



**HAL**  
open science

# **Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire**

Moudhaffar Bouthelja

► **To cite this version:**

Moudhaffar Bouthelja. Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Nantes, 2016. Français. NNT: . tel-01415302

**HAL Id: tel-01415302**

**<https://hal.science/tel-01415302>**

Submitted on 12 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Moudhaffar BOUTHELJA

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques, section CNU 25/26

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 27 mai 2016

## Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire

### JURY

Rapporteurs : **M. Thomas ALAZARD**, Chargé de recherche au CNRS (HDR), École Normale Supérieure de Paris  
**M<sup>me</sup> Michela PROCESI**, Professeur, Université de Rome 3  
Examineurs : **M. Philippe BOLLE**, Professeur, Université d'Avignon  
**M. Eric PATUREL**, Maître de conférences, Université de Nantes  
Directeur de thèse : **M. Benoît GRÉBERT**, Professeur, Université de Nantes



# Remerciements

Voici venue la fin de ces années de thèses, années très enrichissantes scientifiquement et également riches en rencontres. Une thèse est un travail solitaire en bien des points mais je n'aurais jamais pu en voir le bout sans un grand nombre de personnes.

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse Benoît Grébert qui m'a apporté en plus de ces compétences scientifiques, une disponibilité permanente et un encadrement attentionné tout au long de ces années. Merci de m'avoir proposé ce sujet passionnant et d'avoir su me guider au cours de mes errances et égarement avec pertinence. Ce fut un réel plaisir de travailler avec lui et de bénéficier de son expérience dans la réflexion scientifique et aussi de ces conseils dans la rédaction. Je le remercie également de m'avoir permis de voyager un peu partout et de découvrir les joies des réunions du laboratoire à Pornic.

Je remercie également les rapporteurs de ma thèse, Thomas Alazard et Michela Procesi, d'avoir accepté ce rôle chronophage et de m'avoir fait part de leurs sentiments sur mon travail. Je suis aussi très honoré d'avoir eu la chance de compter comme membres de mon jury, Philippe Bolle et Eric Paturol et qu'ils aient pris le temps de s'intéresser à mon travail. Un merci tout particulier à Eric, pour les relectures et d'avoir pris le temps de me faire répéter avant la soutenance.

Je suis sincèrement reconnaissant à l'école normale supérieure de Cachan d'avoir financé mon master 2, au centre Henri Lebesgue et à l'Université de Nantes d'avoir co-financé cette thèse.

Je remercie profondément l'ensemble du laboratoire Jean Leray pour la qualité de son accueil qui font des années passées ici un excellent moment. Cette machine ne saurait tourner rond sans la gentillesse et l'efficacité de Brigitte Joubert, Annick Egurbide, Stéphanie Benoît, Colette Boulard, Anaïs Goulian et Katerin Schlau. Toutes nos machines ne sauraient tourner sans le concours expert de Saïd El Mamouni et Éric Le Douaran, merci à eux tous.

Merci à tous les organisateurs de conférences aux quelles j'ai pu participé et à tous ceux et celles rencontré(e)s pendant ces conférences. Un special merci à Christophe Fiszka ! Rome se

rappellera de notre passage.

La thèse fut une épreuve mais surtout une aventure enrichissante, autant sur le plan professionnel que personnel. Je remercie évidemment les doctorants du laboratoire de mathématiques Jean Leray qui ont sut me faire adorer ces quatre années, supporter ma fatigue, et me faire amèrement regretter mon départ. Ces quatre années furent les plus riches de ma vie en partie grâce à eux et à leur amitié qui dépassait le cadre du laboratoire, ils ne pourront que me manquer. Je vais commencer par remercier les aînés. Je remercie mon grand frère de thèse Rafik pour tous ces bons conseils et de m'avoir sauvé d'une noyade mathématique à Roscoff. Grand maître Salim, merci d'avoir partagé mon bureau pendant une année et pour ces discussions enrichissantes d'à peine quelques minutes. Tes talents de bricoleur et tes journées de 72h ne cesseront jamais de m'impressionner. Carlos ta maîtrise des langues étrangères me fascinera pour toujours ! Merci de m'avoir donné tant de bons conseils et astuces pour Barcelone. Celine je ne saurai jamais assez te remercier. Merci pour la joie et la bonne humeur que tu dégageais au laboratoire. Merci pour toutes ces soirées chez toi et d'être une si bonne hôte. Doudou merci de m'avoir converti à Fifa (même si PES reste mieux). Grosses bises à Lulu qui a su m'accepter malgré mes origines et au petit Martin. Vivien ou plutôt Wikipédia, merci de m'avoir ridiculiser à chaque jeux de société. Gilberto merci d'avoir bannis les pizzas raclette et ananas. Thomas le cannibale tes blagues fines, intellectuelles et sans préjugés vont me manquer. La soirée raclette et tes magnifiques buts, bien apprécié par Alex, me hanteront jusqu'à la fin de mes jours. Grands maîtres Virgile et Hélène merci pour votre accueil, amitié et hospitalité. Merci de m'avoir fait découvrir la nourriture Alsacienne et les bons breuvages français. Merci aussi à la belle et mignonne Marinette. Tu m'as fait découvrir mes talents de baby-sitter. Je remercie également Antoine pour toute son aide mathématique (et numérique). Merci d'être un bon compagnon de pause et de basket-poubelle. Ces années en ta compagnie (Nantaises/Rennaises) ont été un pur régal. Je remercie aussi la très pratique Ilaria. Merci pour ton amitié si importante et pour toutes ces soirées. Merci de m'avoir fait découvrir autrement la bonne cuisine italienne. Merci pour ton écoute ta disponibilité et pour tes conseils si précieux. Le répertoire Ilaria Mondello restera à jamais sur mon bureau d'ordinateur. Merci également à Vincent. Ton passage au laboratoire fut court mais heureusement qu'on c'est rattrapé ailleurs. Merci d'avoir changé mon regard pour l'enseignement secondaire. Merci Damien d'être un bon adversaire de billard et de m'avoir donné le sentiment que mes horaires de travail ne sont pas si bizarre que ça. Merci au coquin Pierre de m'avoir dépanné avec

des interrogations à 5 minutes du début de TD. Merci à Valentin pour ta bonne humeur, n'oublie pas qu'en conférence les rangs du fond sont les plus confortables. Je remercie aussi Olivier le chti. Je découvrirai bientôt si la vraie tarte au maroilles est aussi bonne que la tienne ou non. Merci d'être un si bon hôte et bravo pour tes talents de pâtissier. Si un de ces jours tu comptes te reconverter je serai ton premier client. Merci à mon petit frère VDR le porto. Sans toi je pense que je serai encore perdu à Rome! Je remercie Thomas le volley-balleur pour toutes ces petites blagues intellectuelles. Par contre je ne te remercie pas pour tes passages quotidiens au bureau pour le parfumer. Je remercie Thomas le vegan de m'avoir fait découvrir la mousse au chocolat sans œuf. Noémie, tes talents de choriste ne cesseront de m'impressionner. Que la Suzette-power soit avec toi. Merci au futur médaille Fields Guillaume de m'avoir aidé sur tant d'exercices de licence (avec des énoncés faux parfois). Vytauté merci pour ton sourire si radieux et si lumineux. Cela a réchauffé quelques cœurs au laboratoire. Radek je ne te remercie pas de m'avoir réveillé à 4h du matin pour aller à l'aéroport, par contre merci pour tes bons gâteaux et breuvages Tchèque. Merci Hala pour toutes ses bonnes gourmandises du Liban. Merci à Zoé la junkie pour être une bonne compagne de quatrième année de thèse et de pause. Ton grain de folie a bien fait bouger la doctorosphère. Guillem le dingue, je serai à jamais choqué par tes conneries. Merci à Claire d'être aussi piquante. Simon (alias Matt Pokora) merci pour ta décontraction et la bonne humeur que t'as insufflée tout au long de cette dernière année! Niccolò merci pour ton aide pour la préparation du dossier de post-doc romain. Alberto merci pour ton soutien et tes précieux conseils pour la préparation de la soutenance et des dossiers de candidature.

Je termine par les gens avec qui j'ai passé le plus de temps pendant cette thèse. Je commence par mon cher co-bureau Florian. Merci d'avoir supporté le touriste que je suis. Merci pour tes blagues fines, pas pleines de rages de haines de préjugés et de racismes! Merci pour tes piques de sarcasmes (qui disparaissent en la présence de Julie). Ta compagnie dans le bureau aura permis de passer de belles soirées (et matinées!) pleines de riches discussions et de franche rigolades. Merci d'avoir débogué mon code  $\text{\LaTeX}$  tant de fois. Par contre je ne te remercie pour tous tes bons week-end et bon appétit introduit à mon insu dans la thèse.

Je continue par remercie mon autre co-bureau et colocataire Victor. Que dire! je serai à jamais ébloui par ta prestesse. Je te remercierai jamais assez pour avoir relu ma thèse, mes articles, mes dossiers de candidatures ... (la liste est vraiment longue). Merci d'avoir débogué tant de fois mon code  $\text{\LaTeX}$ , mon ordinateur et même ma vie. Ces trois années m'ont fait remarquer ta

gentillesse, ta bonne humeur et ton humour. Merci pour tous les excellents moments passés en ta compagnie, au laboratoire, au rue des soupirs et ailleurs !

Chère et tendre épouse Caroline (faut continuer à jouer le jeux jusqu'au bout avec la préfecture), je ne te dirai jamais assez quel plaisir j'ai eu à te connaître. Un grand merci pour ton infaillible bonne humeur, ton humour, ta générosité et tous les bons moments qui vont avec. Merci pour le "C'est toi le", c'est dur de s'en débarrasser maintenant !

Je termine par remercier celui qui a subi le plus pendant cette thèse. Merci à toi Christophe d'avoir partagé mes délires, mon stress, mes démenances, mes peurs et mes joies . . . Merci pour toutes ces riches conversations, ces discussions à refaire le monde ou à se plaindre tout simplement de nos vies. Merci pour l'ami et le confident que tu es. Impossible de tous résumer en ces quelques lignes mais la coudray team restera à jamais un duo de choc.

Je remercie également mes élèves pour m'avoir supporté et m'avoir fait découvrir et aimer les joies de l'enseignement à l'université. Vous avoir enseigné les mathématiques générales, la géométrie, la topologie, le calcul différentiel et l'optimisation durant ces 4 années fut l'une des expériences les plus enrichissantes de ma vie. Merci en particulier à Marie, Vincent et Freddie pour la bonne ambiance et la discipline exemplaire pendant mes cours.

Bien sûr, je remercie ma famille, qui m'a soutenue et encouragée (même si tout le monde ne savait pas exactement ce que je faisais) pendant ces quatre années et sans qui je n'en serais certainement pas arrivée là aujourd'hui. Je remercie profondément mes parents de m'avoir fait grandir chaque jour dans la joie et de m'avoir toujours soutenu, épaulé et poussé à donner le meilleur de moi même.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans une douce pensée pour Bochra, dont la tendresse, la joie de vivre, et le sourire embellissent ma vie de tous les jours. Merci d'être là pour me soutenir, me remonter le moral dans les moments difficiles et me donner envie d'être le meilleur.

Merci à vous qui lisez ces quelques lignes. Passons aux choses sérieuses maintenant ! Bonne lecture .

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Théorie KAM . . . . .	12
1.1.1	Forme normale . . . . .	14
1.1.2	Équations hamiltoniennes. . . . .	15
1.1.3	Crochet de Poisson. . . . .	16
1.1.4	Jets de fonctions . . . . .	16
1.1.5	Transformation de Lie . . . . .	16
1.2	Énoncé formel du théorème KAM . . . . .	17
1.2.1	Schéma KAM . . . . .	17
1.2.2	Petits diviseurs . . . . .	19
1.3	KAM pour l'équation des ondes . . . . .	20
1.4	Forme normale de Birkhoff . . . . .	21
1.5	Résultat principal de la thèse . . . . .	23
1.6	Plan de la thèse . . . . .	24
1.6.1	Chapitre 2 : Théorème KAM en dimension finie . . . . .	24
1.6.2	Chapitre 3 : Théorème KAM en dimension infinie . . . . .	25
1.6.3	Chapitre 4 : Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Théorème KAM en dimension finie</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	28
2.2	Jets de fonctions, crochet de Poisson et flot hamiltonien . . . . .	33
2.2.1	Jets de fonctions . . . . .	33
2.2.2	Jets de fonctions et crochet de poisson. . . . .	35
2.2.3	Flot hamiltonien dans le domaine $\mathcal{O}(\sigma, \mu)$ . . . . .	36

2.3	Équation homologique . . . . .	40
2.3.1	Les quatre composantes de l'équation homologique . . . . .	41
2.3.2	Résolution des deux premières équations. . . . .	42
2.3.3	Résolution de la troisième équation. . . . .	47
2.3.4	Résolution de la quatrième équation. . . . .	52
2.4	Preuve du théorème KAM. . . . .	59
2.4.1	Étape élémentaire. . . . .	59
2.4.2	Initialisation du schéma KAM . . . . .	62
2.4.3	Choix des paramètres . . . . .	64
2.4.4	Lemme itératif . . . . .	66
2.4.5	Passage à la limite et preuve du théorème KAM . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Théorème KAM en dimension infinie</b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Jets de fonctions, crochet de Poisson et flot hamiltonien . . . . .	79
3.2.1	L'espace $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ . . . . .	79
3.2.2	Jets de fonctions . . . . .	83
3.2.3	Jets de fonctions et crochet de poisson. . . . .	85
3.2.4	Flot hamiltonien dans le domaine $\mathcal{O}^{\alpha}(\sigma, \mu)$ . . . . .	86
3.3	Équation homologique . . . . .	95
3.3.1	Équation homologique linéaire . . . . .	96
3.3.2	Équation homologique non-linéaire . . . . .	118
3.4	Preuve du théorème KAM. . . . .	123
3.4.1	Étape élémentaire. . . . .	123
3.4.2	Initialisation du schéma KAM . . . . .	127
3.4.3	Choix des paramètres . . . . .	131
3.4.4	Lemme itératif . . . . .	133
3.4.5	Passage à la limite et preuve du théorème KAM . . . . .	136
<b>4</b>	<b>L'équation des ondes non linéaire</b>	<b>139</b>
4.1	Introduction et résultats . . . . .	139
4.1.1	Introduction . . . . .	139

---

4.1.2	Résultats . . . . .	141
4.2	Petits diviseurs . . . . .	144
4.2.1	Non résonance des fréquences . . . . .	144
4.2.2	Estimations des petits diviseurs . . . . .	151
4.3	Forme normale . . . . .	156
4.3.1	Notations . . . . .	156
4.3.2	Résonance . . . . .	166
4.3.3	Procédure de Birkhoff . . . . .	168
4.3.4	Forme normale sur les ensembles admissibles . . . . .	177
4.3.5	Passage aux variables action-angle . . . . .	178
4.3.6	Re-scaling des variables . . . . .	179
4.3.7	Passage aux variables réelles . . . . .	182
4.4	Théorème KAM pour l'équation des ondes . . . . .	183
4.4.1	Hypothèses et énoncé du théorème KAM . . . . .	183
4.4.2	Vérifications des hypothèses du théorème KAM . . . . .	185
4.5	Preuve du Théorème 4.1.3 . . . . .	195



## Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'équation des ondes non linéaire sur le cercle, donnée par :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \\ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \end{cases} \quad (1.0.1)$$

où

- i)  $m \in [1, 2]$  est la masse ;
- ii)  $g$  est la non-linéarité. On suppose que  $g$  est une fonction holomorphe réelle sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1 \times J$ , avec  $J$  un voisinage de zéro de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $g$  est de la forme :

$$g(x, u) = 4u^3 + O(u^4). \quad (1.0.2)$$

On veut montrer l'existence de solutions quasi-périodiques de faibles amplitudes, proches de solutions de l'équation linéaire.

L'équation va être étudiée comme une perturbation de l'équation linéaire. Puisque la variable d'espace appartient au cercle, l'EDP linéaire associée est diagonalisable dans la base de Fourier. Ainsi, on ramène notre problème à l'étude d'un hamiltonien intégrable perturbé sous la forme :

$$H = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \text{Perturbation} , \quad (1.0.3)$$

avec  $\lambda_s = \sqrt{s^2 + m}$ .

Afin de montrer l'existence de solutions quasi-périodiques, on fait appel à un résultat KAM en dimension infinie adapté à notre situation. En effet, la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) affirme que, sous l'effet d'une petite perturbation, un hamiltonien intégrable continue à exhiber des tores invariants de dimension finie dans un espace de dimension infinie. Ce résultat est valable sous certaines conditions de non résonance. L'existence de ces tores invariants nous donne l'existence de solutions quasi-périodiques. Le principal problème rencontré ici est le fait que les fréquences  $\lambda_s$  ne vérifient pas les hypothèses standard de non résonance. En effet, les fréquences ne vérifient pas la condition de non résonance de Kolmogorov :

$$|k_1\lambda_1 + \dots + k_n\lambda_n| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Dans le cas où les conditions aux bords sont de Dirichlet, la somme dans (1.0.3) est restreinte aux indices positifs. Dans ce cas, on peut vérifier les conditions standard de non résonance grâce à la masse  $m$  (ce cas a été traité dans [31]). Dans le cas périodique, on s'autorise à la fois des indices positifs et négatifs. On remarque que  $\lambda_s = \lambda_{-s}$ , et on obtient alors un système hamiltonien résonant. Pour cela, le théorème KAM auquel on fera appel doit traiter le cas de valeurs propres multiples.

**Théorème 1.0.1.** *Pour presque tout  $m \in [1, 2]$  et pour presque toute condition initiale petite, l'équation (1.0.1) admet des solutions quasi-périodiques proches de la solution de l'équation linéaire.*

La démonstration se fait essentiellement en deux étapes :

- On décompose l'équation (1.0.3) dans une base orthonormée de l'espace de phase. On obtient alors un système hamiltonien résonant. Pour remédier à cette résonance, on met cet hamiltonien sous forme normale en utilisant une technique de forme normale de Birkhoff. L'idée centrale pour séparer les fréquences est d'utiliser la partie cubique de la non-linéarité (1.0.2) (voir chapitre 4).
- On montre un théorème KAM en dimension infinie qui traite le cas des valeurs propres multiples mais de multiplicité finie. À l'aide du théorème KAM, on montre l'existence de tores invariants, et donc l'existence de solutions quasi-périodiques (voir chapitre 3).

## 1.1 Théorie KAM

Cette section concerne l'historique de la théorie KAM. On rappelle les principaux résultats, puis on donne une présentation générale du résultat KAM.

Les lois de Kepler prédisent que les orbites des planètes décrivent des ellipses régulières. Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, les lois de Newton ont permis de mieux comprendre les phénomènes liés à la gravitation. Les mathématiciens s'aperçurent alors que les lois de Kepler ne tenaient pas compte des perturbations dues aux interactions entre les planètes. La question est alors de savoir si ces déviations sont susceptibles de modifier significativement les trajectoires des planètes.

En 1889, Poincaré démontra que les séries utilisées pour décrire ces perturbations étaient divergentes. Autrement dit, une petite perturbation pouvait éventuellement avoir une contribution infinie. Ce phénomène fut interprété comme une confirmation des hypothèses de la mécanique statistique.

En 1954, la situation se retourna une nouvelle fois, suite aux travaux de Kolmogorov. Lors d'un exposé au Congrès International des Mathématiciens à Amsterdam, il présenta brièvement un résultat, selon lequel le système solaire est probablement stable. L'instabilité est parfaitement possible, comme l'a dit Poincaré, mais elle ne survient que très rarement. En effet, le théorème de Kolmogorov affirme que, si on part d'un système dynamique stable (le système solaire tel qu'imaginé par Kepler) et qu'on rajoute une petite perturbation, alors le système obtenu reste stable pour la plupart des données initiales. Dans [20], Kolmogorov ne donna que les grandes lignes de la preuve de son théorème. Cette découverte ne suscitant pas beaucoup d'intérêt de la part de ses contemporains, Kolmogorov ne poursuivit pas ses travaux dans cette direction.

Presque dix ans plus tard, en 1963, un élève de Kolmogorov, Arnold, qui s'intéressait à la stabilité du mouvement planétaire, revint sur cette approche. Il prouva que pour d'assez petites perturbations, presque toutes les trajectoires restent proches de l'ellipse de Kepler (voir [2, 3]).

Indépendamment, la même année, Moser développa des techniques génériques pour résoudre des problèmes liés à des perturbations, comme ceux étudiés par Kolmogorov (voir [26]).

L'ensemble de ces travaux constitue la base de la théorie KAM. Pour plus d'historique sur la théorie KAM, voir [30] et [11].

Au cours des dernières années, d'importantes avancées ont eu lieu en théorie KAM. Dans le cadre des EDPs, tout commence avec Kuksin en 1987 dans [23, 24]. Dans le second papier, l'auteur prouve l'existence de solutions quasi-périodiques suite à la perturbation d'un hamiltonien intégrable en dimension infinie. Il suppose que le spectre de l'hamiltonien intégrable est de la forme  $\lambda_n \sim n^d$  avec  $n \geq 1$  et  $d > 1$ . Il applique ensuite ce résultat à l'équation de Schrödinger avec potentiel, donc avec paramètre extérieur, en dimension 1 avec condition de Dirichlet. Dans [21], il prouve avec Pöschel un résultat similaire pour l'équation de Schrödinger, sans paramètre extérieur, en dimension 1 et avec condition de Dirichlet. Ceci implique aussi la simplicité du spectre. Voir aussi [25] pour l'équation de Korteweg et de Vries.

Toujours dans le cadre des EDPs, en 1990, Wayne utilise des méthodes KAM pour prouver l'existence de solutions périodiques et quasi-périodiques pour l'équation des ondes en dimension 1, avec potentiel et condition de Dirichlet (voir [31]).

En 1996, Pöschel prouve, dans [29], l'existence de tores invariants de dimension finie dans un espace de phase de dimension infinie, après une petite perturbation d'un hamiltonien intégrable. Il suppose que le spectre de la partie quadratique de l'hamiltonien intégrable est simple et de la forme :

$$\lambda_s = s^d + \dots + O(s^\delta),$$

avec  $d \geq 1$  et  $\delta < d - 1$ . Il applique ensuite ce résultat, dans [28], à l'équation des ondes non linéaire sans paramètre extérieur et avec condition de Dirichlet.

Le premier résultat KAM pour l'équation des ondes non linéaire avec condition au bord périodique en dimension 1 est dû à Chierchia et You dans [9] en 2000. Dans ce papier, les auteurs prouvent l'existence de solutions quasi-périodiques pour l'équation des ondes avec potentiel donc avec paramètre extérieur. Ils supposent de plus que la non linéarité ne dépend pas de la variable d'espace.

Plus récemment, en 2010, Eliasson et Kuksin ont réussi à appliquer la théorie KAM à une EDP multidimensionnelle. Dans [14], ils montrent l'existence de solutions quasi-périodiques pour l'équation de Schrödinger avec potentiel en dimension quelconque. Pour ce faire, ils utilisent un théorème KAM en dimension infinie, et tel que la partie quadratique de l'hamiltonien intégrable admet une infinité de valeurs propres avec multiplicité quelconque.

En 2011, Grébert et Thomann prouvent dans [18] un résultat KAM en dimension infinie en améliorant des résultats de Kuksin [22] et de Pöschel [28], et cela en utilisant les techniques récentes de Eliasson et Kuksin [14]. Ils prouvent l'existence de tores invariants de dimension finie, pour une petite perturbation d'un hamiltonien intégrable dont les fréquences externes sont de la forme  $\lambda_s \sim s$ . Ils appliquent ce résultat pour montrer l'existence de solutions quasi-périodiques pour l'équation de Schrödinger en dimension 1 avec potentiel harmonique. Ils prouvent aussi la réductibilité de l'équation de Schrödinger avec potentiel harmonique quasi-périodique en temps.

Dans cette thèse on adopte des techniques récentes développées par Eliasson, Grébert et Kuksin dans [12, 13] et par Grébert et Paturel dans [17]. Dans [12], les auteurs prouvent un théorème KAM en dimension infinie, qu'ils appliquent dans [13] à l'équation des poutres multidimensionnelle sans paramètre extérieur et avec une non linéarité cubique. Ils prouvent l'existence de solutions quasi-périodiques de faibles amplitude. Dans [17], les auteurs obtiennent un résultat similaire pour l'équation de Klein Gordon multidimensionnelle.

Dans cette section, on donne un énoncé formel de notre théorème KAM en dimension infinie et les grandes lignes de la preuve. On commence par donner la définition d'un hamiltonien sous forme normale et introduire le cadre dans lequel on travaille. On donne ensuite les équations hamiltoniennes associées à un hamiltonien quelconque. Puis on définit deux éléments importants qui interviennent dans la résolution de l'équation homologique : le crochet de Poisson et le jet de fonction. On donne après la définition d'une transformation de Lie. Et enfin, on donne l'idée de la preuve d'un schéma KAM. On donnera, formellement, les hypothèses à vérifier pour appliquer un théorème KAM.

### 1.1.1 Forme normale

On considère un hamiltonien sous forme normale :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle, \quad (1.1.1)$$

avec

- i)  $\rho \in \mathcal{D}$  le vecteur paramètre et  $\mathcal{D}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$  ;

- ii)  $\omega \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  le vecteur fréquence interne ;
- iii)  $r \in \mathbb{R}^n$  la variable action ;
- iv)  $\zeta$  la variable extérieure ; on suppose que  $\zeta = (\zeta_s)_{s \in \mathcal{L}}$ , avec  $\zeta_s = (p_s, q_s) \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{L}$  une partie quelconque de  $\mathbb{Z}$ .
- v) De plus, on suppose que, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , la matrice  $A$  appartient à l'ensemble des matrices infinies symétriques  $\mathcal{M}$ . C'est-à-dire  $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tel que

$$A_s^{s'} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A_s^{s'} = {}^t A_{s'}^s, \text{ et } \Pi A_s^{s'} = A_s^{s'} \text{ pour tout } s, s' \in \mathcal{L}.$$

Le projecteur orthogonal  $\Pi$  est défini par :

$$\Pi : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \mathbb{C}I + \mathbb{C}\sigma_2.$$

$$\text{avec } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose aussi que  $A(\rho)$  est de la forme  $A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$ , avec :

$$D(\rho) = \text{diag} \{ \lambda_s(\rho) I_2, s \in \mathcal{L} \},$$

où

- les  $\lambda_s$  sont ordonnées ;
- $\#\{s' \in \mathcal{L} | \lambda_s = \lambda_{s'}\} \leq d < \infty$  pour tout  $s \in \mathcal{L}$ .

Soit  $N \in \mathcal{M}$  est diagonale par blocs, où chaque bloc a comme taille la multiplicité de la valeur propre correspondante dans  $D$ . Les éléments de  $B$  sont de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

On dit que  $N$  est sous forme normale si  $N \in \mathcal{M}$  et si  $N$  vérifie l'hypothèse précédente. On note  $\mathcal{NF}$  l'ensemble des matrices sous forme normale.

### 1.1.2 Équations hamiltoniennes.

Soient  $r$  et  $\zeta$  définies comme précédemment, soit  $\theta \in \mathbb{T}^n$ . À toute fonction hamiltonienne régulière, on associe les équations hamiltoniennes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_{\theta} f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\theta} = \nabla_r f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\zeta} = J \nabla_{\zeta} f(r, \theta, \zeta), \end{cases}$$

avec  $J : \{\zeta_s\} \mapsto \{\sigma_2 \zeta_s\}$ .

### 1.1.3 Crochet de Poisson.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions régulières en  $x = (r, \theta, \zeta)$ . On définit le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  par :

$$\{f, g\} = \nabla_r f \cdot \nabla_\theta g - \nabla_\theta f \cdot \nabla_r g + \langle \nabla_\zeta f, J \nabla_\zeta g \rangle.$$

### 1.1.4 Jets de fonctions

Pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $r$  et  $\mathcal{C}^2$  en  $\zeta$ , on définit son jet  $f^T$  comme son développement de Taylor à l'ordre 1 en  $r$  et à l'ordre 2 en  $\zeta$  au point  $(r, \zeta) = (0, 0)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} f^T &= f(0, \theta, 0, \rho) + \nabla_r f(0, \theta, 0, \rho)r + \langle \nabla_\zeta f(0, \theta, 0, \rho), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\zeta\zeta}^2 f(0, \theta, 0, \rho) \zeta, \zeta \rangle \\ &= f_\theta(\theta) + f_r(\theta)r + \langle f_\zeta(\theta), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta, \zeta \rangle. \end{aligned}$$

### 1.1.5 Transformation de Lie

**Définition 1.1.1.** *Un difféomorphisme  $\Phi$  est une transformation canonique (ou changement de variable symplectique) si  $\Phi$  préserve le crochet de Poisson. C'est-à-dire :*

$$\{f, g\} \circ \Phi = \{f \circ \Phi, g \circ \Phi\},$$

pour tout  $f$  et  $g$ .

Soit  $(r, \theta, \zeta) = \Phi(r_0, \theta_0, \zeta_0)$ , avec  $\Phi$  une transformation canonique. Posons  $\tilde{h} = h \circ \Phi^{-1}$ . Dans ces nouvelles variables, le système hamiltonien est donné par :

$$\dot{r} = -\nabla_\theta \tilde{h}(r, \theta, \zeta), \quad \dot{\theta} = \nabla_r \tilde{h}(r, \theta, \zeta), \quad \dot{\zeta} = J \nabla_\zeta \tilde{h}(r, \theta, \zeta).$$

Soit  $S$  un hamiltonien régulier. Considérons l'application  $\Phi_S^t : (r_0, \theta_0, \zeta_0) \mapsto (r(t), \theta(t), \zeta(t))$  défini par la solution du système :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_\theta S(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\theta} = \nabla_r S(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\zeta} = J \nabla_\zeta S(r, \theta, \zeta), \end{cases}$$

avec pour condition initiale

$$r(0) = r_0 \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0.$$

Si  $\Phi_S^t$  est définie jusqu'à  $t = 1$ , alors  $\Phi_S^1 := \Phi_S$  est appelée transformation de Lie associée à  $S$ . De plus, une transformation de Lie est canonique. Pour plus de détails, voir [1].

On donne à présent un énoncé formel de notre théorème KAM.

## 1.2 Énoncé formel du théorème KAM

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $h$  un hamiltonien sous forme normale comme dans (1.1.1). Supposons que les fréquences sont non résonantes et que la fonction  $f$  est petite. Il existe alors un Borélien  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  dont la mesure de Lebesgue vérifie :*

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq O\left((f^T)^\alpha\right),$$

avec  $\alpha > 0$ . Ce Borélien est tel que, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , il existe un changement de variable canonique proche de l'identité  $\Phi$ , tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , on a :

$$(h + f) \circ \Phi = h_\infty + f_\infty,$$

avec  $f_\infty^T = 0$ . De plus, les nouvelles fréquences sont proches des fréquences de départ.

On donne à présent les principales idées de la construction du changement variable KAM.

### 1.2.1 Schéma KAM

On considère un hamiltonien sous forme normale comme dans (1.1.1). Le système hamiltonien associé est donné par :

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(\rho), \quad \dot{\zeta} = JA\zeta.$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , le tore  $\mathcal{T}_0^n := \{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\}$  est un tore invariant par le flot hamiltonien. De plus, sur ce tore, le flot est linéaire de direction  $\omega$ . On rajoute une petite perturbation qui dépend de la variable angle  $\theta$  à cet hamiltonien intégrable. On considère donc l'hamiltonien perturbé suivant :

$$H = h(r, \zeta; \rho) + f(r, \theta, \zeta; \rho). \tag{1.2.1}$$

On veut étudier l'effet de cette petite perturbation sur la dynamique du tore  $\mathcal{T}_0^n$ , ainsi que la persistance des solutions quasi-périodiques.

Supposons que le jet de  $f$  soit nul. Le système hamiltonien associé à cet hamiltonien perturbé est donné par :

$$\dot{r} = O(r^2, \zeta^3), \quad \dot{\theta} = \omega(\rho) + O(r, \zeta), \quad \dot{\zeta} = JA\zeta + O(r^2, \zeta^2).$$

Donc, si la donnée initiale est sur le tore  $\mathcal{T}_0^n$ , le flot restera sur ce tore.

Supposons que la perturbation  $f$  soit de taille  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  petit. Alors son jet est aussi de taille  $\varepsilon$ . Pour montrer la persistance du tore  $\mathcal{T}_0^n$ , il faut supprimer le jet de  $f$ . Pour cela, on construira un changement de variable canonique  $\Phi_S$ , qui sera le flot induit par un hamiltonien  $S$  à  $t = 1$ . On veut obtenir, par composition avec cette transformation, une nouvelle forme normale proche de la forme normale initiale et telle que le jet de la nouvelle perturbation est de taille  $\varepsilon^\alpha$  pour

$\alpha > 1$ . Plus précisément, on veut que  $\Phi_S = \Phi_S^{t=1}$  vérifie :

$$(h + f) \circ \Phi_S = h^+ + f^+, \quad \text{avec } (f^+)^T = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha) \text{ et } \alpha > 1,$$

où  $h^+$  est une nouvelle forme normale proche de  $h$ , i.e.  $|h^+ - h| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ . On peut supposer que  $h^+$  est sous la forme :

$$h^+ = h + \hat{h}, \quad \hat{h} = c(\rho) + \chi(\rho)r + \frac{1}{2}\langle \zeta, B(\rho)\zeta \rangle.$$

En utilisant un développement de Taylor jusqu'à l'ordre deux on obtient l'équation homologique suivante :

$$\{h, S\} = \hat{h} - f^T + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha). \quad (1.2.2)$$

Dans cette équation, les inconnues sont  $S$  et  $\hat{h}$ . Il suffit de prendre  $S$  comme un jet de fonction :

$$S(r, \theta, \zeta) = S_\theta(\theta) + S_r(\theta)r + \langle S_\zeta(\theta), \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle S_{\zeta, \zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle.$$

En remplaçant dans l'équation homologique, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_\theta S_\theta.\omega + \nabla_\theta S_r.\omega.r + \langle \nabla_\theta S_\zeta.\omega, \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla_\theta S_{\zeta\zeta}.\omega\zeta, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_\zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta\zeta}\zeta \rangle \\ = C - f_\theta + \chi.r - f_r.r - \langle f_\zeta, \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle \zeta, B\zeta \rangle - \frac{1}{2}\langle f_{\zeta\zeta}\zeta, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient quatre équations à résoudre.

**Les deux premières équations.** Elle sont obtenues directement :

$$\nabla_\theta S_\theta(\theta).\omega = C - f_\theta(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha), \quad (1.2.3)$$

$$\nabla_\theta S_r(\theta).\omega = \chi - f_r(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha). \quad (1.2.4)$$

Pour résoudre ces deux équations, on impose que :

$$C(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho)d\theta, \quad \chi(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho)d\theta.$$

**La troisième équation.** On a :

$$\langle \nabla_\theta S_\zeta.\omega, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_\zeta(\theta) \rangle = -\langle f_\zeta, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha).$$

Or  $A$  est une matrice symétrique, donc

$$\langle \nabla_\theta S_\zeta.\omega, \zeta \rangle + \langle AJS_\zeta(\theta), \zeta, \rangle = \langle -f_\zeta, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha).$$

Les matrices  $A$  et  $J$  commutent. En effet, chaque bloc de  $A$  est de la forme  $A_i^j = \mathbb{C}I_2 + \mathbb{C}\sigma_2$ . Ainsi, la troisième equation est donnée par :

$$\nabla_{\theta} S_{\zeta}(\theta) \cdot \omega + JAS_{\zeta}(\theta) = -f_{\zeta}(\theta) + O(\varepsilon^{\alpha}). \quad (1.2.5)$$

**La quatrième équation.** On a :

$$\frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta) \cdot \omega \zeta, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle = \frac{1}{2} \langle \zeta, B\zeta \rangle - \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle.$$

En utilisant le fait que  $A$  soit une matrice symétrique, que  $A$  et  $J$  commutent, et que  $(AJ S_{\zeta\zeta})^* = -S_{\zeta\zeta}JA$ , on obtient :

$$\langle \zeta, \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta) \cdot \omega \zeta \rangle + \langle \zeta, AJ S_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle - \langle \zeta, S_{\zeta\zeta}(\theta)AJ\zeta \rangle = \langle \zeta, B\zeta \rangle - \langle \zeta, f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle.$$

Ainsi, la quatrième équation est donnée par

$$\nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta) \cdot \omega + AJ S_{\zeta\zeta}(\theta) - S_{\zeta\zeta}(\theta)JA = -f_{\zeta\zeta}(\theta) + B + O(\varepsilon^{\alpha}). \quad (1.2.6)$$

Supposons qu'on a résolu ces équations. On fait une nouvelle itération du schéma KAM. Posons à l'étape  $k$  quelconque :

$$\Phi_k = \Phi_{S_1} \circ \dots \circ \Phi_{S_k},$$

où  $S_j$ , pour  $1 \leq j \leq k$ , est l'hamiltonien qui vérifie l'équation homologique à l'étape  $j$ . On a alors

$$H \circ \Phi_k = h_k + f_k, \quad \text{avec } f_k^T = O(\varepsilon^{\alpha^k}).$$

On montre que  $(\Phi_k)_k$  est une suite de Cauchy sur un espace de Banach. Soit  $\Phi$  sa limite. On obtient ainsi une transformation canonique qui vérifie :

$$H \circ \Phi = h_{\infty} + f_{\infty}, \quad \text{avec } f_{\infty}^T = 0.$$

### 1.2.2 Petits diviseurs

Résoudre l'équation homologique (1.2.2) revient à chercher un jet de fonction  $S$  qui vérifie les quatre équations homologiques (1.2.3)-(1.2.6). Vu que les quatre composantes du jet ne dépendent que de l'angle  $\theta \in \mathbb{T}^n$ , on décompose dans une base de Fourier. Ainsi, on ramène le problème à un problème de petits diviseurs. Certaines hypothèses doivent être faites sur les fréquences internes  $\omega$  et les fréquences externes  $\lambda$ . De plus, ces hypothèses doivent être vérifiées à chaque étape KAM.

On donne ici formellement les hypothèses sur les petits diviseurs. Pour plus de précisions, voir les conditions de séparation, de non résonance et la deuxième condition de Melnikov. Pour se familiariser encore plus avec les problèmes de petits diviseurs, le lecteur peut consulter [10].

Soient  $\delta \geq \delta_0 > 0$  et  $\omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  tels que

$$|\omega - \omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0.$$

Supposons que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  et pour tous  $s, s' \in \mathcal{L}$  avec  $|s| > |s'|$ , on a :

$$|k \cdot \omega'(\rho)| \geq \delta,$$

avec  $k \neq 0$ .

$$|k \cdot \omega'(\rho) \pm \lambda_s(\rho)| \geq \delta,$$

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s(\rho) \pm \lambda_{s'}(\rho)| \geq \delta,$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ .

La solution des équations homologiques (1.2.3)-(1.2.6) sera de la forme :

$$S = \frac{f^T}{\text{petit diviseur}}.$$

On veut que la transformation de Lie associée à  $S$  soit proche de l'identité. Pour cela, il est crucial d'imposer que :

$$f^T \ll \delta.$$

C'est à dire que le jet de la perturbation doit être négligeable devant le contrôle que l'on a des petits diviseurs.

### 1.3 KAM pour l'équation des ondes

Dans cette section on rappelle brièvement les résultats déjà parus dans le domaine de la théorie KAM pour l'équation des ondes. On donne ensuite les principales idées pour lever la résonance rencontrée lors de la mise sous forme de système hamiltonien de l'équation (1.0.1).

Le premier résultat de théorie KAM pour l'équation des ondes est dû à Wayne en 1990 dans [31]. Il a considéré l'équation des ondes cubique en dimension 1 avec potentiel extérieur dans  $L^2([0, 1])$  non nul et avec conditions de Dirichlet (ce qui entraîne la simplicité du spectre).

On peut aussi citer le travail de Pöschel dans [28]. Dans cet article, l'auteur a considéré l'équation des ondes en dimension 1 avec masse, condition de Dirichlet homogène et une non-linéarité cubique analytique mais qui ne dépend pas de la variable d'espace.

En 1998, Chierchia et You considèrent dans [9] l'équation des ondes en dimension 1 avec potentiel périodique analytique et une perturbation quadratique analytique qui ne dépend pas de la variable d'espace. Dans ce cas, le potentiel joue le rôle de paramètre extérieur, ce qui permet

de vérifier les conditions de non résonance. En particulier, les auteurs ne s'autorisent pas le cas où le potentiel est nul.

Le travail le plus récent est dû à Berti, Biasco et Procesi en 2013 dans [8]. Dans cet article, ils considèrent l'équation des ondes avec dérivées, donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu + f(Du) = 0, \quad m > 0, \quad D := \sqrt{-\partial_{xx}^2 + m}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T},$$

avec  $f(s)$  une non-linéarité réelle analytique de la forme

$$f(s) = as^3 + \sum_{k \geq 5} f_k s^k, \quad a \neq 0.$$

On remarque ici que la non-linéarité est indépendante de la variable d'espace  $x$ , ce qui implique que le moment  $-i \int_{\mathbb{T}} \bar{u} \partial_x u dx$  est conservé. Cette symétrie simplifie la preuve du théorème KAM. La forme normale est diagonale dans ce cas.

Les principales avancées présentées dans cette thèse sont :

- l'absence de paramètre extérieur dans l'équation (1.0.1) ;
- le fait que la variable d'espace appartienne au cercle (on est dans le cadre périodique) ;
- la dépendance de la non linéarité (1.0.2) en la variable d'espace.

## 1.4 Forme normale de Birkhoff

On commence par décomposer l'équation (1.0.1) en une base orthonormé de l'espace de phase. On montre que, étudier cette équation, revient à étudier l'hamiltonien suivant :

$$H = H_2 + P_4 + R_5, \tag{1.4.1}$$

avec

$$\begin{aligned} H_2(\xi, \eta) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s, \quad \lambda_s = \sqrt{s^2 + m}, \\ P_4(\xi, \eta) &= \int_{\mathbb{S}^1} u^4 dx = \int_{\mathbb{S}^1} \left( \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s e^{isx} + \eta_s e^{-isx}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right)^4 dx, \\ R_5(\xi, \eta, x) &= P(\xi, \eta, x) - P_4(\xi, \eta) = O(\|(\xi, \eta)\|^5). \end{aligned}$$

Afin de définir les fréquences internes et les fréquences externes de  $H_2$ , on commence par donner la définition d'un ensemble admissible de  $\mathbb{Z}$ .

**Définition 1.4.1.** *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini de  $\mathbb{Z}$ .  $\mathcal{A}$  est admissible si pour tout  $j \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ , on a  $-j \notin \mathcal{A} \setminus \{0\}$ .*

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble admissible de  $\mathbb{Z}$ . On définit  $\mathcal{L}$  son complémentaire dans  $\mathbb{Z}$ . On peut réécrire la partie quadratique de (1.4.1) sous la forme :

$$H_2 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a \xi_a \eta_a + \sum_{a \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s,$$

avec  $\omega_a = \sqrt{a^2 + m}$ . On remarque que, pour  $a \in \mathcal{A}$ , on a  $\omega_a = \lambda_{-a}$ . On souhaite supprimer cette résonance afin d'appliquer notre théorème KAM. L'idée est d'utiliser  $P_4$  pour séparer les fréquences. Ce qui est équivalent à utiliser la partie cubique de la non linéarité (1.0.2) pour enlever cette résonance. Pour cela, on construit un changement de variable canonique qui transforme (1.4.1) en forme normale de Birkhoff d'ordre 5. Cette transformation va être une transformation de Lie. Elle exhibe de  $P_4$  les termes intégrables qui vont nous permettre de séparer les fréquences et de vérifier les hypothèses du théorème KAM. Plus précisément on a :

**Proposition 1.4.2.** *Pour tout  $m \in \mathcal{U} \subset [1, 2]$  avec  $\mathcal{U}$  de mesure de Lebesgue pleine, il existe une transformation de Lie  $\tau$  qui transforme l'hamiltonien  $H = H_2 + P = H_2 + P_4 + R_5$  en :*

$$H \circ \tau = (H_2 + P) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6 + R_5 \circ \tau, \quad (1.4.2)$$

avec

- Le polynôme  $Z_4$  contient des termes intégrables.
- Le polynôme  $Q_4$  est cubique ou quartique dans la direction de  $\mathcal{L}$ .
- Les restes  $R_5 \circ \tau$  et  $R_6$  sont respectivement d'ordre 5 et 6.

Plus précisément le polynôme  $Z_4$  est de la forme

$$Z_4 = \frac{3}{4\pi} \sum \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\lambda_i \lambda_j}$$

où la somme porte sur  $\{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid i + j = k + l, \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} \geq 2 \text{ et } \{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}\}$ .

On passe des variables  $(\xi, \eta)$  au variables action-angle  $(I, \theta, \xi^{\mathcal{L}}, \eta^{\mathcal{L}})$ , avec  $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\xi^{\mathcal{L}} = (\xi_s, s \in \mathcal{L})$  et  $\eta^{\mathcal{L}} = (\eta_s, s \in \mathcal{L})$ . Les variables  $I$  et  $\theta$  sont donnés par :

$$\xi_a = \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, \quad \eta_a = \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

On remarque que  $Z_4$  contient des termes intégrables formés par les monômes de la forme  $\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l = I_i I_j$ , qui dépendent seulement des actions définies par  $I_i = \xi_i \eta_i$  avec  $i \in \mathcal{A}$ .

Vu que  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible on montre qu'on peut écrire  $Z_4$  sous la forme :

$$Z_4 = \frac{3}{4\pi} \sum_{l, a \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l, a}}{\lambda_l \lambda_a} I_l I_a + \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{L}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} I_l \xi_s \eta_s.$$

Ainsi on peut réécrire l'hamiltonien (1.4.2) sous la forme :

$$H \circ \tau = \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a I_a + \frac{3}{4\pi} \sum_{l, a \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l,a}}{\lambda_l \lambda_a} I_l I_a + \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{L}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} I_l \xi_s \eta_s \\ + Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6.$$

On définit le re-scaling suivant des variables  $(I, \theta, \xi, \eta)$  par :

$$\chi_\rho : (\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \mapsto (I, \theta, \xi, \eta),$$

avec :

$$I = \nu \rho + \nu \tilde{r}, \quad \theta = \tilde{\theta}, \\ \xi = \nu^{1/2} \tilde{\xi}, \quad \eta = \nu^{1/2} \tilde{\eta}.$$

Le vecteur  $\rho$  va jouer le rôle du paramètre dans le théorème KAM. Ainsi, en composant l'hamiltonien (1.4.2) avec  $\chi_\rho$ , on obtient :

$$\nu^{-1} H \circ \tau \circ \chi_\rho = h_0 + f,$$

avec

$$f \equiv \nu \frac{3}{4\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a,l}}{\lambda_a \lambda_l} \tilde{r}_l \tilde{r}_a + \nu \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{L}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} \tilde{r}_l \tilde{\xi}_s \tilde{\eta}_s + \nu^{-1} (Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6) \circ \chi_\rho,$$

et

$$h_0 = \Omega \cdot \tilde{r} + \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a \tilde{\xi}_a \tilde{\eta}_a.$$

Les nouvelles fréquences sont données par :

$$\Omega_k = \Omega_k(\rho, \nu) = \omega_k + \nu \tilde{\omega}_k = \omega_k + \nu \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_l} \rho_l, \\ \Lambda_a = \Lambda_a(\rho, \nu) = \lambda_a + \nu \tilde{\lambda}_a = \lambda_a + \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l}.$$

Ces nouvelles fréquences vérifient les hypothèses du théorème KAM. De plus le jet de la perturbation est de la taille  $\nu^{3/2}$  alors que le contrôle des petits diviseurs  $\delta$  est égale à  $\nu^{1+\varepsilon}$  pour  $\varepsilon > 0$  petit. Ainsi on a bien  $f^T \ll \delta$ .

## 1.5 Résultat principal de la thèse

Rappelons que l'équation étudiée est donner par

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{S}^1, \quad (1.5.1)$$

avec  $m \in [1, 2]$  la masse et  $g$  est une fonction holomorphe réelle sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1 \times J$ , avec  $J$  un voisinage de zero de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $g$  est de la forme :

$$g(x, u) = 4u^3 + O(u^4).$$

La solution de l'équation linéaire (c'est-à-dire quand  $g = 0$ ), est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{I,m}(r, \theta, \xi, \eta) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{(I_a + r_a)} \frac{e^{-i\theta_a} \varphi_a(x) + e^{i\theta_a} \varphi_{-a}(x)}{\sqrt{2}(a^2 + m)^{1/4}} \\ &+ \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\xi_s \varphi_s(x) + \eta_{-s} \varphi_{-s}(x)}{\sqrt{2}(s^2 + m)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Posons  $u_{I,m}(\theta, x) = \hat{u}_{I,m}(0, \theta, 0, 0)$ . Alors, pour tout  $I \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ ,  $m \in [1, 2]$  et  $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$ , la fonction  $(t, x) \mapsto u_{I,m}(\theta_0 + t\omega, x)$  est solution de l'équation des ondes linéaire. Dans ce cas, le tore est stable par le flot hamiltonien.

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $s > \frac{1}{2}$ . Pour  $m \in \mathcal{U} \subset [1, 2]$  de mesure de Lebesgue pleine,  $I \in \mathcal{D} \subset [\nu, 2\nu]^{\#\mathcal{A}}$  de mesure de Lebesgue asymptotiquement pleine, il existe une fonction  $u(\theta, x)$  analytique en  $\theta$  et de classe  $H^s$  en  $x$  tel que*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|u(\theta, \cdot) - u_{I,m}(\theta, \cdot)\|_{H^s} \leq C\nu^{4/5},$$

tel que pour  $m \in \mathcal{U}$ ,  $I \in \mathcal{D}$ ,  $u(\theta + t\omega'(I), x)$  est solution de (1.5.1). De plus il existe une matrice inversible  $M(m) \in \mathcal{M}_{\#\mathcal{A}}(\mathbb{R}_+)$  tel que

$$\omega' = \omega + M(m)I + O(\nu^{3/2}).$$

## 1.6 Plan de la thèse

On adopte le plan suivant pour la thèse :

1. Chapitre 2 : Théorème KAM en dimension finie ;
2. Chapitre 3 : Théorème KAM en dimension infinie ;
3. Chapitre 4 : Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire.

### 1.6.1 Chapitre 2 : Théorème KAM en dimension finie

Dans ce chapitre on prouve un théorème KAM en dimension finie qui traite le cas de cas de valeurs propres (ou fréquences) multiples. Plus précisément, on considère un hamiltonien en dimension finie sous forme normale :

$$h(\rho) = \omega(\rho).r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle,$$

avec  $r \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta = ((p_s, q_s)_{1 \leq s \leq m}) \in \mathbb{R}^{2m}$ . On suppose que  $A(\rho)$  est sous la forme :  $A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$ , avec :

$$D(\rho) = \text{diag} \{ \lambda_i(\rho) I_2, 1 \leq i \leq m \}, \quad (1.6.1)$$

$N$  est une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc a une taille la multiplicité de la valeur propre correspondante dans  $D$ . Dans ce cadre-là, si on part d'un tore, alors la solution du système hamiltonien associé reste sur ce tore. Sous certaines conditions émises sur les fréquences, on peut de plus affirmer que la trajectoire de la solution remplit le tore. Dans ce contexte, on dit que le tore de départ est un tore invariant. Ensuite, on rajoute à cet hamiltonien intégrable une perturbation hamiltonienne et on veut montrer que le tore de départ est un tore persistant. On montre que, si la perturbation est petite et sous certaines conditions de non résonance des fréquences de l'hamiltonien intégrable, alors le tore de départ est un tore persistant.

Ce chapitre a pour but de présenter les stratégies et les notations qui seront utilisées dans le cadre général.

### 1.6.2 Chapitre 3 : Théorème KAM en dimension infinie

Dans ce chapitre, on étend le résultat du chapitre précédent à la dimension infinie. Toutefois, on suppose que l'opérateur associé à la partie quadratique de la forme normale admet des valeurs propres multiples mais d'ordre fini. En suivant les mêmes étapes que dans la preuve du résultat en dimension finie, mais en adaptant les espaces à la dimension infinie et en augmentant la technicité, on arrive à démontrer la persistance du tore du départ sous une forme déformée.

### 1.6.3 Chapitre 4 : Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire

Dans cette dernière partie de la thèse, on s'intéresse à l'équation des ondes non linéaire cubique sur le cercle, donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = 4u^3 + O(u^4), \quad m \in [1, 2], \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in S^1.$$

Proche de l'origine, on prouve l'existence de solutions quasi-périodique de faible amplitude, proche de la solution de l'équation linéaire. Dans les variables de Fourier, l'équation apparaît sous la forme d'un système hamiltonien perturbé en dimension infinie. Le problème ici est que l'hamiltonien obtenu ne vérifie pas les hypothèses de non résonance du théorème KAM en dimension infinie. Pour pallier à ce problème, on applique une procédure de forme normale de Birkhoff. On obtient par suite une forme normale dont les fréquences satisfont les bonnes hypothèses et dont la partie quadratique admet des valeurs propres doubles. D'où l'intérêt de prendre des valeurs propres multiples dans la partie quadratique de la forme normale du théorème KAM abstrait.





# 2

## Théorème KAM en dimension finie

Dans ce chapitre on se donne un hamiltonien sous forme normale en dimension finie, c'est-à-dire dépendant d'un nombre fini de variables (ou admet un nombre fini de degrés de liberté). Plusieurs résultats existent en dimension finie. On peut citer par exemple les travaux de Eliasson, Pöschel [15, 27] ou plus récemment le travail de You [33]. Dans ces articles les auteurs considèrent un hamiltonien de la forme

$$h = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i \cdot r_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq m} \Omega_j (p_j^2 + q_j^2)$$

et suppose une condition Diophantienne du type :

$$|\langle k, \omega \rangle + \langle l, \Omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{(|k| + |l|)^\tau}, \quad |l| \leq 2, \quad |k| + |l| \neq 0.$$

Donc l'opérateur associé à la partie quadratique admet que des valeurs propres simples.

La particularité ici est qu'on s'autorise des valeurs propres (ou fréquences) multiples dans l'opérateur associé à la partie quadratique de la forme normale. Dans ce cadre-là, si on part d'un tore, alors la solution du système hamiltonien associé reste sur ce tore. Sous certaines conditions émises sur les fréquences, on peut de plus affirmer que la trajectoire de la solution remplit le tore. Dans ce contexte, on dit que le tore de départ est un tore invariant. Ensuite, on rajoute à cet hamiltonien intégrable une perturbation hamiltonienne et on veut montrer que le tore de départ est un tore persistant. On montre que, si la perturbation est petite et sous certaines conditions de non résonance des fréquences de l'hamiltonien intégrable, alors le tore de départ est un tore persistant.

L'idée de la preuve consiste à construire itérativement un changement de variable symplectique proche de l'identité et qui satisfait certaines conditions. Ce changement de variable permet d'éliminer de l'hamiltonien les termes d'interactions entre les variables internes aux tore de départ et les variables externes à celui-ci. Les techniques de construction de ces changements de variables

symplectiques sont bien connues et bien décrites dans la littérature dans le cadre des valeurs propres simples. La présence de valeurs propres multiples complique le contexte algébrique. En particulier la résolution de l'équation homologique (centrale dans cette construction) met en oeuvre l'inversion de matrices diagonales dans le cas des valeurs propres simples de matrices non diagonales dans le cadre général.

## 2.1 Introduction

On considère l'espace  $\ell_2$  défini par :

$$Y := \{\zeta = (\zeta_j = (p_j, q_j), 1 \leq j \leq m)\},$$

munit de la norme  $\|\zeta\|^2 = \sum_{1 \leq j \leq m} |\zeta_j|^2$ . On définit Sur  $Y$  on définit l'opérateur linéaire  $J$  :

$$J : \{\zeta_j\} \mapsto \{\sigma_2 \zeta_j\}, \quad \text{avec } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit l'espace des phases :

$$\mathcal{P} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times Y,$$

muni de la structure symplectique suivante :

$$dr \wedge d\theta + Jd\zeta \wedge d\zeta.$$

On introduit le projecteur orthogonal  $\Pi$  défini sur l'ensemble des matrices carrés par :

$$\Pi : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \mathbb{C}I + \mathbb{C}\sigma_2.$$

On introduit aussi l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices symétrique de  $\mathcal{M}_m(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  par :

$$A \in \mathcal{M}, \text{ alors : } A_i^j \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad A_i^j = {}^t A_j^i \text{ et } \Pi A_i^j = A_i^j,$$

pour  $1 \leq i, j \leq m$ .

On muni  $\mathcal{M}$  de la norme suivante :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq m} \|A_i^j\|_\infty.$$

Fixons un  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $\rho > 0$  et  $B$  un espace de Banach , on définit :

$$\mathbb{T}_\rho^n = \{\theta \in \mathbb{C}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \mid |Im\theta| < \rho\},$$

et

$$\mathcal{O}_\rho(B) = \{x \in B \mid \|x\|_B < \rho\}.$$

Pour  $\sigma, \mu \in ]0, 1]$ , on définit :

$$\mathcal{O}(\sigma, \mu) = \mathbb{T}_\sigma^n \times \mathcal{O}_{\mu^2}(\mathbb{C}^n) \times \mathcal{O}_\mu(Y^c) = \{(\theta, r, \zeta)\},$$

$$\mathcal{O}^{\mathbb{R}}(\sigma, \mu) = \mathcal{O}(\sigma, \mu) \cap \{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times Y\}.$$

Un point de  $\mathcal{O}(\sigma, \mu)$  sera noté par  $x = (\theta, r, \zeta)$ .

**Classe des fonctions hamiltoniennes.** Soit  $\mathcal{D}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$  (l'ensemble des paramètres). Soit  $f : \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(\delta, \mu) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique par rapport à la première variable et tels que  $\nabla_\zeta f \in Y$  et  $\nabla_\zeta^2 f \in \mathcal{M}$ . On définit

$$\begin{aligned} |f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}, j=0,1} \left| \partial_\rho^j f(x, \rho) \right|, \\ \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}, j=0,1} \left\| \partial_\rho^j \nabla_\zeta f(x, \rho) \right\|, \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}, j=0,1} \left| \partial_\rho^j \nabla_\zeta^2 f(x, \rho) \right|. \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  l'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant pour tout  $x \in \mathcal{O}(\sigma, \mu)$

$$|f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} \leq C, \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu^2}.$$

Pour  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  on note  $[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$  la plus petite constante  $C$  qui satisfait les relations précédentes.

**Équations hamiltonienne.** A toute fonction hamiltonienne de classe  $C^1$  on associe les équations hamiltoniennes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_\theta f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\theta} = \nabla_r f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\zeta} = J\nabla_\zeta f(r, \theta, \zeta), \end{cases}$$

**Crochet de Poisson.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  en  $x = (r, \theta, \zeta)$ . On définit le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  par :

$$\{f, g\} = \nabla_r f \cdot \nabla_\theta g - \nabla_\theta f \cdot \nabla_r g + \langle \nabla_\zeta f, J\nabla_\zeta g \rangle.$$

**Hamiltonien et forme normale.**

On considère un hamiltonien sous forme normale :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle, \quad (2.1.1)$$

avec  $r \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta \in Y$ , et  $A(\rho) \in \mathcal{M}$ . On suppose que  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ . On suppose

que  $A(\rho)$  est sous la forme :  $A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$ , avec :

$$D(\rho) = \text{diag} \{ \lambda_i(\rho) I_2, 1 \leq i \leq m \}, \quad (2.1.2)$$

$N$  est une matrice de  $\mathcal{M}$  diagonale par blocs, où chaque bloc a une taille la multiplicité de la valeur propre correspondante dans  $D$ . Les éléments de  $N$  sont de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

**Exemples.**

1. Supposons que  $m = 4$  et que les valeurs propres de  $D$  sont distinctes, alors  $N$  sera formé de quatre blocs de taille 1 sur la diagonale principale.
2. Supposons que  $m = 3$  et que :

$$D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

alors  $N$  est sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{11} \\ \beta_{11} & \alpha_{11} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{12} & \alpha_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ -\beta_{12} & \alpha_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\beta_{22} \\ \beta_{22} & \alpha_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{33} & -\beta_{33} \\ \beta_{33} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

On dit que  $N$  est sous forme normale si  $N \in \mathcal{M}$  et vérifie l'hypothèse précédente. On note  $\mathcal{NF}$  l'ensemble des matrices sous forme normale.

On considère à présent le changement de variable complexe suivant :

$$z_j = \begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j + iq_j) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j - iq_j) \end{pmatrix}.$$

Si  $A \in \mathcal{NF}$  l'hamiltonien (2.1.1) s'écrit dans les nouvelles variables :

$$h(\rho) = \omega(\rho).r + \langle \xi, Q(\rho)\eta \rangle,$$

avec  $Q$  une matrice hermitienne à coefficients complexes.

**Exemple.** Reprenons le deuxième exemple ci dessus. On a alors

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \lambda_1 + \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 + \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Le vecteur fréquence interne  $\omega$  et les matrices  $D$  et  $N$  vérifient des hypothèses qu'on énoncera dans le prochain paragraphe. Pour la suite fixons un paramètre  $0 < \delta \leq 1$ . On supposera que les valeurs propres de  $A$  vérifient les hypothèses A1, A2 et A3 et que  $B$  vérifie l'hypothèse B.

**Hypothèse A1 : Condition de séparation :** On suppose que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$  on a :

- Les valeurs propres de deux blocs différents sont différents

$$|\lambda_i(\rho) \pm \lambda_j(\rho)| \geq \delta, \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq m.$$

- les valeurs propres sont non nuls :

$$|\lambda_i(\rho)| \geq \delta, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m.$$

**Hypothèse A2 : Condition de non résonance :** Supposons qu'il existe  $\delta_0 \leq \delta$  tel que pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie

$$\omega' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad |\omega - \omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0$$

on a pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  et tout  $1 \leq i < j \leq m$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

avec  $k \neq 0$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho) \pm \lambda_i(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) \pm \lambda_i(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_i(\rho) + \lambda_j(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_i(\rho) + \lambda_j(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_i(\rho) - \lambda_j(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_i(\rho) - \lambda_j(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

**Hypothèse B :** On suppose que  $N \in \mathcal{NF}$  et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$  on a :

$$\|\partial_\rho^j N(\rho)\| \leq \frac{\delta}{8}, \quad j = 0, 1.$$

**Remarque 2.1.1.** Supposons que l'hypothèse A2 est satisfaite. Alors pour tout  $0 < \kappa < \delta$  et  $N > 1$  il existe un fermé  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(\kappa, N) \subset \mathcal{D}$  tels que :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq C\delta^{-1}\kappa N^{2(n+1)},$$

avec  $\alpha > 0$  et dépend de  $n$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$  et  $|k| \leq N$  on a :

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega| &\geq \kappa, \quad \text{sauf pour } k \neq 0, \\ |k \cdot \omega \pm \lambda_i| &\geq \kappa, \\ |k \cdot \omega + \lambda_i + \lambda_j| &\geq \kappa. \end{aligned}$$

Cette remarque sera prouvée rigoureusement dans un cadre plus générale dans la preuve de la Proposition 3.1.1 dans le chapitre suivant.

