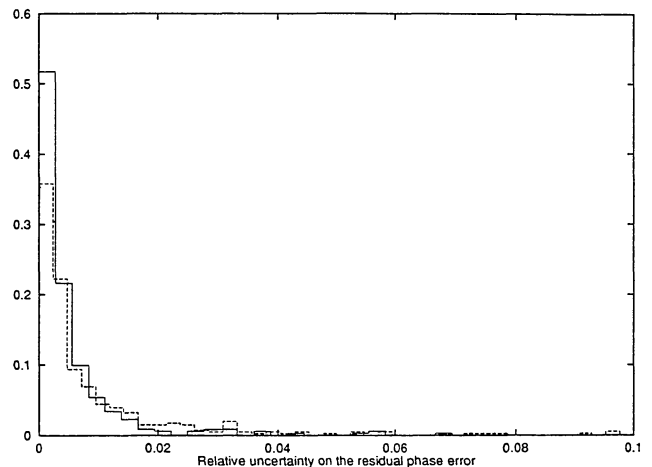


Fig. 14. Histogram of the values of $\frac{\epsilon_0(\nu) - \epsilon_0(\nu_0)}{\epsilon_0(\nu_0)}$ for the cases (A) (plain line) and (B) (dashed line) described above

uncertainty on the noise determination, on the random character of the atmosphere and for a minor part to the non-stationnarity. Also in the case (B) the time interval between the subrecords is longer, possibly enlarging the dispersion. Even with this, the accuracy on the residual phase error is most of the time of the order of 1%.

8.3. Stars brighter than $m_V = 7$

This is a high flux case. The WFS used is the Reticon array. The sampling rate is 200 Hz, and the delay between the end of the integration time of the WFS and the moment the control is applied on the mirror is 2 ms. In such cases, the signal-to-noise is good enough to allow the full

control of the modes and the maximum gain can be applied to all modes.

8.4. Stars with $7 \leq m_V \leq 9$

It is a regime where some noise appears on the measurements. An example of such a case has already been presented in Fig. 12. The first modes can always be fully controlled with the maximum bandwidth, but the high order ones begin to be filtered.

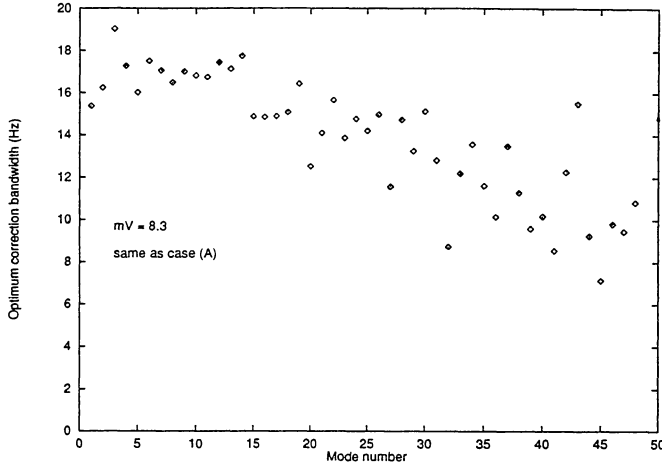


Fig. 15. Optimum correction bandwidth computed on a slope set record of 1024 frames long. The conditions are a $r_0(500 \text{ nm}) = 9.6 \text{ cm}$, a correlation time of 50 ms, a $m_V = 8.3$, a diameter of 0.8 arcsec. The sampling frequency is 200 Hz. Data recorded on Sept. 1st 1993, at 5h29 UT

The two cases presented here (Figs. 15/16 and 17/18) are taken on the same reference object (Titan), with the same WFS and in the same conditions but two nights apart. The correction bandwidths are the same for the low-order modes but become slightly different for higher-order ones. Figures 15 and 17 show the optimum correction bandwidth for each mode, and Figs. 16 and 18 are the associated plots showing the correction efficiency: the value plotted is the ratio between the corrected and uncorrected phase error of each individual mode. This ratio tends towards 1 as the mode order grows, showing that the correction becomes less efficient for high spatial frequencies. This is due to the decrease in the mode signal to noise ratios, along with the increase of their evolution speed.

8.5. Stars with $10 \leq m_V \leq 11$

The object selected here is a star of $m_V = 10.6$. The real magnitude of the star (SAO 167022) was $m_V = 7.5$, but it has been reduced to $m_V = 10.6$ with a neutral density filter since it was used during an astronomical observing run as a point spread function calibration for another source of magnitude 10.5. The conditions of seeing are good. The

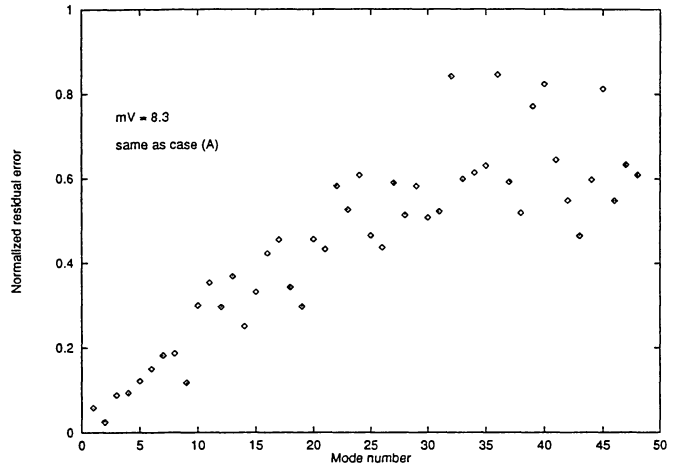


Fig. 16. Ratio between the phase variance after correction and before, corresponding to Fig. 15. The first modes are well corrected while higher order modes are not. In this case only 25 modes are corrected better than 50%. It must be noticed that contrary to the optimum bandwidth values, the normalized residual error determination is not accurate, except for good correction cases

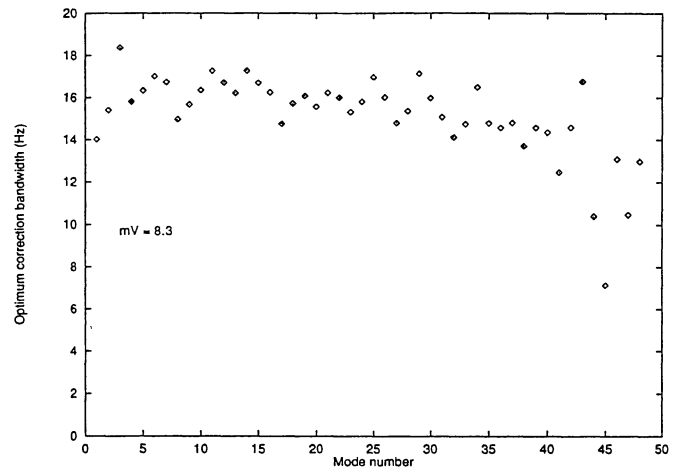


Fig. 17. Optimum correction bandwidth computed on a 1024 frames long slope set record. The conditions are a $r_0(500 \text{ nm}) = 8.1 \text{ cm}$, a correlation time of 55 ms, $m_V = 8.3$. The sampling frequency is 200 Hz. Those data have been recorded on Sept. 3rd 1993, at 07h17 UT

optimum bandwidths and correction efficiency are shown in Figs. 19 and 20. It is interesting to notice that despite the magnitude of 10.6, the normalized residual errors are much better than for the previous cases. Nearly all the modes are corrected better than 50%. The sampling frequency was 200 Hz, as in the previous cases. The difference stands in the seeing conditions: the r_0 value is 13.3 cm, but the correlation time is $\tau \approx 160 \text{ ms}$. This is approximately 3 times larger than in the previous paragraph (8.4).

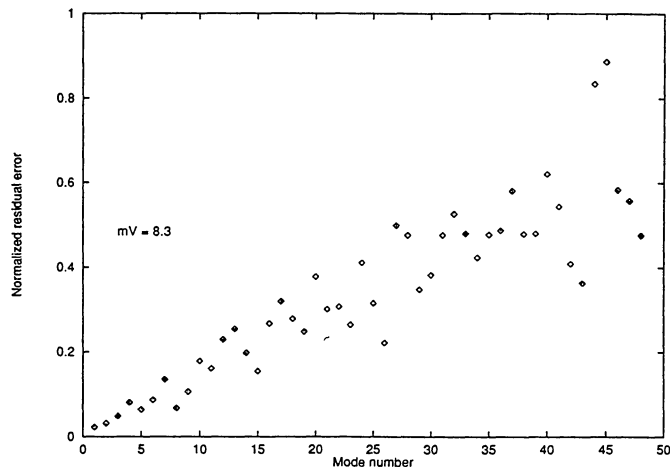


Fig. 18. Ratio between the phase variance after correction and before, corresponding to Fig. 17. The correction efficiency decreases with the mode order. Only 42 modes are corrected better than 50%

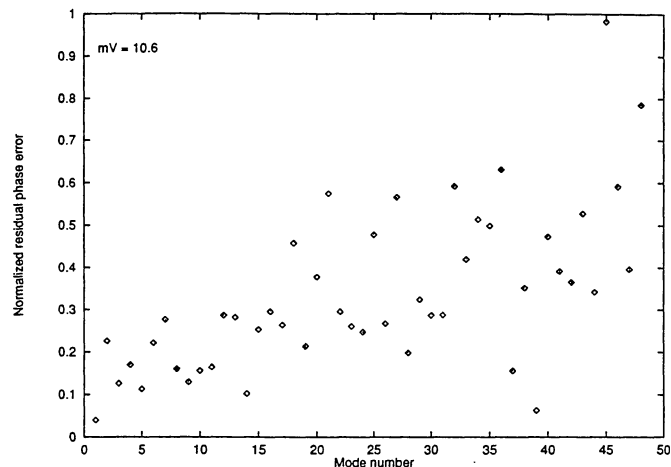


Fig. 20. Ratio between the phase variance after correction and before, corresponding to Fig. 19. There are 41 modes corrected better than 50%

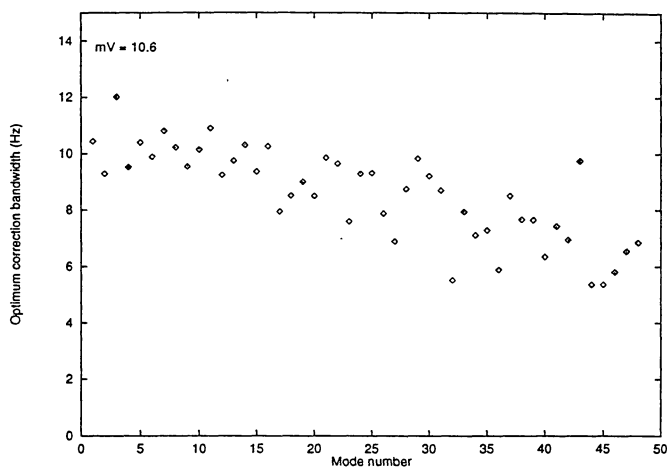


Fig. 19. Optimum correction bandwidth computed on a 1024 frames long slope set record. The conditions are a $r_0(500 \text{ nm}) = 13.3 \text{ cm}$, a correlation time of 160 ms, an equivalent magnitude of $m_V = 10.6$. The sampling frequency is 200 Hz. The data have been recorded on Oct. 27th 1993, at 06h27 UT

8.6. Stars with $12 \leq m_V \leq 13$

The first example is taken on a $m_V = 12.3$ magnitude star. The sampling frequency used is 100 Hz. Due to the good seeing conditions ($r_0 = 16.6 \text{ cm}$ at 500 nm) the signal to noise ratios are poor, leading to low correction bandwidths. This is enhanced by the slowness of the turbulence: ($\tau \approx 100$ to 160 ms). Again, the inclination of the telescope (more than 30 degrees from the zenith) makes the turbulence anisotropic. Figure 21 shows the optimum bandwidths and Fig. 22 the normalized residual errors.

In Fig. 22, the strong uncertainty on the residual phase error really becomes a nuisance. Only the two first modes have a signal to noise ratio greater than 2: the modes 3 to 10 have signal to noise ratios comprised between 0.8 and 0.08, and most of the other modes are below 0.1. Hence, an error of 5% on the noise level makes 50% error on the normalized residual error. The data have been plotted between 0 and 1, but 3 values were found to be greater than 1, and 7 found to be negative. The plot is simply indicative. It allows one to guess the global shape of the curve, but one cannot trust the individual values: a theoretical analysis would give better results. However, despite the bad quality of these values, it is recalled that the uncertainty on the optimum bandwidth is less than 5%.

8.7. Stars with $m_V \approx 14$

The correction capabilities at this low flux level are extremely dependent on the turbulence conditions. The values of r_0 and the correlation time are the determining factors.

8.8. Special cases

8.8.1. Fast turbulence

A particular case of correction applies when the turbulence conditions are exceptionally fast. A correlation time of the order of magnitude of the sampling frequency is needed. In such conditions, the optimization will lead to tuning the correction bandwidth primarily because of the turbulence speed, rather than because of the noise level. When the correlation time of the mode, although short, is sufficiently long to be corrected by the system, a large correction bandwidth is applied. When the mode correlation time is shorter than the integration period plus the

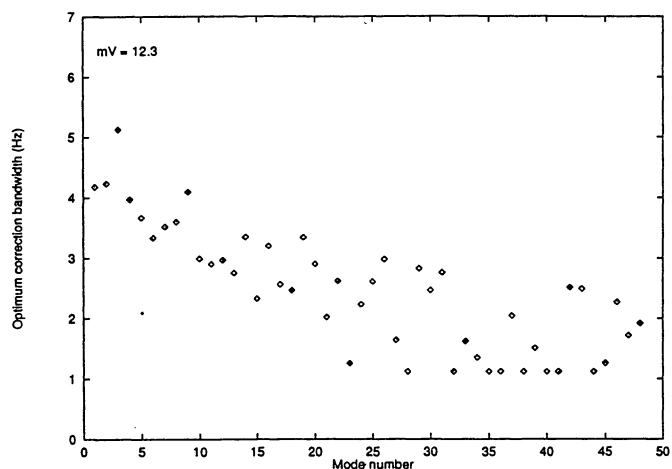


Fig. 21. Optimum correction bandwidths, in Hz, versus the mode number. The seeing conditions are good and the evolution speed is pretty slow. $r_0 = 16.6$ cm at 500 nm and $\tau \approx 100$ to 160 ms. This tends to produce low correction bandwidths, here between 1 and 5 Hz (the minimum value of 1.12 Hz was imposed by the software)

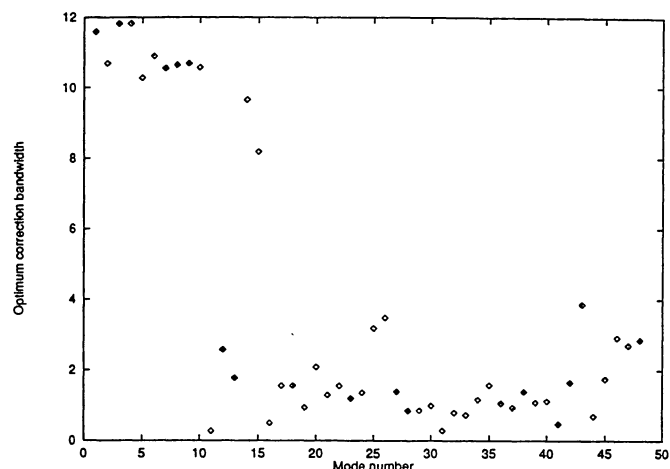


Fig. 23. Optimum correction bandwidth in terms of the mode number. The sampling frequency is 100 Hz. The r_0 is 8.5 cm, and the correlation time of the angle of arrival is 30 ms. The correlation time of the tilt is 150 ms, it is 45 to 35 ms for the defocus and astigmatism-like modes, and 20 to 5 ms for the higher modes

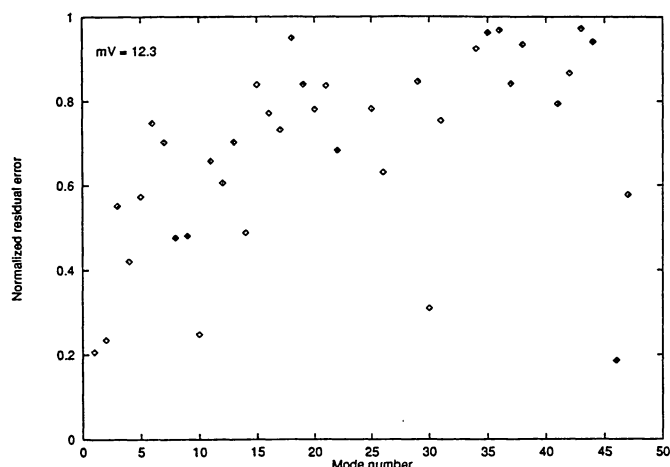


Fig. 22. Ratio between the phase variance after correction and before, corresponding to Fig. 21

time delay, the mode is completely suppressed. This leads to situations where the modal gains behave in a binary way. The low-order modes nearly have the maximum correction bandwidth while the others, higher order modes, are not controlled (0 Hz bandwidth).

In the general case, the correction bandwidth difference between low and high order modes increases with the speed of the turbulence, and the gap becomes a maximum when the correlation time of the highest modes reaches the sampling time. Figure 23 shows an example of such a case. After more thorough study, this case has been shown (Gendron & Léna 1994b) to be due to a turbu-

lence produced by a single layer moving along at a speed of 14 m.s^{-1} .

8.8.2. Fan problem

Telescopes are usually designed to offer pointing accuracies better than the seeing conditions. During the Come-OnPlus observations in December 1993, an unexpected pointing error problem, until then hidden by the seeing, was discovered, causing the modal control algorithm to reduce the tilt correction bandwidth to an abnormal value far below higher order modes. After investigation, the cause was found to be a vibration produced by a cooling fan at a frequency of 25 Hz, of about $0.3''$ peak to peak. Given the sampling frequency used on the WFS, this vibration was in a zone of the system correction transfer function where it was amplified rather than corrected, unless the correction bandwidth was reduced.

Firstly, this proves the independence of the modal control optimization in terms of the perturbation to correct. Secondly, it shows that the use of an AO system does not always relax the telescope stability requirements, but may impose some new constraints on it.

9. Number of corrected modes in terms of the star magnitude

We propose here to sum up the conclusions of the previous section. Unfortunately there is no synthetic parameter characterising the correction. The residual phase variance strongly depends on the uncorrected variance; their ratio depends on the correlation time. In order to characterize the correction efficiency in a modal way, we chose to

plot the number of corrected modes in terms of the reference star magnitude. Knowing that no mode is completely corrected or uncorrected (see Figs. 16, 18, 20 and 22) we arbitrarily decided that a mode is corrected or not according to the ratio between the corrected phase variance and the uncorrected one. It is considered as corrected when this ratio is below a given threshold. Figure 24 shows the number of corrected modes in terms of the magnitude, for a threshold of 0.20. Figure 25 shows the same set of data, with a threshold of 0.50.

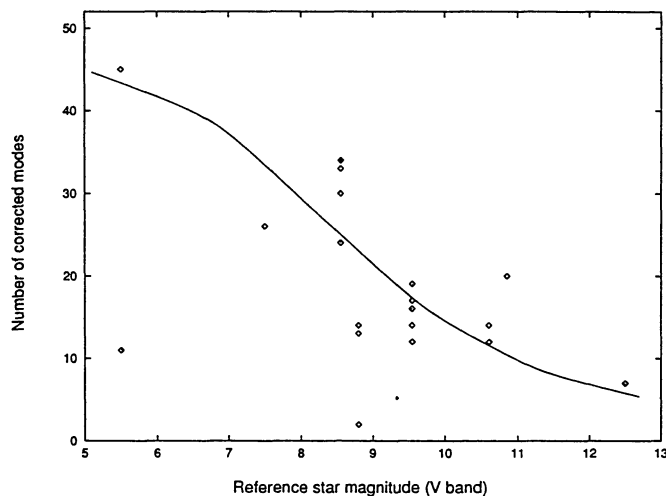


Fig. 24. Number of modes on which the phase error after correction is less than 0.20 times the initial phase error, versus the magnitude of the reference star

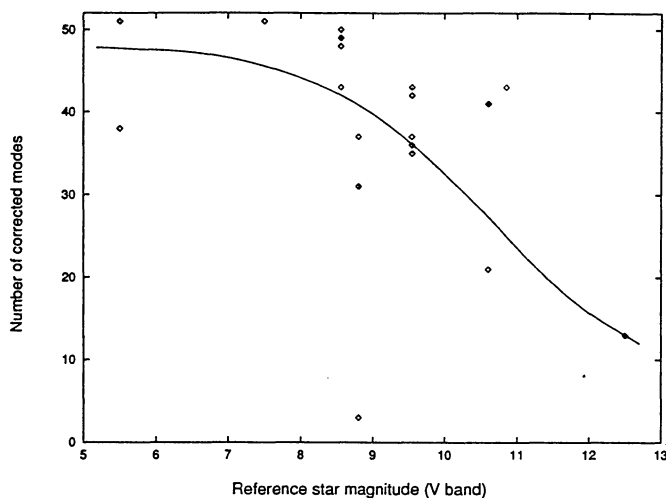


Fig. 25. Number of modes on which the phase error after correction is less than 0.50 times the initial phase error, versus the magnitude of the reference star

The points spread widely around the average value. The main reason for this dispersion is not the lack of accuracy of the determination method. As a matter of fact these deviations are significant. In some cases they depend on the reference object observed, but for most of them

they are characteristic of different turbulence conditions and atmospheric structure. The parameters r_0 and τ_0 do not suffice to entirely define the state of the turbulence.

10. Conclusion

We studied the behavior of the modal control optimization process using the data collected with the astronomical AO system ComeOnPlus and demonstrated its efficiency in terms of minimizing the overall phase variance, taking into account any specific configuration of the observing conditions.

A key point for a correct computation of the optimization is a good knowledge of the WFS noise level. It has been shown that the method used to derive it allows one to obtain an relative accuracy of about 10% on the averaged noise variance, and shows evidence of noise inhomogeneities between subapertures. This last point is of importance since the modes having a large value in front of the noisiest subapertures will be primarily affected.

The data from ComeOnPlus also allowed us to demonstrate that the turbulence itself may be spatially and temporally inhomogeneous over the pupil.

The impact on the optimization process of the inaccuracies in the noise measurement has been studied, as well as the robustness of the optimization. In most of the cases the minimum of the phase residual error is reached with a relative error of 1% which is small, given the error bars on the noise determination and the non-stationarity of the turbulence.

Different cases have been illustrated, from magnitude $m_V = 8$ to 12, showing the correction to decrease progressively. For a given reference magnitude, the number of corrected modes may strongly vary from night to night because of the turbulence structure. This is the advantage of this optimization scheme, namely to be independent of any model and to rely only on the experimental data: it really allows the adaption of the correction to any situation. The magnitude scale used here is totally dependent on the ComeOnPlus system: e.g. increasing the quantum efficiency of the WFS photocathode by a factor of 2 would shift all the magnitudes.

One could object that using different gains for each mode is not always useful. Many cases exist, mainly when the correction is good, where the modal gains spread weakly around a mean value and where all the gains could be replaced by their average, hence leading to the classical zonal control. The point is that one does not know that this is appropriate as long as the optimization algorithm has not been applied. And once it has been applied there is no argument for using the average gain value rather than the modal gains themselves.

As we took the ComeOnPlus system as an example, the case of an integral compensator with a gain has been studied here. Further improvements may lead to more complex compensators where several parameters per mode

are to be optimized, instead of one in the present case. However the principle remains the same, as long as the close loop transfer function can be modeled.

Another practical problem to solve is to decide how often the optimization scheme has to be applied. While integrating hours on a particular object, atmospheric conditions do vary. In such a case the optimization must be redone while the loop is closed. To obtain the required open loop set, one deduces it from a close loop one by adding to this latter the mirror deformation as seen by the WFS, i.e. the sequence of the mirror driving signals multiplied by the interaction matrix.

Having chosen the residual phase variance as the optimization indicator, there was no need to examine the images themselves, as they are provided by the camera associated with the AO system. Indeed, it is straightforward to deduce the image properties from a knowledge of the wavefront. On the other hand, users of AO work on images. In a forthcoming paper (Beuzit et al. 1994) a detailed analysis of observed astronomical images will be presented, when applying modal control optimization.

Acknowledgements. E. Gendron wishes to thank all the members of the ComeOnPlus team who helped him to implement this software. Special greetings to L. Demailly for the design of the software structure and G. Rousset for helpful discussions, M. Faucherre and J.L. Beuzit for technical support. E. Gendron has been supported by a CIFRE (Convention Industrielle de Formation par la Recherche) PhD contract kindly provided by the company Laserdot and the Association Nationale pour la Recherche Technique (ANRT).

Appendix

We propose to evaluate $\epsilon_0(\nu_0) \cdot \epsilon''(\nu_0)$ (see notation in 7.2) knowing we only need a rough estimate. A very simple model is assumed: the turbulent spectrum is in $A \cdot f^{-u}$, and the noise introduced is proportional to the correction bandwidth. Hence the residual error in terms of the correction bandwidth ν is

$$\epsilon(\nu) = b_0 \cdot \nu + A \cdot \int_{\nu}^{\infty} f^{-u} df \quad (18)$$

the derivative of which is

$$\epsilon'(\nu) = b_0 - A\nu^{-u} \quad (19)$$

Hence, the optimum correction bandwidth ν_0 is obtained when the previous expression equals zero, or

$$\nu_0 = (A/b_0)^{1/u} \quad (20)$$

The second derivative of $\epsilon(\nu)$ at ν_0 is

$$\epsilon''(\nu_0) = \frac{u b_0}{\nu_0} \quad (21)$$

and the error at ν_0 is

$$\epsilon(\nu_0) = b_0 \cdot \nu_0 \frac{u}{u-1} \quad (22)$$

Finally, one gets the expected quantity

$$\epsilon(\nu_0) \cdot \epsilon''(\nu_0) = b_0^2 \frac{u^2}{u-1} \quad (23)$$

References

- Beckers J.M. 1993, ARA&A 31, 13
 Beuzit. J.L. et al. 1994, A&A, to be submitted
 Conan J.M., Madec P.Y., Rousset G. 1992, 13th Sacramento Peak Summer Workshop on Real time and post-facto solar image correction
 Cuby J.G., Richard J.C., Lemonier M. 1990a, Proc. SPIE 1237, 538
 Cuby J.G., Kern P., Rigaut F., Rousset G. 1990b, Optique adaptative et VLT, eds. D. Alloin, P. Léna, Forum de l'Observatoire de Paris, 17
 Ellerbroek B.L., Van Loan C., Pitsianis N.P., Plemmons R.J. 1994, JOSA 11, 2871
 Gendron E., Cuby J.G., Rigaut F. et al. 1991, Proc. SPIE 1542
 Gendron E. 1993, ed. F. Merkle, ICO Conf. on Active and Adaptive Optics, 187
 Gendron E., Léna P. 1994a, A&A 291, 337
 Gendron E., Léna P. 1994b, Experimental Astronomy, to be submitted
 Hermann J. 1992, JOSA Comm. 9, 2257
 Hubin N., Beuzit J.L., Gigan P. et al. 1992, Proc. SPIE 1780, 87
 Léna P. 1990, Optique adaptative et VLT, eds. D. Alloin, P. Léna, Forum de l'Observatoire de Paris, 1
 Léna P. 1994, Proc. SPIE 2201, 1099
 Léna P. 1994b, eds. D. Alloin, J.-M. Mariotti, Adaptive optics for astronomy, NATO-ASI (Kluwer) 321
 Madec P.-Y., Conan J.-M., Rousset G. 1992, ed. M.-H. Ulrich, ESO Conf. on Progress in Telescope and Instrumentation Technologies, 471
 R.J. Noll, 1976, JOSA 66, 207
 Rigaut F., Rousset G., Kern P. et al. 1991, A&A 250, 280
 Roddier F., Northcott M., Graves J.E. 1991, PASP 103, 131
 Roddier F., Northcott M., Graves J.E., McKenna D.L. 1993, JOSA 10, 957
 Rousset G. 1992, private communication
 Rousset G., Beuzit J.-L., Hubin N. et al. 1993, ed. F. Merkle, ICO Conf. on Active and Adaptive Optics, 65
 Rousset G. Beuzit. J.L., Hubin N. et al. 1994, Proc. SPIE 2201, 1088
 Sante R.L. 1975, Proc IEEE 63 No. 12, 1669
 Wang J.Y., Markey J.K. 1978, JOSA 68, 78
 Wild W., Kibblewhite E., Scor V. 1994a, Proc. SPIE 2201, 726
 Wild W., Kibblewhite E., Shi F. et al. 1994b, Proc. SPIE 2201, 1121

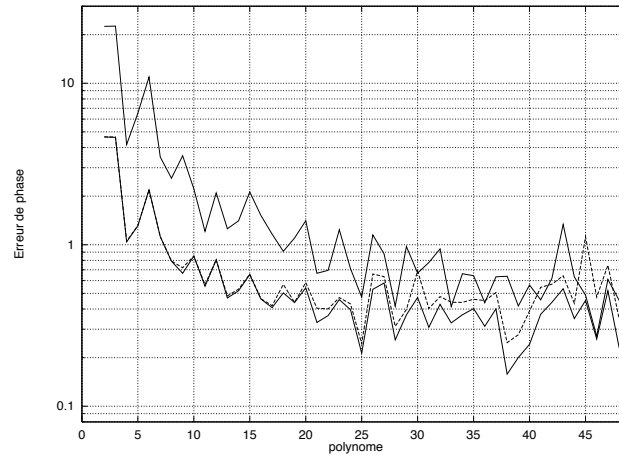


Figure 3.40: La figure donne la variance de phase, en rd^2 à $0.5\mu\text{m}$, associée à chaque mode du miroir. En abscisse est porté le numéro du mode. La courbe supérieure, en trait plein, correspond au cas non corrigé. La courbe inférieure en gras correspond au cas de la correction modale optimisée, la courbe en pointillés au cas d'une correction zonale optimisée.

3.4.2 Quelques compléments

Ce paragraphe complète l'article précédent sur certains points particuliers. Je montre l'influence de la correction optimisée sur les modes du miroir, en les comparant au cas de la commande zonale (j'entends par base zonale la base propre des actuateurs du système). Je discuterai ensuite l'influence de la base des modes choisie pour la commande: je veux montrer que le point crucial est d'abord la qualité de l'*optimisation*, avant d'être le choix de la base des modes.

Pour comparer le contrôle modal au contrôle zonal, j'ai choisi de comparer le "modal optimisé" au "zonal optimisé", ce dernier terme signifiant que la bande passante globale du système est optimisée, à l'aide d'une procédure identique à celle qui optimise la commande modale, mais sur la base des actuateurs du miroir. Car si l'on compare le "modal optimisé" au "zonal non optimisé", pour lequel la bande passante est maximale (voir section 2.5), les chiffres sont éloquentes: le "zonal non optimisé" apparaît absurde.

La figure 3.40 a été obtenue uniquement à partir d'une file circulaire non asservie, les conditions de turbulence et d'observation étant les suivantes: r_0 : 10.6 cm, temps de corrélation: 220 ms, bruit sur les mesures: 0.148 pix^2 soit 70 rd^2 , fréquence d'échantillonnage: 100 Hz, analyseur: EBCCD, flux: 14 photoélectrons/spp/trame. Cette figure donne la variance résiduelle de phase de chaque mode du miroir dans trois cas de figure: non asservi, asservi en correction modale optimisée, et asservi en zonal optimisé (gain de 0.3 sur tous les modes). Les deux dernières quantités ont été déterminées par l'algorithme de l'optimisation modale à partir de la file non

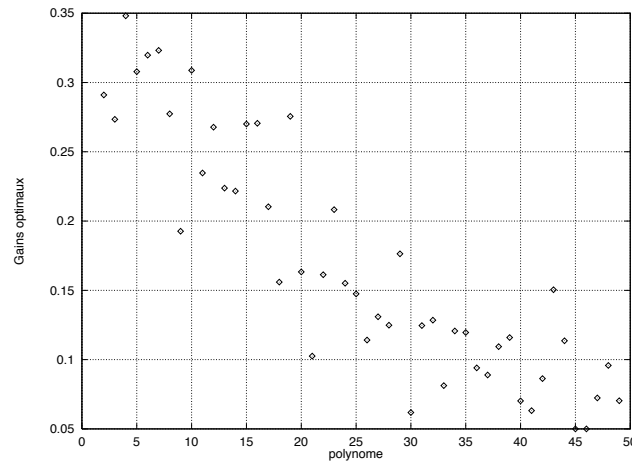


Figure 3.41: Gains correspondant à l'exemple de correction modale optimale décrite dans la figure précédente.

asservie. Pour comprendre pourquoi j'ai choisi un gain de 0.3, la figure 3.41 montre les gains optimaux sur les modes du miroir: le gain optimal moyen correspondant aux premiers modes est en effet voisin de 0.3, et le tableau suivant, qui montre les variances résiduelles de phase, prouve aussi que c'est le gain pour lequel la correction zonale optimisée est la plus efficace.

	Prédit par l'optimisation	Mesuré
Non asservi	–	112 rd ²
Commande modale optimisée	32 rd ²	33 rd ²
Commande zonale non optimisée	90 rd ²	–
Commande zonale $g = 0.4$	42 rd ²	–
Commande zonale $g = 0.3$	36 rd ²	35 rd ²
Commande zonale $g = 0.2$	36 rd ²	35.5 rd ²
Commande zonale $g = 0.1$	44 rd ²	42 rd ²

On note donc sur la figure 3.40 que pour les 15 premiers modes la correction aurait très bien pu s'accommoder d'un gain de 0.3 sans que cela nuise à l'erreur résiduelle de phase. C'est une conséquence de ce que j'ai déjà dit dans l'article qui précède: l'erreur de phase en fonction du gain varie très faiblement autour du gain optimal, et sa détermination n'est pas très pointue. En revanche pour les modes d'ordre plus élevé, on note une différence. Mais si on compare l'erreur totale dans les deux cas, on constate qu'elle est, à 10% près, quasiment identique.

Le choix judicieux d'une base particulière permet en effet de réduire l'erreur résiduelle de phase à une valeur minimale. Mais de ce point de vue la majeure partie du gain est apportée par l'optimisation des modes d'ordre bas. Cela signifie-t-il que l'optimisation de la correction des modes d'ordres élevés est inutile ? Non, car non optimisés ils participent à la perte de corrélation spatiale de la phase sur la pupille, laquelle entraîne la baisse du rapport de Strehl (voir le paragraphe sur le rapport

de Strehl dans la section 1.1.4). Cependant, l'ensemble des modes d'ordres élevés (modes 25 à 50 dans l'exemple de la figure 3.41) sont généralement peu différenciés au niveau de la bande passante de correction par l'algorithme de l'optimisation; ils constituent un espace de commande dans lequel il est difficile d'exhiber des vecteurs possédant des caractéristiques bien spéciales. Ainsi, il serait par exemple envisageable de construire une commande zonale optimisée pour un cas de figure tel que celui décrit ci-dessus: l'idée n'est pas trop irrationnelle, puisque la différenciation entre modes d'ordres bas et modes d'ordres élevés n'est pas si critique. Elle devient en revanche de plus en plus critique avec la baisse du flux. Lorsque le flux de photons n'autorise pas la commande de plus d'une dizaine de modes, il est alors nécessaire de les choisir correctement, et on prendra naturellement les modes qui tendent vers les Karhunen-Loeve de l'espace du miroir. Cette constatation a également été faite par Ellerbroek et al. (1994), qui remarque qu'une commande comprenant seulement deux bandes passantes de correction différentes permet déjà d'atteindre une très bonne optimisation. Néanmoins, on ne perd rien, au contraire, à commander avec des gains différenciés sur une base de commande plus complexe: cela assure d'être le plus souvent possible proche de l'optimum *optimorum* sans nuire à la complexité de la procédure de mise en œuvre. Le choix d'une base modale bien adaptée se justifie en premier lieu par l'argument de la sécurité dans tous les cas de figure, plutôt que par la nécessité.

3.5 Propriétés de la phase corrigée

Parce que l'astronome est intéressé par les propriétés de l'image corrigée, je voudrais dire quelques mots sur les caractéristiques de la phase corrigée en sortie de l'optique adaptative dans différents cas de figure, et sur la reconstruction potentielle de la fonction d'étalement de point.

3.5.1 Spectre temporel des fluctuations corrigées

Avant d'étudier l'aspect spatial de la correction, je voudrais rappeler que l'évolution des perturbations résiduelles du front d'onde après correction par l'optique adaptative est à haute fréquence temporelle, et ce d'autant plus que l'objet de référence est brillant.

On a déjà vu dans la section 2.5 que la fonction de transfert temporelle de correction atténue en priorité les basses fréquences, mais amplifie l'aile haute fréquence du spectre. A titre d'exemple les figures 3.42, 3.43 et 3.44 montrent respectivement la densité spectrale de puissance du tilt non asservi, puis asservi, puis le rapport de ces deux spectres. On reconnaît dans cette dernière figure la forme de la fonction de transfert théorique donnée figure 2.8. Dans ce cas, le rapport signal sur bruit est

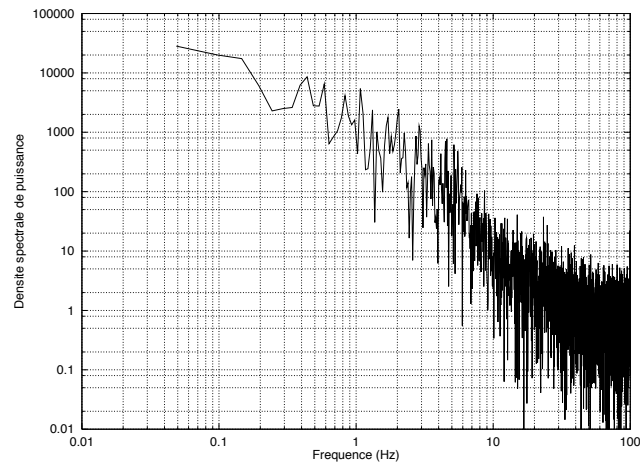


Figure 3.42: Densité spectrale de puissance des fluctuations du tilt non corrigé. Les basses fréquences temporelles dominant. Données expérimentales, 26/10/93, 1h59 TU.

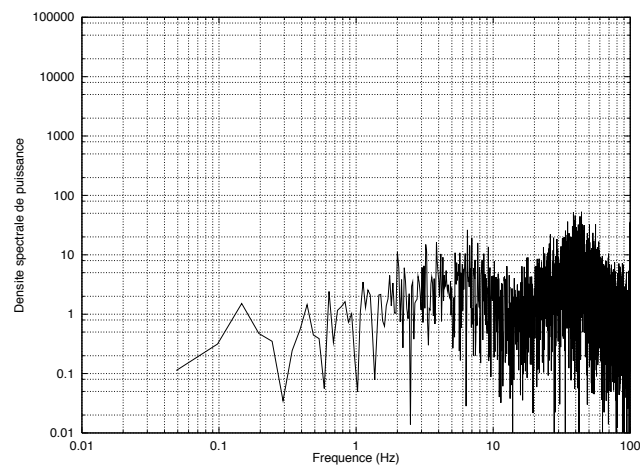


Figure 3.43: Densité spectrale de puissance des fluctuations du tilt après asservissement. Les basses fréquences ont été fortement atténuées, les hautes fréquences amplifiées. Données expérimentales, 26/10/93, 2h04 TU.