Maintenant on est en mesure d'énoncer le théorème KAM.

**Théorème 2.1.2.** On considère  $h$  un hamiltonien sous forme normale défini par

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle$$

Supposons que  $A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$  avec  $D(\rho)$  définie comme dans (2.1.2) et  $N(\rho) \in \mathcal{NF}$ . On suppose que  $\omega$  et  $D$  vérifient les hypothèses A et que  $N$  vérifie l'hypothèse B pour  $\delta$  et  $\delta_0$  fixés. Fixons  $0 < \sigma, \mu \leq 1$ . Il existe alors un  $\varepsilon_0$  qui dépend de  $n, \sigma, \mu, |\omega|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  tels que si  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et

$$[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} = \varepsilon < \varepsilon_0 \delta,$$

alors il existe un Borélien  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  dont la mesure de Lebesgue vérifie

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq c(\sigma, \delta) \varepsilon_0^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

- il existe un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi : \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \rightarrow \mathcal{O}(\sigma, \mu),$$

- un vecteur fréquence interne  $\tilde{\omega}(\rho)$ , une matrice  $\tilde{A}$  et une perturbation  $\tilde{f}$  tel que :

$$(h_\rho + f) \circ \Phi = \tilde{\omega}(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \tilde{A}(\rho) \zeta \rangle + \tilde{f}(\theta, r, \zeta; \rho),$$

avec  $\partial_r \tilde{f} = \partial_\zeta \tilde{f} = \partial_{\zeta^2}^2 \tilde{f} = 0$  pour  $r = \zeta = 0$  et  $A \in \mathcal{NF}$ . De plus le changement de variable  $\Phi = (\Phi_\theta, \Phi_r, \Phi_\zeta)$  est proche de l'identité. Pour tout  $x \in \Phi : \mathcal{O}(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  et  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$\|\Phi(x, \rho) - x\| \leq C\varepsilon^{1/6}.$$

De plus la nouvelle fréquence  $\tilde{\omega}$  et la nouvelle matrice  $\tilde{A}$  vérifient :

$$\|\tilde{A}(\rho) - A(\rho)\| \leq C\varepsilon^{1/3}, \quad |\tilde{\omega}(\rho) - \omega(\rho)| \leq C\varepsilon^{1/3},$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ . La constante  $C$  est strictement positive et dépend de  $n$ , de  $\sigma$ , de  $\mu$ , de  $|\omega|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $\|A\|_{C^1(\mathcal{D})}$ .

## 2.2 Jets de fonctions, crochet de Poisson et flot hamiltonien

### 2.2.1 Jets de fonctions

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  on définit son jet noté  $f^T$  comme étant le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 1 en  $r$  et l'ordre 2 en  $\zeta$  au point  $r = 0$  et  $\zeta = 0$ . Plus précisément :

$$\begin{aligned} f^T(\theta, r, \zeta, \rho) &= f(\theta, 0, 0, \rho) + \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho)r + \langle \nabla_\zeta f(\theta, 0, 0, \rho), \zeta \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \nabla_\zeta^2 f(\theta, 0, 0, \rho) \zeta, \zeta \rangle \\ &= f_\theta(\theta) + f_r(\theta)r + \langle f_\zeta(\theta), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta, \zeta \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de la définition de la norme  $[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ , on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |f_\theta(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, & |f_r(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \|f_\zeta(\theta; \cdot)\|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, & |f_{\zeta\zeta}(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

pour tout  $\theta \in \mathbb{T}_\sigma^n$ .

**Lemme 2.2.1.** Pour tout  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et  $0 < \mu' < \frac{1}{2}\mu$  on a :

$$[f^T]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}},$$

$$[f - f^T]_{\sigma, \mu', \mathcal{D}} \leq 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

*Preuve.* Soit  $(x, \rho) \in \mathcal{O}(\sigma, \mu') \times \mathcal{D}$ .

- On commence par démontrer la deuxième inégalité. Cela revient à démontrer les inégalités suivantes pour  $j = 0, 1$  :

$$\begin{aligned} \cdot |\partial_\rho^j (f - f^T)(x, \rho)| &\leq 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \cdot \|\partial_\rho^j \nabla_\zeta (f - f^T)(x, \rho)\| &\leq 2 \frac{\mu'^2}{\mu^3} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \cdot |\partial_\rho^j \nabla_{\zeta\zeta}^2 (f - f^T)(x, \rho)| &\leq 2 \frac{\mu'}{\mu^3} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Les six inégalités se montrent de la même façon. Montrons par exemple que :

$$|\nabla_\zeta (f - f^T)(x, \rho)| \leq 2 \frac{\mu'^2}{\mu^3} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Posons  $m = \frac{\mu'}{\mu}$ . Pour un  $|z| \leq 1$  on a  $(\theta, (z/m)^2 r, (z/m)\zeta) \in \mathcal{O}(\sigma, \mu)$ . On définit la fonction

$$\begin{aligned} g &: \{|z| < 1\} \longrightarrow Y^c \\ z &\longmapsto \nabla_\zeta f(\theta, (z/m)^2 r, (z/m)\zeta). \end{aligned}$$

$g$  est une fonction holomorphe bornée par  $\mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ . De plus :

$$g(z) = \sum_{j \geq 0} f_j z^j,$$

avec  $\|f_j\| \leq \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ . On a  $\nabla_\zeta (f - f^T)(x, \rho) = \sum_{j \geq 2} f_j m^j$ . Pour  $\mu' \leq \frac{1}{2}\mu$  on obtient que  $m \leq 1/2$ . Par suite on a :

$$\|\nabla_\zeta (f - f^T)\| \leq \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \sum_{j \geq 2} m^j \leq \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2$$

- À présent on montre la première inégalité en utilisant la deuxième inégalité. On remarque que  $f^T = f - (f - f^T)$ . Puisque  $(f - f^T)$ ,  $\nabla_\zeta (f - f^T)$ ,  $\nabla_\zeta^2 (f - f^T)$  sont analytiques sur  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \frac{1}{2}\mu)$ , il en est de même pour  $f^T$ ,  $\nabla_\zeta f^T$ ,  $\nabla_\zeta^2 f^T$ . Par suite on a :

$$[f^T]_{\sigma, \frac{1}{2}\mu, \mathcal{D}} \leq \frac{1}{4} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} + [f - f^T]_{\sigma, \frac{1}{2}\mu, \mathcal{D}} \leq \frac{1}{2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Or  $f^T$  est quadratique en  $\zeta$ , donc  $f^T$ ,  $\nabla_\zeta f^T$  et  $\nabla_\zeta^2 f^T$  sont analytiques sur  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$ . Puisque  $[f^T]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq [f^T]_{\sigma, \frac{1}{2}\mu, \mathcal{D}}$ , on obtient alors

$$[f^T]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq 2 [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

□

### 2.2.2 Jets de fonctions et crochet de poisson.

Rappelons que le crochet de poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $C^1$  en  $x = (r, \theta, \zeta)$  est donné par :

$$\{f, g\} = \nabla_r f \cdot \nabla_\theta g - \nabla_\theta f \cdot \nabla_r g + \langle \nabla_\zeta f, J \nabla_\zeta g \rangle.$$

**Lemme 2.2.2.** *Soient  $f$  et  $g \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  deux jets de fonctions et  $0 < \sigma' < \sigma$  alors :*

$$[\{f, g\}]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

*Preuve.* Pour démontrer ce lemme on doit montrer que :

- $|\{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}},$
- $\|\nabla_\zeta \{f, g\}\|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}},$
- $|\nabla_\zeta^2 \{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-4} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$

- Commençons par démontrer le troisième point. On a :

$$\nabla_\zeta^2 \{f, g\} = f_r(\theta) \nabla_\theta g_{\zeta\zeta}(\theta) - g_r(\theta) \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta) J g_{\zeta\zeta}(\theta)$$

En utilisant les inégalités (2.2.1) et l'inégalité de Cauchy on obtient :

$$|\nabla_\zeta^2 \{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-4} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$$

- Pour le deuxième point, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_\zeta \{f, g\} &= f_r(\theta) \nabla_\theta g_\zeta(\theta) + f_r(\theta) \nabla_\theta g_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta - g_r(\theta) \nabla_\theta f_\zeta(\theta) \\ &\quad - g_r(\theta) \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta + g_{\zeta\zeta}(\theta) J f_\zeta(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta) J g_\zeta(\theta) + g_{\zeta\zeta}(\theta) J f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta. \end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla_\zeta \{f, g\}\|_{\mathcal{D}} &\leq C \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\quad + C \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu \\ &\quad + C \mu^{-2} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\quad + C \mu^{-2} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu \\ &\quad + C \mu^{-2} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\quad + C \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu \\ &\leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} [g]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

De même on montre le premier point. □

### 2.2.3 Flot hamiltonien dans le domaine $\mathcal{O}(\sigma, \mu)$ .

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur le domaine  $\mathcal{O}(\sigma, \mu) \times \mathcal{D}$ . On note  $\Phi_f^t \equiv \Phi^t$  son flot hamiltonien de  $f$  au temps  $t$ . Supposons que  $f$  est un jet de fonction :

$$f = f_\theta(\theta; \rho) + f_r(\theta; \rho)r + \langle f_\zeta(\theta; \rho), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta; \rho)\zeta, \zeta \rangle.$$

Par la suite les équations hamiltoniennes sont sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_\theta f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\theta} = f_r(\theta), \\ \dot{\zeta} = J(f_\zeta(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta). \end{cases} \quad (2.2.2)$$

On note  $V_f = (V_f^r, V_f^\theta, V_f^\zeta) \equiv (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\zeta})$ .  $V_f$  est un champ de vecteur analytique dans le domaine  $\mathcal{O}(\sigma - 2s, \mu - 2\nu)$  avec  $0 < 2s < \sigma$  et  $0 < 2\nu < \mu$ .

Supposons que

$$[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C \min(s\nu^2, \mu\nu), \quad (2.2.3)$$

alors en utilisant l'inégalité de Cauchy, on a pour tout  $x \in \mathcal{O}(\sigma - 2s, \mu - 2\nu)$  :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_\theta f(r, \theta, \zeta) \text{ donc } |\dot{r}|_{\mathbb{C}^n} \leq (2s)^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq \nu^2, \\ \dot{\theta} = f_r(\theta) \text{ donc } |\dot{\theta}|_{\mathbb{C}^n} \leq (4\nu)^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq s, \\ \dot{\zeta} = J(f_\zeta(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta) \text{ donc } \|\dot{\zeta}\|_{\mathbb{C}^n} \leq (\mu^{-1} + \mu^{-2}) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq \nu. \end{cases}$$

Ainsi

$$\Phi_f^t : \mathcal{O}(\sigma - 2s, \mu - 2\nu) \rightarrow \mathcal{O}(\sigma - s, \mu - \nu),$$

est bien défini pour  $0 \leq t \leq 1$  et analytique.

Pour un  $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}(\sigma - 2s, \mu - 2\nu)$  et  $0 \leq t \leq 1$  on a  $\Phi_f^t = (r(t), \theta(t), \zeta(t))$ . Donnons quelques précisions sur le flot hamiltonien  $\Phi_f^t$ .

- ♣ On a  $V_f^\theta = \dot{\theta} = f_r(\theta)$  est indépendant de  $r$  et de  $\zeta$ . Donc  $\theta(t) = K(\theta; t)$  avec  $K$  analytique en  $\theta$ .
- ♣ La troisième composante est donnée par  $V_f^\zeta = \dot{\zeta} = Jf_\zeta(\theta(t)) + Jf_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta$ . Grâce aux estimées de Cauchy, il est facile de voir que  $Jf_{\zeta\zeta}(\theta(t))$  est un opérateur linéaire borné de  $Y^c$ . Puisque  $\theta(t) = K(\theta; t)$  avec  $K$  analytique par rapport à  $\theta$ , alors  $V_f^\zeta$  est aussi analytique par rapport à  $\theta$ . Donc  $\zeta(t) = T(\theta; t) + U(\theta, t)\zeta$  avec  $U$  opérateur linéaire borné de  $Y^c$ .  $T$  et  $U$  sont analytique par rapport à  $\theta$ .
- ♣ La deuxième composante  $V_f^r = \dot{r} = -\nabla_\theta f(r, \theta, \zeta)$  est quadratique en  $\zeta$  et linéaire en  $r$ . Donc  $r(t) = L(\theta, \zeta; t) + S(\theta; t)r$  avec  $L$  quadratique en  $\zeta$  et analytique par rapport à  $\theta$ .  $S$  est une matrice carrée de taille  $n$  analytique en  $\theta$ .

**Lemme 2.2.3.** *Soit  $0 < 2s < \sigma$ ,  $0 < 2\nu < \mu$  et  $f = f^T \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  qui vérifie l'hypothèse (2.2.3). Alors pour  $0 \leq t < 1$  le flot des équations hamiltoniennes (2.2.2) est un symplectomorphisme analytique de  $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}(\delta - 2s, \mu - 2\nu)$  dans  $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}(\delta - s, \mu - \nu)$ . Il est de la forme :*

$$\Phi_f^t : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \zeta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L(\theta, \zeta; t) + S(\theta, \zeta; t)r \\ K(\theta; t) \\ T(\theta; t) + U(\theta; t)\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$$

avec  $L(\theta, \zeta; t)$  quadratique en  $\zeta$ ,  $U(\theta; t)$  et  $S(\theta, \zeta; t)$  sont deux opérateurs linéaire. Sans oublier le fait que tous les composantes de  $\Phi_f^t$  sont bornées et analytique en  $\theta$ .

**Proposition 2.2.4.** *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, le flot  $\Phi_f^t$  s'étend analytiquement de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{T}_{\sigma-2s}^n \times Y^c$  à  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{T}_{\sigma}^n \times Y^c$ . De plus*

$$\begin{aligned} |r(t) - r_0| &\leq Cs^{-1}(1 + \mu^{-2}\|\zeta_0\|^2 + \mu^{-2}|r_0|) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ |\theta(t) - \theta_0| &\leq \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \|\zeta(t) - \zeta_0\| &\leq C\mu^{-1}(1 + \mu^{-1}\|\zeta_0\|) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

*Preuve.* • Commençons par prouver l'estimation sur  $\theta$ . On a

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \nabla_r f(\theta(t)), \\ \theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{T}_{\sigma-2s}^n \end{cases}$$

Soit  $\bar{t} = \sup \left\{ t \mid \theta(u) \text{ définie pour } 0 \leq u \leq t; |\theta(u) - \theta_0| \leq \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \right\}$  On a pour tout  $t \leq \bar{t}$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \nabla_r f(\theta(u)) du.$$

Puisque  $\|\nabla_r f\| \leq \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ , on obtient alors l'estimation voulue.

• Démontrons l'estimation sur  $\zeta$ . On a :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = a(t) + B(t)\zeta(t), \\ \zeta(0) = \zeta_0 \in \mathcal{O}_{\mu-2\nu}(Y^c), \end{cases}$$

avec  $a(t) := Jf_{\zeta}(\theta(t))$  et  $B(t) := JS_{\zeta\zeta}(\theta(t))$ . Par hypothèses, on a les estimations suivantes :

$$\|a(t)\| \leq \mu^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq \nu \quad |B(t)| \leq \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C.$$

On a par définition :

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \zeta_0 + \int_0^t a(t') + B(t')\zeta(t')dt' \\
&= \int_0^t a(t')dt' + \int_0^t \int_0^{t'} a(t'')B(t')d''dt' + \zeta_0 + \zeta_0 \int_0^t B(t')dt \\
&+ \int_0^t \int_0^{t'} B(t')B(t'')\zeta(t'')dt''dt' \\
&= \dots \\
&= a^\infty(t) + (B^\infty(t) + I)\zeta_0,
\end{aligned}$$

avec

$$a^\infty(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) a(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1,$$

et

$$B^\infty(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) dt_k \dots dt_2 dt_1.$$

Or  $\|\prod_{j=1}^k B(t_j)\| \leq \left(\frac{C}{2}\right)^{k-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ , donc  $B^\infty(t)$  est majoré sur  $[0, 1]$  par la série convergente suivante :  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\frac{C}{2}\right)^{k-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ . On obtient que :

$$\|B^\infty(t)\| \leq C \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

À présent montrons que  $a^\infty(t)$  est aussi bornée sur  $[0, 1]$ . On a

$$\left\| \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) a(t_k) \right\| \leq 4m \left\| \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) \right\| \|a(t_k)\| \leq 4m \left(\frac{C}{2}\right)^{k-1} \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}}{\mu^2} \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}}{\mu}.$$

Par suite, on obtient que  $a^\infty(t)$  est majoré sur  $[0, 1]$  par la série convergente suivante :  $\sum_{k \geq 1} \frac{4m}{k!} \left(\frac{C}{2}\right)^{k-1} \mu^{-3} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^2$ . Ce qui nous permet de dire que :

$$\|a^\infty(t)\| \leq C \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^2}{\mu^3}.$$

En utilisant les deux estimations précédentes faites sur  $a^\infty(t)$  et  $B^\infty(t)$  et notamment l'hypothèse (2.2.3) On obtient que :

$$\|\zeta(t) - \zeta_0\| \leq C \mu^{-1} (1 + \mu^{-1} \|\zeta_0\|) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \quad (2.2.4)$$

- Démontrons à présent l'estimation sur  $r$ . On a :

$$\begin{aligned}
\dot{r}(t) &= -\nabla_{\theta} f(r(t), \theta(t), \zeta(t)) \\
&= -\nabla_{\theta} f(\theta(t)) - \nabla_{\theta} f_r(\theta(t))r(t) - \langle \nabla_{\theta} f_{\zeta}(\theta(t)), \zeta(t) \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} f_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta(t), \zeta(t) \rangle \\
&= -\alpha(t) - \Lambda(t)r(t).
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha(t) = \nabla_{\theta} f(\theta(t)) + \langle \nabla_{\theta} f_{\zeta}(\theta(t)), \zeta(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} f_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta(t), \zeta(t) \rangle,$$

et

$$\Lambda(t) = \nabla_{\theta} f_r(\theta(t)).$$

D'après l'inégalité de Cauchy on a :

$$|\Lambda(t)| \leq s^{-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C.$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)| &\leq C(s^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} + s^{-1} \mu^{-1} \|\zeta(t)\| [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} + s^{-1} \mu^{-2} \|\zeta(t)\| [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}) \\
&\leq C s^{-1} (1 + \mu^{-1} \|\zeta(t)\| + \mu^{-2} \|\zeta(t)\|^2) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}
\end{aligned}$$

Or d'après (2.2.4) et (2.2.3), on a  $\|\zeta(t)\| \leq C' \|\zeta_0\|$ . Donc :

$$|\alpha(t)| \leq C s^{-1} (1 + \mu^{-1} \|\zeta\| + \mu^{-2} \|\zeta\|^2) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Le même calcul que pour  $\zeta$  nous donne :

$$r(t) = -\alpha^{\infty}(t) + (1 - \Lambda^{\infty}(t))r_0,$$

avec

$$\alpha^{\infty}(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda(t_j) \alpha(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1,$$

et

$$\Lambda^{\infty}(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) dt_k \dots dt_2 dt_1.$$

On a

$$\left\| \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) \right\| \leq (C)^{k-1} s^{-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Par suite on obtient que  $\Lambda^{\infty}(t)$  est majoré sur  $[0, 1]$  par la série convergente suivante :

$\sum_{k \geq 1} \frac{(C)^{k-1}}{k!} \mu^{-2} s^{-1} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$ . Donc

$$\|\Lambda^\infty(t)\| \leq C s^{-1} \mu^{-2} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

À présent montrons que  $\alpha^\infty(t)$  est aussi bornée sur  $[0, 1]$ . On a

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) \alpha(t_k) \right\| &\leq 4m \left\| \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) \right\| \|\alpha(t_k)\| \\ &\leq 4m C^k s^{-1} (1 + \mu^{-1} (\|\zeta_0\| + \mu^{-2} \|\zeta_0\|^2)) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\leq C^k s^{-1} (1 + \mu^{-2} \|\zeta_0\|^2) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Ainsi  $\alpha^\infty(t)$  est majoré sur  $[0, 1]$  par la série convergente suivante :  $\sum_{k \geq 1} \frac{4m C^k}{k!} s^{-1} (1 + \mu^{-2} \|\zeta_0\|^2) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^2$ .

Ce qui nous permet de dire que :

$$|\alpha^\infty(t)| \leq C s^{-1} (1 + \mu^{-2} \|\zeta_0\|^2) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$$

En utilisant les deux estimations précédentes faites sur  $\alpha^\infty(t)$  et  $\Lambda^\infty(t)$ , on obtient que :

$$|r(t) - r_0| \leq C s^{-1} (1 + \mu^{-2} \|\zeta_0\|^2 + \mu^{-2} |r_0|) [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

□

**Proposition 2.2.5.** *Soient  $f$  et  $h \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  tel que*

$$[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C \min(s\nu^2, \mu\nu),$$

avec  $0 < 2s < \sigma$  et  $0 < 2\nu < \mu < \nu$ . Pour  $0 \leq t \leq 1$  on pose  $h_t(x, \rho) := h(\Phi_f^t; \rho)$ . On a alors  $h_t \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma - 2s, \mu - 2\nu)$  et vérifie

$$[h_t]_{\sigma - 2s, \mu - 2\nu, \mathcal{D}} \leq C \left( \frac{\mu}{\mu - 2\nu} \right)^2 [h]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Cette proposition sera prouvée lors de la preuve de la Proposition 3.2.8 dans le chapitre suivant.

## 2.3 Équation homologique

Dans cette partie on considère un hamiltonien  $h$  sous forme normale donné par :

$$h_0(\rho) = \omega_0(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_0(\rho) \zeta \rangle,$$

qui satisfait les hypothèses A et B. On considère une petite perturbation  $f$  de l'hamiltonien intégrable  $h$  de taille  $\varepsilon$ . Si le jet de  $f$  est nul alors le tore  $\mathbb{T}^n \times \{0\} \times \{0\}$  est un tore persistant pour l'hamiltonien  $h + f$ . Si  $f$  est de taille  $\varepsilon$  alors son jet est aussi de taille  $\varepsilon$ . Le but est donc

de supprimer le jet de  $f$ . Pour cela on construira un changement de variable canonique  $\varphi_S$  qui sera le flot induit par un hamiltonien  $S$  à  $t = 1$ . On veut que, quand on compose avec cette transformation, on obtient une nouvelle forme normale proche de la forme normale initiale et telle que le jet de la nouvelle perturbation est de taille  $\varepsilon^\alpha$  pour  $\alpha > 1$ . Plus précisément on veut que  $\varphi_S = \varphi_S^{t=1}$  vérifie :

$$(h_0 + f) \circ \varphi_S = h^+ + f^+, \quad \text{avec } (f^+)^T = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$h^+$  est une nouvelle forme normale proche de  $h$  ( $|h^+ - h| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ ).

$$h^+ = h_0 + \hat{h}, \quad \hat{h} = c(\rho) + \chi(\rho)r + \frac{1}{2}\langle \zeta, \hat{K}(\rho)\zeta \rangle.$$

En utilisant un développement de Taylor jusqu'à l'ordre deux on obtient l'équation homologique suivante :

$$\{h_0, S\} = \hat{h} - f^T + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.3.1)$$

On répète après la procédure précédente avec  $h^+$  à la place de  $h_0$  et  $f^+$  à la place de  $f$ . On résoudra l'équation homologique pour

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle$$

pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$  et  $A$  proche de  $A_0$ .

### 2.3.1 Les quatre composantes de l'équation homologique

On considère un hamiltonien sous forme normale donné par

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle.$$

Dans cette partie on résout l'équation homologique (2.3.1). Les inconnues sont  $S$  et  $\hat{h}$ . Pour la résoudre il suffit de prendre  $S$  comme un jet de fonction :

$$S(\theta, r, \zeta) = S_\theta(\theta) + S_r(\theta)r + \langle S_\zeta(\theta), \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle S_{\zeta, \zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle.$$

En remplaçant dans l'équation homologique on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_\theta S_\theta \cdot \omega + \nabla_\theta S_r \cdot \omega \cdot r + \langle \nabla_\theta S_\zeta \cdot \omega, \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla_\theta S_{\zeta \zeta} \cdot \omega \zeta, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_\zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta \zeta} \zeta \rangle \\ = C - f_\theta + \chi \cdot r - f_r \cdot r - \langle f_\zeta, \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle \zeta, \hat{K}\zeta \rangle - \frac{1}{2}\langle f_{\zeta \zeta} \zeta, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient quatre équation à résoudre.

**Les deux premières équations homologiques.**

Elle sont obtenues directement :

$$\nabla_{\theta} S_{\theta}(\theta) \cdot \omega = C - f_{\theta}(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.3.2)$$

$$\nabla_{\theta} S_r(\theta) \cdot \omega = \chi - f_r(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.3.3)$$

Pour la résolution des ces deux équations on impose que :

$$C(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta, \quad \chi(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta.$$

### La troisième équation homologique.

On a :

$$\langle \nabla_{\theta} S_{\zeta} \cdot \omega, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta}(\theta) \rangle = -\langle f_{\zeta}, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Or  $A$  est une matrice symétrique donc  $A^* = A$ . Par suite

$$\langle \nabla_{\theta} S_{\zeta} \cdot \omega, \zeta \rangle + \langle AJ S_{\zeta}(\theta), \zeta \rangle = \langle -f_{\zeta}, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Les matrice  $A$  et  $J$  commutent puisque chaque bloc de  $A$  est de la forme  $A_i^j = \mathbb{C}I_2 + \mathbb{C}\sigma_2$ . Ainsi, la troisième équation homologique est :

$$\nabla_{\theta} S_{\zeta}(\theta) \cdot \omega + JAS_{\zeta}(\theta) = -\nabla_{\zeta} f(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

### La quatrième équation homologique.

On a :

$$\frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta) \cdot \omega \zeta, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle = \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}\zeta \rangle - \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle.$$

En utilisant le fait que  $A$  est symétrique,  $A$  et  $J$  commutent, et que  $(AJ S_{\zeta\zeta})^* = -S_{\zeta\zeta} JA$  on obtient :

$$\langle \zeta, \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta) \cdot \omega \zeta \rangle + \langle \zeta, AJ S_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle - \langle \zeta, S_{\zeta\zeta}(\theta) AJ \zeta \rangle = \langle \zeta, \hat{K}\zeta \rangle - \langle \zeta, f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle.$$

Ainsi la quatrième équation homologique est donnée par

$$\nabla_{\theta} f_{\zeta\zeta}(\theta) \cdot \omega + AJ f_{\zeta\zeta}(\theta) - f_{\zeta\zeta}(\theta) JA = -f_{\zeta\zeta}(\theta) + \hat{K} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

### 2.3.2 Résolution des deux premières équations.

Les deux premières équations homologique (2.3.2) et (2.3.3) sont de la forme suivantes :

$$\nabla_{\theta} \varphi(\theta) \cdot \omega = \psi(\theta) \quad (2.3.4)$$

avec  $\int_{\mathbb{T}^n} \psi(\theta) d\theta = 0$ .

Dans la première équation  $\varphi = S_{\theta}$  et  $\psi = C - f_{\theta}$ . Dans la deuxième équation  $\varphi = S_r$  et  $\psi = \chi - f_r$ .

On développe  $\varphi$  et  $\psi$  en série de Fourier :

$$\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{\varphi}(k) e^{-ik\theta}, \quad \psi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta},$$

avec

$$\hat{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \quad \text{et}, \quad \hat{\psi}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} \psi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

On résout l'équation (2.3.4) en choisissant :

$$\hat{\varphi}(k) = -i \frac{\hat{\psi}(k)}{k \cdot \omega}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}; \quad \hat{\varphi}(0) = 0.$$

Pour avoir un contrôle sur les coefficients Fourier de  $\varphi$ , il faut qu'on tronque en  $k$ . Ainsi, pour un  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$-i \sum_{0 < |k| \leq N} k \cdot \omega \hat{\varphi}(k) e^{-ik\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta} - \sum_{|k| > N} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta}$$

En utilisant l'hypothèse A2 on a soit :

$$|k \cdot \omega(\rho)| \geq \delta \geq \kappa, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \omega(\rho)), z_k \rangle| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

Le deuxième cas implique d'après la Remarque 2.1.1 que pour  $0 < \kappa < \delta$  et  $N > 1$  il existe un fermé dont la mesure de Lebesgue vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq C \kappa \delta^{-1} N^{2(n+1)},$$

tel que pour tout  $0 < |k| \leq N$  et  $\rho \in \mathcal{D}_1$  on a :

$$|k \cdot \omega(\rho)| \geq \kappa.$$

On obtient ainsi un contrôle pour  $0 < |k| \leq N$  :

$$|\hat{\varphi}(k)| \leq \frac{|\hat{\psi}(k)|}{\kappa}, \quad 0 < |k| \leq N. \quad (2.3.5)$$

Ainsi on a résolu

$$\nabla_\theta \varphi(\theta) \cdot \omega = \psi(\theta) + R(\theta),$$

avec  $R(\theta) = - \sum_{|k| > N} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta}$ .

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction périodique et holomorphe sur le domaine  $|Im\theta| < \sigma$  et continue sur  $|Im\theta| \leq \sigma$ . Alors il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $n$  tels que les*

coefficient de Fourier de  $f$  vérifie :

$$|\hat{f}(k)| \leq C e^{-|k|\sigma} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f(\theta)|.$$

*Preuve.* On a :

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

On peut également se placer sur le tore  $\mathbb{T}^n - i(\sigma - \varepsilon) \frac{k}{|k|}$  pour tout  $0 < \varepsilon < \sigma$ . Sur ce tore on a :

$$|e^{ik\theta}| \leq e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &\leq \int_{\mathbb{T}^n - i(\sigma - \varepsilon) \frac{k}{|k|}} |f(\theta)| e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)} d\theta \\ &\leq C e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)} \sup_{|Im\theta| < \sigma - \varepsilon} |f(\theta)| \\ &\leq C e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f(\theta)|. \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité voulu par continuité. □

**Lemme 2.3.2.** Soient  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $a > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  alors on a :

$$\sum_{|k| \leq N} e^{-a|k|} \leq \frac{2^n}{a^n}, \quad (2.3.6)$$

$$\sum_{|k| > N} e^{-a|k|} \leq C(n) \frac{e^{-\frac{aN}{2}}}{a^n}. \quad (2.3.7)$$

*Preuve.* • Démontrons la première inégalité. On a

$$\sum_{|k| \leq N} e^{-a|k|} \leq \left( \sum_{|p| \leq N} e^{-a|p|} \right)^n \leq \left( 2 \int_0^N e^{-xa} dx \right)^n \leq \frac{2^n}{a^n}.$$

• Pour la deuxième inégalité on a :

$$\sum_{|k| > N} e^{-a|k|} \leq \int_{|x| > N} e^{-a|x|} dx.$$

En faisant le changement de variable  $y = a|x|$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_{|x| > N} e^{-a|x|} dx &= \int_{y > aN} e^{-y} \left( \frac{y}{a} \right)^{n-1} \frac{dy}{a} \\ &\leq a^{-n} e^{-\frac{aN}{2}} \int_{y > 0} e^{-y/2} y^{n-1} dy \\ &\leq C(n) \frac{e^{-\frac{aN}{2}}}{a^n}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.3.3.** *Soient  $\kappa > 0$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ , et  $\mu > 0$ . On considère  $\varphi$  et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes sur le domaine  $|Im\theta| < \sigma$  qui vérifient l'équation (2.3.4). Supposons que  $\rho \in \mathcal{D}_1(\kappa, N)$ , alors on a :*

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\varphi(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |R(\theta)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|. \end{aligned}$$

*Démonstration.* En utilisant (2.3.5) et le Lemme 2.3.1 on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\varphi(\theta)| &\leq \sum_{|k| < N} \frac{|\hat{\psi}(k)|}{\kappa} e^{|k|\sigma'}, \\ &\leq C \sum_{|k| < N} \frac{1}{\kappa} e^{-|k|\sigma} e^{|k|\sigma'} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|, \\ &\leq \frac{C}{\kappa} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)| \sum_{|k| < N} e^{-|k|(\sigma - \sigma')}, \\ &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|. \end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |R(\theta)| &= \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \left| \sum_{|k| > N} \hat{\psi}(k) e^{ik\theta} \right| \\ &\leq \sum_{|k| > N} |\hat{\psi}(k)| e^{|k|\sigma'}, \\ &\leq C \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)| \sum_{|k| > N} e^{-|k|(\sigma - \sigma')}, \\ &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|. \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.3.4.** *Soient  $\kappa > 0$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ , et  $\mu > 0$ . On considère  $\varphi$  et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes sur le domaine  $|Im\theta| < \sigma$  qui vérifient l'équation (2.3.4). Supposons que  $\rho \in \mathcal{D}_1(\kappa, N)$ , alors on a :*

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho \varphi(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)| + \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R(\theta)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)|. \end{aligned}$$

*Preuve.* En dérivant (2.3.4) par rapport à  $\rho$  on obtient :

$$\partial_\rho \hat{\varphi}(k) = i \frac{\partial_\rho \hat{\psi}(k)}{k \cdot \omega} + i \frac{\hat{\psi}(k)}{(k \cdot \omega)^2} (k \cdot \partial_\rho \omega(\rho)), \quad \text{pour } 0 < |k| \leq N,$$

et

$$\partial_\rho \hat{R}(k) = \partial_\rho \hat{\psi}(k), \quad \text{pour } |k| > N.$$

En appliquant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 2.3.3 on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho \varphi(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)| + \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R(\theta)| &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)|. \end{aligned}$$

□

À présent on applique les Lemmes 2.3.3 et 2.3.4 aux deux premières équations. On obtient ainsi la proposition suivantes :

**Proposition 2.3.5.** *Soient  $0 < \kappa < \delta$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ , et  $\mu > 0$   $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que*

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0,$$

*et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que*

$$|A - A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

*Supposons que  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et  $\rho \in \mathcal{D}_1(\kappa, N)$ , il existe alors un fermé dont la mesure de Lebesgue vérifie :*

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq C_0 \kappa \delta^{-1} N^{2(n+1)},$$

*tel que pour tout  $0 < |k| \leq N$  et  $\rho \in \mathcal{D}_1$  on a :*

1. *Il existe deux fonctions analytiques  $S_\theta(\cdot; \rho)$  et  $R_\theta(\cdot; \rho)$  sur  $\mathbb{T}_\sigma^n$ , tels que :*

$$\nabla_\theta S_\theta(\theta, \rho) \cdot \omega = -f(\theta, 0, \rho) + \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + R_\theta(\theta, \rho),$$

*avec*

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_\theta(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_\theta(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} + \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho^j R_\theta(\theta, \rho)| &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \quad \text{avec } j = 0, 1. \end{aligned}$$

2. Il existe deux fonctions analytiques  $S_r(\cdot; \rho)$  et  $R_r(\cdot; \rho)$  sur  $\mathbb{T}_\sigma^n$ , tels que :

$$\nabla_\theta S_r(\theta, \rho) \cdot \omega = -\nabla_r f(\theta, 0, \rho) + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + R_r(\theta, \rho),$$

avec

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_r(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_r(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} + \frac{C}{\kappa^2\mu^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho^j R_r(\theta, \rho)| &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \quad \text{avec } j = 0, 1. \end{aligned}$$

La constante  $C_0$  dépend de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  alors que  $C$  dépend de  $n$  en plus.

### 2.3.3 Résolution de la troisième équation.

On commence la résolution de la troisième équation homologique par énoncer un lemme prouvé dans [14]

**Lemme 2.3.6.** Soit  $A(t)$  une matrice carrée diagonale de taille  $N$  telle que ces valeurs propres  $a_j(t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I = ]-1, 1[$  et que pour  $1 \leq j \leq N$  et tout  $t \in I$  on a :

$$a'_j(t) \geq \delta.$$

Soit  $B(t)$  une matrice hermitienne de taille  $N$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  avec

$$\|B'(t)\| \leq \frac{\delta}{2},$$

alors

$$\text{mes}\{t \in I \mid \|(A(t) + B(t))^{-1}\| > \kappa^{-1}\} \leq 4N\kappa\delta_0^{-1}.$$

Pour la preuve voir la preuve du Lemme 3.3.6 du chapitre suivant.

**Proposition 2.3.7.** Soient  $0 < \kappa \leq \frac{\delta}{2}$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$  et  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0,$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Supposons que  $f \in \mathcal{T}(\sigma, \mu, \mathcal{D})$ . Il existe un fermé  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$  satisfaisant

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2) \leq 8m^2\kappa\delta^{-1}N^n,$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  il existe deux fonctions analytiques  $S_\zeta(\cdot; \rho)$  et  $R_\zeta(\cdot; \rho)$  sur  $\mathbb{T}_\sigma^n$ , tel que :

$$\nabla_\theta S_\zeta(\theta) \cdot \omega + JAS_\zeta(\theta) = -f_\zeta(\theta) + R_\zeta(\theta, \rho),$$

avec

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|S_\xi(\theta)\| &\leq \frac{C}{\kappa\mu(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)\| &\leq \frac{C}{\kappa^2\mu(\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho^j R_\xi(\theta)\| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

La constante  $C$  dépend de  $n$  et de  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$ .

*Preuve.* On considère le changement de variable complexe suivant :

$$z_j = \begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j + iq_j) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j - iq_j) \end{pmatrix}.$$

Dans les nouvelles variables notre hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \langle \xi, Q(\rho)\eta \rangle.$$

Dans ces nouvelles variables le jet de  $f$  est :

$$f^T = f_\theta(\theta) + f_r(\theta) \cdot r + \langle f_\xi, \xi \rangle + \langle f_\eta, \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\xi\xi\xi}, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\eta\eta\eta}, \eta \rangle + \langle f_{\xi\eta\xi}, \eta \rangle.$$

Donc l'hamiltonien qu'on cherche est de la forme :

$$S(\theta) = S_\theta(\theta) + S_r(\theta) \cdot r + \langle S_\xi, \xi \rangle + \langle S_\eta, \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle S_{\xi\xi\xi}, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle S_{\eta\eta\eta}, \eta \rangle + \langle S_{\xi\eta\xi}, \eta \rangle.$$

Le crochet de poisson devient alors :

$$\{h, S\} = \nabla_r h \nabla_\theta S - \nabla_\theta h \nabla_r S - i(\langle \nabla_\xi h, \nabla_\eta S \rangle + \langle \nabla_\eta h, \nabla_\xi S \rangle)$$

Dans les nouvelles variables, l'équation homologique (2.3.1) devient : En injectant cela dans

l'équation homologique on obtient :

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\theta} S_{\theta} \cdot \omega(\rho) + \nabla_{\theta} S_r \cdot \omega(\rho) r + \langle \nabla_{\theta} S_{\xi} \cdot \omega(\rho), \xi \rangle + \langle \nabla_{\theta} S_{\eta} \cdot \omega(\rho), \eta \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} S_{\xi\xi} \cdot \omega(\rho) \xi, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} S_{\eta\eta} \cdot \omega(\rho) \eta, \eta \rangle + \langle \nabla_{\theta} S_{\xi\eta} \cdot \omega(\rho) \xi, \eta \rangle \\
& - i \langle Q\eta, S_{\eta} + S_{\eta\eta}\eta + S_{\xi\eta}\xi \rangle + i \langle {}^t Q\xi, S_{\xi} + S_{\xi\xi}\xi + S_{\xi\eta}\eta \rangle \\
& = C(\rho) + \chi(\rho) \cdot r + \langle \xi, \hat{K}\eta \rangle - f_{\theta} - f_r \cdot r - \langle f_{\xi}, \xi \rangle - \langle f_{\eta}, \eta \rangle \\
& - \frac{1}{2} \langle f_{\xi\xi}\xi, \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle f_{\eta\eta}\eta, \eta \rangle - \langle f_{\xi\eta}\xi, \eta \rangle + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Par suite, on peut découpler la troisième équation en deux équations :

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\theta} S_{\xi}(\theta) \cdot \omega + i Q S_{\xi}(\theta) = -f_{\xi}(\theta) + R_{\xi}(\theta), \\
& \nabla_{\theta} S_{\eta}(\theta) \cdot \omega - i {}^t Q S_{\eta}(\theta) = -f_{\eta}(\theta) + R_{\eta}(\theta),
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

avec  $Q$  matrice hermitienne diagonale par blocs à coefficients complexes sous la forme :

$$Q = \text{diag} \{ \lambda_j, 1 \leq j \leq m \} + H,$$

où  $H$  est une matrice hermitienne diagonale par blocs.

On développe  $S_{\xi}$ ,  $S_{\eta}$ ,  $f_{\xi}$  et  $f_{\eta}$  en série de Fourier :

$$\begin{aligned}
S_{\xi}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{S}_{\xi}(k) e^{-ik\theta}, & S_{\eta}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{S}_{\eta}(k) e^{-ik\theta}, \\
f_{\xi}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\xi}(k) e^{-ik\theta}, & f_{\eta}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\eta}(k) e^{-ik\theta}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les équations (2.3.9) deviennent :

$$\begin{aligned}
i(k \cdot \omega I + Q) \hat{S}_{\xi}(k) &= -\hat{f}_{\xi}(k) + \hat{R}_{\xi}(k), & k \in \mathbb{Z}^n, \\
i(k \cdot \omega I - {}^t Q) \hat{S}_{\eta}(k) &= -\hat{f}_{\eta}(k) + \hat{R}_{\eta}(k), & k \in \mathbb{Z}^n.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Pour les résoudre il nous faut un contrôle sur  $(k \cdot \omega I + Q)$  et  $(k \cdot \omega I - {}^t Q)$ .

$Q$  est hermitienne donc diagonalisable. Soit  $Q_{[s]}$  la restriction de  $Q$  au bloc  $s \times s$ . En décomposant l'équation homologique par blocs on obtient :

$$i(k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]}) \hat{S}_{[s]}(k) = -\hat{f}_{[s]}(k) + \hat{R}_{[s]}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \tag{2.3.11}$$

avec  $\hat{S}_{[s]}(k)$ ,  $\hat{f}_{[s]}(k)$  et  $\hat{R}_{[s]}(k)$  sont respectivement la restriction de  $\hat{S}_{\xi}(k)$ ,  $\hat{f}_{\xi}(k)$  et  $\hat{R}_{\xi}(k)$  au bloc  $[s]$ .

$Q_{[s]}$  est une matrice hermitienne donc diagonalisable. Soit  $\alpha_{\ell}$  une valeur propre de  $Q_{[s]}$  et rappelons que  $Q_{[s]} = D_{[s]} + H_{[s]}$  avec  $D_{[s]} = \text{diag} \{ \lambda_{\ell}, \ell \in [s] \}$  et  $H_{[s]}$  est une matrice hermitienne de dimension au plus  $m$ . Par suite  $\alpha_{\ell} - \lambda_{\ell}$  est une valeur propre de  $H_{[s]}$ .

Contrôler l'opérateur  $k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]}$  revient à contrôler  $|k \cdot \omega + \alpha_{\ell}|$  pour tout  $0 \leq |k| \leq N$ .

Remarquons que  $|\partial_\rho^j N(\rho)| < \frac{\delta}{2}$  implique que pour tout  $\ell \in [s]$  :

$$|\alpha_\ell - \lambda_\ell| \leq \|H_{[s]}\| \leq \|H\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Par suite, on obtient on obtient en utilisant la condition de séparation A1 :

$$|\alpha_\ell| \geq \lambda_\ell - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| \geq \frac{\delta}{2},$$

donc pour  $k = 0$  (3.3.12) est bien résolue. Pour  $k \neq 0$  en utilisant l'hypothèse A2 on a soit :

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell| \geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| \geq \frac{\delta}{2},$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \lambda_\ell), z_k \rangle \geq \delta.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas. Remarquons que pour ce vecteur unitaire  $z_k$  on a :

$$\|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\| \leq \|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\|_\infty \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}.$$

Posons

$$J(k, s) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid \|(k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]})^{-1}\| > \kappa^{-1}\}$$

En appliquant le Lemme 2.3.6 à la matrice  $\text{diag}\{k \cdot \omega + \lambda_\ell, \ell \in [s]\}$  et la matrice hermitienne  $Q_{[s]}$  on obtient

$$\text{mes } J(k, s) \leq 8m\delta^{-1}\kappa.$$

Posons

$$\mathcal{D}_2 := \mathcal{D} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n, |s| \leq m} J(k, s)$$

La mesure de Lebesgue de  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2$  vérifie :

$$\text{mes } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2 \leq 8m^2\delta^{-1}\kappa N^n.$$

Ainsi on a le contrôle des petits diviseurs pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$ . On peut donc résoudre la troisième équation.

En notant  $(\hat{S}_\xi)_{s\ell}$  le  $\ell$ -ème élément de  $(\hat{S}_\xi)_{[s]}$  et pareil pour  $(\hat{f}_\xi)_{s\ell}$  et  $(\hat{R}_\xi)_{s\ell}$  on a :

$$(\hat{S}_\xi)_{s\ell}(k) = -((k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]})^{-1}(\hat{f}_\xi)_{s\ell}(k)), \quad 0 \leq |k| \leq N,$$

et

$$(R_\xi)_{s\ell} = - \sum_{|k| \geq N} (\hat{f}_\xi)_{s\ell}(k) e^{ik\theta}.$$

En utilisant le même raisonnement que dans la première équation on obtient pour tout  $0 < \sigma < \sigma'$  :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(S_\xi)_{[s]}(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_\xi)_{[s]}(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(R_\xi)_{[s]}(\theta)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_\xi)_{[s]}(\theta)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|S_\xi(\theta)\| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_\xi(\theta)\|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|S_\xi(\theta)\| &\leq \frac{C}{\kappa\mu(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|R_\xi(\theta)\| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_\xi(\theta)\|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|R_\xi(\theta)\| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Pour prouver les estimations sur les dérivées de  $S_\xi$  et de  $R_\xi$  par rapport à  $\rho$  on dérive les équations (2.3.10). On obtient :

$$i(k \cdot \omega I + Q)\partial_\rho \hat{S}_\xi(k) = -i(\partial_\rho k \cdot \omega I + \partial_\rho Q)\hat{S}_\xi(k) - \partial \hat{f}_\xi(k), \quad 0 \leq |k| \leq N,$$

et

$$\partial_\rho R_\xi(\theta) = - \sum_{|k| \geq N} \partial_\rho(\hat{f}_\xi)_{ji}(k) e^{ik\theta}.$$

Le même procédé décrit précédemment nous donne :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)\| &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_\xi(\theta, \rho)\| \\ &+ \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho f_\xi(\theta, \rho)\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)\| \leq \frac{C}{\kappa^2\mu(\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

De même

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_\xi(\theta)\| \leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|\partial_\rho f_\xi(\theta)\|,$$

ce qui donne

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_\xi(\theta)\| \leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

□

### 2.3.4 Résolution de la quatrième équation.

**Proposition 2.3.8.** Soient  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4}$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ ,  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0,$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Supposons que  $f \in \mathcal{T}(\sigma, \mu, \mathcal{D})$ . Il existe un fermé  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$  satisfaisant

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2) \leq 16m^3 \kappa \delta^{-1} N^n,$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_3$ , il existe une matrice  $\hat{K} : \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{NF}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $S_{\zeta\zeta}(\cdot; \rho)$  et  $R_{\zeta\zeta}(\cdot; \rho) : \mathbb{T}_{\sigma'}^n \times \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{M}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et analytique en  $\theta$  tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) \cdot \omega(\rho) + A(\rho) J S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) - S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) J A \\ = -f_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) + \hat{K}(\rho) + R_{\zeta\zeta}(\theta, \rho), \end{aligned}$$

où, pour tout  $(\theta, \rho) \in \mathbb{T}_{\sigma'}^n \times \mathcal{D}_3$ , on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|S_{\zeta\zeta}(\theta)\| &\leq \frac{C}{\kappa \mu^2 (\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_{\rho} S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho)\| &\leq \frac{C}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_{\rho} R_{\zeta\zeta}(\theta)\| &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu^2 (\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\ \|\partial_{\rho}^j \hat{K}(\rho)\| &\leq \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}}{\mu^2}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

La constante  $C$  est strictement positive et dépend de  $n$ ,  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

*Preuve.* En utilisant les mêmes notations et changement de variable que dans la troisième équation on peut décomposer la quatrième équation d'après (2.3.8) en trois équations :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta} S_{\xi\xi}(\theta) \cdot \omega + i^t Q S_{\xi\xi}(\theta) + i S_{\xi\xi}(\theta) Q &= -f_{\xi\xi}(\theta) + R_{\xi\xi}(\theta), \\ \nabla_{\theta} S_{\eta\eta}(\theta) \cdot \omega - i Q S_{\eta\eta}(\theta) - i S_{\eta\eta}(\theta)^t Q &= -f_{\eta\eta}(\theta) + R_{\eta\eta}(\theta), \\ \nabla_{\theta} S_{\xi\eta}(\theta) \cdot \omega - i Q S_{\xi\eta}(\theta) + i S_{\xi\eta}(\theta) Q &= \hat{K} - f_{\xi\eta}(\theta) + R_{\xi\eta}(\theta). \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

On développe  $S_{\xi\xi}$ ,  $S_{\xi\eta}$ ,  $S_{\eta\eta}$ ,  $f_{\xi\xi}$ ,  $f_{\xi\eta}$ ,  $f_{\eta\eta}$ ,  $R_{\xi\xi}$ ,  $R_{\xi\eta}$  et  $R_{\eta\eta}$  en série de Fourier. On obtient :

$$(k \cdot \omega I + {}^t Q) \hat{S}_{\xi\xi}(k) + \hat{S}_{\xi\xi}(k) Q = i(\hat{f}_{\xi\xi}(k) - \hat{R}_{\xi\xi}(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \tag{2.3.13}$$

$$(k \cdot \omega I - Q) \hat{S}_{\eta\eta}(k) - \hat{S}_{\eta\eta}(k)^t Q = i(\hat{f}_{\eta\eta}(k) - \hat{R}_{\eta\eta}(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \tag{2.3.14}$$

$$(k \cdot \omega I - Q)\hat{S}_{\xi\eta}(k) + \hat{S}_{\xi\eta}(k)Q = -i(\delta_{k,0}\hat{K} - \hat{f}_{\xi\eta}(k) - \hat{R}_{\xi\eta}(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (2.3.15)$$

où  $\delta_{k,j}$  désigne le symbole de Kronecker.

Les équations (2.3.13) et (2.3.14) sont de la même forme, donc il suffit de résoudre (2.3.13) et (2.3.15).

### Résolution de l'équation (2.3.13).

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{NF}$  et notons  $M_{[s],[s']}$  sa restriction au bloc  $s \times s'$ . On définit  $Q_{[s]} := Q_{[s],[s]}$  où  $Q = D + H$  avec  $D = \text{diag} \{ \lambda_s(\rho), s \in \mathcal{L} \}$  et  $H$  est une matrice hermitienne diagonale par blocs. En décomposant par blocs on obtient :

$$k \cdot \omega (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) + Q_{[s]} (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k)^t Q_{[s']} = i((\hat{f}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) - (\hat{R}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k)). \quad (2.3.16)$$

$Q_{[s]}$  est hermitienne donc il existe une base orthonormée tel que  $\tilde{Q}_{[s]} = {}^t P_{[s]} Q_{[s]} P_{[s]}$  est diagonale. De même pour  ${}^t Q_{[s']}$ . En multipliant l'équation (2.3.16) par  ${}^t P_{[s]}$  à gauche et  $P_{[s']}$  à droite, on obtient :

$$k \cdot \omega {}^t P_{[s]} (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']} + {}^t P_{[s]} Q_{[s]} P_{[s]} {}^t P_{[s]} (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']} + {}^t P_{[s]} (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']} {}^t P_{[s']} {}^t Q_{[s']} P_{[s']} = i {}^t P_{[s]} ((\hat{f}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) - (\hat{R}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k)) P_{[s']}.$$

En posant

$$\begin{aligned} (\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) &= {}^t P_{[s]} (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']}, \\ (\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) &= {}^t P_{[s]} (\hat{f}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']}, \\ (\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) &= {}^t P_{[s]} (\hat{R}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']}, \end{aligned}$$

on obtient l'équation suivante :

$$(k \cdot \omega I_{[s]} + \tilde{Q}_{[s]})(\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) \tilde{Q}_{[s']} = i(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) - i(\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k). \quad (2.3.17)$$

Soient  $\alpha_\ell$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s]}$  et  $\alpha_{\ell'}$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s']}$ . Pour résoudre (2.3.13), il nous faut un contrôle sur :

$$k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'},$$

pour tout  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$ . L'hypothèse  $\|\partial_\rho^j N(\rho)\| < \frac{\delta}{4}$  nous donne que  $\|H\| \leq \frac{\delta}{4}$  et on obtient :

$$|\alpha_\ell - \lambda_\ell| \leq \|H_{[s]}\| \leq \|H\|_\infty \leq \frac{\delta}{4}.$$

En utilisant l'hypothèse A2, on a soit :

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'}| \geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell + \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} \geq \frac{\delta}{2} \geq \kappa,$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \lambda_{\ell'} + \lambda_\ell), z_k \rangle| \geq \delta.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas. Pour un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  on a :

$$\|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\| \leq \|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\|_\infty \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{\delta}{4}.$$

En simplifiant les notations on peut réécrire l'équation (2.3.17) sous la forme :

$$L(k, s, s')S_{[s],[s']} = iF_{[s],[s']}, \quad (2.3.18)$$

avec

$$L(k, s, s')S = (k \cdot \omega I_{[s]} + \tilde{Q}_{[s]})S_{[s],[s']} + S_{[s],[s']}\tilde{Q}_{[s']},$$

et

$$F_{[s],[s']} = f_{[s],[s']} + R_{[s],[s']}.$$

On munit  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  du produit scalaire canonique suivant : pour  $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  alors  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ . Remarquons que  $L$  est un opérateur hermitien pour ce produit scalaire. Posons

$$J(k, s, s') = \{\rho \in \mathcal{D} \mid \|(L(k, s, s'))^{-1}\| > \kappa^{-1}\}$$

En suivant la même procédure pour démontrer le Lemme 2.3.6, on obtient :

$$\text{mes } J(k, s, s') \leq 16m\delta^{-1}\kappa.$$

Ainsi

$$\text{mes} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n, |s, s'| \leq m} J(k, s, s') \leq 16m^3\kappa\delta^{-1}N^n.$$

Posons  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n, |s, s'| \leq m} J(k, s, s')$ , on alors pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'}| \geq \kappa.$$

On résout l'équation (2.3.17) terme par terme en posant pour  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$  :

$$\overset{\ell}{\ell'}(\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = \frac{i}{k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'}} \overset{\ell}{\ell'}(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) \quad \text{pour } |k| \leq N,$$

$$\overset{\ell}{\ell'}(\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = \overset{\ell}{\ell'}(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k), \quad \text{pour } |k| > N.$$

Les matrices  $P_{[s]}^{-1}$  et  $P_{[s']}$  sont unitaires, donc en utilisant le même raisonnement que dans les

trois premières équations on obtient pour tout  $0 < \sigma < \sigma'$  :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|(S_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)\| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|(R_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)\| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|(f_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)\|. \end{aligned}$$

Par suite

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|(S_{\xi\xi})(\theta)\| \leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|(f_{\xi\xi})(\theta)\|, \quad (2.3.19)$$

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|(R_{\xi\xi})(\theta)\| \leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|(f_{\xi\xi})(\theta)\|. \quad (2.3.20)$$

Pour prouver les estimations sur les dérivées de  $S_{\xi\xi}$  et de  $R_{\xi\xi}$  par rapport à  $\rho$ , on dérive les équations (2.3.13). On obtient :

$$\begin{aligned} (k \cdot \omega I + {}^t Q) \partial_\rho \hat{S}_{\xi\xi}(k) + \partial_\rho \hat{S}_{\xi\xi}(k) Q &= -\partial_\rho (k \cdot \omega I + {}^t Q) \hat{S}_{\xi\xi}(k) \\ &\quad - \hat{S}_{\xi\xi}(k) \partial_\rho Q + i \hat{f}_{\xi\xi}(k), \quad |k| \leq N, \end{aligned}$$

et

$$\partial_\rho R_{\xi\xi}(\theta) = \sum_{|k| \geq N} \partial_\rho (\hat{f}_{\xi\xi})_{ji}(k) e^{ik\theta}.$$

En utilisant la même méthode que pour démontrer les estimations (2.3.19) et (2.3.20) on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_{\xi\xi}(\theta, \rho)\| &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_{\xi\xi}(\theta, \rho)\| \\ &\quad + \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho f_{\xi\xi}(\theta, \rho)\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_{\xi\xi}(\theta, \rho)\| \leq \frac{C}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

De même

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_{\xi\xi}(\theta)\| \leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|\partial_\rho f_{\xi\xi}(\theta)\|.$$

Donc

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_{\xi\xi}(\theta)\| \leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu^2 (\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Pour obtenir les estimations sur  $S_{\eta\eta}(\theta)$ ,  $\partial_\rho S_{\eta\eta}(\theta)$ ,  $R_{\eta\eta}(\theta)$  et  $\partial_\rho R_{\eta\eta}(\theta)$ , on suit exactement le même schéma.

Pour terminer la résolution de l'équation homologique, il reste qu'à résoudre l'équation (2.3.15).

**Résolution de l'équation (2.3.15).**

En décomposant en blocs l'équation (2.3.15) on obtient :

$$\begin{aligned} k \cdot \omega(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) - Q_{[s]}(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k)Q_{[s']} \\ = -i(\delta_{k,0}\hat{K}'_{[s],[s']} - (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) + (\hat{R}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k)). \end{aligned}$$

En diagonalisant comme dans l'équation (2.3.13) et en reprenant les mêmes notations on obtient :

$$\begin{aligned} k \cdot \omega(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) - \tilde{Q}_{[s]}(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k)\tilde{Q}_{[s']} \\ = -i(\delta_{k,0}\hat{K}'_{[s],[s']} - (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) + (\hat{R}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k)). \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Soient  $\alpha_\ell$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s]}$  et  $\alpha_{\ell'}$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s']}$ . Donc pour résoudre (2.3.15) il faut avoir un contrôle sur :

$$k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'},$$

selon  $k$ .

♣ Si  $k = 0$  alors on distingue deux cas :

- Si  $[s] = [s']$ , c'est à dire qu'on est sur le même bloc. On ne peut pas contrôler  $\alpha_\ell - \alpha_{\ell'}$ , on pose alors :

$$(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s]}(0) = 0, \quad \hat{K}'_{[s],[s]} = (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s]}(0),$$

ainsi dans ce cas l'équation est bien résolu.

- Si  $[s] \neq [s']$ , alors en utilisant l'hypothèse A1, on a pour tout  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$  :

$$\begin{aligned} |\alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| &\geq |\lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas on résout l'équation (2.3.21) en posant :

$$(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s'],[s]}(0) = i \frac{(\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s'],[s]}(0)}{\alpha_{s'} - \alpha_s}, \quad K'_{[s'],[s]} = 0.$$

♣ Si  $k \neq 0$ , en utilisant l'hypothèse de non résonance A2, soit on a :

$$|k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| \geq \delta,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega + \alpha_{\ell'} - \alpha_\ell| &\geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

soit il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}), z_k \rangle \geq \delta. \quad (2.3.22)$$

Posons :

$$I(k, s, s') = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| < \kappa\}.$$

Supposons que les valeurs propres de la matrice hermitienne  $H$  sont analytiques, par suite on obtient

$$|\partial_\rho(\alpha_\ell - \lambda_\ell)| \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\| \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{1}{\langle s \rangle^{2\beta}} |\partial_\rho H(\rho)|_\beta \leq \frac{\delta}{4\langle s \rangle^{2\beta}} \leq \frac{\delta}{4}.$$

D'après (2.3.22) la mesure de Lebesgue de  $I(k, s, s')$  vérifie :

$$\text{mes } I(k, s, s') \leq 8\delta^{-1}\kappa.$$

Si les valeurs propres de  $H$  ne sont pas analytiques, on obtient la même estimations par densité des fonctions analytiques dans les fonctions continues (voir la preuve du Lemme 2.3.6). Par suite en posant

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n, |s, s'| \leq m} I(k, s, s'),$$

on obtient que

$$\text{mes } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'_2 \leq 8m^2\delta^{-1}N^n.$$

Par construction pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  on a :

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| \geq \kappa.$$

Pour  $\rho \in \mathcal{D}_2$ , on résout l'équation (2.3.21) en posant pour  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$  :

$$\frac{\ell}{\ell'} (\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) = \frac{i}{k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}} \frac{\ell}{\ell'} (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) \quad \text{pour } |k| \leq N,$$

$$\frac{\ell}{\ell'} (\hat{R}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) = \frac{\ell}{\ell'} (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k), \quad \text{pour } |k| > N.$$

Le même raisonnement que dans l'équation (2.3.13) nous donne que :

$$\begin{aligned}
\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|(S_{\xi\eta})(\theta)\| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|(f_{\xi\eta})(\theta)\|, \\
\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|(R_{\xi\eta})(\theta)\| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|(f_{\xi\eta})(\theta)\|, \\
\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_{\xi\eta}(\theta, \rho)\| &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_{\xi\eta}(\theta, \rho)\| \\
&\quad + \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho f_{\xi\eta}(\theta, \rho)\|, \\
\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_{\xi\eta}(\theta, \rho)\| &\leq \frac{C}{\kappa^2\mu^2(\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\
\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_{\xi\eta}(\theta)\| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu^2(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \\
\|\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)\| &\leq \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}}{\mu^2}, \quad j = 0, 1.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la résolution de l'équation homologique. □

**Théorème 2.3.9.** Soient  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4}$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$  et  $0 < \mu' < \mu$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0,$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Supposons que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$

$$A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$$

tel que  $|\partial_\rho^j N(\rho)| < \frac{\delta}{4}$  pour  $j = 0, 1$ . Supposons que  $A$  satisfait les hypothèses A et B. Alors il existe un fermé  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\kappa, N) \subset \mathcal{D}$  tel que la mesure de Lebesgue vérifie

$$mes(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq C\kappa\delta^{-1}N^{2(n+1)}$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  il existe deux jets de fonctions  $S = S^T \in \mathcal{T}(\sigma', \mu', \mathcal{D}')$  et  $R = R^T \in \mathcal{T}(\sigma', \mu', \mathcal{D}')$  et une forme normale

$$\hat{h}(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta.r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}(\rho) \zeta \rangle.$$

tel que

$$\{h, S\} + f^T = \hat{h} + R.$$

De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a  $B(\rho)$  et :

$$|\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)| \leq \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}}{\mu^2}, \quad j = 0, 1, \quad (2.3.23)$$

$$[S]_{\sigma', \mu, \mathcal{D}'} \leq \frac{C}{\kappa^2 (\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \quad (2.3.24)$$

$$[R]_{\sigma', \mu, \mathcal{D}'} \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \quad (2.3.25)$$

La constante  $C$  est strictement positive et dépend de  $n$ ,  $m$ ,  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{C^1(\mathcal{D})}$ .

## 2.4 Preuve du théorème KAM.

Dans cette partie on donne la preuve du Théorème KAM (2.1.2). On décompose la preuve en deux étapes : une étape élémentaire et une étape itérative.