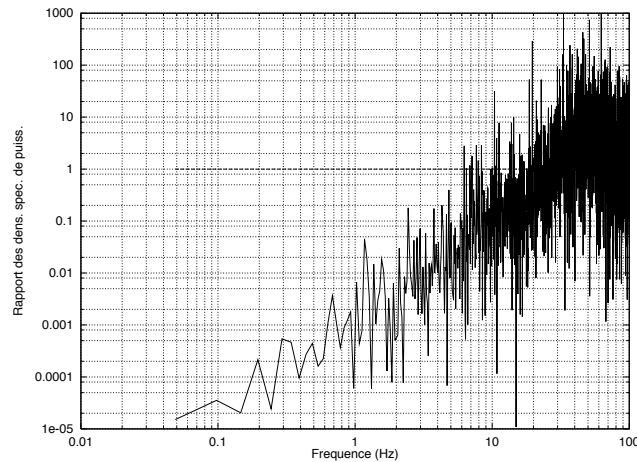


Figure 3.44: Rapport des densités spectrales de puissance du tilt asservi et non asservi précédentes. On retrouve la fonction de transfert de correction du système.

bon (plus de 60), donc la bande passante de correction appliquée est élevée (environ 20 Hz).

Dans le cas d'une correction à plus faible flux, la bande passante de correction est plus réduite, donc le résidu des fluctuations régresse, tout en s'amplifiant, vers les basses fréquences temporelles. Comment cela se traduit-il sur l'image ? Si celle-ci est bien corrigée, les écarts entre les différentes poses affecteront surtout la forme globale de l'image; les tavelures qui peuvent éventuellement apparaître pendant un temps d'intégration de l'analyseur auront disparu à la trame suivante. Ainsi dans ces conditions, pour des poses supérieures à la seconde sur la caméra d'imagerie, l'allure générale de l'image sera le reflet de la valeur du seeing correspondant à chaque pose. En mode speckle les défauts apparents ne sont pas corrélés d'une pose à l'autre. En revanche sur des objets plus faibles il est à craindre l'apparition de tavelures dans la partie lointaine du halo ($0.5''$) de l'image corrigée, celles-ci provenant des modes non corrigés. Le phénomène s'intensifie progressivement au fur et à mesure que le flux disponible sur l'analyseur décroît.

3.5.2 Qualité temps réel des images

Un souhait de l'astronome est de pouvoir obtenir un facteur de qualité sur chacune des poses, de manière à pouvoir apparier correctement, à qualité identique, les poses faites sur l'objet et celles faites sur la référence. Je voudrais parler de ce problème et des différents concepts qui gravitent autour dans ce paragraphe.

Le but serait, dans l'idéal, d'obtenir en temps réel une estimation de la qualité de l'image. Il n'est en général pas pensable de reconstruire la fonction d'étalement de point en temps réel à partir des données du Hartmann, je vais y revenir dans le paragraphe qui suit (3.5.3). En revanche, il est possible d'estimer en temps réel cer-

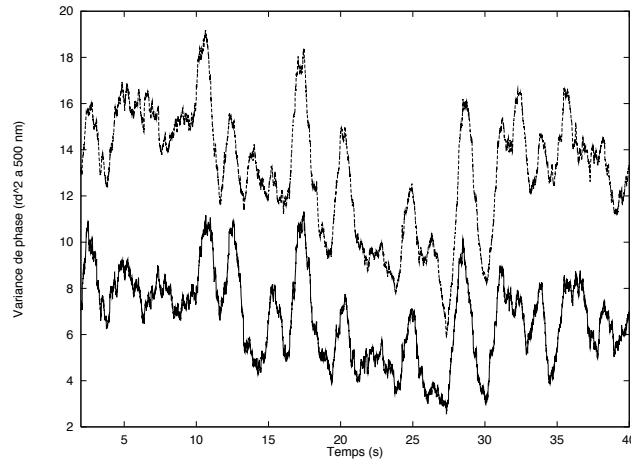


Figure 3.45: Exemple d'évolution temporelle de la phase au cours du temps. Courbe inférieure: valeur de l'erreur résiduelle de phase en fonction du temps. Courbe supérieure: valeur de la norme des mesures (exprimée en rd^2) en fonction du temps. Les radians sont donnés à $0.5\mu\text{m}$. La file circulaire considérée est une file asservie, l'objet de référence est Titan ($m_V = 8.3$), le r_0 est estimé à 13 cm (non asservi), données recueillies le 15/9/94, à 3h59 TU.

tains paramètres variant de manière strictement monotone par rapport à la qualité de l'image. Je ne dis pas que cette approche est la meilleure, mais je pense que c'est celle qui a les chances d'aboutir le plus rapidement avec le plus de succès. La variance de phase instantanée n'est pas un bon estimateur de la qualité d'image: cependant cette dernière dépend grandement du spectre spatial des perturbations. Un bon estimateur de la qualité d'image est, je pense, la norme des mesures du Hartmann. Je montre sur la figure 3.45 l'évolution temporelle de la somme du carré des mesures, et l'évolution temporelle de la variance de phase. Les deux courbes se suivent d'assez près. Où se situe donc la différence? La variance de phase est l'intégrale du carré de ϕ sur la pupille, alors que la norme des mesures est l'intégrale du carré du *gradient* de ϕ . Or on reproche à la variance de phase de ne pas représenter suffisamment étroitement la qualité d'image, à cause de la "pondération" insuffisante des modes d'ordre élevés. La norme des pentes compense précisément ce déficit, puisque l'opération de dérivation met précisément en valeur les hautes fréquences.

Je montre pour conclure une étude menée sur la relation liant les résultats du Hartmann aux images courte pose. J'ai enregistré une file circulaire (durée 80 s), et pendant le même temps une série d'images courte pose a été enregistrée sur la caméra IR (durée 20 s). La série d'images a été dépouillée par Oskar von der Lühe, qui en a extrait la largeur à mi-hauteur en fonction du temps. Les files circulaires et les images n'étant pas synchronisées, nous avons cherché, pour retrouver la correspondance de l'une et l'autre dans le temps, à maximiser la corrélation entre la largeur à mi-hauteur des images d'une part et l'erreur de phase en fonction du temps déterminée d'après les données de la file d'autre part. La bonne correspondance est apparue de manière

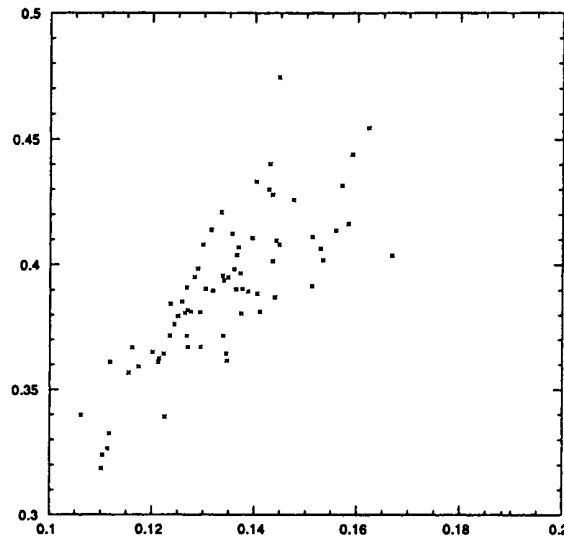


Figure 3.46: En abscisses : valeur de r_0/D estimé sur l'image corrigée. En ordonnées : valeur proportionnelle à r_0/D estimé d'après la variance de phase non corrigée déduite de la file circulaire. La corrélation entre les deux grandeurs est de 0.8. Données du 8/4/93, 5h09 TU.

unique et incontestable, la corrélation passant de fluctuations de quelques dizaines de pourcents à 75%. Le graphe 3.46 montre le résultat obtenu: il s'agit de la valeur du r_0/D équivalent déterminé d'après la file (à une constante multiplicative près) en fonction du même paramètre déterminé sur les images. Le nuage de points est bien loin de constituer une fonction monotone précise. Malgré tout, chaque point est associé à une image courte pose: il est donc normal de voir apparaître pour chaque point une erreur conséquente. Sur des images longue pose, les erreurs doivent se moyennner d'un côté comme de l'autre. Il serait intéressant de poursuivre cette étude qui, malheureusement, a dû s'arrêter là.

3.5.3 Reconstruction de la réponse impulsionnelle, le défi

Que reste-t-il des mesures données par le Hartmann après correction par l'optique adaptative ? Je veux répondre ici à cette question, pour aborder le problème de la reconstruction de la fonction d'étalement de point qui se fait précisément grâce à ces mesures.

S'il reste quelque chose de non négligeable dans les mesures du Hartmann, on est en droit de se demander pourquoi l'optique adaptative ne l'a pas corrigé. Il y a quatre réponses, simultanément valables:

- ce sont des défauts à trop haute fréquence temporelle, et la bande passante du système était insuffisante

- ce sont des défauts de fréquence spatiale élevée, que le miroir n'a pas pu corriger
- ce sont des défauts dont l'amplitude est couverte par le bruit de mesure
- c'est du bruit.

Ainsi, si je veux extirper le signal turbulent, je vais devoir extraire un signal à haute fréquence spatiale et temporelle. Analysons l'aspect temporel: si j'espère construire un filtre adapté ou effectuer un filtrage de Wiener, le meilleur filtre sera presque un Dirac (chose en général assez peu filtrante !). Si j'espère reconstruire spatialement la phase, il faudra s'attendre à des effets de repliement très importants: le spectre spatial à reconstruire est quasiment blanc. Enfin j'ai eu l'occasion de mesurer des rapports signal sur bruit sur des files circulaires asservies: le meilleur rapport signal sur bruit est de l'ordre du dixième. En général il avoisine plutôt 1/100. La reconstruction de la fonction d'étalement de point d'après les données du Hartmann constitue à mon avis un véritable défi. Dans certains cas de bon rapport signal sur bruit, avec une turbulence rapide (de manière à laisser un gros résidu non corrigé), il est peut-être possible de tirer un résultat. Mais pour la plupart des cas qui concernent les objets astronomiques, la tâche est difficile.

La bonne approche est donc certainement une approche statistique. D'après l'état estimé de la turbulence, spatialement et temporellement, connaissant le niveau de bruit, en extrapolant ce qu'on ne voit pas, il est possible de tirer des conclusions sur la forme précise du résidu de phase. L'algorithme d'optimisation de la commande modale apporte déjà une bonne partie de la réponse puisqu'il sait calculer le résidu de phase pour chaque mode. Cela permet d'obtenir un modèle de la fonction d'étalement de point, éventuellement de le faire évoluer en fonction du seeing ou de la vitesse de la turbulence. Mais le calcul de la forme précise de la fonction d'étalement de point à tel ou tel moment, pendant telle ou telle pose, est difficilement envisageable.

Dans sa thèse, J.M. Conan propose une méthode de reconstitution de la réponse impulsionnelle, basée sur le calcul de la fonction de structure de phase correspondante aux modes d'ordre bas (modes que le senseur est susceptible de reconstruire correctement), et en extrapolant la fonction de structure des modes d'ordre élevés. Une telle méthode fonctionne d'autant mieux que la turbulence est forte et rapide et que le bruit de mesure est faible, de manière à ce que le rapport signal sur bruit du résidu de phase soit important.

3.6 Images

Cette section complète le paragraphe 3.3.2, car j'y présente les profils des images associées aux différents points de mesure du bruit exposés dans la figure 3.37. Les car-

actéristiques exactes de ces points sont précisés dans le tableau qui suit. Le but n'est pas de présenter les notions de correction partielle, ni des performances générales du système en fonction des divers paramètres d'observation: le premier sujet est traité dans la thèse de J.M. Conan, le deuxième le sera dans la thèse de J.L. Beuzit. Ici, je prend l'exemple d'un cas de turbulence typique des conditions de La Silla ($r_0 \approx 10$ cm, $t_0 \approx 100$ ms), et je résume les caractéristiques du bruit et de la correction obtenue en fonction de la magnitude de la source de référence. Je compare l'erreur résiduelle de phase prédite par l'optimisation modale à celle mesurée expérimentalement.

flux/tr ($h\nu e^-$)	flux/s ($h\nu e^-$)	m_V	F_e (Hz)	r_0 (cm)	bruit ($\text{rd}^2\text{Hz}^{-1}$)	SR mesuré	Var. ϕ mesurée (rd^2)	Var. ϕ prédite (rd^2)
7.5	270	13.2	35	13 ?	9.5	0.038	?	?
19	650	12.2	35	13	2.2	0.07 ⁽¹⁾	43	45
14	1400	11.4	100	11	1.4	0.08	38	43
35	3500	10.4	100	12.5	0.25	0.195 ⁽¹⁾	20	24
17	3500	10.4	200	13	0.33 ⁽²⁾	0.19	24	20
				10		0.013		
12	430	12.7	35	10	7.5	0.04	58	62
9	930	11.8	100	10	1.5	0.06 à 0.07	42	47
15	1500	11.3	100	10	0.7	0.095 0.105	31	33
15	1500	11.3	100	12.5	0.7	0.10	34	37

(1) : ± 0.01

(2) : passage de cirrus

Le tableau présente plusieurs cas de correction à différents flux, de 270 photoe⁻/ssp/seconde à 3500. Cela couvre donc les magnitudes $m_V = 13.2$ à $m_V = 10.4$. Les conditions générales de seeing sont fluctuantes, autour d'un r_0 de 9 à 13 cm, et des temps de corrélation de l'ordre de 90 ms à 120 ms. On constate dans ce tableau que l'erreur résiduelle de phase prédite correspond assez bien à l'erreur effectivement mesurée.

On notera un fait important: le rapport de Strehl en K de l'image non corrigée est de 0.013 (avec les aberrations du télescope compensées de manière statique), alors que le r_0 dans le visible est égal à 10 cm. Or si $r_0(0.5\mu\text{m}) = 10$ cm, on devrait avoir $r_0(2.2\mu\text{m}) = 59$ cm, ce qui donne $\text{SR}_{2.2\mu\text{m}} = 0.025$. C'est encore un argument qui penche en faveur d'une turbulence porteuse d'une plus grande quantité de hautes fréquences spatiales qu'une turbulence Kolmogorov. Je rappelle que les deux autres arguments sont d'une part la pente haute fréquence du spectre temporel des fluctuations d'angle d'arrivée, et le niveau particulièrement élevé du bruit qui suggère une dispersion des photons (un étalement de la tache) plus important que prévu.

Les figures 3.47 à 3.51 sont les coupes des images associées aux 5 premiers cas de figure présentés dans le tableau. Les images ont été enregistrées dans la bande K, le

Figure 3.47: Coupe radiale de l'image d'un objet ponctuel. Bande K, temps d'intégration: 200 s. Magnitude V: 13.2, lune: pleine, r_0 estimé à 13 cm, temps de corrélation 70 ms, asservissement du tilt (quelques Hz), défocalisation et astigmatismes. Les aberrations du télescope sont corrigées.

temps de pose total est de 200 s. Les coupes sont normalisées de telle sorte que la valeur à l'origine soit égale au rapport de Strehl.

La figure 3.52 résume les performances du système à faible flux, pour des conditions de seeing moyennes. Au fur et à mesure que la magnitude augmente, le rapport de Strehl décroît. Dans les conditions où j'ai asservi pour recueillir ces données, j'estime la magnitude du système à 14. Le terme de magnitude limite n'est pas défini par un critère sur la phase ou sur l'image. Il est défini d'une manière bien plus matérielle: c'est le flux à partir duquel la boucle d'asservissement refuse d'accrocher, donc à partir de laquelle il est nécessaire de changer d'objet d'étude. Pour les mêmes conditions, la magnitude limite en correction zonale non optimisée (gain maximum) est estimée à 11.

3.7 L'hypothèse de la turbulence gelée

3.7.1 Généralités

Je voudrais parler dans cette section d'une hypothèse intéressante et souvent évoquée dans la littérature: l'hypothèse de la turbulence gelée, ou hypothèse de Taylor.

L'hypothèse de Taylor permet d'assimiler les couches turbulentes à un écran de phase gelé se déplaçant transversalement à vitesse constante, autant en norme qu'en direction, devant la pupille du télescope. La notion d'écran de phase est à rattacher au fait que l'atmosphère est stratifiée en couches turbulentes; c'est à l'interface de deux masses d'air de températures différentes que survient la turbulence. Jusqu'ici

Figure 3.48: Coupe radiale de l'image d'un objet ponctuel. Bande K, temps d'intégration: 200 s. Magnitude V: 12.2, lune: pleine, fréquence d'échantillonnage: 35 Hz, r_0 estimé à 13 cm, temps de corrélation 70 ms, asservissement du tilt (quelques Hz), défocalisation et astigmatismes. Les aberrations du télescope sont corrigées.

Figure 3.49: Coupe radiale de l'image d'un objet ponctuel. Bande K, temps d'intégration: 200 s. Magnitude V: 11.4, lune: pleine, fréquence d'échantillonnage: 35 Hz, r_0 estimé à 11 cm, temps de corrélation 70 ms. Les 12 à 15 premiers modes sont corrigés avec une bande passante d'environ 5 Hz, les autres ne le sont pas du tout car la turbulence est trop rapide. Les aberrations du télescope sont corrigées.

Figure 3.50: Coupe radiale de l'image d'un objet ponctuel. Bande K, temps d'intégration: 200 s. Magnitude V: 10.4, lune: pleine, fréquence d'échantillonnage: 100 Hz, r_0 estimé à 12.5 cm, temps de corrélation 70 ms. Environ 30 modes corrigés, les premiers avec une bande passante de 15 Hz et 5 Hz pour les derniers. Les aberrations du télescope sont corrigées.

Figure 3.51: Coupe radiale de l'image d'un objet ponctuel. Bande K, temps d'intégration: 200 s. Magnitude V: 10.4, lune: pleine, fréquence d'échantillonnage: 200 Hz, r_0 estimé à 13 cm, temps de corrélation 70 ms. Environ 30 modes corrigés, les premiers avec une bande passante de 15 Hz et 5 Hz pour les derniers. Malgré la fréquence d'échantillonnage différente, c'est à peu près le même cas de correction que l'image précédente: en effet, le flux par unité de temps est le même. Les aberrations du télescope sont corrigées.

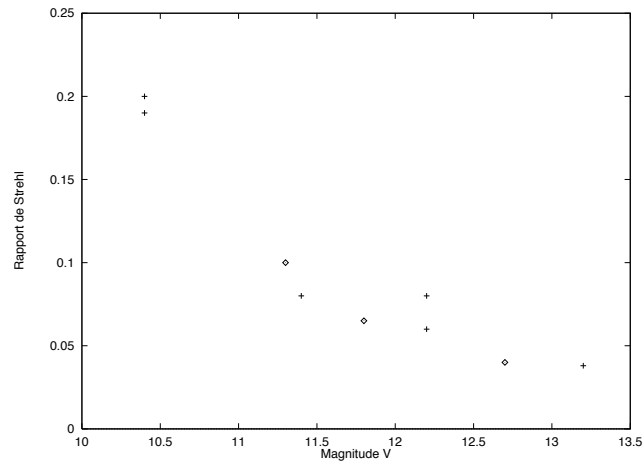


Figure 3.52: Variation du rapport de Strehl en fonction de la magnitude. Ce graphe résume les deux tableaux de données de ce paragraphe. Le rapport de Strehl non corrigé est de 0.013.

la chose est plausible, et même si l'épaisseur de la couche se chiffre en dizaines ou centaines de mètres, l'approximation de champ proche permet de la voir comme un écran mince.

Maintenant comment cet écran peut-il se déplacer ? Et que signifie le terme “déplacer” ? On se doute intuitivement qu'à l'intérieur de la couche les remous turbulents ne sont pas statiques. Ils peuvent se déplacer, avancer, mais on conçoit aisément qu'il leur faille évoluer simultanément. Il y a donc une composante “Taylor”, et une composante “bouillonnante”.

Il y aura toujours au moins une bonne raison pour laquelle il existe dans tous les cas une composante “Taylor” infime. Pour une couche située à 10 km d'altitude, le suivi de l'étoile par le télescope fait se déplacer la projection de la pupille sur la couche à une vitesse de 70 cm.s^{-1} .