### 2.4.1 Étape élémentaire.

Considérons un hamiltonien  $h_1$  sous forme normale

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle,$$

avec  $\omega$  vérifiant les hypothèses A1 et A2. On suppose que  $A = D + N$  avec  $D$  matrice diagonale et  $N \in \mathcal{NF}$  est une forme normale qui vérifie l'hypothèse B. On considère une perturbation  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  de taille  $\varepsilon$ . On cherche un jet de fonction  $S$  afin de construire un changement de variable  $\Phi_S^1$  proche de l'identité tel que :

$$(h + f) \circ \Phi_S = h_1 + f_1, \quad \text{avec } (f_1)^T = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$h_1$  est une nouvelle forme normale proche de  $h$  (c'est à dire  $|h_1 - h| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ ) avec :

$$h_1 = h + \hat{h},$$

et :

$$\hat{h}(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}(\rho) \zeta \rangle.$$

D'après la section précédente  $S$  est solution de l'équation homologique :

$$\{h, S\} = \hat{h} - f^T + R.$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
(h + f) \circ \Phi_S^1 &= h \circ \Phi_S^1 + (f - f^T) \circ \Phi_S + f^T \circ \Phi_S^1 \\
&= h + \{h + S\} + \int_0^1 (1-t) \{\{h, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt \\
&\quad + (f - f^T) \circ \Phi_S^1 + f^T + \int_0^1 \{f^T, S\} \circ \Phi_S^t dt \\
&= h + \hat{h} + R + \int_0^1 \{(1-t)\{h, S\} + f^T, S\} \circ \Phi_S^t dt \\
&\quad + (f - f^T) \circ \Phi_S^1 \\
&= h + \hat{h} + R + \int_0^1 \{(1-t)(\hat{h} + R) + t f^T, S\} \circ \Phi_S^t dt \\
&\quad + (f - f^T) \circ \Phi_S^1 \\
&= h_1 + f_1,
\end{aligned}$$

avec

$$f_1 = R + (f - f^T) \circ \Phi_S^1 + \int_0^1 \{(1-t)(\hat{h} + R) + t f^T, S\} \circ \Phi_S^t dt.$$

**Lemme 2.4.1.** Soit  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4}$ ,  $N \geq 1$  et  $0 < \mu' < \frac{\mu}{2}$ . Supposons que les hypothèses A et B sont vérifiées et que  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  avec

$$[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \leq C \mu^2 (\sigma - \sigma'). \quad (2.4.1)$$

Alors  $f_1 \in \mathcal{T}(\mathcal{D}', \sigma', \mu')$  et on a

$$[f_1]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'} \leq C [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \left( \frac{e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} + \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^3 + \frac{[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+2}} \right).$$

*Preuve.* Posons

$$f_1^1 = R, \quad f_1^2 = (f - f^T) \circ \Phi_S^1, \quad f_1^3 = \int_0^1 \{(1-t)(\hat{h}_1 + R) + t f^T, S\} \circ \Phi_S^t dt.$$

- Commençons par estimer  $[f_1^1]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}$ . D'après l'estimation (2.3.25) du Théorème 2.3.9, on a :

$$[f_1^1]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'} \leq C \frac{e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

- Pour estimer  $[f_1^2]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}$  on utilise d'abord le Lemme 2.2.1, on a alors :

$$[f - f^T]_{\sigma, 2\mu', \mathcal{D}} \leq 2 \left(\frac{2\mu'}{\mu}\right)^3 [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}.$$

Or  $[f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}$  vérifie l'hypothèse (2.4.1), donc en appliquant la Proposition 2.2.5 on obtient :

$$\begin{aligned} [f_1^2]_{\sigma',\mu',\mathcal{D}} &\leq C \left(\frac{2\mu'}{\mu'}\right)^2 [f - f^T]_{\sigma,2\mu',\mathcal{D}} \\ &\leq \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^3 [f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

- Il reste à montrer que

$$[f_1^3]_{\sigma',\mu',\mathcal{D}} \leq C \frac{[f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^2}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+1}}.$$

Soit  $g_t = (1-t)(\hat{h} + R) + t f^T$ . On a  $g_t$  est un jet de fonction de  $\mathcal{T}(\mathcal{D}', \sigma_2, \mu)$ . Pour  $j = 1, 2$  on définit :

$$\sigma_j = \sigma' + j \frac{\sigma - \sigma'}{3}.$$

On a  $\sigma - \sigma_2 = \frac{1}{3}(\sigma - \sigma')$ , donc en utilisant l'inégalité (2.3.25) on obtient :

$$[R]_{\sigma_2,\mu,\mathcal{D}'} \leq C \frac{3^n e^{-(\sigma-\sigma')N/6}}{(\sigma - \sigma')^n} [f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}},$$

$C$  est strictement positive et dépend de  $n$ ,  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{C^1(\mathcal{D})}$ . D'après l'expression de  $\hat{h}_1$  et l'inégalité (2.3.23), on a :

$$[\hat{h}]_{\sigma_2,\mu,\mathcal{D}'} \leq [f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} [g_t]_{\sigma_2,\mu,\mathcal{D}'} &\leq \left(2 + C \frac{3^n e^{-(\sigma-\sigma')N/6}}{(\sigma - \sigma')^n}\right) [f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}, \\ &\leq 3 [f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

$S$  est un jet de fonction de  $\mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma_2, \mu)$  et vérifie d'après l'estimation (2.3.24) :

$$[S]_{\sigma_2,\mu,\mathcal{D}'} \leq C \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} \kappa^2 (\sigma - \sigma')^{n+1}} [f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}.$$

Donc en utilisant le Lemme 2.2.2 on obtient :

$$\begin{aligned} [\{g_t, S\}]_{\sigma_1,\mu,\mathcal{D}'} &\leq \frac{C}{\mu^2 (\sigma_2 - \sigma_1)} [g_t]_{\sigma_2,\mu,\mathcal{D}'} [S]_{\sigma_2,\mu,\mathcal{D}'}, \\ &\leq \frac{C}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+2}} ([f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}})^2. \end{aligned}$$

On remarque que  $\sigma - \sigma_1 = \frac{1}{3}(\sigma - \sigma')$  et que  $\mu' \leq \mu - \mu'$ . Donc d'après l'hypothèse 2.4.1, on a bien  $[S]_{\sigma_1,\mu,\mathcal{D}'} \leq \frac{1}{8} (\mu - \mu')^2 (\sigma - \sigma')$ . Ainsi, grâce à la Proposition 2.2.5 :

$$[f_1^3]_{\sigma',\mu',\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+2}} ([f]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}})^2.$$

□

### 2.4.2 Initialisation du schéma KAM

Rappelons tout d'abord les données du problème et ce qu'on veut obtenir. On considère un hamiltonien  $h$  sous forme normale donnée par :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle,$$

où  $A = D + N$ , avec  $D$  définie comme dans (2.1.2) et  $N \in \mathcal{NF}$ . On suppose que les fréquences internes  $\omega$  et la matrice  $D$  vérifient les hypothèses A1 et A2 alors que  $N$  vérifie l'hypothèse B. On considère une perturbation  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ . On veut construire un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi : \mathcal{O}^\alpha\left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu),$$

tel que :

$$(h + f) \circ \Phi = \tilde{h} + \tilde{f}.$$

$\tilde{h}$  est une forme normale proche de  $h$  et  $\tilde{f}$  est la nouvelle perturbation telle que son jet est nul. Le changement de variables  $\Phi$  sera construit itérativement. En effet

$$\Phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_1 \circ \Phi_2 \dots \circ \Phi_k.$$

Chaque  $\Phi_k$  sera le flot à  $t = 1$  d'un certain Hamiltonien  $S_k$ . Cet Hamiltonien sera un jet de fonction et sera la solution de l'équation homologique à l'étape  $k$ . Regardons ce qui se passe à la première itération. Pour alléger les notations on notera  $\Phi = \Phi_S^{t=1}$  le premier changement de variable. On a :

$$(h + f) \circ \Phi = h_1 + f_1.$$

Pour  $\varepsilon$  petit, on veut que si  $f = O(\varepsilon)$ , alors  $f_1 = O(\varepsilon^\gamma)$  avec  $\gamma > 1$ .

D'après le Théorème 2.3.9, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  la nouvelle forme normale est donnée par  $h_1 = h + \hat{h}_1$ , avec :

$$\hat{h}_1 = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}(\rho) \zeta \rangle,$$

On peut réécrire cette nouvelle forme normale à une constante près sous la forme :

$$\begin{aligned} h_1(\rho) &= \left( \omega(\rho) + \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \right) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, (A(\rho) + \hat{K}(\rho)) \zeta \rangle \\ &= \omega_1(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_1(\rho) \zeta \rangle. \end{aligned}$$

L'Hamiltonien  $S$  sera solution de l'équation homologique :

$$\{h + S\} = \hat{h} - f^T + R,$$

où  $R$  est un jet de fonction. Notons que  $K$ ,  $S$  et  $R$  vérifient les estimations (2.3.23)-(2.3.25).

La nouvelle perturbation  $f_1$  est donnée par :

$$f_1 = R + (f - f^T) \circ \Phi + \int_0^1 \left\{ (1-t)(\hat{h}_1 + R) + t f^T, S \right\} \circ \Phi dt.$$

Pour montrer que  $f_1 = O(\varepsilon^\gamma)$  avec  $\gamma > 1$ , on fait le choix suivant de paramètre :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, & \varepsilon_1 &= [f]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}, \\ \sigma - \sigma' &= C_* \sigma, \\ N &= 2(\sigma - \sigma')^{-1} \ln(\varepsilon^{-1}), \\ \mu' &= \varepsilon^{2/5} \mu, \\ \kappa &= \varepsilon^{1/64}. \end{aligned}$$

avec  $C_* = \left( 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \right)^{-1} = \frac{3}{\pi^2}$ . Cette constante nous permet de montrer que  $\sigma_\infty = \sigma/2$ .

**Lemme 2.4.2.** *Il existe un fermé  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  et  $\gamma > 0$  tel que*

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq \varepsilon^\gamma.$$

*Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , il existe un changement de variable symplectique analytique*

$$\Phi : \mathcal{O}^\alpha(\sigma', \mu') \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu),$$

*tel que*

$$(h + f) \circ \varphi = h_1 + f_1. \quad (2.4.2)$$

*De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  et  $j = 0, 1$  on a :*

$$|\partial_\rho^j (A_1(\rho) - A(\rho))|_\beta = |\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq \frac{\varepsilon}{\mu^2}, \quad (2.4.3)$$

$$|\partial_\rho^j (\omega_1(\rho) - \omega(\rho))| \leq \frac{\varepsilon}{\mu^2} \quad (2.4.4)$$

$$\|\Phi(x, \rho) - x\| \leq \varepsilon^{7/8} \text{ pour tout } x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu), \quad (2.4.5)$$

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon^{7/6}. \quad (2.4.6)$$

*Preuve.* L'existence du fermé  $\mathcal{D}'$  et du changement de variable  $\varphi$  découle directement du Théorème 2.3.9. De plus d'après le choix des paramètre on a :

$$\text{mes} \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}' \leq C \kappa \delta^{-1} N^{2(n+1)} \leq \varepsilon^\gamma,$$

et

$$|\partial_\rho^j (A_1(\rho) - A(\rho))|_\beta = |\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq \frac{\varepsilon}{\mu^2}, \quad j = 0, 1.$$

Pour les fréquence on a :

$$|\partial_\rho^j(\omega_1(\rho) - \omega(\rho))| \leq \left| \int_{\mathbb{T}^n} \partial_\rho^j f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu^2}.$$

Soit  $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$ . On rappelle

$$\|(r, \theta, \zeta)\| = \max(|r|, |\theta|, \|\zeta\|).$$

D'après la Proposition 2.2.4, l'estimation (2.3.24) et le choix des paramètres on a :

$$\|\Phi(x) - x\| \leq \frac{[S]_{\sigma', \mu, \mathcal{D}'}}{(\sigma - \sigma')\mu^2} \leq \frac{C\varepsilon}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+2}} \leq C(C_*\sigma)^{-(n+2)} \mu^{-2} \varepsilon^{30/32} \leq \varepsilon^{7/8},$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Il reste à démontrer l'estimation (2.4.6). D'après le choix de paramètre et l'estimation (2.3.24) on a :

$$[S]_{\sigma', \mu, \mathcal{D}'} \leq \frac{C\varepsilon}{\kappa^2 (\sigma - \sigma')^{n+1}} \leq (C_*\sigma)^{-(n+1)} \varepsilon^{31/32} \leq \frac{1}{24} (\mu')^2 (\sigma - \sigma').$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Donc on est en mesure d'appliquer le Lemme 2.4.1. Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq C \frac{e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \varepsilon + C \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 \varepsilon + \frac{C}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{n+2}} \varepsilon^2 \\ &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3. \end{aligned}$$

D'après le choix des paramètres, pour  $\varepsilon$  petit, on a :

$$\Gamma_1 \leq \frac{1}{(C_*\sigma)^n} \varepsilon^2 \leq \frac{1}{3} \varepsilon^{7/6},$$

$$\Gamma_2 \leq C \varepsilon^{6/5} \varepsilon \leq \frac{1}{3} \varepsilon^{7/6}.$$

$$\Gamma_3 \leq C(C_*\sigma)^{-(n+2)} \mu^{-2} \varepsilon^{-1/32} \varepsilon^2 \leq \frac{1}{3} \varepsilon^{7/6}.$$

□

### 2.4.3 Choix des paramètres

On est maintenant en position de prouver le Théorème 2.1.2.

Supposons qu'on est dans le même cadre que dans l'étape élémentaire. D'après l'initialisation du schéma KAM et le Lemme 2.4.2, on suppose qu'on a construit le premier changement de variable symplectique, la première forme normale qui vérifie les hypothèses de non résonances et la nouvelle perturbation. Avec le choix de paramètres mentionné ci-dessus pour la première itération, on obtient en posant  $\varepsilon = [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}$  et  $\varepsilon_1 = [f_1]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}$  que

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon^{7/6}.$$

Pour pouvoir réitérer de nouveaux, il faut qu'on impose

$$\varepsilon < \frac{1}{8}\delta\mu^2.$$

Soit  $k \geq 1$ , d'après le Théorème 2.3.9, on suppose qu'on a construit un hamiltonien  $h_k = h_{k-1} + \hat{h}_k = \omega_k.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_k(\rho)\zeta \rangle$  sous forme normale, une nouvelle perturbation  $f_k$  et un jet de fonction  $S_k$  tel que :

$$\{h_k, S_k\} + f_k^T = \hat{h}_k + R_k.$$

Faisons un choix de paramètres pour faire converger le schéma KAM.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}, \quad \varepsilon_1 = [f_1]_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}, \quad \sigma_0 = \sigma, \quad \mu_0 = \mu, \\ \sigma_{k-1} - \sigma_k &= C_*\sigma_0/(k)^2, \quad k \geq 1, \\ \mu_k &= \varepsilon_{k-1}^{2/5}\mu_0, \quad k \geq 1, \\ N_k &= 2(\sigma_{k-1} - \sigma_k)^{-1} \ln(\varepsilon_k^{-1}), \quad k \geq 1, \\ \kappa_k &= \varepsilon_k^{1/64}, \quad k \geq 0, \\ \mathcal{O}(k) &= \mathcal{O}^\alpha(\sigma_k, \mu_k), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

avec  $C_* = \left(2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}\right)^{-1} = \frac{3}{\pi^2}$ .

Rappelons que la perturbation à l'étape  $k + 1$  est donnée par :

$$f_{k+1} = R_k + (f_k - f_k^T) \circ \Phi_{S_k}^1 + \int_0^1 \left\{ (1-t) (\hat{h}_k + R_k) + t f_k^T, S_k \right\} \circ \Phi_{S_k}^t dt.$$

De plus la norme de la perturbation à l'étape  $k + 1$  vérifie :

$$\varepsilon_{k+1} \leq C \left( \frac{e^{-(\sigma_k - \sigma_{k+1})N_k/2}}{(\sigma_k - \sigma_{k+1})^n} + \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \right)^3 + \frac{\varepsilon_k}{\kappa_k^2 \mu_k^2 (\sigma_k - \sigma_{k+1})^{n+2}} \right) \varepsilon_k.$$

Pour ce choix de paramètres on obtient pour  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\leq C\sigma_0^{-n}(k+1)^{2n}\varepsilon_k^2 + C \left( \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} \right)^{6/5} \varepsilon_k \\ &\quad + C(C_*\sigma_0)^{-(n+2)}(k+1)^{n+2}\mu_0^{-2}\varepsilon_k^{6/5-1/32}. \end{aligned}$$

Ici on voit que  $\varepsilon_0$  dépend de  $n, \sigma, \mu, |\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

**Lemme 2.4.3.** *Pour le choix de paramètres précédent et pour tout  $k \geq 1$  on a :*

$$\varepsilon_k \leq \varepsilon_0^{\left(\frac{7}{6}\right)^k}.$$

pour  $\varepsilon_0$  assez petit.

*Preuve.* Il suffit de montrer que pour  $j \leq k$ , on a :

$$\varepsilon_j \leq \varepsilon_{j-1}^{7/6}.$$

Pour cela on montrera que les trois termes sont plus petits que  $\frac{1}{3}\varepsilon_{j-1}^{7/6}$ .

- Pour le premier terme et pour  $\varepsilon$  assez petit, on a :

$$C\sigma_0^{-n}j^{2n}\varepsilon_{j-1}^2 \leq \frac{1}{3}\varepsilon_{j-1}^{7/6}.$$

- Pour le deuxième terme on a

$$C\left(\frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_{j-2}}\right)^{6/5}\varepsilon_{j-1} \leq C\left(\varepsilon_{j-1}^{1/7}\right)^{6/5}\varepsilon_{j-1} \leq \frac{1}{3}\varepsilon_{j-1}^{7/6}.$$

pour  $\varepsilon$  assez petit.

- Pour le troisième terme on a

$$C(C_*\sigma_0)^{-(n+2)}j^{n+2}\mu_0^{-2}\varepsilon_{j-1}^{187/160} \leq \frac{1}{3}\varepsilon_{j-1}^{7/6}.$$

pour  $\varepsilon$  assez petit.

□

#### 2.4.4 Lemme itératif

Regardons à présent une étape quelconque du schéma KAM. Pour l'initialisation on pose  $h_0(\rho) = \omega_0(\rho) \cdot r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_0(\rho)\zeta \rangle$ ,  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ ,  $f_0 = f$  avec  $f_0 \in \mathcal{T}(\sigma_0, \mu_0, \mathcal{D}_0)$ .

**Lemme 2.4.4.** *Supposons qu'il existe une constante  $\varepsilon_0$  strictement positive qui dépend de  $n, \sigma, \mu, |\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  tel que :*

$$\varepsilon_0 \leq \delta\mu^2. \quad (2.4.7)$$

alors pour tout  $k \geq 1$  il existe un fermé  $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k-1}$ , un jet de fonction  $S_{k-1}$  tel que  $S_{k-1} \in \mathcal{T}(\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k)$ , une forme normale définie sur  $\mathcal{D}_k$  par  $h_k(\rho) = \omega_k \cdot r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_k(\rho)\zeta \rangle$  et une perturbation  $f_k$  qui vérifie  $f_k \in \mathcal{T}(\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k)$  tel que :

$$\Phi_k = \Phi_{S_{k-1}}^1(\cdot, \rho) : \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}(k-1), \quad \rho \in \mathcal{D}_k,$$

est un changement de variable symplectique analytique qui vérifie :

$$(h_{k-1} + f_{k-1}) \circ \Phi_k = h_k + f_k$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{D}_{k-1} \setminus \mathcal{D}_k) &\leq \varepsilon_{k-1}^\gamma, \\ [fk]_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k} &\leq \varepsilon_k, \\ |A_k - A_{k-1}| = |\hat{K}_{k-1}| &\leq \mu_{k-1}^{-2} \varepsilon_{k-1}, \\ |\omega_k - \omega_{k-1}| &\leq \mu_{k-1}^{-2} \varepsilon_{k-1}, \\ \|\Phi_k(x, \rho) - x\| &\leq \varepsilon_{k-1}^{1/6} \text{ pour tout } x \in \mathcal{O}(k), \rho \in \mathcal{D}_k. \end{aligned}$$

*Preuve.* Supposons d'après le Lemme 2.4.2 à la première étape on a construit l'ouvert de paramètre  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0$  qui vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \leq \varepsilon_0^\gamma,$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$  il existe un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi_1 = \Phi_{S_0}^{t=1} : \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}(0).$$

Ce changement de variable vérifie :

$$(h + f) \circ \Phi_1 = h_1 + f_1,$$

avec  $h_1(\rho) = \omega_1.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_1(\rho)\zeta \rangle$ . D'après les estimations (2.4.3)-(2.4.5), on a :

$$|\partial_\rho^j (A_1(\rho) - A_0(\rho))| \leq \frac{\varepsilon_0}{\mu_0^2}, \quad |\partial_\rho^j (\omega_1(\rho) - \omega_0(\rho))| \leq \frac{\varepsilon_0}{\mu_0^2},$$

$$\|\Phi_1(x, \rho) - x\| \leq \varepsilon^{7/8} \text{ pour tout } x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu),$$

Ce qui achève la première étape. La condition (2.4.7) nous permet de continuer de vérifier l'hypothèse B et les conditions de non résonance. Donc on peut réitérer. Supposons qu'on a terminé l'étape  $k$  par itération du procédé précédent et qu'on veut passer à l'étape  $k + 1$ . Par construction d'après le Théorème 2.3.9 on a :

$$A_k = A_0 + \hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \dots + \hat{K}_{k-1},$$

et d'après (2.3.23)

$$|\partial_\rho^j (A_k(\rho) - A_{k-1}(\rho))|_\beta \leq |\partial_\rho^j \hat{K}_{k-1}(\rho)| \leq \frac{\varepsilon_k}{\mu_k^2} \leq \varepsilon_k^{11/35} \leq \frac{\delta}{8}.$$

De plus

$$\omega_k = \omega_0 + \sum_{0 \leq j \leq k-1} \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f_j(0, \theta) d\theta, \quad (2.4.8)$$

donc

$$|\omega_k - \omega_0| \leq \sum_{0 \leq j \leq k-1} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla_r f_j(0, \theta)| d\theta \leq \sum_{0 \leq j \leq k-1} \frac{\varepsilon_j}{\mu_j^2} \leq \delta_0,$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. On peut donc continuer à appliquer 2.3.9 et construire cette fois  $S_k$ ,  $hatK_k$ ,  $R_k$  et  $\mathcal{D}_k$  qui vont vérifier les mêmes hypothèses et estimations voulu. De plus pour  $\varepsilon$  petit d'après la Proposition 2.2.4, l'estimation (2.3.24) et le choix des paramètres on a pour  $x \in \mathcal{O}(k)$  :

$$\begin{aligned} \|\Phi_k(x) - x\| &\leq \frac{[S_{k-1}]_{\sigma_k, \mu_{k-1}, \mathcal{D}_k}}{\mu_{k-1}^2 (\sigma_{k-1} - \sigma_k)} \\ &\leq C \frac{[f_{k-1}]_{\sigma_{k-1}, \mu_{k-1}, \mathcal{D}_{k-1}}}{\kappa_k^2 \mu_k^2 (\sigma_{k-1} - \sigma_k)^{n+2}} \\ &\leq C (C_* \sigma_0)^{-(n+2)} k^{2(n+2)} \mu_0^{-2} \varepsilon_{k-1}^{1/5-1/32} \\ &\leq \varepsilon_{k-1}^{1/6}. \end{aligned}$$

□

### 2.4.5 Passage à la limite et preuve du théorème KAM

Par construction on a  $\mathcal{D}_k \subset \dots \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ . Or on a

$$\text{mes}(\mathcal{D}_{k-1} \setminus \mathcal{D}_k) \leq C (\kappa_k \delta^{-1})^l N_k^v \leq \varepsilon_k^\gamma.$$

La mesure de Lebesgue du Borélien  $\mathcal{D}' := \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{D}_k$  vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq c \varepsilon^\gamma.$$

avec  $c$  dépendant de  $\delta$  et de  $\sigma$ . D'après le choix de paramètres on a :  $\sigma_\infty = \sigma/2$ .

Grâce au Lemme 2.4.4, on a pour tout  $k \geq 1$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  :

$$\|\Phi_k(x, \rho) - x\| \leq \varepsilon_{k-1}^{1/6}.$$

Soit  $1 \leq j \leq M$ , on note  $\Phi_M^j = \Phi_j \circ \Phi_{j+1} \circ \dots \circ \Phi_M$ .  $\Phi_M^j$  est un changement de variable symplectique défini sur  $\mathcal{O}(M) \times \mathcal{D}'$  à valeur dans  $\mathcal{O}(j)$ . De plus pour tout  $1 \leq j \leq M$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  :

$$\|\Phi_M^j - id\| \leq \sum_{k=j}^M \varepsilon_{k-1}^{1/6} \leq C \varepsilon_{j-1}^{1/6},$$

Donc pour  $P > M$  on a :

$$\|\Phi_P^j - \Phi_M^j\|_\alpha \leq C \varepsilon_M^{1/6}.$$

Ainsi,  $(\Phi_M^j)_M$  est une suite de Cauchy qui converge vers  $\Phi_\infty^j$  : un changement de variable symplectique analytique réel défini sur  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}) \times \mathcal{D}'$  avec  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}) \equiv \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, 0)$ . De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$\|\Phi_\infty^j - id\|_\alpha \leq \sum_{k \geq j} \varepsilon_{k-1}^{1/6} \leq C \varepsilon_{j-1}^{1/6}. \quad (2.4.9)$$

D'après la Proposition 2.2.3 tous les  $\Phi_k$  sont des changements de variables linéaire en  $r$  et

quadratique  $\zeta$ . Donc on peut étendre à chaque étape  $\Phi_k$  de  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2})$  à  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ . Cette forme est stable par composition. Par suite  $\Phi_M^j$  et  $\Phi_\infty^j$  sont aussi linéaire en  $r$  et quadratique en  $\zeta$ . Donc pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on peut étendre  $\Phi_\infty^j$  de  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2})$  à  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  tout en satisfaisant l'inégalité 2.4.9 sous l'hypothèse :

$$\|\Phi_\infty^1 - id\|_\alpha \leq \sum_{k \geq 1} \varepsilon_{k-1}^{1/6} \leq \frac{\mu}{2}.$$

Par l'estimation de Cauchy, pour  $j \geq 1$ , on a :

$$\|D\Phi_\infty^j - id\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq C\varepsilon_{j-1}^{1/6}. \quad (2.4.10)$$

Par construction  $\Phi_M^1$  transforme l'hamiltonien perturbé

$$H_1 = \omega.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle + f$$

en

$$H_M = \omega_M.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_M(\rho)\zeta \rangle + f_M.$$

On a  $\omega_M$  converge vers  $\omega_\infty$  et  $A_M$  vers  $A_\infty$  et on a :

$$\begin{aligned} |\omega_\infty - \omega| &\leq \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_j}{\mu_j^2} \leq C\varepsilon + \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j-1}^5}, \\ &\leq C\varepsilon + \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j^{\frac{11}{35}} \\ &\leq C\varepsilon + \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j^{\frac{11}{35}} \left(\frac{7}{8}\right)^j \leq C\varepsilon + C\varepsilon^{77/210} \\ &\leq \varepsilon^{1/3}, \end{aligned}$$

de même

$$|A_\infty - A| \leq \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_j}{\mu_j^2} \leq \varepsilon^{1/3}.$$

Posons  $H_\infty = H_1 \circ \Phi_\infty^1$  avec :

$$H_\infty = \omega_\infty.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_\infty(\rho)\zeta \rangle + f_\infty.$$

On a  $H_\infty = H_M \circ \Phi_\infty^M$ .

Par la formule du composée et pour tout  $x = (\theta, 0, 0)$  et  $h = (\theta, r, \zeta)$  on a :

$$\langle \nabla H_\infty(x), h \rangle = \langle \nabla H_k(\Phi_\infty^k(x)), D\Phi_\infty^k(x)h \rangle.$$

Or on a  $[f_k]_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}'} \leq \varepsilon_k$ , par suite on obtient que  $\nabla H_k(\varphi_\infty^k(x)) = {}^t(0, \omega_k, 0) + O(\varepsilon_k^{1/6})$ . Or on a

pour tout  $j \geq 1$ ,  $\|\Phi_\infty^j - id\|_\alpha \leq C\varepsilon_{j-1}^{1/6}$ . Donc

$$\nabla H_\infty = {}^t(0, \omega_\infty, 0).$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\partial_r f_\infty(\theta, 0, 0) = \partial_\zeta f_\infty(\theta, 0, 0) = 0.$$

Regardons à présent la matrice  $\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 H_\infty(x)$ . On a :

$$\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 H_k(x) = (A_k)_{i,j} + O(\varepsilon_k^{1/6}),$$

ce qui nous permet de dire que  $\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 H_\infty(x) = (A_\infty)_{i,j}$  et de conclure que :

$$\partial_{\zeta \zeta}^2 f_\infty(\theta, 0, 0) = 0$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.1.2.

# 3

## Théorème KAM en dimension infinie

Dans ce chapitre, on étend le résultat du chapitre précédent (Théorème 2.1.2) à la dimension infinie. Toutefois, on suppose que l'opérateur associé à la partie quadratique de la forme normale admet des valeurs propres multiples mais d'ordre fini. La preuve s'appuie sur les travaux récents de Eliasson-Kuksin [14], de Eliasson-Grébert-Kuksin [16] et de Grébert-Paturel [17]

### 3.1 Introduction

Pour  $\mathcal{L}$  une partie de  $\mathbb{Z}$  et  $\alpha \geq 0$ , on considère l'espace  $\ell_2$  à poids défini par :

$$Y_\alpha := \{\zeta = (\zeta_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L}) \mid \|\zeta\|_\alpha < \infty\},$$

avec

$$\|\zeta\|_\alpha^2 = \sum_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s|^2 \langle s \rangle^{2\alpha}, \quad \langle s \rangle = \max(|s|, 1).$$

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne, c'est à dire si  $\zeta_s = {}^t(p_s, q_s)$  alors  $|\zeta_s| = \sqrt{p_s^2 + q_s^2}$

Sur  $Y_\alpha$  on définit l'opérateur linéaire  $J$ ,

$$J : \{\zeta_s\} \mapsto \{\sigma_2 \zeta_s\}, \quad \text{avec } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour  $\beta \geq 0$  on définit l'espace  $\ell_\infty$  à poids

$$L_\beta = \{(\zeta_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L}) \mid \|\zeta\|_\beta < \infty\},$$

avec

$$\|\zeta\|_\beta = \sup_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s| \langle s \rangle^\beta.$$

Pour  $\beta \leq s$  on a  $Y_s \subset L_\beta$ . On définit aussi l'espace des phases :

$$\mathcal{P} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times Y_\alpha,$$

muni de la structure symplectique suivante :

$$dr \wedge d\theta + Jd\zeta \wedge d\zeta.$$

**Matrice infinie.** On considère le projecteur orthogonal  $\Pi$  défini sur l'ensemble des matrices carrées par

$$\Pi : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \mathbb{C}I + \mathbb{C}\sigma_2.$$

On introduit l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices infinie  $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  des matrices symétriques par :

$$A \in \mathcal{M} \text{ alors : } A_s^{s'} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A_s^{s'} = {}^t A_{s'}^s \text{ et } \Pi A_s^{s'} = A_s^{s'}$$

pour tout  $s, s' \in \mathcal{L}$ .

On définit  $\mathcal{M}_\alpha$  le sous ensemble de  $\mathcal{M}$  par

$$A \in \mathcal{M}_\alpha \Leftrightarrow |A|_\alpha := \sup_{s, s' \in \mathcal{L}} \langle s \rangle^\alpha \langle s' \rangle^\alpha \|A_s^{s'}\|_\infty < \infty.$$

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$  et  $B$  un espace de Banach. On définit :

$$\mathbb{T}_\rho^n = \{\theta \in \mathbb{C}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \mid |\operatorname{Im}\theta| < \rho\},$$

et

$$\mathcal{O}_\rho(B) = \{x \in B \mid \|x\|_B < \rho\}.$$

Pour  $\sigma, \mu \in ]0, 1[$ , on définit

$$\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu) = \mathbb{T}_\sigma^n \times \mathcal{O}_{\mu^2}(\mathbb{C}^n) \times \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha^c) = \{(\theta, r, \zeta)\},$$

$$\mathcal{O}^{\alpha, \mathbb{R}}(\sigma, \mu) = \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu) \cap \{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times Y_\alpha\}.$$

Un point de  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$  sera noté par  $x = (\theta, r, \zeta)$ . On définit :

$$\|(r, \theta, \zeta)\|_\alpha = \max(|r|, |\theta|, \|\zeta\|_\alpha).$$

**Classe des fonctions hamiltoniennes.** Soit  $\mathcal{D}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$  (l'ensemble des paramètres). Soit  $f : \mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , réelle et holomorphe par rapport à la première variable, et telle que tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , les applications

$$\mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \ni x \mapsto \nabla_\zeta f(x, \rho) \in Y_\alpha \cap L_\beta$$

et

$$\mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \ni x \mapsto \nabla_\zeta^2 f(x, \rho) \in \mathcal{M}_\beta$$

soient holomorphes. On définit

$$\begin{aligned} |f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |f(x, \rho)|, \\ \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} \|\nabla_\zeta f(x, \rho)\|_\alpha, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |\nabla_\zeta f(x, \rho)|_\beta, \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} \left| \nabla_\zeta^2 f(x, \rho) \right|_\beta. \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  l'ensemble des fonctions  $f$  satisfaisant

$$|f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} \leq C, \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu^2},$$

pour tout  $x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$ .

Pour  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  on note  $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$  la plus petite constante  $C$  qui satisfait les relations précédentes. Pour  $\beta = 0$  on note  $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, 0}$  par  $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ . Si  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  avec  $j = 0, 1$  alors pour  $\gamma > 0$  on définit :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \gamma} = \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \gamma \llbracket \partial_\rho f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

**Équations hamiltoniennes.** A toute fonction hamiltonienne de classe  $C^1$  on associe les équations hamiltoniennes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_\theta f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\theta} = \nabla_r f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\zeta} = J\nabla_\zeta f(r, \theta, \zeta), \end{cases}$$

**Crochet de Poisson.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  en  $x = (r, \theta, \zeta)$ . On définit le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  par :

$$\{f, g\} = \nabla_r f \cdot \nabla_\theta g - \nabla_\theta f \cdot \nabla_r g + \langle \nabla_\zeta f, J\nabla_\zeta g \rangle.$$

**Hamiltonien et forme normale.**

On considère un hamiltonien sous forme normale :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle, \quad (3.1.1)$$

avec  $r \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta \in Y_\alpha$  et  $A(\rho) \in \mathcal{M}$ . On suppose que  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ . On suppose

aussi que  $A(\rho)$  est de la forme :  $A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$ , avec :

$$D(\rho) = \text{diag} \{ \lambda_s(\rho) I, s \in \mathcal{L} \}, \quad (3.1.2)$$

avec

- $\lambda_s > \lambda_{s'}$  pour tout  $s, s' \in \mathcal{L}$ ,
- $\#\{s' \in \mathcal{L} | \lambda_s = \lambda_{s'}\} \leq d < \infty$  pour tout  $s \in \mathbb{Z}$ .

$N$  est une matrice de  $\mathcal{M}$  diagonale par blocs, où chaque bloc a une taille la multiplicité de la valeur propre correspondante dans  $D$ . Les éléments de  $B$  sont de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

On dit que  $N$  est sous forme normale si  $N \in \mathcal{M}$  et vérifie l'hypothèse précédente. On note  $\mathcal{NF}$  l'ensemble des matrices sous forme normale.

On considère à présent le changement de variable complexe suivant :

$$z_j = \begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j + iq_j) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j - iq_j) \end{pmatrix}.$$

Si  $A \in \mathcal{NF}$  l'hamiltonien (4.1.5) s'écrit dans les nouvelles variables :

$$h(\rho) = \omega(\rho).r + \langle \xi, Q(\rho)\eta \rangle$$

avec  $Q$  matrice hermitienne à coefficients complexes. Le vecteur fréquence interne  $\omega$  et les matrices  $D$  et  $N$  vérifient des hypothèses qu'on énoncera dans le paragraphe suivant. Pour la suite fixons un paramètre  $0 < \delta \leq 1$ . On supposera que les valeurs propres de  $D$  vérifient les hypothèses A1, A2 et A3 et que  $N$  vérifie l'hypothèse B.

**Hypothèse A1 : Condition de séparation :** On suppose que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$  on a :

- ★ Il existe une constante  $c_0$  strictement positive tel que pour tout  $s \in \mathcal{L}$  on a

$$\lambda_s(\rho) \geq c_0 \langle s \rangle. \quad (3.1.3)$$

- ★ Il existe une constante  $c_1$  strictement positive tel que pour tout  $s, s' \in \mathcal{L}$  avec  $|s| \neq |s'|$  on a :

$$|\lambda_s(\rho) - \lambda_{s'}(\rho)| \geq c_1 (||s| - |s'||).$$

**Hypothèse A2 : Condition de non résonance :** Supposons qu'il existe  $\delta_0 \leq \delta$  tel que pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie

$$\omega' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad |\omega - \omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0$$

on a pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  et tout  $s, s' \in \mathcal{L}$  avec  $|s| > |s'|$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

avec  $k \neq 0$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho) \pm \lambda_s(\rho)| \geq \delta \langle s \rangle, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) \pm \lambda_s(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s(\rho) + \lambda_{s'}(\rho)| \geq \delta(\langle s \rangle + \langle s' \rangle), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s(\rho) + \lambda_{s'}(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

★

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s(\rho) - \lambda_{s'}(\rho)| \geq \delta(1 + ||s| - |s'| |), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s(\rho) - \lambda_{s'}(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

**Hypothèse A3 : deuxième condition de Melnikov :** On suppose que les fréquences internes et externes vérifient la deuxième condition de Melnikov. C'est à dire pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie

$$\omega' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad |\omega - \omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0$$

pour  $\delta_0 \leq \delta$ , on a :

pour tout  $0 < \kappa < \delta$  et  $N > 1$  il existe un fermé  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  qui vérifie

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq C(\delta^{-1}\kappa)^\tau N^\iota,$$

pour  $\tau, \iota > 0$  et tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ ,  $0 < |k| < N$  et  $s, s' \in \mathcal{L}$  on a :

$$|\omega'(\rho) \cdot k + \lambda_s(\rho) - \lambda_{s'}(\rho)| \geq \kappa(1 + |s| - |s'|).$$

**Hypothèse B :** On suppose que  $N \in \mathcal{NF}$  et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$  on a :

$$|\partial_\rho^j N(\rho)|_\beta \leq \frac{\delta}{8}, \quad j = 0, 1. \quad (3.1.4)$$

**Proposition 3.1.1.** *Supposons que l'hypothèse A2 est satisfaite. Alors pour tout  $0 < \kappa < \delta \leq \frac{1}{2}c_0$  et  $N > 1$  il existe un fermé  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(\kappa, N) \subset \mathcal{D}$  tel que :*

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq C\kappa\delta^{-1}N^{2(n+1)},$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $|\omega|_{C^1(\mathcal{D})}$  et de  $c_0$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$  et  $|k| \leq N$  on a :

$$|k \cdot \omega'| \geq \kappa, \quad \text{sauf pour } k \neq 0, \quad (3.1.5)$$

$$|k \cdot \omega' \pm \lambda_s| \geq \kappa \langle s \rangle, \quad (3.1.6)$$

$$|k \cdot \omega' + \lambda_s + \lambda_{s'}| \geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle). \quad (3.1.7)$$

*Preuve.* Soient  $0 < \kappa < \frac{1}{2}\delta$ ,  $N > 1$  et  $s, s' \in \mathcal{L}$ . Commençons par démontrer le petit diviseur (3.1.5). Il existe deux cas, soit

$$|k \cdot \omega'(\rho)| \geq \delta \geq \kappa, \quad \forall \rho \in \mathcal{D},$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas et posant

$$J(k) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |k \cdot \omega'(\rho)| < \kappa\},$$

on a alors

$$\text{mes}(J(k)) \leq \kappa\delta^{-1}.$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1^1 := \mathcal{D} \setminus \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} J(k)$ , on a :

$$|k \cdot \omega'(\rho)| \geq \kappa,$$

de plus on a :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1^1) \leq \kappa\delta^{-1}N^n.$$

Regardons à présent le deuxième petit diviseur (3.1.6). De même on a deux cas possible, soit

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s| \geq \delta \langle s \rangle \geq \kappa \langle s \rangle, \quad \forall \rho \in \mathcal{D},$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas et que  $|s| \leq 2Cc_0^{-1}N$  avec  $C = |\omega|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} + 1$ . Posons alors

$$J(k, s) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s| < \kappa\langle s \rangle\}.$$

La mesure de Lebesgue de cet ensemble vérifie :

$$\text{mes}(J(k, s)) \leq \kappa\delta^{-1}\langle s \rangle \leq 2Cc_0^{-1}\kappa\delta^{-1}N.$$

On considère l'ensemble  $\mathcal{B}_1 = \{(k, s) \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N, |s| \leq 2Cc_0^{-1}\kappa\delta^{-1}N\}$ . Cet ensemble contient au plus  $4Cc_0^{-1}N^{n+1}$  points. Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1^2 := \mathcal{D} \setminus \bigcup_{(k,s) \in \mathcal{B}_1} J(k, s)$ , on a :

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s| \geq \kappa\langle s \rangle, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

De plus on a

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1^2) \leq \tilde{C}\kappa\delta^{-1}N^{n+2}.$$

Supposons à présent que  $|s| > 4Cc_0^{-1}N$ , on a alors d'après la première condition de non résonance (3.1.3) :

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s| \geq \lambda_s - |\omega' \cdot k| \geq c_0\langle s \rangle - \frac{1}{2}c_0\langle s \rangle \geq \kappa\langle s \rangle,$$

ce qui termine la preuve de (3.1.6).

Regardons maintenant (3.1.7). On a deux cas possible, soit

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s + \lambda_{s'}| \geq \delta(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) \geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle), \quad \forall \rho \in \mathcal{D},$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s + \lambda_{s'}), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas et que  $\max(|s|, |s'|) \leq 2Cc_0^{-1}N\delta^{-1}$  avec  $C = |\omega|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ . Posons alors

$$J(k, s, s') = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s + \lambda_{s'}| < \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle)\}.$$

La mesure de Lebesgue de cet ensemble vérifie :

$$\text{mes}(J(k, s, s')) \leq \kappa\delta^{-1}(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) \leq 2Cc_0^{-1}\kappa\delta^{-1}N.$$

On considère l'ensemble  $\mathcal{B}_2 = \{(k, s, s') \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N, \max(|s|, |s'|) \leq 2Cc_0^{-1}N\}$ . Cet

ensemble contient au plus  $16C_0^{-2}N^{2n+1}\delta^{-2}$  points. Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1^3 := \mathcal{D} \setminus \bigcup_{(k,s,s') \in \mathcal{B}_2} J(k,s,s')$ , on a :

$$|k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s + \lambda_{s'}| \geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

De plus on a

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1^3) \leq \tilde{C}\kappa\delta^{-1}N^{2(n+1)}.$$

Supposons à présent que  $\max(|s|, |s'|) > 2C_0^{-1}N$ , on a alors d'après la première condition de non résonance (3.1.3) :

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega'(\rho) + \lambda_s + \lambda_{s'}| &\geq \lambda_s + \lambda_{s'} - |\omega' \cdot k| \geq c_0(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) - \frac{1}{2}c_0^{-1}(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) \\ &\geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (3.1.7).

Pour terminer la preuve de la proposition, on pose  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1^1 \cap \mathcal{D}_1^2 \cap \mathcal{D}_1^3$ . Sur  $\mathcal{D}_1$  les estimations (3.1.5)-(3.1.7) sont vérifiées et on a :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq \tilde{C}\kappa\delta^{-1}N^{2(n+1)}$$

□

À présent on est en mesure d'énoncer notre théorème KAM :

**Théorème 3.1.2.** *On considère un Hamiltonien sous forme normale qui dépend d'un paramètre  $h$  défini par :*

$$h(\rho) = \omega(\rho).r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle.$$

*On suppose que  $A(\rho) = D(\rho) + N(\rho)$ .  $D(\rho)$  est défini comme dans (3.1.2) et vérifie les hypothèses A1, A2 et A3 alors que  $N \in \mathcal{NF}$  et vérifie l'hypothèse B pour  $\delta$  et  $\delta_0$  fixés et tout  $\rho \in \mathcal{D}$ . Fixons  $\alpha, \beta > 0$  et  $0 < \sigma, \mu \leq 1$ . Il existe alors un  $\varepsilon_0 > 0$  qui dépend de  $d, n, \alpha, \beta, \sigma, \mu, |\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  tel que si pour  $j = 0, 1$  on a  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et*

$$\|f^T\|_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = \varepsilon < \varepsilon_0\delta, \quad \|f\|_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = O(\varepsilon^\tau) \text{ avec } \tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

*alors il existe un Borélien  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  dont la mesure de Lebesgue vérifie  $\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq c(\sigma, \delta)\varepsilon^\gamma$  tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :*

- *il existe un changement de variable symplectique analytique :*

$$\Phi : \mathcal{O}^\alpha\left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$$

- *il existe un vecteur fréquence interne  $\tilde{\omega}(\rho)$ , une matrice  $\tilde{A}$  et une perturbation  $\tilde{f}$  tel que :*

$$(h + f) \circ \Phi = \tilde{\omega}(\rho).r + \frac{1}{2}\langle \zeta, \tilde{A}(\rho)\zeta \rangle + \tilde{f}(\theta, r, \zeta; \rho),$$

avec  $\partial_r \tilde{f} = \partial_\zeta \tilde{f} = \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{f} = 0$  pour  $r = \zeta = 0$  et  $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  est une matrice de  $\mathcal{M}_\beta$  et  $\mathcal{NF}$  infinie réelle symétrique diagonale par blocs. De plus le changement de variable  $\Phi = (\Phi_\theta, \Phi_r, \Phi_\zeta)$  est proche de l'identité et pour tout  $x \in \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  et  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$\|\Phi - Id\|_\alpha \leq C\varepsilon^{4/5}.$$

De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$\left| \tilde{A}(\rho) - A(\rho) \right|_\beta \leq C\varepsilon, \quad |\tilde{\omega}(\rho) - \omega(\rho)| \leq C\varepsilon,$$

avec  $C > 0$  et dépend de  $n, \beta, \sigma, \mu, |\omega|_{C^1(\mathcal{D})}$  et de  $|A|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

## 3.2 Jets de fonctions, crochet de Poisson et flot hamiltonien

On remarque que l'espace  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  n'est pas stable par le crochet de Poisson. Pour cela on introduit un nouvel espace  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu) \subset \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et on prouve que le crochet de Poisson d'une fonction dans  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et d'une fonction dans  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  est dans  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ .

### 3.2.1 L'espace $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$

On définit d'abord les deux espaces  $L_{\beta+}$  et  $\mathcal{M}_{\beta+}$  par :

$$L_{\beta+} = \{ \zeta = (\zeta_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L}) \mid |\zeta|_{\beta+} < \infty \},$$

avec

$$|\zeta|_{\beta+} = \sup_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s| \langle s \rangle^{\beta+1},$$

et

$$\mathcal{M}_{\beta+} = \{ A \in \mathcal{M} \mid |A|_{\beta+} < \infty \},$$

avec

$$|A|_{\beta+} = \sup_{s, s' \in \mathcal{L}} (1 + ||s| - |s'| |) \langle s \rangle^\beta \langle s' \rangle^\beta \|A_s^{s'}\|_\infty.$$

On remarque que  $L_{\beta+} \subset L_\beta$  et  $\mathcal{M}_{\beta+} \subset \mathcal{M}_\beta$ . On définit  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  de la même façon qu'on a défini  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  mais en remplaçant  $L_\beta$  par  $L_{\beta+}$  et  $\mathcal{M}_\beta$  par  $\mathcal{M}_{\beta+}$ . Par suite on obtient que  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu) \subset \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ .

**Lemme 3.2.1.** *On considère un entier  $s$  est un réel strictement positive  $\gamma$ . Alors la série*

$$\sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\gamma} (1 + ||k| - |s| |)} \leq C,$$

Avec  $C$  une constante positive qui dépend de  $\gamma$  qui ne dépend pas de  $s$ .

Preuve.

*Preuve.* • Si  $\gamma > 1/2$  alors on a

$$\sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\gamma} (1 + ||k| - |s||)} \leq \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\gamma}} \leq C.$$

- Si  $0 < \gamma \leq 1/2$  alors il existe  $p > \frac{1}{2\gamma} \geq 1$ . Posons  $q = 1 + \frac{1}{p-1}$ , par suite on a bien  $p > 1$ ,  $q > 1$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . En appliquant l'inégalité de Young on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\gamma} (1 + ||k| - |s||)} &\leq \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\gamma p}} + \frac{1}{q} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{(1 + ||k| - |s||)^q} \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\gamma p}} + \frac{1}{q} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |k|)^q} \leq C. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $\beta > 0$ , alors il existe une constante positive  $C$  qui dépend de  $\beta$  tel que :*

1. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et  $B \in \mathcal{M}_{\beta}$  alors  $AB, BA \in \mathcal{M}_{\beta}$  et on a :*

$$|AB|_{\beta} \leq C|A|_{\beta+}|B|_{\beta}, \quad |BA|_{\beta} \leq C|A|_{\beta+}|B|_{\beta}.$$

2. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et  $B \in \mathcal{M}_{\beta+}$  alors  $AB, BA \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et on a :*

$$|AB|_{\beta+} \leq C|A|_{\beta+}|B|_{\beta+}, \quad |BA|_{\beta+} \leq C|A|_{\beta+}|B|_{\beta+}.$$

3. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et  $\zeta \in L_{\beta}$  alors  $A\zeta \in L_{\beta}$  et on a :*

$$|A\zeta|_{\beta} \leq C|A|_{\beta+}|\zeta|_{\beta}.$$

4. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta}$  et  $\zeta \in L_{\beta+}$  alors  $A\zeta \in L_{\beta}$  et on a :*

$$|A\zeta|_{\beta} \leq C|A|_{\beta}|\zeta|_{\beta+}.$$

5. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et  $\zeta \in Y_{\alpha}$  avec  $\alpha \geq 0$  alors  $A\zeta \in L_{\beta}$  et on a :*

$$|A\zeta|_{\beta} \leq C|A|_{\beta+}\|\zeta\|_{\alpha}.$$

6. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta}$  et  $\zeta \in Y_{\alpha}$  avec  $\alpha \geq 1/2$  alors  $A\zeta \in L_{\beta}$  et on a :*

$$|A\zeta|_{\beta} \leq C|A|_{\beta}\|\zeta\|_{\alpha}.$$

7. *Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et  $\zeta \in Y_{\alpha}$  avec  $\alpha \geq 0$  alors  $A\zeta \in L_{\beta+}$  et on a :*

$$|A\zeta|_{\beta+} \leq C|A|_{\beta+}\|\zeta\|_{\alpha}.$$

8. Soient  $A \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et  $\zeta \in L_{\beta+}$  alors  $A\zeta \in L_{\beta}$  et on a :

$$|A\zeta|_{\beta+} \leq C|A|_{\beta+}\|\zeta\|_{\beta+}.$$

9. Soient  $X \in L_{\beta}$  et  $Y \in L_{\beta}$  alors  $A = X \otimes Y \in \mathcal{M}_{\beta}$  et on a :

$$|A|_{\beta} \leq 2|X|_{\beta}|Y|_{\beta}.$$

10. Soient  $X \in L_{\beta+}$  et  $Y \in L_{\beta+}$  alors  $A = X \otimes Y \in \mathcal{M}_{\beta+}$  et on a :

$$|A|_{\beta+} \leq 2|X|_{\beta+}|Y|_{\beta+}.$$

*Preuve.* 1. Pour  $s, s' \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} \|(AB)_s^{s'}\|_{\infty} &\leq \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_{\infty} \|B_k^{s'}\|_{\infty} \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+}|B|_{\beta}}{\langle s \rangle^{\beta} \langle s' \rangle^{\beta}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1}{\langle k \rangle^{2\beta} (1 + ||k| - |s| |)}. \end{aligned}$$

On retrouve l'inégalité 1. en utilisant le Lemme 3.2.1.

2. Pour  $s, s' \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} \|(AB)_s^{s'}\|_{\infty} &\leq \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_{\infty} \|B_k^{s'}\|_{\infty} \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+}|B|_{\beta+}}{\langle s \rangle^{\beta} \langle s' \rangle^{\beta} (1 + ||s| - |s'| |)} \\ &\quad \times \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{1 + ||s| - |s'| |}{\langle k \rangle^{2\beta} (1 + ||k| - |s| |)(1 + ||k| - |s'| |)} \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+}|B|_{\beta+}}{\langle s \rangle^{\beta} \langle s' \rangle^{\beta} (1 + ||s| - |s'| |)} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2}{\langle k \rangle^{2\beta} (1 + ||k| - |s| |)}. \end{aligned}$$

On retrouve l'inégalité 2 en utilisant le Lemme 3.2.1.

3. Pour  $s \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} |(A\zeta)_s| &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_{\infty} |\zeta_k| \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+}|\zeta|_{\beta}}{\langle s \rangle^{\beta}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2}{\langle k \rangle^{2\beta} (1 + ||k| - |s| |)}. \end{aligned}$$

On retrouve l'inégalité 2. en utilisant le Lemme 3.2.1.

4. Pour  $s \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} |(A\zeta)_s| &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_\infty |\zeta_k| \\ &\leq \frac{|A|_\beta |\zeta|_{\beta+}}{\langle s \rangle^\beta} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2}{\langle k \rangle^{2\beta+1}} \\ &\leq C |A|_\beta |\zeta|_{\beta+}. \end{aligned}$$

5. Pour  $s \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} |(A\zeta)_s| &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_\infty |\zeta_k| \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+}}{\langle s \rangle^\beta} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2 \langle k \rangle^\alpha |\zeta_k|}{\langle k \rangle^{\beta+\alpha} (1 + |k - s|)} \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+} \|\zeta\|_\alpha}{\langle s \rangle^\beta} \left( \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{4}{\langle k \rangle^{2(\beta+\alpha)} (1 + ||k| - |s||)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On retrouve l'inégalité 5. en posant dans le Lemme 3.2.1  $\gamma = \alpha + \beta$ .

6. Pour  $s \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} |(A\zeta)_s| &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_\infty |\zeta_k| \\ &\leq \frac{|A|_\beta}{\langle s \rangle^\beta} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2 \langle k \rangle^\alpha |\zeta_k|}{\langle k \rangle^{\beta+\alpha}} \\ &\leq \frac{|A|_\beta \|\zeta\|_\alpha}{\langle s \rangle^\beta} \left( \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{4}{\langle k \rangle^{2(\beta+\alpha)}} \right)^{1/2} \\ &\leq |A\zeta|_\beta \leq C |A|_\beta \|\zeta\|_\alpha, \end{aligned}$$

puisque  $\alpha \geq 1$ .

7. Pour  $s \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} |(A\zeta)_s| &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_\infty |\zeta_k| \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+}}{\langle s \rangle^{\beta+1}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2 \langle k \rangle^\alpha |\zeta_k|}{\langle k \rangle^{\beta+\alpha} (1 + ||s| - |k||)} \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+} \|\zeta\|_\alpha}{\langle s \rangle^{\beta+1}} \left( \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{4}{\langle k \rangle^{2(\beta+\alpha)} (1 + ||k| - |s||)^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On retrouve l'inégalité 7. en posant dans le Lemme 3.2.1  $\gamma = \alpha + \beta$ .

8. Pour  $s \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} |(A\zeta)_s| &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{L}} \|A_s^k\|_\infty |\zeta_k| \\ &\leq \frac{|A|_{\beta+} |\zeta|_{\beta+}}{\langle s \rangle^\beta} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{2 \langle s \rangle}{\langle k \rangle^{2\beta+1} (1 + ||k| - |s||)} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{\langle s \rangle}{\langle k \rangle^{2\beta+1} (1 + ||k| - |s||)} &\leq \sum_{||k| - |s|| \leq |s|/2} \frac{|s|}{\langle k \rangle^{2\beta+1} (1 + ||k| - |s||)} \\ &+ \sum_{||k| - |s|| > |s|/2} \frac{|s|}{\langle k \rangle^{2\beta+1} (1 + ||k| - |s||)}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de la somme est majoré par la série convergente  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\langle k \rangle^{2\beta+1}}$ . Le premier terme est majoré par la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\langle k \rangle^{2\beta} (1 + ||k| - |s||)}$ . On conclut grâce au Lemme 3.2.1.

9. Pour  $s, s' \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned} \|(AB)_s^{s'}\|_\infty &\leq 2 |X_s| |Y_{s'}| \\ &\leq \frac{2}{\langle s \rangle^\beta \langle s' \rangle^\beta} |X|_\beta |Y|_\beta. \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Jets de fonctions

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  on définit son jet  $f^T$  comme son développement de Taylor au point  $r = 0$  et  $\zeta = 0$  :

$$\begin{aligned} f^T(\theta, r, \zeta; \rho) &= f(\theta, 0, 0, \rho) + \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho) r + \langle \nabla_\zeta f(\theta, 0, 0, \rho), \zeta \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle \nabla_\zeta^2 f(\theta, 0, 0, \rho) \zeta, \zeta \rangle \\ &= f_\theta(\theta) + f_r(\theta) r + \langle f_\zeta(\theta), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta, \zeta \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi à partir de la définition de la norme  $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$  on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |f_\theta(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, & |f_r(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ \|f_\zeta(\theta; \cdot)\|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, & |f_{\zeta}(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ |f_{\zeta\zeta}(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

pour tout  $\theta \in \mathbb{T}_\sigma^n$ .

On remarque que pour tout  $\theta$  on a :

$$f_\theta(\theta) = f_\theta^T(\theta), \quad f_r(\theta) = f_r^T(\theta), \quad f_\zeta(\theta) = f_\zeta^T(\theta), \quad \text{et } f_{\zeta\zeta}(\theta) = f_{\zeta\zeta}^T(\theta).$$

Par suite on obtient aussi :

$$\begin{aligned} |f_\theta(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, & |f_r(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-2} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ \|f_\zeta(\theta; \cdot)\|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-1} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, & |f_\zeta(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-1} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ |f_{\zeta\zeta}(\theta; \cdot)|_{\mathcal{D}} &\leq \mu^{-2} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

pour tout  $\theta \in \mathbb{T}_\sigma^n$ .

**Lemme 3.2.3.** *Pour tout  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et  $0 < \mu' < \mu \leq 1$  on a :*

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq 3 \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \quad (3.2.3)$$

$$\llbracket f - f^T \rrbracket_{\sigma, \mu', \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \quad (3.2.4)$$

*Preuve.* Soit  $(x, \rho) \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu') \times \mathcal{D}$ .

- On commence par montrer la deuxième inégalité. Cela revient à démontrer que :

$$\begin{aligned} \cdot & |(f - f^T)(x, \rho)| \leq 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \cdot & \|\nabla_\zeta(f - f^T)(x, \rho)\|_\alpha \leq 2 \frac{\mu'^2}{\mu^3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \cdot & |\nabla_\zeta(f - f^T)(x, \rho)|_\beta \leq 2 \frac{\mu'^2}{\mu^3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ \cdot & |\nabla_\zeta^2(f - f^T)(x, \rho)|_\beta \leq 2 \frac{\mu'}{\mu^3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Les quatre inégalités se montrent exactement de la même façon. Montrons par exemple que

$$|\nabla_\zeta(f - f^T)(x, \rho)|_\beta \leq 2 \frac{\mu'^2}{\mu^3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha.$$

Notons  $m = \frac{\mu'}{\mu}$ . Pour un  $|z| \leq 1$  on a  $(\theta, (z/m)^2 r, (z/m)\zeta) \in \mathcal{O}(\sigma, \mu)$ . On considère la fonction

$$\begin{aligned} g & : \{|z| < 1\} \longrightarrow Y^c \\ z & \longmapsto \nabla_\zeta f(\theta, (z/m)^2 r, (z/m)\zeta). \end{aligned}$$

$g$  est une fonction holomorphe bornée par  $\mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ . Et on a :

$$g(z) = \sum_{j \geq 0} f_j z^j,$$

avec  $|f_j|_\beta \leq \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ . On a  $\nabla_\zeta(f - f^T)(x, \rho) = \sum_{j \geq 2} f_j m^j$ . Pour  $\mu' \leq \frac{1}{2}\mu$  on obtient que  $m \leq 1/2$ . Par suite on a :

$$|\nabla_\zeta(f - f^T)|_\beta \leq \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \sum_{j \geq 2} m^j \leq \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2$$

- À présent on montre la première inégalité en utilisant la deuxième inégalité. On remarque que  $f^T = f - (f - f^T)$ . Puisque  $(f - f^T)$ ,  $\nabla_\zeta(f - f^T)$ ,  $\nabla_\zeta^2(f - f^T)$  sont analytiques sur

$\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \frac{1}{2}\mu)$ , il en est de même pour  $f^T$ ,  $\nabla_\zeta f^T$ ,  $\nabla_\zeta^2 f^T$ . Par suite on a :

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \frac{1}{2}\mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq \frac{1}{4} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \llbracket f - f^T \rrbracket_{\sigma, \frac{1}{2}\mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq \frac{1}{2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

Or  $f^T$  est quadratique en  $\zeta$ , donc  $f^T$ ,  $\nabla_\zeta f^T$  et  $\nabla_\zeta^2 f^T$  sont analytiques sur  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$ . Puisque  $\llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq 4 \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \frac{1}{2}\mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$  on obtient alors

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq 2 \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

- On retourne à la preuve de la deuxième inégalité dans le cas où  $\frac{\mu}{2} < \mu' < \mu$ . On a :

$$\llbracket f - f^T \rrbracket_{\sigma, \mu', \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq 3 \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$$

□

### 3.2.3 Jets de fonctions et crochet de poisson.

Rappelons que le crochet de poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $C^1$  en  $x = (r, \theta, \zeta)$  est :

$$\{f, g\} = \nabla_r f \cdot \nabla_\theta g - \nabla_\theta f \cdot \nabla_r g + \langle \nabla_\zeta f, J \nabla_\zeta g \rangle.$$

**Lemme 3.2.4.** Soient  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et  $g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  deux jets de fonctions et  $0 < \sigma' < \sigma$ , alors  $\{f, g\} \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et on a :

$$\llbracket \{f, g\} \rrbracket_{\sigma', \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \quad (3.2.5)$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $\beta$ .

*Preuve.* Pour démontrer ce lemme on doit montrer que

- $|\{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ ,
- $\|\nabla_\zeta \{f, g\}\|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ ,
- $|\nabla_\zeta \{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ ,
- $|\nabla_\zeta^2 \{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq C(\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-4} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ .

- Commençons par démontrer le quatrième point. On a :

$$\nabla_\zeta^2 \{f, g\} = f_r(\theta) \nabla_\theta g_{\zeta\zeta}(\theta) - g_r(\theta) \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta) J g_{\zeta\zeta}(\theta)$$

En utilisant les inégalités (3.2.1), l'inégalité 1 du Lemme 3.2.2 et l'inégalité de Cauchy on obtient :

$$|\nabla_\zeta^2 \{f, g\}|_{\mathcal{D}} \leq (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-4} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

- Pour le deuxième et le troisième point on a :

$$\begin{aligned} \nabla_{\zeta} \{f, g\} &= f_r(\theta) \nabla_{\theta} g_{\zeta}(\theta) + f_r(\theta) \nabla_{\theta} g_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta - g_r(\theta) \nabla_{\theta} f_{\zeta}(\theta) \\ &\quad - g_r(\theta) \nabla_{\theta} f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta + g_{\zeta\zeta}(\theta) J f_{\zeta}(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta) J g_{\zeta}(\theta) + g_{\zeta\zeta}(\theta) J f_{\zeta\zeta}(\theta) \zeta. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (3.2.1), les inégalités 1, 3 et 4 du Lemme 3.2.2 et l'inégalité de Cauchy alors il existe une constante strictement positive qui dépend de  $\beta$  tel que :

$$\begin{aligned} |\nabla_{\zeta} \{f, g\}|_{\mathcal{D}} &\leq C \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\quad + C \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu \\ &\quad + C \mu^{-2} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\quad + C \mu^{-2} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu \\ &\quad + C \mu^{-2} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \\ &\quad + C \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-2} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \mu \\ &\leq C (\sigma - \sigma')^{-1} \mu^{-3} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}} \llbracket g \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

De même on montre les deux autres points. □

### 3.2.4 Flot hamiltonien dans le domaine $\mathcal{O}^{\alpha}(\sigma, \mu)$ .

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur le domaine  $\mathcal{O}^{\alpha}(\sigma, \mu) \times \mathcal{D}$ . On note  $\Phi_f^t \equiv \Phi^t$  le flot hamiltonien de  $f$  au temps  $t$ . Supposons que  $f$  est un jet de fonction :

$$f = f_{\theta}(\theta; \rho) + f_r(\theta; \rho)r + \langle f_{\zeta}(\theta; \rho), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta; \rho) \zeta, \zeta \rangle.$$

Le système hamiltonien associé est :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_{\theta} f(r, \theta, \zeta), \\ \dot{\theta} = f_r(\theta), \\ \dot{\zeta} = J(f_{\zeta}(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta). \end{cases} \quad (3.2.6)$$

On note  $V_f = (V_f^r, V_f^{\theta}, V_f^{\zeta}) \equiv (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\zeta})$ . Le champ de vecteur hamiltonien de  $f$ .  $V_f$  est analytique dans le domaine  $\mathcal{O}(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$  avec  $0 < 2\eta < \sigma \leq 1$  et  $0 < 2\nu < \mu \leq 1$ .

Supposons que

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq \frac{1}{2} \eta \nu^2, \quad (3.2.7)$$

alors en utilisant l'inégalité de Cauchy on a pour tout  $x \in \mathcal{O}(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$  :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\nabla_{\theta} f(r, \theta, \zeta) \text{ et donc } |\dot{r}|_{\mathbb{C}^n} \leq (2\eta)^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha} \leq \nu^2, \\ \dot{\theta} = f_r(\theta) \text{ et donc } |\dot{\theta}|_{\mathbb{C}^n} \leq (4\nu)^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha} \leq \eta, \\ \dot{\zeta} = J(f_{\zeta}(\theta) + f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta) \text{ et donc } \|\dot{\zeta}\|_{\alpha} \leq (\mu^{-1} + \mu^{-2}\mu) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha} \leq \nu. \end{cases}$$

Or  $r(t) = \int_0^t \dot{r}(\tau) d\tau + r(0)$ , et donc pour  $0 \leq t \leq 1$  on a  $|r(t)|_{\mathbb{C}^n} \leq (\mu - \nu)^2$ . De même on montre  $|\theta(t)|_{\mathbb{C}^n} \leq \sigma - \eta$  et  $\|\zeta(t)\|_{\alpha} \leq \mu - \nu$  pour  $0 \leq t \leq 1$ . Par suite :

$$\Phi_f^t : \mathcal{O}^{\alpha}(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu) \rightarrow \mathcal{O}^{\alpha}(\sigma - \eta, \mu - \nu),$$

est bien définie pour  $0 \leq t \leq 1$  et analytique.

Pour un  $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$  et  $0 \leq t \leq 1$  on a  $\Phi_f^t = (r(t), \theta(t), \zeta(t))$ . Essayons de donner la forme et quelques précisions sur le flot hamiltonien  $\Phi_f^t$ .

- ♣ On a  $V_f^{\theta} = \dot{\theta} = f_r(\theta)$  est indépendant de  $r$  et de  $\zeta$ . Alors  $\theta(t) = K(\theta; t)$  avec  $K$  analytique en  $\theta$ .
- ♣  $V_f^{\zeta} = \dot{\zeta} = Jf_{\zeta}(\theta(t)) + Jf_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta$ . Grâce à l'inégalité de Cauchy  $Jf_{\zeta\zeta}(\theta(t))$  est un opérateur linéaire borné de  $Y_{\alpha}^c$ . Puisque  $\theta(t) = K(\theta; t)$  avec  $K$  analytique par rapport à  $\theta$ , alors  $V_f^{\zeta}$  est aussi analytique par rapport à  $\theta$ . Par suite  $\zeta(t) = T(\theta; t) + U(\theta; t)\zeta$  avec  $U$  opérateur linéaire borné de  $Y^c$  dans  $L_{\beta}^c$ .  $T$  et  $U$  sont analytiques par rapport à  $\theta$ .
- ♣  $V_f^r = \dot{r} = -\nabla_{\theta} f(r, \theta, \zeta)$  quadratique en  $\zeta$  et linéaire en  $r$ . Par suite  $r(t) = L(\theta, \zeta; t) + S(\theta; t)r$  avec  $L$  est quadratique en  $\zeta$  et analytique par rapport à  $\theta$ .  $S$  est une matrice carrée de taille  $n$  analytique en  $\theta$ .

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $0 < 2\eta < \sigma \leq 1$ ,  $0 < 2\nu < \mu \leq 1$  et  $f = f^T \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  qui vérifie l'inégalité (3.2.7). Alors pour  $0 \leq t < 1$ , le flot hamiltonien  $\Phi_f^t$  (3.2.6) est un symplecto-morphisme analytique de  $\mathcal{O}^{\alpha}(\delta - 2\eta, \mu - 2\nu)$  dans  $\mathcal{O}^{\alpha}(\delta - \eta, \mu - \nu)$ . Il est de la forme :*

$$\Phi_f^t : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \zeta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L(\theta, \zeta; t) + S(\theta; t)r \\ K(\theta; t) \\ T(\theta; t) + U(\theta; t)\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

avec  $L(\theta, \zeta; t)$  quadratique en  $\zeta$ ,  $U(\theta; t)$  et  $S(\theta, \zeta; t)$  sont deux opérateurs linéaire. Sans oublier le fait que tous les composantes de  $\Phi_f^t$  sont bornées et analytique en  $\theta$ .

**Proposition 3.2.6.** *Soit  $0 < 2\eta < \sigma \leq 1$ ,  $0 < 2\nu < \mu \leq 1$  et  $f = f^T \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  tel que  $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \leq \frac{1}{2}\eta\nu^2$ . Alors pour  $0 \leq t < 1$  :*

1.  $T, K$  et les opérateurs  $U$  et  $S$  sont analytiques en  $\theta \in \mathbb{T}_{\sigma-2\eta}^n$ . De plus  $U$  analytique en  $(\theta, \zeta) \in \mathbb{T}_{\sigma-2\eta}^n \times Y_{\alpha}^c$ . Et on a :

$$|S(\theta; t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)}, \|U(\theta; t)\|_{\mathcal{L}(Y_{\alpha}, Y_{\alpha})}, \|{}^t U(\theta; t)\|_{\mathcal{L}(Y_{\alpha}, Y_{\alpha})}, |U(\theta; t)|_{\beta+} \leq 2. \quad (3.2.9)$$

Les composantes  $L^j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , du vecteur  $L$  vérifient pour tout  $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$  :

$$\begin{aligned} \|\nabla_\zeta L^j(x; t)\|_\alpha &\leq 8\eta^{-1}\mu^{-1}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ |\nabla_\zeta L^j(x; t)|_{\beta+} &\leq 8\eta^{-1}\mu^{-1}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}, \\ |\nabla_\zeta^2 L^j(x; t)|_{\beta+} &\leq 4\eta^{-1}\mu^{-2}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

2. le flot hamiltonien  $\Phi_f^t$  (3.2.6) s'étend analytiquement de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{T}_{\sigma-2\eta}^n \times Y_\alpha^c$  à  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{T}_\sigma^n \times Y_\alpha^c$ .

De plus

$$\begin{aligned} |r(t) - r^0|_{\mathbb{C}^n} &\leq C_0\eta^{-1}(1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2 + \mu^{-2}|r^0|)[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ |\theta(t) - \theta^0|_{\mathbb{C}^n} &\leq \mu^{-2}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ \|\zeta(t) - \zeta^0\|_\alpha &\leq (1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha)[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ \|\zeta(t) - \zeta^0\|_{\beta+} &\leq C_1(1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha)[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}, \end{aligned}$$

avec  $C_0$  une constante absolue et  $C_1$  une constante qui dépend de  $\beta$ .

**Remarque 3.2.7.**  $\partial_\rho x(t)$  satisfait les mêmes estimations que  $x(t)$ .

*Preuve.* • Commençons par prouver l'estimation sur  $\theta$ . On a

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \nabla_r f(\theta(t)), \\ \theta(0) = \theta^0 \in \mathbb{T}_{\sigma-2s}^n \end{cases}$$

Soit  $\bar{t} = \sup \{t \mid \theta(u) \text{ définie pour } 0 \leq u \leq t; |\theta(u) - \theta^0| \leq \mu^{-2}[[f]]_{\sigma, \mu}\}$  On a pour tout  $t \leq \bar{t}$

$$\theta(t) = \theta^0 + \int_0^t \nabla_r f(\theta(u)) du,$$

or  $\|\nabla_r f\| \leq \mu^{-2}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ , et par suite on obtient l'estimation voulue.

• Démontrons les estimations sur  $\zeta$ . On a :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = a(t) + B(t)\zeta(t), \\ \zeta(0) = \zeta^0 \in \mathcal{O}_{\mu-2\nu}(Y_\alpha^c), \end{cases}$$

avec  $a(t) := Jf_\zeta(\theta(t))$  et  $B(t) := Jf_{\zeta\zeta}(\theta(t))$ . Par l'inégalité de Cauchy et l'hypothèse faite sur  $[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}$ ; on a les estimations suivantes :

$$\|a(t)\|_\alpha \leq \mu^{-1}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \leq \nu \quad \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq \mu^{-2}[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \leq \frac{1}{2}\nu \leq \frac{1}{2}$$

On a par définition :

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \zeta^0 + \int_0^t a(t') + B(t')\zeta(t')dt' \\
&= \int_0^t a(t')dt' + \int_0^t \int_0^{t'} a(t'')B(t')d''dt' + \zeta^0 + \zeta^0 \int_0^t B(t')dt \\
&+ \int_0^t \int_0^{t'} B(t')B(t'')\zeta(t'')d''dt' \\
&= \dots \\
&= a^\infty(t) + (B^\infty(t) + I)\zeta^0,
\end{aligned}$$

avec

$$a^\infty(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) a(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1,$$

et

$$B^\infty(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) dt_k \dots dt_2 dt_1.$$

On a :  $\| \prod_{j=1}^k B(t_j) \|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ , par suite l'opérateur  $B^\infty(t)$  est bien définie et il est majoré pour tout  $t \in \llbracket 0 \ 1 \rrbracket$  par la série convergente  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ . Par suite on a :

$$\|B^\infty(t)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha.$$

Pour démontrer  $\|U(\theta; t)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)}, \|{}^t U(\theta; t)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq 2$ , c'est à dire le deuxième et troisième point de (3.2.9), il suffit de remarquer que  $U = I + B^\infty$

À présent montrons que  $a^\infty(t)$  est bien défini sur  $[0 \ 1]$ . On a

$$\begin{aligned}
\| \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) a(t_k) \|_\alpha &\leq \| \prod_{j=1}^{k-1} B(t_j) \|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \| a(t_k) \|_\alpha \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha}{\mu^2} \frac{\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha}{\mu}.
\end{aligned}$$

Par suite on obtient que  $a^\infty(t)$  est bien défini sur  $[0 \ 1]$ , et borné par la série convergente  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \mu^{-3} \left(\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu}^\alpha\right)^2$ . Ainsi on obtient la majoration suivante :

$$\|a^\infty(t)\|_\alpha \leq \frac{(\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha)^2}{\mu^3} \leq \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha.$$

En utilisant les deux estimations précédentes faites sur  $a^\infty(t)$ ,  $B^\infty(t)$  et notamment l'hypothèse (3.2.7), on obtient que :

$$\|\zeta(t) - \zeta^0\|_\alpha \leq (1 + \mu^{-2} \|\zeta^0\|_\alpha) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha. \quad (3.2.11)$$

D'autre part, étant donné que  $B(t) = Jf_{\zeta\zeta}(\theta(t))$ , alors  $B \in \mathcal{M}_{\beta}^+$ . De plus

$$|B(t)|_{\beta_+} \leq \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}.$$

Puisque  $\mathcal{M}_{\beta_+}$  est stable par multiplication, alors il existe une constante strictement positive qui dépend de  $\beta$  tel que

$$|B^\infty(t)|_{\beta_+} \leq C\mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \leq 1.$$

On obtient aussi que  $|U(\theta; t)|_{\beta_+} \leq 2$ .

D'autre part en utilisant l'inégalité 8 du Lemme 3.2.2, on obtient :

$$|a^\infty(t)|_{\beta_+} \leq C \frac{(\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+})^2}{\mu^3} \leq \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}.$$

En utilisant les deux estimations précédentes faites sur  $|a^\infty(t)|_{\beta_+}$  et  $|B^\infty(t)|_{\beta_+}$ , l'inégalité 8 du Lemme 3.2.2 et l'hypothèse (3.2.7), on obtient que :

$$\|\zeta(t) - \zeta^0\|_{\beta_+} \leq C(1 + \mu^{-2} \|\zeta^0\|_\alpha) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}.$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $\beta$ .

- Démontrons à présent l'estimation sur  $r$ . On a :

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -\nabla_\theta f(r(t), \theta(t), \zeta(t)) \\ &= -\nabla_\theta f(\theta(t)) - \nabla_\theta f_r(\theta(t))r(t) - \langle \nabla_\theta f_\zeta(\theta(t)), \zeta(t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta(t), \zeta(t) \rangle \\ &= -\alpha(t) - \Lambda(t)r(t). \end{aligned}$$

avec

$$\alpha(t) = \nabla_\theta f(\theta(t)) + \langle \nabla_\theta f_\zeta(\theta(t)), \zeta(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta(t), \zeta(t) \rangle,$$

et

$$\Lambda(t) = \nabla_\theta f_r(\theta(t)).$$

D'après l'inégalité de Cauchy on a :

$$|\Lambda(t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)} \leq \eta^{-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \leq \frac{1}{2}.$$

De même on a :

$$\begin{aligned} |\alpha(t)|_{\mathbb{C}^n} &\leq \eta^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha + \eta^{-1} \mu^{-1} \|\zeta(t)\|_\alpha \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha + \frac{1}{2} \eta^{-1} \mu^{-2} \|\zeta(t)\|_\alpha^2 \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \\ &\leq \eta^{-1} (1 + \mu^{-1} \|\zeta(t)\|_\alpha + \mu^{-2} \|\zeta(t)\|_\alpha^2) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha. \end{aligned}$$

Or d'après (3.2.11) et (3.2.7) on remarque que  $\|\zeta(t)\|_\alpha \leq 2\|\zeta^0\|_\alpha$ . Par suite on obtient que :

$$|\alpha(t)|_{\mathbb{C}^n} \leq 2\eta^{-1}(1 + \mu^{-1}\|\zeta^0\|_\alpha + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha.$$

Le même raisonnement fait pour  $\zeta$  nous donne que :

$$r(t) = -\alpha^\infty(t) + (I - \Lambda^\infty(t))r^0,$$

avec

$$\alpha^\infty(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda(t_j) \alpha(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1,$$

et

$$\Lambda^\infty(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) dt_k \dots dt_2 dt_1.$$

On a :

$$\left| \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) \right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \eta^{-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha,$$

Par suite on obtient que  $\Lambda^\infty(t)$  est bien défini sur  $[0, 1]$  et majoré par la série convergente  $\sum_{k \geq 1} \frac{(\frac{1}{2})^{k-1}}{k!} \mu^{-2} s^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ . Donc

$$|\Lambda^\infty(t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)} \leq \eta^{-1} \mu^{-2} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Pour Montrer le premier point de l'inégalité (3.2.9), il suffit de remarquer que  $S(\theta; t) = I - \Lambda^\infty(t)$ . Ainsi on obtient que  $|S(\theta; t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)} \leq 2$ .

À présent montrons que  $\alpha^\infty(t)$  est bien défini sur  $[0, 1]$ . On a

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) \alpha(t_k) \right|_{\mathbb{C}^n} &\leq \left| \prod_{j=1}^k \Lambda(t_j) \right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)} |\alpha(t_k)|_{\mathbb{C}^n} \\ &\leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \eta^{-1} \left(1 + \mu^{-1}\|\zeta^0\|_\alpha + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2\right) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \\ &\leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \eta^{-1} \left(1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2\right) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que  $\alpha^\infty(t)$  est bien défini sur  $[0, 1]$  et majoré par la série convergente  $\sum_{k \geq 1} \frac{4}{2^k k!} \eta^{-1} \left(1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2\right) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ . Ce qui nous permet de dire que :

$$|\alpha^\infty(t)| \leq C \eta^{-1} \left(1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2\right) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu}$$

En utilisant les deux estimations précédentes faites sur  $\alpha^\infty(t)$  et  $\Lambda^\infty(t)$ , on obtient que :

$$|r(t) - r^0|_{\mathbb{C}^n} \leq C \eta^{-1} \left(1 + \mu^{-2}\|\zeta^0\|_\alpha^2 + \mu^{-2}|r^0|_{\mathbb{C}^n}\right) \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha,$$

avec  $C$  une constante absolue.

Il reste à démontrer les inégalités de 3.2.10. On remarque que  $\Lambda^\infty(t)$  ne dépend pas de  $\zeta^0$ , par suite  $L(\theta, \zeta; t) = -\alpha^\infty(t)$ .

On sait que

$$\nabla_{\zeta(t)}\alpha(t) = \nabla_\theta f_\zeta(\theta(t)) + \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta(t))\zeta(t),$$

or  $\zeta(t) = T(\theta; t) + U(\theta, t)\zeta^0$ . Par suite  $\nabla_{\zeta^0} = {}^t U(\theta; t)\nabla_{\zeta(t)}$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy, les estimations (3.2.1) et le fait que  $\|\zeta(t)\|_\alpha \leq 2\|\zeta^0\|_\alpha$ , on obtient :

$$\|\nabla_{\zeta^0}\alpha(t)\|_\alpha \leq 4\eta^{-1}\mu^{-1}(1 + \mu^{-1}\|\zeta^0\|_\alpha)[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha,$$

ce qui nous permet d'obtenir la première inégalité de 3.2.10. En utilisant l'inégalité 8 du Lemme 3.2.2 en plus, on obtient :

$$|\nabla_{\zeta^0}\alpha(t)|_{\beta+} \leq 4\eta^{-1}\mu^{-1}(1 + \mu^{-1}\|\zeta^0\|_\alpha)[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+},$$

ce qui nous permet d'obtenir la deuxième inégalité de 3.2.10. De même on a  $\nabla_{\zeta(t)}^2\alpha(t) = \nabla_\theta f_{\zeta\zeta}(\theta(t))$  et  $\nabla_{\zeta^0}^2 = {}^t U(\theta; t)\nabla_{\zeta(t)}^2 U(\theta, t)$ . Par suite on obtient :

$$|\nabla_{\zeta^0}^2\alpha(t)|_{\beta+} \leq 4\eta^{-1}\mu^{-2}[f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+},$$

ce qui nous permet d'obtenir la troisième inégalité de 3.2.10 et termine la preuve de la proposition.  $\square$

**Proposition 3.2.8.** *Pour  $j = 0, 1$  on considère  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  un jet de fonction tel que  $[\partial_\rho^j f]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+} \leq \frac{1}{2}\eta\nu^2$  avec  $0 < 2\eta < \sigma < 1$  et  $0 < 2\nu < \mu < 1$ . Soit  $\partial_\rho^j h \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ , pour  $0 \leq t \leq 1$  on pose  $h_t(x, \rho) := h(\Phi_f^t(x, \rho); \rho)$ . On a alors  $h_t \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$  et il existe une constante strictement positive qui dépend de  $\beta$  tel que :*

$$[\partial_\rho^j h_t]_{\sigma-2\eta, \mu-2\nu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \leq M \frac{\mu}{\nu} [\partial_\rho^j h]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}. \quad (3.2.12)$$

*Preuve.* On a  $\Phi_f^t$  est analytique sur  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$  et donc  $h_t$  est analytique sur  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma - 2\eta, \mu - 2\nu)$ .

♣ On commence par le fait que

$$|\partial_\rho^j h_t(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} = \sup_{\rho \in \mathcal{D}} \left| \partial_\rho^j h(\Phi_f^t(x, \rho), \rho) \right| \leq [h]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

Et donc il reste à voir  $\|\nabla_{\zeta^0} h_t\|_\alpha$ ,  $|\nabla_{\zeta^0} h_t|_\beta$ ,  $|\nabla_{\zeta^0 \zeta^0}^2 h_t|_\beta$  ainsi que leurs dérivées en  $\rho$ .

♣ Pour  $\nabla_{\zeta^0} h_t$ , étant donné que  $\theta$  ne dépend pas de  $\zeta_0$  d'après 3.2.8, on a

$$\nabla_{\zeta^0} h_t = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h(x(t))}{\partial r_k(t)} \frac{\partial r_k(t)}{\partial \zeta^0} + \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\partial h(x(t))}{\partial \zeta_s(t)} \frac{\partial \zeta_s(t)}{\partial \zeta^0} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Par Cauchy on a  $\left| \frac{\partial h(x(t))}{\partial r_k(t)} \right|_{\mathbb{C}^n} \leq \nu^{-2} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha$ . Or, par la première estimation de 3.2.10, on a

$$\|\partial_{\zeta^0} r_k(t)\|_\alpha = \|\partial_{\zeta^0} L(\theta, \zeta; t)\|_\alpha \leq 8\eta^{-1} \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha.$$

En combinant ces estimations avec l'hypothèse (3.2.7) on obtient

$$\|\Sigma_1\|_\alpha \leq 8\eta^{-1} \mu^{-1} \nu^{-2} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha \leq 8\eta^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

En utilisant cette fois ci la deuxième estimation de 3.2.10, on a

$$|\partial_{\zeta^0} r_k(t)|_\beta = |\partial_{\zeta^0} L(\theta, \zeta; t)|_\beta \leq 8\eta^{-1} \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

Combinant cette estimation avec l'estimation faite sur  $\frac{\partial h(x(t))}{\partial r_k(t)}$  et l'hypothèse (3.2.7) on obtient que

$$|\Sigma_1|_\beta \leq 4\mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

Pour  $\Sigma_2$  on a

$$\sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\partial h(x(t))}{\partial \zeta_s(t)} \frac{\partial \zeta_s(t)}{\partial \zeta^0} = {}^t U(t) \nabla_\zeta h,$$

avec  $U$  définie dans 3.2.8. D'après la troisième estimation dans 3.2.9 on a  $\|{}^t U(t)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq 2$ , par suite

$$\|\Sigma_2\|_\alpha \leq 2 \|\nabla_\zeta h\|_\alpha \leq 2\mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha.$$

En utilisant l'inégalité 3 du Lemme 3.2.2 et l'inégalité 4 de 3.2.9, on a

$$|\Sigma_2|_\beta \leq C |{}^t U(t)|_{\beta+} \|\nabla_\zeta h\|_\beta \leq C |U(t)|_{\beta+} \|\nabla_\zeta h\|_\beta \leq C \mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta},$$

avec  $C$  une constante qui ne dépend que de  $\beta$ . Par suite on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\zeta^0} h_t\|_\alpha &\leq C \mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ |\nabla_{\zeta^0} h_t|_\beta &\leq C \mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Pour obtenir les estimations sur  $\|\partial_\rho \nabla_{\zeta^0} h_t\|_\alpha$  et  $|\partial_\rho \nabla_{\zeta^0} h_t|_\beta$ , on a

$$\begin{aligned} \partial_\rho \nabla_{\zeta^0} h_t &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial_\rho \partial h(x(t))}{\partial r_k(t)} \frac{\partial r_k(t)}{\partial \zeta^0} + \frac{\partial h(x(t))}{\partial r_k(t)} \frac{\partial_\rho \partial r_k(t)}{\partial \zeta^0} \\ &\quad + \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\partial_\rho \partial h(x(t))}{\partial \zeta_s(t)} \frac{\partial \zeta_s(t)}{\partial \zeta^0} + \frac{\partial h(x(t))}{\partial \zeta_s(t)} \frac{\partial_\rho \partial \zeta_s(t)}{\partial \zeta^0}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la norme  $\llbracket \partial_\rho^j h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$  et le fait que  $\partial_\rho x(t)$  satisfait les mêmes

estimations que  $x(t)$ , on obtient que

$$\begin{aligned}\|\partial_\rho \nabla_{\zeta^0} h_t\|_\alpha &\leq C\mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^\alpha, \\ |\partial_\rho \nabla_{\zeta^0} h_t|_\beta &\leq C\mu^{-1} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.\end{aligned}$$

♣ À présent on regarde les estimations sur  $\nabla_{\zeta^0}^2 h_t$  et  $\partial_\rho \nabla_{\zeta^0}^2 h_t$ . D'après 3.2.8 on a  $\theta$  ne dépend pas de  $\theta^0$  et  $\zeta(t)$  est linéaire en  $\zeta^0$ , donc pour  $s, s' \in \mathcal{L}$  on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h_t(x(t))}{\partial \zeta_s^0 \partial \zeta_{s'}^0} &= \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial \zeta(t) \partial \zeta(t)} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial \zeta_s^0} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial \zeta_{s'}^0} + \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial r(t)^2} \frac{\partial r(t)}{\partial \zeta_s^0} \frac{\partial r(t)}{\partial \zeta_{s'}^0} \\ &\quad + \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial r(t) \partial \zeta(t)} \frac{\partial r(t)}{\partial \zeta_s^0} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial \zeta_{s'}^0} + \frac{\partial h(x(t))}{\partial r(t)} \frac{\partial r(t)^2}{\partial \zeta_s^0 \partial \zeta_{s'}^0} \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4.\end{aligned}$$

- Pour  $\Sigma_1$ , d'après les inégalités 1 et 10 du Lemme 3.2.2 on a :

$$\begin{aligned}|\Sigma_1|_\beta &\leq C \left| \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial \zeta(t) \partial \zeta(t)} \right|_\beta \left| \nabla_{\zeta_s^0} \zeta \otimes \nabla_{\zeta_{s'}^0} \zeta \right|_{\beta+}, \\ &\leq C \left| \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial \zeta(t) \partial \zeta(t)} \right|_\beta \left| \nabla_{\zeta_s^0} \zeta \right|_{\beta+} \left| \nabla_{\zeta_{s'}^0} \zeta \right|_{\beta+},\end{aligned}$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui ne dépend que de  $\beta$ . Or d'après l'inégalité de Cauchy on a  $\left| \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial \zeta(t) \partial \zeta(t)} \right|_\beta \leq \mu^{-2} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ .

Et d'après l'inégalité 4 de 3.2.9 on a  $\left| \nabla_{\zeta_s^0} \zeta \right|_{\beta+} = |U(\theta, t)|_{\beta+} \leq 2$ . Par suite

$$|\Sigma_1|_\beta \leq C\mu^{-2} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

- Pour  $\Sigma_2$ , d'après l'inégalité 9 du Lemme 3.2.2, on a :

$$|\Sigma_2|_\beta \leq C \left| \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial r(t)^2} \right|_{\mathbb{C}^n} \left| \nabla_{\zeta_s^0} r \right|_\beta \left| \nabla_{\zeta_{s'}^0} r \right|_\beta.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy

$$\left| \frac{\partial^2 h(x(t))}{\partial r(t)^2} \right|_{\mathbb{C}^n} \leq \nu^{-4} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

La deuxième inégalité de (3.2.10) nous donne que

$$\left| \nabla_{\zeta_s^0} r \right|_\beta = \left| \nabla_{\zeta_s^0} L \right|_\beta \leq C\eta^{-1} \mu^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta+}.$$

Donc, en combinant ces estimations avec l'hypothèse (3.2.7), on obtient

$$|\Sigma_2|_\beta \leq C\mu^{-2} \llbracket h \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

- Pour  $\Sigma_3$  on a : en utilisant le lemme de norme

$$\Sigma_3 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta^0} \otimes \left( \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial \zeta} \frac{\partial r_j}{\partial \zeta^0} \right).$$

Par l'inégalité 4 de 3.2.9 on a  $|\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta^0}|_\beta \leq 2$ .

Par l'inégalité de Cauchy on a  $|\frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial \zeta}|_\beta \leq C\nu^{-3}[[h]]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^{\alpha,\beta}$ .

Et par l'inégalité 2 de 3.2.10 on a  $|\frac{\partial r_j}{\partial \zeta^0}|_\beta \leq \eta^{-1}\mu^{-1}[[f]]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^{\alpha,\beta}$ .

Donc en combinant ces résultats avec l'inégalité 9 du Lemme 3.2.2 et l'hypothèse (3.2.7) on obtient :

$$|\Sigma_3|_\beta \leq 8\nu^{-1}\mu^{-1}[[h]]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^{\alpha,\beta},$$

avec  $C$  une constante strictement positive que dépend de  $\beta$ .

- Pour  $\Sigma_4$  on a :

$$|\Sigma_4|_\beta \leq \left| \frac{\partial h(x(t))}{\partial r(t)} \right|_{\mathbb{C}^n} \left| \frac{\partial r(t)^2}{\partial \zeta_s^0 \partial \zeta_{s'}^0} \right|_\beta.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy on a  $\left| \frac{\partial h(x(t))}{\partial r(t)} \right|_{\mathbb{C}^n} \leq \nu^{-2}[[h]]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^\alpha$ . De l'inégalité 3 de (3.2.10) on a

$$\left| \frac{\partial r(t)^2}{\partial \zeta_s^0 \partial \zeta_{s'}^0} \right|_\beta = |\nabla_\zeta^2 L(\theta, \zeta; t)|_\beta \leq C\eta^{-1}\mu^{-2}[[f]]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^{\alpha,\beta+}.$$

Donc en combinant ces estimations avec l'hypothèse (3.2.7), on obtient

$$|\Sigma_4|_\beta \leq C\mu^{-2}[[h]]_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^\alpha,$$

avec  $C$  une constante strictement positive que dépend de  $\beta$ .

Les estimations sur la dérivée en  $\rho$  de la hessienne se font de la même manière.

□

### 3.3 Équation homologique

Dans cette partie on considère un hamiltonien  $h$  sous forme normale donné par :

$$h_0(\rho) = \omega_0(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_0(\rho)\zeta \rangle,$$

qui satisfait les hypothèses A et B. On considère une petite perturbation  $f$  de l'hamiltonien  $h$  de l'ordre de  $\varepsilon$ . De plus si le jet de  $f$  est nul, alors le tore  $\mathbb{T}^n \times \{0\} \times \{0\}$  sera un tore invariant pour l'hamiltonien perturbé  $h + f$ . Si  $f$  est de taille  $\varepsilon$  alors son jet est aussi de taille  $\varepsilon$ . Le but est donc de supprimer le jet de  $f$ . Pour cela on cherche un changement de variable symplectique  $\varphi_S$  qui sera le flot induit par un hamiltonien  $S$  à  $t = 1$  telle que, quand on compose avec cette transformation, on obtient une nouvelle forme normale proche de la forme normale initiale et telle que le jet de la nouvelle perturbation est de taille  $\varepsilon^2$ . Plus précisément on veut que  $\varphi_S = \varphi_S^{t=1}$

vérifie :

$$(h_0 + f) \circ \varphi_S = h^+ + f^+, \quad \text{avec } (f^+)^T = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$h^+$  est une nouvelle forme normale proche de  $h$  ( $|h^+ - h| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ ).

$$h^+ = h_0 + \hat{h}, \quad \hat{h} = c(\rho) + \chi(\rho)r + \frac{1}{2}\langle \zeta, \hat{K}(\rho)\zeta \rangle.$$

L'hamiltonien  $S$  sera la solution de l'équation homologique non-linéaire suivante :

$$\{h_0, S\} + \{f - f^T, S\}^T + f^T = \hat{h} + R,$$

avec  $R$  un jet de fonction. Pour résoudre cette équation on commence par résoudre l'équation homologique linéaire donnée par :

$$\{h_0, S\} = \hat{h} - f^T + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.3.1)$$

On répète après la procédure précédente avec  $h^+$  à la place de  $h_0$  et  $f^+$  à la place de  $f$ . On résoudra l'équation homologique pour

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle$$

pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$  et  $A$  proche de  $A_0$ .

### 3.3.1 Équation homologique linéaire

On considère un hamiltonien sous forme normale donné par

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle.$$

Dans cette partie on résout l'équation homologique (3.3.1). Les inconnues sont  $S$  et  $\hat{h}$ . Il suffit de prendre  $S$  comme un jet de fonction :

$$S(\theta, r, \zeta) = S_\theta(\theta) + S_r(\theta)r + \langle S_\zeta(\theta), \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle S_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle.$$

En remplaçant dans l'équation homologique on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_\theta S_\theta \cdot \omega + \nabla_\theta S_r \cdot \omega \cdot r + \langle \nabla_\theta S_\zeta \cdot \omega, \zeta \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla_\theta S_{\zeta\zeta} \cdot \omega \zeta, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_\zeta \rangle \\ + \langle A\zeta, JS_{\zeta\zeta}\zeta \rangle = C - f_\theta + \chi \cdot r - f_r \cdot r - \langle f_\zeta, \zeta \rangle \\ + \frac{1}{2}\langle \zeta, \hat{K}\zeta \rangle - \frac{1}{2}\langle f_{\zeta\zeta}\zeta, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient quatre équation à résoudre. Notons que  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et que  $S$  appartiendra à l'espace  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ .

**Les deux premières équations.**

Elle sont obtenues directement :

$$\nabla_{\theta} S_{\theta}(\theta).\omega = C - f_{\theta}(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.3.2)$$

$$\nabla_{\theta} S_r(\theta).\omega = \chi - f_r(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.3.3)$$

Pour la résolution des ces deux équations on impose que :

$$C(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta, \quad \chi(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta.$$

### La troisième équation.

On a :

$$\langle \nabla_{\theta} S_{\zeta}.\omega, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta}(\theta) \rangle = -\langle f_{\zeta}, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Or  $A$  est une matrice symétrique donc  $A^* = A$ , par suite :

$$\langle \nabla_{\theta} S_{\zeta}.\omega, \zeta \rangle + \langle AJ S_{\zeta}(\theta), \zeta, \rangle = \langle -f_{\zeta}, \zeta \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Les matrice  $A$  et  $J$  commutent puisque chaque bloc de  $A$  est de la forme  $A_i^j = \mathbb{C}I_2 + \mathbb{C}\sigma_2$ . Par suite la troisième équation est :

$$\nabla_{\theta} S_{\zeta}(\theta).\omega + JAS_{\zeta}(\theta) = -f_{\zeta}(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

### La quatrième équation.

On a :

$$\frac{1}{2} \langle \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta).\omega\zeta, \zeta \rangle + \langle A\zeta, JS_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle = \frac{1}{2} \langle \zeta, B\zeta \rangle - \frac{1}{2} \langle f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle.$$

En utilisant le faite que  $A$  est symétrique,  $A$  et  $J$  commutent, et que  $(AJ S_{\zeta\zeta})^* = -S_{\zeta\zeta}JA$ , on obtient :

$$\langle \zeta, \nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta).\omega\zeta \rangle + \langle \zeta, AJ S_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle - \langle \zeta, S_{\zeta\zeta}(\theta)AJ\zeta \rangle = \langle \zeta, B\zeta \rangle - \langle \zeta, f_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta \rangle.$$

Par suite on obtient la quatrième équation

$$\nabla_{\theta} S_{\zeta\zeta}(\theta).\omega + AJ S_{\zeta\zeta}(\theta) - S_{\zeta\zeta}(\theta)JA = -f_{\zeta\zeta}(\theta) + B + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

### Résolution des deux premières équations.

Les deux premières équations homologique (3.3.2) et (3.3.3) sont de la forme suivantes :

$$\nabla_{\theta} \varphi(\theta).\omega = \psi(\theta) \quad (3.3.4)$$

avec  $\int_{\mathbb{T}^n} \psi(\theta) d\theta = 0$ .

(Dans la première équation  $\varphi = S_{\theta}$  et  $\psi = C - f_{\theta}$ . Dans la deuxième équation  $\varphi = S_r$  et  $\psi = \chi - f_r$ .)

On développe  $\varphi$  et  $\psi$  en série de Fourier :

$$\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{\varphi}(k) e^{-ik\theta}, \quad \psi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta}$$

avec  $\hat{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta$  et  $\hat{\psi}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} \psi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta$ . On résout l'équation (3.3.4) en choisissant :

$$\hat{\varphi}(k) = -i \frac{\hat{\psi}(k)}{k \cdot \omega}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}; \quad \hat{\varphi}(0) = 0.$$

Pour avoir un contrôle sur les coefficients Fourier de  $\varphi$ , il faut qu'on tronque en  $k$ . Ainsi Pour un  $N \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$-i \sum_{0 < |k| \leq N} k \cdot \omega \hat{\varphi}(k) e^{-ik\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta} - \sum_{|k| > N} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta}$$

En utilisant l'hypothèse A2 on a soit :

$$|\omega(\rho) \cdot k| \geq \delta \geq \kappa, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tels que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega(\rho)), z_k \rangle \geq \delta.$$

Le deuxième cas implique d'après la Proposition 3.1.1 que pour  $0 < \kappa < \delta$  et  $N > 1$  il existe un fermé dont la mesure de Lebesgue vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq C \kappa \delta^{-1} N^{2(n+1)},$$

tel que pour tout  $0 < |k| \leq N$  et  $\rho \in \mathcal{D}_1$  on a :

$$|k \cdot \omega(\rho)| \geq \kappa.$$

On obtient ainsi un contrôle pour  $0 < |k| \leq N$  :

$$|\hat{\varphi}(k)| \leq \frac{|\hat{\psi}(k)|}{\kappa}, \quad 0 < |k| \leq N. \quad (3.3.5)$$

Ainsi on a résolut

$$\nabla_\theta \varphi(\theta) \cdot \omega = \psi(\theta) + R(\theta),$$

avec  $R(\theta) = - \sum_{|k| > N} \hat{\psi}(k) e^{-ik\theta}$ .

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction périodique et holomorphe sur le domaine  $|Im\theta| < \sigma$  et continue sur  $|Im\theta| \leq \sigma$ . Alors il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $n$  tel que les*

coefficients de Fourier de  $f$  vérifient :

$$|\hat{f}(k)| \leq C e^{-|k|\sigma} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f(\theta)|,$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$ .

*Preuve.* On a :

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

On peut également se placer sur le tore  $\mathbb{T}^n - i(\sigma - \varepsilon) \frac{k}{|k|}$  pour tout  $0 < \varepsilon < \sigma$ . Sur ce tore on a :

$$|e^{ik\theta}| \leq e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)}.$$

Par la suite on a

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &\leq \int_{\mathbb{T}^n - i(\sigma - \varepsilon) \frac{k}{|k|}} |f(\theta)| e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)} d\theta \\ &\leq C e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)} \sup_{|Im\theta| < \sigma - \varepsilon} |f(\theta)| \\ &\leq C e^{-|k|(\sigma - \varepsilon)} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f(\theta)|. \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité voulu par continuité. □

**Lemme 3.3.2.** Soient  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $a > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  alors on a :

$$\sum_{|k| \leq N} e^{-a|k|} \leq \frac{2^n}{a^n}, \quad (3.3.6)$$

$$\sum_{|k| \leq N} |k| e^{-a|k|} \leq \frac{2^n}{a^{2n}}, \quad (3.3.7)$$

$$\sum_{|k| > N} e^{-a|k|} \leq C(n) \frac{e^{-\frac{aN}{2}}}{a^n}. \quad (3.3.8)$$

*Preuve.* • Démontrons la première inégalité, on a

$$\sum_{|k| \leq N} e^{-a|k|} \leq \left( \sum_{|p| \leq N} e^{-a|p|} \right)^n \leq \left( 2 \int_0^N e^{-xa} dx \right)^n \leq \frac{2^n}{a^n}.$$

• Le deuxième point se montre de la même façon que le premier point.

• Pour la troisième inégalité on a :

$$\sum_{|k| > N} e^{-a|k|} \leq \int_{|x| > N} e^{-a|x|} dx.$$

En faisant le changement de variable  $y = a|x|$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_{|x|>N} e^{-a|x|} dx &= \int_{y>aN} e^{-y} \left(\frac{y}{a}\right)^{n-1} \frac{dy}{a} \\ &\leq a^{-n} e^{-\frac{aN}{2}} \int_{y>0} e^{-y/2} y^{n-1} dy \\ &\leq C(n) \frac{e^{-\frac{aN}{2}}}{a^n}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.3.3.** Soient  $\kappa > 0$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma \leq 1$ , et  $1 \geq \mu > 0$ . On considère  $\varphi$  et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes sur le domaine  $|Im\theta| < \sigma$  qui vérifient l'équation (3.3.4). Supposons que  $\rho \in \mathcal{D}_1(\kappa, N)$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta|<\sigma'} |\varphi(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta|<\sigma'} |R(\theta)| &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)|. \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend seulement de  $n$ .

*Preuve.* En utilisant (3.3.5), le Lemme 3.3.1 et puis (3.3.6) du Lemme 3.3.2 on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta|<\sigma'} |\varphi(\theta)| &\leq \sum_{|k|\leq N} \frac{|\hat{\psi}(k)|}{\kappa} e^{|k|\sigma'}, \\ &\leq C \sum_{|k|\leq N} \frac{1}{\kappa} e^{-|k|\sigma} e^{|k|\sigma'} \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)|, \\ &\leq \frac{C}{\kappa} \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)| \sum_{|k|\leq N} e^{-|k|(\sigma - \sigma')}, \\ &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)|. \end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité, en utilisant le Lemme 3.3.1 et puis (3.3.8) du Lemme 3.3.2 on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta|<\sigma'} |R(\theta)| &= \sup_{|Im\theta|<\sigma'} \left| \sum_{|k|>N} \hat{\psi}(k) e^{ik\theta} \right| \\ &\leq \sum_{|k|>N} |\hat{\psi}(k)| e^{|k|\sigma'}, \\ &\leq C \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)| \sum_{|k|>N} e^{-|k|(\sigma - \sigma')}, \\ &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta|<\sigma} |\psi(\theta)|. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.3.4.** Soient  $\kappa > 0$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma \leq 1$ , et  $1 \geq \mu > 0$ . On considère  $\varphi$  et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes sur le domaine  $|Im\theta| < \sigma$  qui vérifient l'équation (3.3.4).

Supposons que  $\rho \in \mathcal{D}_1(\kappa, N)$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho \varphi(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)| + \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R(\theta)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)|, \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$  et de  $|\omega|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

*Preuve.* En dérivant (3.3.4) par rapport à  $\rho$  on obtient :

$$\partial_\rho \hat{\varphi}(k) = i \frac{\partial_\rho \hat{\psi}(k)}{k \cdot \omega} + i \frac{\hat{\psi}(k)}{(k \cdot \omega)^2} (k \cdot \partial_\rho \omega(\rho)), \quad \text{pour } 0 < |k| \leq N,$$

et

$$\partial_\rho \hat{R}(k) = \partial_\rho \hat{\psi}(k), \quad \text{pour } |k| > N.$$

En appliquant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme(3.3.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho \varphi(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)| + \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\psi(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R(\theta)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho \psi(\theta)|. \end{aligned}$$

□

À présent on applique les lemmes 3.3.3 et 3.3.4 aux deux premières équations on obtient ainsi la proposition suivantes :

**Proposition 3.3.5.** Soient  $0 < \kappa < \delta$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ , et  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Supposons que pour  $j = 0, 1$  on a  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\sigma, \mu, \mathcal{D})$  alors il existe un fermé dont la mesure de Lebesgue vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \leq C_0 \kappa \delta^{-1} N^{2(n+1)},$$

tel que pour tout  $0 < |k| \leq N$  et  $\rho \in \mathcal{D}_1$  on a :

1. Il existe deux fonctions analytiques  $S_\theta(\cdot; \rho)$  et  $R_\theta(\cdot; \rho)$  sur  $\mathbb{T}_\sigma^n$ , tel que :

$$\nabla_\theta S_\theta(\theta, \rho) \cdot \omega = -f(\theta, 0, \rho) + \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + R_\theta(\theta, \rho),$$

avec

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_\theta(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_\theta(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho^j R_\theta(\theta, \rho)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \text{ avec } j = 0, 1. \end{aligned}$$

2. Il existe deux fonctions analytiques  $S_r(\cdot; \rho)$  et  $R_r(\cdot; \rho)$  sur  $\mathbb{T}_{\sigma'}^n$  tels que :

$$\nabla_\theta S_r(\theta, \rho) \cdot \omega = -\nabla_r f(\theta, 0, \rho) + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + R_r(\theta, \rho),$$

avec

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_r(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_r(\theta, \rho)| &\leq \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \frac{C}{\kappa^2\mu^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho^j R_r(\theta, \rho)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \text{ avec } j = 0, 1. \end{aligned}$$

La constante  $C_0$  dépend de  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  alors que la constante  $C$  dépend de  $n$  en plus.

### Résolution de la troisième équation.

On commence la résolution de la troisième équation homologique par énoncer un lemme prouvé dans [14]

**Lemme 3.3.6.** Soit  $A(t)$  une matrice carrée diagonale de taille  $N$  telle que ces valeurs propres  $a_j(t)$  sont de classe  $C^1$  sur  $I = ]-1, 1[$  et que pour  $1 \leq j \leq N$  et tout  $t \in I$  on a :

$$a'_j(t) \geq \delta.$$

Soit  $B(t)$  une matrice hermitienne de taille  $N$  de classe  $C^1$  sur  $I$  avec

$$\|B'(t)\| \leq \frac{\delta}{2},$$

alors

$$\text{mes}\{t \in I \mid \|(A(t) + B(t))^{-1}\| > \kappa^{-1}\} \leq 4N\kappa\delta_0^{-1}.$$

*Preuve.* La matrice  $A(t) + B(t)$  est hermitienne, donc il existe une matrice unitaire  $P(t)$  telle que :

$$P^*(t)(A(t) + B(t))P(t) = D(t) := \text{diag}\{\lambda_j(t), 1 \leq j \leq N\}.$$

De plus

$$\|(A(t) + B(t))^{-1}\| \leq \max_{\lambda(t) \in \sigma(A(t)+B(t))} \left| \frac{1}{\lambda_j(t)} \right| = \frac{1}{\min_{\lambda(t) \in \sigma(A(t)+B(t))} |\lambda(t)|}.$$

Supposons la matrice  $A(t) + B(t)$  est analytique en  $t$ , alors il existe une paramétrisation tel que les valeurs propres sont analytiques en  $t$ . De plus, pour pour chaque valeur propre  $\lambda(t)$ , on peut trouver une paramétrisation tel que le vecteur propre unitaire associé  $u(t)$  soit analytique en  $t$  aussi (voir [19]). On a alors

$$\lambda(t) = \langle (A(t) + B(t)) \cdot u(t), u(t) \rangle.$$

En dérivant et en remarquant que  $\langle u'(t), u(t) \rangle = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \langle (A'(t) + B'(t)) \cdot u(t), u(t) \rangle + \langle (A(t) + B(t)) \cdot u'(t), u(t) \rangle \\ &= \langle (A'(t) + B'(t)) \cdot u(t), u(t) \rangle + \langle u'(t), (A(t) + B(t)) \cdot u(t) \rangle \\ &= \langle (A'(t) + B'(t)) \cdot u(t), u(t) \rangle. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant les hypothèses faites sur  $A(t)$  et  $B(t)$ , on obtient

$$|\lambda'(t)| \geq |\langle A'(t) \cdot u(t), u(t) \rangle| - |\langle B'(t) \cdot u(t), u(t) \rangle| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Par suite on obtient

$$\text{mes}\{t \in I \mid \min_{\lambda_j(t) \in \sigma(A(t)+B(t))} |\lambda_j(t)| < \kappa\} \leq 4N\kappa\delta^{-1}.$$

Dans le cas où  $A$  et  $B$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  alors pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut construire deux matrices analytiques  $A_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon$  tel que :

- $A_\varepsilon = \text{diag}\{a_j^\varepsilon(t), 1 \leq j \leq N\}$  et  $|a_j^\varepsilon - a_j|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$ .
- $B_\varepsilon$  est hermitienne et vérifie  $|B_\varepsilon - B|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$ .

Par suite pour  $1 \leq j \leq N$  et tout  $t \in I$  on a :

$$|(a_j^\varepsilon)'(t)| \geq \delta - \varepsilon \text{ et } |B_\varepsilon'| \leq \frac{\delta}{2} - \varepsilon.$$

Donc pour une valeur propre  $\lambda_\varepsilon(t)$  de  $A_\varepsilon(t) + B_\varepsilon(t)$  on obtient que :

$$|\lambda_\varepsilon'(t)| \geq \frac{\delta}{2} - 2\varepsilon.$$

Par continuité des valeurs propres, on obtient que si  $|\lambda(t)| < \kappa$  alors  $|\lambda_\varepsilon(t)| < \kappa + \varepsilon$  pour tout  $t \in I$ . Par suite pour tout  $\varepsilon > 0$  on obtient :

$$\text{mes}\{t \in I \mid \min_{\lambda_j(t) \in \sigma(A(t)+B(t))} |\lambda_j(t)| < \kappa\} \leq \frac{2(\kappa + \varepsilon)}{\delta/2 - 2\varepsilon}.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.3.6. □

**Proposition 3.3.7.** *Soient  $0 < \kappa \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{c_0}{4}$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$  et  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que*

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF} \cap \mathcal{M}_\beta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Il existe un fermé  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$  satisfaisant

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2) \leq \tilde{C} d \kappa \delta^{-1} N^{n+2},$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  il existe deux fonctions analytiques  $S_\zeta(\cdot; \rho)$  et  $R_\zeta(\cdot; \rho)$  sur  $\mathbb{T}_\sigma^n$ , tel que :

$$\nabla_\theta S_\zeta(\theta) \cdot \omega + J A S_\zeta(\theta) = -f_\zeta(\theta) + R_\zeta(\theta, \rho),$$

avec

$$\begin{aligned} \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} \|S_\zeta(\theta)\|_{\alpha+1} + \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} |S_\zeta(\theta)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa \mu (\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} \|R_\zeta(\theta)\|_\alpha + \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} |R_\zeta(\theta)|_\beta &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu (\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_\zeta(\theta, \rho)\|_{\alpha+1} + \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_\zeta(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2 \mu (\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \\ &\quad + \frac{C}{\kappa \mu (\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_\zeta(\theta)\|_\alpha + \sup_{|\text{Im}\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R_\zeta(\theta)|_\beta &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu (\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \end{aligned}$$

avec  $C$  et  $\tilde{C}$  deux constantes strictement positives telles que  $C$  dépend de  $n$  de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  alors que  $\tilde{C}$  dépend de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et de  $c_0$ .

*Preuve.* On considère le changement de variable complexe suivant :

$$z_s = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \zeta_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s + iq_s) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s - iq_s) \end{pmatrix}.$$

Dans les nouvelles variables notre hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \langle \xi, Q(\rho)\eta \rangle,$$

avec  $Q$  une matrice hermitienne. Dans ces nouvelles variables le jet d'une fonction  $g$  est donnée

par :

$$g^T = g_\theta(\theta) + g_r(\theta) \cdot r + \langle g_\xi(\theta), \xi \rangle + \langle g_\eta(\theta), \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle g_{\xi\xi}(\theta) \xi, \xi \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle g_{\eta\eta}(\theta) \eta, \eta \rangle + \langle g_{\xi\eta}(\theta) \xi, \eta \rangle,$$

et le crochet de poisson devient :

$$\{h, S\} = \nabla_r h \nabla_\theta S - \nabla_\theta h \nabla_r S - i(\langle \nabla_\xi h, \nabla_\eta S \rangle - \langle \nabla_\eta h, \nabla_\xi S \rangle)$$

On cherche un hamiltonien sous la forme :

$$S(\theta) = S_\theta(\theta) + S_r(\theta) \cdot r + \langle S_\xi(\theta), \xi \rangle + \langle S_\eta(\theta), \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle S_{\xi\xi}(\theta) \xi, \xi \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle S_{\eta\eta}(\theta) \eta, \eta \rangle + \langle S_{\xi\eta}(\theta) \xi, \eta \rangle.$$

En injectant tout cela dans l'équation homologique (3.3.1) on obtient :

$$\begin{aligned} & \nabla_\theta S_\theta \cdot \omega(\rho) + \nabla_\theta S_r \cdot \omega(\rho) r + \langle \nabla_\theta S_\xi \cdot \omega(\rho), \xi \rangle + \langle \nabla_\theta S_\eta \cdot \omega(\rho), \eta \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle \nabla_\theta S_{\xi\xi} \cdot \omega(\rho) \xi, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_\theta S_{\eta\eta} \cdot \omega(\rho) \eta, \eta \rangle + \langle \nabla_\theta S_{\xi\eta} \cdot \omega(\rho) \xi, \eta \rangle \\ & - i \langle Q \eta, S_\eta + S_{\eta\eta} \eta + S_{\xi\eta} \xi \rangle + i \langle {}^t Q \xi, S_\xi + S_{\xi\xi} \xi + S_{\xi\eta} \eta \rangle \\ & = C(\rho) + \chi(\rho) \cdot r + \langle \xi, \hat{K} \eta \rangle - f_\theta - f_r \cdot r - \langle f_\xi, \xi \rangle - \langle f_\eta, \eta \rangle \\ & - \frac{1}{2} \langle f_{\xi\xi} \xi, \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle f_{\eta\eta} \eta, \eta \rangle - \langle f_{\xi\eta} \xi, \eta \rangle + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

On peut donc découpler la troisième équation homologique en deux équations :

$$\begin{aligned} \nabla_\theta S_\xi(\theta) \cdot \omega + i Q S_\xi(\theta) &= -f_\xi(\theta) + R_\xi(\theta), \\ \nabla_\theta S_\eta(\theta) \cdot \omega - i {}^t Q S_\eta(\theta) &= -f_\eta(\theta) + R_\eta(\theta), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

avec  $Q$  matrice hermitienne diagonale par blocs à coefficients complexes de la forme :

$$Q = \text{diag} \{ \lambda_s, s \in \mathcal{L} \} + H,$$

où  $H$  est une matrice hermitienne diagonale par blocs.

On développe  $S_\xi$ ,  $S_\eta$ ,  $f_\xi$  et  $f_\eta$  en série de Fourier :

$$\begin{aligned} S_\xi(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{S}_\xi(k) e^{-ik\theta}, & S_\eta(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{S}_\eta(k) e^{-ik\theta}, \\ f_\xi(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\xi(k) e^{-ik\theta}, & f_\eta(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\eta(k) e^{-ik\theta}. \end{aligned}$$

Par suite les deux équations (3.3.10) deviennent :

$$\begin{aligned} i(k \cdot \omega I + Q) \hat{S}_\xi(k) &= -\hat{f}_\xi(k) + \hat{R}_\xi(k), & k \in \mathbb{Z}^n, \\ i(k \cdot \omega I - {}^t Q) \hat{S}_\eta(k) &= -\hat{f}_\eta(k) + \hat{R}_\eta(k), & k \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Pour les résoudre il nous faut un contrôle sur les opérateurs  $(k \cdot \omega I + Q)$  et  $(k \cdot \omega I - {}^t Q)$ . Les deux équations ont de la même forme. On résoudra que la première.

Soit  $Q_{[s]}$  la restriction de  $Q$  au bloc  $s \times s$ . En décomposant l'équation homologique par blocs on obtient :

$$i(k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]})\hat{S}_{[s]}(k) = -\hat{f}_{[s]}(k) + \hat{R}_{[s]}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (3.3.12)$$

où  $\hat{S}_{[s]}(k)$ ,  $\hat{f}_{[s]}(k)$  et  $\hat{R}_{[s]}(k)$  sont respectivement les restrictions de  $\hat{S}_\xi(k)$ ,  $\hat{f}_\xi(k)$  et  $\hat{R}_\xi(k)$  au bloc  $[s]$ .

$Q_{[s]}$  est une matrice hermitienne donc diagonalisable. Soit  $\alpha_\ell$  une valeur propre de  $Q_{[s]}$  et rappelons que  $Q_{[s]} = D_{[s]} + H_{[s]}$  avec  $D_{[s]} = \text{diag}\{\lambda_\ell, \ell \in [s]\}$  et  $H_{[s]}$  une matrice hermitienne de dimension au plus  $d$ . Par suite  $\alpha_\ell - \lambda_\ell$  est une valeur propre de  $H_{[s]}$ .

Contrôler l'opérateur  $k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]}$  revient à contrôler  $|k \cdot \omega + \alpha_\ell|$  pour tout  $0 \leq |k| \leq N$ . Remarquons que  $|\partial_\rho^j N(\rho)|_\beta < \frac{\delta}{2}$  implique que pour tout  $\ell \in [s]$  :

$$|\alpha_\ell - \lambda_\ell| \leq \|H_{[s]}\| \leq \|H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{1}{\langle s \rangle^{2\beta}} |H(\rho)|_\beta \leq \frac{\delta}{2\langle s \rangle^{2\beta}} \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{c_0}{4}.$$

Par suite on obtient :

$$|\alpha_\ell| \geq \lambda_\ell - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| \geq \frac{3}{4}c_0\langle s \rangle,$$

donc pour  $k = 0$  (3.3.12) est bien résolue. Pour  $k \neq 0$  en utilisant l'hypothèse A2 on a soit :

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell| \geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| \geq \delta\langle s \rangle - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}\langle s \rangle \geq \kappa\langle s \rangle,$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \lambda_\ell), z_k \rangle \geq \delta.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas. Remarquons que pour ce vecteur unitaire  $z_k$  on a :

$$\|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\| \leq \|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\|_\infty \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}.$$

Posons

$$J(k, s) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid \|(k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]})^{-1}\| > (\kappa\langle s \rangle)^{-1}\}$$

En appliquant le Lemme 3.3.6 à la matrice  $\text{diag}\{k \cdot \omega + \lambda_\ell, \ell \in [s]\}$  et la matrice hermitienne  $Q_{[s]}$  on obtient

$$\text{mes } J(k, s) \leq d\delta^{-1}\kappa\langle s \rangle \leq 4Cc_0^{-1}d\kappa\delta^{-1}N,$$

pour  $|s| \leq 4Cc_0^{-1}N$  et  $C := |\omega|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} + \delta_0 \leq |\omega|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} + 1$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{B} = \{(k, s) \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N, |s| \leq 4Cc_0^{-1}\kappa\delta^{-1}N\}$ . Cet ensemble contient au plus  $16Cc_0^{-1}N^{n+1}$  points. Par suite :

$$\text{mes } \bigcup_{(k,s) \in \mathcal{B}} J(k, s) \leq 64C^2c_0^{-2}d\kappa\delta^{-1}N^{n+2} = \tilde{C}d\kappa\delta^{-1}N^{n+2}.$$

Pour  $|s| > 4Cc_0^{-1}N$ , on a :

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega + \alpha_\ell| &\geq \lambda_\ell - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |k \cdot \omega| \\ &\geq c_0 \langle s \rangle - \frac{1}{4}c_0 \langle s \rangle - \frac{1}{4}c_0 \langle s \rangle \\ &\geq \kappa \langle s \rangle. \end{aligned}$$

On résout la troisième équation homologique en posant pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2 := \mathcal{D} \setminus \bigcup_{(k,s) \in \mathcal{B}} J(k,s)$  :

$$(\hat{S}_\xi)_{[s]}(k) = i \left( (k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]})^{-1} (\hat{f}_\xi)_{[s]}(k) \right), \quad 0 \leq |k| \leq N,$$

et

$$(R_\xi)_{[s]\ell} = - \sum_{|k| > N} (\hat{f}_\xi)_{[s]\ell}(k) e^{ik\theta}.$$

Notant  $(\hat{S}_\xi)_{[s]\ell}$  le  $\ell$ -ème élément de  $(\hat{S}_\xi)_{[s]}$  et pareil pour  $(\hat{f}_\xi)_{[s]\ell}$  et  $(\hat{R}_\xi)_{[s]\ell}$ . En utilisant le même raisonnement que dans la première équation on obtient pour tout  $0 < \sigma < \sigma'$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(S_\xi)_{[s]\ell}(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa \langle s \rangle (\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_\xi)_{[s]\ell}(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(R_\xi)_{[s]\ell}(\theta)| &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_\xi)_{[s]\ell}(\theta)|. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|S_\xi(\theta)\|_{\alpha+1} &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_\xi(\theta)\|_\alpha, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_\xi(\theta)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f_\xi(\theta)|_\beta, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|S_\xi(\theta)\|_{\alpha+1} + \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_\xi(\theta)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa\mu(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}^{\alpha,\beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|R_\xi(\theta)\|_\alpha &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_\xi^T(\theta)\|_\alpha, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |R_\xi(\theta)|_\beta &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f_\xi^T(\theta)|_\beta, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|R_\xi(\theta)\|_\alpha + \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |R_\xi(\theta)|_\beta &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma,\mu,\mathcal{D}}, \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$  de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta,\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

Pour prouver les estimations sur les dérivées de  $S_\xi$  et de  $R_\xi$  par rapport à  $\rho$  on dérive les équations (3.3.11). On obtient :

$$i(k \cdot \omega I + Q) \partial_\rho \hat{S}_\xi(k) = -i(\partial_\rho k \cdot \omega I + \partial_\rho Q) \hat{S}_\xi(k) - \partial \hat{f}_\xi(k), \quad 0 \leq |k| \leq N,$$

et

$$\partial_\rho R_\xi(\theta) = - \sum_{|k| \geq N} \partial_\rho(\hat{f}_\xi)(k) e^{ik\theta}.$$

Le même procédé décrit précédemment nous donne :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)\|_{\alpha+1} &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|f_\xi(\theta, \rho)\|_\alpha \\ &+ \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho f_\xi(\theta, \rho)\|_\alpha, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f_\xi(\theta, \rho)|_\beta \\ &+ \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho f_\xi(\theta, \rho)|_\beta, \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)\|_{\alpha+1} + \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_\xi(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2 \mu(\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \\ &+ \frac{C}{\kappa \mu(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

De même pour la dérivée en  $\rho$  de  $R_\xi(\theta)$  on obtient :

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_\xi(\theta)\|_\alpha \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} \|\partial_\rho f_\xi(\theta)\|_\alpha,$$

et

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R_\xi(\theta)|_\beta \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho f_\xi(\theta)|_\beta.$$

Par suite

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} \|\partial_\rho R_\xi(\theta)\|_\alpha + \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R_\xi(\theta)|_\beta \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta},$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$  de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .  $\square$

**Remarque 3.3.8.** *La clé pour résoudre la troisième équation homologique était de contrôler les valeurs propres de l'opérateur hermitien diagonal par blocs  $k \cdot \omega I + Q$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ . Pour cela on s'est restreint à un bloc donné et on a résolu l'équation par blocs. Plus précisément, on a considéré l'opérateur hermitien  $k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]}$  qui est la restriction de  $k \cdot \omega I + Q$  au bloc  $[s] \times [s]$  avec  $Q_{[s]}(\rho) = \text{diag} \{ \lambda_\ell(\rho), \ell \in [s] \} + H_{[s]}(\rho)$  où  $H_{[s]}(\rho)$  est une matrice hermitienne de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ . Si  $\alpha_\ell$  est une valeur propre de  $Q_{[s]}$  alors  $\alpha_\ell - \lambda_\ell$  est une valeur propre de  $H_{[s]}$ . L'un des points clé de la démonstration est de contrôler  $\partial_\rho(\alpha_\ell - \lambda_\ell)$ . L'hypothèse que l'opérateur  $k \cdot \omega I_{[s]} + Q_{[s]}$  est hermitien est essentielle. En effet si l'opérateur était juste diagonalisable alors on ne peut pas espérer trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale. Dans ce cas on ne peut pas contrôler  $|\partial_\rho(\alpha_\ell - \lambda_\ell)|$  par  $\|H_{[s]}\|$ . L'autre difficulté est que la matrice*

n'est pas analytique. En effet pour une matrice de classe  $\mathcal{C}^1$ , ses valeurs propres ne sont pas nécessairement de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si on suppose de plus que la matrice  $H$  est analytique en  $\rho$  (ce qui revient à supposer que  $A$  est analytique), alors en utilisant l'hypothèse  $|\partial_\rho^j H|_\beta \leq \frac{\delta}{2}$  pour  $j = 0, 1$ , on a directement que :

$$|\partial_\rho^j(\alpha_\ell - \lambda_\ell)| \leq \|\partial_\rho^j H_{[s]}\| \leq \|\partial_\rho^j H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{1}{\langle s \rangle^{2\beta}} |\partial_\rho^j H(\rho)|_\beta \leq \frac{\delta}{2\langle s \rangle^{2\beta}} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Par suite en utilisant l'hypothèse A2 on a soit

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell| \geq \kappa \langle s \rangle,$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \alpha_\ell), z_k \rangle| \geq \frac{\delta}{2},$$

et on conclut en utilisant un raisonnement de même type que dans la Proposition 3.1.1.