De plus, pour convaincre les derniers sceptiques que l'hypothèse de Taylor existe au moins partiellement dans certains cas, il suffit de se représenter l'expérience suivante (il s'agit d'un raisonnement par l'absurde): le télescope est baigné dans une masse d'air d'une température donnée et animée d'un vent v_1 . Sur cette masse d'air “repose” une masse d'air de température différente et globalement animée d'une vitesse v_2 . Si nous sommes convaincus que la composante “Taylor” est nulle, changeons alors de référentiel. Supposons le télescope se déplaçant dans une masse d'air immobile par rapport au sol à une vitesse $-v_1$, et la masse d'air supérieure “glissant” sur la première à une vitesse $v_2 - v_1$. Le schéma est le même que précédemment, il ne s'agit que d'un changement de référentiel, il n'y a donc aucune raison pour que le télescope observe une composante “Taylor”. Stoppons donc le mouvement du télescope. Forcément ce dernier *doit* observer un mouvement d'ensemble de la couche puisque le phénomène physique n'a pas changé, alors que le télescope a, lui,

modifié sa vitesse par rapport au phénomène turbulent.

3.7.2 Article: Mise en évidence expérimentale de l'hypothèse de Taylor.

Article: Evidence for a Taylor atmospheric turbulence observed with adaptive optics

L'article qui suit sera présenté à *Experimental Astronomy*. Il décrit la mise en évidence expérimentale de ce phénomène avec un système d'optique adaptative.

SINGLE LAYER ATMOSPHERIC TURBULENCE DEMONSTRATED BY ADAPTIVE OPTICS OBSERVATIONS

E. Gendron and P. Léna
Observatoire de Paris & Université Paris VII - D. Diderot
Département de Recherche Spatiale, U.R.A. CNRS 264
F-92195 MEUDON Cedex
France

February 2, 1996

Abstract. Carried with an astronomical adaptive optics (AO) system, this work reports the observational evidences of wave-front deformations dominated by sources of perturbation acting as phase slabs moving at a constant speed in front of the telescope aperture. Consequences for improved adaptive optics compensation are suggested.

1. Introduction

Large ground-based telescopes observing up through the Earth's atmosphere see their resolving power limited to a value which, although small, turns out to be much larger than the diffraction limit of otherwise quasi-perfect optical surfaces. The limitation comes from the fluctuations of the air refractive index n along the propagation path through the atmosphere, inducing random distortions on the phase of the incoming electric field -and consequently on the amplitude after propagation-, leading to a degraded image. Adaptive optics (AO), recently made available for astronomical applications (Rigaut *et al.*, 1991; Léna, 1995), allows to partially compensate for these perturbations. The phase of the wave-front is physically restored in real-time by a mirror, the deformation of which is derived - via a computer- from the measurements provided by a wave-front sensor (WFS).

The exponential growth of this technique has stimulated detailed studies, both theoretical and experimental, on the turbulence in the Earth's atmosphere and procured a wealth of data. Their *a posteriori* processing is a powerful tool to study the statistics of the wave-front deformations. As those are closely related to the statistics of the fluid refractive index -hence of the temperature- and to the fluid velocity, they allow a deeper analysis of the turbulent atmosphere.

In this paper, we demonstrate the existence of wind translated turbulent configurations in the atmosphere, on the basis of wavefront analysis performed with the ComeOnPlus AO system on the ESO 3.6m telescope.

2. Wind-translated turbulent fields

Although imaging through the atmosphere is often dealt with assuming a perfect Kolmogorov turbulence (Roddier, 1981), experience quickly shows that a variety of index n inhomogeneities are encountered (Bester *et al.*, 1992). First, a convective situation may occur just below the onset of turbulence : buoying plumes developing over telescope mirror, dome slit or local orography in day time are well known to astronomers and related to instable vertical transport of heat. An increase of the Reynolds number produces turbulence (“boiling” turbulence), which ultimately reaches a Kolmogorov regim. Second, shear motions of air masses appear in the free atmosphere when the wind profile leads to high values of the Richardson’s number, and produce either intermittent (non Kolmogorov) or homogeneous turbulence. In atmospheric imaging, index fluctuations are integrated over the whole path and may represent a composition of these situations, depending on orography, wind and temperature profiles, etc. We focus here on the interesting case where turbulent eddies are horizontally carried by the wind in one (or several) layer(s).

The usually called “frozen turbulence hypothesis” is commonly used to derive temporal statistical properties of the perturbed wave-front from its spatial properties (Clifford, 1971; Hogge & Butts, 1976; Roddier *et al.*, 1993). This hypothesis assumes that the velocity of the flow carrying the turbulent eddies -i.e. the overall wind- is much larger than the one of internal motions in eddies: this allows to describe the temporal behavior of the phase as a “frozen phase slab” sliding with the wind in front of the telescope aperture. The question immediately arises whether this hypothesis is valid.

Taylor (1938) asserts that the temporal power spectrum of the turbulent velocities (or temperature, or index n here as a consequence), at a fixed point, is simply due to the passage of an unchanged pattern of turbulent motion over this point, when the velocity of the wind carrying the eddies is much larger than the turbulent velocity. This statement derives from the physical fact of slow cascading and viscous dissipation of turbulence : fast wind carrying slowly evolving turbulent eddies is sometimes loosely referred as “frozen turbulence”. As horizontal velocities of 10 to 20 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ are often encountered in large vertical slabs of the atmosphere, the above condition may be satisfied whenever the (exceptional or rare ?) situation of one or more thin layers carried by an homogeneous wind velocity concentrate most of the thermal fluctuations : the wavefront phase is then represented by a phase slab sliding with the wind in front of the telescope aperture. “Flying shadows”, observed during solar eclipses, clearly demonstrate this occurrence for amplitude perturbations of the wavefront (scintillation), produced when index variations become more severe.

Several authors have studied the temporal power spectrum of the coefficients describing the phase modal expansion, as observed on a wavefront issued from a point source after crossing a “frozen turbulence” screen (Hogge & Butts, 1976; Madec *et al.*, 1992; Roddier *et al.*, 1993; Conan *et al.*, 1995). When a plane wave

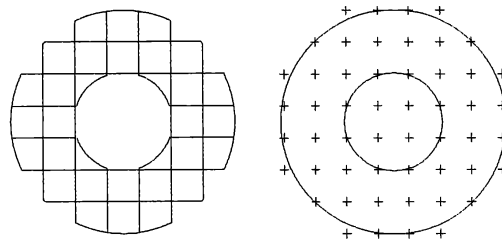


Fig. 1. Wavefront sensor (left) and deformable mirror (right) geometry of the ComeOnPlus AO system. The crosses designate the position of the actuators. The large circular rings represent the telescope pupil.

crosses a fully developed (Kolmogorov) turbulence displaced by a constant wind, the power spectra show two regimes. Above a cut-off frequency ν_c , an asymptotic high frequency behavior is described by a power law in $\nu^{-17/3}$. Below ν_c , the spectrum varies as ν^u , where u depends on the spatial mode. For tip-tilt (using the Zernike modes expansion terminology), $u = -2/3$; for defocus and astigmatism modes, $u \approx 0$. For higher order modes, u becomes positive. The cut-off frequency ν_c is proportional to \bar{v}/D , (\bar{v} velocity of the slab, D diameter of the telescope). Roddier (Roddier *et al.*, 1993) showed that the cut-off frequency for defocus or astigmatism modes is $\nu_c \approx 0.5\bar{v}/D$, and Conan (Conan *et al.*, 1995) finds $\nu_c \approx \bar{v}/D$ for the coma modes. A finite outer scale L_o of the turbulence will create an attenuation for $\nu < \bar{v}/L_o$.

Analysis of turbulent flows transported by a mean flow has been done in the context of pure fluid mechanics studies. In order to study time evolution of turbulence in boundary layers or in flows behind obstacles carried by a wind, Favre (Favre *et al.*, 1957; Favre *et al.*, 1958) analysed space-time double correlations of a chaotic flow. In relation to optical propagation through the atmosphere, Caccia (Caccia *et al.*, 1987) analysed spatiotemporal cross-correlation functions of scintillation patterns of a star with a 1.93m telescope in order to obtain the C_N^2 turbulence profile. This latter work shows evidence of a turbulence made of several frozen flows, carried by winds of various velocities and directions.

The occurrence of sliding phase slabs presents potential advantages for AO system efficiency (Rigaut *et al.*, 1991; Léna, 1994; Schwartz *et al.*, 1994) and deserves our investigation.

3. Observations of turbulent spectra

The observations were carried out with the ComeOnPlus astronomical AO system (Rousset *et al.*, 1993; Rousset *et al.*, 1994) installed on the ESO 3.6m telescope at La Silla (Chile) since 1990. The system, originally conceived as a prototype, has been upgraded and is now used as an instrument open to astronomers. The system contains a WFS based on a Shack-Hartmann lenslet array, made of 7×7

apertures (see figure 1). It is able to record continuously versus time the wavefront local slopes during astronomical observations. A systematic database of wavefronts, now extending over 120 nights, is available for detailed studies of statistical or determinist phase behaviours.

Decomposing (e.g. on a Zernike basis) these wave-fronts, coefficients and spectra of individual modes are obtained in time windows of 10 to 40 seconds and their time evolution studied.

Systematic computation of spectra exhibits values of cut-off frequencies ν_c varying with the wind from 0.1 to 40 Hz. The high frequency slopes values are usually around $u \approx -11/3$, significantly departing from the expected $-17/3 = -5.66$. Observed values range between -3.8 and -2.5, with a dispersion which may be partly due to wavefront sensing noise. We know that the observed average slope change is due to the aliasing effect of the Shack-Hartmann sensor (folding of higher spatial frequencies). However, a detailed analysis of this effect is out of the scope of this paper.

At low frequencies, the tilts ($u = -2/3$) and sometimes defocus and astigmatism modes ($u \approx 0$) follow the theory. Higher order modes usually exhibit values $-0.7 < u < 0$ instead of $u > 0$, as exemplified in Fig. 2. This result disagrees also with the above simple theory. A first explanation could be that the observed spectrum may be the sum of multiple spectra, each produced by an individual phase slab : these added contributions would produce a smooth continuum erasing any cut-off frequency except the highest, and in addition a decrease of the low-frequency slope. Moreover, the low-frequency behavior could be produced by a flow of a different type than assumed to derive the spectra, in particular a flow driven by convection or buoyant motion.

4. Characterisation of “frozen” phase slabs

Most of the observed spectra exhibit a negative slope at low frequencies. This may either correspond to the absence of sliding phase slabs, or to weak slabs not dominating the overall phase corrugation. The positive low-frequency slopes occur less frequently ($\approx 10-15\%$ of time), but seem to match the theory. We propose to call this case “the sliding layers configuration”. One should clearly understand that sliding layers do not produce a sliding wavefront over the telescope aperture. It only describes the case where a finite number of turbulent layers, each characterized by a wind velocity and direction, contribute to the phase corrugation.

Departing from the types described at the end of section 3, an unusual low-frequency behavior was observed in some occurrences. We describe here two cases (Oct 30th and Nov 5th, 1993), where the spectra exhibit a *positive* low-frequency slope, thus tending to meet the predictions announced by the theory of the sliding phase slab. Fig. 3 shows as example the temporal power spectrum of the Zernike

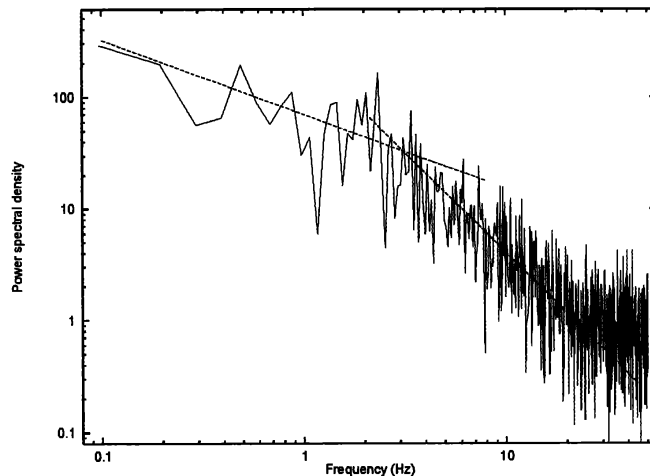


Fig. 2. Power spectral density of the fluctuations of the coma (Z_7 , $n = 3$, $m = 1$) coefficient. Night of July 4th 1993. The dotted lines represent power laws of $\nu^{-0.66}$ and $\nu^{-1.66}$. The negative slope at low frequencies may result either from the superposition of sliding layers with $0.1 < \nu_c < 2$ Hz, or from buoyant turbulence.

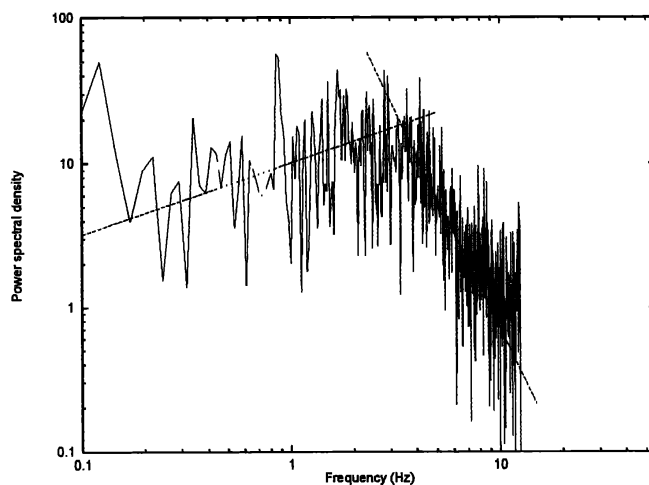


Fig. 3. Power spectrum of the coma coefficient. Night of October 30th 1993. The dotted lines represent power laws of $\nu^{0.5}$ and ν^{-3} . This low frequency behaves as expected from a single turbulent layer driven by a constant wind ("sliding layer configuration").

coma coefficient where the unusual $u = 1/2$ slope suggests the existence of a sliding slab.

To investigate further, we compute the spatio-temporal cross-correlation function of the wavefront *slopes*. At any time τ , the WFS directly gives a set of slopes $\vec{S}(\chi, \xi, \tau)$ over the pupil. The pupil aperture is characterized by the classical pupil function $P(\chi, \xi)$ (with values 1 inside, 0 outside). We compute the time-averaged

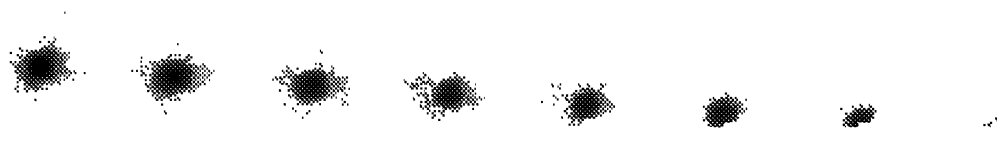


Fig. 4. Series of 8 images representing the spatio-temporal cross-correlation function $A(x, y, t)$ for 8 values of t , each taken 40 ms apart. A correlation peak is clearly visible (see Table 1 for its value) and moves uniformly away from the center, at a velocity of $14 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$. After 6 frames the wavefront pattern has entirely moved across the telescope aperture. WFS data recorded with the ComeOnPlus AO system, 3.6m telescope at La Silla (Chile), Oct. 30 1993, 03h52 UT.

cross-correlation of two sets of slopes distant of τ in time, i.e. the quantity

$$A(x, y, t) = \frac{\left\langle \int d\xi \int d\eta \vec{S}(\xi, \eta, \tau) \cdot \vec{S}(\xi + x, \eta + y, \tau + t) \right\rangle_{\tau}}{\int d\xi \int d\eta P(\xi, \eta) \cdot P(\xi + x, \eta + y)} \quad (1)$$

Fig. 4 shows $A(x, y, t)$ for values of t ranging from 0 to 7 frames, i.e. 0 to 280 ms by steps of 40 ms. An obvious correlation peak appears, uniformly moving in a definite direction at a velocity of 14 m.s^{-1} . Correlation values are given in Table 1. They have been scaled so that $A(0, 0, 0)$ is normalized to 1. The correlation drops as expected for $t \neq 0$ and then remains nearly constant ca. 0.6-0.5. As the spatial sampling of the WFS is limited (7×7 subapertures, i.e. a 50 cm scale on the pupil), only the larger scale phase distortions can be correlated.

This observed behaviour of $A(x, y, t)$ indeed describes an almost frozen phase screen moving linearly in front of the aperture.

TABLE I

Value of the maximum of the correlation peak, normalized to $A(\tau = 0)$.

τ (ms)	0	40	80	120	160	200	240	280
Correlation	1.00	0.69	0.59	0.53	0.51	0.49

Another case is shown on Fig. 5, corresponding to observations made on Nov 5, 1993 at 3h53 UT. Two correlation peaks now appear, moving in different directions making an angle of 75° . The velocities are comparable, close to 5.60 m s^{-1} .

5. Conclusion

We have observed several occurrences of atmospheric “frozen turbulence”, where the perturbed wavefront appears as a phase screen driven by an uniform wind, in one or two separated layers. We have been able to derive the wind speed and direction.

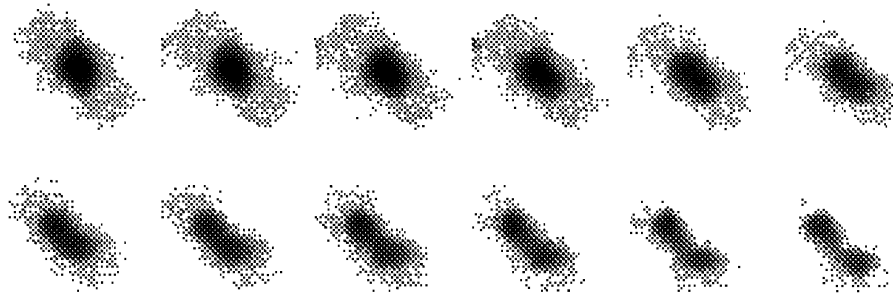


Fig. 5. Series of 12 images representing the variations of $A(x, y, t)$ when t goes from 0 to 11 frames, i.e. 0 to 440 ms. Two peaks are visible here on each frame, moving away from the center as time elapses. The velocity of each peak is $5.60 \pm 0.4 \text{ m s}^{-1}$. WFS data recorded with the ComeOnPlus AO system, Nov. 5, 1993, 03h53 UT.

In these particular occurrences, temporal power spectra at low frequency appear entirely different as the common ones, and behave as theoretically predicted. We suggest to refer to this as *occurrence of sliding phase slab(s)*.

The use of the cross-correlation function of the wavefront gradient -instead of the phase itself- is efficient, as it deals with phase derivatives which are spatially less correlated than the wavefront itself, hence leading to a sharper correlation peak. The same advantage would be obtained if the phases were measured by a curvature sensor.

This paper demonstrates the clear-cut occurrence of the “sliding phase slab” phenomenon. It will be interesting to process long series of data at a given site to evaluate the relative occurrences of the various low-frequency slopes. In particular dome-seeing contribution, dominated by convective or nearly-convective turbulent motions, could be identified. With atmospheric soundings by balloons or Scidar (Vernin *et al.*, 1986), it will be possible to establish the height of the sliding layers.

Sliding layers configuration offers a great potential for wavefront prediction (Rigaut *et al.*, 1991; Jorgenson & Aitken, 1993; Schwartz *et al.*, 1994; Esslinger *et al.*, 1995), increase of AO bandwidth, extension of the isoplanatic field in upwind direction (Léna, 1994), and may be efficiently combined, in the case of several layers, with wavefront conjugation adaptive optics (Beckers, 1993).

Acknowledgements

The authors wish to thank the ComeOnPlus team for providing experimental data based on observations collected on the ESO 3.6m telescope at La Silla (Chile) with the ComeOnPlus AO system, and one of the anonymous referees for useful comments.