### Résolution de la quatrième équation.

**Proposition 3.3.9.** Soient  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4} \leq \frac{1}{8} \min(c_0, c_1)$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ ,  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF} \cap \mathcal{M}_\beta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Il existe un fermé  $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{D}$  satisfaisant

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_3) \leq \tilde{C} d(\delta^{-1} \kappa)^\iota N^\nu,$$

avec  $\iota, \nu > 0$  et tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_3$  il existe une matrice  $\hat{K} \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{M}_\beta \cap \mathcal{NF}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $S_{\zeta\zeta}(\cdot; \rho)$  et  $R_{\zeta\zeta}(\cdot; \rho) : \mathbb{T}_\sigma^n \times \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{M}_\beta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et analytique en  $\theta$  tel que :

$$\begin{aligned} & \nabla_\theta S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) \cdot \omega(\rho) + A(\rho) J S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) - S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) J A(\rho) \\ & = -f_{\zeta\zeta}(\theta, \rho) + \hat{K}(\rho)(\rho) + R_{\zeta\zeta}(\theta, \rho), \end{aligned}$$

où pour tout  $(\theta, \rho) \in \mathbb{T}_{\sigma'}^n \times \mathcal{D}_3$  on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_{\rho} S_{\zeta\zeta}(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2\mu^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \\ &\quad + \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_{\rho} f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_{\rho}^j R_{\zeta\zeta}(\theta)|_{\beta} &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \quad j = 0, 1, \\ |\partial_{\rho}^j \hat{K}(\rho)|_{\beta} &\leq \frac{\llbracket \partial_{\rho}^j f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}}{\mu^2}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

La constante  $C$  est strictement positive et dépend de  $n$ ,  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ , alors que la constante  $\tilde{C}$  dépend de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ ,  $c_0$  et  $c_1$ .

*Preuve.* En utilisant les mêmes notations et changement de variable que dans la troisième équation on peut décomposer la quatrième équation d'après (3.3.9) en trois équations :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta} S_{\xi\xi}(\theta) \cdot \omega + iQ S_{\xi\xi}(\theta) + iS_{\xi\xi}(\theta)^t Q &= -f_{\xi\xi}(\theta) + R_{\xi\xi}(\theta), \\ \nabla_{\theta} S_{\eta\eta}(\theta) \cdot \omega - iS_{\eta\eta}(\theta)Q - i^t Q S_{\eta\eta}(\theta) &= -f_{\eta\eta}(\theta) + R_{\eta\eta}(\theta), \\ \nabla_{\theta} S_{\xi\eta}(\theta) \cdot \omega + iQ S_{\xi\eta}(\theta) - iS_{\xi\eta}(\theta)Q &= K - f_{\xi\eta}(\theta) + R_{\xi\eta}(\theta). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

On développe  $S_{\xi\xi}$ ,  $S_{\xi\eta}$ ,  $S_{\eta\eta}$ ,  $f_{\xi\xi}$ ,  $f_{\xi\eta}$ ,  $f_{\eta\eta}$ ,  $R_{\xi\xi}$ ,  $R_{\xi\eta}$  et  $R_{\eta\eta}$  en série de Fourier. On obtient que pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  :

$$(k \cdot \omega I + Q) \hat{S}_{\xi\xi}(k) + \hat{S}_{\xi\xi}(k)^t Q = i(\hat{f}_{\xi\xi}(k) - \hat{R}_{\xi\xi}(k)), \quad (3.3.14)$$

$$(k \cdot \omega I - {}^t Q) \hat{S}_{\eta\eta}(k) - \hat{S}_{\eta\eta}(k)Q = i(\hat{f}_{\eta\eta}(k) - \hat{R}_{\eta\eta}(k)), \quad (3.3.15)$$

$$(k \cdot \omega I + Q) \hat{S}_{\xi\eta}(k) - \hat{S}_{\xi\eta}(k)Q = -i(\delta_{k,0} \hat{K} - \hat{f}_{\xi\eta}(k) - \hat{R}_{\xi\eta}(k)), \quad (3.3.16)$$

où  $\delta_{k,j}$  désigne le symbole de Kronecker.

Les équations (3.3.14) et (3.3.15) sont de la même forme, donc pour terminer la résolution de l'équation homologique il suffit de résoudre (3.3.14) et (3.3.16) par exemple.

**Résolution de l'équation (3.3.14).** Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{\beta}$  et notons  $M_{[s],[s']}$  sa restriction au bloc  $s \times s'$ . On définit  $Q_{[s]} := Q_{[s],[s]}$  où  $Q = D + H$  avec  $D = \text{diag} \{ \lambda_s(\rho), s \in \mathcal{L} \}$  et  $H$  une matrice hermitienne diagonale par blocs. En décomposant (3.3.14) par blocs on obtient :

$$\begin{aligned} k \cdot \omega (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) + Q_{[s]} (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k)^t Q_{[s']} &= \\ i((\hat{f}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) - (\hat{R}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k)). \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

$Q_{[s]}$  est hermitienne donc il existe une base orthonormé tel que  $\tilde{Q}_{[s]} = {}^t P_{[s]} Q_{[s]} P_{[s]}$  est diagonale. De même pour  ${}^t Q_{[s']}$ . En multipliant l'équation (3.3.17) par  ${}^t P_{[s]}$  à gauche et  $P_{[s']}$  à droite, on

obtient :

$$k \cdot \omega {}^t P_{[s]}(\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']} + {}^t P_{[s]} Q_{[s]} P_{[s]} {}^t P_{[s]}(\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']} + \\ {}^t P_{[s]}(\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']} {}^t P_{[s']} Q_{[s']} P_{[s']} = i {}^t P_{[s]}((\hat{f}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) - (\hat{R}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k)) P_{[s']}.$$

En posant

$$(\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = {}^t P_{[s]}(\hat{S}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']}, \\ (\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = {}^t P_{[s]}(\hat{f}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']}, \\ (\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = {}^t P_{[s]}(\hat{R}_{\xi\xi})_{[s],[s']}(k) P_{[s']},$$

on obtient l'équation suivante :

$$(k \cdot \omega I_{[s]} + \tilde{Q}_{[s]})(\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) \tilde{Q}_{[s']} = i(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) \\ - i(\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k). \quad (3.3.18)$$

Soient  $\alpha_\ell$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s]}$  et  $\alpha_{\ell'}$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s']}$ . Pour résoudre (3.3.14) il nous faut un contrôle sur :

$$k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'},$$

pour tout  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$ . L'hypothèse  $|\partial_\rho^j N(\rho)|_\beta < \frac{\delta}{4}$  nous donne que  $|H|_\beta \leq \frac{\delta}{4}$  et on obtient :

$$|\alpha_\ell - \lambda_\ell| \leq \|H_{[s]}\| \leq \|H_{[s]}\|_\infty \leq \langle s \rangle^{-2\beta} |H(\rho)|_\beta \leq \frac{\delta}{4} \langle s \rangle^{-2\beta} \leq \frac{\delta}{4} \leq \frac{c_0}{8}.$$

Donc pour tout  $\ell \in [s]$  et tout  $\ell' \in [s']$  on a :

$$|\alpha_\ell + \alpha_{\ell'}| \geq \lambda_\ell - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| + \lambda_{\ell'} - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ \geq c_0 \langle s \rangle - \frac{c_0}{8} \langle s \rangle + c_0 \langle s' \rangle - \frac{c_0}{8} \langle s' \rangle \\ \geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle).$$

Ainsi on a obtenu un contrôle pour  $k = 0$ . Supposant que  $k \neq 0$ , en utilisant l'hypothèse A2 on a soit :

$$|k \cdot \omega + \alpha_{\ell'} + \alpha_\ell| \geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell + \lambda_{\ell'}| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| \\ \geq \delta(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} \\ \geq \frac{\delta}{2}(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) \\ \geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle),$$

ou bien il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \lambda_{\ell'} + \lambda_\ell), z_k \rangle| \geq \delta.$$

Supposons qu'on est en présence du deuxième cas. Pour un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  on a :

$$\|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\| \leq \|(\partial_\rho \cdot z_k)H_{[s]}\|_\infty \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{\delta}{4} \langle s \rangle^{-2\beta} \leq \frac{\delta}{4}.$$

En simplifiant les notations on peut réécrire l'équation (3.3.18) sous la forme :

$$L(k, s, s')S_{[s],[s']} = iF_{[s],[s']}, \quad (3.3.19)$$

avec

$$L(k, s, s')S = (k \cdot \omega I_{[s]} + \tilde{Q}_{[s]})S_{[s],[s']} + S_{[s],[s']}\tilde{Q}_{[s']},$$

et

$$F_{[s],[s']} = f_{[s],[s']} + R_{[s],[s']}.$$

On munit  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  du produit scalaire canonique suivant : pour  $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  alors  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ . Remarquons que  $L$  est un opérateur hermitien pour ce produit scalaire. Posons

$$J(k, s, s') = \{\rho \in \mathcal{D} \mid \|(L(k, s, s'))^{-1}\| > (\kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle))^{-1}\}$$

En suivant la même procédure pour démontrer le Lemme 3.3.6 on obtient que :

$$\text{mes } J(k, s, s') \leq 4d\delta^{-1}\kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) \leq 16Cc_0^{-1}d\kappa\delta^{-1}N,$$

pour  $\max(|s|, |s'|) \leq 4Cc_0^{-1}N$  et  $C := |\omega|_{C^1(\mathcal{D})} + \delta_0 \leq |\omega|_{C^1(\mathcal{D})} + 1$ . On considère l'ensemble

$$\mathcal{B}_0 = \{(k, s, s') \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N, \max(|s|, |s'|) \leq 4Cc_0^{-1}N\}$$

Cet ensemble contient au plus  $2^4 C^2 c_0^{-2} N^{n+2}$  points. Par suite :

$$\text{mes} \bigcup_{(k,s,s') \in \mathcal{B}_0} J(k, s, s') \leq 2^8 C^3 c_0^{-3} d\kappa\delta^{-1} N^{n+3} = \tilde{C}d\kappa\delta^{-1} N^{n+3}.$$

Posons  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{(k,s,s') \in \mathcal{B}_0} J(k, s, s')$ , on alors pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'}| \geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle).$$

Si  $\max(|s|, |s'|) > 4Cc_0^{-1}N$ , on a alors :

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'}| &\geq \lambda_\ell + \lambda_{\ell'} - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| - |k \cdot \omega| \\ &\geq c_0(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) - \frac{c_0}{8} - \frac{c_0}{8} - \frac{c_0}{4}(\langle s \rangle + \langle s' \rangle) \\ &\geq \kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle). \end{aligned}$$

On résout l'équation (3.3.18) terme par terme en posant pour  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$  :

$$\ell'(\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = \frac{i}{k \cdot \omega + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'}} \ell'(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) \quad \text{pour } |k| \leq N,$$

$$\ell'(\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k) = \ell'(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k), \quad \text{pour } |k| > N.$$

Les matrices  $P_{[s']}^{-1}$  et  $P_{[s]}$  sont unitaires, donc en utilisant le même raisonnement que dans les trois premières équations on obtient pour tout  $0 < \sigma < \sigma'$  :

$$\begin{aligned} \|(\hat{S}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k)\|_\infty &\leq \frac{C}{\kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle)(\sigma - \sigma')^n} \|(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k)\|_\infty, \\ \|(\hat{R}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k)\|_\infty &\leq \frac{Ce^{-(\sigma-\sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \|(\hat{f}_{\xi\xi})'_{[s],[s']}(k)\|_\infty. \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(S_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)| &\leq \frac{C}{\kappa(\langle s \rangle + \langle s' \rangle)(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)|, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(R_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)| &\leq \frac{Ce^{-(\sigma-\sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\xi})_{[s],[s']}(\theta)|. \end{aligned}$$

De même on a :

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(S_{\xi\xi})(\theta)|_{\beta+} \leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\xi})(\theta)|_\beta, \quad (3.3.20)$$

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(R_{\xi\xi})(\theta)|_\beta \leq \frac{Ce^{-(\sigma-\sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\xi})(\theta)|_\beta. \quad (3.3.21)$$

Par suite

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |S_{\xi\xi}(\theta, \rho)|_{\beta+} \leq \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta},$$

et

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |R_{\xi\xi}(\theta)|_\beta \leq \frac{Ce^{-(\sigma-\sigma')N/2}}{\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta},$$

avec  $C$  une constante qui dépend de  $n$  et de  $\beta$ . Pour prouver les estimations sur les dérivées de  $S_{\xi\xi}$  et de  $R_{\xi\xi}$  par rapport à  $\rho$ , on dérive les équations (3.3.14). On obtient pour  $|k| \leq N$  :

$$(k \cdot \omega I + {}^t Q) \partial_\rho \hat{S}_{\xi\xi}(k) + \partial_\rho \hat{S}_{\xi\xi}(k) Q = -\partial_\rho(k \cdot \omega I + {}^t Q) \hat{S}_{\xi\xi}(k) - \hat{S}_{\xi\xi}(k) \partial_\rho Q + i \hat{f}_{\xi\xi}(k),$$

et

$$\partial_\rho R_{\xi\xi}(\theta) = \sum_{|k| \geq N} \partial_\rho(\hat{f}_{\xi\xi})(k) e^{ik\theta}.$$

En utilisant la même méthode que pour démontrer les estimations (3.3.20) et (3.3.21) on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_{\xi\xi}(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f_{\xi\xi}(\theta, \rho)|_\beta \\ &+ \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho f_{\xi\xi}(\theta, \rho)|_\beta. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_{\xi\xi}(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2\mu^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \\ &+ \frac{C}{\kappa\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

De même

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R_{\xi\xi}(\theta)|_\beta \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |\partial_\rho f_{\xi\xi}(\theta)|_\beta,$$

par suite :

$$\sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R_{\xi\xi}(\theta)|_\beta \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu^2(\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

$C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$  de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

Pour obtenir les estimations sur  $S_{\eta\eta}(\theta)$ ,  $\partial_\rho S_{\eta\eta}(\theta)$ ,  $R_{\eta\eta}(\theta)$  et  $\partial_\rho R_{\eta\eta}(\theta)$  on suit exactement le même schéma.

**Résolution de l'équation (3.3.16).** Pour terminer la résolution de l'équation homologique, il reste qu'à résoudre l'équation (3.3.16).

En décomposant en blocs l'équation (3.3.16) on obtient :

$$\begin{aligned} k \cdot \omega(\hat{S}_{\xi\eta})_{[s], [s']}(k) - Q_{[s]}(\hat{S}_{\xi\eta})_{[s], [s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\eta})_{[s], [s']}(k)Q_{[s']} \\ = -i(\delta_{k,0}\hat{K}_{[s], [s']} - (\hat{f}_{\xi\eta})_{[s], [s']}(k) + (\hat{R}_{\xi\eta})_{[s], [s']}(k)). \end{aligned}$$

En diagonalisant comme dans l'équation (3.3.14) et en reprenant les mêmes notations on obtient :

$$\begin{aligned} k \cdot \omega(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s], [s']}(k) - \tilde{Q}_{[s]}(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s], [s']}(k) + (\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s], [s']}(k)\tilde{Q}_{[s']} \\ = -i(\delta_{k,0}\hat{K}'_{[s], [s']} - (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s], [s']}(k) + (\hat{R}_{\xi\eta})'_{[s], [s']}(k)). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Soient  $\alpha_\ell$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s]}$  et  $\alpha_{\ell'}$  une valeur propre de  $\tilde{Q}_{[s']}$ . Donc pour résoudre (3.3.16) il faut avoir un contrôle sur :

$$k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'},$$

selon  $k$ .

♣ Si  $k = 0$  alors on distingue deux cas :

- Si  $[s] = [s']$ , c'est à dire qu'on est sur le même bloc. On ne peut pas contrôler  $\alpha_\ell - \alpha_{\ell'}$ , on pose alors :

$$(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s], [s]}(0) = 0, \quad \hat{K}'_{[s], [s]} = (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s], [s]}(0),$$

ainsi dans ce cas l'équation est bien résolu.

– Si  $[s] \neq [s']$ , alors en utilisant l'hypothèse A1, on a pour tout  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$  :

$$\begin{aligned} |\alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| &\geq |\lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ &\geq c_1(|s| - |s'|) - \frac{\delta}{2} \geq \frac{c_1}{2}(|s| - |s'|) \\ &\geq \kappa(1 + |s| - |s'|). \end{aligned}$$

Dans ce cas on résout l'équation (3.3.22) en posant :

$$(\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s'],[s]}(0) = i \frac{(\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s'],[s]}(0)}{\alpha_{s'} - \alpha_s}, \quad K'_{[s'],[s]} = 0.$$

♣ Si  $k \neq 0$ , alors en utilisant deuxième condition de Melnikov A3 on a pour tout  $|k| \leq N$  il existe un fermé  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$  dont la mesure de Lebesgue vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2) \leq C(\delta^{-1}\tilde{\kappa})^\tau N^\iota,$$

pour  $\tau, \iota > 0$  tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  on a :

$$|k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| \geq 2\tilde{\kappa}(1 + |s| - |s'|).$$

On fixera à la fin de la résolution de l'équation homologique  $\tilde{\kappa}$  tels que  $\tilde{\kappa} < \kappa$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  on obtient :

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega + \alpha_{\ell'} - \alpha_\ell| &\geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ &\geq 2\tilde{\kappa}(1 + |s| - |s'|) - \frac{\delta}{4}\langle s \rangle^{-2\beta} - \frac{\delta}{4}\langle s' \rangle^{-2\beta} \\ &\geq 2\tilde{\kappa}(1 + |s| - |s'|) - \tilde{\kappa} \\ &\geq \tilde{\kappa}(1 + |s| - |s'|), \end{aligned}$$

pour  $\min(|s|, |s'|) \geq \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}$ . Supposons à présent que  $\min(|s|, |s'|) < \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}$ . Sans perdre de généralité, supposons par exemple que  $|s| < \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}$ . En utilisant l'hypothèse de non résonance A2, soit on a :

$$|k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| \geq \delta(1 + |s| - |s'|),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega + \alpha_{\ell'} - \alpha_\ell| &\geq |k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ &\geq \delta(1 + |s| - |s'|) - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} \\ &\geq \kappa(1 + |s| - |s'|), \end{aligned}$$

soit il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \omega + \lambda_\ell - \lambda_{\ell'}), z_k \rangle \geq \delta. \quad (3.3.23)$$

Supposons qu'on a le deuxième cas. Sans oublier que  $|s| \leq \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}$ , supposons que  $\|s\| - \|s'\| \geq 2Cc_1^{-1}N$  avec  $C := |\omega|_{C^1(\mathcal{D})} + \delta_0 \leq |\omega|_{C^1(\mathcal{D})} + 1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| &\geq |\lambda_\ell - \lambda_{\ell'}| - |k \cdot \omega| - |\alpha_\ell - \lambda_\ell| - |\alpha_{\ell'} - \lambda_{\ell'}| \\ &\geq c_1(\|s\| - \|s'\|) - \frac{c_1}{2}(\|s\| - \|s'\|) - \frac{\delta}{2} \\ &\geq \kappa(1 + \|s\| - \|s'\|). \end{aligned}$$

Il reste à voir un nombre fini de cas, c'est à dire quand  $|s| \leq \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}$  et  $\|s\| - \|s'\| < 2Cc_1^{-1}N$ . Remarquons que ces deux conditions nous donne que  $|s'| \leq 2Cc_1^{-1}N + \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}$ . Posons :

$$I(k, s, s') = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| < \kappa(1 + \|s\| - \|s'\|)\}.$$

Supposons que les valeurs propres de la matrice hermitienne  $H$  sont analytiques, par suite on obtient

$$|\partial_\rho(\alpha_\ell - \lambda_\ell)| \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\| \leq \|\partial_\rho H_{[s]}\|_\infty \leq \frac{1}{\langle s \rangle^{2\beta}} |\partial_\rho H(\rho)|_\beta \leq \frac{\delta}{4\langle s \rangle^{2\beta}} \leq \frac{\delta}{4}.$$

D'après (3.3.23) la mesure de Lebesgue de  $I(k, s, s')$  vérifie :

$$\text{mes } I(k, s, s') \leq 8\delta^{-1}\kappa \left( \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta} + Cc_1^{-1}N \right).$$

Si les valeurs propres de  $H$  ne sont pas analytiques, on obtient la même estimations par densité des fonctions analytiques dans les fonctions continues (voir la preuve du Lemme 3.3.6). Posons

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ (k, s, s') \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N, |s| \leq \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta}, \right. \\ \left. |s'| \leq 2Cc_1^{-1}N + \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{1/2\beta} \right\}$$

Cet ensemble contient au plus  $N^n \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2\beta}} (2Cc_1^{-1}N + \left(\frac{\delta}{2\tilde{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2\beta}})$  points. Par suite en posant

$\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{(k,s,s') \in \mathcal{B}_1} I(k, s, s')$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \text{mes } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'_2 &\leq N^n \left( \frac{\delta}{2\tilde{\kappa}} \right)^{1/2\beta} \left( 2Cc_1^{-1}N + \left( \frac{\delta}{2\tilde{\kappa}} \right)^{1/2\beta} \right) \delta^{-1}\kappa \\ &\quad \times \left( \left( \frac{\delta}{2\tilde{\kappa}} \right)^{1/2\beta} + Cc_1^{-1}N \right) \\ &\leq N^{n+2} \left( \frac{\delta}{\tilde{\kappa}} \right)^{3/2\beta} C_1^{-2} C^2 \kappa \delta^{-1}. \end{aligned}$$

Pour le choix  $\tilde{\kappa} = \delta \left( \frac{\kappa}{\delta} \right)^{\frac{6\beta}{9+2\beta}}$  on a bien  $\tilde{\kappa} < \kappa$ , de plus :

$$\text{mes } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'_2 \leq \tilde{C} N^{n+2} \left( \frac{\kappa}{\delta} \right)^{\frac{2\beta}{9+2\beta}}.$$

Par construction pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}'_2$  on a :

$$|k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| \geq \kappa(1 + ||s| - |s'||).$$

Pour  $\rho \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}'_2$ , on résout l'équation (3.3.22) en posant pour  $\ell \in [s]$  et  $\ell' \in [s']$  :

$$\frac{\ell}{\ell'} (\hat{S}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) = \frac{i}{k \cdot \omega + \alpha_\ell - \alpha_{\ell'}} \frac{\ell}{\ell'} (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) \quad \text{pour } |k| \leq N,$$

$$\frac{\ell}{\ell'} (\hat{R}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k) = \frac{\ell}{\ell'} (\hat{f}_{\xi\eta})'_{[s],[s']}(k), \quad \text{pour } |k| > N.$$

Le même raisonnement que dans l'équation (3.3.14) nous donne que :

$$\begin{aligned} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(S_{\xi\eta})(\theta)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\eta})(\theta)|_{\beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |(R_{\xi\eta})(\theta)|_{\beta} &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |(f_{\xi\eta})(\theta)|_{\beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_{\xi\eta}(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2(\sigma - \sigma')^{2n}} \sup_{|Im\theta| < \sigma} |f_{\xi\eta}(\theta, \rho)|_{\beta} \\ &\quad + \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^n} \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho f_{\xi\eta}(\theta, \rho)|_{\beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho S_{\xi\eta}(\theta, \rho)|_{\beta+} &\leq \frac{C}{\kappa^2 \mu^2 (\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} \\ &\quad + \frac{C}{\kappa \mu^2 (\sigma - \sigma')^n} \llbracket \partial_\rho f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ \sup_{|Im\theta| < \sigma'} |\partial_\rho R_{\xi\eta}(\theta)|_{\beta} &\leq \frac{Ce^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{\mu^2 (\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}, \\ |\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_{\beta} &\leq \frac{\llbracket \partial_\rho^j f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}}{\mu^2}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$ , de  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et de  $|A_0|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

Ce qui achève la résolution de l'équation homologique.  $\square$

**Théorème 3.3.10.** Soient  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4} \leq \frac{1}{8} \min(c_0, c_1)$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ ,  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF} \cap \mathcal{M}_\beta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Supposons que  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\sigma, \mu, \mathcal{D})$  pour  $j = 0, 1$ . Il existe alors un fermé  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\kappa, N) \in \mathcal{D}$  tel que

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq \tilde{C} d(\kappa \delta^{-1})^\iota N^v$$

pour  $\iota$  et  $v$  strictement positifs et  $\tilde{C}$  une constante qui dépend  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ ,  $c_0$  et  $c_1$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  et  $j = 0, 1$ , il existe deux jets de fonctions  $S = S^T$  et  $R = R^T$  tel que  $\partial_\rho^j S \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\sigma', \mu, \mathcal{D}')$  et  $\partial_\rho^j R \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\sigma', \mu, \mathcal{D}')$  et une forme normale

$$\hat{h}(\rho) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\theta, 0, 0, \rho) d\theta.r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}(\rho) \zeta \rangle.$$

tel que

$$\{h, S\} + f^T = \hat{h} + R.$$

De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$|\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq \frac{\llbracket \partial_\rho^j f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}}{\mu^2}, \quad j = 0, 1 \quad (3.3.24)$$

$$\llbracket S \rrbracket_{\sigma', \mu, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta+, \kappa} \leq \frac{C}{\kappa(\sigma - \sigma')^{2n}} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, \quad (3.3.25)$$

$$\llbracket R \rrbracket_{\sigma', \mu, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, \quad (3.3.26)$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$ , de  $\beta$ , de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

**Remarque 3.3.11.** En vertu de l'inégalité (3.2.3), toutes les estimations précédentes restent valable en remplaçant  $f^T$  par  $f$ .

### 3.3.2 Équation homologique non-linéaire

Dans la suite du chapitre, on travaille avec l'équation homologique non-linéaire. (Voir Remarque 3.4.1 pour l'utilité de la résolution de l'équation homologique non-linéaire.)

**Proposition 3.3.12.** Soient  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4} \leq \frac{1}{8} \min(c_0, c_1)$ ,  $N > 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma$ ,  $\mu > 0$  et  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|\omega - \omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

et  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{NF} \cap \mathcal{M}_\beta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$|A - A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq \delta_0.$$

Supposons que  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\sigma, \mu, \mathcal{D})$  pour  $j = 0, 1$ . Il existe alors un fermé  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\kappa, N) \in \mathcal{D}$  tel que

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq \tilde{C} d(\kappa \delta^{-1})^\iota N^\nu$$

pour  $\iota$  et  $\nu$  strictement positifs et  $\tilde{C}$  une constante qui dépend  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ ,  $c_0$  et  $c_1$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  et  $j = 0, 1$ , il existe deux jets de fonctions  $S = S^T$  et  $R = R^T$  tel que  $\partial_\rho^j S \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\sigma', \mu, \mathcal{D}')$  et  $\partial_\rho^j R \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\sigma', \mu, \mathcal{D}')$  et une forme normale  $\hat{h}$  égale à une constante près à

$$\hat{h} = \hat{\omega}(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}(\rho) \zeta \rangle,$$

tel que

$$\{h, S\} + \{f - f^T, S\}^T + f^T = \hat{h} + R.$$

De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$\|\hat{h}\|_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq C \left( 1 + \frac{\mu'}{\Pi \kappa \mu^3} \Xi + \frac{1}{\Pi \kappa^2 \mu^3 \mu'} \Xi^2 \right) \varepsilon, \quad (3.3.27)$$

$$\|R\|_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq C \frac{\Delta}{\Pi} \left( 1 + \frac{\mu'}{\kappa \mu^3} \Xi + \frac{1}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \Xi^2 \right) \varepsilon, \quad (3.3.28)$$

$$\|S\|_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta+, \kappa} \leq \frac{C}{\Pi \kappa} \left( 1 + \frac{\mu'}{\kappa \mu^3} \Xi + \frac{1}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \Xi^2 \right) \varepsilon, \quad (3.3.29)$$

$$|\partial_\rho^j \hat{\omega}(\rho)| \leq C \left[ 1 + \frac{\Xi}{\Pi \kappa (\mu^2 - \mu'^2)} \left( 1 + \frac{\mu'}{\kappa \mu^3} \Xi + \frac{\mu'^2}{\kappa \mu^4} \Xi \right) \right] \frac{\varepsilon}{\mu^2}, \quad j = 0, 1, \quad (3.3.30)$$

$$|\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq C \left( 1 + \frac{\mu'}{\Pi \kappa \mu^3} \Xi + \frac{\mu'^2}{\Pi \mu^6 \kappa^2} \Xi^2 \right) \frac{\varepsilon}{\mu^2}, \quad j = 0, 1, \quad (3.3.31)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-(\sigma - \sigma')N/10}, & \Pi &= (\sigma - \sigma')^{6n+2}, \\ \varepsilon &= \|[f^T]\|_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, & \Xi &= \|[f]\|_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}. \end{aligned}$$

$C > 0$  et dépend de  $n$ , de  $\beta$ , de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

*Preuve.* On considère  $\sigma' := \sigma_5 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0 =: \sigma$  une progression arithmétique, et  $\mu' := \mu_5 < \mu_4 < \mu_3 < \mu_2 < \mu_1 < \mu_0 =: \mu$  une progression géométrique.

On rappelle que l'équation homologique non-linéaire est donnée par :

$$\{h, S\} + \{f - f^T, S\}^T + f^T = \hat{h} + R, \quad (3.3.32)$$

avec  $S, \hat{h}$  et  $R$  des jets de fonctions. On commence par écrire  $S$  sous la forme  $= S_0 + S_1 + S_2$ , avec

$$S_0(\theta) := S_\theta(\theta); \quad S_1(\theta, r) := S_r(\theta)r + \langle S_\zeta(\theta), \zeta \rangle; \quad S_2(\theta, \zeta) := \frac{1}{2} \langle S_{\zeta\zeta}(\theta)\zeta, \zeta \rangle. \quad (3.3.33)$$

On décompose  $h^+$  et  $R$  en trois parties :

$$\hat{h} = \hat{h}^0 + \hat{h}^1 + \hat{h}^2, \quad R = R^0 + R^1 + R^2.$$

En remarquant que  $\{f - f^T, S_3\}^T = 0$ , on peut décomposer l'équation (3.3.32) comme suit :

$$\{h, S_0\} + f^T = \hat{h}^0 + R^0, \quad (3.3.34a)$$

$$\{h, S_1\} + f_1^T = \hat{h}^1 + R^1 \text{ avec } f_1 = \{f - f^T, S_0\} \quad (3.3.34b)$$

$$\{h, S_2\} + f_2^T = \hat{h}^2 + R^2 \text{ avec } f_2 = \{f - f^T, S_1\} \quad (3.3.34c)$$

Ainsi pour résoudre l'équation homologique (3.3.32), il suffit de résoudre successivement les trois équations homologiques précédentes. De plus chacune de ces équations est du même type que l'équation homologique linéaire qu'on a résolu dans la section précédente.

Posons

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-(\sigma - \sigma')N/10}, & \Pi &= (\sigma - \sigma')^{6n+2}, \\ \varepsilon &= \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, & \Xi &= \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}. \end{aligned}$$

Grâce au Théorème 3.3.10, on obtient :

$$\begin{aligned} \llbracket \hat{h}^0 \rrbracket_{\sigma_1, \mu, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \varepsilon, & \llbracket R^0 \rrbracket_{\sigma_1, \mu, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C e^{-(\sigma - \sigma')N/2}}{(\sigma - \sigma')^n} \varepsilon, \\ \llbracket S_0 \rrbracket_{\sigma_1, \mu, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C}{\kappa (\sigma - \sigma')^{2n}} \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Regardons à présent (3.3.34b). En utilisant le Lemme 3.2.4 puis le Lemme 3.2.3 on obtient que  $f_1$  vérifie :

$$\begin{aligned} \llbracket f_1 \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')\mu'^2} \llbracket f - f^T \rrbracket_{\sigma_1, \mu_1, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \llbracket S_0 \rrbracket_{\sigma_1, \mu_1, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \\ &\leq \frac{C\mu'}{(\sigma - \sigma')^{2n+1}\kappa\mu^3} \varepsilon \Xi. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce au Théorème 3.3.10, on obtient :

$$\begin{aligned} \llbracket \hat{h}^1 \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \llbracket f_1^T \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\ &\leq \frac{C\mu'}{(\sigma - \sigma')^{2n+1}\kappa\mu^3} \varepsilon \Xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\llbracket R^1 \rrbracket_{\sigma_3, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C\Delta}{(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f_1^T \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\
&\leq \frac{C\Delta\mu'}{(\sigma - \sigma')^{3n+1} \kappa \mu^3} \varepsilon \Xi. \\
\llbracket S_1 \rrbracket_{\sigma_3, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta+, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{2n} \kappa} \llbracket f_1^T \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\
&\leq \frac{C\mu'}{(\sigma - \sigma')^{4n+1} \kappa^2 \mu^3} \varepsilon \Xi. \tag{3.3.36}
\end{aligned}$$

À présent on s'intéresse à la résolution de l'équation (3.3.34c). En utilisant le Lemme 3.2.4 puis le Lemme 3.2.3 on obtient que  $f_1$  vérifie :

$$\begin{aligned}
\llbracket f_2 \rrbracket_{\sigma_4, \mu_4, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')\mu'^2} \llbracket f - f^T \rrbracket_{\sigma_1, \mu_1, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \llbracket S_1 \rrbracket_{\sigma_3, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta+, \kappa} \\
&\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{4n+2} \kappa^2 \mu^3 \mu'} \varepsilon \Xi^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce au Théorème 3.3.10, on obtient :

$$\begin{aligned}
\llbracket \hat{h}^1 \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \llbracket f_2^T \rrbracket_{\sigma_4, \mu_4, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\
&\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{4n+2} \kappa^2 \mu^3 \mu'} \varepsilon \Xi^2. \\
\llbracket R^2 \rrbracket_{\sigma_5, \mu_4, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C\Delta}{(\sigma - \sigma')^n} \llbracket f_2^T \rrbracket_{\sigma_4, \mu_4, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\
&\leq \frac{C\Delta}{(\sigma - \sigma')^{5n+2} \kappa^2 \mu^3 \mu'} \varepsilon \Xi^2. \\
\llbracket S_2 \rrbracket_{\sigma_5, \mu_4, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta+, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{2n} \kappa} \llbracket f_2^T \rrbracket_{\sigma_4, \mu_4, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\
&\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{6n+2} \kappa^2 \mu^3 \mu'} \varepsilon \Xi^2.
\end{aligned}$$

Ainsi les inconnues de l'équation homologique (3.3.32) vérifient :

$$\begin{aligned}
\llbracket \hat{h} \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq C \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{(\sigma - \sigma')^{2n+1} \kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{(\sigma - \sigma')^{4n+2} \kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \varepsilon. \\
\llbracket R \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C\Delta}{(\sigma - \sigma')^{5n+2}} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \varepsilon. \\
\llbracket S \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta+, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{6n+2} \kappa} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il reste à prouver les estimations (3.3.30)-(3.3.31). Commençons par la nouvelle fréquence. D'après

le Théorème 3.3.10 la nouvelle fréquence  $\hat{\omega}$  est donnée par :

$$\hat{\omega} = \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f_1(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f_2(\theta, 0, 0, \rho) d\theta.$$

Ainsi, un simple calcul nous donne que :

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho) d\theta + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_{rr} f(\theta, 0, 0, \rho) \nabla_\theta S_0(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_{rr} f(\theta, 0, 0, \rho) \nabla_\theta S_1(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^n} \nabla_r \langle \nabla_\zeta (f - f^T), J \nabla_\zeta S_1 \rangle(\theta, 0, 0, \rho) d\theta \\ &= \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4. \end{aligned}$$

Pour  $\hat{\omega}_1$  on a :

$$|\hat{\omega}_1| \leq \frac{\varepsilon}{\mu^2}.$$

Pour  $\hat{\omega}_2$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy et l'estimation (3.3.35), on obtient :

$$\begin{aligned} |\hat{\omega}_2| &\leq \|\nabla_\zeta^2 f(\theta, 0, 0, \rho)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|\nabla_\theta S_0(\theta, 0, 0, \rho)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{1}{\mu^2 - \mu'^2} \sup_{x \in \mathcal{O}_\mu(\mathbb{R}^n)} (\|\nabla_r f(x)\|_{\mathbb{R}^n}) \|\nabla_\theta S_0(\theta, 0, 0, \rho)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{2n} \kappa \mu^2 (\mu^2 - \mu'^2)} \varepsilon \Xi. \end{aligned}$$

De même pour  $\hat{\omega}_3$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy et l'estimation (3.3.36), on obtient :

$$|\hat{\omega}_3| \leq \frac{C \mu'}{(\sigma - \sigma')^{4n+1} \kappa^2 \mu^5 (\mu^2 - \mu'^2)} \varepsilon \Xi^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, l'estimation (3.2.4) du Lemme 3.2.3 et l'estimation (3.3.36), on obtient que  $\hat{\omega}_4$  vérifie :

$$|\hat{\omega}_4| \leq \frac{C \mu'^2}{(\sigma - \sigma')^{4n+1} \kappa^2 \mu^6 (\mu^2 - \mu'^2)} \varepsilon \Xi^2.$$

De même on montre que  $\partial_\rho \hat{\omega}$  vérifie la même estimation que  $\hat{\omega}$  pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ .

Il reste à montrer l'estimation (3.3.31). On peut décomposer  $K$  comme suit :

$$\hat{K} = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \hat{K}_3,$$

avec  $K_1$  provenant de la résolution de l'équation (3.3.34a),  $K_2$  de (3.3.34b), et  $K_3$  de la résolution de l'équation (3.3.34c). D'après l'estimation (3.3.24) du Théorème 3.3.10, on a pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  :

$$|\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq \frac{\llbracket \partial_\rho^j f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}}{\mu^2}, \quad |\partial_\rho^j \hat{K}_i(\rho)|_\beta \leq \frac{\llbracket \partial_\rho^j f_i^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}}{\mu^2},$$

pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $j \in \{0, 1\}$ . On conclut en utilisant les estimations obtenues sur  $f_1$  et  $f_2$ .  $\square$

### 3.4 Preuve du théorème KAM.

Dans cette partie on donne la preuve du théorème KAM (3.1.2). On décompose la preuve en deux étapes : une étape élémentaire et une étape itérative.

#### 3.4.1 Étape élémentaire.

Considérons un hamiltonien  $h$  sous forme normale

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle,$$

où  $A = D + N$ , avec  $D$  définie comme dans (3.1.2) et  $N \in \mathcal{NF} \cap \mathcal{M}_\beta$  pour  $\beta > 0$ . On suppose que les fréquences internes  $\omega$  et la matrice  $D$  vérifient les hypothèses A1, A2 et A3 alors que  $N$  vérifie l'hypothèse B. Pour  $j = 0, 1$  on considère une perturbation  $f$  tel que  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  de taille  $\varepsilon$ . On cherche un jet de fonction  $S$  afin de construire un changement de variable symplectique  $\Phi_S^1$  proche de l'identité tel que :

$$(h + f) \circ \Phi_S = h_1 + f_1, \quad \text{avec } (f_1)^T \simeq \mathcal{O}(\varepsilon^\gamma), \quad \gamma > 1$$

$h_1$  est la nouvelle forme normale proche de  $h_1$ , c'est à dire  $|h_1 - h| \simeq \mathcal{O}(\varepsilon)$ , avec :

$$h_1 = h + \hat{h}.$$

D'après la section précédente  $S$  est solution de l'équation homologique non-linéaire :

$$\{h, S\} + \{f - f^T, S\} + f^T = \hat{h} + R.$$

En utilisant la formule de Taylor on a :

$$\begin{aligned} (h + f) \circ \Phi_S^1 &= h + f + \{h + f, S\} + \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt \\ &= h + \hat{h} + \{h, S\} - \hat{h} + f + \{f, S\} \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt. \end{aligned}$$

Or d'après l'équation homologique non-linéaire :

$$\{h, S\} - \hat{h} = R - \{f - f^T, S\}^T - f^T.$$

Donc

$$\begin{aligned} (h + f) \circ \Phi_S^1 &= h + \hat{h} + R + (f - f^T) + \{f, S\} - \{f - f^T, S\}^T \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt \\ &= h_1 + f_1, \end{aligned}$$

avec

$$f_1 = R + (f - f^T) + \{f, S\} - \{f - f^T, S\}^T \\ + \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt.$$

**Remarque 3.4.1.** Si  $S$  est solution de l'équation homologique linéaire :

$$\{h, S\} + f^T = \hat{h} + R.$$

alors

$$(h + f) \circ \Phi_S^1 = h_1 + f_1,$$

avec

$$f_1 = R + (f - f^T) \circ \Phi_S^1 + \int_0^1 \{(1-t)(\hat{h} + R + tf^T, S)\} \circ \Phi_S^t dt.$$

Dans les itérations du théorème KAM le terme  $(f - f^T) \circ \Phi_S^1$  est très défavorable. Pour avoir un contrôle sur le jet de la perturbation à chaque étape on est amené à estimer le terme  $\left((f - f^T) \circ \Phi_S^1\right)^T$ . Ce terme est difficile à contrôler. Pour cela on résout l'équation homologique non linéaire. De plus on remarque que

$$f_1^T = R + \{f^T, S\}^T + \left(\int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt\right)^T. \quad (3.4.1)$$

**Lemme 3.4.2.** Soit  $0 < \kappa < \frac{\delta}{4} \leq \frac{1}{8} \min(c_0, c_1)$ ,  $N \geq 1$ ,  $0 < \sigma' < \sigma \leq 1$  et  $0 < \mu' < \frac{\mu}{2}$ . Supposons que les hypothèses A et B sont réalisées, que pour  $j = 0, 1$  on a  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ , que  $R$  satisfait l'estimation (3.3.28) et que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  on a  $\partial_\rho^j S \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}', \sigma', \mu)$ , vérifie l'inégalité (3.3.29). Si

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq \frac{\kappa^3 (\sigma - \sigma')^{6n+3} \mu^5 \mu'}{\mu^3 \mu' \kappa^2 + \kappa \mu' \Xi + \Xi^2}, \quad (3.4.2)$$

alors  $\partial_\rho^j f_1 \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}', \sigma', \mu')$  et on a

$$\llbracket f_1 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq C \left( \frac{\Delta}{\Pi} + \frac{\Xi}{\Pi \kappa \mu^2} + \frac{\mu' \Xi}{\Pi \kappa \mu^3} + \frac{(\Delta + 1) X \varepsilon}{\Pi^2 \kappa \mu'^2} + \frac{X \varepsilon \Xi}{\Pi \kappa \mu'^4} \right) X \varepsilon \\ + \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 \Xi, \quad (3.4.3)$$

$$\llbracket f_1^T \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq C \left( \frac{\Delta}{\Pi} + \frac{\varepsilon}{\Pi \kappa \mu'^2} + \frac{(\Delta + 1) X \varepsilon}{\Pi^2 \kappa \mu'^2} + \frac{X \varepsilon \Xi}{\Pi \kappa \mu'^4} \right) X \varepsilon. \quad (3.4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} X &= 1 + \frac{\mu' \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}}{\kappa \mu^3} + \frac{(\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa})^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'}, \\ \Delta &= e^{-(\sigma - \sigma')N/10}, \quad \Pi = (\sigma - \sigma')^{6(2n+1)}, \\ \varepsilon &= \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, \quad \Xi = \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, \end{aligned}$$

La constante  $C > 0$  dépend de  $n$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

*Preuve.* On considère  $\sigma' := \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0 =: \sigma$  une progression arithmétique, et  $\mu' := \mu_3 < \mu_2 < \mu_1 < \mu_0 =: \mu$  une progression géométrique.

Rappelons que la nouvelle perturbation  $f_1$  est donnée par :

$$f_1 = R + (f - f^T) + \{f, S\} - \{f - f^T, S\}^T + \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt.$$

On la décompose comme suit :

$$\begin{aligned} f_1^1 &= R, \quad f_1^2 = f - f^T, \quad f_1^3 = \{f, S\}, \quad f_1^4 = \{f - f^T, S\}, \\ f_1^5 &= \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt. \end{aligned}$$

On pose

$$\varepsilon = \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, \quad \Xi = \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}.$$

- Commençons par estimer  $\llbracket f_1^1 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}$ . D'après la Proposition 3.3.12, l'estimation (3.3.28) nous donne

$$\llbracket f_1^1 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq \frac{C\Delta}{(\sigma - \sigma')^{5n+2}} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \varepsilon.$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de  $n$ , de  $\beta$ , de  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

- Pour estimer  $\llbracket f_1^2 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}$  on utilise l'estimation (3.2.4) du Lemme 3.2.3. On a alors :

$$\llbracket f_1^2 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq 2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 \Xi.$$

- Pour estimer  $\llbracket f_1^3 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}$ , on utilise le Lemme 3.2.4. On obtient alors

$$\begin{aligned} \llbracket f_1^3 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma') \mu^2} \Xi \llbracket S \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \\ &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{6n+3} \kappa \mu^2} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \varepsilon \Xi. \end{aligned}$$

- Pour  $\llbracket f_1^4 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}$ , on commence par utiliser l'estimation (3.2.4) du Lemme 3.2.3. On obtient alors

$$\llbracket f_1^4 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq 3 \llbracket \{f - f^T, S\} \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}.$$

En utilisant le Lemme 3.2.4 puis l'estimation (3.2.4) du Lemme 3.2.3, on obtient

$$\begin{aligned} \llbracket f_1^4 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma') \mu'^2} \llbracket f - f^T \rrbracket_{\sigma_1, \mu_1, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \llbracket S \rrbracket_{\sigma_1, \mu_1, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \\ &\leq \frac{C \mu'}{(\sigma - \sigma')^{6n+3} \kappa \mu^3} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \varepsilon \Xi. \end{aligned}$$

- Il reste à étudier le terme  $f_1^5$ . On peut décomposer ce terme en  $f_1^5 = f_1^6 + f_1^7$ , avec

$$f_1^6 = \int_0^1 (1-t) \{ \hat{h} + R - f^T, S \} \circ \Phi_S^t dt,$$

$$f_1^7 = \int_0^1 (1-t) \{ \{ f, S \} - \{ f - f^T, S \}^T, S \} \circ \Phi_S^t dt$$

On commence par étudier  $f_1^6$ . D'après la Proposition 3.3.12 on a :

$$\begin{aligned} \llbracket \hat{h} + R - f^T \rrbracket_{\sigma_2, \mu_2, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq C \left[ 2 + \frac{\mu'}{(\sigma - \sigma')^{2n+1} \kappa \mu^3} \Xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\sigma - \sigma')^{4n+2} \kappa \mu^3 \mu'} \Xi^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta}{(\sigma - \sigma')^{5n+2}} \left( 1 + \frac{\Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \right] \varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 3.2.8 sous l'hypothèse (3.4.2) puis le Lemme 3.2.4, on obtient :

$$\begin{aligned} \llbracket f_1^6 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} &\leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{6n+3} \kappa \mu'^2} \left[ 2 + \frac{\mu'}{(\sigma - \sigma')^{2n+1} \kappa \mu^3} \Xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\sigma - \sigma')^{4n+2} \kappa \mu^3 \mu'} \Xi^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta}{(\sigma - \sigma')^{5n+2}} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \right] \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right) \Xi^2. \end{aligned}$$

De même on montre que

$$\llbracket f_1^7 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa} \leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^{6n+4} \kappa \mu'^4} \left( 1 + \frac{\mu' \Xi}{\kappa \mu^3} + \frac{\Xi^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'} \right)^2 \varepsilon^2 \Xi.$$

En posant

$$\begin{aligned} X &= 1 + \frac{\mu' \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}}{\kappa \mu^3} + \frac{(\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa})^2}{\kappa^2 \mu^3 \mu'}, \\ \Delta &= e^{-(\sigma - \sigma')N/10}, \quad \Pi = (\sigma - \sigma')^{6(2n+1)}, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \llbracket f_1 \rrbracket \leq & C \left( \frac{\Delta}{\Pi} + \frac{\Xi}{\kappa \mu^2 \Pi} + \frac{\mu' \Xi}{\Pi \mu^3 \kappa} + \frac{(\Delta + 1) X \varepsilon}{\kappa \Pi^2 \mu'^2} + \frac{X \varepsilon \Xi}{\kappa \Pi \mu'^4} \right) X \varepsilon \\ & + \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 \Xi. \end{aligned}$$

On rappelle que

$$f_1^T = R + \{f^T, S\}^T + \left( \int_0^1 (1-t) \{ \{h + f, S\}, S \} \circ \Phi_S^t dt \right)^T.$$

De même on montre que

$$\llbracket f_1^T \rrbracket \leq C \left( \frac{\Delta}{\Pi} + \frac{\varepsilon}{\kappa \mu'^2 \Pi} + \frac{(\Delta + 1) X \varepsilon}{\kappa \Pi^2 \mu'^2} + \frac{X \varepsilon \Xi}{\kappa \Pi \mu'^4} \right) X \varepsilon.$$

□

### 3.4.2 Initialisation du schéma KAM

Rappelons tout d'abord les données du problème et ce qu'on veut obtenir. On considère un hamiltonien  $h$  sous forme normale donnée par :

$$h(\rho) = \omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle,$$

où  $A = D + N$ , avec  $D$  définie comme dans (3.1.2) et  $N \in \mathcal{NF} \cap \mathcal{M}_\beta$ . On suppose que les fréquences internes  $\omega$  et la matrice  $D$  vérifient les hypothèses A1 et A2 et A3 alors que  $N$  vérifie l'hypothèse B. Pour  $j = 0, 1$  on considère une perturbation  $f$  tel que  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ . On veut construire un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi : \mathcal{O}^\alpha \left( \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu),$$

tel que :

$$(h + f) \circ \Phi = \tilde{h} + \tilde{f}.$$

$\tilde{h}$  est une forme normale proche de  $h$  et  $\tilde{f}$  est la nouvelle perturbation telle que son jet est nul. Le changement de variables  $\Phi$  sera construit itérativement. En effet

$$\Phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_1 \circ \Phi_2 \dots \circ \Phi_k.$$

Chaque  $\Phi_k$  sera le flot à  $t = 1$  d'un certain Hamiltonien  $S_k$ . Cet Hamiltonien sera un jet de fonction et sera la solution de l'équation homologique non-linéaire à l'étape  $k$ . Regardons ce qui se passe à la première itération. Pour alléger les notations on notera  $\Phi = (\Phi_S^{t=1})_1$  le premier changement de variable. On a :

$$(h + f) \circ \Phi = h_1 + f_1.$$

Pour  $\varepsilon$  petit, on veut que si  $f^T = O(\varepsilon)$ , alors  $f_1^T = O(\varepsilon^\gamma)$  avec  $\gamma > 1$ .

D'après la Proposition 3.3.12, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  la nouvelle forme normale est donnée par  $h_1 = h + \hat{h}$ , avec :

$$\hat{h}(\rho) = \hat{\omega}(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, \hat{K}(\rho) \zeta \rangle.$$

à une constante près. Le vecteur fréquence  $\hat{\omega}$  satisfait l'estimation (3.3.30), alors que la matrice  $\hat{K}$  satisfait l'estimation (3.3.31).

On peut réécrire cette nouvelle forme normale à une constante près sous la forme :

$$\begin{aligned} h_1(\rho) &= (\omega(\rho) + \hat{\omega}(\rho)) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, (A(\rho) + \hat{K}(\rho)) \zeta \rangle \\ &= \omega_1(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_1(\rho) \zeta \rangle. \end{aligned}$$

L'hamiltonien  $S$  sera solution de l'équation homologique :

$$\{h, S\} + \{f - f^T, S\} + f^T = \hat{h} + R.$$

où  $R$  est un jet de fonction..

On rappelle que la nouvelle perturbation  $f_1$  est donnée par :

$$f_1 = R + (f - f^T) + \{f, S\} - \{f - f^T, S\} + \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt,$$

et que son jet est donné par :

$$f_1^T = R + \{f^T, S\}^T + \left( \int_0^1 (1-t) \{\{h + f, S\}, S\} \circ \Phi_S^t dt \right)^T.$$

Pour montrer que  $f_1^T = O(\varepsilon^\gamma)$  avec  $\gamma > 1$ , on fait le choix suivant de paramètres :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, & \varepsilon_1 &= \llbracket f_1^T \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}, \\ \Xi &= \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = O(\varepsilon^\tau) & \tau &\in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right], \\ \Xi_1 &= \llbracket f_1 \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} \\ \sigma_1 &= \frac{3}{4} \sigma, \\ \mu &= \frac{3}{4} \mu, \\ N &= 10(\sigma - \sigma_1)^{-1} \ln(\varepsilon^{-1}), \\ \kappa &= \varepsilon^{1/20}. \end{aligned}$$

**Lemme 3.4.3.** *Il existe un fermé  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  et  $\gamma > 0$  tel que*

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq \varepsilon^\gamma.$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , il existe un changement de variable symplectique analytique

$$\Phi : \mathcal{O}^\alpha(\sigma', \mu') \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu),$$

tel que

$$(h + f) \circ \varphi = h_1 + f_1.$$

De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  et  $j = 0, 1$  on a :

$$|\partial_\rho^j (A_1(\rho) - A(\rho))|_\beta = |\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq C\varepsilon \quad (3.4.5)$$

$$|\partial_\rho^j (\omega_1(\rho) - \omega(\rho))| \leq C\varepsilon \quad (3.4.6)$$

$$\|\Phi(x, \rho) - x\|_\alpha \leq \varepsilon^{9/10} \text{ pour tout } x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu), \quad (3.4.7)$$

$C > 0$  et dépend de  $n$ , de  $\beta$ , de  $\sigma$ , de  $\mu$ , de  $|\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ .

De plus, le jet de la nouvelle perturbation vérifie

$$\Xi_1 \leq \varepsilon^{7/5} + \Xi, \quad (3.4.8)$$

et son jet vérifie

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon^{8/5}. \quad (3.4.9)$$

*Preuve.* L'existence du fermé  $\mathcal{D}'$  et du changement de variable  $\Phi$  découle directement du Proposition 3.3.12. De plus d'après le choix des paramètres on a :

$$\text{mes } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}' \leq Cd(\kappa\delta^{-1})^t N^v \leq \varepsilon^\gamma.$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , d'après l'estimation (3.3.31) et le choix des paramètres, on a :

$$|\partial_\rho^j (A_1(\rho) - A(\rho))|_\beta \leq |\partial_\rho^j \hat{K}(\rho)|_\beta \leq C\varepsilon, \quad j = 0, 1,$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Pour les fréquences, d'après l'estimation (3.3.30) et le choix des paramètres on a :

$$|\partial_\rho^j (\omega_1(\rho) - \omega(\rho))| = |\partial_\rho^j \hat{\omega}(\rho)| \leq C\varepsilon, \quad j = 0, 1,$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Pour  $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$  on rappelle que :

$$\|(r, \theta, \zeta)\|_\alpha = \max(|r|, |\theta|, \|\zeta\|_\alpha).$$

D'après la Proposition 3.2.6, l'estimation (3.3.29) et le choix des paramètres on a

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - x\|_\alpha &\leq \frac{\llbracket S \rrbracket_{\sigma', \mu, \mathcal{D}_1}^{\alpha, \beta+, \kappa}}{(\sigma - \sigma')\mu^2} \leq \frac{C}{\Pi(\sigma - \sigma_1)\mu^2\kappa} \left( 1 + \frac{\mu'}{\kappa\mu^3}\Xi + \frac{1}{\kappa^2\mu^3\mu'}\Xi^2 \right) \varepsilon, \\ &\leq \tilde{C}\varepsilon^{19/20} \leq \varepsilon^{9/10}. \end{aligned}$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Il reste à démontrer les estimations (3.4.8) et (3.4.9). D'après les choix des paramètres, l'hypothèse (3.4.2) est vérifiée. En effet on a :

$$\frac{\kappa^3(\sigma - \sigma')^{6n+3}\mu^5\mu'}{\mu^3\mu'\kappa^2 + \kappa\mu'\Xi + \Xi^2} \geq C\varepsilon^{1/20} \geq \varepsilon = \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}},$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. La constante  $C$  dépend de  $\sigma$  et  $\mu$ . Donc on est en mesure d'appliquer le Lemme 3.4.2. D'après le choix des paramètres on a :

$$\begin{aligned} X &= 1 + \frac{3}{4\mu^2}\varepsilon^{-1/20}O(\varepsilon^\tau) + \frac{4}{3\mu^4}\varepsilon^{-1/10}O(\varepsilon^{2\tau}), \quad \tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ &\leq 1 + \frac{3}{4\mu^2}\varepsilon^{9/20} + \frac{4}{3\mu^4}\varepsilon^{8/10} \leq 3, \\ \Delta &= e^{-(\sigma - \sigma_1)N/10} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'estimation 3.4.3 on obtient :

$$\begin{aligned} \Xi &\leq \frac{C}{\Pi} \left( \varepsilon + \frac{1}{\mu^2}\varepsilon^{9/20} + \frac{4}{3\mu^2}\varepsilon^{9/20} + \frac{48}{9\Pi\mu^2}(\varepsilon + 1)\varepsilon^{19/20} + \frac{256}{27\mu^4}\varepsilon^{29/20} \right) \varepsilon \\ &\quad + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Xi \\ &\leq \tilde{C}\varepsilon^{29/20} + \Xi \leq \varepsilon^{7/5} + \Xi. \end{aligned}$$

De même, d'après l'estimation (3.4.4), le jet de la nouvelle perturbation vérifie :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq \frac{C}{\Pi} \left( \varepsilon + \frac{1}{\mu^2}\varepsilon^{19/20} + \frac{48}{9\Pi\mu^2}(\varepsilon + 1)\varepsilon^{19/20} + \frac{256}{27\mu^4}\varepsilon^{29/20} \right) 3\varepsilon \\ &\leq \tilde{C}\varepsilon^{39/20} \leq \varepsilon^{8/5}, \end{aligned}$$

pour  $\varepsilon$  petit. Ce qui termine la preuve de la première itération.  $\square$

**Remarque 3.4.4.** • *Pour pouvoir réitérer à nouveau on a besoin que la nouvelle fréquence soit à une distance de  $\delta_0$  de la fréquence de départ. Pour cela on impose d'après (3.4.6) que :*

$$\frac{\varepsilon}{\mu^2} \leq \delta_0 \leq \delta.$$

• *De même pour pouvoir réitérer il faut que la matrice  $\hat{K}$  satisfait l'hypothèse B (3.1.4). Pour cela, d'après l'estimation (3.4.5), on impose que :*

$$\frac{\varepsilon}{\mu^2} \leq \frac{\delta}{8}. \quad (3.4.10)$$

### 3.4.3 Choix des paramètres

On est maintenant en position de prouver le Théorème 3.1.2.

Supposons qu'on est dans le même cadre que dans l'étape élémentaire. D'après l'initialisation du schéma KAM et le Lemme 3.4.3, on suppose qu'on a construit le premier changement de variable symplectique, la première forme normale qui vérifie les hypothèses de non résonances et la nouvelle perturbation. Avec le choix de paramètres mentionné ci-dessus pour la première itération, on obtient en posant  $\varepsilon = \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}$ ,  $\varepsilon_1 = \llbracket f_1^T \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}$ ,  $\Xi = \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}$  et  $\Xi_1 = \llbracket f_1 \rrbracket_{\sigma', \mu', \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa}$  que :

$$\Xi_1 \leq \varepsilon^{4/3} + \Xi, \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon^{8/5}.$$

Pour pouvoir réitérer de nouveaux, on suppose d'après la remarque 3.4.4 que

$$\varepsilon < \frac{1}{8} \delta \mu^2.$$

Soit  $k \geq 1$ , d'après le Proposition 3.3.12 on suppose qu'on a construit un hamiltonien  $h_k = h_{k-1} + \hat{h}_{k-1} = \omega_k \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_k(\rho) \zeta \rangle$  sous forme normale, une nouvelle perturbation  $f_k$  et un jet de fonction  $S_k$  tel que :

$$\{h_k, S_k\} + \{f_k - f_k^T, S_k\}^T + f_k^T = \hat{h}_k + R_k.$$

Faisons un choix de paramètres pour faire converger le schéma KAM.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, & \Xi_0 &= \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}, & \sigma_0 &= \sigma, & \mu_0 &= \mu, \\ \varepsilon_k &= \llbracket f_k^T \rrbracket_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k}^{\alpha, \beta, \kappa_k}, & \Xi_k &= \llbracket f_k \rrbracket_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k}^{\alpha, \beta, \kappa_k}, \\ \Xi_0 &= O(\varepsilon_0^\tau) \quad \tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ \sigma_k &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \sigma, \quad k \geq 0 \\ \mu_k &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \mu, \quad k \geq 0, \\ N_k &= 10(\sigma_k - \sigma_{k+1})^{-1} \ln(\varepsilon_k^{-1}), \quad k \geq 0, \\ \kappa_k &= \varepsilon_k^{1/20} \quad k \geq 0, \\ \mathcal{O}(k) &= \mathcal{O}^\alpha(\sigma_k, \mu_k), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

Rappelons que la perturbation à l'étape  $k+1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= R_k + (f_k - f_k^T) + \{f_k, S_k\} - \{f_k - f_k^T, S_k\} \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \{ \{h_k + f_k, S_k\}, S_k \} \circ \Phi_{S_k}^t dt. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (3.4.3), elle vérifie

$$\begin{aligned} \Xi_{k+1} \leq C & \left( \frac{\Delta_k}{\Pi_k} + \frac{\Xi_k}{\Pi_k \kappa_k \mu_k^2} + \frac{\mu_{k+1} \Xi_k}{\Pi_k \kappa_k \mu_k^3} + \frac{(\Delta_k + 1) X_k \varepsilon_k}{\Pi_k^2 \kappa_k \mu_{k+1}^2} + \frac{X_k \varepsilon_k \Xi_k}{\Pi_k \kappa_k \mu_{k+1}^4} \right) X_k \varepsilon_k \\ & + \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \right)^3 \Xi_k. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} X_k &= 1 + \frac{\mu_{k+1} \Xi_k}{\kappa_k \mu_k^3} + \frac{\Xi_k^2}{\kappa_k^2 \mu_k^3 \mu_{k+1}}, \\ \Delta_k &= e^{-(\sigma_k - \sigma_{k+1})N/10}, \quad \Pi_k = (\sigma_k - \sigma_{k+1})^{6(2n+1)}. \end{aligned}$$

Le jet de la perturbation à l'étape  $k + 1$  est donné par

$$f_{k+1}^T = R_k + \{f_k^T, S_k\}^T + \left( \int_0^1 (1-t) \{h_k + f_k, S_k\}, S_k \} \circ \Phi_{S_k}^t dt \right)^T,$$

et il vérifie d'après l'estimation (3.4.4)

$$\varepsilon_{k+1} \leq C \left( \frac{\Delta_k}{\Pi_k} + \frac{\varepsilon_k}{\Pi_k \kappa_k \mu_{k+1}^2} + \frac{(\Delta_k + 1) X_k \varepsilon_k}{\Pi_k^2 \kappa_k \mu_{k+1}^2} + \frac{X_k \varepsilon_k \Xi_k}{\Pi_k \kappa_k \mu_{k+1}^4} \right) X_k \varepsilon_k.$$

Ici on voit que  $\varepsilon_0$  dépend de  $n, \alpha, \beta, \sigma, \mu, |\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

**Lemme 3.4.5.** *Pour le choix de paramètres précédent, on a*

$$\Xi_{k+1} \leq \varepsilon_k^{4/5} + \Xi_k, \tag{3.4.11}$$

$$\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k^{8/5}, \tag{3.4.12}$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour  $\varepsilon_0$  assez petit.

*Preuve.* On procède par récurrence. Pour  $k = 0$  les estimations (3.4.8) et (3.4.9) sont vérifiées.

Supposons que

$$\begin{aligned} \Xi_k &\leq \varepsilon_{k-1}^{4/5} + \Xi_{k-1}, \\ \varepsilon_k &\leq \varepsilon_{k-1}^{8/5}. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence nous donne que :

$$\Xi_k \leq \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j^{4/5} + \varepsilon_0^T \leq \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_0^{4/5 \left(\frac{8}{5}\right)^j} + \varepsilon_0^T \leq 2\varepsilon_0^T.$$

Le choix de paramètres nous donne que :

$$\Delta_k = e^{-(\sigma_k - \sigma_{k+1})N/10} = \varepsilon_k, \quad \Pi_k = (\sigma_k - \sigma_{k+1})^{6(2n+1)} = \left( \frac{\sigma}{2^{k+2}} \right)^{6(2n+1)}.$$

D'après l'estimation (3.4.3), on a

$$\begin{aligned} \Xi_{k+1} &\leq \frac{C}{\Pi_k} X_k \varepsilon_k^2 + \frac{C}{\Pi_k} \left( \frac{\Xi_k}{\mu_k^2} + \frac{\mu_{k+1} \Xi_k}{\mu_k^3} + \frac{(\varepsilon_k + 1) X_k \varepsilon_k}{\Pi_k \mu_{k+1}^2} + \frac{X_k \varepsilon_k \Xi_k}{\mu_{k+1}^4} \right) X_k \varepsilon_k^{\frac{19}{20}} \\ &\quad + \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \right)^3 \Xi_k. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} X_k \varepsilon_k &= \varepsilon_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^3} \varepsilon_k^{19/20} \Xi_k + \frac{1}{\mu_k^3 \mu_{k+1}} \varepsilon_k^{9/10} \Xi_k \\ &\leq \varepsilon_k + \frac{2\mu_{k+1}}{\mu_k^3} \varepsilon_k^{19/20} \varepsilon_0^\tau + \frac{1}{\mu_k^3 \mu_{k+1}} \varepsilon_k^{9/10} \varepsilon_0^\tau \\ &\leq \tilde{C} \varepsilon_k^{9/10} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Xi_{k+1} \leq C t \varepsilon_k^{17/20} + \Xi_k \leq \varepsilon_k^{4/5} + \Xi_k.$$

Il reste à montrer que  $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k^{8/5}$ . D'après l'estimation (3.4.4) et le choix des paramètres, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\leq \frac{C}{\Pi_k} X_k \varepsilon_k^2 + \frac{C}{\Pi_k} \left( \frac{1}{\mu_{k+1}^2} \varepsilon_k^{\frac{19}{20}} + \frac{\varepsilon_k + 1}{\Pi_k \mu_{k+1}^2} X_k \varepsilon_k^{\frac{19}{20}} + \frac{1}{\mu_{k+1}^4} X_k \varepsilon_k^{\frac{19}{20}} \right) X_k \varepsilon_k \\ &\leq C t \varepsilon_k^{17/20} \varepsilon_k^{9/10} \leq \varepsilon_k^{8/5}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

### 3.4.4 Lemme itératif

Regardons à présent une étape quelconque du schéma KAM. Pour l'initialisation on pose  $h_0(\rho) = \omega_0(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_0(\rho) \zeta \rangle$ ,  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ ,  $f_0 = f$  avec  $\partial_\rho^j f_0 \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\sigma_0, \mu_0, \mathcal{D}_0)$  pour  $j = 0, 1$ . Supposons que  $\llbracket f_0^T \rrbracket_{\sigma_0, \mu_0, \mathcal{D}_0}^{\alpha, \beta, \kappa_0} = \varepsilon_0$ , et  $\Xi_0 = \llbracket f_0 \rrbracket_{\sigma_0, \mu_0, \mathcal{D}_0}^{\alpha, \beta, \kappa_0}$ .

**Lemme 3.4.6.** *Supposons qu'il existe une constante  $\varepsilon_0$  strictement positive qui dépend de  $n, \alpha, \beta, \sigma, \mu, |\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$  tel que :*

$$\varepsilon_0 \leq \delta \mu^2. \quad (3.4.13)$$

Supposons de plus que :

$$\Xi_0 = O(\varepsilon^\tau), \text{ avec } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1,$$

alors pour tout  $k \geq 1$  il existe un fermé  $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k-1}$ , un jet de fonction  $S_{k-1}$  tel que  $\partial_\rho^j S_{k-1} \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k)$  pour  $j = 0, 1$ , une forme normale définie sur  $\mathcal{D}_k$  par  $h_k(\rho) = \omega_k \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_k(\rho) \zeta \rangle$  et une perturbation  $f_k$  qui vérifie  $\partial_\rho^j f_k \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k)$  tel que :

$$\Phi_k = \Phi_{S_{k-1}}^1(\cdot, \rho) : \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}(k-1), \quad \rho \in \mathcal{D}_k,$$

est un changement de variable symplectique analytique qui vérifie :

$$(h_{k-1} + f_{k-1}) \circ \Phi_k = h_k + f_k.$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{D}_{k-1} \setminus \mathcal{D}_k) &\leq \varepsilon_{k-1}^\gamma, \quad \text{pour } \gamma > 0, \\ \llbracket f_k^T \rrbracket_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k}^{\alpha, \beta, \kappa_k} &\leq \varepsilon_k, \\ |\partial_\rho^j (A_k - A_{k-1})|_\beta &= |\hat{\partial}_\rho^j K_{k-1}|_\beta \leq C \varepsilon_{k-1}^{9/10}, \quad j = 0, 1, \\ |\partial_\rho^j (\omega_k - \omega_{k-1})| &\leq C \varepsilon_{k-1}^{9/10}, \quad j = 0, 1, \\ \|\Phi_k(x, \rho) - x\|_\alpha &\leq \varepsilon_{k-1}^{4/5} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{O}(k), \rho \in \mathcal{D}_k, \end{aligned}$$

$C > 0$  et dépend de  $n$ , de  $\beta$ , de  $\sigma$ , de  $\mu$ , de  $|\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

*Preuve.* Supposons, d'après le Lemme 3.4.3, qu'à la première étape on a construit le fermé de paramètre  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0$  qui vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \leq \varepsilon_0^\gamma,$$

tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$  il existe un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi_1 = \Phi_{S_0}^{t=1} : \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}(0).$$

Ce changement de variable vérifie :

$$(h + f) \circ \Phi_1 = h_1 + f_1,$$

avec  $h_1(\rho) = \omega_1.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_1(\rho)\zeta \rangle$ . D'après les estimations (3.4.5)-(3.4.7), on a :

$$|\partial_\rho^j (A_1(\rho) - A_0(\rho))|_\beta \leq \frac{\varepsilon_0}{\mu_0^2}, \quad |\partial_\rho^j (\omega_1(\rho) - \omega_0(\rho))| \leq \frac{\varepsilon_0}{\mu_0^2},$$

$$\|\Phi_1(x, \rho) - x\|_\alpha \leq \varepsilon^{9/10} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu),$$

Ce qui achève la première étape. La condition (3.4.13) nous permet de continuer à vérifier l'hypothèse B et les conditions de non résonance. On peut donc réitérer. Supposons qu'on a terminé l'étape  $k-1$  par itération du procédé précédent. On veut passer à l'étape  $k$ . Par construction la matrice  $A_{k-1}$  est sous la forme :

$$A_{k-1} = A_{k-2} + \hat{K}_{k-2} = A_0 + \hat{K}_0 + \hat{K}_1 + \dots + \hat{K}_{k-2}.$$

D'après (3.3.31) et le Lemme 3.4.5, on a

$$|\partial_\rho^j (A_{k-1}(\rho) - A_{k-2}(\rho))|_\beta \leq |\partial_\rho^j \hat{K}_{k-2}(\rho)|_\beta \leq C \varepsilon_{k-2}^{9/10} \leq \frac{\delta}{8}.$$

La fréquence  $\omega_{k-1}$  est sous la forme

$$\omega_{k-1} = \omega_0 + \sum_{0 \leq j \leq k-2} \hat{\omega}_j,$$

de plus elle vérifie d'après l'estimation (3.3.30) et le Lemme 3.4.5

$$|\omega_{k-1} - \omega_0| \leq C \sum_{0 \leq j \leq k-2} \varepsilon_j^{9/10} \leq \delta_0.$$

Donc on peut appliqué la Proposition 3.3.12. Ainsi il existe un fermé  $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k-1}$  qui vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D}_{k-1} \setminus \mathcal{D}_k) \leq C(\kappa_k \delta^{-1})^l N_k^v \leq \varepsilon_k^\gamma, \quad \text{pour } \gamma > 0.$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_k$ , il existe un jet de fonction  $S_{k-1}$  tel que  $\partial_\rho^j S_{k-1} \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k)$  pour  $j = 0, 1$ . De plus on a

$$\llbracket S_{k-1} \rrbracket_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}_k}^{\alpha, \beta+, \kappa_{k-1}} \leq \frac{C}{\prod_{k-1} \kappa_{k-1}} \left( 1 + \frac{\mu_k}{\kappa_{k-1} \mu_{k-1}^3} \Xi_{k-1} + \frac{1}{\kappa_{k-1}^2 \mu_{k-1}^3 \mu_k} \Xi_{k-1}^2 \right) \varepsilon_{k-1}.$$

La transformation canonique associé à  $S_{k-1}$  est analytique tel que

$$\Phi_k = \Phi_{S_{k-1}}^1(\cdot, \rho) : \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}(k-1), \quad \rho \in \mathcal{D}_k.$$

Cette transformation vérifie :

$$(h_{k-1} + f_{k-1}) \circ \Phi_k = h_k + f_k.$$

Par construction  $h_k(\rho) = \omega_k \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A_k(\rho) \zeta \rangle$ . D'après (3.3.31) et le Lemme 3.4.5 et le choix des paramètres, on a pour  $j = 0, 1$

$$\begin{aligned} |\partial_\rho^j (A_k(\rho) - A_{k-1}(\rho))|_\beta &\leq |\partial_\rho^j \hat{K}_{k-1}(\rho)|_\beta \\ &\leq C \left( 1 + \frac{\mu_k \Xi_{k-1}}{\prod_{k-1} \kappa_{k-1} \mu_{k-1}^3} + \frac{\mu_k^2 \Xi_{k-1}^2}{\prod_{k-1} \mu_{k-1}^6 \kappa_{k-1}^2} \right) \frac{\varepsilon_{k-1}}{\mu_{k-1}^2} \\ &\leq C \varepsilon_{k-1}^{9/10}. \end{aligned}$$

La fréquence  $\omega_k$  est sous la forme

$$\omega_k = \omega_{k-1} + \hat{\omega}_{k-1},$$

de plus elle vérifie d'après l'estimation (3.3.30) le Lemme 3.4.5 et le choix des paramètres

$$\begin{aligned} |\partial_\rho^j (\omega_k - \omega_{k-1})| &= |\partial_\rho^j \hat{\omega}_{k-1}| \\ &\leq \left[ 1 + \frac{\Xi_{k-1}}{\prod_{k-1} \kappa_{k-1} (\mu_{k-1}^2 - \mu_k^2)} \left( 1 + \frac{\mu_k \Xi_{k-1}}{\kappa_{k-1} \mu_{k-1}^3} + \frac{\mu_k^2 \Xi_{k-1}}{\kappa_{k-1} \mu_{k-1}^4} \right) \right] \frac{\varepsilon_{k-1}}{\mu_{k-1}^2} \\ &\leq C \varepsilon_{k-1}^{9/10}. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon$  petit d'après la Proposition 3.2.6, l'estimation (3.3.29) et le choix des paramètres on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi_k(x) - x\|_\alpha &\leq \frac{\llbracket S_{k-1} \rrbracket_{\sigma_k, \mu_{k-1}, \mathcal{D}_k}^{\alpha, \beta+, \kappa_{k-1}}}{\mu_{k-1}^2 (\sigma_{k-1} - \sigma_k)} \\
&\leq \frac{C}{\prod_{k-1} (\sigma_{k-1} - \sigma_k) \kappa_{k-1} \mu_{k-1}^2} \left( 1 + \frac{\mu_k}{\kappa_{k-1} \mu_{k-1}^3} \Xi_{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\kappa_{k-1}^2 \mu_{k-1}^3 \mu_k} \Xi_{k-1}^2 \right) \varepsilon_{k-1} \\
&\leq Ct \varepsilon_{k-1}^{17/20} \leq \varepsilon_{k-1}^{4/5}.
\end{aligned}$$

□

### 3.4.5 Passage à la limite et preuve du théorème KAM

Par construction on a  $\mathcal{D}_k \subset \dots \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ . Or on a

$$\text{mes}(\mathcal{D}_{k-1} \setminus \mathcal{D}_k) \leq C(\kappa_k \delta^{-1})^l N_k^v \leq \varepsilon_k^\gamma.$$

La mesure de Lebesgue du Borélien  $\mathcal{D}' := \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{D}_k$  vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq c\varepsilon^\gamma.$$

où  $c$  dépend de  $\delta$  et de  $\sigma$ . D'après le choix de paramètre on a :  $\sigma_\infty = \sigma/2$  et  $\mu_\infty = \mu/2$ .

Grâce au Lemme 3.4.6, on a pour tout  $k \geq 1$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  :

$$\|\Phi_k(x, \rho) - x\|_\alpha \leq \varepsilon_{k-1}^{4/5}. \quad (3.4.14)$$

Soit  $1 \leq j \leq M$ , on note  $\Phi_M^j = \Phi_j \circ \Phi_{j+1} \circ \dots \circ \Phi_M$ .  $\Phi_M^j$  est un changement de variable symplectique défini sur  $\mathcal{O}(M) \times \mathcal{D}'$  à valeur dans  $\mathcal{O}(j)$ . De plus pour tout  $1 \leq j \leq M$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  :

$$\|\Phi_M^j - id\|_\alpha \leq \sum_{k=j}^M \varepsilon_{k-1}^{4/5} \leq C\varepsilon_{j-1}^{4/5},$$

Pour  $P > M$  on a d'après (3.4.14) :

$$\|\Phi_P^j - \Phi_M^j\|_\alpha \leq C\varepsilon_M^{4/5}.$$

Par suite  $(\Phi_M^j)_M$  est une suite de Cauchy qui converge vers  $\Phi_\infty^j$  : un changement de variable symplectique analytique réel défini sur  $\mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}) \times \mathcal{D}'$ . De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$\|\Phi_\infty^j - id\|_\alpha \leq \sum_{k \geq j} \varepsilon_{k-1}^{4/5} \leq C\varepsilon_{j-1}^{4/5}. \quad (3.4.15)$$

Par l'estimation de Cauchy, pour  $j \geq 1$ , on a :

$$\|D\Phi_\infty^j - id\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \leq C\varepsilon_{j-1}^{4/5}. \quad (3.4.16)$$

Par construction  $\Phi_M^1$  transforme l'hamiltonien perturbé

$$H_1 = \omega.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle + f$$

en

$$H_M = \omega_M.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_M(\rho)\zeta \rangle + f_M.$$

On a  $\omega_M$  converge vers  $\omega_\infty$  et  $A_M$  vers  $A_\infty$  et :

$$\begin{aligned} |\omega_\infty - \omega| &\leq C\varepsilon_0 + C\sum_{j \geq 1} \varepsilon_j^{9/10} \leq C\varepsilon_0 + C\sum_{j \geq 1} \varepsilon_0^{\frac{9}{10}(\frac{8}{5})^j} \leq C\varepsilon_0 + C\sum_{j \geq 0} \varepsilon_0^{\frac{36}{25}(\frac{8}{5})^j} \\ &\leq C\varepsilon_0, \\ |A_\infty - A|_\beta &\leq C\varepsilon_0 + C\sum_{j \geq 1} \varepsilon_j^{9/10} \leq C\varepsilon_0 + C\sum_{j \geq 1} \varepsilon_0^{\frac{9}{10}(\frac{8}{5})^j} \leq C\varepsilon_0 + C\sum_{j \geq 0} \varepsilon_0^{\frac{36}{25}(\frac{8}{5})^j} \\ &\leq C\varepsilon_0. \end{aligned}$$

De même,  $\partial_\rho \omega_\infty$  et  $\partial_\rho A_\infty$  vérifient les même estimations que  $\omega_\infty$  et  $A_\infty$ .

Posons  $H_\infty = H_1 \circ \Phi_\infty^1$  avec :

$$H_\infty = \omega_\infty.r + \frac{1}{2}\langle \zeta, A_\infty(\rho)\zeta \rangle + f_\infty.$$

On a  $H_\infty = H_M \circ \Phi_\infty^M$ .

Par la formule du composée et pour tout  $x = (\theta, 0, 0)$  et  $h = (\theta, r, \zeta)$  on a :

$$\langle \nabla H_\infty(x), h \rangle = \langle \nabla H_k(\Phi_\infty^k(x)), D\Phi_\infty^k(x)h \rangle.$$

Or on a  $\|f_k^T\|_{\sigma_k, \mu_k, \mathcal{D}'}^{\alpha, \beta, \kappa_k} \leq \varepsilon_k$ , par suite on obtient que  $\nabla H_k(\varphi_\infty^k(x)) = {}^t(0, \omega_k, 0) + O(\varepsilon_k^{4/5})$ . Or on a pour tout  $j \geq 1$ ,  $\|\Phi_\infty^j - id\|_\alpha \leq C\varepsilon_{j-1}^{4/5}$ . Par suite

$$\nabla H_\infty = {}^t(0, \omega_\infty, 0).$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\partial_r f_\infty(\theta, 0, 0) = \partial_\zeta f_\infty(\theta, 0, 0) = 0.$$

Regardons à présent la matrice  $\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 H_\infty(x)$ . On a :

$$\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 H_k(x) = (A_k)_{i,j} + O(\varepsilon_k^{4/5}),$$

ce qui nous permet de dire que  $\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 H_\infty(x) = (A_\infty)_{i,j}$  et de conclure que :

$$\partial_{\zeta \zeta}^2 f_\infty(\theta, 0, 0) = 0$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 3.1.2.



# 4

## L'équation des ondes non linéaire

### 4.1 Introduction et résultats

#### 4.1.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère l'équation des ondes cubique sur le cercle donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{S}^1, \quad (4.1.1)$$

avec  $m \in [1, 2]$  la masse et  $g$  une fonction holomorphe réelle sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1 \times J$ , avec  $J$  un voisinage de zéro de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $g$  est de la forme :

$$g(x, u) = 4u^3 + O(u^4). \quad (4.1.2)$$

On prouve l'existence de solutions quasi-périodiques de faibles amplitudes proche de la solution de l'équation linéaire.

Puisque la variable espace appartient au cercle, on peut diagonaliser la partie linéaire de l'équation dans la base de Fourier. Ainsi on ramène notre problème à l'étude d'un hamiltonien intégrable perturbé sous la forme :

$$H = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \text{Perturbation}, \quad (\square)$$

avec  $\lambda_s = \sqrt{s^2 + m}$ . Afin de montrer l'existence de solutions quasi-périodiques, on fera appel au théorème KAM 4.4.1. En effet la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) nous dit que, sous l'effet d'une petite perturbation, un hamiltonien intégrable continue à exhiber des tores invariants de dimension finie dans un espace de dimension infinie. Et cela sous certaines conditions de

non résonance. L'existence de ces tores invariants, nous donne l'existence de solutions quasi-périodiques. Le principal problème qu'on rencontre ici est que les fréquences  $\lambda_s$  ne vérifient pas les hypothèses de non résonance standards <sup>1</sup>. Dans le cas de Dirichlet, la somme dans  $(\square)$  est restreinte aux indices positifs (voir [31]). Dans ce cas on peut vérifier les conditions de non résonance standards grâce à la masse  $m$ . Dans le cas périodique on s'autorise à la fois des indices positifs et négatifs. On remarque que  $\lambda_s = \lambda_{-s}$ . On obtient donc un système hamiltonien résonant. Pour cela le théorème KAM 4.4.1 doit traiter le cas de valeurs propres multiples.

L'existence de solutions quasi-périodiques pour des EDPs hamiltoniennes non-linéaires a suscité l'intérêt de nombreux auteurs. Le premier résultat de préservation de tels solutions, après la perturbation d'un hamiltonien intégrable de dimension infinie, a été donné par Kuksin en 1987 dans [23, 24] pour l'équation de Schrödinger en dimension 1 avec condition de Dirichlet.

Concernant l'équation des ondes le premier résultat est dû à Wayne en 90 dans [31]. Il a considéré l'équation des ondes cubique en dimension 1 avec potentiel extérieur dans  $L^2([0, 1])$  non nul et avec conditions de Dirichlet (ce qui entraîne la simplicité du spectre).

On peut aussi citer le travail de Pöschel dans [28]. Dans cet article, l'auteur a considéré l'équation des ondes en dimension 1 avec masse, condition de Dirichlet homogène et une non-linéarité cubique analytique mais qui ne dépend pas de la variable d'espace.

En 1998 Chierchia et You considèrent dans [9] l'équation des ondes en dimension 1 avec potentiel périodique analytique et une perturbation quadratique analytique qui ne dépend pas de la variable espace. Dans ce cas le potentiel joue le rôle de paramètre extérieure. Ce qui permet de vérifier les conditions de non résonance. En particulier les auteurs ne s'autorisent pas le cas où le potentiel est nul.

Le travail le plus récent est dû à Berti, Biasco et Procesi en 2013 dans [8]. Dans cet article ils considèrent l'équation des ondes dérivative donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu + f(Du) = 0, \quad m > 0, \quad D := \sqrt{-\partial_{xx}^2 + m}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T},$$

avec  $f(s)$  une non-linéarité réelle analytique de la forme

$$f(s) = as^3 + \sum_{k \geq 5} f_k s^k, \quad a \neq 0.$$

On remarque ici que la non-linéarité est indépendante de la variable espace  $x$ . Ce qui implique que le moment  $-i \int_{\mathbb{T}} \bar{u} \partial_x u dx$  est conservé. Cette symétrie simplifie un peu la preuve du théorème KAM.

Dans notre cas, il n'y a pas de paramètres extérieurs. La variable espace appartient au cercle, donc on est dans le cas périodique. La non-linéarité  $g$  dépend de la variable d'espace.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

- Dans la première section, on donne le résultat principal (voir Théorème 4.1.3).

<sup>1</sup>Du type :  $|k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n| \geq \frac{\gamma}{|k|^{\tau}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ .

- Dans la deuxième section, on montre que, pour un ensemble admissible (voir définition 4.1.2), les petits diviseurs de l'équation des ondes (4.1.1) sont non nuls. Ceci est montré pour  $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{U}$  avec  $\mathcal{U}$  de mesure de Lebesgue nulle.
- Dans la troisième section, grâce à une forme normale de Birkhoff, on transforme l'hamiltonien résonant associé à l'équation (4.1.1) en un hamiltonien qui vérifie les hypothèses du théorème KAM (voir Théorème 4.3.7).
- Dans la quatrième section, on énonce le théorème KAM, (voir Théorème 4.4.1), et on vérifie les hypothèses de non résonance (voir Lemme 4.4.2-4.4.8).
- Dans la dernière partie, on prouve l'existence de solutions quasi-périodiques de faibles amplitudes pour l'équation (4.1.1).

### 4.1.2 Résultats

On considère l'équation des ondes sur le cercle (4.1.1) avec  $g$  de la forme (4.1.2). En considérant le changement de variable  $v = \dot{u}$ , l'équation (4.1.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\Lambda^2 u + g(x, u), \end{cases}$$

avec  $\Lambda := (\sqrt{-\Delta + m})$ .

Soit  $\psi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda^{\frac{1}{2}}u - i\Lambda^{-\frac{1}{2}}v)$ . On note  $\dot{\psi}$  la dérivée de  $\psi$  par rapport à  $t$ , donnée par :

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Lambda^{1/2} \dot{u} - i\Lambda^{-1/2} \dot{v} \right).$$

En remarquant que  $u = \Lambda^{-1/2} \left( \frac{\psi + \bar{\psi}}{\sqrt{2}} \right)$  et en remplaçant  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$  par leurs expressions on obtient :

$$\frac{1}{i} \dot{\psi} = \Lambda \psi - \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^{-1/2} g \left( x, \Lambda^{-1/2} \left( \frac{\psi + \bar{\psi}}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Munissons  $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$  de la forme symplectique réelle classique  $-id\psi \wedge d\bar{\psi} = -du \wedge dv$ . On considère l'hamiltonien suivant :

$$H(\psi, \bar{\psi}) = \int_{\mathbb{S}^1} (\Lambda \psi) \bar{\psi} dx + \int_{\mathbb{S}^1} G \left( x, \Lambda^{-1/2} \left( \frac{\psi + \bar{\psi}}{\sqrt{2}} \right) \right) dx,$$

où  $G$  est une primitive de  $g$  par rapport à  $u$ , c'est-à-dire :

$$g = \partial_u G, \quad G(x, u) = u^4 + \mathcal{O}(u^5).$$

On peut alors écrire (4.1.1) sous la forme du système hamiltonien suivant :

$$\dot{\psi} = i \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}.$$

Considérons à présent la base orthonormée de Fourier complexe donnée par :  $\{\varphi_s(x) = e^{isx}/\sqrt{2\pi}, s \in \mathbb{Z}\}$ . Dans cette base l'opérateur  $\Lambda$  est diagonal et on a :

$$\Lambda\varphi_s = \lambda_s\varphi_s,$$

avec  $\lambda_s = \sqrt{s^2 + m}$ . Décomposons  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  dans cette base, alors

$$\psi = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \xi_s \varphi_s \quad \text{et} \quad \bar{\psi} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \eta_s \varphi_{-s}.$$

En injectant cette décomposition dans l'expression de  $H$ , on obtient :

$$H = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \int_{\mathbb{S}^1} G \left( x, \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right) dx. \quad (4.1.3)$$

Soit  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \times \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  muni de la forme symplectique complexe  $-i \sum_{s \in \mathbb{Z}} d\xi_s \wedge d\eta_s$ . De plus on définit

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} := \{(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \mid \eta_s = \bar{\xi}_s\}.$$

Alors l'équation des ondes (4.1.1) est équivalente au système Hamiltonien suivant sur  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$  :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s = i \frac{\partial H}{\partial \eta_s}, \\ \dot{\eta}_s = -i \frac{\partial H}{\partial \xi_s}, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

avec  $s \in \mathbb{Z}$ .

Posons  $H = H_2 + P$ , avec

$$H_2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s, \quad \text{et} \quad P = \int_{\mathbb{S}^1} G \left( x, \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right) dx. \quad (4.1.5)$$

**Remarque 4.1.1.** On a  $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$  et  $g = \partial_u G$ . Donc on peut écrire  $P = P_4 + R_5$  avec :

$$P_4(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{S}^1} u^4 dx = \int_{\mathbb{S}^1} \left( \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right)^4 dx,$$

$$R_5(\xi, \eta, x) = P(\xi, \eta, x) - P_4(\xi, \eta) = O(\|(\xi, \eta)\|^5).$$

De plus on peut écrire  $P_4$  sous la forme :

$$P_4 = \sum_{i, j, k, l \in \mathbb{Z}} C(i, j, k, l) (\xi_i + \eta_{-i})(\xi_j + \eta_{-j})(\xi_k + \eta_{-k})(\xi_l + \eta_{-l}),$$

avec

$$C(i, j, k, l) := \int_{\mathbb{S}^1} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } i + j + k + l = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini de  $\mathbb{Z}$  de cardinal  $n$ . Fixons  $I = (I_a)_{a \in \mathcal{A}}$  avec :

$$I_a > 0, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Soit  $T_I^n$  le tore réel de dimension  $n$  défini par :

$$T_I^n = \begin{cases} \xi_a = \bar{\eta}_a, |\xi_a|^2 = I_a & \text{si } a \in \mathcal{A} \\ \xi_s = \eta_s = 0 & \text{si } s \in \mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$

Ce tore est stable par le flot Hamiltonien quand la perturbation  $P$  est nulle. On peut même donner l'expression analytique de la solution de l'équation des ondes linéaire.

Notre but dans tout ce qui suit est de démontrer la persistance du tore  $T_I^n$  quand la perturbation  $P$  n'est plus nulle, en faisant l'hypothèse cruciale que ce tore soit admissible. Un tore est dit admissible s'il est construit à partir d'un ensemble  $\mathcal{A}$  admissible.

**Définition 4.1.2.** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini de  $\mathbb{Z}$ .  $\mathcal{A}$  est admissible si pour tout  $j \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ , on a  $-j \notin \mathcal{A} \setminus \{0\}$ .

Notons  $\mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^- = \{j \in \mathcal{L} \mid -j \in \mathcal{A}\}$ .

Dans un voisinage du tore invariant  $T_I^n$  dans  $\mathbb{C}^{2n}$ , on définit les variables action-angle  $(r_a, \theta_a)_{\mathcal{A}}$  par :

$$\begin{cases} \xi_a = \sqrt{(I_a + r_a)} e^{i\theta_a}, \\ \eta_a = \bar{\xi}_a. \end{cases}$$

Pour  $s \in \mathcal{A}$  on notera  $\omega_s$  (au lieu de  $\lambda_s$ ) les fréquences internes. Dans ces nouvelles variables et notations, la partie quadratique  $H_2$  de  $H$  est égale à une constante près à

$$H_2 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a r_a + \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s.$$

La perturbation devient :

$$P(r, \theta, \xi, \eta) = \int_{\mathbb{S}^1} G(x, \hat{u}_{I,m}(r, \theta, \xi, \eta)) dx,$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{u}_{I,m}(r, \theta, \xi, \eta) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{(I_a + r_a)} \frac{e^{-i\theta_a} \varphi_a(x) + e^{i\theta_a} \varphi_{-a}(x)}{\sqrt{2}(a^2 + m)^{1/4}} \\ &+ \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\xi_s \varphi_s(x) + \eta_{-s} \varphi_s(x)}{\sqrt{2}(s^2 + m)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Posons  $u_{I,m}(\theta, x) = \hat{u}_{I,m}(0, \theta, 0, 0)$ . Alors, pour tout  $I \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ ,  $m \in [1, 2]$  et  $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$ , la fonction  $(t, x) \mapsto u_{I,m}(\theta_0 + t\omega, x)$  est solution de l'équation des ondes linéaire. Dans ce cas, le tore est

stable par le flot Hamiltonien.

Notre but est de démontrer un résultat similaire quand la perturbation n'est pas nulle.

**Théorème 4.1.3.** *Soit  $\alpha > 1/2$ . Supposons que  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible de  $\mathbb{Z}$ , de cardinal  $n$ . Supposons que la perturbation  $g$  est holomorphe réelle sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1 \times J$  avec  $J$  un voisinage de zéro de  $\mathbb{R}$  et qu'elle est de la forme  $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$ . Alors il existe un Borélien  $\mathcal{U} \subset [1, 2]$  de mesure de Lebesgue nulle, tel que pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$ , il existe  $\nu_0$  qui dépend de  $\mathcal{A}$ ,  $m$ , et de la non-linéarité  $g$ , tel que :*

*Pour tout  $0 < \nu \leq \nu_0$  il existe un Borélien  $\mathcal{D}' \subset [\nu, 2\nu]^n$  de mesure de Lebesgue asymptotiquement pleine, c'est-à-dire :*

$$\text{mes}([\nu, 2\nu]^n \setminus \mathcal{D}') \leq \nu^{n+\gamma}$$

*avec  $\gamma > 0$  dépendant de  $n$ . Pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$  et  $I \in \mathcal{D}'$  il existe :*

1. *une fonction  $u(\theta, x)$  analytique en  $\theta$  et de classe  $H^\alpha$  en  $x \in \mathbb{S}^1$  telle que :*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|u(\theta, \cdot) - u_{I,m}(\theta, \cdot)\|_{H^\alpha} \leq C\nu^{4/5},$$

*avec  $C$  une constante absolue.*

2. *une fréquence  $\omega' : ([1, 2] \setminus \mathcal{U}) \times \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant :*

$$\omega' = \omega + MI + O(\nu^{3/2}),$$

*telle que pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$  et  $I \in \mathcal{D}'$  la fonction*

$$t \mapsto u(\theta + t\omega', x)$$

*soit solution de l'équation des ondes (4.1.1).*

Tout le reste de ce chapitre sera consacré à la preuve de ce théorème.

## 4.2 Petits diviseurs

### 4.2.1 Non résonance des fréquences

Dans cette section, on suppose que  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible comme dans la Définition 4.1.2. On considère le vecteur fréquence

$$\omega \equiv \omega(m) = (\omega_a(m))_{a \in \mathcal{A}},$$

avec  $\omega_a(m) = \sqrt{a^2 + m}$ . Le principal et unique résultat de cette section est le suivant :

**Proposition 4.2.1.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible de  $\mathbb{Z}$ . Notons  $n := \text{Card}(\mathcal{A})$ . Supposons que  $\mathcal{A} \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq N, N \geq 1\}$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  et pour tout  $\chi > 0$  et tout  $c \in \mathbb{R}$ , on a :*

$$\text{mes} \left\{ m \in [1, 2] \mid \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} k_a \omega_a(m) + c \right| \leq \chi \right\} \leq C \frac{N^{2n^2} \chi^{1/n}}{|k|},$$

avec  $|k| := \sum_{a \in \mathcal{A}} |k_a|$  et  $C > 0$  une constante qui dépend seulement de  $n$ .

La preuve utilise les mêmes arguments que ceux du théorème 6.5 de [5] (voir aussi [4] et [6]). Pour plus de clarté, on rappelle les principales étapes de la preuve.

**Lemme 4.2.2.** *Supposons que  $\mathcal{A} \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq N\}$ . Pour tout  $p \leq n := \text{Card}(\mathcal{A})$ , on considère  $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{A}$ . Alors le déterminant suivant*

$$D := \begin{vmatrix} \frac{d\omega_{a_1}}{dm} & \frac{d\omega_{a_2}}{dm} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d\omega_{a_p}}{dm} \\ \frac{d^2\omega_{a_1}}{dm^2} & \frac{d^2\omega_{a_2}}{dm^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d^2\omega_{a_p}}{dm^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^p\omega_{a_1}}{dm^p} & \frac{d^p\omega_{a_2}}{dm^p} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d^p\omega_{a_p}}{dm^p} \end{vmatrix}$$

vérifie la minoration

$$|D| \geq CN^{-2p^2}, \tag{4.2.1}$$

avec  $C = C(p) > 0$  une constante qui dépend seulement de  $p$ .

*Preuve.* Un calcul rapide nous donne

$$\frac{d^j \omega_i}{dm^j} = \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!} \frac{(-1)^{j+1}}{(a_i^2 + m)^{j-\frac{1}{2}}}. \tag{4.2.2}$$

En insérant cette formule dans  $D$ , en mettant dans la  $l$ -ième colonne  $(a_l^2 + m)^{-1/2}$  en facteur, et dans la  $j$ -ième ligne  $\frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!}$  en facteur, notre déterminant est égal au signe près à :

$$\left[ \prod_{l=1}^p \omega_{a_l}^{-1} \right] \left[ \prod_{j=1}^p \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!} \right] \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_{a_1} & x_{a_2} & x_{a_3} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{a_p} \\ x_{a_1}^2 & x_{a_2}^2 & x_{a_3}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{a_p}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{a_1}^p & x_{a_2}^p & x_{a_3}^p & \cdot & \cdot & \cdot & x_{a_p}^p \end{vmatrix},$$

avec  $x_a := (a^2 + m)^{-1} \equiv \omega_a^{-2}$ . Le déterminant ci-dessous est un déterminant de Vandermonde, valant :

$$\prod_{1 \leq l < k \leq p} (x_{a_l} - x_{a_k}) = \prod_{1 \leq l < k \leq p} \frac{a_k^2 - a_l^2}{\omega_{a_l}^2 \omega_{a_k}^2}.$$

Puisque  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible,  $\left| \prod_{1 \leq l < k \leq p} (a_k^2 - a_l^2) \right| \geq 1$ . De plus on a  $|a| \leq N$ , donc pour tout  $a \in \mathcal{A}$  on a  $|\omega_a| \leq 2N$ . Donc :

$$\prod_{l=1}^p \omega_{a_l}^{-1} \prod_{1 \leq l < k \leq p} \frac{1}{\omega_{a_l}^2 \omega_{a_k}^2} \geq \frac{1}{2^{p(2p-1)}} \frac{1}{N^{p(2p-1)}} \geq \frac{1}{2^{p(2p-1)}} \frac{1}{N^{2p^2}},$$

ce qui conduit à (4.2.1). □

On a besoin de la proposition suivante, présente dans l'appendice B de [7].

**Lemme 4.2.3.** *Soit  $(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$  une famille de  $p$  vecteurs libres de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\|u^{(j)}\|_{\ell^1} \leq K$  pour  $j \in [1, \dots, p]$ . Soit  $w$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  s'écrivant comme une combinaison linéaire de  $u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$ . Alors il existe  $j \in [1, \dots, p]$  tel que :*

$$|u^{(j)} \cdot w| \geq \frac{\|w\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})}{pK^{p-1}}, \quad (4.2.3)$$

avec  $\mathcal{V}_p(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$  le volume euclidien du parallélépipède en dimension  $p$  engendré par les vecteurs  $u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$ .

Par souci d'exhaustivité, on rappelle la preuve :

*Preuve.* On procède par récurrence sur  $p$ .

Pour  $p = 1$  on a supposé que  $w$  est colinéaire à  $u^{(1)}$ , donc on a :

$$|u^{(1)} \cdot w| = \|u^{(1)}\|_{\ell^2} \|w\|_{\ell^2} = \|w\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p(u^{(1)}).$$

Pour  $2 \leq p \leq n$ , on suppose que (4.2.3) est vérifiée pour  $(p-1)$  vecteurs.

On définit les sous-espaces vectoriels suivants de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} E &= \text{vect} \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right), \\ E_1 &= \text{vect} \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)} \right), \\ E_2 &\subset E \text{ et } E_2 = E_1^\perp. \end{aligned}$$

On remarque que  $E_2$  est de dimension 1. On considère la décomposition suivante :

$$w = w_1 + w_2, \quad u^{(p)} = u_1^{(p)} + u_2^{(p)},$$

avec  $w_1, u_1^{(p)} \in E_1$  et  $w_2, u_2^{(p)} \in E_2$ . On sait que  $u^{(k)} \in E_1$  pour  $k \in [1, \dots, p-1]$ , ainsi on a  $|w \cdot u^{(j)}| = |w_1 \cdot u^{(j)}|$ . Donc d'après l'hypothèse de récurrence il existe  $i \in [1, \dots, p-1]$  tel que :

$$\|w_1\|_{\ell^2} \mathcal{V}_{p-1}(u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)}) \leq (p-1)K^{p-2} |w \cdot u^{(i)}|. \quad (4.2.4)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right) &= \|w_1\|_{\ell^2} \mathcal{V}_{p-1} \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)} \right) \|u_2^{(p)}\|_{\ell^2} \\ &\leq (p-1) K^{p-2} |w \cdot u^{(i)}| \|u_2^{(p)}\|_{\ell^2}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Remarquons que

$$\mathcal{V}_{p-1} \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)} \right) \leq \|u^{(1)}\|_{\ell^2} \dots \|u^{(p-1)}\|_{\ell^2} \leq K^{p-1}. \quad (4.2.6)$$

Comme  $w_2$  et  $u_2^{(p)}$  sont liés, on a :

$$\|w_2\|_{\ell^2} \|u_2^{(p)}\|_{\ell^2} = |w_2 \cdot u_2^{(p)}| = |w \cdot u^{(p)} - w_1 \cdot u_1^{(p)}| \leq |w \cdot u^{(p)}| + \|w_1\|_{\ell^2} \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2}.$$

Donc d'après les inégalités (4.2.6) et (4.2.4), il existe  $i \in [1 \dots p-1]$  tel que :

$$\begin{aligned} \|w_2\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right) &= \|w_2\|_{\ell^2} \mathcal{V}_{p-1} \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)} \right) \|u_2^{(p)}\|_{\ell^2} \\ &\leq \left( |w \cdot u^{(p)}| + \|w_1\|_{\ell^2} \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2} \right) \mathcal{V}_{p-1} \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)} \right) \\ &\leq K^{p-1} |w \cdot u^{(p)}| + (p-1) K^{p-2} \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2} |w \cdot u^{(i)}| \\ &\leq \left( K + (p-1) \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2} \right) K^{p-2} \max \left( |w \cdot u^{(p)}|, |w \cdot u^{(i)}| \right). \end{aligned}$$

Donc il existe  $j \in [1 \dots p]$  tel que :

$$\|w_2\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right) \leq \left( K + (p-1) \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2} \right) K^{p-2} |w \cdot u^{(j)}|. \quad (4.2.7)$$

Finalement, en utilisant les inégalités (4.2.5) et (4.2.7), il existe  $j \in [1 \dots p]$  tel que :

$$\begin{aligned} \|w\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right) &= \left( \|w_1\|_{\ell^2}^2 + \|w_2\|_{\ell^2}^2 \right)^{1/2} \mathcal{V}_p \left( u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right) \\ &\leq \left( (p-1)^2 \|u_2^{(p)}\|_{\ell^2}^2 + K^2 + 2K(p-1) \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2} \right. \\ &\quad \left. + (p-1)^2 \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2}^2 \right)^{1/2} K^{p-2} |w \cdot u^{(j)}| \\ &= \left( (p-1)^2 \|u^{(p)}\|_{\ell^2}^2 + K^2 + 2(p-1)K \|u_1^{(p)}\|_{\ell^2} \right)^{1/2} \\ &\quad \times K^{p-1} |w \cdot u^{(j)}| \\ &\leq \left( (p-1)^2 + 1 + 2(p-1) \right)^{\frac{1}{2}} K^{p-1} |w \cdot u^{(j)}| \\ &= pK^{p-1} |w \cdot u^{(j)}|, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'estimation (4.2.3). □

Rappelons que le vecteur fréquence interne est donné pour  $m \in [1, 2]$  par :

$$\omega(m) \equiv (\omega_a(m))_{a \in \mathcal{A}} = (\sqrt{a^2 + m})_{a \in \mathcal{A}}.$$

**Corollaire 4.2.4.** *Posons  $n = \text{Card}(\mathcal{A})$  et soit  $w$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ . Alors pour tout  $m \in [1, 2]$ , il existe (un indice)  $j \in [1, \dots, n]$  tel que :*

$$\left| w \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| \geq CN^{-2n^2} \|w\|_{\ell^1},$$

avec  $C > 0$  qui dépend seulement de  $n$ .

*Preuve.* D'après le lemme 4.2.2,  $\left(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m)\right)$  est une famille libre donc elle forme une base de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $w$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs. D'après le Lemme 4.2.3 il existe un indice  $j \in [1, \dots, n]$  tel que :

$$\begin{aligned} \left| w \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| &\geq \frac{\|w\|_{\ell^2} \mathcal{V}_n \left( \frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m) \right)}{nK^{n-1}} \\ &\geq \frac{\|w\|_{\ell^1} \mathcal{V}_n \left( \frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m) \right)}{n^{3/2} K^{n-1}}. \end{aligned}$$

Or  $\left(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m)\right)$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Donc :

$$\mathcal{V}_n \left( \frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m) \right) = D,$$

où  $D$  est le déterminant défini dans le Lemme 4.2.2. Donnons à présent l'expression de  $K$ . Pour  $j \in [1, \dots, n]$  on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right\|_{\ell^1} &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!} \frac{(-1)^{j+1}}{(k^2+m)^{j-\frac{1}{2}}} \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{n(2n-2)!}{(n-1)!} =: K. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\left| w \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| \geq \frac{(n-1)!}{n^{5/2}(2n-2)!} D \|w\|_{\ell^1} \geq CN^{-2n^2} \|w\|_{\ell^1},$$

ce qui termine la preuve du corollaire. □

Pour conclure on a besoin du lemme suivant de [32] :

**Lemme 4.2.5.** *(Lemme 2.1 de [32]) Supposons que  $g(\tau)$  est  $p$  fois différentiable sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ . Pour  $h > 0$  on définit l'ouvert  $J_h$  par :*

$$J_h := \{\tau \in J \mid |g(\tau)| < h\}.$$

Sur  $J$ , si on a  $|g^{(p)}(\tau)| \geq d > 0$ , alors

$$\text{mes}(J_h) \leq Mh^{1/p}, \tag{4.2.8}$$

avec  $M := 2(2 + 3 + \dots + p + d^{-1})$ .

Pour la clarté de la lecture, on rappelle la preuve :

*Preuve.* Posons  $J_h^{p-1} := \{\tau \in J \mid |g^{(p-1)}(\tau)| < h\}$ . On a :

$$\left| \left( g^{(p-1)} \right)'(\tau) \right| = |g^{(p)}(\tau)| \geq d > 0, \quad \forall \tau \in J.$$

Donc  $g^{(p-1)}$  est strictement monotone sur  $J$  et  $J_h^{p-1}$  est connexe. Par le théorème des accroissements finis on en déduit que :

$$\text{mes}(J_h^{p-1}) \leq \frac{2h}{d}.$$

L'ensemble  $J - J_h^{p-1} = \{\tau \in J \mid |g^{(p-1)}(\tau)| \geq h\}$  possède au plus deux composantes connexes, qu'on appellera  $J_{[1]}^{p-1}$  et  $J_{[2]}^{p-1}$ . Posons à présent :

$$J_h^{p-2} := \{\tau \in J \mid |g^{(p-2)}(\tau)| < h^2\}.$$

On a alors :

$$\left| \left( g^{(p-2)} \right)'(\tau) \right| = |g^{(p-1)}(\tau)| \geq h > 0, \quad \forall \tau \in J_{[1]}^{p-1} \cup J_{[2]}^{p-1}.$$

$J_h^{p-2} \cap J_{[1]}^{p-1}$  et  $J_h^{p-2} \cap J_{[2]}^{p-1}$  possèdent chacun au plus une composante connexe dans  $J_{[1]}^{p-1}$  et  $J_{[2]}^{p-1}$  respectivement. Et on a :

$$\text{mes} \left( J_h^{p-2} \cap J_{[1]}^{p-1} \right) \leq \frac{2h^2}{h} = 2h,$$

$$\text{mes} \left( J_h^{p-2} \cap J_{[2]}^{p-1} \right) \leq \frac{2h^2}{h} = 2h.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{mes} \left( J_h^{p-2} \right) &\leq \text{mes} \left( J_h^{p-2} \cap \left( J - J_h^{p-1} \right) \right) + \text{mes} \left( J_h^{p-2} \cap J_h^{p-1} \right) \\ &\leq \text{mes} \left( J_h^{p-2} \cap J_{[1]}^{p-1} \right) + \text{mes} \left( J_h^{p-2} \cap J_{[2]}^{p-1} \right) + \text{mes} \left( J_h^{p-1} \right) \\ &\leq 2h + 2h + 2hd^{-1} = 2(2 + d^{-1})h. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$J_h^{p-3} := \{\tau \in J \mid |g^{(p-3)}(\tau)| < h^3\}.$$

L'ensemble  $J - J_h^{p-2}$  possède au plus trois composantes connexes qu'on appellera  $J_{[1]}^{p-2}$ ,  $J_{[2]}^{p-2}$  et  $J_{[3]}^{p-2}$ . Pour tout  $\tau \in J_{[1]}^{p-2} \cup J_{[2]}^{p-2} \cup J_{[3]}^{p-2}$  on a :

$$\left| \left( g^{(p-3)} \right)'(\tau) \right| = |g^{(p-2)}(\tau)| \geq h^2 > 0.$$

$J_h^{p-3} \cap J_{[1]}^{p-2}$ ,  $J_h^{p-3} \cap J_{[2]}^{p-2}$  et  $J_h^{p-3} \cap J_{[3]}^{p-2}$  possèdent chacun au plus une composante connexe

dans  $J_{[1]}^{p-2}$ ,  $J_{[2]}^{p-2}$  et  $J_{[3]}^{p-2}$  respectivement. Et on a :

$$\begin{aligned} \text{mes} \left( J_h^{p-3} \right) &\leq \text{mes} \left( J_h^{p-3} \cap J_{[1]}^{p-2} \right) + \text{mes} \left( J_h^{p-3} \cap J_{[2]}^{p-2} \right) + \text{mes} \left( J_h^{p-3} \cap J_{[3]}^{p-2} \right) \\ &\quad + \text{mes} \left( J_h^{p-3} \cap J_h^{p-2} \right) \\ &\leq 2h + 2h + 2h + 2(2 + d^{-1})h = 2(2 + 3 + d^{-1})h. \end{aligned}$$

Posons à présent :

$$J_h^1 = \left\{ \tau \in J \mid |g'(\tau)| < h^{p-1} \right\}.$$

En itérant le même procédé précédent  $p - 1$  fois on obtient :

$$\text{mes} \left( J_h^1 \right) \leq 2(2 + 3 \dots + p - 1 + d^{-1})h.$$

L'ensemble  $J - J_h^1$  possède  $p$  composantes connexes. Notons ces composantes  $J_{[1]}^1, J_{[2]}^1, \dots, J_{[p]}^1$  et  $J_h^0 := \{ \tau \in J \mid |g(\tau)| < h^p \}$ . Comme précédemment, on a :

$$\text{mes} \left( J_h^0 \cap J_{[i]}^1 \right) \leq 2h, \quad \text{pour } i \in [1, \dots, p].$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \text{mes} \left( J_h^0 \right) &\leq \text{mes} \left( J_h^0 \cap \left( J - J_h^1 \right) \right) + \text{mes} \left( J_h^0 \cap J_h^1 \right) \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq p} \text{mes} \left( J_h^0 \cap J_{[i]}^1 \right) + \text{mes} \left( J_h^0 \cap J_h^1 \right) \\ &\leq 2ph + 2(2 + 3 \dots + p - 1 + d^{-1})h \\ &\leq 2(2 + 3 \dots + p + d^{-1})h. \end{aligned}$$

Notons que  $J_h = J_{h^{1/p}}^0$ , donc en remplaçant  $h$  par  $h^{1/p}$  on obtient l'estimation (4.2.8) □

À présent, on a tous les outils nécessaire pour donner la preuve de la Proposition 4.2.1.

*Preuve de la Proposition 4.2.1.* Pour  $k \in \mathbb{R}^n$ , avec  $n = \text{Card}(\mathcal{A})$ , on considère la fonction  $g \in C^\infty([1, 2], \mathbb{R})$  définie par :

$$g(m) = k \cdot \omega(m) + c.$$

D'après le Corollaire 4.2.4, il existe  $j \in [1, \dots, n]$  tel que

$$\left| k \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| \geq CN^{-2n^2} |k|.$$

En appliquant le Lemme 4.2.5 avec  $h = CN^{-2n^2} |k|$ , on obtient :

$$\text{mes} \{ m \in [1, 2] \mid |k \cdot \omega(m) + c| \leq \chi \} \leq M\chi^{1/n},$$

avec  $M \leq \tilde{C}N^{2n^2} |k|^{-1}$ . La constante  $\tilde{C}$  une constante strictement positive qui dépend que de  $n$ .

La proposition est donc prouvée  $\square$

### 4.2.2 Estimations des petits diviseurs

Pour  $m \in [1, 2]$ , rappelons que les fréquences internes sont notées par  $\omega \equiv \omega(m) = (\sqrt{a^2 + m})_{a \in \mathcal{A}}$ , alors que les fréquences externes sont notées par  $\lambda_s \equiv \lambda_s(m) = \sqrt{s^2 + m}$  avec  $s \in \mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$ . Remarquons que pour  $s \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$  on a :

$$|\lambda_s(m) - |s|| \leq \frac{m}{2|s|}. \quad (4.2.9)$$

Rappelons aussi que :

$$\mathcal{A}^- := \{s \in \mathcal{L} \mid -s \in \mathcal{A}\}.$$

On note  $\mathcal{L}^\infty$  le complémentaire de  $\mathcal{A}^-$  dans  $\mathcal{L}$  et  $n$  le cardinal de  $\mathcal{A}$ .

Dans cette partie, on va faire des estimées sur les petits diviseurs suivants :

$$\begin{aligned} D_0 &= \omega \cdot k, & k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \\ D_1 &= \omega \cdot k + \lambda_a, & k \in \mathbb{Z}^n, a \in \mathcal{L} \\ D_2 &= \omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b, & k \in \mathbb{Z}^n, a, b \in \mathcal{L} \\ D_3 &= \omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b, & k \in \mathbb{Z}^n, a, b \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

**Définition 4.2.6.** Soient  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $a, b \in \mathcal{L}$ .

- (i) L'entier  $k$  est  $D_0$  résonant si  $k = 0$ .
- (ii) Le couple  $(k; a)$  est  $D_1$  résonant si  $|a| = |s|$  avec  $s \in \mathcal{A}$  et  $\omega \cdot k = -\omega_s$ .
- (iii) Le triplet  $(k; a, b)$  est  $D_2$  résonant si  $|a| = |s|$ ,  $|b| = |s'|$  avec  $s, s' \in \mathcal{A}$  et  $\omega \cdot k = -\omega_s - \omega_{s'}$ .
- (iv) Le triplet  $(k; a, b)$  est  $D_3$  résonant si  $|a| = |s|$ ,  $|b| = |s'|$  avec  $s, s' \in \mathcal{A}$  et  $\omega \cdot k = -\omega_s + \omega_{s'}$ .

**Remarque 4.2.7.** Notons que  $(k; a, b)$  peuvent être  $D_2$  ou  $D_3$  résonant que quand  $(a, b) \in \mathcal{A}^- \times \mathcal{A}^-$ . De même,  $(k; a)$  peut être  $D_1$  résonant seulement quand  $a \in \mathcal{A}^-$ .

Notre but est de donner une borne inférieure aux petits diviseurs  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  quand ils ne sont pas résonants, et cela pour  $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$ , avec  $\mathcal{C}$  un ouvert de mesure de Lebesgue nulle.

Dans cette section  $\mathcal{C}$ , une constante qui dépend seulement de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

Commençons par minorer les petits diviseurs  $D_0$ ,  $D_1$  et  $D_2$ .

**Proposition 4.2.8.** Soient  $\kappa > 0$ , soit  $N > 1$  un entier. Alors il existe un ouvert  $\mathcal{C} \subset [1, 2]$  qui vérifie :

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^\iota,$$

avec  $\tau, \iota > 0$  et qui dépendent seulement de  $n = \text{Card}(\mathcal{A})$ , tel que pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C})$ , tout  $0 < |k| \leq N$  et tout  $a, b \in \mathcal{L}$  on a :

$$|\omega \cdot k| \geq \kappa, \quad (4.2.10)$$

sauf quand  $k$  est  $D_0$  résonant, c'est-à-dire  $k = 0$  ;

$$|\omega \cdot k + \lambda_a| \geq \kappa \langle a \rangle, \quad (4.2.11)$$

sauf quand  $(k; a)$  est  $D_1$  résonant ;

$$|\omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| \geq \kappa (\langle a \rangle + \langle b \rangle), \quad (4.2.12)$$

sauf quand  $(k; a, b)$  est  $D_2$  résonant. La constante  $C$  dépend seulement de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

*Preuve.* On commence par montrer (4.2.10). Soient  $\kappa > 0$ , et  $N > 1$  un entier. Posons

$$\mathcal{U} = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k| < \kappa, k \in \mathbb{Z}^n \text{ avec } 0 < |k| \leq N\}.$$

Pour  $k \in \mathbb{Z}^n$  on pose :

$$\mathcal{U}_k = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k| < \kappa\}$$

et

$$\mathcal{B}_0 = \{k \in \mathbb{Z}^n \mid |k| \leq N\}.$$

On a alors

$$\mathcal{U} = \bigcup_{k \in \mathcal{B}_0} \mathcal{U}_k.$$

Grâce à la Proposition 4.2.1, on a  $\text{mes}(\mathcal{U}_k) \leq C \frac{\kappa^{1/n}}{|k|}$ . Remarquons qu'il y a au plus  $N^n$  points dans  $\mathcal{B}_0$ . Donc on obtient :

$$\text{mes}(\mathcal{U}) \leq C \kappa^{1/n} N^n.$$

Regardons maintenant le deuxième petit diviseur (4.2.11). Posons :

$$C_{\mathcal{A}} = \left( \max\{|a| \mid a \in \mathcal{A}\}^2 \right)^{1/2}.$$

On distingue deux cas : si  $|a| \geq 2C_{\mathcal{A}}N$ , alors on a :

$$|\omega \cdot k + \lambda_a| \geq \lambda_a - |\omega \cdot k| \geq |a| - C_{\mathcal{A}}|k| \geq |a| - \frac{1}{2}|a| \geq \kappa \langle a \rangle,$$

pour  $0 < \kappa \leq 1/2$ .

Si  $|a| < 2C_{\mathcal{A}}N$ , on pose

$$\mathcal{V} = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a| < \kappa \langle a \rangle, (k; a) \in \mathcal{L} \times \mathbb{Z}^n \\ \text{avec } 0 \leq |k| \leq N \text{ et } (k; a) \text{ non } D_1 \text{ résonant} \}.$$

On veut donner une borne supérieure de la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{V}$ . Pour cela, on pose, pour

$k \in \mathbb{Z}^n$  et  $a \in \mathcal{L}$

$$\mathcal{V}_{k,a} = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a| < \kappa \langle a \rangle, (k; a) \text{ non } D_1 \text{ résonant} \}$$

En posant

$$\mathcal{B}_1 = \{(k, a) \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N \text{ et } |a| < 2C_{\mathcal{A}}N\},$$

on a :

$$\mathcal{V} \subset \bigcup_{(k,a) \in \mathcal{B}_1} \mathcal{V}_{k,a}. \quad (4.2.13)$$

On remarque que dans  $\mathcal{B}_1$  il existe au plus  $4C_{\mathcal{A}}N^{n+1}$  points. Il reste à donner une majoration de la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{V}_{k,a}$ . Pour cela on distingue deux cas :

- Si  $\{a, -a\} \not\subset \mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{a\}$  est encore un ensemble admissible de cardinal  $n+1$ . De plus on a  $\mathcal{A}' \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq CN\}$ . En appliquant la Proposition 4.2.1 avec ce nouvel ensemble admissible, on a :

$$\text{mes}(\mathcal{V}_{k,a}) \leq C \frac{\kappa^{1/(n+1)} N^{2(n+1)^2+1/(n+1)}}{|k+1|}.$$

- Si  $|a| \in \mathcal{A}$  mais  $(k; a)$  n'est pas  $D_1$  résonant, alors en appliquant la Proposition 4.2.1 sans changer  $\mathcal{A}$  on a :

$$\text{mes}(\mathcal{V}_{k,a}) \leq C \frac{\kappa^{1/n} N^{2n^2+1/n}}{|k|}.$$

Ceci nous donne que :

$$\text{mes}(\mathcal{V}) \leq C \kappa^{1/(n+1)} N^{(n+1)(2n+3)+1/(n+1)}.$$

De la même manière on montre (4.2.12). On termine la preuve de la Proposition 4.2.8 en posant  $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$  où  $\mathcal{W}$  est l'ouvert où (4.2.12) n'est pas vérifiée.  $\square$

Il nous reste à contrôler  $D_3 = \omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b$ .