References

- Beckers J.M., "Adaptive optics for astronomy : principle, performance and applications", 1993, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*, **31**, 13
- Bester M., Danchi W.C., Degiacomi C.G., Greenhill L.J., Townes C.H., "Atmospheric fluctuations: empirical structure functions and projected performance of future instruments", 1992, *ApJ*, **392**, 357
- Caccia J.L., Azouit M., Vernin J., "Wind and C_N^2 profiling by single-star scintillation analysis", 1987, *Applied Optics*, **26**, 1288
- Clifford S.F., "Temporal-frequency spectra for a spherical wave propagating through atmospheric turbulence", 1971, *JOSA*, **61**, 1285
- Conan J.M., Rousset G., Madec P.Y., "Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence", 1995, *JOSA A*, **12**, 1559
- Esslinger O., Edmunds M.G., "Improving the natural guide star magnitude limit for wavefront sensing", 1995, *Astron. Astrophys.*, in preparation.
- Favre A., Gaviglio J., Dumas R., "Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer", 1957, *J. of Fl. Mech.*, **2**, Part 4, 313
- Favre A., Gaviglio J., Dumas R., "Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer", 1958, *J. of Fl. Mech.*, **3**, Part 4, p 344
- Hogge C.B., R.R. Butts, "Frequency spectra for the geometric representation of wavefront distortions due to atmospheric turbulence.", 1976, *IEEE transaction on antennas and propagation*, **24**, 114
- Jorgenson M.B., Aitken G.J.M., "Wavefront prediction for adaptive optics", 1993, in *ICO-16 Satellite Conference on Active and adaptive Optics*, Garching (Germany), 143
- Léna P., "Astrophysics with adaptive optics : results and challenges", 1994, *Adaptive optics for astronomy*, NATO-ASI, Ed. D. Alloin and J.-M. Mariotti, Kluwer, 321
- Léna P., 1995, in *Adaptive optics in astronomy*, ESO-OSA Conference, Garching
- Madec P.-Y., Conan J.-M., Rousset G., "Temporal characterization of atmospheric wavefront for adaptive optics", 1992, in *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, ESO Conf. 27-30 Apr 92, Garching (Germany), Ed. M.-H. Ulrich, 471
- Noll R.J., "Zernike polynomials and atmospheric turbulence", 1976, *JOSA*, **66**, 207
- Rigaut F., Rousset G., Kern P., Fontanella J.C., Gaffard J.P., Merkle F., Léna P., "Adaptive optics on a 3.6 m telescope : results and performances", 1991, *Astron. Astrophys.*, **250**, 280
- Rodier F., "The effect of atmospheric turbulence in optical astronomy", 1981, E. Wolf Ed., *Progress in Optics Vol. XIX*
- Rodier F., Northcott M., Graves J.E., McKenna D.L., "One dimensional spectra of turbulence-induced Zernike aberrations: time-delay and isoplanicity error in partial adaptive compensation", 1993, *JOSA*, **10**, 957
- Rousset G., Beuzit J.-L., Hubin N., Gendron E., Boyer C., Madec P.-Y., Gigan P., Richard J.C., Vittot M., Gaffard J.P., Rigaut F., Léna P., "The Come-On-Plus Adaptive Optics System : Results and performance", 1993, *ICO conference on Active and Adaptive Optics*, Garching (Germany), August 2-5, 65
- Rousset G. Beuzit. J.L. et al., "Performances and results of the ComeOnPlus adaptive optics system at the ESO 3.6 m telescope.", 1994, *Proc. SPIE* 2201, 1088
- Sarazin M., "Use of a large-scale spatial coherence of turbulence patterns for predicting observation conditions at astronomical observatories", 1992, *Atmospheric and Oceanic Optics*, **5**, 830
- Schwartz C., Baum G., Ribak E.N., "Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces", 1994, *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 444
- Taylor G.I., "The spectrum of turbulence", 1938, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **164**, 476
- Vernin J., Azouit M., "Traitement d'image adapté au speckle atmosphérique. II. Analyse multidimensionnelle appliquée au diagnostic à distance de la turbulence", 1983, *J. Optics (Paris)*, **14**, 131
- Vernin J., Pelon J., "Scidar/Lidar description of a gravity wave and associated turbulence: preliminary results", 1986, *Applied Optics*, **25**, 2874

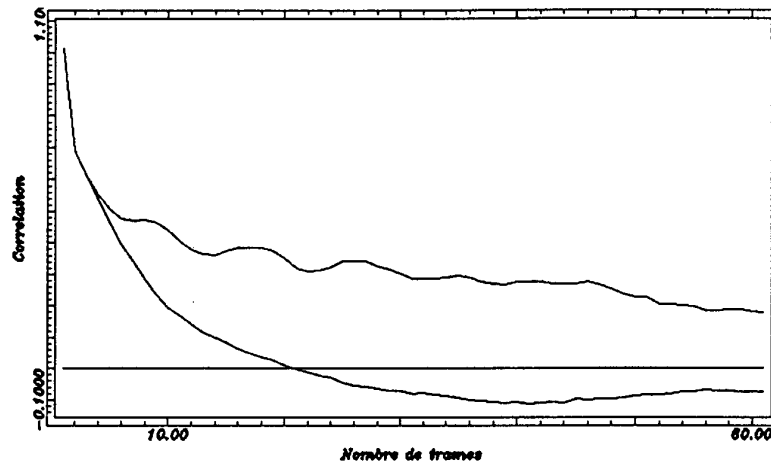


Figure 3.53: L'ordonnée affiche la corrélation, les abscisses représentent le temps, exprimé en nombre de trames. Une trame correspond à 5 ms ; la durée totale est de 300 ms. Courbe inférieure: valeur de l'autocorrélation temporelle des mesures du Hartmann. Courbe supérieure : valeur du maximum du pic des intercorrélations spatio-temporelles.

Quelques compléments

Il reste encore impossible à ce jour de prévoir l'apparition de la turbulence à forte composante "Taylor". Jusqu'à la mission de Septembre 1994, les meilleurs cas de figure de ce type furent enregistrés avec des fréquences d'échantillonnage faibles. Or récemment, (19 Septembre 1994) des données de type "Taylor" ont été recueillies sur un objet brillant, avec une fréquence d'échantillonnage de 200 Hz, offrant par là une meilleure résolution temporelle. Je présente certains aspects nouveaux apportés par ces derniers résultats.

Tout d'abord, je n'ai pas traité ces données par hasard. En effet, si l'on veut mettre en évidence un comportement de type "Taylor", la vitesse de défilement de l'écran de phase doit être grande devant la vitesse d'évolution des remous. Donc s'il faut chercher dans un certain type de données, ce sont certainement celles où les temps de corrélation sont courts. Il s'avère que parmi les données recelant une turbulence exceptionnellement rapide, toutes celles que j'ai eu l'occasion de traiter font apparaître de manière évidente la composante "Taylor" ; ce n'est pas le cas des autres données.

J'ai effectué un traitement tel que celui décrit dans l'article qui précède. J'obtiens pour les intercorrélations spatio-temporelles un pic nettement marqué, dont le déplacement conduit à une vitesse d'environ 12 m.s^{-1} . J'ai extrait deux courbes de ces résultats: elles sont présentées sur la figure 3.53. La première donne la valeur à l'origine des différentes intercorrélations, en fonction du temps: c'est donc la valeur de l'autocorrélation temporelle moyenne des mesures. La deuxième courbe est la

de l'autocorrélation temporelle moyenne des mesures. La deuxième courbe est la valeur du maximum du pic de corrélation en fonction du temps. On notera au moins deux points:

1. Les deux courbes sont pratiquement confondues à l'origine.
2. La courbe donnant la valeur du maximum du pic de corrélation "oscille" en fonction du temps, avec une période d'oscillations qui correspond précisément au temps de passage des motifs du front d'onde d'une sous-pupille à l'autre.

Pourquoi les deux courbes sont-elles confondues et chutent-elles conjointement si vite ? Pendant le temps d'une trame (5 ms) l'écran de phase s'est au maximum déplacé de 6 cm, ce qui est peu face au diamètre d'une sous-pupille. Les deux courbes décroissent de la même façon, car on n'a pas une résolution spatiale suffisante pour calculer la corrélation lorsque le front d'onde se déplace d'une quantité aussi petite.

Comment serait-il possible d'utiliser l'effet "Taylor" dans la commande pour prévoir le front d'onde ? Je pense que cela n'est tout d'abord possible que grâce à des efforts importants du côté asservissement. On raisonne toujours en "boucle ouverte" lorsque l'on s'intéresse à la prédiction (attention : je parle ici de prédiction au sens de Ribak (Schwartz 1994), et non de compensateurs tels que le prédicteur de Smith) alors que le système fonctionne en boucle fermée. Plaçons un prédicteur de ce type dans la boucle, et le système essaiera de se prédire lui-même. Un tel prédicteur n'est pas envisageable en boucle fermée.

Mais admettons que cela soit possible, ou admettons que l'on puisse travailler en boucle ouverte. Nous avons déterminé le front d'onde à un instant donné, avec une certaine résolution spatiale, temporelle et avec une précision donnée. Il faudra donc "déplacer" ce front d'onde d'une fraction de la distance inter-actuateurs sur le miroir déformable. Comme je l'ai déjà dit en d'autres endroits, il est vain de reconstruire le front d'onde sur une base pour venir ensuite l'exprimer sur une autre, lorsque les changements de base sont linéaires. Donc il faut ici directement reconstruire le front d'onde "décalé". Pour avoir une bonne précision sur cette reconstruction "décalée", il est nécessaire d'avoir une matrice d'interaction "décalée" du système: donc il faut décaler le miroir lors de la calibration de la matrice d'interaction, et le remettre à sa place ensuite. C'est là la meilleure solution.

On gagne effectivement à faire ce montage si la somme de l'erreur de sous-modélisation, de l'erreur due à la bande passante limitée du système et de l'erreur due au bruit ne prédomine pas devant l'erreur due au retard⁴. Cela sous-entend que l'on travaille avec un bon rapport signal sur bruit.

⁴Dans un système fonctionnant en boucle fermée, l'erreur due à la bande passante limitée du système et l'erreur imputable au retard pur sont intimement liées. L'erreur de bande passante domine *toujours* devant une erreur qui ne serait due qu'au retard pur.

Donc, en quelques mots, voici mon opinion sur l'utilisation de l'effet "Taylor": l'effet "Taylor" peut-il être mis à profit pour compenser le retard de commande ? Pas dans un système fonctionnant en boucle fermée: il existe effectivement des méthodes pour cela (Demerlé et al. 1994), mais dans ce cas la compensation du retard ne profite pas d'une connaissance a priori sur le phénomène observé. Peut-on envisager la prédiction du front d'onde d'une trame à l'autre ? On peut en effet imaginer d'obtenir une estimation plus précise du front d'onde au moment où sera appliquée la commande. Mais je le rappelle, ce gain en précision a toutes les chances d'être petit devant l'erreur due à la bande passante. Peut-on relâcher les contraintes sur le temps d'intégration grâce à ce phénomène ? Si on utilise le phénomène "Taylor", c'est obligatoirement à bon rapport signal sur bruit, sur une turbulence rapide. En boucle fermée, l'augmentation du temps d'intégration fera chuter la bande passante. En boucle ouverte, tout reste à faire. Enfin, de manière générale, je pense qu'il vaut mieux mettre l'accent sur une amélioration du compensateur temporel du système en boucle fermée (Demerlé et al. 1994), de manière à limiter l'amplification des hautes fréquences temporelles et l'injection de bruit dans la boucle. Les potentialités de ce domaine restent encore inexploitées en astronomie, malgré les essais effectués en Avril 1991 sur COMEON .

3.8 Optimiser, avant d'optimiser modalement

L'optimisation modale résout certains problèmes. Elle représente probablement un point clef dans le maniement et la mise en œuvre d'un système d'optique adaptative astronomique. Simplement parce que sa mise en œuvre à un instant donné semble indépendante du reste du système, et ne fait appel qu'à des notions ou des informations que le système peut acquérir seul. Le système est alors capable de s'auto-dimensionner, sans faire appel à une expertise extérieure. Jusqu'où peut-on porter cette confiance ? Jusqu'où peut aller le pouvoir de décision laissé au processus d'optimisation, sans faire appel à une autorité supérieure; quelles exigences est-on en droit d'imposer à l'expert "optimisation modale" ? Et, cas inverse, quelles contraintes l'algorithme de l'optimisation modale requiert-il pour effectuer correctement son travail ?

3.8.1 Généralités

L'optimisation du contrôle modal est vue comme une boîte noire, qui se doit d'être fiable. Sous le règne de COMEONPLUS , optimiser la commande est une opération spéciale qui requiert du temps, un temps précieux puisqu'il est pris sur le temps d'observation. Aux yeux de l'astronome le système est inutilisé pendant un certain laps de temps. L'objet est trouvé, les spots apparaissent sur la grille du Hartmann, mais l'opérateur de l'optique adaptative prévient: la boucle ne sera pas fermée

immédiatement, il faut tout d'abord centrer l'objet dans les six arcsecondes du diaphragme de champ de l'analyseur. C'est alors un protocole particulier de communication qui prend naissance entre l'opérateur de l'optique adaptative et celui du télescope; échange sonore d'informations dont certains détails s'égareront parfois. Au moment de l'ajustement du flux, du réglage des intensificateurs, de la vérification de saturation, l'opérateur est un moment seul face à ses décisions. Il l'est plus encore face à l'ajustement du niveau de seuillage des spots. C'est une opération qui nécessite une certaine habitude –voire du doigté– et un certain calme, que la situation tendue d'un observateur qui voit son objet s'éloigner du méridien n'offre pas forcément. L'optimisation requiert l'enregistrement d'une file circulaire non asservie. Selon le temps, l'opérateur pourra ou non décider de calculer et d'appliquer des tensions d'offset afin de compenser les aberrations statiques du télescope. Les spots, ainsi mieux centrés, offriront une meilleure qualité des données pour l'optimisation. L'enregistrement de la file circulaire prend quelques dizaines de secondes, à l'issue desquelles le sort en est jeté, et où le temps qui semble perdu ne sera plus imputable à l'opérateur mais à la boîte noire "optimisation modale".

Pourtant, lorsque l'on est face au moniteur vidéo sur lequel tremblent les spots du Hartmann, on a peine à croire que l'ensemble des théories élaborées autour de l'optique adaptative vont pouvoir faire face à la tempête qui gronde derrière le réseau des microlentilles. A ce moment-là on sait en effet que la matrice d'interaction réalisée à la tombée de la nuit est à des lieues des tranquilles simulations qui ont servi de base à la théorie de la propagation du bruit. On devine que la structure spatiale que l'on voit défiler dans le fond tourmenté du détecteur n'est probablement pas un acteur passif dans la corrélation du bruit entre les mesures, hypothèse à la base théoriquement rejetée. On a parfaitement conscience du vieillissement du miroir, de la variation des déformées des actuateurs à travers la surface et de l'écart entre les modes effectifs et ceux que l'on croit commander. On est conscient aussi du centrage imparfait de la pupille sur le réseau, de l'inégalité de l'éclairement des spots, du champ plat non corrigé. Le seeing de dôme a empâté un quart des spots, certainement tous mal seuillés, et dont le flux, minime, arrose un intensificateur au bout de ses possibilités et de sa courbe de linéarité. Et comme la distance zénitale approche des 40 degrés, que le seeing se dégrade vite et qu'il faut asservir de même, alors, dans ces conditions, au milieu des ténèbres instrumentales dans un environnement où se dérobent à la théorie les éléments que l'on croyait les plus fiables, on se prend à éprouver une sorte de soulagement pour avoir choisi une méthode d'optimisation indépendante des conditions d'observation.

La suite d'opérations simples que constitue la mise en œuvre d'une optique adaptative est une chaîne, dont la solidité est évidemment déterminée par la résistance du maillon le plus faible. Donc le maillon "optimisation modale" ne doit pas être pris comme une solution d'arrangement, qui arrondit les angles et lisse les erreurs commises par ailleurs. La possibilité d'éliminer les modes gênants n'autorise pas à relâcher les contraintes sur l'alignement du banc optique. Le filtrage du bruit effectué

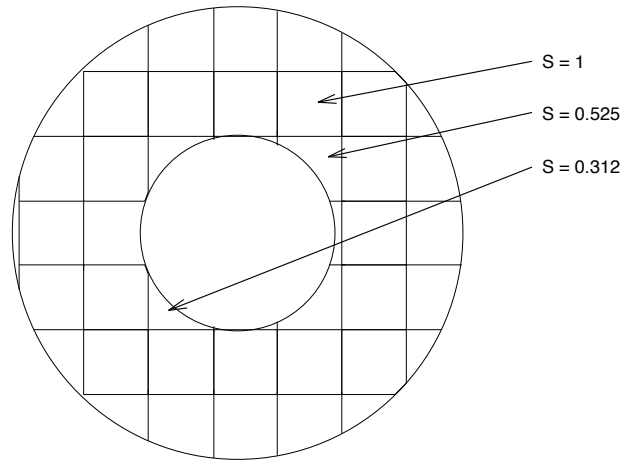


Figure 3.54: Représentation du réseau des microlentilles décentré latéralement d'un soixantième du diamètre de la pupille, et comparaison de la surface exposée des différentes sous-ouvertures.

naturellement par l'optimisation ne permet pas plus d'admettre un réglage imparfait des intensificateurs. Il faut être lucide et voir quels sont les points durs dans la mise en œuvre globale d'un tel système. S'il est un domaine où les choses se passent bien, c'est bien celui de la théorie. Jusqu'à présent, un système d'optique adaptative reste bien exclu de cette sphère idéale. Le risque de dégrader les performances du système existe à tous les niveaux, et l'ensemble ne ressemblera à l'idée théorique que l'on s'en fait que si tous les sous-ensembles, simultanément, sont optimisés et sont appelés à fonctionner pleinement dans leur régime nominal.

Je vais, dans les lignes qui suivent, examiner quelques points particuliers.

Réglage optique et asservissement à faible flux Un point critique est l'accrochage du banc optique sur le télescope. A ce moment on se doit de faire correspondre les pupilles du télescope et celles du banc d'une manière rigoureuse. Prenons pour exemple un décentrement de la pupille de $1/60^{\text{ième}}$ de son diamètre. Certaines sous-pupilles seront alors plus ou moins éclairées, les effets les plus nets étant ceux relatifs aux sous-pupilles centrales. La figure 3.54 met en évidence la différence de flux entre les sous-pupilles centrales les plus et les moins éclairées. La sous-pupille la moins éclairée paraît recevoir 40% de moins de flux que les autres ouvertures centrales plus favorisées, et 70% de moins que les sous-pupilles entièrement exposées. Ces chiffres sont édifiants. En perdant un tiers du flux dans deux des sous-pupilles centrales, on ne peut espérer atteindre sans embûches la magnitude limite escomptée. D'autant que le seeing de télescope se manifestant souvent à proximité de l'ouverture du Cassegrain, il a tendance à exposer ces spots à des perturbations plus fortes. En règle générale, ce sont surtout de tels problèmes qui imposent la magnitude limite. En effet, la condition sine qua non de la bonne tenue de la boucle fermée repose

-entre autres- sur la réception d'un signal de rétroaction; c'est un minimum. Or l'absence des spots centraux place précisément le système dans un état où n'est perçu aucun retour. Soit il est commandé un nombre suffisant de modes, et les actuateurs centraux dérivent inmanquablement jusqu'à la butée; étant actionnés à l'extrême ils ont une influence non négligeable sur des sous-pupilles pas forcément centrales et entraînent le reste du miroir en butée. Soit le nombre des modes commandés n'est pas suffisant et les actuateurs centraux ne peuvent pas partir en butée seuls, sans les autres actionneurs. L'asservissement réalise alors en permanence un faux compromis, et des aberrations statiques peuvent apparaître.

Techniquement, que représente un centrage de la pupille à $1/60^{\text{ième}}$ de son diamètre ? Sur le miroir de sélection de champ c'est une erreur de 0.7 mm sur le centrage. En revanche sur le réseau de microlentilles à l'intérieur de l'analyseur cela représente un décentrement de $56 \mu\text{m}$.