**Lemme 4.2.9.** *Soient  $\tilde{\kappa} \in ]0, 1]$  et  $N$  un entier non nul. On a alors :*

$$\begin{aligned} \text{mes}\{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k - e| < 2\tilde{\kappa}, (k, e) \in \mathbb{Z}^{n+1}, \\ \text{avec } 0 < |k| \leq N\} \leq C \tilde{\kappa}^{\frac{1}{n}} N^{n+1}, \end{aligned}$$

avec  $C > 0$  dépendant seulement de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

*Preuve.* Soit  $(k, e) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$  tel que  $0 < |k| \leq N$ . En utilisant la Proposition 4.2.1, on a :

$$\text{mes}\{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k - e| < 2\tilde{\kappa}, \} \leq C \frac{\tilde{\kappa}^{\frac{1}{n}}}{|k|}.$$

D'après l'hypothèse  $\kappa \leq 1$ , on peut se restreindre à :

$$|e| \leq |\omega \cdot k - e| + |\omega \cdot k| \leq CN.$$

Donc

$$\text{mes} \bigcup_{\substack{|k| \leq N \\ (k,e) \in \mathbb{Z}^{n+1}}} \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k - e| < 2\tilde{\kappa}\} \leq CN^{n+1} \tilde{\kappa}^{\frac{1}{n}}.$$

□

**Proposition 4.2.10.** *Soient  $\kappa > 0$  et  $N$  un entier non nul. Alors il existe un ouvert  $\mathcal{C} \subset [1, 2]$  tel que :*

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^\iota,$$

avec  $\tau$  et  $\iota$  deux exposants strictement positifs qui dépendent seulement de  $n = \text{Card}(\mathcal{A})$ , tels que pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C})$ , tout  $0 < |k| \leq N$  et tout  $a, b \in \mathcal{L}$  on a :

$$|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq \kappa(1 + ||a| - |b||), \quad (4.2.14)$$

sauf quand  $(k; a, b)$  est  $D_3$  résonant. La constante  $C$  dépend seulement de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

*Preuve.* Pour  $|b| \geq |a| > 0$ , remarquons que en utilisant (4.2.9) on a :

$$|\lambda_a - \lambda_b - (|a| - |b|)| \leq \frac{m}{|a|} \leq 2|a|^{-1}.$$

Donc on obtient :

$$|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq |\omega \cdot k + |a| - |b|| - 2|a|^{-1}.$$

Dans le Lemme 4.2.9, on pose  $\tilde{\kappa} = \bar{\kappa}^\varrho$  avec  $\varrho$  un exposant dans  $]0, 1[$  qui sera déterminé ultérieurement. Il existe, d'après ce lemme, un ouvert  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(N, \bar{\kappa}^\varrho)$  dont la mesure de Lebesgue est plus petite que  $C\bar{\kappa}^{\frac{\varrho}{n}}N^{n+1}$  avec  $C$  une constante qui dépend de  $\mathcal{A}$ . Pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C}_1)$ , tout  $0 < |k| \leq N$  et tout  $a, b \in \mathcal{L}$  avec  $|b| \geq |a| \geq 2\bar{\kappa}^{-\varrho}$  on a :

$$|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq \bar{\kappa}^\varrho \geq \bar{\kappa}. \quad (4.2.15)$$

Regardons les cas restants où l'estimation précédente est mise en défaut. Ces cas sont inclus dans l'ensemble :

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| < \bar{\kappa}, (a, b) \in \mathcal{L}^2, |a| \leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho}, 0 < |k| \leq N \right\}$$

Remarquons que si  $|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| < \bar{\kappa}$ ,  $|a| \leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho}$  et  $|k| \leq N$ , alors on a :

$$\begin{aligned} |b| \leq \lambda_b &\leq |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| + |\omega \cdot k| + \lambda_a \\ &\leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N, \end{aligned}$$

avec  $C_{\mathcal{A}} = (\max\{|a| \mid a \in \mathcal{A}\})^{1/2}$ .

Posons

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| \leq |b| \leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N\}$$

Il y a au plus  $4(2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N)^2$  points dans l'ensemble  $\mathcal{B}$ . Il s'ensuit que :

$$\mathcal{C}_2 \subset \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| < \bar{\kappa}, (a, b) \in \mathcal{B}, 0 < |k| \leq N\} := \mathcal{C}_3$$

Rappelons que  $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L} \setminus \mathcal{A}^-$  avec  $\mathcal{A}^- = -\mathcal{A}$ . Pour  $a \in \mathcal{L}$ , on définit l'ensemble  $]a[$  par  $]a[ = \{a\}$  si  $a \in \mathcal{L}^\infty$  et  $]a[ = \emptyset$  si  $a \in \mathcal{A}^-$ . Soit

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup ]a[ \cup ]b[.$$

Par définition,  $\mathcal{A}'$  est un ensemble admissible. De plus on a :

$$\mathcal{A}' \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq C(2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N)\}.$$

Puisque  $(k; a, b)$  est  $D_3$  non résonant, alors l'application de la Proposition 4.2.1 à l'ensemble admissible  $\mathcal{A}'$  donne :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{C}_2) &\leq \text{mes}(\mathcal{C}_3) \leq C\bar{\kappa}^{1/(n+2)}N^n(2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N)^{2(n+2)^2} \text{Card } \mathcal{B} \\ &\leq C\bar{\kappa}^{1/(n+2)}\bar{\kappa}^{-2\varrho((n+2)^2+1)}N^{(n+2)(2n+5)}. \end{aligned}$$

En choisissant

$$\varrho = \frac{1}{4((n+2)^2+1)(n+2)}, \quad \tau = \frac{1}{2(n+2)}, \quad \iota' = (n+2)(2n+5),$$

et en posant  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , on obtient :

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\bar{\kappa}^\tau N^{\iota'}.$$

De plus pour tout  $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}_4$ , tout  $0 < |k| \leq N$  et tout  $a, b \in \mathcal{L}$  non  $D_3$  résonant l'estimation (4.2.15) est satisfaite.

Pour terminer la preuve de la proposition, on étudie la différence  $||a| - |b||$ . Sans perte de généralité supposons que  $|a| > |b|$ .

- Si  $|a| - |b| \geq 8C_{\mathcal{A}}N \geq 8|\omega \cdot k|$ , alors pour tout  $m \in [1, 2]$  et tout  $0 < |k| \leq N$ , on a :

$$\begin{aligned} |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| &\geq \lambda_a - \lambda_b - |\omega \cdot k| \geq \frac{1}{4}(|a| - |b|) - |\omega \cdot k| \\ &\geq \frac{1}{8}(|a| - |b|) \geq \frac{1}{16}(1 + |a| - |b|) \geq \kappa(1 + |a| - |b|), \end{aligned}$$

si on suppose que  $\kappa \leq \frac{1}{16}$ .

- Si  $|a| - |b| < 8C_{\mathcal{A}}N$ , alors on a, pour  $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$  :

$$\begin{aligned} |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| &\geq \frac{\bar{\kappa}}{1 + 8C_{\mathcal{A}}N}(1 + |a| - |b|) \\ &\geq \kappa(1 + |a| - |b|). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$ , tout  $0 < |k| \leq N$  et tout  $a, b \in \mathcal{L}$  non  $D_3$  résonant, l'estimation (4.2.14) est vérifiée. De plus,

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^{\iota+\tau} = C\kappa^\tau N^\iota.$$

□

Il reste à traiter le cas où  $k = 0$  dans  $D_3$ .

**Lemme 4.2.11.** *Soient  $m \in [1, 2]$  et  $a, b \in \mathcal{L}$  tel que  $|a| \neq |b|$ . On a alors*

$$|\lambda_a - \lambda_b| \geq \frac{1}{8}(1 + ||a| - |b||).$$

*Preuve.* Sans perdre de généralité, supposons que  $|a| > |b|$ . Alors pour tout  $m \in [1, 2]$ , on a :

$$\lambda_a - \lambda_b = \frac{(|a| - |b|)(|a| + |b|)}{\sqrt{a^2 + m} + \sqrt{b^2 + m}} \geq \frac{1}{4}(|a| - |b|) \geq \frac{1}{8}(1 + ||a| - |b||).$$

□

### 4.3 Forme normale

Dans cette section on construit un changement de variable symplectique qui met l'hamiltonien (4.1.5) sous forme normale à laquelle on peut appliquer notre théorème KAM 4.4.1.

#### 4.3.1 Notations

Dans cette partie on commence par rappeler quelques notations introduites dans le troisième chapitre. Pour  $\mathcal{L}$  une partie de  $\mathbb{Z}$  et  $\alpha \geq 0$ , on considère l'espace  $\ell_2$  à poids défini par :

$$Y_\alpha := \left\{ \zeta = \left( \zeta_s = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, s \in \mathcal{L} \right) \mid \|\zeta\|_\alpha < \infty \right\},$$

avec

$$\|\zeta\|_\alpha^2 = \sum_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s|^2 \langle s \rangle^{2\alpha}, \text{ où } \langle s \rangle = \max(|s|, 1).$$

On munit  $\mathbb{C}^2$  de la norme euclidienne, c'est-à-dire si  $\zeta_s = {}^t(\xi_s, \eta_s)$  alors  $|\zeta_s| = \sqrt{|\xi_s|^2 + |\eta_s|^2}$ .

Pour  $\beta \geq 0$  on définit l'espace  $\ell_\infty$  à poids :

$$L_\beta = \left\{ \left( \zeta_s = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, s \in \mathcal{L} \right) \mid |\zeta|_\beta < \infty \right\},$$

avec

$$|\zeta|_\beta = \sup_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s| \langle s \rangle^\beta.$$

On rappelle que pour  $\beta \leq \alpha$ , on a  $Y_\alpha \subset L_\beta$ .

**Matrices infinies.** On considère le projecteur orthogonal  $\Pi$  défini sur l'ensemble des matrices carrées par

$$\Pi : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{S},$$

où  $\mathbb{S}$  est défini comme suit :

$$\mathbb{S} = \mathbb{C}I + \mathbb{C}\sigma_2, \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices infinies symétriques  $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , qui vérifient, pour tous  $s, s' \in \mathcal{L}$  :

$$A_s^{s'} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad A_s^{s'} = {}^t A_{s'}^s, \quad \text{et} \quad \Pi A_s^{s'} = A_s^{s'},$$

Soit  $\mathcal{M}_\alpha$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  défini par :

$$A \in \mathcal{M}_\alpha \Leftrightarrow |A|_\alpha := \sup_{s, s' \in \mathcal{L}} \langle s \rangle^\alpha \langle s' \rangle^\alpha \|A_s^{s'}\|_\infty < \infty.$$

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$  et  $B$  un espace de Banach. On définit :

$$\mathbb{T}_\rho^n = \{\theta \in \mathbb{C}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \mid |\text{Im}\theta| < \rho\},$$

et

$$\mathcal{O}_\rho(B) = \{x \in B \mid \|x\|_B < \rho\}.$$

Pour  $\sigma, \mu \in ]0, 1[$ , on définit

$$\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu) = \mathbb{T}_\sigma^n \times \mathcal{O}_{\mu^2}(\mathbb{C}^n) \times \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha) = \{(\theta, r, \zeta)\},$$

$$\mathcal{O}^{\alpha, \mathbb{R}}(\sigma, \mu) = \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu) \cap \{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times Y_\alpha^{\mathbb{R}}\},$$

avec  $Y_\alpha^{\mathbb{R}} = \left\{ \zeta \in Y_\alpha \mid \zeta = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix}, \xi_s = \bar{\eta}_s, s \in \mathcal{L} \right\}$ .

Un point de  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$  sera noté par  $x = (\theta, r, \zeta)$ . Une fonction de  $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$ , est dite réelle si elle

est à valeur réelle pour  $x$  réel. On définit :

$$\|(r, \theta, \zeta)\|_\alpha = \max(|r|, |\theta|, \|\zeta\|_\alpha).$$

**Classe des fonctions Hamiltoniennes.** Soit  $\mathcal{D}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$  (l'ensemble des paramètres). Soit  $f : \mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , réelle et holomorphe par rapport à la première variable, et telle que tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , les applications

$$\mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \ni x \mapsto \nabla_\zeta f(x, \rho) \in Y_\alpha \cap L_\beta$$

et

$$\mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \ni x \mapsto \nabla_\zeta^2 f(x, \rho) \in \mathcal{M}_\beta$$

soient holomorphes. On définit :

$$\begin{aligned} |f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |f(x, \rho)|, & \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} \|\nabla_\zeta f(x, \rho)\|_\alpha, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |\nabla_\zeta f(x, \rho)|_\beta, & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} \left| \nabla_\zeta^2 f(x, \rho) \right|_\beta. \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  l'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant pour tout  $x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$  :

$$|f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu^2},$$

Pour  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  on note  $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$  la plus petite constante  $C$  qui satisfaisant les relations précédentes. Si  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ , avec  $j \in \{0, 1\}$ , alors pour  $\gamma > 0$  on définit :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \gamma} = \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \gamma \llbracket \partial_\rho f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

On définit aussi :

$$\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu) = \left\{ f(\zeta) \mid f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu) \right\},$$

c'est à dire que  $f$  ne dépend pas de  $r, \theta$  et  $\rho$ . Pour une telle fonction, sa norme sera noté tout simplement  $\llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta}$ .

Enfin, on termine cette partie de rappel des notations en définissant l'espace  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ . Rappelons que les espaces  $L_{\beta+}$  et  $\mathcal{M}_{\beta+}$  sont donné par :

$$L_{\beta+} = \left\{ \zeta = (\zeta_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L}) \mid |\zeta|_{\beta+} < \infty \right\},$$

avec  $|\zeta|_{\beta+} = \sup_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s| \langle s \rangle^{\beta+1}$ , et

$$\mathcal{M}_{\beta+} = \left\{ A \in \mathcal{M} \mid |A|_{\beta+} < \infty \right\}$$

avec  $|A|_{\beta+} = \sup_{s, s' \in \mathcal{L}} (1 + ||s| - |s'| |) \langle s \rangle^\beta \langle s' \rangle^\beta \|A_s^{s'}\|_\infty$ .

On remarque que  $L_{\beta+} \subset L_\beta$  et  $\mathcal{M}_{\beta+} \subset \mathcal{M}_\beta$ . On définit  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  de la même façon qu'on a défini  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  mais en remplaçant  $L_\beta$  par  $L_{\beta+}$  et  $\mathcal{M}_\beta$  par  $\mathcal{M}_{\beta+}$ . Ainsi on a  $\mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu) \subset \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ .

Rappelons que pour  $f, g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu)$ , le crochet de Poisson est donnée par :

$$\{f, g\} = i \langle \nabla_\zeta f, J \nabla_\zeta g \rangle.$$

**Lemme 4.3.1.** *Soient  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu)$  et  $g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mu)$ , alors pour tout  $0 < \mu' < \mu$ ,  $\{f, g\} \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu')$ , on a :*

$$\|\{f, g\}\|_{\mu'}^{\alpha, \beta} \leq \frac{C}{\mu(\mu - \mu')} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+}.$$

La constante  $C$  dépend de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour la preuve, on rappelle le lemme suivant, démontré dans [29] (annexe A).

**Lemme 4.3.2.** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach complexes,  $f : E \rightarrow F$  et  $v \in E$ . Supposons que qu'il existe  $r > 0$  tel que  $f$  est holomorphe sur la boule ouverte de centre  $v$  et de rayon  $r$  et que  $\|f\|_F \leq M$  sur cette boule. Alors  $d_v f \in \mathcal{L}(E, F)$  et on a :*

$$\|d_v f\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \frac{M}{r}.$$

*Preuve du lemme 4.3.1.* Soit  $x \in \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha)$ , il faut montrer que :

$$(i) \quad |\{f, g\}(x)| \leq \frac{C}{\mu(\mu - \mu')} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+};$$

$$(ii) \quad \|\nabla_\zeta \{f, g\}(x)\|_\alpha \leq \frac{C}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+};$$

$$(iii) \quad |\nabla_\zeta \{f, g\}(x)|_\beta \leq \frac{C}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+};$$

$$(iv) \quad |\nabla_\zeta^2 \{f, g\}(x)|_\beta \leq \frac{C}{\mu\mu'^2(\mu - \mu')} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+}.$$

Démontrons (i). On a :

$$\begin{aligned} |\{f, g\}(x)| &= |\langle \nabla_\zeta f(x), J \nabla_\zeta g(x) \rangle| \leq \|\nabla_\zeta f(x)\|_\alpha \|J \nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu^2} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{1}{\mu(\mu - \mu')} \|f\|_\mu^{\alpha, \beta} \|g\|_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à présent au gradient en  $\zeta$  du crochet de Poisson :

$$\nabla_\zeta \{f, g\}(x) = \langle \nabla_\zeta^2 f(x), J \nabla_\zeta g(x) \rangle + \langle \nabla_\zeta f(x), J \nabla_\zeta^2 g(x) \rangle =: \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Pour  $\Sigma_1$  on sait que  $\nabla_\zeta f : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow Y_\alpha$ . De plus  $x \mapsto \nabla_\zeta f(x)$  est holomorphe : alors  $\nabla_\zeta^2 f(x) \in \mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)$  pour tout  $x \in \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha)$ . D'après le lemme 4.3.2, on a donc :

$$\begin{aligned} \|\Sigma_1\|_\alpha &\leq \|\nabla_\zeta^2 f(x)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \|J\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu - \mu'} \sup_{y \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)} (\|\nabla_\zeta f(y)\|_\alpha) \|\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu^2(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{1}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour  $\Sigma_2$ , ce qui termine la preuve de (ii). Pour montrer (iii), on utilise les estimations 3 et 4 du Lemme 3.2.2. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} |\nabla_\zeta \{f, g\}(x)|_\beta &\leq \left| \langle \nabla_\zeta^2 f(x), J\nabla_\zeta g(x) \rangle \right|_\beta + \left| \langle \nabla_\zeta f(x), J\nabla_\zeta^2 g(x) \rangle \right|_\beta \\ &\leq C \left| \nabla_\zeta^2 f(x) \right|_\beta |J\nabla_\zeta g(x)|_{\beta+} + C |\nabla_\zeta f(x)|_\beta \left| J\nabla_\zeta^2 g(x) \right|_{\beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu^3} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer (iv). On commence par calculer la dérivée seconde du crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} \nabla_\zeta^2 \{f, g\}(x) &= \langle \nabla_\zeta^3 f(x), J\nabla_\zeta g(x) \rangle + \langle \nabla_\zeta^2 f(x), J\nabla_\zeta^2 g(x) \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_\zeta^2 f(x), J\nabla_\zeta^2 g(x) \rangle + \langle \nabla_\zeta f(x), J\nabla_\zeta^3 g(x) \rangle \\ &=: \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4. \end{aligned}$$

Pour  $\Gamma_1$ , on sait que  $\nabla_\zeta^2 f : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow \mathcal{M}_\beta$ . De plus,  $x \mapsto \nabla_\zeta^2 f(x)$  est holomorphe : alors  $\nabla_\zeta^3 f(x) \in \mathcal{L}(Y_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$  pour tout  $x \in \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha)$ . D'après le lemme 4.3.2, on a donc :

$$\begin{aligned} |\Gamma_1| &\leq \|\nabla_\zeta^3 f(x)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, \mathcal{M}_\beta)} |J\nabla_\zeta g(x)|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu - \mu'} \sup_{y \in \mathcal{O}_\mu(\mathcal{M}_\beta)} \left| \nabla_\zeta^2 f(y) \right|_\beta \|\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu^3(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{1}{\mu\mu'^2(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

On procède de même pour  $\Gamma_4$ . Il reste à étudier  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Les deux cas se traitent de la même façon. Regardons par exemple  $\Gamma_3$ . En utilisant la première estimation démontrée dans le Lemme 3.2.2,

on obtient :

$$\begin{aligned} |\Gamma_3| &\leq C \left| \nabla_{\zeta}^2 f(x) \right|_{\beta} \left| \nabla_{\zeta}^2 g(x) \right|_{\beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu^4} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu \mu'^2 (\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de lemme.  $\square$

Soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{O}_{\mu}(Y_{\alpha})$ . On note  $\Phi_g$  le flot hamiltonien de  $g$  à  $t = 1$ , c'est-à-dire :

$$\zeta = \zeta(1) = \Phi_g(\zeta_0) = \Phi_g^{t=1}(\zeta_0),$$

avec

$$\dot{\zeta} = iJ\nabla_{\zeta} g(\zeta) \quad \text{et} \quad \zeta(0) = \zeta_0.$$

**Corollaire 4.3.3.** Soient  $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu)$ ,  $g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mu)$  et  $0 < \mu' < \mu$  tels que :

$$\llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta+} \leq \frac{1}{C} \mu (\mu - \mu').$$

Alors  $\Phi_g : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_{\alpha}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mu}(Y_{\alpha})$  et  $f \circ \Phi_g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu')$ . De plus on a :

$$\llbracket f \circ \Phi_g \rrbracket_{\mu'}^{\alpha, \beta} \leq C' \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta}. \quad (4.3.1)$$

La constante  $C$  dépend de  $\alpha$  et  $\beta$  tandis que  $C'$  une constante absolue.

*Preuve.* Montrons d'abord que  $\Phi_g$  est bien défini et que  $\Phi_g : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_{\alpha}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mu}(Y_{\alpha})$ . Soit :

$$\bar{t} = \sup\{t > 0 \mid \zeta(a) \text{ définie pour } 0 \leq a \leq t \text{ et } \|\zeta(a)\|_{\alpha} < \mu\}.$$

Montrons que  $\bar{t} \geq 1$ . On sait que :

$$\zeta(a) = \zeta_0 + i \int_0^a J\nabla_{\zeta} g(\zeta(s)) ds.$$

Or  $g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta+}(\mu)$ , donc pour tout  $\zeta \in \mathcal{O}_{\mu}(Y_{\alpha})$  on a :

$$\|\nabla_{\zeta} g(\zeta)\|_{\alpha} \leq \frac{\llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta+}}{\mu} \leq \frac{1}{C} (\mu - \mu').$$

Il s'ensuit, pour  $a = 1$ , que :

$$\begin{aligned} \|\zeta(a)\|_{\alpha} &\leq \|\zeta_0\|_{\alpha} + \frac{a}{C} (\mu - \mu') \\ &\leq \mu' + \frac{a}{C} (\mu - \mu') < \mu, \end{aligned}$$

On déduit que  $\bar{t} \geq 1$ , que  $\Phi_g$  est bien défini et que  $\Phi_g : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_{\alpha}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mu}(Y_{\alpha})$ . Montrons à présent

que  $f \circ \Phi_g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu')$ , ainsi que l'estimation (4.3.1). Rappelons que pour  $f$  et  $g$  holomorphes, on a :

$$\begin{aligned} f \circ \Phi_g &= f + \{f, g\} + \frac{1}{2!} \{\{f, g\}, g\} + \frac{1}{3!} \{\{\{f, g\}, g\}, g\} + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} P_g^n f, \end{aligned}$$

avec  $P_g^0 f = f$ ,  $P_g^1 f = \{f, g\}$  et  $P_g^2 f = \{\{f, g\}, g\} \dots$

Grâce au Lemme 4.3.1 on a :

$$\llbracket P_g^n f \rrbracket_{\mu'}^{\alpha, \beta} \leq C^n \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta} \left( \mu(\mu - \mu') \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha, \beta+} \right)^n.$$

En utilisant l'hypothèse faite sur  $g$ , on obtient que  $f \circ \Phi_g$  est une série convergente. Donc  $f \circ \Phi_g \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mu')$  et on obtient l'estimation (4.3.1).  $\square$

On définit le tore réel de dimension finie :

$$T_\rho = \left\{ \zeta = ((\xi_s, \eta_s), s \in \mathbb{Z}) \mid \xi_s = \bar{\eta}_s, |\zeta_a|^2 = \nu \rho_a \text{ si } a \in \mathcal{A}, \xi_s = 0 \text{ si } s \in \mathcal{L} \right\}, \quad (4.3.2)$$

avec  $\nu > 0$  petit et  $\rho = (\rho_a, a \in \mathcal{A})$  le vecteur paramètre appartenant au domaine  $\mathcal{D} = [1, 2]^{\mathcal{A}}$ .

Ce tore de dimension  $n = \text{Card}(\mathcal{A})$  est invariant pour l'équation d'onde linéaire. Notre but est de mettre l'Hamiltonien  $H_2 + P$  sous forme normale à laquelle on appliquera le théorème KAM 4.4.1. Cette forme normale sera définie sur des tores construits sur l'espace  $Y_\alpha$  et voisins du tore réel  $T_\rho$ .

Au voisinage du tore  $T_\rho$ , on passe des variables  $(\zeta_a, a \in \mathcal{A})$  aux variables action-angle définies par :

$$\xi_a = \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, \quad \eta_a = \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

On passe donc des variables  $(\xi, \eta)$  au variables  $(I, \theta, \xi, \eta)$  avec  $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\xi = (\xi_s, s \in \mathcal{L})$  et  $\eta = (\eta_a, a \in \mathcal{L})$ . Le nouveau vecteur variable est dit réel si  $I = \bar{I}$ ,  $\theta = \bar{\theta}$ , et  $\xi = \bar{\eta}$ . À présent, on définit un voisinage torique complexe du tore réel  $T_\rho$  par :

$$\mathfrak{T}_\rho = \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha) = \left\{ (I, \theta, \xi, \eta) \mid |I - \nu\rho| < \nu\mu^2, |\text{Im}\theta| < \sigma, \|\zeta^\mathcal{L}\|_\alpha < \nu^{1/2}\mu \right\}, \quad (4.3.3)$$

avec  $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\zeta^\mathcal{L} = (\zeta_s, s \in \mathcal{L})$ .

**Lemme 4.3.4.** *Supposons que  $g$  est holomorphe réelle sur  $\mathbb{S}^1 \times J$  avec  $J$  un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}$ . Soit  $\alpha > 0$  et  $\nu > 0$  petit. Alors il existe  $\sigma^* > 0$  et  $\mu^* > 0$  tels que la perturbation  $P$  est bien définie et analytique sur  $\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha)$  pour  $0 < \sigma \leq \sigma^*$  et  $0 < \mu \leq \mu^*$ . Les paramètres  $\sigma^*$  et  $\mu^*$  dépendent de la non-linéarité  $g$ , de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ , de  $\nu$  et de  $\alpha$ .*

**Remarque 4.3.5.**

- On peut fixer à titre d'exemple  $\sigma^* = 1$  et déterminer explicitement  $\mu^*$ .

- Pour  $\nu$  petit, on a :

$$\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha) \subset \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu^*)$$

*Preuve.* La non-linéarité (4.1.2) est holomorphe réelle sur  $\mathbb{S}^1 \times J$ , avec  $J$  un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $I = [-M, M]$  avec  $M > 0$ . On peut étendre  $g$  de manière holomorphe sur  $\mathbb{S}^1 \times I_{\mathbb{C}}$ , avec  $I_{\mathbb{C}}$  de la forme :

$$I_{\mathbb{C}} = \{u \in \mathbb{C} \mid |Re(u)| \leq M, |Im(u)| < K\}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} u(\zeta)(x) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\xi_a \varphi_a + \eta_a \varphi_{-a}}{\sqrt{2\lambda_a}} + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}}. \end{aligned}$$

On veut avoir un contrôle sur ces deux sommes. Pour la première, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\xi_a \varphi_a + \eta_a \varphi_{-a}}{\sqrt{2\lambda_a}} \right| &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}} (|\xi_a| + |\eta_a|) \\ &\leq 2 \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{I_a} e^{|Im(\theta_a)|} \leq C_{\mathcal{A}} |I|^{1/2} e^{|Im(\theta)|}, \end{aligned}$$

avec  $C_{\mathcal{A}}$  une constante qui dépend de  $\mathcal{A}$ . Regardons à présent la deuxième somme. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\left| \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right| \leq \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{|\xi_s| + |\eta_s|}{\sqrt{2\lambda_s}} \leq C(\alpha) \|\zeta\|_\alpha.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} |u(\zeta)| &\leq C(\alpha) \|\zeta\|_\alpha + C_{\mathcal{A}} |I|^{1/2} e^{|Im(\theta)|}, \\ &\leq C(\alpha) \|\zeta\|_\alpha + C_{\mathcal{A}} |I - \nu\rho|^{1/2} e^{|Im(\theta)|} + C_{\mathcal{A}} (\nu\rho)^{1/2} e^{|Im(\theta)|}. \end{aligned}$$

On veut que, si  $(I, \theta, \zeta)$  appartient à  $\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha)$ , alors  $u(\zeta)(x) \in I_{\mathbb{C}}$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ . Ceci est vrai si on pose :

$$C(\alpha) \nu^{1/2} \mu + C_{\mathcal{A}} \nu^{1/2} \mu e^\sigma + C_{\mathcal{A}} \sqrt{2} \nu^{1/2} e^\sigma \leq \min(M, K).$$

On peut poser à titre d'exemple  $\sigma^* = 1$ , ce qui nous donne que :

$$\mu^* \leq \frac{\min(M, K) - C_{\mathcal{A}} \sqrt{2} \nu^{1/2} e}{\nu^{1/2} (C(\alpha) + C_{\mathcal{A}})}.$$

□

À présent on s'intéresse à la perturbation  $P$ . On veut montrer qu'elle appartient à la bonne

classe de fonctions hamiltoniennes. Rappelons que :

$$P(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^1} G(x, u(\zeta)(x)) dx,$$

avec  $g = \partial_u G$  et  $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$ .

**Lemme 4.3.6.** *Supposons que  $(x, u) \mapsto g(x, u)$  est réelle holomorphe sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1 \times J$ , avec  $J$  est un voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $\mu^* > 0$  tel que pour  $0 < \mu \leq \mu^*$  la perturbation*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\mapsto P(\zeta) \end{aligned}$$

appartient à  $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ .

*Preuve.* Rappelons d'abord que pour  $x \in \mathbb{S}^1$  on a :

$$u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s(x) + \eta_s \varphi_{-s}(x)}{\sqrt{2\lambda_s}} = u(\zeta)(x).$$

Remarquons que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au fait que  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $C_\alpha$  qui ne dépend que de  $\alpha$ , telle que pour  $\zeta \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$ , on a :

$$|u(\zeta)(x)| \leq C_\alpha \|\zeta\|_\alpha \leq C_\alpha \mu.$$

Pour montrer que  $P \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ , il suffit de montrer que :

$$\nabla P \in Y^\alpha \cap L_{1/2} \quad \text{et} \quad \nabla^2 P \in \mathcal{M}_{1/2}.$$

On commence par définir pour  $\alpha \geq 0$  l'espace suivant :

$$Z_\alpha = \left\{ v = (v_s \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{Z}) \mid (|v_s| \langle s \rangle^\alpha)_s \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Pour  $v \in Z_\alpha$ , on définit la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(v)$  de  $v$ , donnée par  $u(x) = \mathcal{F}(v) := \sum v_s e^{isx}$ .

On définit aussi l'espace de Sobolev discret par :

$$H^\alpha(\mathbb{S}^1) = \left\{ u \mid u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{u}(s) e^{isx} \mid (|\hat{u}(s)| \langle s \rangle^\alpha)_s \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$  alors

$$H^\alpha(\mathbb{S}^1) = \left\{ u \mid u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{u}(s) e^{isx} \mid (\widehat{\partial^\alpha u}(s))_s \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Ainsi on a l'équivalence suivante :

$$u \in H^\alpha(\mathbb{S}^1) \iff (\hat{u}(s))_s \in Z_\alpha. \tag{4.3.4}$$

- Pour montrer que  $\nabla_{\zeta}P \in Y_{\alpha}$ , il suffit de montrer par exemple que  $\frac{\partial P}{\partial \xi} \in Z_{\alpha}$ . On a,

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_s}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_s}} \int_{\mathbb{S}^1} \partial_u G(x, u(\zeta)(x)) \varphi_s(x) dx.$$

Or  $(x, u) \mapsto g(x, u)$  est réelle holomorphe sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1 \times J$ , donc  $x \mapsto \partial_u f(x, u(\zeta)(x)) \in H^{\alpha}(\mathbb{S}^1)$ . On déduit de l'équivalence (4.3.4) que  $\frac{\partial P}{\partial \xi} \in Z_{\alpha}$ .

- Montrons à présent que  $\nabla^2 P \in \mathcal{M}_{1/2}$ . Rappelons d'abord que :

$$|\nabla^2 P|_{1/2} = \sup_{s, s' \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{1/2} \langle s' \rangle^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} \right\|_{\infty}.$$

On a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_s \partial \xi_{s'}} = \frac{1}{2\lambda_s^{1/2} \lambda_{s'}^{1/2}} \int_{\mathbb{S}^1} \partial_u^2 G(x, u(\zeta)(x)) \varphi_s(x) \varphi_{s'}(x) dx.$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} = \frac{1}{2\lambda_s^{1/2} \lambda_{s'}^{1/2}} \begin{pmatrix} \widehat{\partial_u^2 G}(s + s') & \widehat{\partial_u^2 G}(s - s') \\ \widehat{\partial_u^2 G}(-s + s') & \widehat{\partial_u^2 G}(-s - s') \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne :

$$|\nabla^2 P|_{1/2} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\partial_u^2 G}(s) \right| < \infty.$$

- Il reste à montrer que  $\nabla P \in L_{1/2}$ . On rappelle que pour  $\beta \leq \alpha$  on a  $Y_{\alpha} \subset L_{\beta}$ . Or  $\nabla P \in Y_1 \subset L_{1/2}$ .

□

À présent, on est en mesure de donner le changement de variable symplectique qui met l'hamiltonien (4.1.5) sous forme normale qui satisfait les hypothèses du théorème KAM 4.4.1. Soit  $0 < \mu < \mu^*$  et  $0 < \sigma < \sigma^*$  avec  $\mu^*$  et  $\sigma^*$  données par le Lemme 4.3.2.

**Théorème 4.3.7.** *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble admissible. Il existe un Borélien  $\mathcal{U} \subset [1, 2]$  de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$  il existe  $\nu_0$  qui dépend de  $\mathcal{A}$ ,  $m$  et  $g$  tel que :*

- (i) *Pour  $0 < \nu \leq \nu_0$ ,  $\alpha > 1/2$  et  $\rho \in \mathcal{D}$  il existe un changement de variable symplectique réel holomorphe*

$$\Psi_{\rho} : \mathcal{O}^{\alpha} \left( \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathfrak{T}_{\rho}(\nu, \sigma, \mu, \alpha),$$

*qui transforme la forme symplectique  $-id\xi \wedge d\eta$  sur  $\mathfrak{T}_{\rho}(\nu, \sigma, \mu, \alpha)$  en :*

$$-\nu \sum_{a \in \mathcal{A}} dr_a \wedge d\theta_a - i\nu \sum_{s \in \mathcal{L}} d\xi_s \wedge d\eta_s.$$

- (ii) *Pour  $c > \frac{1}{2}$ , le changement de variable  $\Psi_{\rho}$  s'étend de manière holomorphe sur le domaine complexe*

$$\mathcal{D}_c = \left\{ \rho \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \mid \left| \rho_j - \frac{3}{2} \right| \leq c, 1 \leq j \leq \text{Card}(\mathcal{A}) \right\}.$$

Il transforme l'Hamiltonien perturbé  $H = H_2 + P$  en une forme normale donnée par :

$$\nu^{-1}H \circ \Psi_\rho = \Omega(\rho) \cdot r + \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a(\rho) \xi_a \eta_a + f(r, \theta, \zeta, \rho), \quad (4.3.5)$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_c$ . Le vecteur fréquence interne  $\Omega$  et les fréquences externes  $\Lambda_a$ ,  $a \in \mathcal{L}$ , sont données par (4.3.22) et (4.3.23). De plus, elles sont linéaires en  $\rho$  et vérifient :

$$|\Omega(\rho) - \omega| \leq C\nu, \quad |\Lambda_a(\rho) - \lambda_a| \leq C\nu|a|^{-1}, \quad (4.3.6)$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_c$ . La constante  $C$  est strictement positive et dépend de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

(iii) La perturbation  $f$  est réelle holomorphe en  $\rho$  sur  $\mathcal{D}_c$ . De plus elle appartient à  $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mathcal{D}, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  et vérifie :

$$\begin{aligned} \llbracket f \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \gamma} &\leq C_1(1 + \gamma)\nu\mu^4, \\ \llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \gamma} &\leq C_1(1 + \gamma)\nu^{3/2}\mu^5. \end{aligned}$$

avec  $C_1$  une constante qui dépend de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ , de la masse  $m$  et de la non-linéarité  $g$ .

**Remarque 4.3.8.** Dans (iii) on a besoin d'estimer la dérivée de la perturbation  $f$  par rapport au paramètre  $\rho$ . Ceci est possible grâce à l'estimation de Cauchy. On a donc besoin d'étendre  $\Psi_\rho$  sur  $\mathcal{D}_c$  de manière holomorphe, (voir 4.3.6).

Tout le reste de cette section sera dédié à la preuve du théorème précédent.

### 4.3.2 Résonance

On considère la partie quartique  $H_4$  de l'Hamiltonien  $H$  dans les variables complexes. Elle est définie par :

$$H_4 = H_2 + P_4,$$

avec

$$H_2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s,$$

et

$$P_4 = \sum_{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}} C(i, j, k, l) \frac{(\xi_i + \eta_{-i})(\xi_j + \eta_{-j})(\xi_k + \eta_{-k})(\xi_l + \eta_{-l})}{4\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}},$$

où  $C(i, j, k, l)$  une constante définie par :

$$C(i, j, k, l) := \int_{\mathbb{S}^1} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } i + j + k + l = 0, \\ 0 & \text{si } i + j + k + l \neq 0. \end{cases}$$

On définit le sous ensemble suivant de  $\mathbb{Z}^4$  :

$$\mathcal{J} := \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid i + j = k + l\}.$$

Donc

$$P_4 = \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}} \frac{(\xi_i + \eta_{-i})(\xi_j + \eta_{-j})(\xi_k + \eta_{-k})(\xi_l + \eta_{-l})}{4\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}.$$

On peut décomposer  $P_4$  en trois parties  $P_4 = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2$  avec :

$$\begin{aligned} P_4^0 &= \frac{1}{8\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^2 &= \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Pour  $(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4$  on définit les petits diviseurs

$$\begin{aligned} \Omega_0(i, j, k, l) &= \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l, \\ \Omega_1(i, j, k, l) &= \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k - \lambda_l, \\ \Omega_2(i, j, k, l) &= \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k - \lambda_l. \end{aligned}$$

**Définition 4.3.9.** *Un monôme  $\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l$  ou  $\eta_i \eta_j \eta_k \xi_l$  est dit résonant si  $\Omega_1(i, j, k, l) = 0$ . Dans ce cas, on note  $\mathcal{R}_1 = \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \Omega_1(i, j, k, l) = 0\}$ . Un monôme  $\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l$  est dit résonant si  $\Omega_2(i, j, k, l) = 0$ . Dans ce cas, on note  $\mathcal{R}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \Omega_2(i, j, k, l) = 0\}$ . Soit  $\mathcal{R}$  la réunion de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ .*

On définit aussi

$$\mathcal{J}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J} \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} \geq 2\},$$

et

$$\mathcal{J}_2^c = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J} \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{L} \geq 3\}$$

**Lemme 4.3.10.** *Il existe un Borélien  $\mathcal{U} \subset [1, 2]$  de mesure de Lebesgue pleine tel, que pour tout  $m \in \mathcal{U}$  on a :*

(i)  $\mathcal{R}_1 = \emptyset$ ,

(ii)  $\mathcal{R}_2 \subset \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}\}$ ,

(iii) *il existe une constante  $\gamma(m) > 0$  telle que pour tout  $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}$ , on a :*

$$|\Omega_1(i, j, k, l)|, \quad |\Omega_2(i, j, k, l)| \geq \gamma(m).$$

*Preuve.* On commence par prouver les assertions (i) et (ii). On fixe  $(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4$ . Définissons

pour  $\delta = \pm 1$  la fonction :

$$f(m) = \sqrt{i^2 + m} + \sqrt{j^2 + m} + \delta\sqrt{k^2 + m} - \sqrt{l^2 + m}.$$

La fonction  $f$  est analytique sur  $[1, 2]$ , et prolongeable en une fonction multivaluée sur  $\mathbb{C}$ . Si  $j = k = l = 0$ , alors  $-i^2$  est un point de branchement pour  $f$ . Les points de branchements de  $f$  sont donc  $-i^2, -j^2, -k^2$  et  $-l^2$ .

Si  $\delta = 1$  alors  $f$  n'est pas identiquement nulle sur  $[1, 2]$ , et elle admet un nombre fini de zéros. Ainsi, il existe un Borélien  $\mathcal{U}_1$ , de  $[1, 2]$  de mesure de Lebesgue pleine, tel que pour tout  $m \in \mathcal{U}_1$ , on a  $\mathcal{R}_1 = \emptyset$ .

Maintenant, pour  $\delta = -1$ , si  $f|_{[1,2]} \equiv 0$  alors  $f \equiv 0$ , et on a forcément  $\{i^2, j^2\} = \{k^2, l^2\}$ . Si  $f$  n'est pas identiquement nulle sur  $[1, 2]$  alors  $f$  admet un nombre fini de zéros. Il existe donc un Borélien  $\mathcal{U}_2$ , de  $[1, 2]$  de mesure de Lebesgue pleine, tel que pour tout  $m \in \mathcal{U}_2$ , on a  $\mathcal{R}_2 \subset \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}\}$ .

Il reste à prouver la dernière assertion. On commencera par contrôler  $\Omega_2$ . D'après la Proposition 4.2.10, pour  $\kappa > 0$ , il existe un ouvert  $\mathcal{C}_\kappa$  de  $[1, 2]$  tel que

$$\text{mes}(\mathcal{C}_\kappa) < C\kappa^\tau,$$

avec  $\tau > 0$  dépendant de  $\text{Card}(\mathcal{A})$  et  $C$  dépendant de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$  lui-même. Pour tout  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C}_\kappa)$  et tout  $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}$ , on a :

$$|\Omega_2(i, j, k, l)| > \kappa.$$

On sait que, si  $\kappa' \leq \kappa$ , alors  $\mathcal{C}_{\kappa'} \subset \mathcal{C}_\kappa$ . Donc  $\mathcal{C} := \bigcap_{0 < \kappa < 1} \mathcal{C}_\kappa$  est un Borélien, et on a :

$$\text{mes}(\mathcal{C}) = 0.$$

De plus, pour tout  $m \in \mathcal{U}_3 \equiv ([1, 2] \setminus \mathcal{C}) = \bigcup_{0 < \kappa < 1} ([1, 2] \setminus \mathcal{C}_\kappa)$ , il existe une constante  $\gamma(m)$  telle que pour tout  $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}$ , on a :

$$|\Omega_2(i, j, k, l)| > \gamma(m).$$

On procède de la même façon pour contrôler  $\Omega_1(i, j, k, l)$  mais en utilisant la Proposition 4.2.8 au lieu d'utiliser la Proposition 4.2.10. Finalement, on pose  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$ , avec  $\mathcal{U}_4$  le Borélien de mesure de Lebesgue pleine obtenu après le contrôle de  $\Omega_1(i, j, k, l)$ .  $\square$

### 4.3.3 Procédure de Birkhoff

Pour un  $\alpha > 0$  on rappelle la définition de l'espace suivant :

$$Z_\alpha = \left\{ v = (v_s \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{Z}) \mid (|v_s| \langle s \rangle^\alpha)_s \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

On munit  $Z_\alpha$  de la norme :

$$\|v\|_\alpha^2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} |v_s|^2 \langle s \rangle^{2\alpha}, \quad \langle s \rangle = \max(|s|, 1).$$

On note par  $v * w$  le produit de convolution dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  défini par  $(v * w)_l = \sum_{i+j=l} v_i w_j$ . On rappelle le Lemme 2 énoncé dans [22].

**Lemme 4.3.11.** *Soient  $v$  et  $w$  dans  $Z_\alpha$  avec  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Le produit de convolution  $v * w$  est alors dans  $Z_\alpha$ , et on a :*

$$\|v * w\|_\alpha < C(\alpha) \|v\|_\alpha \|w\|_\alpha, \quad (4.3.7)$$

avec  $C$  une constante qui ne dépend que de  $\alpha$ .

*Preuve.* Soient  $v, w \in Z_\alpha$ . On a :

$$\begin{aligned} \|v * w\|_\alpha^2 &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{2\alpha} \left| \sum_{i+j=s} v_i w_j \right|^2 \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{2\alpha} \left| \sum_{i+j=s} \frac{\langle s \rangle^\alpha}{\langle i \rangle^\alpha \langle j \rangle^\alpha} \frac{\langle i \rangle^\alpha \langle j \rangle^\alpha}{\langle s \rangle^\alpha} v_i w_j \right|^2 \\ &\leq \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{2\alpha} \left( \sum_{i+j=s} \left( \frac{\langle s \rangle}{\langle i \rangle \langle j \rangle} \right)^{2\alpha} \right) \left( \sum_{i+j=s} \frac{\langle i \rangle^{2\alpha} \langle j \rangle^{2\alpha}}{\langle s \rangle^{2\alpha}} |v_i|^2 |w_j|^2 \right) \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i+j=s} \left( \frac{\langle s \rangle}{\langle i \rangle \langle j \rangle} \right)^{2\alpha} \leq \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\langle i \rangle + \langle j \rangle}{\langle i \rangle \langle j \rangle} \right)^{2\alpha} \leq 4^\alpha \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle i \rangle^{2\alpha}} + \frac{1}{\langle j \rangle^{2\alpha}} \leq C^2(\alpha).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|v * w\|_\alpha^2 &\leq C(\alpha)^2 \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{i+j=s} \langle i \rangle^{2\alpha} |v_i|^2 \langle j \rangle^{2\alpha} |w_j|^2 \\ &\leq \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \langle i \rangle^{2\alpha} |v_i|^2 \langle j \rangle^{2\alpha} |w_j|^2 \\ &= C(\alpha)^2 \|v\|_\alpha^2 \|w\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

□

On considère l'espace de phase  $Y_\alpha$  muni de la structure symplectique  $-i \sum d\xi_k \wedge d\eta_k$ . Pour  $\alpha > 1/2$ ,  $Y_\alpha$  est une algèbre pour le produit de convolution.

**Lemme 4.3.12.** *Soient  $\alpha > 1/2$ . Soit  $P^4$  un polynôme homogène réel sur  $Y_\alpha$ , de degré 4, construit sur  $\mathcal{J}$ . On suppose que  $P^4$  est de la forme :*

$$P^4(\zeta) = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}} \sum_{1 \leq r \leq 4} a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_r} \eta_{j_{r+1}} \cdots \eta_{j_4},$$

avec  $|a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r| < M$  pour tout  $(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}$ . Alors on a :

$$\|\nabla P^4\|_\alpha \leq C(\alpha, M)\|\zeta\|_\alpha^3.$$

En particulier pour  $t \leq 1$ , le flot  $\Phi_{P^4}^t$  engendré par le champ de vecteur Hamiltonien  $X_{P^4} = iJ\nabla P^4$  est bien défini, réel et analytique sur la boule :

$$\mathcal{O}_\delta(Y_\alpha) = \{\zeta \in Y_\alpha \mid \|\zeta\|_\alpha < \delta = \delta(M)\}.$$

De plus, pour tout  $\zeta \in \mathcal{O}_\delta(Y_\alpha)$ ,

$$\|\Phi_{P^4}^t(\zeta) - \zeta\|_\alpha \leq C(M)\|\zeta\|_\alpha^3.$$

*Preuve.* On rappelle que  $X_{P^4}$  est de la forme  $i \begin{pmatrix} \nabla_\xi P^4 \\ \nabla_\eta P^4 \end{pmatrix}$ . Puisque  $|a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r| < M$ , on a :

$$\left| \frac{\partial P}{\partial \eta_l} \right| \leq M \sum_{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}} |\xi_i \xi_j \xi_k| + |\xi_i \xi_j \eta_k| + |\xi_i \eta_j \eta_k| + |\eta_i \eta_j \eta_k|.$$

Or

$$\sum_{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}} |\xi_i \xi_j \xi_k| = (\xi \star \xi \star \xi)_l + (\xi \star \xi \star \tilde{\xi})_l + (\xi \star \tilde{\xi} \star \tilde{\xi})_l + (\tilde{\xi} \star \tilde{\xi} \star \tilde{\xi})_l + (\xi \star \tilde{\xi} \star \xi)_l + (\tilde{\xi} \star \tilde{\xi} \star \xi)_l,$$

où  $\tilde{\xi}$  est défini par  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  avec  $\tilde{\xi}_j = \xi_{-j}$ . En utilisant le Lemme 4.3.11, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial P^4}{\partial \eta} \right\|_\alpha^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle l \rangle^{2\alpha} \left| \frac{\partial P^4}{\partial \eta_l} \right|^2 \\ &\leq C(M) \left( \|\xi \star \xi \star \xi\|_\alpha^2 + \|\xi \star \xi \star \eta\|_\alpha^2 + \|\xi \star \eta \star \eta\|_\alpha^2 + \|\eta \star \eta \star \eta\|_\alpha^2 \right) \\ &\leq C(\alpha, M) \left( \|\xi\|_\alpha^6 + \|\xi\|_\alpha^4 \|\eta\|_\alpha^2 + \|\xi\|_\alpha^2 \|\eta\|_\alpha^4 + \|\eta\|_\alpha^6 \right) \\ &\leq C(\alpha, M) \left( \|\xi\|_\alpha^2 + \|\eta\|_\alpha^2 \right)^3 = C(\alpha, M)\|\zeta\|_\alpha^6. \end{aligned}$$

De la même façon, on montre que :

$$\left\| \frac{\partial P^4}{\partial \xi} \right\|_\alpha^2 \leq C(\alpha, M)\|\zeta\|_\alpha^6.$$

Ainsi, on obtient :

$$\|\nabla_\zeta P^4\|_\alpha = \left( \left\| \frac{\partial P^4}{\partial \xi} \right\|_\alpha^2 + \left\| \frac{\partial P^4}{\partial \eta} \right\|_\alpha^2 \right)^{1/2} \leq C(\alpha, M)\|\zeta\|_\alpha^3,$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. □

**Lemme 4.3.13.** Soit  $D^-$  l'opérateur borné de  $Y_\alpha$  donné par :

$$D^- = \text{diag} \left\{ \lambda_s^{-1/2} I_2, s \in \mathcal{Z} \right\}.$$

On définit  $Q^4(\zeta) := P^4(D^-(\zeta))$ , avec  $P^4$  le polynôme défini dans le Lemme 4.3.12. Alors  $\nabla_\zeta^2 Q^4 \in \mathcal{M}_{1/2}$ , et on a :

$$\left| \nabla_\zeta^2 Q^4 \right|_{1/2} \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_\alpha^2.$$

*Preuve.* On rappelle que

$$P^4(\zeta) = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}} \sum_{1 \leq r \leq 4} a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_r} \eta_{j_{r+1}} \cdots \eta_{j_4},$$

avec  $|a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r| < M$  pour tout  $(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}$ . On a donc

$$Q^4(\zeta) = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}} \sum_{1 \leq r \leq 4} \frac{a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r}{\sqrt{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \lambda_{j_3} \lambda_{j_4}}} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_r} \eta_{j_{r+1}} \cdots \eta_{j_4}.$$

On a aussi

$$\left| \nabla_\zeta^2 Q^4 \right|_{1/2} = \sup_{s, s' \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{1/2} \langle s' \rangle^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 Q^4}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} \right\|_\infty.$$

Pour tous  $s$  et  $s'$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a :

$$\langle s \rangle^{1/2} \langle s' \rangle^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 Q^4}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} \right\|_\infty \leq \|A\|_\infty,$$

avec  $A$  une matrice réelle carrée de taille 2, dont les coefficients sont des polynômes homogènes de  $Y_\alpha$  de degré 2, de la forme :

$$P^2(\zeta) = \sum_{\bar{j} \in \mathcal{J}} \sum_{k, l=1}^4 \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j_{\sigma(k)}} \lambda_{j_{\sigma(l)}}}} \left( a_1 \xi_{j_{\sigma(k)}} \xi_{j_{\sigma(l)}} + a_2 \xi_{j_{\sigma(k)}} \eta_{j_{\sigma(l)}} + a_3 \eta_{j_{\sigma(k)}} \eta_{j_{\sigma(l)}} \right),$$

avec  $\bar{j} = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, j_{\sigma(3)}, j_{\sigma(4)})$  où  $\sigma$  est une permutation appartenant au groupe de permutation  $S(\{1, 2, 3, 4\})$ . Par le Lemme 4.3.11 on a :

$$\left| P^2(\zeta) \right| \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_\alpha^2,$$

et donc

$$\left| \nabla_\zeta^2 Q \right|_{1/2} \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_\alpha^2.$$

□

**Remarque 4.3.14.** On rappelle que  $P_4 = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2$  avec

$$\begin{aligned} P_4^0 &= \frac{1}{8\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^2 &= \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Les coefficients de chaque monôme sont majorés pas  $3/4\pi$ . En appliquant les lemmes 4.3.12 et 4.3.13, on obtient que la partie quartique  $P_4$  de la perturbation  $P$  est dans  $\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\mu)$  pour  $\alpha > 1/2$  et  $\zeta \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$ .

Soit  $\mathcal{U} \subset [1, 2]$  le Borélien de mesure de Lebesgue pleine construit dans le Lemme 4.3.10. Pour tout  $m \in \mathcal{U}$ , on veut construire un changement de variable symplectique réel holomorphe au voisinage de l'origine de  $Y_\alpha$  qui transforme la partie quartique de l'hamiltonien  $H$  en une forme normale de Birkhoff d'ordre 5. Cette transformation exhibe de la partie quartique de la perturbation  $P$  les termes intégrables ainsi que les termes d'ordre au moins 3 dans la direction de  $\mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$ .

**Proposition 4.3.15.** Pour tout  $m \in \mathcal{U}$ , il existe un changement de variable symplectique  $\tau$  réel holomorphe défini sur  $\mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha)$  pour un certain  $\delta(m)$  et  $\alpha > 1/2$ . Ce changement de variable vérifie :

$$\|\tau(\zeta) - \zeta\|_\alpha \leq C(m) \|\zeta\|_\alpha^3, \quad \forall \zeta \in \mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha). \quad (4.3.8)$$

Il transforme l'hamiltonien  $H = H_2 + P = H_2 + P_4 + R_5$  en :

$$H \circ \tau = (H_2 + P) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6 + R_5 \circ \tau, \quad (4.3.9)$$

avec

$$Z_4 = \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\lambda_i \lambda_j},$$

et  $Q_4 = Q_{4,1} + Q_{4,2}$  avec

$$\begin{aligned} Q_{4,1} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,-k,l) \in \mathcal{J}_2^c} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ Q_{4,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2^c} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Le polynôme  $Z_4$  contient des termes intégrables alors que  $Q_4$  est cubique ou quartique dans la direction de  $\mathcal{L}$ . De plus,  $Z_4$ ,  $Q_4$ ,  $R_6$  et  $R_5 \circ \tau$  sont réels holomorphes sur  $\mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha)$ . Les restes  $R_5 \circ \tau$  et  $R_6$  sont respectivement d'ordre 5 et 6 au voisinage de l'origine de  $Y_\alpha$ . De plus, pour tout  $0 < \mu \leq \delta(m)$ ,  $Z_4$ ,  $Q_4$ ,  $R_5 \circ \tau$  et  $R_6$  sont dans  $\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\mu)$  et vérifient :

$$\llbracket Z_4 \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2} + \llbracket Q_4 \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2} \leq C\mu^4, \quad (4.3.10)$$

$$\llbracket R_6 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^6, \quad (4.3.11)$$

$$\llbracket R_5 \circ \tau \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^5, \quad (4.3.12)$$

avec  $C$  une constante strictement positive qui dépend de la masse  $m$ , de la non-linéarité  $g$  et de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

Rappelons que le crochet de Poisson associé à la forme symplectique  $-i \sum_{s \in \mathbb{Z}} d\xi_s \wedge d\eta_s$  est donné par :

$$\{f, g\}(\xi, \eta) = i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} - \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial \eta_j},$$

pour  $f, g \in \mathcal{C}^1(Z_\alpha \times Z_\alpha)$ .

**Lemme 4.3.16.** *Soit  $P$  un polynôme homogène de degré 4 défini par :*

$$P(\xi, \eta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} a_{\alpha, \beta} \xi^\alpha \eta^\beta,$$

avec  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \xi_4^{\alpha_4}$ . On a alors :

$$\{H_2, P\}(\xi, \eta) = i \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} a_{\alpha, \beta} \Omega_{\min(|\alpha|, |\beta|)}(\alpha, \beta) \xi^\alpha \eta^\beta.$$

*Preuve.* On démontre le lemme précédent en utilisant l'expression de l'hamiltonien  $H_2$ , du crochet de Poisson et des fréquences  $\Omega_p(\alpha, \beta)$  pour  $0 \leq p \leq 2$ .  $\square$

*Preuve de la Proposition 4.3.15.* On cherche à construire un changement de variable symplectique  $\tau$  réel holomorphe défini au voisinage de l'origine de  $Y_\alpha$  avec  $\alpha > 1/2$  qui transforme l'hamiltonien  $H$  en une forme normale de Birkhoff à l'ordre 5. Pour ce faire, on utilise une méthode classique :  $\tau$  sera le flot induit par un Hamiltonien  $\chi_4$  à  $t = 1$ . En effet,  $\tau = \Phi_{\chi_4}^1$  avec  $\Phi_{\chi_4}^t$  le flot induit par  $\chi_4$  à l'instant  $t$ . On ramène notre problème à la recherche d'un Hamiltonien  $\chi_4$  qui sera solution d'une certaine équation homologique.

Grâce à la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} (H_2 + P_4 + R_5) \circ \tau &= (H_2 + P_4) \circ \tau + R_5 \circ \tau \\ &= H_2 + P_4 + \{H_2, \chi_4\} + \{P_4, \chi_4\} \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \{ \{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4 \} \circ \Phi_{\chi_4}^t dt + R_5 \circ \tau. \end{aligned}$$

On veut que :

$$(H_2 + P_4 + R_5) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6 + R_5 \circ \tau.$$

Donc, en posant

$$R_6 = \{P_4, \chi_4\} + \int_0^1 (1-t) \{ \{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4 \} \circ \Phi_{\chi_4}^t dt,$$

il suffit que  $\chi_4$  vérifie l'équation homologique suivante :

$$\{H_2, \chi_4\} = Z_4 + Q_4 - P_4. \quad (4.3.13)$$

D'après le Lemme 4.3.16, il suffit de prendre  $\chi_4$  de la forme :

$$\begin{aligned} \chi_4 &= \frac{i}{8\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l - \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\Omega_0(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \sum_{(i,j,-k,l) \in \mathcal{J}_2} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l - \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\Omega_1(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &+ \frac{3i}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\Omega_2(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.3.10, il existe un Borélien  $\mathcal{U} \subset [1, 2]$  de mesure de Lebesgue pleine tel que pour tout  $m \in \mathcal{U}$ , il existe une constante strictement positive  $\gamma(m) > 0$  qui minore  $|\Omega_1(i, j, k, l)|$  et  $|\Omega_2(i, j, k, l)|$ . De plus,  $\Omega_0(i, j, k, l) > 4$ . Ainsi  $\chi_4$  est un polynôme homogène de degré 4 construit sur  $J$ , avec des coefficients bornés. Il s'ensuit que le champ de vecteur Hamiltonien  $X_{\chi_4}$  est réel holomorphe sur  $Y_\alpha$ . De plus, d'après le Lemme 4.3.12, pour tout  $m \in \mathcal{U}$  et  $\alpha > 1/2$ , il existe  $C(\alpha, m) > 0$  tels que :

$$\|X_{\chi_4}\|_\alpha \leq C(\alpha, m) \|\zeta\|_\alpha^3.$$

Ainsi il existe  $\delta(m) > 0$  tel que  $\tau$  est un changement de variable symplectique holomorphe réel défini sur  $\mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha)$ .

En utilisant le Lemme 4.3.16, on a

$$\begin{aligned} \{H_2, \chi_4\} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,-k,l) \in \mathcal{J}_2} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &- \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Donc

$$(H_2 + P_4) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6,$$

avec  $Z_4, Q_4$  définis comme dans la proposition. On voit directement qu'ils sont deux polynômes homogènes de degrés 4 réels à coefficients bornés. Donc, en appliquant les lemmes 4.3.11 et 4.3.12, on obtient pour  $\alpha > 1/2$  et  $0 < \mu \leq \delta(m)$ , que ces

Regardons à présent les propriétés des restes  $R_6$  et  $R_5 \circ \tau$ . Commençons par  $R_6$ . Par construction,  $R_6$  est un Hamiltonien holomorphe d'ordre 6 au voisinage de l'origine de  $Y_\alpha$ . On rappelle que

$$R_6 = H \circ \tau - H_2 - Z_4 - Q_4 - R_5 \circ \tau.$$

Le membre de droite est réel et donc  $R_6$  l'est aussi. Démontrons que  $R_6$  est dans  $\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\mu)$  avec  $0 < \mu \leq \delta(m)$ .

On commence d'abord par démontrer que  $\chi_4 \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2+}(\mu)$ . On remarque que, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}$ , on a :

$$\frac{\langle i \rangle^{3/2}}{|\Omega_\iota(i, j, k, l)| \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \leq C(\mathcal{A}, m), \quad \iota = 0, 1, 2.$$

En utilisant cette estimation et la même méthode que dans la preuve du Lemme 4.3.12, on obtient que  $\nabla_\zeta \chi_4 \in L_{\frac{1}{2}+}$ .

Il reste à montrer que  $\nabla_\zeta^2 \chi_4 \in \mathcal{M}_{\frac{1}{2}+}$ . Les premiers termes de  $\chi_4$  sont construits sur  $\mathcal{J}$ . Pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\frac{\langle i \rangle^{1/2} \langle j \rangle^{1/2} (1 + ||i| - |j||)}{\Omega_0(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \leq 1.$$

Les termes suivants de  $\chi_4$  sont construits sur  $\mathcal{J}_2$ . En appliquant la Proposition 4.2.8 on obtient donc :

$$\frac{\langle i \rangle^{1/2} \langle j \rangle^{1/2} (1 + ||i| - |j||)}{\Omega_\iota(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \leq C'(m, \mathcal{A}), \quad \iota = 1, 2.$$

En utilisant ces deux dernières estimations et la même méthode que dans la preuve du Lemme 4.3.13, on obtient que  $\nabla_\zeta^2 \chi_4 \in \mathcal{M}_{\frac{1}{2}+}$ . Ceci nous permet de montrer que  $\chi_4 \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2+}(\mu)$  pour  $\alpha > 1/2$  et  $0 < \mu \leq \delta(m)$ .

D'après le Lemme 4.3.1 on a  $\{\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\delta(m)), \mathcal{T}^{\alpha,1/2+}(\delta(m))\} \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{2}\delta(m))$ . Donc  $\{P_4, \chi_4\} \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{2}\delta(m))$  et pour  $0 < \mu \leq \frac{1}{2}\delta(m)$ , on a :

$$\llbracket \{P_4, \chi_4\} \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2} \leq C\mu^{-2} \llbracket P_4 \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2} \llbracket \chi_4 \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2+} \leq C\mu^6.$$

Grâce à l'équation homologique (4.3.13), on a :

$$\{H_2 + P_4, \chi_4\} = Z_4 + Q_4 - P_4 + \{P_4, \chi_4\} \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{2}\delta(m)).$$

En appliquant encore une fois le Lemme 4.3.1, on obtient pour  $0 < \mu \leq \frac{1}{4}\delta(m)$  :

$$\{\{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4\} \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{4}\delta(m)) \quad \text{et} \quad \llbracket \{\{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4\} \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2} \leq C\mu^6.$$

Puisque  $\chi_4 \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2+}(\delta(m))$  et comme  $\llbracket \chi_4 \rrbracket_\mu^{\alpha,1/2+} \leq C\mu^4$ , le Corollaire 4.3.3 donne :

$$\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{4}\delta(m)) \circ \Phi_{\chi_4}^t \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{8}\delta(m)).$$

Ainsi,  $R_6 \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\mu)$  et vérifie l'estimation (4.3.11) pour  $0 < \mu \leq \frac{1}{8}\delta(m)$ .