Avec l'avènement d'ADONIS ce genre de problème devrait en partie être atténué ou plutôt masqué, grâce à la possibilité d'adresser indépendamment chaque sous-pupille et de leur affecter un seuillage approprié. On profite mieux du flux disponible, même s'il pourrait y en avoir plus.

Intensificateurs L'analyseur fort flux est équipé de deux étages d'intensification. Le premier peut être vu comme un convertisseur de couleur. Il est muni d'une photocathode S20R possédant une réponse spectrale plus étendue que le deuxième étage qui apporte l'amplification. L'analyseur est également muni d'une série de filtres-densités neutres. Les écueils sont les suivants: i) le second étage utilisé à gain trop faible risque d'être endommagé par le flux issu du premier étage; ii) le second étage est d'autant plus bruyant lorsqu'il est utilisé à gain élevé, en raison des décharges d'ion; iii) à faible gain le premier étage risque de se comporter comme un atténuateur; iv) saturation du détecteur (ou du numériseur). Le but à poursuivre est toujours d'admettre sur la photocathode d'entrée un nombre maximum de photons, c'est-à-dire d'utiliser la densité neutre la plus transparente possible.

A très fort flux on ajustera le gain du premier étage à une valeur minimale qui l'assure de ne pas se comporter en atténuateur, et le gain du deuxième étage sera réduit jusqu'à un point où la limite admissible de flux corresponde à la saturation du détecteur. On utilisera les densités neutres pour des magnitudes en-deçà de ce point de fonctionnement. Au-delà, donc pour des flux plus faibles, l'emploi de filtres-densités neutres est à proscrire et l'on augmentera conjointement le gain des intensificateurs pour laisser le flux sur le détecteur juste en-dessous de la saturation, cela jusqu'à atteindre le point de fonctionnement nominal des intensificateurs. Ce deuxième point de fonctionnement, où l'on tire le meilleur parti du flux photonique incident, est atteint aux abords de la magnitude $m_V \approx 7$. A flux plus faible on doit réaliser un compromis car l'augmentation du gain permet de "réduire" la proportion du bruit de lecture par rapport au signal, mais apporte conjointement

un bruit supplémentaire. L'expérience montre qu'il existe en fait un plateau où les meilleures conditions sont les conditions de réglage nominales. Inversement à très faible flux, lorsque le gain doit être particulièrement poussé, la recherche fine d'une valeur optimale de l'amplification devient particulièrement difficile et s'effectue dans la pratique sous la responsabilité de l'opérateur le plus expérimenté. D'autant que ce réglage fin est également conditionné par la valeur du seuil, de l'extension de l'objet et de la valeur du seeing. Il a de plus été omis ici la possibilité d'ajuster le gain de la numérisation, calculé et figé dans le schéma actuel.

Il est difficile d'évaluer l'impact sur les performances du système d'une mauvaise optimisation de ces paramètres. On peut néanmoins s'en faire une idée au vu de la dispersion de la valeur du bruit mesuré expérimentalement en fonction de la magnitude de l'objet.

Type spectral de la référence La variété de type spectral des sources de référence potentielles est telle que la photocathode utilisée pour l'analyseur ainsi que la transmission de la lame dichroïque ne peuvent pas être adéquates dans tous les cas de figure. S'il est particulièrement malaisé de changer de photocathode pour chaque objet, il sera néanmoins possible d'échanger la lame dichroïque dans ADONIS. Cette possibilité permet de gagner environ 0.8 magnitude sur des objets d'indice de couleur $B-V=1.2$, en considérant les deux lames actuellement en place sur le banc.

De plus, j'ai fait une étude –reprise depuis par J.L. Beuzit afin d'affiner la précision– de la variation de l'intensité reçue, pour une magnitude donnée, en fonction du type spectral de l'étoile. Les résultats sont montrés figure 3.55. Ils montrent d'une part la prudence qu'il faut montrer envers les différents catalogues d'étoiles, et d'autre part la variation du flux reçu, qui peut atteindre un facteur 2 entre les 0 et 1.4.

3.8.2 Choix de l'étoile de calibration, méthode d'observation

Un problème particulier pour l'imagerie est de pouvoir déconvoluer correctement l'objet observé. Aussi faut-il posséder une image d'une source ponctuelle possédant la même fonction d'étalement de point que l'objet imagé. Le principe est donc d'aller enregistrer l'image d'une étoile simple, dite source *de calibration*, située au plus à quelques degrés de l'objet, et dont les caractéristiques de correction seront identiques à celles apportées sur l'objet. Une pratique simple à première vue, mais dont l'examen révèle certains écueils. Le problème consiste à trouver une source de calibration de mêmes caractéristiques que la source de référence. Quelles doivent être les caractéristiques communes ? Le micro-manuel de l'ESO indique que la source doit avoir même magnitude et même type spectral, à certaines barres d'erreur près. Le calcul a été fait de manière à avoir le même flux équivalent sur les sources de calibration et de référence: une telle approche est à la fois contraignante et insuffisante.

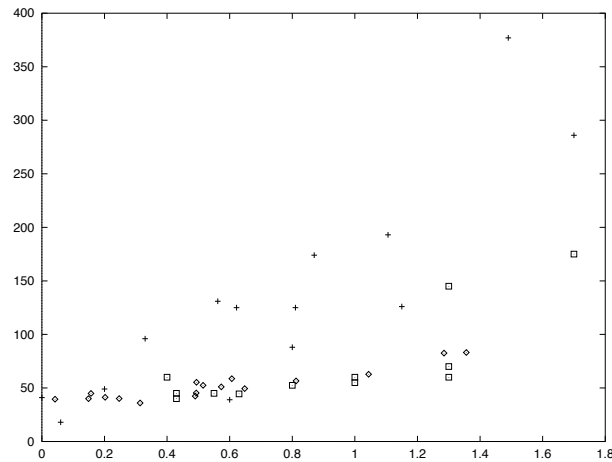


Figure 3.55: Nombre de photoélectrons reçus par l’EBCCD, pour une étoile de magnitude 10 dans la bande V, et pour un temps d’intégration de 10 ms, en fonction de l’indice de couleur B-V. Les points de mesure correspondant à des croix proviennent d’étoiles choisies dans différents catalogues, en particulier le SAO. Les carrés et losanges, formant un ensemble beaucoup moins dispersé, sont des points basés sur des étoiles extraites du catalogue UBVR de Landolt (précision inférieure au centième de magnitude dans les 5 bandes).

Contraignante car il faut respecter trois paramètres simultanément (condition sur la proximité, la magnitude et le type spectral), et insuffisante car la référence peut être une source étendue, ou -pire- se situer hors du champ d’isoplanétisme de l’objet. Ou les deux. Décomposons le problème et traitons en premier lieu le cas où l’objet imagé sert en même temps de référence pour l’asservissement.

De l’objet de référence l’analyseur ne “voit” que le centroïde, il est en particulier insensible à la forme et à la couleur. Les paramètres qui agissent au premier ordre pour déterminer la qualité de la correction sont la valeur du seeing, la structure de la turbulence, l’amplitude du bruit de mesure, la bande passante de correction et le nombre de modes corrigés. Au second ordre la forme de la densité de probabilité du bruit intervient également, mais dans une moindre mesure. Ces paramètres sont suffisants pour décrire l’état de la correction. Si tous sont égaux entre objet et calibration, le but sera atteint.

Comment conserver le seeing constant ? La seule solution pour avoir une valeur du seeing et une structure de la turbulence constantes entre l’objet et la référence est de faire le plus *vite* possible. Il n’est pas possible de conserver une correction constante lorsque le seeing varie. On pourrait réduire ou augmenter volontairement la bande passante de correction du système, mais la modification de la fonction d’étalement de point ne serait absolument pas similaire à celle produite par une évolution du seeing. La solution est d’entrecouper la prise d’images par des enregistrements de l’étoile de calibration le plus fréquemment possible. Une mauvaise méthode d’observation,

qui se pratique souvent, consiste à pointer l'objet et à commencer à acquérir des images avant d'avoir trouvé et sélectionné la bonne source de calibration. En effet je conseillerais à tout observateur de s'enquérir en premier lieu de la conformité des caractéristiques de son étoile de calibration avant de poser sur l'objet. Et ce d'autant plus qu'il espère tirer parti d'une déconvolution potentielle. De plus, pour éviter de modifier la structure de la turbulence il faut éviter de faire pivoter le dôme entre la source de calibration et l'objet; la remarque peut avoir son importance lorsque l'objet visé est proche du zénith.

Comment conserver la bande passante de correction et le nombre de modes corrigés constants ? Tout simplement en ne changeant pas de matrice de commande. C'est certainement la condition la plus facile à réaliser.

Comment conserver la même amplitude du bruit de mesure entre référence et calibration ? C'est probablement là le paramètre clef dont la maîtrise revient à l'opérateur de l'optique adaptative. L'algorithme de principe de l'optimisation de la commande modale impose de calculer ce bruit. Etant connu sur l'objet il faut retrouver le même sur la source de calibration. L'analyseur est pourvu d'un jeu de densités neutres qu'il faut utiliser pour ajuster la valeur du flux à un niveau correct de manière à retrouver le même bruit de mesure. Si l'objet est ponctuel on retrouvera un flux identique. S'il ne l'est pas le flux sera légèrement inférieur. Ainsi on s'affranchit du problème d'avoir à trouver une source de calibration de type identique à l'objet. Bien évidemment, il est nécessaire que sa magnitude soit *inférieure* à celle de l'objet, dans des limites raisonnables puisque l'atténuation maximale des densités neutres de l'analyseur est de 5 magnitudes.

De plus, l'image de la source de calibration doit faire preuve d'un rapport signal sur bruit excellent, quel que soit celui obtenu sur l'image de l'objet. Si la magnitude de cette source se doit d'être élevée -en raison de la magnitude également élevée de l'objet-, la mauvaise solution consiste à choisir une étoile d'un type spectral quelconque et à intégrer longtemps. La bonne est de sélectionner des candidats très "rouges", dans le but de ne pas perdre du temps d'observation en intégrant sur la calibration.

Le choix de l'étoile se fera donc en fonction de sa magnitude approximative, quelques magnitudes en dessous de celle de l'objet. Elle sera prise en général assez rouge pour les raisons évoquées ci-dessus -sauf si elle est déjà suffisamment brillante évidemment. Il faut prendre soin d'en sélectionner plusieurs car la valeur de l'atténuation des densités neutres dont est pourvu l'analyseur n'est pas continue. Il est possible de se trouver dans un cas où la densité souhaitée soit précisément dans un créneau inexistant (on peut jouer légèrement sur le réglage des intensificateurs mais l'opération se complique alors). Une autre bonne raison d'en sélectionner plusieurs est que l'observation aléatoire d'objets décrétés ponctuels est un excellent moyen d'en découvrir des doubles.

Maintenant que se passe-t-il si objet et référence sont distincts ? Le cas est difficile

car la solution consiste à trouver un couple de même séparation que le couple objet/référence. Les remarques faites au-dessus s'appliquent évidemment ici aussi. On adaptera donc le flux de la référence de calibration sur l'analyseur pour reproduire le même niveau de bruit, et l'on choisira un objet de calibration rouge et ponctuel.

Pour finir, une solution avait été avancée par F. Rigaut (Communication privée, 1991) qui permettait encore de relâcher les contraintes qui pèsent sur le choix de la référence. Un système d'optique adaptative astronomique devrait être équipé d'un système permettant d'injecter de manière informatique en temps réel du bruit dans la commande. De cette manière la source de référence peut être quelconque: la quantité de bruit manquante est rajoutée sur les mesures en temps réel. Une telle solution serait particulièrement appréciable dans le cas d'un objet observé en mode hors-axe: on peut concentrer le choix de la source de calibration uniquement sur l'aspect "séparation angulaire" et non plus magnitude.

Variation de la fonction d'étalement de point au cours du temps C'est inexorable, la fonction d'étalement de point est une fonction qui change d'allure au cours du temps. Ayant une série de poses sur l'objet et une série sur l'étoile ponctuelle de calibration, la qualité de ces deux séries évolue dans le temps. L'optique adaptative ne donne pas encore les moyens de contrôler la qualité de chaque pose en temps réel, mais des solutions existent. J'en parle dans la section 3.5.2. D'autre part, lorsque l'objet est loin du zénith, la projection de la pupille sur les couches turbulentes est une ellipse, et les propriétés de la phase sont en général anisotropes; l'effet est visible sur le Hartmann. Il doit donc y avoir un résidu de cette anisotropie dans la commande. Le phénomène n'est pas simple à étudier modalement, car je ne connais pas forcément l'orientation particulière de chacun des modes, et leur comportement dans une turbulence anisotrope. Il n'a pour l'instant pas été mis en évidence, mais un allongement perpendiculaire à la direction de l'horizon est à craindre, non seulement dans le cœur mais dans le halo de l'image. Il faut donc redoubler de prudence dans ce cas précis d'observation et choisir des étoiles de référence si possible à des hauteurs sur l'horizon comparables à celle de l'objet.

3.8.3 Les paramètres importants

Je voudrais dire ici quelques mots sur le format des fichiers à utiliser en optique adaptative. Cette décision est motivée par le souci de fiabilisation d'un système d'optique adaptative; la réflexion qui suit développe ce point.

L'optique adaptative, si elle commence à se développer et à prendre de l'ampleur, n'est pourtant pas une science parfaitement mûre. L'assurance apparente que les différents "opticiens adaptatifs" peuvent afficher en façade ici ou là n'est que toute relative, les discussions techniques en coulisses le prouvent. Lorsque l'atmosphère décide de s'amuser, une expérience d'optique adaptative, finalement si naïve quand

tout est dans l'ordre des choses, peut devenir une source de problèmes inextricables. La partie non fiable n'est pas tant dans le miroir déformable ou les détecteurs. Elle se trouve dans la compréhension de l'état du système à chaque instant; c'est là le point défectueux. On a avant tout pensé à développer le système sous l'aspect technologique, sans se donner les moyens et les outils pour analyser son état en temps réel, sans avoir de point de diagnostic.

Il en est de même pour les paramètres de sortie. La progression dans le domaine ne se fera qu'à travers la compréhension complète des données issues du système. Or un jeu de données n'est rien hors de son contexte: soit les données ont été enregistrées dans un but précis et leur contexte est alors primordial, soit ce sont des données acquises de manière routinière (à l'occasion d'une optimisation de tel ou tel paramètre dans une situation donnée, d'une vérification quelconque, d'une mesure de seeing, etc) et elles serviront pour un dépouillement statistique. Mais dans ce dernier cas il sera nécessaire de *trier* les données en fonction de l'état de l'expérience (fréquence d'échantillonnage, analyseur, mode asservi ou pas, type de contrôle, conditions d'asservissement, source naturelle ou interne au banc, etc) et en fonction de l'état de l'objet observé et éventuellement de l'atmosphère (objet étendu, objet ponctuel, magnitude, distance zénitale, conditions photométriques, distance de la lune, position du dôme, conditions spéciales de seeing, etc).

C'est la maîtrise de ces paramètres d'environnement qui peut décider de la qualité d'un jeu de données. Dans cette optique, il a donc été prévu d'associer systématiquement aux données une liste de paramètres indispensables. La liste à laquelle j'ai abouti est décrite ci-après. Elle contient les éléments clés nécessaires à une interprétation correcte des données, elle contient également tout ce qui pourrait être nécessaire à l'aide au dépouillement des données d'imagerie astronomique. C'est pour cela qu'elle contient des éléments tels que le nom et les caractéristiques de l'image enregistrée, le type d'observation (conditions d'isoplanétisme en amplitude et direction par exemple).

Voici donc cette liste. Pour intégrer ces variables, le format FITS a été choisi (voir Thèse L. Demailly, 1995).

- paramètres généraux : nom de l'utilisateur, de l'expérience, date et heure TU
- paramètres concernant le type de données : type de fichier (pentés, flux, commandes, images ...), volume de données, type, nombre de bits, nombre de trames, nombre de données par trame.
- paramètres du télescope : diamètre, diamètre de l'obstruction
- paramètres de la boucle d'asservissement : type de commande (commande trame ou commande ligne)⁵, qualité (boucle ouverte, fermée, asservie en tilt,

⁵Ces types de commandes sont utilisés respectivement pour un détecteur lu par trame ou par ligne.

asservissement zonal ou modal), nom du fichier des gains modaux, nom de la matrice d'interaction, gain zonal.

- paramètres de l'analyseur : nom (Ebccd, Reticon, IR,...), version (avec tel ou tel intensificateur, ...), nombre de sous-pupilles par ligne, nombre de sous-pupilles utiles et configuration, nombre de pixels par sous-pupille, taille des pixels, tirage des microlentilles ou sensibilité de l'analyseur (en arcseconde/pixel), fréquence d'échantillonnage, densité neutre, valeurs des hautes tensions, niveau(x) de seuil(s).
- paramètres concernant la source : type (rien, source de référence, source interne d'alignement, objet stellaire, étoile laser ?), nom de l'objet sur la voie d'imagerie, nom de la source de référence, flux moyen, magnitude V ou R, magnitude K (ou autre IR), indice de couleur ou type spectral, ascension droite, déclinaison, epoch, distance zénitale, nom du fichier de l'image IR, bande, temps d'intégration.
- paramètres concernant le seeing : valeurs fournies par le moniteur de seeing, température, vitesse du vent et direction, conditions photométriques.
- commentaires : but de l'enregistrement des données, qualité moyenne de l'asservissement et problèmes particuliers, commentaires.

Conclusion

J'ai rappelé et décrit au chapitre 1 les propriétés de l'atmosphère. Au chapitre 2 j'ai décrit la construction de la commande modale, et l'algorithme qui permet de l'appliquer au mieux dans le cas d'un système d'optique adaptative astronomique. Au chapitre 3 j'ai parcouru avec le lecteur quelques-uns des différents résultats de l'optimisation modale, vérifiant expérimentalement ce que nous avons acquis.

Qu'avons-nous appris ? La turbulence, que nous voyons à travers notre système d'optique adaptative, véritable filtre spatial et temporel, nous fournit un signal grâce à notre analyseur. De ce signal turbulent n'émerge qu'un îlot visible, le reste étant noyé sous les erreurs dues au bruit de mesure, les erreurs d'anisoplanétisme, les erreurs temporelles et de repliement spatial. Le problème était de cerner cet îlot de signal pour le corriger et ne corriger que lui, afin d'introduire le minimum d'erreur dans la boucle de commande. La décomposition modale nous a permis de découper ce signal en tranches spatiales. L'adaptation de la bande passante temporelle de correction sur chacun de ces modes nous a permis de trouver le bon équilibre entre correction efficace et introduction du bruit. On a donc vu de quelle manière il était possible de définir les limites de correction autour du signal qui nous intéressait, et de quelle manière il était possible d'adapter le système à ces limites, de le redimensionner. Lorsque COMEONPLUS effectue une correction sur Frosty Leo, ce n'est plus un système à 52 degrés de liberté dont il s'agit, mais seulement 15. Le système n'est pas seulement adaptatif en temps réel, mais il est aussi adaptatif face aux conditions globales d'observation.

Nous savons donc comment agir sur notre système pour lui donner la forme adaptée à la correction que l'on veut apporter. Mais pour connaître cette correction, pour savoir ce dont on a exactement besoin dans tel et tel cas, il est nécessaire d'étudier l'atmosphère ainsi que la manière dont elle agit sur le système. L'atmosphère ne se laisse pas facilement enfermer dans un modèle. Ses propriétés sont fluctuantes; tantôt conformes aux prédictions des lois Kolmogorov, tantôt entachées d'une échelle externe réduite, tantôt la somme de différentes perturbations. Les spectres temporels peuvent prendre des formes variées. Certes ils sont toujours explicables, mais le nombre de combinaisons, associé au nombre de combinaisons possibles des paramètres du système et des niveaux de bruit de mesure, crée un problème aux facettes multiples.

Pour le contrer un algorithme a été mis au point, qui constitue le centre de

l'optimisation modale. Il repose sur un nombre minimum d'hypothèses sur la turbulence; il prend en revanche racine dans les caractéristiques du système. Son mode d'action est d'étudier au préalable les conditions *in situ* de turbulence –dans la mesure où celles-ci ne varient pas trop–, et d'en déduire de manière autonome la matrice de commande optimisée, qui contient dans ses coefficients tous les paramètres définissant l'étendue spatiale et temporelle de la correction.

La tâche de l'optimisation modale est ingrate, son but est en fait de rendre les images moins mauvaises qu'elles ne sont. Quand le flux est élevé, que les conditions d'asservissement ne posent pas de problème, on dit pouvoir asservir en correction zonale. Je préfère évidemment voir cela comme une correction modale où tous les degrés de liberté sont pleinement sollicités; mais la cause est entendue. La commande modale ne prend tout son sens que si elle est optimisée –c'est là le maître mot–, et l'optimisation est d'autant plus sévère que le flux lumineux est moindre. Donc l'optimisation modale se révèle utile en particulier à faible flux. Si le système était commandé dans tous les cas en correction totale, la magnitude limite n'excéderait pas 10 pour la plupart des conditions de seeing, alors que COMEONPLUS dépasse la magnitude 14. Muni d'une correction zonale, l'expérimentateur sait qu'il doit "baisser le gain" lorsque le flux s'amointrit: mais quelle valeur lui donner, comment être sûr que l'on ne se trouve pas dans un cas de sur ou sous-corrrection ? La correction modale optimisée répond à la question, je l'ai montré. J'ai aussi mentionné que dans de nombreux cas une correction zonale optimisée pouvait suffire: en effet, si l'optimisation ne devient utile qu'à partir du moment où le flux n'est plus maximum, le choix judicieux de la base modale ne devient pertinent qu'à flux extrêmement faible, lorsque l'on est en bordure de la magnitude limite.

Le projet de l'optique adaptative du télescope franco-canadien d'Hawaii utilise un senseur de courbure et un miroir bimorphe: la structure générale apparaît bien différente de celle de COMEONPLUS . Pourtant, le même type d'algorithme d'optimisation modale y sera appliqué très bientôt. Le senseur n'étant pas linéaire sur une plage importante d'excursion de phase, F. Rigaut a mis au point, à partir de l'algorithme que je présente ici, une méthode d'optimisation en boucle fermée.

ADONIS doit un jour se doter d'un analyseur infrarouge. Celui-ci sera limité par le bruit de lecture et le bruit de fond thermique. Pour atteindre la magnitude limite ultime, il deviendra certainement nécessaire d'utiliser un nombre réduit de sous-pupilles (5×5 ?). La maîtrise de la commande modale permet de commander un miroir à 52 actionneurs à partir d'un nombre inférieur de mesures (40). Il sera nécessaire de bien choisir l'espace utile des modes; l'analyse modale permet de faire un choix pertinent. Pour limiter le bruit de mesure, il sera nécessaire de se méfier des problèmes que j'ai mentionnés, en particulier au niveau du seuillage; j'espère avoir développé un maximum d'arguments pour éviter les écueils. D'autre part, l'algorithme de l'optimisation modale tel qu'il est implanté sur ADONIS est actuellement parfaitement apte à optimiser la commande pour ce nouvel analyseur: qu'il soit optiquement limité par la diffraction ou par la turbulence, quelle que soit l'origine

du bruit, l'optimisation modale fonctionne et conduit à l'optimum.

Le grand programme Européen du VLT va se doter d'une optique adaptative. La taille des télescopes implique pour ce système un grand nombre de degrés de liberté (256 prévus). L'optimisation modale devra y tenir une place particulière. Les effets de repliement que j'ai mentionnés conduisent dès le départ à l'élimination d'un grand nombre de modes; l'analyse modale permet de clarifier ces questions. Elle permet également de répondre quant au choix du miroir (maillage cartésien, hexagonal ?). Etant donné le grand nombre de degrés de liberté, une optimisation rigoureuse sera fondamentale.

La détection d'exoplanètes autour d'étoiles brillantes ($m_V < 6$) ne peut se faire qu'avec des systèmes comptant un très grand nombre d'actionneurs. La maîtrise de la commande modale est très importante dans ce cas face au phénomène de repliement spatial; la minimisation du bruit de mesure est également primordiale.

Ces exemples montrent ce que représente l'analyse modale en optique adaptative. C'est à la fois un moyen d'étude, un moyen d'action dans ADONIS, et un outil de dimensionnement des systèmes.

Comment améliorer l'optimisation modale: faut-il essayer de réduire le temps de calcul ? Celui-ci prenait environ 3 minutes pour l'optimisation des 50 modes dans le système COMEONPLUS, il prendra environ 10 secondes dans ADONIS, étant données les performances de la station: c'est un laps de temps négligeable. Faut-il affiner le choix des modes ? Le gain potentiel est infime, de même que pour l'affinement de la détermination de la bande passante optimale. L'amélioration du système repose maintenant sur deux points. Le premier est la réduction du bruit de mesure, qui est un facteur décisif dans l'avenir d'ADONIS et qui lui permettra, ou pas, de rivaliser avec les systèmes actuellement en phase de développement; c'est un point indépendant de l'analyse modale. Le deuxième point concerne le filtre de la boucle d'asservissement: un intégrateur avec gain est certainement le compensateur le plus simple qui soit. ADONIS entame une ère où le temps de calcul n'est plus la contrainte principale, et les potentialités sont énormes: il est fondamental de développer des compensateurs plus performants. Conjointement, l'optimisation modale doit évoluer, car l'algorithme d'optimisation est dépendant dans une certaine mesure du correcteur temporel. Plus le correcteur est évolué et plus il comprend de paramètres à optimiser: c'est la tâche de l'optimisation modale.

Enfin, si on se projette encore plus loin dans l'avenir de l'optique adaptative, on y voit certainement des systèmes multi-miroirs conjugués de plusieurs couches turbulentes, munis d'étoile(s) artificielle(s), et de grands détecteurs à comptage de photons avec des rendements quantiques élevés. Et si le bruit de mesure ne pose plus de problème, si l'optimisation du repliement spatial est maîtrisée, si l'anisoplanétisme est anihilé, je reste convaincu que l'aspect modal de la connaissance de ces problèmes ne sera pas étranger à cette réussite.

Chapitre 4

Annexes

4.1 Seuillage

Donnons-nous la distribution spatiale d'intensité de l'image à un moment donné. La valeur de cette distribution en un point est la moyenne du nombre de photons incidents (par unité de surface) qui vont tomber en ce point; la statistique du nombre de photons en ce point suit une loi poissonnienne. Une fois l'image seuillée c'est une loi poissonnienne "modifiée" comme le montre la figure 4.1. Le but des calculs qui suivent est d'obtenir une expression de la valeur moyenne de cette loi.

a désigne la moyenne de la loi Poissonnienne

s désigne le seuil

$m(a,s)$ désigne la moyenne de la loi de moyenne a seuillée à s .

$$m(a, s) = e^{-a} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{a^{k+s}}{(k+s)!} \cdot k \quad (4.1)$$

$$= e^{-a} \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \cdot (k-s) \quad (4.2)$$

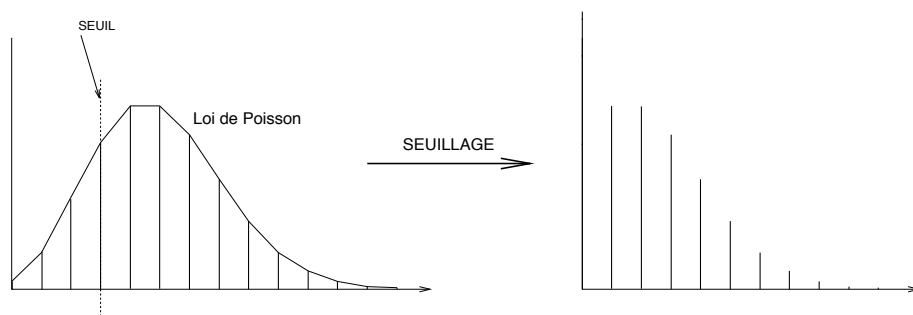


Figure 4.1: Loi d'arrivée du signal en un point particulier après seuillage de l'image.

$$= e^{-a} \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \cdot k - e^{-a} \cdot s \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (4.3)$$

$$= e^{-a} \cdot a \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} - e^{-a} \cdot s \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (4.4)$$

$$= e^{-a} \cdot a \cdot \sum_s^{\infty} \frac{a^k}{k!} - e^{-a} \cdot s \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (4.5)$$

$$= e^{-a} \cdot a \cdot \frac{a^s}{s!} + (a-s) \cdot e^{-a} \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (4.6)$$

$$= a - s + e^{-a} \cdot \sum_0^s \frac{a^k}{k!} \cdot (s-k) \quad (4.7)$$

Les sommations sont difficiles à évaluer analytiquement. On peut toutefois signaler que

$$\sum_{s+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \cdot \int_0^a \frac{t^s}{s!} \cdot e^{-t} dt \quad (4.8)$$

d'après le théorème du reste intégral¹. Et donc on a

$$m(a, s) = e^{-a} \cdot a \cdot \frac{a^s}{s!} + \frac{a-s}{s!} \cdot \int_0^a t^s \cdot e^{-t} dt \quad (4.9)$$

Cas d'un très faible nombre de photons On suppose $a \ll 1$, et l'on utilise l'équation

$$m(a, s) = e^{-a} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{a^{k+s}}{(k+s)!} \cdot k \quad (4.10)$$

qui est déjà une expression développée au premier ordre. Cela donne

$$m(a, s) \approx \frac{a^{s+1}}{(s+1)!} \quad (4.11)$$

Cas d'un grand nombre de photons Supposons $s \ll a$ et $1 \ll a$. Dans ce cas l'intégrale $\int_0^a t^s \cdot e^{-t} dt$ se rapproche de $\int_0^{\infty} t^s \cdot e^{-t} dt$ qui est la célèbre fonction $\Gamma(s+1)$, égale à $s!$. Donc l'expression se simplifie car le terme $e^{-a} \cdot a^{(s+1)}/s!$ tend vers 0; il ne reste donc que

$$m(a, s) \approx a - s \quad (4.12)$$

C'est dans ce cas particulier que l'on pourra approximer la moyenne des images seuillées par l'image moyenne seuillée.

¹merci à Guy Perrin

Cas $a = s$ On peut évaluer le cas particulier où $s = a$. Alors

$$m(s, s) = e^{-s} \cdot \frac{s^{s+1}}{s!} = e^{-s} \cdot \frac{s^s}{(s-1)!} \quad (4.13)$$

Il est amusant de remarquer que l'on a, de manière empirique mais néanmoins avec une excellente précision

$$m(s, s) \approx s^{0.53}/2.72 \quad (\text{pour } 1 < s < 50) \quad (4.14)$$

Cas particuliers

- $m(a, 1) = a - 1 + e^{-a}$
- $m(a, 2) = a - 2 + e^{-a}(2 + a)$
- $m(a, 3) = a - 3 + e^{-a}(3 + 2.a + a^2/2)$
- $m(a, 4) = a - 4 + e^{-a}(4 + 3.a + a^2 + a^3/6)$
- $m(a, 5) = a - 5 + e^{-a}(5 + 4.a + 3.a^2/2 + a^3/3 + a^4/24)$

Variance du centroïde, seuillage “net”

Le but de ce paragraphe est d'obtenir une estimation de l'erreur sur la position du centre de gravité de l'image en fonction du seuil appliqué et de la forme des spots. Afin de comprendre le phénomène en simplifiant les calculs, on fait l'hypothèse (que l'on sait fautive) où le seuillage de l'image équivaut à seuiller l'image moyenne. Cette hypothèse tend à être respectée lorsque le nombre de photons devient grand: c'est donc dans ce cas de figure que l'on se placera.

Enfin, le calcul est fait pour deux cas particuliers de formes de tache image: l'exemple d'une gaussienne et l'exemple d'une tache à décroissance plus lente, en $1/r^2$.

Tache gaussienne La tache s'écrit

$$T(r, \theta) = \frac{\phi_o}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad (4.15)$$

où r est le rayon. On a $r^2 = x^2 + y^2$. La largeur de la tache à mi-hauteur est λ/r_o . $\frac{\phi_o}{2\pi\sigma^2}$ est une densité de photoélectrons, par exemple exprimée en *photoe⁻/pixel²*. La relation entre la largeur à mi-hauteur et σ est alors

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\sqrt{2 \ln(2)} r_o} = \frac{\lambda}{2.35 r_o} \quad (4.16)$$

On seuille cette image. Au lieu d'écrire le seuil s , on va l'écrire

$$s = \frac{\phi_o}{2\pi\sigma^2} e^{-R^2/2\sigma^2} \quad (4.17)$$

car il est plus facile de prendre R que s comme paramètre. On admet donc que seuiller la tache modifie la loi de répartition des photons incidents d'une manière simple: on retire la valeur du seuil à cette loi de répartition, et l'on met à zéro ce qui se trouve être négatif.

Le flux restant dans la tache après seuillage est

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r \cdot \phi_o \frac{e^{-r^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} - r \cdot s \, dr \quad (4.18)$$

$$= \phi_o - 2\pi\sigma^2 s + 2\pi\sigma^2 s \ln\left(\frac{2\pi\sigma^2 s}{\phi_o}\right) \quad (4.19)$$

Lorsque $s = 0$ on a un flux égal à ϕ_o .

Variance du centroïde:

$$\Sigma^2 = \frac{1}{\phi^2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \int_0^R r^3 \cdot \phi_o \frac{e^{-r^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} - r^3 \cdot s \, dr \quad (4.20)$$

$$= \frac{\phi_o \sigma^2 - 2\pi\sigma^4 s (1 - \ln(\frac{2\pi\sigma^2 s}{\phi_o})) - \pi\sigma^2 s \ln^2(\frac{2\pi\sigma^2 s}{\phi_o})}{(\phi_o - 2\pi\sigma^2 s + 2\pi\sigma^2 s \ln(\frac{2\pi\sigma^2 s}{\phi_o}))^2} \quad (4.21)$$

Au lieu de considérer s en absolu, on peut considérer la variable $u = 2\pi\sigma^2 s / \phi_o$ qui n'est autre que le seuil normalisé par la hauteur de la tache en son centre. Alors,

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\phi_o} \frac{1 - u + u \ln(u) - u \ln^2(u)/2}{1 - u + u \ln(u)} \quad (4.22)$$

Tache en $1/x^2$ On refait exactement le même calcul que précédemment, en supposant une équation de la tache en

$$t(r, \theta) = \frac{h_o}{1 + (r/l)^2} \quad (4.23)$$

Les deux paramètres qui définissent ce spot sont donc sa hauteur à l'origine h_o et sa largeur à mi-hauteur $2l$.

On écrit le seuil de la manière suivante

$$s = \frac{h_o}{1 + (R/l)^2} \quad (4.24)$$

car il est plus facile de prendre R que s comme paramètre. h_o est une densité de photoélectrons.

Flux contenu dans la tache après seuillage:

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r h_o}{1 + (r/l)^2} - r.s dr \quad (4.25)$$

$$= \pi l^2 (s - h_o - h_o \ln(s/h_o)) \quad (4.26)$$

Lorsque $s = 0$, il est évidemment impossible de trouver le flux, puisque celui-ci ne converge pas (cas d'un objet étendu).

Variance du centroïde:

$$\Sigma^2 = \frac{1}{\phi^2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \int_0^R \frac{r^3 h_o}{1 + (r/l)^2} - r^3.s dr \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{\phi^2} \frac{\pi l^4}{4} (h_o^2/s - s + 2 h_o s \ln(s/h_o)) \quad (4.28)$$

$$= \frac{h_o^2 - s^2 + 2 h_o s \ln(s/h_o)}{4\pi s (s - h_o + h_o \ln(s/h_o))^2} \quad (4.29)$$

On considère la variable $u = s/h_o$ qui n'est autre que le seuil normalisé par la hauteur de la tache en son centre. Alors,

$$\Sigma^2 = \frac{1}{4\pi h_o} \frac{1 - u^2 + 2 u \ln(u)}{u(u - 1 - \ln(u))^2} \quad (4.30)$$

4.2 Projection d'une déformée symétrique de révolution sur les modes de Zernike

Soit $d(x, y)$ la déformée d'un actuateur particulier. J'appelle r et θ les coordonnées polaires associées à x et y , et je noterai indifféremment (x, y) , \vec{x} , ou (r, θ) . La déformée est supposée symétrique de révolution, mais le point central de la symétrie se trouve non pas à l'origine $(0, 0)$, mais quelque part sur l'axe des abscisses. On a donc la propriété suivante:

$$d(r, \theta) = d(r, -\theta) \quad (4.31)$$

Le but est de calculer la projection de $d(r, \theta + \theta_o)$ sur un mode d'équation $Z(r, \theta) = P(r) \cos(m\theta)$. On reconnaît dans cette dernière expression la forme générale des polynômes de Zernike. Le résultat auquel je veux aboutir est valable pour les polynômes de Zernike, mais il est aussi valable pour *tout* mode en $P(r) \cos(m\theta)$. Cela signifie par exemple qu'il est valable pour les modes de décomposition en Karhunen-Loeve du processus turbulent. Mieux, la fonction $P(r)$ peut être nulle sur un certain intervalle, signifiant que le résultat final est valable aussi sur une pupille obturée en son centre.

Calculons donc la quantité

$$A(\theta_o) = \int_0^\infty r dr \int_{\beta-\pi}^{\beta+\pi} d(r, \theta + \theta_o) P(r) \cos(m\theta) \quad (4.32)$$

Le terme β dans les bornes d'intégration de l'intégrale sur θ n'a aucune importance. Il est simplement introduit ici pour la commodité future du calcul; l'important est d'intégrer sur "un tour". Par un changement de variable, et en regroupant les termes indépendants de θ ensembles, il vient

$$A(\theta_o) = \int_0^\infty P(r) r dr \int_{\beta+m\theta_o-\pi}^{\beta+m\theta_o+\pi} d(r, \theta) \cos(m\theta - m\theta_o) d\theta \quad (4.33)$$

Il suffit maintenant de choisir $\beta = -m\theta_o$ pour simplifier l'équation en

$$A(\theta_o) = \int_0^\infty P(r) r dr \int_{-\pi}^{\pi} d(r, \theta) \cos(m\theta - m\theta_o) d\theta \quad (4.34)$$

Je développe le $\cos(m\theta - m\theta_o)$, il vient

$$A(\theta_o) = \cos(m\theta_o) A(0) + \sin(m\theta_o) \int_0^\infty P(r) r dr \int_{-\pi}^{\pi} d(r, \theta) \sin(m\theta) d\theta \quad (4.35)$$

Etant donné l'équation 4.31, l'intégrale du membre de droite est nulle. On a donc

$$A(\theta_o) = \cos(m\theta_o) A(0) \quad (4.36)$$

Conclusion: Pour calculer la projection des déformées (symétriques de révolution) des actuateurs d'un miroir sur une base de modes en $P(r) \cos(m\theta)$ (les polynômes de Zernikes en sont un cas particulier), il suffit de calculer la projection d'un actuateur situé sur l'axe des abscisses: la projection des actuateurs se trouvant à la même distance du centre se déduit par une simple multiplication par un cosinus.