À présent, on s'intéresse au reste  $R_5 \circ \tau$ . Rappelons que  $R_5 = P - P_4$ , donc  $R_5$  est réel holomorphe d'ordre 5 au voisinage de l'origine de  $Y_\alpha$  et appartient à  $\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\delta(m))$ . Encore une fois, grâce au Corollaire 4.3.3, on obtient que  $R_5 \circ \tau \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\frac{1}{2}\delta(m))$ , donc  $R_5 \circ \tau \in \mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\mu)$  et

vérifie pour  $0 < \mu \leq \frac{1}{2}\delta(m)$  :

$$\llbracket R_5 \circ \tau \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq \llbracket P - P_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^5.$$

On termine la preuve en remplaçant  $\frac{1}{8}\delta(m)$  par  $\delta(m)$ .  $\square$

**Lemme 4.3.17.** *Pour  $m \in \mathcal{U}$  et  $\alpha > 1/2$ , le changement de variable  $\tau$  défini dans la Proposition 4.3.15 vérifie :*

$$\tau \left( \mathfrak{T}_\rho(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha) \right) \subset \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha),$$

pour  $0 < \sigma \leq 1$ ,  $0 < \mu \leq 1$  et  $\nu \leq 4\mu^{-2}e^{-\sigma}\delta^2(m)$ .

*Preuve.* Pour  $m \in \mathcal{U} \subset [1, 2]$  et  $\alpha > 1/2$ , le changement de variable  $\tau$  vérifie :

$$\|\tau(\zeta) - \zeta\|_\alpha \leq C(m)\|\zeta\|_\alpha^3, \quad \forall \zeta \in \mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha).$$

Rappelons que :

$$\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha) = \left\{ (I, \theta, \xi, \eta) \mid |I - \nu\rho| < \nu\mu^2, |Im\theta| < \sigma, \|\zeta^\mathcal{L}\|_\alpha < \nu^{1/2}\mu \right\}.$$

Posons  $\tilde{\zeta} = \tau(\zeta)$ . Alors, pour  $\nu \leq 4\mu^{-2}e^{-\sigma}\delta^2(m)$ , on a :

$$\|\tilde{\zeta} - \zeta\|_\alpha \leq C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}} \nu^{\frac{3}{2}}, \quad (4.3.14)$$

où  $C'(m)$  une constante, multiple de  $C(m)$ . Montrons en utilisant cette estimation que :

$$\tau \left( \mathfrak{T}_\rho(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha) \right) \subset \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha).$$

- Sur  $\mathcal{L}$ , on a :

$$\|\tilde{\zeta}\|_\alpha \leq \|\zeta\|_\alpha + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} < \frac{1}{2}\nu^{\frac{1}{2}} + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} < \nu\mu.$$

- Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_a - \nu\rho_a| &\leq |I_a - \nu\rho_a| + |\tilde{I}_a - I_a| \\ &< \frac{1}{4}\nu\mu^2 + |\tilde{\xi}_a\tilde{\eta}_a - \xi_a\eta_a| \\ &< \frac{1}{4}\nu\mu^2 + |\tilde{\xi}_a||\tilde{\eta}_a - \eta_a| + |\eta_a||\tilde{\xi}_a - \xi_a|. \end{aligned}$$

Comme  $\zeta \in \mathfrak{T}_\rho(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha)$ , on a

$$|\eta_a| < \left(\frac{1}{2}\mu + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\sigma}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu de l'inégalité (4.3.14), on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_a| &< \left(\frac{1}{2}\mu + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\sigma}{2}}\nu^{\frac{1}{2}} + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}}\nu^{\frac{3}{2}}, \\ |\tilde{\eta}_a - \eta_a| + |\tilde{\xi}_a - \xi_a| &< C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}}\nu^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$|\tilde{I}_a - \nu\rho_a| < \nu\mu^2.$$

- Il reste à vérifier que  $|Im(\tilde{\theta}_a)| < \sigma$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . D'une part, on a :

$$|\tilde{\xi}_a| = \left| \sqrt{\tilde{I}_a} e^{i\tilde{\theta}_a} \right| \leq \sqrt{\tilde{I}_a} e^{|Im(\tilde{\theta}_a)|} < \nu^{\frac{1}{2}}(\mu + \sqrt{2})e^{|Im(\tilde{\theta}_a)|}.$$

D'autre part, grâce à l'inégalité (4.3.14) on a :

$$|\tilde{\xi}_a| < \left(\frac{1}{2}\mu + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\sigma}{2}}\nu^{\frac{1}{2}} + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}}\nu^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi

$$e^{|Im(\tilde{\theta}_a)|} \leq \frac{\mu + 2\sqrt{2}}{2(\mu + \sqrt{2})} e^{\frac{\sigma}{2}} + \nu \frac{C'(m)\mu^3}{\mu + \sqrt{2}} e^{\frac{3\sigma}{2}},$$

et on obtient que  $|Im(\tilde{\theta})| \leq \sigma$ .

□

#### 4.3.4 Forme normale sur les ensembles admissibles

On rappelle que l'hamiltonien  $Z_4$  est donné par :

$$Z_4 = 3/4\pi \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\lambda_i \lambda_j},$$

avec

$$\mathcal{J}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J} \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} \geq 2\}.$$

On remarque que  $Z_4$  contient des termes intégrables formés par les monômes de la forme  $\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l = I_i I_j$ , qui dépendent seulement des actions définies par  $I_n = \xi_n \eta_n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Notons ces termes  $Z_4^+$  et  $Z_4^- = Z_4 - Z_4^+$ . Un simple calcul nous donne :

$$Z_4^+ = \frac{3}{4\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{Z}} \frac{4 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_l \lambda_k} I_l I_k. \quad (4.3.15)$$

On s'intéresse à présent à  $Z_4^-$ . On a  $Z_4^- = \sum_{0 \leq r \leq 4} Z_4^{-r}$  avec  $r = \#\{(i, j, k, l) \cap \mathcal{A}\}$ . Par définition de  $\mathcal{J}_2$ , on a  $Z_4^{-0} = Z_4^{-1} = 0$ .

**Lemme 4.3.18.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est admissible. Alors, pour tout  $m \in \mathcal{U}$ ,*

$$Z_4^{-4} = 0.$$

*Preuve.* Posons  $\mathcal{F} = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{A}\}$ . On a alors, pour  $(i, j, k, l) \in \mathcal{F}$  et  $m \in \mathcal{U}$ ,

- ★  $i + j = k + l$  d'après la définition de  $\mathcal{J}$ ,
- ★  $\{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}$  d'après le Lemme 4.3.10,
- ★  $\{i, j\} \neq \{|k|, |l|\}$  d'après la définition de  $\mathcal{A}$ ,

Il s'ensuit que  $\mathcal{F} = \emptyset$  et que  $Z_4^{-4} = 0$ . □

**Lemme 4.3.19.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est admissible. Alors pour tout  $m \in \mathcal{U}$*

$$Z_4^{-3} = 0.$$

*Preuve.* Supposons qu'il existe  $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2$  tel que  $\#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} = 3$ . Sans perte de généralité supposons que  $i, j, k \in \mathcal{A}$  et  $l \in \mathcal{L}$ . Grâce au Lemme 4.3.10, on a  $|i| = |k|$  ou  $|j| = |k|$ . De plus, et puisque  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible, on a  $i = k$  ou  $j = k$ . Supposons par exemple que  $i = k$ . Puisque  $i + j = k + l$ , on a  $j = l$  et  $l \in \mathcal{A}$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{A}$  est admissible. Donc  $Z_4^{-3} = 0$ . □

**Lemme 4.3.20.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est admissible. Alors, pour tout  $m \in \mathcal{U}$ ,*

$$Z_4^{-2} = 0.$$

*Preuve.* Posons  $\mathfrak{N} = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2 \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} = 2\}$ .

- ★ Supposons que  $i, j \in \mathcal{A}$  et que  $k, l \in \mathcal{L}$ . Alors, par le Lemme 4.3.10, on a  $i = -k$  et  $j = -l$  ou  $i = -l$  et  $j = -k$ . Sans perte de généralité supposons que  $i = -k$  et  $j = -l$ . Or  $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}$ , donc  $i + j = k + l = -k - l$  et donc  $i = -j$ . Ceci est absurde puisque  $\mathcal{A}$  est un ensemble admissible. Le cas où  $k, l \in \mathcal{A}$  et  $i, j \in \mathcal{L}$  se traite exactement de la même manière.
- ★ Supposons maintenant que  $i, l \in \mathcal{A}$  et que  $j, k \in \mathcal{L}$ . D'après le Lemme 4.3.10, on aura alors soit  $|i| = |k|$  et  $|j| = |l|$  ou  $i = l$  et  $|j| = |k|$ . Étudions d'abord le cas où  $i = l$  et  $|j| = |k|$ . La condition  $i + j = k + l$  nous donne  $j = k$ . Le monôme  $\xi_i \xi_j \eta_j \eta_i$  serait donc dans  $Z_4^-$ , ce qui est absurde. Regardons maintenant le cas où  $|i| = |k|$  et  $|j| = |l|$ . Puisque  $\mathcal{A}$  est admissible, on a  $i = -k$  et  $l = -j$ . Puisque  $i + j = k + l$ , on a alors  $i = l$  et  $j = k$ , ce qui nous ramène au cas précédent. Le cas où  $k, l \in \mathcal{A}$  et  $i, j \in \mathcal{L}$  se traite exactement de la même manière. De même on traite le cas où  $i, k \in \mathcal{A}$  et  $j, l \in \mathcal{L}$ .

Ainsi on déduit que  $\mathfrak{N} = \emptyset$  et donc  $Z_4^{-2} = 0$  □

### 4.3.5 Passage aux variables action-angle

Comme dans (4.3.3), on passe des variables  $(\xi, \eta)$  aux variables  $(I, \theta, \zeta^{\mathcal{L}})$ , avec  $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$ ,  $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$  et  $\zeta^{\mathcal{L}} = (\zeta_s, s \in \mathcal{L})$ . On rappelle que pour  $a \in \mathcal{A}$ ,  $I$  et  $\theta$  sont donnés par :

$$\xi_a = \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, \quad \eta_a = \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}.$$

Dans ces nouvelles variables, la forme symplectique  $-id\xi \wedge d\eta$  devient :

$$-\sum_{a \in \mathcal{A}} dI_a \wedge d\theta_a - i \sum_{s \in \mathcal{L}} d\xi_s \wedge d\eta_s. \quad (4.3.16)$$

De plus  $I$  est d'ordre 2,  $\theta$  est d'ordre zéro, et  $\xi$  et  $\eta$  sont d'ordre 1.

En vertu de (4.3.15) et des lemmes 4.3.18-4.3.20, l'hamiltonien 4.3.9 devient :

$$\begin{aligned} H \circ \tau = & \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a I_a + \frac{3}{4\pi} \sum_{l, a \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l,a}}{\lambda_l \lambda_a} I_l I_a + \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{L}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} I_l \xi_s \eta_s \\ & + Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6 \end{aligned}$$

La première ligne contient les termes intégrables. La deuxième ligne contient :

- $Q_4$ , qui est d'ordre 4 et au moins d'ordre 3 dans la direction de  $\mathcal{L}$  ;
- $R_6$ , qui provient de la forme normale de Birkhoff et qui est d'ordre 6 ;
- $R_5 \circ \tau$ , qui provient du terme d'ordre 5 de la non-linéarité (4.1.2).

L'hamiltonien  $H \circ \tau$  dépend des variables  $(I, \theta, \zeta^{\mathcal{L}})$ . Pour la suite, on va omettre le multi-indice  $\mathcal{L}$  :  $\zeta^{\mathcal{L}}$  sera donc noté par  $\zeta$ .

### 4.3.6 Re-scaling des variables

Notre but est d'étudier l'hamiltonien  $H_1$ . Pour cela, on va ré-échelonner les variables  $(I, \theta, \xi, \eta)$  moyennant le changement de variable :

$$\chi_\rho : (\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \mapsto (I, \theta, \xi, \eta), \quad (4.3.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} I &= \nu\rho + \nu\tilde{r}, & \theta &= \tilde{\theta}, \\ \xi &= \nu^{1/2}\tilde{\xi}, & \eta &= \nu^{1/2}\tilde{\eta}. \end{aligned}$$

on a :

$$\chi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left( \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathfrak{T}_\rho \left( \nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha \right).$$

Dans ces nouvelles variables, la forme symplectique (4.3.16) devient :

$$-\nu \sum_{a \in \mathcal{A}} d\tilde{r}_a \wedge d\tilde{\theta}_a - i\nu \sum_{s \in \mathcal{L}} d\tilde{\xi}_s \wedge d\tilde{\eta}_s. \quad (4.3.18)$$

Posons :

$$\check{\Psi} = \check{\Psi}_\rho = \tau \circ \chi_\rho.$$

Le changement de variables  $\chi_\rho$  est linéaire en  $\rho$ . On peut donc étendre  $\Phi$  de manière holomorphe sur :

$$\mathcal{D}_c = \left\{ \rho \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \mid \left| \rho_j - \frac{3}{2} \right| \leq c, 1 \leq j \leq \text{Card}(\mathcal{A}) \right\}.$$

Pour alléger les notations on va omettre le tilde. Dans ces variables ré-échelonnées l'hamiltonien  $H$  devient à une constante près :

$$\begin{aligned} H \circ \check{\Psi} &= \nu \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a r_a + \nu^2 \frac{3}{2\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a, l}}{\lambda_a \lambda_l} \rho_l r_a \\ &+ \nu \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \nu^2 \frac{3}{\pi} \sum_{\substack{l \in \mathcal{A} \\ s \in \mathcal{L}}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} \rho_l \xi_s \eta_s \\ &+ \nu^2 \frac{3}{4\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a, l}}{\lambda_a \lambda_l} r_l r_a + \nu^2 \frac{3}{\pi} \sum_{\substack{l \in \mathcal{A} \\ s \in \mathcal{L}}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} r_l \xi_s \eta_s \\ &+ (Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6) \circ \chi_\rho. \end{aligned}$$

En divisant par  $\nu$ , on peut réécrire l'hamiltonien suivant sous la forme :

$$\nu^{-1} H \circ \check{\Psi} = h_0 + f, \quad (4.3.19)$$

où  $h_0 \equiv h_0(r, \xi, \eta; \rho, \nu)$  contient tous les termes linéaires en  $r$ , quadratiques en  $\xi, \eta$  et indépendants de la variable angle  $\theta$ . La nouvelle perturbation  $f$  contient tous les termes restants et dépend notamment de la variable angle. Elle est donnée par :

$$f \equiv \nu \frac{3}{4\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a, l}}{\lambda_a \lambda_l} r_l r_a + \nu \frac{3}{\pi} \sum_{\substack{l \in \mathcal{A} \\ s \in \mathcal{L}}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} r_l \xi_s \eta_s + \nu^{-1} (Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6) \circ \chi_\rho. \quad (4.3.20)$$

On peut écrire le nouvel hamiltonien  $h$  sous la forme suivante

$$h_0 = \Omega \cdot r + \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a \xi_a \eta_a, \quad (4.3.21)$$

avec  $\Omega = (\Omega_k)_{k \in \mathcal{A}}$ , et

$$\Omega_k = \Omega_k(\rho, \nu) = \omega_k + \nu \tilde{\omega}_k = \omega_k + \nu \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l, k}}{\lambda_l} \rho_l, \quad (4.3.22)$$

$$\Lambda_a = \Lambda_a(\rho, \nu) = \lambda_a + \nu \tilde{\lambda}_a = \lambda_a + \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l}, \quad (4.3.23)$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_c$ . On remarque que pour les fréquences internes, on a :

$$\tilde{\omega}_k = \sum_{l \in \mathcal{A}} M_k^l \rho_l, \quad M_k^l = \frac{3}{2\pi} \frac{4 - 3\delta_{l, k}}{\lambda_k \lambda_l}. \quad (4.3.24)$$

$M$  est une matrice inversible puisque :

$$\det M = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^n \left(\prod_{l \in \mathcal{A}} \lambda_l^{-2}\right) (4n-3)(-3)^{n-1}, \quad n = \text{Card}(\mathcal{A}).$$

Rappelons que  $\rho \in [1, 2]^{\mathcal{A}}$  et que  $\mathcal{A} \subset \{a \in \mathbb{Z}^d \mid |a| \leq N\}$ . On a alors, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_c$ ,

$$|\Omega(\rho) - \omega(\rho)| = \nu |M\rho| \leq C\nu, \quad \text{et} \quad |\Lambda_a(\rho) - \lambda_a(\rho)| \leq \nu |a|^{-1} \left| \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l} \right|.$$

Ceci prouve les inégalités (4.3.6) et termine la preuve des points (i) et (ii) du Théorème 4.3.7.

En rappelant que  $\zeta = (\zeta_a)_{a \in \mathcal{L}}$ , la partie quadratique de notre Hamiltonien est donnée par la matrice infinie :

$$A(\rho, \nu) = \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & \Lambda_a(\rho, \nu) \\ \Lambda_a(\rho, \nu) & 0 \end{array} \right), a \in \mathcal{L} \right).$$

On peut donc écrire l'hamiltonien  $h$  sous la forme :

$$h = \Omega(\rho, \nu) \cdot r + \frac{1}{2} \langle A(\rho, \nu) \zeta, \zeta \rangle.$$

Le spectre de  $A$  est

$$\sigma(A) = \{\pm \Lambda_a(\rho, \nu), \quad a \in \mathcal{L}\}.$$

L'opérateur Hamiltonien est

$$iJA(\rho, \mu) = \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} -i\Lambda_a(\rho, \nu) & 0 \\ 0 & i\Lambda_a(\rho, \nu) \end{array} \right), a \in \mathcal{L} \right).$$

Le spectre de l'opérateur hamiltonien est donné par

$$\Sigma(iJA) = \{\pm i\Lambda_a(\rho, \nu), \quad a \in \mathcal{L}\}.$$

Étudions à présent la perturbation (4.3.20). En vertu de la Proposition 4.3.15, la perturbation  $f$  est réelle holomorphe et appartient à  $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mathcal{D}, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$ . En utilisant les estimations (4.3.10)-(4.3.12), on a pour  $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  :

$$\begin{aligned} |f| &\leq C\nu\mu^4, \\ \|\nabla_\zeta f\|_\alpha &\leq C\nu\mu^3, \\ |\nabla_\zeta f|_{1/2} &\leq C\nu\mu^3, \\ |\nabla_\zeta^2 f|_{1/2} &\leq C\nu\mu^2, \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante qui dépend de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ , de la masse  $m$  et de la non-linéarité  $g$ . On obtient ainsi :

$$\llbracket f \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq C\nu\mu^4.$$

Regardons à présent  $f^T$ . Rappelons d'abord que :

$$f^T = f(\theta, 0, 0, \rho) + \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho)r + \langle \nabla_\zeta f(\theta, 0, 0, \rho), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\zeta\zeta}^2 f(\theta, 0, 0, \rho) \zeta, \zeta \rangle.$$

On cherche les termes de (4.3.20) qui peuvent contribuer à  $f^T$ . Clairement les deux premiers termes ne contribuent pas à  $f^T$ . Le troisième terme  $Q_4$  est construit sur  $\mathcal{J}_2^c$  et donc ne contribue pas dans  $f^T$ . Regardons à présent  $R_5 \circ \tau$ . D'après 4.3.15,  $R_5 \circ \tau$  est d'ordre 5. De plus  $R_5 \circ \tau$  dépend de la variable action  $I$ , d'ordre 2, de l'angle  $\theta$  et de  $\xi$  et  $\eta$ , qui sont tous d'ordre 1 chacun. Donc  $R_5 \circ \tau$  peut contenir des termes du type :

- $I^{5/2}$  qui contribueront à  $f(\theta, 0, 0, \rho)$  et  $\nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho)$  ;
- $I^2 \xi$  ou  $I^2 \eta$  qui contribueront à  $\nabla_\xi f(\theta, 0, 0, \rho)$  ou  $\nabla_\eta f(\theta, 0, 0, \rho)$  ;
- $I^{3/2} \xi \eta$ ,  $I^{3/2} \xi \xi$ ,  $I^{3/2} \eta \eta$  qui contribueront à  $\nabla_{\xi\eta}^2 f(\theta, 0, 0, \rho)$ ,  $\nabla_{\xi\xi}^2 f(\theta, 0, 0, \rho)$  ou  $\nabla_{\eta\eta}^2 f(\theta, 0, 0, \rho)$ .

Et donc  $R_5 \circ \tau \circ \chi_\rho$  contribue à  $f^T$ . De même pour  $R_6 \circ \chi_\rho$ . On déduit que :

$$\|f^T\|_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq C\nu^{3/2} \mu^5.$$

Pour terminer la preuve du point (iii) du Théorème 4.3.7, il faut étudier la dérivée en  $\rho$  de la perturbation  $f$ , ainsi que son jet. Rappelons que, d'après (4.3.20), la dépendance de la perturbation  $f$  en  $\rho$  provient du changement de variable  $\chi_\rho$  via la relation  $I = \nu\rho + \nu\tilde{r}$ . On peut donc étendre  $f$  de manière holomorphe sur  $\mathcal{D}_c$  avec les mêmes estimations. En appliquant l'estimation de Cauchy sur ce ce domaine on obtient :

$$\|\partial_\rho f\|_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq c^{-1} \|f\|_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2}, \quad \|\partial_\rho f^T\|_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq c^{-1} \|f^T\|_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2}.$$

Donc  $\partial_\rho f$  et  $\partial_\rho f^T$  vérifient les mêmes estimations que  $f$  et  $f^T$ .

### 4.3.7 Passage aux variables réelles

Dans la forme normale (4.3.5), la partie quadratique est exprimée en variables complexes. Cependant le théorème KAM est énoncé en variables réelles. Afin d'y remédier on considère le changement de variable symplectique suivant :

$$\Upsilon(r, \theta, \zeta) = (r, \theta, \check{\zeta}),$$

avec  $\check{\zeta} = (p, q) = (\check{\zeta}_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L})$ . Les variables  $p$  et  $q$  sont définies par :

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s + iq_s), \quad \eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s - iq_s).$$

Sous les hypothèses du Théorème 4.3.7, posons  $\Psi_\rho = \check{\Psi}_\rho \circ \Upsilon$ . Ce changement de variable est réel holomorphe et vérifie :

$$\Psi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left( \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha).$$

Le changement de variable  $\Psi_\rho$  transforme la forme symplectique  $-id\xi \wedge d\eta$  en  $-dr \wedge d\theta - dp \wedge dq$ . Dans les nouvelles variables la forme normale (4.3.5) devient :

$$\begin{aligned} h(r, \theta, \check{\zeta}; \rho) &= H \circ \Psi_\rho \\ &= \Omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a(\rho) (p_a^2 + q_a^2) + f(r, \theta, \check{\zeta}; \rho) \\ &= \Omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{L}} \langle \check{A}(\rho, \nu) \check{\zeta}, \check{\zeta} \rangle + f(r, \theta, \check{\zeta}; \rho), \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

avec

$$\check{A}(\rho, \nu) = \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} \Lambda_a(\rho, \nu) & 0 \\ 0 & \Lambda_a(\rho, \nu) \end{array} \right), a \in \mathcal{L} \right).$$

Dans ces nouvelles variables, la perturbation  $f$  vérifie les mêmes estimations que celle énoncées au troisième point du Théorème 4.3.7.

## 4.4 Théorème KAM pour l'équation des ondes

### 4.4.1 Hypothèses et énoncé du théorème KAM

Dans cette section on rappelle le théorème KAM 4.4.1 et on adapte les notations pour l'équation des ondes non-linéaire cubique sur le cercle.

Considérons un Hamiltonien réel  $h_\rho$  sous forme normale qui dépend d'un paramètre  $\rho$ , donné par :

$$h(r, p, q; \rho) = \Omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a(\rho) (p_a^2 + q_a^2), \quad (4.4.1)$$

avec :

- $\rho \in \mathcal{D}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$  ;
- $\Omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  le vecteur fréquence interne de classe  $C^1$  ;
- $\mathcal{L}$  un ensemble quelconque de  $\mathbb{Z}$  ;
- pour tout  $a \in \mathcal{L}$ ,  $\Lambda_a$  est une fréquence externe de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{D}$ .

Les fréquences internes  $\Omega$  et les fréquences externes  $\Lambda$  vérifient certaines hypothèses qui seront énoncées dans le paragraphe suivant. Pour la suite, on fixe deux paramètres  $0 < \delta_0 \leq \delta \leq 1$ ,  $\mathcal{A}^-$  un ensemble fini de  $\mathcal{L}$ , et  $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L} \setminus \mathcal{A}^-$ .

**Hypothèse A1 : Condition de séparation.** On suppose que, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , on a :

★ pour tout  $a \in \mathcal{L}$ ,

$$\Lambda_a(\rho) \geq c_0 \langle a \rangle. \quad (4.4.2)$$

★ pour tout  $a, b \in \mathcal{L}$  avec  $|a| \neq |b|$ , on a

$$|\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq c_1 ||a| - |b||. \quad (4.4.3)$$

**Hypothèse A2 : Condition de non résonance.** Supposons que pour toute fonction  $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  qui vérifie

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  il existe un vecteur unitaire  $z_k \in \mathbb{R}^p$  et pour tout  $a, b \in \mathcal{L}$  tel que  $|a| > |b|$  on a :

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D},$$

avec  $k \neq 0$ .

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)| \geq \delta \langle a \rangle, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) + \Lambda_b(\rho)| \geq \delta(\langle a \rangle + \langle b \rangle), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) + \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \delta(1 + ||a| - |b||), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}.$$

**Hypothèse A3 : deuxième condition de Melnikov.** On suppose que les fréquences internes et externes vérifient la deuxième condition de Melnikov. C'est-à-dire pour toute fonction  $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  qui vérifie

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

on a :

pour tout  $0 < \kappa < \delta$  et  $N > 1$  il existe un fermé  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  qui vérifie

$$mes(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq C(\delta^{-1}\kappa)^\tau N^\iota; \quad (4.4.4)$$

pour  $\tau, \iota > 0$ , pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , pour tout  $0 < |k| < N$  et pour tout  $a, b \in \mathcal{L}$  avec  $|a| \neq |b|$  on a :

$$|\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \kappa(1 + ||a| - |b||). \quad (4.4.5)$$

À présent, on est en mesure d'énoncer notre théorème KAM :

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $h$  un Hamiltonien défini comme dans (4.4.1) qui vérifie les hypothèses A1, A2 et A3 avec  $\delta$  et  $\delta_0$  fixés pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ . Fixons  $\alpha, \beta > 0$  et  $0 < \sigma, \mu \leq 1$ . Il existe alors un  $\varepsilon_0 > 0$  qui dépend de  $n, \alpha, \beta, \sigma, \mu, |\omega_0|_{C^1(\mathcal{D})}$  et  $|A_0|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$  tel que pour  $j = 0, 1$  on a  $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$  et*

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = \varepsilon < \varepsilon_0 \delta, \quad \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = O(\varepsilon^\tau) \text{ avec } \tau \in [\frac{1}{2}, 1],$$

alors il existe un Borélien  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  avec  $\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq c(\sigma, \delta)\varepsilon^\gamma$  tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  :

- il existe un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi = \Phi_\rho : \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}) \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$$

- il existe un vecteur fréquence interne  $\tilde{\omega}(\rho) \in \mathbb{R}^n$ , une matrice  $A \in \mathcal{M}_\beta$  et une perturbation  $\tilde{f} \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}', \sigma/2, \mu/2)$  tels que :

$$(h_\rho + f) \circ \Phi = \tilde{\omega}(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle + \tilde{f}(\theta, r, \zeta; \rho),$$

avec  $\partial_r \tilde{f} = \partial_\zeta \tilde{f} = \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{f} = 0$  pour  $r = \zeta = 0$ . De plus  $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  est une matrice de  $\mathcal{M}_\beta$  infinie réelle symétrique diagonale par blocs, c'est-à-dire  $A_{[a]}^{[b]} = 0$  si  $[a] \neq [b]$ . Le changement de variable  $\Phi = (\Phi_\theta, \Phi_r, \Phi_\zeta)$  est proche de l'identité, et pour tout  $x \in \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ , on a :

$$\|\Phi - Id\|_\alpha \leq C\varepsilon^{4/5}. \quad (4.4.6)$$

De plus pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$|A(\rho) - A_0(\rho)|_\beta \leq C\varepsilon, \quad |\tilde{\omega}(\rho) - \omega(\rho)|_{C^1(\mathcal{D})} \leq C\varepsilon, \quad (4.4.7)$$

avec  $C$  une constante qui dépend de  $n, \beta, \sigma, \mu, |\omega|_{C^1(\mathcal{D})}$  et de  $|A|_{\beta, C^1(\mathcal{D})}$ .

#### 4.4.2 Vérifications des hypothèses du théorème KAM

##### Non résonance

Dans ce paragraphe, on vérifie que la forme normale réelle (4.3.25) satisfait les hypothèses du Théorème 4.4.1. On commence par vérifier les hypothèses de séparation A1, puis les hypothèses de non résonances A2 et enfin la deuxième condition de Melnikov A3. On commence par vérifier les hypothèses de séparation A1.

**Lemme 4.4.2.** *Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , pour tous  $a, b \in \mathcal{L}$ , on a :*

- (i)  $\Lambda_a(\rho) \geq \langle a \rangle$ ;
- (ii)  $|\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \frac{1}{8} ||a| - |b||$ , avec  $|a| \neq |b|$ .

*Preuve.* Rappelons que, pour  $a \in \mathcal{L}$ , les fréquences externes sont données par :

$$\Lambda_a(\rho) = \lambda_a + \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l} = \lambda_a + \nu \frac{C}{\lambda_a}.$$

L'estimation (i) est alors immédiate. Pour (ii), on remarque que, pour  $\nu$  petit, on a :

$$C\nu \left| \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right| = \frac{C\nu}{\lambda_a \lambda_b} |\lambda_a - \lambda_b| \leq \frac{1}{2} |\lambda_a - \lambda_b|,$$

ainsi on obtient

$$|\Lambda_a - \Lambda_b| \geq \frac{1}{2} |\lambda_a - \lambda_b| \geq \frac{1}{8} ||a| - |b||,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

À présent on va vérifier en trois étapes les hypothèses de non résonance A2. On commence tout d'abord par rappeler des résultats obtenus dans les Propositions 4.2.8 et 4.2.10. Pour  $\kappa = 2\nu^{1/2}$ , on obtient le lemme suivant :

**Lemme 4.4.3.** *pour  $\gamma > 0$  petit,  $|k| \leq \nu^{-\gamma}$  et  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$  on a :*

$$|\omega \cdot k| \geq 2\nu^{1/2},$$

*sauf quand  $k$  est  $D_0$  résonant.*

$$|\omega \cdot k + \lambda_a| \geq 2\nu^{1/2} \langle a \rangle,$$

*sauf quand  $(k, a)$  est  $D_1$  résonant.*

$$|\omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| \geq 2\nu^{1/2} (\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

*sauf quand  $(k, a, b)$  est  $D_2$  résonant.*

$$|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq 2\nu^{1/2} (1 + ||a| - |b||),$$

*avec  $|a| \neq |b|$  et  $(k, a, b)$  n'est pas  $D_3$  résonant.*

**Remarque 4.4.4.** *Dans le lemme précédent, on a appliqué les Propositions 4.2.8 et 4.2.10 avec  $\kappa = 2\nu^{1/2}$ ,  $N = \nu^{-\gamma}$  et  $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$ . On sait que la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{C}$  vérifie :*

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^t,$$

où  $\tau = O(\frac{1}{n})$  et  $\iota = O(n^2)$ . Avec ce choix de paramètres, pour que la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{C}$  reste petite, on peut prendre  $\gamma = O(\frac{1}{n^4})$ .

Maintenant, on va démontrer les hypothèses de non résonance  $A2$  pour des  $k$  petits. Rappelons que les fréquences internes sont données par :

$$\Omega = \omega + \nu M \rho,$$

où  $M$  est la matrice donnée par (4.3.24).  $M$  est symétrique inversible, donc on peut poser  $C_{\mathcal{A}} = \|M^{-1}\|_2$ .

**Lemme 4.4.5.** *Pour  $\gamma > 0$  petit,  $k \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $|k| \leq \nu^{-\gamma}$ ,  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ , posons  $\delta_0 = \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu$ . Alors pour toute fonction  $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  qui vérifie*

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , on a :

$$|\Omega' \cdot k| \geq \nu^{1/2},$$

sauf quand  $k$  est  $D_0$  résonant.

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a| \geq \nu^{2/3}\langle a \rangle,$$

sauf quand  $(k, a)$  est  $D_1$  résonant.

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| \geq \nu^{2/3}(\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

sauf quand  $(k, a, b)$  est  $D_2$  résonant.

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| \geq \nu^{2/3}(1 + ||a| - |b||),$$

avec  $|a| \neq |b|$  et  $(k, a, b)$  n'est pas  $D_3$  résonant.

*Preuve.* Soit  $k \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $|k| \leq \nu^{-\gamma}$  pour  $\gamma > 0$  petit. Commençons par démontrer la première inégalité. Tout d'abord, on a :

$$|\Omega' - \omega| \leq |\Omega' - \Omega| + |\Omega - \omega| \leq \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu + c\nu \leq C\nu.$$

On a donc, pour tout  $a \in \mathcal{A}$

$$|\Omega' - \omega| \leq C\nu\langle a \rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout  $(a, b) \in \mathcal{L}$  :

$$|\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \leq C\nu^{1-\gamma} \leq \nu^{1/2}. \quad (4.4.8)$$

Donc

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| &\leq \nu^{1/2} \langle a \rangle, \\ |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| &\leq \nu^{1/2} (\langle a \rangle + \langle b \rangle), \\ |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| &\leq \nu^{1/2} (1 + ||a| - |b||), \quad |a| \neq |b|. \end{aligned}$$

Pour terminer l'estimation du premier petit diviseur, on utilise le fait que :

$$|\Omega' \cdot k| \geq |\omega \cdot k| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \geq 2\nu^{1/2} - \nu^{1/2} = \nu^{1/2}.$$

Regardons maintenant le deuxième petit diviseur. Remarquons que, pour  $a \in \mathcal{L}$ , on a :

$$|\lambda_a - \Lambda_a| \leq \tilde{c}\nu \langle a \rangle.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a| &\geq |\Omega' \cdot k + \lambda_a| - |\lambda_a - \Lambda_a| \\ &\geq |\omega \cdot k + \lambda_a| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| - |\lambda_a - \Lambda_a| \\ &\geq 2\nu^{1/2} \langle a \rangle - \nu^{1/2} \langle a \rangle - \tilde{c}\nu \langle a \rangle \geq \nu^{2/3} \langle a \rangle. \end{aligned}$$

Étudions à présent le troisième petit diviseur. Pour  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| &\geq |\Omega' \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| - |\lambda_a - \Lambda_b| - |\lambda_b - \Lambda_a| \\ &\geq |\omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| - |\lambda_a - \Lambda_a| - |\lambda_b - \Lambda_b| \\ &\geq (2\nu^{1/2} - \nu^{1/2} - 2\tilde{c}\nu)(\langle a \rangle + \langle b \rangle) \geq \nu^{2/3}(\langle a \rangle + \langle b \rangle). \end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'estimation du dernier petit diviseur. Grâce à (4.3.23), on remarque, que pour tout  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$  tel que  $|a| \neq |b|$ , on a :

$$\begin{aligned} |\Lambda_a - \Lambda_b - (\lambda_a - \lambda_b)| &\leq \tilde{c}\nu \left| \lambda_a^{-1} - \lambda_b^{-1} \right| \\ &= \tilde{c}\nu \frac{|a + b| |ab|}{(\lambda_a + \lambda_b) \lambda_a \lambda_b} \\ &\leq \tilde{c}\nu (1 + ||a| - |b||). \end{aligned}$$

Ceci nous donne que :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| &\geq |\Omega' \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| - |\Lambda_a - \Lambda_b - (\lambda_a - \lambda_b)| \\ &\geq |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| - |\Lambda_a - \Lambda_b - (\lambda_a - \lambda_b)| \\ &\geq (2\nu^{1/2} - \nu^{1/2} - \tilde{c}\nu)(1 + \|a\| - \|b\|) \geq \nu^{2/3}(1 + \|a\| - \|b\|). \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve.  $\square$

Ainsi on a vérifié les hypothèses de non résonance pour  $|k| \leq \nu^{-\gamma}$ ,  $\delta_0 = \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu$  et  $\delta = \nu^{2/3}$ . Pour  $k$  grand, c'est-à-dire  $|k| > \nu^{-\gamma}$ , on montre les conditions de séparation A2 sur les dérivées en  $\rho$  des petits diviseurs. Plus précisément on a :

**Lemme 4.4.6.** *Pour  $\gamma > 0$  petit,  $k \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $|k| > \nu^{-\gamma}$ ,  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ , posons  $\delta_0 = \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu$ . Alors pour toute fonction  $\Omega' \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  qui vérifie*

$$|\Omega - \Omega'|_{C^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

il existe un vecteur unitaire  $z_k$  tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$  on a :

- (i)  $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| \geq C\nu^{1-\gamma} \geq \nu$ ,
- (ii)  $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu$  pour tout  $a \in \mathcal{L}$ ,
- (iii)  $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) + \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu$  pour tout  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ ,
- (iv)  $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu$  pour tout  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ .

la constante  $C$  dépend de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ .

*Preuve.* Commençons par prouver (i). Remarquons tout d'abord que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle = \langle \partial_\rho(k \cdot \Omega(\rho)), z_k \rangle + \langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)) - k \cdot \Omega(\rho), z_k \rangle.$$

Or

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)) - k \cdot \Omega(\rho), z_k \rangle| \leq \frac{1}{2}|k|C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu.$$

Rappelons que la matrice  $M$  est symétrique et que  $|k| > \nu^{-\gamma}$ . En choisissant  $z_k = \frac{Mk}{|Mk|}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| &\geq \nu \left| \left\langle Mk, \frac{Mk}{|Mk|} \right\rangle \right| - |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)) - k \cdot \Omega(\rho), z_k \rangle| \\ &= \nu |Mk| - \frac{1}{2}|k|C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu \\ &\geq \nu \left( C_{\mathcal{A}}^{-1} - \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1} \right) |k| \\ &\geq \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu^{1-\gamma} \geq \nu. \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à (ii). Pour  $a, l \in \mathcal{L}$ , on a :

$$|\partial_{\rho_l} \Lambda_a(\rho)| = \left| \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a \lambda_l} \right| \leq c\nu.$$

Donc, pour le même vecteur  $z_k$  unitaire que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)), z_k \rangle| &\geq |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| - |\partial_\rho(\Lambda_a(\rho))| |z_k| \\ &\geq \frac{1}{2} C_{\mathcal{A}}^{-1} \nu^{1-\gamma} - c'\nu \geq \nu. \end{aligned}$$

En appliquant le même principe pour (iii) et (iv), on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) \pm \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| &\geq |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| - |\partial_\rho(\Lambda_a(\rho))| |z_k| \\ &\quad - |\partial_\rho(\Lambda_b(\rho))| |z_k| \\ &\geq \frac{1}{2} C_{\mathcal{A}}^{-1} \nu^{1-\gamma} - 2c'\nu \geq \nu. \end{aligned}$$

□

Pour terminer la vérification des conditions de non résonance, il reste à regarder les cas où  $(k, a)$  est  $D_1$  résonant et  $(k, a, b)$  est  $D_2$  ou  $D_3$  résonant.

**Lemme 4.4.7.** *Soient  $k \in \mathbb{Z}^n$  et  $(a, b) \in \mathcal{L}^2$  et  $\varepsilon > 0$  petit. Posons  $\delta_0 = \frac{1}{4} C_{\mathcal{A}} \nu^{1+\varepsilon}$ , avec  $C_{\mathcal{A}}$  constante qui dépend de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}$ . Alors pour toute fonction  $\Omega' \in \mathcal{C}^1([1, 2]^n, \mathbb{R}^n)$  qui vérifie*

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

*il existe un fermé  $\mathcal{D} \subset [1, 2]^n$  qui vérifie*

$$\text{mes}([1, 2]^n \setminus \mathcal{D}) \leq C_{\mathcal{A}} \nu^{\varepsilon+n},$$

*tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$  on a :*

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a| \geq C_{\mathcal{A}} \nu^{1+\varepsilon} \langle a \rangle,$$

*si  $(k, a)$  est  $D_1$  résonant ;*

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| \geq C_{\mathcal{A}} \nu^{1+\varepsilon} (\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

*si  $(k, a, b)$  est  $D_2$  résonant ;*

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| \geq C_{\mathcal{A}} \nu^{1+\varepsilon} (1 + ||a| - |b||),$$

*avec  $|a| \neq |b|$  et  $(k, a, b)$  est  $D_3$  résonant.*

*Preuve.* Pour  $a \in \mathcal{A}$ , rappelons que, d'après (4.3.22) et (4.3.23),

$$\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a = \nu \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{2 - 3\delta_{l,a}}{\lambda_l} \rho_l := \nu(\tilde{M}\rho)_a,$$

avec  $\tilde{M}_k^l = \frac{3}{2\pi} \frac{2 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_k \lambda_l}$ . Supposons que  $(k, a)$  est  $D_1$  résonant. On obtient donc

$$\Omega' \cdot k + \Lambda_a = (\Omega'_a - \Omega_a) - \nu(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a)$$

Pour  $\varepsilon > 0$  petit on pose

$$J_{\varepsilon,a} = \{\rho \in [1, 2]^n \mid |(\tilde{M}\rho)_a| < C_{\mathcal{A}}\nu^{\varepsilon}\}.$$

La mesure de Lebesgue de  $J_{\varepsilon,a}$  vérifie :

$$\text{mes}(J_{\varepsilon,a}) \leq C_{\mathcal{A}}\nu^{\varepsilon}.$$

Posons  $\mathcal{D}_1 = [1, 2]^n \setminus (\cup_{a \in \mathcal{A}} J_{\varepsilon,a})$ . Ainsi  $\text{mes}([1, 2]^n \setminus \mathcal{D}_1) \leq C_{\mathcal{A}}\nu^{\varepsilon}$ , et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_1$  on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a| &\geq C_{\mathcal{A}}\nu^{1+\varepsilon} - \delta_0 \\ &\geq C_{\mathcal{A}}\nu^{1+\varepsilon} \langle a \rangle. \end{aligned}$$

Étudions à présent le cas où  $(k, a, b)$  est  $D_2$  résonant. Remarquons que :

$$(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) + (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b) = \nu((\tilde{M}\rho)_a + (\tilde{M}\rho)_b).$$

Posons

$$J_{\varepsilon,a,b} = \{\rho \in [1, 2]^n \mid |(\tilde{M}\rho)_a + (\tilde{M}\rho)_b| < C_{\mathcal{A}}\nu^{\varepsilon}\}.$$

La mesure de Lebesgue de  $J_{\varepsilon,a,b}$  vérifie :

$$\text{mes}(J_{\varepsilon,a,b}) \leq C_{\mathcal{A}}\nu^{\varepsilon+n}.$$

Posons  $\mathcal{D}_2 = [1, 2]^n \setminus (\cup_{(a,b) \in \mathcal{A}^2} J_{\varepsilon,a,b})$ . Ainsi  $\text{mes}([1, 2]^n \setminus \mathcal{D}_2) \leq C_{\mathcal{A}}\nu^{\varepsilon+n}$ , et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_2$  on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| &= |(\Omega' - \Omega) \cdot k - \nu((\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) + (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b))| \\ &\geq \nu|(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) + (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b)| - 2|\Omega' - \Omega| \\ &\geq C_{\mathcal{A}}\nu(\langle a \rangle + \langle b \rangle). \end{aligned}$$

Il reste à regarder le dernier petit diviseur dans le cas où  $(k, a, b)$  est  $D_3$  résonant. Remarquons

que :

$$(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) - (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b) = \nu((\tilde{M}\rho)_a - (\tilde{M}\rho)_b).$$

Posons

$$F_{\mathcal{E},a,b} = \{\rho \in [1, 2]^n \mid |(\tilde{M}\rho)_a - (\tilde{M}\rho)_b| < C_{\mathcal{A}}\nu^{\mathcal{E}}\}.$$

La mesure de Lebesgue de  $J_{\mathcal{E},a,b}$  vérifie :

$$\text{mes}(F_{\mathcal{E},a,b}) \leq C_{\mathcal{A}}\nu^{\mathcal{E}+n}.$$

Posons  $\mathcal{D}_3 = [1, 2]^n \setminus (\cup_{(a,b) \in \mathcal{A}^2} F_{\mathcal{E},a,b})$ . Ainsi  $\text{mes}([1, 2]^n \setminus \mathcal{D}_3) \leq C_{\mathcal{A}}\nu^{\mathcal{E}+n}$ , et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}_3$  on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| &= |k \cdot (\Omega' - \Omega) - \nu((\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) - (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b))| \\ &\geq \nu|(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) - (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b)| - 2|\Omega' - \Omega| \\ &\geq C_{\mathcal{A}}\nu(1 + ||a| - |b||). \end{aligned}$$

On termine la preuve en posant  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$ . □

Vérifions maintenant la seconde condition de Melnikov. Rappelons que  $n = \text{Card}(\mathcal{A})$ .

**Lemme 4.4.8.** *Pour  $\delta = \nu$ ,  $\delta_0 \leq \delta$ ,  $\tau = \frac{1}{3}$  et  $\iota = n + \frac{3}{2} + \frac{2}{3\gamma}$ , la deuxième condition de Melnikov est vérifiée.*

*Preuve.* Soient  $\gamma > 0$  petit et  $N \geq 0$ . Si  $N \leq \nu^{-\gamma}$ , alors, d'après le Lemme 4.4.5, la deuxième condition de Melnikov est vérifiée pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ . Si  $N > \nu^{-\gamma}$ , alors d'après le Lemme 4.4.5 pour  $|k| \leq \nu^{-\gamma}$  la deuxième condition de Melnikov est vérifiée pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ . Supposons à présent que  $|k| > \nu^{-\gamma}$ , alors d'après le Lemme 4.4.6 il existe un vecteur unitaire  $z_k$  tel que :

$$|\langle \partial_{\rho}(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu.$$

Pour  $0 < \kappa < \nu$ , posons

$$J(k, a, b) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| < \kappa\}.$$

On a

$$\text{mes } J(k, a, b) \leq C\kappa\nu^{-1},$$

avec  $C$  une constante qui dépend de la taille de  $\mathcal{D}$ . Pour un entier relatif  $p$  et  $k \in \mathcal{Z}^n$ , on pose

$$W(k, p) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |\Omega' \cdot k + p| < 5\kappa^{1/3}\},$$

on a alors d'après (i) du Lemme 4.4.6

$$\text{mes } W(k, p) \leq C\kappa^{1/3}\nu^{-1},$$

avec  $C$  une constante qui dépend de la taille de  $\mathcal{D}$ . Posons

$$W = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |\Omega' \cdot k + p| < 5\kappa^{1/3}\}.$$

Remarquons que le fait que  $|\Omega' \cdot k + p| < 5\kappa^{1/3}$  avec  $|k| < N$ , nous donne que  $|p| \leq C|k| < CN$ .

Donc

$$\text{mes}(W) \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| < CN}} W(k, p) \leq CN^{n+1}\kappa^{1/3}\nu^{-1}.$$

Pour  $a \in \mathcal{L}$ , rappelons que  $\Lambda_a(\rho) = \lambda_a + \nu C(\rho)\lambda_a^{-1}$ . Pour  $\nu$  petit et pour tout  $\rho \in \mathcal{D}$ , on a :

$$|\Lambda_a(\rho) - |a|| = \left| \lambda_a(\rho) - |a| + \nu \frac{C(\rho)}{\lambda_a} \right| = \left| \frac{m}{\lambda_a + |a|} + \nu \frac{C(\rho)}{\lambda_a} \right| \leq \frac{2}{|a|}.$$

Si  $|a| > |b| > \kappa^{-1/3}$ , on a :

$$|\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho) - (|a| - |b|)| \leq \frac{4}{|b|} \leq 4\kappa^{1/3}.$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D} \setminus W$  et si  $|a| > |b| > \kappa^{-\alpha}$  on obtient :

$$\begin{aligned} |k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| &\geq |k \cdot \Omega'(\rho) + (|a| - |b|)| - |\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho) - (|a| - |b|)| \\ &\geq 5\kappa^{1/3} - 4\kappa^{1/3} = \kappa^{1/3}. \end{aligned}$$

Il reste à regarder les cas où  $|a| \leq \kappa^{-1/3}$  ou  $|b| \leq \kappa^{-1/3}$ , et où il existe  $k \in \mathbb{Z}^n$  tel que :

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| < 1,$$

avec  $\nu^{-\gamma} < |k| < N$ . On obtient ainsi  $||a| - |b|| \leq CN$ . Posons :

$$\mathcal{Q} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \min(|a|, |b|) \leq \kappa^{-1/3} \text{ et } ||a| - |b|| \leq CN \right\}.$$

On a :

$$\text{Card}(\mathcal{Q}) \leq CN\kappa^{-2/3}.$$

Posons

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \left( W \bigcup_{\substack{|k| \leq N \\ (a, b) \in \mathcal{Q}}} (J(k, a, b)) \right).$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \kappa.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') &\leq \text{mes}(W) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \sum_{(a,b) \in \mathcal{Q}} \text{mes} J(k, a, b) \\ &\leq CN^{n+1} \kappa^{1/3} \nu^{-1} + CN^n N \kappa^{-2/3} \kappa \nu^{-1} \\ &\leq CN^{n+1} (\kappa \nu^{-1})^{1/3}. \end{aligned}$$

Or  $N > \nu^{-\gamma}$ . Ce qui donne

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq CN^{n+1+2/3\gamma} \nu^{-2/3} (\kappa \nu^{-1})^{1/3}.$$

À présent il reste à montrer que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$  on a :

$$|\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \kappa(1 + |a| - |b|).$$

Établissons cette estimation suivant l'ordre de grandeur de la différence de  $\|a\| - \|b\|$ . Supposons en premier lieu que  $\|a\| - \|b\| \geq 16|\Omega' \cdot k|$ . On obtient, en utilisant la deuxième condition de séparation du Lemme 4.4.2, que :

$$\begin{aligned} |\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| &\geq |\Lambda_a - \Lambda_b| - |\Omega' \cdot k| \\ &\geq \frac{1}{16} \|a\| - \|b\| \geq \frac{1}{32} (1 + \|a\| - \|b\|) \\ &\geq \kappa(1 + \|a\| - \|b\|), \end{aligned}$$

pour  $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{32}$  et tout  $\rho \in \mathcal{D}$ .

Supposons, dans un deuxième temps, que  $\|a\| - \|b\| < 16|\Omega' \cdot k| < 16C_{\mathcal{A}}N$ . Alors, pour tout  $\rho \in \mathcal{D}'$ ,  $0 < |k| < N$  et  $a, b \in \mathcal{L}$  avec  $|a| \neq |b|$ , on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| &\geq \frac{\kappa}{1 + 16C_{\mathcal{A}}N} (1 + |a| - |b|) \\ &\geq \tilde{\kappa} (1 + |a| - |b|), \end{aligned}$$

avec

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq CN^{n+3/2+2/3\gamma} \left( \tilde{\kappa} \nu^{-7/5} \right)^{1/2}.$$

□

Ce qui termine la vérification des hypothèses faites sur les fréquences.

#### Application du Théorème 4.4.1

En vertu des lemmes 4.4.2-4.4.8, les conditions de séparation, de non résonance et la deuxième condition de Melnikov sont vérifiées pour  $\delta = \nu^{1+\varepsilon}$  et  $\delta_0 \leq C_{\mathcal{A}} \nu^{1+\varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$  petit. D'après le

Théorème 4.3.7, on a pour  $0 < \mu \leq 1$  :

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa} \leq 2C\nu^{3/2}. \quad (4.4.9)$$

De plus, on a :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa} = O\left(\left(\llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa}\right)^{2/3}\right).$$

Or, pour appliquer le Théorème 4.4.1, il faut que :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \gamma, \kappa} \ll \delta = \nu^{1+\varepsilon}$$

et

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \gamma, \kappa} = O\left(\left(\llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa}\right)^\tau\right), \text{ avec } \tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Ces deux dernières conditions sont bien vérifiées. On peut donc appliquer le Théorème 4.4.1.

## 4.5 Preuve du Théorème 4.1.3

À présent, on a tous les outils nécessaires pour démontrer le Théorème 4.1.3. Pour  $m \in \mathcal{U}$  et  $\rho \in (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}')$  avec  $\mathcal{D}'$  est l'intersection des des ensembles des paramètres définies dans les Lemmes 4.4.8-4.4.7, on pose :

$$\Pi_\rho = \Psi_\rho \circ \Phi_\rho = \tau \circ \chi_\rho \circ \Upsilon \circ \Phi_\rho,$$

avec

- $\tau$  le changement de variable de Birkhoff construit dans la Proposition 4.3.15.
- $\chi_\rho$  le re-scaling construit dans 4.3.17 ;
- $\Upsilon$  le passage vers les variables réelles ;
- $\Phi_\rho$  le changement de variable construit dans le théorème KAM 4.4.1.

On a donc que  $\Pi_\rho$  est un changement de variable symplectique réel holomorphe

$$\Pi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left( \frac{\sigma}{4}, \frac{\mu}{4} \right) \rightarrow \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha),$$

qui transforme l'hamiltonien perturbé (4.1.5) en :

$$H \circ \Pi_\rho = \omega'(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle + \tilde{f}(\theta, r, \zeta; \rho).$$

où  $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  est une matrice infinie dans  $\mathcal{M}_\beta$  réelle symétrique diagonale par blocs c'est-à-dire  $A_{[a]}^{[b]} = 0$  si  $[a] \neq [b]$ . De plus  $\partial_r \tilde{f} = \partial_\zeta \tilde{f} = \partial_{\zeta \zeta}^2 \tilde{f} = 0$  pour  $r = \zeta = 0$ . D'après (4.3.24)

et (4.4.7), les fréquences internes sont données par :

$$\omega' = \omega + \nu M\rho + O(\nu^{3/2}).$$

Pour ce qui suit on pose  $I = \nu\rho$  et  $\mathcal{D} = [\nu, 2\nu]^n$ . Ainsi, pour  $m \in \mathcal{U}$ , il existe un Borélien  $\mathcal{D}' \subset [\nu, 2\nu]^n$  tel que :

$$\text{mes}([\nu, 2\nu]^n \setminus \mathcal{D}') \leq 2\nu^{n+\gamma},$$

avec  $\gamma$  strictement positif et dépendant de  $n$ . Pour  $X = (\theta, r, \zeta)$ , on note  $[X]_\alpha = \left( \sum_{a \in \mathcal{A}} |r_a e^{2i\theta_a}| \right)^{1/2} + \|\zeta\|_\alpha$ . Soit  $X \in \mathbb{T}^n \times \{I\} \times \{0\}$ . Alors  $\chi_\rho \circ \Upsilon(X) \in \mathfrak{F}_\rho(\nu, [X]_\alpha, \alpha)$ , et on a :

$$\text{dist}_\alpha(\chi_\rho \circ \Upsilon(X), X) \leq 2\nu^{1/2}[X]_\alpha \leq 4\nu^{3/2}.$$

Grâce à (4.3.8), on obtient

$$\text{dist}_\alpha(\tau \circ \chi_\rho \circ \Upsilon(X), X) \leq \nu^{3/2} + \text{dist}_\alpha(\chi_\rho \circ \Upsilon(X), X) \leq 5\nu^{3/2}.$$

Il s'ensuit, grâce à (4.4.6) et (4.4.9), que

$$\text{dist}_\alpha(\Pi_\rho(X), X) \leq C\nu^{4/5},$$

avec  $C$  une constante absolue. Pour  $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$  et  $I \in \mathcal{D}'$ , posons  $(\tilde{\theta}, \tilde{I}, \tilde{\zeta}) = \Pi^{-1}(X)$ ; et soit :

$$u(\tilde{\theta}, \tilde{I}, x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{\tilde{I}_a} \frac{e^{-i\tilde{\theta}_a} \varphi_a(x) + e^{i\tilde{\theta}_a} \varphi_{-a}(x)}{\sqrt{2}\omega^{1/4}}.$$

Alors la fonction

$$t \mapsto u(\tilde{\theta} + t\omega', \tilde{I}, x)$$

est solution quasi-périodique de l'équation des ondes (4.1.1).

Posons  $\zeta_{I,\theta} = (\xi_{I,\theta}, \eta_{I,\theta})$  avec

$$\begin{aligned} (\xi_{I,\theta})_a &= \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, & (\eta_{I,\theta})_a &= \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}, & \text{si } a \in \mathcal{A}, \\ (\xi_{I,\theta})_s &= (\eta_{I,\theta})_s = 0, & & & \text{si } s \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\sup_{\theta_0 \in \mathbb{T}^n} \|u(\theta_0, I, \cdot) - u_{I,m}(\theta_0, \cdot)\|_{H^\alpha} \leq \|\Pi_\rho(X) - \zeta_{I,\theta}\|_\alpha \leq C\nu^{4/5}.$$

# Bibliographie

- [1] ARNOLD, V. *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science & Business Media, 1989. 16
- [2] ARNOLD, V. I. Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russian Mathematical Surveys* 18, 5 (1963), 9–36. 13
- [3] ARNOLD, V. I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys* 18, 6 (1963), 85–191. 13
- [4] BAMBUSI, D. Nekhoroshev theorem for small amplitude solutions in nonlinear Schrödinger equations. *Mathematische Zeitschrift* 230, 2 (1999), 345–387. 145
- [5] BAMBUSI, D. Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs. *Communications in mathematical physics* 234, 2 (2003), 253–285. 145
- [6] BAMBUSI, D., AND GRÉBERT, B. Birkhoff normal form for partial differential equations with tame modulus. *Duke Mathematical Journal* 135, 3 (2006), 507–567. 145
- [7] BENETTIN, G., GALGANI, L., AND GIORGILLI, A. A proof of Nekhoroshev’s theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics* 37, 1 (1985), 1–25. 146
- [8] BERTI, M., BIASCO, L., AND PROCESI, M. KAM theory for the Hamiltonian derivative wave equation. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 46, 2 (2013), 301–373 (2013). 21, 140
- [9] CHIERCHIA, L., AND YOU, J. KAM tori for 1D nonlinear wave equations with periodic boundary conditions. *Comm. Math. Phys.* 211, 2 (2000), 497–525. 14, 20, 140
- [10] CRAIG, W. *Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles*, vol. 9 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. 19
- [11] DUMAS, H. S. *The KAM story*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014. A friendly introduction to the content, history, and significance of classical Kolmogorov-Arnold-Moser theory. 13

- [12] ELIASSON, L., H., GRÉBERT, B., AND KUKSIN, S., B. KAM for the non-linear Beam equation 2 : A normal form theorem. preprint, 2015. 14
- [13] ELIASSON, L., H., GRÉBERT, B., AND KUKSIN, S., B. KAM for the nonlinear beam equation 1 : small-amplitude solutions. preprint, 2015. 14
- [14] ELIASSON, L., AND KUKSIN, S. KAM for the nonlinear Schrödinger equation. *Annals of Mathematics* 172 (2010), 371–435. 14, 47, 71, 102
- [15] ELIASSON, L. H. Perturbations of stable invariant tori for hamiltonian systems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* 15, 1 (1988), 115–147. 27
- [16] ELIASSON, L. H., GRÉBERT, B., AND KUKSIN, S. B. Kam for the nonlinear beam equation, 2016. 71
- [17] GRÉBERT, B., AND PATUREL, E. KAM for the Klein Gordon equation on  $\mathbb{S}^d$ . preprint, Jan. 2016. 14, 71
- [18] GRÉBERT, B., AND THOMANN, L. KAM for the quantum harmonic oscillator. *Comm. Math. Phys.* 307, 2 (2011), 383–427. 14
- [19] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*, vol. 132. Springer Science & Business Media, 1995. 103
- [20] KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton’s function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 98 (1954), 527–530. 13
- [21] KUKSIN, S., B., AND PÖSCHEL, J. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math. (2)* 143, 1 (1996), 149–179. 13
- [22] KUKSIN, S., B., AND POSCHEL, J. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrodinger equation. *Annals of Mathematics* (1996), 149–179. 14, 169
- [23] KUKSIN, S. B. Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with imaginary spectrum. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 21, 3 (1987), 22–37, 95. 13, 140
- [24] KUKSIN, S. B. Perturbation of quasiperiodic solutions of infinite-dimensional hamiltonian systems. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 32, 1 (1989), 39. 13, 140
- [25] KUKSIN, S. B. A KAM-Theorem For Equations Of The Korteweg-De Vries Type. 13
- [26] MÖSER, J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II* (1962), 1–20. 13
- [27] PÖSCHEL, J. On elliptic lower dimensional tori in hamiltonian systems. *Mathematische Zeitschrift* 202, 4 (1989), 559–608. 27
- [28] PÖSCHEL, J. Quasi-periodic solutions for a nonlinear wave equation. *Comment. Math. Helv.* 71, 2 (1996), 269–296. 13, 14, 20, 140

- [29] PÖSCHEL, J. A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* 23, 1 (1996), 119–148. 13, 159
- [30] VILLANI, C. *Théorème vivant*. Grasset, 2012. 13
- [31] WAYNE, C. E. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory. *Comm. Math. Phys.* 127, 3 (1990), 479–528. 12, 13, 20, 140
- [32] XU, J., YOU, J., AND QIU, Q. Invariant tori for nearly integrable Hamiltonian systems with degeneracy. *Mathematische Zeitschrift* 226, 3 (1997), 375–387. 148
- [33] YOU, J. Perturbations of lower dimensional tori for hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations* 152, 1 (1999), 1 – 29. 27





# Thèse de Doctorat

Moudhaffar BOUTHELJA

Théorème KAM pour l'équation des ondes non-linéaire

KAM theorem for the nonlinear wave equation

## Résumé

Dans cette thèse on considère l'équation des ondes non-linéaire sur le cercle donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T}, \quad (*)$$

avec  $m \in [1, 2]$  une masse et  $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$ . Cette équation va être traitée comme une perturbation d'un hamiltonien intégrable donné par :

$$u_t = v, \quad v_t = -u_{xx} + mu.$$

Proche de l'origine, on prouve l'existence de solutions quasi-périodiques de faible amplitude, proches de la solution de l'équation linéaire  $(*)_{g=0}$ . Pour la preuve, on démontre d'abord un théorème KAM en dimension infinie puis on utilise une forme normale de Birkhoff.

## Mots clés

Équations aux dérivées partielles Hamiltoniennes, Dynamique des systèmes Hamiltoniens, Théorie KAM, Forme normale de Birkhoff, Équation des ondes non linéaire, Petits diviseurs, Tores invariants.

## Abstract

In this PhD thesis we prove a KAM result for the nonlinear wave equation on the circle

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T}, \quad (*)$$

where  $m \in [1, 2]$  is a mass and  $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$ . This equation will be treated as a perturbation of an integrable hamiltonian system given by :

$$u_t = v, \quad v_t = -u_{xx} + mu.$$

We show that for generic  $m$  many of the small amplitude invariant finite dimensional tori of the linear equation  $(*)_{g=0}$  persist as invariant tori of the linear equation  $(*)$ . The proof uses an abstract KAM theorem and a normal Birkhoff form.

## Key Words

Hamiltonian PDEs, KAM theory, Birkhoff normal form, Nonlinear wave equation, Small divisors, Invariant tori.