Références bibliographiques

- Allen C.W., "Astrophysical quantities", third edition, the Athlone press, London, (1976)
- Angel R., "Wavefront reconstruction by machine learning, using the delta rule", Proc. SPIE 2201, March 1994, p 629, (1994)
- Babcock H.W., "The possibility of compensating astronomical seeing", Publ. Astr. Soc. Pacific, **65**, p 229, (1953)
- Bakut P.A., Kirakosyants V.E., Loginov V.A., Solomon C.J., Dainty J.C., "Optimal wavefront reconstruction from a Shack-Hartmann sensor by use of a Bayesian algorithm", Optics Communications, Vol. **109**, p 10, (1994)
- Beckers J.M., "Adaptive Optics for Astronomy : Principles, Performance and Applications", Ann. Rev. Astron. and Astrophysics, Vol. **31**, p 13, (1993)
- Bester M., Danchi W.C., Degiacomi C.G., Greenhill L.J., Townes C.H., "Atmospheric fluctuations: empirical structure functions and projected performance of future instruments", ApJ, **392**, p 357, (1992)
- Beuzit. J.L., Hubin N., Chazallet F., Demailly L., Gendron E., Gigan P., Lacombe F., Rabaud D., "Adonis, a user-friendly adaptive optics system for the ESO 3.6 m telescope", Proc. SPIE 2201, p 955, (1994)
- Boyer C., Michau V., Rousset G., "Adaptive optics : interaction matrix measurements and real time control algorithms for the Come-On project", Proc. SPIE 1237 (Tucson) , p 406, (1990)
- Boyer C., Michau V., Rousset G., "Adaptive optics : interaction matrix measurements and real time control algorithms for the Come-On project", Int. Cong. on Optical Science and Engineering, La Haye, 11-16 mars, (1990) et Proc. SPIE 1271, p 63, (1990)
- de Brucq D., Folliot G., "Théorie du signal, modélisation statistique, automatique et traitement", Masson, Paris (1988)
- Caccia J.L., Azouit M., Vernin J., "Wind and C_N^2 profiling by single-star scintillation analysis", Applied Optics, Vol. **26**, No. 7, p 1288, (April 1997)
- Chassat F., "Calcul du domaine d'isoplanétisme d'un système d'optique adaptative fonctionnant à travers la turbulence atmosphérique", J. Optics (Paris), **20**, p 13, (1989)
- Chassat F., "Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique; Etude modale de l'anisoplanétisme et application à l'optique adaptative", Thèse de doctorat de l'université Paris-Sud, Orsay, (3 Juin 1992)

- Christou, PASP, Vol. **103**, p 1040, (1991)
- Churnside et al., Optics Letters, Vol. **10**, p 258, (1985)
- Clifford S.F., "Temporal-frequency spectra for a spherical wave propagating through atmospheric turbulence", JOSA, Vol. **61**, p 1285, (1971)
- Conan J.M., Madec P.Y., Rousset G., "Temporal power spectra of turbulent wavefronts", 13th Sacramento Peak Summer Workshop on *Real time and post-facto solar image correction*, 15-18 Sept. 1992
- Conan J.M., "Image formation in adaptive optics partial correction", ICO conference on Active and Adaptive Optics, Garching (Germany), August 2-5, p 181, (1993)
- Conan J.M., "Etude de la correction partielle en optique adaptative", Thèse de doctorat de l'université Paris-Sud, (27 Octobre 1994)
- Coudé du Foresto V., "Interférométrie astronomique infrarouge par optique guidée mono-mode", Thèse de doctorat de l'université Denis Diderot, (11 Juillet 1994)
- Cubalchini R., "Modal wave-front estimation from phase derivative measurements", JOSA, Vol. **69**, No. 7, p 972, (1979)
- Cuby J.G., Richard J.C., Lemonier M., "Electron-Bombarded CCD : First results with a prototype tube", Proc. SPIE 1237, p 538, (1990a)
- Cuby J.G., Kern P., Rigaut F., Rousset G., "Analyse de surface d'onde. Magnitudes limites", dans *Optique Adaptative et VLT*, Alloin D. et Léna P. Eds., Forum de l'Observatoire de Paris, p 17, (1990b)
- Demilly L., Gendron E., "An artificial intelligence system for a smart control of an adaptive optics common user instrument", in *Adaptive Optics for Large Telescopes Technical Digest - 1992* (OSA), **19**, p 72, (1992)
- Demilly L., Gendron E., Beuzit. J.L., Lacombe F., Hubin N., "Artificial Intelligence system and Optimized Modal Control for the ADONIS Adaptive Optics Instrument", Proc. SPIE 2201, p 867, (1994)
- Demerlé M., Madec P.Y., Rousset G., "Servo-loop analysis for adaptive optics", Adaptive optics for astronomy, NATO-ASI, Ed. D. Alloin and J.-M. Mariotti, Kluwer, p 73, (1994)
- Ellerbroek B. L., Van Loan C., Pitsianis N. P., Plemmons R. J., "Optimizing closed-loop adaptive-optics performance with use of multiple control bandwidths", JOSA, Vol. **11**, No. 11, p 2871, (Novembre 1994)
- Fante R.L., "Electromagnetic beam propagation in turbulent media", Proc IEEE, Vol. **63**, No. 12, p 1669, Dec. (1975).
- Fields D.R., "High Frequency behavior of the tilt spectrum of atmospheric turbulence", Appl. Opt., Vol. **22**, No. 5, p 645, (1983)
- Fontanella J.C., "Analyse de surface d'onde, déconvolution et optique active", J. Optics (Paris), Vol. **16**, No. 6, p 257, (1985)
- Fontanella J.C., Rousset G. Léna P., "L'optique adaptative, un élément-clé du très grand télescope européen VLT", J. Optics (Paris), Vol. **22**, No. 2, p 99, (1991)
- Fried D.L., "Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures", JOSA, Vol. **56**, p 1372, (1966)

- Fried D.L., "Least-square fitting of a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements", *JOSA*, **67**, p 370, (1977)
- Fried D.L., "Atmospheric turbulence optical effects : understanding the adaptive-optics implications", *Adaptive optics for astronomy*, NATO-ASI, Ed. D. Alloin and J.-M. Mariotti, Kluwer, p 25, (1994)
- Fugate R.Q., Fried D.L., Ameer G.A., "Measurement of atmospheric wavefront distortion using scattered light from a laser guide-star", *Nature* **353**, p 144, (1991)
- Fugate R.Q., "High bandwidth laser guide star adaptive optics at the starfire optical range", in *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, ESO Conf. 27-30 Apr 92, Garching (Germany), Ed. M.-H. Ulrich, p 407, (1992)
- Gaffard J.P., Boyer C., "Adaptive optics for optimization of image resolution", *Applied Optics*, Vol **26**, p 3772, (1987)
- Gaffard J.P., Ledanois G., "Adaptive optical transfer function modeling", *Proc. SPIE* 1542, p 34, (1991)
- Gaffard J.P., Boyer C., "Adaptive optics : a method for real-time optimization of the loop gains in AO systems", *Proc. SPIE* 2201, p 899, (1994)
- Gendron E., Léna P., "Astronomical adaptive optics : I. Modal control optimization", *Astron. Astrophys.*, Vol. **291**, p 337, (1994)
- Gendron E., Léna P., "Astronomical adaptive optics : II. Experimental results of an optimized modal control", *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, Vol. **110**, (1995)
- Gendron E., Cuby J.G., Rigaut F., Léna P., Fontanella J.C., Rousset G., Gaffard J.P., Boyer C., Richard J.C., Vittot M., Merkle F., Hubin N., "The Come-On-Plus project : an upgrade of the Come-On adaptive optics prototype system", *Proc. SPIE* 1542, p 298, (1991)
- Gendron E., "Modal control optimization in an adaptive optics system", *ICO conference on Active and Adaptive Optics*, Garching (Germany), August 2-5, p 187, (1993)
- Gendron E., Léna P., "Evidence for a Taylor atmospheric turbulence observed with adaptive optics", *Experimental Astronomy*, in press.
- Glindemann Andreas, "Improved performance of adaptive optics in the visible", *JOSA*, Vol.**11**, No. 4, p 1370, (1994)
- Greenwood D.P., Fried D.L., "Power spectra requirements for wave-front-compensative systems", *JOSA*, **3**, p 66, (1976)
- Greenwood D.P. "Power spectra of turbulence-induced wavefront errors", *Proc. SPIE* 142, p 91, (1978)
- Greenwood D.P., Primmerman C.A., Murphy D.G., "Measurements of atmospheric phase and tilt, and comparison with theory", in *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, ESO Conf. 21-24 March 88, Garching (Germany), Ed. M.-H. Ulrich, p 675, (1988)
- Hardy J.W., Lefebvre J.E., Koliopoulos C.L., "Real-time atmospheric compensation", *JOSA*, Vol. **67**, p 360, (1977)
- Hermann J., "Phase variance and Strehl ratio in adaptive optics", *JOSA Communications*, Vol. 9, No. 12, p 2257, (1992)

- Hermann J., "Cross coupling and aliasing in modal wave-front estimation", *JOSA*, Vol. **70**, No. 1, p 28, (1980)
- Hermann J., "Cross coupling and aliasing in modal wave-front estimation", *JOSA*, **71**, p 989, (1981)
- Hogge C.B., R.R. Butts, "Frequency spectra for the geometric representation of wavefront distortions due to atmospheric turbulence.", *IEEE transaction on antennas and propagation*, Vol. **24**, No. 2, p 114, (1976)
- Hubin N., Noethe L., "Active optics, Adaptive optics, and Laser Guide Stars", *Science*, **262**, p 1390, (1993)
- Hubin N., Beuzit J.-L., Gendron E., Demailly L., "ADONIS : a user friendly adaptive optics system for the 3.6-m telescope", *ICO conference on Active and Adaptive Optics*, Garching (Germany), August 2-5, p 71, (1993)
- Hubin N., Beuzit J.L., Gigan P., Léna P., Madec P.Y., Rousset G., Boyer C., Gaffard J.P., Richard J.C., Vittot M., Rigaut F., Gendron E., Merkle F., "New adaptive optics prototype system for the ESO 3.6m telescope: ComeOnPlus", *Proc SPIE 1780 (Berlin)*, p 87, (1992)
- Jacobsen B., Martinez T., Angel R., Lloyd-Hart M., Benda S., Middleton D., Friedman H., Erbert G., "Field evaluation of two continuous-wave dye laser systems optimized for sodium beacon excitation", *Proc. SPIE 2201*, p 342, (1994)
- Kern P., "Optique adaptative et grands télescopes", Thèse de doctorat de l'université Paris VII, (25 Juin 1990)
- King J.R., *PASP*, Vol. **83**, p 199, (1971)
- Kolmogorov A.N., "Local structure of turbulence in incompressible fluids with very high Reynolds number", *Dan SSSR*, Vol. **30**, p 229, (1941)
- Léna P., "Perspectives de l'optique adaptative en astronomie", in *Optique Adaptative et VLT*, Forum de l'Observatoire de Paris, p 1, (1990)
- Léna P., "Astrophysical results with Come-On-Plus", *Proc. SPIE 2201*, p 1099, (1994a)
- Léna P., "Astrophysics with adaptive optics : results and challenges", *Adaptive optics for astronomy*, NATO-ASI, Ed. D. Alloin and J.-M. Mariotti, Kluwer, p 321, (1994b)
- Léna P., "Méthodes physiques de l'observation", *Coll. Astrophysique, Savoir actuels*, InterEditions & Editions du CNRS, (1986)
- Linnick V.P., *Opt. Spektrosk. (USSR)* Vol. **3** p 401, (1957): English translation in F. Merkle Ed., *Active and adaptive optics*, ESO Conference, Proc. 48, p 535, (1994)
- Lloyd-Hart M., Dekany R., Sandler D., Wittman D., Angel R., McCarthy D., "Progress in diffraction-limited imaging at the Multiple Mirror Telescope with adaptive optics", *J. Opt. Soc. Am.*, **11**, No 2, (1994)
- Mac Kechnie T. S., "Atmospheric turbulence and the resolution limits of large ground-based telescope", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol.**9**, No. 11, p 1937, (1992)
- Mac Kechnie T. S., "Atmospheric turbulence and the resolution limits of large ground-based telescope : reply to comment", *J. Opt. Soc. Am. Communication*, Vol.**10**, No. 11, p 2415, (1993)

- Madec P.-Y., Conan J.-M., Rousset G., “Temporal characterization of atmospheric wave-front for adaptive optics”, in *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, ESO Conf. 27-30 Apr 92, Garching (Germany), Ed. M.-H. Ulrich, p 471, (1992)
- Malbet F., Léna P., Bertout C., *Astron. Astrophys.*, **271**, L9-12, (1993)
- Mariotti J.M., “Adaptive optics for long baseline optical interferometry”, *Adaptive optics for astronomy*, NATO-ASI, Ed. D. Alloin and J.-M. Mariotti, Kluwer, p 309, (1994)
- Noll R.J., “Zernike polynomials and atmospheric turbulence”, *JOSA*, Vol. **66**, p 207, (1976)
- Noll R.J., “Phase estimates from slope-type wave-front sensors”, *JOSA*, Vol. **68**, No. 1, p 139, (1978)
- Primmerman C.A., Murphy D.G., Page D.A., Zollars B.G., Barclay H.T., “Compensation of atmospheric optical distortion using a synthetic beacon”, *Nature* **353**, p 141, (1991)
- Primot J., “Application des techniques d’analyse de surface d’onde à la restauration d’images dégradées par la turbulence atmosphérique”, Thèse de doctorat de l’université Paris XI, (9 mai 1989)
- Primot J., Rousset G., Fontanella J.C., “Deconvolution from wave-front sensing: a new technique for compensating turbulence-degraded images”, *JOSA A*, Vol. **7**, No. 9, p 1598, (1990)
- Rigaut F., “Applications de l’optique adaptative en astronomie”, Thèse de doctorat de l’université Paris VII, (20 mai 1992)
- Rigaut F., Rousset G., Kern P., Fontanella J.C., Gaffard J.P., Merkle F., Léna P., “Adaptive optics on a 3.6 m telescope : results and performances”, *Astron. Astrophys.*, **250**, p 280, (1991)
- Rigaut F., Gendron E., “Laser guide star in adaptive optics : the tilt determination problem”, *Astron. and Astrophysics*, **261**, p 677, (1992a)
- Roddier F., “The effect of atmospheric turbulence in optical astronomy”, E. Wolf Ed., *Progress in Optics Vol. XIX*, (1981)
- Roddier F., Northcott M., Graves J.E., “A simple low-order adaptive optics system for near-infrared applications”, *PASP*, **103**, p 131, (1991)
- Roddier F., Roddier C., “Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms”, *Applied Optics*, Vol. **30**, No. 11, (1991)
- Roddier F., “Towards lower cost adaptive optics systems”, in *Adaptive Optics for Large Telescopes Technical Digest - 1992* (OSA), **19**, p 106, (1992)
- Roddier F., Northcott M., Graves J.E., McKenna D.L., “One dimensional spectra of turbulence-induced Zernike aberrations: time-delay and isoplanicity error in partial adaptive compensation”, *JOSA*, **10**, No. 5, p 957, (1993)
- Roddier N., “Atmospheric wavefront simulation and Zernike polynomials”, *Proc. SPIE* 1237, (1990)
- Rousset G., Primot J., Fontanella J.C., “Visible wavefront sensor development”, *proc. LEST tech. rep. on Adaptive Optics on Solar Observation*, p 17, (1987)

- Rousset G., Fontanella J.C., Kern P., Gigan P., Rigaut F., Léna P., Boyer C., Jagourel P., Gaffard J.P., Merkle F., "First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics", *Astron. Astrophys.*, **230**, L29-L32, (1990)
- Rousset G., Madec P.Y., Rabaud D., "Adaptive optics partial correction simulation for two telescope interferometry", *ESO Conference on High Resolution Imaging by Interferometry II*, Beckers J.M. & Merkle F. Ed., Garching, p 1095, (October 15-18 1991)
- Rousset G., Madec P.Y., Beuzit J.L., Cuby J.G., Gigan P., Léna P., Rigaut F., Boyer C., Gaffard J.P., Richard J.C., Vittot M., Gendron E., Hubin N., Merkle F., "The Come-On-Plus project : an adaptive optics system for a 4-meter class telescope", *ESO conf. on Progress in Telescope and Instrumentation Technologies*, M.-H. Ulrich Ed., Garching, (April 1992)
- Rousset G., Madec P.Y., Beuzit J.L., Cuby J.G., Gigan P., Léna P., Rigaut F., Boyer C., Gaffard J.P., Richard J.C., Vittot M., Gendron E., Hubin N., Merkle F., "The Come-On-Plus project", *OSA Technical Digest Series Vol. 19*, Maui, (August 1992)
- Rousset G., Beuzit J.-L., Hubin N., Gendron E., Boyer C., Madec P.-Y., Gigan P., Richard J.C., Vittot M., Gaffard J.P., Rigaut F., Léna P., "The Come-On-Plus Adaptive Optics System : Results and performance", *ICO conference on Active and Adaptive Optics*, Garching (Germany), August 2-5, p 65, (1993)
- Rousset G., Beuzit J.L., Hubin N., Gendron E., Madec P.Y., Boyer C., Gaffard J.P., Richard J.C., Vittot M., Gigan P., Léna P., "Performances and results of the ComeOnPlus adaptive optics system at the ESO 3.6 m telescope.", *Proc. SPIE 2201*, p 1088, (1994)
- Rousset G., "Wavefront sensing", *Adaptive optics for astronomy*, NATO-ASI, Ed. D. Alloin and J.-M. Mariotti, Kluwer, p 115, (1994)
- Sandler D.G., Stahl S., Angel J.R.P., Lloyd-Hart M., McCarthy D., "Adaptive optics for diffraction-limited infrared imaging with 8-m telescopes", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. **11**, No 2, p 925, (1994)
- Sarazin M., Roddier F., "The ESO differential image motion monitor", *Astron. Astrophys.*, Vol. **227**, p 294, (1990)
- Sarazin M., "Use of a large-scale spatial coherence of turbulence patterns for predicting observation conditions at astronomical observatories", *Atmospheric and Oceanic Optics*, Vol. **5**, No. 12, p 830, (Dec. 1992)
- Schwartz C., Baum G., Ribak E.N., "Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces", *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **11**, No. 1, p 444, (1994)
- Séchaud M., Rousset G., Michau V., Fontanella J.C., Cuby J.G., Rigaut F., Richard J.C., "Wave-front sensing in imaging through the atmosphere: a detector strategy", *Proc. SPIE 1543*, p 479, (1991)
- Southwell W.H., "Wave-front estimation from wave-front slope measurements", *JOSA*, Vol. **70**, No. 8, p 998, (1980)
- Southwell W.H., "What's wrong with cross coupling in modal wave-front estimation ?", *Proc. SPIE 365*, p 97, (1982)

- Tatarskii V.I., Zavorotny V.U., "Atmospheric turbulence and the resolution limits of large ground-based telescope : comment", *J. Opt. Soc. Am. Communication*, Vol. **10**, No. 11, p 2410, (1993)
- Taylor G.I., *Proc. R. Soc. London Ser. A* **138**, p 476, (1938)
- Thompson L.A., "Adaptive optics in Astronomy", *Physics Today*, Vol. **47**, No. 12, p 26, (Dec 1994)
- Tyson R.K., "Principles of adaptive optics", Academic Press, (1991)
- Vernin J., Azouit M., "Traitement d'image adapté au speckle atmosphérique. II. Analyse multidimensionnelle appliquée au diagnostic à distance de la turbulence", *J. Optics (Paris)*, Vol. **14**, No. 3, p 131, (1983)
- Wallner E.P., "Optimal wave-front correction using slope measurements", *JOSA*, **73**, p 12, (1983)
- Wang J.Y., "Optical resolution through a turbulent medium with adaptive phase compensations", *JOSA*, **67**, p 383, (1977)
- Wang J.Y., Markey J.K., "Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion", *JOSA*, **68**, p 78, (1978)
- Wang K.Y., Qi Y., Sun J.W., "Optical-field correction with deformable mirrors", *JOSA A*, Vol. **11**, No. 5, p 1674, (1994)
- Wild W., Kibblewhite E., Scor V., "Quasi-Hexagonal deformable mirror geometries", *Proc. SPIE 2201 Kona*, p 726, (Aug. 1994a)
- Wild W., Kibblewhite E., Shi F., Carter B., Kelderhouse G., Vuillemier R., Manning H., "Field tests of the Wavefront Control Experiment", *Proc. SPIE 2201 Kona*, p 1121, (Aug. 1994b)
- Yura, Tavis, *JOSA A* Vol. **2**, p 258, (1985)